УЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА УРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

КАРШИ МУХАНДИСЛИК ИКТИСОДИЁТ ИНСТИТУТИ

ФИЗИКА ВА ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

(Чизикли алгебра ва аналитик геометрия)

(маърузалар матни)

КАРШИ – 2004 йил.

Ушбу маърузалар матнлари туплами 5540700-Агроинженерия, 5540900-сув хужалиги ва мелиорация, 5621500-ер тузиш ва ер кадастри йуналишлари I-курс талабалари учун кадрлар тайёрлаш миллий дастури талабларидан келиб чикиб тайёрланди. Туплам Олий математика фанидан намунавий дастур асосида 18 соатлик «Чизикли алгебра ва аналитик геометрия» булимлари буйича тузилди.

Тузувчи: ф.м.ф.н., доцент Н.Жураев

Такризчилар: ф.м.ф.н.,доцент Э.Холмуродов

ф.м.ф.н. КДУ доценти Ж.Орамов

Ушбу маърузалар матнлари туплами «Физика ва Олий математика» кафедраси йигилиши (1 июнь 2004 йил № 10) да, Касб таълими факультети услубий комиссияси ( )да ва Институт услубий кенгаши ( )да куриб чикилиб чоп этишга тавсия этилган.

Аннотация

Ушбу маърузалар матнлари туплами 5540700- Агроинженерия, 5541000-фермер хужалигини ташкил этиш ва унинг техник сервиси, 5620700-ер тузиш ва ер кадастри йуналишлари 1-курс талабалари учун Олий математика фанидан намунави ва ишчи дастур асосида 18 соатлик “Чизикли алгебра ва аналитик геометрия” булимлари буйича тузилди.

Аннотация

Данный сборник текс лекций составлен на основе типовой и рабочей программы курса “Высшей математики” “Линейная алгебра и аналитическая геометрия” предназначен для студентов I-курса, обучающихся по направлениям 5540700-Агроинженерия, 5541000-Организация фермерского хазяйства и оказание ему сервися, 5620700-Землеустройство и земельный кадастр

Annotation

I – боб. Чизикли алгебра элементлари

Маълумки, Олий математиканинг алгебра булими асосан тенглама ва тенгламалар системаларини ечиш билан шугулланади. Ушбу бобда чизикли тенгламалар системасини ечишнинг айрим усулларини караймиз, бунда **детерминант** ва **матрица** тушунчалари мухим рол уйнайди.

Детерминант (лотинча -determinant) терминининг хозирги маъносини 1815 йил француз математиги О. Коши киритган. Аммо, чизикли тенгламалар системасини ечишда уни математик курол сифатида биринчи булиб 1643 йилда Г.Лейбниц куллаган. XVII асрга келиб, Г.Лейбницнинг натижаларини швецариялик математик Г.Крамер такрорлади ва тарихга чизикли тенгламалар системасини ечишнинг «**Крамер коидаси**» номи билан киритилди.

1-маъруза. Детерминантлар ва уларнинг хоссалари.

Р е ж а:

1. *Иккинчи тартибли детерминант*
2. *Учинчи тартибли детерминант*
3. *Детерминантнинг асосий хоссалари.*
4. *Минор ва алгебраик тулдирувчи.*

Адабиётлар: 1,2,3,4.

Таянч иборалар: Детерминат, элемент, сатр, устун, минор, алгебраик тулдирувчи.

1.1- Иккинчи тартибли детерминант

1-таъриф. Туртта a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлардан тузилган $\Delta = a_{11}\ a_{12}$ - $a_{21}\ a_{22}$ ифода **иккинчи тартибли детерминант** дейилади ва

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

каби белгиланади.

Демак, таърифга кура,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12} \qquad \textbf{(1.1.)}$$

Детерминантни ташкил килувчи a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар детерминантнинг **элементлари** дейилади; улар иккита **сатр** (катор) ва иккита **устун**да жойлашган булиб, элементларнинг индексидаги биринчи ракам шу элемент турган сатр тартибини, иккинчиси эса устун тартибини билдиради.

a_{11}, a_{22} элементлар детерминантнинг **бош** диагоналини, a_{21} ва a_{12} элемент эса **ёрдамчи** диоганалини ташкил этади.

Демак, иккинчи тартибли детерминант мос равишда бош ва ёрдамчи диоганаллар элементлари купайтмаларининг айирмасига тенг.

Мисоллар.1 . $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3.5 - 2.4 = 7$;

2. $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.7 - 3.(-2) = 6$

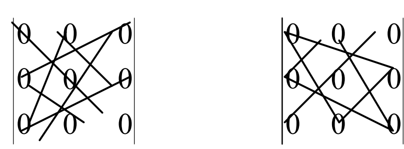
<u>2. Учинчи тартибли детерминант.</u>

2-таъриф. Учинчи тартибли детерминант деб.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

тенглик билан аникланган сонга айтилади, бу ерда a_{ij} (ij=1, 2, 3)-элементлар, улар туккизта булиб, учта сатр ва учта устунда жойлашган.

Учинчи тартибли детерминантни хисоблашни хотирада саклаб колиш учун куйидаги учбурчак коидасидан фойдаланиш мумкин.
(1-чизма):



3. Мисол. Детерминантни хисобланг.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 3.1.(-6)+2(-2).5+1.4.0-1.1..5-2.4(-6)-3(-2).0=5$$

1.3.<u>Детерминантнинг хоссалари.</u>

Бу хоссаларни кулайлик учун иккинчи тартибли детерминант учун келтирамиз.

1^o. Агар детерминантнинг сатр (устун) элементларини, мос устун (сатр) элементлари билан алмаштирилса, унинг киймати узгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2^o. Детерминантнинг иккита сатри (устун) мос элементлари уринлари алмаштирилса унинг ишораси узгаради, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3^o. Детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) элементларини к сонга купайтириш, детерменантни уни шу сонга купайтириш билан тенг кучлидир.

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & \kappa a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{к} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4^o. . Детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларига бошка сатр (устун) мос элементларини исталган λ сонга купайтириб кушилса, унинг киймати узгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} \cdot & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5^o. Детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементлари ноллардан иборат булса, унинг киймати нолга тенг.

6^o. Детерминантнинг икки сатри (ёки устуни) мос элементлари тенг булса, унинг киймати нолга тенг.

1.4. Минор ва алгебраик тулдирувчи

Детерминант a_{ij} элементининг M_{ij} **минори** деб, шу элемент турган сатр ва устунни учиришдан хосил булган детерминантга айтилади. Масалан,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.2)$$

детерминант a_{11} элементининг минори

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a_{23} элементнинг минори эса

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Равшанки, 3-тартибли детерминантнинг туккизта элементи бор. Демак минорлар хам туккизта булади.

a_{ij} элементнинг A_{ij} **алгебраик тулдирувчиси** деб

$$\mathbf{A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}} \qquad \mathbf{(1.3)}$$

сонга айтилади. Масалан,

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Куриниб турибдики, минор ва алгебраик тулдирувчи купи билан ишорага фарк килар экан.

<u>Теорема.</u> Детерминантнинг киймати унинг бирор сатр (устун) элементлари билан мос алгебраик тулдирувчилари купайтмалари йигиндисига тенг.

<u>Исбот.</u> (1.2) нинг унг томонини куйидагича ёзиб оламиз:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

У холда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (1.4)$$

(1.4) формула детерминантни биринчи сатр элементлари буйича ёйилмаси дейилади.

Шундай килиб,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

(1.4) ёки (1.5) га ухшаш формулаларни исталган сатр ёки устун буйича ёзиш мумкин. Масалан биринчи устун буйича ёйилма

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ каби булади.

<u>Мисол.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ детерминантни хисобланг.

<u>Ечиш.</u> Детерминантни хисоблашда нол элемент катнашган сатр ёки устун буйича ёйиш кулайдир. Шунинг учун детерминантни биринчи сатр буйича ёйиб, хисоблаймиз:

$\Delta = 2.\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.\ (12+1)+1.(-9-4)=1$

Изох. Юкори тартибли детерминантларни хисоблаш бирмунча мураккаброк. Бундай холда детерминантлар асосан юкорида келтирилган теорема ёрдамида тартибини пасайтириб хисобланади.

УЗ-УЗИНИ ТЕКШИРИШ САВОЛЛАРИ.

1. *Иккинчи тартибли детерминантни хисоблаш формуласини ёзинг.*
2. *Учинчи тартибли детерминантни хисоблаш формуласини ёзинг ва мисол келтиринг.*
3. *Кандай детерминантнинг киймати нолга тенг?*
4. *Минор деб нимага айтилади?*
5. *Алгебраик тулдирувчи деб нимага айтилади?*

Куйидаги детерминантлар биринчи устун буйича ёйилиб хисоблансин.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

8. Ушбу $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \\ -10 & 3 & -6 \\ -2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

детерминант хоссалардан фойдаланиб хисоблансин.

2-маъруза. Чизикли тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида ечиш.

Р е ж а:

1. *Икки номаълумли иккита тенгламалар системаси. Крамер коидаси.*
2. *Уч номаълумли учта тенгламалар системаси.*
3. *Бир жинсли тенгламалар системаси.*

Адабиётлар : 35,6,7.

Таянч иборалар: Чизикли тенглама, коэффицент, Крамел формуласи, Гривиал ечим, бир жинслимас система, бир жинсли система.

Биз утган маърузада детерминантлар ва уларнинг хоссаларини карадик. Энди, бу маълумотлардан фойдаланиб тенгламалар системасини ечиш билан шугулланамиз.

2.1.Икки номаълум иккита чизикли тенгламалар системаси

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = в_2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

(икки номаълумли иккита чизикли) тенгламалар системасини караймиз, бу ерда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар системанинг **коэффицентлари** $в_1$, $в_2$ **–озод хадлар** дейилади.

Мактаб алгебра курсидан маълумки, бу системани кушиш усули билан ечиш мумкин. Бунинг учун системанинг биринчи тенгламасини иккала томонини a_{22} га иккинчисини эса $(-a_{12})$га купайтириб, хосил булган тенгламаларни кушамиз. Натижада куйидагига эга буламиз:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=в_1a_{22}- в_2a_{12} \qquad (2.2)$$

шунга ухшаш (2.1)нинг биринчи тенгламасини иккала томонини $(-a_{21})$га, иккинчисини эса a_{11} га купайтириб, сунгра кушиб топамиз:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=a_{11}в_2-a_{21}в_1 \qquad (2.3)$$

Энди (2.2) ва (2.3) тенгламаларнинг унг ва чап томондаги айирмаларга эътибор килайлик. Уларнинг хар бири иккинчи тартибли детерминантдир.

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad в_1a_{22} - в_2a_{12} = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; a_{11}в_2 - a_{21}в_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}$$

Куйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

бу ерда, номаълумлар олдидаги коэффицентлардан тузилган Δ детерминант **асосий детерминант** ёки **системанинг детерминанти** дейилиб, Δ_x ва Δ_y ёрдамчи детерминант эса Δ детерминантда мос равишда x ва y номаълум олдидаги коэффицентларни озод хадлар билан алшмаштиришдан хосил килинади.

(2.4) белгилашларга кура (2.2) ва (2.3) куйидагича ёзилади.

$$\Delta x = \Delta_x, \quad \Delta y = \Delta_y \qquad (2.5)$$

Агар $\Delta \neq 0$ булса, ухолда (2.5) дан

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta,}\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (2.6)$$

формулаларни хосил киламиз. (2.6) формулалар (2.1) системанинг ечимидан иборат.

Агар Δ =0 булса, куйидаги холлар булиши мумкин:

а) Δ_x, Δ_y лардан камида биттаси нолдан фаркли, масалан $\Delta_x \neq 0$ булсин. у холда (2.5) нинг биринчи тенгламаси уринли булмайди ($0.x = \Delta_x$) ва демак, система ечимга эга эмас;

б) Δ_x=0, Δ_y=0 булсин. бу холда (2.5) формулалар хар кандай x ва y лар учун уринли. Демак, бундан (2.1) система чексиз куп ечимга эга эканлиги келиб чикади.

Шундай килиб, агар системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ булса, (2.1) система ягона ечимга эга ва у (2.6) формулалар билан топилади: агарда Δ =0 булса (2.1) система ечимга эга эмас ёки чексиз куп ечимга эга.

Чизикли тенгламалар системасини ечишнинг ушбу усули Крамер коидаси дейилади. (Г.Крамер – (1704-1752).), (2.6) формулалар эса Крамер формулалари дейилади.

1-мисол.

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Детерминантларни хисоблаймиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & .5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Крамер коидасидан фойдаланиб, x ва y ни топамиз.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2$$ шундай килиб, ечим (1, -2).

2-мисол. Ушбу система ечилсин.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$$

Ечиш. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & .3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$, $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & .3 \\ 5 & .6 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & .5 \end{vmatrix} = 6$

Бу ерда Δ =0, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, демак система ечимга эга эмас.

3-мисол. Система ечилсин.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & .1 \\ 6 & .2 \end{vmatrix} = 0$$

Система чексиз куп ечимга эга.

2.2. **Уч номаълумли учта чизикли тенгламалар системаси**.

Ушбу
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{13}y + a_{13}z = в_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = в_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = в_3 \end{cases} \qquad (2.7)$$

тенгламалар системасини караймиз.

Агар озод хадлар $в_1 = в_2 = в_3 = 0$ булса, система **чизикли бир жинсли**, акс холда чизикли бир жинслимас дейилади. куйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} в_{11} & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{33} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_{11} \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}$$

Агар $\Delta \neq 0$ булса, бир жинслимас (2.7) система ягона ечимга эга ва у **Крамер коидасига** кура,

$$x = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (2.8)$$

формулалар билан топилади.

4-мисол. Ушбу
$$\begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Δ_1 Δ_x Δ_y Δ_z детерминантларни хисоблаймиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1- & 1 \\ 3 & 2- & 2 \\ 1-1 & & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1- & 1 \\ 1 & 2- & 2 \\ 5-1 & & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 4- & 1 \\ 3 & 1- & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 14, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1-1 & & 5 \end{vmatrix} = 21$$

(2.8) Крамер формулаларига кура,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{21}{7} = 3 \quad \text{Ечим } (1;2;3)$$

Агар $\Delta = 0$ булса, (2.7) система умуман ечимга эга эмас ёки чексиз куп ечимга эга.

Энди **бир жинсли** системани караймиз.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{33}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

Куриниб турибдики, (2.9) система хамма вакт x=0, y=0, z=0 ечимга эга. Агар $\Delta \neq 0$ булса бу ечим ягона булиб, **нол** ёки **тривиал** ечим дейилади.

Агар $\Delta=0$ булса, $\Delta_x = \Delta_4 = \Delta_z = 0$ эканлигидан система **нолдан фаркли чексиз куп** ечимга эга.

5-мисол.
$$\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Маълумки (4-мисолга каранг)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1- & 1 \\ 3 & 2- & 2 \\ 1-1 & & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Демак, система ягона x=0, y=0, z=0 нол ечимга эга.

УЗ-УЗИНИ ТЕКШИРИШ САВОЛЛАРИ

1. *Чизикли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер формулаларини ёзинг ва мисол ечинг.*
2. *Чизикли тенгламалар системаси качон ягона ечимга эга.*
3. *Чизикли тенгламалар системаси качон бир жинсли дейилади.*
4. *Тривиал ечим нима?*

Чизикли тенгламалар системасини ечинг.

5. а) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ 6. б) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 8x - 6y = 3 \end{cases}$

7. в) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$ 8. с) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x + y \ - 2z = -3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 3x - y\_27 = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ 3x + y - 27 = 0 \\ x - 2y + 37 = 0 \end{cases}$

3-маъруза. Матрицалар, улар устида амалалар. Чизикли тенгламалар системасини матрицавий ёзиш ва ечиш.

Матрица тушунчаси немисча-**Matrize,** лотинча –**matrix** сузидан олинган булиб **манба**, **бошланиш** маъносини беради.

Матрицанинг детерминанти гояси немис математиклари Г.Лейбниц ва К.Гауссга тегишлидир.XVII-асрнинг иккинчи ярмига келиб матрицалар устида амаллар (кушиш, купайтириш, сонга купайтириш) техник аппарат сифатида чизикли тенгламалар системасини ечишда кенг кулланилиб келинди.

Р е ж а:

1. Асосий таърифлар.

1. Матрицалар устида амаллар.

2. Тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули.

Адабиётлар: 1,3,4.5,6.

Таянч иборалар: Матрица, сатр матрица, устун матрица, хос матрица, хосмас матрица, тескари матрица, матрица.

3.1.Асосий таърифлар.

m та сатр ва **n** та устундан иборат тугри бурчакли.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2} & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

жадвал m x n улчовли **тугри бурчакли матрица** дейилади.

a_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…n) сонлар **матрицанинг элементлари** дейилади. Матрицалар кискача

$$A=(a_{ij}) \qquad \left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$$

куринишда хам ёзилади.

Агар m=1, n>1, булса, биз бир сатрли матрицага эга буламиз:

$$A=(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{in}) \qquad (3.2)$$

(3.2)-сатр –матрица дейилади.

шунингдек $B = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_n \end{pmatrix}$ - **устун –матрица** дейилади.

Агар матрицада сатр ва устунлар сони тенг булса (m=n), матрица **квадрат матрица** дейилади ва сатр (ёки устун) сони **матрицанинг тартиби** дейилади.

масалан, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix}$ - иккинчи тартибли **квадрат** матрица,

$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}\,a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$ -n- **тартибли квадрат** матрица.

Агар икки А=(a_{ig}) ва В=($в_{ig}$) матрицалар бир хил улчовли ва мос элементлари тенг, яъни $a_{ig}=в_{ig}$ булса матрицалар тенг дейилади ва А=В каби ёзилади.

Бош диоганалидаги барча элементлари 1, колган элементлари ноллардан иборат матрица **бирлик матрица** дейилади ва Е билан белгиланади:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \dots\dots & & \dots\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Барча элементлариноллардан иборат матрица **нол матрица** дейилади ва О билан белгиланади.

3.2. Матрицалар устида амаллар.

Матрицаларни кушиш. Бир хил улчовли матрицаларни кушиш мумкин. Шундай икки A=(a_{ig}) ва B = ($в_{ij}$) матрицаларни йигиндииси деб, элементларни

$$C_{ij}=a_{ij}+в_{ij}$$

тенглик билан аникланадиган C=(c_{ij}) матрицага айтилади ва C=A+B каби ёзилади.

1-мисол.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1, & -5\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

матрицалар йигиндисини топинг.

Ечиш.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1, & -5\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 0+1 & 2-5\\ 2-1 & 3+3 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

Икки матрицанинг айирмаси хам шунга ухшаш аникланади.

3.3. Матрицани сонга купайтириш. A=(a_{ij}) матрицани λ **сонга купайтмаси** деб, барча элементларини λ сонга купайтирищдан хосил булган матрицага айтилади. Масалан,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} \text{ булса,}$$

У холда

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23}\end{pmatrix}$$

Матрицаларни кушиш ва сонга купайтириш амаллари **чизикли амалллардир**. Бу амаллар учун:

1^o A+0=0+A=A 2^o A+B=B+A 3^o $\mu(\lambda A)=(\lambda\mu)A$

4^o $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, 5^o $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

бу ерда О-нол матрица.

4. Матрицаларни купайтириш. Бу амал купайтирилаётган матрицаларнинг биринчисининг устунлари сони иккинчисининг йуллари (сатрлари) сонига тенг булгандагина уринлидир.

mxk улчовли A =(a_{ig}) матрицанинг **kxn** улчовли B=($в_{ig}$) матрицага купайтмаси деб, элементлари

$$c_{ig}=a_{il}b_{lg}+a_{i2}b_{2g}+\ldots+a_{ik}b_{kg}$$

тенглик билан аникланадиган C=AB матрицага айтилади.Масалан

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Булса,

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{12} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{pmatrix}$$

бу ерда С-3х3 улчовли, яъни 3-тартибли квадрат матрица.

2-мисол. $\begin{pmatrix} 210 \\ 314 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 01 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot5 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot0+4\cdot5 & 3\cdot2+1\cdot1+4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 23 & 15 \end{pmatrix}$

3-мисол $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

4-мисол. Куйидаги квадрат матрицаларни купайтиринг:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot0 & 1\cdot7+3\cdot6 \\ 4\cdot2+5\cdot0 & 4\cdot7+5\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 25 \\ 8 & 58 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+7\cdot4 & 2\cdot3+7\cdot5 \\ 0\cdot1+6\cdot4 & 0\cdot3+6\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 41 \\ 24 & 30 \end{pmatrix}$

Бундан $AB \neq BA$. Демак, матрицаларни купайтиришда **урин алмаштириш хоссаси** хар доим бажарилавермаслиги келиб чикади. Шу сабабли матрицаларни купайтиришда **чапдан** ва **унгдан** купайтириш хакида гапиришга тугри келади.

Бирок, квадрат матрица ва уша тартибли бирлик матрица учун хар доим AE=EA=A

3.2.4. Тескари матрица.

Ушбу $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

квадрат матрицани карайлик. (3.3) квадрат матрицанинг тавсифловчи хусусиятларидан бири унинг **детерминанти**дир. Бу детерминант **detA** ёки $|A|$ билан белгиланади.

Агар $\det A \neq 0$ булса, А квадрат матрица **хосмас** дейилади; агарда detA=0 булса, матрица **хос** дейилади.

Агар AB=BA=E булса, B матрица A матрицага **тескари матрица** дейилади ва A^{-1} билан белгиланади.

Теорема. Агар А матрица хосмас, яъни $\Delta=\det A\neq 0$ булса, у холда унга тескари A^{-1} матрица мавжуд ва у ягонадир:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22} & & A_{n2} \\ \dots\dots\dots\ \dots & & \\ A_{1n}\ A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

бу ерда $A_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$ Δ детерминант элементларининг **алгебраик тулдирувчилари.**

5-мисол: $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=7\neq 0$$

Барча элементларнинг алгебраик тулдирувчиларини хисоблаймиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1. & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=11,\quad A_{23}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=6$$

Шунингдек, $A_{31}=0$, $A_{32}=7$, $A_{33}=7$

Демак, $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 11 & 7 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

5 мисол A^{-1} ва А матритцаларни купайтирамиз

$$A^{-1}.A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot & 1 & 0 \\ -8 & 11 & 7 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot 5-1\cdot 3+0\cdot 1 & 2\cdot 1-1\cdot 2+0\cdot(-1) & 2\cdot(-1)-1\cdot(-2)+0\cdot 2 \\ -8\cdot 5-11\cdot 3+7\cdot 1 & -8\cdot 1+11\cdot 2+7\cdot(-1) & -8\cdot(-1)+11\cdot(-2)+7\cdot 2 \\ -5\cdot 5-6\cdot 3+7\cdot 1 & -5\cdot 1+6\cdot 2+7\cdot(-1) & -5(-1)+6\cdot(-2)+7\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$

Куриниб туриндики хакикатдан $A^{-1}A=E$ эканлигини курсатамиз.

3.3. Чизикли тенгламалар системасини ечишнинг матрица усули.

Ушбу n номаълумли n та чизикли тенгламалар системасини караймиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad +a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\quad +a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\quad +a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (3.5)$$

Куйидагича белгилашлар киратамиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\,a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

У холда (3.5) системани матрицаларнинг купайтириш ва тенглиги коидасидан фойдаланиб

$$\mathbf{A\ X=B} \qquad (3.7)$$

куринишда ёзиш мумкин. (3.7) тенглама (3.5) системанинг матрицавий ёзувидан иборат.

Агар А хосмас матрица булса, у холда унга тескари A^{-1} матрица мавжуд. (3.7) тенгламани иккала томонини A^{-1} га чапдан купайтириб куйидагини хосил киламиз.

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ еки $(A^{-1}A)X=A^{-1}B$ ва $A^{-1}A=E$. $EX=X$ эканлигидан

$$\mathbf{X=A^{-1}B} \qquad (3.8)$$

ни топамиз. (3.8) формула, матрица хосмас булганда (3.7) тенглама ёки (3.5) системани **ечимининг матрицавий ёзувини** беради.

6-мисол. Ушбу $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=4 \\ 3x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечиш. Матрицалар тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Белгилашларга кура берилган тенгламалар системасини битта матрицавий тенглама ёрдамида ёзиш мумкин:

$$AX=B$$

Маълумки, $\det A=7\neq 0$ (5-мисолга каранг), яъни А матрица хосмас. У холда (3.8) га асосан

$$X=A^{-1}B$$

ёки

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 7 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\cdot4-1\cdot1+0\cdot5 \\ -8\cdot4+1\cdot1+7\cdot5 \\ -5\cdot4+6\cdot1+7\cdot5 \end{pmatrix}\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ ни топамиз,

бундан, матрицалар тенглигини хоссасидан

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ ёки $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$

УЗ-УЗИНИ ТЕКШИРИШ САВОЛЛАРИ.

1. *Матрица деб нимага айтилади?*
2. *Кандай матрица квадрат матрица дейилади?*
3. *Кандай матрица учун тескари матрица мавжуд? Мисол келтиринг.*

4. *Матрицаларни купайтириш урин алмаштириш хоссасига эгами*?
5. *Тенгламаларни купайтириш урин алмаштириш хоссасига эгами?*

6. A= $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$

7. A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1-5 \\ 7\ -2 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ Матрица берилган Тескари А матритца топилсин ва $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$ эканлигини текширинг .

булса АВ ва ВА матрицаларни топинг.
Куйидаги тенгламалар системаси Крамер усули ва матрица усулида ечилсин.

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$

жавоб: (2,3,0)

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

Жавоб: (3,2,1)

II- БОБ. ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

4-маъруза. Текисликда координаталар системаси ва улар орасидаги богланиш.

Р е ж а:

1.Тугри бурчакли координаталар системаси.
2.Кутб координаталар системаси.
3. *Икки нукта орасидаги масофа.*
4. *Кесмани берилган нисбатда булиш.*

Адабиётлар: 1,2,3,4,5.

Таянч иборалар: аналитик геометрия, координаталар системаси, кутб, кутб уки, кутб радиуси, кутб бурчаги.

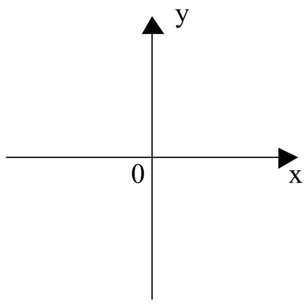
Аналитик геометрия Олий математиканинг булимларидан бири булиб, унда геометрия шакллар ва уларнинг хоссалари алгебраик усуллар оркали урганилади. Аналитик геометриянинг асоси **координаталар усули** булиб, уни XVII асрда француз математиги **Рене Декарт** (1596-1650) киритган.

4.1.Тугри бурчакли координаталар системаси.

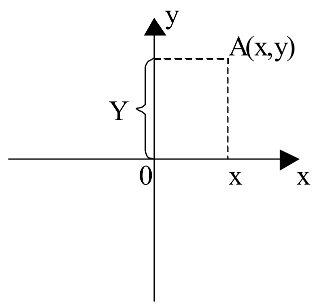
Текисликда узаро перпендикуляр, мусбат йуналиш курсатилган ва бир хил масштаб бирлигига эга ОХ ва ОУ уклар **тугри бурчакли Декарт координаталар системасини** ташкил килади (1-чизма). ОХ (абциса) ва ОУ (ордината) уки **координаталар уки**, уларнинг кесишиш нуктаси О- **координаталар боши**, бу уклар жойлашган текислик эса **координаталар текислиги** дейилади ва **Оху** билан белгиланади.

Текисликда хар кандай А нукта иккита сон: нуктанинг абциссаси –**х** ва нуктанинг ординатаси – **у** билан бир кийматли аникланади ва **А (х,у)**каби ёзилади (2-чизма). х ва у сонлар А нуктанинг **координаталари** дейилади.

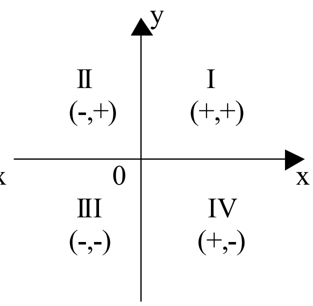
Ох ва Оу координата уклари текисликни туртта булакка- **чорак**ларга ажратади. (3-чизма).



1-чизма



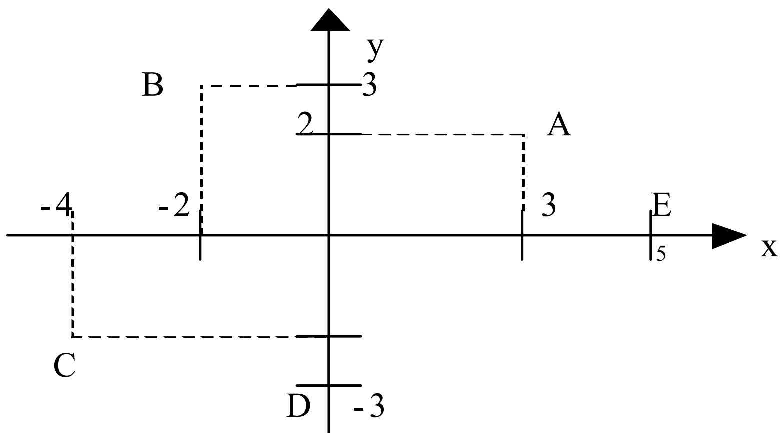
2-чизма



3-чизма

Агар A(x,y) нукта Оу укда ётса, ухолда х=0; агарда A(x,y) нукта Ох укда ётса, ухолда у=0 булади.

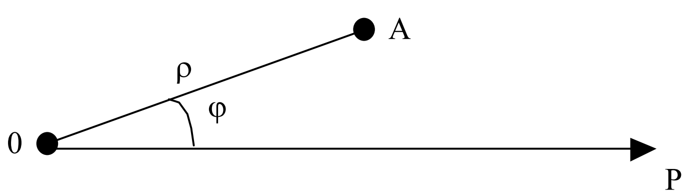
4-чизмада тугри бурчакли координаталар системасида А(3;2), В(-2;3), С(-4;2), Д(2;-1), Е(5;0), Д(0; -3) нукталар тасвирланган.



4-чизма

4.2. Кутб координаталар системаси.

Текисликда O нукта ва ундан чикувчи Ор нур оламиз, O нукта **кутб,** Ор тугри чизик эса **кутб уки** дейилади (5-чизма)



5-чизма

Текисликда ихтиёрий А нукта олиб, уни O кутб билан туташтирамиз ва танланган масштаб бирлигида масофани р=ОА билан, ОА ва ОР ук орасидаги бурчакни эса φ билан белгилаймиз.

У холда А нукта р ва φ микдорлар ёрдамида ягона усул билан аникланади. Бунда р-**кутб радиуси**, φ - **кутб бурчаги** дейилади. Кутб бурчаги

φ радианларда хисобланади. Унинг мусбат кийматлари эса соат стрелкаси буйича олинади, бунда $-\pi < \varphi < \pi$.

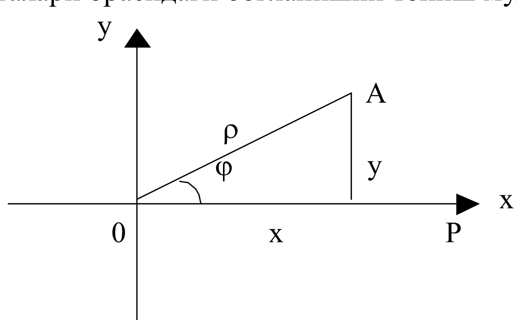
р ва φ микдорлар А нуктанинг **кутб координаталари** дейилади ва нукта А(р, φ) каби ёзилади.

1-мисол. Кутб координаталар системасида А (2, $\frac{3\pi}{4}$) нуктани ясанг.

Бу ерда р=2, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (6-чизма)

6-чизма

Агар текисликда координаталар боши кутб билан, абциссалар укининг мусбат кисми эса кутб уки билан устма-уст тушадиган Декарт координаталар системаси киритилса, у холда нуктанинг (х;у) декарт координаталари ва (р, φ) кутб координаталари орасидаги богланишни топиш мумкин.



7-чизма

Чизмадан, $\quad x = p\cos\varphi, \quad y = p\sin\varphi,$ (4.1)

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (4.2)$$

(4.1) формулалар А нуктанинг тугри бурчакли координаталарини кутб координаталари оркали; (4.2) эса А нуктанинг кутб координаталарини тугри бурчакли координаталар оркали ифодалаш формуласидан иборат.

Куриниб турибдики, $tg\varphi = \frac{y}{x}(-\pi < \varphi < \pi)$ да φ иккита кийматга эга. Шунинг учун, А нуктанинг кутб бурчагини аниклашда, аввало А нукта тугри бурчакли координаталарда кайси чоракда ётиши хисобга олинади.

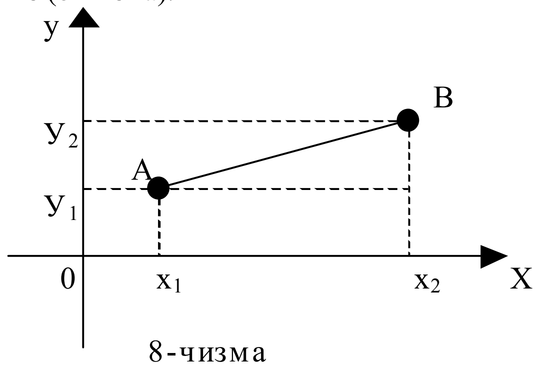
2-мисол. А нуктанинг тугри бурчакли координатлари берилган:
х=1; у=1. Унинг кутб координаталарини топинг.(4.2) формуладан,
$p = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $tg = \frac{1}{1} = 1$. Иккита $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ дан $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ни топамиз, чунки А(1; 1) нукта биринчи чоракда ётади. Демак, $p = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3-мисол. А нукта кутб координаталарда берилган : р=2, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Унинг тугри бурчакли координаталарини топинг. **Ечиш** $x=2\cos\frac{\pi}{2}=0$, $y=2\sin\frac{\pi}{1}=1$

4.3. Икки нукта орасидаги масофа.

Текисликда икки $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нукталар берилган булсин.

Бу нукталар орасидаги масофани уларнинг координаталари оркали ифодалаймиз (8-чизма).



8-чизма

Тугри бурчакли АВС учбурчакдан,Пифагор теоремасига асосан,

$$AB^2=AC^2+CB^2$$

ёки

$$AB=\sqrt{AC^2+CB_2}$$

Бирок, $AC=|x_2 - x_1|$ $CB=|y_2 - y_1|$ эканлигидан

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{4.3}$$

(4.3) текисликда **икки нукта орасидаги масофани** топиш формуласидан иборат.

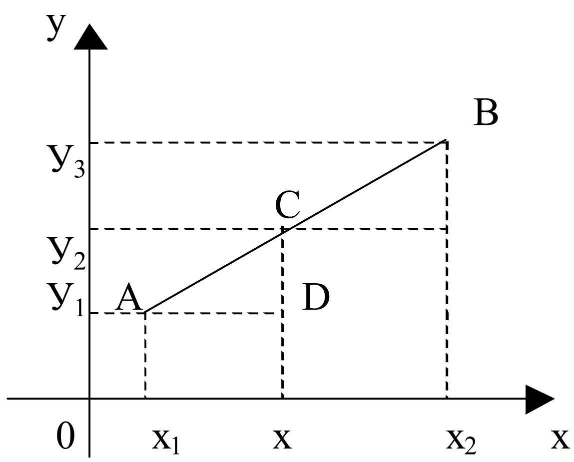
4-мисол. Текисликда А(-3; 2) ва В (1,5) нукталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш: (4.3) формулага кура:

$$AB=\sqrt{(1+3)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

4.4.Кесмани берилган нисбатда булиш.

Текисликда $A\ (x_1\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ нукталар берилган булсин. АВ кесмада ётувчи ва уни $AC:CB=\lambda$ нисбатда булувчи C(x,y) нуктани топиш талаб килинсин. (9чизма).



9-чизма

Чизмадан, AD=x-x_1, CE=x_2-x_1 шунингдек DC=y-y_1, EB=y_2-y_1.
Тугри бурчакли ADC ва CEB учбурчакларнинг ухшашлигидан
$\frac{AD}{CE}=\frac{AC}{CB}$, $\frac{DC}{EB}=\frac{AC}{CB}$ ни топамиз.

У холда $\frac{AC}{CB}=\lambda$ эканлигидан,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\lambda, \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\lambda$$ га эга буламиз.

Булардан,

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad \textbf{(4.4)}$$

формулаларни хосил киламиз. Шундай килиб, AB кесмани берилган нисбатда булувчи C нуктанинг координаталари (4.4) формулалар билан топилади.
Хусусан, C нукта AB **кесманинг уртаси** булса, у холда λ=1 булиб (4.4) формула.

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_2+y_2}{2} \qquad (4.5)$$

куринишини олади. (4.5) **кесмани тенг иккига булиш** формуласидир.

2-мисол. Учлари A (1;2) ва B (4,5) нукталарда булган AB кесмани $\frac{AC}{CB}$=2 нисбатда булувчи C(x,y) нуктанинг координаталари топилсин.
Ечиш. (4.4) формулага асосан,

$$x=\frac{1+2\cdot 4}{1+2}=\frac{9}{3}=3; \quad y=\frac{2+2\cdot 5}{1+2}=4$$

шундай килиб изланган нукта C(3.4)

Изох. Учлари $A(x,y)$, $B(x,y), C(x,y)$ нукталарда булган учбурчак n юзи $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ формула билан топилади.

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ (4.6) шарт уч нуктанинг бир тугри чизикда ётиш шартидан иборат.

3- Мисол. Учлари $A(1,-2), B(2,3), C(4,5)$ нуктада булган учбурчакнинг юзи топилсин.

Ечиш. $S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(3-8+10-12+4-5)=-4$

Демак, s=4кв бирлик.

4-мисол. $A(1,-2), B(2,3), C(0,1)$ нукталар бир тугри чизикда ётадими?

Ечиш. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+0+2-0-4-1=0$ ха нукталар бир тугри чизикда ётади.

УЗ-УЗИНИ ТЕКШИРИШ САВОЛЛАРИ.

1. *Тугри бурчакли координаталар системаси куриш ва унда нуктани урнини топинг?*
2. *Кутб координаталар системасида нукта кандай аникланади?*
3. *Тугри бурчакли координаталар системасида ихтиёрий*
4. *Тугри бурчакли ва кутб координаталар орасидаги богланиш формулаларини ёзинг ва мисол келтиринг.*
5. *Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласини ёзинг ва мисол келтиринг.*
6. *Кесмани берилган нисбатда булиш формуласини ёзинг.*

Кесмани тенг иккига булиш формуласини ёзинг ва мисол келтиринг.

7. Тугри бурчакли координаталар системасида учбурчакни ясанг.

8. Томонлари узунликларини топинг.

9. Томонлари урталарининг координаталарини топинг.

10. Учбурчакнинг юзини топинг?

5- МАЪРУЗА. ТУГРИ ЧИЗИК ТЕНГЛАМАЛАРИ.

Р е ж а:

1. *Тугри чизикнинг умумий тенгламаси.*
2. *Тугри чизикни координаталар системасига нисбатан жойлашиши..*
3. *Тугри чизикнинг бурчак коэффицентли тенгламаси.*

4. Нуктадан тугри чизиккача масофа.

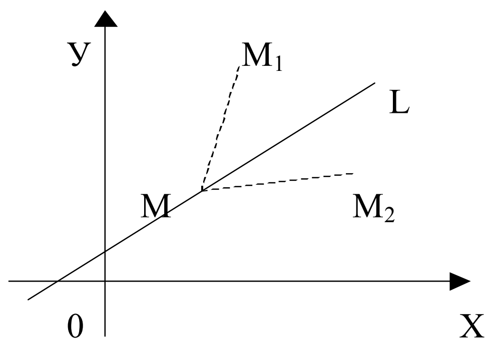
Адабиётлар : 4,5,6,7,8.

Таянч иборалар: тугри чизик, тугри чизик тенгламалари, бурчак коэффиценти, кесмалар буйича тенгламалар.

Агар текисликда x,y координаталар F(x,y)=0 тенгламанинг ечими сифатида каралса, у холда у текисликда бирор чизикни ифодалайди. **Тугри чизик** аналитик геометриянинг энг содда ва куп фойдаланадиган чизикларидан биридир.

5.1.Тугри чизикнинг умумий тенгламаси.

Фараз килайлик, текисликда берилган L тугри чизикка нисбатан симметрик жойлашган иккита M(a_1,b_1) ва M(a_1,b_2) нукта берилган булсин. M(x,y) эса тугри чизикнинг ихтиёрий нуктаси булсин. У холда $M_1M=M_2M$ булади (10-чизма).



10-чизма

Икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига кура

$M_1M=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}$

$M_2M=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$

Натижада $\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}=\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}$

ёки $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2$

Бундан $2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=0$

Агар $2(a_2-a_1)=A$, $2(b_2-b_1)=B$, $a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=C$ деб белгиласак, у холда

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}y+\mathbf{C}=0 \qquad (5.1)$$

тенгламага келамиз. Бу тугри чизикнинг **умумий тенгламаси** дейилади. A,B,C сонлар тенгламанинг коэффицентлари дейилади ва $A^2+B^2\neq 0$

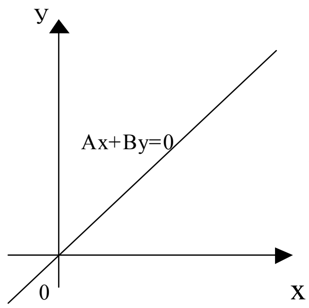
5.2. Тугри чизикнинг координаталар системасига нисбатан жойлашиши. тенгламанинг баъзи **хусусий холларини** караймиз.

5.2.1 $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C=0$ булсин. Бу холда (5.1) тенглама Ax+By=0 куринишни олади, демак, тугри чизик координаталар бошидан утади.

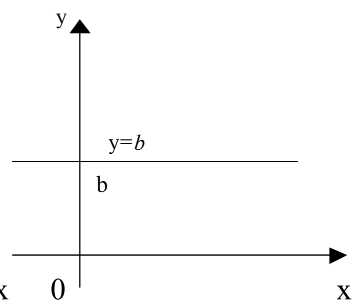
5.2.2. $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ булсин. У холда $By+C=0$ ёки $y=-\frac{C}{B}$. Агар $-\frac{C}{B}=$ в десак, (5.1) тенглама **у=в** куринишни олади. Демак бундай тугри чизикдаги хар бир нуктанинг ординатаси бир хил булиб, у в сонига тенг. Бу эса **тугри чизик Ох укига параллел** булишини билдиради (12-чизма)

5.2.3.. B=0. A≠0. C≠0 булсин. Бу холда Ax+C=0 ёки $x=-\frac{C}{A}$. Агар $-\frac{C}{A}=a$, десак, тенглама **x = *a***

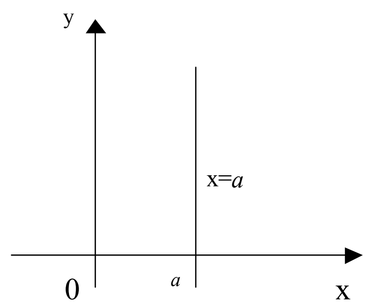
куринишни олади. Бу **ордината укига параллел** тугри чизик (13-чизма)



11-чизма



12-чизма



13-чизма

5.4. A≠0, B=C=0 булсин. Бу холда (5.1) тенглама Ax=0 ёки **x=0** куринишга келади, бу **ордината укининг тенгламаси**.

5^0. B≠0, A=C=0 булсин. Бу холда **y=0** , яъни **абцисса укининг тенгламаси**ни хосил киламиз.

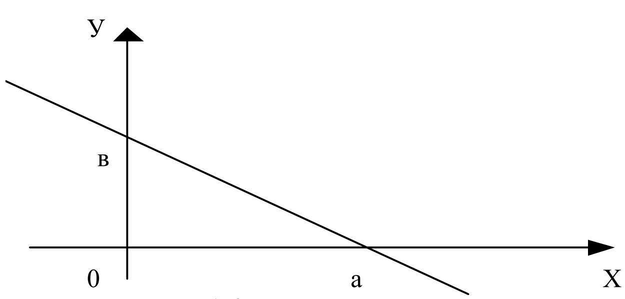
8.1 тенгламанинг барча коэффицентлари нолдан фаркли, яъни A≠0, B≠0, C≠0 булсин тенгламани куйидагича ёзиб оламиз:

$$Ax+By=-C, \qquad \frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

Агар $-\frac{C}{A}=a$ $\quad -\frac{C}{B}=b$ деб белгиласак, у холда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1 \tag{5.2}$$

тенгламани хосил киламиз.(5.2) тугри чизикнинг **кесмалар буйича** тенгламаси дейилади (14-чизма)



14-чизма

Куп холларда тугри чизикнинг (5.1) умумий тенгламасига кура унинг текисликдаги вазиятини аниклаш лозим булади. Бунинг учун тугри чизик тенгламасини кесмалар буйича ёзиш етарли.

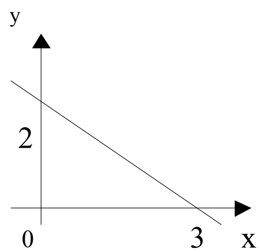
1-Мисол. Ушбу 2x+3y-6=0 тенглама билан берилган тугри чизикни ясанг.

Ечиш. Тенгламани кесмалар буйича ёзиб оламиз:

2x+3y=6, ёки $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$

Бунда a=3 , b=2

(15-чизма)

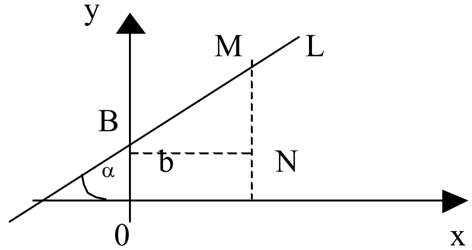


15-чизма

I

5.4. Тугри чизикнинг бурчак коэффицентли тенгламаси

Текиликда Декарт координаталари системасини олиб, унда Оу укига параллел булмаган L тугри чизикни карайлик (16-чизма). Тугри чизикнинг Оу уки билан кесишиш нуктаси В(0,b) билан ,Ох укининг мусбат йуналиши билан хосил килган бурчагини α билан белгилаймиз. М(х,у) тугри чизикнинг ихтиёрий нуктаси булсин . Ухолда BNM тугри бурчакли учбурчакдан



16-чизма

$\dfrac{NM}{BN}=tg\alpha$ Аммо, BN = x , NM = y-b эканлигидан

$$\frac{y-b}{x}=tg\alpha \qquad (5.3)$$

Бу микдор тугри чизикнинг бурчак коэффеценти дейилади ва k=tgα билан белгиланади. Натижада, (5.3)

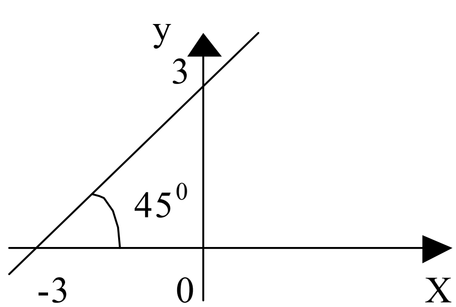
$$\frac{y-b}{x}=k$$

ёки $\boldsymbol{y=kx+b}$ (5.4)

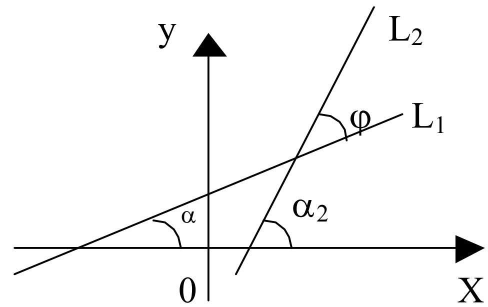
куринишни олади. (5.4) **тугри чизикнинг бурчак коэффицентли** тенгламаси дейилади.

2- Мисол. Ушбу y = x + 3 тенглама билан берилган тугри чизикнинг текисликдаги вазиятини аникланг .

Ечиш. Равшанки, b=3, k=tgα =1, α=$\dfrac{\pi}{4}$ Демак, берилган тугри чизик ордината укидан 3 бирлик ажратиб, 0х уки билан 45^0 бурчак ташкил этади (17- чизма)



17-чизма



18- чизма

5.5. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.

Текисликда иккита тугри чизик бурчак коэффицентли тенгламалари билан берилган булсин:

L_1: $y=k_1x+b_1$
L_2: $y=k_2x+b_2$

Бунда $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ (18-чизма). Масала шу икки тугри чизик орасидаги бурчакни яъни иккинчи тугри чизик биринчиси билан хосил килган φ бурчакни топишдан иборат. Куриниб турибдики $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. У холда

$$tg\,\varphi = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1}{1 + tg\,\alpha_1 tg\,\alpha_2},$$

ёки

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (5.5)$$

3-Мисол. Ушбу $2x - 3y + 6 = 0$ ва $5x - y + 3 = 0$ тугри чизиклар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Аввало тугри чизик тенгламаларини бурчак коэффицентли куринишга келтирамиз:

$$y = \frac{2}{3}x + 2, \; k_1 = \frac{2}{3}$$

$$y = 5x + 3, \; k_2 = 5$$

(5.5)формуладан,

$$tg\,\varphi = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \bullet \frac{2}{3}} = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \text{яъни } \varphi = 45^0$$

Агар тугри чизиклар узаро параллел булса, ухолда $\alpha_1 = \alpha_2$ ёки $\mathbf{k_1 = k_2}$

Агар $L_1 \perp L_2$, яъни $\varphi = \frac{\pi}{2}$, булса бу холда $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ ёки

$tg\varphi_2 = tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi}$ Демак $\kappa_2 = -\frac{1}{\kappa_1}$

Шундай килиб $\boldsymbol{k_1=k_2}$ тугри чизикнинг **параллеллик шарти**

$$\kappa_2 = -\frac{1}{\kappa_1}$$ тугри чизикнинг **перпендикулярлик шарти**

5.6.Нуктадан тугри чизиккача масофа.

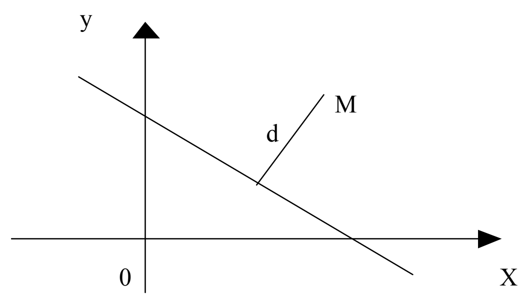
Текисликда L тугри чизик умумий тенгламаси билан берилган булсин:

$$Ax + By + C = 0$$

Шунингдек L тугри чизикда ётмаган бирор $M_0(x_0,y_0)$ нукта берилган булсин. (19-чизма)

M_0 нуктадан L тугри чизикка туширилган перпендикуляр, улар орасидаги масофа дейилади ва у куйидагича топилади.

$$d = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.6)$$



19-чизма

4-мисол. М (2,-1) нуктадан $5x + 12y + 15 = 0$ тугри чизиккача масофани топинг.

Ечиш. (5,6) формулага асосан,

$$d = \frac{\left|5\cdot 2 + 12\cdot 1 - 1 + 15\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

Мустакил бажариш учун машклар.

1. y=3x ва y=-2x+5 тугри чизиклар ясалсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.
2. М(1, 3) нуктадан утиб, Ох уки билан 60^0 бурчак ташкил килувчи тугри чизик тенгламасини ёзинг.

УЗ-УЗИНИ ТЕКШИРИШ САВОЛЛАРИ.

1. *Тугри чизикнинг умумий тенгламасини ёзинг.*
2. *Тугри чизикни кесмалар буйича тенгламасини ёзинг ва тугри чизикни ясашга мисол келтиринг.*
3. *Тугри чизикнинг бурчак коэффицентли тенгламасини ёзинг.*
4. *Икки тугри чизик орасидаги бурчак кандай аникланади?*
5. *Координаталар бошидан утувчи тугри чизик тенгламаси кандай куринишда булади, мисол келтиринг.*
6. *Иккита нуктадан нечта тугри чизик утказиш мумкин?*
7. *Нуктадан тугри чизикгача масофани топиш формуласини ёзинг?*

8. *y=3x ва y=-2x+5 тугри чизиклар ясалсин ва улар орасидаги бурчак топилсин.*

9. *M(1, 3) нуктадан утиб, Ох уки билан 60^0 бурчак ташкил килувчи тугри чизик тенгламасини ёзинг.*
10. *Кардинаталар бошидан ва M(1,3)нуктадан баробар узоклашган нукталар геометрик урнининг тенгламасини ёзинг ?*