

621.37  
Б 649

621.3.011.7/0

В. Н. Бирюков

В. П. Попов В. И. Семенцов

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Под редакцией д-ра техн. наук,  
проф. В. П. Попова

Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов вузов, обучающихся  
по специальности «Радиотехника»

2000000000

ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

Библиотека ТЭИО  
322672



МОСКВА  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1985

621.372 (075.8)

ББК 31.27-01  
Б64  
УДК 621.3.01

Рецензенты:

кафедра «Теория линейных электрических цепей» Московского электротехнического института связи (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. К. К. Товара); кафедра «Теоретическая радиотехника и радиоизмерения» Львовского политехнического института им. Ленинского комсомола (зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. Б. А. Мандзий).

**Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенцов В. И.**

Б64 Сборник задач по теории цепей: Учеб. пособие для студентов вузов спец. «Радиотехника» / Под ред. В. П. Попова. — М.: Высш. шк., 1985. — 239 с., ил.

В пер.: 95 к.

Сборник является частью комплекса по курсу «Основы теории цепей» и предназначен для использования с одноименным учебником В. П. Попова. Его главы соответствуют главам этого учебника, а параграфы — темам, рекомендуемым для практических занятий; около половины задач сопровождается решениями и методическими указаниями.

Б  $\frac{2302010000-168}{001(01)-85}$  118—85

ББК 31.27-01  
6П2.1

© Издательство «Высшая школа», 1985

## Предисловие

Курс «Основы теории цепей» является базовым для подготовки специалистов в двух смежных областях знания — электротехнике и радиоэлектронике, развитие которых имеет исключительно важное значение для ускорения технического прогресса во всех отраслях народного хозяйства и повышения материального благосостояния трудящихся.

В отличие от имеющихся задачников по теории цепей в предлагаемой книге уделяется большое внимание матрично-топологическим представлениям, вопросам анализа цепей с управляемыми источниками и многополюсными элементами, методам формализации процесса составления уравнений электрического равновесия.

Названия глав задачника совпадают с наименованиями разделов новой программы курса «Основы теории цепей», а названия параграфов соответствуют рекомендуемым темам практических занятий. До 50% задач, помещенных в каждую главу книги, сопровождается решениями или методическими указаниями (номера таких задач содержат буквы «р» или «м»). Так как сборник рассчитан на совместное использование с учебником В. П. Попова «Основы теории цепей», то он не содержит справочно-математического материала.

Терминология и условные буквенные обозначения в книге соответствуют ГОСТ 19880—74, ГОСТ 1494—77. Единицы физических величин приведены по СТ СЭВ 1052—78. Комплексные величины, не являющиеся изображениями функций времени, подчеркнуты ( $\underline{A}$ ,  $\underline{Z}$ ); комплексные величины, являющиеся комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями гармонических функций времени, обозначены с помощью точки ( $\dot{U}_m$ ,  $\dot{I}$ ). Не выделялись буквенные обозначения мнимой единицы  $j$ , комплексной частоты  $p$  и величин, комплексный характер которых непосредственно виден из их формы записи, например  $Z_{11}(j\omega)$ ,  $Y_{12}(p)$ .

Материал книги распределен между авторами следующим образом: гл. 1—4 написаны В. Н. Бирюковым и В. П. Поповым, гл. 5 — В. И. Семеновым, гл. 6—10 — В. И. Семеновым и В. П. Поповым. Большинство задач, включенных в книгу, разработаны составителями. Ряд задач, помещенных в гл. 3, предложен доц. Ю. Е. Сапунцовым.

Авторы выражают благодарность коллективам кафедры «Теория линейных электрических цепей» Московского ордена Трудового Красного Знамени электротехнического института связи и кафедры «Теоретическая радиотехника и радиоизмерения» Львовского ордена Ленина политехнического института им. Ленинского комсомола за ценные замечания, сделанные при рецензировании рукописи. Большую помощь в подготовке книги оказали А. Д. Стенпковская и Л. В. Кулинченко, которым авторы выражают искреннюю признательность.

Замечания и предложения по книге просим направлять по адресу: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

*Авторы*

# Основные понятия теории цепей



## § 1.1. Идеализированные элементы электрических цепей

**1.1р.** Начиная с момента времени  $t_0 = 0$  через сопротивление  $R = 20 \text{ Ом}$  протекает ток  $i = 100e^{-2 \cdot 10^6 t} - 50e^{-0.5 \cdot 10^6 t} \text{ мА}$ . Определить зависимость от времени напряжения на сопротивлении, мгновенной мощности сопротивления и энергии, рассеиваемой в сопротивлении. Найти значения соответствующих величин в моменты времени  $t_0 = 0$ ;  $t_1 = 0,25 \text{ мкс}$ ;  $t_2 = 2 \text{ мкс}$ ;  $t_3 = 10 \text{ мкс}$ .

**1.2.** Решить задачу 1.1р при  $i = 1 - e^{-10^6 t} \text{ мА}$ .

**1.3р.** На рис. 1.1 приведена зависимость напряжения на сопротивлении от времени. Построить (качественно) зависимость мгновенной мощности сопротивления и энергии, рассеиваемой в сопротивлении, от времени.

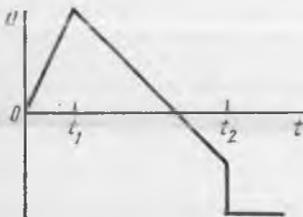


Рис. 1.1

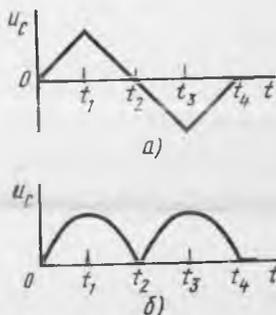


Рис. 1.2

**1.4р.** Построить (качественно) зависимости тока линейной емкости от времени для случаев, когда напряжение на емкости задается графиками, представленными на рис. 1.2, а, б.

**1.5р.** Ток индуктивности задан графически (рис. 1.3, а, б). Построить (качественно) зависимость от времени напряжения на этой индуктивности.

**1.6р.** На рис. 1.4, а, б приведены зависимости от времени мгновенной мощности, потребляемой цепями, не содержащими источников энергии. Содержат ли эти цепи элементы, запасующие энергию?

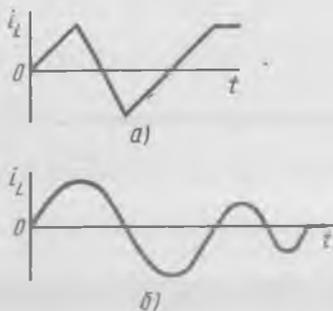


Рис. 1.3

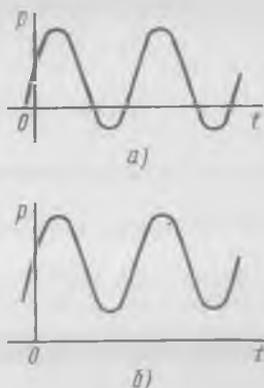


Рис. 1.4

1.7м. На рис. 1.5, а, б показаны зависимости от времени энергии, поступающей в цепи, не содержащие источников энергии. Содержат ли эти цепи элементы, запаасающие энергию? Достаточно ли данных для ответа?

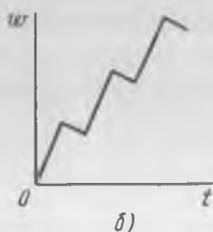
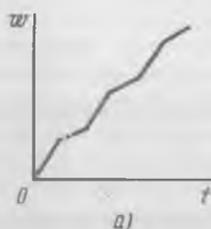


Рис. 1.5

1.8р. Мгновенная мощность, потребляемая сопротивлением, начинает в момент времени  $t = 0$  изменяться в соответствии с графиком рис. 1.6. Изобразить (качественно) зависимость от времени напряжения на сопротивлении.



Рис. 1.6

1.9м. Определить ток индуктивности  $L = 1$  мГн, если напряжение на ней имеет вид прямоугольного положительного импульса длительностью  $T = 1,2$  мкс:

$$u_L = \begin{cases} 0, & -\infty < t < t_0; \\ U_0, & t_0 \leq t < t_0 + T; \\ 0, & t_0 + T \leq t, \end{cases}$$

где  $U_0 = 10$  В.

1.10р. Емкость  $C = 1$  мкФ, имеющая электрический заряд  $q = 0,1$  мКл, в момент времени  $t_0 = 0$  начинает разряжаться через сопротивление  $R = 1$  кОм. Ток сопротивления изменяется по закону  $i =$

$= 0,1e^{-10^3 t}$  А. Рассчитать напряжение на емкости и энергию, запасенную в ней, в моменты времени  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$  мс. Найти энергию, рассеянную в сопротивлении к моменту времени  $t_1$ .

1.11. Ток индуктивности  $L = 1$  мкГн изменяется по закону  $i_L = 0,2 \sin(10^6 t + 0,4\pi)$  А. Определить напряжение на индуктивности.

1.12. Начиная с момента времени  $t_0 = 0$  через индуктивность  $L = 250$  мкГн протекает ток  $i = 1 - 2e^{-2 \cdot 10^3 t}$  мА. Вычислить напряжение на индуктивности и энергию магнитного поля, запасенную в ней в момент времени  $t_1 = 0,4$  мс.

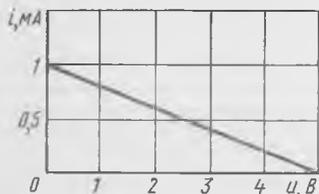


Рис. 1.7

1.13р. Внешняя характеристика источника электрической энергии приведена на рис. 1.7. Записать аналитическое выражение для этой характеристики. Определить параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения источника.

1.14. Найти параметры элементов последовательной схемы замещения источника электрической энергии, имеющего следующие параметры элементов параллельной схемы замещения:  $G_i = 0,42$  мСм;  $j = 2,82$  мА.

1.15р. Записать аналитические выражения для внешних характеристик источников электрической энергии, схемы которых приведены на рис. 1.8, а—г.

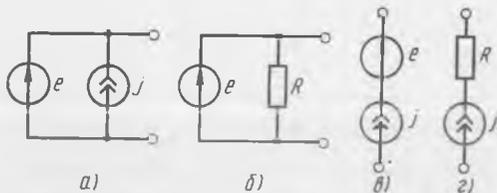


Рис. 1.8

1.16. Напряжение источника электрической энергии при сопротивлении нагрузки  $R_{н1} = 1$  МОм  $U_1 = 9,38$  В. При уменьшении сопротивления нагрузки до значения  $R_{н2} = 0,1$  МОм напряжение источника снижается до  $U_2 = 6,78$  В. Определить параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения источника.



Рис. 1.9

1.17. При  $R_{н1} = 5$  кОм ток источника энергии  $i_1 = 0,186$  мА, при  $R_{н2} = 10$  кОм  $i_2 = 0,105$  мА. Рассчитать параметры элементов параллельной схемы замещения источника.

1.18. Определить ток в сопротивлениях  $R_1$ ,  $R_2$  (рис. 1.9). Параметры элементов:  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 4$  кОм,  $j = 0,12$  А.

1.1р. Напряжение на сопротивлении  $u = Ri = 2e^{-2 \cdot 10^6 t} - e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  В; мгновенная мощность сопротивления  $p = ui = 200e^{-4 \cdot 10^6 t} - 200e^{-2,5 \cdot 10^6 t} + 50e^{-10^6 t}$  мВт; энергия, выделившаяся в сопротивлении к моменту времени  $t$ ,  $w = \int_{t_0=0}^t p dt = 20 - 50e^{-4 \cdot 10^6 t} + 80e^{-2,5 \cdot 10^6 t} - 50e^{-10^6 t}$  нДж.

В заданные моменты времени искомые величины имеют следующие значения:

$t$ , мкс . . . . .	0; 0,25; 2; 10
$u$ , В . . . . .	1; 0,331; -0,331; -0,00674
$p$ , мВт . . . . .	50; 5,47; 5,48; 0,00227
$w$ , нДж . . . . .	0; 5,49; 13,8; 20

1.3р. На интервалах времени  $[0, t_1]$  и  $[t_1, t_2]$ , где напряжение изменяется по линейному закону, график мгновенной мощности представляет собой отрезки квадратичной параболы  $p(t) = u^2(t)/R$  (рис. 1.10, а). В точке  $t_2$  кривая  $p(t)$ , так же как и  $u(t)$ , терпит разрыв первого рода. На участке  $t > t_2$   $p(t) = \text{const}$ , так как  $u(t) = \text{const}$ . На интервалах  $[0, t_1]$  и  $[t_1, t_2]$  график  $w(t)$  имеет вид отрезков кубических парабол, на интервале  $[t_2, \infty]$  — прямой линии (рис. 1.10, б). В точке  $t_2$  график  $w(t)$  терпит излом.

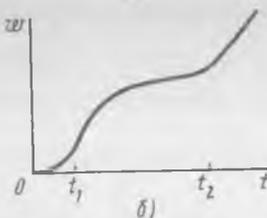
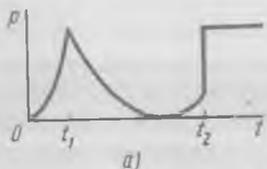


Рис. 1.10

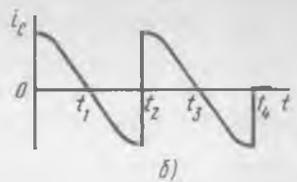
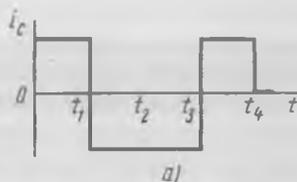


Рис. 1.11

1.4р. Ток емкости определяется графическим дифференцированием напряжения на ней, так как  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  (рис. 1.11). Рис. 1.11, а соответствует напряжению, изменение которого иллюстрирует рис. 1.2, а; рис. 1.11, б — напряжению, изменение которого показано на рис. 1.2, б.

1.5р. Напряжение на индуктивности находят путем графического дифференцирования заданной зависимости тока через эту индуктив-

ность от времени, так как  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$  (рис. 1.12). Рис. 1.12, а построен для случая, показанного на рис. 1.3, а, рис. 1.12, б — для случая, представленного на рис. 1.3, б.

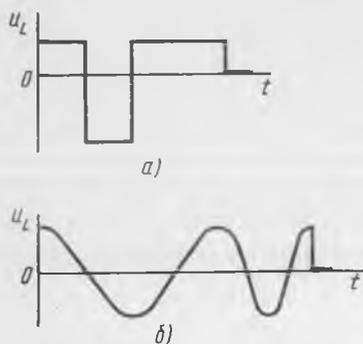


Рис. 1.12

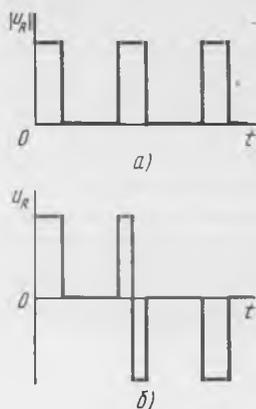


Рис. 1.13

**1.6р.** Цепи, содержащие элементы, которые запасают энергию, могут в отдельные моменты времени отдавать энергию источнику, причем в эти моменты потребляемая мощность является отрицательной. Для рис. 1.4, а ответ на вопрос, поставленный в задаче, положителен, для рис. 1.4, б — без дополнительных данных задачу решить нельзя.

**1.7м.** Учитывая, что мгновенная мощность  $p$  и энергия  $w$  связаны между собой соотношением  $p = dw/dt$ , устанавливаем, что для рис. 1.5, а потребляемая цепью мгновенная мощность положительна, а для рис. 1.5, б — периодически становится отрицательной (см. задачу 1.6р).

**1.8р.** Напряжение на сопротивлении можно найти с точностью до знака  $u_R = \pm \sqrt{pR}$  (рис. 1.13, а). Один из множества возможных графиков  $u_R(t)$  приведен на рис. 1.13, б.

**1.9м.** Зависимость  $u_L(t)$  задана на трех интервалах: 1)  $-\infty < t < t_0$ ; 2)  $t_0 \leq t < t_0 + T$ ; 3)  $t \geq t_0 + T$ . Ток индуктивности на

этих интервалах соответственно: 1)  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt$ ; 2)  $i_L =$

$$= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt; 3) i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0+T} u_L dt +$$

$$+ \frac{1}{L} \int_{t_0+T}^t u_L dt.$$

**1.10р.** В произвольный момент времени  $t > t_0$   $u_C = u_C(0) - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$ ;  $w_C = Cu^2/2$  (емкость отдает энергию, поэтому ток емкости

направлен противоположно ее напряжению). Для  $t_0$   $u_C(t_0) = q(t_0)/C = 100$  В;  $w_C(t_0) = 5$  мДж; для  $t_1$   $u_C(t_1) = 36,8$  В;  $w_C(t_1) = 0,677$  мДж. Энергия, выделившаяся в сопротивлении на интервале  $[t_0, t_1]$ , может быть определена из выражения  $w_R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} Ri_R^2 dt$  или на основании закона сохранения энергии  $w_R(t_1) = w_C(t_0) - w_C(t_1) = 4,32$  мДж.

**1.13р.** Зависимость тока источника от напряжения в рассматриваемом случае имеет линейный характер. Аналитическое выражение для такой зависимости можно получить, записав уравнение прямой линии в отрезках:  $\frac{i}{i|_{u=0}} + \frac{u}{u|_{i=0}} = 1$ . Определив по графику (см. рис. 1.7)  $i|_{u=0} = i_K = 10^{-3}$  А;  $u|_{i=0} = u_X = 5$  В, получим  $10^3 i + 0,2 u = 1$ . Параметры элементов параллельной схемы замещения:  $j = i_K = 1$  мА;  $G_i = i_K/u_X = 0,2$  мСм. Параметры элементов последовательной схемы замещения:  $e = u_X = 5$  В;  $R_i = 1/G_i = 5$  кОм.

**1.15р.** К зажимам цепей рис. 1.8, а, б подключен источник э. д. с., следовательно, напряжение на их зажимах равно э. д. с. Внешняя характеристика данных цепей совпадает с внешней характеристикой источника э. д. с.:  $u = e$ . Ток внешних зажимов цепей рис. 1.8, в, г при любом напряжении на них равен току источника тока, следовательно, внешняя характеристика этих цепей совпадает с внешней характеристикой источника тока:  $i = j$ .

## § 1.2. Законы Кирхгофа

**1.19р.** Составить все возможные уравнения баланса токов для цепи, схема которой приведена на рис. 1.14. Убедиться, что полученные уравнения являются зависимыми.

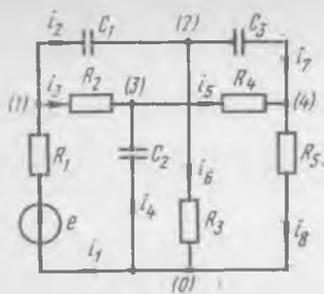


Рис. 1.14

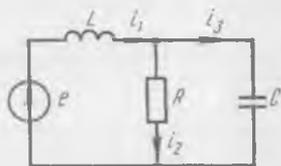


Рис. 1.15

**1.20.** Составить все возможные уравнения баланса напряжений для цепи, приведенной в предыдущей задаче. Убедиться, что полученные уравнения являются зависимыми.

**1.21.** Составить все возможные уравнения баланса токов и напряжений цепи рис. 1.15; записать компонентные уравнения и основную систему уравнений электрического равновесия этой цепи.

1.22р. Для цепи (рис. 1.16) определить общее число неизвестных токов и напряжений, число линейно независимых уравнений баланса токов и напряжений. Составить основную систему уравнений электрического равновесия цепи.

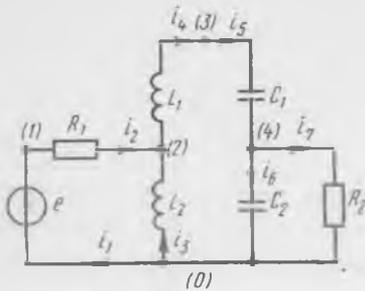


Рис. 1.16

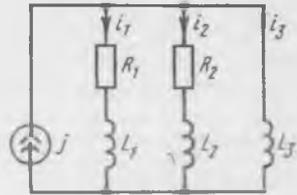


Рис. 1.17

1.23р. Составить уравнения баланса токов и напряжений для цепи рис. 1.17. Записать независимые уравнения баланса токов и напряжений.

1.24р. Составить компонентные уравнения цепи, рассмотренной в предыдущей задаче.

1.25. Составить основную систему уравнений электрического равновесия цепи, рассмотренной в задаче 1.19р.

1.26р. Для цепи рис. 1.17 составить дифференциальное уравнение цепи относительно тока  $i_1$ .

1.27. Решить задачу 1.26р, заменив источник тока источником напряжения.

#### Решения и методические указания

1.19р. На основании первого закона Кирхгофа можно составить следующие уравнения для токов в каждом узле рассматриваемой цепи:  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ;  $-i_2 + i_6 + i_7 = 0$ ;  $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$ ;  $-i_5 - i_7 + i_8 = 0$ ;  $i_1 + i_4 - i_6 - i_8 = 0$ . Для обобщенных узлов цепи уравнения баланса токов имеют вид:  $-i_1 + i_2 - i_4 + i_5 = 0$ ;  $-i_1 + i_3 + i_6 + i_7 = 0$ ;  $-i_1 - i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$ ;  $-i_1 + i_3 + i_5 + i_6 + i_8 = 0$ ;  $-i_2 - i_5 + i_6 + i_8 = 0$ ;  $-i_2 - i_3 - i_4 + i_6 + i_8 = 0$ ;  $-i_2 - i_3 - i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$ . Полученные уравнения являются зависимыми: пятое уравнение можно получить, суммируя первые четыре уравнения и умножая обе части полученного уравнения на  $-1$ , последнее уравнение можно получить, суммируя второе и третье уравнения, и т. д.

1.22р. Цепь содержит  $p = 7$  ветвей,  $q = 5$  узлов и  $p_{ин} = 1$  ветвь, содержащую только источник напряжения. Общее число неизвестных токов и напряжений ветвей равно  $2p - p_{ин} = 13$ . Для данной цепи можно составить  $m = q - 1 = 4$  независимых уравнения баланса токов:  $-i_1 + i_2 = 0$ ;  $-i_2 - i_3 + i_4 = 0$ ;  $-i_4 + i_5 = 0$ ;  $-i_5 + i_6 +$

$i_7 = 0$ ; а также  $n = p - q + 1 = 3$  уравнения баланса напряжений:  $u_{R_1} - u_{L_2} = e$ ;  $u_{L_2} + u_{L_1} + u_{C_1} + u_{C_2} = 0$ ;  $u_{R_2} - u_{C_2} = 0$ . Основная система уравнений электрического равновесия состоит из уравнений баланса и компонентных уравнений:  $u_{R_1} = R_1 i_2$ ;  $u_{L_1} = L_1 \frac{di_4}{dt}$ ;  $u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}$ ;  $u_{C_1} = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_5 dt$ ;  $u_{C_2} = \int_{-\infty}^t i_6 dt$ ;  $u_{R_2} = R_2 i_7$ .

Примечание. Вид уравнений баланса зависит от выбора независимых узлов и контуров.

1.23р. В соответствии с первым законом Кирхгофа уравнения баланса токов имеют вид:  $i_1 + i_2 + i_3 - j = 0$ ;  $-i_1 - i_2 - i_3 + j = 0$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа уравнения баланса напряжений при выборе направления обхода всех контуров против часовой стрелки имеют вид:  $u_j - u_{L_1} - u_{R_1} = 0$ ;  $u_j - u_{L_2} - u_{R_2} = 0$ ;  $u_{R_2} + u_{L_2} - u_{L_3} = 0$ ;  $u_j - u_{L_3} = 0$ ;  $u_{R_1} + u_{L_1} - u_{R_2} - u_{L_2} = 0$ ;  $u_{R_1} + u_{L_1} - u_{L_3} = 0$ .

Независимую систему уравнений образуют одно из уравнений баланса токов (например, первое) и три уравнения баланса напряжений (например, три последних).

1.24р. Для данной цепи компонентные уравнения можно составить только для ветвей, не содержащих источник тока:  $u_{R_1} = i_1 R_1$ ;  $u_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$ ;  $u_{R_2} = i_2 R_2$ ;  $u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}$ ;  $u_{L_3} = L_3 \frac{di_2}{dt}$ .

1.26р. Дифференциальное уравнение цепи относительно тока  $i_1$  получают путем исключения остальных неизвестных из основной системы уравнений электрического равновесия данной цепи, составленной при решении задач 1.23р и 1.24р:

$$\left( L_1 + L_2 + \frac{L_1 L_2}{L_3} \right) \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left( R_1 + R_2 + \frac{R_1 L_2}{L_3} + \frac{R_2 L_1}{L_3} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_3} i_1 = L_2 \frac{d^2 j}{dt^2} + R_2 \frac{dj}{dt}.$$

### § 1.3. Основные понятия топологии цепей

1.28р. Построить расширенный граф цепи, схема которой приведена на рис. 1.16.

1.29. Построить граф цепи по заданной матрице узлов:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.30р. Построить несколько различных деревьев графа цепи рис. 1.18. Выделить системы главных контуров, соответствующие каждому дереву.

1.31. Составить матрицу главных сечений графа, изображенного на рис. 1.18, соответствующую дереву, в состав которого входят ветви 1, 2, 4, 8.

1.32. Составить матрицу главных контуров цепи, воспользовавшись исходными данными задачи 1.31.

1.33. Записать полную и сокращенную матрицы узлов цепи, граф которой приведен на рис. 1.18.

1.34. Воспользовавшись матрицами узлов и главных сечений цепи, граф которой показан на рис. 1.18, составить линейно независимые уравнения баланса токов.

1.35. Составить линейно независимые уравнения баланса напряжений ветвей цепи, воспользовавшись полученной в задаче 1.32 матрицей главных контуров.

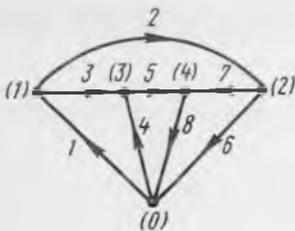


Рис. 1.18

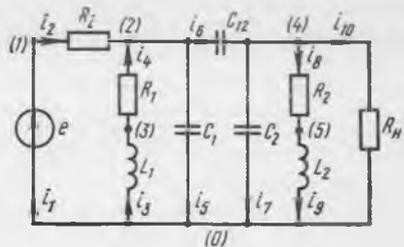


Рис. 1.19

1.36р. Сколько независимых уравнений баланса токов и напряжений можно составить для цепи рис. 1.19 при расширенном и сокращенном топологическом описании цепи?

1.37р. Построить граф цепи, рассмотренной в предыдущей задаче. Найти дуальный граф и изобразить схему дуальной цепи.

1.38. Решить задачу 1.36р для цепи, схема которой приведена на рис. 1.20.

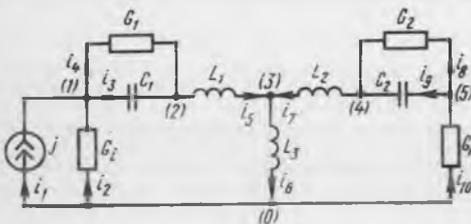


Рис. 1.20

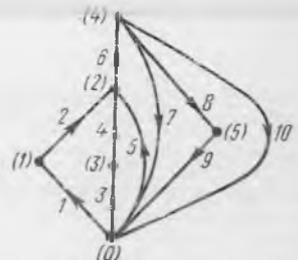


Рис. 1.21

1.39. Составить матрицы основных контуров цепей, схемы которых приведены на рис. 1.19 и 1.20.

1.40. Составить матрицы главных сечений  $Q$  для графов цепей, приведенных на рис. 1.21 и 1.22, выбрав в качестве ветвей деревьев ветви 1, 3, 5, 7, 9.

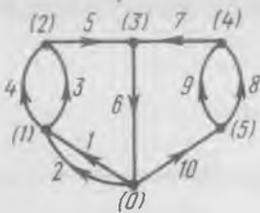


Рис. 1.22

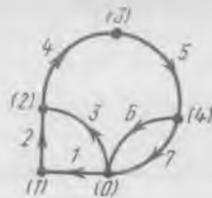


Рис. 1.23

Решения и методические указания

1.28р. Расширенный граф цепи приведен на рис. 1.23.

1.30р. Некоторые деревья графа показаны на рис. 1.24, а—г, главные контуры графа, соответствующие дереву, изображенному на рис. 1.24, а, — на рис. 1.25, а—г.

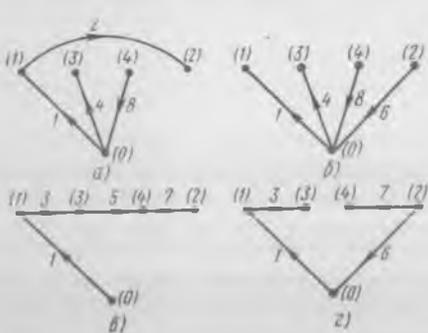


Рис. 1.24

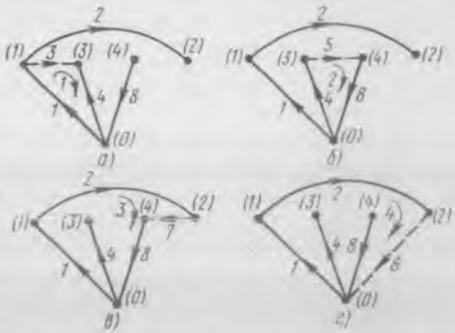
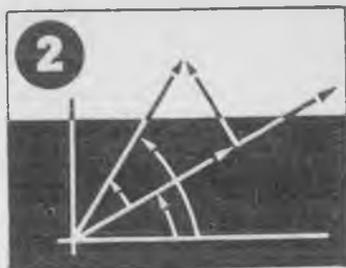


Рис. 1.25

1.36р. При расширенном описании можно составить по пять уравнений баланса токов и напряжений, при сокращенном — исключаются уравнения баланса токов для трех устраненных узлов: первого, третьего и пятого.

1.37р. Граф цепи приведен на рис. 1.21, дуальный граф — на рис. 1.22, схема дуальной цепи — на рис. 1.20.

# Простейшие линейные цепи при гармоническом воздействии



## § 2.1. Гармонические функции.

### Основы метода комплексных амплитуд

2.1. Определить амплитуду, действующее значение, период, частоту, угловую частоту и начальную фазу гармонических напряжения и тока, графики которых приведены на рис. 2.1, а, б.

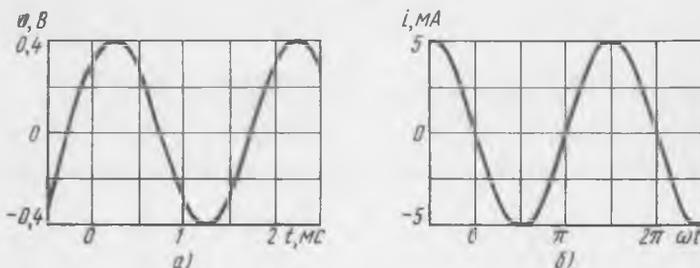


Рис. 2.1

2.2м. Найти амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу следующих гармонических напряжений:  $u_1 = 5 \cos(10^4 t + 60^\circ)$  В;  $u_2 = 5 \sqrt{2} \cos(2\pi 10^4 t - 60^\circ)$  В;  $u_3 = -4,24 \sin(100\pi t + \pi/6)$  В.

2.3м. Для заданных гармонических напряжений и токов определить амплитуды, действующие значения, комплексные амплитуды, комплексные действующие значения и мгновенные комплексы:  $u_1 = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$  В;  $u_2 = 3 \sqrt{2} \cos(\omega t - 60^\circ)$  В;  $u_3 = \sqrt{2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \times \cos(\omega t - \pi/3)$  В;  $u_4 = 11,3 \sin(\omega t + 62^\circ)$  В;  $i_1 = 3 \cos(\omega t - 214^\circ)$  А;  $i_2 = 0,5 \cdot 10^{-6} \sin \omega t$  А;  $i_3 = 0,1 \cos \omega t$  А;  $i_4 = 1,41 \times \cos(\omega t - 180^\circ)$  А.

2.4. Определить комплексные амплитуды, комплексные действующие значения и мгновенные комплексы функций, изображенных на рис. 2.1.

2.5. Перейти от показательной формы записи комплексного действующего значения тока к алгебраической:  $I_1 = 0,2e^{j2,5^\circ}$  А;  $I_2 = 24 \cdot 10^{-6} e^{-j67^\circ}$  А;  $I_3 = 9,4e^{j188^\circ}$  А;  $I_4 = 0,71e^{j266^\circ}$  А;  $I_5 = 0,82 \times 10^{-4} e^{j282^\circ}$  А;  $I_6 = 0,35e^{j145^\circ}$  А;  $I_7 = 2,8 \cdot 10^{-2} e^{j45^\circ}$  А;  $I_8 = 47 \times 10^{-5} e^{-j124^\circ}$  А.

2.6. Перейти от алгебраической формы записи комплексного действующего значения напряжения к показательной, если  $\dot{U}_1 = -2,54 - j0,923$  В;  $\dot{U}_2 = 53,2 + j9,38$  В;  $\dot{U}_3 = -0,5 - j0,5$  В;  $\dot{U}_4 = -37$  В;  $\dot{U}_5 = -j0,144$  В;  $\dot{U}_6 = -52,1 - j295$  мВ;  $\dot{U}_7 = 68,2 + j73,1$  мВ;  $\dot{U}_8 = 139 - j990$  мВ;  $\dot{U}_9 = 1,12 - j0,043$  В.

2.7м. Для заданных комплексных действующих значений или комплексных амплитуд напряжения найти мгновенные значения напряжения. Угловая частота  $\omega$  всех напряжений одинакова. Построить временные диаграммы напряжений:  $\dot{U}_{m1} = 7,5e^{j\pi/4}$  В;  $\dot{U}_2 = 0,56e^{j124^\circ}$  В;  $\dot{U}_3 = 50$  мВ;  $\dot{U}_4 = 3 \cdot 10^{-3}e^{-j45^\circ}$  В;  $U_{m5} = 48\sqrt{2}$  В;  $\dot{U}_{m6} = 14,7 + j16,3$  В;  $U_{m7} = 14,7 - j16,3$  В;  $U_{m8} = -14,7 + j16,3$  В;  $\dot{U}_{m9} = -14,7 - j16,3$  В;  $\dot{U}_{10} = 707 - j0,121$  В;  $\dot{U}_{11} = 6,6 \cdot 10^{-8} + j2,42 \cdot 10^{-4}$  В;  $\dot{U}_{m12} = 3 + j0,15$  В.

2.8м. Для заданных комплексных действующих значений или комплексных амплитуд тока определить мгновенные значения тока. Угловая частота  $\omega$  всех токов одинакова. Построить временные диаграммы токов:  $\dot{I}_{m1} = 5 - j16$  А;  $\dot{I}_2 = (3 - j0,2) \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{I}_3 = -6 + j3$  А;  $\dot{I}_{m4} = 5$  А;  $\dot{I}_{m5} = -j3 \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{I}_6 = j16,1$  А.

2.9м. Рассчитать комплексные амплитуды токов, заданных соотношениями: а)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3}$ ; б)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m3}$ ; в)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m4} + \dot{I}_{m5} + \dot{I}_{m6} + \dot{I}_{m7}$ ; г)  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m5} + \dot{I}_{m7}$ , где  $\dot{I}_{m2} = 2,71 \times e^{j47^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m3} = 8,54e^{j63^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m4} = 0,71e^{j54,7^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m5} = 7,31e^{-j5,02^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m6} = 3,32e^{j145,6^\circ}$  А;  $\dot{I}_{m7} = 5,27e^{j200,2^\circ}$  А.

2.10р. Доказать неравенство  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \neq \dot{I}_3$ , когда: а)  $\dot{I}_1 = 10e^{j30^\circ}$  А;  $\dot{I}_2 = 5e^{j60^\circ}$  А;  $\dot{I}_3 = 15,2e^{j48^\circ}$  А; б)  $\dot{I}_1 = 10e^{j30^\circ}$  А;  $\dot{I}_2 = 5e^{j60^\circ}$  А;  $\dot{I}_3 = 14,5e^{j26^\circ}$  А.

2.11м. Комплексное действующее значение тока задано в виде суммы:  $\dot{I} = 2,43e^{j53^\circ} - 0,88e^{-j37^\circ} - 1,03e^{j53^\circ} + 0,52e^{j143^\circ}$  А. Найти амплитуду и начальную фазу тока.

2.12. Записать в показательной форме комплексные амплитуды напряжений, заданных соотношениями:  $\dot{U}_{m1} = 10e^{j30^\circ} + 5e^{j60^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m2} = 10e^{j30^\circ} - 5e^{j60^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m3} = (-6 + j3)(5 - j2)$  В;  $\dot{U}_{m4} = (-6 + j3)/(5 - j2)$  В.

#### Решения и методические указания

2.2м. При определении начальной фазы гармонического напряжения  $u_3$  необходимо перейти от синусоидальной функции времени к косинусоидальной:  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ .

2.3м. См. указание к задаче 2.2м.

2.7м. Для нахождения мгновенного значения напряжения необходимо от алгебраической формы записи комплексной амплитуды или комплексного действующего значения перейти к показательной.

2.8м. См. указание к задаче 2.7м.

2.9м. Для выполнения операций сложения и вычитания комплексные числа следует представлять в алгебраической форме.

2.10р. а) Модуль суммы двух комплексных чисел не может превышать сумму модулей слагаемых. б) Необходимым условием равенства является  $\varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_2$ .

2.11м. При решении задачи можно перейти к алгебраической форме записи комплексных чисел, однако если аргументы слагаемых равны или отличаются на  $\pi$ , то следует воспользоваться равенствами:  $\underline{|A|} e^{j\alpha} + \underline{|B|} e^{j\alpha} = (\underline{|A|} + \underline{|B|}) e^{j\alpha}$ ,  $\underline{|A|} e^{j\alpha} + \underline{|B|} e^{j(\alpha+\pi)} = (\underline{|A|} - \underline{|B|}) e^{j\alpha} = (-\underline{|A|} + \underline{|B|}) e^{j(\alpha+\pi)}$ .

Если модули слагаемых равны, а аргументы отличаются на  $\pi/2$ , то  $\underline{|A|} e^{j\alpha} + \underline{|A|} e^{j(\alpha+\pi/2)} = \sqrt{2} \underline{|A|} e^{j(\alpha+\pi/4)}$ .

## § 2.2. Идеализированные элементы при гармоническом воздействии

2.13м. К зажимам идеализированного пассивного элемента (рис. 2.2) приложено напряжение  $u = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ. Определить тип и параметры элемента, если: а)  $i = 2,8 \cos(1885t + 74^\circ)$  мкА; б)  $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА; в)  $i = 2,8 \cos(1885t + 344^\circ)$  мкА.



Рис. 2.2

2.14. Рассчитать комплексные входные сопротивление и проводимость цепи, ток и напряжение на входе которой: а)  $i = 7,07 \cdot 10^{-3} \cos(10^3t + \pi/3)$  А;  $u = 14,14 \cos(10^3t + \pi/2)$  В; б)  $i = 0,282 \cos(100\pi t + 60^\circ)$  А;  $u = 50 \cos 100\pi t$  В; в)  $i = 5 \cos(3140t + 90^\circ)$  мкА;  $u = 0,4 \cos(3140t + 45^\circ)$  В; г)  $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА;  $u = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ.

2.15м. Определить резистивную  $g$  и реактивную  $b$  составляющие комплексной входной проводимости цепи, если:  $\underline{z}_1 = 3 + j5$  Ом;  $\underline{z}_2 = 5 + j3$  Ом;  $\underline{z}_3 = 2,4 - j8,2$  кОм;  $\underline{z}_4 = 50e^{j30^\circ}$  Ом;  $\underline{z}_5 = 480e^{-j74^\circ}$  Ом;  $\underline{z}_6 = 2,8$  кОм;  $\underline{z}_7 = 125e^{j90^\circ}$  Ом.

2.16м. Рассчитать резистивную  $r$  и реактивную  $x$  составляющие комплексного входного сопротивления цепи, если  $\underline{Y}_1 = 44 - j18$  мСм;  $\underline{Y}_2 = j0,12$  См;  $\underline{Y}_3 = (29 + j51) 10^{-4}$  См;  $\underline{Y}_4 = 15 \cdot 10^{-3} e^{j54^\circ}$  См.

2.17м. К емкости  $C_1 = 0,5$  мкФ приложено напряжение  $u = 8,5 \cos(10^6t + \pi/2)$  В. Определить комплексное входное сопротивление емкости, комплексную входную проводимость, сдвиг фаз между напряжением и током, комплексную амплитуду и комплексное действующее значение тока через емкость. Вычислить энергию электрического поля  $\omega$ , запасенную в емкости в момент времени  $t = 2,5 \cdot 10^{-6}$  с, а также максимальное значение энергии, запасаемой емкостью.

В какие моменты времени запасаемая емкостью энергия равна половине максимальной? Найти значения тех же величин, если  $C_2 = 0,1C_1$ .

2.18. Через индуктивность  $L = 24$  мкГн протекает ток  $i = 0,15 \times \cos(10^6 t + 60^\circ)$  А. Определить комплексное входное сопротивление индуктивности и комплексное действующее значение напряжения на ней. Записать выражение для мгновенного значения напряжения  $u$ . Рассчитать энергию магнитного поля, запасенную в индуктивности в момент времени  $t = 1$  мкс. В какие моменты времени запасаемая в индуктивности энергия равна 0,1 от своего максимального значения?

2.19. Начиная с момента  $t_0 = 0$  через сопротивление  $R = 50$  кОм протекает ток  $i = 2 \cos(10^6 t - 60^\circ)$  мА. Найти комплексное действующее значение напряжения  $U$  на сопротивлении, активную мощность  $P_A$ , поступающую в сопротивление, энергию  $\omega$ , рассеянную в сопротивлении к моментам времени  $t_1 = 1$  мкс;  $t_2 = 1$  с.

#### Решения и методические указания

2.13м. Если сдвиг фаз между напряжением и током на зажимах идеализированного пассивного элемента цепи равен 0,  $-\pi/2$  или  $\pi/2$ , то таким элементом является соответственно сопротивление, емкость или индуктивность. Параметр элемента определяется из равенства его полного сопротивления ( $R$ ,  $1/(\omega C)$  или  $\omega L$ ) и полного входного сопротивления цепи  $z_{вх} = U/I$ .

2.15м. В общем случае  $g = \operatorname{Re} [1/Z]$  и  $b = \operatorname{Im} [1/Z]$ . Если комплексное сопротивление задано в показательной форме, то следует пользоваться соотношениями  $g = z/\cos(-\varphi)$ ;  $b = z/\sin(-\varphi)$ , если в алгебраической, — соотношениями  $g = r/(r^2 + x^2)$ ,  $b = -x/(r^2 + x^2)$ .

2.16м. В общем случае  $r = \operatorname{Re} 1/Y$  и  $x = \operatorname{Im} 1/Y$ . В зависимости от того, в какой форме задана комплексная проводимость, в показательной или алгебраической, расчет производят с помощью выражений  $r = y/\cos(-\theta)$ ;  $x = y/\sin(-\theta)$  или  $r = g/(g^2 + b^2)$ ;  $x = -b/(g^2 + b^2)$ .

2.17м. Ток емкости  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ . Известные мгновенные значения тока и напряжения позволяют найти их комплексные амплитуды  $\hat{I}_m$  и  $\hat{U}_m$  (см. задачу 2.3м). По определению, входное комплексное сопротивление цепи  $Z_{вх} = \hat{U}_m / \hat{I}_m$ .

### § 2.3. Простейшие цепи при гармоническом воздействии

2.20м. Для цепи рис. 1.16 составить основную систему уравнений электрического равновесия в комплексной форме.

2.21м. Для цепи рис. 1.15 составить основную систему уравнений электрического равновесия в комплексной форме. Исключая из полу-

РАБОТА ТЕМ  
№ 322672

ченной системы напряжения на элементах, составить систему уравнений для определения токов в цепи.

2.22м. Для цепи рис. 1.14 составить линейные независимые уравнения баланса токов и напряжений ветвей в комплексной форме.

2.23. Составить уравнения электрического равновесия для определения комплексных амплитуд токов ветвей цепи (рис. 2.3).

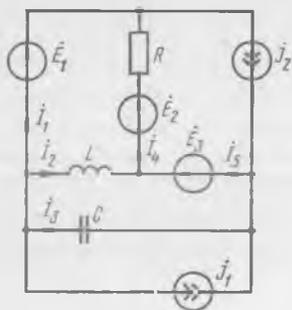


Рис. 2.3

2.24м. К зажимам цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления  $R = 40$  Ом и индуктив-

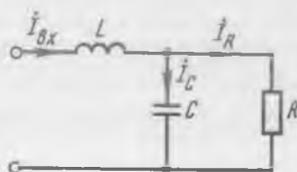


Рис. 2.4

ности  $L = 0,24$  мГн, приложено напряжение  $u = 100 \cos \omega t$ , В. Определить комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{вх}$  и комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_m$ , если частота воздействия  $f_1 = 20$  Гц;  $f_2 = 20$  кГц.

2.25м. Найти комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи, приведенной в задаче 2.24м. Построить векторную диаграмму для частоты  $f_2$ .

2.26р. В последовательной  $RL$ -цепи известны действующие значения напряжений на ее элементах:  $U_R = 5$  В;  $U_L = 3,12$  В. Вычислить действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между входным током и напряжением  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ .

2.27р. В последовательной  $RC$ -цепи известны действующие значения напряжений  $U_R = 0,707$  В;  $U_{вх} = 1$  В. Определить постоянную времени цепи  $\tau = RC$ , если угловая частота воздействия  $\omega = 10^6$  с $^{-1}$ .

2.28р. Найти входные комплексные сопротивление  $Z_{вх}$  и проводимость  $Y_{вх}$  цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления  $\bar{R} = 40$  Ом и индуктивности  $L = 240$  мкГн на частоте  $\omega = 126 \cdot 10^3$  с $^{-1}$ .

2.29м. Определить входные комплексные сопротивление  $Z_{вх}$  и проводимость  $Y_{вх}$  цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления  $\bar{R} = 1,2$  кОм и емкости  $C = 0,5$  нФ на частоте  $f = 120$  кГц.

2.30м. К цепи, рассмотренной в задаче 2.28р, подключен источник тока  $j = 2 \cos(126 \cdot 10^3 t - 37,1^\circ)$  А. Рассчитать комплексные амплитуды напряжения на элементах цепи и токов элементов. Построить векторную диаграмму.

2.31р. Определить входное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.4), если  $L = 0,1$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ;  $R = 40$  Ом;  $\omega = 10^4/\sqrt{2}$  с $^{-1}$ .

2.32. Две последовательные цепи  $R_1L_1$ ,  $R_2L_2$  и индуктивность  $L_3$  присоединены параллельно к двум зажимам. Найти комплексное входное сопротивление цепи при  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом;  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  мГн;  $\omega = 10^4$  с<sup>-1</sup>.

2.33м. Рассчитать частоту, на которой реактивная составляющая входного комплексного сопротивления цепи равна нулю. Схема цепи приведена на рис. 2.4, где  $L = 0,1$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ;  $R = 2$  кОм.

2.34. На какой частоте равны между собой резистивная и реактивная составляющие входного комплексного сопротивления цепи, приведенной в задаче 2.29м? На какой частоте полное сопротивление цепи меньше своего максимального значения в 2 раза?

2.35р. Для цепи (рис. 2.5) определить комплексные действующие значения токов в ветвях и напряжений на ее элементах. Построить векторные диаграммы токов и напряжений. Параметры элементов цепи:  $\dot{E} = 2$  В;  $\dot{J} = 4$  мА;  $R_1 = 1$  кОм;  $R_2 = 3$  кОм;  $L = 2$  мГн;  $C = 3$  нФ;  $\omega = 10^6$  с<sup>-1</sup>.

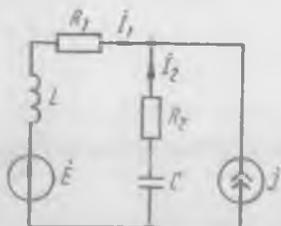


Рис. 2.5

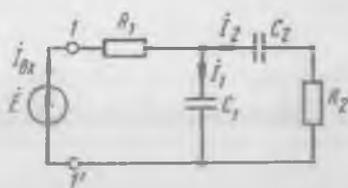


Рис. 2.6

2.36м. Для цепи (рис. 2.6) вычислить комплексное входное сопротивление относительно зажимов  $1-1'$  и рассчитать комплексное действующее значение входного тока. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = 91$  пФ;  $C_2 = 1,8$  нФ;  $E = 2,11e^{j13,3^\circ}$  В;  $f = 1$  МГц.

2.37р. В цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, известно одно комплексное действующее значение напряжения  $\dot{U}_{R_2} = 1$  В. Определить комплексные действующие значения токов и напряжений на всех элементах цепи. Построить векторные диаграммы.

2.38м. Определить комплексные действующие значения токов ветвей и напряжений на элементах цепи. Построить векторные диаграммы токов и напряжений. Схема цепи приведена на рис. 2.7, параметры

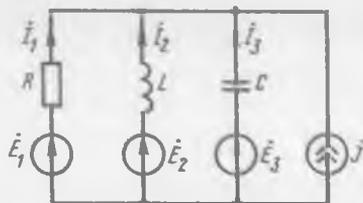


Рис. 2.7

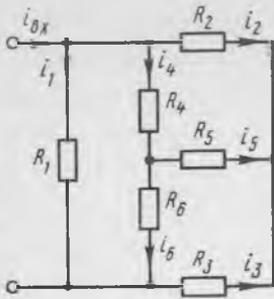


Рис. 2.8

ее элементов:  $R = 1$  кОм;  $L = 2$  мГн;  $C = 2$  нФ;  $E_1 = E_2 = 1$  В;  $E_3 = 2$  В;  $J = 2$  мА;  $\omega = 10^6$  с $^{-1}$ .

**2.39м.** Найти входное сопротивление цепи (рис. 2.8). Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = R_6 = 4$  кОм;  $R_3 = R_4 = R_5 = 2$  кОм.

**2.40р.** Как изменятся амплитуда и начальная фаза тока  $i_1$  при изменении амплитуды и начальной фазы тока  $i_3$  в цепи рис. 1.13.

### Решения и методические указания

**2.20м.** См. задачу 1.21.

**2.21м.** См. задачу 1.20.

**2.22м.** См. задачи 1.31 и 1.33.

**2.24м.** Комплексное входное сопротивление цепи  $\underline{Z}_{вх}$  равно сумме комплексных сопротивлений  $\underline{Z}_L$  и  $\underline{Z}_R$ :  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L$ . Комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_{мвх} = \dot{U}_{мвх} / \underline{Z}_{вх}$  (закон Ома в комплексной форме).

**2.25м.** Векторы, отображающие комплексные амплитуды напряжений, располагают на комплексной плоскости таким образом, чтобы графически иллюстрировать выполнение баланса напряжений в контурах. Данная цепь имеет один контур, уравнение баланса для которого имеет вид  $\dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} = \dot{U}_{мвх}$ . В соответствии с выбранным масштабом из начала координат строят вектор  $\dot{U}_{mR}$ , от конца которого строится вектор  $\dot{U}_{mL}$ ; вектор  $\dot{U}_{мвх}$  направлен из начала координат к концу вектора  $\dot{U}_{mL}$ . Направление вектора  $\dot{I}_m$  совпадает с направлением вектора  $\dot{U}_{mR}$  (рис. 2.9), так как  $\psi_{iR} = \psi_{uR}$ .

**2.26р.** Так как  $\dot{U}_{вх} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$  и  $\psi_{uL} - \psi_{uR} = 90^\circ$  (рис. 2.9), то  $\dot{U}_{вх} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89$  В;  $\varphi = \text{arctg } U_L / U_R = 32^\circ$ .

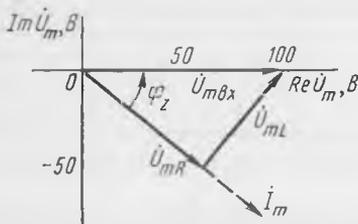


Рис. 2.9

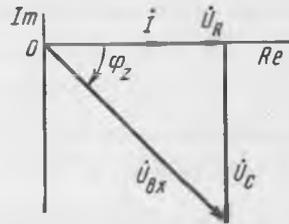


Рис. 2.10

2.27р. Векторы  $\dot{U}_R$ ,  $\dot{U}_C$  и  $\dot{U}_{вх}$  на комплексной плоскости образуют прямоугольный треугольник, причем векторы  $\dot{U}_R$  и  $\dot{U}_C$  взаимно перпендикулярны, так как напряжение  $u_R$  и ток цепи  $i$  совпадают по фазе, а  $u_C$  отстает от  $i$  на  $90^\circ$  (рис. 2.10). Зная гипотенузу  $\dot{U}_{вх}$  и один из катетов  $U_R$ , определим длину второго катета:  $U_C = \sqrt{U_{вх}^2 - U_R^2}$ . По закону Ома для действующих значений  $R = U_R/I$ ,  $C = I/(\omega U_C)$ . Подставляя последние соотношения в выражение для постоянной времени, получаем  $\tau = U_R/(\omega U_C)$ . Используя полученное выражение для  $U_C$ , найдем  $\tau = U_R/\omega \sqrt{U_{вх}^2 - U_R^2} = 1$  мкс.

2.28р. Комплексная входная проводимость  $\underline{Y}_{вх}$  равна сумме комплексных проводимостей индуктивности  $\underline{Y}_L$  и сопротивления  $\underline{Y}_R$ :  
 $\underline{Y}_{вх} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} = (25 - j33,1) \cdot 10^{-3} = 41,5 \cdot 10^{-3} e^{-j52,9^\circ}$  См;  
 $\underline{Z}_{вх} = 1/\underline{Y}_{вх} = 24,1 e^{j52,9^\circ}$  Ом.

2.29м. Проводимость  $\underline{Y}_{вх} = 1/R + j\omega C$ . См. решение задачи 2.28р.

2.30м. По закону Ома в комплексной форме  $\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{Z}_{вх}$ ;  $\dot{I}_{mR} = \dot{U}_m/R$ ;  $\dot{I}_{mL} = \dot{U}_m/(j\omega L)$ . Сопротивление  $\underline{Z}_{вх}$  определено в задаче 2.28р. Векторная диаграмма токов приведена на рис. 2.11.

2.31р. Комплексная проводимость параллельно включенных сопротивления и емкости:  $\underline{Y}_{RC} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C$ . Комплексное входное сопротивление цепи:  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_{RC} = \underline{Z}_L + \frac{1}{\underline{Y}_{RC}} = j\omega L + \frac{1}{1/R + j\omega C} = 12,5 + j0,2$  Ом.

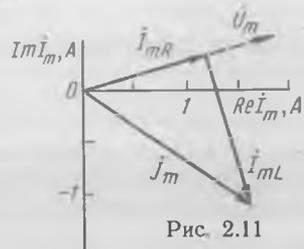


Рис. 2.11

2.33м. Из решения задачи 2.31р следует:  $x_{пх} = \text{Im } \underline{Z}_{вх} = \omega L -$

$$\frac{(1/R^2) + (\omega C)^2}{2}$$

2.35р. Основная система уравнений электрического равновесия цепи может быть записана в виде:  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{j} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} + \dot{U}_L - \dot{U}_{R2} - \dot{U}_C = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_j = -\dot{U}_{R2} - \dot{U}_C$ ;  $\dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_{R2} = R_2 \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_C = \dot{I}_2/j\omega C$ . Решая полученную систему уравнений

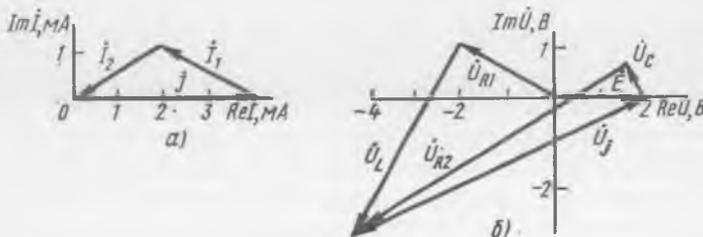


Рис. 2.12

при заданных значениях параметров цепи, находим комплексные действующие значения токов ветвей и напряжений на элементах цепи:  $\dot{I}_1 = 2,33e^{j149,8^\circ}$  мА;  $\dot{I}_2 = 2,31e^{j210,4^\circ}$  мА;  $\dot{U}_{R1} = 2,33e^{j149,8^\circ}$  В;  $\dot{U}_L = 4,66e^{j239,8^\circ}$  В;  $\dot{U}_{R2} = 6,93e^{j210,4^\circ}$  В;  $\dot{U}_C = 0,77e^{j120,4^\circ}$  В;  $\dot{U}_j = 6,98e^{j24,1^\circ}$  В. Векторные диаграммы токов и напряжений приведены на рис. 2.12, а, б.

2.36м. Ток  $\dot{I}_{вх}$  определяют из основной системы уравнений электрического равновесия цепи:  $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1} = \dot{E}_1$ ;  $-\dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{R2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} = \dot{I}_{вх}R_1$ ;  $\dot{U}_{C1} = \dot{I}_1/(j\omega C_1)$ ;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2/(j\omega C_2)$ ;  $\dot{U}_{R2} = \dot{I}_2R_2$ .

2.37р. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, определяем:  $I_2 = \dot{U}_{R2}/R_2 = 1$  мА;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_2/(j\omega C_2) = -j 88,4$  мВ;

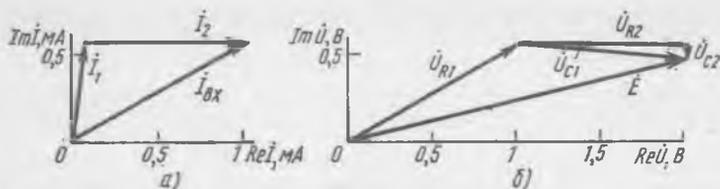


Рис. 2.13

$\dot{U}_{C1} = \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{R2} = 1 - j 0,088$  В;  $\dot{I}_1 = \dot{U}_{C1}j\omega C_1 = 0,051 + j0,572$  мА;  $\dot{I}_{вх} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1,05 + j0,57$  мА;  $\dot{U}_{R1} = \dot{I}_{вх}R_1 = 1,05 + j 0,57$  В;  $\dot{E} = \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{C1} = 2,05 + j 0,484$  В. Векторные диаграммы токов и напряжений приведены на рис. 2.13, а, б.

2.38м. Основная система уравнений электрического равновесия цепи:  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{J} = 0$ ;  $-\dot{U}_R + \dot{U}_L = \dot{E}_2 - \dot{E}_1$ ;  $-\dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{E}_3 - \dot{E}_1$ ;  $\dot{U}_C + \dot{U}_j = \dot{E}_3$ ;  $\dot{U}_R = \dot{I}_1R$ ;  $\dot{U}_L = \dot{I}_2j \omega L$ ;  $\dot{U}_C = -j\dot{I}_3/(\omega C)$ . Векторные диаграммы приведены на рис. 2.14, а—в.

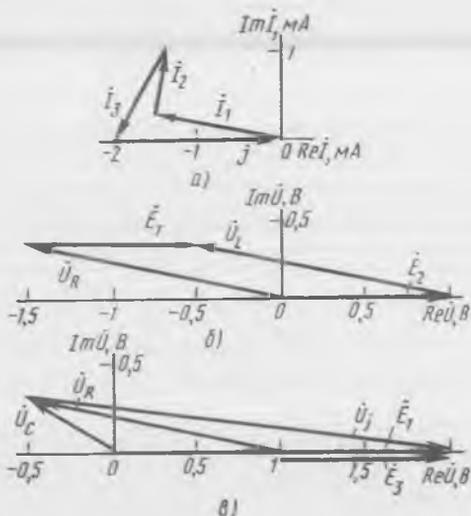


Рис. 2.14

2.39м. Отношение  $u_{\text{вх}}/i_{\text{вх}}$  можно определить из основной системы уравнений электрического равновесия цепи:  $-i_{\text{вх}} + i_1 + i_2 + i_4 = 0$ ;  $i_4 + i_5 + i_6 = 0$ ;  $i_2 + i_3 + i_5 = 0$ ;  $-u_{\text{вх}} + u_{R_1} = 0$ ;  $-u_{R_1} + u_{R_4} + u_{R_6} = 0$ ;  $u_{R_2} - u_{R_3} - u_{R_4} = 0$ ;  $u_{R_5} - u_{R_3} - u_{R_6} = 0$ ;  $u_{R_1} = i_1 R_1$ ;  $u_{R_2} = i_2 R_2$ ;  $u_{R_3} = i_3 R_3$ ;  $u_{R_4} = i_4 R_4$ ;  $u_{R_5} = i_5 R_5$ ;  $u_{R_6} = i_6 R_6$ .

2.40р. Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, можно получить соотношение между токами  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_3$  в виде  $\dot{I}_1 = \dot{I}_3 \times j\omega L_3 / (R_1 + j\omega L_1)$ , из которого следует, что амплитуда и начальная фаза тока  $i_1$  изменяются так же, как и соответствующие параметры тока  $i_3$ .

## § 2.4. Энергетические соотношения в простейших цепях

2.41р. На входе двухполюсника заданы гармонические ток и напряжение:  $i = 20 \cos(10^3 t - 30^\circ)$  мА;  $u = 12 \cos(10^3 t + 20^\circ)$  В. Определить комплексное входное сопротивление двухполюсника  $\underline{Z}_{\text{вх}}$ , активную  $P_A$ , реактивную  $P_Q$ , полную  $P_S$  и комплексную  $\underline{P}_S$  мощности. Найти мгновенную мощность, поступающую в цепь в момент времени  $t = 0$ .

2.42м. Предложить метод повышения коэффициента мощности цепи, рассмотренной в предыдущей задаче. Рассчитать параметры компенсирующего элемента.

2.43. Рассчитать активную, реактивную, полную и комплексную мощности, потребляемые цепью, рассмотренной в задаче 2.13м.

2.44р. Проверить выполнение баланса мощностей в цепи, рассмотренной в задаче 2.35р.

2.45. Проверить выполнение баланса мощностей в цепях, рассмотренных в задачах 2.37р и 2.38м.

2.46. Найти оптимальное сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_{\text{н опт}}$  соответствующее условию передачи максимума средней мощности в нагрузку. Найти среднюю мощность  $P_A$ , выделяющуюся в нагрузку, и к. п. д.  $\eta$  при  $\underline{Z}_{\text{н}} = \underline{Z}_{\text{н опт}}$ . Схема цепи приведена на рис. 2.15. Параметры элементов цепи:  $R_i = 1$  кОм;  $L_i = 0,5$  мГн;  $e = 0,1 \cos 1,57 \cdot 10^6 t$  В.

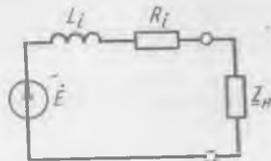


Рис. 2.15

2.47. Вычислить к. п. д. цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, если средняя мощность, выделяющаяся в нагрузке, при изменении резистивной составляющей комплексного сопротивления нагрузки уменьшилась на 10% относительно своего максимального значения.

2.48р. Потребляемая нагрузкой полная мощность 20 В·А. Определить параметры компенсирующего элемента, если коэффициент мощности  $\cos \varphi = 0,95$ , действующее значение напряжения на нагрузке  $U = 115$  В при частоте  $f = 400$  Гц. Внутреннее сопротивление источника имеет резистивный характер.

**2.41р.** Комплексное входное сопротивление двухполюсника равно отношению комплексных амплитуд напряжения и тока:  $\underline{Z}_{вх} = \underline{U}_m / \underline{I}_m = 600e^{j50^\circ} = 386 + j460 \text{ Ом}$ . Полная мощность равна произведению действующих значений тока и напряжения:  $P_S = UI = 0,12 \text{ В}\cdot\text{А}$ . Полная мощность является модулем комплексной мощности, аргументом комплексной мощности — сдвиг фаз между входным током и напряжением:  $\underline{P}_s = P_S e^{j\varphi} = 0,12e^{j50^\circ} = 0,0771 + j0,0919 \text{ В}\cdot\text{А}$ . Активная  $P_A$  и реактивная  $P_Q$  мощности представляют собой действительную и мнимую составляющие комплексной мощности:  $P_A = \text{Re } \underline{P}_s = 0,0771 \text{ Вт}$ ;  $P_Q = \text{Im } \underline{P}_s = 0,0919 \text{ вар}$ . Мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений тока и напряжения:  $p = ui = 0,0771 + 0,12 \cos(2 \cdot 10^3 t - 10^\circ) \text{ Вт}$ . В момент времени  $t = 0$  мгновенная мощность, поступающая в цепь,  $p(0) = 0,195 \text{ Вт}$ .

**2.42м.** Поскольку входное комплексное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер, компенсирующим элементом должна быть емкость. При последовательном включении компенсирующего элемента полное сопротивление емкости должно быть равно реактивной составляющей входного сопротивления цепи, а при параллельном включении полная проводимость емкости должна совпадать с абсолютным значением реактивной составляющей входной проводимости цепи.

**2.44р.** В соответствии с условием баланса мощностей сумма комплексных мощностей источников должна быть равна сумме комплексных мощностей потребителей:  $\underline{P}_{S\text{ист}} = \underline{P}_{S\text{потр}}$ , где  $\underline{P}_{S\text{ист}} = \dot{E}\dot{I}_1^* + \dot{U}_j \dot{J} = 2(-2,01 - j1,17) \cdot 10^{-3} + (6,37 + j2,85) \cdot 4 \cdot 10^{-3} = (21,5 + j9,06) \cdot 10^{-3} \text{ В}\cdot\text{А}$ ;  $\underline{P}_{S\text{потр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + j[I_1^2 \omega L - I_2^2 / (\omega C)] = \parallel (21,4 + j9,07) \cdot 10^{-3} \text{ В}\cdot\text{А}$ . Условие баланса мощностей выполняется.

**2.48р.** Когда внутреннее сопротивление источника носит резистивный характер, сумма реактивных мощностей, потребляемых компенсирующим элементом и нагрузкой, равна нулю. При последовательном соединении нагрузки и компенсирующего элемента выполняется равенство  $I^2 x + P_S \sin \varphi = 0$ , где  $x$  — реактивная составляющая комплексного сопротивления компенсирующего элемента:  $\varphi = \arccos 0,95$ . При  $\varphi > 0$  компенсирующим элементом является емкость  $C_{\text{пос}} = P_S / (\omega U^2 \sin \varphi) = 1,93 \text{ мкФ}$ , при  $\varphi < 0$  компенсирующим элементом является индуктивность  $L_{\text{пос}} = (U^2 \sin \varphi) / (P_S \omega) = 82,2 \text{ мГн}$ . При параллельном соединении нагрузки и компенсирующего элемента выполняется равенство  $U^2/x + P_S \sin \varphi = 0$ , откуда при  $\varphi > 0$   $C_{\text{пар}} = P_S \sin \varphi / (\omega U^2) = 0,198 \text{ мкФ}$ , при  $\varphi < 0$   $L_{\text{пар}} = U^2 / (\omega P_S \sin \varphi) = 0,843 \text{ Гн}$ .

## § 2.5. Преобразования цепей

**2.49.** Выразить комплексные входные сопротивления цепей (рис. 2.16, а, б) через комплексные сопротивления их элементов.

2.50. Решить задачу 2.36м, используя эквивалентные преобразования участков цепи.

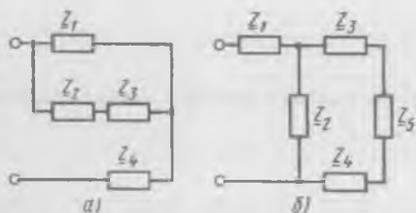


Рис. 2.16

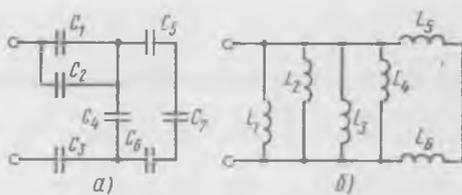


Рис. 2.17

2.51. Определить комплексное входное сопротивление и параметры схем замещения цепей рис. 2.17, а, б. Параметры элементов:  $C_1 = 70$  пФ;  $C_2 = 30$  пФ;  $C_3 = 200$  пФ;  $C_4 = 100$  пФ;  $C_5 = C_6 = C_7 = 300$  пФ;  $L_1 = L_2 = \dots = L_6 = 8$  мГн.

2.52м. Рассчитать комплексное входное сопротивление цепи (рис. 2.18) на частотах  $f_1 = 39,8$  кГц;  $f_2 = 79,6$  кГц;  $f_3 = 159$  кГц. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = C_2 = 0,5$  нФ;  $L = 10$  мГн.

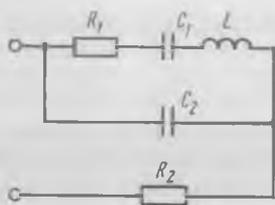


Рис. 2.18

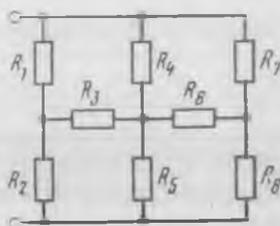


Рис. 2.19

2.53м. Определить последовательную и параллельную схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.52м.

2.54м. Найти последовательную схему замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.29м.

2.55м. Определить последовательную схему замещения участка цепи, состоящего из параллельно включенных сопротивления  $R = 100$  кОм и емкости  $C = 1$  нФ на частоте  $\omega = 10^6$  с<sup>-1</sup>.

2.56м. Найти последовательную схему замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.28р.

2.57р. Вычислить входное сопротивление цепи, рассмотренной в задаче 2.39м, путем последовательных эквивалентных преобразований ее участков.

2.58м. Используя эквивалентные преобразования участков цепей, рассчитать ток  $i_5$  цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, при подключении к ее выводам источника э. д. с.  $e = 1$  В.

2.59м. Определить входное сопротивление цепи (рис. 2.19). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 714$  Ом;  $R_2 = 833$  Ом;  $R_3 = 500$  Ом;

$R_4 = 333 \text{ Ом}; R_5 = 250 \text{ Ом}; R_6 = 1 \text{ кОм}; R_7 = 1,43 \text{ кОм}; R_8 = 625 \text{ Ом}.$

**2.60р.** Найти емкости  $C_{13}, C_{23}, C_{12}$ , при которых схема рис. 2.20, б эквивалентна схеме рис. 2.20, а, если  $C_1 = C_2 = 340 \text{ пФ}; C_3 = 20 \text{ пФ}.$

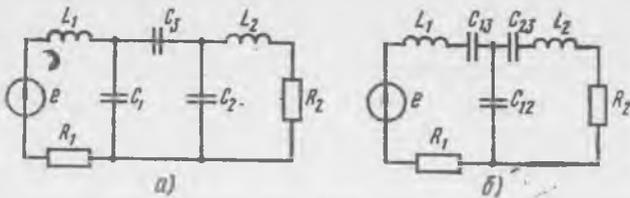


Рис. 2.20

**2.61р.** Вычислить входное сопротивление цепи (рис. 2.21). Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_3 = R_6 = 10 \text{ кОм}; R_2 = R_4 = R_5 = R_7 = 2 \text{ кОм}.$

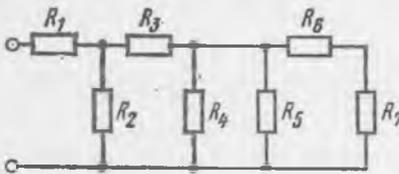


Рис. 2.21

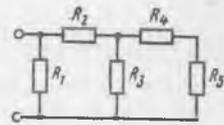


Рис. 2.22

**2.62м.** Определить входную проводимость цепи (рис. 2.22), если  $R_1 = R_3 = R_5 = 100 \text{ Ом}; R_2 = R_4 = 20 \text{ Ом}.$

#### Решения и методические указания

**2.52м.** Комплексное сопротивление ветви, составленной из элементов  $R_1, L$  и  $C_1$ ,  $\underline{Z}_{\text{эк1}} = \underline{Z}_{R1} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_{C1}$ . Комплексное сопротивление параллельно включенных ветвей  $R_1, L, C_1$  и  $C_2$   $\underline{Z}_{\text{эк2}} = (\underline{Z}_{\text{эк1}} \underline{Z}_{C2}) / (\underline{Z}_{\text{эк1}} + \underline{Z}_{C2})$ . Комплексное входное сопротивление всей цепи  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_{\text{эк2}}$ , где  $\underline{Z}_{R1} = \underline{Z}_{R2} = R$ ;  $\underline{Z}_L = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = -j/(\omega C)$ .

**2.53м.** Последовательная и параллельная схемы замещения цепи, входное комплексное сопротивление которой имеет резистивно-емкостный характер, изображены на рис. 2.23, а, б. Комплексное сопротивление последовательной цепи  $\underline{Z}' = R' - j/(\omega C')$ . Сравнивая его с известным сопротивлением цепи  $\underline{Z} = r + jx$ , определяем параметры элементов последовательной схемы замещения:  $R' = r$ ;  $C' = -1/(\omega x)$ . Комплексная входная проводимость параллельной схемы замещения  $\underline{Y}'' = 1/R'' + j\omega C''$ . Сравнивая ее с входной проводимостью

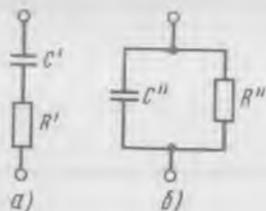


Рис. 2.23

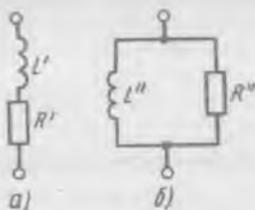


Рис. 2.24

рассматриваемой цепи  $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = g + jb$ , находим параметры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g$ ;  $C'' = b/\omega$ . Параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения цепи (рис. 2.24, а, б), имеющей резистивно-индуктивный характер входного комплексного сопротивления:  $R' = r$ ;  $L' = x/\omega$ ;  $R'' = 1/g$ ;  $L'' = 1/(\omega b)$ .

**2.54м.** Входное комплексное сопротивление рассматриваемой цепи  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_R \underline{Z}_C / (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C) = R/[1 + (\omega RC)^2] - j\omega R^2 C/[1 + (\omega RC)^2]$ .

Входное сопротивление эквивалентной цепи  $\underline{Z}' = R' - j/(\omega C')$ . Приравняв отдельно резистивные и реактивные составляющие сопротивлений  $Z$  и  $Z'$ , получаем  $R' = R/[1 + (\omega RC)^2]$ ;  $C' = [1 + (\omega RC)^2]/(\omega^2 R^2 C)$ .

**2.55м.** См. указания к задаче 2.54м.

**2.56м.** Параметры элементов схемы замещения определяют из равенства входных комплексных сопротивлений параллельной и последовательной  $RL$ -цепей (см. указания к задаче 2.54м):  $R' = R/[1 + (R/\omega L)^2]$ ;  $L' = R^2/(\omega^2 L [1 + (R/\omega L)^2])$ .

**2.57р.** Заменяем звезду сопротивлений  $R_4, R_5, R_6$  треугольником сопротивлений (рис. 2.25, а):

$R_{45} = R_4 + R_5 + R_4 R_5 / R_6 = 5$  кОм;  $R_{56} = R_5 + R_6 + R_5 R_6 / R_4 = 10$  кОм;  $R_{46} = R_4 + R_6 + R_4 R_6 / R_5 = 10$  кОм.

Заменяем параллельно включенные сопротивления  $R_1$  и  $R_{46}$ ,  $R_2$  и  $R_{45}$ ,  $R_3$  и  $R_{56}$  соответственно

сопротивлениями  $R_{\text{эк1}}$ ,  $R_{\text{эк2}}$ ,  $R_{\text{эк3}}$  (рис. 2.25, б):  $R_{\text{эк1}} = (R_1 R_{46}) / (R_1 + R_{46}) = 2,86$  кОм;  $R_{\text{эк2}} = (R_2 R_{45}) / (R_2 + R_{45}) = 2,22$  кОм;  $R_{\text{эк3}} = (R_3 R_{56}) / (R_3 + R_{56}) = 1,67$  кОм. Входное сопротивление цепи  $R_{вх} = R_{\text{эк1}} (R_{\text{эк2}} + R_{\text{эк3}}) / (R_{\text{эк1}} + R_{\text{эк2}} + R_{\text{эк3}}) = 1,65$  кОм.

**2.58м.** Из условия эквивалентности преобразования звезда—треугольник и в соответствии с первым законом Кирхгофа ток  $i_5 = i_{45} + i_{46}$  (см. решение задачи 2.57р, рис. 2.25, а). Токи  $i_{45}$ ,  $i_{46}$  находят по закону Ома после определения напряжений  $u_{R45} = u_{\text{эк2}}$  и  $u_{R56} = u_{\text{эк3}}$  (см. рис. 2.25, б).

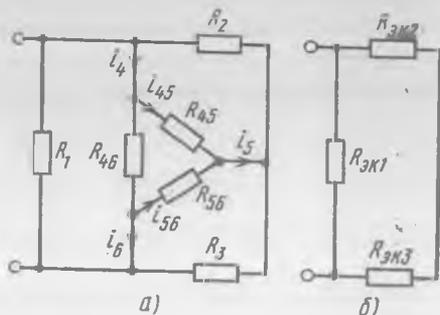


Рис. 2.25

2.59м. Для упрощения преобразований участков цепи удобно заменить соединение звездой сопротивлений  $R_3, R_4, R_5, R_6$  соединением четырехугольником:

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_4} + \frac{R_3 R_4}{R_5} + \frac{R_3 R_4}{R_6};$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_3} + \frac{R_4 R_5}{R_4} + \frac{R_4 R_5}{R_6} + \frac{R_4 R_5}{R_6} \text{ и т. д.}$$

2.60р. Для обеспечения эквивалентности преобразования треугольника емкостей  $C_1, C_2, C_3$  в звезду  $C_{13}, C_{23}, C_{12}$  необходимо выполнение условий  $\underline{Z}_{C_{13}} = \underline{Z}_{C_1} \underline{Z}_{C_3} / (\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_3})$ ;  $\underline{Z}_{C_{23}} = \underline{Z}_{C_2} \underline{Z}_{C_3} / (\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_3})$ ;  $\underline{Z}_{C_{12}} = \underline{Z}_{C_1} \underline{Z}_{C_2} / (\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_3})$ . Используя эти условия, определяем  $C_{13} = C_1 + C_3 + C_1 C_3 / C_2 = 380$  пФ;  $C_{23} = C_2 + C_3 + C_2 C_3 / C_1 = 380$  пФ;  $C_{12} = C_1 + C_2 + C_1 C_2 / C_3 = 6,46$  нФ.

2.61р. Выражение для входного сопротивления лестничной цепи можно записать в виде непрерывной дроби:

$$R_{вх} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{0 + \frac{1}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6 + \frac{1}{\frac{1}{R_7}}}}}}}}}} = 11,7 \text{ кОм.}$$

2.62м. См. решение задачи 2.61р.

## § 2.6. Цепи с взаимной индуктивностью

2.63. Определить одноименные зажимы катушек, изображенных на рис. 2.26, а—в.

2.64. Для катушек, изображенных на рис. 2.26, в, заданы индуктивности  $L_1 = L_2 = 1$  Гн;  $L_3 = 0,5$  Гн (нумерация катушек слева направо) и взаимные индуктивности  $M_{12} = 0,2$  Гн;  $M_{23} = 0,15$  Гн;  $M_{13} = 0,1$  Гн. Найти максимальную и минимальную эквивалентные

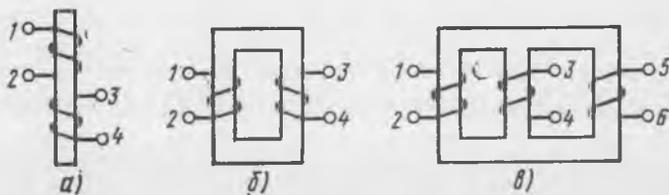


Рис. 2.26

индуктивности цепей, образованных последовательным соединением трех катушек.

**2.65р.** Составить основные системы уравнений электрического равновесия цепей, схемы которых приведены на рис. 2.27, а, б.

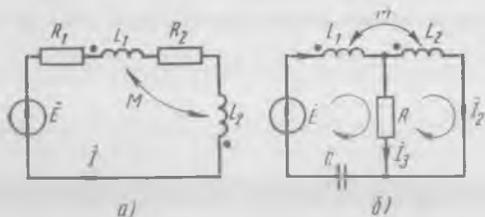


Рис. 2.27

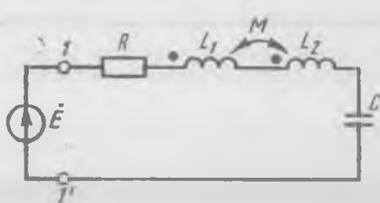


Рис. 2.28

**2.66р.** На рис. 2.28 приведена схема цепи со следующими параметрами элементов:  $R = 5$  кОм;  $C = 0,5$  нФ;  $L_1 = 3$  мГн;  $L_2 = 5$  мГн;  $M = 2$  мГн;  $E = 10$  В;  $\omega = 10^6$  с $^{-1}$ . Определить комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов I—I' и мгновенное значение тока. Проверить выполнение баланса мощностей.

**2.67.** Составить уравнения электрического равновесия для определения токов ветвей цепи рис. 2.29.

**2.68р.** Рассчитать входное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.30).

**2.69м.** Определить входное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.31), если  $C_1 = C_2 = 1$  нФ;  $L_1 = L_2 = 1$  мГн;  $R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $M = 48$  мкГн;  $\omega_1 = 10^6$  с $^{-1}$ ;  $\omega_2 = 1,02 \cdot 10^6$  с $^{-1}$ .

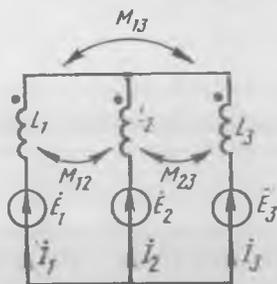


Рис. 2.29

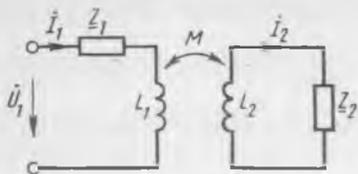


Рис. 2.30

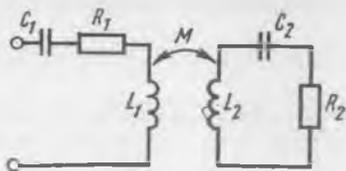


Рис. 2.31

**2.70.** Симметричный линейный трансформатор, у которого  $L = 4,2$  мГн;  $R = 1,2$  Ом;  $M = 1,8$  мГн, нагружен на емкость  $C = 3,2$  мкФ. Найти параметры последовательной схемы замещения трансформатора относительно входных зажимов на частоте  $f = 1$  кГц.

**2.71м.** На частоте  $\omega = 10^6$  с $^{-1}$  входное сопротивление одной из двух одинаковых индуктивно связанных катушек при разомкнутой другой катушке составляет  $z_{1x} = 10^4$  Ом, а при короткозамкнутой  $z_{1к} =$

$= 0,99 \cdot 10^4$  Ом. Определить индуктивность катушек, взаимную индуктивность и коэффициент связи между катушками. Потерями в катушках пренебречь.

**2.72.** Эквивалентная последовательная схема замещения входной цепи симметричного линейного трансформатора при разомкнутой вторичной обмотке на частоте  $f = 1$  кГц имеет параметры  $L_{\text{ЭК}} = 4,2$  мГн;  $R_{\text{ЭК}} = 1,2$  Ом. Найти сопротивление  $R_{\text{ЭК}}$  такой же схемы замещения при коротком замыкании вторичной обмотки, если  $L_{\text{ЭК}} = 3,43$  мГн.

**2.73.** Определить параметры последовательной схемы замещения относительно входных и выходных зажимов линейного трансформатора при коротком замыкании соответственно вторичной и первичной обмоток. Параметры трансформатора:  $L_1 = 7,58$  мкГн;  $L_2 = 75,8$  мкГн;  $M = 21,6$  мкГн;  $R_1 = 0,2$  Ом;  $R_2 = 0,7$  Ом;  $f = 105$  кГц.

**2.74м.** Две последовательные  $RL$ -цепи с параметрами  $R_1 = 1$  Ом;  $L_1 = 1$  мГн;  $R_2 = 2$  Ом;  $L_2 = 2$  мГн включены последовательно. Рассчитать параметры последовательной схемы замещения цепи, если коэффициент связи между индуктивностями  $k_{M1} = 0,1$ ;  $k_{M2} = 0,9$ .

**2.75м.** Решить предыдущую задачу для случая параллельного соединения последовательных  $RL$ -цепей. Угловая частота  $\omega = 10^5$  с $^{-1}$ .

**2.76р.** Определить входное сопротивление идеального трансформатора, нагруженного на сопротивление  $Z_{\text{Н}} = 20e^{j60^\circ}$  Ом. Число витков первичной обмотки  $N_1 = 400$ , вторичной обмотки  $N_2 = 40$ . Найти комплексные действующие значения тока  $I_1$  и напряжения  $\dot{U}_1$  на входных зажимах трансформатора, если ток вторичной обмотки  $I_2 = 0,12e^{j30^\circ}$  А.

**2.77м.** Определить схему соединений, компенсирующую емкость и коэффициент трансформации идеального согласующего трансформатора, необходимых для получения максимума средней мощности в нагрузке  $R_{\text{Н}} = 0,5$  кОм, если источник гармонического напряжения частотой  $f = 1$  кГц имеет внутреннее комплексное сопротивление  $Z_i = 320 + j100$  Ом.

#### Решения и методические указания

**2.65р.** Для рис. 2.27, а через обе индуктивности протекает один и тот же ток, поэтому напряжения на сопротивлениях связи одинаковы  $\dot{U}_{R_1} + \dot{U}_{L_1} = \dot{U}_M + \dot{U}_{R_2} + \dot{U}_{L_2} - \dot{U}_M = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_{R_1} = R_1 \dot{I}$ ;  $\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \dot{I}$ ;  $\dot{U}_M = j\omega M \dot{I}$ ;  $\dot{U}_{R_2} = R_2 \dot{I}$ ;  $\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2 \dot{I}$ ; для рис. 2.27, б — токи, протекающие через индуктивности, разные и напряжения на сопротивлениях связи в разных контурах также различные:

$$\dot{U}_{L_1} + \dot{U}_{M_1} + \dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{E}; \quad \dot{U}_{L_2} + \dot{U}_{M_2} - \dot{U}_R = 0; \quad \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$\dot{U}_{L_1} = j\omega L_1 \dot{I}_1; \quad \dot{U}_{M_1} = j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{U}_R = R \dot{I}_3; \quad \dot{U}_C = -j \dot{I}_1 / (\omega C);$$

$$\dot{U}_{L_2} = j\omega L_2 \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{M_2} = j\omega M \dot{I}_1.$$

**2.66р.** Комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{ВХ}} = R + j[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/(\omega C)] = 5 + j10$  кОм. По закону Ома в комплексной форме комплексное действующее значение тока  $\dot{I} =$

$= E/Z_{\text{вх}} = (0,4 - j0,8) \cdot 10^{-3} = 0,894 \cdot 10^{-3} e^{-j63,4^\circ}$  А, чему соответствует мгновенное значение тока  $i = 1,26 \cos(10^6 t - 63,4^\circ)$  мА. Комплексная мощность, отдаваемая источником э. д. с.:  $P_{\text{ист}} = E\dot{I} = (4 + j8) \cdot 10^{-3}$  В·А. Сумма комплексных мощностей всех потребителей  $P_{\text{потр}} = I^2 R + jI^2 [\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/(\omega C)] = (4 + j8) 10^{-3}$  В·А. Баланс мощностей выполняется.

**2.68р.** Используя основную систему уравнений электрического равновесия цепи, можно получить уравнения для токов в виде  $\dot{I}_1 Z_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1$ ;  $I_2 Z_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = 0$ . Исключая из полученной системы уравнений ток  $\dot{I}_2$ , получаем выражение для входного сопротивления цепи:  $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_1 + j\omega L_1 - (\omega M)^2/(Z_2 + j\omega L_2)$ .

**2.69м.** См. решение задачи 2.68р.

**2.71м.** Индуктивность катушек и взаимная индуктивность могут быть определены с помощью выражений, полученных из решения задачи 2.68р:  $z_{\text{вх} \times} = \omega L_1$ ;  $z_{\text{вх} \kappa} = \omega(L_1 - M^2/L_2)$ . Коэффициент связи  $k = M/L$ .

**2.74м.** При согласном включении  $L_{\text{эвк}} = L_1 + L_2 + 2M$ , при встречном  $L_{\text{эвк}} = L_1 + L_2 - 2M$ , где  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ . Независимо от вида и величины связи  $R_{\text{эвк}} = R_1 + R_2$ .

**2.75м.** Комплексное входное сопротивление цепи (см. решение задачи 2.68р)  $Z_{\text{вх}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + (\omega M)^2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2) \mp 2j\omega M}$ . Знак плюс соответствует встречному направлению токов, знак минус — согласному.

**2.76р.** Коэффициент трансформации  $n = N_2/N_1 = 0,1$ . Входное сопротивление идеального трансформатора отличается от сопротивления нагрузки в  $n^2$  раз:  $Z_{\text{вх}} = Z_{\text{н}}/n^2 = 2e^{j60^\circ}$  кОм. Напряжение на вторичной обмотке трансформатора  $\dot{U}_2 = Z_{\text{н}} \dot{I}_2 = 2,4e^{j90^\circ}$  В. Ток и напряжение на зажимах первичной обмотки:  $\dot{I}_1 = n \dot{I}_2 = 0,012e^{j30^\circ}$  А;  $U_1 = \dot{U}_2/n = 24e^{j90^\circ}$  В.

**2.77м.** Схемы соединения идеального трансформатора, компенсирующей емкости и сопротивления нагрузки представлены на рис. 2.32, а—г.

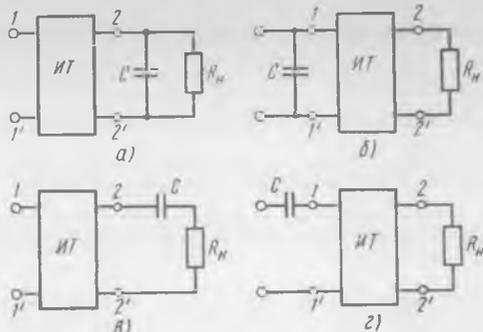
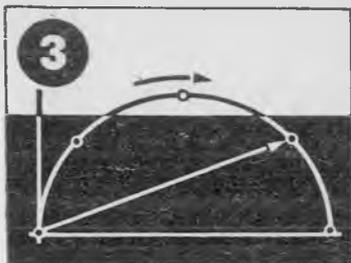


Рис. 2.32

Условие передачи максимума средней мощности в нагрузку имеет вид  $Z_i = Z_{\text{вх}}^*$  или  $Y_i = Y_{\text{вх}}^*$ , где для рис. 2.32, а  $Y_{\text{вх}} = n^2 \times (1/R_n + j\omega C)$ ; для рис. 2.32, б  $Y_{\text{вх}} = n^2/R_n + j\omega C$ ; для рис. 2.32, в  $Z_{\text{вх}} = (R_n - j \frac{1}{\omega C})/n^2$ ; для рис. 2.32, г  $Z_{\text{вх}} = \frac{R_n}{n^2} - j \frac{1}{\omega C}$ .

# Частотные характеристики простейших электрических цепей



## § 3.1. Входные и передаточные характеристики простейших цепей

**3.1р.** Найти аналитические выражения и построить (качественно) графики частотной зависимости полного сопротивления, аргумента, вещественной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления цепи, состоящей из параллельно соединенных сопротивления и емкости.

**3.2.** Найти аналитические выражения и изобразить (качественно) АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению цепей рис. 3.1, а, б, где  $R_1 = R_2 = R$ ;  $C_1 = C_2 = C$ .

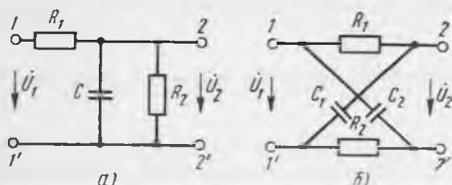


Рис. 3.1

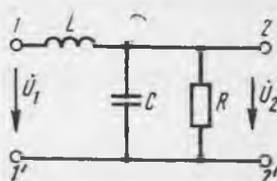


Рис. 3.2

**3.3м.** Вычислить модуль и аргумент комплексной входной проводимости параллельно соединенных сопротивления и индуктивности. Построить годограф входной проводимости, если  $R = 2$  Ом.

**3.4р.** Построить АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению делителя напряжения, схема которого приведена на рис. 3.2, если: а)  $R = \sqrt{L/C}$ ; б)  $R \rightarrow \infty$ .

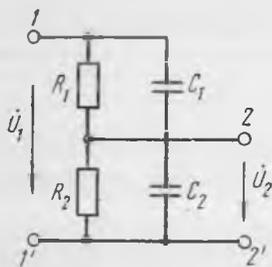


Рис. 3.3

**3.5р.** Определить емкость  $C_1$ , при которой АЧХ коэффициента передачи по напряжению цепи (рис. 3.3) имеет вид  $K(\omega) = \text{const}$ . Какой вид будет иметь при этом ФЧХ? Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1$  МОм;  $C_2 = 1$  нФ;  $R_2 = 1$  кОм.

**3.6м.** Для цепи (рис. 3.4) определить частоту, на которой АЧХ коэффициента передачи по напряжению имеет максимум. Рассчитать сдвиг фаз между входным и вы-

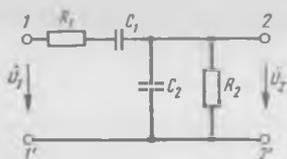


Рис. 3.4

ходным напряжениями на этой частоте, если:  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = C = 1 \text{ нФ}$ .

3.7м. Определить частоты, на которых сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями в цепях (рис. 3.5, а, б) составляет  $-\pi/2$  и  $-\pi$ . Найти модуль коэффициента передачи по напряжению на этих частотах, если:  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = C_3 = C = 1 \text{ нФ}$ .

3.8м. При каком соотношении между параметрами элементов цепи (рис. 3.6) ее входное сопротивление не зависит от частоты? Принять  $R_1 = R_2 = R/2$ .

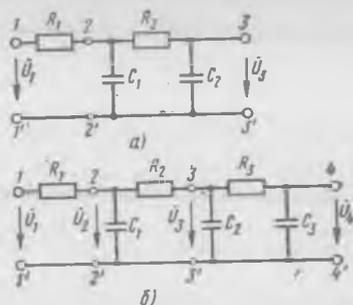


Рис. 3.5

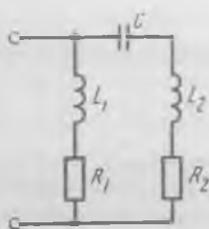


Рис. 3.6

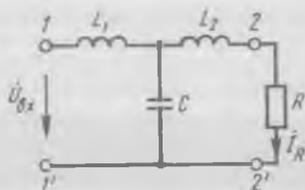


Рис. 3.7

3.9м. Найти частоту, на которой сдвиг фаз между током в сопротивлении и напряжением на входе цепи составляет  $180^\circ$ . Схема цепи приведена на рис. 3.7, где  $L_1 = L_2 = L$ .

3.10. Определить АЧХ передаточных сопротивления и проводимости цепи (рис. 3.1, а), если воздействием является ток или напряжение на входе цепи, а реакцией — напряжение или ток сопротивления  $R_2$ .

#### Решения и методические указания

3.1р. Комплексное входное сопротивление параллельной  $RC$ -цепи можно представить в виде  $Z = R/(1 + j\omega RC)$ . Из этого выражения следуют зависимости от частоты полного сопротивления  $z(\omega) = R/\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ , аргумента комплексного сопротивления  $\varphi(\omega) = -\text{arctg } \omega RC$ , вещественной  $r(\omega) = R/[1 + (\omega RC)^2]$  и мнимой  $x(\omega) = -\omega RC/[1 + (\omega RC)^2]$  составляющих комплексного входного сопротивления.

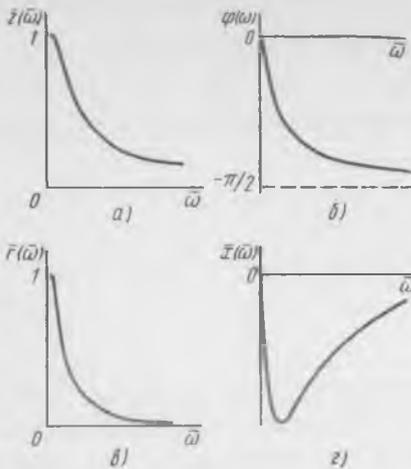


Рис. 3.8

Построение графиков упрощается при введении нормированных величин: частоты  $\bar{\omega} = \omega RC$ , полного сопротивления  $\bar{z}(\bar{\omega}) = z(\bar{\omega})/R = 1/\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}$ , вещественной  $\bar{r}(\bar{\omega}) = r(\bar{\omega})/R = 1/(1 + \bar{\omega}^2)$  и мнимой  $\bar{x}(\bar{\omega}) = x(\bar{\omega})/R = -\bar{\omega}/(1 + \bar{\omega}^2)$  составляющих КЧХ. Графики нормированных частотных зависимостей приведены на рис. 3.8, а—г.

Отметим, что нахождение экстремумов и качественное описание частотных характеристик простейших цепей возможно при использовании характеристик их элементов. В данном случае экстремумы АЧХ и ФЧХ определяются тем, что на низких частотах ( $\omega \rightarrow 0$ )  $z_C \gg$

$\gg z_R$ , входной ток близок к току сопротивления и  $z_{вх} \approx R$ ,  $\varphi_{вх} \approx 0$ ; на высоких частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ ), наоборот,  $z_C \ll z_R$ , следовательно,  $z_{вх} \approx 1/(\omega C)$ ,  $\varphi_{вх} \approx -\pi/2$ . Вид экстремумов АЧХ и ФЧХ позволяет сделать вывод об уменьшении обеих зависимостей с ростом частоты.

3.3м. Годограф входной проводимости приведен на рис. 3.9. Вид годографа не зависит от индуктивности, но с ее изменением одним и тем же точкам годографа, кроме точки, лежащей на действительной оси, соответствуют различные значения частоты.

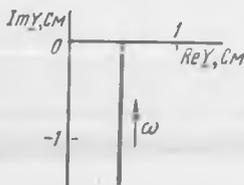


Рис. 3.9

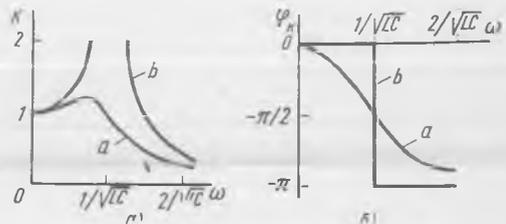


Рис. 3.10

3.4р. Коэффициент передачи по напряжению рассматриваемой цепи  $K(j\omega) = \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)$ , где  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_2 = R/(1 + j\omega RC)$ . Комплексная частотная характеристика  $K(j\omega) = 1/(1 - \omega^2 LC + j\omega L/R)$ . Модуль КЧХ представляет собой АЧХ:  $K(\omega) = 1/\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L/R)^2}$ , а аргумент — ФЧХ:  $\psi(\omega) = -\text{arctg} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$ . Частотные характеристики цепи показаны на рис. 3.10, а, б.

3.5р. Комплексный коэффициент передачи по напряжению цепи (см. решение задачи 3.4р)  $K(j\omega) = \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C_1)}{R_1 + R_2 + j\omega(R_1 R_2 C_1 + R_1 R_2 C_2)}$

Преобразуем это выражение к виду

$$K(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \left( \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2} \right)}$$

Модуль коэффициента передачи не зависит от частоты  $K(\omega) = R_2/(R_1 + R_2) = \text{const}$ , если  $R_1 C_1 = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2 C_2}{R_1 + R_2}$ , откуда  $C_1 = R_2 C_2 / R_1 = 1$  пФ. ФЧХ цепи имеет вид  $\psi(\omega) = 0$ .

**3.6м.** АЧХ и ФЧХ цепи определяют следующими выражениями:  $K(\omega) = 1/\sqrt{9 + (\omega RC - 1/\omega RC)^2}$ ;  $\psi(\omega) = -\text{arctg}(\omega RC - 1/\omega RC)/3$ . Из условия  $dK(\omega)/d\omega = 0$  следует  $\omega = 1/(RC)$ .

**3.7м.** Представим комплексный коэффициент передачи по напряжению цепи (рис. 3.5, б) в виде  $K_6(j\omega) = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_4}{\dot{U}_2} \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1}$ . Рассматривая цепь как последовательные делители напряжения, можно записать этот же коэффициент в виде  $K_6(j\omega) = \frac{Z_{33}}{R_3 + Z_{33}} \frac{Z_{23}}{R_2 + Z_{23}} \frac{Z_{22}}{R_1 + Z_{22}}$ , где  $Z_{22}$ ,  $Z_{23}$  — входные комплексные сопротивления участка цепи справа от зажимов 2—2' и 3—3' соответственно. Подставляя в это выраже-

$$\text{ние соотношения } \underline{Z}_{33} = \frac{1}{j\omega C} \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right); \quad \underline{Z}_{22} = \frac{1}{j\omega C} (R + \underline{Z}_{33}),$$

$$R + 2 \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Z}_{23} = \frac{1}{j\omega C} + R + \underline{Z}_{33},$$

можно получить выражение для КЧХ в виде  $K_6(\omega) = \frac{1}{1 - 5(\omega RC)^2 + j[6\omega RC - (\omega RC)^3]}$ . Частоту, на которой сдвиг фаз меж-

ду напряжениями  $\dot{U}_4$  и  $\dot{U}_1$  составляет  $-\pi/2$ , определяют из условий:  $\text{Re } K(j\omega) = 0$ ;  $\text{Im } K(j\omega) < 0$ . При  $\text{Im } K(j\omega) = 0$  сдвиг фаз составляет 0 или  $-\pi$ .

**3.8м.** Эта задача решается аналогично задаче 3.5р, причем выражение для входного комплексного сопротивления цепи удобно преобразовать к следующему виду:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R}{2} \frac{\left( \frac{R}{2} + \frac{2L}{RC} \right) + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

**3.9м.** На искомой частоте  $\text{Re}[Y_{21}(j\omega)] < 0$  и  $\text{Im}[Y_{21}(j\omega)] = 0$  или  $\psi_{21}(\omega) = \pi$ , где  $Y_{21}(j\omega)$  — комплексная передаточная проводимость цепи;  $\psi_{21}(\omega)$  — ее ФЧХ.

## § 3.2. Последовательный колебательный контур

**3.11.** Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$ , затухание  $d$  и полосу пропускания  $2\Delta f_0$  последовательного колебательного контура. Параметры элементов контура:  $L = 180$  мкГн;  $C = 240$  пФ;  $R = 8,2$  Ом.

3.12. Как изменяется резонансная частота, добротность и полоса пропускания последовательного колебательного контура при увеличении в 2 раза: а) сопротивления потерь; б) индуктивности; в) емкости.

3.13. Последовательный колебательный контур имеет резонансную частоту  $f_0 = 6,5$  МГц, индуктивность  $L = 12,4$  мкГн. Определить емкость и сопротивление потерь контура, если задана его полоса пропускания  $2\Delta f_0 = 150$  кГц.

3.14р. Заданы резонансная частота последовательного колебательного контура  $f_0 = 2$  МГц, ширина полосы пропускания  $2\Delta f_0 = 16$  кГц и сопротивление потерь  $R = 12$  Ом. Рассчитать параметры реактивных элементов контура.

3.15м. К последовательному колебательному контуру с параметрами элементов  $L = 2$  мГн;  $C = 1,5$  нФ;  $R = 32$  Ом подключен источник гармонической э. д. с. Определить абсолютную  $\Delta f$ , относительную  $\delta$  и обобщенную  $\xi$  расстройки контура на частотах  $f_1 = 100$  кГц;  $f_2 = 92$  кГц;  $f_3 = 88$  кГц. Найти модуль и аргумент входного комплексного сопротивления контура на этих частотах.

3.16м. В последовательном колебательном контуре известны параметры реактивных элементов  $L = 1,02$  мГн;  $C = 970$  пФ. Найти граничные частоты полосы пропускания для двух значений сопротивления потерь:  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 350$  Ом.

3.17м. Последовательный колебательный контур с добротностью  $Q = 120$ , состоящий из катушки индуктивности и конденсатора с параметрами  $L = 220$  мкГн;  $C = 535$  пФ ( $Q_C \gg Q_L$ ), подключен к источнику энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 17$  Ом. Определить резонансную частоту и полосу пропускания контура.

3.18м. К последовательному колебательному контуру, составленному из элементов  $R = 4$  Ом;  $L = 0,2$  мГн;  $C = 510$  пФ, подключен источник напряжения. Рассчитать его внутреннее сопротивление, если эквивалентная добротность контура  $Q_{эк} = 62,6$ .

3.19р. К последовательному колебательному контуру с добротностью  $Q = 84$  и сопротивлением потерь  $R = 5,2$  Ом через идеальный трансформатор подключен источник с внутренним сопротивлением  $R_i = 1$  кОм. Определить коэффициент трансформации, при котором эквивалентная добротность контура  $Q_{эк} = 42$ , и напряжение на емкости контура на резонансной частоте, если действующее значение тока источника в режиме короткого замыкания  $J = 2$  мА.

3.20м. Найти полное сопротивление последовательного колебательного контура при относительной расстройке  $\delta_1 = \pm 0,01$ ;  $\delta_2 = \pm 0,08$ . Параметры элементов контура:  $R = 25$  Ом;  $C = 640$  пФ;  $L = 0,16$  мГн.

3.21. Определить параметры последовательной схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 3.20м, при абсолютной расстройке  $\Delta f = \pm 15$  кГц.

3.22. Резонансная частота последовательного колебательного контура, состоящего из конденсатора емкостью  $C = 20$  пФ и катушки индуктивности добротностью  $Q_L = 72$ ,  $f_0 = 10,5$  МГц. Определить индуктивность катушки и добротность конденсатора, если  $2\Delta f_0 = 150$  кГц.

3.23м. Найти диапазон частот, в котором амплитуда тока последовательного колебательного контура уменьшается не более чем в  $n$  раз относительно своего максимального значения. Параметры контура  $Q = 20$ ;  $L = 0,8$  мГн;  $C = 1,2$  нФ;  $n_1 = \sqrt{2}$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n_3 = 10$ ;  $n_4 = 100$ .

3.24м. Определить диапазон частот, в котором активная мощность, потребляемая контуром, рассмотренным в предыдущей задаче, уменьшается не более чем в  $n$  раз относительно своего максимального значения.

3.25р. Амплитуды напряжения на индуктивной катушке и конденсаторе последовательного колебательного контура на резонансной частоте  $\omega_0$  составляют  $U_{mL} = U_{mC} = 12$  В, а на частоте  $\omega$   $U_{mL} = 8$  В;  $U_{mC} = 8,8$  В. Вычислить аргумент входного комплексного сопротивления контура на частоте  $\omega$ , если амплитуда напряжения на входе контура постоянна:  $U_{mвх} = 0,6$  В.

3.26р. Рассчитать ширину полосы пропускания цепи (рис. 3.11). Параметры цепи:  $L = 1$  мГн;  $C = 1$  нФ;  $R = 10$  Ом;  $R_i = 5$  Ом;  $R_H = 0,1$  МОм.

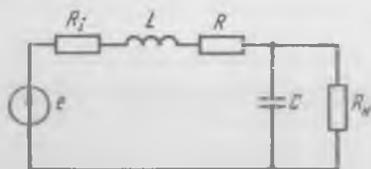


Рис. 3.11

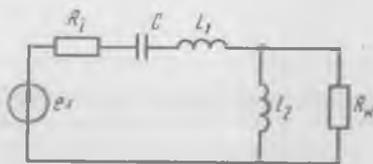


Рис. 3.12

3.27р. Определить параметры реактивных элементов колебательного контура (рис. 3.12), при которых в сопротивлении нагрузки  $R_H$  выделяется максимальная средняя мощность. Параметры цепи:  $R_i = 50$  Ом;  $R_H = 2$  кОм;  $f_0 = 28$  МГц;  $2\Delta f_0 = 2,5$  МГц.

3.28м. Колебательный контур (рис. 3.13) подключен к источнику энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 50$  Ом. Определить емкости  $C_1$  и  $C_2$ , если  $f_0 = 2$  МГц;  $Q_{зк} = 18$ ;  $L = 120$  мкГн;  $Q_L = 86$ ;  $Q_C \gg Q_L$ ,  $R_H = 120$  кОм.

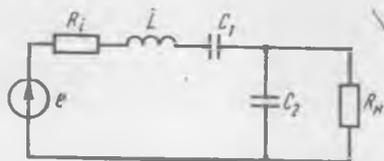


Рис. 3.13

3.29м. В последовательный колебательный контур с элементами  $R = 10$  Ом;  $L = 2$  мГн;  $C = 2$  нФ включен некоторый двухполюсник. Найти эквивалентную добротность полученного контура при следующих значениях дифференциального сопротивления двухполюсника:  $R_{i1} = 10$  Ом;  $R_{i2} = 0$ ;  $R_{i3} = -5$  Ом;  $R_{i4} = -15$  Ом.

3.30. Последовательный колебательный контур содержит конденсатор переменной емкости, у которого  $C_{min} = 10$  пФ;  $C_{max} = 500$  пФ. Определить коэффициент перекрытия контура по частоте  $k_f = f_{0max}/f_{0min}$ .

3.14р. Решая систему уравнений  $\rho = \omega_0 L$ ,  $Q = \rho/R$ ,  $Q = \omega_0 / (2\Delta\omega_0)$ , находим индуктивность контура:  $L = R / (2\pi 2\Delta f_0) = 119 \text{ мкГн}$ . Заменяя в исходной системе первое уравнение на  $\rho = 1/(\omega_0 C)$ , получаем  $C = 2\Delta f_0 / (2\pi f_0^2 R) = 53 \text{ пФ}$ .

3.15м. Обобщенная расстройка контура  $\xi = Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega) = Q(f/f_0 - f_0/f)$ . В области малых расстроек ( $\delta \ll 0,1$ ) можно использовать приближенное соотношение  $\xi \approx 2\delta Q$ .

3.16м. У контуров с высокой добротностью ( $Q \geq 5$ ) АЧХ в полосе пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты. В этом случае граничные частоты можно определять с помощью приближенного соотношения  $f_{гр} \approx f_0 \pm 2\Delta f_0/2$ . При низкой добротности контура необходимо пользоваться точным выражением  $f_{гр} = f_0 \sqrt{1 + 1/4Q^2 \pm 1/2Q}$ .

3.17м. При использовании последовательных схем замещения элементов цепи можно считать, что сопротивление потерь контура равно сопротивлению потерь катушки индуктивности:  $R \approx R_L = \omega_0 L / Q_L$ . Ширина полосы пропускания  $2\Delta f_0 = f_0 / Q_{эк}$ , где  $Q_{эк} = Q / (1 + R_i/R)$  — эквивалентная добротность контура.

3.18м. См. указание к задаче 3.17м.

3.19р. Эквивалентная добротность контура  $Q_{эк} = Q / (1 + R_i/R)$ , где  $R_i$  — сопротивление вторичной обмотки идеального трансформатора при подключении к первичной обмотке источника. Сопротивления источника и вторичной обмотки связаны соотношением  $R_i = n^2 R_1$ . Коэффициент трансформации  $n = \sqrt{R_i/R_1} = \sqrt{R(Q/Q_{эк} - 1)/R_1} = 0,0721$ . На резонансной частоте входное сопротивление нагруженного на контур трансформатора  $R_{вхт} = R/n^2$ ; напряжение на его входе  $U_1 = JR_i R_{вхт} / (R_i + R_{вхт})$ , выходе  $U_2 = nU_1$ , на емкости контура  $U_C = Q_{эк} U_2$ . Искомое напряжение  $U_C = 3,03 \text{ В}$ .

3.20м. Полное сопротивление контура  $z = R \sqrt{1 + \xi^2}$ . Обобщенная расстройка связана с относительной выражением  $\xi = \delta Q (\delta + 2) / (\delta + 1)$ . При  $\delta \ll 0,1$   $\xi \approx 2\delta Q$ .

3.23м. Обобщенная расстройка  $\xi_{гр}$ , соответствующая указанному уровню тока  $I_{\max}/n$ , определяется из зависимости нормированного тока контура от частоты:  $\Gamma_{\xi=\xi_{гр}} = 1/\sqrt{1 + \xi_{гр}^2} = 1/n$ . Граничная частота может быть найдена из соотношения  $\xi_{гр} = Q(f_{гр}/f_0 - f_0/f_{гр})$ .

3.24м. Решение данной задачи отличается от решения предыдущей только тем, что искомый диапазон частот определяют из зависимости квадрата тока от частоты, так как  $P_A = I^2 R$ ;  $R = \text{const}$ .

3.25р. Амплитуды напряжения на элементах контура определяют по следующим соотношениям:  $U_{mC} = Q \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} U_{mвх}$ ,  $U_{mL} = Q \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} U_{mвх}$ . Их отношение позволяет найти нормированную

частоту:  $\sqrt{U_{mL}/U_{mC}} = \omega/\omega_0$ . Добротность контура равна модулю коэффициента передачи контура на резонансной частоте:  $Q =$

$= U_{mL}(\omega_0)/U_{mвх} = U_{mC}(\omega_0)/U_{mвх}$ . Аргумент входного комплексного сопротивления

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{U_{mL}(\omega_0)}{U_{mвх}} (\sqrt{U_{mL}/U_{mC}} - \sqrt{U_{mC}/U_{mL}}) = -62,4^\circ.$$

**3.26р.** Ширина полосы пропускания последовательного колебательного контура  $2\Delta f_0 = f_0/Q_{эк}$ , где  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 159$  кГц — резонансная частота контура;  $Q_{эк} = \rho/(R_i + R + R_n^*)$  — эквивалентная добротность контура;  $\rho = \sqrt{L/C} = 1$  кОм — характеристическое сопротивление контура. Для того чтобы учесть влияние сопротивления нагрузки на ширину полосы пропускания контура, заменим на резонансной частоте  $f_0$  участок цепи с параллельно включенными элементами  $C$  и  $R_n$  участком цепи с последовательно включенными элементами  $C'$  и  $R_n^*$  (см. задачу 2.54м):  $R_n^* = R_n/[1 + (2\pi f_0 R_n C)^2] \approx \approx 1/(2\pi f_0 C)^2 R_n = 10$  Ом;  $C' = C[1 + (2\pi f_0 R_n C)^2]/(2\pi f_0 R_n C)^2 \approx C = 1$  нФ.

Используя полученное значение  $R_n^*$ , определяем эквивалентную добротность контура и ширину полосы пропускания:  $Q_{эк} = 40$ ;  $2\Delta f_0 = 3,98$  кГц.

**Примечание.** Решение верно только при  $Q_{эк} \gg 1$ , когда  $C' \approx C$ .

**3.27р.** Из условия согласования нагрузки с внутренним сопротивлением источника можно записать  $R_n = z_{вх}(\omega_0) = R_i = 50$  Ом, где  $R_n'$  — сопротивление нагрузки в последовательной схеме замещения (см. задачу 3.26р). Находим эквивалентную добротность, характеристическое сопротивление, емкость и общую индуктивность контура:  $Q_{эк} = f_0/(2\Delta f_0) = 11,2$ ;  $\rho = (R_i + R_n') Q_{эк} = 1,12$  кОм;  $C = 1/(\rho \times \times 2\pi f_0) = 5,08$  пФ;  $L = \rho/(2\pi f_0) = 6,37$  мкГн. Индуктивность (см. задачу 2.56м)  $L_2 = R_n/2\pi f_0 \sqrt{R_n/R_n' - 1} = 1,82$  мкГн. Индуктивность в последовательной схеме замещения (см. задачу 2.56м):  $L_2' = = L_2/[1 + (2\pi f_0 L_2/R_n)^2] = 1,57$  мкГн, следовательно,  $L_1 = L - L_2' = = 4,8$  мкГн.

**3.28м.** См. указания к задаче 3.26р.

**3.29м.** Отрицательное значение добротности показывает, что при данных параметрах цепи контур не потребляет, а отдает энергию, источником которой является двухполюсник с отрицательным входным дифференциальным сопротивлением.

### § 3.3. Параллельный колебательный контур

**3.31р.** Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$  и резонансное сопротивление  $R_0$  контура (рис. 3.14), если  $L = 0,2$  мГн;  $R = 12$  Ом;  $C = 360$  пФ.

**3.32р.** К параллельному колебательному контуру (см. задачу 3.31р) подключен источник гармонического напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура. Параметры источника:  $E = 1$  В;  $R_i = 120$  кОм. Определить действующие значения тока источника, напряжения на контуре, тока емкостной и индуктивной ветвей контура.

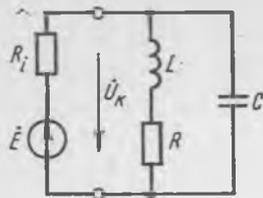


Рис. 3.14

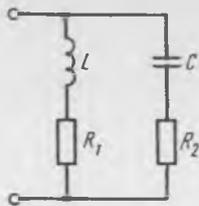


Рис. 3.15

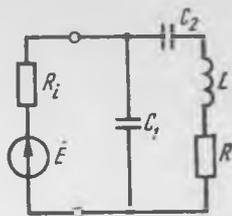


Рис. 3.16

3.33. Найти эквивалентную добротность и ширину полосы пропускания контура, рассмотренного в задаче 3.32р.

3.34м. Для контура, рассмотренного в задаче 3.31р, определить модуль  $z(\omega)$  и аргумент  $\varphi(\omega)$  комплексного входного сопротивления на частотах, соответствующих следующим значениям относительной расстройки:  $\delta_1 = 10^{-2}$ ;  $\delta_2 = -10^{-2}$ ;  $\delta_3 = 10^{-1}$ ;  $\delta_4 = -10^{-1}$ .

3.35м. Найти комплексную амплитуду напряжения на контуре, рассмотренном в задаче 3.32р, если э. д. с. источника  $e = 0,707 \cos(\omega_0 + \Omega)t$ , В, где  $\omega_0$  — резонансная угловая частота контура;  $\Omega_1 = 0,01\omega_0$ ;  $\Omega_2 = -0,01\omega_0$ ;  $\Omega_3 = 0,1\omega_0$ ;  $\Omega_4 = -0,1\omega_0$ ;  $R_i = 160$  кОм.

3.36р. Определить частоты резонанса токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0N}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p$  и резонансное сопротивление  $R_0$  сложного параллельного контура (рис. 3.15). Параметры элементов цепи:  $L_1 = 150$  мкГн;  $L_2 = 50$  мкГн;  $C = 240$  пФ;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом.

3.37. Решить задачу 3.36р при  $L_1 = 50$  мкГн;  $L_2 = 150$  мкГн.

3.38р. Вычислить частоты резонансов токов и напряжений  $f_{0T}$  и  $f_{0N}$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$ , коэффициент включения  $p$ , резонансное сопротивление контура  $R_0$ , эквивалентную добротность  $Q_{эк}$ , полосу пропускания  $2\Delta f_0$  и действующее значение напряжения на контуре на резонансных частотах  $U_K$ . Параметры элементов цепи (рис. 3.16):  $L = 220$  мкГн;  $C_1 = 48$  пФ;  $C_2 = 320$  пФ;  $R = 16$  Ом;  $R_i = 100$  кОм;  $E = 24$  В.

3.39. Решить задачу 3.38р при  $C_1 = 320$  пФ;  $C_2 = 48$  пФ.

3.40. Определить тип сложного параллельного колебательного контура и найти его сопротивление потерь  $R_{\Pi}$ , если на частотах  $f_1 = 17$  МГц,  $f_2 = 51$  МГц входное сопротивление контура  $R_{вх}$  достигает соответственно своих максимального и минимального значений,  $R_{вх \max} = 20$  кОм. На частоте  $f_1$  добротность контура  $Q = 40$ .

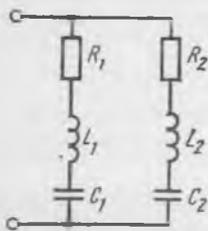


Рис. 3.17

3.41м. Определить резонансные частоты, характеристическое сопротивление, добротность и резонансное сопротивление сложного параллельного колебательного контура, схема которого приведена на рис. 3.17. Параметры элементов контура:  $R_1 = 12$  Ом;  $L_1 = 220$  мкГн;  $C_1 = 270$  пФ;  $R_2 = 9,6$  Ом;  $L_2 = 640$  мкГн;  $C_2 = 410$  пФ.

3.42р. Как изменится полоса пропускания сложного параллельного контура после подключения к нему источника с внутренним сопротивлением  $R_i$ , если коэффициент включения контура выбран таким, чтобы активная мощность источника была максимальной? Считать внутреннее сопротивление источника меньшим резонансного сопротивления контура при коэффициенте включения  $p = 1$ .

3.43. В сложном параллельном колебательном контуре (см. рис. 3.15)  $\omega_{0T} = 0,22 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $C = 5 \text{ нФ}$ ;  $Q = 48$ . Определить коэффициент включения контура, при котором после подключения к контуру источника энергии с внутренним сопротивлением  $R_i = 20 \text{ кОм}$  полоса пропускания контура составляет  $2\Delta\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$ .

#### Решения и методические указания

3.31р. В случае малых потерь резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность параллельного колебательного контура совпадают с соответствующими параметрами последовательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC} = 593 \text{ кГц}$ ;  $\rho = \sqrt{L/C} = 745 \text{ Ом}$ ;  $Q = \rho/R = 62,1$ . Резонансное сопротивление параллельного колебательного контура в  $Q$  раз превышает его характеристическое сопротивление:  $R_0 = Q\rho = \rho^2/R = 46,3 \text{ кОм}$ .

3.32р. На частоте резонанса токов входное сопротивление контура имеет резистивный характер и равно  $R_0$ . Действующее значение тока в неразветвленной части цепи  $I = E/(R_i + R_0) = 6,01 \text{ мкА}$ . Напряжение на контуре  $U_K = R_0 I = 0,278 \text{ В}$ . В случае малых потерь действующие значения тока емкостной и индуктивной ветвей на частоте резонанса токов приблизительно равны:  $I_C \approx I_L \approx U_K/\rho = QI = 0,374 \text{ мА}$ .

3.34м. Комплексное входное сопротивление параллельного колебательного контура  $\underline{Z}_{\text{вх}} = z_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi}$ . Определение обобщенной расстройки см. в указаниях к задаче 3.20м.

3.35м. Комплексная амплитуда напряжения на контуре  $\dot{U}_{mK} = \dot{E}_m \underline{Z}_{\text{вх}} / (R_i + \underline{Z}_{\text{вх}})$ , где  $\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{R_0}{1 + \xi^2} - j \frac{R_0 \xi}{1 + \xi^2}$ ;  $\xi = Q \left( \frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Omega} \right)$ .

3.36р. Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного колебательного контура в случае малых потерь совпадают с частотой резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_{0T} = \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C}} = 726 \text{ кГц}$ ;  $\rho = \sqrt{(L_1 + L_2)/C} = 913 \text{ Ом}$ ;  $Q = \rho / (R_1 + R_2) = 65,2$ . Частота резонанса напряжений определяется параметрами ветви, содержащей емкость  $C$  и индуктивность  $L_2$ :  $f_{0H} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_2 C}} = 1,45 \text{ МГц}$ . Коэффициент включения контура характеризуется отношением индуктивности  $L_1$  индуктивной ветви к суммар-

ной индуктивности контура:  $\rho = L_1/(L_1 + L_2) = 0,75$ . Резонансное сопротивление контура  $R_0 = (\rho\rho)^2/(R_1 + R_2) = 33,5$  кОм.

**3.38р.** Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного колебательного контура в случае малых потерь совпадают с частотой резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_{0T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1C_2/(C_1+C_2)}}$

$$= 1,66 \text{ МГц}; \rho = \sqrt{\frac{L(C_1+C_2)}{C_1C_2}} = 2,3 \text{ кОм}; Q = \rho/R = 143.$$

Частота резонанса напряжений сложного параллельного контура определяется параметрами ветви, содержащей емкость  $C_2$  и индуктивность  $L$ :

$$f_{0H} = 1/2\pi\sqrt{LC_2} = 600 \text{ кГц. Эквивалентная добротность } Q_{\text{эк}} = \frac{Q}{(1 + R_0/R_i)}$$

$= f_{0T}/Q_{\text{эк}} = 40,4$  кГц. На резонансных частотах входное сопротивление контура имеет резистивный характер, и напряжения на контуре равны:  $U_{\text{кпрт}} = ER_0/(R_0 + R_i) = 17,1$  В;  $U_{\text{кпрн}} = ER/(R + R_i) = 1,5$  мВ.

**3.41м.** Резонансное сопротивление рассматриваемого контура удобно определять, используя выражение для входного комплексного сопротивления контура:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1 - i\frac{1}{\omega C_1})(R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2})}{R_1 + R_2 + j[\omega(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})]}$$

На частоте резонанса токов в высокодобротном контуре

$$\left| \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right| \gg R_1; \quad \left| \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right| \gg R_2;$$

$$\omega(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \approx 0;$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(\omega_{0T}) = R_0 \approx - \left( \omega_{0T} L_1 - \frac{1}{\omega_{0T} C_1} \right) \left( \omega_{0T} L_2 - \frac{1}{\omega_{0T} C_2} \right) \frac{1}{R_1 + R_2}.$$

**3.42р.** При согласовании контура на резонансной частоте его сопротивление равно сопротивлению источника:  $R_0 = R_i$ . Так как эквивалентная добротность  $Q_{\text{эк}} = Q/(1 + R_0/R_i)$ , то при подключении согласованного источника эквивалентная добротность уменьшается, а полоса пропускания контура увеличивается в 2 раза.

### § 3.4. Связанные колебательные контуры

**3.44р.** Для системы двух связанных контуров (рис. 3.18) с одинаковыми параметрами:  $R_1 = R_2 = R = 24$  Ом;  $C_1 = C_2 = C = 1,2$  нФ;  $C_{12} = 18$  нФ;  $L_1 = L_2 = L = 0,5$  мГн. Определить резонансную частоту  $f_0$ , добротность  $Q$ , коэффициент связи  $k$ , параметр связи  $A$  и максимально возможное значение тока  $I_{2\text{max max}}$  при  $E = 1$  В.

3.45р. Для цепи, рассмотренной в задаче 3.44р, определить частоты связи  $f_1, f_2$ , действующие значения тока второго контура и напряжения на емкости  $C_2$  на резонансной частоте и частотах связи.

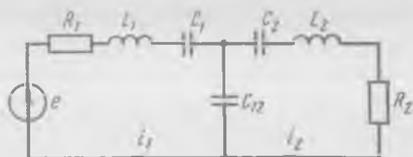


Рис. 3.18

3.46м. Два связанных колебательных контура (рис. 3.18) с одинаковыми параметрами настроены индивидуально на резонансную частоту  $f_0 = 0,8$  МГц. Найти значения  $C_1, C_2, C_{12}$ , соответствующие настройке на полный резонанс при  $L_1 = L_2 = L = 120$  мкГн;  $Q_1 = Q_2 = Q = 60$ .

3.47. Используя данные задачи 3.46м, определить емкости  $C_1, C_2, C_{12}$ , соответствующие: а)  $A_1 = 0,5$ ; б)  $A_2 = 1$ ; в)  $A_3 = 2$ .

3.48м. Определить значения емкостей  $C_1, C_2, C_{12}$  при внешней емкостной связи между контурами, параметры которых даны в задаче 3.47.

3.49р. Вычислить частоту настройки на второй частный резонанс  $f_{02}$  для системы связанных аperiodического и колебательного контуров (рис. 3.19) со следующими параметрами:  $R = 200$  Ом;  $C_1 = 3,2$  нФ;  $C_2 = 2$  нФ;  $C_{12} = 4,8$  нФ;  $L = 0,6$  мГн.

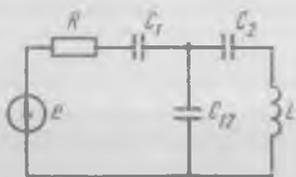


Рис. 3.19

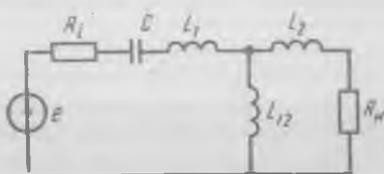


Рис. 3.20

3.50. Для цепи (рис. 3.20) определить емкость  $C$ , соответствующую настройке на первый частный резонанс, при  $R_1 = 75$  Ом;  $L_1 = 20$  мкГн;  $L_2 = 1,5$  мкГн;  $L_{12} = 4$  мкГн;  $R_н = 50$  Ом;  $\omega = 5,5 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>.

3.51. В системе двух одинаковых колебательных контуров с внутренней индуктивной связью определить значение индуктивности связи  $L_{12}$ , при котором: а)  $A = 0,5$ ; б)  $A = 1$ ; в)  $A = 2,41$ . Параметры контуров:  $L_{11} = L_{22} = 0,8$  мГн;  $C_1 = C_2 = 1,2$  нФ;  $R_1 = R_2 = 40,8$  Ом.

3.52. Для системы контуров, рассмотренных в задаче 3.51, найти диапазон частот, в котором амплитуда тока вторичного контура уменьшается по сравнению со своим максимальным значением в  $n$  раз, если  $n_1 = \sqrt{2}$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n_3 = 10$ ;  $n_4 = 100$ .

#### Решения и методические указания

3.44р. Собственные емкости первого и второго контуров имеют одинаковые значения:  $C_{11} = C_{22} = CC_{12}/(C + C_{12}) = 1125$  пФ. Резонансные частоты и добротности первого и второго контуров также одина-

ковы:  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC_{11}} = 212,2$  кГц;  $Q = \sqrt{L/C_{11}}/R = 27,8$ . Коэффициент связи между контурами  $k = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12} = 0,0625$ . Параметр связи  $A = kQ = 1,74$ . Максимальное значение тока второго контура  $I_{2\max\max} = E/(2R) = 20,8$  мА.

**3.45р.** Обобщенные расстройки, соответствующие частотам связи  $f_1$  и  $f_2$ , для связанных контуров с одинаковыми параметрами  $\xi_{1,2} = \pm \sqrt{A^2 - 1} = \pm 1,42$ . Для расчета частот связи  $f_1$  и  $f_2$  воспользуемся приближенным соотношением  $\xi \approx 2Q\Delta f/f_0$ , откуда  $\Delta f = \xi f_0/(2Q) = \pm 5,42$  кГц;  $f_{1,2} = f_0 + \Delta f$ ;  $f_1 = 206,8$  кГц;  $f_2 = 217,6$  кГц.

Действующее значение тока второго контура  $I_2 = 2AI_{2\max\max}/\sqrt{(1 + A^2 + \xi^2)^2 + 4\xi^2}$ . На резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) ток второго контура  $I_2(f_0) = 2AI_{2\max\max}/(1 + A^2) = 18$  мА. На частотах связи ток второго контура достигает значения  $I_{2\max\max} : I_2(f_1) = I_2(f_2) = 20,8$  мА. Напряжение на емкости в соответствии с законом Ома для действующих значений  $U_C = I/(\omega C)$ :  $U_{C_2}(f_0) = 11,3$  В;  $U_{C_2}(f_1) = 13,4$  В;  $U_{C_2}(f_2) = 12,7$  В.

**3.46м.** Настройке системы связанных контуров с одинаковыми параметрами на полный резонанс соответствует оптимальное значение коэффициента связи  $k = k_{\text{opt}} = 1/Q$ . Для случая внутренней емкостной связи коэффициент  $k$  может быть выражен через емкости цепи следующим образом (см. задачу 3.44р):  $k = \sqrt{C_{11}C_{22}/C_{12}}$ . Собственные емкости контуров могут быть определены по известной резонансной частоте и индуктивности контуров.

**3.48м.** См. задачу 2.60р.

**3.49р.** Условие настройки на второй частный резонанс заключается в равенстве нулю суммы реактивных составляющих соответственно сопротивления второго контура  $x_{22}$  и сопротивления  $x_{\text{вн}2}$ , вносимого во второй контур:  $x_{22} + x_{\text{вн}2} = 0$ , где  $x_{\text{вн}2} = -x_{11}x_{12}^2/(R^2 + x_{11}^2)$ ;  $x_{22} = \omega_0 L - 1/(\omega_0 C_{22})$ ;  $x_{11} = -1/(\omega_0 C_{11})$  — реактивная составляющая сопротивления первого контура;  $x_{12} = -1/\omega_0 C_{12}$  — реактивная составляющая сопротивления связи;  $C_{11} = C_1 C_{12}/(C_1 + C_{12})$ ;  $C_{22} = C_2 C_{12}/(C_2 + C_{12})$  — собственные емкости первого и второго контуров;  $\omega_0$  — искомая угловая частота.

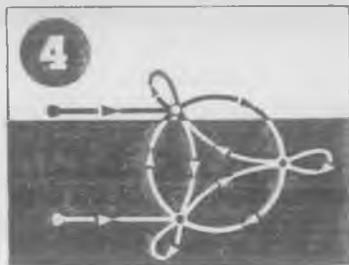
Подставляя выражения для  $x_{22}$  и  $x_{\text{вн}2}$  в условие второго частного резонанса, получаем уравнение для определения частоты второго частного резонанса:  $\omega_0^4 + a\omega_0^2 + b = 0$ , где  $a = (LC_{22} - R^2 \times C_{11}^2)/(LC_{22}C_{11}R^2) = 5,60 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-2}$ ;  $b = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)/(LC_{22}C_{11}R^2C_{12}^2) = -7,06 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-4}$ . Решая это уравнение, находим  $\omega_0 = 1,03 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $f_0 = 164$  кГц.

**3.50м.** См. задачу 3.49р.

**3.52м.** При  $A < 1$  обобщенная расстройка  $\xi_{\text{гр}}$ , соответствующая граничной частоте искомого диапазона, может быть найдена из выражения  $n = I_2(\xi = 0)/I_2(\xi_{\text{гр}})$ ; при  $A \geq n = I_{2\max\max}/I_2(\xi_{\text{гр}})$ , где

$$I_2(\xi) = \frac{EA}{2R \sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}}; \quad I_{2\max\max} = E/(2R).$$

# Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии



## § 4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепей

4.1р. Составить систему уравнений электрического равновесия методом токов ветвей для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.1.

4.2р. Составить систему уравнений электрического равновесия методом напряжений ветвей для электрической цепи рис. 4.1.

4.3. Для электрической цепи (см. рис. 1.14) составить систему уравнений электрического равновесия методом токов ветвей.

4.4. Для электрической цепи (см. рис. 1.14) составить систему уравнений электрического равновесия методом напряжений ветвей.

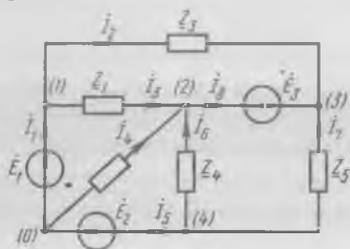


Рис. 4.1

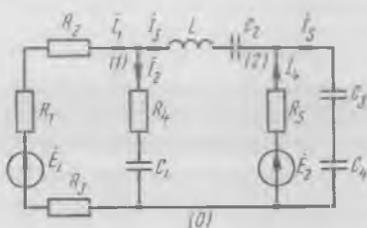


Рис. 4.2

4.5р. Для цепи (рис. 4.2) построить граф, определить число его узлов  $q$  и ветвей  $p$ , число независимых узлов  $m$  и число независимых контуров  $n$ . Построить одно из возможных деревьев графа и найти соответствующую систему независимых контуров. Составить уравнения электрического равновесия методами токов ветвей, напряжений ветвей, контурных токов и узловых напряжений.

4.6. Составить уравнения электрического равновесия методом контурных токов для цепи, рассмотренной в задаче 4.1р.

4.7р. Для цепи (рис. 4.3) составить систему уравнений электрического равновесия, используя метод контурных токов.

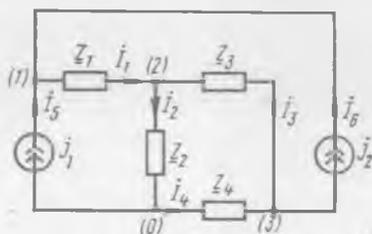


Рис. 4.3

4.8р. Для цепи (рис. 4.4) составить систему уравнений электрического равновесия методом узловых напряжений.

4.9м. Составить уравнения электрического равновесия методом узловых напряжений для цепи, рассмотренной в задаче 4.1р.

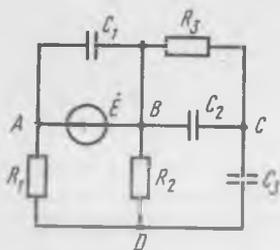


Рис. 4.4

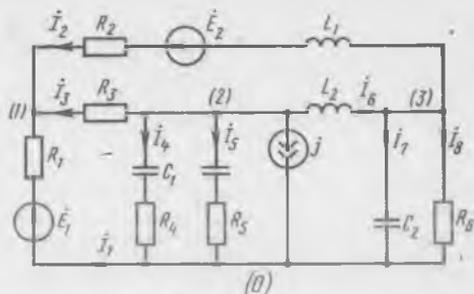


Рис. 4.5

4.10р. Определить токи ветвей цепи (рис. 4.5), применив метод узловых напряжений. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_3 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 0,8 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_6 = 5 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 1 \text{ нФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ нФ}$ ;  $L_1 = 1 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 4 \text{ мГн}$ ;  $E_1 = 10 \text{ В}$ ;  $E_2 = 2 \text{ В}$ ;  $j = e^{-j60^\circ} \text{ мА}$ ;  $\omega = 0,2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

4.11. Решить задачу 2.38м методом контурных токов.

4.12р. Вычислить комплексную амплитуду тока источника э. д. с. цепи (рис. 4.6). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}$ ;  $R_2 = 0,1 \text{ МОм}$ ;  $C = 100 \text{ пФ}$ ;  $E_m = 0,1 \text{ В}$ ;  $j_m = S \dot{U}_{mC}$ ;  $S = 4 \text{ мСм}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

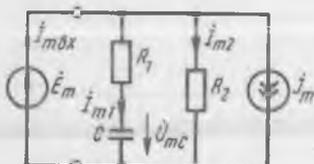


Рис. 4.6

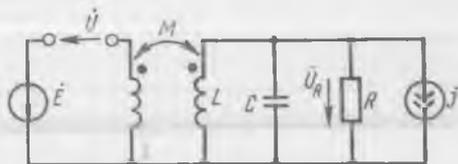


Рис. 4.7

4.13м. Найти действующее значение напряжения  $U_R$  в цепи (рис. 4.7), при  $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_2 = 0,9 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Параметры элементов цепи:  $R = 20 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ нФ}$ ;  $L = 1 \text{ мГн}$ ;  $M = 0,08 \text{ мГн}$ ;  $j = S \dot{U}$ ;  $S = 0,5 \text{ мСм}$ ;  $E = 10 \text{ мВ}$ .

4.14. Используя уравнения электрического равновесия, составленные методом контурных токов для цепи (рис. 4.8), определить напряжение на сопротивлении  $R_5$  и реактивную мощность, отдаваемую источником тока  $j_1$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}$ ;  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 20 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 100 \text{ кОм}$ ;  $C = 100 \text{ пФ}$ ;  $j_1 = 0,1 \text{ мА}$ ;  $j_2 = 0,998 I$ ;  $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

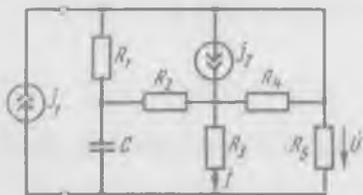


Рис. 4.8

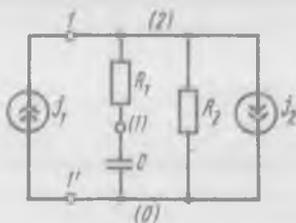


Рис. 4.9

4.15. Используя уравнения электрического равновесия, составленные по методу узловых напряжений для цепи (рис. 4.9), вычислить комплексное входное сопротивление участка цепи, подключенного к источнику тока  $J_1$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1 \text{ МОм}$ ;  $R_2 = 100 \text{ кОм}$ ;  $C = 100 \text{ пФ}$ ;  $J_1 = 0,1 \text{ мА}$ ;  $J_2 = SU_{10}$ ;  $S = 2 \text{ мСм}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

Найти значение того же сопротивления при увеличении  $S$  в 2 раза.

4.16. Используя метод узловых напряжений, определить комплексное действующее значение напряжения на сопротивлении  $R_2$  цепи (рис. 4.10), если  $R_1 = 20 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ;  $C_1 = 0,5 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ пФ}$ ;  $C_3 = 18 \text{ пФ}$ ;  $E = 0,1 \text{ мВ}$ ;  $f = 160 \text{ мГц}$ ;  $J = SU$ ;  $S = 0,2 \text{ мСм}$ .

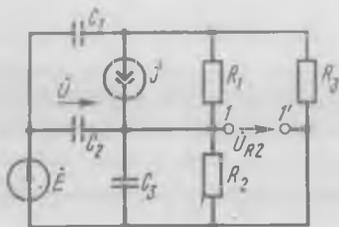


Рис. 4.10

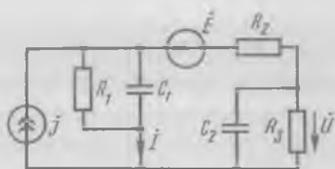


Рис. 4.11

4.17м. Используя метод контурных токов, найти комплексное действующее значение напряжения на сопротивлении  $R_3$  цепи (рис. 4.11), если  $R_1 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 8 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 2 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 120 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 64 \text{ пФ}$ ;  $J = 10 \text{ мА}$ ;  $E = ZI$ ;  $Z = 2 \cdot 10^3 e^{-j\tau\omega} \text{ Ом}$ ;  $\tau = 0,2 \text{ мкс}$ ;  $\omega = 2,5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

4.18. Используя метод узловых напряжений, найти напряжения на элементах цепи рис. 4.12. Определить параметры элементов последовательной схемы замещения участка цепи, подключенного к источнику э. д. с. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 200 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 100 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $J_1 = SU$ ;  $J_2 = SE$ ;  $S = 2 \text{ мСм}$ ;  $E = 1 \text{ мВ}$ ;  $\omega = 400 \text{ с}^{-1}$ . Решить задачу при  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ .

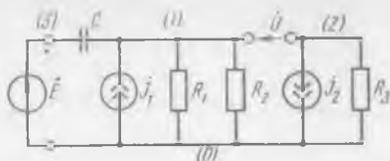


Рис. 4.12

4.19. Решить предыдущую задачу для цепи (рис. 4.13), если  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = 200 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $\vec{J} = S(\vec{E} - \vec{U}_{30})$ ;  $S = 2 \text{ мСм}$ ;  $\vec{E} = 1 \text{ МВ}$ ;  $\omega = 400 \text{ с}^{-1}$ .

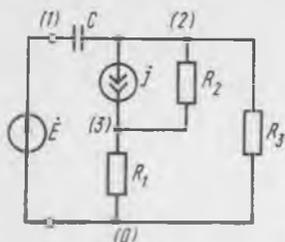


Рис. 4.13

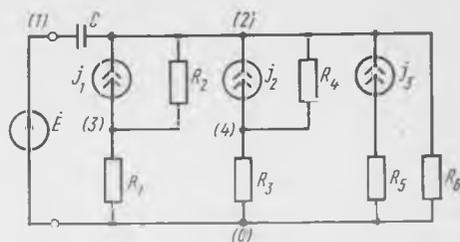


Рис. 4.14

4.20. Определить напряжение  $\vec{U}_{20}$  и параметры элементов последовательной схемы замещения участка цепи, подключенного к источнику э. д. с. цепи (рис. 4.14). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 50 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 4 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = 40 \text{ кОм}$ ;  $R_5 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_6 = 10 \text{ Ом}$ ;  $C = 1 \text{ нФ}$ ;  $\vec{E} = 10 \text{ мВ}$ ;  $\vec{J}_1 = S_1 \vec{U}_{12}$ ;  $\vec{J}_2 = S_2 \vec{U}_{32}$ ;  $\vec{J}_3 = S_3 \vec{U}_{42}$ ;  $S_1 = S_2 = 2 \text{ мСм}$ ;  $S_3 = 5 \text{ мСм}$ ;  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ . Решить задачу при  $R_6 = 20 \text{ Ом}$ .

4.21р. Пользуясь методом контурных токов, рассчитать отношение токов  $\vec{I}_3/\vec{I}_4$  цепи (рис. 4.15), если  $R_1 = R_9 = 400 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_6 = 25 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = R_8 = 2 \text{ кОм}$ ;  $R_4 = R_7 = 50 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 20 \text{ кОм}$ ;  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}_3 = \vec{E}$ ;  $\vec{J}_1 = \beta_1 \vec{I}_1$ ;  $\vec{J}_2 = \beta_2 \vec{I}_2$ ;  $\beta_1 = 100$ ;  $\beta_2 = 105$ .

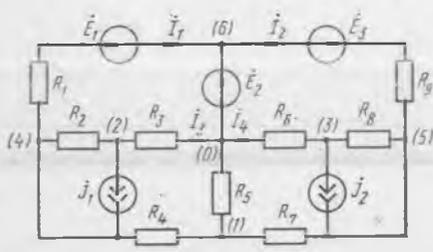


Рис. 4.15

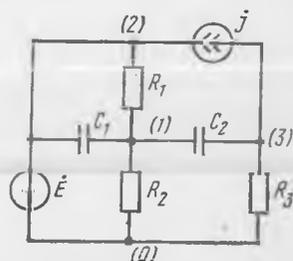


Рис. 4.16

4.22. С помощью метода узловых напряжений определить напряжение  $\vec{U}_{30}$  цепи (рис. 4.16). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 50 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 1,2 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 20 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = 20 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 2 \text{ пФ}$ ;  $\vec{E} = 1 \text{ МВ}$ ;  $\vec{J} = S \vec{U}_{12}$ ;  $S = 10 \text{ мСм}$ ;  $\omega = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

#### Решения и методические указания

4.1р. Граф цепи и одно из его деревьев приведены на рис. 4.17, а, б. Число ветвей цепи  $p = 8$ , число узлов  $q = 5$ , причем три ветви состоят только из источников напряжения ( $p_{\text{и н}} = 3$ ) и ни одна из вет-

вей не содержит источника тока ( $p_{ит} = 0$ ). Система уравнений электрического равновесия цепи, составленная методом токов ветвей, содержит восемь уравнений, из которых четыре составлены на основании первого закона Кирхгофа (число независимых узлов  $q - 1 = 4$ ):

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\ -I_3 - I_4 - I_6 + I_8 &= 0; \\ -I_2 - I_7 - I_8 &= 0; \\ I_5 + I_6 + I_7 &= 0 \end{aligned}$$

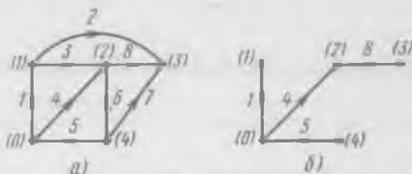


Рис. 4.17

и четыре уравнения — на основании второго закона Кирхгофа (число независимых контуров  $p - q + 1 = 4$ ):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 I_3 - \underline{Z}_2 I_4 &= \dot{E}_1; \\ \underline{Z}_2 I_4 - \underline{Z}_4 I_6 &= \dot{E}_2; \\ \underline{Z}_3 I_2 - \underline{Z}_2 I_4 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_3; \\ \underline{Z}_5 I_7 - \underline{Z}_2 I_4 &= -\dot{E}_2 - \dot{E}_3. \end{aligned}$$

Напряжения всех ветвей, не содержащих источников напряжения, выражены через токи соответствующих ветвей.

4.2р. Число неизвестных напряжений ветвей цепи  $p - p_{ин} = 5$  (см. решения предыдущей задачи). На основании второго закона Кирхгофа можно записать четыре уравнения баланса напряжений:

$$\begin{aligned} \dot{U}_3 - \dot{U}_4 &= \dot{E}_1; \\ \dot{U}_4 - \dot{U}_6 &= \dot{E}_2; \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_4 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_3; \\ \dot{U}_7 - \dot{U}_4 &= -\dot{E}_2 - \dot{E}_3. \end{aligned}$$

Пятое уравнение записывают на основании первого закона Кирхгофа для такого узла (сечения), в который не входит ни одна ветвь, содержащая источник напряжения:  $\dot{U}_2/\underline{Z}_3 + \dot{U}_3/\underline{Z}_1 + \dot{U}_4/\underline{Z}_2 + \dot{U}_6/\underline{Z}_4 + \dot{U}_7/\underline{Z}_5 = 0$ . Нумерация напряжений соответствует нумерации токов ветвей.

4.5р. Граф данной цепи приведен на рис. 4.18, а. Число ветвей  $p = 5$ ; число узлов  $q = 3$ , число независимых узлов графа  $m = q - 1 = 2$ , число независимых контуров  $n = p - q + 1 = 3$ . Если выбранное дерево графа состоит из ветвей 2 и 4, то, добавляя к дереву поочередно главные ветви 1, 3, 5 (рис. 4.18, б—г), получаем систему независимых контуров. Поскольку данная цепь не имеет ветвей, состоящих только из источников энергии, то число неизвестных токов (напряжений) ветвей равно числу ветвей  $p = 8$ .

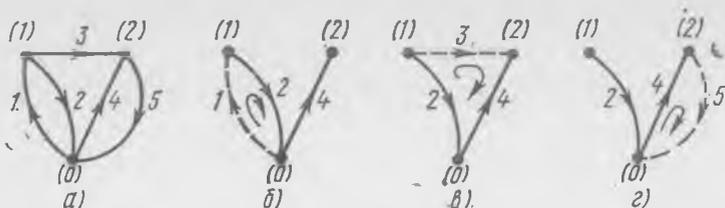


Рис. 4.18

Для рассматриваемой цепи можно составить  $m = 2$  уравнения по первому закону Кирхгофа и  $n = 3$  уравнения по второму закону Кирхгофа. Уравнения электрического равновесия, полученные методом токов ветвей, имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\ I_3 + I_4 - I_5 &= 0; \\ (R_1 + R_2 + R_3) I_1 + \left( R_4 - j \frac{1}{\omega C_1} \right) I_2 &= \dot{E}_1; \\ -R_5 I_4 - \left( R_4 - j \frac{1}{\omega C_1} \right) I_2 + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right) I_3 &= -\dot{E}_2; \\ R_5 I_4 - j \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) I_5 &= \dot{E}_2. \end{aligned}$$

Выражая токи через напряжения соответствующих ветвей, запишем уравнения для напряжений ветвей:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_1 + \dot{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{\dot{U}_2}{R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}} - \frac{\dot{U}_3}{j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)} &= 0; \\ \frac{\dot{U}_3}{j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_2} \right)} + \frac{\dot{U}_4 + \dot{E}_2}{R_5} - \frac{\dot{U}_5}{-j \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)} &= 0; \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 &= 0; \\ -\dot{U}_2 + \dot{U}_3 - \dot{U}_4 &= 0; \\ \dot{U}_4 + \dot{U}_5 &= 0. \end{aligned}$$

По методу контурных токов для данной цепи можно составить  $n = 3$  уравнения. Левая часть  $i$ -го контурного уравнения содержит  $n$  слагаемых, одно из которых является произведением  $i$ -го контурного тока на собственное сопротивление, а остальные — произведениями контурных токов других контуров на взаимные сопротивления  $i$ -го контура и этих контуров; правая часть  $i$ -го уравнения равна контурной э. д. с.  $i$ -го контура:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} I_{11} + \underline{Z}_{12} I_{22} + \underline{Z}_{13} I_{33} &= \dot{E}_{11}; \\ \underline{Z}_{21} I_{11} + \underline{Z}_{22} I_{22} + \underline{Z}_{23} I_{33} &= \dot{E}_{22}; \\ \underline{Z}_{31} I_{11} + \underline{Z}_{32} I_{22} + \underline{Z}_{33} I_{33} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned}$$

Сопrotивление контура равно сумме сопротивлений всех ветвей, входящих в данный контур, следовательно:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - j \frac{1}{\omega C_1};$$

$$\underline{Z}_{22} = R_4 + R_5 + j\omega L - j \frac{1}{\omega C_1} - j \frac{1}{\omega C_2};$$

$$\underline{Z}_{33} = R_5 - j \frac{1}{\omega C_3} - j \frac{1}{\omega C_4}.$$

Взаимное сопротивление  $i$ -го и  $j$ -го контуров равно сумме сопротивлений ветвей, общих для  $i$ -го и  $j$ -го контуров, причем, если контурные токи  $I_{ii}$  и  $I_{jj}$  в общих ветвях направлены встречно, то перед суммой ставится знак минус, поэтому  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\left(R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}\right)$ ;  $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0$ ;  $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -R_5$ .

Контурная э. д. с. равна алгебраической сумме э. д. с. идеализированных источников напряжения, входящих в данный контур, поэтому  $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$ ;  $\dot{E}_{22} = -\dot{E}_2$ ;  $\dot{E}_{33} = \dot{E}_2$ .

Таким образом, уравнения электрического равновесия, составленные для данной цепи методом контурных токов, имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}\right) I_{11} - \left(R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}\right) I_{22} &= \dot{E}_1; \\ -\left(R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}\right) I_{11} + \left(R_4 + R_5 + j\omega L - j \frac{1}{\omega C_1} - j \frac{1}{\omega C_2}\right) \times \\ &\times I_{22} - R_5 I_{33} = -\dot{E}_2; \\ -R_5 I_{22} + \left(R_5 - j \frac{1}{\omega C_3} - j \frac{1}{\omega C_4}\right) I_{33} &= \dot{E}_2. \end{aligned}$$

По методу узловых напряжений для данной цепи можно составить  $m = 2$  уравнения. Левая часть  $i$ -го узлового уравнения содержит  $m$  слагаемых, одно из которых является произведением  $i$ -го узлового напряжения на собственную проводимость  $i$ -го узла, а остальные — произведениями узловых напряжений других узлов на взаимные проводимости  $i$ -го и этих узлов; правая часть  $i$ -го уравнения равна узловому току  $i$ -го узла:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{20} &= \dot{J}_{10}; \\ \underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20} &= \dot{J}_{20}. \end{aligned}$$

Собственная проводимость узла равна сумме проводимостей всех ветвей, подключенных к данному узлу, следовательно:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 - j \frac{1}{\omega C_1}} + \frac{1}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C_2}}; \\ \underline{Y}_{22} &= \frac{1}{j\omega L - j \frac{1}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_5} + j\omega \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}. \end{aligned}$$

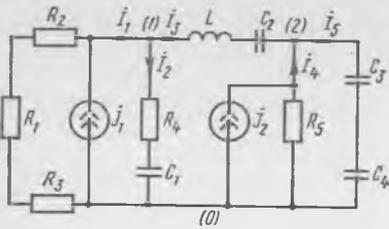


Рис. 4.19

Взаимная проводимость  $i$ -го и  $j$ -го узлов равна взятой с противоположным знаком сумме проводимостей ветвей, включенных между этими узлами, поэтому  $Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}}$ .

Узловой ток равен алгебраической сумме токов источников тока, подключенных к данному узлу. Заменяя источники напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  эквивалентными им источниками тока  $\dot{J}_1$  и  $\dot{J}_2$  (рис. 4.19), получим  $\dot{J}_{10} = \dot{J}_1 = \dot{E}_1 / (R_1 + R_2 + R_3)$ ;  $\dot{J}_{20} = \dot{J}_2 = \dot{E}_2 / R_5$ .

Таким образом, узловые уравнения данной цепи имеют вид:

$$\left( \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 - j\frac{1}{\omega C_1}} + \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \right) \dot{U}_{10} - \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + R_2 + R_3};$$

$$-\frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} \dot{U}_{10} + \left( \frac{1}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C_2}} + \frac{1}{R_5} + j\omega \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \right) \dot{U}_{20} = \frac{\dot{E}_2}{R_5}.$$

4.7р. Граф данной цепи приведен на рис. 4.20, а. Выберем дерево графа таким образом, чтобы ветви 5 и 6, содержащие идеальные источники тока, не вошли в дерево, т. е. стали главными ветвями. Пусть выбранное дерево содержит ветви 1, 2 и 4. Добавляя к дереву поочередно главные ветви 3, 5 и 6, получим три независимых контура

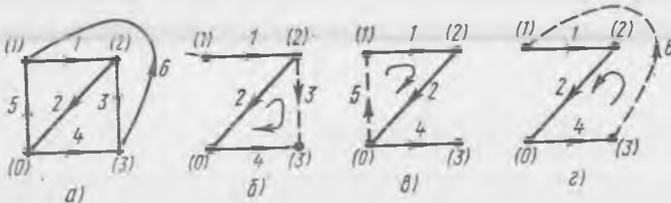


Рис. 4.20

(рис. 4.20, б—г). Контурные токи двух последних контуров известны — они равны токам ветвей 5 и 6, содержащих идеальные источники тока. Для определения единственного неизвестного контурного тока первого контура  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$  составим контурное уравнение  $(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_2 \dot{I}_{22} - (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \dot{I}_{33} = 0$ , где  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_5 = \dot{J}_1$ ,  $\dot{I}_{33} = \dot{I}_6 = \dot{J}_2$ .

4.8р. Источник напряжения  $E$  не может быть заменен источником тока, поэтому выберем один из узлов, к которому подключен источник в качестве базисного. Присвоим узлам схемы  $A, B, C$  и  $D$  соответственно номера  $1, 0, 2$  и  $3$ . Узловое напряжение первого узла известно, оно равно напряжению идеализированного источника:  $\dot{U}_{10} = \dot{E}_1$ . Для определения узловых напряжений  $\dot{U}_{20}, \dot{U}_{30}$  составим уравнения для узлов  $2$  и  $3$ :

$$\underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{23} \dot{U}_{30} = 0;$$

$$\underline{Y}_{31} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{32} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{33} \dot{U}_{30} = 0,$$

где  $\underline{Y}_{22} = 1/R_3 + j\omega(C_2 + C_3)$ ;  $\underline{Y}_{33} = 1/R_1 + 1/R_2 + j\omega C_3$  — собственные проводимости узлов;  $\underline{Y}_{21} = 0$ ;  $\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -j\omega C_3$ ;  $\underline{Y}_{31} = -1/R_1$  — взаимные проводимости.

4.9м. Цепь содержит три ветви, состоящие из идеальных источников напряжения, которые не имеют общей точки соединения. Переносим источник  $E_3$  из ветви  $\delta$  в ветви  $2$  и  $7$ , заменим схему цепи, приведенную на рис. 4.1, эквивалентной схемой (рис.4.21). В полученной схеме источник напряжения  $\dot{E}_3$  может быть заменен источником тока, а вырожденные источники  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  имеют общую точку, которую можно выбрать в качестве базисного узла.

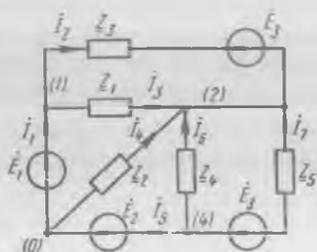


Рис. 4.21

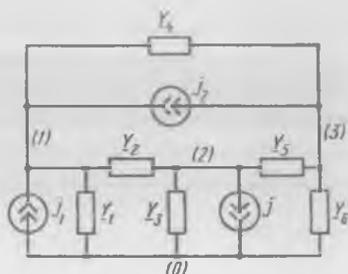


Рис. 4.22

4.10р. Преобразуем данную цепь (рис. 4.22). В новой цепи  $\underline{Y}_1 = 1/R_1$ ;  $\underline{Y}_2 = 1/R_3$ ;  $\underline{Y}_3 = 1/R_5 + 1/(R_4 - j/\omega C_1)$ ;  $\underline{Y}_4 = 1/(R_2 + j\omega L_1)$ ;  $\underline{Y}_5 = 1/(j\omega L_2)$ ;  $\underline{Y}_6 = 1/R_6 + j\omega C_2$ ;  $\underline{J}_1 = \dot{E}_1 \underline{Y}_1$ ;  $\underline{J}_2 = \dot{E}_2 \underline{Y}_4$ . Выбрав нумерацию узлов (рис. 4.22), составим уравнения:

$$\underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{13} \dot{U}_{30} = \underline{J}_{10};$$

$$\underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{23} \dot{U}_{30} = \underline{J}_{20};$$

$$\underline{Y}_{31} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{32} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{33} \dot{U}_{30} = \underline{J}_{30},$$

где  $\dot{U}_{10}$ ,  $\dot{U}_{20}$ ,  $\dot{U}_{30}$  — узловые напряжения;  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 = (2,49 - j0,049) \cdot 10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5 = (1,28 - j1,06) \times 10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{33} = \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 = (0,695 - j0,9) \cdot 10^{-3}$  См — собственные проводимости узлов;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_2 = -10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{13} = \underline{Y}_{31} = -\underline{Y}_4 = (-0,495 + j0,0495) \cdot 10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{32} = -\underline{Y}_5 = j1,25 \cdot 10^{-3}$  См — взаимные проводимости узлов;  $\dot{J}_{10} = \dot{J}_1 + \dot{J}_2 = (10,99 - j0,1) \cdot 10^{-3}$  А;  $\dot{J}_{20} = -\dot{J} = (-0,5 + j0,866) \times 10^{-3}$  А;  $\dot{J}_{30} = -\dot{J}_2 = (-0,99 + j0,099) \cdot 10^{-3}$  А — узловые токи. Вычислим определитель матрицы  $Y$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{vmatrix} = (2,83 - j2,32) \cdot 10^{-9} \text{ См}^3.$$

Определители  $\Delta_i$ , полученные из  $\Delta$  заменой  $i$ -го столбца на столбец узловых токов  $\Delta_1 = (16,9 - j17,7) \cdot 10^{-9}$  А·См<sup>2</sup>;  $\Delta_2 = (7,9 - j11,2) \times 10^{-9}$  А·См<sup>2</sup>;  $\Delta_3 = (6,88 - j15,4) \cdot 10^{-9}$  А·См<sup>2</sup>. Узловые напряжения:

$$\dot{U}_{10} = \Delta_1 / \Delta = 6,65 - j0,796 = 6,68e^{-j6,8^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{20} = \Delta_2 / \Delta = 3,61 - j0,995 = 3,75e^{-j15,4^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{30} = \Delta_3 / \Delta = 4,123 - j2,06 = 4,6e^{-j26,5^\circ} \text{ В}.$$

Токи ветвей:

$$\dot{I}_1 = (\dot{E}_1 - \dot{U}_{10}) / R_1 = 3,44e^{j13,4^\circ} \text{ мА}; \quad \dot{I}_2 = (\dot{E}_2 + \dot{U}_{30} - \dot{U}_{10}) / (R_2 + j\omega L_1) = 0,677e^{-j112,5^\circ} \text{ мА}; \quad \dot{I}_3 = (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{10}) / R_3 = 3,04e^{j183,8^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_{20} / (R_4 - j/\omega C_1) = 0,739e^{j65,5^\circ} \text{ мА}; \quad \dot{I}_5 = \dot{U}_{20} / R_5 = 9,35e^{-j15,4^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_6 = (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}) / (j\omega L_2) = 1,47e^{j25,8^\circ} \text{ мА};$$

$$\dot{I}_7 = \dot{U}_{30} j\omega C_2 = 1,84e^{j63,5^\circ} \text{ мА}; \quad \dot{I}_8 = \dot{U}_{30} / R_6 = 0,92e^{-j26,5^\circ} \text{ мА}.$$

Для оценки точности расчетов проверим выполнение баланса мощностей в цепи. Комплексная мощность, отдаваемая источником:  $\underline{P}_{\text{отд}} = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \dot{I}_2^* - \dot{U}_{20} \dot{J}^* = 30,2 - j9,4$  мВ·А. Комплексная мощность, потребляемая пассивными элементами:

$$\underline{P}_{\text{потр}} = \dot{I}_1^2 R_1 + \dot{I}_2^2 R_2 + \dot{I}_3^2 R_3 + \dot{I}_4^2 R_4 + \dot{I}_5^2 R_5 + j(\dot{I}_2^2 \omega L_1 - \dot{I}_4^2 / \omega C_1 + \dot{I}_6^2 \omega L_2 - \dot{I}_7^2 / \omega C_2) = 30,2 - j9,4 \text{ мВ} \cdot \text{А}.$$

Условие баланса мощностей выполняется с точностью до трех значащих цифр.

4.12р. Используя метод токов ветвей, составляем уравнения электрического равновесия цепи:

$$I_{m1} + I_{m2} + J_m - I_{mвх} = 0; I_{m1} \left( R_1 - j \frac{1}{\omega C} \right) = \dot{E}_m; I_{m2} R_2 = \dot{E}_m,$$

где ток зависимого источника  $J_m = S \dot{U}_{mC} = -jS I_{m1} \frac{1}{\omega C}$ . Последовательно исключая из полученных уравнений  $I_{m2}$ ,  $J_m$  и  $I_{m1}$ , получаем

$$I_{mвх} = \frac{\dot{E}_m}{R_1 - j \frac{1}{\omega C}} + \frac{\dot{E}_m}{R_2} - \frac{j \dot{E}_m S}{\left( R_1 - j \frac{1}{\omega C} \right) \omega C}$$

откуда  $I_{mвх} = 4,15e^{-j74^\circ}$  мкА.

4.13м. В данной цепи имеется источник тока  $J$ , управляемый напряжением  $\dot{U}$ , не являющимся напряжением какой-либо ветви. Чтобы составить уравнения электрического равновесия, в цепь необходимо включить источник тока  $J_0 = 0$ , напряжение на котором являлось бы управляющим для источника тока  $J$ . Заменив трансформатор его эквивалентной схемой, не содержащей взаимной индуктивности, преобразуем схему цепи к виду, показанному на рис. 4.23, где  $L_1$  — не определена,  $L_2 = M$ ,  $L_3 = L - M$ .

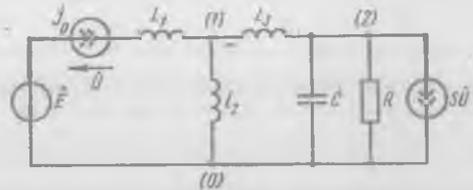


Рис. 4.23

Пусть для решения выбран метод узловых напряжений. В этом случае необходимо выразить неизвестное напряжение  $\dot{U}$  через узловые напряжения ( $\dot{U} = \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{10} + \dot{E}$ , где  $\dot{U}_{L1} = 0$ ) и составить систему узловых уравнений по общим правилам (см. решение задачи 4.5р):

$$\left( -j \frac{1}{\omega L_2} - j \frac{1}{\omega L_3} \right) \dot{U}_{10} + j \frac{1}{\omega L_3} \dot{U}_{20} = J_0;$$

$$j \frac{1}{\omega L_3} \dot{U}_{10} + \left( \frac{1}{R} + j\omega C - j \frac{1}{\omega L_3} \right) \dot{U}_{20} = -S (\dot{U}_{10} + \dot{E}).$$

Отметим, что ветвь с последовательно включенными элементами  $E$ ,  $J_0$ ,  $L_1$  эквивалентна источнику тока  $J_0$  (см. задачу 1.15р).

4.17м. Цепь содержит источник напряжения, э. д. с. которого зависит от тока, не являющегося током какой-либо ветви. Чтобы составить уравнения электрического равновесия, в цепь необходимо включить источник э. д. с.  $E_0 = 0$  таким образом, чтобы его ток был бы управляющим для зависимого источника.

4.21р. Заменим управляемые источники тока источниками напряжения. Схема преобразованной цепи представлена на рис. 4.24, а. Выберем дерево графа этой цепи таким образом, чтобы ветви с управ-

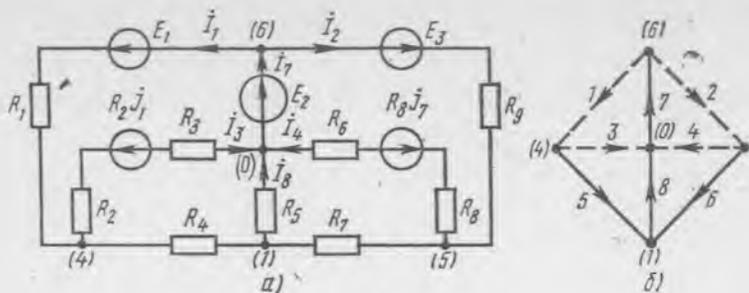


Рис. 4.24

ляющими токами вошли в число главных ветвей (рис. 4.24, б). Обозначим  $I_{11} = \dot{I}_3$ ;  $I_{22} = \dot{I}_4$ ;  $I_{33} = \dot{I}_1$ ;  $I_{44} = \dot{I}_2$  и запишем систему контурных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \dot{I}_{11} + R_5 \dot{I}_{22} + (\beta_1 R_2 - R_4 - R_5) \dot{I}_{33} - R_5 \dot{I}_{44} &= 0; \\ R_5 \dot{I}_{11} + (R_5 + R_6 + R_7 + R_8) \dot{I}_{22} - R_5 \dot{I}_{33} + (\beta_2 R_8 - R_5 - R_7) \dot{I}_{44} &= 0; \\ -(R_4 + R_5) \dot{I}_{11} - R_5 \dot{I}_{22} + (R_1 + R_4 + R_5) \dot{I}_{33} + R_5 \dot{I}_{44} &= 2E; \\ -R_5 \dot{I}_{11} - (R_4 + R_5) \dot{I}_{22} + R_5 \dot{I}_{33} + (R_5 + R_7 + R_9) \dot{I}_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Используя формулу Крамера, запишем выражения для контурных токов  $\dot{I}_{11}$ ,  $\dot{I}_{22}$ :  $\dot{I}_{11} = 2E \frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z}$ ;  $\dot{I}_{22} = -2E \frac{\Delta_{32}}{\Delta_Z}$ . Следовательно,

$$\frac{\dot{I}_3}{\dot{I}_4} = \frac{\dot{I}_{11}}{\dot{I}_{22}} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{32}} = \frac{\begin{vmatrix} R_5 & (\beta_1 R_2 - R_4 - R_5) & -R_5 \\ (R_5 + R_6 + R_7 + R_8) & -R_5 & (\beta_2 R_8 - R_5 - R_7) \\ -(R_4 + R_5) & R_5 & (R_5 + R_7 + R_9) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) & (\beta_1 R_2 - R_4 - R_5) & -R_5 \\ R_5 & -R_5 & (\beta_2 R_8 - R_5 - R_7) \\ -R_5 & R_5 & (R_5 + R_7 + R_9) \end{vmatrix}}$$

Подставляя в полученное выражение числовые значения параметров элементов, получаем  $\dot{I}_3/\dot{I}_4 = 0,986$ .

## § 4.2. Основные теоремы теории цепей и их применение для анализа

4.23р. Определить ток  $\dot{I}_3$  цепи (рис. 4.25), используя метод наложения. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $R_3 = 12$  Ом;  $\dot{E}_1 = 120$  В;  $\dot{E}_2 = 100$  В.

4.24. Найти ток  $\dot{I}_3$  цепи (рис. 4.26), используя метод наложения. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $R_3 = 12$  Ом;  $\dot{E} = 120$  В;  $\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ}$  В;  $\dot{J} = 2e^{-j40^\circ}$  А.

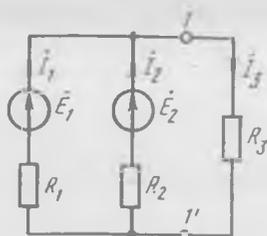


Рис. 4.25

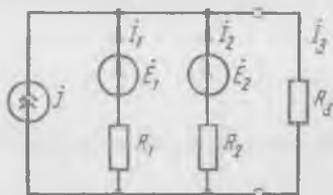


Рис. 4.26

4.25м. Рассчитать напряжение  $U_k$  цепи (рис. 4.27), используя метод наложения. Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C_1 = C_2 = 1$  пФ;  $J_1 = S_1 \dot{E}_1$ ;  $J_2 = S_2 \dot{E}_2$ ;  $S_1 = 1,5$  мСм;  $S_2 = 1$  мСм;  $E_1 = 0,1$  В;  $E_2 = 0,2$  В;  $f = 200$  МГц.

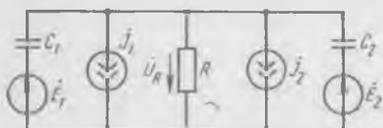


Рис. 4.27

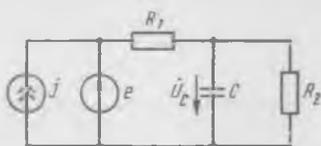


Рис. 4.28

4.26. Используя метод наложения, определить мгновенное значение напряжения на емкости (рис. 4.28). Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 2$  кОм;  $C = 1$  нФ;  $e = 2 \cos 2 \cdot 10^6 t$  В;  $j = 0,04$  А.

4.27. Определить токи ветвей цепи (рис. 4.29), используя метод наложения. Используя полученные результаты, показать, что цепь является взаимной. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 12$  кОм;  $R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 0,2$  кОм;  $L_1 = 0,5$  мГн;  $L_2 = 12$  мГн;  $E_1 = 80$  В;  $E_2 = 120$  В;  $\omega = 5 \cdot 10^6$  с $^{-1}$ .

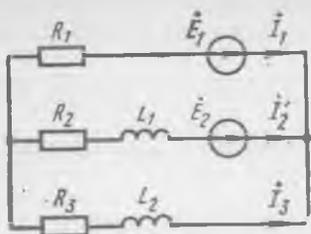


Рис. 4.29

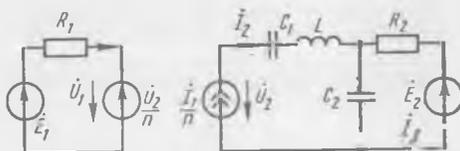


Рис. 4.30

4.28р. Найти ток вторичной обмотки идеального трансформатора (рис. 4.30), используя принцип наложения и теорему взаимности. Параметры элементов цепи:  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = 10$  кОм;  $C_1 = 5$  нФ;  $C_2 = 2$  нФ;  $L = 4$  мГн;  $n = 0,2$ ;  $E_1 = 0,1$  В;  $E_2 = 2$  В;  $\omega = 0,4 \cdot 10^6$  с $^{-1}$ .

4.29. Используя принцип наложения и теорему взаимности, определить токи  $I_1$ ,  $I_2$  в цепи, рассмотренной в задаче 4.23р.

4.30р. Решить задачу 4.23р, используя теорему об эквивалентном источнике.

4.31м. Решить задачу 4.28р, используя теорему об эквивалентном источнике.

4.32. Определить ток  $I_1$  (рис. 4.31), используя теорему об эквивалентном источнике. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_6 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_5 = 500 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = R_4 = 1 \text{ кОм}$ ;  $E_1 = E_3 = 10 \text{ В}$ ;  $E_2 = 2 \text{ В}$ .

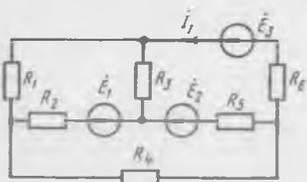


Рис. 4.31

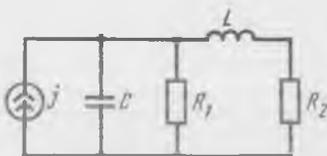


Рис. 4.32

4.33. Для цепи (рис. 4.32) вычислить сопротивление  $R_2$ , при котором в нем выделяется максимальная мощность, а также значение этой мощности, если  $R_1 = 2 \text{ кОм}$ ;  $C = \text{нФ}$ ;  $L = 5 \text{ мГн}$ ;  $j = 0,2 \text{ А}$ ;  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

4.34р. Найти параметры параллельной схемы замещения неавтономного двухполюсника (рис. 4.33), если  $R_1 = R_2 = 0,8 \text{ МОм}$ ;  $L = 10 \text{ мкГн}$ ;  $j = S\dot{U}_L$ ;  $S = 10 \text{ мСм}$ ;  $f = 100 \text{ МГц}$ .

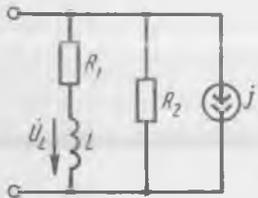


Рис. 4.33

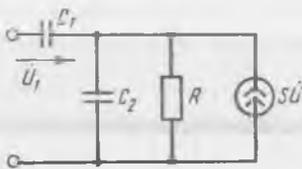


Рис. 4.34

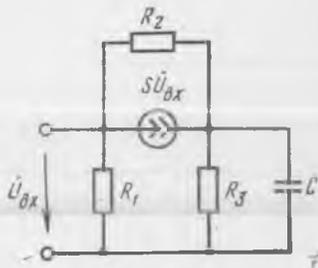


Рис. 4.35

4.35м. Записать выражение для угловой частоты  $\omega_1$ , на которой абсолютное значение аргумента входного комплексного сопротивления неавтономного двухполюсника (рис. 4.34) имеет минимальное значение.

4.36. Найти полное входное сопротивление неавтономного двухполюсника (рис. 4.35), если  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = R_3 = 10 \text{ кОм}$ ;  $C = 10 \text{ пФ}$ ;  $f = 1,59 \text{ МГц}$ ;  $S = 1 \text{ мСм}$ .

4.37. Записать выражения для параметров параллельной схемы замещения активных двухполюсников, схемы которых изображены на рис. 4.36, а—в.

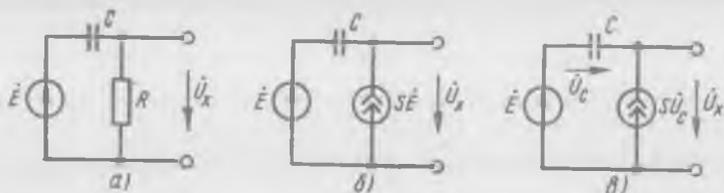


Рис. 4.36

4.38м. Определить параметры элементов последовательной схемы замещения активного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 4.10, а параметры элементов указаны в задаче 4.16.

4.39м. Найти параметры элементов последовательной схемы замещения активного двухполюсника (рис. 4.37), если  $R_1 = 2$  кОм;  $R_2 = 200$  Ом;  $R_3 = 20$  кОм;  $R_4 = 10$  кОм;  $E = 0,1$  В.

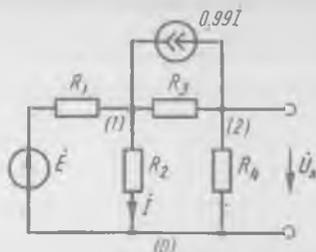


Рис. 4.37

#### Решения и методические указания

4.23р. В соответствии с принципом наложения ток  $I_3$  может быть найден как сумма частичных токов  $I_3'$  и  $I_3''$ , протекающих в той же ветви под действием каждого из источников напряжения  $E_1$  и  $E_2$

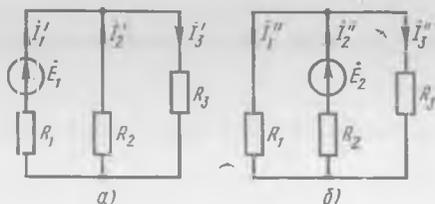


Рис. 4.38

в отдельности. Схемы для определения токов  $I_3'$  и  $I_3''$  представлены на рис. 4.38, а, б:

$$I_3' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \approx 3,33 \text{ А};$$

$$I_3'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 4,17 \text{ А};$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 7,5 \text{ А}.$$

4.25м. Напряжение  $\dot{U}_R$  находят как сумму частичных напряжений, вызванных действием независимых источников напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  в отдельности.

4.28р. Отключим независимые источники напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , а в ветвь, ток которой необходимо определить, введем дополнительный источник э. д. с.  $\dot{E}_s$  (рис. 4.39). Токи ветвей, в которые были включены источники э. д. с.  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ :

$$\dot{I}_{1s} = \dot{I}_{2s} n; \quad \dot{I}_{3s} = - \frac{\dot{I}_{2s}}{R_2} \frac{R_2 / (j\omega C_2)}{R_2 + 1 / (j\omega C_2)} = - \frac{\dot{I}_{2s}}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

где

$$\dot{I}_{2s} = \frac{\dot{E}_s}{n^2 R_1 + j[\omega L - 1/(\omega C_1)] + R_2 / (1 + j\omega R_2 C_2)}$$

откуда  $\dot{I}'_1 / \dot{E}_s = (0,751 + j0,622) \cdot 10^{-3}$  См;  $\dot{I}''_2 / \dot{E}_s = (-0,441 + j0,414) 10^{-3}$  См. Вследствие взаимности данной цепи (цепь содержит только пассивные линейные элементы, неуправляемые источники и идеальный трансформатор) можно записать следующие соотношения:  $\dot{I}'_2 / \dot{E}_1 = \dot{I}'_1 / \dot{E}_s$ ;  $\dot{I}''_2 / \dot{E}_2 = \dot{I}''_1 / \dot{E}_s$ , где  $\dot{I}'_2$  и  $\dot{I}''_2$  — токи, протекающие под действием источника э. д. с.  $\dot{E}_1$  или источника  $\dot{E}_2$ . Используя принцип наложения, находим ток  $\dot{I}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = \frac{\dot{I}'_1}{\dot{E}_s} \dot{E}_1 + \frac{\dot{I}''_1}{\dot{E}_s} \dot{E}_2 = (-0,807 + j0,891) \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-3} e^{j134,2^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

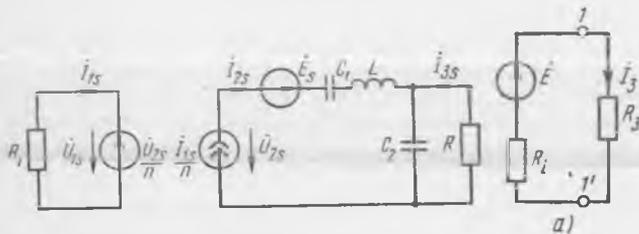


Рис. 4.39

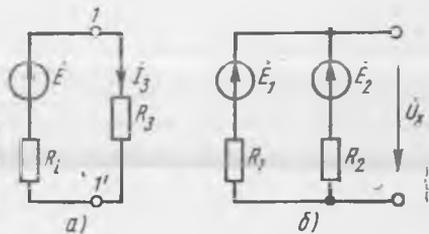


Рис. 4.40

4.30р. Заменим часть цепи, расположенную слева от зажимов  $1-1'$ , эквивалентным источником напряжения  $\dot{E}$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 4.40, а). Э. д. с.  $\dot{E}$  этого источника равна напряжению на зажимах  $1-1'$  исходной цепи при отключенной ветви  $R_3$  (рис. 4.40, б):

$\dot{E} = U_x = \dot{E}_2 + \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_2}{R_1 + R_2} R_2 = 108$  В. Внутреннее сопротивление  $R_i$  эквивалентного источника равно входному сопротивлению цепи (рис. 4.40, б) при выключенных источниках  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ :  $R_i = R_1 R / (R_1 + R_2) = 2,4$  Ом.

В соответствии с эквивалентной схемой (рис. 4.40, а) ток  $I_3 = E/(R_i + R_3) = 7,5$  А.

**4.31м.** Целесообразно участок цепи с идеальным трансформатором и элементами  $\dot{E}_1, R_1$ , заменить одним эквивалентным источником, а участок с элементами  $E_2, R_2, C_2$  — другим, включенным последовательно с первым.

**4.34р.** Подключим к входу цепи пробный источник напряжения  $\dot{E}$  и найдем комплексное действующее значение входного тока двухполюсника (см. решение задачи 4.12р):

$$I_{\text{вх}} = \dot{E} \left( \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega LS}{R_1 + j\omega L} \right).$$

откуда комплексная входная проводимость цепи

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{I_{\text{вх}}}{\dot{E}} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega L(1 + SR_2)}{R_2(R_1 + j\omega L)} = 2,5 + j78,5 \text{ мкСм.}$$

Параметры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g_{\text{вх}} = 0,4$  МОм;  $C'' = b_{\text{вх}}/\omega = 0,125$  пФ (см. задачу 2.53м).

**4.35м.** Искомую частоту определяют из уравнения  $dx_{\text{вх}}/d\omega = 0$ , где  $x_{\text{вх}}$  — реактивная составляющая комплексного входного сопротивления двухполюсника.

**4.38м.** Напряжение холостого хода цепи вычислено в задаче 4.16. Для определения входного сопротивления активного двухполюсника необходимо найти ток короткого замыкания:  $Z_{\text{вх}} = \dot{U}_x/I_K$ .

**4.39м.** Для расчета напряжения холостого хода целесообразно воспользоваться методом узловых напряжений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_{10} - \frac{1}{R_3} \dot{U}_{20} &= \frac{1}{R_1} \dot{E} + 0,99 \frac{1}{R_2} \dot{U}_{10}; \\ -\frac{1}{R_3} \dot{U}_{10} + \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \dot{U}_{20} &= -0,99 \frac{1}{R_2} \dot{U}_{10}, \end{aligned}$$

где  $\dot{U}_{10} = \dot{U}_x$ .

Для вычисления тока короткого замыкания можно найти узловое напряжение  $\dot{U}_{10\text{К}}$  при замкнутом выходе, положив в первом узловом уравнении  $U_{20} = 0$ :

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \dot{U}_{10\text{К}} = \frac{1}{R_1} \dot{E} + 0,99 \frac{1}{R_2} \dot{U}_{10\text{К}}.$$

Ток короткого замыкания можно выразить через  $\dot{U}_{10\text{К}}$ , используя закон баланса токов в узлах:  $\dot{I}_K = \dot{U}_{10\text{К}} (1/R_3 - 0,99/R_2)$ .

### § 4.3. Применение сигнальных графов

**4.40.** Составить системы уравнений для зависимых узлов графов, приведенных на рис. 4.41 и 4.42.

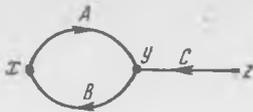


Рис. 4.41

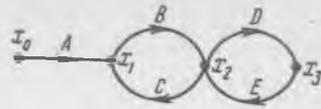


Рис. 4.42

4.41. Построить два-три равносильных сигнальных графа для каждой из систем уравнений:

$$(E-1)y + Dz = -Ax;$$

$$Cy - z = 0; \quad (1)$$

$$By + Fz - w = 0.$$

$$(1-D)x_1 = Ax_0;$$

$$x_2 - Ex_3 = Bx_0; \quad (2)$$

$$x_3 - Hx_4 = Cx_0;$$

$$Fx_1 + Gx_2 - x_4 = 0.$$

4.42. Составить систему уравнений для зависимых узлов графа (рис. 4.43).

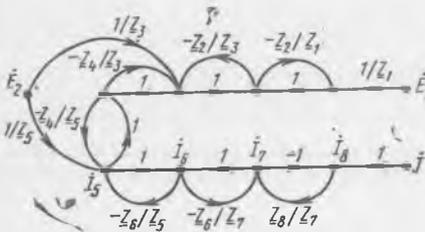


Рис. 4.43

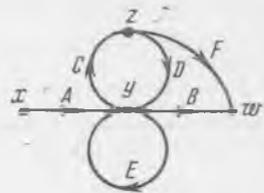


Рис. 4.44

4.43р. Определить передачу сигнального графа (рис. 4.44) между истоком  $x$  и стоком  $w$ .

4.44р. Найти передачу сигнального графа (см. рис. 4.41) от узла  $x$  к узлу  $z$ .

4.45. Определить передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_3$  графа (рис. 4.45) методом последовательного упрощения. Составить систему уравнений для зависимых узлов графа и с ее помощью проверить решение.

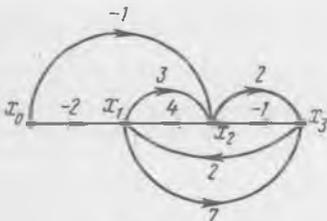


Рис. 4.45

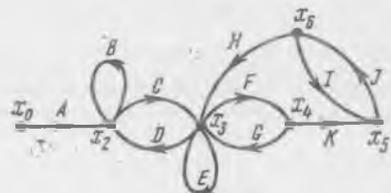


Рис. 4.46

4.46м. Найти передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_5$  графа (рис. 4.46), пользуясь правилами преобразования сигнальных графов.

4.47. Определить передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_4$  графа (рис. 4.47), пользуясь правилами преобразования сигнальных графов.

- 4.48р. Решить предыдущую задачу, используя формулу Мейсона.  
 4.49. Найти число слагаемых в определителе графа (см. рис. 4.43).  
 4.50. Определить передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_3$  графа (см. рис. 4.42), используя: а) формулу Мейсона; б) метод последовательного упрощения.

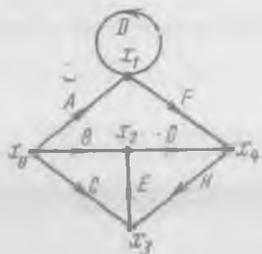


Рис. 4.47

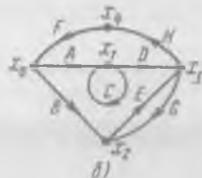
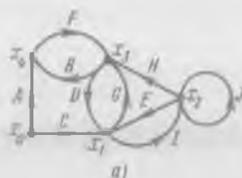


Рис. 4.48

- 4.51. Используя формулу Мейсона, определить передачу от истока  $x_0$  к узлу  $x_4$  графов, приведенных на рис. 4.48, а, б.  
 4.52. Определить сигнал в стоке графа (рис. 4.49).  
 4.53. Используя сигнальный граф, решить систему уравнений:  
 $5x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 75a$ ;  $-2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ;  $0,2x_1 + 0,5x_2 - 8x_3 = -6a$ ;  $a = 1$ .

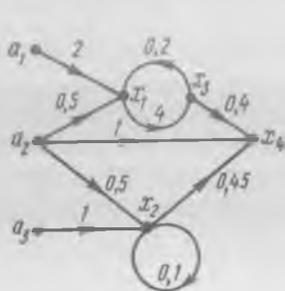


Рис. 4.49

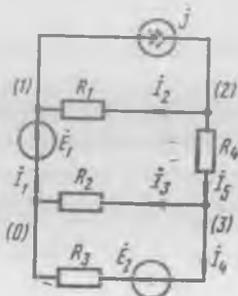


Рис. 4.50

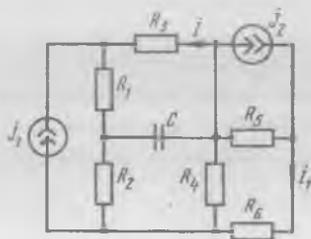


Рис. 4.51

4.54р. Построить сигнальные графы, соответствующие системам уравнений электрического равновесия цепи (рис. 4.50), составленным методами токов ветвей, контурных токов и узловых напряжений. Источником тока в цепи управляют с помощью напряжения  $\dot{J} = SU_{30}$ .

4.55. Найти ток  $\dot{I}_3$  цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, преобразуя сигнальный граф контурных токов в конечный.

4.56р. Определить ток  $\dot{I}_3$  цепи, рассмотренной в задаче 4.54р, используя граф токов ветвей и формулу Мейсона. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = R_4 = 500 \text{ Ом}$ ;  $E_1 = 1 \text{ В}$ ;  $E_2 = 2 \text{ В}$ ;  $\dot{J} = SU_{30}$ ;  $S = 0,1 \text{ См}$ .

4.57. Определить ток  $\dot{I}_1$  цепи (рис. 4.51), применив: а) сигнальный граф контурных уравнений; б) сигнальный граф узловых напряжений.

Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 10$  кОм;  $R_3 = 0,2$  кОм;  $R_4 = 0,5$  кОм;  $R_5 = 1$  кОм;  $R_6 = 4$  кОм;  $C = 5$  мкФ;  $J_1 = 10$  мкА;  $J_2 = \beta I$ ;  $\beta = 50$ ;  $\omega = 10^3$  с<sup>-1</sup>.

4.58. Используя граф узловых уравнений, найти напряжение  $\dot{U}_{R_6}$  в цепи, рассмотренной в задаче 4.20.

#### Решения и методические указания

4.41м. Преобразуем систему уравнений к причинно-следственной форме, решив каждое уравнение относительно одной переменной:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{D}{1-E} z + \frac{A}{1-E} x; & x_1 &= \frac{A}{1-D} x_0; \\
 z &= Cy; & x_2 &= Bx_0 + Ex_3; \\
 \omega &= By + Fz. & (1) & \quad x_3 = Cx_0 + Hx_4; & (2) \\
 & & & \quad x_4 = Fx_1 + Gx_2.
 \end{aligned}$$

Первой системе уравнений соответствует граф, изображенный на рис. 4.44, второй — на рис. 4.47.

Преобразования уравнений могут осуществляться различными способами. Например, первую систему уравнений можно представить в виде

$$x = -\frac{D}{A} z + \frac{1-E}{A} y; \quad y = \frac{1}{C} z; \quad \omega = By + Fz.$$

Разным по форме системам уравнений соответствуют различные сигнальные графы, но все они соответствуют одной исходной системе уравнений.

4.43р. Исключаем промежуточный узел  $z$  (рис. 4.52, а), объединяем параллельные ветви и петли (рис. 4.52, б), устраним петлю (рис. 4.52, в). Передача конечного графа  $\omega/x = A(B + CF)/(1 - E - CD)$ .

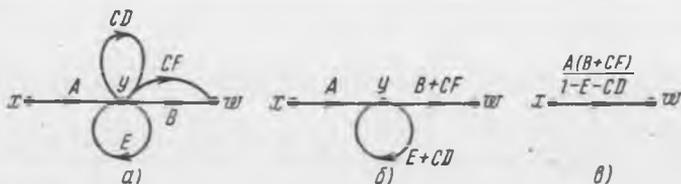


Рис. 4.52

4.44р. Инвертируя ветвь с передачей  $C$ , получаем граф, приведенный на рис. 4.53, а. Инвертируя ветвь с передачей  $B$  преобразованного графа, получаем граф, показанный на рис. 4.53, б, который непосредственно преобразовывается в конечный (рис. 4.53, в). Решение задачи возможно также путем определения величины, обратной искомой передаче — передаче от узла  $z$  к узлу  $x$ .



Рис. 4.53

4.46м. Одним из путей решения задачи является последовательное инвертирование ветвей  $A, C, F, K$  (рис. 4.54), исключение промежуточных узлов и определение обратной передачи  $x_0/x_5$ .

4.48р. Данный граф имеет три прямых пути с передачами  $P_1 = AF$ ,  $P_2 = BG$ ,  $P_3 = CEG$  и два несоприкасающихся контура с передачами  $L_1 = D$ ,  $L_2 = EGH$ . Определитель сигнального графа  $\Delta = 1 - \Sigma L_i + \Sigma L_i L_j = 1 - L_1 - L_2 + L_1 L_2 = 1 - D - EGH + DEGH$ . Алгебраическое дополнение первого пути  $\Delta_1 = 1$ , так как его касаются оба контура, алгебраические дополнения второго и третьего путей  $\Delta_2 = \Delta_3 = 1 - L_1 = 1 - D$ , так как эти пути касаются только второго контура. Согласно общей формуле передача графа

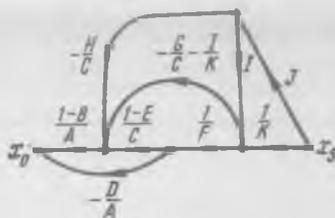


Рис. 4.54

$$\frac{x_4}{x_0} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^3 P_k \Delta_k = \frac{AF + (BG + CEG)(1 - D)}{1 - D - EGH + DEGH}$$

4.54р. Уравнения электрического равновесия данной цепи, полученные методом токов ветвей, имеют вид:

$$\begin{aligned} SR_2 I_3 - I_2 - I_1 &= 0; \\ I_2 + I_5 - SR_2 I_3 &= 0; \\ I_3 + I_4 - I_5 &= 0; \\ -R_1 I_2 + R_4 I_5 + R_2 I_3 &= \dot{E}_1; \\ R_3 I_4 - R_2 I_3 &= \dot{E}_2, \end{aligned}$$

где  $SR_2 I_3 = J$  — ток источника тока, эквивалентного заданному.

Приведем данную систему уравнений к причинно-следственной форме:

$$\begin{aligned} I_1 &= SR_2 I_3 - I_2; \\ I_2 &= -I_5 + SR_2 I_3; \\ I_3 &= I_5 - I_4; \\ I_4 &= \frac{R_2}{R_3} I_3 + \frac{1}{R_3} \dot{E}_2; \\ I_5 &= \frac{R_1}{R_4} I_2 - \frac{R_2}{R_4} I_3 + \frac{1}{R_4} \dot{E}_1. \end{aligned}$$

Сигнальный граф содержит пять узлов, соответствующих неизвестным токам  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ , и два узла, соответствующих источникам э. д. с.  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  (рис. 4.55, а).

Узловые уравнения цепи, приведенные к причинно-следственной форме, имеют вид:

$$\dot{U}_{20} = \frac{SR_1 R_4}{R_1 + R_4} \dot{U}_{30} + \frac{R_1}{R_1 + R_4} \dot{U}_{30} + \frac{R_4}{R_1 + R_4} \dot{E}_1;$$

$$\dot{U}_{30} = -\frac{R_2 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_5} \dot{E}_2 + \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4} \dot{U}_{20}.$$

Сигнальный граф узловых уравнений цепи содержит два узла, соответствующих источникам э. д. с., и два узла, соответствующих неизвестным узловым напряжениям (рис. 4.55, б).

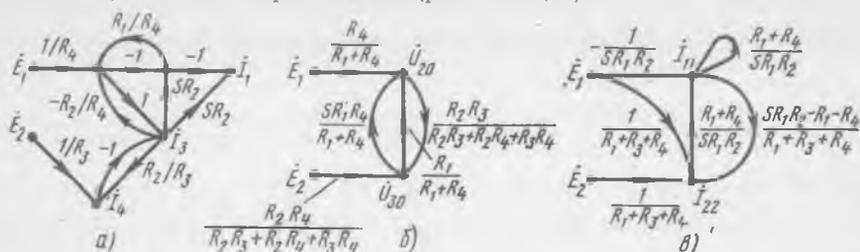


Рис. 4.55

Контурные уравнения цепи после замены источника тока, управляемого напряжением, источником напряжения, управляемым током, и приведения к причинно-следственной форме имеют вид:

$$\dot{I}_{11} = -\frac{1}{SR_1 R_2} \dot{E}_1 + \frac{R_1 + R_2 + R_4}{SR_1 R_2} \dot{I}_{11} + \frac{R_1 + R_4}{SR_1 R_2} \dot{I}_{22};$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{E}_1 + \frac{1}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{E}_2 - \frac{SR_1 R_2 - R_1 - R_4}{R_1 + R_3 + R_4} \dot{I}_{11},$$

где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$ .

Сигнальный граф контурных уравнений цепи содержит два узла, соответствующих неизвестным контурным токам, и, так же как и в предыдущих случаях, два узла, соответствующих источникам э. д. с. (рис. 4.55, в).

4.56р. Используя принцип наложения и формулу Мейсона, запишем выражение для искомого тока:

$$\dot{I}_3 = \dot{E}_1 \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} + \dot{E}_2 \frac{P_2 \Delta_2}{\Delta},$$

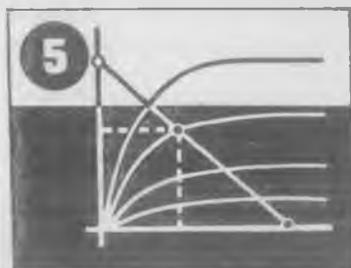
где первое слагаемое соответствует току при  $\dot{E}_2 = 0$ , а второе — при  $\dot{E}_1 = 0$ .

Граф токов ветвей (рис. 4.55, а) имеет четыре контура с передачами  $L_1 = -R_1/R_4$ ;  $L_2 = -R_2/R_4$ ;  $L_3 = SR_2 R_1/R_4$ ;  $L_4 = -R_2/R_3$ ; причем только первый и четвертый контуры не соприкасаются. Опреде-

литель графа  $\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_4$ . От истока  $\dot{E}_1$  к узлу  $\dot{I}_3$  графа проходит только один путь с передачей  $P_1 = 1/R_4$ . Этот путь касается всех контуров:  $\Delta_1 = 1$ . От истока  $\dot{E}_2$  к узлу  $\dot{I}_3$  проходит также один путь с передачей  $P_2 = -1/R_3$ , который не касается одного контура:  $\Delta_2 = 1 - L_1$ . Подставив выражения для путей, алгебраических дополнений путей и определителя в исходное равенство, получим

$$I_3 = \frac{\frac{E_1}{R_4} - \frac{E_2}{R_3} \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right)}{1 + \frac{R_1}{R_4} + \frac{R_2}{R_4} - SR_2 \frac{R_1}{R_4} + \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_1 R_2}{R_3 R_4}} = 0,638 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

## Нелинейные резистивные цепи



### § 5.1. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей

5.1. Найти ток  $i$  и напряжения на элементах цепи (рис. 5.1). ВАХ нелинейных резистивных элементов  $R_1$  и  $R_2$  приведены на рис. 5.2 (кривые 1 и 2),  $E = 24 \text{ В}$ .

5.2. Два нелинейных резистивных элемента  $R_1$  и  $R_2$ , ВАХ которых заданы кривыми 1 и 2 (рис. 5.2), включены параллельно источнику постоянного тока  $J = 100 \text{ мА}$  (рис. 5.3). Найти токи  $i_1$  и  $i_2$  через элементы и напряжение  $u$  на них.

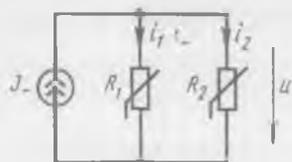


Рис. 5.1

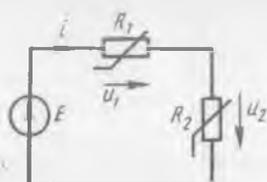


Рис. 5.3

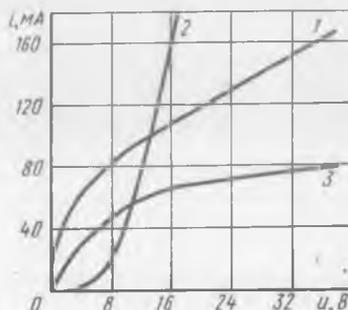


Рис. 5.2

5.3. Рассчитать напряжения и токи всех элементов нелинейной цепи постоянного тока (рис. 5.4). ВАХ нелинейных резистивных элементов заданы кривыми 1 и 2 (рис. 5.2);  $E_- = 30$  В;  $R_3 = 200$  Ом.

5.4м. ВАХ нелинейного резистивного элемента показана на рис. 5.2 (кривая 1). Определить параметры приближенной схемы замещения в виде последовательного соединения линейного сопротивления  $R_d$  и источника постоянной э. д. с.  $E_-$  (рис. 5.5) и указать границы ее применимости.

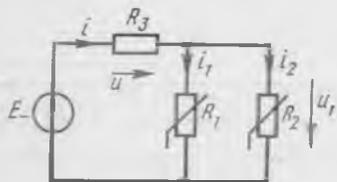


Рис. 5.4

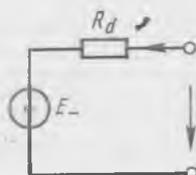


Рис. 5.5

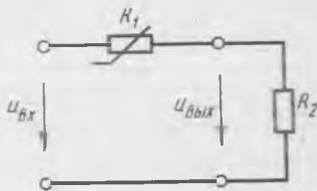


Рис. 5.6

5.5. Решить задачу 5.4м, если ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. 5.2).

5.6. На рис. 5.6 показана схема простейшего стабилизатора напряжения. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 3 (см. рис. 5.2);  $R_2 = 200$  Ом. Определить напряжение на выходе стабилизатора, если входное напряжение  $u_{вх}$ : а) 30 В; б) 36 В.

5.7м. В простейшем стабилизаторе напряжения (рис. 5.7) применен нелинейный элемент с ВАХ, показанной на рис. 5.2 (кривая 2);  $R_1 = 337$  Ом;  $R_3 = 2,7$  кОм. Найти напряжение на нагрузке  $u_{вых}$ , если входное напряжение  $u_{вх}$ : а) 27 В; б) 30 В.

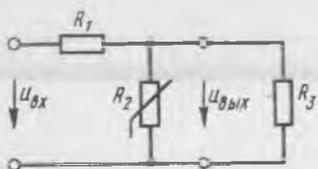


Рис. 5.7

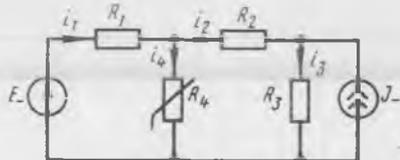


Рис. 5.8

5.8. Рассчитать токи всех ветвей нелинейной цепи постоянного тока, схема которой изображена на рис. 5.8. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. 5.2). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 200$  Ом;  $R_2 = 100$  Ом;  $R_3 = 100$  Ом;  $E_- = 24$  В;  $J_- = 0,1$  А.

5.9. Решить задачу 5.8, изменив полярность источника тока  $J_-$ .

5.10. В цепи (рис. 5.9) определить токи  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . ВАХ нелинейного резистивного элемента задана кривой 2 (см. рис. 5.2). Параметры элементов цепи:  $R_1 = 600$  Ом;  $R_2 = 300$  Ом;  $E_{1-} = 24$  В;  $E_{2-} = 9$  В;  $J_- = 20$  мА.

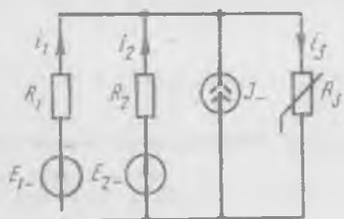


Рис. 5.9

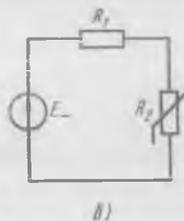
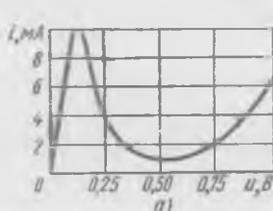


Рис. 5.10

5.11м. Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого показана на рис. 5.10, а, соединен последовательно с источником э. д. с.  $E_- = 1$  В и сопротивлением  $R_1$  (рис. 5.10, б). Указать области значений сопротивления  $R_1$ , в которых цепь статически: а) устойчива; б) неустойчива.

5.12. Для цепи рис. 5.10, б найти такие значения  $E_-$  и  $R_1$ , при которых рабочая точка находится на середине падающего участка ВАХ нелинейного элемента (рис. 5.10, а) с координатами:  $J_- = 6$  мА;  $U_- = 0,2$  В.

5.13р. На рис. 5.11, а показана схема усилительного каскада на биполярном транзисторе. Семейства входных и выходных характеристик транзистора приведены на рис. 5.11, б, в. Параметры элементов цепи:  $R_H = 4$  кОм;  $R_B = 1,75$  кОм;  $E_{K-} = 20$  В;  $E_{B-} = 1$  В. Найти токи коллектора и базы  $i_K$  и  $i_B$ .

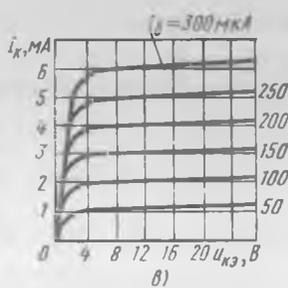
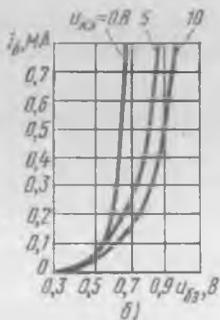
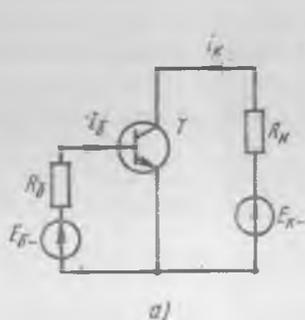


Рис. 5.11

5.14. Для питания цепей базы и коллектора биполярного транзистора использован источник  $E_{K-}$  (рис. 5.12). ВАХ транзистора приведены на рис. 5.11, б, в. Параметры элементов цепи:  $R_H = 2$  кОм;  $R_B = 60$  кОм;  $E_{K-} = 12$  В. Найти токи коллектора и базы  $i_K$  и  $i_B$ .

5.15р. Построить зависимость входного тока  $i$  от входного напряжения  $u$  для цепи рис. 5.13, если  $R = 4$  кОм;  $R_1 = 1,333$  кОм;  $E_{1-} = 4$  В;  $R_2 = 1$  кОм;  $E_{2-} = 7$  В. Диоды  $D_1$  и  $D_2$  считать идеальными (внутреннее сопротивление равно нулю в прямом направлении и бесконечности — в обратном).

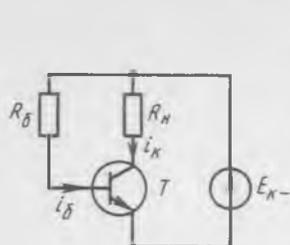


Рис. 5.12

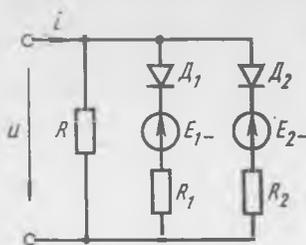


Рис. 5.13



Рис. 5.14

5.16. При экспериментальном исследовании нелинейного двухполюсника (рис. 5.13) получена ВАХ, показанная на рис. 5.14. Определить параметры всех элементов. Диоды считать идеальными.

5.17. Нарисовать ВАХ нелинейного резистивного элемента, в любой точке которой статическое и дифференциальное сопротивления элемента одинаковы.

5.18. Нарисовать ВАХ нелинейного резистивного элемента, на некотором участке которой статическое сопротивление равно дифференциальному.

5.19. Нарисовать ВАХ нелинейного резистивного элемента, в одной из точек которой статическое и дифференциальное сопротивления одинаковы.

5.20р. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого приведена на рис. 5.10, а, приложено напряжение  $u(t) = 0,25 + 0,2 \cos 2\pi 10^3 t$  В. Графическим методом определить зависимость тока через элемент от времени  $i(t)$ .

5.21м. ВАХ нелинейного резистивного элемента (полупроводникового диода) выражается функцией  $i = 0,2(e^{8u} - 1)$  (мА, В). К элементу приложено напряжение  $u(t) = 0,1 \cos 2\pi 10^4 t$  В. Графическим методом найти зависимость тока через элемент от времени  $i(t)$ .

5.22м. Решить задачу 5.21м, если к элементу приложено напряжение  $u(t) = -0,1 + 0,2 \cos 2\pi 10^4 t$  В.

5.23р. Построить ВАХ безынерционного нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$ , если воздействие  $x(t) = \sin \pi t/4$  и реакция  $y(t)$  заданы графиками, представленными на рис. 5.15, а, б.

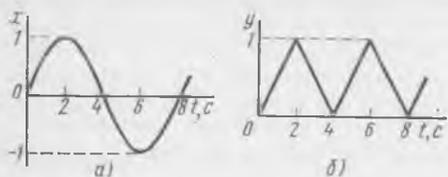


Рис. 5.15

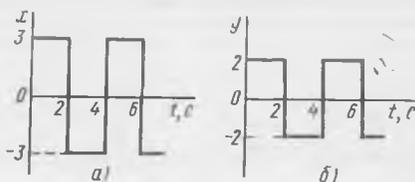


Рис. 5.16

5.24м. Решить задачу 5.23р, если воздействие  $x(t)$  и реакция  $y(t)$  заданы графиками, изображенными на рис. 5.16, а, б.

5.4м. Записать уравнение прямой, аппроксимирующей ВАХ на некотором ее участке, и сравнить результат с ВАХ эквивалентной схемы:  $i = (u + E_-)/R_d$ .

5.7м. Заменить линейную часть цепи, состоящую из элементов  $R_1$ ,  $R_3$  и источника напряжения  $u_{вх}$ , эквивалентным источником.

5.11м. Об устойчивости и неустойчивости цепи судят по положению нагрузочной прямой  $i = (E_- - u)/R$  ( $u$  — напряжение на нелинейном элементе) относительно ВАХ нелинейного элемента. Неустойчивому режиму соответствуют прямые, проходящие в секторе АСМ, границы которого образуют касательные АС и МС, проведенные к ВАХ из точки  $u = E_-$  (рис. 5.17). В пределах этого сектора, исключая границы, нагрузочная прямая пересекается с ВАХ в трех точках, и цепь неустойчива. Нагрузочные прямые, проходящие вне указанного сектора, пересекаются с ВАХ в одной точке, и цепь устойчива.

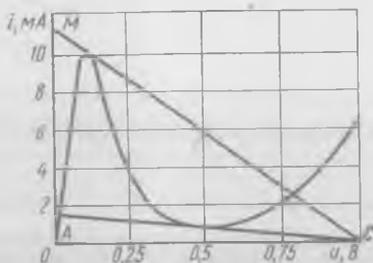


Рис. 5.17

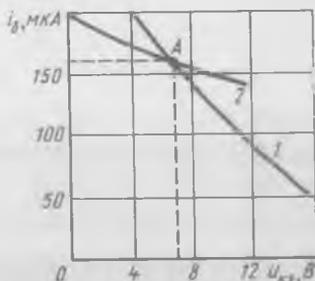


Рис. 5.18

5.13р. Для входной и выходной цепей транзистора составляем уравнения электрического равновесия по второму закону Кирхгофа:  $R_6 i_6 + u_{6э} = E_{6-}$ ,  $R_n i_k + u_{кэ} = E_{к-}$ . Отсюда  $i_6 = (E_{6-} - u_{6э})/R_6$ ;  $i_k = (E_{к-} - u_{кэ})/R_n$ . По точкам пересечения нагрузочных прямых с кривыми (см. рис. 5.11, б, в) строим две зависимости  $i_6 = F(u_{кэ})$  (рис. 5.18). Кривая 1 построена по выходным, а кривая 2 — по входным характеристикам транзистора. Точка А определяет рабочий режим:  $i_6 = 163$  мкА;  $u_{кэ} = 7$  В. По уравнению нагрузочной прямой  $i_k = F(u_{кэ})$  находим  $i_k = 3,3$  мА.

5.15р. При  $0 \leq u < 4$  В диоды  $D_1$  и  $D_2$  закрыты, и ток течет только через элемент  $R$ :  $i = u/R$ . При  $4 \text{ В} \leq u < 7 \text{ В}$  диод  $D_1$  открыт, диод  $D_2$  закрыт. Ток протекает через две первые ветви:  $i = \frac{u}{R} + \frac{u - E_{1-}}{R_1}$ . При  $u \geq 7$  В ток протекает через все ветви:

$i = \frac{u}{R} + \frac{u - E_{1-}}{R_1} + \frac{u - E_{2-}}{R_2}$ . Итоговая ВАХ показана на рис. 5.19.

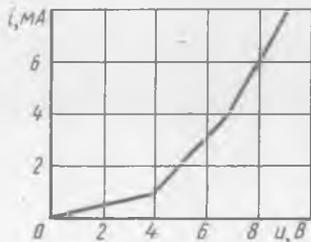


Рис. 5.19

5.20р. Графические построения, необходимые для получения кривой  $i(t)$ , приведены на рис. 5.20. Обратить внимание на согласование масштабов графиков по переменным  $u$ ,  $i$ ,  $t$ .

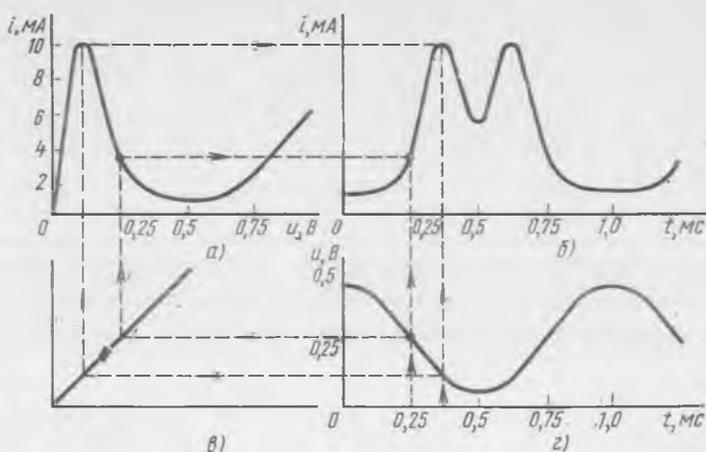


Рис. 5.20

5.21м, 5.22м. Задачи решают аналогично задаче 5.20 р.

5.23р. Построение характеристики  $y(x)$  показано на рис. 5.21, а—г. Обратить внимание на согласование масштабов графиков по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $t$ .

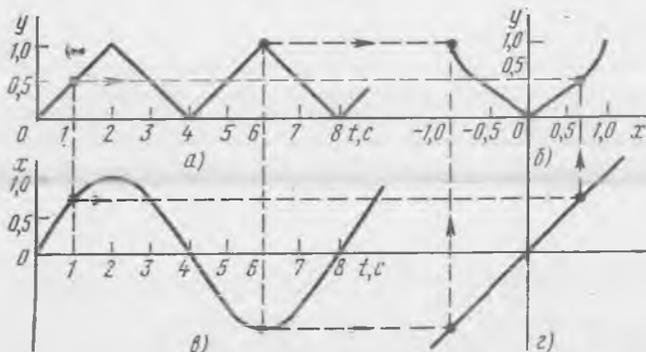


Рис. 5.21

5.24м. Задача решается аналогично задаче 5.23р.

## § 5.2. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов

5.25м. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана таблицей:

$u$ , В	0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0
$i$ , мА	0,1; 0,17; 0,27; 0,45; 0,74; 1,22

Оценить возможность аппроксимации этой характеристики экспоненциальной функцией  $i = I_0 e^{au}$  и определить коэффициенты этой функции  $I_0, a$ .

**5.26р.** Прямую ветвь ВАХ полупроводникового диода описывают экспоненциальной зависимостью тока от напряжения. При снятии характеристики диода получены экспериментальные данные:

$u, \text{ В}$	0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5
$i, \text{ мА}$	0,74; 1,82; 4,46; 10,9; 27,0

Используя метод выравнивания, аппроксимировать характеристику экспоненциальной функцией  $i = I_0 e^{au}$ .

**5.27р.** Используя метод выбранных точек, аппроксимировать ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. 5.22) степенным полиномом  $i = a_0 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2$ .

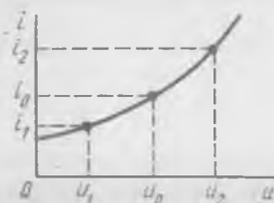


Рис. 5.22



Рис. 5.23

**5.28.** Применяя метод выбранных точек, аппроксимировать ВАХ нелинейного резистивного элемента (рис. 5.23) полиномом вида  $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ .

**5.29р.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей

$x_i$	0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8
$y_i$	0; 0,06; 0,23; 0,5; 0,85; 1,18; 1,65; 2,3; 2,9

Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать характеристику выражением  $y = a_2 x^2$ .

**5.30.** Решить задачу 5.29р методом выравнивания.

**5.31.** Заданную в виде таблицы  $(x_i, y_i)$  ВАХ нелинейного резистивного элемента

$x_i$	0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8
$y_i$	0; 0,26; 0,54; 0,72; 0,93; 1,1; 1,18; 1,28; 1,36

аппроксимировать линейной функцией  $y = a_1 x$ . Коэффициент  $a$  определить методом наименьших квадратов.

**5.32.** ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  в некоторой области изменения независимой переменной  $x_0 \leq x \leq x_n$  описывается линейной функцией  $y = a_1 x + a_0$ . Используя метод наименьших квадратов, составить систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1$  и  $a_0$  по данным таблицы  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

5.33. Падающий участок ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задан таблицей

$x_i$ . . . . .	0,2;	0,25;	0,3;	0,35;	0,4
$y_i$ . . . . .	9,0;	6,75;	4,6;	3,0;	2,0

Аппроксимировать характеристику на отрезке  $[0,2; 0,4]$  линейной функцией  $y = a_1x + a_0$  методом наименьших квадратов.

5.34. ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Характеристику аппроксимируют полиномом  $y = a_1x + a_2x^2$ . Используя метод наименьших квадратов, составить уравнения для определения коэффициентов  $a_1, a_2$ .

5.35р. ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$ , рассмотренного в задаче 5.29р, аппроксимирована параболой  $y = a_2x^2$ . Получить приближенное выражение для ВАХ в окрестности рабочей точки  $x_p = 0,6$ .

5.36м. ВАХ нелинейного резистивного элемента  $y = y(x)$  задана таблицей (см. условие задачи 5.29р). Используя формулы численного дифференцирования, найти приближенное выражение для ВАХ в окрестности рабочей точки  $x_p = 0,6$ . Сравнить результаты решения задач 5.35р и 5.36м.

5.37. ВАХ нелинейного резистивного элемента задана аналитически в виде  $i = f(u)$ . Получить выражения для статического сопротивления  $R_{ст}$  и дифференциального сопротивления  $R_{диф}$ , найти их взаимосвязь.

5.38. Решить задачу 5.37 в предположении, что ВАХ задана в виде  $u = \varphi(i)$ .

5.39. ВАХ резистивного элемента имеет вид  $i = f(u)$ . Какой должна быть функция  $f(u)$ , чтобы удовлетворялся принцип суперпозиции  $|f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)|$ ?

**Решения и методические указания**

5.25м. Используя метод приведения характеристики к линейному виду путем преобразования  $\ln(i/I_0) = au$ , можно найти  $I_0 = i|_{u=0}$ . Коэффициент  $a$  определяют в результате линеаризации графика  $\ln(i/I_0) = au$ .

5.26р. В отличие от предыдущей задачи параметр  $I_0$  определяют не по таблице, а путем графического построения. Составим вспомогательную таблицу:

$u, В$ . . . . .	0,1;	0,2;	0,3;	0,4;	0,5
$\ln \frac{i}{1mA}$ . . . . .	-0,301;	0,599;	1,495;	2,389;	3,296

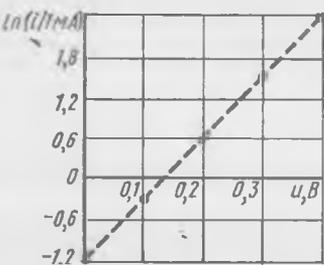


Рис. 5.24

По таблице строим график (рис. 5.24). Полученная зависимость хорошо аппроксимируется прямой, уравнение которой  $\ln(i/1 \text{ mA}) = 9(u - 0,133)$ . Кроме того, по условию  $\ln(i/1 \text{ mA}) = \ln(I_0/1 \text{ mA}) + au$ .

Сопоставляя эти результаты, получаем  $\ln(I_0/1 \text{ мА}) = -1,2$ ;  $I_0 = 0,3 \text{ мА}$ ;  $a = 9 \text{ В}^{-1}$ . Таким образом,  $i = 0,3e^{9u} \text{ мА}$ .

**5.27р.** Необходимо, чтобы аппроксимированная ВАХ совпадала с заданной в выбранных точках  $(u_1, i_1)$ ,  $(u_0, i_0)$  и  $(u_2, i_2)$ . В результате получаем систему уравнений:

$$i_0 = a_0 + a_1(u_0 - u_0) + a_2(u_0 - u_0)^2;$$

$$i_1 = a_0 + a_1(u_1 - u_0) + a_2(u_1 - u_0)^2;$$

$$i_2 = a_0 + a_1(u_2 - u_0) + a_2(u_2 - u_0)^2,$$

из которой находим искомые коэффициенты:  $a_0 = i_0$ ;

$$a_1 = \{i_0[(u_1 - u_0)^2 - (u_2 - u_0)^2] + i_1(u_2 - u_0)^2 - i_2(u_1 - u_0)^2\}/D;$$

$$a_2 = [i_0(u_2 - u_1) - i_1(u_2 - u_0) + i_2(u_0 - u_1)]/D; \quad D = -(u_2 - u_0)(u_0 - u_1)(u_2 - u_1).$$

**5.29р.** Сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции

$y$  от заданной  $y_i$   $\xi = \sum_{i=0}^n [a_2 x_i^2 - y_i]^2$  минимальна при значении ко-

эффициента  $a_2$ , удовлетворяющего уравнению  $\frac{\partial \xi}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=0}^n (a_2 x_i^2 - y_i) x_i^2 = 0$ , откуда

$$a_2 = \left( \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \right) / \sum_{i=0}^n x_i^4 = 4,63.$$

**5.35р.** Разложение функции  $y = a_2 x^2$  в ряд Тейлора в окрестности  $\Delta x$  рабочей точки  $x_p$  имеет вид

$$\begin{aligned} y &= y(x_p) + \frac{1}{1!} y'(x_p) (\Delta x) + \frac{1}{2!} y''(x_p) (\Delta x)^2 = \\ &= a_2 x_p^2 + \frac{1}{1!} 2a_2 x_p (\Delta x) + \frac{1}{2!} 2a_2 (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

При  $a_2 = 4,63$ ,  $x_p = 0,6$  получим  $y = 1,67 + 5,56 (\Delta x) + 4,63 (\Delta x)^2$ .

**5.36м.** При разложении функции в ряд Тейлора (см. задачу 5.35р) применить конечно-разностную аппроксимацию производных.

### § 5.3. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии

**5.40.** ВАХ нелинейного резистивного элемента описывается выражением  $i = a_2 u^2$ . Показать, что гармоническое напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ , приложенное к элементу, вызывает в нем негармонический ток.

**5.41.** ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом  $i = a_0 + a_1 u + a_3 u^3$ . Найти частоты всех составляющих тока, если к элементу приложено напряжение: а)  $u = U_m \cos \omega_0 t$ ; б)  $u = u_0 + U_m \cos \omega_0 t$ .

5.42. Решить задачу 5.41 для случая, когда ВАХ аппроксимирована полиномом  $i = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_4u^4$ .

5.43. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого описывается полиномом  $i = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$ , приложено напряжение  $u = U_m \cos \omega t$ . При каком условии постоянная составляющая тока через элемент не зависит от амплитуды приложенного к нему напряжения?

5.44м. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого выражается функцией  $i = 0,2(e^{8u} - 1)$  мА, приложено напряжение  $u = 0,5 + 0,05 \cos 10^4 t$  В. Найти амплитуды первых трех спектральных составляющих тока через элемент.

5.45. ВАХ нелинейного резистивного элемента аппроксимирована полиномом  $i = 50 + 4u + 1,5u^2$  мА. К элементу приложено напряжение  $u = 4 + U_m \cos 10^4 t$  В. Найти зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от амплитуды переменной составляющей напряжения  $U_m$ .

5.46. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого аппроксимирована полиномом  $i = 20 + 2u + 0,5u^2 - 0,04u^3$  мА, приложено напряжение  $u = 2 + U_m \cos 10^5 t$  В. Определить зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от амплитуды переменной составляющей напряжения  $U_m$ .

5.47. На нелинейный резистивный элемент с ВАХ  $i = 30 + 5u + 2u^2$  мА действует напряжение  $u = u_0 + U_m \cos 10^5 t$  В. Определить зависимость амплитуды первой гармоники тока  $I_{m1}$  от напряжения смещения  $u_0$  при фиксированной амплитуде переменной составляющей напряжения  $U_m = 3$  В.

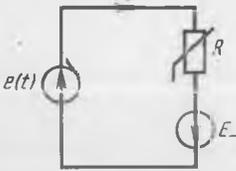


Рис. 5.25

5.48м. В цепи (рис. 5.25) ВАХ нелинейного резистивного элемента описывается выражением  $i = 2 + 4u + 5u^2$  мА. Напряжения, действующие в цепи:  $e(t) = 2 \cos 2\pi \cdot 10^3 t$  В;  $E_0 = 2$  В = const. Найти амплитуды гармонических составляющих тока  $i$ .

5.49р. К нелинейному резистивному элементу приложено гармоническое напряжение  $u(t) = 3 \cos 2\pi \cdot 10^3 t$  В. Какой должна быть ВАХ этого элемента, чтобы через него протекал гармонический ток  $i(t) = 18 \cos 4\pi \cdot 10^3 t$  мА?

5.50. Найти аналитическое выражение для ВАХ нелинейного резистивного элемента, который обеспечивает преобразование синусоидального воздействия  $x(t)$  в бесконечную последовательность треугольных импульсов (см. задачу 5.23р).

5.51. К нелинейному резистивному элементу, ВАХ которого аппроксимирована полиномом  $i = a_0 + a_1u + a_2u^2$ , приложено напряжение  $u = \sum_{k=1}^2 U_{mk} \cos \omega_k t$ . Найти амплитуды гармонических составляющих тока.

5.44м. Разложить функцию  $i(u)$  в ряд Тейлора в окрестностях рабочей точки  $u_0 = 0,5\text{В}$  и, ограничиваясь первыми тремя членами, получить полином второго порядка, который аппроксимирует ВАХ при  $u \approx u_0$ .

5.48м. Учсть, что к нелинейному элементу приложено напряжение  $u = 2 + 2 \cos 2\pi \cdot 10^3 t$  В.

5.49р. Гармоническое напряжение  $u(t) = U_m \cos \omega t$ , приложенное к нелинейному резистивному элементу с ВАХ  $i = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ , вызы-

вает в нем ток  $i = I_- + \sum_{k=1}^n I_{mk} \cos k\omega t$ . По условию задачи  $I_- = 0$ ,  $I_{mk} = 0$  ( $k = 1, 3, 4, \dots, n$ ), а  $I_{m2}$  имеет заданное значение. Необходимо выразить эти амплитуды гармонических составляющих тока через коэффициенты  $a_k$  и амплитуду напряжения  $U_m$  и решить полученную систему уравнений относительно коэффициентов  $a_k$ :

$$I_- = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \frac{5}{16} a_6 U_m^6 + \dots = 0;$$

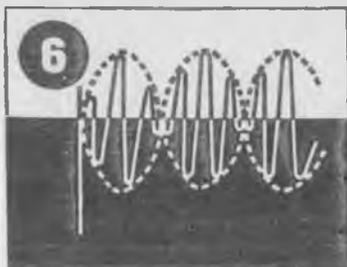
$$I_{m1} = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots = 0;$$

$$I_{m2} = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{15}{32} a_6 U_m^6 + \dots = I_{m2};$$

$$I_{mn} = \frac{1}{2^{n-1}} a_n U_m^n = 0.$$

Решение этой системы уравнений при высоких степенях  $n$  полинома, описывающего ВАХ, затруднительно. Поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая квадратичной ВАХ ( $n = 2$ ):  $i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ . В результате получаем  $a_0 + 0,5 a_2 U_m^2 = 0$ ;  $a_1 = 0$ ;  $a_2 = 2I_{m2}/U_m^2$ , откуда  $a_0 = -I_{m2}$ . Требуемая ВАХ имеет вид  $i = -I_{m2} + 2I_{m2}u^2/U_m^2$ . При  $U_m = 3$  В;  $I_{m2} = 18$  мА имеем  $i = -18 + 4u^2$  мА.

# Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами



## § 6.1. Классический метод

6.1р. Составить дифференциальные уравнения цепей (рис. 6.1, а, б) для определения: а) напряжения  $u$ ; б) тока  $i_L$ .

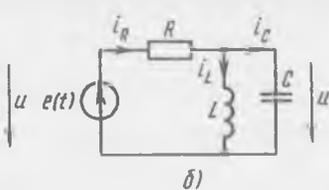
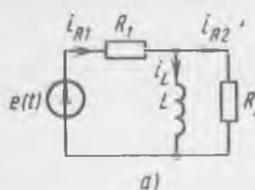


Рис. 6.1

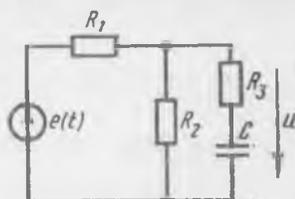


Рис. 6.2

6.2. Составить дифференциальное уравнение цепи (рис. 6.2) относительно напряжения  $u$ .

6.3. Составить дифференциальное уравнение цепи (рис. 6.3) относительно тока  $i_L$ .

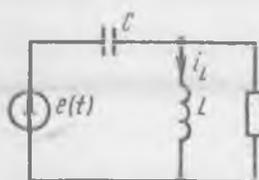


Рис. 6.3

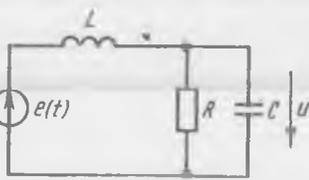


Рис. 6.4

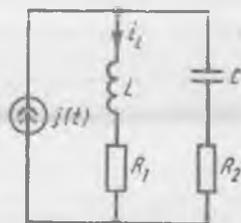


Рис. 6.5

6.4. Составить дифференциальное уравнение цепи (рис. 6.4) относительно напряжения  $u$ .

6.5. Составить дифференциальное уравнение цепи (рис. 6.5) относительно тока  $i_L$ .

6.6м. Для цепи (рис. 6.6) составить систему дифференциальных уравнений относительно напряжений  $u_1$  и  $u_2$ .

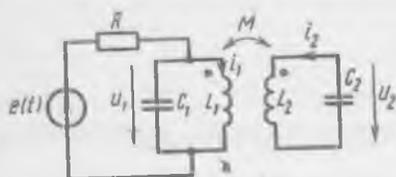


Рис. 6.6

6.7. Для цепей рис. 6.7, а, б составить дифференциальные уравнения относительно напряжения  $u$ .

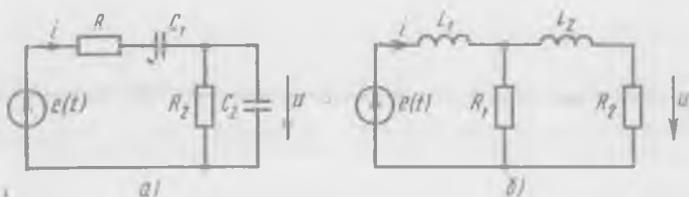


Рис. 6.7

6.8. Определить порядок  $\nu$  цепей рис. 6.8, а—г.

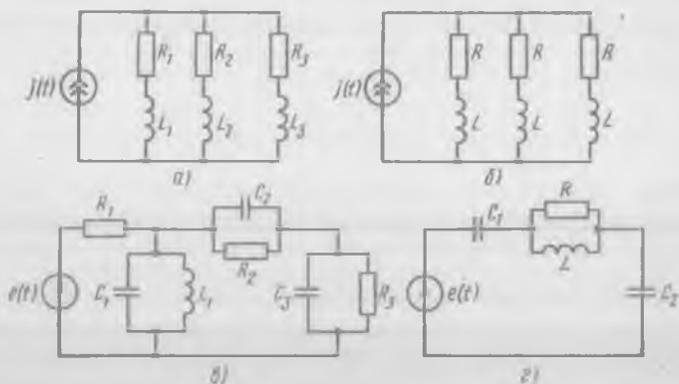


Рис. 6.8

6.9р. К  $RC$ -цепи, находившейся в установившемся режиме, под действием постоянной э. д. с.  $E_-$  в момент  $t = 0$  подключают емкость  $C_2$ , предварительно заряженную до напряжения  $U_0$  (рис. 6.9). Найти напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

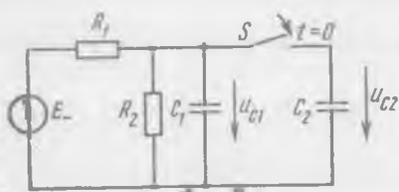


Рис. 6.9

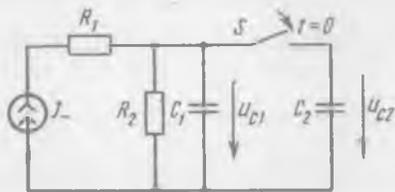


Рис. 6.10

6.10м. Для цепи рис. 6.10 найти напряжения  $u_{C1}$ ,  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ . В момент коммутации  $t = 0$  емкость  $C_2$  не заряжена.

6.11м. Две  $RC$ -цепи, находившиеся в установившемся режиме под действием постоянных э. д. с.  $E_{1-}$  и  $E_{2-}$ , в момент  $t = 0$  соединяются между собой (рис. 6.11). Найти напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$  и  $t = \infty$ .

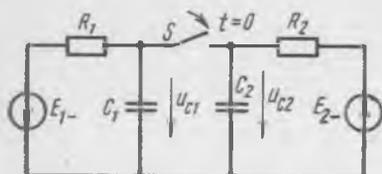


Рис. 6.11

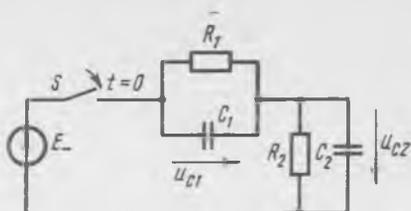


Рис. 6.12

6.12м. Двухзвенную  $RC$ -цепь без начального запаса энергии подключают в момент  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E_-$  (рис. 6.12). Найти напряжения  $u_{C1}$  и  $u_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ ,  $t = \infty$ .

6.13р.  $RL$ -цепь (рис. 6.13) находится в установившемся режиме под действием постоянной э. д. с.  $E_-$ . В момент  $t = 0$  ключ размыкается. Считая все параметры цепи известными, найти токи  $i_1$  и  $i_2$  через индуктивности в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

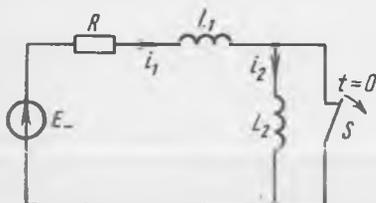


Рис. 6.13

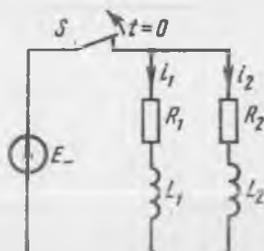


Рис. 6.14

6.14. В момент времени  $t = 0$   $RL$ -цепь отключают от источника постоянной э. д. с.  $E_-$  (рис. 6.14). Найти токи  $i_1$  и  $i_2$  для  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

6.15м. В  $RL$ -цепи (рис. 6.15) ключ размыкается в момент  $t = 0$ .

Полагая известными параметры цепи, найти токи  $i_1$  и  $i_2$  в моменты времени  $t = 0_-$ ,  $t = 0_+$ .

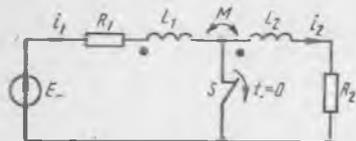


Рис. 6.15

6.16р. Напряжение  $u$  на входе последовательной  $RC$ -цепи изменяется по закону

$$u = \begin{cases} E_1 = 5 \text{ В} & \text{при } t < 0; \\ E_2 = 10 \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Определить законы изменения входного тока  $i$  и напряжения  $u_C$  при  $R = 5 \text{ кОм}$ ;  $C = 200 \text{ пФ}$ .

6.17. Используя данные задачи 6.16р, определить закон изменения напряжения на емкости  $u_C$  в случае, когда напряжение на входе цепи после коммутации равно нулю.

6.18. Емкость, предварительно заряженную до напряжения  $U_0$ , подключают в момент времени  $t = 0$  к сопротивлению  $R$ . Найти момент времени  $t_1$ , соответствующий уменьшению напряжения на емкости в  $N$  раз.

6.19. По данным задачи 6.18 определить среднюю на интервале времени  $[0, t_1]$  мощность, рассеиваемую в сопротивлении  $R$ .

6.20м. Конденсатор емкостью  $C = 0,5$  мкФ, предварительно заряженный до напряжения  $U_0 = 100$  В, отключают от источника. Через  $t = 30$  мин после этого напряжение на нем уменьшилось в 10 раз. Используя простейшую параллельную схему замещения конденсатора, найти сопротивление утечки (изоляция)  $R_y$ .

6.21р. На вход последовательной  $RL$ -цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают одиночный прямоугольный импульс напряжения  $E = 5$  В длительностью  $t_{и}$ . Параметры элементов цепи:  $R = 2$  кОм;  $L = 40$  мГн. Найти входной ток  $i$  цепи и напряжение на индуктивности  $u_L$  при различных значениях длительности импульса  $t_{и}$ : а) 5 мкс; б) 80 мкс.

6.22м. Последовательную  $RL$ -цепь с нулевыми начальными условиями подключают в момент времени  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E_- = 10$  В. Определить по графику входного тока цепи  $i(t)$  (рис. 6.16) параметры элементов  $R$  и  $L$ .



Рис. 6.16

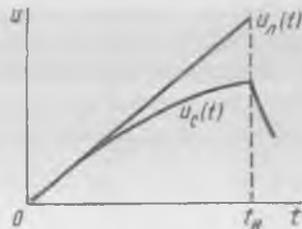


Рис. 6.17

6.23р. На вход последовательной  $RC$ -цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подступает одиночный прямоугольный импульс напряжения длительностью  $t_{и} = 2$  мс. В диапазоне малых времен  $0 < t \ll \tau = RC$  ( $\tau$  — постоянная времени цепи) закон изменения напряжения на емкости  $u_C(t)$  почти не отличается от линейного  $u_n(t)$ , но в дальнейшем отличие становится заметным (рис. 6.17). Нелинейность напряжения на емкости оценивается параметром  $\rho$ :

$$\rho = \frac{u_n(t_{и}) - u_C(t_{и})}{u_n(t_{и})} 100\%.$$

Какой должна быть постоянная времени  $\tau$ , чтобы параметр  $\rho$  не превышал: а) 1%; б) 5%; в) 10%?

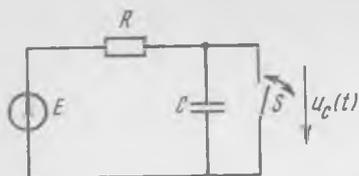


Рис. 6.18

6.24м. В цепи (рис. 6.18) ключ  $S$  периодически замыкается и через очень короткий промежуток времени размыкается. Сопротивление замкнутого ключа пренебрежимо мало, и емкость  $C$  при замкнутом ключе полностью разряжается. Показать, что напряжение  $u_C(t)$  имеет пилообразную форму. С какой частотой нужно

замыкать ключ, чтобы отклонение закона изменения напряжения на емкости от линейного не превышало  $\rho$  (%)? Найти высоту импульса выходного напряжения  $E_{\text{в}}$ , если  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ;  $E = 10$  В при: а)  $\rho = 1\%$ ; б)  $\rho = 5\%$ ; в)  $\rho = 10\%$ .

6.25р. Определить характер свободных процессов в последовательной  $RLC$ -цепи, составленной из элементов со следующими параметрами:  $R = 15$  Ом;  $L = 20$  мГн;  $C = 5000$  пФ. Внутреннее сопротивление источника сигнала  $R_i = 5$  Ом.

6.26. Определить частоту свободных колебаний  $\omega_{св}$  и логарифмический декремент затухания  $\theta$  последовательного колебательного контура, рассмотренного в задаче 6.25р.

6.27р. Последовательный колебательный  $RLC$ -контур с нулевыми начальными условиями подключают в момент  $t = 0$  к источнику постоянной э. д. с.  $E_-$ . Предложите способы приближенного определения добротности контура  $Q$  по графику тока контура  $i(t)$ .

6.28м.  $RLC$ -контур (см. задачу 6.27р) имеет добротность  $Q = 100$ . Через сколько периодов свободных колебаний огибающая тока контура снизится до уровня: а) 50%; б) 20%; в) 10%; г) 5% от своего максимального значения?

6.29м. Последовательный  $RLC$ -контур с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику постоянной э. д. с.  $E_- = 10$  В. Определить по графику тока контура  $i(t)$  (рис. 6.19) параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

6.30р. В момент времени  $t = 0$  к входу последовательной  $RL$ -цепи подключают источник гармонической э. д. с.  $e = \sqrt{2} \cdot 50 \cos 10^6 t$  В. Определить входной ток цепи  $i$  при  $L = 40$  мГн;  $R = 8$  кОм.

6.31. Найти напряжение  $u(t)$  цепи (см. рис. 6.7, а). Принять, что э. д. с.  $e(t)$  изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E = 5\text{В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

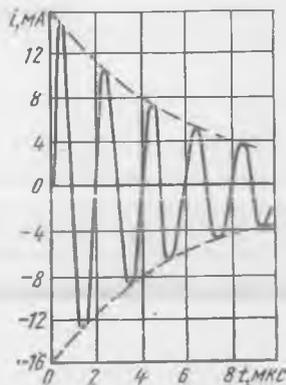


Рис. 6.19

Параметры элементов цепи:  $R_1 = 2$  кОм;  $R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = 2$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ.

6.32. Найти напряжение  $u(t)$  цепи (см. рис. 6.7, б). Принять, что э. д. с.  $e(t)$  изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ E = 2 \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи:  $R_1 = 1$  кОм;  $R_2 = 2$  кОм;  $L_1 = 1$  Гн;  $L_2 = 2$  Гн.

6.33р. На вход последовательной  $RC$ -цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают бесконечную периодическую последовательность положительных прямоугольных импульсов напряжения высотой  $E$ , длительностью  $t_n$  и периодом повторения  $T$ . Принимая  $E = 1$  В;  $RC = \tau = 1$  мс, найти напряжение на емкости  $u_C(t)$  при различных значениях  $t_n$  и  $T$ : а)  $t_n = 1$  мс;  $T = 6$  мс; б)  $t_n = 5$  мс;  $T = 6$  мс; в)  $t_n = 0,2$  мс;  $T = 0,6$  мс.

#### Решения и методические указания

6.1р. Вывод дифференциальных уравнений в задачах 6.1—6.7 осуществляют в два этапа. Сначала составляют уравнения электрического равновесия относительно неизвестных токов и напряжений. Затем из полученной системы уравнений исключают неизвестные, кроме одной переменной, указанной в условии задачи.

Рассмотрим цепь рис. 6.1, а. Для этой цепи  $i_{R1} = i_L + i_{R2}$ ;  $e = u_{R1} + u$ .

Выразим напряжения и токи через заданную переменную — напряжение  $u$ :  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$ ;  $i_{R2} = u/R_2$ . Отсюда  $u_{R1} = R_1 i_{R1} = \frac{R_1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + \frac{R_1}{R_2} u$ . Подставим этот результат во второе уравнение электрического равновесия:

$$e = \frac{R_1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) u.$$

Чтобы избавиться от интеграла в правой части последнего уравнения, осуществим дифференцирование обеих частей уравнения по времени. После простых преобразований получаем

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{de}{dt},$$

где  $\tau = L(R_1 + R_2)(R_1 R_2)^{-1}$ .

Выразим напряжения и токи через ток  $i_L$ :

$$u = u_{R2} = u_L = L \frac{di_L}{dt}; i_{R2} = u_{R2} R_2^{-1} = L R_2^{-1} \frac{di_L}{dt};$$

$$i_{R1} = i_L + L R_2^{-1} \frac{di_L}{dt}.$$

Подставляя в уравнение  $e = u_{R_1} + u_{u_{R_1}} = R_1 i_{R_1}$  и  $u = u_L$ , после простых преобразований находим

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = R_2 [L(R_1 + R_2)]^{-1} e.$$

Теперь рассмотрим цепь, схема которой приведена на рис. 6.1, б. Для этой цепи  $i_R = i_L + i_C$ ;  $e = u_R + u$ .

Выразим напряжения и токи через заданную переменную — напряжение  $u$ :  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt$ ,  $i_C = C \frac{du}{dt}$ . Отсюда  $i_R = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt + C \frac{du}{dt}$ . При  $u_R = R i_R$  по уравнению  $e = u_R + u$  определяем

$$e = \frac{R}{L} \int_{-\infty}^t u dt + RC \frac{du}{dt} + u.$$

После дифференцирования этого уравнения имеем

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}.$$

Определяем напряжение и токи через ток  $i_L$ :

$$u = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \frac{du}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}; \quad i_R = i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}.$$

Выражая  $u_R = R i_R$  через  $i_L$ , в соответствии с уравнением  $e = u_R + u$  получаем

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LRC} e.$$

**6.6м.** Сначала следует выразить токи  $i_1$  и  $i_2$  через напряжения  $u_1$  и  $u_2$  с помощью уравнений

$$u_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$L_1 i_1 + M i_2 = \int_{-\infty}^t u_1 dt; \quad M i_1 + L_2 i_2 = \int_{-\infty}^t u_2 dt,$$

откуда  $i_1 = [L_2 \int_{-\infty}^t u_1 dt - M \int_{-\infty}^t u_2 dt] D$ ;  $i_2 = [L_1 \int_{-\infty}^t u_2 dt - M \int_{-\infty}^t u_1 dt] D$ ;

$$D = (L_1 L_2 - M^2)^{-1}.$$

**6.9р.** Для момента времени  $t = 0_-$ , непосредственно предшествующего коммутации, согласно условию  $u_{C_2}(0_-) = U_0$  и  $u_{C_1}(0_-) = (ER_2)/(R_1 + R_2)$ . Последнее выражение получают в результате расчета простейшей цепи постоянного тока, состоящей из элементов  $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ .

В общем случае  $u_{C_1}(0_-) \neq u_{C_2}(0_-)$ . Поэтому в момент ( $t = 0$ ) присоединения  $C_2$  к  $C_1$  напряжения на емкостях изменяются скачками, и второй закон коммутации не выполняется.

Для решения задачи нужно использовать принцип непрерывности во времени суммарного заряда цепи. Заряд емкости  $q$  связан с напряжением соотношением  $q = Cu$ , поэтому можно записать  $C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+)$ .

Напряжения на параллельно включенных емкостях одинаковы, т. е.  $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+)$ , поэтому  $u_{C_1}(0_+) = [C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-)] \times (C_1 + C_2)^{-1}$ . Подставляя в это выражение ранее найденные значения напряжений для  $t = 0_-$ , получаем  $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = \frac{1}{C_1 + C_2} \left( \frac{ER_2 C_1}{R_1 + R_2} + C_2 U_0 \right)$ .

**6.10м.** Задача решается аналогично предыдущей. Различие состоит лишь в значениях напряжений  $u_{C_1}(0_-)$  и  $u_{C_2}(0_-)$ .

**6.11м.** Напряжения  $u_{C_1}(0_-)$ ,  $u_{C_2}(0_-)$  и  $u_{C_1}(\infty)$  определяют в результате расчета цепей постоянного тока. Напряжения  $u_{C_1}(0_+)$  и  $u_{C_2}(0_+)$  вычисляют в соответствии с принципом непрерывности во времени суммарного заряда цепи (см. задачу 6.9р).

**6.12м.** Напряжения  $u_{C_1}(\infty)$  и  $u_{C_2}(\infty)$  определяют в результате расчета простейшей цепи постоянного тока, состоящей из элементов  $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Цепь не содержит начального запаса энергии, поэтому легко найти  $u_{C_1}(0_-)$  и  $u_{C_2}(0_-)$ . Для расчета напряжений  $u_{C_1}(0_+)$  и  $u_{C_2}(0_+)$  нужно использовать уравнение баланса напряжений  $u_{C_1}(0_+) + u_{C_2}(0_+) = E$  и принцип непрерывности суммарного заряда.

**6.13р.** До коммутации ток течет через индуктивность  $L_1$  и замкнутый ключ, минуя индуктивность  $L_2$ :  $i_1(0_-) = i_R(0_-) = E/R$ ;  $i_2(0_-) = 0$ . После коммутации ( $t = 0_+$ ) токи через индуктивности изменяются скачками, и первый закон коммутации не выполняется (сравнить с режимом работы цепи в задаче 6.9р).

Для определения токов  $i_1(0_+)$  и  $i_2(0_+)$  нужно использовать принцип непрерывности суммарного потокосцепления цепи в моменты  $t = 0_-$  и  $t = 0_+$ :

$$\Psi_1(0_-) + \Psi_2(0_-) = \Psi_1(0_+) + \Psi_2(0_+).$$

Выражая потокосцепления через токи ( $\Psi = Li$ ) и учитывая, что  $i_2(0_-) = 0$ ,  $i_1(0_+) = i_2(0_+)$  (последнее отражает то обстоятельство, что после коммутации индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  включены последовательно), получаем  $i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E}{R}$ .

**6.15м.** Применить принцип непрерывности суммарного потокосцепления цепи:  $L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) + M i_1(0_-) + M i_2(0_-) = (L_1 + L_2 + 2M) i_1(0_+)$ .

**6.16р.** В установившемся режиме напряжение на емкости равно напряжению источника:  $u_C = E_1 = 5$  В при  $t < 0$  и  $u_C = E_2 = 10$  В при  $t \rightarrow \infty$ .

Для определения напряжения  $u_C$  в переходном режиме составим на основании второго закона Кирхгофа уравнение электрического равновесия цепи при  $t \geq 0$ :  $u_R + u_C = E_2$ . Учитывая, что  $u_R = Ri_R$ ;

$i_R = i_C = C \frac{du_C}{dt}$ , получаем дифференциальное уравнение цепи для  $t \geq 0$ :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде суммы свободной  $u_{C\text{св}}$  и принужденной  $u_{C\text{пр}}$  составляющих:  $u_C = u_{C\text{св}} + u_{C\text{пр}}$ . Свободную составляющую напряжения на емкости находим, решая однородное дифференциальное уравнение  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ . Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение  $RC p + 1 = 0$ , которое имеет единственный корень  $p_1 = -1/(RC) = -10^6 \text{ с}^{-1}$ . Учитывая это, можно записать

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-10^6 t} \text{ В,}$$

где  $A_1$  — постоянная интегрирования.

Принужденная составляющая  $u_{C\text{пр}}$  равна напряжению на емкости в установившемся режиме после коммутации, т. е. при  $t \rightarrow \infty$ :  $u_{C\text{пр}} = E_2 = 10 \text{ В}$ .

Суммируя свободную и принужденную составляющие, получаем выражение для напряжения на емкости в переходном режиме:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + E_2 = A_1 e^{-10^6 t} + 10 \text{ В.}$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  воспользуемся вторым законом коммутации, в соответствии с которым напряжение на емкости в начальный момент времени после коммутации ( $t = 0$ ) равно напряжению на емкости в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ( $t = 0_-$ ):

$$u_C(0) = u_C(0_-) = E_1 = 5 \text{ В.}$$

Из выражения для  $u_C$  находим  $A_1 = E_1 - E_2 = -5 \text{ В}$ . Таким образом, окончательное выражение для напряжения на емкости имеет вид

$$u_C = E_2 + (E_1 - E_2) e^{p_1 t} = 10 - 5e^{-10^6 t} \text{ В.}$$

Напряжение  $u_C$  после коммутации плавно увеличивается, начиная со значения  $u_C(0) = E_1 = 5 \text{ В}$ , и стремится к установившемуся значению  $u_C = E_2 = 10 \text{ В}$  при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 6.20, а).

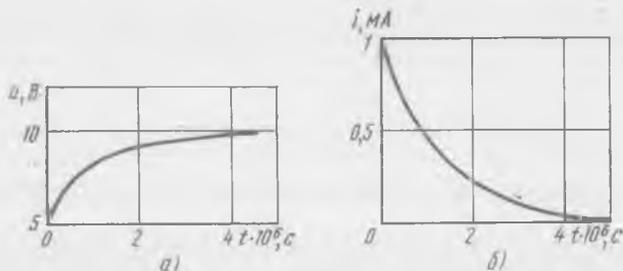


Рис. 6.20

Входной ток цепи совпадает по значению с током через емкость:

$i = i_C = C \frac{du_C}{dt} = Cp_1(E_1 - E_2)e^{p_1 t} = 1 \cdot 10^{-3} e^{-10^4 t}$  А. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) ток скачком возрастает от 0 до 1 мА, а затем начинает плавно уменьшаться, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 6.20, б).

**6.20м.** Рассмотреть процесс разрядки емкости  $C$ , заряженной до напряжения  $U_0$ , через сопротивление  $R_{\gamma}$ .

**6.21р.** Разделим исследуемый промежуток времени  $0 \leq t < \infty$  на два интервала:  $0 \leq t < t_{\text{н}}$  и  $t_{\text{н}} \leq t < \infty$ . В начале первого интервала (при  $t = 0$ ) напряжение на входе цепи скачком увеличивается от 0 до  $E = 5$  В. В начале второго интервала (при  $t = t_{\text{н}}$ ) напряжение на входе скачком уменьшается от 5 В до 0. Таким образом, в пределах каждого интервала времени реакция цепи может быть определена таким же образом, как и при подключении цепи к источнику постоянно-го напряжения.

Рассмотрим интервал времени  $0 \leq t < t_{\text{н}}$ . Начальное значение тока для данного интервала  $i(0) = 0$ . Для нахождения входного тока в переходном режиме составим на основании второго закона Кирхгофа уравнение электрического равновесия цепи для  $0 \leq t < t_{\text{н}}$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Решение этого уравнения ищем в виде суммы свободной  $i_{\text{св}}$  и принужденной  $i_{\text{пр}}$  составляющих:  $i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}}$ . Принужденная составляющая  $i_{\text{пр}}$  на данном интервале времени равна установившемуся значению тока, который протекал бы в цепи при условии, что к входу ее в течение бесконечно большого промежутка времени приложено постоянное напряжение  $E$ :  $i_{\text{пр}} = E/R$ . Для определения свободной составляющей тока  $i_{\text{св}}$  составим характеристическое уравнение  $Lp + R = 0$  и найдем его корень:  $p_1 = -R/L$ . Таким образом, свободная составляющая тока

$$i_{\text{св}} = B_1 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R$ ;  $B_1$  — постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования при  $i(0) = 0$   $B_1 = -E/R$ . Для  $0 \leq t < t_{\text{н}}$  окончательно получим

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Рассмотрим интервал времени  $t_{\text{н}} \leq t < \infty$ . Начальное значение тока для данного интервала  $i(t_{\text{н}})$  в соответствии с первым законом коммутации равно значению тока в момент времени, непосредственно предшествующей  $t_{\text{н}}$ :  $i(t_{\text{н}}) = i(t_{\text{н}-}) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t_{\text{н}}/\tau})$ . Дифференциальное уравнение цепи для  $t \geq t_{\text{н}}$  имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

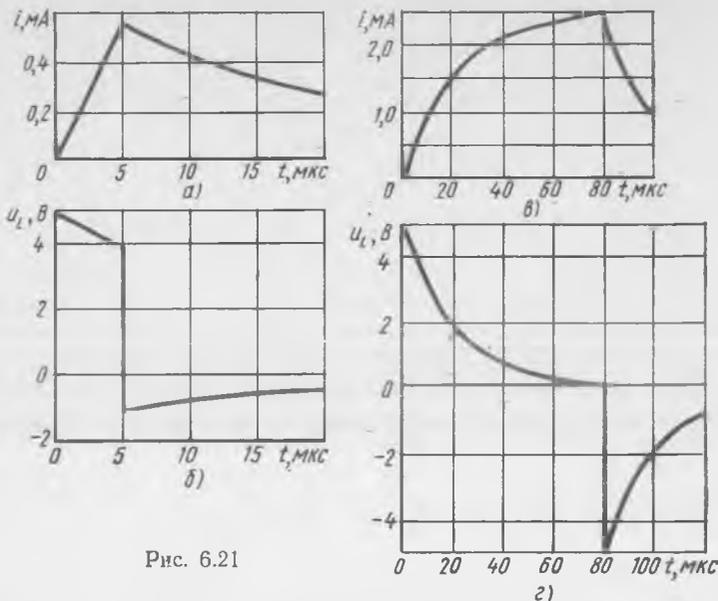


Рис. 6.21

Вследствие того что на этом интервале  $i_{\text{шр}} = 0$ , ток цепи  $i$  содержит только свободную составляющую:  $i = i_{\text{св}}$ . Так как свободные процессы в цепи не зависят от вида внешнего воздействия, свободная составляющая тока имеет такой же характер, что и на первом интервале времени, т. е.  $i = B_2 e^{-t/\tau}$ .

Постоянную интегрирования находим по известному начальному значению тока  $i(t_{\text{н}})$   $B_2 = \frac{E}{R} (e^{t_{\text{н}}/\tau} - 1)$ . Следовательно, при  $t_{\text{н}} \leq t < \infty$

$$i = \frac{E}{R} (e^{t_{\text{н}}/\tau} - 1) e^{-t/\tau}.$$

Таким образом, входной ток рассматриваемой цепи при  $t \geq 0$  изменяется по следующему закону:

$$i = \begin{cases} \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) & \text{при } 0 \leq t < t_{\text{н}}; \\ \frac{E}{R} (e^{t_{\text{н}}/\tau} - 1) e^{-t/\tau} & \text{при } t_{\text{н}} \leq t < \infty. \end{cases}$$

Используя соотношение между мгновенными значениями тока и напряжения индуктивности  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , находим напряжение на индуктивности в переходном режиме:

$$u_L = \begin{cases} E e^{-t/\tau} & \text{при } 0 \leq t < t_{\text{н}}; \\ -E (e^{t_{\text{н}}/\tau} - 1) e^{-t/\tau} & \text{при } t_{\text{н}} \leq t < \infty. \end{cases}$$

При  $R = 2$  кОм,  $L = 40$  мГн  $\tau = L/R = 20$  мкс. Графики  $i(t)$ ,  $u_L(t)$ , соответствующие длительности  $t_{и} = 5$  мкс, приведены на рис. 6.21, а, б. Например, в начальный момент времени ( $t = 0$ ) напряжение  $u_L$  скачком возрастает от 0 до 5 В. На интервале  $0 \leq t < t_{и}$   $u_L$  плавно уменьшается, достигая в конце интервала значения 3,9 В. В момент  $t = t_{и}$   $u_L$  скачком изменяется от 3,9 до  $-1,1$  В, а затем плавно уменьшается по абсолютному значению, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Следует иметь в виду, что при действии на цепь относительно короткого импульса ( $t_{и} = \tau/4 = 5$  мкс) напряжение  $u_L$  по форме не очень сильно отличается от входного напряжения.

Графики  $i(t)$  и  $u_L(t)$  для  $t_{и} = 80$  мкс ( $t_{и} = 4\tau$ ) приведены на рис. 6.21, в, г. Очевидно, форма напряжения  $u_L$  резко отличается от прямоугольной.

Таким образом, характер переходного процесса зависит от соотношения между длительностью импульса входного напряжения и постоянной времени цепи.

**6.22м.** Рассмотреть аналитическое выражение для входного тока последовательной  $RL$ -цепи, включаемой на постоянное напряжение (см. задачу 6.21р). Установившееся значение тока  $i_{уст} = E/R$  определяют по графику, что позволяет найти  $R$ . В момент времени  $t_1 = L/R$  ток  $i(t_1) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) = 0,632 \frac{E}{R}$ . По графику находим  $t_1$ , а затем  $L = Rt_1$ .

**6.23р.** Закон изменения напряжения на емкости  $u_C(t)$  при  $0 \leq t < t_{и}$  определяют так же, как это сделано в задаче 6.16р, с учетом того, что начальное напряжение на емкости равно нулю:  $u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC})$ , где  $E$  — высота импульса напряжения.

В диапазоне малых времен  $0 \leq t \ll RC$   $e^{-t/(RC)} \approx 1 - t/(RC)$ ;  $u_C(t) \approx E \frac{t}{RC}$ , т. е. напряжение на емкости меняется практически линейно.

Для момента  $t = t_{и}$   $p = \frac{x-1+e^{-x}}{x} 100\%$ , где для краткости записи  $x = t_{и}/(RC)$ . Таким образом,

$x \dots 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; \dots; 0,1; 0,12; \dots; 0,2; 0,21; 0,22$   
 $p \dots 0,499; 0,994; 1,485; 1,974; \dots; 4,838; 5,767; \dots; 9,365; 9,802; 10,236$

Следовательно,  $p < 1\%$ , если  $x = 0,02$ , отсюда  $RC = t_{и}/x = 100$  мс. Аналогично,  $p < 5\%$ , если  $x = 0,1$ , т. е.  $RC = 20$  мс и  $p < 10\%$  при  $x = 0,21$ , т. е.  $RC = 9,5$  мс.

**6.24м.** Емкость  $C$  относительно медленно заряжается через сопротивление  $R$  от источника питания  $E$  и практически мгновенно разряжается через ключ. Процессы зарядки и разрядки периодически повторяются.

Закон изменения напряжения на емкости  $u_C(t)$ , заряжающейся от источника, и оценка нелинейности этого напряжения рассмотрены в задаче 6.23р. По заданным значениям параметра  $p$  и постоянной времени цепи  $\tau = RC$  можно определить момент времени  $t_{и}$ , в кото-

рый процесс зарядки емкости должен быть прекращен с помощью ключа. Частота замыкания ключа  $f = 1/t_n$ , а высота импульсов напряжения  $E_n = u_c(t_n)$ .

**6.25р.** Критическое сопротивление контура  $R_{кр} = 2\rho = 2\sqrt{LC} = 4$  кОм. Суммарное сопротивление контура  $R = 20$  Ом  $\ll R_{кр}$ . Свободные процессы в контуре имеют колебательный характер.

**6.27р.** Можно предложить несколько способов приближенного определения добротности контура по графику тока контура  $i(t)$ . Все они основаны на использовании аналитического выражения

$$i = E(\omega_{св}L)^{-1}e^{-\delta t} \sin \omega_{св}t,$$

где  $\delta = R/2L$  — коэффициент затухания;  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — частота свободных колебаний в контуре;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота.

Определим ток в моменты времени  $t_1, t_1 + T_{св}$  и найдем их отношение:  $\frac{i(t_1)}{i(t_1 + T_{св})} = e^{\delta T_{св}}$ . Если затухание контура достаточно мало ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $\omega_{св} \approx \omega_0$ ;  $T_{св} \approx 2\pi/\omega_0$ . Поэтому  $\delta T_{св} \approx \pi/Q$  ( $Q = \omega_0 L/R$  — добротность контура) и  $Q \approx \pi \left[ \ln \frac{i(t_1)}{i(t_1 + T_{св})} \right]^{-1}$ .

Отсчитаем  $N$  периодов колебаний тока на интервале времени  $[0, t_N]$ ,  $t_N = NT_{св}$ . Огибающая тока  $Ee^{-\delta t}/(\omega_{св}L)$  максимальна в начале этого интервала  $E/(\omega_{св}L)$  и уменьшается до  $Ee^{-\delta t_N}/(\omega_{св}L)$  в его конце. Отношение этих двух значений огибающей  $p = e^{\delta T_{св}N}$ . Для контура с малыми потерями  $\delta T_{св} \approx \pi/Q$ , поэтому  $Q \approx \pi N \times (\ln p)^{-1}$ .

Практически удобно заранее задаваться некоторыми значениями  $p$ . Например, при  $p = 20$   $\pi/\ln p \approx 1,05$ ;  $Q \approx N$ . Поэтому добротность контура приближенно равна числу периодов колебаний тока, подсчитанных на интервале времени, в конце которого огибающая тока уменьшается в 20 раз по сравнению со своим значением в начале интервала. Аналогично, при  $p = 5$   $Q \approx 2N$ .

Пусть в момент времени  $t_1$  огибающая тока составляет  $e^{-1} = 0,368$  от своего максимального значения (при  $t = 0$ ). Интервалу  $[0, t_1]$  соответствует  $K$  периодов колебаний тока, т. е.  $t_1 = K T_{св}$ . Поскольку  $\delta t_1 = 1$ ,  $\delta T_{св} \approx \pi/Q$ , то  $Q \approx \pi K \approx 3K$ .

**6.28м.** Использовать результаты решения задачи 6.27р.

**6.29м.** Использовать результаты решения задачи 6.27р.

По графику тока контура определить период колебаний тока  $T_{св}$  и максимальное значение огибающей тока  $I_{max}$  (при  $t = 0$ ). Из выражений  $I_{max} = E/(\omega_{св}L)$ ;  $\omega_{св} = 2\pi/T_{св}$  найти величину индуктивности  $L$ . Определив по графику добротность  $Q$  и учитывая, что  $Q = \omega_0 L/R \approx \omega_{св} L/R$ ;  $\omega_{св} \approx 1/\sqrt{LC}$ , вычислить  $R$  и  $C$ .

**6.30р.** Дифференциальное уравнение цепи при  $t \geq 0$  имеет вид  $L \frac{di}{dt} + Ri = e$ . Свободная составляющая входного тока (см. задачу 6.21р)  $i_{св} = Be^{-Rt/L} = Be^{-2 \cdot 10^4 t}$  А. Принужденная составляющая

тока равна установившемуся значению тока цепи после коммутации (при  $t \rightarrow \infty$ ). Используя метод комплексных амплитуд, находим

$$i_{\text{вх}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos \left( 10^6 t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right) = \\ = 1,73 \cdot 10^{-3} \cos (10^6 t - 79^\circ) \text{ А.}$$

Суммируя свободную и принужденную составляющие, определяем входной ток цепи:

$$i = 1,73 \cdot 10^{-3} \cos (10^6 t - 79^\circ) + B e^{-2 \cdot 10^6 t} \text{ А.}$$

Постоянную интегрирования  $B$  находим, исходя из условия, что начальное значение тока через индуктивность равно значению тока в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации. Подставляя в полученное выражение для входного тока цепи  $t = 0$ ,  $i = 0$ , определяем  $B = -1,73 \cdot 10^{-3} \cos 79^\circ = -0,33 \cdot 10^{-3} \text{ А}$ . Окончательно имеем  $i = 1,73 \cos (10^6 t - 79^\circ) - 0,33 e^{-2,5 \cdot 10^6 t} \text{ мА}$ .

**6.33р.** При подаче импульса напряжения на вход цепи емкость  $C$  заряжается и напряжение  $u_C$  возрастает. На интервалах между импульсами емкость  $C$  разряжается и  $u_C$  убывает. Изменения  $u_C$  во времени происходят плавно, без скачков (в противном случае нарушался бы второй закон коммутации). Таким образом, процессы зарядки и разрядки емкости чередуются.

Во время действия первого импульса напряжение  $u_C$  увеличивается, начиная со значения  $u_C(0) = 0$  по закону (см. задачу 6.16р)

$$u_C(t) = E - E e^{-t/\tau}, \quad 0 \leq t < t_{\text{и}}$$

К моменту окончания первого импульса ( $t = t_{\text{и}}$ ) емкость  $C$  оказывается заряженной до напряжения  $u_C(t_{\text{и}}) = U_{\text{и1}}$ , а затем на интервале между первым и вторым импульсами разряжается через сопротивление  $R$  и источник входного напряжения, который принимаем идеальным. При разряде напряжение  $u_C$  изменяется по экспоненциальному закону

$$u_C(t) = U_{\text{и1}} e^{-(t-t_{\text{и}})/\tau}, \quad t_{\text{и}} \leq t < T$$

и при  $t = T$  становится равным  $u_C(T) = U_{\text{Т1}}$ . Поскольку  $u_C$  изменяется непрерывно, верхние границы двух указанных временных интервалов ( $t = t_{\text{и}}$  и  $t = T$  соответственно) могут быть включены в эти интервалы.

К моменту прихода второго импульса напряжение на емкости отлично от нуля ( $U_{\text{Т1}} \neq 0$ ). Поэтому напряжение  $u_C$  во время действия этого импульса (см. задачу 6.16р)

$$u_C(t) = E - (E - U_{\text{Т1}}) e^{-(t-T)/\tau}, \quad T \leq t \leq T + t_{\text{и}}$$

а процесс разрядки емкости описывают формулой

$$u_C(t) = U_{\text{и2}} e^{-(t-T-t_{\text{и}})/\tau}, \quad T + t_{\text{и}} \leq t \leq 2T,$$

где  $U_{\text{и2}} = u_C(T + t_{\text{и}})$ .

Аналогичным образом можно записать выражение для реакции цепи на третий и последующие импульсы.

При вычислениях  $u_C(t)$  удобно отсчитывать время от начала очередного импульса. Тогда выражения для реакции цепи на любой импульс входной последовательности будут единообразными по форме:

$$u_C(t') = \begin{cases} E - (E - U_T)e^{-t'/\tau}, & 0 \leq t' \leq t_n; \\ U_n e^{-(t' - t_n)/\tau}, & t_n \leq t' \leq T, \end{cases}$$

где  $U_T = u_C(0')$  — начальное напряжение на емкости (для всех импульсов, кроме первого,  $U_T \neq 0$ );  $U_n = u_C(t_n)$  — напряжение на емкости к моменту окончания импульса;  $t' = t - (n - 1)T$  — время, отсчитываемое от начала рассматриваемого импульса;  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядковый номер импульса.

Графики  $u_C(t)$  для заданных значений  $t_n$  и  $T$  приведены на рис. 6.22, а—в соответственно.

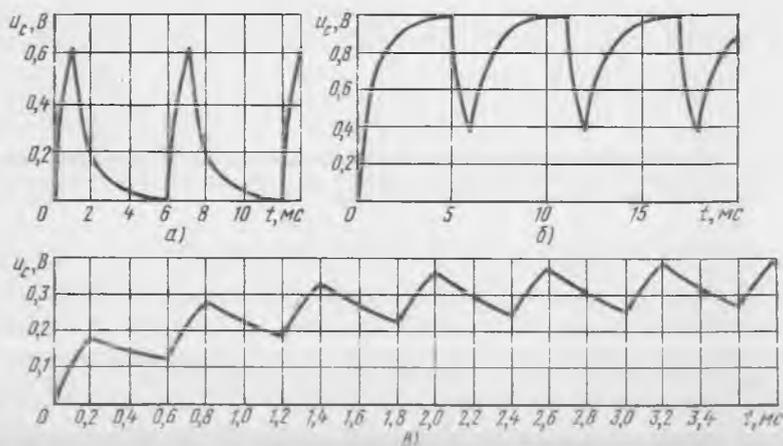


Рис. 6.22

Физически очевидно, что по прошествии достаточно большого времени  $t_{уст}$  с момента подачи на вход цепи первого импульса бесконечной импульсной последовательности переходный режим в цепи затухает и устанавливается стационарный режим, в котором напряжение на емкости представляет собой периодическую функцию времени:  $u_C(t) = u_C(t + T)$ . (Заметим, что теоретически  $t_{уст} \rightarrow \infty$ , поэтому при расчете  $u_C(t)$  по приведенным формулам для переходного режима последнее равенство выполняется лишь приближенно.) Исследованию стационарного режима в простейших цепях при периодическом импульсном воздействии посвящены задачи 6.69—6.71.

Из графиков на рис. 6.22 видно, что в первом случае стационарный режим устанавливается практически сразу ( $t_{уст} \approx 0$ ), во втором —  $t_{уст} \approx 6$  мс и в третьем —  $t_{уст} \approx 3$  мс.

## § 6.2. Операторный метод

**6.34р.** Построить операторную схему замещения и, используя законы Кирхгофа в операторной форме, составить уравнения электрического равновесия цепи, эквивалентная схема которой для мгновенных значений приведена на рис. 6.23.

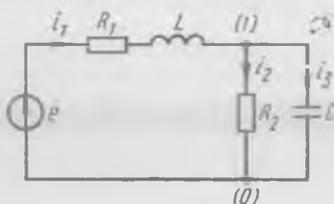


Рис. 6.23

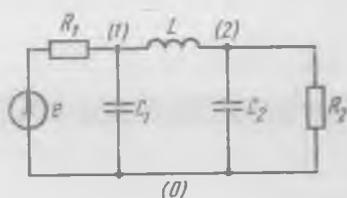


Рис. 6.24

**6.35р.** Построить операторную схему замещения цепи, эквивалентная схема которой для мгновенных значений показана на рис. 6.24. Составить уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме, используя методы контурных токов и узловых напряжений.

**6.36р.** Построить операторную эквивалентную схему цепи, содержащей связанные индуктивности (рис. 6.25).

**6.37м.** Используя свойство линейности преобразования Лапласа и зная, что изображение функции  $f(t) = e^{-at} \doteq (p + a)^{-1}$ , найти изображения следующих функций: а)  $\text{sh } at$ ; б)  $\text{ch } at$ ; в)  $\sin at$ ; г)  $\cos at$ ; д)  $1 - e^{-at}$ ; е)  $e^{-bt} - e^{-at}$ ; ж)  $\sin(bt + \varphi)$ ; з)  $\cos(bt + \varphi)$ .

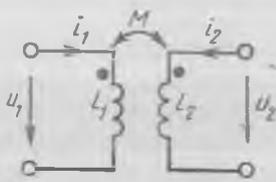


Рис. 6.25

**6.38.** Используя теорему смещения и результаты предыдущей задачи, найти изображения следующих функций: а)  $e^{-bt} \text{sh } at$ ; б)  $e^{-bt} \text{ch } at$ ; в)  $e^{-bt} \sin at$ ; г)  $e^{-bt} \cos(at + \varphi)$ .

**6.39м.** Найти значения функций  $f(t)$  при  $t = 0$  и  $t = \infty$  по их изображениям: а)  $\frac{1}{p + a}$ ; б)  $\frac{1}{(p + a)(p + b)}$ ; в)  $\frac{1}{p(p + a)}$ ; г)  $\frac{p + b}{p(p + a)}$ .

**6.40.** Применяя разложение на простые дроби, найти оригиналы, соответствующие изображениям: а)  $\frac{p^2 + 1}{p(p + 1)(p + 2)}$ ; б)  $\frac{p + 1}{p^2(p - 1)(p + 2)}$ .

**6.41.** Используя теорему разложения, найти оригиналы, соответствующие изображениям: а)  $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$ ; б)  $\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$ .

**6.42м.** Для некоторого двухполюсника с нулевыми начальными условиями известны графики входного напряжения  $u(t)$  и входного тока  $i(t)$  (рис. 6.26, а, б). Определить входное сопротивление двухполюсника в операторной форме  $Z(p)$ .

**6.43м.** Решить задачу 6.42м, для случая, когда  $u(t)$  и  $i(t)$  заданы графиками рис. 6.26, а, в.

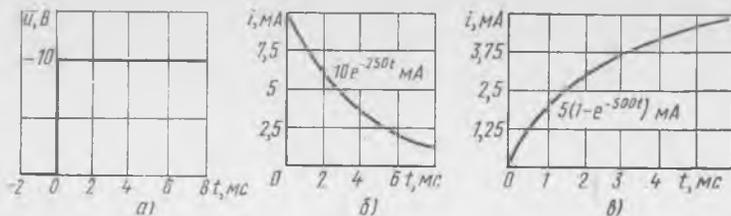


Рис. 6.26

6.44м. Для некоторого четырехполюсника с нулевыми начальными условиями известны графики входного  $u_1(t)$  и выходного  $u_2(t)$  напряжений (рис. 6.27, а, б). Определить операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению  $K(p)$ .

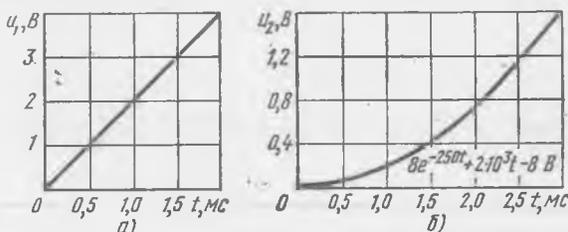


Рис. 6.27

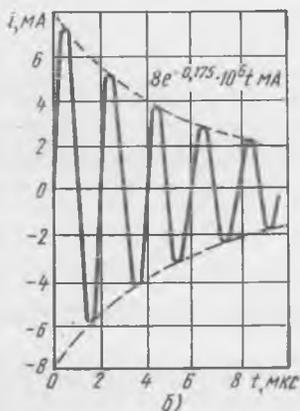
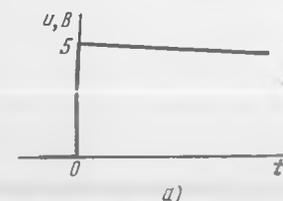


Рис. 6.28

6.45м. Для некоторого двухполюсника с нулевыми начальными условиями известны графики входного напряжения  $u(t)$  и входного тока  $i(t)$  (рис. 6.28, а, б). Найти входное сопротивление двухполюсника в операторной форме  $Z(p)$ .

6.46р. Решить задачу 6.16р операторным методом.

6.47р. Решить задачу 6.21р операторным методом.

6.48р. На вход последовательной  $RLC$ -цепи в момент времени  $t = 0$  поступает скачок напряжения 1 В. Найти зависимость входного тока от времени при нулевых начальных условиях, если  $R = 4$  кОм;  $L = 20$  мГн;  $C = 5000$  пФ.

6.49р. Напряжение на входе последовательной  $RL$ -цепи изменяется по закону

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_m \cos \omega t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найти закон изменения входного тока цепи.

6.50р. Последовательную  $RL$ -цепь при нулевых начальных условиях в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику э. д. с.  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В;  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  мГн. Определить зависимость входного тока цепи от времени.

6.51. Последовательную  $RC$ -цепь при нулевых начальных условиях в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику э. д. с.  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В;  $R = 1$  кОм;  $C = 5$  нФ. Найти значение начальной фазы  $\alpha_0$ , при котором установившийся режим наступает мгновенно.

6.52м. Последовательную  $RC$ -цепь в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику э. д. с.  $e(t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^5 t + \alpha)$  В;  $R = 1$  кОм;  $C = 5$  нФ. В этот момент напряжение на емкости  $U_0 = 2$  В. Найти зависимость  $u_C(t)$  и определить значение начальной фазы  $\alpha_0$ , при котором переходный процесс в цепи отсутствует.

6.53м. По данным задачи 6.52м выяснить, при каких значениях начального напряжения на емкости  $U_0$  переходный процесс в цепи имеет место при любой начальной фазе  $\alpha$ .

6.54м. Цепь на рис. 6.29 подключают к источнику постоянной э. д. с. Найти соотношение между параметрами элементов цепи, соответствующее колебательному характеру переходного процесса. Определить частоту свободных колебаний цепи. Задачу решить двумя способами на основании: а) анализа характеристического уравнения цепи; б) анализа уравнения  $Z_{вх}(p) = 0$  ( $Z_{вх}(p)$  — входное сопротивление цепи в операторной форме).

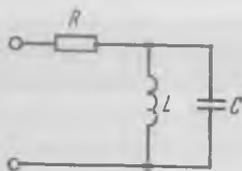


Рис. 6.29

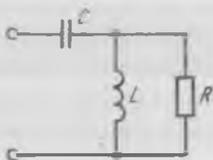


Рис. 6.30

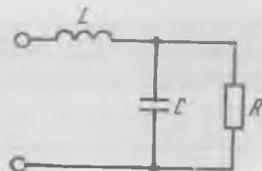


Рис. 6.31

6.55м. Решить задачу 6.54м для цепи рис. 6.30.

6.56м. Решить задачу 6.54м для цепи рис. 6.31.

6.57м. Цепь подключена к идеальному источнику постоянного тока. Найти соотношение между параметрами элементов цепи, соответствующее колебательному характеру переходного процесса. Определить частоту свободных колебаний цепи. Задачу решить для цепи: а) рис. 6.32; б) рис. 6.33.

6.58р. Найти операторные изображения одиночных импульсов (рис. 6.34, а — ж).

6.59р. Известно операторное изображение  $F_1(p)$  одиночного импульса. Показать, что изображение периодической ( $t > 0$ )

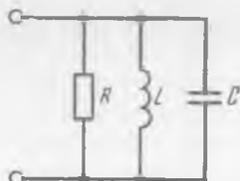


Рис. 6.32

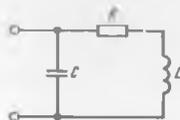


Рис. 6.33

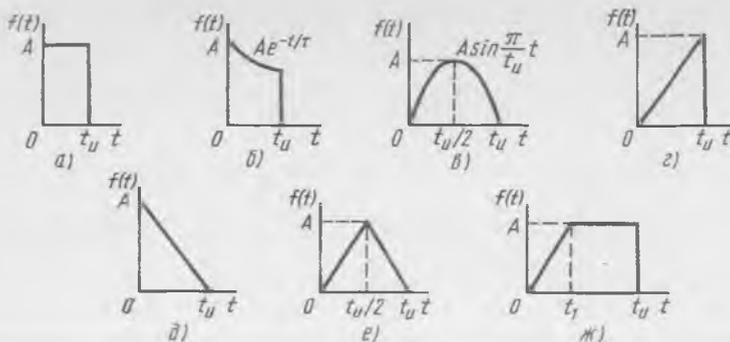


Рис. 6.34

последовательности импульсов, полученной повторением импульса с периодом  $T$ , есть  $F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$ .

**6.60м.** Найти изображение по Лапласу периодической последовательности импульсов, полученной повторением каждого импульса на рис. 6.34 с периодом  $T > t_u$ .

**6.61м.** Определить операторное изображение функции  $f(t) = |A \times \sin \omega_1 t|$ .

**6.62м.** Найти операторное изображение ступенчатой функции (рис. 6.35) с бесконечным числом ступенек.

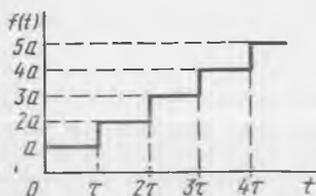


Рис. 6.35

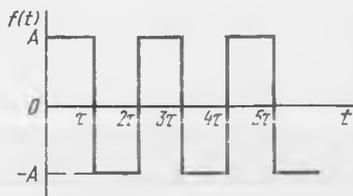


Рис. 6.36

**6.63м.** Определить изображения по Лапласу периодических функций, графики которых приведены на рис. 6.36 и 6.37.

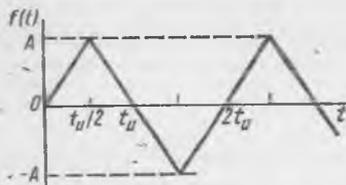


Рис. 6.37

**6.64р.** На  $RC$ -цепь с нулевыми начальными условиями действует треугольный импульс напряжения (рис. 6.38, а, б). Найти напряжение на выходе цепи  $u_2(t)$ .

**6.65м.** Решить предыдущую задачу, принимая, что напряжение на входе цепи представляет собой периодическую последовательность импульсов треугольной формы (рис. 6.38, а, в).

**6.66м.** Последовательную  $RC$ -цепь (рис. 6.39) с нулевыми начальными условиями в момент  $t = 0$  подключают к источнику э. д. с., ко-

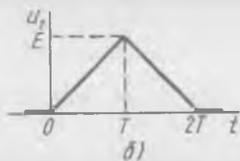
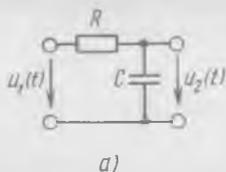


Рис. 6.38

торый вырабатывает импульс треугольной формы (см. рис. 6.38, б). Найти напряжение на выходе цепи.

6.67м. На вход последовательного  $LC$ -контура без потерь с нулевыми начальными условиями в момент  $t = 0$  поступает прямоугольный импульс напряжения высотой  $E$  и длительностью  $t_n$ . Найти напряжение на емкости  $u_C(t)$ . При каком значении  $t_n$   $u_C(t) = 0$  при  $t > t_n$ ? Дать физическую интерпретацию этому результату.

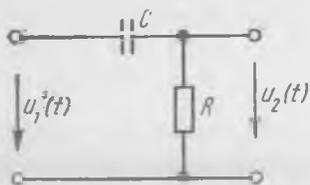


Рис. 6.39

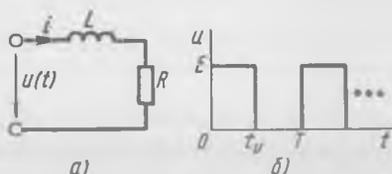


Рис. 6.40

6.68м. На параллельный  $LC$ -контур без потерь и с нулевыми начальными условиями в момент  $t = 0$  поступает прямоугольный импульс тока высотой  $I_0$  и длительностью  $t_n$ . Найти напряжение на емкости  $u_C(t)$ . При каком значении  $t_n$   $u_C(t) = 0$  при  $t > t_n$ ? Дать физическую интерпретацию этому результату.

6.69р. Найти входной ток последовательной  $RL$ -цепи в установившемся режиме при воздействии на цепь бесконечной последовательности прямоугольных положительных импульсов напряжения (рис. 6.40).

6.70. По данным задачи 6.69р найти напряжение на индуктивности  $u_L$  в установившемся режиме.

6.71м. Найти напряжение  $u_C$  последовательной  $RC$ -цепи в установившемся режиме при воздействии на нее такого же импульсного напряжения, как и в задаче 6.69р.

6.72р. Напряжение  $u_2(t)$  на выходе идеализированной электрической цепи повторяет напряжение  $u_1(t)$  на входе:  $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ , где  $t_0$  — положительная константа. Найти операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Можно ли построить реальную цепь с таким  $K(p)$ ?

6.73м. Даны две цепи с операторными коэффициентами передачи по напряжению  $K_1(p) = e^{-pT}$ ;  $K_2(p) = (p\tau + 1)^{-1}$ ;  $T, \tau > 0$ . Изобразить АЧХ и ФЧХ цепей. В каком случае реакции цепей на входное воздействие  $u_1(t)$  практически не отличаются друг от друга?

6.74м. Дана идеальная дифференцирующая цепь: при наличии на входе напряжения  $u_1(t)$  напряжение на выходе  $u_2(t) = \alpha_1 \frac{du_1(t)}{dt}$  ( $\alpha_1$  — коэффициент пропорциональности). Найти операторный коэффициент передачи такой цепи по напряжению  $K(p)$ .

6.75м. Используя результаты решения предыдущей задачи, сравнить идеальную дифференцирующую цепь с цепью, имеющей коэффициент передачи  $K(p) = p\tau(p\tau + 1)^{-1}$ . В каком случае вторая цепь также осуществляет дифференцирование входного напряжения  $u_1(t)$ ?

6.76м. Дана идеальная интегрирующая цепь: при наличии на входе напряжения  $u_1(t)$  напряжение на выходе  $u_2(t) = \alpha_2 \int_0^t u_1(t) dt$  ( $\alpha_2$  — коэффициент пропорциональности). Найти операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ .

6.77м. Используя результаты решения предыдущей задачи, рассмотреть цепь с операторным коэффициентом передачи по напряжению  $K(p) = (p\tau + 1)^{-1}$ . В каком случае цепь осуществляет интегрирование входного напряжения  $u_1(t)$ ?

#### Решения и методические указания

6.34р. Операторная эквивалентная схема рассматриваемой цепи приведена на рис. 6.41. Уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0; \\ (R_1 + pL) I_1(p) + R_2 I_2(p) &= E(p) + Li_1(0); \\ \frac{1}{pC} I_3(p) - R_2 I_2(p) &= -\frac{u_C(0)}{p}. \end{aligned}$$

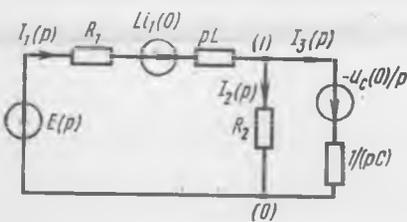


Рис. 6.41

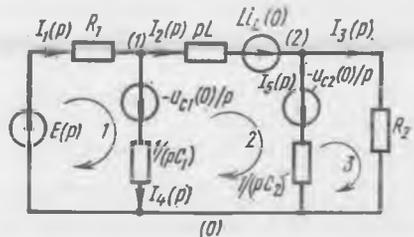


Рис. 6.42

6.35р. Операторная эквивалентная схема рассматриваемой цепи приведена на рис. 6.42. Выбирая систему независимых контуров так, как показано на рис. 6.42, составляем уравнения электрического равновесия методом контурных токов:

$$Z_{(11)} I_{11}(p) + Z_{(12)} I_{22}(p) = E(p) - \frac{u_{C1}(0)}{p};$$

$$\begin{aligned}
 Z_{(21)} I_{11}(p) + Z_{(22)} I_{22}(p) + Z_{(23)} I_{33}(p) &= \\
 &= Li_L(0) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + \frac{u_{C1}(0)}{p}; \\
 Z_{(32)} I_{22}(p) + Z_{(33)} I_{33}(p) &= \frac{u_{C2}(0)}{p}.
 \end{aligned}$$

где  $Z_{(11)} = R_1 + 1/(pC_1)$ ;  $Z_{(22)} = 1/(pC_1) + 1/(pC_2) + pL$ ;  $Z_{(33)} = R_2 + 1/(pC_2)$ ;  $Z_{(12)} = Z_{(21)} = -1/(pC_1)$ ;  $Z_{(23)} = Z_{(32)} = -1/(pC_2)$ ;  $I_{11}(p) = I_1(p)$ ;  $I_{22}(p) = I_2(p)$ ;  $I_{33}(p) = I_3(p)$ .

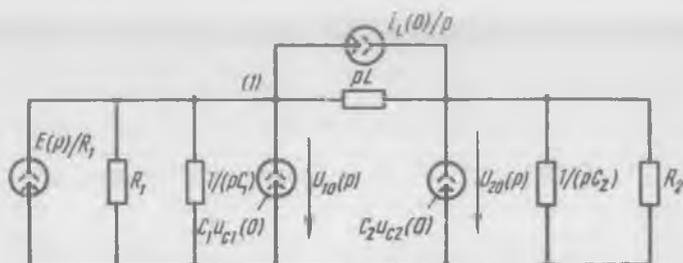


Рис. 6.43

Для того чтобы составить уравнения электрического равновесия цепи методом узловых напряжений, заменим источники напряжения источниками тока (рис. 6.43). Уравнения электрического равновесия цепи, составленные этим методом, имеют вид:

$$Y_{(11)} U_{10}(p) + Y_{(12)} U_{20}(p) = \frac{E(p)}{R_1} + C_1 u_{C1}(0) - \frac{i_L(0)}{p};$$

$$Y_{(21)} U_{10}(p) + Y_{(22)} U_{20}(p) = \frac{i_L(0)}{p} + C_2 u_{C2}(0),$$

где  $Y_{(11)} = 1/R_1 + pC_1 + 1/(pL)$ ;  $Y_{(22)} = 1/(pL) + pC_2 + 1/R_2$ ;  $Y_{(12)} = Y_{(21)} = -1/(pL)$ .

**6.36р.** Уравнения, связывающие мгновенные значения токов и напряжений рассматриваемой цепи, имеют вид

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Переходя от мгновенных значений токов и напряжений к их изображениям по Лапласу, получаем следующую систему уравнений для изображений:

$$U_1(p) = pL_1 I_1(p) - L_1 i_1(0) + pM I_2(p) - M i_2(0);$$

$$U_2(p) = pM I_1(p) - M i_1(0) + pL_2 I_2(p) - L_2 i_2(0).$$

Операторная схема замещения цепи, соответствующая этим уравнениям, приведена на рис. 6.44.

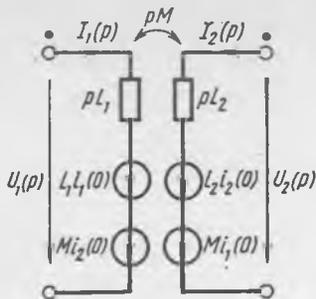


Рис. 6.44

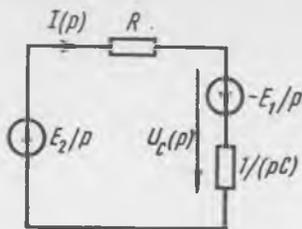


Рис. 6.45

6.37м. Гиперболические функции выразить предварительно через экспоненты с вещественными показателями, а синусоидальные — через экспоненты с мнимыми показателями.

6.39м. Использовать предельные соотношения:  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$ .

6.42м — 6.45м. Эти задачи однотипны. Для их решения необходимо перейти от заданных функций времени к изображениям по Лапласу.

6.46р. Операторная эквивалентная схема цепи после коммутации приведена на рис. 6.45. Уравнение электрического равновесия цепи по второму закону Кирхгофа  $[R + 1/(pC)] I(p) = E_2/p - E_1/p$ .

Решая это уравнение, находим изображение входного тока цепи

$$I(p) = (E_2 - E_1) \{R [p + 1/(RC)]\}^{-1}$$

и изображение напряжения на емкости

$$U_C(p) = E_1/p + (E_2 - E_1) \{RCp [p + 1/(RC)]\}^{-1}.$$

Учитывая, что  $(p + a)^{-1} \doteq e^{-at}$  и  $[p(p + a)]^{-1} \doteq \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ , переходим от изображений входного тока и напряжения на емкости к оригиналам:

$$i = \frac{E_2 - E_1}{R} e^{-t/RC} = 1 \cdot 10^{-3} e^{-10^4 t} \text{ A};$$

$$u_C = E_1 + (E_2 - E_1)(1 - e^{-t/RC}) = 10 - 5e^{-10^4 t} \text{ В}.$$

6.47р. Одиночный прямоугольный импульс напряжения  $E$  длительностью  $t_n$  можно представить в виде суммы двух скачков напряжения: первого ( $E$ ), приложенного к входу цепи в момент времени  $t = 0$ , и второго ( $-E$ ), приложенного к входу цепи в момент времени  $t = t_n$ . Для анализа переходных процессов в цепи целесообразно воспользоваться методом наложения, в соответствии с которым реакция линейной цепи на воздействие двух скачков может быть найдена как сумма реакций цепи на воздействие каждого из скачков в отдельности. Таким образом, входной ток  $i$  может быть определен как сумма двух токов ( $i_1$  и  $i_2$ ), вызванных соответственно действием первого и второго скачков напряжения в отдельности.

Операторные эквивалентные схемы для определения  $I_1(p) \doteq i_1$  и  $I_2(p) \doteq i_2$  приведены на рис. 6.46, а, б. Напомним, что в соответствии

с теоремой запаздывания смещение функции по оси времени вправо на  $t_n$  соответствует умножению изображения на  $e^{-pt_n}$ . Используя операторные эквивалентные схемы цепи, находим изображения токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$I_1(p) = \frac{E}{pL(p+R/L)}; \quad I_2(p) = \frac{-E}{pL(p+R/L)} e^{-pt_n}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем

$$i_1 = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}); \quad i_2 = -\frac{E}{R} (1 - e^{-R(t-t_n)/L}).$$

В интервале времени  $0 \leq t < t_n$  входной ток цепи  $i$  равен току  $i_1$ :  $i = i_1 = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$ , в интервале  $t_n \leq t < \infty$  входной ток цепи  $i$  равен сумме токов  $i_1$  и  $i_2$ :  $i = i_1 + i_2 = \frac{E}{R} (e^{Rt_n/L} - 1) e^{-Rt/L}$ .

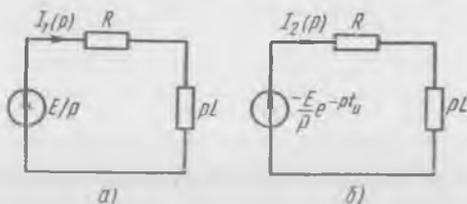


Рис. 6.46

Задача может быть решена также другим способом. В соответствии с указанным ранее представлением одиночного импульса напряжения в виде двух скачков и учитывая, что изображение одиночного скачка  $I(t - t_0) \doteq e^{-pt_0}/p$ , можно записать изображение входного напряжения в виде  $U(p) = \frac{E}{p} - \frac{E}{p} e^{-pt_n}$ .

Операторное входное сопротивление цепи  $Z(p) = R + pL$ , поэтому по закону Ома в операторной форме для цепи с нулевыми начальными условиями изображение входного тока

$$I(p) = \frac{E}{p(R+pL)} - \frac{E}{p(R+pL)} e^{-pt_n}.$$

Переходя к оригиналу, находим

$$i = \begin{cases} \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}) & \text{при } 0 \leq t < t_n; \\ \frac{E}{R} (e^{Rt_n/L} - 1) e^{-Rt/L} & \text{при } t \geq t_n. \end{cases}$$

Напряжение  $u_L$  находим таким же образом, как и в задаче 6.21р. **6.48р.** Изображение входного тока

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{p[\rho L + R + 1/(pC)]} = \frac{50}{p^2 + 2 \cdot 10^5 p + 10^{10}}.$$

Уравнение  $p^2 + 2 \cdot 10^5 p + 10^{10} = 0$  имеет два одинаковых корня:  $p_1 = p_2 = -1 \cdot 10^5$ . Учитывая, что  $(p + a)^2 \doteq te^{-at}$ , переходим от изображения входного тока к оригиналу:  $i = 50te^{-1 \cdot 10^5 t}$  А.

**6.49р.** Изображения входного напряжения  $U(p)$  и входной проводимости цепи  $Y(p)$  имеют вид

$$U(p) = U_m \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad Y(p) = \frac{1}{pL + R}$$

Начальные условия в цепи нулевые, поэтому изображение входного тока

$$I(p) = Y(p)U(p) = \frac{U_m(p)}{(pL + R)(p^2 + \omega^2)}$$

Для определения входного тока  $i(t) \doteq I(p)$  применим теорему разложения. Полюсы функции  $I(p)$  первого порядка:  $p_1 = -R/L$ ;  $p_2 = j\omega$ ;  $p_3 = -j\omega$ . Согласно теореме разложения искомый оригинал  $i(t)$  равен сумме вычетов функции  $F(p) = I(p)e^{pt}$  по этим полюсам. Представим  $F(p)$  в виде

$$F(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

где  $\varphi(p) = U_m p e^{pt}$ ;  $\psi(p) = (p^2 + \omega^2)(pL + R)$ .

Вычет функции  $F(p)$  по полюсу первого порядка  $p_k$

$$\text{Res}_{p_k} F(p) = \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)} = \frac{U_m p_k e^{p_k t}}{3p_k^2 L + 2p_k R + \omega^2 L}$$

Отсюда

$$i(t) = \sum_k \text{Res}_{p_k} F(p) = \sum_k U_m p_k e^{p_k t} (3p_k^2 L + 2p_k R + \omega^2 L)^{-1};$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Полюсу  $p_1 = -R/L$  соответствует составляющая тока  $i^{(1)} = -U_m R e^{-Rt/L} [R^2 + (\omega L)^2]^{-1}$ . Аналогично находим две другие составляющие тока, соответствующие полюсам  $p_2$  и  $p_3$ :

$$i^{(2)} = \frac{U_m}{2} \frac{j\omega e^{j\omega t}}{-\omega^2 L + j\omega R}; \quad i^{(3)} = \frac{U_m}{2} \frac{j\omega e^{-j\omega t}}{\omega^2 L + j\omega R},$$

и их сумму

$$i^{(2)} + i^{(3)} = U_m \frac{R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Преобразуем последнее выражение с помощью соотношения

$$b \cos A + q \sin A = r \cos(A - \varphi)$$

$$(r = \sqrt{b^2 + q^2}; \quad \varphi = \text{arctg } q/b):$$

$$i^{(2)} + i^{(3)} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi),$$

где  $\varphi = \text{arctg } (\omega L/R)$ .

Входной ток равен сумме всех трех составляющих:  $i = i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)}$ . Выражение для  $i^{(1)}$  можно преобразовать с помощью легко проверяемого соотношения  $\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \cos \operatorname{arctg} (\omega L/R)$ .

Таким образом, входной ток цепи

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos (\omega t - \varphi) - \frac{U_m \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-Rt/L},$$

где  $\varphi = \operatorname{arctg} (\omega L/R)$ .

Напомним, что реакцию цепи в переходном режиме можно представить в виде суммы двух составляющих: принужденной и свободной. В установившемся режиме в рассматриваемой цепи протекает гармонический ток  $i_{\text{пр}}$ , выражение для которого можно получить методом комплексных амплитуд. Нетрудно убедиться, что оно совпадает с первым слагаемым в правой части последнего выражения для переходного тока цепи, поэтому второе слагаемое имеет смысл свободной составляющей тока  $i_{\text{св}}$ .

**6.50р.** Эту задачу можно решать таким же методом, что и задачу 6.49р, вычисляя вычеты функции  $F(p) = Y(p) U(p) e^{pt}$ : сначала найти принужденную и свободную составляющие реакции цепи, а затем их сумму. Однако принужденную составляющую можно определить проще, поскольку при заданном входном воздействии в установившемся режиме протекает гармонический ток  $i_{\text{пр}}$ , и его можно рассчитать по методу комплексных амплитуд, после чего останется найти свободную составляющую реакции. Такова идея расчета переходных процессов методом отделения свободной составляющей реакции от принужденной.

Установившийся ток в цепи

$$i_{\text{пр}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos (\omega t + \alpha - \varphi); \quad \varphi = \operatorname{arctg} (\omega L/R).$$

Найдем свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$ . Для этого нужно вычислить вычет функции  $F(p)$  по полюсу операторной проводимости цепи  $Y(p) = (R + pL)^{-1}$ . Изображение входного напряжения  $u = U_m \cos (\omega t + \alpha)$

$$U(p) = U_m \frac{p \cos \alpha - \omega \sin \alpha}{p^2 + \omega^2};$$

$$i_{\text{св}} = \operatorname{Res}_{p_1 = -R/L} U_m (p \cos \alpha - \omega \sin \alpha) e^{pt} [(pL + R)(p^2 + \omega^2)]^{-1}.$$

Преобразуем последнее выражение по правилу вычисления вычета (см. задачу 6.49р)

$$i_{\text{св}} = \frac{U_m (p \cos \alpha - \omega \sin \alpha) e^{pt}}{3p^2 L + 2pR + \omega^2 L} \Big|_{p = -R/L}$$

Отсюда

$$i_{\text{св}} = -U_m L \frac{\left(\frac{R}{L} \cos \alpha + \omega \sin \alpha\right) e^{-Rt/L}}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Используя уже встречавшееся в задаче 6.49р соотношение  $b \cos A + q \sin A = \sqrt{b^2 + q^2} \cos(A - \operatorname{arctg} q/b)$ , окончательно получим

$$i_{\text{св}} = -\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\alpha - \varphi) e^{-Rt/L}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R).$$

Свободную составляющую тока  $i_{\text{св}}$  можно определить иначе. Так как  $i = i_{\text{св}} + i_{\text{пр}}$ , а начальные условия в цепи нулевые, т. е.  $i(0) = 0$ , то

$$i_{\text{св}}(0) = -i_{\text{пр}}(0) = -\frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\alpha - \varphi).$$

Изображение свободной составляющей тока найдем из операторной эквивалентной схемы цепи (рис. 6.47):

$$I_{\text{св}}(p) = \frac{Li_{\text{св}}(0)}{pL + R} = \frac{i_{\text{св}}(0)}{p + R/L},$$

откуда  $i_{\text{св}} = i_{\text{св}}(0) e^{-Rt/L} = -\frac{U_m \cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-Rt/L}$ .

Таким образом, входной ток цепи

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} [\cos(\omega t + \alpha - \varphi) - \cos(\alpha - \varphi) e^{-Rt/L}].$$

Как следует из этого выражения, установившийся режим наступает мгновенно при  $\cos(\alpha - \varphi) = 0$ , поскольку выполнение этого условия означает отсутствие свободной составляющей входного тока. Начальная фаза входного напряжения  $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(\omega L/R) \pm \pm \pi/2$ . Следовательно, существуют два значения начальной фазы входного напряжения  $\alpha_{01}$  и  $\alpha_{02}$ , при которых переходный процесс в цепи отсутствует. Для данной задачи  $\operatorname{arctg}(\omega L/R) = 0,56$  рад;  $\alpha_{01} = 2,13$  рад;  $\alpha_{02} = -1,01$  рад.

**6.51м — 6.53м.** Эти задачи целесообразно решать методом отделения свободной составляющей реакции цепи от принужденной (см. задачу 6.50р). Как и в задаче 6.50р, аналитическое выражение для реакции цепи содержит наряду с гармонической также и экспоненциальную компоненту. При выполнении определенных условий экспоненциальная компонента может отсутствовать, т. е. отсутствует переходный процесс.

**6.54м — 6.56м.** При составлении характеристических уравнений использовать результаты решения задач 6.1р — 6.4.

**6.57м.** Составить и проанализировать уравнение  $Y_{\text{вх}}(p) = 0$ .

**6.58р.** Изображения одиночных импульсов могут быть найдены двояко: 1) непосредственным применением преобразования Лапласа:

$$f(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{t_{\text{н}}} f(t) e^{-pt} dt;$$

2) представлением заданной функции  $f(t)$  в виде суммы более простых функций  $f_i(t)$ . Этот прием основан на линейности преобразования Лапласа и эффективен, если указанное представление очевидно, а изображения  $F_i(p) \doteq f_i(t)$  отыскиваются достаточно просто.

Для рис. 6.34, а

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (1 - e^{-pt_n}).$$

Такой же результат получим, представляя одиночный прямоугольный импульс в виде суммы двух скачков (см. задачу 6.47р):  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где  $f_1(t) = A \cdot 1(t)$ ;  $f_2(t) = -A \cdot 1(t - t_n)$ . Так как согласно теореме смещения  $A \cdot 1(t) \doteq A/p$  и  $A \cdot 1(t - t_n) \doteq Ae^{-pt_n}/p$ , то  $F(p) = F_1(p) + F_2(p) = A/p - Ae^{-pt_n}/p$ .

Для рис. 6.34, б

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-t/\tau} e^{-pt} dt = A \frac{1 - e^{-(p + 1/\tau)t_n}}{p + 1/\tau}.$$

Такой же результат получим, представляя заданную функцию  $f(t)$  в виде суммы:  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где  $f_1(t) = Ae^{-t/\tau} \cdot 1(t)$ ;  $f_2(t) = -Ae^{-t_n/\tau} e^{-(t-t_n)/\tau} \cdot 1(t - t_n)$ .

Легко убедиться в правильности такого представления, построив графики функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  и просуммировав их ординаты. Учтя, что  $e^{-at} \doteq (p + a)^{-1}$ , получим

$$f_1(t) \doteq F_1(p) = A(p + 1/\tau)^{-1}.$$

Согласно теореме запаздывания  $e^{-(t-t_n)/\tau} \cdot 1(t - t_n) \doteq (p + 1/\tau)^{-1} e^{-pt_n}$ . Следовательно,  $f_2(t) \doteq F_2(p) = -A(p + 1/\tau)^{-1} e^{-t_n/\tau} \times e^{-pt_n}$ .

Сумма  $F_1(p) + F_2(p)$  позволяет найти искомое изображение  $F(p)$ .

Для рис. 6.34, в

$$F(p) = A \int_0^{t_n} \left( \sin \frac{\pi}{t_n} t \right) e^{-pt} dt.$$

Интеграл определяем с помощью соотношения

$$\int e^{ax} \sin x dx = e^{ax} (a \sin x - \cos x) (a^2 + 1)^{-1}.$$

В результате получаем

$$F(p) = \frac{\pi A}{t_n} (1 + e^{-pt_n}) [p^2 + (\pi/t_n)^2]^{-1}.$$

Этот результат можно получить проще, представляя  $f(t)$  в виде суммы двух синусоид, смещенных друг относительно друга на  $t_n$ , т. е.

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin \frac{\pi}{t_n} t \cdot 1(t) + A \sin \frac{\pi}{t_n} (t - t_n) \cdot 1(t - t_n).$$

Очевидно, что все полуволны синусоид взаимно компенсируются для всех  $t$ , исключая интервал  $0 \leq t \leq t_n$ . Так как  $\frac{1}{a} \sin at \doteq (\rho^2 + a^2)^{-1}$ , то

$$\begin{aligned} f_1(t) &\doteq F_1(p) = \frac{\pi A}{t_n} \frac{1}{\rho^2 + (\pi/t_n)^2}, f_2(t) \doteq F_2(p) = \\ &= \frac{\pi A}{t_n} \frac{e^{-\rho t_n}}{\rho^2 + (\pi/t_n)^2}, F(p) = F_1(p) + F_2(p). \end{aligned}$$

Для рис. 6.34, з

$$F(p) = \frac{A}{t_n} \int_0^{t_n} t e^{-\rho t} dt.$$

Этот интеграл вычисляем с помощью соотношения  $\int x e^{ax} dx = e^{ax} a^{-2} (ax - 1)$ . В результате получаем

$$F_2(p) = \frac{A}{t_n \rho^2} \left[ 1 - e^{-\rho t_n} (\rho t_n + 1) \right].$$

Представим  $f(t)$  в виде суммы  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ , где  $f_1(t) = \frac{A}{t_n} t \cdot 1(t)$ ;  $f_2(t) = -\frac{A}{t_n} (t - t_n) \cdot 1(t - t_n)$ ;  $f_3(t) = -A \cdot 1(t - t_n)$ .

Это представление не столь очевидно, как в предыдущих случаях, но в справедливости его можно убедиться, построив графики функций  $f_i(t)$  и просуммировав их ординаты. Так как  $t \doteq \rho^{-2}$ ;  $1 \doteq \rho^{-1}$ , то с учетом теоремы смещения

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{A}{t_n \rho^2}, F_2(p) = \frac{A}{t_n \rho^2} e^{-\rho t_n}, F_3(p) = \\ &= -\frac{A}{\rho} e^{-\rho t_n}; F(p) = \sum_{i=1}^3 F_i(p). \end{aligned}$$

Для рис. 6.34, д

$$F(p) = \int_0^{t_n} f(t) e^{-\rho t} dt.$$

Функция  $f(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq t_n$  может быть записана в виде

$$f(t) = A (t_n - t) t_n^{-1}.$$

поэтому

$$F(p) = A \int_0^{t_n} e^{-\rho t} dt - A t_n^{-1} \int_0^{t_n} t e^{-\rho t} dt.$$

Первый интеграл равен  $A(1 - e^{-pt_n})p^{-1}$ , второй интеграл найден для рис. 6.34, *з*. В результате получаем

$$F(p) = \frac{A}{t_n p^2} (pt_n - 1 + e^{-pt_n}).$$

Представим  $f(t)$  в виде суммы:  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ , где  $f_1(t) = A \cdot 1(t)$ ;  $f_2(t) = -\frac{A}{t_n} t \cdot 1(t)$ ;  $f_3(t) = \frac{A}{t_n} (t - t_n) \cdot 1(t - t_n)$ . Следовательно,  $F_1(p) = A/p$ ;  $F_2(p) = -A/(t_n p^2)$ ;  $F_3(p) = (Ae^{-pt_n})/(t_n p^2)$ .

Сумма этих изображений позволяет получить  $F(p)$ .

Для рис. 6.34, *е*

$$F(p) = \int_0^{t_n} f(t) e^{-pt} dt,$$

где

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2A}{t_n} t & \text{при } 0 \leq t \leq t_n/2; \\ \frac{2A}{t_n} (t_n - t) & \text{при } t_n/2 \leq t \leq t_n. \end{cases}$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$F(p) = \frac{2A}{t_n p^2} (1 - e^{-pt_n/2})^2.$$

Этот результат можно получить проще. Представим рассматриваемый импульс в виде суммы двух импульсов: первый — треугольный с линейным передним фронтом отличается от импульса, изображенного на рис. 6.34, *з* вдвое меньшей длительностью, второй импульс — треугольный с линейным задним фронтом и в отличие от импульса на рис. 6.34, *д* имеет длительность  $t_n/2$  и смещен вправо от точки  $t = 0$  на  $t_n/2$ .

Изображения этих импульсов найдем на основании выкладок, сделанных для рис. 6.34, *з*, *д*, учитывая измененную длительность импульсов и теорему запаздывания для второго импульса:

$$F_1(p) = \frac{2A}{t_n p^2} \left[ 1 - \left( p \frac{t_n}{2} + 1 \right) e^{-pt_n/2} \right];$$

$$F_2(p) = \frac{2A}{t_n p^2} \left[ p \frac{t_n}{2} - 1 + e^{-pt_n/2} \right] e^{-pt_n/2}.$$

Сумма  $F_1(p) + F_2(p)$  позволяет найти искомое изображение.

Для рис. 6.34, *ж* импульс представим в виде суммы треугольного импульса, подобного изображенному на рис. 6.34, *з* ( $t_n = t_1$ ), и прямоугольного длительностью  $t_n - t_1$ , смещенного вправо относительно

точки  $t = 0$  на  $t_1$ . На основании результатов, полученных для рис. 6.34,  $a$ ,  $z$ , и с учетом теоремы запаздывания для второго импульса имеем

$$F_1(p) = \frac{A}{t_1 p^2} [1 - (pt_1 + 1) e^{-pt_1}];$$

$$F_2(p) = \frac{A}{p} (e^{-pt_1} - e^{-pt_2});$$

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \frac{A}{t_1 p^2} (1 - e^{-pt_1} - pt_1 e^{-pt_2}).$$

**6.59р.** Изображение периодической импульсной последовательности  $F(p)$  можно найти как сумму изображений одинаковых одиночных импульсов с учетом их сдвига по оси времени с помощью теоремы запаздывания:

$$\begin{aligned} F(p) &= F_1(p) + F_1(p) e^{-pT} + F_1(p) e^{-2pT} + F_1(p) e^{-3pT} + \dots = \\ &= F_1(p) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + \dots). \end{aligned}$$

Множитель при  $F_1(p)$  в этом выражении представляет собой разложение функции  $(1 - e^{-pT})^{-1}$  в бесконечный ряд. Поэтому  $F(p) = = F_1(p) (1 - e^{-pT})^{-1}$

**6.60м, 6.61м.** Использовать результаты решения задач 6.58р и 6.59р.

**6.62м.** Представить ступенчатую функцию в виде бесконечной суммы скачков высотой  $a$ , каждый из которых сдвинут относительно предыдущего вправо по оси времени на  $\tau$ . Затем использовать тот же прием, что и в задаче 6.59р.

**6.63м.** Заданные функции времени представить как сумму двух последовательностей импульсов: первой, состоящей из импульсов положительной полярности, второй, инвертированной и сдвинутой относительно первой вправо по оси времени.

**6.64р.** Операторный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K(p) = \{ pC [R + 1/(pC)] \}^{-1} = [\tau(p + 1/\tau)]^{-1}; \quad \tau = RC.$$

Зная изображение импульса входного напряжения (см. задачу 6.58р)  $U_1(p) = \frac{E}{T p^2} (1 - e^{-pT})^2$ , найдем изображение выходного напряжения

$$U_2(p) = K(p) U_1(p) = \frac{E}{T \tau p^2} \left( p + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}).$$

Для истолкования полученного результата используем теорему запаздывания. Согласно этой теореме  $f(t - t_0) \doteq F(p) e^{-pt_0}$ ,  $f(t) \doteq F(p)$ . Следовательно, выражение для напряжения  $u_2(t)$  содержит три составляющих. Изображение первой составляющей  $\frac{E}{T \tau} \left[ p^2 \left( p + \frac{1}{\tau} \right) \right]^{-1}$ . Вторая составляющая сдвинута относительно первой вправо по оси времени на  $T$  и имеет дополнительный множитель  $-2$ ,

третья сдвинута относительно первой на  $2T$ . Учитывая  $\frac{1}{p^2(p+a)} \stackrel{+}{=} \frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$ , можно записать:

$$u_2(t) = f(t) = \frac{E\tau}{T} \left( e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1 \right) \text{ при } 0 < t \leq T;$$

$$u_2(t) = f(t) - 2f(t - T) \text{ при } T < t \leq 2T;$$

$$u_2(t) = f(t) - 2f(t - T) + f(t - 2T) \text{ при } t > 2T.$$

**6.65м.** Изображение входного напряжения в виде периодической последовательности треугольных импульсов имеет вид (см. задачу 6.60м)

$$U_1(p) = \frac{E}{Tp^2} - \frac{E}{p} \frac{e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$$

Для данной задачи это выражение целесообразно преобразовать:

$$U_1(p) = \frac{E}{Tp^2} - \frac{E}{p} (e^{-pT} + e^{-2pT} + e^{-3pT} + e^{-4pT} + \dots)$$

Умножив  $U_1(p)$  на операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ , найдем изображение выходного напряжения  $U_2(p)$ . Очевидно, формула для  $U_2(p)$  содержит составляющие с множителями вида  $e^{-pTn}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Вклад этих составляющих в итоговый результат для  $u_2(t)$  определяется тем же способом, что и в задаче 6.64р.

**6.66м.** См. решение задачи 6.64р.

**6.67м, 6.68м.** Изображение входного воздействия в обеих задачах имеет вид  $F(p) = \frac{A}{p} (1 - e^{-pt_n})$ . Наличие компоненты  $F_1(p) = Ae^{-pt_n}/p$  приводит к появлению в конечном выражении для реакции цепи при  $t > t_n$  составляющей, сдвинутой относительно начала отсчета времени  $t = 0$  на  $t_n$  (см. задачу 6.64р). При определенных условиях эта составляющая может обращать все выражение в нуль.

Для физической интерпретации полученного результата целесообразно представить входное воздействие как сумму двух скачков: положительного и сдвинутого по времени на  $t_n$  отрицательного того же значения. Реакцию цепи определять как сумму реакций на каждый из скачков. При поступлении скачка на вход цепи в ней возникают затухающие гармонические колебания. Заметим, что рассматриваемые цепи являются дуальными, и результат решения одной задачи может быть перенесен на другую.

**6.69р.** Изображение входного напряжения  $U(p)$  можно определить с помощью результатов решения задачи 6.60м:

$$U(p) = E (1 - e^{-pt_n}) [p (1 - e^{-pT})]^{-1}.$$

Операторная входная проводимость цепи  $Y(p) = (pL + R)^{-1}$ .

Изображение входного тока цепи по закону Ома в операторной форме  $I(p) = Y(p) U(p)$ .

Для перехода от изображения  $I(p)$  к оригиналу  $i(t)$  нужно взять сумму вычетов функции

$$F(p) = I(p) e^{pt} = E (1 - e^{-pt_n}) e^{pt} [p (1 - e^{-pT}) (pL + R)]^{-1}$$

по всем ее полюсам. Число полюсов функции  $F(p)$  бесконечно, поскольку уравнение  $1 - e^{-pT} = 0$  имеет бесконечное число корней  $p_k = j \frac{2\pi k}{T}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому выражение для тока получится в виде бесконечного ряда, из которого следует выделить принужденную составляющую. Сделать это нелегко.

Целесообразно использовать метод отделения свободной составляющей реакции от принужденной (см. задачу 6.49р). Свободная составляющая определится как сумма вычетов функции  $F(p) = I(p) e^{pt}$  по полюсам операторной входной проводимости  $Y(p)$ . В рассматриваемой задаче  $Y(p)$  имеет один полюс  $p_1 = -R/L$ . Следовательно,

$$i_{св} = \operatorname{Res}_{p_1} F(p) = E \left. \frac{(1 - e^{-pt_n}) e^{pt}}{pL(1 - e^{-pT})} \right|_{p=p_1} = -\frac{E}{R} \frac{e^{t_n/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1} e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи.

Если известна формула для переходного тока цепи  $i$ , то искома принужденная составляющая тока  $i_{пр} = i - i_{св}$ .

Трудности, возникающие при отыскании тока  $i$  непосредственно по изображению  $I(p)$ , отмечены ранее. Существует, однако, прием, делающий излишним выражение для реакции цепи на бесконечную последовательность импульсов напряжения. Действительно, реакция цепи на эту последовательность на интервале  $0 \leq t < T$  (см. рис. 6.40) имеет смысл реакции цепи на первый импульс этой последовательности. Реакция цепи на одиночный импульс может быть найдена сравнительно легко.

Если из полученного результата вычесть уже известную свободную составляющую, то можно определить принужденную составляющую тока, что и было целью решения. При этом решение получается в замкнутом виде, а не в виде бесконечного ряда.

Запишем выражение для реакции цепи на первый импульс напряжения заданной бесконечной последовательности, воспользовавшись результатом решения задачи 6.47р:

$$i = \begin{cases} \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) & \text{при } 0 \leq t < t_n, \tau = L/R; \\ \frac{\dot{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) - \frac{E}{R} [1 - e^{-(t-t_n)/\tau}] & \text{при } t_n \leq t < T. \end{cases}$$

Вычтем свободную составляющую тока  $i_{св}$ . После несложных преобразований получим

$$i_{пр} = \begin{cases} \frac{E}{R} \left[ 1 - \frac{1 - e^{-(T-t_n)/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau} \right] & \text{при } 0 \leq t < t_n; \\ \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-t_n/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(t-t_n)/\tau} & \text{при } t_n \leq t < T. \end{cases}$$

Поскольку эти формулы определяют реакцию цепи в стационарном (установившемся) режиме, время  $t$  в них нужно отсчитывать с момента начала любого периода колебаний.

Входной ток цепи является одновременно током через индуктивность и, следовательно, изменяется во времени непрерывно. Поэтому верхние границы указанных в полученных формулах временных интервалов ( $t = t_{\text{н}}$  и  $t = T$  соответственно) могут быть включены в эти интервалы. Первая формула для  $i_{\text{пр}}$  при  $t = 0$  и вторая при  $t = T$  дают один и тот же результат:

$$i_{\text{пр}}(0) = i_{\text{пр}}(T) = \frac{E}{R} e^{-T/\tau} (e^{t/\tau} - 1)(1 - e^{-T/\tau})^{-1},$$

что можно рассматривать и как проверку на периодичность, и как одно из доказательств правильности решения.

**6.71м.** Задача решается аналогично задаче 6.69р. Изображение напряжения  $U_C(p)$  определяется по изображению входного воздействия  $U(p)$  и операторному коэффициенту передачи цепи по напряжению  $K(p)$ :  $U_C(p) = K(p)U(p)$ .

Свободная составляющая напряжения на емкости находится как вычет функции  $U_C(p)e^{pt}$  по полюсу коэффициента передачи  $K(p)$ . Если  $K(p)$  имеет несколько полюсов, то следует брать сумму вычетов по всем полюсам. (Сравнить с задачами 6.49р и 6.69р, в которых вычеты берут по полюсам другой операторной характеристики цепи — входной проводимости, поскольку отыскивают токи, а не напряжение, как в этой задаче.)

**6.72р.** Пусть  $u_1(t) \doteq U_1(p)$ . Тогда в соответствии с теоремой запаздывания  $u_2(t) = u_1(t - t_0) \doteq U_1(p)e^{-pt_0}$ . Отсюда  $K(p) = -U_2(p)/U_1(p) = e^{-pt_0}$ . Цепь с таким  $K(p)$  физически не осуществима. Действительно, комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(j\omega) = K(p)|_{p=j\omega} = 1 \cdot e^{-j\omega t_0}$ .

Следовательно, АЧХ цепи должна быть равномерной, а ФЧХ линейной в неограниченном диапазоне частот. Реальные элементы цепей всегда обладают некоторыми паразитными индуктивностями и емкостями, поэтому частотные характеристики реальных цепей не имеют указанных свойств.

**6.73м.** Цепь с коэффициентом передачи  $K_1(p)$  имеет равномерную АЧХ и линейную ФЧХ в неограниченном диапазоне частот. Такая цепь физически нереализуема (см. задачу 6.72р). Для второй цепи можно получить выражения для АЧХ и ФЧХ и убедиться, что в некотором диапазоне частот ее частотные характеристики мало отличаются от характеристик первой цепи.

**6.74м.** Операторный коэффициент передачи идеальной дифференцирующей цепи  $K(p)$  можно найти с помощью теоремы дифференцирования. Проанализировать полученные из  $K(p)$  выражения для АЧХ и ФЧХ и убедиться, что они физически нереализуемы из-за наличия у реальных элементов паразитных индуктивностей и емкостей (ср. с задачей 6.72р).

6.75м. По заданному коэффициенту передачи  $K(p)$  получить выражения для АЧХ и ФЧХ и убедиться, что в некотором диапазоне частот они мало отличаются от характеристик идеальной цепи.

6.76м, 6.77м. Эти задачи решают аналогично двум предыдущим.

### § 6.3. Единичные функции и их свойства

6.78м. Найти производные следующих функций: а)  $5 \cdot 1(t - 0,1)$ ; б)  $(1 - e^{-at}) \cdot 1(t)$ ; в)  $2 \sin \omega t \cdot 1(t)$ ; г)  $e^{-at} \cdot 1(t)$ ; д)  $2 \cos \omega t \times 1(t)$ .

6.79м. Упростить выражения: а)  $(t^3 + 4) \delta(t + 2)$ ; б)  $(t^2 + 2) \times \delta(t + 5)$ ; в)  $(t^2 - t - 2) \delta(t - 3)$ .

6.80м. Вычислить следующие интегралы: а)  $\int_{-\infty}^{\infty} t \delta(t - \theta) dt$ ; б)  $\int_2^5 t^2 \delta(t - 3) dt$ ; в)  $\int_2^3 t^2 \delta(t - 5) dt$ ; г)  $\int_{-\infty}^{\infty} 5 \delta(t - 5) dt$ .

6.81м. Выразить функцию  $\text{sign}(t) = t/|t|$  через единичную функцию  $1(t)$ .

6.82м. Найти первую и вторую производные функции  $f(t) = |t|$ .

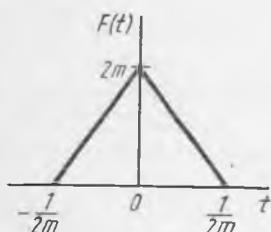


Рис. 6.48

6.83м. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} 1(t) dt$ .

6.84м. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - a) dt$ .

6.85р. Функция  $F(t)$  задана графиком (рис. 6.48). Показать, что эта функция может быть преобразована в  $\delta$ -функцию в результате предельного перехода  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

6.86р. Используя результаты предыдущей задачи, показать, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d\delta(t)}{dt}$ . На

основании анализа поведения функции  $dF(t)/dt$  при возрастании параметра  $m$  сформулировать свойства первой производной  $\delta$ -функции.

6.87р. Решить задачи 6.85р и 6.86р для функции  $F(t) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1 + (mt)^2}$ , где  $m > 0$ .

6.88. Решить задачи 6.85р и 6.86р для функции  $F(t) = \frac{m}{\pi} e^{-(mt)^2}$ , где  $m > 0$ .

6.89м. Найти изображения по Лапласу следующих функций: а)  $\delta(t - a)$ ; б)  $\delta'(t)$ ; в)  $\delta'(t - a)$ ; г)  $\delta^{(n)}(t - a)$ .

### Решения и методические указания

6.78м. Использовать соотношение

$$\frac{d}{dt} [f(t) \cdot 1(t - t_0)] = f(t_0) \delta(t - t_0) + \frac{df(t)}{dt} \cdot 1(t - t_0).$$

Пусть, например, нужно найти производную функции  $e^{-at} \cdot 1(t)$ . Очевидно,  $t_0 = 0$ ;  $e^{-at}/t=0 = 1$ ;  $\frac{d}{dt} e^{-at} = -ae^{-at}$ . В результате получаем  $\frac{d}{dt} e^{-at} \cdot 1(t) = \delta(t) - ae^{-at} \cdot 1(t)$ .

**6.79м.** Использовать свойство  $\delta$ -функции:  $f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$ . Пусть, например,  $f(t) = t^3 + 4$ ,  $t_0 = -2$ . Тогда  $f(t_0) = -4$ , следовательно,  $(t^3 + 4) \delta(t + 2) = -4\delta(t + 2)$ .

**6.80м.** Использовать свойство  $\delta$ -функции:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } t_0 \in [t_1, t_2]; \\ 0 & \text{при } t_0 \notin [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Пусть, например, задан интеграл  $\int_2^5 t^2 \delta(t - 3) dt$ . Точка  $t_0 = 3$  принадлежит интервалу интегрирования,  $f(t_0) = t_0^2 = 9$ , следовательно, значение интеграла равно 9. Аналогично получаем

$$\int_2^3 t^2 \delta(t - 5) dt = 0.$$

**6.81м.** Построить график функции  $2 \cdot 1(t) - 1$  и сравнить его с графиком функции  $\text{sign}(t)$ .

**6.82м.** Выразить первую производную  $f'(t)$  через функцию  $\text{sign}(t)$ . Затем использовать результат решения задачи 6.81м, учитывая правило дифференцирования произведения вида  $\varphi(t) \cdot 1(t - t_0)$  (см. задачу 6.78м).

**6.83м.** С учетом свойства единичной функции ( $1(t) = 0$  при  $t < 0$ ) перейти от заданного интеграла к интегралу на интервале  $t \geq 0$ , вычислить новый интеграл и затем проанализировать график вспомогательной функции  $(t + |t|)/2$ .

**6.84м.** Применить правило интегрирования по частям и затем использовать правило вычисления интеграла вида  $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt$  (см. задачу 6.80м).

**6.85р.** Согласно рис. 6.48 интеграл от  $F(t)$  в бесконечных пределах равен площади равнобедренного треугольника с основанием  $1/m$  и высотой  $2m$ , т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = 1$  при любых  $m$ . Это совпадает с условием нормировки для  $\delta$ -функции  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \right)$ .

При  $m \rightarrow \infty$  интервал  $-\frac{1}{2m} < t < \frac{1}{2m}$ , на котором функция  $F(t) \neq 0$ , стягивается в точку  $t = 0$ , где  $F(t)_{t=0} = \infty$ . Следовательно,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

**6.86р.** Из рис. 6.48 видно, что производная  $F'(t)$  при  $0 < t \leq \frac{1}{2m}$  равна  $-4m^2$ , а при  $-\frac{1}{2m} \leq t < 0$  равна  $4m^2$ . При  $m \rightarrow \infty$  производ-

ная  $F'(t)$  обращается в нуль всюду, кроме точки  $t = 0$ , где она равна  $+\infty$  и  $-\infty$  одновременно. Как было выяснено в предыдущей задаче,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ . Поэтому можно записать  $\lim_{m \rightarrow \infty} F'(t) = \delta'(t)$ , следовательно,

$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ +\infty \text{ и } -\infty & \text{одновременно при } t = 0. \end{cases}$$

В качестве модели для выявления свойства первой производной  $\delta$ -функции применили функцию  $F(t)$ , заданную графиком на рис. 6.48. Для этой цели допустимо использовать и другие функции, в чем можно убедиться при решении двух следующих задач.

**6.87р.** При  $t \neq 0$  и достаточно большом параметре  $m$  ( $m^2 t^2 \gg 1$ ) функция  $F(t) \approx 1/(\pi m t^2)$ . Следовательно, эта функция изменяется в зависимости от аргумента  $t$  как  $1/t^2$ , т. е. достаточно быстро. При  $t = 0$ ,  $F(t) = m/\pi$ , поэтому при  $m \rightarrow \infty$   $F(0) \rightarrow \infty$ .

Интеграл от  $F(t)$  в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{\pi} \frac{1}{1+(mt)^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} mt \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

при любом  $m \neq 0$ , что совпадает с условием нормировки для  $\delta$ -функции. Учитывая совокупность выявленных свойств функции  $F(t)$ , можно утверждать, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ .

Найдем производную функции  $F(t)$ :

$$F'(t) = \frac{-2m^3}{\pi} \frac{t}{[1+(mt)^2]^2}.$$

Нетрудно показать, что при  $t = -t_1 = 1/m\sqrt{3} \approx 0,5774/m$  функция  $F'(t)$  имеет максимум, а при  $t = t_2 = -t_1$  — минимум, причем

$$F'(t_1) = -F'(t_2) = \frac{-9m^2}{8\pi\sqrt{3}} \approx -0,2068 m^2. \text{ График функции } F'(t)$$

приведен на рис. 6.49. Как показано в предыдущей задаче,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F(t) = \delta(t)$ . Поэтому можно записать  $\lim_{m \rightarrow \infty} F'(t) = \delta'(t)$ .

Свойства первой производной  $\delta$ -функции становятся наглядными при мысленном преобразовании графика на рис. 6.49 для  $m \rightarrow \infty$ . Следует учесть, что после прохождения экстремумов для  $t = t_1$ ,  $t = t_2$  и достаточно больших  $t$  ( $m^2 t^2 \gg 1$ ) функция  $F'(t)$  изменяется как  $1/t$ . Таким образом, при  $t \neq 0$   $\delta'(t) = 0$ , а при  $t = 0$  она равна  $+\infty$  и  $-\infty$  одновременно.

**6.89м.** Использовать теорему дифференцирования и теорему сдвига.

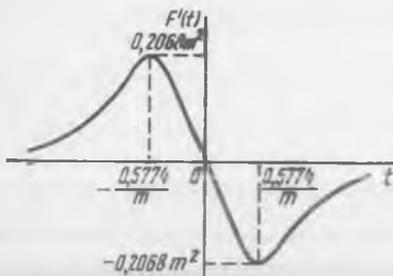


Рис. 6.49

## § 6.4. Переходные и импульсные характеристики простейших цепей

**6.90р.** Определить переходные  $h^1(t)$  и импульсные  $h^{\delta}(t)$  характеристики простейшей  $RL$ -цепи (рис.6.50) для следующих случаев: а) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ; б) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — напряжение  $u_2$ .

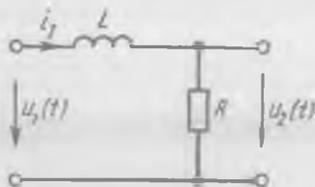


Рис. 6.50

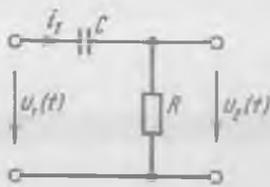


Рис. 6.51

**6.91.** Определить переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики простейшей  $RC$ -цепи (рис. 6.51), если  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ (внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ).

**6.92р.** Найти переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики двузвенной  $RL$ -цепи (рис. 6.52). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  Гн.

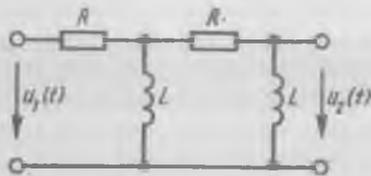


Рис. 6.52

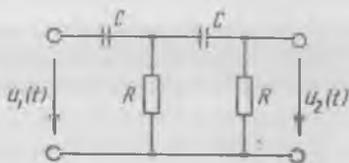


Рис. 6.53

**6.93м.** Определить переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики двузвенной  $RC$ -цепи (рис. 6.53). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ.

**6.94м.** Найти переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики двузвенной  $RL$ -цепи (рис. 6.54). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 2$  Гн.

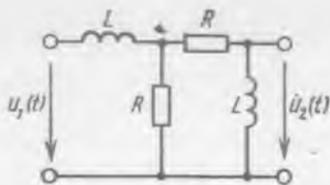


Рис. 6.54

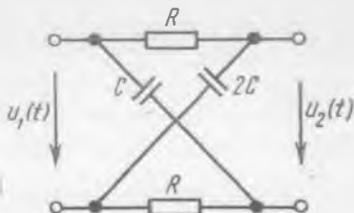


Рис. 6.55

**6.95м.** Определить переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики мостовой  $RC$ -цепи (рис. 6.55). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ. Объяснить ход характеристики  $h^1(t)$  на основании физических соображений.

**6.96м.** Найти переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики мостовой  $RL$ -цепи (рис. 6.56). Внешнее воздействие и реакция — напряжения  $u_1, u_2$ . Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $L = 1$  Гн.

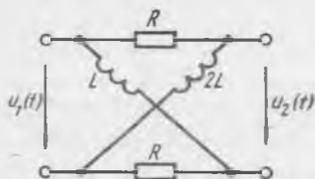


Рис. 6.56

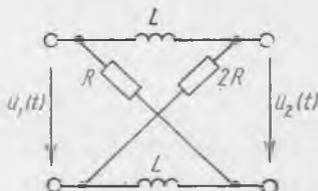


Рис. 6.57

**6.97м.** Решить предыдущую задачу для цепи рис. 6.57.

**6.98м.** На вход некоторой цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают экспоненциально убывающее напряжение  $u_1(t) = 2e^{-500t}$  В. Выходное напряжение  $u_2(t) = 4e^{-500t} - 4e^{-103t}$  В. Найти переходную характеристику цепи.

**6.99.** Решить предыдущую задачу, если  $u_2(t) = 4e^{-500t} - 2e^{-250t}$  В.

**6.100.** Определить переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики  $RLC$ -цепи (рис. 6.58) при  $R > 0,5\sqrt{L/C}$ . Внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — напряжение  $u_2$ .

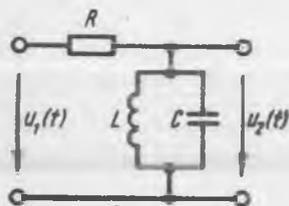


Рис. 6.58

**6.101.** Решить предыдущую задачу, если  $R = 0,5\sqrt{L/C}$ . Найти момент времени  $t_0$ , соответствующий максимуму переходной характеристики  $h^1(t)$ , и значение этого максимума  $h^1(t_0)$ .

**6.102м.** Симметричная мостовая цепь нагружена на сопротивление  $R = \sqrt{L/C}$  (рис. 6.59). Определить переходную  $h^1(t)$  и импульсную  $h^{\delta}(t)$  характеристики цепи для следующих случаев: а) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — ток  $i_1$ ; б) внешнее воздействие — напряжение  $u_1$ , реакция — напряжение  $u_2$ .

Дать физическую интерпретацию полученным результатам.

**6.103м.** Решить предыдущую задачу для цепи, схема которой представлена на рис. 6.60.

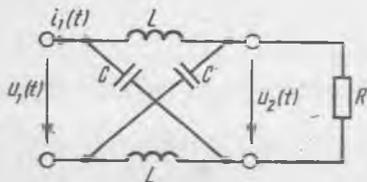


Рис. 6.59

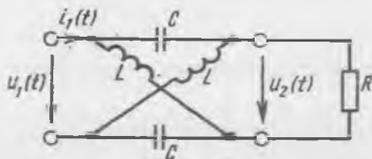


Рис. 6.60

**6.90р. а)** Переходная характеристика цепи  $h^1(t)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения. Размерность переходной характеристики равна отношению размерностей отклика и воздействия. В рассматриваемом случае переходная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $u_1(t) = 1(t)$  и имеет размерность проводимости. Учитывая, что  $1(t) \doteq p^{-1}$ , находим изображение входного тока цепи:

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{pZ(p)} = \frac{1}{L} [p(p + R/L)]^{-1}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $[p(p + a)]^{-1} \doteq \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$ , получим переходную характеристику цепи

$$h^1(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \text{ См.}$$

Импульсная характеристика цепи  $h^{\delta}(t)$  численно равно реакции цепи на воздействие единичного импульса тока или напряжения. Размерность импульсной характеристики равна отношению размерности отклика к размерности произведения воздействия на время. В рассматриваемом случае импульсная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $u_1(t) = \delta(t)$  и имеет размерность  $\text{См} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Учитывая  $\delta(t) \doteq 1$ , определяем изображение входного тока цепи

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{L} \frac{1}{p + R/L}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $(p + a)^{-1} \doteq e^{-at}$ , находим импульсную характеристику цепи:  $h^{\delta}(t) = \frac{1}{L} e^{-Rt/L} \text{ См} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Легко убедиться, что такое же выражение для  $h^{\delta}(t)$  можно получить, используя известное соотношение между переходной  $h^1(t)$  и импульсной  $h^{\delta}(t)$  характеристиками цепи:  $h^{\delta}(t) = h^1(0) \delta(t) + \frac{d}{dt} h^1(t)$ .

б) Поскольку  $u_2 = i_1 R$ , можно сразу записать  $h^1(t) = 1 - e^{-Rt/L}$ ;  $h^{\delta}(t) = \frac{R}{L} e^{-Rt/L} \text{ с}^{-1}$ .

**6.92р.** Операторный коэффициент передачи по напряжению двузвенной цепи (рис. 6.61)

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \left[ \left( 1 + \frac{Z_1(p)}{Z_2(p)} \right) \left( 1 + \frac{Z_3(p)}{Z_4(p)} \right) + \frac{Z_1(p)}{Z_4(p)} \right]^{-1}.$$

Для данной задачи  $Z_1(p) = Z_3(p) = R$ ;  $Z_2(p) = Z_4(p) = pL$ , поэтому

$$K(p) = (p\tau)^2 [(p\tau)^2 + 3p\tau + 1]^{-1},$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени цепи.

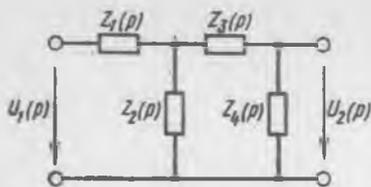


Рис. 6.61

Изображение переходной характеристики  $H(p) \doteq h^1(t)$  и коэффициент передачи  $K(p)$  связаны известным соотношением  $H(p) = K(p)/p$ , откуда

$$H(p) = p\tau^2 [(p\tau)^2 + 3p\tau + 1]^{-1}.$$

Эта функция имеет два полюса:  $p_1 = -2,618/\tau$ ;  $p_2 = -0,382/\tau$ , поэтому можно записать

$$H(p) = \frac{p\tau^2}{(p + 2,618/\tau)(p + 0,382/\tau)}.$$

Для перехода к оригиналу воспользуемся соотношением  $p[(p+a) \times (p+b)]^{-1} \doteq (b-a)^{-1}(be^{-bt} - ae^{-at})$ . В результате получим  $h^1(t) = 1,17e^{-2,618t/\tau} - 0,17e^{-0,382t/\tau}$ .

Построим график переходной характеристики  $h^1(t)$  и убедимся, что при  $t/\tau > 0,9$  кривая  $h^1(t)$  заходит в область отрицательных значений.

Импульсную характеристику цепи  $h^\delta(t)$  найдем по переходной характеристике

$$h^\delta(t) = h^1(0)\delta(t) + \frac{dh^1(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{3,063}{\tau}e^{-2,618t/\tau} + \frac{0,065}{\tau}e^{-0,382t/\tau}e^{-1}.$$

6.93м, 6.94м. Эти задачи решают аналогично задаче 6.92р.

6.95м — 6.97м. Эти задачи решаются аналогично задаче 6.92р.

Приведем выражение для операторного коэффициента передачи по напряжению мостовой цепи общего вида (рис. 6.62):

$$K(p) = \frac{Z_2(p)Z_3(p) - Z_1(p)Z_4(p)}{(Z_1(p) + Z_2(p))(Z_3(p) + Z_4(p))}.$$

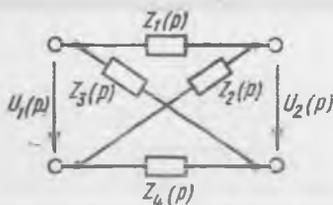


Рис. 6.62

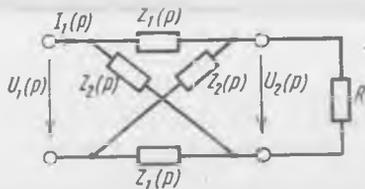


Рис. 6.63

6.98м. Найти изображения входного и выходного напряжений  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  и по ним операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Переходную характеристику цепи определяют с помощью соотношения  $h^1(t) \doteq K(p)/p$ .

6.102м, 6.103м. Это однотипные задачи. Изображение входного тока цепи  $I_1(p)$  определяют по изображению входного напряжения  $U_1(p) = p^{-1}$  и операторному входному сопротивлению  $Z_{вх}(p)$ . Изоб-

ражение выходного напряжения находят по  $U_1(p)$  и операторному коэффициенту передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Приведем выражения для  $Z_{вх}(p)$  и  $K(p)$  симметричной мостовой цепи с нагрузкой (рис. 6.63):

$$Z_{вх}(p) = R \frac{N(p)}{Z_1(p) + Z_2(p) + 2R}; \quad K(p) = \frac{Z_2(p) - Z_1(p)}{N(p)};$$

$$N(p) = Z_1(p) + Z_2(p) + 2Z_1(p) Z_2(p) R^{-1}.$$

В обеих задачах  $Z_1(p) Z_2(p) = R^2$ .

## § 6.5. Применение интеграла Дюамеля

6.104р. По известной переходной характеристике цепи  $h^1(t)$  найти ее реакцию  $y(t)$  на внешнее воздействие  $x(t)$ , определяемое графиками, приведенными на рис. 6.64, а — г.

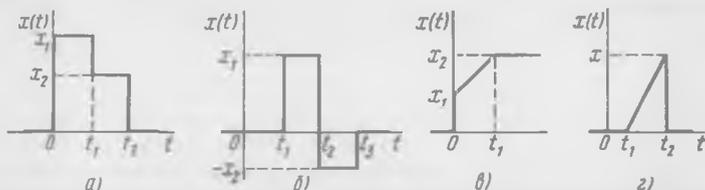


Рис. 6.64

6.105р. Переходная характеристика  $h^1(t)$  цепи, рассмотренной в задаче 6.91,  $h^1(t) = 10^{-3} e^{-10^3 t}$  См. Найти реакцию этой цепи на воздействие напряжения  $u$ :

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ u_1 = \frac{100}{t_1} t & \text{В при } 0 \leq t < t_1 = 10^{-3} \text{ с}, \\ u_2 = 100 \text{ В} & \text{при } t_1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

6.106р. Найти реакцию цепи, рассмотренной в задаче 6.105р, на заданное воздействие по известной импульсной характеристике  $h^{\delta}(t) = 10^{-3} \delta(t) - e^{-10^3 t}$  См.  $\text{с}^{-1}$ .

6.107. Напряжение на входе последовательной RC-цепи (рис. 6.65) изменяется по следующему закону:

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 100(1 - e^{-10^3 t}) \text{ В} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ. Найти ток в цепи  $i(t)$ .

6.108р. Связь между воздействием  $x(t)$  на цепь, ее откликом  $y(t)$  и переходной характеристикой  $h^1(t)$  определяется интегралом Дюамеля:

$$y(t) = x(0) h^1(t) + \int_0^t x'(\theta) h^1(t - \theta) d\theta,$$

или

$$y(t) = x(0) h^1(t) + \int_0^t x'(t-\theta) h^1(\theta) d\theta,$$

где

$$x'(\theta) = \frac{dx(\theta)}{d\theta} = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=\theta}; \quad x'(t-\theta) = \frac{dx(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}.$$

Показать, что интеграл Дюамеля может иметь следующие формы запи-

си: а)  $y(t) = x(t) h^1(0) + \int_0^t x(\theta) [h^1(t-\theta)]' d\theta$ ,  $[h^1(t-\theta)]' =$

$= \frac{dh^1(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}$ ; б)  $y(t) = x(t) h^1(0) + \int_0^t x(t-\theta) [h^1(\theta)]' d\theta$ ,  $[h^1(\theta)]' =$

$= \frac{dh^1(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\theta}$ . Чем следует руководствоваться при выборе той или иной формы интеграла Дюамеля?

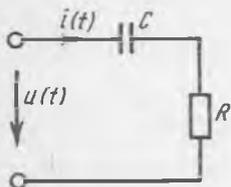


Рис. 6.65

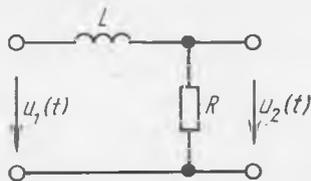


Рис. 6.66

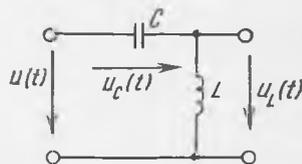


Рис. 6.67

**6.109.** Простейшую  $RL$ -цепь (рис. 6.66) в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику экспоненциально убывающей э. д. с.  $u_1 = Ee^{-at}$ . Найти напряжение  $u_2(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

**6.110.** Решить предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

**6.111р.** Простейшую  $LC$ -цепь без потерь подключают к источнику линейно возрастающей э.д.с.  $u(t) = kt$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности (рис. 6.67). Найти напряжения  $u_L(t)$  и  $u_C(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

**6.112.** Решить предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

**6.113.** Переходная характеристика  $h^1(t)$   $RC$ -цепи второго порядка по напряжению известна:  $h^1(t) = 1 - e^{-t/\tau} - e^{-t/2\tau}$ , где  $\tau = RC$  — постоянная времени цепи. На входе цепи действует напряжение

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 + \cos \omega_0 t & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Найти напряжение  $u_2(t)$  на выходе цепи.

**6.114.** Решить предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

6.104р. Внешнее воздействие  $x(t)$  описывается сложной функцией, имеющей различные аналитические выражения для различных интервалов времени:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{при } t_0 \leq t < t_1; \\ x_2(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2; \\ x_3(t) & \text{при } t_2 \leq t < t_3, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

причем функция  $x(t)$  может иметь конечные разрывы в точках  $t_0, t_1, t_2, \dots$

Для нахождения реакции цепи на воздействие такого типа можно воспользоваться одной из форм интеграла Дюамеля; при этом реакцию цепи определяют для каждого интервала времени в отдельности.

На первом интервале ( $t_0 \leq t < t_1$ )

$$y(t) = x(t_0) h^1(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=\theta} h^1(t-\theta) d\theta,$$

на втором интервале ( $t_1 \leq t < t_2$ )

$$y(t) = x(t_0) h^1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=\theta} h^1(t-\theta) d\theta + \\ + [x_2(t_1) - x_1(t_1)] h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^t \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=\theta} h^1(t-\theta) d\theta.$$

Аналогичным образом находят реакцию цепи  $y(t)$  и на всех последующих интервалах времени.

Для рис. 6.64, а

$$y(t) = X_1 h^1(t) \text{ при } 0 \leq t < t_1;$$

$$y(t) = X_1 h^1(t) + (X_2 - X_1) h^1(t - t_1) \text{ при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$y(t) = X_1 h^1(t) + (X_2 - X_1) h^1(t - t_1) - X_2 h^1(t - t_2) \text{ при } t \geq t_2.$$

Для рис. 6.64, б

$$y(t) = X_1 h^1(t - t_1) \text{ при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$y(t) = X_1 h^1(t - t_1) - (X_1 + X_2) h^1(t - t_2) \text{ при } t_2 \leq t < t_3;$$

$$y(t) = X_1 h^1(t - t_1) - (X_1 + X_2) h^1(t - t_2) + X_2 h^1(t - t_3) \text{ при } t \geq t_3.$$

Для рис. 6.64, в

$$y(t) = X_1 h^1(t) + \frac{X_2 - X_1}{t_2} \int_0^t h^1(t-\theta) d\theta \text{ при } 0 \leq t < t_1;$$

$$y(t) = X_1 h^1(t) + \frac{X_2 - X_1}{t_1} \int_0^{t_1} h^1(t-\theta) d\theta \text{ при } t \geq t_1.$$

Для рис. 6.64, *з*

$$y(t) = \frac{X}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^t h^1(t - \theta) d\theta \text{ при } t_1 \leq t < t_2;$$

$$y(t) = \frac{X}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h^1(t - \theta) d\theta - Xh^1(t - t_2) \text{ при } t \geq t_2.$$

**6.105р.** Разделим исследуемый промежуток времени  $0 \leq t < \infty$  на два интервала: 1)  $0 \leq t < t_1$ ; 2)  $t_1 \leq t < \infty$ . Определим реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

На первом интервале ( $0 \leq t < t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=\theta} h^1(t - \theta) d\theta.$$

Учитывая, что на этом интервале времени

$$\left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=\theta} = \frac{100}{t_1} = 10^5 \text{ В} \cdot \text{с}^{-1};$$

$$h^1(t - \theta) = 10^{-3} e^{-10^3(t - \theta)} \text{ См},$$

получаем

$$i(t) = 10^2 \int_0^t e^{-10^3(t - \theta)} d\theta.$$

Вынося  $e^{-10^3 t}$  из-под знака интегрирования (так как эта величина не зависит от переменной  $\theta$ ) и учитывая

$$\int_0^t e^{10^3 \theta} d\theta = 10^{-3} (e^{10^3 t} - 1),$$

окончательно находим

$$i(t) = 0,1 (1 - e^{-10^3 t}) \text{ А при } 0 \leq t < t_1.$$

На втором интервале времени ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^{t_1} \left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=\theta} h^1(t - \theta) d\theta = 0,1 e^{-10^3 t} (e^{10^3 t_1} - 1) = \\ &= 0,172 e^{-10^3 t} \text{ А}. \end{aligned}$$

**6.106р.** Как и в задаче 6.105р, разделим исследуемый промежуток времени на два интервала: 1)  $0 \leq t < t_1$ ; 2)  $t_1 \leq t < \infty$ . Определим реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

На первом интервале времени ( $0 \leq t < t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t u_1(\theta) h^{\delta}(t - \theta) d\theta,$$

где  $u_1(\theta) = \frac{100}{t_1} \theta = 10^5 \theta$  В;  $h^\delta(t - \theta) = 10^{-3} \delta(t - \theta) = e^{-10^3(t-\theta)}$  См·с<sup>-1</sup>.

Представляя интеграл, входящий в выражение для тока, в виде суммы двух интегралов

$$i(t) = 10^2 \int_0^t \theta \delta(t - \theta) d\theta - 10^5 e^{-10^3 t} \int_0^t \theta e^{10^3 \theta} d\theta$$

и учитывая, что

$$\int_0^t \theta \delta(t - \theta) d\theta = t, \int_0^t \theta e^{10^3 \theta} d\theta = 10^{-6} [e^{10^3 t} (10^3 t - 1) + 1],$$

окончательно получаем

$$i(t) = 0,1 (1 - e^{-10^3 t}) \text{ А при } 0 \leq t < t_1.$$

На втором интервале ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$i(t) = \int_0^{t_1} u_1(\theta) h^\delta(t - \theta) d\theta + \int_{t_1}^t u_2(\theta) h^\delta(t - \theta) d\theta,$$

где  $u_2(\theta) = 100$  В.

Разбивая каждый из интегралов, входящих в это выражение, на два

$$i(t) = 10^2 \int_0^{t_1} \theta \delta(t - \theta) d\theta - 10^5 e^{-10^3 t} \int_0^{t_1} \theta e^{10^3 \theta} d\theta + \\ + 0,1 \int_{t_1}^t \delta(t - \theta) d\theta - 10^2 e^{-10^3 t} \int_{t_1}^t e^{10^3 \theta} d\theta$$

и учитывая, что  $\int_0^{t_1} \theta \delta(t - \theta) d\theta = 0$ ;  $\int_{t_1}^t \delta(t - \theta) d\theta = 1$ , окончательно находим  $i(t) = 0,1 e^{-10^3 t} (e^{10^3 t_1} - 1) = 0,172 e^{-10^3 t}$  А при  $t \geq t_1$ .

**6.108р. а)** Применим к интегралу, который стоит в исходном выражении, правило интегрирования по частям:

$$\int_0^t x'(\theta) h^1(t - \theta) d\theta = x(\theta) h^1(t - \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=t} - \int_0^t x(\theta) dh^1(t - \theta) = \\ = x(t) h^1(0) - x(0) h^1(t) - \int_0^t x(\theta) dh^1(t - \theta).$$

Учитывая, что

$$dh^1(t - \theta) = \frac{dh^1(t - \theta)}{d\theta} d\theta = -\frac{dh^1(t - \theta)}{d(t - \theta)} = -\frac{dh^1(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}$$

находим

$$\int_0^t x'(\theta) h^1(t - \theta) d\theta = x(t) h^1(0) - x(0) h^1(t) + \int_0^t x(\theta) [h^1(t - \theta)]' d\theta,$$

где  $[h^1(t - \theta)]' = \frac{dh^1(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t-\theta}$

Подставляя этот результат в исходную форму интеграла Дюамеля, получим

$$y(t) = x(t) h^1(0) + \int_0^t x(\theta) [h^1(t-\theta)]' d\theta.$$

б) Заменяем интеграл в последнем выражении эквивалентным:

$$\int_0^t x(\theta) [h^1(t-\theta)]' d\theta = \int_0^t x(t-\theta) [h^1(\theta)]' d\theta.$$

После замены получаем еще одну форму записи интеграла Дюамеля:

$$y(t) = x(t) h^1(0) + \int_0^t x(t-\theta) [h^1(\theta)]' d\theta,$$

где  $[h^1(\theta)]' = \frac{dh^1(\theta)}{d\theta} = \frac{dh^1(t)}{dt} \Big|_{t=\theta}$

Ту или иную форму записи интеграла Дюамеля выбирают, руководствуясь удобством и простотой выполнения вычислений. Следует отдать предпочтение той форме, для которой будет проще подынтегральное выражение, что зависит от условий конкретной задачи.

**6.111р.** Для отыскания переходной характеристики цепи  $h^1(t)$  найдем сначала операторный коэффициент передачи цепи по напряжению:

$$K(p) = \frac{U_L(p)}{U(p)} = \frac{pL}{pL + 1/(pC)} = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2},$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC$  — резонансная частота последовательного колебательного контура.

Изображение переходной характеристики цепи  $h^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} K(p)/p = p/(p^2 + \omega_0^2)$ . Учитывая, что  $p(p^2 + a^2)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \cos at$ , получим  $h^1(t) = \cos \omega_0 t$ .

Напряжение на индуктивности при  $t \geq 0$

$$u_L(t) = u(0) h^1(t) + \int_0^t u'(\theta) h^1(t-\theta) d\theta.$$

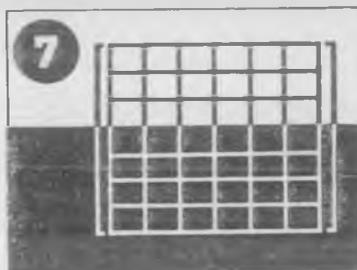
Поскольку  $u(0) = 0$ ;  $u'(\theta) = \frac{du(\theta)}{d\theta} \Big|_{t=\theta} = k$ , то

$$u_L(t) = k \int_0^t \cos \omega_0(t-\theta) d\theta = \frac{k}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на емкости при известных напряжениях  $u(t)$  и  $u_L(t)$

$$u_C(t) = u(t) - u_L(t) = kt - \frac{k}{\omega_0} \sin \omega_0 t \text{ при } t \geq 0.$$

# Методы анализа цепей, ориентированные на применение ЭВМ



## § 7.1. Методы узловых напряжений и контурных токов

7.1р. Составить компонентные уравнения в  $Y$ -форме для цепей, изображенных на рис. 7.1,  $a—e$ .

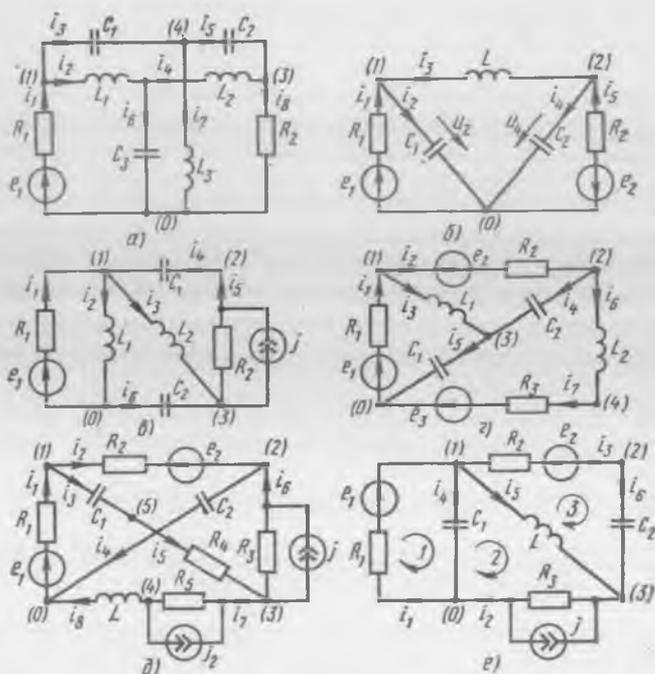


Рис. 7.1

7.2р. Составить компонентные уравнения в  $Z$ -форме для каждой из цепей рис. 7.1,  $a—e$ .

7.3м. Построить вектор (матрицу-столбец) узловых токов  $j_{10}$  для цепи рис. 7.2 двумя методами: а) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; б) непосредственно по схеме.

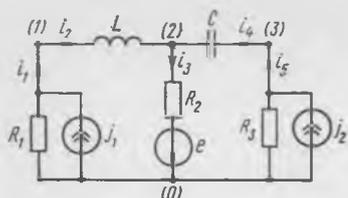


Рис. 7.2

7.6. Составить систему узловых уравнений цепи (см. рис. 7.1, в) двумя методами: а) путем операций над компонентными и топологическими матрицами; б) непосредственно по схеме.

7.7. Составить узловые уравнения относительно изображений по Лапласу токов и напряжений для цепи рис. 7.1, в. Начальные условия принять ненулевыми. Сравнить результат с решением задачи 7.6.

7.8. Цепь (см. рис. 7.1, в) находится в установившемся режиме при гармоническом внешнем воздействии частоты  $\omega$ . Используя результаты решения задачи 7.7, записать узловые уравнения цепи относительно комплексных действующих значений напряжений и токов.

7.9м. Построить вектор контурных э. д. с.  $e_{ij}$  для цепи (рис. 7.3) двумя способами: а) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; б) непосредственно по схеме. В качестве главных выбрать контуры 1, 2, 3 в соответствии с рис. 7.4, на котором представлен граф рассматриваемой цепи; ветви дерева выделены сплошными, а связи — пунктирными линиями.

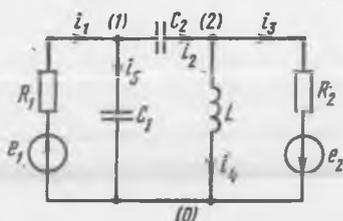


Рис. 7.3

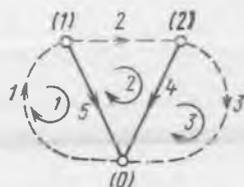


Рис. 7.4

7.10м. Найти матрицу контурных сопротивлений  $Z_{(ij)}$  для цепи, рассмотренной в задаче 7.9м, двумя способами: а) путем операций над матрицами сопротивлений  $Z$  и главных контуров  $B$ ; б) непосредственно по схеме. Главные контуры обозначены на рис. 7.4.

7.11. Используя результаты решения задач 7.9м и 7.10м, составить систему контурных уравнений для цепи (см. рис. 7.3) в матричной и скалярной формах.

7.12. Составить систему контурных уравнений для цепи (см. рис. 7.1, в) двумя способами: а) путем операций над топологическими и компонентными матрицами; б) непосредственно по схеме. В качестве главных выбрать контуры 1, 2, 3.

7.13. Составить систему контурных уравнений относительно изображений по Лапласу токов и напряжений для цепи, рассмотренной в задаче 7.12. Начальные условия принять ненулевыми. Сравнить результат с решением задачи 7.12.

7.14. Цепь (см. рис. 7.1, е) находится в установившемся режиме при гармоническом внешнем воздействии частоты  $\omega$ . Используя результаты решения задачи 7.13, записать контурные уравнения цепи относительно комплексных действующих значений напряжений и токов.

7.15м. Построить граф, дуальный графу, приведенному на рис. 7.4, и цепь, дуальную цепи, представленной на рис. 7.3.

7.16. Для дуальной цепи, полученной в задаче 7.15м, составить уравнения электрического равновесия методом узловых напряжений. Сравнить результаты с решением задачи 7.11.

#### Решения и методические указания

7.1р. Компонентные уравнения в  $Y$ -форме для ветвей, содержащих сопротивление  $R$ , емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и идеализированный источник напряжения  $e$  с внутренним сопротивлением  $R_i$ , имеют следующий вид:

$$i = 0 + \frac{1}{R} (u - 0); \quad i = i(0) + \frac{1}{sL} (u - 0);$$

$$i = 0 + sC (u - 0); \quad i = 0 + \frac{1}{R_i} (u + e).$$

Используя эти соотношения, составляем компонентные уравнения для каждой ветви цепи рис. 7.1, а:

$$i_1 = 0 + \frac{1}{R_1} (u_1 + e); \quad i_5 = 0 + sC_2 (u_5 - 0);$$

$$i_2 = i_2(0) + \frac{1}{sL_1} (u_2 - 0); \quad i_6 = 0 + sC_3 (u_6 - 0);$$

$$i_3 = 0 + sC_1 (u_3 - 0); \quad i_7 = i_7(0) + \frac{1}{sL_3} (u_7 - 0);$$

$$i_4 = i_4(0) + \frac{1}{sL_2} (u_4 - 0); \quad i_8 = 0 + \frac{1}{R_2} (u_8 - 0).$$

Объединяя эти уравнения в одно, получаем матричное компонентное уравнение в  $Y$ -форме:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_g + \mathbf{Y} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g),$$

где

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ i_2(0) \\ 0 \\ i_4(0) \\ 0 \\ 0 \\ i_7(0) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей  $\mathbf{Y}$ -квадратная, диагональная, элементы ее главной диагонали имеют вид:

$$\text{diag } \mathbf{Y} = [R_1^{-1}; (sL_1)^{-1}; sC_1; (sL_2)^{-1}; sC_2; sC_3; (sL_3)^{-1}; R_2^{-1}].$$

Аналогичным образом можно составить компонентные уравнения и для остальных цепей рис. 7.1.

Целесообразно, однако, так модифицировать составление матричного компонентного уравнения, чтобы избежать этап получения системы скалярных компонентных уравнений, т. е. записывать матричное компонентное уравнение непосредственно по виду цепи.

Матрицы-столбцы (векторы)  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$  содержат токи и напряжения ветвей; число элементов в них равно числу ветвей. Вектор  $\mathbf{u}_g$  учитывает наличие в ветвях источников э.д.с., причем напряжение каждого такого источника записывают со знаком минус, если положительные направления э. д. с. и тока ветви совпадают, и со знаком плюс — в противоположном случае. В векторе  $\mathbf{i}_g$  от нуля отличаются только элементы, относящиеся к индуктивным ветвям. Кроме того, при наличии в  $n$ -й ветви источника тока  $j$   $n$ -й элемент вектора  $\mathbf{i}_g$  равен  $j$ . Последнее вытекает из уравнения ветви, содержащей источник тока  $j$  с внутренним сопротивлением  $R_i$ :  $i = j + \frac{1}{R_i}(u - 0)$ .

Таким образом, элементы вектора  $\mathbf{i}_g$  представляют собой токи источников тока и начальные токи индуктивных ветвей. Число элементов в  $\mathbf{i}_g$  и  $\mathbf{u}_g$  равно числу ветвей.

Матрица проводимостей  $\mathbf{Y}$  — квадратная, диагональная; отличными от нуля являются лишь элементы главной диагонали, которые представляют собой проводимости ветвей.

С учетом изложенного можно, например, для цепи рис. 7.1, *в* записать

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ i_2(0) \\ i_3(0) \\ 0 \\ j \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_g = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{diag } \mathbf{Y} = [R_1^{-1}; (sL_1)^{-1}; (sL_2)^{-1}; sC_1; R_2^{-1}; sC_2].$$

7.2р. Компонентные уравнения в Z-форме для ветвей, содержащих сопротивление  $R$ , емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и идеализированный источник напряжения  $e$  с внутренним сопротивлением  $R_i$ , имеют следующий вид:

$$u = 0 + R (i - 0); u = 0 + sL (i - 0);$$

$$u = u(0) + \frac{1}{sC} (i - 0); u = -e + R_i (i - 0).$$

Используя эти соотношения, составляем компонентное уравнение для каждой ветви цепи рис. 7.1, а:

$$u_1 = -e + R_1 (i_1 - 0); \quad u_5 = u_5(0) + \frac{1}{sC_2} (i_5 - 0);$$

$$u_2 = 0 + sL_1 (i_2 - 0); \quad u_6 = u_6(0) + \frac{1}{sC_3} (i_6 - 0);$$

$$u_3 = u_3(0) + \frac{1}{sC_1} (i_3 - 0); \quad u_7 = 0 + sL_3 (i_7 - 0);$$

$$u_4 = 0 + sL_2 (i_4 - 0); \quad u_8 = 0 + R_2 (i_8 - 0).$$

Объединяя эти уравнения в одно, получаем матричное компонентное уравнение в Z-форме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{Z} (\mathbf{i} - \mathbf{i}_v),$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_v = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ u_3(0) \\ 0 \\ u_5(0) \\ u_6(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица сопротивлений  $\mathbf{Z}$  — квадратная, диагональная, элементы ее главной диагонали имеют вид:

$$\text{diag } \mathbf{Z} = [R_1; sL_1; (sC_1)^{-1}; sL_2; (sC_2)^{-1}; (sC_3)^{-1}; sL_3; R_2],$$

т. е. представляют собой сопротивления ветвей.

Аналогичным образом можно составить компонентные уравнения и для остальных цепей рис. 7.1.

Как и в случае матричного компонентного уравнения в Y-форме (см. задачу 7.1р), матричное компонентное уравнение в Z-форме можно записать для любой цепи сразу, минуя этап получения системы скалярных компонентных уравнений.

Матрицы-столбцы (векторы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$ ) содержат токи и напряжения ветвей; число элементов в них равно числу ветвей. Вектор  $\mathbf{u}_v$  учитывает начальные напряжения емкостных ветвей, а также наличие в ветвях

источников э. д. с. Напряжение каждого источника записывают со знаком минус, если положительные направления э. д. с. и тока ветви совпадают. Вектор  $i_v$  учитывает наличие ветвей с источником тока. Если  $n$ -я ветвь цепи представляет собой источник тока  $j$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  то  $n$ -й элемент вектора  $i_v$  равен  $j$ . Это следует из уравнения ветви с источником тока  $u = 0 + R_i (i - j)$ . Число элементов в векторах  $u_v$  и  $i_v$  равно числу ветвей.

Матрица сопротивлений  $Z$ -квадратная, диагональная, элементы главной диагонали представляют собой сопротивления ветвей. С учетом изложенного, например, для цепи рис. 7.1, в можно сразу записать:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}; i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}; u_v = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ u_4(0) \\ 0 \\ u_6(0) \end{bmatrix}; i_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{diag } Z = [R_1; sL_1; sL_2; (sC_1)^{-1}; R_2; (sC_2)^{-1}].$$

7.3м. Вектор узловых токов  $j_{i0}$  содержит три элемента (по числу независимых узлов):

$$j_{i0} = A (Y u_g - i_g),$$

где  $A$  — матрица узлов;  $Y$  — матрица проводимостей ветвей;  $u_g$ ,  $i_g$  — векторы заданных напряжений и токов.

Для рассматриваемой цепи

$$A = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Матрица  $Y$  — квадратная, диагональная:

$$\text{diag } Y = [R_1^{-1}; (sL)^{-1}; R_2^{-1}; sC; R_3^{-1}].$$

Векторы  $u_g$  и  $i_g$  имеют вид (см. задачу 7.1р):

$$u_g^t = [0; 0; -e; 0; 0], i_g^t = [j_1; i_2(0); 0; 0; j_2].$$

Искомый вектор  $j_{i0}$  находят после выполнения указанных действий над матрицами:

$$j_{i0}^t = [j_1 - i_2(0); i_2(0) - eR_2^{-1}; j_2].$$

Каждый элемент этого вектора соответствует независимому узлу цепи и складывается алгебраически из тока источника тока и начального тока индуктивной ветви, инцидентных этому узлу. Если некоторому узлу инцидентна ветвь с источником напряжения ( $e_i$ ,  $R_i$ ), то ее

учитывают с помощью  $e_i R_i^{-1}$ , что эквивалентно преобразованию источника напряжения в источник тока.

7.4м. Матрица узловых проводимостей  $Y_{(ij)}$  имеет размеры  $3 \times 3$  (число независимых узлов равно трем) и определяется выражением  $Y_{(ij)} = A Y A^t$ . Матрицы  $A$  и  $Y$  найдены в задаче 7.3м. После выполнения требуемых действий над матрицами найдем элементы искомого матрицы:  $Y_{(11)} = R_1^{-1} + (sL)^{-1}$ ;  $Y_{(22)} = (sL)^{-1} + R_2^{-1} + sC$ ;  $Y_{(33)} = sC + R_3^{-1}$ ;  $Y_{(12)} = Y_{(21)} = -(sL)^{-1}$ ;  $Y_{(13)} = Y_{(31)} = 0$ ;  $Y_{(23)} = Y_{(32)} = -sC$ .

7.9м. Вектор контурных э. д. с. содержит три элемента (по числу независимых контуров):

$$e_{it} = B (Z i_v - u_v),$$

где  $B$  — матрица главных контуров;  $Z$  — матрица сопротивлений ветвей;  $i_v, u_v$  — векторы заданных токов и напряжений.

Для рассматриваемой цепи

$$B = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Матрица  $Z$  — квадратная, диагональная:

$$\text{diag } Z = [R_1; (sC_2)^{-1}; R_2; sL; (sC_1)^{-1}].$$

Векторы  $i_v$  и  $u_v$  имеют вид (см. задачу 7.2п):

$$i_v = 0; u_v^t = [-e_1; u_2(0); -e_2; 0; u_5(0)].$$

После выполнения указанных действий над матрицами получим

$$e_{it}^t = [e_1 - u_5(0); u_5(0) - u_2(0); e_2].$$

Каждый элемент этого вектора соответствует независимому контуру цепи и складывается алгебраически из э. д. с. источников напряжения и начальных напряжений емкостных ветвей, входящих в этот контур.

7.10м. Матрица контурных сопротивлений  $Z_{(ij)}$  имеет размеры  $3 \times 3$  (число независимых контуров равно трем):  $Z_{(ij)} = B Z B^t$ .

Матрицы  $B$  и  $Z$  определены в задаче 7.9м. Выполняя необходимые действия над матрицами, найдем элементы искомого матрицы:

$$\begin{aligned} Z_{(11)} &= R_1 + (sC_1)^{-1}; Z_{(22)} = (sC_1)^{-1} + (sC_2)^{-1} + sL; \\ Z_{(33)} &= sL + R_2; Z_{(12)} = Z_{(21)} = -(sC_1)^{-1}; Z_{(13)} = Z_{(31)} = 0; \\ Z_{(23)} &= Z_{(32)} = -sL. \end{aligned}$$

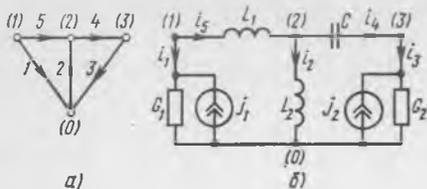


Рис. 7.5

направлением обхода контура, то источник тока в дуальной цепи должен быть направлен к узлу, соответствующему этому контуру в исходной цепи.

Граф и цепь, дуальные заданным, изображены на рис. 7.5, а, б. Убедиться в том, что при повторном применении правил построения дуальных графов и цепей получаются исходные граф и цепь.

**7.15м.** Исходная цепь содержит два источника э. д. с.  $e_1$  и  $e_2$ . В дуальной цепи им соответствуют источники тока. Направления дуальных источников должны быть согласованы по следующему правилу: если э. д. с. источника действует в соответствии с положительным

## § 7.2. Метод переменных состояния

**7.17м.** Построить нормальные деревья графов цепей рис. 7.2 и 7.3. (Нормальным деревом графа называют дерево, которое содержит все независимые источники напряжения, максимально возможное число емкостей, минимально возможное число индуктивностей и не содержит независимых источников тока.)

**7.18м.** Построить нормальные деревья графов цепей рис. 7.6 и 7.7.

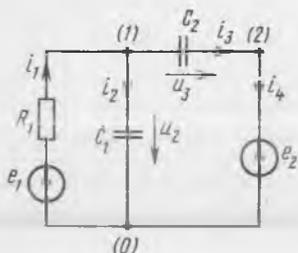


Рис. 7.6

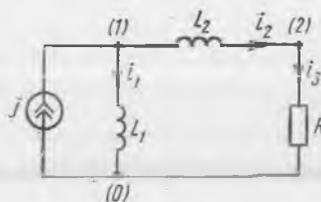


Рис. 7.7

**7.19р.** Составить уравнения состояния для линейной инвариантной во времени цепи (рис. 7.8).

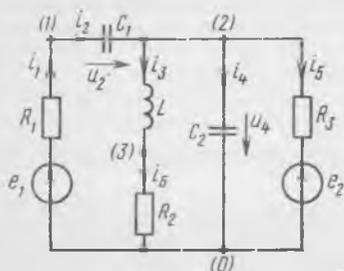


Рис. 7.8

**7.20р.** Решить задачу 7.19р, используя в качестве независимых переменных заряды емкостей и потокосцепление индуктивности.

**7.21м.** Задана линейная цепь, параметры элементов которой изменяются во времени (рис. 7.8). Составить уравнение состояния, выбрав независимыми переменными заряды емкостей и потокосцепление индуктивности.

7.22р. Решить задачу 7.21м для независимых переменных  $u_2$ ,  $u_4$  и  $i_3$ .

7.23. Проанализировать системы уравнений состояния, полученные при решении задач 7.21м и 7.22р. В каких случаях целесообразно использовать в качестве независимых переменных заряды емкостей и потокоцепления индуктивностей?

7.24. Составить уравнения состояния для цепи рис. 7.1, б.

7.25р. Составить уравнения состояния для цепи рис. 7.6.

7.26. Параметры элементов  $C_1$  и  $C_2$  цепи (рис. 7.6) изменяются во времени:  $C_1 = C_1(t)$ ;  $C_2 = C_2(t)$ . Составить уравнение состояния для этой цепи относительно напряжения  $u_2$ .

7.27. Составить уравнения состояния для цепи рис. 7.7.

7.28. Составить уравнение состояния для цепи (рис. 7.7) относительно тока  $i_2$ , считая, что параметры элементов  $L_1$  и  $L_2$  изменяются во времени:  $L_1 = L_1(t)$ ;  $L_2 = L_2(t)$ .

#### Решения и методические указания

7.17м. В соответствии с определением нормальное дерево графа цепи рис. 7.2 должно содержать ветвь 3 с источником э.д.с. и ветвь 4 с элементом  $C$  (рис. 7.9, а). Аналогичным образом в нормальное дерево графа цепи, показанной на рис. 7.3, следует включить ветви 1 и 3 с источниками э.д. с. (рис. 7.9, б).

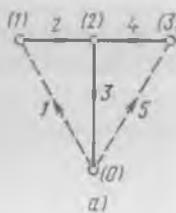


Рис. 7.9

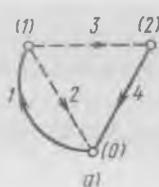
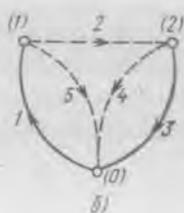
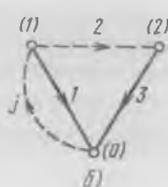


Рис. 7.10



7.18м. Цепи (рис. 7.6 и 7.7) имеют топологические вырождения (емкостный контур и индуктивный узел соответственно). При выборе нормального дерева графа нельзя включать в его состав все емкостные ветви, образующие контур. Аналогично, нельзя отнести к хордам (связям) все индуктивные ветви, инцидентные индуктивному узлу. Возможные решения для цепей рис. 7.6 и 7.7 приведены на рис. 7.10, а, б соответственно.

7.19р. В соответствии с числом и типом энергоемких элементов цепи определим три переменные состояния: напряжения на емкостях  $u_2$  и  $u_4$  и ток через индуктивность  $i_3$ .

Построим граф цепи и выделим его нормальное дерево (рис. 7.11). Запишем уравнения электрического равновесия:

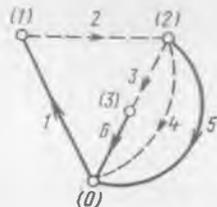


Рис. 7.11

$$i_1 - i_2 = 0; i_2 - i_3 - i_4 - i_5 = 0; i_3 - i_6 = 0;$$

$$e_1 - e_2 = i_1 R_1 + u_2 + i_5 R_3; e_2 = u_3 + i_6 R_2 - i_5 R_3; e_2 = u_4 - i_5 R_3.$$

Выражая напряжения и токи ветвей через переменные состояния  $i_6 = i_3$ ;  $i_1 = i_2 = C_1 \frac{du_2}{dt}$ ;  $i_4 = C_2 \frac{du_4}{dt}$ ;  $u_3 = L \frac{di_3}{dt}$ ;  $i_5 = \frac{1}{R_3} (u_4 - e_2)$ , получаем из приведенных ранее соотношений искомые уравнения состояния:

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} = \frac{-1}{R_1 C_1} u_2 - \frac{1}{R_1 C_1} u_4 + \frac{1}{R_1 C_1} e_1; \\ \frac{du_4}{dt} = \frac{-1}{R_1 C_2} u_2 - \left( \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) u_4 - \frac{1}{C_2} i_3 + \frac{1}{R_1 C_2} e_1 + \frac{1}{R_3 C_2} e_2; \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} i_4 - \frac{R_2}{L} i_3. \end{cases}$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1}; & \frac{-1}{R_1 C_1}; & 0 \\ \frac{-1}{R_1 C_2}; & \frac{-1}{R_1 C_2} - \frac{1}{R_3 C_2}; & \frac{-1}{C_2} \\ 0; & \frac{1}{L}; & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ i_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1}; & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2}; & \frac{1}{R_3 C_2} \\ 0; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

**7.20р.** Обозначим  $q_1, q_2$  — заряды емкостей  $C_1, C_2$ ;  $\Psi$  — потокоцепление индуктивности. По определению,  $q_1 = C_1 u_2$ ;  $q_2 = C_2 u_4$ ;  $\Psi = L i_3$ .

Уравнения электрического равновесия цепи имеют тот же вид, что и в решении предыдущей задачи. Выразим напряжения и токи ветвей через новые переменные состояния  $q_1, q_2$  и  $\Psi$ :

$$i_6 = i_3 = \Psi/L; i_1 = i_2 = dq_1/dt; i_4 = dq_2/dt; u_3 =$$

$$= d\Psi/dt; i_5 = \frac{1}{R_3} (u_4 - e_2) = \frac{1}{R_3} \left( \frac{q_2}{C_2} - e_2 \right).$$

Используя эти соотношения, найдем из уравнений равновесия искомые уравнения-состояния. Например, из уравнения  $e_2 = u_3 + i_6 R_2 - i_5 R_3$  найдем  $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{R_2}{L} \Psi$ .

В результате получим

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1}; & \frac{-1}{R_1 C_2}; & 0 \\ \frac{-1}{R_1 C_1}; & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}\right); & \frac{-1}{L} \\ 0; & \frac{1}{C_2}; & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \Psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}; & 0 \\ \frac{1}{R_1}; & \frac{1}{R_3} \\ 0; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

При выводе этих уравнений не делалось никаких предположений о характере изменения параметров элементов цепи во времени. Следовательно, эти уравнения справедливы как для линейной, инвариантной во времени цепи, так и для цепи, параметры элементов которой изменяются во времени. В последнем случае система уравнений имеет коэффициенты при неизвестных, которые зависят от времени.

7.21м. См. решение задачи 7.20р.

7.22р. Переменными состояниями являются по условию  $u_2$ ,  $u_4$  и  $i_3$ . Проще всего уравнения состояния относительно этих переменных получают путем преобразования уравнений, рассмотренных в задачах 7.20р и 7.21м. Например, уравнение  $\frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{R_2}{L} \Psi$  с учетом соотношений  $\Psi = Li_3$ ;  $q_2 = C_2 u_4$  легко привести к виду

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} u_4 - \frac{1}{L} \left( R_2 + \frac{dL}{dt} \right) i_3.$$

Окончательно уравнения состояния параметрической цепи имеют вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{\dot{C}_1}{C_1}\right); & \frac{-1}{R_1 C_1}; \\ \frac{-1}{R_1 C_2}; & -\left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{\dot{C}_2}{C_2}\right); \\ 0; & \frac{1}{L}; \\ 0 & \frac{-1}{C_2} \\ -\left(\frac{R_2}{L} + \frac{\dot{L}}{L}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_4 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1}; & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2}; & \frac{1}{R_3 C_2} \\ 0; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

где  $\dot{C}_i = dC_i/dt$ ;  $i = 1, 2$ ;  $\dot{L} = dL/dt$ .

7.25р. В цепи имеется два энергоемких элемента, но только для одного из них энергетическое состояние можно задать независимым путем, поскольку элементы  $C_1$  и  $C_2$  вместе с источником э. д. с.  $e_2$  образуют емкостной контур. Поэтому переменная состояния одна — напряжение емкостной ветви, например,  $u_2$ .

Граф рассматриваемой цепи приведен на рис. 7.10, а (см. задачу 7.18м). Запишем уравнения электрического равновесия цепи:  $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ ;  $e_1 = i_1 R_1 + u_2$ ;  $e_1 - e_2 = i_1 R_1 + u_3$ .

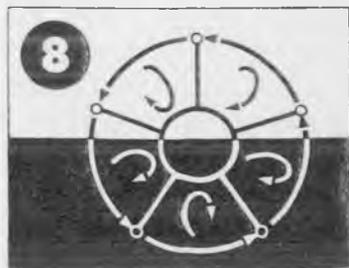
Выражая напряжения и токи ветвей через переменную  $u_2$ , получаем

$$u_3 = u_2 - e_2; i_2 = C_1 \frac{du_2}{dt}; i_3 = C_2 \frac{du_3}{dt} = C_2 \frac{d}{dt} (u_2 - e_2).$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение баланса токов, находим искомое уравнение состояния:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{-1}{R_1 (C_1 + C_2)} u_2 + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} e_1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{de_2}{dt}.$$

## Основы теории четырехполюсников и многополюсников



### § 8.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами

8.1. Задана укороченная матрица проводимостей трехполюсника, включенного по схеме с общим выводом 3 (рис. 8.1, а):

$$Y_{ij}^{(3)} = \begin{array}{|c|c|} \hline Y_{11}^{(3)} & Y_{12}^{(3)} \\ \hline Y_{21}^{(3)} & Y_{22}^{(3)} \\ \hline \end{array}$$

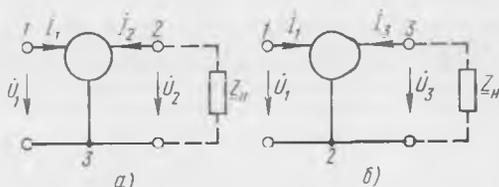


Рис. 8.1

Определить матрицу проводимостей этого трехполюсника, включенного по схеме с общим выводом 2 (рис. 8.1, б).

8.2. Трехполюсники, отличающиеся друг от друга только способом включения (см. задачу 8.1), нагружены на одинаковые сопротивления

$Z_{11} = Y_{11}^{-1}$  (на рис. 8.1 показаны пунктиром). Полагая  $Y_{11} = 0$ ;  $Y_{12} = 0$ , найти коэффициенты передачи обеих цепей по напряжению  $K_a = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ ,  $K_b = \dot{U}_3/\dot{U}_1$  и установить их взаимосвязь. Каким будет коэффициент  $K_b$ , если  $|K_a| \gg 1$ ?

8.3р. Составить неопределенную матрицу проводимостей многополюсника, изображенного на рис. 8.2\*.

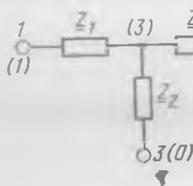


Рис. 8.2

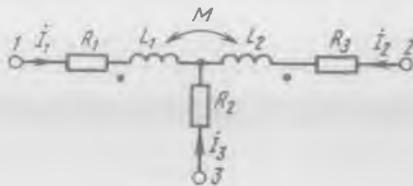


Рис. 8.3

8.4р. На рис. 8.3 приведена схема многополюсника с индуктивно связанными элементами. Найти неопределенную матрицу  $Y$ -параметров этого многополюсника.

8.5р. Решить задачу 8.4р для многополюсника рис. 8.4.

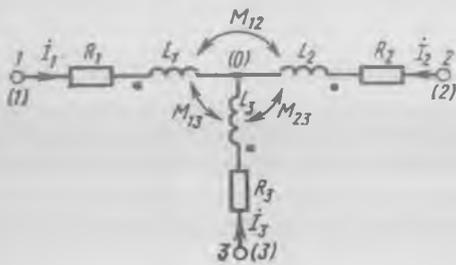


Рис. 8.4

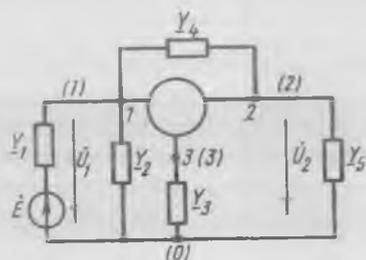


Рис. 8.5

8.6р. Типовая схема усилительного каскада приведена на рис. 8.5. Трехполюсник — усилительный элемент (электронная лампа, биполярный или полевой транзистор). Включенный по схеме с общим выводом 3, трехполюсник характеризуется укороченной матрицей проводимостей  $Y_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ . Используя обобщенный метод узловых напряжений, составить уравнения электрического равновесия цепи и сформулировать алгоритм определения отношения напряжений  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2/\dot{E}$ .

8.7р. Схема типового двухкаскадного усилителя приведена на рис. 8.6,а. Трехполюсники А и В — усилительные элементы; будучи

\* Здесь и в дальнейшем все узлы схемы многополюсника обозначают цифрами в скобках, а внешние узлы (выводы многополюсника), кроме того, цифрами без скобок.

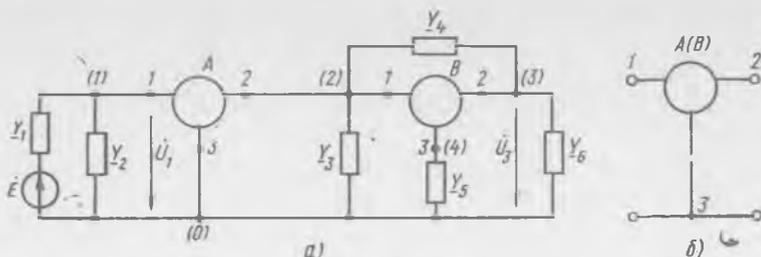


Рис. 8.6

включенными по схеме с общим выводом 3 (рис. 8.6, б), характеризуются следующими укороченными матрицами проводимостей, элементы которых выражены в сименсах:

$$\underline{Y}_{iJA}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,5 \cdot 10^{-4} & -0,9 \cdot 10^{-6} \\ 4,5 \cdot 10^{-2} & 10 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \underline{Y}_{iJB}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8,2 \cdot 10^{-4} & -0,8 \cdot 10^{-6} \\ 4,1 \cdot 10^{-2} & 9 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

(Эти значения узловых проводимостей характерны для маломощных биполярных транзисторов, включенных по схеме с общим эмиттером.) Проводимости двухполюсников:  $\underline{Y}_1 = 0,01$  См;  $\underline{Y}_2 = 1 \cdot 10^{-4}$  См;  $\underline{Y}_3 = 1 \cdot 10^{-4}$  См;  $\underline{Y}_4 = 0,5 \cdot 10^{-4}$  См;  $\underline{Y}_5 = 50 \cdot 10^{-4}$  См.;  $\underline{Y}_6 = 5 \cdot 10^{-4}$  См. Используя обобщенный метод узловых напряжений, составить уравнения электрического равновесия цепи и определить отношения напряжений  $\dot{U}_3/\dot{U}_1$ ;  $\dot{U}_3/\dot{E}$ .

8.8р. Два биполярных транзистора  $T_A$  и  $T_B$  соединены между собой так, что образуют составной транзистор (рис. 8.7, а). Найти неопределенную матрицу проводимостей составного транзистора, если известны укороченные матрицы проводимостей транзисторов  $T_A$  и  $T_B$ , включенных по схеме с общим эмиттером (рис. 8.7, б). Элементы матриц выражены в сименсах.

$$\underline{Y}_{iJA}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,5 \cdot 10^{-4} & -0,9 \cdot 10^{-6} \\ 4,5 \cdot 10^{-2} & 10 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \quad \underline{Y}_{iJB}^{(3)} = \begin{bmatrix} 8,2 \cdot 10^{-4} & -0,8 \cdot 10^{-6} \\ 4,1 \cdot 10^{-2} & 9 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

8.9р. Уравнения электрического равновесия шестиполюсника (рис. 8.8) имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$

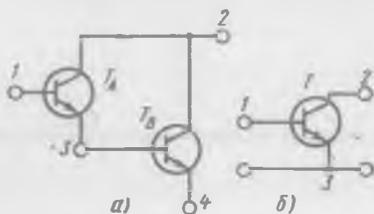


Рис. 8.7

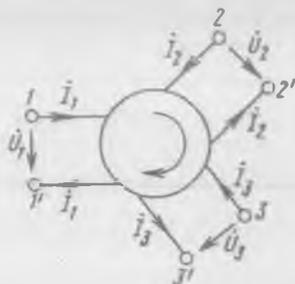


Рис. 8.8

Цепь, описываемую такими уравнениями, называют идеальным трехходовым циркулятором и применяют в устройствах сверхвысоких частот для направленной передачи мощности.

Построить эквивалентную схему циркулятора, соответствующую заданным уравнениям.

8.10. К зажимам  $1-1'$  циркулятора (рис. 8.8) подключен источник напряжения  $\dot{E}$  с внутренним сопротивлением  $R$ , а к зажимам  $2-2'$  и  $3-3'$  присоединены сопротивления  $R$ . Используя результат решения задачи 8.9р, убедиться, что вся мощность, подводимая к зажимам  $1-1'$ , передается только на зажимы  $2-2'$ .

#### Решения и методические указания

8.3р. Найдем  $Y$ -параметры многополюсника, включенного по схеме с общим выводом  $3$ . Уравнения многополюсника в  $Y$ -форме для этого случая имеют вид

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{13} \dot{U}_{20}; \quad \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20}.$$

В режиме короткого замыкания на выходе ( $\dot{U}_{20} = 0$ )

$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0}; \quad \underline{Y}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0}.$$

Для схемы многополюсника, соответствующей этому режиму (рис. 8.9, а), запишем

$$\dot{I}_1 \Big|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{ЭК}}}; \quad \dot{I}_2 \Big|_{\dot{U}_{20}=0} = -\dot{U}_{10} \frac{\underline{Z}_{\text{ЭК}}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{\text{ЭК}}} \frac{1}{\underline{Z}_3},$$

где  $\underline{Z}_{\text{ЭК}} = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)^{-1}$  — эквивалентное сопротивление параллельно включенных ветвей  $\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_3$ . Отсюда получаем

$$\underline{Y}_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{\Delta}_z}; \quad \underline{Y}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{10}} \right|_{\dot{U}_{20}=0} = \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{\Delta}_z},$$

где  $\underline{\Delta}_z = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$ .

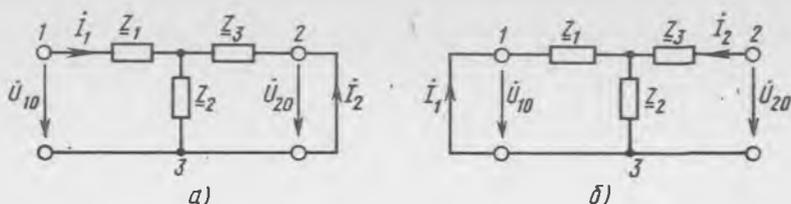


Рис. 8.9

При режиме короткого замыкания на входе ( $\dot{U}_{10} = 0$ ) находим аналогичным образом параметры  $\underline{Y}_{12}$  и  $\underline{Y}_{22}$  (рис. 8.9, б):

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{10}=0} = \underline{Y}_{21} = \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{\Delta}_z}; \quad \underline{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_{20}} \Big|_{\dot{U}_{10}=0} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{\Delta}_z}.$$

Таким образом, определены все элементы укороченной матрицы проводимостей многополюсника. Для перехода от укороченной матрицы проводимостей к неопределенной дополним укороченную матрицу третьим столбцом и третьей строкой, элементы которых выбраны таким образом, чтобы сумма элементов каждой строки и каждого столбца равнялась нулю. Окончательно получим

$$\underline{Y}_{ij} = \frac{1}{\underline{\Delta}_z} \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 & -\underline{Z}_3 \\ 2 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_1 \\ 3 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \end{array}$$

Решим эту задачу другим способом, основанным на преобразовании матрицы узловых проводимостей многополюсника. Матрица узловых проводимостей рассматриваемой цепи

$$\underline{Y}_{(ij)} = \begin{array}{c|ccc} & (1) & (2) & (3) \\ \hline (1) & \underline{Z}_1^{-1} & 0 & -\underline{Z}_1^{-1} \\ (2) & 0 & \underline{Z}_3^{-1} & -\underline{Z}_3^{-1} \\ (3) & -\underline{Z}_1^{-1} & -\underline{Z}_3^{-1} & \underline{Z}_1^{-1} + \underline{Z}_2^{-1} + \underline{Z}_3^{-1} \end{array}$$

Для того чтобы получить укороченную матрицу проводимостей (матрицу  $\underline{Y}$ -параметров) многополюсника, включенного по схеме с общим выводом 3, следует вычеркнуть в матрице  $\underline{Y}_{(ij)}$  строку и столбец, соответствующие внутреннему узлу (3), а оставшиеся элементы пересчитать по формуле  $\underline{Y}_{ij} = \underline{Y}_{(ij)} - \frac{\underline{Y}_{(i3)}\underline{Y}_{(3j)}}{\underline{Y}_{(33)}}$ . Следовательно,

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{(11)} - \frac{\underline{Y}_{13}\underline{Y}_{(31)}}{\underline{Y}_{(33)}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} - \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1} \frac{1}{\underline{Z}_1}}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{\Delta}_z},$$

где  $\underline{\Delta}_z = \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3$ .

Остальные элементы укороченной матрицы проводимостей многополюсника определяем аналогичным образом:

$$Y_{ij}^{(3)} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 \\ 2 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{array}$$

Таким образом, неопределенная матрица проводимостей

$$Y_{ij} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 & -\underline{Z}_3 \\ 2 & -\underline{Z}_2 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_1 \\ 3 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \end{array}$$

8.4р. Элементы неопределенной матрицы проводимостей многополюсника с индуктивными связями, как и элементы матрицы проводимостей любого многополюсника, могут быть найдены по результатам опытов короткого замыкания, проводимых расчетным путем. Для рассматриваемой цепи этот метод является трудоемким. Непосредственное применение матрицы узловых проводимостей для расчета  $\underline{Y}$ -параметров здесь также невозможно, так как не рассматривался алгоритм формирования узловых уравнений для цепей с индуктивными связями.

Решение задачи упростится, если связанные индуктивности, имеющие общую точку, заменить эквивалентной схемой, не содержащей взаимной индуктивности (рис. 8.10). Для определения  $\underline{Y}$ -параметров такого многополюсника воспользуемся формулами, полученными при решении задачи 8.3р. Например,  $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}$ , где  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M)$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega M$ ;  $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega(L_2 - M)$  и т. д.

8.5р. Непосредственно по схеме рис. 8.4 составляем узловые уравнения рассматриваемого многополюсника:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{10} &= (R_1 + j\omega L_1) \dot{I}_1 + j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{20} &= (R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_2 + j\omega M_{12} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{30} &= (R_3 + j\omega L_3) \dot{I}_3 + j\omega M_{13} \dot{I}_1 + j\omega M_{23} \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Выражая напряжения между выводами многополюсника через узловые напряжения:  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}$  и учитывая,

что  $I_3 = -I_1 - I_2$ , находим уравнения рассматриваемого многополюсника в Z-форме (с общим выводом 3):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= [R_1 + R_3 + j\omega(L_1 + L_3 - 2M_{13})] I_1 + \\ &\quad + [R_3 + j\omega(L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23})] I_2; \\ \dot{U}_2 &= [R_3 + j\omega(L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23})] I_1 + \\ &\quad + [R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3 - 2M_{23})] I_2. \end{aligned}$$

Как нетрудно проверить, эти уравнения справедливы для цепи рис. 8.11, которая в отличие от исходной не содержит индуктивных связей.

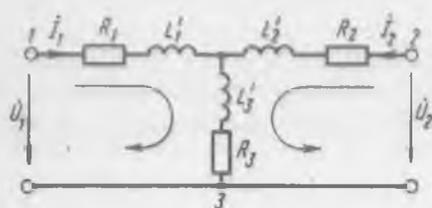


Рис. 8.11

этой цепи  $L_1' = L_1 + M_{23} - M_{12} - M_{13}$ ;  $L_2' = L_2 + M_{13} - M_{12} - M_{23}$ ;  $L_3' = L_3 + M_{12} - M_{13} - M_{23}$ .

Комплексная схема замещения этой же цепи соответствует рис. 8.2, если  $Z_1 = R_1 + j\omega L_1'$ ;  $Z_2 = R_3 + j\omega L_3'$ ;  $Z_3 = R_2 + j\omega L_2'$ . Следовательно, Y-параметры заданного многополюсника (т. е. элементы неопределенной матрицы проводимостей) можно рассчитать по формулам, полученным при решении задачи 8.3р. Например,  $Y_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$  и т. д.

**8.6р.** Находим матрицу узловых проводимостей  $Y_{(ij)}^*$  и матрицу-столбец узловых токов  $j_{i0}$  вспомогательной цепи, которая получается из исходной при удалении усилительного элемента:

$$Y_{(ij)}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (1) & (2) & (3) \\ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_1 + Y_2 + Y_4 & -Y_4 & 0 \\ \hline -Y_4 & Y_4 + Y_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Y_3 \\ \hline \end{array} & ; j_{i0} = \begin{array}{|c|} \hline \dot{E} Y_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Переходим от укороченной матрицы проводимостей усилительного элемента к неопределенной матрице:

$$Y_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 1(1) & 2(2) & 3(3) \\ \begin{array}{l} 1 \\ (1) \\ 2 \\ (2) \\ 3 \\ (3) \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & -Y_{11} - Y_{12} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & -Y_{21} - Y_{22} \\ \hline -Y_{11} - Y_{21} & -Y_{12} - Y_{22} & \Sigma Y_{ij} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

где  $\Sigma Y_{ij} = Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}$ . В скобках указаны номера узлов схемы усилительного каскада, к которым подключены выводы усилительного элемента.

Дописываем к элементам неопределенной матрицы проводимостей, стоящим на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, соответствующие элементы матрицы узловых проводимостей и находим матрицу проводимостей всей цепи:

$$Y_{(ij)} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1) & Y_{11} + Y_1 + Y_2 + Y_4 & Y_{12} - Y_4 & -Y_{11} - Y_{12} \\ \hline (2) & Y_{21} - Y_4 & Y_{22} + Y_4 + Y_5 & -Y_{21} - Y_{22} \\ \hline (3) & -Y_{31} - Y_{32} & -Y_{32} - Y_{33} & Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} + Y_3 \\ \hline \end{array}$$

Окончательно получаем

$$\underline{Y}_{(ij)} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} Y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

где  $\underline{Y}_{(11)} = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4$ ;  $\underline{Y}_{(21)} = \underline{Y}_{12} - \underline{Y}_4$  и т. д.

Определяем отношения напряжений  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2/\dot{E}$ , характеризующие усилительные свойства рассматриваемого каскада. Для этого вычеркиваем в матрице  $\underline{Y}_{(ij)}$  строку и столбец, относящиеся к внутреннему узлу (3), а остальные элементы пересчитываем по формуле  $\underline{Y}'_{(ij)} = \underline{Y}_{(ij)} - \underline{Y}_{(i3)}\underline{Y}_{(3j)}/\underline{Y}_{(33)}$ . В результате получаем систему уравнений:  $\dot{E}Y_1 = \underline{Y}'_{(11)}\dot{U}_{10} + \underline{Y}'_{(12)}\dot{U}_{20}$ ;  $0 = \underline{Y}'_{(21)}\dot{U}_{10} + \underline{Y}'_{(22)}\dot{U}_{20}$ , из которой находим  $\dot{U}_{20}/\dot{U}_{10} = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = -\underline{Y}'_{(21)}/\underline{Y}'_{(22)}$ ;  $\dot{U}_{20}/\dot{E} = \dot{U}_2/\dot{E} = -\underline{Y}'_{(21)}Y_1/(\underline{Y}'_{(11)}\underline{Y}'_{(22)} - \underline{Y}'_{(12)}\underline{Y}'_{(21)})$ .

8.7р. Эту задачу решают аналогично предыдущей. Составляем неопределенные матрицы  $\underline{Y}$ -параметров усилительных элементов:

$$Y_{ijA} = \begin{array}{c} 1(1) \\ 2(2) \\ 3(3) \\ 1(0) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1(1) & Y_{11A} & Y_{12A} & -Y_{11A} - Y_{12A} \\ \hline 2(2) & Y_{21A} & Y_{22A} & -Y_{21A} - Y_{22A} \\ \hline 3(3) & -Y_{11A} - Y_{21A} & -Y_{12A} - Y_{22A} & \Sigma Y_{ijA} \\ \hline 1(0) & & & \\ \hline \end{array} \quad Y_{ijB} = \begin{array}{c} 1(2) \\ 2(3) \\ 3(4) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1(2) & Y_{11B} & Y_{12B} & -Y_{11B} - Y_{12B} \\ \hline 2(3) & Y_{21B} & Y_{22B} & -Y_{21B} - Y_{22B} \\ \hline 3(4) & -Y_{11B} - Y_{21B} & -Y_{12B} - Y_{22B} & \Sigma Y_{ijB} \\ \hline \end{array}$$

а затем — матрицу узловых проводимостей цепи

$$\underline{Y}_{(ij)} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (1) & Y_{11A} + Y_1 + Y_2 & Y_{12A} & 0 & 0 \\ \hline (2) & Y_{21A} & Y_{22A} + Y_{11B} + Y_3 + Y_4 & Y_{12B} - Y_4 & -Y_{11B} - Y_{12B} \\ \hline (3) & 0 & -Y_{21B} - Y_4 & Y_{11B} + Y_4 & -Y_{11B} - Y_{22B} \\ \hline (4) & 0 & -Y_{11B} - Y_{21B} & -Y_{12B} - Y_{22B} & \Sigma Y_{ijB} + Y_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (1) & 105,5 \cdot 10^{-4} & -0,9 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ \hline (2) & 4,5 \cdot 10^{-2} & 9,8 \cdot 10^{-6} & -50,8 \cdot 10^{-6} & -819,2 \cdot 10^{-6} \\ \hline (3) & 0 & 409,5 \cdot 10^{-4} & 5,59 \cdot 10^{-4} & -410,9 \cdot 10^{-4} \\ \hline (4) & 0 & -410,2 \cdot 10^{-4} & -8,2 \cdot 10^{-6} & 468,282 \cdot 10^{-4} \\ \hline \end{array}$$

Уравнения электрического равновесия рассматриваемой цепи имеют вид

$$\underline{Y}_{(ij)} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \\ \dot{U}_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}Y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

В отличие от предыдущей задачи для определения отношений напряжений  $\dot{U}_3/\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_3/\dot{E}$  необходимо удалить в матрице  $\underline{Y}_{(ij)}$  две строки и два столбца, соответствующие внутренним узлам (2) и (4). Вычеркиваем в  $\underline{Y}_{(ij)}$  строку и столбец, относящиеся к внутреннему узлу (4), а остальные элементы пересчитываем по формуле  $Y'_{(ij)} = Y_{(ij)} - Y_{(i4)}Y_{(4j)}/Y_{44}$ . Новая матрица узловых проводимостей  $\underline{Y}'_{(ij)}$ , имеет размеры  $3 \times 3$ :

	(1)	(2)	(3)
(1)	$105,5 \cdot 10^{-4}$	$-0,9 \cdot 10^{-6}$	0
$Y'_{(ij)} =$ (2)	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$248,4121 \cdot 10^{-6}$	$-50,94344 \cdot 10^{-6}$
(3)	0	$4326,847 \cdot 10^{-6}$	$557,8189 \cdot 10^{-6}$

Вычеркиваем в  $\underline{Y}'_{(ij)}$  строку и столбец, соответствующие внутреннему узлу (2), и пересчитываем остальные элементы по формуле  $Y''_{(ij)} = Y'_{(ij)} - Y'_{(i2)}Y'_{(2j)}/[Y'_{22}]^{-1}$ .

Матрица  $\underline{Y}''_{(ij)}$  имеет размеры  $2 \times 2$ :

	(1)	(3)
$Y''_{(ij)} =$ (1)	$107,1303 \cdot 10^{-4}$	$-1,845686 \cdot 10^{-7}$
(3)	$-783,8109 \cdot 10^{-3}$	$1439,152 \cdot 10^{-6}$

Уравнения электрического равновесия цепи принимают вид  $\dot{E}Y_1 = Y''_{(11)}\dot{U}_{10} + Y''_{(13)}\dot{U}_{30}$ ;  $0 = Y''_{(31)}\dot{U}_{10} + Y''_{(33)}\dot{U}_{30}$ . Из этих уравнений следует

$$\dot{U}_{30}/\dot{U}_{10} = \dot{U}_3/\dot{U}_1 = -Y''_{(31)}/Y''_{(33)} = 544,63;$$

$$\frac{\dot{U}_{30}}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_3}{\dot{E}} = \frac{-Y''_{(31)}Y_1}{Y''_{(11)} - Y''_{(33)} - Y''_{(13)}Y''_{(31)}} = 513,2.$$

8.8р. По заданной укороченной матрице проводимостей транзистора  $T_A$  составляем неопределенную матрицу

	1	2	3
1	$Y_{11A}$	$Y_{12A}$	$Y_{11A} - Y_{12A}$
2	$Y_{21A}$	$Y_{22A}$	$-Y_{21A} - Y_{22A}$
3	$-Y_{11A} - Y_{21A}$	$-Y_{12A} - Y_{22A}$	$\Sigma Y_{iJA}$

где  $\Sigma Y_{iJA} = Y_{11A} + Y_{12A} + Y_{21A} + Y_{22A}$ .

Аналогичным образом записываем неопределенную матрицу проводимостей транзистора  $T_B$ :

	1(3)	2(2)	3(4)
1	$Y_{11B}$	$Y_{12B}$	$-Y_{11B} - Y_{12B}$
2	$Y_{21B}$	$Y_{22B}$	$-Y_{21B} - Y_{22B}$
3	$-Y_{11B} - Y_{21B}$	$-Y_{12B} - Y_{22B}$	$\Sigma Y_{iJB}$

В скобках указаны номера узлов исследуемой цепи, к которым подключены соответствующие выводы транзистора  $T_B$ .

Составляем неопределенную матрицу проводимостей многополюсника (составного транзистора):

	1	2	3	4
1	$Y_{11A}$	$Y_{12A}$	$-Y_{11A} - Y_{12A}$	0
2	$Y_{21A}$	$Y_{22A} + Y_{22B}$	$-Y_{21A} - Y_{22A} + Y_{21B}$	$-Y_{21B} - Y_{22B}$
3	$-Y_{11A} - Y_{21A}$	$-Y_{12A} - Y_{22A} + Y_{12B}$	$\Sigma Y_{iJA} + Y_{11B}$	$-Y_{11B} - Y_{12B}$
4	0	$-Y_{12B} - Y_{22B}$	$-Y_{11B} - Y_{21B}$	$\Sigma Y_{iJB}$

Зажим 3 в схеме многополюсника является внутренним, поэтому следует вычеркнуть третью строку и третий столбец в матрице  $Y_{ij}$ , а все оставшиеся элементы пересчитать по формуле  $Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{i3}Y_{3j}}{Y_{33}}$ .

Вычисления по этой формуле следует проводить с высокой точностью, потому что в ряде случаев, например при расчете параметра  $Y'_{11}$ , приходится находить разность близких величин. В результате получаем неопределенную матрицу проводимостей составного транзистора

	1	2	3
1	$8,94573 \cdot 10^{-6}$	$-9,960712 \cdot 10^{-7}$	$-7,949658 \cdot 10^{-6}$
2	$410,6184 \cdot 10^{-4}$	$18,14218 \cdot 10^{-6}$	$-410,7998 \cdot 10^{-4}$
3	$-410,7078 \cdot 10^{-4}$	$-17,1461 \cdot 10^{-6}$	$410,8792 \cdot 10^{-4}$

Числовые значения элементов этой матрицы приведены с большим числом «запасных» знаков, чтобы показать на конкретном примере основное свойство неопределенной матрицы проводимостей многополюсника: сумма элементов в любой строке (столбце) равна нулю.

8.9р. Перепишем уравнения электрического равновесия циркулятора в скалярной форме:  $\dot{U}_1 = R\dot{I}_2 - R\dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_2 = -R\dot{I}_1 + R\dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_3 = R\dot{I}_1 - R\dot{I}_2$ . Первому уравнению этой системы соответствует

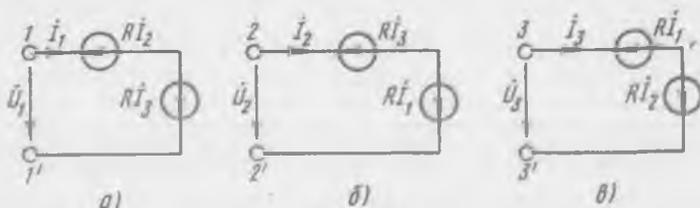


Рис. 8.12

эквивалентная схема, содержащая два зависимых источника (рис. 8.12, а), двум другим уравнениям системы — эквивалентные схемы, приведенные на рис. 8.12, б, в. Таким образом, эквивалентная схема циркулятора представляет собой совокупность всех трех схем, изображенных на рис. 8.12.

## § 8.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников

8.11р. Определить  $A$ -параметры четырехполюсника (рис. 8.13) путем преобразования уравнений электрического равновесия, составленных на основании законов Кирхгофа.

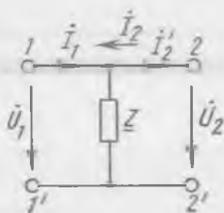


Рис. 8.13

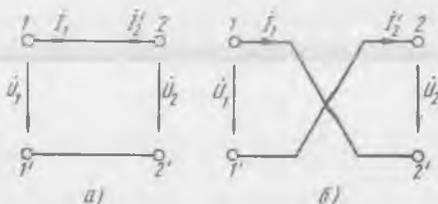


Рис. 8.14

8.12р. Решить задачу 8.11р, используя опыты холостого хода и короткого замыкания.

8.13. Определить  $Z$ -параметры четырехполюсника (рис. 8.13). Убедиться, что матрицы  $Y$ -параметров для данного четырехполюсника не существует.

8.14. Найти  $A$ -параметры четырехполюсников (рис. 8.14, а, б).

8.15м. Рассчитать  $Z$ -параметры четырехполюсников (рис. 8.15, а, б).

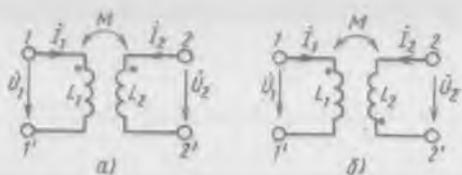


Рис. 8.15

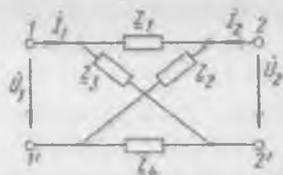


Рис. 8.16

8.16р. Определить  $Z$ -параметры несимметричного мостового четырехполюсника (рис. 8.16).

8.17. Найти  $A$ -параметры четырехполюсников (рис. 8.17, а — в).

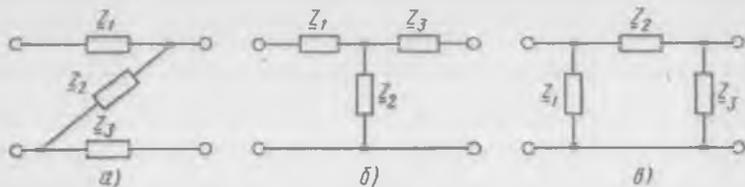


Рис. 8.17

8.18м. На рис. 8.18 и 8.19 приведены схемы симметричных T-образного и мостового четырехполюсников. Сформулировать условие их эквивалентности.

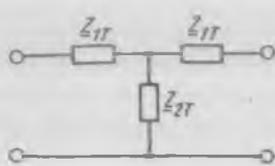


Рис. 8.18

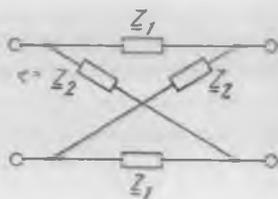


Рис. 8.19

8.19м. Найти  $A$ -параметры симметричного мостового четырехполюсника (рис. 8.19).

8.20м. Показать, что между  $Z$ - и  $Y$ -параметрами одного и того же четырехполюсника существует взаимосвязь:  $Z_{11}Y_{11} = Z_{22}Y_{22}$ .

8.21р. Определить  $Y$ -параметры неавтономного четырехполюсника рис. 8.20.

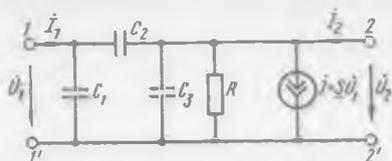


Рис. 8.20

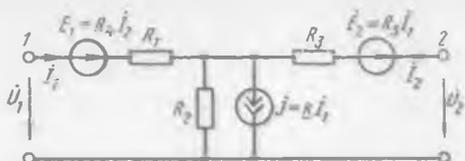


Рис. 8.21

8.22р. Определить  $\underline{Z}$ -параметры и построить T-образную каноническую эквивалентную схему неавтономного четырехполюсника (рис. 8.21).

8.23м. Показать, что четырехполюсники рис. 8.22, а, б не являются обратимыми (взаимными).

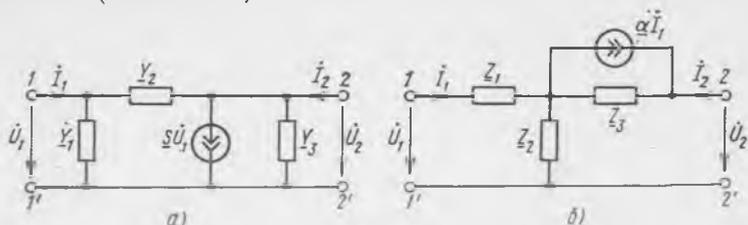


Рис. 8.22

8.24р. Получить соотношения для расчета  $\underline{A}$ -параметров четырехполюсника по результатам измерения комплексных действующих значений напряжений  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  при замкнутом и разомкнутом ключе S. Сопротивления  $\underline{Z}_{H1}$  и  $\underline{Z}_{H2}$  считать известными (рис. 8.23).

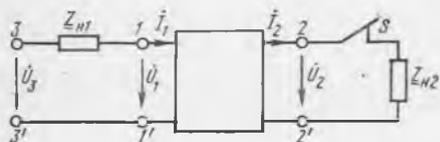


Рис. 8.23

8.25м. По данным задачи 8.24р получить соотношения для расчета  $\underline{Z}$ -параметров четырехполюсника.

8.26р. В цепи (рис. 8.23) произведены измерения напряжений

$\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{U}_3$  с целью определения первичных параметров пассивного четырехполюсника. В режиме холостого хода на выходе (ключ S разомкнут) получены следующие значения напряжений:  $\dot{U}_1 = 0,8$  В;  $\dot{U}_2 = 0,6$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. При подключенном к выходу четырехполюсника сопротивлении  $\underline{Z}_{H2}$  (ключ S замкнут)  $\dot{U}_1 = 0,72$  В;  $\dot{U}_2 = 0,14$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. Принимая  $\underline{Z}_{H1} = \underline{Z}_{H2} = 1$  кОм, найти  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника.

8.27. По данным задачи 8.26р рассчитать  $\underline{A}$ -параметры четырехполюсника.

8.28. По данным задачи 8.26р вычислить  $\underline{Y}$ -параметры четырехполюсника.

8.29. Четырехполюсник, включенный по схеме рис. 8.23, является пассивным симметричным. При замкнутом ключе S  $\dot{U}_1 = 0,7$  В;  $\dot{U}_2 = 0,1$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. Сопротивления  $\underline{Z}_{H1} = R_1 = 1,2$  кОм;  $\underline{Z}_{H2} = R_2 = 2$  кОм — чисто резистивные. Определить  $\underline{A}$ -параметры четырехполюсника.

8.30. По данным задачи 8.29 найти  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника.

8.31р. Внешнее воздействие на цепь рис. 8.24 подано к зажимам 3—3' (зажимы 4—4' разомкнуты). Напряжения в цепи:  $\dot{U}_1 = 0,5$  В;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_4 = 0,25$  В;  $U_3 = 1$  В. При подаче внешнего воздействия к зажимам 4—4' и разомкнутых зажимах 3—3'  $\dot{U}_2 = 1,2$  В;  $\dot{U}_1 = \dot{U}_3 = 0,1$  В;  $\dot{U}_4 = 2$  В;  $R_1 = 200$  Ом;  $R_2 = 400$  Ом. Является ли четырехполюсник, входящий в состав исследуемой цепи, взаимным?

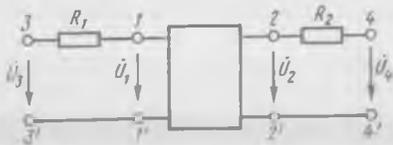


Рис. 8.24

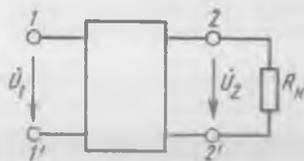


Рис. 8.25

8.32. По данным задачи 8.31р найти  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника.

8.33. В нагруженном четырехполюснике (рис. 8.25) измерены напряжения при: а)  $R_n = 1$  кОм;  $\dot{U}_1 = 1$  В;  $\dot{U}_2 = 0,3$  В; б)  $R_n = 2$  кОм;  $\dot{U}_1 = 2$  В;  $\dot{U}_2 = 0,72$  В. Каким будет напряжение  $\dot{U}_2$ , если  $R_n = 3$  кОм;  $\dot{U}_1 = 3$  В?

8.34р. Для взаимного четырехполюсника (рис. 8.26, а) задана матрица  $\underline{A}$ -параметров:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11}; & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21}; & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу  $\underline{A}$ -параметров для того же четырехполюсника, включенного согласно рис. 8.26, б).

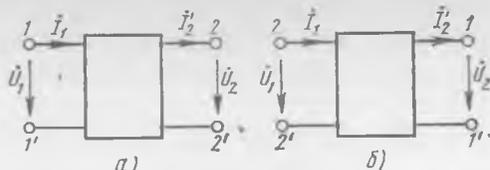


Рис. 8.26

8.35р. Известны матрицы  $\underline{Z}$ -параметров двух четырехполюсников А и В:

$$\underline{Z}_A = \begin{bmatrix} 16; & 2 \\ 2; & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{Z}_B = \begin{bmatrix} 12; & 5 \\ 5; & 6 \end{bmatrix}.$$

Определить первичные параметры составного четырехполюсника, образованного соединением этих четырехполюсников: а) последовательным; б) параллельным; в) каскадным. В последнем случае четырехполюсник А предшествует в цепочке четырехполюснику В.

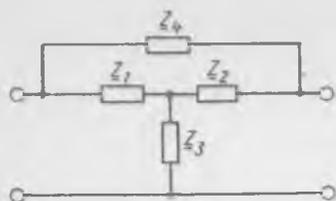


Рис. 8.27

8.36. Представить мостовой Т-образный четырехполюсник (рис. 8.27) в виде параллельного соединения двух элементарных четырехполюсников и определить матрицу  $\underline{Y}$ -параметров всего соединения.

8.37. Представить мостовой Т-образный четырехполюсник (рис. 8.27) в виде последовательного соединения двух элементарных четырехполюсников и определить матрицу  $\underline{Z}$ -параметров всего соединения.

8.38. Найти матрицу  $\underline{Y}$ -параметров двойной Т-образной цепи (рис. 8.28).

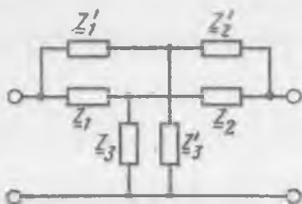


Рис. 8.28

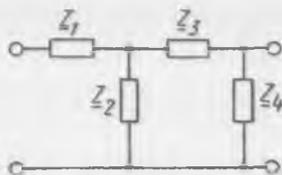


Рис. 8.29

8.39. Найти  $\underline{A}$ -параметры четырехполюсника (рис. 8.29) с лестничной структурой.

8.40. Как нужно соединить два одинаковых несимметричных четырехполюсника, чтобы в результате получился симметричный четырехполюсник?

8.41. Два симметричных пассивных четырехполюсника  $A$  и  $B$  соединены каскадно. Является ли в общем случае полученный составной четырехполюсник также симметричным? Найти соотношения между  $\underline{A}$ -параметрами элементарных четырехполюсников, при которых составной четырехполюсник симметричен.

8.42м. Определить  $\underline{Z}$ -параметры составного четырехполюсника, образованного последовательным соединением четырехполюсников  $A$  и  $B$  (рис. 8.30).

8.43м. Определить  $\underline{Y}$ -параметры составного четырехполюсника, образованного параллельным соединением четырехполюсников  $A$  и  $B$  (рис. 8.31).

8.44р. К обратимому четырехполюснику  $A$ -,  $\underline{Z}$ -параметры которого известны, подключены индуктивно связанные элементы  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 8.32). Найти  $\underline{Z}$ -параметры полученного четырехполюсника  $B$ .

8.45м. Найти  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника  $B$ , полагая известными  $\underline{Z}$ -параметры обратимого четырехполюсника  $A$  (рис. 8.33).

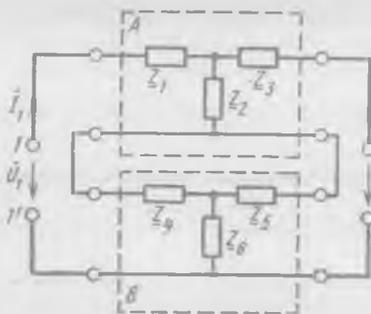


Рис. 8.30

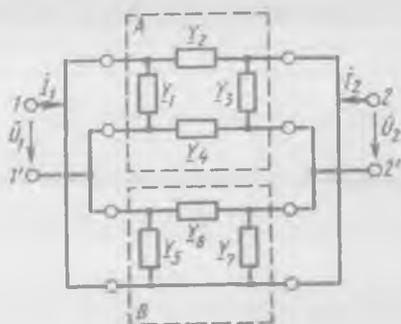


Рис. 8.31

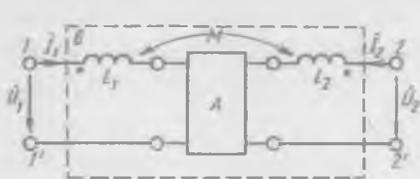


Рис. 8.32

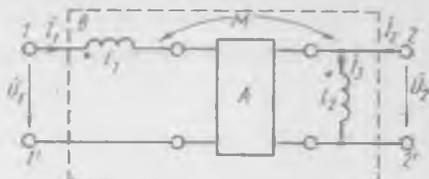


Рис. 8.33

8.46м. Четырехполюсники (рис. 8.34, а, б) содержат независимые источники энергии. Являются ли эти четырехполюсники автономными?

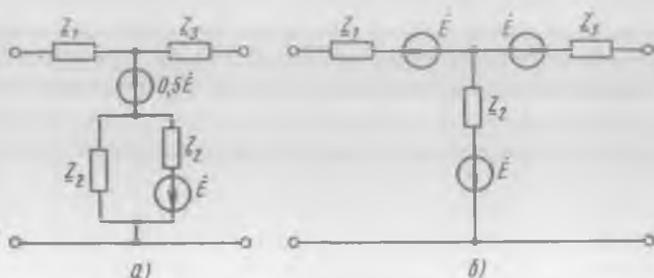


Рис. 8.34

8.47р. Построить Т-образную схему замещения автономного несимметричного мостового четырехполюсника (рис. 8.35) и определить параметры ее элементов.

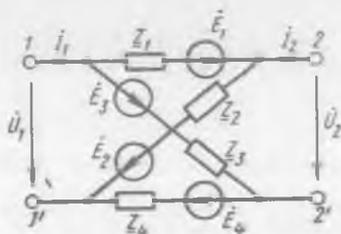


Рис. 8.35

8.48. Построить Т-образную схему замещения автономного четырехполюсника (рис. 8.36) и определить параметры ее элементов. При каких условиях четырехполюсник превращается в неавтономный, несмотря на наличие независимых источников?

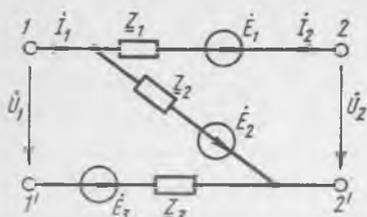


Рис. 8.36

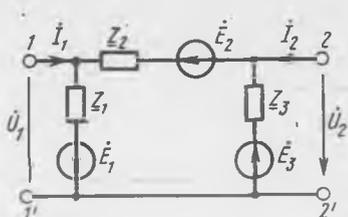


Рис. 8.37

8.49. Построить П-образную схему замещения автономного четырехполюсника (рис. 8.37) и определить параметры ее элементов. При каких условиях этот четырехполюсник превращается в неавтономный, несмотря на наличие независимых источников?

8.50р. Для автономного четырехполюсника (рис. 8.38) определены параметры канонической Т-образной схемы замещения:  $\dot{E}_{1x}$ ,  $\dot{E}_{2x}$ ,  $Z_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ). Показать, что напряжение

$$\dot{U}_2 = K_{21}(j\omega) \dot{U}_1 - K_{21}(j\omega) \dot{E}_{1x} + \frac{\dot{E}_{2x} Z_{11}}{Z_{22k}(j\omega) + Z_{11}}$$

где  $K_{21}(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи по напряжению пассивного четырехполюсника, полученного из исходного исключением независимых источников;  $Z_{22k}(j\omega)$  — выходное сопротивление пассивного четырехполюсника при короткозамкнутых входных зажимах. Дать физическую интерпретацию полученному результату.

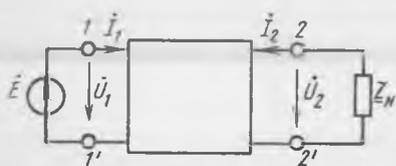


Рис. 8.38

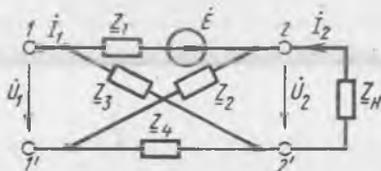


Рис. 8.39

8.51. Для автономного четырехполюсника (рис. 8.38) определены параметры канонической П-образной схемы замещения:  $J_{1k}$ ,  $J_{2k}$ ,  $Y_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ). Показать, что напряжение  $\dot{U}_2 = K_{21}(j\omega) \dot{U}_1 -$

$$- \frac{J_{2k}}{Y_{22} + Y_N}, \text{ где } K_{21}(j\omega) \text{ — комплексный коэффициент передачи по}$$

напряжению пассивного четырехполюсника, полученного из исходного автономного исключением независимых источников. Дать физическую интерпретацию полученному результату.

8.52. Определить напряжение  $\dot{U}_2$  на выходе автономного четырехполюсника (рис. 8.39). Принять  $\dot{U}_1 = 2e^{j\pi/3}$  В;  $\underline{Z}_1 = 1$  Ом;  $\underline{Z}_2 = 2$  Ом;  $\underline{Z}_3 = 4$  Ом;  $\underline{Z}_4 = 3$  Ом;  $\underline{Z}_H = 3$  Ом;  $\dot{E} = 4e^{j\pi/6}$  В.

8.53. По данным задачи 8.52 найти отношение  $\dot{U}_1/\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника и сравнить результат с входным сопротивлением пассивного четырехполюсника, соответствующего заданному автономному.

8.54р. Заданы параметры Т-образной схемы замещения автономного четырехполюсника. Найти параметры П-образной схемы замещения этого четырехполюсника.

8.55. Заданы параметры П-образной схемы замещения автономного четырехполюсника. Найти параметры Т-образной схемы замещения этого четырехполюсника.

8.56. Показать, что э. д. с.  $\dot{E}_{1x}$  и  $\dot{E}_{2x}$  Т-образной схемы замещения автономного четырехполюсника связаны с параметрами П-образной схемы замещения уравнениями:  $\underline{Y}_{11}\dot{E}_{1x} + \underline{Y}_{12}\dot{E}_{2x} = -\dot{J}_{1к}$ ;  $\underline{Y}_{21}\dot{E}_{1x} + \underline{Y}_{22}\dot{E}_{2x} = -\dot{J}_{2к}$ .

8.57. Показать, что токи  $\dot{J}_{1к}$  и  $\dot{J}_{2к}$  П-образной схемы замещения автономного четырехполюсника связаны с параметрами Т-образной схемы замещения уравнениями:  $\underline{Z}_{11}\dot{J}_{1к} + \underline{Z}_{12}\dot{J}_{2к} = -\dot{E}_{1x}$ ;  $\underline{Z}_{21}\dot{J}_{1к} + \underline{Z}_{22}\dot{J}_{2к} = -\dot{E}_{2x}$ .

8.58р. Выразить напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  на выходе четырехполюсника и параметры Т-образной схемы замещения.

8.59. Выразить напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  на входе автономного четырехполюсника через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  на выходе четырехполюсника и параметры П-образной схемы замещения.

#### Решения и методические указания

8.11р. Используя законы Кирхгофа, составляем уравнения электрического равновесия цепи:  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ ;  $\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\underline{Z} + \dot{I}'_2$ . Сравнивая эти уравнения с основными уравнениями четырехполюсника в А-форме

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}'_2, \quad \dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}'_2,$$

находим  $\underline{A}_{11} = 1$ ;  $\underline{A}_{12} = 0$ ;  $\underline{A}_{21} = \underline{Z}^{-1}$ ;  $\underline{A}_{22} = 1$ .

8.12р. Из основных уравнений четырехполюсника в А-форме (см. задачу 8.11р) находим выражения для определения А-параметров по данным опытов холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}'_2=0} = 1; \quad \underline{A}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}'_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 0;$$

$$\underline{A}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}'_2=0} = 1/\underline{Z}; \quad \underline{A}_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}'_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1.$$

8.15м. Составить уравнения электрического равновесия для каждого из четырехполюсников и сравнить их с основными уравнениями четырехполюсника в  $Z$ -форме.

8.16р. Придадим схеме рассматриваемого четырехполюсника более наглядный вид (рис. 8.40) и запишем основные уравнения четырехполюсника в  $Z$ -форме:  $\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2$ . В режиме холостого хода на выходе ( $\dot{I}_2 = 0$ )

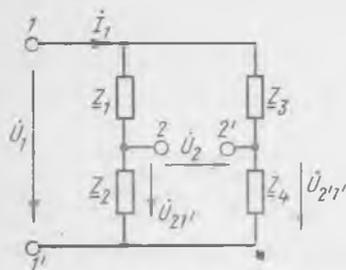


Рис. 8.40

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}; \quad \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{11} \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}$$

Как следует из полученных выражений и схемы рис. 8.40, параметр  $\underline{Z}_{11}$  представляет собой входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1—1' при холостом ходе на зажимах 2—2' и численно равен входному

сопротивлению двухполюсника, образованного параллельным соединением двух ветвей с сопротивлениями  $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$ . Следовательно,  $\underline{Z}_{11} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)^{-1}$ .

На основании второго закона Кирхгофа и закона Ома можно записать (рис. 8.40):

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{21'} - \dot{U}_{2'1'};$$

$$\dot{U}_{21'} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \dot{U}_1; \quad \dot{U}_{2'1'} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \dot{U}_1.$$

Определяя отсюда отношение напряжений  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$  при  $\dot{I}_2 = 0$  и используя полученные ранее выражения для  $\underline{Z}_{11}$  и  $\underline{Z}_{21}$ , находим

$$\underline{Z}_{21} = (\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4).$$

Аналогичным образом вычисляем параметры  $\underline{Z}_{22}$  и  $\underline{Z}_{12}$  по результатам опыта холостого хода на входе четырехполюсника ( $\dot{I}_1 = 0$ ):

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \quad \underline{Z}_{22} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4).$$

Первое равенство справедливо для любого линейного пассивного четырехполюсника.

8.18м. Составить матрицы  $Z$ -параметров для каждого четырехполюсника. (Для мостового четырехполюсника использовать результаты решения задачи 8.16р.) Выяснить, при каких условиях этих матрицы равны между собой.

8.19м.  $A$ -параметры четырехполюсника можно найти по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания. Возможно также сначала определить  $Z$ -параметры четырехполюсника, используя результаты решения задачи 8.16р, а затем применить формулы перехода от  $Z$ - к  $A$ -параметрам.

8.20м. Использовать формулы перехода от  $\underline{Z}$  к  $\underline{Y}$ -параметрам.

8.21р. Составляем уравнения электрического равновесия цепи, используя метод узловых напряжений:

$$(j\omega C_1 + j\omega C_2)\dot{U}_1 - j\omega C_2 \dot{U}_2 = \dot{I}_1;$$

$$-j\omega C_2 \dot{U}_1 + (j\omega C_2 + j\omega C_3 + 1/R)\dot{U}_2 = \dot{I}_2 - \dot{J}.$$

Учитывая, что  $\dot{J} = S\dot{U}_1$ , и сравнивая полученные уравнения с основными уравнениями четырехполюсника в  $Y$ -форме

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2,$$

находим

$$\underline{Y}_{11} = j\omega(C_1 + C_2); \quad \underline{Y}_{12} = -j\omega C_2; \quad \underline{Y}_{21} = S - j\omega C_2;$$

$$\underline{Y}_{22} = 1/R + j\omega(C_2 + C_3).$$

8.22р. Заменяя источник тока  $\dot{J} = k\dot{I}_1$ , с внутренним сопротивлением  $R_2$  источником напряжения  $\dot{E}_3 = kR_2\dot{I}_1$  с тем же внутренним сопротивлением и составляя уравнения электрического равновесия цепи по методу контурных токов, определяем выражения для  $\underline{Z}$ -параметров четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 - kR_2; \quad \underline{Z}_{12} = R_2 - R_4;$$

$$\underline{Z}_{21} = R_2 + R_5 - kR_2; \quad \underline{Z}_{22} = R_2 + R_3.$$

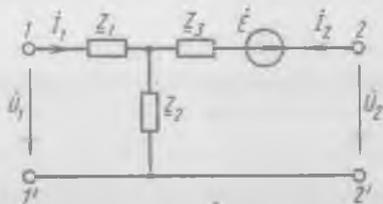


Рис. 8.41

T-образная схема замещения рассматриваемого четырехполюсника приведена на рис. 8.41. Параметры элементов эквивалентной схемы:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = R_1 + R_4 - kR_2; \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{12} = R_2 - R_4;$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = R_3 + R_4; \quad \dot{E} = (\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12})\dot{I}_1 = (R_4 + R_5 - kR_2)\dot{I}_1.$$

Как видно из сравнения рис. 8.21 и 8.41, каноническая эквивалентная схема (рис. 8.41) значительно проще, чем исходная схема (см. рис. 8.21).

8.23м. Для рис. 8.22, а записать уравнения электрического равновесия методом узловых напряжений, сравнить их с уравнениями четырехполюсника в  $Y$ -форме и убедиться, что  $\underline{Y}_{12} \neq \underline{Y}_{21}$ .

Для рис. 8.22, б заменить источник тока эквивалентным источником напряжения, составить для преобразованной схемы уравнения электрического равновесия методом контурных токов. Сравнивая полученные уравнения с уравнениями четырехполюсника в  $Z$ -форме, убедиться, что  $\underline{Z}_{12} \neq \underline{Z}_{21}$ .

8.24р. При выводе расчетных соотношений для  $\underline{A}$ -параметров будем исходить из уравнений четырехполюсника в  $A$ -форме:

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2 + \underline{A}_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2 + \underline{A}_{22}\dot{I}_2.$$

Для режима холостого хода на выходе (ключ  $S$  разомкнут,  $i'_2 = 0$ ) можно записать:  $\dot{U}_1 = \underline{A}_{11}\dot{U}_2$ ;  $\dot{I}_1 = \underline{A}_{21}\dot{U}_2$ , откуда

$$\underline{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i'_2=0}; \quad \underline{A}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i'_2=0}.$$

По известным напряжениям  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_3$ , находим  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)/\underline{Z}_{н1}$ . Таким образом,

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{н1}} \left( \left. \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} \right|_{i'_2=0} - \underline{A}_{11} \right).$$

Два других  $\underline{A}$ -параметра определим по результатам измерения напряжений в режиме нагруженного четырехполюсника (ключ  $S$  замкнут,  $i'_2 \neq 0$ ). Из первого уравнения исходной системы следует

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{н2} \left( \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i'_2 \neq 0} - \underline{A}_{11} \right),$$

а из второго уравнения

$$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{н2} (\dot{I}_1/\dot{U}_2 - \underline{A}_{21}).$$

Определяя ток  $\dot{I}_1$  таким же образом, как и в режиме холостого хода, получаем

$$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{н2} \left[ \frac{1}{\underline{Z}_{н1}} \left( \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_2} - \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \right]_{i'_2 \neq 0} - \underline{A}_{21}.$$

**8.25м.** Учесть, что положительное направление тока  $\dot{I}_2$  в уравнениях четырехполюсника в  $Z$ -форме противоположно указанному на рис. 8.23, т. е.  $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$ .

**8.26р.** Запишем уравнения четырехполюсника в  $Z$ -форме:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2.$$

Параметр  $\underline{Z}_{11}$  имеет смысл входного сопротивления четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе. Входной ток по закону Ома  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)\underline{Z}_{н1}^{-1}$ . Следовательно,  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{н1} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_3 - \dot{U}_1} \Big|_{i_2=0}$ .

Подставляя в эту формулу напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_3$ , измеренные в режиме холостого хода на выходе, т. е. при разомкнутом ключе  $S$ , и учитывая, что  $\underline{Z}_{н1} = 1$  кОм, получаем  $\underline{Z}_{11} = 4$  кОм. Из уравнений четырехполюсника следует, что  $\left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{i_2=0} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}}$ , откуда  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{11} \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{i_2=0}$ . Оче-

видно, в эту формулу следует подставлять напряжения  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_1$ , измеренные при разомкнутом ключе  $S$ :  $\dot{U}_1 = 0,8$  В;  $\dot{U}_2 = 0,6$  В. Следовательно,  $\underline{Z}_{21} = 3$  кОм. По условию задачи четырехполюсник — линейный пассивный, поэтому  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ .

Найдем параметр  $\underline{Z}_{22}$ , используя результаты измерения напряжений при подключенном к выходу сопротивлении нагрузки  $\underline{Z}_{н2}$  (ключ  $S$  замкнут). При выбранных положительных направлениях напряжения  $\dot{U}_2$  и тока  $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$  можно записать:  $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 \underline{Z}_{н2}^{-1}$ . Отношение токов  $\dot{I}_2/\dot{I}_1$  найдем из приведенного ранее уравнения:

$$\dot{I}_2/\dot{I}_1 = -\underline{Z}_{21}/(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{н2}).$$

Это же отношение токов можно определить по результатам измерения напряжений в цепи:  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) \underline{Z}_{н1}^{-1}$ ;  $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 \underline{Z}_{н2}^{-1}$ ;

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = -\frac{\underline{Z}_{н1}}{\underline{Z}_{н2}} \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_3 - \dot{U}_1}.$$

Сравнивая оба выражения для  $\dot{I}_2/\dot{I}_1$ , получаем

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{21} \underline{Z}_{н2} (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) (\underline{Z}_{н1} \dot{U}_2)^{-1} - \underline{Z}_{н2} = 5 \text{ кОм}.$$

**8.31р.** Четырехполюсник является взаимным (обратимым), если его  $\underline{Z}$ -параметры удовлетворяют условию  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ .

Из уравнений четырехполюсника в  $\underline{Z}$ -форме следует, что  $\underline{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0}$ ;  $\underline{Z}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0}$ . Ток  $\dot{I}_1$  в режиме холостого хода на выходе ( $\dot{I}_2 = 0$ ) находим по известным значениям напряжений  $\dot{U}_3$ ,  $\dot{U}_1$  и сопротивления  $R_1$ :  $\dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) R_1^{-1}$ . Аналогично,  $\dot{I}_2 = (\dot{U}_4 - \dot{U}_2) R_2^{-1}$ . Следовательно,  $\underline{Z}_{21} = R_1 \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_3 - \dot{U}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = 100 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{12} = \frac{R_2 \dot{U}_1}{\dot{U}_4 - \dot{U}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = 50 \text{ Ом}$ . Четырехполюсник невзаимный.

**8.34р.** Связь между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника, изображенного на рис. 8.26, а, определяется уравнениями  $\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}_2$ . Решая эту систему уравнений относительно  $\dot{I}_2$  и  $\dot{U}_2$ , получаем  $\dot{U}_2 = \underline{A}_{22} \dot{U}_1 - \underline{A}_{12} \dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_2 = -\underline{A}_{21} \dot{U}_1 + \underline{A}_{11} \dot{I}_1$ .

Здесь учтено, что для обратимого четырехполюсника  $\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1$ . Последней системе уравнений соответствует четырехполюсник, изображенный на рис. 8.42. Обозначения токов и напряжений на рис. 8.42 отличаются от принятых на рис. 8.26, б. Согласуем эти обозначения, заменив на рис. 8.42 и в соответствующих этому рисунку уравнениях напряжения и токи  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  на  $\dot{U}_1$ ,  $-\dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $-\dot{I}_2$  соответственно. В результате получим

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{22} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{11} \dot{I}_2.$$

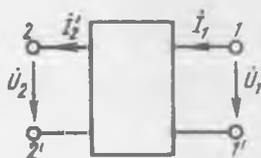


Рис. 8.42

Таким образом, полученная матрица  $\underline{A}$ -параметров отличается от исходной тем, что параметры  $\underline{A}_{11}$  и  $\underline{A}_{12}$  поменялись местами:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{22}; & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21}; & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}.$$

8.35р. а) При последовательном соединении четырехполюсников матрица  $\underline{Z}$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $\underline{Z}$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_B = \begin{bmatrix} 28; & 7 \\ 7; & 10 \end{bmatrix}.$$

б) При параллельном соединении четырехполюсников матрица  $\underline{Y}$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $\underline{Y}$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников. Используя формулы перехода  $\underline{Y}_{11} = \underline{Z}_{22}/\underline{\Delta}_z$ ;  $\underline{Y}_{12} = -\underline{Z}_{12}/\underline{\Delta}_z$ ;  $\underline{Y}_{21} = -\underline{Z}_{21}/\underline{\Delta}_z$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Z}_{11}/\underline{\Delta}_z$ ;  $\underline{\Delta}_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$ , определяем  $\underline{Y}$ -параметры элементарных четырехполюсников:

$$\underline{Y}_A = \begin{bmatrix} 0,0667; & -0,0333 \\ -0,0333; & 0,267 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y}_B = \begin{bmatrix} 0,128; & -0,106 \\ -0,106; & 0,255 \end{bmatrix}.$$

Суммируя  $\underline{Y}_A$  и  $\underline{Y}_B$ , определяем  $\underline{Y}$ -параметры составного четырехполюсника:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B = \begin{bmatrix} 0,195; & -0,139 \\ -0,139; & 0,522 \end{bmatrix}.$$

в) При каскадном соединении четырехполюсников матрица  $\underline{A}$ -параметров составного четырехполюсника равна произведению матриц  $\underline{A}$ -параметров составляющих его элементарных четырехполюсников. Используя формулы перехода  $\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{12} = (\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21})/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{21} = 1/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21}$ , определяем матрицы  $\underline{A}$ -параметров элементарных четырехполюсников:

$$\underline{A}_A = \begin{bmatrix} 8; & 30 \\ 0,5; & 2 \end{bmatrix}; \quad \underline{A}_B = \begin{bmatrix} 2,4; & 9,4 \\ 0,2; & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Перемножая  $\underline{A}_A$  и  $\underline{A}_B$ , находим  $\underline{A}$ -параметры составного четырехполюсника:

$$\underline{A} = \underline{A}_A \underline{A}_B = \begin{bmatrix} 25,2; & 111,2 \\ 1,6; & 7,1 \end{bmatrix}.$$

8.42м. Соединение четырехполюсников  $A$  и  $B$  является нерегулярным, поэтому суммировать матрицы первичных параметров элементарных четырехполюсников для определения первичных параметров со-

ставного четырехполюсника недопустимо. Эти параметры следует находить непосредственно по схеме составного четырехполюсника.

8.43м. См. указание к задаче 8.42м.

8.44р. Представим четырехполюсник  $B$  в виде последовательного соединения двух элементарных четырехполюсников  $A$  и  $C$  (рис. 8.43). Соединение четырехполюсников является регулярным, поэтому можно применить правило суммирования матриц  $Z$ -параметров элементарных четырехполюсников:  $\underline{Z}_B = \underline{Z}_A + \underline{Z}_C$ .  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника  $C$  рассчитываются в задаче 8.15м:  $\underline{Z}_{11C} = j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_{12C} = \underline{Z}_{21C} = j\omega M$ ;  $\underline{Z}_{22C} = j\omega L_2$ . В результате получаем  $\underline{Z}_{11B} = \underline{Z}_{11A} + j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_{12B} = \underline{Z}_{21B} = \underline{Z}_{12A} + j\omega M$ ;  $\underline{Z}_{22B} = \underline{Z}_{22A} + j\omega L_2$ .

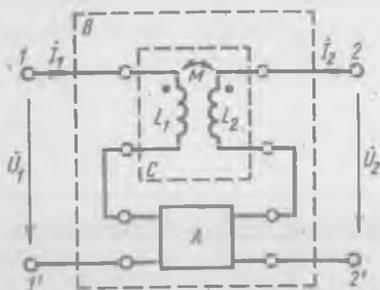


Рис. 8.43

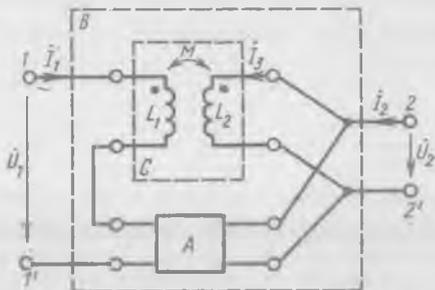


Рис. 8.44

8.45м. Исследуемый четырехполюсник следует представить в виде последовательно-параллельного соединения четырехполюсников  $A$  и  $C$  (рис. 8.44). Соединение четырехполюсников является регулярным, поэтому применимо правило суммирования матриц  $H$ -параметров элементарных четырехполюсников:  $\underline{H}_B = \underline{H}_A + \underline{H}_C$ . Далее следует найти  $H$ -параметры элементарных четырехполюсников по их известным  $Z$ -параметрам, записать матрицу  $\underline{H}_B$  и определить по ней с помощью формул перехода искомые  $Z$ -параметры.

8.46м. Для ответа на вопрос задачи нужно найти напряжение холостого хода на зажимах  $1-1'$  и  $2-2'$  каждого четырехполюсника.

8.47р.  $Z$ -параметры пассивного четырехполюсника, который получают из заданного автономного путем исключения всех независимых источников, были получены раньше (см. задачу 8.16р). Следовательно, остается найти напряжения холостого хода  $\dot{E}_{1x}$  и  $\dot{E}_{2x}$  на входных и выходных зажимах автономной цепи.

Придадим схеме рис. 8.35 более наглядный вид (рис. 8.45, а). Как видно из рис. 8.45, а, напряжения холостого хода между выводами четырехполюсника

$$\dot{U}_{1x} = \dot{E}_{1x} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \dot{I} - \dot{E}_1 - \dot{E}_2;$$

$$\dot{U}_{2x} = \dot{E}_{2x} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \dot{I} - \dot{E}_2 + \dot{E}_4,$$

где  $\dot{I} = (\dot{E}_1 + \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{E}_4) (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)^{-1}$ . Следовательно,

$$\dot{E}_{1x} = - \frac{(\dot{E}_1 + \dot{E}_2) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + (\dot{E}_3 + \dot{E}_4) (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4};$$

$$\dot{E}_{2x} = \frac{(\dot{E}_1 - \dot{E}_3) (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + (\dot{E}_4 - \dot{E}_2) (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}.$$

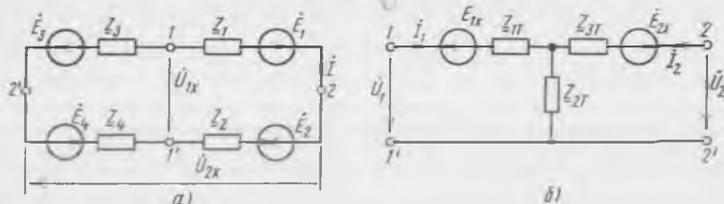


Рис. 8.45

T-образная схема замещения рассматриваемого четырехполюсника приведена на рис. 8.45, б, где  $\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = [\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)] S^{-1}$ ;  $\underline{Z}_{2T} = \underline{Z}_{12} = (\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4) S^{-1}$ ;  $\underline{Z}_{3T} = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = = [\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 (2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)] S^{-1}$ ;  $S = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$ .

**8.50р.** Представим автономный четырехполюсник в виде схемы, изображенной на рис. 8.46, а, где П — пассивный четырехполюсник, полученный из исходного четырехполюсника исключением независимых источников. Автономный четырехполюсник — линейный, поэтому к нему применим метод наложения. Выходное напряжение  $\dot{U}_2$  автономного

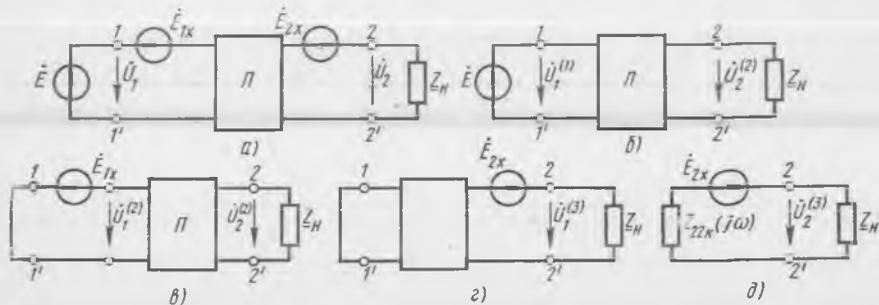


Рис. 8.46

четырёхполюсника можно рассматривать как сумму напряжений, создаваемых на выходе каждой из э.д.с.  $\dot{E}$ ,  $\dot{E}_{1x}$ ,  $\dot{E}_{2x}$  в отдельности, т.е.  $\dot{U}_2 = \dot{U}_2^{(1)} + \dot{U}_2^{(2)} + \dot{U}_2^{(3)}$ .

Напряжение  $\dot{U}_2^{(1)}$  создается э. д. с.  $\dot{E}$ , при этом  $\dot{E}_{1x} = \dot{E}_{2x} = 0$ . Схема рис. 8.46, а для этого режима принимает вид, показанный на рис. 8.46, б. Очевидно,  $\dot{U}_2^{(1)} = K_{21}(j\omega) \dot{E} = K_{21}(j\omega) \dot{U}_1$ .

Напряжение  $\dot{U}_2^{(2)}$  создается напряжением  $\dot{U}_1^{(2)} = -\dot{E}_{1x}$ , при этом  $\dot{E} = E_{2x} = 0$ . Поэтому можно записать (рис. 8.46, в)  $\dot{U}_2^{(2)} = -K_{21}(j\omega) \dot{E}_{1x}$ .

Напряжение  $\dot{U}_2^{(3)}$  создается э. д. с.  $\dot{E}_{2x}$ ; при этом  $\dot{E} = \dot{E}_{1x} = 0$ , входные зажимы четырехполюсника по условию замкнуты накоротко (рис. 8.46, з). В этом режиме влияние цепи, расположенной слева от зажимов 2—2', можно учесть введением сопротивления  $Z_{22к}(j\omega)$ , которое имеет смысл выходного сопротивления пассивного четырехполюсника при короткозамкнутых входных зажимах. Таким образом, для расчета напряжения  $\dot{U}_2^{(3)}$  получаем одноконтурную схему (рис. 8.46, д):

$$\dot{U}_2^{(3)} = E_{2x} \underline{Z}_H [Z_{22к}(j\omega) + \underline{Z}_H]^{-1}.$$

Суммируя найденные составляющие напряжения  $\dot{U}_2$ , находим

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 = \dot{U}_2^{(1)} + \dot{U}_2^{(2)} + \dot{U}_2^{(3)} = K_{21}(j\omega) \dot{U}_1 - K_{21}(j\omega) \dot{E}_{1x} + \\ + \dot{E}_{2x} \underline{Z}_H [Z_{22к}(j\omega) + \underline{Z}_H]^{-1}. \end{aligned}$$

Эту задачу можно решить иначе. Запишем уравнения автономно-го четырехполюсника в Z-форме:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 + \dot{E}_{1x}; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 + \dot{E}_{2x}.$$

При выбранных положительных направлениях тока  $\dot{I}_2$  и напряжения  $\dot{U}_2$   $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 \underline{Z}_H^{-1}$ . Исходная система уравнений принимает вид

$$\dot{U}_1 - \dot{E}_{1x} = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_H} \dot{U}_2; \quad -\dot{E}_{2x} = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 - (1 + \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_H) \dot{U}_2.$$

Отсюда

$$\dot{U}_2 = \frac{(\dot{U}_1 - \dot{E}_{1x}) \underline{Z}_{21} \underline{Z}_H + \dot{E}_{2x} \underline{Z}_{11} \underline{Z}_H}{\underline{Z}_{11} (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_H) - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}.$$

Последнее выражение представим в виде суммы

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_2^{(1)} + \dot{U}_2^{(2)} + \dot{U}_2^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{U}_2^{(1)} &= \dot{U}_1 \underline{Z}_{21} \underline{Z}_H [\underline{Z}_{11} (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_H) - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}]^{-1}; \\ \dot{U}_2^{(2)} &= -\dot{E}_{1x} \underline{Z}_{21} \underline{Z}_H [\underline{Z}_{11} (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_H) - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}]^{-1}; \\ \dot{U}_2^{(3)} &= \dot{E}_{2x} \underline{Z}_H \left[ \underline{Z}_H + \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Множитель при  $\dot{U}_1$  и  $-\dot{E}_{1x}$  в выражениях для  $\dot{U}_2^{(1)}$  и  $\dot{U}_2^{(2)}$  имеет смысл комплексного коэффициента передачи пассивного четырехполюсника по напряжению  $K_{21}(j\omega)$ , а выражение  $(\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21})/\underline{Z}_{11}$  — смысл выходного сопротивления пассивного четырехполюсника со стороны выходных зажимов при короткозамкнутых входных зажимах  $Z_{22к}(j\omega)$ .

В этом нетрудно убедиться на основании уравнений неавтономного четырехполюсника в  $Z$ -форме. Следовательно,

$$\dot{U}_2 = K_{21}(j\omega) \dot{U}_1 - K_{21}(j\omega) \dot{E}_{1x} + \frac{\dot{E}_{2x} \underline{Z}_H}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{22K}(j\omega)}$$

**8.54р.** Уравнения автономного четырехполюсника в  $Z$ -форме имеют вид

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 + \dot{E}_{1x}; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 + \dot{E}_{2x}.$$

Этим уравнениям соответствует Т-образная схема замещения. Найдём из этих уравнений токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}_z} \dot{U}_1 - \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}_z} \dot{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{1x} + \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{2x};$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}_z} \dot{U}_1 + \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}_z} \dot{U}_2 + \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{1x} - \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{2x},$$

где  $\underline{\Delta}_z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$ .

Сравним полученный результат с уравнениями автономного четырехполюсника в  $Y$ -форме:

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2 + \dot{J}_{1K}; \quad \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2 + \dot{J}_{2K}.$$

Следовательно, найдена связь между токами  $\dot{J}_{1K}$  и  $\dot{J}_{2K}$  П-образной схемы замещения автономного четырехполюсника и параметрами Т-образной схемы замещения:

$$\dot{J}_{1K} = -\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{1x} + \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{2x};$$

$$\dot{J}_{2K} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{1x} - \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}_z} \dot{E}_{2x}$$

и формулы перехода от  $Z$ - к  $Y$ -параметрам:

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Z}_{22}/\underline{\Delta}_z; \quad \underline{Y}_{12} = -\underline{Z}_{12}/\underline{\Delta}_z; \quad \underline{Y}_{21} = -\underline{Z}_{21}/\underline{\Delta}_z; \quad \underline{Y}_{22} = \underline{Z}_{11}/\underline{\Delta}_z.$$

**8.58р.** Система уравнений автономного четырехполюсника в  $Z$ -форме имеет вид:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 + \dot{E}_{1x}; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 + \dot{E}_{2x}.$$

При решении второго уравнения системы получаем

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \dot{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \dot{I}_2 - \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \dot{E}_{2x}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, находим

$$\dot{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \dot{U}_2 - \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{21}} \dot{I}_2 - \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \dot{E}_{2x} + \dot{E}_{1x}.$$

Полученные уравнения для  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  можно рассматривать как уравнения автономного четырехполюсника в  $A$ -форме:

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2 + \underline{E}_{1x} - \underline{A}_{11} \dot{E}_{2x}; \quad \dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}_2 - \underline{A}_{21} \dot{E}_{2x},$$

где  $\dot{I}_2 = -\dot{I}_2'$ ;  $\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{11}/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{12} = (\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21})/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{21} = 1/\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{22}/\underline{Z}_{21}$ .

### § 8.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников

8.60р. Определить характеристические параметры четырехполюсника, для которого задана матрица  $\underline{A}$ -параметров:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3; j8 \\ -j; 3 \end{bmatrix}.$$

8.61р. Напряжения на входе и выходе симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой  $\dot{U}_1 = 10e^{j30^\circ}$  В;  $U_2 = 2e^{j60^\circ}$  В. Найти постоянную ослабления четырехполюсника  $A$  (Нп, дБ) и постоянную фазы  $B$ .

8.62. Найти отношение напряжений на входе и выходе симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой, если его постоянная ослабления  $A$  составляет: а) 1 дБ; б) 3 дБ; в) — 0,5 дБ; г) 1 Нп; д) — 10 дБ; е) 2,5 Нп; ж) 26 дБ.

8.63. Для симметричного Т-образного четырехполюсника (рис. 8.47) заданы сопротивления  $0,5 \underline{Z}_1 = 20$  Ом;  $\underline{Z}_2 = -j10$  Ом. Определить постоянную ослабления четырехполюсника  $A$  и постоянную фазы  $B$ .

8.64. Найти выражения для характеристического сопротивления  $\underline{Z}_c$  и постоянной передачи  $\underline{\Gamma}$  симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 8.19).

8.65р. Симметричный Т-образный четырехполюсник (рис. 8.47) имеет следующие характеристические параметры:  $A = 1$  Нп;  $B = 1$  рад;  $\underline{Z}_c = 500 + j500$  Ом. Найти сопротивления  $0,5 \underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ .

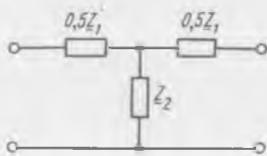


Рис. 8.47

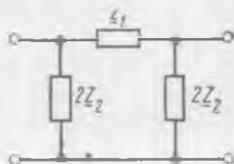


Рис. 8.48

8.66. Симметричный П-образный четырехполюсник (рис. 8.48) имеет следующие характеристические параметры:  $A = 1$  Нп;  $B = 1$  рад;  $\underline{Z}_c = 500 - j500$  Ом. Найти сопротивления  $\underline{Z}_1, 2\underline{Z}_2$ .

8.67м. Пассивный симметричный четырехполюсник  $A$  включен по схеме рис. 8.23. При замкнутом ключе  $S$  измерены напряжения в цепи:  $\dot{U}_1 = 0,79e^{j18^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 0,3e^{j43^\circ}$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. Сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_{H1} = -j1$  кОм;  $\underline{Z}_{H2} = 2 - j1$  кОм. Четырехполюсник  $A$  заменяют пассивным симметричным четырехполюсником  $B$ . Параметры остальных элементов цепи и частота входного воздействия остались неизменными. Получены следующие значения напряжения:  $\dot{U}_1 = 0,79e^{-j18^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 0,3e^{-j43^\circ}$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. В каком из двух случаев четырехполюсник согласован с сопротивлением нагрузки  $\underline{Z}_{H2}$ ?

8.68р. Пассивный симметричный четырехполюсник включен по схеме рис. 8.23. При замкнутом ключе  $S$   $\dot{U}_1 = 0,2$  В;  $\dot{U}_2 = 0,1$  В;  $\dot{U}_3 = 1$  В. Сопротивления  $\underline{Z}_{H1}$  и  $\underline{Z}_{H2}$  имеют чисто резистивный характер:  $\underline{Z}_{H1} = R_1 = 2$  кОм;  $\underline{Z}_{H2} = R_2 = 0,5$  кОм. Рассчитать характеристические параметры четырехполюсника.

8.69. По данным задачи 8.68р определить  $A$ -параметры четырехполюсника.

8.70. Симметричный пассивный четырехполюсник согласован с нагрузкой ( $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$ ). Показать, что комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению равен  $(A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1})^{-1}$ .

8.71м. Найти  $A$ -параметры составного четырехполюсника, представляющего собой согласованное каскадное соединение двух одинаковых симметричных четырехполюсников. Выразить  $A$ -параметры через характеристические параметры  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{\Gamma}$  элементарного четырехполюсника.

8.72м. Решить задачу 8.71м, считая, что составной четырехполюсник представляет собой согласованное каскадное соединение произвольного числа  $N$  одинаковых симметричных четырехполюсников.

8.73р. Неавтономный четырехполюсник включен между источником напряжения и нагрузкой (рис. 8.49). Считая известными  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника, найти следующие комплексные частотные характеристики четырехполюсника в прямом включении: а) комплексное выходное сопротивление  $\underline{Z}_{11}(j\omega)$ ; б) комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ ; в) сквозной комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_c(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}$ ; г) комплексный коэффициент передачи по току  $G_{21}(j\omega)$ ; д) комплексное выходное сопротивление  $\underline{Z}_{22}(j\omega)$ .

8.74. Решить задачу 8.73р, считая известными  $\underline{Y}$ -параметры четырехполюсника.

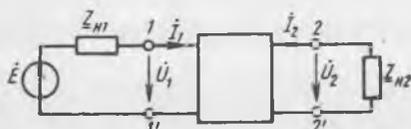


Рис. 8.49

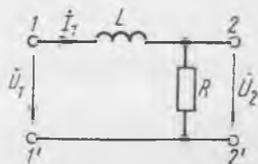


Рис. 8.50

8.75р. Действующие значения гармонического напряжения на входе и выходе Г-образного четырехполюсника (рис. 8.50) измеряют в заданном диапазоне частот. Как, используя результаты измерений, построить ФЧХ цепи?

8.76. При подаче на вход П-образного четырехполюсника (рис. 8.51)  $U_1 = 1$  В,  $U_2 = 0,34$  В. Найти сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями четырехполюсника.

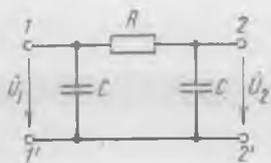


Рис. 8.51

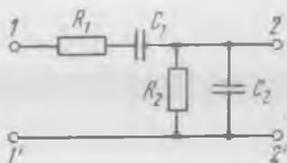


Рис. 8.52

8.77. Для Г-образного четырехполюсника (рис. 8.52) найти комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  в режиме холостого хода на выходе. Рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и  $\psi_{21x}(\omega)$ , принимая  $R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = C_2 = 1$  мкФ.

8.78. Найти комплексный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  мостового четырехполюсника (рис. 8.53) в режиме холостого хода на выходе. Рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и  $\psi_{21x}(\omega)$  при  $R = 1$  кОм;  $C = 4$  мкФ.

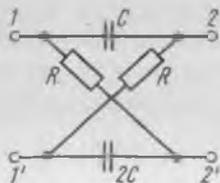


Рис. 8.53

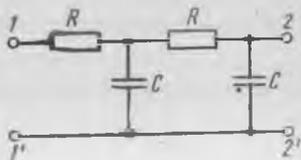


Рис. 8.54

8.79. Рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и  $\psi_{21x}(\omega)$  коэффициента передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе. Схема четырехполюсника представлена на рис. 8.54, где  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ.

8.80м. Построить (ориентировочно, без расчетов) АЧХ и ФЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и  $\psi_{21x}(\omega)$  коэффициентов передачи четырехполюсников по напряжению в режиме холостого хода на выходе. Схемы четырехполюсников изображены на рис. 8.55, а — д.

8.81р. Для мостового четырехполюсника (рис. 8.56) найти комплексный коэффициент передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K_{21x}(j\omega) = K_{21x}(\omega) e^{j\psi_{21x}(\omega)}$ . Рассчитать и построить графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$ , принимая  $R_1 = 0 - \infty$ ;  $R = 1$  кОм;  $L = 0,1$  Гн;  $\omega = 10^4$  рад/с.

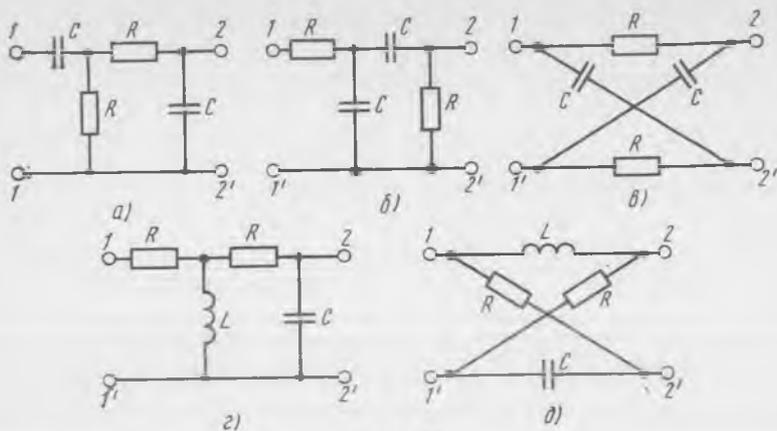


Рис. 8.55

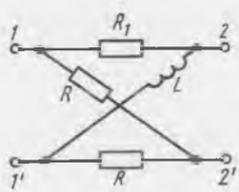


Рис. 8.56

8.82р. Построить (ориентировочно) графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  четырехполюсников (рис. 8.57, а — в). Принять, что параметры остальных элементов и частота входного воздействия не изменяются.

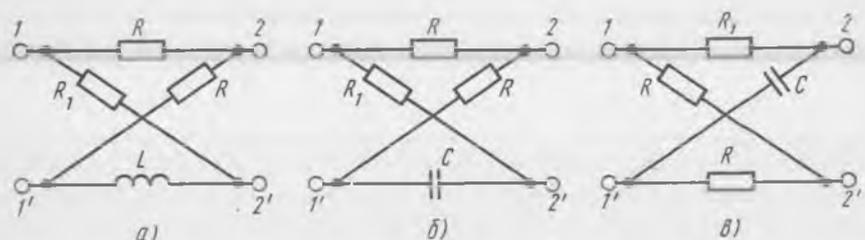


Рис. 8.57

8.83. Найти комплексное входное сопротивление мостового четырехполюсника (см. рис. 8.55, д)  $Z_{11x}(j\omega) = Z_{11x}(\omega) e^{j\varphi_{11x}(\omega)}$  со стороны зажимов 1—1' в режиме холостого хода на выходе. Рассчитать и построить графики функций  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$  при  $R = 0,1 \text{ кОм}$ ;  $C = 1 \text{ мкФ}$ ;  $L = 1 \text{ Гн}$ .

8.84. Определить комплексное входное сопротивление четырехполюсника (см. рис. 8.55, з)  $Z_{11x}(j\omega) = Z_{11x}(\omega) e^{j\varphi_{11x}(\omega)}$  в прямом вклю-

чении при разомкнутых зажимах 2—2'. Рассчитать и построить графики функций  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$ , принимая  $R = 0,1$  кОм;  $C = 1$  мкФ;  $L = 1$  Гн.

8.85м. Построить (ориентировочно, без расчетов) АЧХ и ФЧХ входных сопротивлений четырехполюсников со стороны зажимов 1—1' в режиме холостого хода на выходе  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$ . Схемы четырехполюсников приведены на рис. 8.55, а — д.

8.86. К выходным зажимам четырехполюсника,  $\underline{A}$ -параметры которого известны:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 + j1; & 100 \\ 0,02 + j0,01; & 1 \end{bmatrix},$$

подключено реактивное сопротивление нагрузки  $Z_{H2} = jX_H$ . Напряжение и ток  $U_1$  и  $I_1$  на входе четырехполюсника совпадают по фазе. Определить значение и знак сопротивления  $X_H$ .

8.87. Напряжение и ток на входе обратимого четырехполюсника, нагруженного на резистивное сопротивление  $Z_{H2} = R_H$ , совпадают по фазе. Полагая известными  $\underline{A}$ -параметры четырехполюсника ( $\underline{A}_{11} = 0,55 - j 0,15$ ;  $\underline{A}_{21} = 0,001 - j 0,003$  См;  $\underline{A}_{22} = 1,9 + j 0,3$ ), найти сопротивление  $R_H$ .

8.88м. Четырехполюсник (рис. 8.58) содержит усилительный элемент (трехполюсник),  $\underline{Y}$ -параметры которого в схеме с общим выводом (3), измеренные в сименсах, имеют следующие значения:

$$\underline{Y}_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4,5 \cdot 10^{-4}; & -0,9 \cdot 10^{-6} \\ 4,5 \cdot 10^{-2}; & 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

(Эти значения соответствуют  $\underline{Y}$ -параметрам маломощного биполярного транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером.) Рассчитать входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$ , коэффициенты передачи четырехполюсника по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  и току  $G_{21}(j\omega)$ , если  $R_1 = 100$  Ом;  $R_H = 200$  Ом.

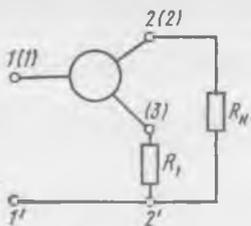


Рис. 8.58

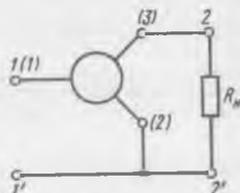


Рис. 8.59

8.89. Как изменятся рассчитанные в задаче 8.88м характеристики четырехполюсника при коротком замыкании сопротивления  $R_1$ ?

8.90. В состав четырехполюсника (рис. 8.59) входит усилительный элемент, который в схеме с общим выводом (3) имеет такие же значения  $\underline{Y}$ -параметров, как и усилительный элемент в задаче 8.88м. Рассчитать

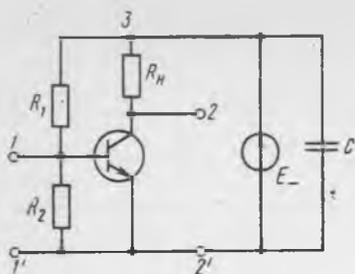


Рис. 8.60

входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$ , коэффициенты передачи четырехполюсника по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  и току  $G_{21}(j\omega)$ . Принять  $R_H = 200 \text{ Ом}$ .

8.91. В усилительном каскаде (рис. 8.60) поочередно применяют различные транзисторы: а) транзистор  $T_A$ ; б) транзистор  $T_B$ ; в) составной транзистор, образованный соединением транзисторов  $T_A$  и  $T_B$ .  $Y$ -параметры транзисторов приведены в условии задачи 8.8м, а  $Y$ -параметры составного тран-

зистора определяют в результате решения той же задачи.

Рассматривая усилительный каскад как четырехполюсник, рассчитать для каждого из указанных случаев входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$ , коэффициенты передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  и току  $G_{21}(j\omega)$ . Принять  $R_H = 200 \text{ Ом}$ .

При расчетах пренебречь влиянием вспомогательных элементов  $R_1$  и  $R_2$ , обеспечивающих нужный режим питания транзистора по постоянному току. Напряжение между выводами  $2'$  и  $3$  принять равным нулю на всех частотах  $\omega \neq 0$ , что соответствует наличию в цепи очень большой емкости  $C$  ( $C \rightarrow \infty$ ). Проанализировать результаты расчетов с целью выяснения целесообразности применения составных транзисторов в усилительных каскадах рассмотренного типа.

8.92р. Сформулировать условие равновесия ( $\dot{U}_2 = 0$  при  $\dot{U}_1 \neq 0$ ) мостового несимметричного четырехполюсника (см. рис. 8.16). Будет ли это условие справедливо при произвольном сопротивлении нагрузки, подключенном к зажимам  $2-2'$ ?

8.93р. Показать, что симметричный мостовой четырехполюсник, нагруженный на сопротивление  $Z_{H2} = R$  (рис. 8.61), имеет постоянное входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega) = R$  на любой частоте при выполнении условия  $Z_1 Z_2 = R^2$ .

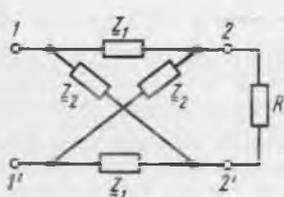


Рис. 8.61

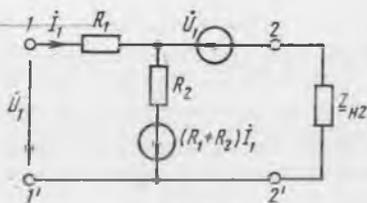


Рис. 8.62

8.94м. Показать, что входное сопротивление активного четырехполюсника (рис. 8.62) обратно пропорционально сопротивлению нагрузки  $Z_{H2}$ .

8.95м. Определить входную проводимость четырехполюсника  $Y_{11}(j\omega)$  (рис. 8.63). В каком случае  $Y_{11}(j\omega) = -Y_{H2}$ ?

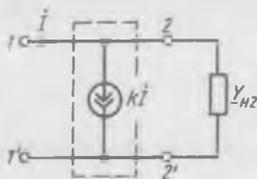


Рис. 8.63

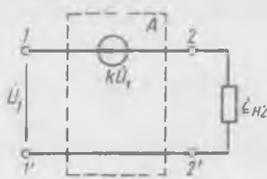


Рис. 8.64

8.96м. Найти входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  четырехполюсника  $A$  (рис. 8.64). В каком случае  $Z_{11}(j\omega) = -Z_{H2}$ ?

8.97р. Определить параметры  $L$  и  $C$  однозвенного фильтра нижних частот типа  $k$ . Частота среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с. Сопротивление нагрузки  $R_H = 1$  кОм согласовано с фильтром на частоте  $\omega = 0$ .

8.98. Однозвенный фильтр верхних частот типа  $k$  имеет частоту среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с и согласован с сопротивлением нагрузки  $R_H = 1$  кОм на частоте  $\omega = \infty$ . Найти параметры  $L$  и  $C$ .

8.99. На вход однозвенного симметричного фильтра нижних частот типа  $k$  поступает напряжение  $u_1(t) = 2 \cos 0,5 \cdot 10^4 t + 2 \cos 1,5 \cdot 10^4 t$  В. Параметры элементов фильтра:  $L = 0,2$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ. Считая, что фильтр нагружен на сопротивление, равное характеристическому, найти напряжение  $u_2(t)$  на выходе фильтра.

8.100м. Решить задачу 8.99 в предположении, что фильтр состоит из двух одинаковых звеньев типа  $k$  с теми же значениями параметров  $L$  и  $C$ . Сравнить результаты решения задач 8.99 и 8.100м.

8.101. На входе однозвенного симметричного фильтра верхних частот типа  $k$  действует напряжение  $u_1(t) = 2 \cos 0,5 \cdot 10^4 t + 2 \cos 1,5 \cdot 10^4 t$  В. Схема фильтра соответствует рис. 8.47 или 8.48 при  $Z_1 = 1/(j\omega C)$ ;  $Z_2 = j\omega L$ . Фильтр согласован на выходе; параметры элементов фильтра:  $L = 50$  мГн;  $C = 0,05$  мкФ. Определить напряжение  $u_2(t)$  на выходе фильтра.

8.102м. Решить задачу 8.101 для случая, когда фильтрацию осуществляют двузвенным фильтром типа  $k$ , состоящим из идентичных симметричных звеньев с теми же параметрами  $L$  и  $C$ . Сравнить результаты решения задач 8.101 и 8.102м.

8.103р. Полагая, что однозвенный фильтр нижних частот типа  $k$  (рис. 8.65) согласован с сопротивлением нагрузки во всем диапазоне частот ( $Z_{H2} = Z_c$ ), рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ фильтра  $K_{21}(\omega)$ ;  $\psi_{21}(\omega)$ .

8.104р. Решить задачу 8.103р, считая, что сопротивление нагрузки имеет резистивный характер и согласовано с фильтром на частоте  $\omega = 0$ , т. е.  $Z_{H2} = R_H = \lim_{\omega \rightarrow 0} Z_{cT}$ .

8.105. Проанализировать результаты решения задач 8.103р и 8.104р с целью изучения влияния рассогласования фильтра и нагрузки на ход частотных характеристик.

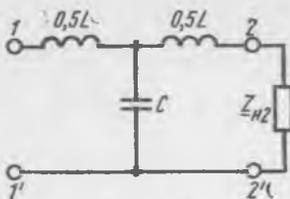


Рис. 8.65

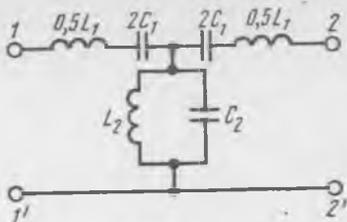


Рис. 8.66

8.106. Полосовой Т-образный фильтр типа  $k$  (рис. 8.66) согласован с нагрузкой и имеет параметры:  $L_1 = L_2 = 0,2$  Гн;  $C_1 = C_2 = 0,2$  мкФ. Найти частоты среза фильтра.

8.107. Полосовой П-образный фильтр типа  $k$  (рис. 8.67) нагружен на характеристическое сопротивление и имеет параметры:  $L_1 = L_2 = 50$  мГн;  $C_1 = C_2 = 0,05$  мкФ. Найти частоты среза фильтра.

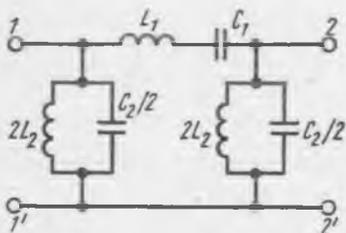


Рис. 8.67

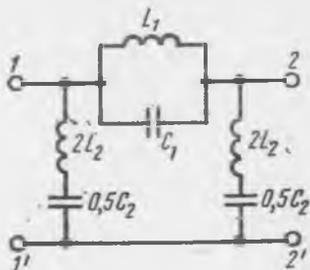


Рис. 8.68

8.108. Заграждающий П-образный фильтр типа  $k$  (рис. 8.68) согласован с нагрузкой и имеет параметры:  $L_1 = 0,2$  Гн;  $L_2 = 0,1$  Гн;  $C_1 = 0,2$  мкФ;  $C_2 = 0,4$  мкФ. Определить частоты среза фильтра.

8.109р. Однозвенный Г-образный фильтр нижних частот типа  $k$  (рис. 8.69) имеет частоту среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с и согласован с сопротивлением нагрузки  $R_H = 1$  кОм на частоте  $\omega = 0$ . Построить последовательно-производное звено фильтра нижних частот типа  $m$  при  $m = 0,6$ . Найти частоту бесконечного затухания.

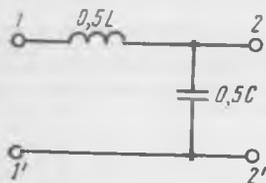


Рис. 8.69

8.110р. Однозвенный Г-образный фильтр нижних частот типа  $k$  удовлетворяет требованиям, приведенным в условии задачи 8.109р. Используя этот фильтр как прототип, построить параллельно-производное звено фильтра нижних частот типа  $m$  при  $m = 0,6$ . Найти частоту бесконечного затухания. Сравнить результаты решения задач 8.109р и 8.110р.

8.111. Построить параллельно-производное звено фильтра верхних частот типа  $m$  при  $m = 0,6$ . В качестве прототипа использовать

однозвенный Г-образный фильтр типа  $k$ , согласованный с сопротивлением нагрузки  $R_H = 1$  кОм на частоте  $\omega = \infty$ . Частота среза  $\omega_c = 10^4$  рад/с.

#### Решения и методические указания

**8.60р.** Характеристические сопротивления четырехполюсника  $\underline{Z}_{c1} = \sqrt{(A_{11}A_{12})/(A_{21}A_{22})}$ ;  $\underline{Z}_{c2} = \sqrt{(A_{22}A_{12})/(A_{21}A_{11})}$ . Так как у рассматриваемого четырехполюсника  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 3$ , то  $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}} = j 2,83$  Ом.

Характеристическая постоянная передачи четырехполюсника  $\underline{\Gamma} = \ln(\sqrt{\underline{A}_{11}A_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}A_{21}}) = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1,76$ .

Учитывая, что  $\underline{\Gamma} = \underline{A} + jB$ , находим  $\underline{A} = 1,76$  Нп =  $8,686 \cdot 1,76 = 15,3$  дБ;  $B = 0$ .

Характеристическую постоянную передачи можно найти, воспользовавшись выражением  $\text{ch } \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11}A_{22}} = \underline{A}_{11}$ , откуда  $\underline{\Gamma} = \text{Arch } \underline{A}_{11} = \text{Arch } 3 = 1,76$ .

**8.61р.** Для пассивного симметричного четырехполюсника, согласованного с нагрузкой, на входе и выходе которого действуют напряжения  $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\psi_1}$ ;  $\underline{U}_2 = U_2 e^{j\psi_2}$ , постоянная ослабления  $\underline{A} = \ln U_1/U_2$ , коэффициент фазы  $\underline{B} = \psi_1 - \psi_2$ . Таким образом,  $\underline{A} = \ln 5 = 1,609$  Нп;  $\underline{B} = -30^\circ$ . Учитывая, что  $1$  Нп  $\approx 8,686$  дБ, получаем  $\underline{A} \approx 13,98$  дБ.

**8.65р.** Для рассматриваемого четырехполюсника  $\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 \times (2\underline{Z}_2)^{-1}$ ;  $\underline{A}_{21} = \underline{Z}_2^{-1}$ . Но  $\underline{A}$ -параметры четырехполюсника можно выразить и через характеристические параметры:  $\underline{A}_{11} = \text{ch } \underline{\Gamma}$ ;  $\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \text{sh } \underline{\Gamma}$ . Поэтому можно записать:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c \frac{1}{\text{sh } \underline{\Gamma}}; 0,5 \underline{Z}_1 = \underline{Z}_c (\text{ch } \underline{\Gamma} - 1) \frac{1}{\text{sh } \underline{\Gamma}} = \underline{Z}_c \text{th } \frac{\underline{\Gamma}}{2}.$$

В общем случае характеристическая постоянная передачи представляет собой комплексное число:  $\underline{\Gamma} = \underline{A} + jB$ . Гиперболические функции комплексного аргумента вычислим с помощью выражений:  $\text{sh}(x + jy) = \text{sh } x \cos y + j \text{ch } x \sin y$ ;  $\text{th}(x + jy) = (\text{th } x + j \text{tg } y)(1 + j \text{th } x \text{tg } y)^{-1}$ . По условию  $\underline{\Gamma} = 1 + j1$ . Следовательно,  $\text{sh } \underline{\Gamma} = \text{sh}(1 + j1) = 0,635 + j 1,299$ ;  $\text{th } \underline{\Gamma}/2 = \text{th}(0,5 + j0,5) = 0,564 + j0,404$ . Характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_c = 500(1 + j)$  Ом. Находим искомые сопротивления:  $0,5 \underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \text{th } (\underline{\Gamma}/2) = 80,1 + j 484$  Ом;  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c / \text{sh } \underline{\Gamma} = 462,2 - j 158,9$  Ом.

**8.67м.** При согласовании пассивного симметричного четырехполюсника с нагрузкой выполняется условие  $\underline{U}_1/\underline{I}_1 = \underline{U}_2/\underline{I}_2 = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{H2}$ . Входной ток  $\underline{I}_1$  можно определить по известным значениям  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{Z}_{H1}$ ,

$\dot{U}_3 \dot{I}_1 = (\dot{U}_3 - \dot{U}_1) \underline{Z}_{n1}^{-1}$ . Таким образом, условие согласования четырехполюсника с нагрузкой принимает вид  $\dot{U}_3/\dot{U}_1 - 1 = \underline{Z}_{n1}/\underline{Z}_{n2}$ .

8.68р. Четырехполюсник согласован с нагрузкой, поскольку выполняется условие согласования (см. задачу 8.67 м):  $\dot{U}_3/\dot{U}_1 - 1 = 4$ ;  $\underline{Z}_{n1}/\underline{Z}_{n2} = 4$ .

В режиме согласования характеристические параметры  $\underline{Z}_c = \underline{Z}_{n2} = 0,5 \text{ кОм}$ ,  $\underline{\Gamma} = \ln \dot{U}_1/\dot{U}_2 = 0,693$ .

8.71м. Вычислить произведение двух одинаковых матриц  $\underline{A}$ -параметров, элементы которых выражены через характеристические параметры  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{\Gamma}$ . Элементы матрицы-произведения будут содержать некоторые комбинации гиперболических функций аргумента  $\underline{\Gamma}$ ; их следует выразить через гиперболические функции аргумента  $2\underline{\Gamma}$  с помощью следующих формул гиперболической тригонометрии:  $\text{sh}(x+y) = \text{sh}x \text{ch}y + \text{ch}x \text{sh}y$ ;  $\text{ch}(x+y) = \text{ch}x \text{ch}y + \text{sh}x \text{sh}y$ .

8.72м. Рассмотреть последовательно цепь из  $N = 2, 3, 4, \dots$  каскадно включенных одинаковых четырехполюсников. Определить для каждого числа  $N$  матрицу  $\underline{A}$ -параметров цепи в результате перемножения  $N$  матриц  $\underline{A}$ -параметров элементарных четырехполюсников. Выражения для элементов матрицы-произведения будут содержать комбинации гиперболических функций аргумента  $\underline{\Gamma}$ ; их следует выразить через гиперболические функции аргумента  $N\underline{\Gamma}$  с помощью приведенных ранее формул гиперболической тригонометрии. Обобщение результатов для произвольного  $N$  осуществляют методом математической индукции.

8.73р. Запишем систему уравнений четырехполюсника в  $Z$ -форме для комплексных действующих значений напряжений и токов:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2; \quad (a)$$

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2. \quad (б)$$

Связь между напряжением и током на выходе четырехполюсника устанавливается законом Ома:  $\dot{U}_2 = -\underline{Z}_{n2} \dot{I}_2$ . Знак минус в этом выражении соответствует выбранным положительным направлениям  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ . С учетом того, что  $\dot{I}_2 = -\dot{U}_2 \underline{Z}_{n2}^{-1}$ , находим из уравнения (б) комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по току:

$$G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2/\dot{I}_1 = -\underline{Z}_{21}/(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{n2}).$$

Комплексное входное сопротивление четырехполюсника в прямом включении определяем из уравнения (а):

$$\underline{Z}_{11}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12} G_{21}(j\omega),$$

откуда

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{Z_{11}(Z_{22} + Z_{H2}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_{H2}} = \frac{\Delta_z + Z_{11}Z_{H2}}{Z_{22} + Z_{H2}}$$

где  $\Delta_z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  — определитель матрицы  $\underline{Z}$ -параметров.

По определению, комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению равен отношению  $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ . С учетом того, что  $\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}(j\omega) \dot{I}_1$ ,  $\dot{U}_2 = -\underline{Z}_{H2} \dot{I}_2$ , можно записать

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{-\underline{Z}_{H2}}{Z_{11}(j\omega)} G_{21}(j\omega).$$

После несложных преобразований получим

$$K_{21}(j\omega) = \frac{Z_{21}Z_{H2}}{\underline{Z}_{11}(Z_{22} + Z_{H2}) - Z_{12}Z_{21}} = \frac{Z_{21}Z_{H2}}{\Delta_z + Z_{11}Z_{H2}}$$

Сквозной коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению представляет собой отношение выходного напряжения  $U_2$  к э. д. с.  $\dot{E}$  источника сигнала:

$K_c(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}$ . (Этот термин широко используют в теории усилительных устройств.)

Физически очевидно, что  $K_c(j\omega) = K_{21}(j\omega)$ , если внутреннее сопротивление источника равно нулю ( $\underline{Z}_{H1} = 0$ ). В общем случае  $\underline{Z}_{H1} \neq 0$  и коэффициент передачи входной цепи четырехполюсника по напряжению не равен единице, как это видно из рис. 8.70, а.

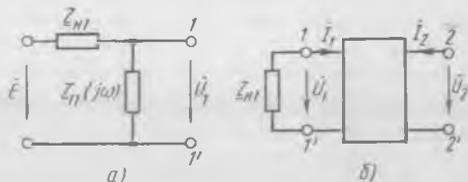


Рис. 8.70

Представим  $K_c(j\omega)$  в виде

$$K_c(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \frac{\dot{U}_1}{\dot{E}} = K_{21}(j\omega) \frac{Z_{11}(j\omega)}{Z_{11}(j\omega) + \underline{Z}_{H1}}$$

откуда после несложных преобразований находим

$$K_c(j\omega) = \frac{Z_{21}Z_{H2}}{(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{H1})(Z_{22} + Z_{H2}) - Z_{12}Z_{21}}$$

Этот же результат можно получить иным путем. Заменим рассматриваемый неавтономный четырехполюсник Т-образной схемой замещения и объединим последовательно включенные сопротивления  $\underline{Z}_{H1}$  и  $(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12})$ . Это равносильно образованию нового четырехполюсника, у которого параметр  $\underline{Z}_{11}$  стал равным  $\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{H1}$ , а напряжение  $\dot{E}$  действует непосредственно на его входе. Следовательно, выражение для  $K_c(j\omega)$  можно получить из  $K_{21}(j\omega)$ , заменив в последнем  $\underline{Z}_{11}$  на  $(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{H1})$ .

Для определения выходного сопротивления  $Z_{22}(j\omega)$ , которое имеет смысл входного сопротивления четырехполюсника в обратном включении, рассмотрим схему рис. 8.70, б, откуда  $Z_{22}(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ .

Учитывая, что  $\dot{U}_1 = -Z_{H1}\dot{I}_1$ , получаем из исходной системы уравнений

$$Z_{22}(j\omega) = \frac{Z_{22}(Z_{11} + Z_{H1}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_{H1}} = \frac{\Delta_2 + Z_{22}Z_{H1}}{Z_{11} + Z_{H1}}$$

Как и следовало ожидать по физическим соображениям,  $Z_{22}(j\omega)$  можно было бы получить непосредственно из выражения для  $Z_{11}(j\omega)$ , заменив  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  и  $Z_{H2}$  на  $Z_{22}$ ,  $Z_{11}$  и  $Z_{H1}$  соответственно.

**8.75р.** Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи приведена на рис. 8.71. Очевидно, напряжение  $u_2$  отстает от напряжения  $u_1$  на угол  $\psi = \arccos U_2/U_1$ , который можно рассчитать по известным напряжениям  $U_1$  и  $U_2$ .

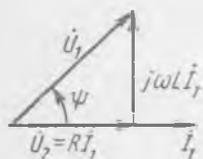


Рис. 8.71

**8.80м.** Построение АЧХ и ФЧХ четырехполюсников целесообразно начать с упрощения исходных схем и рассмотрения соответствующих им векторных диаграмм. Такое упрощение может быть осуществлено путем исключения элементов, влияние которых на ход частотных характеристик в диапазоне очень низких ( $\omega \rightarrow 0$ ) или очень высоких ( $\omega \rightarrow \infty$ ) частот по физическим соображениям невелико.

На основании анализа векторных диаграмм можно составить приближенное представление об амплитудных и фазовых соотношениях в цепи. Следует учесть также, что сдвиг фаз  $\psi_{21}$  зависит от частоты монотонно, не имея ни разрывов непрерывности, ни экстремумов. Напротив, график  $K_{21}(\omega)$  может иметь экстремумы.

Если на краях частотного диапазона ( $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ ) функция  $K_{21}(\omega) = 0$ , то внутри диапазона она имеет, по крайней мере, один экстремум, и если экстремум лишь один, то это — максимум. Если же экстремумов несколько, то их общее число должно быть нечетным, причем максимумы и минимумы чередуются. Судить о числе экстремумов, если основываться только на внешнем виде схемы цепи, можно лишь предположительно. Так, АЧХ  $K_{21}(\omega)$  четырехполюсника, состоящего из двух связанных колебательных контуров, может иметь или один, или три экстремума в зависимости от значения фактора связи. В сомнительных случаях следует осуществлять численный анализ соответствующего аналитического выражения. В связи с этим отметим, что АЧХ цепей, схемы которых приведены на рис. 8.55, либо монотонны, либо имеют только один экстремум.

**8.81р.**  $Z$ -параметры несимметричного мостового четырехполюсника общего вида (см. рис. 8.16) были найдены при решении задачи 8.16р.

Учитывая, что для рассматриваемого случая  $\underline{Z}_1 = R_1$ ;  $\underline{Z}_2 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = R$ , получим

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = \frac{j\omega LR - R_1 R}{2R(R_1 + j\omega L)} = 0,5 \frac{-1 + j \frac{\omega L}{R_1}}{1 + j \frac{\omega L}{R_1}}$$

Представим комплексные числа  $(-1 + j \frac{\omega L}{R_1})$  и  $(1 + j \frac{\omega L}{R_1})$  на комплексной плоскости (рис. 8.72, а). Очевидно, модуль отношения этих комплексных чисел равен единице, а аргумент отношения  $\varphi = \varphi_1 -$

$-\varphi_2 = 2 \arctg \frac{R_1}{\omega L}$ . Следовательно,

$$K_{21x}(\omega) = 0,5 = \text{const};$$

$$\psi_{21x}(\omega) = 2 \arctg \frac{R_1}{\omega L}.$$

По этим формулам нетрудно построить графики функций  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$ . При изменении  $R_1$  от 0 до  $\infty$   $\psi_{21x}$  изменяется от 0 до  $180^\circ$ , а  $K_{21x} = \text{const}$  (рис. 8.72, б, в).

Таким образом, при неизменной амплитуде  $U_{m1}$  входного напряжения  $u_1(t)$  выходное напряжение  $u_2(t)$  опережает входное на угол  $\psi_{21x}$ , значение которого в зависимости от сопротивления  $R_1$  заключено в пределах 0— $180^\circ$ , причем амплитуда выходного напряжения  $U_{m2}$  при любых  $R_1$  неизменна и составляет  $0,5 U_{m1}$ .

8.82р. Все четырехполюсники, изображенные на рис. 8.57, а—д, однопольны, и зависимости  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  можно проанализировать точно так же, как это сделано в предыдущей задаче. Представление о характере этих зависимостей можно составить и с помощью простых графических построений.

Рассмотрим сначала четырехполюсник рис. 8.56. Решение для него уже известно и будет служить эталоном.

Преобразуем схему четырехполюсника так, как показано на рис. 8.73, а. В соответствии с рис. 8.73, а запишем  $\dot{U}_L = \dot{U}_1 \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L} =$

$$= \dot{U}_1 \frac{1}{1 - j \frac{R_1}{\omega L}}; \dot{U}_2 = \dot{U}_L - 0,5 \dot{U}_1.$$

Принимая начальную фазу входного напряжения  $u_1(t)$  равной нулю ( $U_1 = U_1$ ), найдем вещественную и мнимую составляющие напряжения  $\dot{U}_L$ :

$$\text{Re } \dot{U}_L = U_1(1 + \alpha^2)^{-1}; \text{Im } \dot{U}_L = U_1 \alpha(1 + \alpha^2)^{-1}; \alpha = R_1/\omega L$$

и изобразим их на комплексной плоскости (рис. 8.73, б).

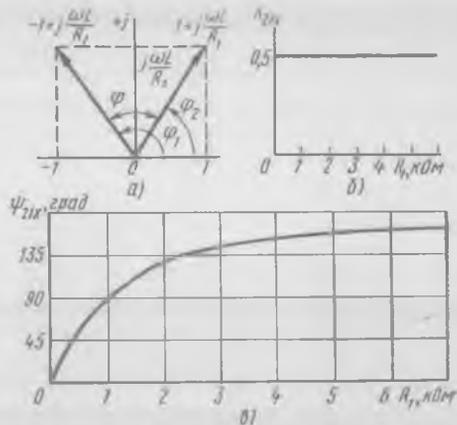


Рис. 8.72

Согласно рис. 8.73, б

$$U_L = \sqrt{[\operatorname{Re} \dot{U}_L]^2 + [\operatorname{Im} \dot{U}_L]^2} = U_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} = U_1 \cos \Psi.$$

Как известно из аналитической геометрии, последнее соотношение представляет собой уравнение окружности в полярных координатах, если окружность проходит через начало координат, а ее диаметр численно равен  $U_1$ .

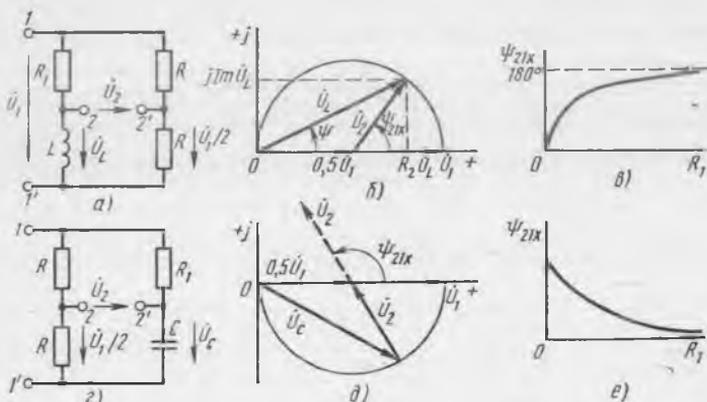


Рис. 8.73

При изменении сопротивления  $R_1$  длина вектора  $U_L$  и его положение на комплексной плоскости изменяются, причем конец вектора  $\dot{U}_L$  перемещается по полуокружности диаметром  $U_1$ , расположенной в первом квадранте (рис. 8.73, б). Полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, исключается из рассмотрения, поскольку  $\operatorname{Im} \dot{U}_L \geq 0$ .

Длина вектора  $U_2 = U_L - 0,5U_1$  (рис. 8.73, б) равна радиусу указанной окружности, т. е.  $0,5 U_1$ , а его положение относительно  $\dot{U}_1$  может изменяться в широких пределах. При  $R_1 = 0$   $\dot{U}_L = \dot{U}_1$ ,  $\psi_{21x} = 0$ . При  $R_1 = \infty$   $U_L = 0$ ;  $\psi_{21x} = 180^\circ$ .

Таким образом,  $K_{21x}(R_1) = 0,5 = \text{const}$ , а  $u_2(t)$  опережает  $u_1(t)$  на угол  $\psi_{21x}$ , зависимость которого от  $R_1$  показана на рис. 8.73, в. Эти данные полностью согласуются с результатами решения задачи 8.81р.

Аналогичным образом изучают характеристики  $K_{21x}(R_1)$  и  $\psi_{21x}(R_1)$  и во всех остальных случаях. Ограничимся тем, что преобразуем схему четырехполюсника, представленного на рис. 8.57, б и приведем для него векторную диаграмму и график  $\psi_{21x}(R_1)$ , (рис. 8.73, г — е).

Четырехполюсники, изображенные на рис. 8.56 и 8.57, принадлежат к группе цепей, называемых фазовращателями. Фазовращатели позволяют обеспечивать регулируемый сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями, сохраняя неизменным отношение их амплитуд.

8.85м. Сдвиг фаз  $\varphi_{11}$  между напряжением и током в входной цепи любого линейного пассивного четырехполюсника не может превышать по абсолютному значению  $90^\circ$ . Предположение о возможности существования  $|\varphi_{11}| > 90^\circ$  ведет к неприемлемому по физическим соображениям заключению, что вещественная составляющая входного сопротивления четырехполюсника отрицательна ( $\operatorname{Re} Z_{11}(j\omega) = Z_{11}(\omega) \cos \varphi_z < 0$ ). Поэтому во всех случаях  $|\varphi_{11}(\omega)| \leq 90^\circ$ .

Перемена знака  $\varphi_{11}(\omega)$  на некоторой частоте возможна лишь при наличии в четырехполюснике реактивных элементов обоих типов — как индуктивных, так и емкостных. Только в этом случае возможно также нарушение монотонного характера зависимости  $Z_{11x}(\omega)$  и возникновение экстремумов.

При построении ориентировочных графиков  $Z_{11x}(\omega)$ ,  $\varphi_{11x}(\omega)$  следует представить их ход на очень низких ( $\omega \rightarrow 0$ ) и очень высоких ( $\omega \rightarrow \infty$ ) частотах.

Рассмотрим цепь рис. 8.55, а. Входное сопротивление этой цепи на всех частотах, исключая  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ , имеет резистивно-емкостный характер, следовательно,  $\varphi_{11x}(\omega) < 0$ . При  $\omega \rightarrow 0$  входное сопротивление цепи определяется емкостью  $C$ , стоящей в продольной ветви, поэтому  $Z_{11x}(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $\varphi_{11x}(\omega) \rightarrow -\pi/2$ . При  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивление емкостных ветвей становится пренебрежимо малым. Сопротивление  $R$ , стоящее в продольной ветви, оказывается фактически включенным параллельно такому же сопротивлению  $R$  в поперечной ветви цепи, поэтому  $Z_{11x}(\omega) \rightarrow 0,5 R$ ;  $\varphi_{11x}(\omega) \rightarrow 0$ .

Таким образом, при увеличении частоты от 0 до  $\infty$   $Z_{11x}(\omega)$  уменьшается от  $\infty$  до  $0,5 R$ , а  $\varphi_{11x}(\omega)$ , оставаясь все время отрицательным, уменьшается по абсолютному значению от  $\pi/2$  до 0.

8.86р. Входное сопротивление четырехполюсника  $Z_{11}(j\omega)$  связано с  $\underline{A}$ -параметрами и сопротивлением нагрузки  $\underline{Z}_{н2}$  соотношением

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{A_{11} Z_{н2} + A_{12}}{A_{21} Z_{н2} + A_{22}}$$

Отсюда

$$\underline{Z}_{н2} = [A_{12} - A_{22} Z_{11}(j\omega)] [A_{21} Z_{11}(j\omega) - A_{11}]^{-1}$$

На входе четырехполюсника напряжение и ток синфазны, следовательно, сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  — чисто резистивное,  $Z_{11}(j\omega) = R_{11}$ . При заданных числовых значениях  $\underline{A}$ -параметров

$$\underline{Z}_{н2} = (100 - R_{11}) [(0,02 R_{11} - 3) + j(0,01 R_{11} - 1)]^{-1}$$

По условию задачи сопротивление нагрузки реактивное, что имеет место только при  $0,02 R_{11} - 3 = 0$ . В результате получаем  $R_{11} = 150 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_{н2} = j 100 \text{ Ом}$ .

8.88м. Данный четырехполюсник целесообразно рассматривать как составной, образованный последовательным соединением двух четырехполюсников. Первый из них представляет собой усилительный элемент (трехполюсник), включенный по схеме с общим выводом (3). Второй

четыреполюсник — одноэлементный, содержащий только сопротивление  $R_1$ . Нетрудно убедиться, что соединение четырехполюсников является регулярным, поэтому можно найти  $\underline{Z}$ -параметры составного четырехполюсника в результате суммирования матриц  $\underline{Z}$ -параметров элементарных четырехполюсников.  $\underline{Z}$ -параметры усилительного элемента рассчитывают по известным  $\underline{Y}$ -параметрам с помощью формул перехода.

**8.92р.**  $\underline{Z}$ -параметры мостового несимметричного четырехполюсника были найдены при решении задачи 8.16р. Поэтому используем уравнения четырехполюсника в  $Z$ -форме:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21} \dot{I}_1 + \underline{Z}_{22} \dot{I}_2.$$

В режиме холостого хода ( $\dot{I}_2 = 0$ )

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \underline{Z}_{21} / \underline{Z}_{11} = (\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4) [(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)]^{-1}.$$

Следовательно,  $\dot{U}_2 = 0$  при  $\dot{U}_1 \neq 0$ , если  $\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = 0$ . Это и есть условие баланса моста.

Если к выходу четырехполюсника подключено произвольное сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_{н2}$ , то с учетом положительных направлений тока  $\dot{I}_2$  и напряжения  $\dot{U}_2$  можно записать  $\dot{U}_2 = -\underline{Z}_{н2} \dot{I}_2$ . Из уравнений четырехполюсника находим

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \underline{Z}_{н2} \underline{Z}_{21} [\underline{Z}_{11} (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{н2}) - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}]^{-1}.$$

Условие баланса означает, что  $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} = 0$ ;  $\dot{U}_2 = 0$ . Следовательно, условие баланса моста остается справедливым и при произвольной нагрузке четырехполюсника.

**8.93р.** Выражения для  $\underline{Z}$ -параметров мостового четырехполюсника, полученные при решении задачи 8.16р, для рассматриваемого частного случая симметричного четырехполюсника принимают вид:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = 0,5(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2); \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 0,5(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1).$$

Как и в предыдущей задаче,  $\dot{U}_2 = -\underline{Z}_{н2} \dot{I}_2 = -R \dot{I}_2$ . Из уравнений четырехполюсника находим

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + R}.$$

Подставим в это выражение значения  $\underline{Z}$ -параметров:

$$Z_{11}(j\omega) = [\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + 0,5R(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)] [0,5(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + R]^{-1}.$$

Если  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = R^2$ , то входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  на любой частоте остается неизменным и чисто резистивным:  $Z_{11}(j\omega) = R$ .

**8.94м — 8.96м.** При определении входного сопротивления (входной проводимости) неавтономного четырехполюсника последний можно рассматривать как неавтономный двухполюсник и применить к такому двухполюснику метод пробного источника.

**8.97р.** Схемы однозвенных Т- и П-образных фильтров нижних частот типа  $k$  приведены на рис. 8.47 и 8.48 соответственно,  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ . Запишем соотношения между частотой среза  $\omega_c$ , характеристическим сопротивлением  $\underline{Z}_c$  и параметрами элементов этих фильтров:

$$\omega_c = 2/\sqrt{LC}; \quad \underline{Z}_{сТ} = \sqrt{\frac{L}{C} [1 - (\omega/\omega_c)^2]}, \quad \underline{Z}_{сП} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_c)^2}}.$$

По условию задачи сопротивление нагрузки  $R_H$  согласовано с фильтром на частоте  $\omega = 0$ , т. е.  $R_H = \underline{Z}_{сТ}|_{\omega=0} = \underline{Z}_{сП}|_{\omega=0} = \sqrt{LC}$ . Используя приведенные соотношения, находим

$$L = 2R_H/(\omega_c) = 0,2 \text{ Гн}; \quad C = 2/(\omega_c R_H) = 0,2 \text{ мкФ}.$$

**8.100м.** Характеристическая постоянная передачи фильтра, состоящего из двух идентичных звеньев, в два раза больше характеристической постоянной передачи однозвенного фильтра. Нагрузка предполагается согласованной с фильтром.

**8.102м** См. указание к задаче 8.100м.

**8.103р.** Границы полосы пропускания рассматриваемого реактивного фильтра определим из условий  $\underline{Z}_1 = 0$  и  $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$ . В данном случае  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ , следовательно, полоса пропускания простирается от  $\omega = 0$  до  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ .

Запишем общие соотношения, определяющие постоянные ослабления и фазы согласованного реактивного фильтра. В полосе пропускания  $A = 0$ ;  $B = \arccos [1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)]$ ; вне полосы пропускания  $A = \text{Arch} |1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)|$ ,  $\sin B = 0$ . Применительно к рассматриваемому фильтру эти соотношения принимают вид

$$A = 0; \quad B = \arccos [1 - 2(\omega/\omega_c)^2] \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_c;$$

$$A = \text{Arch} |1 - 2(\omega/\omega_c)^2|, \quad \sin B = 0 \text{ при } \omega > \omega_c.$$

Таким образом, вне полосы пропускания постоянная фаза  $B$  не зависит от частоты ( $\sin B = 0$ ), в полосе пропускания  $B$  зависит от частоты, причем при  $\omega = \omega_c$   $B = \pi$ . Поскольку функция  $B(\omega)$  всюду непрерывна, включая точку  $\omega = \omega_c$ , то вне полосы пропускания  $B = \pi$ .

Характеристическая постоянная передачи  $\underline{\Gamma} = \ln \dot{U}_1/\dot{U}_2 = A + jB$  позволяет найти соответствие между постоянными  $A$  и  $B$  и комплексным коэффициентом передачи цепи по напряжению  $K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1 = K_{21}(\omega) e^{j\Psi_{21}(\omega)}$ :  $K_{21}(\omega) = e^{-A}$ ;  $\Psi_{21}(\omega) = -B$ .

Графики АЧХ и ФЧХ фильтра приведены на рис. 8.74, а, б.

Полученные формулы и графики основаны на предположении, что фильтр согласован с сопротивлением нагрузки  $\underline{Z}_{H2}$  во всем диапазоне частот, т. е.  $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{сТ} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 [1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)]} = \sqrt{LC} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}$ .

Такое согласование невозможно, если сопротивление нагрузки фильтра имеет чисто резистивный характер:  $\underline{Z}_{H2} = R$ . В этом случае

частотные характеристики фильтра отличаются от полученных ранее (см. задачу 8.104р).

8.104р. Комплексный коэффициент передачи неавтономного четырехполюсника по напряжению

$$K_{21}(j\omega) = \left[ \underline{A}_{11} + \frac{1}{\underline{Z}_{H2}} \underline{A}_{12} \right]^{-1}$$

$\underline{A}$ -параметры рассматриваемого четырехполюсника имеют вид:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 / (2\underline{Z}_2); \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 [1 + \underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2)],$$

где  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ .

По условию задачи четырехполюсник согласован с сопротивлением нагрузки на частоте  $\omega = 0$ . Характеристическое сопротивление четырехполюсника (см. задачу 8.103р)  $\underline{Z}_{CT} = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}$ ;  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ . Следовательно,  $\underline{Z}_{H2} = R = \sqrt{L/C}$ .

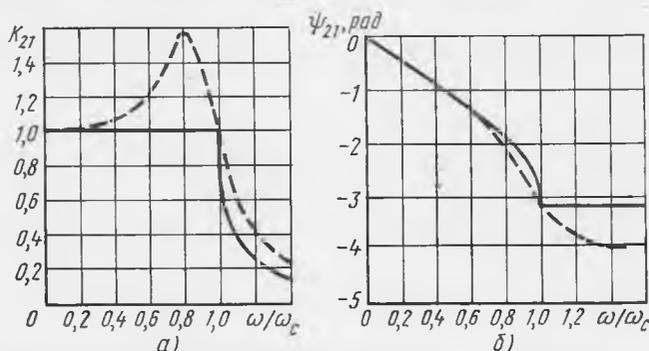


Рис. 8.74

Преобразовывая исходную формулу для  $K_{21}(j\omega)$  с учетом приведенных значений  $\underline{A}$ -параметров и  $\underline{Z}_{H2}$ , получим

$$K_{21}(j\omega) = [(1 - 2\bar{\omega}^2) + j2\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}^2)]^{-1},$$

где  $\bar{\omega} = \omega/\omega_c$  — нормированная частота. Из последнего выражения следует

$$K_{21}(\omega) = [(1 - 2\bar{\omega}^2)^2 + 4\bar{\omega}^2(1 - \bar{\omega}^2)^2]^{-1/2}, \quad \psi_{21}(\omega) = -\arctg \frac{2\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}^2)}{1 - 2\bar{\omega}^2}$$

АЧХ и ФЧХ четырехполюсника показаны пунктиром на рис.8.74, а, б.

8.109р. Частоту среза и характеристическое сопротивление однозвенного Г-образного фильтра нижних частот можно рассчитать по формулам, полученным для однозвенного Т-образного фильтра (см. задачу 8.103р):  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ ;  $\underline{Z}_{CT} = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}$ . По условию

задачи фильтр согласован с сопротивлением нагрузки  $R_H$  на частоте  $\omega = 0$ , т. е.  $R_H = \sqrt{L/C}$ .

По заданным значениям  $\omega_c$  и  $R_H$  находим параметры элементов фильтра:  $L = 2R_H\omega_c^{-1} = 0,2$  Гн;  $C = 2(\omega_c R_H)^{-1} = 0,2$  мкФ.

Схемы Г-образного звена фильтра типа  $k$  и последовательно-производного звена фильтра типа  $m$  приведены на рис. 8.75, а, б. Для фильтра нижних частот  $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ . Сопротивление продольной ветви звена фильтра типа  $m$  равно  $\frac{m}{2} \underline{Z}_1 = j\omega \frac{mL}{2}$ , а сопротивление поперечной ветви  $\frac{2}{m} \underline{Z}_2 + \frac{1-m^2}{2m} \underline{Z}_1 = (j\omega \frac{mC}{2})^{-1} + j\omega L \frac{1-m^2}{2m}$ .

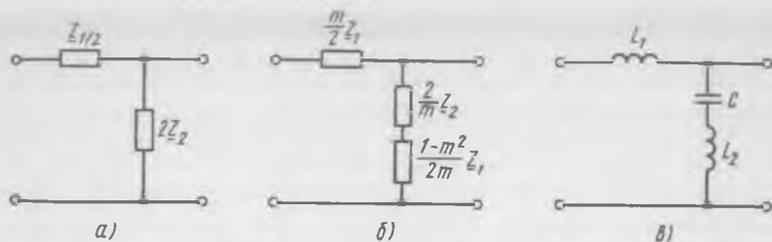


Рис. 8.75

Очевидно, в поперечной ветви включены последовательно реактивные сопротивления противоположных знаков, и в ней возникает резонанс напряжений на частоте

$$\omega_\infty = \frac{1}{\sqrt{\frac{mC}{2} \frac{1-m^2}{2m} L}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-m^2}}$$

Эту частоту можно считать частотой бесконечного затухания фильтра, поскольку при  $\omega = \omega_\infty$  сопротивление нагрузки  $R_H$  замкнуто накоротко поперечной ветвью и напряжение на выходе фильтра равно нулю.

Схема последовательно-производного звена фильтра типа  $m$  приведена на рис. 8.75, в, где  $L_1 = 60$  мГн;  $L_2 = 106,7$  мГн;  $C = 0,06$  мкФ;  $\omega_\infty = 1,25 \cdot 10^4$  рад/с.

8.110р. Схемы Г-образного звена фильтра типа  $k$  и параллельно-производного звена фильтра типа  $m$  приведены в общем виде на рис. 8.76, а, б. Для фильтра нижних частот  $\underline{Z}_1 = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ .

Частота среза фильтра определяется из условия, что  $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$ , т. е.  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$ . Характеристическое сопротивление фильтра

$$\underline{Z}_{сП} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + 4\underline{Z}_1/\underline{Z}_2}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2}}}$$

По условию задачи сопротивление нагрузки фильтра  $R_H = \sqrt{L/C}$ . Следовательно, параметры элементов фильтра такие же, как и в задаче 8.109р:  $L = 0,2$  Гн;  $C = 0,2$  мкФ.

Рассчитаем сопротивления ветвей звена фильтра типа  $m$ . Сопротивление поперечной ветви равно  $\frac{2}{m} Z_2 = \left(j\omega \frac{mC}{2}\right)^{-1}$ . Продольная ветвь образована параллельным соединением сопротивлений  $\frac{m}{2} Z_1 = j\omega \frac{mL}{2}$  и сопротивления  $\frac{2m}{1-m^2} Z_2 = (j\omega \frac{1-m^2}{2m} C)^{-1}$ .

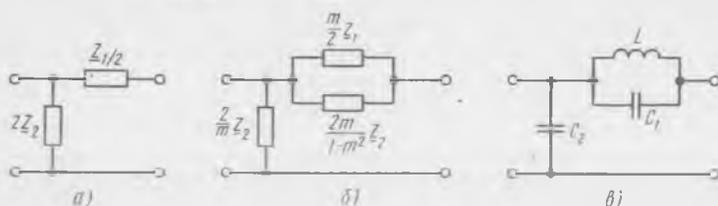


Рис. 8.76

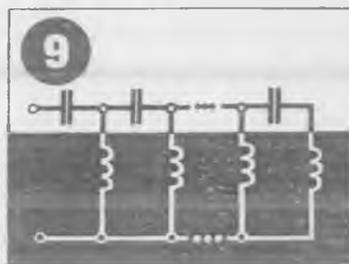
Очевидно, в продольной ветви включены параллельно реактивные сопротивления противоположных знаков, и в ней происходит резонанс токов на частоте

$$\omega_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{\frac{mL}{2} \frac{1-m^2}{2m} C}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{1-m^2}}$$

На этой частоте сопротивление продольной ветви бесконечно велико, и напряжение на выходе фильтра равно нулю, т. е. затухание фильтра бесконечно.

Схема параллельно-производного звена фильтра типа  $m$  приведена на рис. 8.76, в, где  $L = 60$  мГн;  $C_1 = 0,1067$  мкФ;  $C_2 = 0,06$  мкФ;  $\omega_{\infty} = 1,25 \cdot 10^4$  рад/с.

## Синтез электрических цепей



### § 9.1. Свойства операторных входных функций электрических цепей

9.1. Определить входные сопротивления цепей (рис. 9.1, а, б) и представить их в виде отношения двух полиномов  $p$ .

9.2. Определить входные проводимости цепей (рис. 9.1, в, г) и представить их в виде отношения двух полиномов  $p$ .

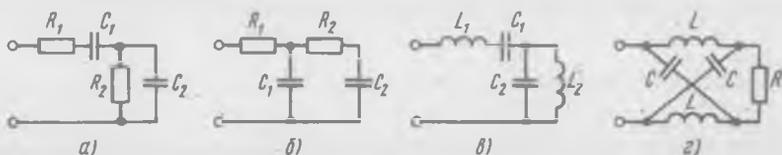


Рис. 9.1

9.3. Проверить, являются ли заданные функции  $F_i(p)$  положительными вещественными функциями:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } F_1(p) &= \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p}; & \text{б) } F_2(p) &= \frac{6p^3 + 3p}{12p^4 + 12p^2 + 1}, \\
 \text{в) } F_3(p) &= \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}; & \text{г) } F_4(p) &= \frac{12p^2 + p + 1}{6p^3 + 3p}.
 \end{aligned}$$

9.4р. На рис. 9.2, а — з показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей) двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью линейных пассивных цепей?

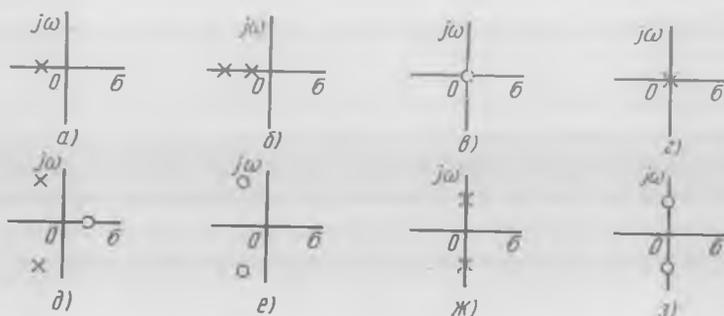


Рис. 9.2

9.5р. На рис. 9.3, а — е представлены полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей) двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью линейных пассивных LC-цепей без потерь?

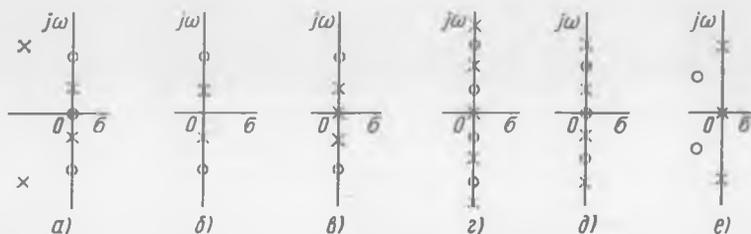


Рис. 9.3

9.6р. На рис. 9.4, *a* — *e* показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений двухполюсных цепей. Какие диаграммы физически нереализуемы с помощью *RC*-цепей?

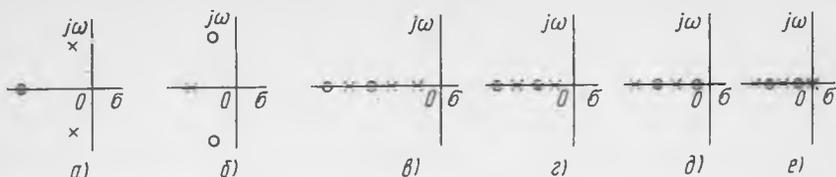


Рис. 9.4

9.7. Решите задачу 9.6р для входных сопротивлений *RL*-цепей.

9.8. На рис. 9.5, *a* — *г* показаны полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений двухполюсных цепей. Какие диаграммы относятся к *RL*-, а какие — к *RC*-цепям?

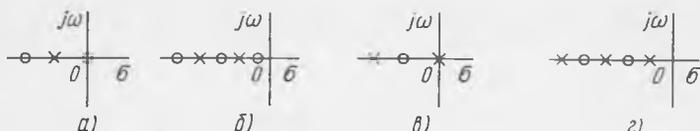


Рис. 9.5

9.9р. Может ли двухполюсник состоять из элементов *R* и *C*, если:

а)  $Z(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p(p+4)}$  Ом; б)  $Z(p) = \frac{p^2 + 6p + 5}{p(p+4)}$  Ом.

9.10. Может ли двухполюсник состоять из элементов *R* и *L*, если:

а)  $Z(p) = \frac{p(p+1)}{p-2}$  Ом; б)  $Z(p) = \frac{p+1}{p(p+2)}$  Ом; в)  $Z(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{p+2}$  Ом,

г)  $Z(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 + 7p + 12}$  Ом?

9.11. Может ли двухполюсник состоять из элементов *L* и *C*, если:

а)  $Z(p) = \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 1)}$  Ом; б)  $Z(p) = \frac{p(p^2 + 4)}{p^2 + 1}$  Ом; в)  $Z(p) = \frac{p(p^2 + 4)}{p^2 + 2p + 2}$  Ом?

9.12м. На рис. 9.6, *a* — *д* приведены полюсно-нулевые диаграммы некоторых функций комплексной переменной  $F_i(p)$ . Какие из этих функций могут быть физически реализованы в качестве операторного

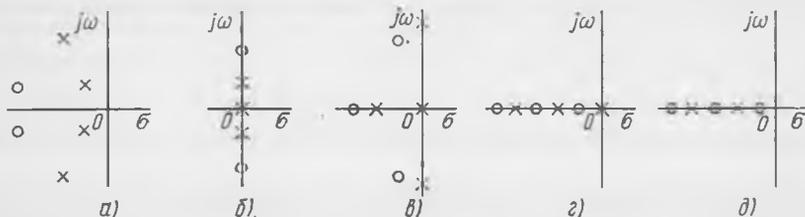


Рис. 9.6

входного сопротивления (операторной входной проводимости) линейного пассивного двухполюсника и с помощью каких элементов?

**9.13р.** Функция  $F(p)$  имеет полюсы  $p_{x1} = -1 + j$ ,  $p_{x2} = -1 - j$  и один отрицательный вещественный нуль  $p_0 = -a$ . Какой должна быть допустимая величина  $a$ , чтобы эта функция представляла собой входное сопротивление (входную проводимость) физически реализуемой пассивной линейной цепи?

**9.14м.** Функция  $F(p)$  имеет вид  $F(p) = (p^2 + 4p + a)/(p^2 + 6p + 8)$ . Каким условиям должна удовлетворять величина  $a$ , чтобы эту функцию можно было реализовать с помощью линейной пассивной цепи?

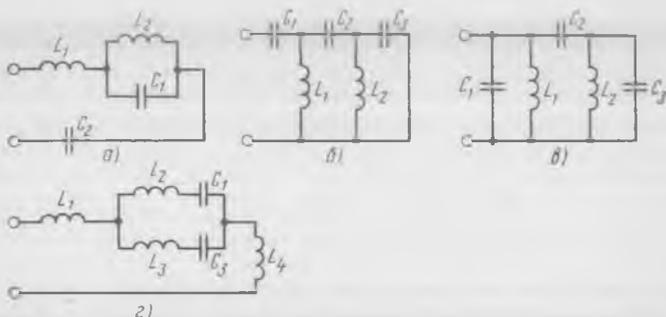


Рис. 9.7

**9.15р.** Построить качественно зависимости от частоты реактивной составляющей входного сопротивления  $x(\omega)$  и входной проводимости  $b(\omega)$  реактивных двухполюсников (рис. 9.7, а — в).

#### Решения и методические указания

**9.4р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных цепей следующие полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей): 1) диаграмма рис. 9.2, б, так как есть два полюса и ни одного нуля, соответственно степень числителя функции  $Z(p)$  [ $Y(p)$ ] меньше степени знаменателя на 2; 2) диаграмма рис. 9.2, д, так как есть нуль в правой полуплоскости; 3) диаграмма рис. 9.2, е, так как есть два нуля и ни одного полюса; 4) диаграмма рис. 9.2, ж, поскольку есть два полюса и ни одного нуля.

**9.5р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных LC-цепей без потерь следующие полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений (проводимостей):

1) диаграммы рис. 9.3, а, е, так как есть комплексно-сопряженные полюсы и нули с ненулевой вещественной частью; 2) диаграммы рис. 9.3, б, в, поскольку полюсы расположены на мнимой оси подряд, не чередуясь с нулями.

**9.6р.** Физически нереализуемы с помощью пассивных RC-цепей следующие полюсно-нулевые диаграммы входных сопротивлений:

1) диаграмма рис. 9.4, а, так как есть комплексно-сопряженные полю-

сы; 2) диаграмма рис. 9.4,б, поскольку есть комплексно-сопряженные нули; 3) диаграмма рис. 9.4,в, так как есть два подряд расположенных полюса; 4) диаграмма рис. 9.4,д, поскольку нуль расположен ближе к началу координат, чем полюс.

**9.9р.** а) Находим полюсы и нули функции  $Z(p)$ :  $p_{x1} = 0$ ;  $p_{x2} = -4$ ;  $p_{o1} = -1$ ;  $p_{o2} = -2$ . Два нуля следует подряд, не чередуясь с полюсами. Двухполюсник не может состоять только из элементов  $R$  и  $C$ .

б) Находим полюсы и нули функции  $Z(p)$ :  $p_{x1} = 0$ ;  $p_{x2} = -4$ ;  $p_{o1} = -1$ ;  $p_{o2} = -5$ . Двухполюсник может состоять из элементов  $R$  и  $C$ , поскольку выполняются необходимые ограничения на расположение полюсов и нулей (см. задачу 9.6р).

**9.12м.** Физически реализуемые функции должны быть положительными и вещественными. Наличие комплексно-сопряженных полюсов (нулей) указывает на цепи из элементов  $L$  и  $C$ .  $RC$ - и  $RL$ -цепи имеют полюсы и нули, расположенные на вещественной отрицательной полуоси, причем наличие полюса функции  $Z(p)$  в начале координат или же расположение полюса ближе к началу координат, чем нуля, указывает на  $RC$ -цепь.

**9.13р.** Задание полюсов и нулей определяет функцию  $F(p)$  с точностью до постоянного множителя  $k$ :  $F(p) = k \frac{p+a}{p^2+2p+2}$ .

Нужно выяснить, при каком значении  $a$  функция  $F(p)$  является положительной и вещественной. Значение  $a$  должно быть таким, чтобы на любой частоте  $\operatorname{Re}[F(j\omega)] \geq 0$ . Следовательно,

$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = k \frac{a(2-\omega^2)+2\omega^2}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2} \geq 0.$$

Это неравенство выполняется при  $0 \leq a \leq 2$ . Если  $a > 2$ , то вещественная составляющая  $\operatorname{Re}[F(j\omega)]$  может стать отрицательной.

**9.14м.** Задача решается аналогично предыдущей. Значение  $a$  должно быть таким, чтобы вещественная составляющая  $\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{(-\omega^2+a)(-\omega^2+8)+24\omega^2}{(-\omega^2+8)^2+36\omega^2}$  была бы неотрицательной на любой частоте.

**9.15р.** Рассмотрим двухполюсник, изображенный на рис. 9.7,а. Двухполюсник содержит  $N = 4$  независимо включенных реактивных элемента. Следовательно, частотная характеристика  $X(\omega)$  двухполюсника должна иметь  $N + 1 = 5$  экстремумов, из которых  $N - 1 = 3$  являются внутренними. Входное сопротивление двухполюсника бесконечно велико при  $\omega = 0, \infty$ . Поэтому частотная характеристика имеет полюсы при этих значениях. Предполагаем на частотной оси все экстремумы, учитывая, что первый по счету полюс находится в точке  $\omega = 0$ , а нули и полюсы чередуются (рис. 9.8,а).

Строим качественно зависимость  $X(\omega)$ , проводя кривую так, чтобы производная  $dX/d\omega$  была положительной (рис. 9.8,б). Далее легко построить зависимость  $b(\omega)$ , учитывая, что нулям функции в  $b(\omega)$  соответствуют полюсы функции  $X(\omega)$  (рис. 9.8,в).

Аналогичным образом можно получить частотные характеристики остальных двухполюсников. Частотная характеристика двухполюсни-

ка, изображенного на рис. 9.7, б, относится к типу  $(x - 0)$  и имеет шесть экстремумов (рис. 9.8, з).

Двухполюсник на рис. 9.7, в имеет частотную характеристику типа  $(0 - 0)$ , у которой существует пять экстремумов, так как число независимо включенных реактивных элементов, входящих в двухполюсник, равно четырем (элементы  $C_1, C_2$  и  $C_3$  образуют емкостный контур). Частотная характеристика этого двухполюсника приведена на рис. 9.8, д.

Двухполюсник на рис. 9.7, г содержит четыре независимо включенных реактивных элемента. Индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  включены последовательно и могут быть заменены одной индуктивностью  $L_{экв}$ , образующей вместе с элементами  $L_2$  и  $L_3$  индуктивный узел. Частотная характеристика этого двухполюсника приведена на рис. 9.8, е. При  $L_2 = L_3$  и  $C_1 = C_2$  число независимо включенных реактивных элементов уменьшается до двух, и частотная характеристика  $X(\omega)$  имеет один нуль и два полюса (рис. 9.8, ж).

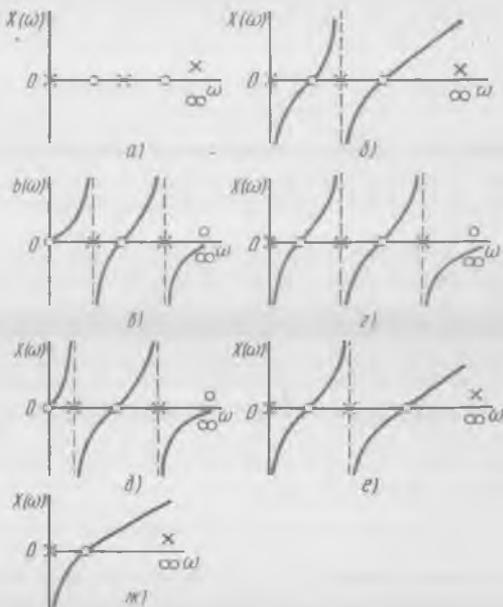


Рис. 9.8

## § 9.2. Методы реализации реактивных двухполюсников

9.16. Записать выражение для входного сопротивления  $Z(p)$  цепи (рис. 9.9)\* в виде отношения двух полиномов  $p$ .

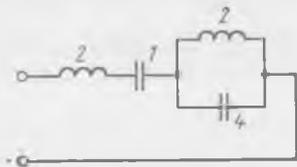


Рис. 9.9

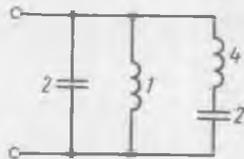


Рис. 9.10

9.17. Записать выражение для входной проводимости  $Y(p)$  двухполюсника (рис. 9.10) в виде отношения двух полиномов  $p$ .

\* На рис. 9.9, 9.10, 9.12, 9.13 индуктивности даны в генри, емкости — в фарадах, сопротивления — в омах.

9.18р. Положительная вещественная функция  $F(p)$  представлена в виде  $F(p) = 3p + \frac{5}{p} + \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{6p}{p^2 + 9}$ .

Полагая, что  $F(p)$  имеет смысл входного сопротивления некоторой цепи, построить ее схему и определить параметры элементов.

9.19м. Решить предыдущую задачу для случая, когда  $F(p)$  имеет смысл входной проводимости некоторой цепи.

9.20. Определить тип частотной характеристики цепи, входное сопротивление которой  $Z(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p}$  Ом. Найти качественно канонические схемы Фостера, реализующие данное входное сопротивление.

9.21р. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}$  Ом методом выделения простейших составляющих. Найти два возможных варианта решения.

9.22. Реализовать функцию  $Y(p) = \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}$  См методом выделения простейших составляющих.

9.23. Осуществить реализацию функции сопротивления  $Z(p) = \frac{18p^4 + 17p^2 + 1}{18p^3 + 2p}$  Ом в виде первой канонической схемы Фостера.

9.24. Найти два варианта реализации функции сопротивления  $Z(p) = \frac{36p^4 + 13p^2 + 1}{48p^3 + 7p}$  Ом методом выделения простейших составляющих.

9.25. На основании решения предыдущей задачи постройте схемы цепей, имеющие входное сопротивление в 10 раз больше исходного.

9.26м. Найти две цепи, построенные по схемам Фостера, частотная характеристика входного сопротивления которых  $X(\omega)$  задана графиком на рис. 9.11. Учесть, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ .



Рис. 9.11

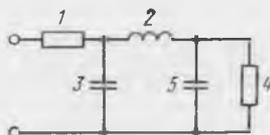


Рис. 9.12

9.27. Записать выражение для входного сопротивления лестничной цепи (рис. 9.12) в виде непрерывной (цепной) дроби.

9.28. Записать выражение для входной проводимости лестничной цепи (рис. 9.13) в виде непрерывной (цепной) дроби.

9.29p. Входное сопротивление некоторой лестничной цепи задано в виде непрерывной дроби

$$Z(p) = 2p + \frac{1}{3p + \frac{1}{p + \frac{1}{4p}}} \text{ Ом.}$$

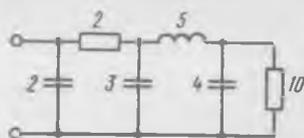


Рис. 9.13

Составить схему цепи и найти параметры ее элементов.

9.30. Решить задачу 9.29p для

$$Z(p) = 2 + \frac{1}{2p + \frac{1}{\frac{1}{3p} + \frac{1}{4p}}} \text{ Ом.}$$

9.31. Входная проводимость некоторой лестничной цепи задана в виде непрерывной дроби

$$Y(p) = 2p + \frac{1}{\frac{3}{p} + \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{4p}}} \text{ См.}$$

Составить схему цепи и найти параметры ее элементов.

9.32. Решить задачу 9.31 для

$$Y(p) = p + \frac{1}{2 + \frac{1}{3p + \frac{1}{\frac{1}{4p}}}} \text{ См.}$$

9.33p. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{12p^4 + 12p^2 + 1}$  Ом методом разложения в цепную дробь.

9.34. Функция операторного входного сопротивления  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{5p^2 + 1}$  Ом. Найти обе канонические реализации цепи по Кауэру.

9.35. Найти две цепи лестничной структуры, имеющие входное сопротивление  $Z(p) = \frac{3p^2 + 1}{6p^3 + 3p}$  Ом.

9.36. Реализовать функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{24p^4 + 18p^2 + 1}{24p^3 + 6p}$  Ом методом разложения в цепную дробь.

9.37. Найти параметры элементов цепей, построенных по каноническим схемам Кауэра, реализующих функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{12p^4 + 11p^2 + 1}{18p^3 + 2p}$  Ом.

9.38. Реализовать функцию входного сопротивления  $Z(p) = \frac{24p^4 + 20p^2 + 1}{48p^5 + 52p^3 + 6p}$  Ом в виде цепи, построенной по первой канонической схеме Кауэра.

9.39. Функция входного сопротивления  $Z(p)$  реализована методом разложения в цепную дробь. Как нужно изменить сопротивления продольных ветвей и проводимости поперечных ветвей полученной лестничной цепи, чтобы преобразованная цепь имела входное сопротивление  $QZ(p)$ , где  $Q$  — вещественное положительное число?

9.40м. Зависимость от частоты мнимой составляющей комплексного входного сопротивления реактивного двухполюсника  $X(\omega)$  приведена на рис. 9.14;  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{Z(p)}{p} \right] = 1,2$ . Найти две реализации этой характеристики по Кауэру.

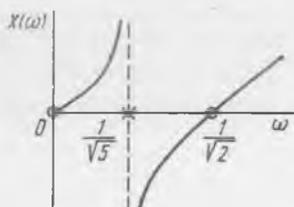


Рис. 9.14

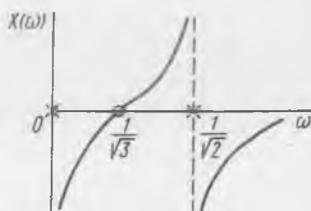


Рис. 9.15

9.41. Найти параметры элементов двух лестничных цепей, частотная характеристика входного сопротивления которых показана на рис. 9.15. Учесть, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 0,5$ .

9.42. Реализовать частотную характеристику входного сопротивления  $X(\omega)$  (см. рис. 9.11) в виде двух канонических схем Кауэра. Учесть, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ .

9.43р. При нулевых начальных условиях к пассивному двухполюснику подключают источник тока  $i(t) = 100t$  А. Напряжение на двухполюснике  $u(t) = 10^5 t - 500(1 - e^{-100t})$  В. Определить схему двухполюсника и ее параметры.

9.44м. При нулевых начальных условиях к пассивному двухполюснику подключают источник э.д.с.  $e(t) = 100 \cdot 1(t)$  В. Ток через двухполюсник  $i(t) = 11t - 0,1(1 - e^{-100t})$  А. Найти схему двухполюсника и ее параметры.

#### Решения и методические указания

9.18р. Метод выделения простейших составляющих позволяет реализовать реактивные двухполюсники, построенные на первой (рис. 9.16) или второй (рис. 9.17) канонической схеме Фостера.

В некоторых задачах схемы двухполюсников получаются более простыми. Если в ответе указано, что  $L_i = 0$ ,  $C_h = \infty$ , то это означает короткое замыкание соответствующих элементов. Напротив, запись  $L_i = \infty$ ,  $C_h = 0$  означает, что соответствующие элементы разомкнуты.

По условию  $F(p)$  имеет смысл входного сопротивления. Поэтому отдельные составляющие  $F(p)$  соответствуют сопротивлениям последо-

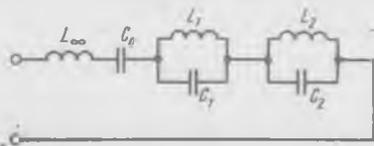


Рис. 9.16

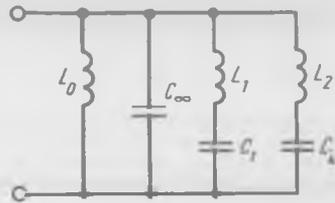


Рис. 9.17

вательно включенных простейших цепей. Так, составляющая  $3p$  соответствует индуктивности 3 Гн.

Необходимо учесть, что для параллельной  $LC$ -цепи операторное входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{1}{C} \frac{p}{p^2 + \frac{1}{LC}}$$

С учетом этих замечаний находим  $L_\infty = 3$  Гн;  $C_0 = 1/5$  Ф;  $L_1 = 1$  Гн;  $C_1 = 1/4$  Ф;  $L_2 = 2/3$  Гн;  $C_2 = 1/6$  Ф.

9.19м. Учтем, что операторная входная проводимость последовательной  $LC$ -цепи  $Y(p) = \frac{1}{L} \frac{p}{p^2 + (LC)^{-1}}$ .

9.21р. Заданная функция  $Z(p) = N(p)/M(p)$  соответствует частотной характеристике типа  $(0 - x)$ .

Уравнение  $M(p) = 0$  имеет единственную пару ненулевых корней:  $p_{x1} = j\omega_0 = j2 \cdot 10^5$ ;  $p_{x2} = -j2 \cdot 10^5$ . Следовательно, функция  $Z(p)$  может быть реализована в виде последовательного соединения индуктивности и параллельной  $LC$ -цепи. Числовые значения параметров элементов найдем из разложения

$$Z(p) = \alpha_\infty p + \frac{2\alpha_1 p}{p^2 + \omega_0^2}$$

где  $\alpha_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} [Z(p)/p] = 20 \cdot 10^{-3}$  Гн;  $\omega_0^2 = 4 \cdot 10^{10}$  с $^{-2}$ ;  $\alpha_1 = \text{Res } [Z(p)]_{p=p_{x1}} = \left[ \frac{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}{50 \cdot 10^{-12} p} \right]_{p=p_{x1}} = 10^9$  Ф $^{-1}$ .

Разложению  $Z(p)$  на простейшие составляющие соответствует схема рис. 9.16, причем элементы  $L_2$  и  $C_2$  закорочены, т.е.  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ ;  $L_\infty = \alpha_\infty = 20$  мГн;  $L_1 = 2\alpha_1/\omega_0^2 = 50$  мГн;  $C_1 = 1/(2\alpha_1) = 500$  пФ.

Построим вторую каноническую схему Фостера. Функцию

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}$$

можно представить в виде

$$Y(p) = \frac{\alpha'_0}{p} + \frac{2\alpha'_1 p}{p^2 + \omega_0^2}$$

где  $\alpha'_0 = \text{Res } [Y(p)]_{p=0} = \frac{100}{7}$  Гн $^{-1}$ .

Уравнение  $N(p) = p(0,5 \cdot 10^{-12}p^2 + 70 \cdot 10^{-3}) = 0$  имеет единственную пару ненулевых корней:  $p_{x1} = j\omega_0 = j\sqrt{14} \cdot 10^5$ ;  $p_{x2} = -j\omega_0$ . Следовательно,  $\alpha'_1 = \text{Res} [Y(p)]_{p=p_{x1}} = 125/7 \text{ Гн}^{-1}$ . Разложению  $Y(p)$  со-

ответствует схема, приведенная на рис. 9.17, причем элементы  $C_\infty$ ,  $L_2$  и  $C_2$  разомкнуты, т. е.  $C_\infty = 0$ ;  $C_2 = 0$ ;  $L_2 = \infty$ ;  $L_0 = 1/\alpha'_0 = = 70 \text{ мГн}$ ;  $L_1 = 1/(2\alpha'_1) = 28 \text{ мГн}$ ;  $C_1 = 2\alpha'_1/\omega_0^2 = 12\,500/49 \text{ пФ}$ .

**9.26м.** Решение задач такого типа осуществляют в два этапа. Сначала нужно найти аналитическое выражение для входной операторной функции  $Z(p)$ , используя заданную частотную характеристику  $X(\omega)$ . Затем функцию  $Z(p)$  следует реализовать в виде входного сопротивления некоторой  $LC$ -цепи.

Судя по виду частотной характеристики  $X(\omega)$ , операторная входная функция  $Z(p)$  имеет нули  $p_{01} = 0$ ,  $p_{02} = -p_{03} = j\sqrt{2}$ , и полюсы  $p_{x1} = = -p_{x2} = j1$ ;  $p_{x3} = -p_{x4} = j\sqrt{3}$ . Задание полюсов и нулей определяет функцию  $Z(p)$  с точностью до постоянного множителя  $k$ :

$$Z(p) = k \frac{p(p^2 + 2)}{(p^2 + 1)(p^2 + 3)} = k \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 4p^2 + 3}$$

По условию  $\lim_{p \rightarrow \infty} [pZ(p)] = 1$ , следовательно,  $k = 1$ . Теперь задача сводится к реализации заданной функции  $Z(p)$  методом Фостера (см. задачу 9.21р).

**9.29р.** Схемы цепей, рассмотренных в задачах 9.29—9.36, можно представить одной обобщенной схемой (рис. 9.18).

В некоторых задачах цепные схемы получаются более простыми. Чтобы и в таких случаях можно было применять рис. 9.18, условимся, что запись  $Z_i = 0$ ;  $Y_k = \infty$  символизирует короткое замыкание соответствующей ветви обобщенной схемы. Напротив, запись  $Z_i = \infty$ ;  $Y_k = 0$  свидетельствует о том, что соответствующие ветви разомкнуты. Такая форма представления результатов позволяет дать их в наиболее сжатом виде. Для рассматриваемой задачи  $Y_1(p) = 0$ ;  $Z_2(p) = 2p$ ;  $Y_3(p) = 3p$ ;  $Z_4(p) = p$ ;  $Y_5(p) = 4p$ .

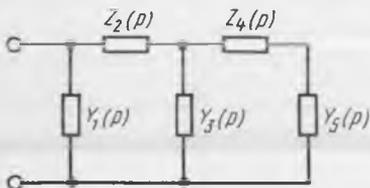


Рис. 9.18

**9.33р.** Функция  $Z(p)$  имеет частотную характеристику вида  $(0-0)$ . Для реализации первой канонической схемы Кауэра используют ту из входных функций цепи, которая имеет полюс в бесконечности. Выбирая для реализации функцию  $Y(p) = 1/Z(p)$  и располагая полиномы в числителе и знаменателе в порядке убывания степеней  $p$ , получаем следующее разложение функции  $Y(p)$  в цепную дробь:

$$Y(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p} = 2p + \frac{1}{p + \frac{1}{3p + \frac{1}{2p}}} \text{ См.}$$

Для реализации второй канонической схемы Кауэра применяют ту из входных функций цепи, которая имеет полюс в нуле. Выбирая для реализации функцию  $Y(p) = 1/Z(p)$  и располагая полиномы в числителе и знаменателе в порядке возрастания степеней  $p$ , получаем

$$Y(p) = \frac{1 + 12p^2 + 12p^4}{3p + 6p^3} = \left(\frac{1}{3p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{3}{10p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{0,24p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}p\right)}}} \text{ См.}$$

Параметры обобщенной цепной схемы (рис. 9.18): 1)  $Y_1(p) = 2p$ ;  $Z_2(p) = p$ ;  $Y_3(p) = 3p$ ;  $Z_4(p) = 2p$ ;  $Y_5(p) = \infty$ ; 2)  $Y_1(p) = 1/(3p)$ ;  $Z_2(p) = 3/(10p)$ ;  $Y_3(p) = 1/(0,24p)$ ;  $Z_4(p) = 1/(5p)$ ;  $Y_5(p) = \infty$ .

Эти наборы параметров относятся к первой и второй каноническим схемам Кауэра, реализующим заданную функцию  $Z(p)$ .

9.40м. Последовательность решения этой задачи такая же, как и задачи 9.26м. Операторная входная функция  $Z(p)$  имеет нули  $p_{01} = 0$ ;  $p_{02} = -p_{03} = j \frac{1}{\sqrt{2}}$  и полюсы  $p_{x1} = -p_{x2} = j \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Следовательно,

$Z(p) = k \frac{p(p^2 + 1/2)}{p^2 + 1/5}$  Ом. Постоянный множитель  $k$  найдем из условия, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{Z(p)}{p} \right] = 1,2$ . Таким образом,  $k = 1,2$  и  $Z(p) = \frac{6p^3 + 3p}{5p^2 + 1}$  Ом.

Теперь можно определить обе канонические реализации этой входной функции по Кауэру.

9.43р. По заданным функциям  $i(t)$  и  $u(t)$  найдем их изображения по Лапласу  $I(p)$  и  $U(p)$ , а затем — операторную входную функцию  $Z(p)$ :

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{500p + 10^5}{p + 100} \text{ Ом.}$$

Задача реализации этой функции, как и всякая задача синтеза, неоднозначна. Можно, например, представить функцию  $Z(p)$  в виде суммы  $Z(p) = \frac{500p}{p + 100} + \frac{10^5}{p + 100}$  Ом и каждому слагаемому этой суммы поставить в соответствие элементарную цепь. Два отдельных двухполюсника, состоящие из параллельно включенных элементов  $R_1$  и  $L$ ,  $R_2$  и  $C$ , имеют следующие операторные входные функции:

$$Z_1(p) = \frac{pR_1}{p + \frac{R_1}{L}}; \quad Z_2(p) = \frac{1}{C} \frac{1}{p + \frac{1}{R_2 C}}$$

Следовательно, найденная функция  $Z(p)$  соответствует двухполюснику, схема которого изображена на рис. 9.19, при  $L = 5$  Гн;  $R_1 = 500$  Ом;  $C = 10$  мкФ;  $R_2 = 1$  кОм.

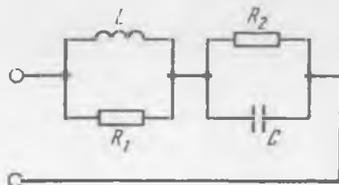


Рис. 9.19

9.44м. Как и предыдущая, эта задача имеет несколько решений. Выяснить, выполняются ли условия задачи для двухполосника рис. 9.19.

### § 9.3. Элементы синтеза четырехполосников

9.45. Полусно-нулевая диаграмма для операторного коэффициента передачи четырехполосника по напряжению симметрична относительно оси  $j\omega$ : каждому полюсу в левой полуплоскости соответствует нуль в правой полуплоскости, являющийся отражением этого полюса. Показать, что четырехполосник является всепропускающим, т.е. его АЧХ постоянна на всех частотах.

9.46. Операторный коэффициент передачи четырехполосника по напряжению  $K(p) = (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)^{-1}$ . Является ли этот четырехполосник минимально-фазовым? Построить АЧХ четырехполосника.

9.47. Даны два четырехполосника с операторными коэффициентами передачи по напряжению  $K_1(p) = \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$ ;  $K_2(p) = \frac{p^2 - a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$ , где  $a_i, b_i > 0$ . С помощью полюсно-нулевых диаграмм показать, что АЧХ четырехполосников идентичны. Какой из двух четырехполосников является не минимально-фазовым?

9.48. На основании анализа полюсно-нулевых диаграмм для операторных коэффициентов передачи четырехполосников по напряжению (рис. 9.20, а—г) построить качественно АЧХ и ФЧХ четырехполосников.

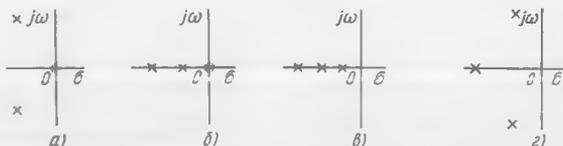


Рис. 9.20

9.49. Показать, что при произвольной нагрузке полюсы операторного коэффициента передачи четырехполосника по напряжению  $K(p)$  совпадают с нулями операторного входного сопротивления  $Z_{вх}(p)$ .

9.50р. Построить П-образный четырехполосник, Y-параметры которого определяются следующими выражениями:  $Y_{11}(p) = \frac{4p^3 + 3p}{2p^2 + 1}$  См;

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-p}{2p^2 + 1} \text{ См}; Y_{22}(p) = \frac{6p^3 + 4p}{2p^2 + 1} \text{ См.}$$

9.51. Найти одну из реализаций П-образного четырехполосника, соответствующую заданным первичным параметрам:  $Y_{11}(p) = \frac{24p^2 + 13p + 1}{6p + 1}$  См;  $Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-3p}{6p + 1}$  См;  $Y_{22}(p) = \frac{36p^2 + 21p + 1}{18p + 3}$  См.

9.52р. Синтезировать Т-образный четырехполосник, Z-параметры которого определяются следующими выражениями:  $Z_{11}(p) =$

$$= \frac{36p^4 + 16p^2 + 1}{12p^3 + 2p} \text{ Ом}; Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{12p^3 + 2p} \text{ Ом}; Z_{22}(p) = \frac{12p^4 + 15p^2 + 1,5}{12p^3 + 2p} \text{ Ом}.$$

9.53. Убедиться, что операторные коэффициенты передачи по напряжению четырехполюсников, состоящих только из реактивных элементов (рис. 9.21, а—г), представляют собой отношение полиномов четных степеней комплексной переменной  $p$ .

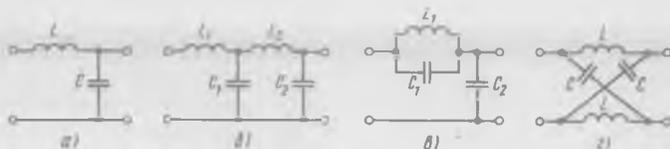


Рис. 9.21

9.54р. Коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{2p^2 - 1}{6p^2 + 1}$ . Реализовать  $K(p)$  с помощью симметричной мостовой цепи.

9.55. Возможно ли реализовать функцию, приведенную в предыдущей задаче, с помощью Г-образной цепи?

9.56. Определить параметры симметричной мостовой цепи по заданному коэффициенту передачи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{6p^2 + 1}{10p^2 + 1}$ .

9.57р. Синтезировать функцию, приведенную в предыдущей задаче, с помощью Г-образной цепи.

9.58р. Построить симметричный мостовой четырехполюсник, у которого операторный коэффициент передачи по напряжению при согласованной нагрузке  $Z_{\text{н}} = 0,5 \text{ Ом}$  определяется следующим выражением:  $K(p) = \frac{24p + 1}{24p + 7}$

9.59м. Поперечная ветвь Г-образного четырехполюсника состоит из сопротивления  $R = 1 \text{ кОм}$  (рис. 9.22). Состав продольной ветви четырехполюсника неизвестен. При нулевых начальных условиях четырехполюсник подключают к источнику э. д. с.  $e(t) = 10 \cdot 1(t) \text{ В}$ . При этом напряжение на выходе  $u_2(t) = 5(1 - e^{-100t}) \text{ В}$ . Составить схему продольной ветви  $Z$  и определить параметры входящих в нее элементов.

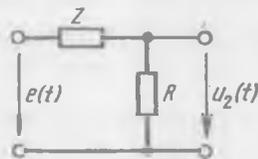


Рис. 9.22

9.60. Решить задачу 9.59м для  $e(t) = 10 \cdot 1(t) \text{ В}$ ;  $u_2(t) = 2 + 8e^{-100t} \text{ В}$ .

9.50р. Элементы П-образной цепи (рис. 9.23,а) связаны с  $Y$ -параметрами соотношениями:

$$Z_{1П}(p) = \frac{-1}{Y_{12}(p)}; \quad Z_{2П}(p) = \frac{1}{Y_{11}(p) + Y_{12}(p)}; \quad Z_{3П}(p) = \frac{1}{Y_{22}(p) + Y_{12}(p)}$$

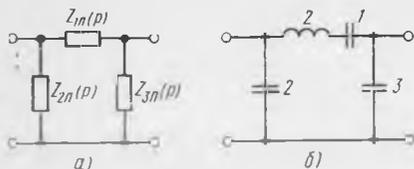


Рис. 9.23

Для заданных  $Y$ -параметров

$$Z_{1П}(p) = 2p + 1/p;$$

$$Z_{2П}(p) = 1/(2p); \quad Z_{3П}(p) = 1/(3p).$$

Функции  $Z_{1П}(p)$ ,  $Z_{2П}(p)$  и  $Z_{3П}(p)$  являются физически реализуемыми. Полная схема синтезированного четырехполюсника приведена на рис. 9.23, б\*.

9.52р. Элементы Т-образной цепи (рис. 9.24,а) связаны с  $Z$ -параметрами соотношениями:  $Z_{1Т}(p) = Z_{11}(p) - Z_{12}(p)$ ;  $Z_{2Т}(p) = Z_{12}(p)$ ;  $Z_{3Т}(p) = Z_{22}(p) - Z_{12}(p)$ . Для заданных  $Z$ -параметров  $Z_{1Т}(p) = 2p$ ;  $Z_{3Т}(p) = 1(4p)$ ,  $Z_{2Т}(p) = \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{12p^3 + 2p}$ . Для реализации сопротивления  $Z_{2Т}(p)$  используем первую каноническую схему Фостера. В результате получим

$$Z_{2Т}(p) = p + \frac{1}{2p} + \frac{p}{3(p^2 + 1/6)}$$

Полная схема синтезированного четырехполюсника, имеющего заданные  $Z$ -параметры, приведена на рис. 9.24,б.

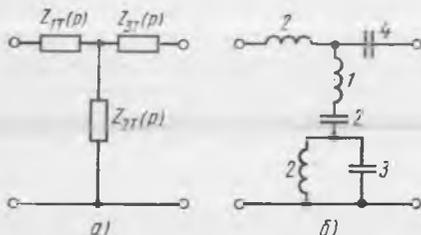


Рис. 9.24

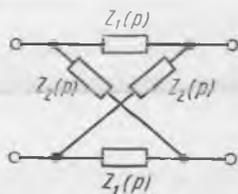


Рис. 9.25

9.54р. Операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}$ . Для реализации функции  $K(p)$  выбрана симметричная мостовая цепь (рис. 9.25), для которой  $Z_1(p) = Z_{11}(p) - Z_{21}(p)$ ,  $Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{21}(p)$ . Представим заданную функцию  $K(p)$  в виде

$$K(p) = N(p)/M(p),$$

\* На рис. 9.23, 9.24 индуктивности даны в генри, емкости — в фарадах.

где  $N(p) = 2p^2 - 1$ ,  $M(p) = 6p^2 + 1$  — известные полиномы  $p$ , и введем полином  $Q(p)$ , такой, чтобы отношения полиномов

$$\frac{M(p) - N(p)}{Q(p)} = Z_1(p); \quad \frac{M(p) + N(p)}{Q(p)} = Z_2(p)$$

представляли собой положительные вещественные функции. Пусть  $Q(p) = ap$  ( $a$  — некоторая положительная константа). Тогда  $Z_1(p) =$

$$= Z_{11}(p) - Z_{21}(p) = \frac{4}{a}p + \frac{2}{a} \frac{1}{p} \text{ Ом}; \quad Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{21}(p) = \frac{8}{a}p \text{ Ом}.$$

Таким образом, сопротивление  $Z_1(p)$  образовано последовательно соединенными индуктивностью  $L_1 = 4/a$  Гн и емкостью  $C_1 = a/2$  Ф, а  $Z_2(p)$  состоит из индуктивности  $L_2 = 8/a$  Гн.

Несложно проверить, что заданная функция  $K(p)$  обеспечивается при любом  $a > 0$ , поэтому при выборе  $a$  следует учитывать массу и габариты, а также конструктивные, экономические и другие показатели.

**9.57р.** Операторный коэффициент передачи Г-образного четырехполюсника (рис. 9.26) по напряжению

$$K(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_b(p) + Z_a(p)} = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{6p^2 + 1}{10p^2 + 1},$$

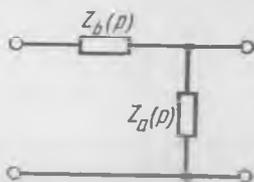


Рис. 9.26

где  $N(p)$  и  $M(p)$  — полиномы комплексной переменной  $p$ .

Введем полином  $Q(p)$ , такой, чтобы  $Z_a(p)$  и  $Z_b(p)$  представляли собой положительные вещественные функции:

$$\frac{N(p)}{Q(p)} = Z_a(p); \quad \frac{M(p) - N(p)}{Q(p)} = Z_b(p).$$

Пусть  $Q(p) = ap$ , где  $a > 0$ . Тогда  $Z_a(p) = \frac{6p^2 + 1}{ap} = \frac{6}{a}p + \frac{1}{ap}$ ;

$$Z_b(p) = \frac{(10p^2 + 1) - (6p^2 + 1)}{ap} = \frac{4}{a}p.$$

Таким образом, сопротивление  $Z_a(p)$  образовано последовательным соединением индуктивности  $L_a = 6/a$  (Гн) и емкости  $C_a = a$  (Ф), а  $Z_b(p)$  состоит из индуктивности  $L_b = 4/a$  (Гн). Нетрудно убедиться, что заданная функция  $K(p)$  обеспечивается при любом  $a > 0$ .

**9.58р.** Операторный коэффициент передачи нагруженного четырехполюсника по напряжению

$$K(p) = \left[ A_{11}(p) + \frac{A_{12}(p)}{Z_H(p)} \right]^{-1}.$$

$A$ -параметры симметричного мостового четырехполюсника (см. рис. 9.25) и его характеристическое сопротивление таковы:

$$A_{11}(p) = \frac{Z_1(p) + Z_2(p)}{Z_2(p) - Z_1(p)}; \quad A_{12}(p) = \frac{2Z_1(p)Z_2(p)}{Z_2(p) - Z_1(p)};$$

$$Z_c(p) = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)}.$$

По условию задачи четырехполюсник согласован с нагрузкой [ $Z_{\text{н}}(p) = Z_c(p)$ ]. Из приведенных соотношений находим

$$Z_1(p) = Z_{\text{н}}(p) \frac{1-K(p)}{1+K(p)}; \quad Z_2(p) = Z_{\text{н}}(p) \frac{1+K(p)}{1-K(p)}$$

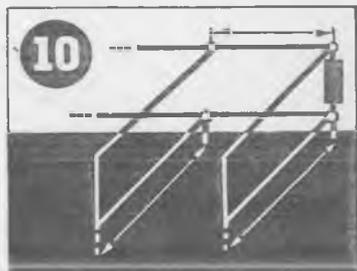
После несложных преобразований получим

$$Z_1(p) = \frac{1}{16p+8/3} \text{ Ом}; \quad Z_2(p) = (4p+2/3) \text{ Ом}.$$

Очевидно, ветвь  $Z_1(p)$  образована параллельным соединением емкости  $C_1 = 16 \text{ Ф}$  и сопротивления  $R_1 = 3/8 \text{ Ом}$ , а ветвь  $Z_2(p)$  — последовательным соединением индуктивности  $L_2 = 4 \text{ Гн}$  и сопротивления  $R_2 = 2/3 \text{ Ом}$ .

**9.59м.** Перейти к изображениям по Лапласу входного и выходного напряжений и определить операторный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению  $K(p)$ . После нахождения операторного сопротивления  $Z(p)$  по известным  $R$  и  $K(p)$  осуществляется его синтез.

## Цепи с распределенными параметрами



### § 10.1. Однородные длинные линии при гармоническом внешнем воздействии

**10.1.** Определить волновое сопротивление  $Z_{\text{в}}$ , коэффициент распространения  $\gamma$ , фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$  и длину волны  $\lambda$  в линии на частоте  $f = 800 \text{ Гц}$ . Погонные параметры линии:  $R_1 = 11,4 \text{ Ом/км}$ ;  $L_1 = 0,6 \times 10^{-3} \text{ Гн/км}$ ;  $C_1 = 38 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ;  $G = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$ .

**10.2.** Считая известными погонные параметры линии, получить выражения для коэффициента ослабления  $\alpha$  и коэффициента фазы  $\beta$ . Упростить найденные выражения для линии с малыми потерями ( $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $\omega C_1 \gg G_1$ ).

**10.3р.** Определить напряжение  $u(l, t)$  на выходе линии, рассмотренной в задаче 10.1, если к ее входу приложено напряжение  $u(0, t) = \sqrt{2} \cdot 500 \cos(2\pi 800t) \text{ В}$ . Линия нагружена на сопротивление, равное волновому; длина линии  $l = 100 \text{ км}$ .

**10.4.** Однородная линия передачи ( $L_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$ ;  $C_1 = 5 \times 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ) нагружена на сопротивление  $R_{\text{н}} = 500 \text{ Ом}$ . Определить

коэффициент отражения по напряжению  $\rho_2$  в конце линии и коэффициент бегущей волны  $K_6$ .

10.5. К выходу однородной линии передачи ( $R_1 = 6,5 \text{ Ом/км}$ ;  $L_1 = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/км}$ ;  $C_1 = 5,22 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/км}$ ;  $G_1 = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$ ) подключена нагрузка в виде последовательно включенных конденсатора емкостью  $C = 1 \text{ мкФ}$  и резистора сопротивлением  $R = 500 \text{ Ом}$ . Найти коэффициент отражения по напряжению  $\rho_2$  в конце линии и коэффициент бегущей волны  $K_6$  на частоте  $1 \text{ кГц}$ .

10.6р. Вывести формулы для законов распределения комплексных действующих значений напряжения  $\dot{U}(x)$  и тока  $\dot{I}(x)$  вдоль линии, если заданы комплексное действующее значение напряжения на входе линии  $\dot{U}(0)$  и комплексное сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_н$ . Длину линии  $l$  и ее волновые параметры  $\underline{Z}_в$ ,  $\gamma$  считать известными.

10.7. Решить задачу 10.6р, считая известными комплексные действующие значения напряжения на входе  $\dot{U}(0)$  и выходе  $\dot{U}(l)$  линии.

10.8м. Линия без потерь длиной  $l = 15 \text{ м}$  нагружена на сопротивление  $R_н = 100 \text{ Ом}$ . Погонные параметры линии:  $L_1 = 0,42 \text{ мкГн/м}$ ;  $C_1 = 75 \text{ пФ/м}$ . Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 100 \text{ МГц}$ . Определить распределение действующих значений напряжения  $U(x)$  и тока  $I(x)$  вдоль линии, принимая действующее значение напряжения на входе линии  $U(0) = 1 \text{ В}$ .

10.9р. Найти волновое сопротивление  $\underline{Z}_в$  и фазовую скорость  $v_\phi$  линии без потерь, если в конце линии, нагруженной на сопротивление  $R_н = 200 \text{ Ом}$ , наблюдается максимум действующего значения напряжения ( $U_{\max} = 1,5 \text{ В}$ ), а ближайший минимум напряжения ( $U_{\min} = 0,9 \text{ В}$ ) расположен на расстоянии  $a = 0,75 \text{ м}$  от ее конца. Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 100 \text{ МГц}$ .

10.10м. Действующее значение напряжения на выходе разомкнутой линии без потерь  $6,4 \text{ В}$ ; при подключении сопротивления нагрузки  $R = 100 \text{ Ом}$  оно уменьшается до  $1,33 \text{ В}$ . В обоих случаях действующее значение напряжения на входе линии составляет  $1 \text{ В}$ , а частота его сохраняется неизменной. Рассчитать волновое сопротивление  $\underline{Z}_в$  линии.

10.11р. Длинная линия без потерь нагружена на емкость  $C_н = 20 \text{ пФ}$ . Волновое сопротивление  $\underline{Z}_в = 100 \text{ Ом}$ ; длина волны  $\lambda = 3 \text{ м}$ ; фазовая скорость линии  $v_\phi = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . На каком расстоянии  $a$  от конца линии находится ближайший узел напряжения?

10.12. Нагрузкой линии без потерь является индуктивность  $L_н = 0,5 \text{ мкГн}$ . Волновое сопротивление  $\underline{Z}_в = 100 \text{ Ом}$ ; длина волны  $\lambda = 3 \text{ м}$ ; фазовая скорость в линии  $v_\phi = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . На каком расстоянии  $a$  от конца линии находится ближайший узел напряжения?

10.13р. Ближайший узел напряжения расположен на расстоянии  $a = 0,6 \text{ м}$  от конца линии, нагруженной на реактивное сопротивление  $\underline{Z}_н = jx_н$ . Определить значение и знак сопротивления  $x_н$  для  $\underline{Z}_в$ ,  $\lambda$ ,  $v_\phi$ , приведенных в условии задачи 10.12.

**10.3р.** В режиме бегущих волн комплексное действующее значение напряжения в произвольной точке линии  $\dot{U}(x)$  может быть выражено через комплексное действующее значение на входе линии  $\dot{U}(0)$ :  $\dot{U}(x) = \dot{U}(0)e^{-\gamma x}$ . Коэффициент распространения  $\underline{\gamma} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = (29 + j37,6) \cdot 10^{-3} \text{ км}^{-1}$ . Следовательно,  $\dot{U}(l) = 500e^{-(2,9 + j3,76)l} = 27,5e^{-j215^\circ 26'}$  В. Мгновенное значение напряжение на выходе линии  $u(l, t) = \sqrt{2} \cdot 27,5 \cos(2\pi 800t - 215^\circ 26')$  В.

**10.6р.** Решения дифференциальных уравнений однородной длинной линии имеют вид:

$$\dot{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \dot{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_B} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{1}{\underline{Z}_B} \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}.$$

Постоянные интегрирования  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  должны быть выражены через заданные  $\dot{U}_0$  и  $\underline{Z}_H$ . Учитывая, что  $\dot{U}(l) = \underline{Z}_H \dot{I}(l)$  и  $\dot{U}(0)$  известны, находим уравнения для постоянных интегрирования:

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \dot{U}(0); \underline{A}_2 = -\underline{A}_1 \frac{m-1}{m+1} e^{-2\underline{\gamma}l}; m = \underline{Z}_B / \underline{Z}_H.$$

Подставляя полученные значения  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  в выражения для  $\dot{U}(x)$  и  $\dot{I}(x)$ , находим:  $\dot{U}(x) = \dot{U}(0)[\text{ch}\underline{\gamma}(l-x) + m \text{sh}\underline{\gamma}(l-x)] \cdot (\text{ch}\underline{\gamma}l + m \text{sh}\underline{\gamma}l)^{-1}$ ;  $\dot{I}(x) = \dot{U}(0)\underline{Z}_B^{-1} [m \text{ch}\underline{\gamma}(l-x) + \text{sh}\underline{\gamma}(l-x)](\text{ch}\underline{\gamma}l + m \text{sh}\underline{\gamma}l)^{-1}$ . В ряде случаев удобно определять законы распределения  $\dot{U}(x)$ ,  $\dot{I}(x)$ , считая известными  $\dot{U}(l)$  и  $\underline{Z}_H$ . Поскольку  $\dot{U}(l) = \dot{U}(0)(\text{ch}\underline{\gamma}l + m \text{sh}\underline{\gamma}l)^{-1}$ , то

$$\begin{aligned} \dot{U}(l-y) &= \dot{U}(l)(\text{ch}\underline{\gamma}y + m \text{sh}\underline{\gamma}y); \dot{I}(l-y) = \\ &= \dot{U}(l)\underline{Z}_B^{-1}(m \text{ch}\underline{\gamma}y + \text{sh}\underline{\gamma}y), \end{aligned}$$

где  $y = l - x$  — координата, отсчитываемая от конца линии.

**10.8м.** См. задачу 10.6р.

**10.9р.** Для линии без потерь, нагруженной на сопротивление  $R_H$ ,  $\underline{\gamma} = j\beta$ , а  $m = \underline{Z}_B / \underline{Z}_H$  — вещественное число. На основании результатов решения задачи 10.6р можно записать

$$U(l-y) = U(l) \sqrt{\cos^2 \beta y + (m \sin \beta y)^2},$$

где  $m = \underline{Z}_B / R_H$ ;  $y = l - x$ .

При  $m < 1$ , т.е. при  $R_H > \underline{Z}_B$ , максимальное значение функции  $U(y)$   $U_{\max} = U(l)$ , а минимальное  $U_{\min} = mU_{\max}$ , причем соседние максимумы и минимумы расположены на расстоянии  $a = \pi / (2\beta) = \lambda / 4$  друг от друга. Следовательно,  $v_{\Phi} = \lambda f = 4af = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\underline{Z}_B = R_H U_{\min} / U_{\max} = 120 \text{ Ом}$ . Отметим, что при  $m > 1$ , т.е. при  $R_H < \underline{Z}_B$ ,  $U_{\min} = U(l)$ ;  $U_{\max} = mU_{\min}$ .

**10.10м.** Проанализировать выражение  $U(0) = U(l) \sqrt{\cos^2 \beta l + (m \sin \beta l)^2}$  (см. решение задачи 10.9р) для двух случаев: а)  $m = 0$  ( $R_{\text{н}} = \infty$ ); б)  $m = Z_{\text{в}}/R_{\text{н}}$ . По известным значениям  $U(0)$  и  $U(l)$  найти  $\cos^2 \beta l$ ,  $m$ , а затем  $Z_{\text{в}}$ .

**10.11р.** Распределение напряжения вдоль линии можно выразить следующей формулой (см. задачу 10.6р):

$$\dot{U}(l-y) = \dot{U}(l) (\underline{\text{ch}} \underline{\gamma} y + \underline{m} \underline{\text{sh}} \underline{\gamma} y).$$

По условию задачи  $\underline{\gamma} = j\beta$ ,  $\underline{m} = Z_{\text{в}}/Z_{\text{н}} = j\omega C_{\text{н}} Z_{\text{в}}$ . Следовательно,

$$U(l-y) = U(l) (\cos \beta y - \omega C_{\text{н}} Z_{\text{в}} \sin \beta y).$$

Отсюда получаем уравнение  $\text{tg} \beta y = 1/(\omega C_{\text{н}} Z_{\text{в}})$ , решение которого дает координаты узлов напряжения

$$y_0 = \frac{l\lambda}{2\pi} \text{arctg} \frac{1}{\omega C_{\text{н}} Z_{\text{в}}},$$

где  $\beta = 2\pi/\lambda$ . Частоту колебаний в линии определяем по заданным  $\nu_{\text{ф}}$  и  $\lambda$ :  $f = \nu_{\text{ф}}/\lambda = 100$  МГц. Вычисляем  $\text{arctg} \frac{1}{\omega C_{\text{н}} Z_{\text{в}}} = \text{arctg} 0,796 = (0,672 + \pi n)$  рад,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  Таким образом,  $y_0 = \frac{\lambda}{2\pi} (0,672 + \pi n) = (0,32 + 1,5n)$  м. Ближайший узел напряжения расположен на расстоянии  $a = 0,32$  м от конца линии. Этот результат может быть получен иным методом (см. задачу 10.18р).

**10.13р.** Учитывая, что  $\underline{\gamma} = j\beta$  и  $\underline{m} = Z_{\text{в}}/Z_{\text{н}} = -j Z_{\text{в}}/x_{\text{н}}$ , преобразуем полученное ранее выражение  $\dot{U}(l-y) = \dot{U}(l) (\underline{\text{ch}} \underline{\gamma} y + \underline{m} \underline{\text{sh}} \underline{\gamma} y)$  к виду

$$U(l-y) = U(l) \left( \cos \beta y + \frac{Z_{\text{в}}}{x_{\text{н}}} \sin \beta y \right).$$

Согласно условию, ближайший узел напряжения расположен на расстоянии  $a = 0,6$  м от конца линии. Следовательно,

$$x_{\text{н}} = -Z_{\text{в}} \text{tg} \beta a = -Z_{\text{в}} \text{tg} \frac{2\pi a}{\lambda} = -307,8 \text{ Ом},$$

что соответствует на частоте  $f = 100$  МГц емкости  $C_{\text{н}} = 1/(2\pi f x_{\text{н}}) = 5,17$  пФ.

## § 10.2. Комплексные частотные характеристики однородных длинных линий

**10.14м.** Заданы волновые параметры линии  $Z_{\text{в}}$ ,  $\underline{\gamma}$  и ее длина  $l$ . Найти  $Z$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного этой линии.

**10.15м.** К линии, волновые параметры которой  $Z_{\text{в}}$  и  $\underline{\gamma}$  известны, подключен источник напряжения  $E$  с внутренним сопротивлением  $Z_{\text{н}1}$ . Сопротивление нагрузки линии  $Z_{\text{н}2}$ , длина линии  $l$  (рис. 10.1). Опреде-

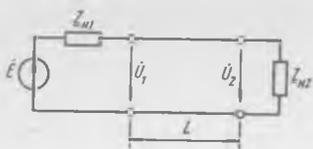


Рис. 10.1

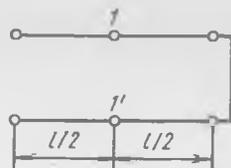


Рис. 10.2

лить сквозной коэффициент передачи линии по напряжению  $K_c(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{E}$ .

**10.16р.** Найти частоты, на которых выполняются условия резонанса токов и резонанса напряжений для короткозамкнутого отрезка коаксиального кабеля длиной  $l = 1$  м с погонными параметрами  $L_1 = 2,63 \times 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км. Определить входное сопротивление кабеля на частоте 100 МГц.

**10.17р.** Рассчитать наименьшую длину разомкнутого отрезка кабеля ( $L_1 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км), входное сопротивление которого на частоте 100 МГц эквивалентно емкости 100 пФ.

**10.18р.** Решить задачу 10.11р, заменяя емкость нагрузки  $C_n$  эквивалентным ей разомкнутым отрезком линии минимальной длины. Значения  $Z_{в}$ ,  $\lambda$  и  $v_{ф}$  для этого отрезка приведены в условии задачи 10.11р.

**10.19.** Найти наименьшую длину короткозамкнутого отрезка кабеля ( $L_1 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км;  $C_1 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км), входное сопротивление которого на частоте 100 МГц эквивалентно индуктивности 0,6 мкГн.

**10.20.** По данным задачи 10.19 определить наименьшую длину разомкнутого отрезка кабеля.

**10.21.** Отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,4$  м, погонные параметры которого приведены в условии задачи 10.19, нагружен на сопротивление  $Z_{н}$ . На частоте  $f = 100$  МГц входное сопротивление кабеля равно нулю. Определить сопротивление  $Z_{н}$ .

**10.22.** Решить задачу 10.21, принимая входное сопротивление кабеля бесконечно большим.

**10.23.** Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии без потерь в точках  $1-1'$  равно нулю (рис. 10.2). Найти минимальную длину  $l$  этого отрезка.

**10.24.** Решить задачу 10.23, принимая входное сопротивление в точках  $1-1'$  бесконечно большим.

**10.25м.** На вход длинной линии подается бигармоническое напряжение  $u(0, t) = U_{m1}\cos\omega_1 t + U_{m2}\cos 2\omega_1 t$ . Предложить способы выделения на сопротивлении нагрузки линии напряжения: а) только с частотой  $\omega_1$ ; б) только с частотой  $2\omega_1$ .

**10.26р.** Входные сопротивления линии передачи длиной  $l = 100$  км в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе, измеренные на частоте  $\omega = 10^4/c^{-1}$ , составляют  $Z_x = 1064e^{-j0,66}$  Ом;

$Z_{\kappa} = 323e^{j0,43}$  Ом. Найти погонные и волновые параметры линии.

10.27. Определить входное сопротивление цепи, образованной соединением трех отрезков длинных линий (рис. 10.3) на частоте  $f = 150$  МГц. Параметры цепи:  $Z_{в1} = 50$  Ом;  $l_1 = 4$  м;  $Z_{в2} = 75$  Ом;  $l_2 = 2$  м;  $R_2 = 200$  Ом;  $Z_{в3} = 100$  Ом;  $l_3 = 3,75$  м;  $R_3 = 150$  Ом.

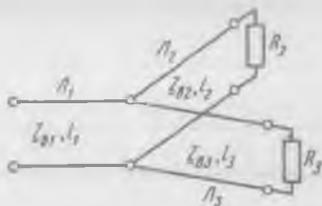


Рис. 10.3

10.28м. Передачу энергии от источника к двум размещенным в разных местах нагрузкам осуществляют с помощью трех линий, соединенных между собой согласно рис. 10.3. Волновые сопротивления линий известны:  $Z_{в1} = 50$  Ом;  $Z_{в2} = 100$  Ом;  $Z_{в3} = 75$  Ом. Коэффициент бегущей волны в линии  $L_2$   $K_{б2} = 0,8$ . Частота входного воздействия  $f = 100$  МГц, фазовая скорость во всех трех линиях  $v_{\phi} = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $l_2 = 7,5$  м;  $l_3 = 9,75$  м. Найти значение сопротивления  $R_3$ , при котором в линии  $L_1$  имеет место режим бегущей волны, а также определить коэффициент бегущей волны  $K_{б3}$  в линии  $L_3$ . Имеет ли задача единственное решение?

10.29м. Построить Т-образную схему замещения линии без потерь, погонные параметры которой  $L_1 = 2$  мГн/км;  $C_1 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км; длина линии  $l = 100$  км. Частота входного воздействия  $f = 1$  кГц.

10.30. Измерения входного сопротивления линии в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе, проведенные при постоянном токе, дали следующие результаты:  $Z_x = 12,9$  кОм;  $Z_k = 1,11$  кОм. Длина линии  $l = 100$  км. Построить П-образную схему замещения линии.

10.31р. Четвертьволновый отрезок линии длиной  $l$  закорочен на конце. Погонные параметры линии  $R_1, L_1, C_1, G_1$  известны. Принимая  $\omega L_1 \gg R_1, G_1 = 0$ , найти резонансную частоту  $\omega_0$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность  $Q$  параллельного колебательного контура, эквивалентного этому отрезку линии.

10.32. Четвертьволновый отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,2$  м закорочен на конце. Погонные параметры кабеля:  $R_1 = 1,7$  Ом/м;  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м;  $G_1 = 0$ . Построить схему замещения этого отрезка кабеля в виде параллельного колебательного контура из элементов  $R_k, L_k, C_k$ . Резонансная частота контура должна соответствовать наименьшей резонансной частоте заданного отрезка кабеля.

10.33м. Найти резонансную частоту  $\omega_0$ , резонансное сопротивление  $R_0$  и добротность  $Q$  последовательного колебательного контура, эквивалентного разомкнутому четвертьволновому отрезку линии длиной  $l$ . Погонные параметры линии  $R_1, L_1, C_1, G_1$  заданы. Принять  $\omega L_1 \gg R_1; G_1 = 0$ .

10.34. Четвертьволновый отрезок коаксиального кабеля длиной  $l = 0,2$  м, разомкнутый на конце, имеет погонные параметры, приведенные в условии задачи 10.32. Построить схему замещения этого от-

резка кабеля в виде последовательного колебательного контура из элементов  $R_k, C_k, L_k$ . Резонансная частота контура  $\omega_0$  должна соответствовать наименьшей резонансной частоте заданного отрезка кабеля.

10.35м. Цепь представляет собой отрезок линии без потерь длиной  $l$ , к обоим концам которого подключены одинаковые реактивные сопротивления  $\underline{Z} = j\omega L$  (рис. 10.4). Погонные параметры линии  $L_1$  и

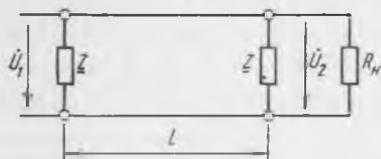


Рис. 10.4

$C_1$  известны. Цепь нагружена на сопротивление  $R_n = \sqrt{L_1/C_1}$ . Показать, что АЧХ цепи  $K_{21}(\omega) = U_2/U_1$  неравномерна и имеет множество экстремумов. Построить график АЧХ в окрестностях двух первых по счету максимумов для двух различных значений параметра  $a = L_1 l/L$ : а)  $a = 10$ ; б)  $a = 20$ .

10.36. Решить задачу 10.35м, принимая  $\underline{Z} = 1/(j\omega C)$ . Построить график АЧХ для двух различных значений параметра  $q = C/(C_1 l)$ : а)  $q = 10$ , б)  $q = 20$ .

10.37. Вычислить волновое сопротивление  $\underline{Z}_{вт}$  четвертьволнового трансформатора, используемого для согласования однородной линии с волновым сопротивлением  $\underline{Z}_в = 100$  Ом и сопротивления нагрузки  $R_n = 50$  Ом.

10.38р. Линия с волновым сопротивлением  $\underline{Z}_в = 200$  Ом нагружена на резистор сопротивлением  $R_n = 100$  Ом. Длина волны в линии  $\lambda = 3$  м. На каком расстоянии  $l_1$  от конца линии следует подключить шлейф (короткозамкнутый отрезок линии) с волновым сопротивлением  $\underline{Z}_{вш} = 200$  Ом, чтобы добиться согласования линии с нагрузкой? Найти длину шлейфа  $l_2$ . Размеры  $l_1$  и  $l_2$  должны быть минимально возможными. Имеет ли задача единственное решение?

#### Решения и методические указания

10.14м.  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника можно рассчитать по известным  $\underline{A}$ -параметрам ( $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \text{ch}\gamma l$ ;  $\underline{A}_{12} = \underline{Z}_в \text{sh}\gamma l$ ;  $\underline{A}_{21} = \text{sh}\gamma l / \underline{Z}_в$ ) с помощью формул перехода от  $\underline{A}$ - к  $\underline{Z}$ -параметрам.

10.15м. Использовать результаты решения задач 8.73р, 10.14м.

10.16р. Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной линии без потерь  $\underline{Z}_к = j\underline{Z}_в \text{tg}\beta l$ . Следовательно,  $\underline{Z}_к = 0$  (выполняется условие резонанса напряжений) на частотах  $f_{0н}$ , определяемых из условия  $2\pi f_{0н} \sqrt{L_1 C_1} l = 2m \frac{\pi}{2}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Входное сопротивление линии обращается в бесконечность (выполняется условие резонанса токов) на частотах  $f_{0т}$ , удовлетворяющих условию  $2\pi f_{0т} \sqrt{L_1 C_1} l = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  Используя эти соотношения, находим резонансные частоты линии:  $f_{0н} = m \cdot 143$  МГц,

( $m = 1, 2, 3, \dots$ );  $f_{0\pi} = (2m + 1)71,5 \text{ МГц}$ , ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). На частоте  $100 \text{ МГц}$  входное сопротивление линии будет иметь емкостный характер:

$$\underline{Z}_R|_{f=100\text{МГц}} = j\sqrt{L_1/C_1} \operatorname{tg}(2\pi \cdot 10^8 l \sqrt{L_1 C_1}) = -j104 \text{ Ом.}$$

**10.17р.** Комплексное входное сопротивление емкости  $C = 100 \text{ пФ}$  на частоте  $100 \text{ МГц}$   $\underline{Z}_C = -j/(2\pi fC) = -j15,9 \text{ Ом}$ . Длина  $l$  разомкнутого отрезка длинной линии, входное сопротивление которого на частоте  $100 \text{ МГц}$  эквивалентно емкости  $100 \text{ пФ}$ , может быть найдена из соотношения  $\underline{Z}_C = -j15,9 = -jZ_B \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda}$ .

Определяя волновое сопротивление линии  $\underline{Z}_B$  и длину волны линии  $\lambda$ :  $\underline{Z}_B = \sqrt{L_1/C_1} = 75,2 \text{ Ом}$ ;  $\lambda = (f \sqrt{L_1/C_1})^{-1} = 2,86 \text{ м}$ , находим

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arccotg} x_C/Z_B = 0,455 (1,36 + m\pi) \text{ м}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Минимальная длина  $l_{\min} = 0,455 \cdot 1,36 = 0,62 \text{ м}$ .

**10.18р.** Минимальная длина разомкнутого отрезка линии, входное сопротивление которого на частоте  $f = v_\Phi/\lambda = 100 \text{ МГц}$  эквивалентно емкости  $20 \text{ пФ}$ ,  $l_{\min} = 0,43 \text{ м}$  (см. задачу 10.17р). Мысленно присоединим этот разомкнутый отрезок к рассматриваемой линии. Полученная воображаемая линия работает в режиме холостого хода на выходе, и ближайший узел напряжения располагается на расстоянии  $\lambda/4 = 0,75 \text{ м}$  от ее конца, т.е. на расстоянии  $a = \lambda/4 - l_{\min} = 0,32 \text{ м}$  от конца рассматриваемой линии. Это совпадает с результатом, полученным при решении задачи 10.11р.

Аналогичным методом можно решить задачу 10.12, заменяя индуктивность  $L_N$  эквивалентным ей короткозамкнутым отрезком линии и учитывая, что в короткозамкнутой линии узлы напряжения расположены на расстоянии  $\lambda/2$  друг от друга, считая от конца линии.

**10.25м.** Рассмотрим зависимость входного сопротивления отрезка длинной линии от электрической длины  $l/\lambda$ , частоты приложенного напряжения и условий на выходе (короткое замыкание или холостой ход). Выбрав надлежащим образом параметры этого отрезка, следует подключить его параллельно входу линии. Учтем, что колебания, подлежащие разделению, отличаются по частоте ровно в 2 раза.

**10.26р.** Выпишем соотношения, устанавливающие связь между входными сопротивлениями разомкнутой и короткозамкнутой линий  $\underline{Z}_X$  и  $\underline{Z}_R$  и их волновыми параметрами:  $\underline{Z}_X = \underline{Z}_B \operatorname{cth} \gamma l$ ,  $\underline{Z}_R = \underline{Z}_B \operatorname{th} \gamma l$ .

Волновые параметры можно выразить через погонные параметры линии:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}; \quad \underline{Z}_B = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{C_1 + j\omega C_1}}.$$

Следовательно,  $\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_X \underline{Z}_R} = 586,24e^{-j0,115} = (583,36 - j67,27) \text{ Ом}$ ;

$\operatorname{th} \gamma l = \sqrt{\underline{Z}_R \underline{Z}_X^{-1}} = 0,55e^{j0,545} = 0,47 + j0,286$ ;  $\underline{\gamma} \underline{Z}_B = R_1 + j\omega L_1$ ;

$\underline{\gamma} / \underline{Z}_B = G_1 + j\omega C_1$ .

Для определения коэффициента распространения  $\underline{\gamma}$  воспользуемся легко проверяемым соотношением  $e^{2\gamma l} = (1 + \text{th}\underline{\gamma}l)(1 - \text{th}\underline{\gamma}l)^{-1}$ , откуда  $e^{2\gamma l} = 2,493e^{l(-5,595 + 2\pi n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Учитывая, что  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ , находим  $\alpha = \frac{1}{2l} \ln 2,493 = 4,57 \cdot 10^{-3}$  Нп/км;  $\beta = 0,5l(-5,595 + 2\pi n) = (-27,975 \cdot 10^{-3} + 0,01\pi n)$  рад/км.

Коэффициент фазы  $\beta$  в отличие от коэффициента ослабления  $\alpha$  определен неоднозначно. Для устранения этой неоднозначности необходимо знать хотя бы приближенное значение фазовой скорости в линии. В задаче рассматривается линия передачи, оба провода которой расположены в воздухе, следовательно, фазовая скорость в ней приблизительно равна скорости распространения электромагнитных колебаний в свободном пространстве, т. е.  $3 \cdot 10^8$  км/с. Заметим, что если бы в задаче рассматривалась кабельная линия, то нужно было бы знать (приблизленно) относительную диэлектрическую проницаемость изоляции кабеля  $\epsilon_r$ ; в этом случае  $v_\phi \approx 3 \cdot 10^8 / \sqrt{\epsilon_r}$  км/с.

При  $v_\phi \approx 3 \cdot 10^8$  км/с  $\beta = \omega/v_\phi = 33 \cdot 10^{-3}$  рад/км. Принимая в полученной формуле для коэффициента  $\beta$   $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , получаем  $\beta = (-27,96; 3,44; 34,86; 66,27; \dots) \cdot 10^{-3}$  рад/км. Наиболее близким к найденному приближенному значению  $\beta = 33 \cdot 10^{-3}$  рад/км оказывается  $\beta = 34,86 \cdot 10^{-3}$  рад/км, которое и принимаем в качестве точного значения. Таким образом,  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = (4,57 + j34,86) \times 10^{-3}$  км $^{-1} = 35,15e^{j1,441} \cdot 10^{-3}$  км $^{-1}$ . Определяем погонные параметры линии:

$$\underline{\gamma} \underline{Z}_B = R_1 + j\omega L_1 = 20,61 e^{j1,326} = (5 + j20) \text{ Ом/км,}$$

$$\underline{\gamma} \underline{Z}_B^{-1} = G_1 + j\omega C_1 = 59,97 \cdot 10^{-6} e^{j1,556} = (0,92 + j59,96) \cdot 10^{-6} \text{ См/км,}$$

откуда  $R_1 = 5$  Ом/км;  $L_1 = 2$  мГн/км;  $G_1 = 0,92 \cdot 10^{-6}$  См/км;  $C_1 = 6 \cdot 10^{-9}$  Ф/км.

10.28м. Учтем, что коэффициент бегущей волны  $K_{62}$  в линии  $L_2$  принимает заданное значение 0,8 при двух различных сопротивлениях нагрузки  $R_2$ : а)  $R_2 = K_{62} \underline{Z}_{B2} = 80$  Ом; б)  $R_2 = \underline{Z}_{B2} K_{62}^{-1} = 125$  Ом. Им соответствуют и два различных значения входного сопротивления линии  $L_2$ , которые наряду с входным сопротивлением  $L_3$  определяют нагрузку и режим работы линии  $L_1$ . Следовательно, задача имеет два решения.

10.29м. Найти  $\underline{Z}$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного рассматриваемой линии, и по ним рассчитать параметры элементов Т-образной схемы замещения четырехполюсника.

10.31р. Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии длиной  $l$   $\underline{Z}_K = \underline{Z}_B \text{th}\underline{\gamma}l$ . Учитывая, что  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  и преобразовывая гиперболические функции комплексного аргумента, получаем

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}_B \frac{\text{sh}(\alpha l + j\beta l)}{\text{ch}(\alpha l + j\beta l)} = \underline{Z}_B \frac{\text{sh} \alpha l \cos \beta l + j \text{ch} \alpha l \sin \beta l}{\text{ch} \alpha l \cos \beta l + j \text{sh} \alpha l \sin \beta l}$$

Для линии с малыми потерями ( $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $G_1 = 0$ ) можно записать  $Z_{\text{в}} \approx \sqrt{L_1/C_1}$ ;  $\alpha \approx 0,5R_1\sqrt{C_1/L_1}$  (см. задачу 10.2р).

Как известно, входное сопротивление короткозамкнутого четверть-волнового отрезка линии без потерь бесконечно велико. В линии происходит резонанс токов. В этом режиме длина волны в линии и коэффициент фазы принимают некоторые значения  $\lambda_0$  и  $\beta_0$ . Поскольку  $\beta_0 l = \pi/2$ ;  $\beta_0 = \omega_0/v_{\text{ф}} = \omega_0\sqrt{L_1C_1}$ , то резонанс токов наступает на частоте  $\omega_0 = \pi(2l\sqrt{L_1C_1})^{-1}$ . (Здесь и далее имеют в виду первый по счету резонанс токов.)

При наличии потерь в линии входное сопротивление рассматриваемого отрезка уже не равно бесконечности, хотя и может достигать очень больших значений. Сопротивление  $Z_{\text{к}}(\omega_0)$  определяем по приведенной формуле, приняв  $\cos\beta_0 l = 0$ ;  $\sin\beta_0 l = 1$  и считая, что при малых потерях  $\alpha l \ll 1$ ,  $\text{ch}\alpha l \approx 1$  и  $\text{sh}\alpha l \approx \alpha l$ :

$$\underline{Z}_{\text{к}}(\omega_0) = R_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{1}{\alpha l} = \frac{2L_1}{R_1 C_1 l}$$

Рассмотрим зависимость  $Z_{\text{к}}(\omega)$ , ограничиваясь случаем малых расстроек ( $\omega \approx \omega_0$ ). Так как  $\beta = \omega/v_{\text{ф}}$ , то  $\beta/\beta_0 = \omega/\omega_0$ ;  $\beta l = \beta_0 l \omega/\omega_0 = \pi\omega/(2\omega_0)$ . Введем относительную расстройку  $\delta = (\omega - \omega_0)/\omega_0$ .

Тогда  $\beta l = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\delta$ . С учетом того, что  $\delta \ll 1$ , можно записать

$$\cos \beta l = -\sin \frac{\pi\delta}{2} \approx -\frac{\pi\delta}{2}; \quad \sin \beta l = \cos \frac{\pi\delta}{2} \approx 1.$$

Приближенное выражение для  $Z_{\text{к}}$  принимает вид

$$\underline{Z}_{\text{к}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left( -\alpha l \frac{\pi\delta}{2} + j l \right) \left( -\frac{\pi\delta}{2} + j\alpha l \right)^{-1}.$$

Отбрасывая первый член в числителе ввиду его малости, получаем

$$\underline{Z}_{\text{к}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \left( \alpha l + j \frac{\pi\delta}{2} \right)^{-1} = R_0 \left( 1 + j \frac{\pi\delta}{2\alpha l} \right)^{-1}.$$

Отсюда  $Z_{\text{к}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi\delta}{2\alpha l}\right)^2}}$ .

Отождествляя этот результат с известным выражением для сопротивления параллельного колебательного контура ( $Z_{\text{к}} = R_0/\sqrt{1 + (2Q\delta)^2}$ ), определяем добротность  $Q$  параллельного контура, эквивалентного рассматриваемому отрезку линии:  $Q = \frac{\pi}{4\alpha l} =$

$$= \frac{\pi}{2R_1 l} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

10.33м. Эта задача решается аналогично задаче 10.31. Исходной является формула для входного сопротивления разомкнутого отрезка линии  $Z_{\text{к}} = Z_{\text{в}} \text{cth}\gamma l$ .

**10.35м.** Рассматриваемая цепь образована каскадным соединением трех четырехполюсников: первый и третий — одноэлементные, а второй представляет собой длинную линию. Определить  $A$ -параметры цепи, составить выражение для  $K_{21}(j\omega)$ , проанализировать поведение функции  $K_{21}(\omega)$  в диапазоне частот.

**10.38р.** Расстояние  $l_1$  нужно выбрать так, чтобы входная проводимость отрезка линии длиной  $l_1$ , нагруженного на сопротивление  $R_{\text{н}}$ , равнялась  $Z_{\text{в}}^{-1} + jb$ , т.е.

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = (Z_{\text{в}} + jR_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta l_1) [Z_{\text{в}} (R_{\text{н}} + jZ_{\text{в}} \operatorname{tg} \beta l_1)]^{-1} = \frac{1}{Z_{\text{в}}} + jb.$$

Следовательно,

$$l_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left( \pm \sqrt{\frac{R_{\text{н}}}{Z_{\text{в}}}} \right); b = \pm \sqrt{\frac{Z_{\text{в}}}{R_{\text{н}}}} \frac{R_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{в}}^2}.$$

Входная проводимость шлейфа должна компенсировать составляющую  $jb$  проводимости  $\underline{Y}_{\text{вх}}$ :  $\underline{Y}_{\text{к}} = -j \frac{1}{Z_{\text{вIII}}} \operatorname{ctg} \beta l_2 = -jb$ , откуда  $l_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[ \pm \sqrt{R_{\text{н}} Z_{\text{в}}} \frac{Z_{\text{в}}}{Z_{\text{вIII}} (R_{\text{н}} - Z_{\text{в}})} \right]$ .

Если размеры  $l_1$  и  $l_2$  выбрать в соответствии с полученными формулами, то  $\underline{Y}_{\text{вх}} + \underline{Y}_{\text{к}} = Z_{\text{в}}^{-1}$ , и в основной линии, вплоть до места подключения шлейфа, будет существовать режим бегущей волны.

При вычислениях  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $b$  следует брать во всех формулах знак плюс или минус перед радикалами. Задача имеет два решения: 1)  $l_1 = 0,294$  м;  $l_2 = 1,044$  м;  $b = -3,536 \cdot 10^{-3}$  См; 2)  $l_1 = 1,206$  м;  $l_2 = 0,456$  м;  $b = 3,536 \cdot 10^{-3}$  См.

### § 10.3. Переходные процессы в длинных линиях\*

**10.39.** На вход линии поступает прямоугольный импульс напряжения. Погонные параметры линии приведены в условии задачи 10.1. Какую дополнительную индуктивность  $L_{\text{доп}}$  на каждый километр длины следует включить в линию, чтобы форма импульса не изменилась в результате прохождения импульса по линии? Определить волновые параметры  $Z_{\text{в}}$  и  $\gamma$  на частоте  $f = 800$  Гц и проанализировать изменения, которые произошли в линии после включения дополнительных индуктивностей.

**10.40.** В линии выполняются условия неискаженной передачи сигналов ( $L_1/R_1 = C_1/G_1$ ). Показать, что коэффициент ослабления  $\alpha$  в этом случае принимает минимально возможное при заданных  $R_1$  и  $G_1$  значение.

**10.41.** На вход однородной линии длиной  $l = 100$  м, согласованной с нагрузкой, поступает прямоугольный импульс напряжения. Погон-

\* В задачах этого параграфа, кроме 10.39 и 10.40, рассматриваются линии без потерь с нулевыми начальными условиями.

ные параметры линии:  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. Через какое время  $t_0$  импульс появится на выходе линии?

**10.42м.** Длинная линия включена между источником энергии и нагрузкой (см. рис. 10.1). Источник энергии характеризуется операторным внутренним сопротивлением  $Z_{Н1}(p)$  и э.д.с.  $E(p)$ , а нагрузка — операторным сопротивлением  $Z_{Н2}(p)$ . Операторное волновое сопротивление линии  $Z_B(p)$ , ее длина  $l$ . Показать, что изображения напряжения и тока в любой точке  $x$  линии определяются выражениями:

$$U(p, x) = \frac{Z_B(p) E(p)}{Z_{Н1}(p) + Z_B(p)} [e^{-\rho x/v_\Phi} + \rho_2 e^{-\rho(2l-x)/v_\Phi} + S_1 + S_2];$$

$$I(p, x) = \frac{E(p)}{Z_{Н1}(p) + Z_B(p)} [e^{-\rho x/v_\Phi} - \rho_2 e^{-\rho(2l-x)/v_\Phi} + S_1 - S_2],$$

где  $S_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (\rho_1 \rho_2)^m \exp[-\rho(2ml + x)/v_\Phi]$ ;  $S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \rho_1^m \rho_2^{m+1} \times$   
 $\times \exp\{-\rho[2l(m+1) - x]/v_\Phi\}$ ,  $\rho_1(p) = \frac{Z_{Н1}(p) - Z_B(p)}{Z_{Н1}(p) + Z_B(p)}$ ;  $\rho_2(p) =$   
 $= \frac{Z_{Н2}(p) - Z_B(p)}{Z_{Н2}(p) + Z_B(p)}$  — коэффициенты отражения в начале и конце линии.

**10.43.** Кабель длиной  $l = 100$  м подключают к источнику постоянной э.д.с.  $E = 100$  В. Погонные параметры кабеля:  $L_1 = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. Найти напряжение  $u_2(t)$  на разомкнутом конце кабеля.

**10.44м.** На вход разомкнутой на конце однородной линии без потерь длиной  $l = 150$  км поступает прямоугольный импульс напряжения высотой  $E = 1$  кВ и длительностью  $t_H = 0,6$  мс. Считая источник входного напряжения идеальным, найти распределение напряжения вдоль линии спустя  $0,75$  мс после подачи импульса на вход линии. Фазовая скорость в линии  $v_\Phi = 3 \cdot 10^5$  км/с.

**10.45р.** Линия передачи длиной  $l = 150$  км с волновым сопротивлением  $Z_B = 300$  Ом нагружена на последовательно соединенные резистор сопротивлением  $R_H = 100$  Ом и катушку, индуктивность которой  $L_H = 0,1$  Гн. В момент времени  $t = 0$  линия подключается к источнику с внутренним сопротивлением  $R_1 = 150$  Ом и постоянной э.д.с.  $E = 1,5$  кВ. Определить напряжение  $u_2(t)$  на нагрузке в момент времени  $t_1 = 0,8$  мс. Фазовая скорость в линии  $v_\Phi = 3 \cdot 10^5$  км/с.

**10.46.** Кабель длиной  $l = 100$  м нагружен на конденсатор емкостью  $C = 2 \cdot 10^{-9}$  Ф. Погонные параметры кабеля:  $L = 0,42$  мкГн/м;  $C_1 = 75$  пФ/м. На входе кабеля действует источник напряжения  $u_1(t)$  с внутренним сопротивлением  $R_1 = 50$  Ом, причем  $u_1(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $u_1(t) = 10$  В при  $t \geq 0$ . Найти напряжение  $u_2(t)$  на нагрузке в момент времени  $t_1 = 0,8$  мкс.

**10.47р.** Цепь образована путем соединения трех длинных линий (см. рис. 10.3). Параметры цепи:  $Z_{B1} = Z_{B2} = Z_{B3} = 300$  Ом;  $R_2 = R_3 = 300$  Ом;  $l_1 = 150$  км;  $l_2 = 100$  км;  $l_3 = 120$  км. Фазовая скорость во всех линиях  $v_\Phi = 3 \cdot 10^5$  км/с. В момент времени  $t = 0$  цепь подключают к источнику постоянного напряжения  $E = 1$  кВ с внутренним сопротивлением  $R_1 = 100$  Ом. Найти распреде-

ление напряжения вдоль всех трех линий для момента времени  $t_1 = 0,8$  мс.

10.48. Решить задачу 10.47р для случая, когда линии  $L_2$  и  $L_3$  работают в режиме холостого хода на выходе ( $R_2 = R_3 = \infty$ ).

#### Решения и методические указания

10.42м. Изображения напряжения и тока в произвольной точке  $x$  линии определяются следующими формулами:

$$U(p, x) = Z_B(p) E(p) [e^{-\gamma x} + \rho_2 e^{-(2\gamma l - \gamma x)}] D; I(p, x) = -E(p) [e^{-\gamma x} - \rho_2 e^{-(2\gamma l - \gamma x)}] D,$$

где  $D = [(Z_{H1}(p) + Z_B(p))(1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l})]^{-1}$ ;  $\gamma = p \sqrt{L_1 C_1} = p/v_{\phi}$ . Заменить выражение  $(1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\gamma l})^{-1}$  в этих формулах бесконечным степенным рядом.

10.44м. Использовать формулы, приведенные в условии задачи 10.42м, принимая  $\rho_1(p) = -1$ ;  $\rho_2(p) = 1$  и учитывая теорему запаздывания. Внешнее воздействие следует представить в виде суммы двух скачков, сдвинутых во времени на  $t_{и}$ , т. е.  $E(p) = (E - Ee^{-pt_{и}}) p^{-1}$ .

10.45р. Волна напряжения достигает выхода линии через время  $t_0 = l/v_{\phi} = 0,5$  мс после подключения линии к источнику энергии. С этого момента в нагрузке начинается переходный процесс. Нужно определить напряжение  $u_2(t)$  для  $t = t_1 = 0,8$  мс  $> t_0$ . К этому времени волна уже отразилась от нагрузки и распространяется в обратном направлении.

Представим напряжение  $U_2(p)$  и ток  $I_2(p)$  на выходе линии в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$U_2(p) = U_{2\text{пад}}(p) + U_{2\text{отр}}(p); I_2(p) = I_{2\text{пад}}(p) + I_{2\text{отр}}(p).$$

Напряжение  $U_{2\text{отр}}(p)$  связано с  $U_{2\text{пад}}(p)$  коэффициентом отражения  $\rho_2$ :

$$U_{2\text{отр}}(p) = \rho_2 U_{2\text{пад}}(p) = \frac{Z_{H2}(p) - Z_B(p)}{Z_{H2}(p) + Z_B(p)} U_{2\text{пад}}(p).$$

Учитывая, что в любом сечении линии  $U_{\text{пад}}(p)/I_{\text{пад}}(p) = -U_{\text{отр}}(p)/I_{\text{отр}}(p) = Z_B(p)$ , получаем

$$I_2(p) = \frac{2U_{2\text{пад}}(p)}{Z_{H2}(p) + Z_B(p)}, U_2(p) = Z_{H2}(p) I_2(p) = \frac{2Z_{H2}(p) U_{2\text{пад}}(p)}{Z_{H2}(p) + Z_B(p)}$$

Следовательно, ток  $I_2(p)$  после первого отражения от нагрузки равен току в цепи, образованной последовательным соединением сопротивлений  $Z_{H2}(p)$  и  $Z_B(p)$ , когда на входе действует напряжение  $2U_{2\text{пад}}(p)$ . В общем случае (см. задачу 10.42м)

$$U_{\text{пад}}(p) = Z_B(p) E(p) [Z_{H1}(p) + Z_B(p)]^{-1}.$$

В данной задаче  $Z_{H2}(p) = pL_H + R_H$ ;  $Z_B(p) = Z_B = 300$  Ом;  $Z_{H1}(p) = R_1 = 150$  Ом;  $E(p) = E/p = (1500/p)$  В · с, поэтому  $U_{2\text{пад}}(p) = (1000/p)$  В · с,  $U_{2\text{пад}} = 1000$  В. В результате получаем

$$I_2(p) = 2U_{2\text{пад}}(p) (pL + R_H + Z_B)^{-1} = 2U_{2\text{пад}} \left[ Lp \left( p + \frac{R_H + Z_B}{L} \right) \right]^{-1}.$$

откуда

$$i_2(t) = \frac{2U_{2\text{пад}}}{R_H + Z_B} (1 - e^{-(R_H + z_B)t/L}).$$

Время в этой формуле следует отсчитывать с момента начала переходного процесса в нагрузке, т.е. при  $t_1 = 0,8$  мс нужно подставить в показатель экспоненты  $t = t_1 - t_0 = 0,3$  мс. Таким образом,  $i_2(t_1) = = 3,494$  А;  $u_2(t_1) = 2U_{2\text{пад}} - Z_B i_2(t_1) = 951,8$  В.

10.47р. Напряжение падающей волны в линии  $L_1$  (см. задачу 10.45р)  $U_{\text{пад}}(p) = Z_{B1}(p)E(p)[Z_{H1}(p) + Z_{B1}(p)]^{-1}$ . Для данной задачи  $Z_{B1}(p) = = Z_{B1} = 300$  Ом;  $Z_{H1}(p) = R_1 = 100$  Ом;  $E(p) = E/p = (1000/p)$  В·с, откуда  $U_{\text{пад}}(p) = (750/p)$  В·с;  $U_{\text{пад}} = 750$  В.

Падающая волна доходит до конца линии  $L_1$  за время  $t_0 = l_1/v_{\phi} = = 0,5$  мс, создавая вдоль нее напряжение  $U_{\text{пад}} = 750$  В. В месте соединения линий  $L_1 - L_3$  возникает отраженная волна, которая возвращается по  $L_1$  к источнику, и преломленные волны, распространяющиеся по линиям  $L_2$  и  $L_3$ . К моменту времени  $t_1 = 0,8$  мс волны в  $L_2$  и  $L_3$  успевают продвинуться на расстояние  $(t - t_0)v_{\phi} = 90$  км от места соединения. Длины линий  $L_2$  и  $L_3$  (соответственно 100 и 120 км) больше этого расстояния, следовательно, в  $L_2, L_3$  существуют только падающие волны. Поскольку  $U_{\text{пад}}/I_{\text{пад}} = Z_B$ , то можно сделать следующий вывод: нагрузку линии  $L_1$  создают линии  $L_2$  и  $L_3$  своими волновыми сопротивлениями.

При  $Z_{B2} = Z_{B3} = 300$  Ом сопротивление нагрузки линии  $L_1$   $Z_H = = Z_{B2}/2 = 150$  Ом. Коэффициент отражения от конца линии  $L_1$   $\rho_2 = = \frac{Z_H - Z_{B1}}{Z_H + Z_{B1}} = -\frac{1}{3}$ . Напряжение отраженной волны  $U_{\text{отр}}(p) = \rho_2 \times \times U_{\text{пад}}(p) = -\frac{250}{p}$  В·с,  $U_{\text{отр}} = -250$  В. Отраженная волна за время  $t_1 - t_0 = 0,3$  мс распространяется на 90 км от конца линии  $L_1$  по направлению к источнику, частично разряжая линию  $L_1$  до напряжения  $U_{\text{пад}} + U_{\text{отр}} = 500$  В.

Напряжение на выходе линии  $L_1$  (см. задачу 10.45р)

$$U_2(p) = \frac{2Z_H(p)U_{\text{пад}}(p)}{Z_H(p) + Z_{B1}(p)} = \frac{500}{p} \text{ В·с; } U_2 = 500 \text{ В.}$$

Это напряжение является входным для линий  $L_2$  и  $L_3$ , следовательно, напряжение преломленных волн  $U_{\text{пр}} = U_2 = 500$  В.

Таким образом, распределение напряжения вдоль линии  $L_1$  описывается выражением

$$u(x) = \begin{cases} 750 \text{ В} & \text{при } 0 \leq x < 90 \text{ км;} \\ 500 \text{ В} & \text{при } 90 \text{ км} \leq x \leq 150 \text{ км.} \end{cases}$$

В линиях  $L_2$  и  $L_3$

$$u(y) = \begin{cases} 500 \text{ В} & \text{при } 0 \leq y \leq 90 \text{ км;} \\ 0 & \text{при } y > 90 \text{ км} \end{cases}$$

(координату  $y$  отсчитывают от места соединения линий).

## § 10.4. Цепи с распределенными параметрами специальных типов

10.49. Неоднородная линия состоит из двух каскадно соединенных линий без потерь с волновыми сопротивлениями  $Z_{в1} = 50$  Ом;  $Z_{в2} = 75$  Ом (рис. 10.5). Найти такие значения сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , при которых в неоднородной линии отсутствуют отраженные волны.

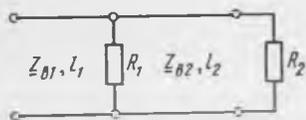


Рис. 10.5

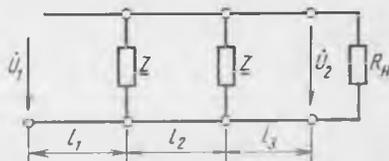


Рис. 10.6

10.50м. Неоднородная линия без потерь состоит из трех каскадно соединенных участков, причем к обоим концам среднего участка подключены одинаковые реактивные сопротивления  $Z = j\omega L$  (рис. 10.6). Погонные параметры  $L_1$ ,  $C_1$  всех трех участков одинаковы. Линия нагружена на сопротивление  $R_H = \sqrt{L_1/C_1}$ . Сформулировать условия, при выполнении которых колебания некоторых частот проходят по линии без ослабления ( $U_2/U_1 = 1$ ).

10.51. Решить задачу 10.50м, принимая  $Z = 1/(j\omega C)$ .

10.52м. Однородная линия включена между источником напряжения и нагрузкой (см. рис. 10.1). Погонные параметры  $L_1$ ,  $R_1$ ,  $C_1$  положительны, а проводимость  $G_1$  отрицательна,  $G_1 = -g_1 < 0$ . Принимая  $R_1 = 0$ ;  $\omega C_1 \gg g_1$ ;  $Z_{н1} = R_1'$ ;  $Z_{н2} = R_2$ , показать, что рассматриваемая цепь обладает усилением по напряжению ( $U_2/E > 1$ ).

10.53м. В микроэлектронике применяют цепи, образованные чередующимися слоями резистивных и диэлектрических материалов. Одна из таких цепей изображена на рис. 10.7,а. Высокопроводящий слой 1

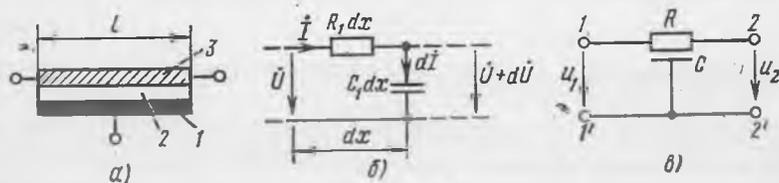


Рис. 10.7

(«идеальный» проводник) отделен от резистивного слоя 3 диэлектриком 2. Выводы от проводящих слоев служат для подключения источника и нагрузки. Эквивалентная схема элементарного участка цепи длиной  $dx$  приведена на рис. 10.7,б, а условное обозначение микроэлектронной  $RC$ -цепи такого типа — на рис. 10.7,в. Найти  $A$ -,  $Z$ -,  $Y$ -параметры четырехполюсника, эквивалентного рассматриваемой цепи.

10.54м. Микроэлектронная  $RC$ -цепь (рис. 10.7,в) длиной  $l = 0,01$  м характеризуется сопротивлением  $R_{1l} = 10$  кОм и емкостью  $C_1 l = 500$  пФ. Вычислить коэффициент затухания  $\alpha$ , коэффициент фазы  $\beta$  и электрическую длину цепи  $l/\lambda$  на частотах 1 и 10 МГц.

10.55м. Электрический контакт резистивного слоя 1 и высокопроводящего слоя 3 («идеального» проводника) показан на рис. 10.8,а. Между этими слоями существует переходный слой 2, обусловленный рядом причин, в частности наличием оксидов. Эквивалентная схема элементарного участка контакта приведена на рис. 10.8,б. Вывести формулу для сопротивления контакта  $R_k$ , принимая известными погонные параметры  $R_1, G_1$  и длину контакта  $l_k$ .

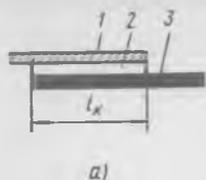


Рис. 10.8

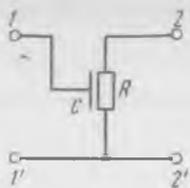
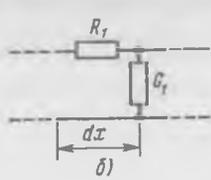


Рис. 10.9

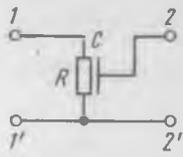


Рис. 10.10

10.56р. Построить АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  и ФЧХ  $\psi_{21x}(\omega)$  четырехполюсника, изображенного на рис. 10.7,в, в режиме холостого хода на выходе.

10.57м. Получить выражение для комплексного коэффициента передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  четырехполюсника, изображенного на рис. 10.9. Построить АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  четырехполюсника.

10.58. Решить задачу 10.57м для четырехполюсника, изображенного на рис. 10.10.

10.59м. Найти в общем виде комплексные сопротивления микроэлектронных  $RC$ -двухполюсников, изображенных на рис. 10.11,а—г.

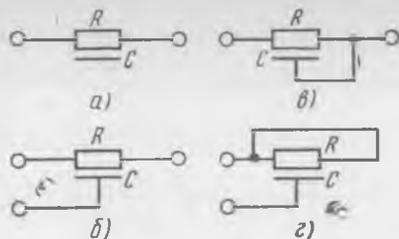


Рис. 10.11

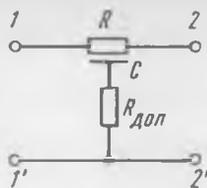


Рис. 10.12

10.60р. Четырехполюсник, образованный соединением микроэлектронной  $RC$ -цепи и сопротивления  $R_{доп}$ , работает в режиме холостого хода на выходе (рис. 10.12). Показать, что такой четырехполюсник является заградительным фильтром. Найти частоты  $\omega_{0n}$  (частоты настройки фильтра), на которых  $K_{21x}(\omega_{0n}) = 0$ , и сформулировать требования к сопротивлению  $R_{доп}$ . Построить АЧХ  $K_{21x}(\omega)$  четырехполюсника, у которого частота настройки имеет наименьшее значение.

**10.61р.** Найти переходную характеристику микроэлектронной  $RC$ -цепи (см. рис. 10.7, в). Погонные параметры цепи  $R_1, C_1$ , и ее длину  $l$  считать заданными. Внешнее воздействие — напряжение на входе  $u_1$ , реакция цепи — напряжение на выходе  $u_2$ .

**10.62.** Вывести формулу для переходной характеристики микроэлектронной  $RC$ -цепи, изображенной на рис. 10.9. Внешнее воздействие и реакция — напряжения на входе и выходе цепи.

**10.63.** Решить задачу 10.62 для микроэлектронной  $RC$ -цепи, представленной на рис. 10.10.

**10.64м.** Основываясь на решении задачи 10.61р, построить переходную характеристику микроэлектронной  $RC$ -цепи. Определить параметры элементов  $R_{эк}$  и  $C_{эк}$  однозвенной  $RC$ -цепи, переходная характеристика которой аппроксимирует полученный график на интервале  $0 \leq t \leq \tau = R_1 l C_1 l$ . Сравнить найденные результаты с переходной характеристикой однозвенной  $RC$ -цепи, у которой  $R = R_1 l, C = C_1 l$ .

**10.65.** К входу экспоненциальной линии длиной  $l = 100$  м приложено напряжение  $u(0, t) = 10 \cos(2\pi \cdot 10^8 t + 1,5)$  В. Погонные параметры изменяются вдоль линии по закону  $L_1(x) = 1,8e^{-0,013x}$  мкГн/м;  $C_1(x) = 6,18e^{0,013x}$  пФ/м. Найти напряжение  $u(l, t)$  на согласованном с линией сопротивлении нагрузки и ток  $i(l, t)$  в нагрузке.

**10.66м.** Как изменятся результаты решения задачи 10.65, если вход и выход линии поменять местами?

**10.67м.** Однородная линия с волновым сопротивлением  $Z_{в0} = 75$  Ом присоединена к сопротивлению нагрузки  $R_n = 300$  Ом через согласующее устройство, представляющее собой отрезок экспоненциальной линии длиной  $l$ . Коэффициент, определяющий закон изменения погонных параметров вдоль линии, равен по абсолютному значению  $q = 0,6$  м<sup>-1</sup>. Частота внешнего гармонического воздействия  $f = 1$  МГц. Определить длину  $l$  и изобразить ориентировочно вид согласующего устройства. Сохранится ли согласование основной линии с нагрузкой при изменении частоты внешнего воздействия? Рассмотреть целесообразность применения в качестве согласующего устройства четверть-волнового отрезка однородной линии.

**10.68.** Решить задачу 10.67м, если  $Z_{в0} = 300$  Ом;  $R_n = 75$  Ом.

#### Решения и методические указания

**10.50м.** В однородной линии без потерь, нагруженной на сопротивление  $Z_n$ , на всех частотах  $U_2/U_1 = 1$ . В рассматриваемой неоднородной линии  $U_2/U_1 = 1$  лишь на некоторых частотах. Нетрудно видеть, что на этих частотах входное сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  симметричного четырехполюсника, образованного средним участком линии и подключенными к нему индуктивностями, равно волновому сопротивлению  $Z_n = \sqrt{L_1/C_1}$ . Сопротивление  $Z_{11}(j\omega)$  можно найти по известным  $A$ -параметрам (см. задачу 10.35м), учитывая, что четырехполюсник нагружен на входное сопротивление третьего участка линии.

**10.52м.** Использовать результаты решения задач 10.2 и 10.15м. Ограничиваясь простейшим случаем согласованного включения четы-

рехполюсника ( $\underline{Z}_{н1} = \underline{Z}_{н2} = \underline{Z}_в$ ), найти величину  $g_1$ , для которой  $U_2/E > 1$ .

10.53м. Рассматриваемый четырехполюсник можно считать частным случаем четырехполюсника, образованного отрезком однородной линии общего вида, при  $L_1 = 0$  и  $G_1 = 0$ .

10.54м. Для микрорелектронной  $RC$ -цепи данного типа коэффициент распространения  $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega R_1 C_1}$  (см. задачу 10.53м). Отсюда  $\alpha = \sqrt{\omega R_1 C_1/2}$ ;  $\beta = \sqrt{\omega R_1 C_1/2}$ .

10.55м. Рассматривая участок контакта как четырехполюсник, устанавливаем, что сопротивление контакта представляет собой входное сопротивление данного четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе. Для определения  $R_k = \underline{Z}_{11}$  можно использовать формулы для  $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{н}$  и  $\gamma$  однородной линии общего вида, принимая  $L_1 = 0$ ;  $C_1 = 0$ .

10.56р. Комплексный коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению можно найти по известным погонным параметрам. Первичные параметры рассматриваемого четырехполюсника определены при решении задачи 10.53м. Можно записать:

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11}} = \frac{1}{\text{ch}(l \sqrt{j\omega R_1 C_1})}$$

Учитывая, что  $\sqrt{j} = (1 + j)/\sqrt{2}$ , и преобразовывая гиперболическую функцию комплексного аргумента, находим

$$K_{21x}(j\xi) = \frac{1}{\text{ch} \xi \cos \xi + j \text{sh} \xi \sin \xi}$$

где  $\xi = l \sqrt{\omega R_1 C_1/2}$  — нормированная частота.

Построенные по этому выражению зависимости  $K_{21x}(\xi)$ ;  $\psi_{21x}(\xi)$  изображены на рис. 10.13, а, б. Очевидно, этот четырехполюсник может быть использован в качестве фильтра нижних частот.

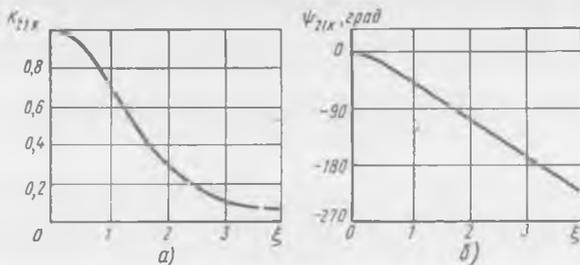


Рис. 10.13

10.57м. Сначала найти неопределенную матрицу проводимостей четырехполюсника, изображенного на рис. 10.7,в, используя полученные при решении задачи 10.53м  $Y$ -параметры. Далее определить укороченную матрицу проводимостей четырехполюсника, включенно-

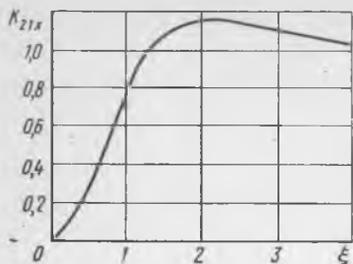


Рис. 10.14

го согласно рис. 10.9 (см. задачу 8.1), затем найти коэффициент  $K_{21x}(j\omega)$  (см. задачу 8.74).

АЧХ четырехполюсника, представленного на рис. 10.9, показана на рис. 10.14. Переменная  $\xi$  имеет тот же смысл, что и в задаче 10.56м. Особностью АЧХ является наличие области частот, в которой коэффициент передачи четырехполюсника по напряжению больше единицы. Рассматриваемый четырехполюсник может быть применен в качестве фильтра верхних частот.

**10.59м.** Составить Т-образную схему замещения цепи, изображенной на рис. 10.7,в, применяя найденные при решении задачи 10.53м формулы для  $Z$ -параметров. Определить сопротивления между различными точками схемы замещения, выбирая эти точки в соответствии с рис. 10.11,а-г.

**10.60р.** Четырехполюсник представляет собой регулярное последовательное соединение двух элементарных четырехполюсников.  $Z$ -параметры таких четырехполюсников определены при решении задач 8.13, 10.53м, а коэффициент  $K_{21x}(j\omega)$  — при решении задачи 8.73р. Таким образом,

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{a + \theta \operatorname{sh} \theta}{a \operatorname{ch} \theta + \theta \operatorname{sh} \theta},$$

где  $\theta = l\sqrt{j\omega R_1 C_1} = (1 + j\xi)$ ;  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $l$  — погонные параметры и длина микроволновой  $RC$ -цепи;  $\xi = l\sqrt{\omega R_1 C_1 / 2}$  — нормированная частота;  $a = R_1 l / R_{\text{доп}}$ .

Рассмотрим уравнение  $N(\theta) = a + \theta \operatorname{sh} \theta = 0$  [ $N(\theta)$  — числитель формулы для  $K_{21x}(j\omega)$ ]. Комплексная переменная  $\theta = (1 + j)\xi$  и гиперболический синус комплексного аргумента  $\operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \times \times \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y$ . После очевидных преобразований уравнения  $N(\theta) = 0$  выясняем, что частоты настройки фильтра  $\xi_{0n}$  удовлетворяют уравнению  $\operatorname{tg} \xi = -\operatorname{th} \xi$ , и им соответствуют значения  $a_n$  параметра  $a$

$$a_n = \xi (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) |_{\xi = \xi_{0n}}.$$

Следовательно, существует бесконечное множество значений  $\xi_{0n}$  и  $a_n$ . Приближенные значения  $\xi_{0n}$  можно найти просто, если учесть свойство функции  $\operatorname{th} \xi$ :  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \operatorname{th} \xi = 1$ . Практически уже при  $\xi \geq 1,6$  имеем  $\operatorname{th} \xi \geq 0,92$ , поэтому уравнение  $\operatorname{th} \xi = -\operatorname{th} \xi$  можно заменить более простым уравнением  $\operatorname{tg} \xi = -1$ , формальное решение которого

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Однако не все корни этого уравнения соответствуют частотам настройки фильтра. Действительно, при четных  $n$   $\sin \xi_{0n} < 0$ ,  $a_n < 0$  и  $R_{\text{доп}n} =$

$= R_1 l / a_n < 0$ , что неприемлемо по физическим соображениям. Таким образом,

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi(2n - 1); n = 1, 2, 3, \dots$$

Напомним, что это корни уравнения  $\operatorname{tg} \xi = -1$ , а не уравнения  $\operatorname{th} \xi = -\operatorname{tg} \xi$ , поэтому они нуждаются в уточнении. При  $n = 1$  приближенное значение корня последнего уравнения  $\xi_{01} \approx -\pi/4 + \pi = 2,356$ ; его уточненное значение  $\xi_{01} = 2,365$ , причем  $a_1 = 17,8$ . Значения последующих корней уточнять нет необходимости ввиду малости поправок, поэтому

$$\xi_{0n} = -\pi/4 + \pi(2n - 1); n = 2, 3, 4, \dots$$

В результате получаем  $\xi_{02} = 8,64$ ,  $\xi_{03} = 14,92$  и т.д. При  $n \geq 2$   $\xi_{0n} \gg 1$ ;  $\operatorname{sh} \xi_{0n} \approx \operatorname{ch} \xi_{0n} \approx 0,5e^{\xi_{0n}}$ ;  $\sin \xi_{0n} \approx -\cos \xi_{0n} \approx 1/\sqrt{2}$ , следовательно,

$$a_n \approx \xi_{0n} e^{\xi_{0n}/\sqrt{2}}; n \geq 2.$$

По известным значениям  $\xi_{0n}$ ,  $a_n$  легко определить значение сопротивления  $R_{\text{доп } n}$ , которое обеспечивает выполнение условия  $K_{21x}(\omega) = 0$  на частоте  $\omega_{0n}$ :

$$R_{\text{доп } n} = R_1 l / a_n; \omega_{0n} = 2\xi_{0n}^2 (R_1 l C_1 l)^{-1}.$$

При  $n = 1$   $R_{\text{доп } 1} = 0,056 R_1 l$ ;  $\omega_{01} = 11,187 (R_1 l C_1 l)^{-1}$ .

Заметим также, что при  $\xi = \xi_{0n}$  и  $a = a_n$  знаменатель  $D(\theta)$  формулы для  $K_{21x}(j\omega)$  ( $D(\theta) = a \operatorname{ch} \theta + \theta \operatorname{sh} \theta$ ) не обращается в нуль и, следовательно, не возникает неопределенность вида  $0/0$ .

Частота настройки фильтра имеет наименьшее значение при  $a = 17,8$ . Построенная для этого случая АЧХ фильтра приведена на рис. 10.15.

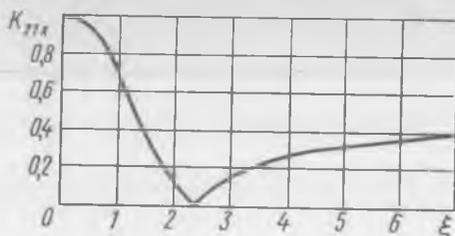


Рис. 10.15

**10.61р.** Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K_{21x}(j\omega) = \frac{1}{\operatorname{ch}(l \sqrt{j\omega R_1 C_1})}$  (см. задачу 10.56р).

Для принятых в задаче воздействия и реакции изображением переходной характеристики цепи является функция  $K_{21x}(p)/p$ , т. е.

$$h^1(t) \equiv K_{21x}(p) p^{-1} = [p \operatorname{ch}(l \sqrt{p R_1 C_1})]^{-1}.$$

Корни уравнения  $p \operatorname{ch}(l \sqrt{\rho R_1 C_1}) = 0$ :  $p_0 = 0$ ,  $p_n = -\left(\frac{2n+1}{l \sqrt{R_1 C_1}} \frac{\pi}{2}\right)^2$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$  По теореме разложения

$$h^1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{p_n t}}{\left. \frac{d}{dp} p \operatorname{ch}(l \sqrt{\rho R_1 C_1}) \right|_{p=p_n}} =$$

$$= 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \exp \left[ -\frac{\pi^2}{4} \frac{(2n-1)^2 t}{R_1 l C_1 l} \right].$$

**10.64м.** Переходную характеристику микроэлектронной  $RC$ -цепи рассчитывают по формуле, полученной при решении задачи 10.61р. Контрольные точки этой характеристики следующие:

$$\begin{array}{l} T_i \dots \dots \dots 0; 0,25; 0,4; 0,5; 0,75; 1,0 \\ h^1(T_i) \dots \dots \dots 0; 0,317; 0,5; 0,617; 0,783; 0,883 \end{array}$$

( $T = t(R_1 l C_1 l)^{-1}$  — нормированное время).

Переходная характеристика эквивалентной однозвенной  $RC$ -цепи имеет экспоненциальный характер:  $h_{\text{ЭК}}^1(t) = 1 - e^{-t/R_{\text{ЭК}} C_{\text{ЭК}}}$ , поэтому удобно ввести вспомогательные функции  $\psi = \ln[1 - h^1(T)]$ ;  $\psi_{\text{ЭК}} = \ln[1 - h_{\text{ЭК}}^1(t)] = -t/(R_{\text{ЭК}} C_{\text{ЭК}})$ . Теперь задача сводится к аппроксимации функции  $\psi(T)$  линейной функцией  $-kT$ . Аппроксимацию можно осуществить графически или методом наименьших квадратов (см., например, задачу 5.29). По известному значению коэффициента  $k$  можно найти постоянную времени эквивалентной цепи:  $R_{\text{ЭК}} C_{\text{ЭК}} = \frac{1}{k} R_1 l C_1 l$ .

**10.66м.** Коэффициент  $q$ , характеризующий законы изменения погонных параметров вдоль линии, имеет противоположный знак:  $q = -0,013 \text{ м}^{-1}$ .

**10.67м.** Знак коэффициента  $q$  и длину отрезка экспоненциальной линии  $l$  можно найти из условий  $\underline{Z}_{\text{в}}(0) = \underline{Z}_{\text{нов}} \underline{Z}_{\text{в}}(l) = R_{\text{н}}$ . Примечательно, что длина  $l$  никак не связана с частотой внешнего воздействия.

# ОТВЕТЫ

## Глава 1

1.2.  $u = 20(1 - e^{-10^6 t})$  мВ;  $p = 20(1 - e^{-10^6 t} + e^{-2 \cdot 10^6 t})$  мкВт;  $\omega = 20(10^6 t + 2e^{-10^6 t} - 0,5e^{-2 \cdot 10^6 t} - 1,5)$  пДж.

$t$ , мкс ... 0; 0,25; 2; 10  
 $u$ , мВ ... 0; 4,42; 17,3; 20  
 $p$ , мкВт ... 0; 0,979; 15; 20  
 $\omega$ , пДж ... 0; 0,0867; 15,2; 170

$$i_L = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ 10^4 t, \text{ А}, & t_0 < t < t_0 + T; \\ 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ А}, & t_0 + T \leq t. \end{cases}$$

1.11.  $u_L = 0,2 \cos(10^6 t + 0,4\pi)$  В. 1.12.  $u_L(t_1) = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=t_1} = 2,23$  В;  $\omega_L(t_1) = \frac{L i^2}{2} \Big|_{t=t_1} = 0,619$  мДж. 1.14.  $R_i = 1/G_i = 2,38$  кОм;  $e = R_i j = 6,71$  В.

1.16.  $e = 9,8$  В;  $R_i = 44,5$  кОм;  $j = 0,22$  мА;  $G_i = 22,5$  мкСм. 1.17.  $j = 0,814$  мА;  $G_i = 0,675$  мСм. 1.18.  $i_{R_1} = 0,08$  А;  $i_{R_2} = 0,04$  А. 1.20.  $u_{R_1} + u_{R_2} - u_{C_2} = e$ ;  $u_{R_1} + u_{R_2} + u_{R_4} + u_{R_5} = e$ ;  $u_{R_1} + u_{C_1} + u_{R_2} = e$ ;  $-u_{R_2} + u_{C_3} + u_{R_3} = 0$ ;  $u_{C_2} + u_{R_4} + u_{R_5} = 0$ ;  $u_{C_1} + u_{C_2} - u_{R_4} - u_{R_5} = 0$ ;  $u_{R_1} + u_{C_1} + u_{C_2} + u_{R_5} = e$ ;  $u_{R_1} + u_{C_1} + u_{C_2} - u_{R_4} - u_{C_2} = e$ ;  $u_{C_2} - u_{R_2} + u_{C_1} + u_{C_2} + u_{R_5} = 0$ ;  $u_{C_2} - u_{R_2} + u_{C_1} + u_{R_5} = 0$ ;  $u_{C_2} - u_{R_2} + u_{C_1} + u_{R_5} = 0$ ;  $u_{C_2} - u_{R_2} + u_{C_1} + u_{R_5} = 0$ . Вычитая из первого уравнения второе, можно получить пятое, вычитая из девятого десятое, — третье и т. д.

1.21. Уравнения баланса:  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ;  $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ ;  $u_C - u_R = 0$ ;  $u_L + u_R = e$ ;  $u_L + u_C = e$ . Компонентные уравнения:  $u_L = L di_1/dt$ ;

$u_R = R i_2$ ;  $u_C = (1/C) \int_{-\infty}^t i_3 dt$ . Основная система уравнений электрического рав-

новесия состоит из компонентных уравнений и любых трех линейно независимых уравнений баланса, например первого, третьего и четвертого. 1.25. Одна из возможных систем уравнений:  $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$ ;  $-i_2 + i_6 + i_7 = 0$ ;  $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$ ;  $-i_5 - i_7 + i_8 = 0$ ;  $u_{R_2} + u_{R_1} - u_{C_2} = e$ ;  $u_{R_4} + u_{R_2} + u_{C_3} = 0$ ;  $u_{C_2} + u_{R_5} + u_{R_1} + u_{C_2} = e$ ;  $u_{R_3} + u_{R_1} + u_{C_1} = e$ ;  $i_1 = u_{R_1}/R_1$ ;  $u_{C_1} = C_1 di_1/dt$ ;  $i_3 = u_{R_2}/R_2$ ;  $u_{C_2} = C_2 di_3/dt$ ;  $i_5 = u_{R_4}/R_4$ ;  $i_6 = u_{R_3}/R_3$ ;  $u_{C_3} = C_3 di_7/dt$ . 1.27.

$L_1 di_1/dt + R_1 i_1 = e$ . 1.29. См. рис. 1.18. 1.31.  $Q = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

1.32.  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . 1.33.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

Сокращенная матрица узлов приведена в условии 1.29. 1.34. Для матрицы  $A$ , приведенной в задаче 1.29,  $-i_1+i_2+i_3=0$ ;  $-i_2+i_6+i_7=0$ ;  $-i_3-i_4+i_5=0$ ;  $-i_5-i_7+i_8=0$ . Для матрицы  $Q$ , полученной при решении задачи 1.31:  $i_1-i_3-i_6-i_7=0$ ;  $i_2-i_6-i_7=0$ ;  $i_3+i_4-i_5=0$ ;  $-i_5-i_7+i_8=0$ . 1.35.  $u_1+u_3-u_4=0$ ;  $u_4+u_5+u_8=0$ ;  $u_1+u_2+u_6=0$ ;  $u_1+u_2+u_7+u_8=0$ . 1.38. При полном описании можно составить пять независимых уравнений баланса токов и напряжений, при сокращенном — четыре уравнения баланса токов и пять —

$$\text{баланса напряжений. 1.39. } \mathbf{B}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2^0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 1.40. \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Глава 2

2.1.  $U_m=0,4 \text{ В}$ ;  $U=0,283 \text{ В}$ ;  $T=2 \text{ мс}$ ;  $f=0,5 \text{ кГц}$ ;  $\omega=3140 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi=-45^\circ$ ;  $I_m=5 \text{ мА}$ ;  $I=3,54 \text{ мА}$ ;  $\varphi=90^\circ$ . 2.2 м.  $U_{m1}=5 \text{ В}$ ;  $U_1=3,54 \text{ В}$ ;  $f_1=1,59 \text{ кГц}$ ;  $\omega_1=10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi_1=60^\circ$ ;  $U_{m2}=7,07 \text{ В}$ ;  $U_2=5 \text{ В}$ ;  $f_2=10 \text{ кГц}$ ;  $\omega_2=6,28 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi_2=-60^\circ$ ;  $U_{m3}=4,24 \text{ В}$ ;  $U_3=3 \text{ В}$ ;  $f_3=50 \text{ Гц}$ ;  $\omega_3=100\pi \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi_3=-60^\circ$ . 2.3 м.  $U_{m1}=10 \text{ В}$ ;  $U_1=7,07 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{m1}=10 e^{j30^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_1=7,07 e^{j30^\circ} \text{ В}$ ;  $\underline{u}_1=10 e^{j30^\circ} e^{j\omega t} \text{ В}$ ;  $U_{m2}=4,24 \text{ В}$ ;  $U_2=3 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{m2}=4,24 e^{-j60^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_2=3 e^{-j60^\circ} \text{ В}$ ;  $\underline{u}_2=4,24 e^{-j60^\circ} e^{j\omega t} \text{ В}$ ;  $U_{m3}=1,7 \text{ мВ}$ ;  $U_3=1,2 \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{m3}=1,7 e^{-j60^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_3=1,2 e^{-j60^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\underline{u}_3=1,7 e^{-60^\circ} e^{j\omega t} \text{ мВ}$ ;  $U_{m4}=11,3 \text{ В}$ ;  $U_4=8 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{m4}=11,3 e^{-j28^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_4=8 e^{-j28^\circ} \text{ В}$ ;  $\underline{u}_4=11,3 e^{-j28^\circ} e^{j\omega t} \text{ В}$ ;  $I_{m1}=3 \text{ А}$ ;  $I_1=2,12 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{m1}=3 e^{j146^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_1=2,12 e^{j146^\circ} \text{ А}$ ;  $\underline{i}_1=3 e^{j146^\circ} e^{j\omega t} \text{ А}$ ;  $I_{m2}=0,5 \text{ мкА}$ ;  $I_2=0,354 \text{ мкА}$ ;  $\dot{I}_{m2}=0,5 e^{-j90^\circ} \text{ мкА}$ ;  $\dot{I}_2=0,354 e^{-j90^\circ} \text{ мкА}$ ;  $\underline{i}_2=0,5 e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} \text{ мкА}$ ;  $I_{m3}=0,1 \text{ А}$ ;  $I_3=70,7 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}_{m3}=0,1 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_3=70,7 \text{ мА}$ ;  $\underline{i}_3=0,1 e^{j\omega t} \text{ А}$ ;  $I_{m4}=1,41 \text{ А}$ ;  $I_4=1 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{m4}=1,41 e^{j180^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_4=1 e^{j180^\circ} \text{ А}$ ;  $\underline{i}_4=1,41 e^{j180^\circ} \times e^{j\omega t} \text{ А}$ . 2.4.  $\dot{U}_m=0,4 e^{-j45^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}=0,283 e^{-j45^\circ} \text{ В}$ ;  $\underline{u}=0,4 e^{j(3140t-45^\circ)} \text{ В}$ ;  $\dot{I}_m=5 e^{j90^\circ} \text{ мА}$ ;  $\dot{I}=3,54 e^{j90^\circ} \text{ мА}$ ;  $\underline{i}=5 e^{j(\omega t+90^\circ)} \text{ мА}$ . 2.5.  $\dot{I}_1=0,2 + j0,009 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_2=9,38 - j22,1 \text{ мкА}$ ;  $\dot{I}_3=-9,31 - j1,31 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_4=-0,05 - j0,708 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_5=17 - j80,2 \text{ мкА}$ ;  $\dot{I}_6=-0,287 + j0,201 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_7=19,8 + j19,8 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}_8=263 -$

$-j 389$  мкА. 2.6.  $\dot{U}_1 = 2,7 e^{j200^\circ}$  В;  $\dot{U}_2 = 54 e^{j10^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_3 = 7,07 e^{j225^\circ}$  В;  $\dot{U}_4 = 37 e^{j180^\circ}$  В;  $\dot{U}_5 = 144 e^{-j90^\circ}$  мВ;  $\dot{U}_6 = 0,3 e^{-j100^\circ}$  В;  $\dot{U}_7 = 0,1 e^{j47^\circ}$  В;  $\dot{U}_8 = e^{-j82^\circ}$  В;  $\dot{U}_9 = 1,12 e^{-j2^\circ}$  В. 2.7 м.  $u_1 = 7,5 \cos(\omega t + 45^\circ)$  В;  $u_2 = 0,792 \times \cos(\omega t + 124^\circ)$  В;  $u_3 = 70,7 \cos \omega t$  мВ;  $u_4 = 4,24 \cos(\omega t - 45^\circ)$  мВ;  $u_5 = 67,9 \times \cos \omega t$  В;  $u_6 = 22 \cos(\omega t + 48^\circ)$  В;  $u_7 = 22 \cos(\omega t - 48^\circ)$  В;  $u_8 = 22 \cos(\omega t + 132^\circ)$  В;  $u_9 = 22 \cos(\omega t - 132^\circ)$  В;  $u_{10} = \cos \omega t$  кВ;  $u_{11} = 0,342 \cos(\omega t + 90^\circ)$  мВ;  $u_{12} = 3 \cos(\omega t + 2,86^\circ)$  В. 2.8 м.  $i = 16,8 \cos(\omega t - 72^\circ 40')$  А;  $i_2 = 4,25 \cos(\omega t - 3^\circ 50')$  мА;  $i_3 = 9,49 \cos(\omega t + 153^\circ 25')$  А;  $i_4 = 5 \cos \omega t$  А;  $i_5 = 3 \cos(\omega t - 90^\circ)$  мА;  $i_6 = 22,8 \cos(\omega t + 90^\circ)$  А. 2.9 м. а)  $\dot{I}_{m1} = 7,51 e^{j150^\circ}$  А; б)  $\dot{I}_{m1} = 10,2 \times e^{j1,16^\circ}$  А; в)  $\dot{I}_{m1} = 0$ ; г)  $\dot{I}_{m1} = 3,39 e^{-j46,5^\circ}$  А. 2.11 м.  $I_m = 2,8$  А;  $\varphi = 98^\circ$ . 2.12.  $\dot{U}_{m1} = 14,6 e^{j40^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m2} = 6,2 e^{j6,2^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m3} = 36,1 e^{j131,5^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m4} = 1,25 e^{j175,2^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m5} = 1,9 e^{j106,8^\circ}$  В;  $\dot{U}_{m6} = 16,2 e^{j82,9^\circ}$  В. 2.13 м. а)  $R = 85,7$  Ом; б)  $C = 6,19$  мкФ; в)  $L = 45,5$  мГн; 2.14. а)  $\underline{Z} = 2 e^{j\pi/6}$  кОм;  $\underline{Y} = 0,5 e^{-j\pi/6}$  мСм; б)  $\underline{Z} = 177 e^{-j60^\circ}$  Ом;  $\underline{Y} = 5,64 e^{j60^\circ}$  мСм; в)  $\underline{Z} = 80 \times e^{-j45^\circ}$  кОм;  $\underline{Y} = 12,5 e^{j45^\circ}$  мкСм; г)  $\underline{Z} = 85,7 e^{-j90^\circ}$  Ом;  $\underline{Y} = 11,7 e^{j90^\circ}$  мСм. 2.15 м.  $g_1 = 0,088$  См;  $b_1 = -0,147$  См;  $g_2 = 0,147$  См;  $b_2 = -0,088$  См;  $g_3 = 0,033$  мСм;  $b_3 = 0,112$  мСм;  $g_4 = 17,3$  мСм;  $b_4 = 10$  мСм;  $g_5 = 0,574$  мСм;  $b_5 = 2$  мСм;  $g_6 = 0,357$  мСм;  $b_6 = 0$ ;  $g_7 = 0$ ;  $b_7 = -8$  мСм. 2.16 м.  $r_1 = 19,5$  Ом;  $x_1 = 7,96$  Ом;  $r_2 = 0$ ;  $x_2 = -8,33$  Ом;  $r_3 = 84,3$  Ом;  $x_3 = -148$  Ом;  $r_4 = 63,7$  Ом;  $x_4 = -19,7$  Ом. 2.17 м.  $\underline{Z}_1 = -j2 = 2 e^{-j\pi/2}$  Ом;  $\underline{Y}_1 = j0,5 = 0,5 e^{j\pi/2}$  См;  $\varphi_1 = -\pi/2$ ;  $\dot{I}_{m1} = 4,25 e^{j\pi}$  А;  $\dot{I}_1 = 3,01 e^{j\pi}$  А;  $i_1 = 4,25 \cos(10^6 t + \pi)$  А;  $w_1 = 6,47$  мкДж;  $W_{1 \max} = 18,1$  мкДж;  $t_1 = (2n + 1)\pi/4$  мкс;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\underline{Z}_2 = -j20 = 20 e^{-j\pi/2}$  Ом;  $\underline{Y}_2 = j0,05 = 0,05 e^{j\pi/2}$  См;  $\varphi_2 = \varphi_1$ ;  $\dot{I}_{m2} = 0,425 e^{j\pi}$  А;  $\dot{I}_2 = 0,301 e^{j\pi}$  А;  $i_2 = 0,425 \cos(10^6 t + \pi)$  А;  $w_2 = 0,647$  мкДж;  $W_{2 \max} = 1,81$  мкДж;  $t_2 = t_1$ . 2.18.  $\underline{Z} = j24 = 24 e^{j\pi/2}$  Ом;  $\dot{U} = 2,55 e^{j150^\circ}$  В;  $u = 3,6 \cos(10^6 t + 150^\circ)$  В;  $w = 56,8$  мкДж;  $t = \pi(n - 1/3) \pm 1,25$  мкс. 2.19.  $\dot{U} = 70,7 e^{-j60^\circ}$  В;  $P_A = 0,1$  Вт;  $w(t_1) = 0,126$  мкДж;  $w(t_2) = 0,1$  Дж. 2.20 м.  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$ ;  $-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0$ ;  $-\dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$ ;  $-\dot{I}_5 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} - \dot{U}_{L2} = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_{L2} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R2} - \dot{U}_{C2} = 0$ ;  $\dot{U}_{R1} = R_1 \dot{I}_1$ ;  $\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_4$ ;  $\dot{U}_{L2} = j\omega L_2 \dot{I}_3$ ;  $\dot{U}_{C1} = \dot{I}_5 / (j\omega C_1)$ ;  $\dot{U}_{C2} = \dot{I}_6 / (j\omega C_2)$ . 2.21 м.  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $\dot{U}_L + \dot{U}_R - \dot{E} = 0$ ;  $\dot{U}_C - \dot{U}_R = 0$ ;  $\dot{U}_R = R \dot{I}_2$ ;  $\dot{U}_C = \dot{I}_3 / (j\omega C)$ ;  $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_1$ ;  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $j\omega L \dot{I}_1 + R \dot{I}_2 - \dot{E} = 0$ ;  $\dot{I}_3 / (j\omega C) - R \dot{I}_2 = 0$ . 2.22 м.  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $\dot{I}_2 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$ ;  $-\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$ ;  $-\dot{I}_5 - \dot{I}_7 + \dot{I}_8 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_3 - \dot{U}_4 = 0$ ;  $\dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_6 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_6 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_7 + \dot{U}_8 = 0$ . 2.23. Одна из возможных систем уравнений:  $\dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m1} - \dot{I}_{m4} = 0$ ;  $-\dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m4} - \dot{I}_{m5} = 0$ ;  $+\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} + \dot{I}_{m3} + \dot{I}_{m2} = 0$ ;

$R\dot{I}_{m4} + j\omega L\dot{I}_{m2} = -\dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}$ ;  $j\omega L\dot{I}_{m2} - \dot{I}_3/(j\omega C) = -\dot{E}_{m3}$ . 2.24 м.  $Z_{BX1} = 40 \text{ Ом}$ ;  $Z_{BX2} = 40 + j30,2 = 50,1 e^{j37^\circ} \text{ Ом}$ ;  $\dot{I}_{m1} = 2,5 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{m2} = 2 e^{-j37^\circ} \text{ А}$ .  
 2.25 м.  $\dot{U}_{m1R} = 100 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{m1L} = 75,4 e^{j90^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{m2R} = 80 e^{-j37^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{m2L} = 60,3 \times e^{j53^\circ} \text{ В}$ . 2.29 м.  $Z_{BX} = 0,996 - j0,451 = 1,09 e^{-j24,3^\circ} \text{ кОм}$ ;  $Y_{BX} = (0,833 + j0,377) = 0,915 e^{j24,3^\circ} \text{ мСм}$ . 2.30 м.  $\dot{U}_m = 48,2 e^{j15,8^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{I}_{mR} = 1,21 e^{j15,8^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_{mL} = 1,59 e^{-j74,2^\circ} \text{ А}$ . 2.32.  $Z_{BX} = 6,16 e^{j68,3^\circ} \text{ Ом}$ . 2.33 м.  $\omega = 6,61 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .  
 2.34.  $f_1 = 265 \text{ кГц}$ ;  $f_2 = 459 \text{ кГц}$ . 2.36 м.  $Z_{BX} = 1700 - j465 = 1760 e^{-j15,3^\circ} \text{ Ом}$ ;  $\dot{I}_{BX} = 1,05 + j0,572 = 1,197 e^{j28,6^\circ} \text{ мА}$ . 2.38 м.  $\dot{I}_1 = 1,57 e^{j168,7^\circ} \text{ мА}$ ;  $\dot{I}_2 = 0,784 \times e^{j78,7^\circ} \text{ мА}$ ;  $\dot{I}_3 = 1,24 e^{j240,3^\circ} \text{ мА}$ ;  $\dot{U}_R = 1,57 e^{j168,7^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_L = 1,57 e^{j168,7^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_C = 0,62 e^{j150,3^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_J = 2,56 e^{-j6,9^\circ} \text{ В}$ . 2.39 м.  $R_{BX} = 1,65 \text{ кОм}$ . 2.42 м.  $C_{\text{Пос}} = 2,18 \text{ мкФ}$ ;  $C_{\text{Пар}} = 1,28 \text{ мкФ}$ . 2.43. а)  $P_A = 0,336 \text{ нВт}$ ;  $P_Q = 0$ ;  $P_S = 0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ ;  $\underline{P}_S = 0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ ; б)  $P_A = 0$ ;  $P_Q = -0,336 \text{ нвар}$ ;  $\underline{P}_S = 0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ ;  $\underline{P}_S = -j0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ ; в)  $P_A = 0$ ;  $P_Q = 0,336 \text{ нвар}$ ;  $P_S = 0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ ;  $\underline{P}_S = j0,336 \text{ нВ}\cdot\text{А}$ . 2.45. а)  $\underline{P}_{S\text{ист}} = 2,43 - j0,664 \text{ мВ}\cdot\text{А}$ ;  $P_{A\text{потр}} = 2,43 \text{ мВт}$ ;  $P_{Q\text{потр}} = -0,664 \text{ мвар}$ ; б)  $\underline{P}_{S\text{ист}} = 2,46 + j0,463 \text{ мВ}\cdot\text{А}$ ;  $P_{A\text{потр}} = 2,46 \text{ мВт}$ ;  $P_{Q\text{потр}} = 0,462 \text{ мвар}$ . 2.46.  $Z_{\text{н опт}} = 1 - j0,785 \text{ кОм}$ ;  $P_A = 1,25 \text{ мкВт}$ ;  $\eta = 0,5$ . 2.47.  $\eta = 0,526$ . 2.49. Для рис. 2.16, а  $Z_{BX} = Z_1(Z_2 + Z_3)/(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_4$ ; для рис. 2.16, б  $Z_{BX} = Z_2(Z_3 + Z_4 + Z_5)/(Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_4) + Z_1$ .  
 2.51. Для рис. 2.17, а  $Z_{BX} = -j3,18 \text{ кОм}$ ;  $C_{\text{Эк}} = 50 \text{ пФ}$ ; для рис. 2.17, б  $Z_{BX} = j11,2 \text{ кОм}$ ;  $L_{\text{Эк}} = 0,252 \text{ мГн}$ . 2.52 м.  $Z_{BX1} = 1,27 - j0,0437 \text{ кОм}$ ;  $Z_{BX2} = 2,6 + j0,8 \text{ кОм}$ ;  $Z_{BX3} = 1,11 - j2,65 \text{ кОм}$ . 2.53 м.  $R'_1 = 1,27 \text{ кОм}$ ;  $C'_1 = 91,6 \text{ нФ}$ ;  $R''_1 = 1,27 \text{ кОм}$ ;  $C''_1 = 109 \text{ пФ}$ ;  $R'_2 = 2,6 \text{ кОм}$ ;  $L''_1 = 1,6 \text{ мГн}$ ;  $R''_2 = 5,8 \text{ кОм}$ ;  $L''_2 = 29 \text{ мГн}$ ;  $R'_3 = 1,11 \text{ кОм}$ ;  $C'_3 = 378 \text{ пФ}$ ;  $R''_3 = 7,46 \text{ кОм}$ ;  $C''_3 = 321 \text{ пФ}$ . 2.54 м.  $R' = 996 \text{ Ом}$ ;  $C' = 2,94 \text{ нФ}$ . 2.55 м.  $R' = 10 \text{ Ом}$ ;  $C' = 1 \text{ нФ}$ . 2.56 м.  $R' = 14,6 \text{ Ом}$ ;  $L' = 153 \text{ мкГн}$ . 2.58 м.  $I_5 = 71,4 \text{ мкА}$ . 2.59 м.  $R_{BX} = 334 \text{ Ом}$ . 2.62.  $Y_{BX} = 0,0234 \text{ См}$ . 2.63. Для рис. 2.26, а 1 и 3, 2 и 4; для рис. 2.26, б 1 и 3, 2 и 4; для рис. 2.26, в 1 и 4, 2 и 3, 3 и 6, 4 и 5, 1 и 6, 2 и 5. 2.64.  $L_{\text{Эк max}} = 3 \text{ Гн}$ ;  $L_{\text{Эк min}} = 1,6 \text{ Гн}$ . 2.67.  $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $(j\omega L_1 - j\omega M_{12})\dot{I}_1 + (j\omega M_{12} - j\omega L_2)\dot{I}_2 + (j\omega M_{13} + j\omega M_{23})\dot{I}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$ ;  $(j\omega M_{12} - j\omega M_{13})\dot{I}_1 + (j\omega L_2 + j\omega M_{23})\dot{I}_2 - (j\omega M_{23} + j\omega L_3)\dot{I}_3 = \dot{E}_2 - \dot{E}_3$ . 2.69 м.  $Z_{BX1} = 17,6 \text{ Ом}$ ;  $Z_{BX2} = 19,5 + j40,6 \text{ Ом}$ .  
 2.70.  $R_{\text{Эк}} = 1,48 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{Эк}} = 5,07 \text{ мГн}$ . 2.71 м.  $L = 10 \text{ мГн}$ ;  $M = 1 \text{ мГн}$ ;  $k = 0,1$ . 2.72.  $R_{\text{Эк}} = 1,42 \text{ Ом}$ . 2.73.  $L_{\text{Эк1}} = 1,44 \text{ мкГн}$ ;  $R_{\text{Эк1}} = 0,281 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{Эк2}} = 14,5 \text{ мкГн}$ ;  $R_{\text{Эк2}} = 2,32 \text{ Ом}$ . 2.74 м.  $R_{\text{Эк}} = 3 \text{ Ом}$ ; при согласном включении  $L_{\text{Эк1}} = 3,28 \text{ мГн}$ ;  $L_{\text{Эк2}} = 5,55 \text{ мГн}$ ; при встречном включении  $L_{\text{Эк1}} = 2,72 \text{ мГн}$ ;  $L_{\text{Эк2}} = 0,454 \text{ мГн}$ .

2.75 м. При согласном включении  $R_{\text{ЭК1}}=0,667 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{ЭК1}}=0,729 \text{ мГн}$ ;  $R_{\text{ЭК2}}=3,27 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{ЭК2}}=0,837 \text{ мГн}$ ; при встречном включении  $R_{\text{ЭК1}}=0,667 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{ЭК1}}=0,603 \text{ мГн}$ ;  $R_{\text{ЭК2}}=0,684 \text{ Ом}$ ;  $L_{\text{ЭК2}}=0,0684 \text{ мГн}$ . 2.77 м. Для рис. 2.32, а  $C=99,5 \text{ нФ}$ ;  $n=1,19$ ; для рис. 2.32, б  $C=142 \text{ нФ}$ ;  $n=1,19$ ; для рис. 2.32, в  $C=1,02 \text{ мкФ}$ ;  $n=1,25$ ; для рис. 2.32, г  $C=1,59 \text{ мкФ}$ ;  $n=1,25$ .

### Глава 3

3.2.  $K(\omega) = 1/\sqrt{4+(\omega RC)^2}$ ;

$\varphi_K(\omega) = -\arctg(\omega RC/2)$  (рис. 0.1 а, б);

$K(\omega) = 1$ ;  $\varphi_K(\omega) = -2 \arctg(\omega RC)$

рис. 0.1, в, г). 3.3 м.  $Y(\omega) =$

$=\sqrt{1/R^2+1(\omega L)^2}$ ;  $\theta(\omega) = -\arctg \times$

$\times R/\omega L$ . 3.6 м.  $\omega=10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $\psi=0$ ,

3.7 м. При  $\psi=\pi/2$  для рис.3.5, а  $\omega=$

$=10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $K(\omega)=0,333$ ; для рис. 3.5, б

$\omega=0,447 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $K(\omega)=0,386$ . При

$\psi=-\pi$  для рис. 3.5, а  $\omega \rightarrow \infty$ ;

$K(\omega) \rightarrow 0$ ; для рис. 3.5, б  $(\omega)=$

$=2,45 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ;  $K(\omega)=0,0345$ . 3.8 м.  $R=2\sqrt{L/C}$ . 3.9 м.  $\omega = \sqrt{2/LC}$ .

3.10.  $Z(\omega) = R_2/\sqrt{1+(\omega R_2 C)^2}$ ;  $Y(\omega) = 1/\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}$ . 3.11.

$f_0 = 766 \text{ кГц}$ ;  $\rho = 866 \text{ Ом}$ ;  $Q = 106$ ;  $d = 9,43 \cdot 10^{-3}$ ;  $2\Delta f_0 = 7,23 \text{ кГц}$ . 3.12. а)  $f_{0a} =$

$=f_0$ ,  $Q_a = Q/2$ ;  $2\Delta f_{0a} = 2(2\Delta f_0)$ ; б)  $f_{0б} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_б = \sqrt{2}Q$ ;  $2\Delta f_{0б} = 2\Delta f_0/2$ ;

в)  $f_{0в} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_в = Q/\sqrt{2}$ ;  $2\Delta f_{0в} = 2\Delta f_0$ . 3.13.  $C=48,3 \text{ пФ}$ ;  $R = 11,7 \text{ Ом}$ .

3.15 м.  $\Delta f_1 = 8,1 \text{ кГц}$ ;  $\Delta f_2 = 0,1 \text{ кГц}$ ;  $\Delta f_3 = -3,1 \text{ кГц}$ ;  $\delta_1 = 8,8 \cdot 10^{-3}$ ;  $\delta_2 = 1,1 \times$

$\times 10^{-3}$ ;  $\delta_3 = -0,034$ ;  $\xi_1 = 6,12$ ;  $\xi_2 = 0,0785$ ;  $\xi_3 = -3,13$ ;  $z_1 = 198 \text{ Ом}$ ;  $z_2 =$

$=32,1 \text{ Ом}$ ;  $z_3 = 105 \text{ Ом}$ ;  $\varphi_1 = 80,7^\circ$ ;  $\varphi_2 = 4,9^\circ$ ;  $\varphi_3 = -72,3^\circ$ . 3.16 м.  $f_{H1} =$

$=159 \text{ кГц}$ ;  $f_{B1} = 161 \text{ кГц}$ ;  $f_{H2} = 136 \text{ кГц}$ ;  $f_{B2} = 189 \text{ кГц}$ . 3.17 м.  $I_0 = 464 \text{ кГц}$ ;

$2\Delta f_0 = 16,2 \text{ кГц}$ . 3.18 м.  $R_i = 6 \text{ Ом}$ . 3.20 м.  $z(\delta=0,01) \approx z(\delta=-0,01) = 27 \text{ Ом}$ ;

$z(\delta=0,08) = 81 \text{ Ом}$ ;  $z(\delta=-0,08) = 87 \text{ Ом}$ . 3.21.  $\Delta f = 15 \text{ кГц}$ ;  $R = 25 \text{ Ом}$ ;  $L =$

$=9,23 \text{ мГн}$ ;  $\Delta f = -15 \text{ кГц}$ ;  $C = 10,8 \text{ нФ}$ . 3.22.  $L = 11,5 \text{ мГн}$ ;  $Q_C = 2520$ .

3.23 м.  $2\Delta f_{01} = 8,12 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{02} = 14,1 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{03} = 80,8 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{04} = 812 \text{ кГц}$ .

3.24 м.  $2\Delta f_{01} = 5,22 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{02} = 8,12 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{03} = 24,4 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{04} = 80,8 \text{ кГц}$ .

3.28 м.  $C_1 = 710 \text{ пФ}$ ;  $C_2 = 53 \text{ пФ}$ . 3.29 м.  $Q_{\text{ЭК1}} = 50$ ;  $Q_{\text{ЭК2}} = 100$ ;  $Q_{\text{ЭК3}} = 200$ ;

$Q_{\text{ЭК4}} < 0$ . 3.30.  $k_f = 7,1$ . 3.33.  $Q_{\text{ЭК}} = 44,8$ ;  $2\Delta f_0 = 13,2 \text{ кГц}$ . 3.34 м.  $z_1 \approx z_2 =$

$=29 \text{ кОм}$ ;  $\varphi_1 \approx -\varphi_2 = 51,2^\circ$ ;  $z_3 = 3,89 \text{ кОм}$ ;  $\varphi_3 = 85,2^\circ$ ;  $\varphi = -86,6^\circ$ ;  $z_4 =$

$=3,52 \text{ кОм}$ . 3.35 м.  $\dot{U}_{m1} = 115 \text{ e}^{-j43,7^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{m2} = 114 \text{ e}^{j44,1^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{m3} = 66,5 \times$

$\times \text{e}^{-j83,4^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{m4} = 54,5 \text{ e}^{j84,3^\circ} \text{ мВ}$ . 3.37.  $p=0,25$ ;  $R_0=3,72 \text{ кОм}$ ;  $f_{0H} = 839 \text{ кГц}$ ;

$f_{0T}$ ,  $\rho$  и  $Q$  не изменились. 3.39.  $f_{0H} = 1,55 \text{ мГц}$ ;  $p=0,13$ ;  $R_0 = 5,6 \text{ кОм}$ ;  $Q_{\text{ЭК}} =$

$=136$ ;  $2\Delta f_0 = 12,2 \text{ кГц}$ ;  $U_T = 1,27 \text{ В}$ ;  $f_{0T}$ ,  $\rho$  и  $Q$  не изменились. 3.40. Кон-

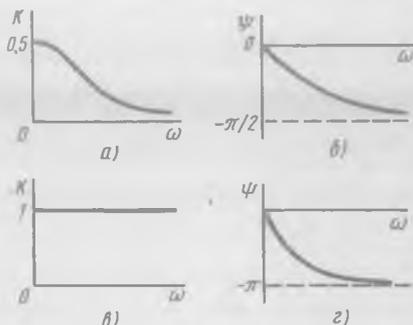


Рис. 0.1

тур второго типа,  $R_{\Pi}=15,8 \text{ Ом}$ . 3.41 м.  $t_{0T}=425 \text{ кГц}$ ;  $f_{0H1}=653 \text{ кГц}$ ;  $f_{0H2}=311 \text{ кГц}$ ;  $\rho=2,3 \text{ кОм}$ ;  $Q=106$ ;  $R_0=29,5 \text{ кОм}$ . 3.43.  $\rho=0,736$ . 3.46 м.  $C_1=C_2=335 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=19,8 \text{ нФ}$ . 3.47. а)  $C_1=C_2=333 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=39,6 \text{ нФ}$ ; б)  $C_1=C_2=335 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=19,8 \text{ нФ}$ ; в)  $C_1=C_2=334 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=6,21 \text{ нФ}$ . 3.48 м. а)  $C_1=C_2=327 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=2,7 \text{ пФ}$ ; б)  $C_1=C_2=324 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=5,45 \text{ пФ}$ ; в)  $C_1=C_2=317 \text{ пФ}$ ;  $C_{12}=13,3 \text{ пФ}$ . 3.50 м.  $C=15,6 \text{ пФ}$ . 3.51. а)  $L_{12}=20 \text{ мкГн}$ ; б)  $L_{12}=40 \text{ мкГн}$ ; в)  $L_{12}=96,4 \text{ мкГн}$ . 3.52 м. Для  $A=0,5$ ,  $2\Delta f_{01}=6,82 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{02}=10,1 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{03}=27,8 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{04}=90 \text{ кГц}$ ; для  $A=1$   $2\Delta f_{01}=11,5 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{02}=15,1 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{03}=36,2 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{04}=115 \text{ кГц}$ ; для  $A=2,41$   $2\Delta f_{01}=25,2 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{02}=29,5 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{03}=59 \text{ кГц}$ ;  $2\Delta f_{04}=179 \text{ кГц}$ .

#### Глава 4

4.3.  $-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$ ;  $-\dot{I}_2 + \dot{I}_6 + \dot{I}_7 = 0$ ;  $-\dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = 0$ ;  $-\dot{I}_5 - \dot{I}_7 + \dot{I}_8 = 0$ ;  $R_1 \dot{I}_1 + R_2 \dot{I}_3 + j\dot{I}_4/(\omega C_2) = \dot{E}$ ;  $-j\dot{I}_4/(\omega C_2) + R_4 \dot{I}_5 + R_5 \dot{I}_8 = 0$ ;  $R_1 \dot{I}_1 - j\dot{I}_2/(\omega C_1) - j\dot{I}_7(\omega C_3) + R_5 \dot{I}_8 = \dot{E}$ ;  $R_1 \dot{I}_1 - j\dot{I}_2/(\omega C_1) + R_3 \dot{I}_6 = \dot{E}$ . 4.4.  $-\dot{U}_1/R_1 + j\omega C_1 \dot{U}_2 + \dot{U}_3/R_2 = 0$ ;  $-j\omega C_1 \dot{U}_2 + \dot{U}_6/R_3 + j\omega C_3 \dot{U}_7 = 0$ ;  $-\dot{U}_3/R_2 - j\omega C_2 \dot{U}_4 + \dot{U}_5/R_4 = 0$ ;  $-\dot{U}_5/R_4 - j\omega C_3 \dot{U}_7 + \dot{U}_8/R_5 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}_4 = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_4 + \dot{U}_5 + \dot{U}_8 = 0$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_7 + \dot{U}_8 = \dot{E}$ ;  $\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_6 = \dot{E}$ , где  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{R1}$ ;  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{C1}$ , и т. д.

4.6. Для системы независимых контуров, соответствующих дереву графа цепи рис. 4.17, б:  $\underline{Z}_1 \dot{I}_{11} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{22} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{33} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{44} = \dot{E}_1$ ;  $\underline{Z}_2 \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{22} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{33} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{44} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3$ ;  $\underline{Z}_2 \dot{I}_{11} + \underline{Z}_3 \dot{I}_{22} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \dot{I}_{33} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{44} = -\dot{E}_2$ ;  $\underline{Z}_2 \dot{I}_{11} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{22} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{33} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \dot{I}_{44} = -\dot{E}_2 - \dot{E}_3$ , где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_{33} = \dot{I}_6$ ;  $\dot{I}_{44} = \dot{I}_7$ .

4.9 м.  $-\frac{1}{\underline{Z}_1} \dot{E}_1 + \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) \dot{U}_{20} - \frac{1}{\underline{Z}_4} \dot{E}_2 = -\frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5} \dot{E}_3$ .

4.13 м.  $U_{R1} = 55,6 \text{ мВ}$ ;  $U_{R2} = 21,8 \text{ мВ}$ . 4.14.  $\dot{U}_{R5} = 47,2 e^{j52^\circ} \text{ мВ}$ ;  $P_Q = 4 \text{ мкВар}$ .

4.15.  $\underline{Z}_{\text{ЭК1}} = 21,3 + j38,1 \text{ кОм}$ ;  $\underline{Z}_{\text{ЭК2}} = 6,59 + j23,1 \text{ кОм}$ . 4.16.  $\dot{U}_{R3} = 10e^{-j2,1^\circ} \text{ мкВ}$ .

4.17 м.  $\dot{U}_{R3} = 4,2e^{j128,4^\circ} \text{ В}$ . 4.18.  $\dot{U}_{10} \approx -7,69 \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{20} = -0,2 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{13} \approx 8,69 \text{ мВ}$ ;

$R_{\text{ЭК}} = 2,21 \text{ Ом}$ ;  $C_{\text{ЭК}} = 17,4 \text{ мкФ}$ ;  $\dot{U}_{10} = 158e^{-j171,9^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{20} = -0,2 \text{ В}$ ;  $\dot{U}_{13} =$

$= 159e^{-j171,9^\circ} \text{ мВ}$ ;  $R_{\text{ЭК}} = 2,48 \text{ Ом}$ ;  $C_{\text{ЭК}} = 322 \text{ мкФ}$ . 4.19.  $\dot{U}_{20} = 4,91e^{j79,6^\circ} \text{ мВ}$ ;

$\dot{U}_{30} = 38,5 \text{ мкВ}$ ;  $\dot{U}_{23} = 4,89e^{j80,1^\circ} \text{ мВ}$ ;  $\dot{U}_{12} = 4,83e^{-j88,6^\circ} \text{ мВ}$ ;  $R_{\text{ЭК}} = 517 \text{ Ом}$ ;

$C_{\text{ЭК}} = 394 \text{ мкФ}$ . 4.20.  $\dot{U}_{20} \approx 8,35 \text{ мВ}$ ;  $R_{\text{ЭК}} = 13,6 \text{ Ом}$ ;  $C_{\text{ЭК}} = 165 \text{ пФ}$ ;  $\dot{U}_{20} \approx 9,4 \text{ мВ}$ ;

$R_{\text{ЭК}} = 1,36 \text{ кОм}$ ;  $C_{\text{ЭК}} = 60,1 \text{ пФ}$ . 4.22.  $\dot{U}_{30} = 5,18e^{j138^\circ} \text{ мВ}$ . 4.24.  $\dot{I}_3 = 5,34e^{j47,9^\circ} \text{ А}$ .

4.25 м.  $\dot{U}_R = 0,483e^{j95^\circ} \text{ В}$ . 4.26.  $u_C = 0,447 \cos(2 \cdot 10^6 t - 63,4^\circ) \text{ В}$ . 4.27.

$\dot{I}'_1 = 3,69 - j0,674 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_2 = -3,55 + j7,92 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_3 = -0,147 + j0,062 \text{ мА}$ ;

$\dot{I}'_4 = -5,33 + j11,9 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_5 = 0,118 - j0,194 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_6 = 0,02 - j1,07 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_7 =$

$= -1,64 + j11,2 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_8 = -3,43 + j7,9 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_9 = -0,127 - j10 \text{ мА}$ ;  $\dot{I}'_2/\dot{E}_1 = \dot{I}'_4/\dot{E}_2 =$

$= -44,4 + j98,8$  мкСм. 4.29.  $I = 5$  А;  $I_2 = 2,5$  А. 4.32.  $I_1 = 7,78$  А. 4.33.  $R_2 = 121$  Ом;  $P = 19,7$  Вт. 4.35 м.  $\omega_1 = (1 + RS)/[R^2 C_2 (C_1 + C_2)]$  рад/с. 4.36.  $z = 820$  Ом. 4.37. Для рис. 4.36, а  $\underline{J}_{\text{ЭК}} = j\omega CE$ ;  $\underline{Y}_{\text{ЭК}} = (1/R) + j\omega C$ ; для рис. 4.36, б  $\underline{J}_{\text{ЭК}} = \dot{E}(-S + j\omega C)$ ;  $\underline{Y}_{\text{ЭК}} = j\omega C$ ; для рис. 4.36, в  $\underline{J}_{\text{ЭК}} = \dot{E}(S + j\omega C)$ ;  $\underline{Y}_{\text{ЭК}} = S + j\omega C$ . 4.38 м.  $\dot{E}_{\text{ЭК}} = 10e^{-j2,1^\circ}$  мкВ;  $\underline{Z}_{\text{ЭК}} = 49,6e^{-j86,5^\circ}$  Ом. 4.39 м.  $\dot{E}_{\text{ЭК}} = -0,426$  В;  $R_{\text{ЭК}} = 1,04$  кОм. 4.40. 1)  $x = By$ ;  $y = Ax + Cz$ ; 2)  $x_1 = Ax_0 + Cx_2$ ;  $x_2 = Bx_1 + Ex_3$ ;  $x_3 = Dx_2$ . 4.42.  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1} - \frac{Z_2}{Z_1} \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 + \dot{I}_3$ ;  $\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_2}{Z_3} - \frac{Z_2}{Z_2} \dot{I}_2 - \frac{Z_4}{Z_3} \dot{I}_4$ ;  $\dot{I}_4 = \dot{I}_3 + \dot{I}_5$ ;  $\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}_2}{Z_5} - \frac{Z_4}{Z_5} \dot{I}_4 - \frac{Z_4}{Z_5} \dot{I}_6$ ;  $\dot{I}_6 = \dot{I}_5 + \dot{I}_7$ ;  $\dot{I}_7 = \frac{Z_8}{Z_7} \dot{I}_8 - \frac{Z_6}{Z_7} \dot{I}_6$ ;  $\dot{I}_8 = \dot{I} - \dot{I}_7$ . 4.45.  $x_3/x_0 = 8$ .  $x_1 = 4x_2 + 2x_3 - 2x_0$ ;  $x_2 = 3x_1 - x_3 - x_0$ ;  $x_2 = 7x_1 + 2x_3$ . 4.46 м.  $\frac{x_5}{x_0} = \frac{ACFK}{[(1-B)(1-E) - CD - GF(1-B)] \times \frac{ACFK}{\times (1-IJ) - HJFK(1-B) - EGH + DEGH}}$ . 4.47.  $x_4/x_0 = [AF + (BG + CEG)(1-D)] / (1-D - EGH + DEGH)$ . 4.49. 32. 4.50.  $x_3/x_0 = ABD/[1 - BC - DE - BDF]$ . 4.51. а)  $\frac{x_4}{x_0} = \frac{A(1 - DG - J - EI - DHI + DGJ) + BCG(1 - J) + BCHI}{1 - BF - DG - J - EI - DHI + BFJ + BEFI + DGJ}$ ; б)  $\frac{x_4}{x_0} = \frac{ADH + BEH(1 - C)}{1 - ADHF - BEHF - C - EG + CEG + CBEHF}$ . 4.52.  $x_4 = 16a_1 + 5,25a_2 + 0,5a_3$ . 4.53.  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -10$ ;  $x_3 = 0$ . 4.55.  $\dot{I}_3 = \frac{R_3 \dot{E}_1 - (R_1 + R_4) \dot{E}_2}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2 R_3 (1 - SR_1)}$ . 4.57.  $\dot{I}_1 = 88,6e^{j180,5^\circ}$  мкА. 4.58.  $\dot{U}_{R_4} = -1,84$  В.

### Глава 5

5.1.  $i = 95$  мА;  $u_1 = 11$  В;  $u_2 = 13$  В. 5.2.  $i_1 = 82$  мА;  $i_2 = 18$  мА;  $u = 7,5$  В, 5.3.  $u_1 = 8,4$  В;  $u = 21,6$  В;  $i = 108$  мА;  $i_1 = 85$  мА;  $i_2 = 23$  мА. 5.4 м.  $E = 22$  В;  $R_d = 347$  Ом;  $u > 10$  В. 5.5.  $E = -8$  В;  $R_d = 51$  Ом;  $u > 10$  В. 5.6. а)  $u_{\text{ВЫХ}} = 13$  В; б)  $u_{\text{ВЫХ}} = 14$  В. 5.7 м а)  $u_{\text{ВЫХ}} = 10,4$  В; б)  $u_{\text{ВЫХ}} = 10,9$  В. 5.8.  $i_1 = 65$  мА;  $i_2 = 5$  мА;  $i_3 = 105$  мА;  $i_4 = 60$  мА. 5.9.  $i_1 = 90$  мА;  $i_2 = 80$  мА;  $i_3 = -20$  мА;  $i_4 = 10$  мА. 5.10.  $i_1 = 23,3$  мА;  $i_2 = -3,3$  мА;  $i_3 = 40$  мА. 5.11 м. а)  $R_1 > 699$  Ом;  $R_1 < 87$  Ом; б)  $87$  Ом  $< R_1 < 699$  Ом. 5.12.  $0,2$  В  $< E_- < 0,31$  В;  $R < 18,3$  Ом. 5.14.  $i_K = 3,7$  мА;  $i_6 = 187$  мкА. 5.16.  $R = 1,5$  кОм;  $R_1 = 1,2$  кОм;  $R_2 = 0,4$  кОм;  $E_1 = 3$  В;  $E_2 = 5$  В. 5.17. ВАХ линейна. 5.18. ВАХ имеет линейный участок, который расположен на прямой, проходящей через начало координат. 5.19. Касательная к ВАХ проходит через начало координат. 5.25 м.  $i = 0,1e^{2,5u}$  (мА, В).

5.28.  $a_0 = i_0$ ;  $a_1 = [-i_0(u_2^2 - u_1^2) + i_1 u_2^2 - i_2 u_1^2] D$ ;  $a_2 = [i_0(u_2 - u_1) - i_1 u_2 + i_2 u_1] D$ ;  
 $D = [u_1 u_2 (u_2 - u_1)]^{-1}$ . 5.30.  $\sqrt{y} = 2,26x$ . 5.31.  $y = 1,943x$ . 5.32.  $a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 +$   
 $+ a_0 \sum_{i=0}^n x_i - \sum_{i=0}^n y_i x_i = 0$ ;  $a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_0(n+1) - \sum_{i=0}^n y_i = 0$ , 5.33.  $y = -32,27x +$   
 $+ 14,75$ . 5.34.  $a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 - \sum_{i=0}^n x_i y_i = 0$ ;  $a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 -$   
 $- \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i = 0$ . 5.36м.  $y = 1,65 + 5,6(\Delta u) + 18(\Delta u)^2$ . 5.37.  $R_{\text{дн}\Phi}/R_{\text{CT}} =$   
 $= f(u) [uf'(u)]^{-1}$ ;  $f'(u) = di/du$ , 5.38.  $R_{\text{дн}\Phi}/R_{\text{CT}} = \varphi'(i) i / \varphi(i)$ ;  $\varphi'(i) = du/di$ .  
5.39.  $f(u) = a_0 + a_1 u$ . 5.40.  $i(t) = 0,5a_2 U_m^2 \cos 2\omega t$ . 5.41. а) 0;  $\omega_0$ ;  $3\omega_0$ ; б) 0;  $\omega_0$ ;  
 $2\omega_0$ ;  $3\omega_0$ . 5.42. а) 0;  $\omega_0$ ;  $2\omega_0$ ;  $4\omega_0$ ; б) 0;  $\omega_0$ ;  $2\omega_0$ ;  $3\omega_0$ ;  $4\omega_0$ . 5.43.  $a_2 = 0$ . 5.44м.  
 $I_- = 11,2 \text{ mA}$ ;  $I_{m1} = 4,4 \text{ mA}$ ;  $I_{m2} = 0,4 \text{ mA}$ . 5.45.  $I_{m1} = 16U_m \text{ (mA, B)}$ . 5.46.  
 $I_{m1} = 3,52U_m - 0,03U_m^3 \text{ (mA, B)}$ . 5.47.  $I_{m1} = 15 + 12u_0 \text{ (mA, B)}$ . 5.48м.  $I_- = 40 \text{ mA}$ ;  
 $I_{m1} = 48 \text{ mA}$ ;  $I_{m2} = 10 \text{ mA}$ . 5.50.  $y = \left| \frac{2}{\pi} \arcsin x \right|$ ;  $-1 \leq x \leq 1$ . 5.51.  $I_- =$   
 $= a_0 + 0,5a_2 U_{m1}^2 + 0,5a_2 U_{m2}^2$ ;  $I_{m1}|_{\omega_1} = a_1 U_{m1}$ ;  $I_{m2}|_{\omega_1} = 0,5a_2 U_{m1}^2$ ;  $I_{m1}|_{\omega_2} =$   
 $= a_1 U_{m2}$ ;  $I_{m2}|_{\omega_2} = 0,5a_2 U_{m2}^2$ ;  $I_m|_{(\omega_1 - \omega_2)} = I_m|_{(\omega_1 + \omega_2)} = a_2 U_{m1} U_{m2}$ .

### Глава 6

6.2.  $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{1}{\tau} \frac{R_2}{R_1 + R_2} e + \frac{R_3}{R_{12} + R_3} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{de}{dt}$ ;  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ;  
 $\tau = C(R_{12} + R_3)$ . 6.3.  $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$ . 6.4.  $\frac{d^2 u}{dt^2} +$   
 $+ \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} e$ . 6.5.  $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{R_2}{L} \frac{dj}{dt} +$   
 $+ \frac{1}{LC} j$ . 6.6м.  $\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{1}{RC_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1 (1 - k^2)} u_1 - \frac{k^2}{MC_1 (1 - k^2)} u_2 =$   
 $= \frac{1}{RC_1} \frac{de}{dt}$ ;  $\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{L_2 C_2 (1 - k^2)} u_2 - \frac{k^2}{MC_2 (1 - k^2)} u_1 = 0$ ;  $k^2 = M(L_1 L_2)^{-1}$ .  
6.7. Для рис. 6.7,а  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_2} \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} u =$   
 $= \frac{1}{R_1 C_2} \frac{de}{dt}$ ; для рис. 6.7,б  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{R_1}{L_1} + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \right) \frac{du}{dt} + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} u =$   
 $= \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} e$ . 6.8. Для рис. 6.8,а  $\nu = 2$ ; для рис. 6.8, б  $\nu = 0$ ; для рис. 6.8, в  
 $\nu = 3$ ; для рис. 6.8, г  $\nu = 2$ . 6.10м.  $u_{C_1}(0_-) = jR_2$ ;  $u_{C_2}(0_-) = 0$ ;  $u_{C_1}(0_+) =$   
 $= u_{C_2}(0_+) = jR_2 C_1 (C_1 + C_2)^{-1}$ . 6.11м.  $u_{C_1}(0_-) = E_1$ ;  $u_{C_2}(0_-) = E_2$ ;  $u_{C_1}(0_+) =$

$$= u_{C_2}(0_+) = (C_1 E_1 + C_2 E_2) / (C_1 + C_2); u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty) = (E_1 R_1 + E_2 R_2) / (R_1 + R_2).$$

6.12м.  $u_{C_1}(0_-) = u_{C_2}(0_-) = 0; u_{C_1}(0_+) = EC_2(C_1 + C_2)^{-1}; u_{C_2}(0_+) = EC_1(C_1 + C_2)^{-1};$

$u_{C_1}(\infty) = ER_1(R_1 + R_2)^{-1}; u_{C_2}(\infty) = ER_2(R_1 + R_2)^{-1}.$  6.14.  $i_1(0_-) = E/R_1;$

$i_2(0_-) = E/R_2; i_1(0_+) = -i_2(0_+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E}{R_1} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{E}{R_2}.$  6.15м.  $i_1(0_-) =$

$= E/R_1; i_2(0_-) = 0; i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{L_1 + M}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{E}{R_1}.$  6.17.  $u_C = 5e^{-10^4 t}$  В.

6.18.  $t_1 = RC \ln N.$  6.19.  $P_{cp} = \frac{U_{\text{н}}^2}{2R} \frac{N^2 - 1}{N^2 \ln N}.$  6.20м.  $R_y = 1,56 \cdot 10^9$  Ом.

6.22м.  $R = 250$  Ом;  $L = 500$  мГн. 6.24м. а)  $f = 50$  кГц;  $E_{\text{н}} = 0,198$  В; б)  $f = 10$  кГц;

$E_{\text{н}} = 0,95$  В; в)  $f = 4,76$  кГц;  $E_{\text{н}} = 1,89$  В. 6.26.  $\omega_{CB} \approx \omega_0 = 1 \cdot 10^5$  рад/с;

$\theta = 31,4.$  6.28м. а) 22; б) 51; в) 73; г) 95. 6.29м.  $R = 70$  Ом;  $L = 200$  мкГн;

$C = 506$  пФ. 6.31.  $u(t) = 1,741(e^{-156,93t} - e^{-1593,1t})$  В. 6.32.  $u(t) = 2 +$

$+ 0,667e^{-2 \cdot 10^3 t} - 2,667e^{-500t}$  В. 6.37м. а)  $a/(p^2 - a^2);$  б)  $p/(p^2 - a^2);$

в)  $a/(p^2 + a^2);$  г)  $p/(p^2 + a^2);$  д)  $\frac{a}{p(p+a)};$  е)  $\frac{a-b}{(p+a)(p+b)};$  ж)  $\frac{p \sin \varphi + b \cos \varphi}{p^2 + b^2};$

з)  $\frac{p \cos \varphi - b \sin \varphi}{p^2 + b^2}.$  6.38. а)  $\frac{a}{(p+b)^2 - a^2};$  б)  $\frac{p+b}{(p+b)^2 - a^2};$  в)  $\frac{a}{(p+b)^2 + a^2};$

г)  $\frac{(p+b) \cos \varphi - a \sin \varphi}{(p+b)^2 + a^2}.$  6.39м. а)  $f(0) = 1; f(\infty) = 0;$  б)  $f(0) = 0, f(\infty) = 0;$

в)  $f(0) = 0; f(\infty) = 1/a;$  г)  $f(0) = 1; f(\infty) = b/a.$  6.40. а)  $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-t} + 5e^{-2t});$

б)  $\frac{1}{12}(e^{-2t} + 8e^t - 6t - 9).$  6.41. а)  $1 - \cos t;$  б)  $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t).$  6.42м.

$Z(p) = 10^3(p + 250)p^{-1}$  Ом. 6.43м.  $Z(p) = 4p + 2 \cdot 10^3$  Ом. 6.44м.  $K(p) = 250 \times$

$\times (p + 250)^{-1}.$  6.45м.  $Z(p) = 0,199 \cdot 10^{-3}(p^2 + p0,35 \cdot 10^6 + 9,9 \cdot 10^{12})p^{-1}$  Ом

6.51м.  $\alpha_0 = \arctg \omega RC + \pi/2; \alpha_{01} = 2,834$  рад;  $\alpha_{02} = -0,308$  рад. 6.52м.  $\alpha_0 =$

$= \arctg \omega RC \pm \arccos \frac{U_0}{U_{cm}}; U_{cm} = E \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}; \alpha_{01} = 2,114$  рад;

$\alpha_{02} = 0,412$  рад. 6.53м.  $U_0 > E[1 + (\omega RC)^2]^{1/2}; U_0 > 3,03$  В. 6.54м—6.56м.

$R > 0,5 \sqrt{L/C}; \omega_{CB} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}.$  6.57м. а)  $R > 0,5 \sqrt{L/C};$

$\omega_{CB} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2};$  б)  $R < 2 \sqrt{L/C}; \omega_{CB} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$  6.60м.

а)  $\frac{A(1 - e^{-\rho t_{\text{н}}})}{\rho(1 - e^{-\rho T})};$  б)  $\frac{A \left[ 1 - e^{-\left(p + \frac{1}{\tau}\right) t_{\text{н}}} \right]}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)(1 - e^{-\rho T})};$  в)  $\frac{\pi A(1 + e^{-\rho t_{\text{н}}})}{t_{\text{н}} \left[ p^2 + \left(\frac{\pi}{t_{\text{н}}}\right)^2 \right] (1 - e^{-\rho T})};$

г)  $\frac{A [1 - (pt_n + 1) e^{-pt_n}]}{t_n p^2 (1 - e^{-pT})}$ ; д)  $\frac{A (pt_n - 1 + e^{-pt_n})}{t_n p^2 (1 - e^{-pT})}$ ; е)  $\frac{2A (1 - e^{-pt_n/2})^2}{t_n p^2 (1 - e^{-pT})}$ ;

ж)  $\frac{A (1 - e^{-pt_1} - pt_1 e^{-pt_1})}{t_1 p^2 (1 - e^{-pT})}$ . 6.61м.  $\frac{\omega_1 A}{p^2 + \omega_1^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega_1}$ . 6.62м.  $a [p (1 - e^{-p\tau})]^{-1} =$   
 $= \frac{a}{2p} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right)$ . 6.63м. Для рис. 6.36, а  $\frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}$ ; для рис. 6.36, б

6.65м.  $u_2(t) = f(t) = \frac{E\tau}{T} \left( e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1 \right)$  при  $0 \leq t < T$ ,  
 $\tau = RC$ ;  $u_2(t) = f(t) - E [1 - e^{-(t-T)/\tau}]$  при  $T \leq t < 2T$ ;  $u_2(t) = f(t) - E \times$   
 $\times \sum_{n=1}^N (1 - e^{-(t-nT)/\tau})$  при  $NT \leq t < (N+1)T$ . 6.66м.  $u_2(t) = f(t) =$   
 $= \frac{E\tau}{T} (1 - e^{-t/\tau})$  при  $0 \leq t < T$ ,  $\tau = RC$ ;  $u_2(t) = f(t) - 2f(t-T)$  при  $T \leq t < 2T$ ;  
 $u_2(t) = f(t) - 2f(t-T) + f(t-2T)$  при  $t \geq 2T$ . 6.67м, 6.68м.  $t_n = 2pk \sqrt{LC}$ ,  
 $k = 1, 2, 3, \dots$ . 6.70.  $u_L = u - Ri$ ;  $u_L = E \frac{1 - e^{-(T-t_n)/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-t/\tau}$  при  $0 \leq t < t_n$ ;  
 $u_L = -E \frac{1 - e^{-t_n/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(t-t_n)/\tau}$  при  $t_n \leq t < T$ . 6.71м.  $u_C = E \left[ 1 - \frac{1 - e^{-(T-t_n)/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \times \right.$   
 $\times e^{-t/\tau} \left. \right]$  при  $0 \leq t < t_n$ ;  $u_C = E (1 - e^{-t_n/\tau}) (1 - e^{-T/\tau})^{-1} e^{-(t-t_n)/\tau}$  при  
 $t_n \leq t < T$ . 6.73м.  $\tau = T$ ;  $\omega \ll 1/\tau$ . 6.74м.  $K(p) = kp$ . 6.75м.  $\omega \ll 1/\tau$ .  
 6.76м.  $K(p) = kp^{-1}$ . 6.77м.  $\omega \gg 1/\tau$ . 6.78м. а)  $5\delta(t-0, 1)$ ; б)  $ae^{-at} \cdot 1(t)$ ;  
 в)  $1(t) - 2\omega \cos \omega t$ ; г)  $\delta(t) - ae^{-at} \cdot 1(t)$ ; д)  $2\delta(t) - 1(t) \cdot 2\omega \sin \omega t$ . 6.79м.  
 а)  $-4\delta(t+2)$ ; б)  $27\delta(t+5)$ ; в)  $11\delta(t-3)$ . 6.80м. а) 0; б) 9; в) 0; г)  $5 \cdot 1(t-5)$ .  
 6.81м.  $\operatorname{sign}(t) = 2 \cdot 1(t) - 1$ . 6.82м.  $f'(t) = \operatorname{sign}(t)$ ,  $f''(t) = 2\delta(t)$ . 6.83м.  $(t+|t|)/2$ .  
 6.84м.  $-f'(a)$ . 6.89м. а)  $e^{-pa}$ ; б)  $p$ ; в)  $pe^{-pa}$ ; г)  $p^n e^{-pa}$ . 6.91.  $h^1(t) =$   
 $= \frac{1}{R} e^{-t/RC} = 10^{-3} e^{-10^3 t}$  См;  $h^{\delta}(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-t/RC} = 10^{-3} \delta(t) -$   
 $- e^{-10^3 t}$  См/с. 6.93м.  $h^1(t) = 1,17e^{-1309t} - 0,17e^{-191t}$ ;  $h^{\delta}(t) = \delta(t) -$   
 $- 1531,5e^{-1309t} + 32,5e^{-191t}$  с $^{-1}$ . 6.94м.  $h^1(t) = 0,447(e^{-191t} - e^{-1309t})$ ;  
 $h^{\delta}(t) = -85,377e^{-191t} + 585,123e^{-1309t}$  с $^{-1}$ . 6.95м.  $h^1(t) = 1 - e^{-10^3 t} - e^{-500t}$ ;  
 $h^{\delta}(t) = -\delta(t) + 10^3 e^{-10^3 t} + 500e^{-500t}$  с $^{-1}$ . 6.96м.  $h^1(t) = -1 + e^{-10^3 t} + e^{-500t}$ ;  
 $h^{\delta}(t) = \delta(t) - 10^3 e^{-10^3 t} - 500e^{-500t}$  с $^{-1}$ . 6.97м.  $h^1(t) = 1 - e^{-10^3 t} - e^{-2 \cdot 10^3 t}$ ;  
 $h^{\delta}(t) = -\delta(t) + 10^3 e^{-10^3 t} + 2 \cdot 10^3 e^{-2 \cdot 10^3 t}$  с $^{-1}$ . 6.98м.  $h^1(t) = 1 - e^{-10^3 t}$ .

6.99.  $h^1(t) = 1 \cdot e^{-250t}$  6.100.  $h^1(t) = \frac{1}{\beta RC} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ ;  $h^\delta(t) = \frac{\omega_0}{\beta RC} e^{-\alpha t} \times$   
 $\times \cos(\beta t - \varphi)$ ;  $\alpha = \frac{1}{2RC}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ ;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ;  $\varphi = -\arctg \alpha/\beta$ .

6.101.  $h^1(t) = \frac{t}{RC} e^{-\alpha t}$ ;  $\alpha = \frac{1}{2RC}$ ;  $h^\delta(t) = \frac{1-\alpha t}{RC} e^{-\alpha t}$ ;  $t_0 = 1/\alpha = 2RC$ ;  
 $h^1(t_0) = 0, 736$ . 6.102м. а)  $h^1(t) = \frac{1}{R} \cdot 1(t)$ ;  $h^\delta(t) = \frac{1}{R} \delta(t)$ ; б)  $h^1(t) = 1 - 2e^{-t/\tau}$ ;  
 $\tau = RC$ ;  $h^\delta(t) = -\delta(t) + \frac{2}{\tau} e^{-t/\tau}$ . 6.103м. а)  $h^1(t) = \frac{1}{R} \cdot 1(t)$ ;  $h^\delta(t) = \frac{\delta(t)}{R}$ ;  
б)  $h^1(t) = 2e^{-t/\tau} - 1$ ;  $\tau = RC$ ;  $h^\delta(t) = 2\delta(t) - \frac{2}{\tau} e^{-t/\tau}$ . 6.107.  $i(t) = 0, 2 \times$   
 $\times (e^{-500t} - e^{-10^3 t})$  А при  $t \geq 0$ . 6.109.  $u_2(t) = \frac{E}{1-\alpha\tau} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau})$ ;  
 $\tau = L/R$ . 6.113.  $u_2(t) = 1 + \left[ \frac{1}{\xi^2 + 1} + \frac{1}{(2\xi)^2 + 1} - 1 \right] \cos \omega_0 t + \left[ \frac{\xi}{\xi^2 + 1} + \frac{2\xi}{(2\xi)^2 + 1} \right] \times$   
 $\times \sin \omega_0 t - \left( 1 + \frac{1}{\xi^2 + 1} \right) e^{-t/\tau} - \left[ 1 + \frac{1}{(2\xi)^2 + 1} \right] e^{-t/2\tau}$ ;  $\xi = \omega_0 \tau$ .

### Глава 7

7.5.  $Y_{(ij)} u_{i0} = j_{i0}$ , матрицы  $J_{i0}$  и  $Y_{(ij)}$  определены в задачах 7.3м, 7.4м;  
 $u_{i0}^t = [u_{10}; u_{20}; u_{30}]$ . 7.6.  $Y_{(ij)} u_{i0} = j_{i0}$ ;  $Y_{(11)} = R_1^{-1} + (sL_1)^{-1} + (sL_2)^{-1} + sC_1$ ;  
 $Y_{(22)} = sC_1 + R_2^{-1}$ ;  $Y_{(33)} = R_2^{-1} + (sL_2)^{-1} + sC_2$ ;  $Y_{(12)} = Y_{(21)} = -sC_1$ ;  $Y_{(13)} =$   
 $= Y_{(31)} = -(sL_2)^{-1}$ ;  $Y_{(23)} = Y_{(32)} = -R_2^{-1}$ ;  $u_{i0}^t = [u_{10}; u_{20}; u_{30}]$ ;  $J_{i0}^t = [e_1 R_1^{-1} -$   
 $-i_2(0) - i_3(0); j; -j + i_3(0)]$ . 7.7.  $Y_{(ij)}(p) U_{i0}(p) = J_{i0}(p)$ , матрицу  $Y_{(ij)}(p)$   
получают из матрицы  $Y_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 7.6, заменой  $s$   
на  $p$ ;  $U_{i0}^t(p) = [U_{10}(p); U_{20}(p); U_{30}(p)]$ ;  $J_{i0}^t(p) = [E_1(p) R_1^{-1} - i_2(0)/p - i_3(0)/p -$   
 $-C_1 u_4(0); J(p) + C_1 u_4(0); -J(p) + i_3(0)/p - C_2 u_6(0)]$ . 7.8.  $Y_{(ij)} \dot{u}_{i0} = \dot{j}_{i0}$ ,  
матрицу  $Y_{(ij)}$  получают из матрицы  $Y_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 7.6,  
заменой  $s$  на  $j\omega$ ,  $\dot{u}_{i0}^t = [\dot{U}_{10}; \dot{U}_{20}; \dot{U}_{30}]$ ;  $\dot{J}_{i0}^t = [\dot{E}_1 R_1^{-1}; \dot{J}; -\dot{J}]$ . 7.11.  $Z_{(ij)} i_{ii} =$   
 $= e_{ii}$ , матрицы  $Z_{(ij)}$  и  $e_{ii}$  приведены в указаниях к задачам 7.9м и 7.10м,  
 $i_{ii}^t = [i_{11}; i_{22}; i_{33}]$ . 7.12.  $Z_{(ij)} i_{ii} = e_{ii}$ ;  $Z_{(11)} = R_1 + (sC_1)^{-1}$ ;  $Z_{(22)} = (sC_1)^{-1} + sL +$   
 $+ R_3$ ;  $Z_{(33)} = R_2 + (sC_2)^{-1} + sL$ ;  $Z_{(12)} = Z_{(21)} = -(sC_1)^{-1}$ ;  $Z_{(13)} = Z_{(31)} = 0$ ;  
 $Z_{(23)} = Z_{(32)} = -sL$ ;  $i_{ii}^t = [i_{11}; i_{22}; i_{33}]$ ;  $e_{ii}^t = [e_1 - u_4(0); -R_3 j + u_4(0); -e_2 -$   
 $-u_6(0)]$ . 7.13.  $Z_{(ij)}(p) I_{ii}(p) = E_{ii}(p)$ , матрицу  $Z_{(ij)}(p)$  получают из матри-  
цы  $Z_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 7.12, заменой  $s$  на  $p$ ,  $I_{ii}^t(p) =$   
 $= [I_{11}(p); I_{22}(p); I_{33}(p)]$ ;  $E_{ii}^t(p) = [E_1(p) - u_4(0)/p; -R_3 J(p) + u_4(0)/p +$

+Li<sub>5</sub>(0); -E<sub>2</sub>(p)-u<sub>6</sub>(0)/p--Li<sub>5</sub>(0)]. 7.14.  $\underline{Z}_{(ij)} I_{ii} = E_{ii}$ , матрицу  $\underline{Z}_{(ij)}$  получают из матрицы  $\underline{Z}_{(ij)}$ , приведенной в ответе к задаче 7.12, заменой s на jω;  $\dot{I}_{it}^t = [\dot{I}_{11}; \dot{I}_{22}; \dot{I}_{33}]; \dot{E}_{it}^t = [\dot{E}_1; -R_3 j; -\dot{E}_2]$ . 7.16.  $Y_{(ij)} u_{i0} = j_{i0}; Y_{(11)} = G_1 + (sL_1)^{-1}, Y_{(22)} = (sL_1)^{-1} + (sL_2)^{-1} + sC; Y_{(33)} = G_2 + sC; Y_{(12)} = Y_{(21)} = -(sL)^{-1}, Y_{(13)} = Y_{(31)} = 0; Y_{(23)} = Y_{(32)} = -sC; u_{i0}^t = [u_{10}; u_{20}; u_{30}]; j_{i0}^t = [j_1 - i_5(0); i_5(0) - i_2(0); j_2]$ . 7.21. Уравнения имеют такой же вид, как в задаче 7.20р. 7.23. Заряды емкостей и потокосцепления индуктивностей целесообразно использовать в качестве независимых переменных в тех случаях, когда индуктивности и емкости изменяются во времени скачкообразно, т. е. первые производные функций L(t) и C(t) претерпевают разрывы непрерывности. 7.24.  $\frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} u_2 - \frac{1}{L} u_4; \frac{du_2}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_3 - \frac{1}{R_1 C_1} u_2 + \frac{1}{R_1 C_1} e_1; \frac{du_4}{dt} = \frac{1}{C_2} i_3 - \frac{1}{R_2 C_2} u_4 - \frac{1}{R_2 C_2} e_2$ . 7.26.  $\frac{du_2}{dt} = \frac{-1}{C_1 + C_2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{dC_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt} \right) u_2 + \frac{1}{R_1 (C_1 + C_2)} e_1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{de_2}{dt} + \frac{e_2}{C_1 + C_2} \frac{dC_2}{dt}$ . 7.27.  $\frac{di_2}{dt} = \frac{-R}{L_1 + L_2} i_2 + \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{dj}{dt}$ . 7.28.  $\frac{di_2}{dt} = \frac{-1}{L_1 + L_2} \left( R + \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} \right) i_2 + \frac{L_1}{L_1 + L_2} \times \frac{dj}{dt} + \frac{j}{L_1 + L_2} \frac{dL_1}{dt}$ .

### Глава 8

8.1. Элементы матрицы  $Y_{ij}^{(2)}; Y_{11}^{(3)}; -Y_{11}^{(3)} - Y_{12}^{(3)}; -Y_{11}^{(3)} - Y_{21}^{(3)}; Y_{11}^{(3)} + Y_{12}^{(3)} + Y_{21}^{(3)} + Y_{22}^{(3)}$ . 8.2.  $K_a = -Y_{21} (Y_{22} + Y_H)^{-1}; K_b = Y_{21} (Y_{21} + Y_{22} + Y_H)^{-1}; K_c = -K_a (1 - K_a)^{-1}$ ; при  $|K_a| \gg 1$   $K_b \approx 1$ . 8.13.  $Z_{11} = Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = Z$ . 8.14. Для рис. 8.14, а  $A_{11} = A_{22} = 1; A_{12} = A_{21} = 0$ ; для рис. 8.14, б  $A_{11} = A_{22} = -1, A_{12} = A_{21} = 0$ . 8.15 м. Для рис. 8.15, а  $Z_{11} = j\omega L_1; Z_{22} = j\omega L_2, Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$ ; для рис. 8.15, б  $Z_{11} = j\omega L_1; Z_{22} = j\omega L_2; Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$ . 8.17. Для рис. 8.17, а  $A_{11} = 1 + Z_3 Z_2^{-1}; A_{12} = Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 Z_2^{-1}, A_{21} = Z_2^{-1}; A_{22} = 1 + Z_1 Z_3^{-1}$ ; для рис. 8.17, б  $A_{11} = 1 + Z_1 Z_2^{-1}; A_{12} = Z_1 + Z_3 + Z_1 Z_3 Z_2^{-1}; A_{21} = Z_2^{-1}; A_{22} = 1 + Z_3 Z_2^{-1}$ ; для рис. 8.17, в  $A_{11} = 1 + Z_2 Z_3^{-1}; A_{12} = Z_2; A_{21} = (Z_1 + Z_2 + Z_3) (Z_1 Z_3)^{-1}; A_{22} = 1 + Z_2 Z_1^{-1}$ . 8.18 м.  $Z_{1T} = Z_1; Z_{2T} = 0,5 (Z_2 - Z_1)$ . 8.19 м.  $A_{11} = A_{22} = (Z_2 + Z_1) (Z_2 - Z_1)^{-1}; A_{12} = 2Z_1 Z_2 (Z_2 - Z_1)^{-1}; A_{21} = 2 (Z_2 - Z_1)^{-1}$ . 8.25 м.  $Z_{11} = Z_{H1} \dot{U}_1 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)^{-1} |_{i_2=0}; Z_{21} = Z_{H1} \dot{U}_2 (\dot{U}_3 - \dot{U}_1)^{-1} |_{i_2=0}; Z_{12} = Z_{H2} \left[ -\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} + \frac{Z_{11}}{Z_{H1}} \left( \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \right] |_{i_2 \neq 0}; Z_{22} = Z_{H2} \left[ -1 + \frac{Z_{21}}{Z_{H1}} \left( \frac{\dot{U}_3 - \dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right) \right] |_{i_2 \neq 0}$ .

- 8.27.  $\underline{A}_{11}=1,33$ ;  $\underline{A}_{12}=3,67 \cdot 10^3$  Ом;  $\underline{A}_{21}=0,33 \cdot 10^{-3}$  См;  $\underline{A}_{22}=1,67$ . 8.28.  $\underline{Y}_{11} = 0,46 \cdot 10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -0,27 \cdot 10^{-3}$  См;  $\underline{Y}_{22} = 0,36 \cdot 10^{-3}$  См. 8.29.  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 3$ ;  $\underline{A}_{12} = 8$  кОм;  $\underline{A}_{21} = 1 \cdot 10^{-3}$  См. 8.30.  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = 3$  кОм;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 1$  кОм. 8.32.  $\underline{Z}_{11} = 200$  Ом;  $\underline{Z}_{12} = 50$  Ом;  $\underline{Z}_{21} = 100$  Ом;  $\underline{Z}_{22} = 600$  Ом. 8.33.  $\dot{U}_2 = 1,2$  В. 8.36.  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{S} + \underline{Y}_4$ ;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{S} - \underline{Y}_4$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3) \underline{S} + \underline{Y}_4$ ;  $\underline{S} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)^{-1}$ . 8.37.  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \underline{D}$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{D}$ ;  $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{D}$ ;  $\underline{D} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)^{-1}$ . 8.38.  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{S} + \underline{Y}'_1 (\underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_3) \underline{S}_1$ ;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{S} - \underline{Y}'_1 \underline{Y}'_2 \underline{S}_1$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3) \underline{S} + \underline{Y}'_2 (\underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_3) \underline{S}_1$ ;  $\underline{S} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)^{-1}$ ;  $\underline{S}_1 = (\underline{Y}'_1 + \underline{Y}'_2 + \underline{Y}'_3)^{-1}$ . 8.39.  $\underline{A}_{11} = (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2) (1 + \underline{Z}_3 \underline{Y}_4) + \underline{Z}_1 \underline{Y}_4$ ;  $\underline{A}_{12} = (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2) \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1$ ;  $\underline{A}_{21} = \underline{Y}_4 + \underline{Y}_2 (1 + \underline{Z}_3 \underline{Y}_4)$ ;  $\underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_3 \underline{Y}_2$ . 8.40. При каскадном встречном соединении таких четырехполюсников (выход первого четырехполюсника соединен с выходом второго) получается симметричный четырехполюсник, 8.41. В общем случае — нет. Составной четырехполюсник симметричен, если  $\underline{A}_{12A} \underline{A}_{21B} = \underline{A}_{21A} \underline{A}_{12B}$ . 8.42м.  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_5 / (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)$ . 8.43м.  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6$ ;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -(\underline{Y}_4 + \underline{Y}_6)$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_7$ . 8.45м.  $\underline{Z}_{11B} = \underline{Z}_{11A} + j\omega L_1 - (j\omega M - \underline{Z}_{12A})^2 (\underline{Z}_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ ;  $\underline{Z}_{12B} = \underline{Z}_{21B} = j\omega \times \times (L_2 \underline{Z}_{12A} + M \underline{Z}_{22A}) (\underline{Z}_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ ;  $\underline{Z}_{22B} = j\omega L_2 \underline{Z}_{22A} (\underline{Z}_{22A} + j\omega L_2)^{-1}$ . 8.46м. Оба четырехполюсника неавтономны. 8.48.  $\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_3$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_2$ ;  $\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1$ ;  $\dot{E}_{1x} = \dot{E}_3 - \dot{E}_2$ ,  $\dot{E}_{2x} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$ . Условие неавтономности;  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3$ . 8.49.  $\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \underline{Z}_1^{-1}$ ;  $-\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = \underline{Z}_2^{-1}$ ;  $\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = \underline{Z}_3^{-1}$ ;  $\dot{J}_{1K} = -\dot{E}_1 \underline{Y}_1 - \dot{E}_2 \underline{Y}_2$ ;  $\dot{J}_{2K} = \dot{E}_2 \underline{Y}_2 - \dot{E}_3 \underline{Y}_3$ . Условие неавтономности;  $\dot{E}_1 \underline{Y}_1 = \dot{E}_2 \underline{Y}_2 = \dot{E}_3 \underline{Y}_3$ . 8.52.  $\dot{U}_2 = 1,722e^{j0,6}$  В. 8.53.  $\dot{U}_1 / I_1 = (0,811 + j0,264)$  Ом. При  $\dot{E}_1 = 0$   $\underline{Z}_{11}(j\omega) = 2,06$  Ом. 8.55.  $\dot{E}_{1x} = -\dot{J}_{1K} \underline{Y}_{22} \underline{S} + \dot{J}_{2K} \underline{Y}_{12} \underline{S}$ ;  $\dot{E}_{2x} = \dot{J}_{1K} \underline{Y}_{21} \underline{S} - \dot{J}_{2K} \underline{Y}_{11} \underline{S}$ ;  $\underline{Z}_{11} = \underline{Y}_{22} \underline{S}$ ;  $\underline{Z}_{12} = -\underline{Y}_{12} \underline{S}$ ;  $\underline{Z}_{21} = -\underline{Y}_{21} \underline{S}$ ;  $\underline{Z}_{22} = \underline{Y}_{11} \underline{S}$ ;  $\underline{S} = (\Delta \underline{Y})^{-1} = (\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21})^{-1}$ . 8.59.  $\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}'_2 + \underline{A}_{12} \dot{J}_{2K}$ ;  $\dot{I}'_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}'_2 + \dot{J}_{1K} + \underline{A}_{22} \dot{J}_{2K}$ ;  $\dot{I}'_2 = -\dot{I}_2$ ;  $\underline{A}_{11} = -\underline{Y}_{22} \underline{Y}_{21}^{-1}$ ;  $\underline{A}_{12} = -\underline{Y}_{21}^{-1}$ ;  $\underline{A}_{22} = \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{21}^{-1}$ ;  $\underline{A}_{21} = -(\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}) \underline{Y}_{21}^{-1}$ . 8.62. а) 1,122; б) 1,413; в) 0,944; г) 2,718; д) 0,316; е) 12,183; ж) 19,953. 8.63.  $A = 1,529$  Нп;  $B = 1,144$  рад; 8.64.  $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$ ;  $\underline{\Gamma} = \text{Arch} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}$ . 8.66.  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \text{sh} \underline{\Gamma} = (966,7 + j331,8)$  Ом;  $2\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c \text{cth} \underline{\Gamma}/2 = (1,66,4 - j1005,6)$  Ом. 8.67 м. При согласовании  $-1 + \underline{U}_3 / \underline{U}_1 = \underline{Z}_{H1} / \underline{Z}_{H2}$ . С нагрузкой согласован четырехполюсник А. 8.69.  $\underline{A}_{11} =$

$$= \underline{A}_{22} = 1,25; \underline{A}_{12} = 375 \text{ Ом}; \underline{A}_{21} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ См. 8.71м. } \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \text{ch} 2 \Gamma; \underline{A}_{12} = \\ = \underline{Z}_c \text{ sh } 2 \Gamma; \underline{A}_{21} = \underline{Z}_c^{-1} \text{ sh } 2 \Gamma. \text{ 8.72 м. } \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \text{ch } N \Gamma; \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \text{ sh } N \Gamma; \underline{A}_{21} = \\ = \underline{Z}_c^{-1} \text{ sh } N \Gamma. \text{ 8.74. } \underline{Z}_{11}(j\omega) = (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{H2}) / (\underline{\Delta}_Y + \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{H2}); \underline{K}_{21}(j\omega) = -\underline{Y}_{21} / (\underline{Y}_{22} + \\ + \underline{Y}_{H2}); \underline{K}_c(j\omega) = \frac{-\underline{Y}_{21} \underline{Y}_{H1}}{(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{H1})(\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{H2}) - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}}; \underline{G}_{21}(j\omega) = \frac{\underline{Y}_{21} \underline{Y}_{H2}}{\underline{\Delta}_Y + \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{H2}};$$

$$\underline{Z}_{22}(j\omega) = \frac{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{H1}}{\underline{\Delta}_Y + \underline{Y}_{22} \underline{Y}_{H1}}; \underline{\Delta}_Y = \underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}. \text{ 8.76. } \psi_{21}(\omega) =$$

$$= -\text{arc cos}(U_2 U_1^{-1}). \text{ 8.77. } \underline{K}_{21X}(j\omega) = \left[ \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_1}{C_1} \right) + j \left( \omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right) \right]^{-1}.$$

$$\text{8.78. } \underline{K}_{21X}(j\omega) = -[1 + 2(\omega RC)^2] [1 - 2(\omega RC)^2 + j3\omega RC]^{-1}. \text{ 8.79. } \underline{K}_{21X}(j\omega) = \\ = [1 - (\omega RC)^2 + j3\omega RC]^{-1}. \text{ 8.83. } \underline{Z}_{11X}(j\omega) = R [(1 - \omega^2 LC) + j\omega(RC + L/R)] [(1 - \\ - \omega^2 LC) + j2\omega RC]^{-1}. \text{ 8.84. } \underline{Z}_{11X}(j\omega) = R [(1 - 2\omega^2 LC) + j\omega(RC + L/R)] [(1 - \\ - \omega^2 LC) + j\omega RC]^{-1}. \text{ 8.87. } \underline{Z}_{H2} = 100 \text{ Ом}; \underline{Z}_{11}(j\omega) = 50 \text{ Ом. 8.88м. } \underline{Z}_{11}(j\omega) =$$

$$= 12,1 \text{ кОм}; \underline{K}_{21}(j\omega) = -1,62; \underline{G}_{21}(j\omega) = 98. \text{ 8.89. } \underline{Z}_{11}(j\omega) = 2,183 \text{ кОм}; \\ \underline{K}_{21}(j\omega) = -9; \underline{G}_{21}(j\omega) = 98. \text{ 8.90. } \underline{Z}_{11}(j\omega) = 22,2 \text{ кОм}; \underline{K}_{21}(j\omega) = 0,9; \underline{G}_{21}(j\omega) = \\ = -100. \text{ 8.91. а) } \underline{Z}_{11}(j\omega) = 2,183 \text{ кОм}; \underline{K}_{21}(j\omega) = -9; \underline{G}_{21}(j\omega) = 98; б) \underline{Z}_{11}(j\omega) = \\ = 1,21 \text{ кОм}; \underline{K}_{21}(j\omega) = -8,2; \underline{G}_{21}(j\omega) = 49,5; в) \underline{Z}_{11}(j\omega) = 109,8 \text{ кОм}; \underline{K}_{21}(j\omega) = \\ = -8,2; \underline{G}_{21}(j\omega) = 4490. \text{ 8.94м. } \underline{Z}_{11}(j\omega) = R_1 R_2 \underline{Z}_{H2}^{-1}. \text{ 8.95м. } \underline{Y}_{11}(j\omega) = \underline{Y}_{H2} (1 - \\ - k)^{-1}. \text{ 8.96м. } \underline{Z}_{11}(j\omega) = \underline{Z}_{H2} (1 - k)^{-1}. \text{ 8.98. } L = R_H / (2\omega_c) = 50 \text{ мГн}; C_1 =$$

$$= 1 / (2\omega_c R_H) = 0,05 \text{ мкФ}; \text{ 8.99. } u_2(t) = 2 \cos(0,5 \cdot 10^4 t - 1,05) + 0,292 \cos(1,5 \times \\ \times 10^4 t - \pi) \text{ В. 8.100м. } u_2(t) = 2 \cos(0,5 \cdot 10^4 t - 2,1) + 0,0213 \cos(1,5 \cdot 10^4 t - \\ - 2\pi) \text{ В. 8.101. } u_2(t) = 0,144 \cos(0,5 \cdot 10^4 t + \pi) + 2 \cos(1,5 \cdot 10^4 t + 1,46) \text{ В.}$$

$$\text{8.102м. } u_2(t) = 0,01 \cos(0,5 \cdot 10^4 t + 2\pi) + 2 \cos(1,5 \cdot 10^4 t + 2,92) \text{ В. 8.106. } \omega_1 = \\ = 2,07 \cdot 10^3 \text{ рад/с}; \omega_2 = 12,07 \cdot 10^3 \text{ рад/с. 8.107. } \omega_1 = 8,284 \cdot 10^3 \text{ рад/с}; \omega_2 = \\ = 48,284 \cdot 10^3 \text{ рад/с. 8.108. } \omega_1 = 3,54 \cdot 10^3 \text{ рад/с}; \omega_2 = 7,07 \cdot 10^3 \text{ рад/с. 8.111.}$$

$$\text{Для рис. 8.76, б } \frac{2}{m} \underline{Z}_2 = j\omega L_2; L_2 = 166,7 \text{ мГн}; \frac{m}{2} \underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}; C_1 = 0,167 \text{ мкФ};$$

$$\frac{2m}{1 - m^2} \underline{Z}_2 = j\omega L'_2; L'_2 = 93,75 \text{ мГн}; \omega_\infty = 0,8 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

## Глава 9

$$\text{9.1. Для рис. 9.1, а } Z_{ВХ}(p) = [p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + p(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) + \\ + 1] [p^2 R_2 C_2 C_1 + p C_1]^{-1}; \text{ для рис. 9.1, б } Z_{ВХ}(p) = [p^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + p(R_1 C_1 + \\ + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1] [p^2 R_2 C_2 C_1 + p(C_1 + C_2)]^{-1}. \text{ 9.2. Для рис. 9.1, в } Y_{ВХ}(p) =$$

$$= (p^3 L_1 C_1 C_2 + p C_1) [p^4 L_1 C_1 L_2 C_2 + p^2(L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_2 C_1) + 1]^{-1}; \text{ для}$$

$$\text{рис. 9.1, г } Y_{ВХ}(p) = (p^2 LC + p2RC + 1) (p^2 LCR + p2L + R)^{-1}. \text{ 9.3. а) Да; б) нет, так как степень числителя меньше степени знаменателя на 2; в) да;}$$

г) нет, так как  $\operatorname{Re} [F_4(j\omega)] < 0$  при  $\omega > 1/\sqrt{2}$  9.7. К началу координат всегда должен быть ближе нуль, а не полюс. В остальном свойства полюсов и нулей такие же, как и для  $RC$ -цепей (см. задачу 9.6р). 9.8. Рис. 9.5, а, б — к  $RL$ -цепям; рис. 9.5, в, г — к  $RC$ -цепям. 9.10. а) Нет; б) Нет; в) да; г) нет. 9.11.

а) Нет; б) да; в) нет. 9.12м. Для рис. 9.6, а, б, не могут; для рис. 9.6, в  $RLC$  — цепь; для рис. 9.6, г  $RC$ -цепь для  $Z_{вх}$  и  $RL$ -цепь для  $Y_{вх}$ ; для рис. 9.6, д  $RL$ -цепь для  $Z_{вх}$  и  $RC$ -цепь для  $Y_{вх}$ . 9.14м.  $0 \leq a \leq 59,7$ . 9.16.

$Z(p) = (16p^4 + 12p^2 + 1)(8p^3 + p)^{-1}$  Ом. 9.17.  $Y(p) = (16p^4 + 12p^2 + 1)(8p^3 + p)^{-1}$  См. Схемы на рис. 9.9 и 9.10 дуальны. 9.19м. Для рис. 9.17  $L_0 = 1/5$  Гн;  $C_\infty = 3\Phi$ ;  $L_1 = 1/4$  Гн;  $C_1 = 1\Phi$ ;  $L_2 = 1/6$  Гн;  $C_2 = 2/3\Phi$ . 9.20. Тип  $(x - x)$ .

Для рис. 9.16  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ ; для рис. 9.17  $L_0 = \infty$ ;  $C_\infty = 0$ . 9.22. Для рис. 9.17  $L_0 = 70$  мГн;  $C_\infty = 0$ ;  $L_1 = 28$  мГн;  $C_1 = 255$  пФ;  $L_2 = \infty$ ;  $C_2 = 0$ .

9.23. Для рис. 9.16  $L_\infty = 1$  Гн;  $C_0 = 2\Phi$ ;  $L_1 = 3$  Гн;  $C_1 = 3\Phi$ ;  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ . 9.24. Для рис. 9.16  $L_\infty = 3/4$  Гн;  $C_0 = 7\Phi$ ;  $L_1 = 100/784$  Гн;  $C_1 = 5376/100\Phi$ ;  $L_2 = 0$ ;  $C_2 = \infty$ .

Для рис. 9.17  $L_0 = \infty$ ;  $C_\infty = 0$ ;  $L_1 = 1$  Гн;  $C_1 = 4\Phi$ ;  $L_2 = 3$  Гн;  $C_2 = 3\Phi$ . 9.25. Индуктивности следует увеличить, а емкости уменьшить в 10 раз. 9.26м. Для рис. 9.16  $L_\infty = 0$ ;  $C_0 = \infty$ ;  $L_1 = 1/6$  Гн;  $C_1 = 2\Phi$ ;  $L_2 = 1/2$  Гн;  $C_2 = -2\Phi$ .

Для рис. 9.17  $L_0 = 2/3$  Гн;  $C_\infty = 1\Phi$ ;  $L_1 = 2$  Гн;  $C_1 = 1/4\Phi$ ;  $L_2 = \infty$   $C_2 = 0$ . 9.27.  $Z(p) = 1 + \frac{1}{3p + \frac{1}{2p + \frac{1}{5p + 1/4}}}$  Ом. 9.28.  $Y(p) = 2p +$

$\frac{1}{2 + \frac{1}{3p + \frac{1}{5p + \frac{1}{4p + 1/10}}}}$  См. 9.30. Для рис. 9.18  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 2p$ ;  $Y_3 =$

$= 3p$ ;  $Z_4 = p$ ;  $Y_5 = 4p$ . 9.31. Для рис. 9.18  $Y_1 = 2p$ ;  $Z_2 = 3/p$ ;  $Y_3 = 1/p$ ;  $Z_4 =$

$= 4p$ ;  $Y_5 = \infty$ . 9.32. Для рис. 9.18  $Y_1 = p$ ;  $Z_2 = 2$ ;  $Y_3 = 3p$ ;  $Z_4 = 1/(4p)$ ;  $Y_5 = \infty$

9.34. Для рис. 9.18 1)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 6p/5$ ;  $Y_3 = 25p/9$ ;  $Z_4 = 9p/5$ ;  $Y_5 = \infty$ ; 2)  $Y_1 =$

$= 1/(3p)$ ;  $Z_2 = 1/p$ ;  $Y_3 = 1/(2p)$ ;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ . 9.35. Для рис. 9.18: 1)  $Y_1 = 2p$

$Z_2 = 3p$ ;  $Y_3 = p$ ;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ ; 2)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 1/(3p)$ ;  $Y_3 = 3/p$ ;  $Z_4 = 1/(6p)$ ;  $Y_5 = \infty$ .

9.36. Для рис. 9.18: 1)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = p$ ;  $Y_3 = 2p$ ;  $Z_4 = 3p$ ;  $Y_5 = 4p$ ; 2)  $Y_1 =$

$= 0$ ;  $Z_2 = 1/(6p)$ ;  $Y_3 = 3/(7p)$ ;  $Z_4 = 49/(48p)$ ;  $Y_5 = 4/(7p)$ . 9.37. Для рис. 9.18:

1)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 2p/3$ ;  $Y_3 = 54p/29$ ;  $Z_4 = 841p/12$ ;  $Y_5 = 4p/29$ ; 2)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 1/(2p)$ ;  $Y_3 = 1/p$ ;  $Z_4 = 1/(3p)$ ;  $Y_5 = 1/(2p)$  9.38. Для рис. 9.18:  $Y_1 = 2p$ ;  $Z_2 = 2p$ ;  $Y_3 = p$ ;  $Z_4 = 4p$ ;  $Y_5 = 3p$ .

9.39. Все сопротивления продольных ветвей следует увеличить, а проводимости поперечных ветвей уменьшить в  $Q$  раз. 9.40 м. Для рис. 9.18:

1)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 6p/5$ ;  $Y_3 = 25p/9$ ;  $Z_4 = 9p/5$ ;  $Y_5 = \infty$ ; 2)  $Y_1 = 1/(3p)$ ;  $Z_2 = 1/p$ ;

$Y_3 = 1/(2p)$ ;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ . 9.41. Для рис. 9.18 : 1)  $Y_1 = 2p$ ;  $Z_2 = 3p$ ;  $Y_3 = p$ ;  $Z_4 = \infty$ ;  $Y_5 = 0$ ; 2)  $Y_1 = 0$ ;  $Z_2 = 1/(3p)$ ;  $Y_3 = 3/p$ ;  $Z_4 = 1/(6p)$ ;  $Y_5 = \infty$ . 9.42. Для рис. 9.18 : 1)  $Y_1 = p$ ;  $Z_2 = p/2$ ;  $Y_3 = 4p$ ;  $Z_4 = p/6$ ;  $Y_5 = \infty$ ; 2)  $Y_1 = 3/(2p)$ ;  $Z_2 = 4/(5p)$ ;  $Y_3 = 25/(2p)$ ;  $Z_4 = 1/(5p)$ ;  $Y_5 = \infty$ . 9.44м. Для рис. 9.19  $L_1 = 1/11$  Гн;  $R_1 = 100$  Ом;  $C_1 = 100$  мкФ;  $R_2 = 100/11$  Ом. 9.46. Нет. 9.47. Неминимально-фазовым является второй четырехполюсник. 9.51. Для рис. 9.23, а  $Z_{1\Pi} = 2 + 1/(3p)$ ;  $Z_{2\Pi} = 1/(4p + 1)$ ;  $Z_{3\Pi} = (2p + 1/3)^{-1}$ . 9.55. Нельзя, так как наличие нулей функции  $K(p)$  в правой полуплоскости указывает на неминимально-фазовый характер цепи. 9.56. Для рис. 9.25  $Z_1 = 4p/a$ ;  $Z_2 = 16p/a + 2/(ap)$  ( $a > 0$ ). 9.59м. Для рис. 9.22  $Z(p) = 20p + 10^3$  Ом. 9.60. Для рис. 9.22  $Z(p) = \frac{1}{12,5 \cdot 10^{-6}p + 250 \cdot 10^{-6}}$  Ом, что соответствует параллельному соединению элементов  $C = 12,5$  мкФ;  $R = 4$  кОм.

### Глава 10

10.1  $\underline{Z}_B = 249 e^{-j37^\circ 35'}$  Ом;  $\underline{\gamma} = 47,5 \cdot 10^{-3} e^{j52^\circ 25'} = (29 + j 37,6) 10^{-3} \times \text{км}^{-1}$ ;  $v_\Phi = 133,7 \cdot 10^3$  км/с;  $\lambda = 167$  км;  $\alpha = 29 \cdot 10^{-3}$  Нп/км;  $\beta = 37,6 \times 10^{-3}$  рад/км. 10.2.  $\alpha = \sqrt{0,5z_1 y_1 + R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1}$ ;  $\beta = \sqrt{0,5z_1 y_1 - R_1 G_1 + \omega^2 L_1 C_1}$ ;  $z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$ ;  $y_1 = \sqrt{G_1^2 + (\omega C_1)^2}$ . При  $\omega L_1 \gg R_1$ ,  $\omega C_1 \gg G_1$   $\alpha \approx 0,5R_1 \sqrt{C_1/L_1} + 0,5G_1 \sqrt{L_1/C_1}$ ;  $\beta \approx \omega \sqrt{L_1 C_1}$ . 10.4.  $\rho_2 = -0,117$ ;  $K_6 = 0,79$ . 10.5.  $\rho_2 = 0,149 e^{j200^\circ}$ ;  $K_6 = 0,74$ . 10.7.  $\dot{U}(x) = \dot{U}(0) [\text{sh } \underline{\gamma}(l-x)] \times [\text{sh } \underline{\gamma} l]^{-1} + \dot{U}(l) [\text{ch } \underline{\gamma}(l-x) - (\text{cth } \underline{\gamma} l) \text{sh } \underline{\gamma}(l-x)]$ ;  $\dot{I}(x) = \dot{U}(0) \frac{\text{ch } \underline{\gamma}(l-x)}{\underline{Z}_B \text{sh } \underline{\gamma} l} + \dot{U}(l) \frac{\dot{U}(l)}{\underline{Z}_B} [\text{sh } \underline{\gamma}(l-x) - (\text{cth } \underline{\gamma} l) \text{ch } \underline{\gamma}(l-x)]$ . 10.8м.  $U(y) = 1,057 (\cos^2 A + 0,56 \sin^2 A)^{1/2}$  В;  $I(y) = 14,125 (0,56 \cos^2 A + \sin^2 A)^{1/2}$  мА;  $A = 3,526y$ , где  $y$  отсчитывают от конца линии. 10.10м.  $\underline{Z}_B = 74,5$  Ом. 10.12.  $a = 0,9$  м. 10.14м.  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_B \text{cth } \underline{\gamma} l$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_B \text{c sch } \underline{\gamma} l$ . 10.15м.  $K_C(j\omega) = 2\underline{Z}_{H2} \times \underline{Z}_H e^{-\underline{\gamma} l} [(\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_B)(\underline{Z}_{H2} + \underline{Z}_B)(1 - \rho_1 \rho_2 e^{-2\underline{\gamma} l})]^{-1}$ ;  $\rho_1 = \frac{(\underline{Z}_{H1} - \underline{Z}_B)}{(\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_B)}$ ;  $\rho_2 = \frac{(\underline{Z}_{H2} - \underline{Z}_B)}{(\underline{Z}_{H2} + \underline{Z}_B)}$ . 10.19.  $l_{\min} = 0,625$  м. 10.20.  $l_{\min} = 1,34$  м. 10.21.  $\underline{Z}_H = -j 90,75$  Ом;  $\underline{C}_H = 17,54$  пФ. 10.22.  $\underline{Z}_H = j 62,33$  Ом;  $L_H = 9,62 \cdot 10^{-8}$  Гн. 10.23.  $l_{\min} = \lambda/2$ . 10.24.  $l_{\min} = \lambda/4$ . 10.25м. а) Подключить короткозамкнутый отрезок линии, длина которого  $l = v_\Phi/4\omega_1$ ; б) подключить разомкнутый отрезок линии такой же длины. 10.27.  $\underline{Z}_{Bx} = (65,49 + j17,7)$  Ом. 10.28м. а)  $R_2 = 80$  Ом;  $R_3 = 42,2$  Ом;  $K_{63} = 0,563$ ; б)  $R_2 = 125$  Ом;  $R_3 = 67,5$  Ом;  $K_{63} = 0,9$ . 10.29 м.

$\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} = j1102,2 \text{ Ом} = j\omega L$ ;  $L = 175,4 \text{ мГн}$ ;  $\underline{Z}_{12} = -j702,3 \text{ Ом} = 1/(j\omega C)$ ;  $C = 0,227 \text{ мкФ}$ . **10.30.**  $\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12} = 3,967 \cdot 10^{-5} \text{ См}$ ;  $-\underline{Y}_{12} = 8,604 \cdot 10^{-4} \text{ См}$ . **10.32.**  $f_0 = 222,72 \text{ МГц}$ ;  $R_0 = 32,94 \text{ кОм}$ ;  $Q = 345,7$ ;  $R_K = 0,276 \text{ Ом}$ ;  $L_K = 6,81 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$ ;  $C_K = 7,5 \text{ пФ}$ . **10.33 м.**  $\omega_0 = \frac{\pi}{2l \sqrt{L_1 C_1}}$ ;  $R_0 = \frac{1}{2} R_1 l$ ;  $Q = \frac{\pi}{2R_1 l} \sqrt{L_1/C_1}$ ;  $Z_x(j\omega) = R_0(1 + j2Q\delta)$ ;  $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ . **10.34.**  $f_0 = 222,72 \text{ МГц}$ ;  $R_0 = 0,17 \text{ Ом}$ ;  $Q = 345,7$ ;  $R_K = 0,17 \text{ Ом}$ ;  $L_K = 4,2 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$ ;  $C_K = 12,16 \text{ пФ}$ . **10.35 м.**  $K_{21}(\psi) = \left| 1 + \left( \frac{u \sin \psi}{\psi} \right)^2 + \frac{u \sin 2\psi}{\psi} \right|^{-1/2}$ ;  $\psi = \omega l \times \sqrt{L_1 C_1}$ ; максимумы АЧХ существуют при  $\psi_{01} \approx \pi - \pi/a$ ;  $\psi_{02} \approx 2\psi_{01}$ . **10.36.**  $K_{21}(\psi) = |1 + (q \sin \psi)^2 - q\psi \sin 2\psi|^{-1/2}$ ;  $\psi = \omega l \sqrt{L_1 C_1}$ ; максимумы АЧХ существуют при  $\psi_{01} \approx 1/\sqrt{q}$ ;  $\psi_{02} \approx \pi + 1/(\pi q)$ . **10.37.**  $\underline{Z}_{вГ} = \sqrt{\underline{Z}_в R_H} = 70,71 \text{ Ом}$ . **10.39.**  $L_{доп} = 540,9 \text{ мГн}$ ;  $\underline{Z}_в = 3774,9 \text{ Ом}$ ;  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$ ;  $\beta = 0,721 \text{ рад/км}$ ;  $v_{ф} = 6971,6 \text{ км/с}$ ;  $\lambda = 8,72 \text{ км}$ . **10.40.**  $\alpha_{\min} = \sqrt{R_1 G_1}$ . **10.41.**  $t_0 = 0,56 \text{ мкс}$ . **10.43.**  $u_2(t)$  — периодическая последовательность прямоугольных импульсов, начинающаяся в момент времени  $t_0 = 0,56 \text{ мкс}$ . Длительность импульса  $t_{и} = 2t_0 = 1,12 \text{ мкс}$ , высота импульса  $E_{и} = 2E = 200 \text{ В}$ , период повторения  $T = 4t_0 = 2,25 \text{ мкс}$ . **10.44 м.**  $u(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq 45 \text{ км}$ ;  $u(x) = 1 \text{ кВ}$  при  $45 \text{ км} < x < 75 \text{ км}$ ;  $u(x) = 2 \text{ кВ}$  при  $75 \text{ км} \leq x \leq 150 \text{ км}$ . **10.46.**  $u_2(t_1) = 9,56 \text{ В}$ . **10.48.** См. задачу 10.47 р. **10.49.**  $R_1 = 150 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 75 \text{ Ом}$ . **10.50 м.**  $U_2/U_1 = 1$ , если: 1)  $a = L_1 l/L = 0$ , т. е.  $L = \infty$ ; 2)  $\omega = \infty$ ; 3) частоты удовлетворяют уравнению  $-2 \frac{\psi}{a} = \text{tg } \psi$ ,  $\psi = \omega l_2 \sqrt{L_1 C_1}$  — нормированная частота. **10.51.**  $U_2/U_1 = 1$ , если: а)  $q = C/(C_1 l) = 0$ , т. е.  $C = 0$ ; б)  $\omega = 0$ ; в) частоты удовлетворяют уравнению  $q\psi/2 = \text{ctg } \psi$ ,  $\psi = \omega l_2 \sqrt{L_1 C_1}$  — нормированная частота. **10.52 м.**  $U_2/E > 1$  при  $R'_1 = R_2 = \sqrt{L_1/C_1}$ , если  $g_1 l \sqrt{L_1/C_1} > 1,387$ . **10.53 м.**  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \text{ch } \underline{\theta}$ ;  $\underline{A}_{12} = R_1 l \underline{\theta}^{-1} \text{ sh } \underline{\theta}$ ;  $\underline{A}_{21} = \frac{\theta}{R_1 l} \text{ sh } \underline{\theta}$ ;  $\underline{\theta} = l \sqrt{j\omega R_1 C_1}$ ;  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = R_1 \times \underline{\theta}^{-1} \text{cth } \underline{\theta}$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = R_1 l \underline{\theta}^{-1} \text{csch } \underline{\theta}$ ;  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} = \underline{\theta} (R_1 l)^{-1} \text{cth } \underline{\theta}$ ;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{\theta} (R_1 l)^{-1} \text{csch } \underline{\theta}$ . **10.54 м.** При  $f = 1 \text{ МГц}$   $\alpha = 396,3 \text{ Нп/м}$ ;  $\beta = 396,3 \text{ рад/м}$ ;  $l/\lambda = 0,631$ ; при  $f = 10 \text{ МГц}$   $\alpha = 1253,3 \text{ Нп/м}$ ;  $\beta = 1253,3 \text{ рад/м}$ ;  $l/\lambda = 1,995$ . **10.55 м.**  $R_K = \sqrt{R_1/G_1} \text{cth}(l_K \sqrt{R_1/G_1})$ . **10.57 м.**  $K_{21x}(j\omega) = 1 - \text{sch}(l \sqrt{j\omega R_1 C_1})$ . **10.58 м.**  $K_{21x}(j\omega) = 0,5$ . **10.59 м.** Для рис. 10.11, а  $\underline{Z}_{ЭК} = 2R_1 l \underline{\theta}^{-1} \text{th}(\underline{\theta}/2)$ ,  $\underline{\theta} = l \sqrt{j\omega R_1 C_1}$ ; для рис. 10.11, б  $\underline{Z}_{ЭК} = R_1 l \underline{\theta}^{-1} \text{cth } \underline{\theta}$ ; для рис. 10.11, в  $\underline{Z}_{ЭК} = R_1 l \underline{\theta}^{-1} \text{th } \underline{\theta}$ ; для рис. 10.11, г  $\underline{Z}_{ЭК} = R_1 l (2\underline{\theta})^{-1} \text{cth}(\underline{\theta}/2)$ .

10.62.  $h^1(t) = 1 - h_1^1(t)$ , где  $h_1^1(t)$  — переходная характеристика цепи, рассмотренной в задаче 10.61р. 10.63.  $h^1(t) = 0,5 \cdot 1(t)$ . 10.64м. По методу наименьших квадратов  $k = 1,85$ ;  $R_{\text{ЭК}} C_{\text{ЭК}} = 0,5405 R_1 C_1 l$ . 10.65.  $u(l, t) = 5,22 \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  В;  $i(l, t) = 35,5 \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  мА;  $Z_H = 147,1$  Ом. 10.66м.  $u(l, t) = 19,16 \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  В;  $i(l, t) = 35,5 \cos(2\pi \cdot 10^6 t - 0,596)$  мА;  $Z_H = 539,7$  Ом. 10.67м.  $l = 2,31$  м; согласование сохраняется на любой частоте. 10.68. См. задачу 10.67 м.

## Список литературы

### Учебники

1. Попов В. П. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 1985.
2. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. Линейные электрические цепи. — М.: Энергия, 1978.
3. Основы теории цепей/Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. и др. — М.: Энергия, 1975.
4. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. — Л.: Энергоиздат, 1981, т. 1.
5. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. — М.: Высшая школа, 1981.
6. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высшая школа, 1978.

### Учебные пособия

7. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1982.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники/Под ред. П. А. Ионкина. — М.: Энергоиздат, 1982.
9. Сборник задач по теории электрических цепей/Под ред. П. Н. Матханова, Л. В. Данилова. — М.: Высшая школа, 1980.
10. Сборник задач по теоретическим основам электротехники/Под ред. Л. А. Бессонова. — М.: Высшая школа, 1980.
11. Татур Т. А. Основы теории электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1980.
12. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. — М.: Советское радио, 1975.
13. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1965.
14. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1981.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	3
<b>ГЛАВА 1</b>	
Основные понятия теории цепей . . . . .	4
§ 1.1. Идеализированные элементы электрических цепей . . . . .	4
Решения и методические указания . . . . .	7
§ 1.2. Законы Кирхгофа . . . . .	9
Решения и методические указания . . . . .	10
§ 1.3. Основные понятия топологии цепей . . . . .	11
Решения и методические указания . . . . .	13
<b>ГЛАВА 2</b>	
Простейшие линейные цепи при гармоническом воздействии . . . . .	14
§ 2.1. Гармонические функции. Основы метода комплексных амплитуд . . . . .	14
Решения и методические указания . . . . .	15
§ 2.2. Идеализированные элементы при гармоническом воздействии . . . . .	16
Решения и методические указания . . . . .	17
§ 2.3. Простейшие цепи при гармоническом воздействии . . . . .	17
Решения и методические указания . . . . .	20
§ 2.4. Энергетические соотношения в простейших цепях . . . . .	23
Решения и методические указания . . . . .	24
§ 2.5. Преобразование цепей . . . . .	24
Решения и методические указания . . . . .	26
§ 2.6. Цели с взаимной индуктивностью . . . . .	28
Решения и методические указания . . . . .	30
<b>ГЛАВА 3</b>	
Частотные характеристики простейших электрических цепей . . . . .	32
§ 3.1. Входные и передаточные характеристики простейших цепей . . . . .	32
Решения и методические указания . . . . .	33
§ 3.2. Последовательный колебательный контур . . . . .	35
Решения и методические указания . . . . .	38
§ 3.3. Параллельный колебательный контур . . . . .	39
Решения и методические указания . . . . .	41
§ 3.4. Связанные колебательные контуры . . . . .	42
Решения и методические указания . . . . .	43
<b>ГЛАВА 4</b>	
Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии . . . . .	45
§ 4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепей . . . . .	45
Решения и методические указания . . . . .	48
§ 4.2. Основные теоремы теории цепей и их применение для анализа . . . . .	56
Решения и методические указания . . . . .	59
§ 4.3. Применение сигнальных графов . . . . .	61
Решения и методические указания . . . . .	64

## ГЛАВА 5

Нелинейные резистивные цепи . . . . .	67
§ 5.1. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей	67
Решения и методические указания . . . . .	71
§ 5.2. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов . . . . .	72
Решения и методические указания . . . . .	74
§ 5.3. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии . . . . .	75
Решения и методические указания . . . . .	77

## ГЛАВА 6

Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами . . . . .	78
§ 6.1. Классический метод . . . . .	78
Решения и методические указания . . . . .	83
§ 6.2. Операторный метод . . . . .	93
Решения и методические указания . . . . .	94
§ 6.3. Единичные функции и их свойства . . . . .	112
Решения и методические указания . . . . .	112
§ 6.4. Переходные и импульсные характеристики простейших цепей . . . . .	115
Решения и методические указания . . . . .	117
§ 6.5. Применение интеграла Дюамеля . . . . .	119
Решения и методические указания . . . . .	121

## ГЛАВА 7

Методы анализа цепей, ориентированные на применение ЭВМ . . . . .	125
§ 7.1. Методы узловых напряжений и контурных токов . . . . .	125
Решения и методические указания . . . . .	127
§ 7.2. Метод переменных состояния . . . . .	132
Решения и методические указания . . . . .	133

## ГЛАВА 8

Основы теории четырехполюсников и многополюсников . . . . .	136
§ 8.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами . . . . .	136
Решения и методические указания . . . . .	139
§ 8.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников . . . . .	146
Решения и методические указания . . . . .	153
§ 8.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников . . . . .	163
Решения и методические указания . . . . .	171

## ГЛАВА 9

Синтез электрических цепей . . . . .	182
§ 9.1. Свойства операторных входных функций электрических цепей	182
Решения и методические указания . . . . .	185
§ 9.2. Методы реализации реактивных двухполюсников . . . . .	187
Решения и методические указания . . . . .	190
§ 9.3. Элементы синтеза четырехполюсников . . . . .	194
Решения и методические указания . . . . .	196

## ГЛАВА 10.

Цепи с распределенными параметрами . . . . .	198
§ 10.1. Однородные длинные линии при гармоническом внешнем воздействии . . . . .	198
Решения и методические указания . . . . .	200
§ 10.2. Комплексные частотные характеристики однородных длинных линий . . . . .	201
Решения и методические указания . . . . .	204
§ 10.3. Переходные процессы в длинных линиях . . . . .	208
Решения и методические указания . . . . .	210
§ 10.4. Цепи с распределенными параметрами специальных типов . . . . .	212
Решения и методические указания . . . . .	214
Ответы . . . . .	219
Список литературы . . . . .	236

ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

**Вадим Николаевич Бирюков**  
**Вадим Петрович Попов**  
**Владимир Иванович Семенцов**

### **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Заведующая редакцией Л. А. Романова. Редактор Е. М. Романчук. Младший редактор И. А. Исаева. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Художник В. В. Гарбузов. Технический редактор Л. А. Григорчук. Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 4860

---

Изд. № ЭР-363. Сдано в набор 16.07.84. Подп. в печать 08.02.85.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бум. кн.-журн. им. Гарнитура литературная. Печать офсетная.  
Объем 15 усл. печ. л. + форз. 0.25 усл. печ. л., 15.5 усл. кр.-отт. 14,26 уч.-изд. л. +  
+ форз. 0.41 уч. изд. л. Тираж 20 000 экз. Зак. 381. Цена 95 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

---

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46.