O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

R.R. ABZALIMOV

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Muhandislik va muhandislik ishi bakalavriat ta'lim
yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma

«O'ZBEKISTON FAYLASUFLARI MILLIY JAMIYATI» NASHRIYOTI

TOSHKENT – 2008

O'quv qo'llanmada «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»ning asosiy bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumotlar keltirilgan.

Qo'llanma Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Oliy matematika» fanidan namunaviy dastur asosida yaratildi.

Qo'llanma muhandislik va muhandislik ishi bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar:
T.M. Zuparov — O'zbekiston Milliy universitetining «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» kafedrasi professori, fiz.-mat.f.d.

A.Q. Amanov — Toshkent arxitektura-qurilish institutining «Oliy va amaliy matematika» kafedrasi dotsenti.

22.171
A17

Abzalimov R.R.
Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Oliy texnika o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'l./R.R. Abzalimov; O'zR Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi; — T.: «O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» nashriyoti, 2008. — 144 b.

ББК 22.171я73
ББК 22.172я73

ISBN: 978-9943-319-61-5

MUNDARIJA

II bob. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

3 bob. MISOL VA MASALALAR

SO‘ZBOSHI

Zamonaviy kadrlarni yetishtirish borasida respublikamiz oliy ta’limi tizimida tub o‘zgarishlar amalga oshirilmoqda. Bunga sabab, “Ta’lim to‘g‘risida”gi qonun va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”ning qabul qilinishi va ularda ilmiy-texnika taraqqiyoti yutuqlarini xalq xo‘jaligiga tatbiq qilish, ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanish bilan uzviy bog‘liq ekanligining aniq ko‘rsatilishidir.

Bundan shunday xulosa chiqarish kerakki, hozirgi zamonda fundamental fanlar bilan bir qatorda ulaming tatbiqiga bag‘ishlangan maxsus kurslarni ko‘proq o‘qitish dolzarb masalalardan biri bo‘lib qoladi.

“Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” maxsus kursi oliy matematikaning tatbiqiy bo‘limlaridan biri bo‘lib, uning mavjud qonuniyatlarini ma’lum darajada bilish, tasodifiy holatlarni hisobga olgan holda mantiqiy xulosalar chiqarish va mavjud vaziyat uchun optimal yechimlarni topa olishga imkon yaratadi.

Ushbu qo‘llanmaning mavjud adabiyotlardan asosiy farqi shundaki, bu qo‘llanma o‘zbek tilida va lotin alifbosida yozilgan. Bundan tashqari, bu qo‘llanmada texnik oliy o‘quv yurtlari uchun zarur bo‘lgan asosiy ma’lumotlar fanning ichki uzviyligi buzilmagan holda keltirilgan.

Ehtimollar nazariyasi bobida matematik statistika bobi uchun kerakli ma’lumotlarga asosiy urg‘u berilgan bo‘lib, matematik statistika bo‘limida esa, asosan tajriba natijalarini statistik qayta ishlash uchun zarur bo‘lgan usullar keltirilgan. Texnik fanlarda tajriba natijalarini statistik qayta ishlash keng ko‘lamda qo‘llaniladi.

Qo‘llanmani yozishda muallif Toshkent Davlat texnika universitetida ko‘p yillar davomida o‘qigan ma’ruzalarini asos qilib oldi.

Muallif qo‘llanmani yanada takomillashtirishga qaratilgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladi.

I bob
EHTIMOLLAR NAZARIYASI

1-§. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Matematika va fizikaning maktab kursida, odatda, natijasi bir qiymatli aniqlangan masalalar ko'riladi. Masalan, agar ma'lum balandlikda jism qo'ldan chiqarilsa, u albatta o'zgarmas tezlanish bilan yerga tusha boshlaydi va uning fazodagi o'rnini ixtiyoriy vaqtda hisoblash mumkin. Lekin fan va texnikada har doim ham bir qiymatli aniqlangan masalalar ko'rilmasdan, natijasi ko'p qiymatli aniqlangan masalalar ko'p uchraydi. Masalan, tanga tashlansa, gerb yoki reshka tushishini oldindan aytib bo'lmaydi. Bunda natija bir qiymatli aniqlanmagan. Bunga o'xshash masalalarda, aniq bir narsa aytish mumkin emasdek bo'lib tuyulsa-da, lekin oddiy o'yin tajribasi shuni ko'rsatadiki, tanga tashlash soni yetarlicha katta bo'lganda gerb yoki reshka tushishlari soni taxminan teng bo'ladi. Bu esa ma'lum ma'noda qonuniyatni ifodalaydi. Xuddi shunday qonuniyatlarni ehtimollar nazariyasi o'rganadi. Bunda masalaning qo'yilishi o'zakdan o'zgaradi. Bizni aniq bir tajribaning natijasi emas, bu tajriba yetarlicha ko'p marta takrorlangandagi natijalar bo'ysunadigan qonuniyatlar qiziqtiradi. Demak, ehtimollar nazariyasining predmeti ommaviy, bir jinsli tasodifiy hodisalarning ehtimollik qonuniyatlarini o'rganishdan iboratdir. Tanga tashlash tajribasini biz eng sodda va tanish holat sifatida keltirdik. Bunda tajriba natijasi ko'p qiymatli bo'lishi muhim. Lekin juda ko'p, ma'nosi jihatidan har xil masalalar uchun tanga tashlash tajribasi model bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Ehtimollar nazariyasiga umumiy ta'rif berilganda uni "berilgan tasodifiy hodisalarning ehtimolligiga ko'ra boshqa tasodifiy hodisalarning ehtimolligini topish" deb ta'riflaydilar. Bu ta'rif shuni faraz qiladiki, ehtimolligi oldindan ma'lum bo'lgan dastlabki hodisalar mavjud. Ularning ehtimolligi qanday topilgan? Bu ehtimolliklarni ko'rilayotgan masalani keltirib chiqargan fan beradi. Bunda asosan matematik mushohadalar emas, balki masalani yuzaga keltirgan fan mushohadalari asosiy rol o'ynaydi. Masalan, tanga tashlash tajribasini olsak, gerb yoki reshka tushishi tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda teng imkoniyatga ega bo'ladi. Bu fakt shunga asoslanganki, tanga simmetrik, materiali bir jinsli va uning qalinligi yetarlicha kam bo'lganligidan u qirrasiga turmaydi. Shuning uchun ko'p yuz yillik tajribalarga asoslanib, gerb tushishi bilan reshka tushishi miqdori ko'p sonli tajribalarda taxminan teng bo'ladi deyishga asos bor. Bu yerda matematik mushohada emas, tanganing fizik xususiyatlari va ko'p yuzyillik tajribalar natijasi rol o'ynaydi. Murakkab ehtimollik masalalari ko'rilayotganda dastlabki elementar hodisalarning ehtimolligi berilgan bo'lishi kerak. Har bir aniq holda bu ehtimolliklar turlicha, shu masalani keltirib chiqargan fan mushohadalariga tayanib beriladi.

Ehtimollar nazariyasi, matematikaning boshqa tatbiqiy bo'limlariga o'xshash, to'g'ridan to'g'ri tabiat jarayonlari bilan emas, ularning matematik modellari ustida ishlaydi. Tasodifiy jarayonlarning matematik modelida asosiy tushuncha bo'lgan ehtimollik — tasodifiy hodisadan olingan funksiya sifatida ta'riflanadi. Ya'ni, tasodifiy hodisaning ehtimolligi — bu hodisaning ro'y berish imkonining obyektiv darajasining sonli xarakteristikasidir. Matematik analiz kursida funksiyani o'rganishdan oldin uning argumenti bo'lgan haqiqiy sonlar izchil o'rganilgani kabi, ehtimollar nazariyasi ham tasodifiy hodisalar va ular ustida amallarni o'rganishdan boshlanadi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy kursi quyidagi uchta asosiy tushunchalarga asoslanib qurilgan.

Bulardan birinchisi — tasodifiy hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasidir. Ayni bir hisobda mana shu tushuncha ehtimollar nazariyasini to'plamlar nazariyasi, o'lchamlar nazariyasi va matematik analizdan ajratib, mustaqil fan sifatida uning chegaralarini aniqlab berdi.

Ikkinchisi – to'la ehtimollik formulasidir. Ayni shu, tushuncha ehtimollikni hisoblashning o'ziga xos kombinatorik usullaridagi mavjud ko'p qirraliklarini o'zida mujassam qilgan.

Uchinchisi – katta sonlar qonuni. Bu qonunga suyanib ehtimollar nazariyasi amaliyot bilan bog'landi, hayotiy jarayonlarni aks ettiruvchi miqdoriy tuzilishi bilan matematik modellarni to'ldirdi.

Mana shu tushunchalarni o'rganish – ehtimollar nazariyasi bilan tanishishning asosiy qismidir.

2-§. Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lmish **hodisa** deb sinov (tajriba) o'tkazish natijasida, ya'ni ma'lum shartlar majmuyi amalga oshishi natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktga aytiladi. Tajribaning natijasi bir qiymatli aniqlanmagan hollarda hodisa **tasodifiy hodisa** deb ataladi, tajriba esa **tasodifiy tajriba** deb ataladi. Tasodifiy tajribalar haqida so'z yuritganimizda biz faqat yetarlicha ko'p marta takrorlash mumkin bo'lgan (hech bo'lmaganda nazariy jihatdan) tajribalarni ko'zda tutamiz. Tasodifiy tajribaning matematik modelini qurish quyidagi etaplarni o'z ichiga oladi:

1. Elementar hodisalar to'plami Ω ni tuzish.
2. Berilgan tajriba uchun yetarli bo'lgan hodisalar sinfi ББ ni ajratish.
3. Shu hodisalar sinfi ustida ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi sonli funksiya P-hodisaning ehtimolini berish.

Hosil bo'lgan $(\Omega, \Im, P)$ uchlikni **ehtimollar fazosi** deb ataymiz.

Ω-elementar hodisalar to'plami deb berilgan tasodifiy tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha bir-birini rad etuvchi hodisalar to'plamiga aytiladi. Ω ning elementlarini $\omega_i, i = 1,2,\ldots,n$ bilan belgilanadi. n esa Ω-to'plam elementlarining soni. Murakkab hodisa yoki oddiygina hodisa deb Ω-elementar hodisalar to'plamining ixtiyoriy to'plam ostiga aytiladi.

Misol.

Tajriba o‘yin soqqasini tashlashdan iborat bo‘lsin. Bu tajribada $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, \ldots \omega_6\}$, bunda ω_i - soqqa bir marta tashlanganda i-raqamining tushishi hodisasidir. Bu hodisa elementar hodisadir va Ω-elementar hodisalar to‘plamidir.

Quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A –tushgan raqamning juft bo‘lishi. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

B –tushgan raqamning uchga bo‘linishi. $B = \{\omega_3, \omega_6\}$

C –tushgan raqam 2 dan katta emas $C = \{\omega_1, \omega_2\}$

K –tushgan raqamning toq bo‘lishi. $K = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$,

Ikki yoki undan ortiq **hodisalarning birlashmasi** deb, barcha hodisalarning kamida biriga tegishli elementar hodisalar to‘plamiga aytiladi.

Misol.

$M = A + B$ – tushgan raqam juft yoki uchga bo‘linadi.

$$M = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$$

Ikki yoki undan ortiq **hodisalarning ko‘paytmasi** deb, barcha hodisalarga bir vaqtda tegishli bo‘lgan elementar hodisalar to‘plamiga aytiladi.

Misol.

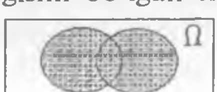
$P = A \cdot B$ – tushgan raqam juft va uchga bo‘linadi.

$$P = \{\omega_6\}.$$

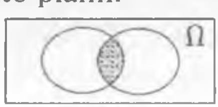
Ikki **hodisa ayirmasi** A/B deb, A-hodisaning B hodisaga tegishli bo‘lmagan elementar hodisalari to‘plamiga aytiladi.

Misol.

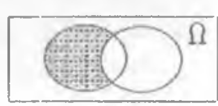
A/B – tushgan raqam juft, lekin uchga bo‘linmaydi. $A/B = \{\omega_2, \omega_4\}$. Bu misollarni yaqqol tasavvur etish uchun Venn diagrammasiga murojaat etamiz. Ω – to‘g‘ri to‘rt burchakka tegishli bo‘lgan nuqtalar to‘plami.



$A+B$



$A*B$



A/B

Tajribada **ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa** deb, tarkibida elementar hodisa bo'lmagan bo'sh to'plamga aytiladi va $\emptyset$ bilan belgilanadi.

Misol. Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta.

Muqarrar hodisa deb $\Omega = \{\omega_1, \omega_1, \ldots \omega_6,\}$ to'plamga aytamiz.

Misol. Soqqa tashlanganda tushgan raqam 6 dan katta emas.

Ikki yoki undan ortiq **hodisa birgalikda** deyiladi, agarda ularning tarkibida hech bo'lmaganda, bitta umumiy elementar hodisa bo'lsa. Aks holda ular **birgalikda emas** deyiladi. Birgalikda bo'lmagan hodisalar ko'paytmasi har doim mumkin bo'lmagan hodisadir.

Misol.

Agar yuqorida kiritilgan *A, B, C, K* hodisalarni qarasak:

A va B – birgalikda $AB = \{\omega_6\}$

A va C – birgalikda $AC = \{\omega_2\}$

A va K – birgalikda emas $AK = \emptyset$

B va C – birgalikda emas $BC = \emptyset$

V va K – birgalikda $BK = \{\omega_3\}$

A hodisaga **qarama-qarshi hodisa** deb, A hodisaga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytamiz va $\bar{A}$ bilan belgilaymiz.

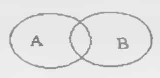
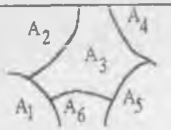
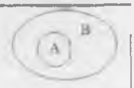
Misol.

$$\bar{A} = K. \quad \bar{B} = \{\omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5\}$$

$A_1, A_2, \ldots A_N$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi, agarda $A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$ va $A_1 + A_2 + \ldots + A_N = \Omega$ bo'lsa.

Misol.

Ikkita qarama-qarshi hodisa birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi. Masalan, *A* va *K*. Agar *A* hodisaning ro'y berishi *B* hodisaning ro'y berishiga olib kelsa, u holda *A* hodisa *B* hodisani ergashtiradi, yoki *A* dan *B* kelib chiqadi deb aytiladi va $A \subset B$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda har bir A hodisaga tegishli elementar hodisa, B-hodisaga ham tegishli bo‘ladi. Agar $A \subset B$ va bir vaqtda $B \subset A$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar teng kuchli deb ataladi va $A = B$ ko‘rinishda belgilanadi. Bularni Venn diagrammasida quyidagicha tasvirlash mumkin.

				
A va B birgalikda	A va B birgalikda emas	A va B qarama-qarshi	Birgalikda bo‘lmagan hodisalar to‘la guruhi	$A \subset B$

Yuqorida aniqlangan hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

1) $A + B = B + A$
2) $A \cdot B = B \cdot A$
3) $A + A = A$
4) $A \cdot A = A$
5) $A + \overline{A} = \Omega$
6) $A \cdot \overline{A} = \emptyset$
7) $A + \emptyset = A$
8) $A \cdot \emptyset = \emptyset$
9) $A + \Omega = \Omega$
10) $A \cdot \Omega = A$
11) $A \setminus B = A\overline{B}$
12) $\overline{\emptyset} = \Omega$
13) $A(B + C) = AB + AC$
14) $A + BC = (A + B)(A + C)$
15) $\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}$
16) $\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}$
17) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

Biz yuqorida ehtimollikni hodisadan olingan sonli funksiya sifatida xarakterlagan edik. Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar argumentining barcha qiymatlarida aniqlanishi shart bo‘lmaganligi kabi Ω to‘plamning ixtiyoriy tuplam ostlari uchun ehtimolni aniqlash har doim ham mumkin bo‘lavermaydi. To‘plam ostlari sinflarini cheklashga to‘g‘ri kelgan hollarda, biz bu sinflardan yuqorida kiritilgan hodisalar ustidagi amallarga nisbatan yopiqligini talab etamiz. Ω-to‘plamning to‘plam ostlaridan tuzilgan to‘plamlar sinfini $\Im$ bilan belgilaymiz.

Ta’rif. **$\Im$–algebra** deb ataladi, agarda

A1. $\emptyset \in \Im, \Omega \in \Im$;

A2. $A \in \Im$ dan $\overline{A} \in \Im$ kelib chiqsa;

A3. $A \in \Im$ va $B \in \Im$ dan $A \cup B \in \Im$ va $A \cap B \in \Im$ kelib chiqsa.

Ta’rif. $\Im$–algebrani σ-algebra deb ataymiz agarda

A3. $A_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ dan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$ va $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$ kelib chiqsa.

Misol.

$\Im = \{\emptyset, \Omega\}$ –eng kichik algebraga misol.

Agar Ω –chekli to‘plam bo‘lsa, u holda barcha to‘plam ostlarining sistemasi ham cheklidir va Ω ning barcha to‘plam ostlari soni 2^n ga teng. Bu holda Ω ning barcha to‘plam ostlari sinfi $\Im$-algebra tashkil etadi. Agar Ω-sanoqli yoki uzluksiz to‘plam bo‘lsa, u holda to‘plam ostlari, sinfidan σ-algebra bo‘lishligini talab etishga to‘g‘ri keladi. Chunki bu holda to‘plam ostlari sinfi cheksiz ko‘p elementlardan tashkil topgan bo‘lib shu sinf to‘plamlari ustida amallar bajarilganda har doim ham yana shu sinfga tegishli to‘plam hosil bo‘lavermaydi.

3-§. Ehtimollar fazosi

Endi biz σ-algebra $\Im$ ga tegishli bo‘lgan barcha Ω ning to‘plam ostlarini hodisa deb ataymiz.

Ta’rif. σ-algebra $\Im$ ustida aniqlangan P-sonli funksiyani **hodisaning ehtimoli** deb ataymiz, agarda

R1. $P(A) \geq 0$, barcha $A \in \Im$ lar uchun,

R2. $P(\Omega) = 1$,

R3. $i \neq j$ larda $A_i \cdot A_j = \emptyset$ bo'lgan $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \Im$ hodisalar uchun $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Endi biz $(\Omega, \Im, P)$-uchlikni **ehtimollar fazosi** deb ataymiz. Shunday qilib biz tasodifiy tajribaning matematik modelini qurdik.

4-§. Ehtimolning klassik ta'rifi

Agar $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ – chekli elementar hodisalar to'plamini qarasak va $\Im$ deb Ω ning barcha to'plam ostlarini olsak, u holda $\Im$ σ-algebra bo'ladi. R(A) ehtimollik funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1, \qquad P(\omega_i) \geq 0, \qquad P(\mathrm{A}) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), \qquad P(\emptyset) = 0.$$

Shunday aniqlangan $P(A)$ funksiya ehtimollikning barcha shartlarini bajaradi.

Agar biz $|A|$ bilan A to'plamning elementlari sonini belgilasak va ixtiyoriy $1 \leq i \leq n$ da $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, ya'ni ω_i larning ro'y berishini teng imkoniyatli deb faraz qilsak, ehtimollikning klassik ta'rifi kelib chiqadi.

$$P(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) \quad \Rightarrow \quad 1 = P(\omega_i) \cdot |\Omega|$$

yoki

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = |A| \cdot P(\omega_i) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$$

Ya'ni:

$$P(A) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} \tag{1}$$

$P(\omega_1)=P(\omega_2)=...=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$ bo‘lgan hol klassik bo‘lgani uchun (1) tenglik **ehtimollikning klassik ta’rifi** deb ataladi. Ehtimollikning klassik ta’rifidan foydalanganda A to‘plam va Ω fazodagi elementar hodisalar sonini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Ehtimol masalalarida bularni hisoblash ancha qiyinchilik tug‘dirgani uchun **kombinatorika usullaridan** foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Shu sababli kombinatorikaning ba’zi elementlari ustida to‘xtalib o‘tamiz. Kombinatorika turli to‘plamlarning elementlari sonini hisoblashni o‘rgatadi. Kombinatorikada muhim rol o‘ynaydigan ikki qoyida bor: **qo‘shish** va **ko‘paytirish qoidalari.**

Qo‘shish qoyidasi: Agar A to‘plamning elementlari soni $|A|=n$ va B to‘plamning elementlari soni $|B|=m$ bo‘lib, A va B to‘plamlar o‘zaro kesishmaydigan chekli to‘plamlar bo‘lsa $|A+B|=n+m$ bo‘ladi.

Ko‘paytirish qoidasi: Bizga $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ chekli to‘plamlar berilgan bo‘lsa, bu ikki to‘plamdan tuzilgan, barcha (a_i,b_j) juftliklar to‘plami $C=\{(a_i,b_j)/i=1,2,...,n; j=1,2,...,m\}$ $n\cdot m$ elementdan iborat bo‘ladi.

O‘rin almashtirishlar soni. Kombinatorikaning klassik masalalaridan biri o‘rinalmashtirishlar sonini hisoblashdir. Turli n-elementdan tashkil topgan to‘plamning elementlarini turli n-joyga joylashtirishlar sonini hisoblaylik. Misol uchun $A=\{1,2,3\}$. Ularni quyidagicha turlicha joylashtirish mumkin: $\{1,2,3\},\{1,3,2\},\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\},\{3,2,1\},\{3,1,2\}$. Bunday joylashtirishlar soni $1\cdot2\cdot3=6$ ga teng. Umuman olganda, n-elementdan turli n-joyga joylashtirishlar soni $P_n=n!$ ga teng.

Tanlashlar soni: n-elementdan m-tadan necha xil usul bilan tanlash mumkin. Misol: $A=\{1,2,3\}$. Ikkitadan tanlasak $\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$ hosil bo‘ladi. Tanlashlar soni 3 ga teng. Umuman olganda n-elementdan m-tadan tanlashlar soni

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Kombinatorikaning keyingi masalalaridan biri o‘rin almashtirish masalasidir.

Misol: $A=\{1,2,3\}$ to‘plam berilgan bo‘lsa, uning ikki elementidan tashkil topgan to‘plamlardan necha xil usul bilan tuzish mumkin?

$$\{1,2\},\{2,1\},\{1,3\},\{3,1\},\{2,3\},\{3,2\}.$$

Bunday to‘plamlar soni $A_3^2=2\cdot 3=6$ ta. Umuman olganda

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Endi biz to‘plam deganda hodisani, to‘plam elementi deganda hodisadagi elementar hodisalarni tushunsak, to‘plam uchun aniqlangan kombinatorika elementlarini hodisadagi elementar hodisalar sonini aniqlashda ishlata olamiz.

$(\Omega,\Im,P)$-ehtimollar fazosida P-ehtimol funksiyasining xossalarini keltiramiz.

1) $\mathrm{A}\subseteq B\Rightarrow P(B\setminus \mathrm{A})=P(B)-P(\mathrm{A})$.

Isboti: $B=\mathrm{A}+(B\setminus \mathrm{A})$ va $\mathrm{A}\cap(B\setminus \mathrm{A})=\emptyset$ bo‘lgani uchun

$$P(B)=P(\mathrm{A})+P(B\setminus \mathrm{A}) \tag{2}$$

2) $\mathrm{A}\subseteq B\Rightarrow P(\mathrm{A})\le P(B)$.

Isboti: (2) dan kelib chiqadi.

3) Ixtiyoriy $\mathrm{A}\in\Im$ uchun $0\le P(\mathrm{A})\le 1$.

Isboti: (2) xossa va $\emptyset\subseteq \mathrm{A}\subseteq\Omega$ munosabatlardan kelib chiqadi.

4) $P(\overline{\mathrm{A}})=1-P(\mathrm{A})$.

Isboti: A3 shartdan $\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}}=\Omega$ va $\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{A}}=\emptyset$ munosabatlar orqali kelib chiqadi.

5) $P(\emptyset)=0$.

Isboti: 4-xossa bilan A2 shartdan kelib chiqadi.

6) Ixtiyoriy $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_N\in\Im$ lar uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}P(\mathrm{A}_k) \tag{3}$$

Isboti: $B_k := A_k \setminus (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$ desak $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k$ bo'ladi. Endi A3 shartdan $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ bo'lgani uchun $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)$ kelib chiqadi. Bundan esa $B_k \subseteq A_k$ va 2-xossaga ko'ra (3) tengsizlik kelib chiqadi.

7) Ixtiyoriy A va B lar uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti: $A \cup B = A + (B \setminus AB)$ bo'lgani uchun A3 shartdan $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB)$ bo'ladi. Endi 1-xossadan $P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB)$ bo'lgani uchun xossa isbot bo'ldi.

5-§. Ehtimolning geometrik ta'rifi

Ehtimollikning klassik ta'rifida elementar hodisalar soni chekli deb faraz qilinadi. Amaliyotda esa ko'pincha mumkin bo'lgan natijalari soni cheksiz bo'lgan tajribalar uchraydi. Bunday hollarda klassik ta'rifni qo'llab bo'lmaydi. Bunday hollarda ba'zan ehtimollikni hisoblashning boshqacha usulidan foydalanish mumkin bo'lib, bunda ham avvalgidek elementar hodisalarning teng imkoniyatlilik tushunchasi asosiy ahamiyatga ega bo'lib qolaveradi.

Ehtimollikning geometrik ta'rifi deb ataladigan usuldan Ω-n o'lchamli evklid fazosining cheklangan to'plami bo'lgan holda foydalanish mumkin. Hodisa deb Ω ning o'lchovini aniqlab bo'ladigan to'plam ostini qaraymiz. A deb Ω ning barcha o'lchovga ega bo'lgan to'plam ostlari sinfini belgilaymiz. U holda ***A* hodisaning ehtimoli** deb quyidagiga aytamiz:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

$\mu(A)$ – A to'plamning o'lchami. (n=1 bo'lganda uzunlik, n=2 bo'lganda yuza, n=3 bo'lganda hajm).

6-§. Nisbiy chastota va statistik ehtimol

n ta bir xil tajriba ketma-ket o‘tkazilgan bo‘lib, ularning har birida A hodisa ro‘y bergan yoki ro‘y bermagan bo‘lsin.

Ta’rif. A hodisaning berilgan tajribalar ketma-ketligidagi **nisbiy chastotasi** deb, A hodisa ro‘y bergan tajribalar soni m ning o‘tkazilgan barcha tajribalar soni n ga nisbati aytiladi.

$$W(\mathrm{A}) = \frac{m}{n}.$$

Tajribalar soni oshgan sari nisbiy chastota ehtimolga cheksiz yaqinlashib boradi. Shuning uchun nisbiy chastotani taxminan hodisaning ehtimoliga teng deb qabul qilishadi.

Ehtimolning klassik ta’rifi elementar hodisalar fazosi Ω-chekli deb faraz qiladi. Tajribada esa ko‘plab cheksiz sondagi elementar hodisalar fazosi uchraydi. Mana shu hol ham klassik ta’rifning chegaralanganligini ko‘rsatadi.

Klassik ta’rifning yana bir kamchiligi shundaki, juda ko‘p hollarda tajriba natijalarini elementar hodisalar to‘plami ko‘rinishida ifodalab bo‘lmaydi. Undan ham qiyinrog‘i shuki, elementar hodisalarning ro‘y berishi teng imkoniyatli deb hisoblashga asos har doim ham topilavermaydi. Odatda elementar hodisalarning teng imkoniyatliligini simmetriya tushunchasiga suyanib kiritishadi. Lekin simmetriya tushunchasiga ega bo‘lgan masalalar amaliyotda juda kam uchraydi. Shu kamchiliklarni bartaraf etish maqsadida ehtimolning klassik ta’rifi bilan bir qatorda, ehtimollikning statistik ta’rifini ham berishadi. A hodisaning **statistik ehtimoli** deb, A hodisaning nisbiy chastotasi olinadi. Endi ehtimolning klassik ta’rifi bilan statistik ta’rifini solishtirsak, shunday xulosaga kelamiz.

Ehtimolning klassik ta’rifi tajriba o‘tkazilishini ko‘zda tutmaydi. Statistik ehtimol esa tajriba o‘tkazgandan so‘ng topiladi. Boshqacha aytganda klassik ehtimol tajribagacha topilsa (a prioiry), statistik ehtimol tajribadan so‘ng hisoblanadi (a pasteriory).

7-§. Shartli ehtimollik

Ta'rif. Ixtiyoriy $B \in \Im$ uchun $P(B) > 0$ bo'lsin, A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shartda hisoblangan ehtimolligi **A hodisaning B hodisa ro'y berish shartidagi shartli ehtimolligi** deb ataladi va P(A/B) bilan belgilanib quyidagicha hisoblanadi

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1)$$

Agar B — fiksirlangan bo'lib, $A \in \Im$ hodisa uchun *P(A/B)* ehtimolni kiritsak, yangi $(\Omega, \Im, P_B)$ ehtimollar fazosi hosil bo'ladi. Bu yerda $P_B(A)=(A/B)$. P_B ning ehtimollik shartlarini bajarishini tekshiramiz.

1) $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \leq 0$

2) $P(\Omega/B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

3) Agar $A_1 A_2 = \emptyset$ bo'lsa, $(A_1 B) \cap (A_2 B) = \emptyset$ bo'ladi.

Shuning uchun

$$P(A_1 + A_2)/B) = \frac{P((A_1 + A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B + A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} =$$

$$= P(A_1/B) + P(A_2/B)$$

Bu xossa sanoqli sondagi A_n lar uchun ham o'rinli bo'ladi. (1) dan quyidagi hosil bo'ladi:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(AB) \qquad (2)$$

Bu tenglikni ba'zan ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasi ham deb ataydilar.

Misol. Idishda M dona oq va $N-M$ dona qora sharlar bor.

Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkala sharning oq bo'lishlik ehtimolini toping.

Yechish: Bu ehtimolni (2) formula orqali topish mumkin.

A — birinchi olingan shar oq.

B — ikkinchi olingan shar oq.

Bu holda

$$P(A)=\frac{M}{N};\quad P(B/A)=\frac{M-1}{N-1}.$$

AB — ikkala olingan shar oq.

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{M\cdot(M-1)}{N\cdot(N-1)}.$$

Agar biz (2) tenglikda 2 ta hodisa o'rniga N ta $A_1, A_2, \ldots, A_N$ hodisalar ketma-ketligini qarasak, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

Teorema. Agar $A_1, A_2, \ldots A_N$ hodisalar uchun $P(A_1, A_2, \ldots A_{N-1})>0$ bo'lsa, u holda

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_N)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot P(A_N/A_1\cdot A_2\ldots A_{N-1}) \qquad (3)$$

8-§. To'la ehtimollik formulasi

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil qilsin.

Teorema. Agar $A_1, A_2, \ldots A_n$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhini tashkil etib, barcha $1\le k\le n$ lar uchun $P(A_k)>0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy B hodisa uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P(B/A_k) \qquad (4)$$

Bu tenglik **to'la ehtimollik formulasi** deyiladi.

Isboti: $B=B\cdot\Omega=BA_1+\ldots+BA_n$ bo'lib, $BA_i\cap BA_j=\varnothing, i\neq j$ lar uchun. Bu tenglikdan 1-teoremaga ko'ra, quyidagi kelib chiqadi:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(BA_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P(B/A_k)$$

Misol. Idishda M dona oq va $N-M$ dona qora shar bor. Ketma-ket idishdan ikkita shar olingan. Ikkinchi olingan shar oq bo'lishlik ehtimolini toping:

Yechish: B — ikkinchi olingan shar oq.

A — birinchi olingan shar oq.

$\overline{A}$ — birinchi olingan shar qora.

$$P(A)=\frac{M}{N};\ P(A)=\frac{N-M}{N};$$

$$P(B/A)=\frac{M-1}{N-1};\ P(B/\overline{A})=\frac{M}{N-1};$$

to'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(B)=P(A)\cdot P(B/A)+P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})=\frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1}+$$

$$+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}=\frac{M}{N}.$$

Ya'ni: $P(A)=P(B)$

9-§. Beyes formulalari

Teorema. $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_N$ lar birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'la guruhi bo'lsin va $P(A_k)>0$. Agar ixtiyoriy B hodisa uchun $P(B)>0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i)} \qquad (5)$$

Isboti: 7-§ dagi teoremaga ko'ra, $P(A_k B) = P(A_k)\, P(B / A_k) = P(B) \cdot P(A_k / B)$. Endi P(B) ga to'la ehtimollik formulasini qo'llab, (5) tenglikni hosil qilamiz.

Misol. Ikkita idish bor bo'lib, ikkalasida ham N donadan shar bor. Birinchisida M_1 oq shar, ikkichisida esa M_2 oq shar bor. Tajriba quyidagidan iborat: avval $\frac{1}{2}$ ehtimollik bilan birinchi yoki ikkinchi idish tanlanadi, so'ngra tanlangan idishdan tavakkaliga n dona shar quyidagicha tartibda olinadi: har safar shar olingach, uning rangi aniqlanib yana idishga qaytarib solinadi. Shu usulda olingan n dona sharning barchasi oq bo'lishi ehtimolini toping

Yechish: B — tanlangan barcha n dona sharlar oq.

Bu holda ikkita gipotezaga egamiz.

A_1 — birinchi idish tanlangan.

A_2 — ikkinchi idish tanlangan.

Masalaning shartiga ko'ra:

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,5 \quad P(B / A_k) = \left(\frac{M_k}{N}\right)^n : k = 1, 2,$$

Beyes formulasiga ko'ra:

$$P(A_k / B) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_k}{N}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{N}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{N}\right)^n} = \frac{M_k^n}{M_1^n + M_2^n}; \; k = 1, 2.$$

Agar $M_2 < M_1$ bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da

$$P(A_1 / B) = \frac{1}{1 + \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n} \to 1$$

10-§. Hodisalarning bog'liqsizligi

Hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Agar A va B hodisalar uchun $P(B)>0$ bo'lsa, $P(A/B)$ shartli ehtimol mavjud bo'ladi. Agar $P(A/B)=P(A)$ bo'lsa, A hodisa B ga bog'liq emas deyiladi. Agar $P(B)>0$ bo'lsa, bu holda

$$P(B/\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}B)}{P(\mathrm{A})}=\frac{P(B)\cdot P(\mathrm{A}/B)}{P(\mathrm{A})}=P(B)$$

bo'ladi. Demak A ning B ga bog'liq emasligidan B ning ham A ga bog'liq emasligi kelib chiqadi. 1-teoremadan o'zaro bog'liq bo'lmagan A va B hodisalar uchun $P(\mathrm{A}B)=P(\mathrm{A})P(B)$ ekanligi kelib chiqadi. Ko'p hollarda bu tenglikni bog'liqsizlikning ta'rifi sifatida qabul qilishadi. Ya'ni ixtiyoriy A va B hodisalar uchun $P(\mathrm{A}B)=P(\mathrm{A})P(B)$ tenglik bajarilsa, A va B lar bog'liq emas deyiladi, agar tenglik bajarilmasa A va B lar o'zaro bog'liq deyiladi.

Misol.

52 ta kartadan iborat kartalar dastasidan tavakkaliga karta olingan. A – "tuz" kartasi chiqishi, B – "childik" kartasi chiqishi hodisasi bo'lsa, u holda AB – "childik tuz" kartasi chiqishi hodisasidir. A hodisa to'rtta elementar hodisadan tashkil topgan, B hodisa 13 ta elementar hodisadan tashkil topgan. Shuning uchun:

$$P(\mathrm{A})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13};\quad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4};$$
$$P(\mathrm{A}B)=\frac{1}{52}=P(\mathrm{A})P(B);$$

Demak, A va B lar o'zaro bog'liq emas. Agar kartalar dastasiga yana bitta karta – "joker" kartasini qo'shsak, u holda A va

B lar o'zaro bog'liq bo'lib qoladi. Ya'ni:

$$P(\mathrm{A})=\frac{4}{53};\quad P(B)=\frac{13}{53};\quad P(\mathrm{A}B)=\frac{1}{53}.$$

Ko'rinib turibdiki:

$P(AB)\neq P(A)\,P(B).$

11-§. Bernulli sxemasi

Ta'rif. Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining extimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, ular **bog'liqmas sinovlar ketma-ketligini hosil qiladi** deyiladi.

Quyidagicha masalani qaraylik: bir xil sharoitda o'tkaziladigan n ta bog'liqmas sinovning har birida A hodisa $P(\mathrm{A})=p$ ehtimollik bilan ro'y bersa, uning bu n ta sinovda rosa m marta ro'y berish ehtimolligini toping. Izlanayotgan ehtimollikni $P_n(m)$ bilan belgilaymiz. Masalan, $P_3(2)$ bog'liqmas 3 ta sinovda A hodisa rosa 2 marta ro'y berish ehtimolligidir. Bu ehtimollikni bevosita hisoblash mumkin:

$$P_3(2)=P\left(AA\overline{A}+A\overline{A}A+\overline{A}AA\right)=P\left(AA\overline{A}\right)+P\left(A\overline{A}A\right)+$$

$$+P\left(\overline{A}AA\right)=3\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(\overline{A})=3p^2q.$$

Bu yerda $q=P\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=1-P(\mathrm{A})=1-p$. Umumiy holda $P_n(m)$ ehtimollik **Bernulli formulasi** deb ataladigan ushbu formula bilan hisoblanadi:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\qquad q=1-p$$

Shu formulani isbotlaymiz: n-ta bog'liqmas sinovda A hodisaning rosa m marta ma'lum tartibda ro'y berishi, masalan

$$\underbrace{A,A,A,\ldots,A}_{m},\underbrace{\overline{A},\overline{A},\overline{A},\ldots,\overline{A}}_{n-m}$$

kombinatsiya ro'y berish ehtimolligi bog'liqmas hodisalarni ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^m q^{n-m}$ ga teng. Ravshanki, A

hodisaning yana m marta, biroq boshqacha tartibda ro‘y berishi ehtimolligi yana shunday bo‘ladi. *A* hodisa *m* marta turli tartibda uchraydigan bunga o‘xshash kombinatsiyalar soni guruhlashlar soni C_n^m ga teng. Bizni qiziqtirayotgan *B* hodisa *A* hodisaning *n* ta bog‘liqmas sinovda rosa m marta ro‘y berishi bajariladigan bu kombinatsiyalarning hammasi birgalikda bo‘lmagan hodisalardir. Shuning uchun birgalikdamas hodisalar uchun R3 aksiomaga ko‘ra $P_n(m) = P(B) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Misol. Elektr energiyasining ishlatilish hajmi bir sutka davomida belgilangan normadan oshmasligi ehtimolligi p=0,75 ga teng. Yaqin 6 sutka ichida elektr energiyasining ishlatilish hajmi 4 sutka davomida normadan oshmasligi ehtimolligi topilsin.

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}(0,75)^4 \cdot (0,25)^2 = 0,30.$$

12-§. Muavr-Laplasning limit teoremalari

Muavr-Laplasning lokal teoremasi. Agar *A* hodisaning ro‘y berish etimolligi har bir sinovda o‘zgarmas va *p* (0< *p* <1) ga teng bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n lar uchun:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Muavr-Laplasning integral teoremasi. Agar A hodisaning n ta bog‘liqmas sinovda ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas va p(0< p <1) ga teng bo‘lsa, u holda yetarlicha katta n larda A hodisaning m_1 tadan m_2 tagacha ro‘y berish ehtimolligi $P(m_1 \le m \le m_2)$ taqriban $P(m_1 \le m \le m_2) \approx F(x_2) - F(x_1)$ ga teng, bu yerda

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

1-izoh. Sinovlar soni qanchalik katta bo'lsa bu formulalar shunchalik yaxshiroq yaqinlashishlar beradi.

2-izoh. $\varphi(x)$ va $F(x)$ funksiyalar uchun jadvallar bor, lekin ular faqat argumentning musbat qiymatlari uchun tuzilgan, chunki $\varphi(x)$ juft, $F(x)$ toq funksiyadir. x>5 uchun har doim $F(x) = 0.5$.

13-§. Diskret tasodifiy miqdorlar

Chekli $(\Omega,\Im,P)$ – ehtimollar fazosini qaraymiz. **Tasodifiy miqdor** deb elementar hodisadan olingan sonli funksiya $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$ ga aytamiz.

Misol. Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli sxemasida Ω quyidagi elementar hodisalardan tashkil topgan: $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$. Bu yerda agar i-nchi tajribada A hodisa ro'y bersa $\omega_i=1$, aks holda $\omega_i=0$ desak, bu sxemada $\mu=\mu(\omega)=\omega_1+\omega_2+...+\omega_n$ A hodisalarning n ta tajribada ro'y berish soni tasodifiy miqdor bo'ladi. Agar $g(x_1,x_2,...,x_r)$ ko'p o'zgaruvchili sonli funksiya bo'lsa va $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta=\eta(\omega)=g(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),...,\xi_r(\omega))$ murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Xususan, $\sum_{k=1}^{2}\xi_k$ va $\prod_{k=1}^{2}\xi_k$ lar ham tasodifiy miqdordir. Har bir hodisa $A\in\Im$ bilan quyidagi tasodifiy miqdorni bog'lash mumkin:

$$I_A=I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\overline{\in}A\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorga **A hodisaning indikatori** deyiladi. Indikatorning xossalari:

$$I_{\varnothing}=0; \quad I_{\Omega}=1, \quad I_{AB}=I_A I_B, \quad I_{\bar{A}}=1-I_A.$$

Agar $A_1, A_2, ..., A_N$ lar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa

$$I_{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}=\sum_{i=1}^{n} I_{A_i}.$$

ξ –tasodifiy miqdorning qabul qiluvchi barcha qiymatlari chekli sondagi, $x_1<x_2<...<x_k$ lardan iborat bo'lgani uchun **diskret tasodifiy miqdor** deb ataymiz.

14-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari

ξ – tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni** deb quyidagi B sonli to'plamning funksiyasi sifatida qaraluvchi quyidagi ehtimollikka aytamiz:

$$P(\xi \in B)=P\{\omega;\xi(\omega)\in B\}.$$

ξ – tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, uning $x_1, x_2, ..., x_k$ qiymatlari bilan va $P(\xi=x_i)$ ehtimollar bilan aniqlanadi. $P(\xi=x_i)=p_i$ deb belgilaymiz. Bu holda $P(\xi \in B)$ taqsimot qonunini quyidagi jadval ko'rinishda berish mumkin.

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bu yerda $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$.

Bu jadval yordamida quyidagi tenglikka ko'ra ixtiyoriy sonli to'plam B ning ehtimolini aniqlash mumkin:

$$P(\xi \in B)=\sum_{x_i\in B} p_i;$$

Misollar.

1) Bog'liqmas n ta tajribalarning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ tasodifiy miqdorning taqsimot

qonuni quyidagi binomial taqsimot qonuni orqali beriladi:

$$P(\mu = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \; m = 0, 1, \ldots, n$$

2) $\{1, 2, \ldots, N\}$ dagi tekis taqsimot qonuni:

$$P(\mu = m) = \frac{1}{N}, \; m = 1, 2, \ldots, N$$

Ikki tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun $P\{(\xi \in B_1) \cap (\eta \in B_2)\} = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$ tenglik ixtiyoriy B_1 va B_2 sonli to'plamlar uchun bajarilsa, ular o'zaro bog'liqsiz deyiladi.

15-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Agar ixtiyoriy $(\Omega, \Im, P)$ ehtimollar fazosini qaraydigan bo'lsak, u holda biz ixtiyoriy sonli funksiya $\xi = \xi(\omega)$ ni tasodifiy miqdor deb atay olmaymiz.

Ta'rif. $\xi = \xi(\omega)$ sonli funksiya **tasodifiy miqdor** deyiladi, agarda ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\{\xi \le x\} = \{\omega; \xi(\omega) \le x\} \in \Im$ munosabat bajarilsa.

Ta'rif. Barcha $x \in R$ lar uchun aniqlangan funksiya $F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$ ga ξ **tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi** deyiladi. $x_1 < x_2$ sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\{\xi \le x_2\} = \{\xi \le x_1\} \cup \{x_1 < \xi \le x_2\} \tag{1}$$

$\{\xi \le x_1\}$ va $\{x_1 < \xi \le x_2\}$lar birgalikda bo'lmagani uchun (1) dan kelib chiqadiki: $P\{\xi \le x_2\} = P\{\xi \le x_1\} + P\{x_1 < \xi \le x_2\}$ va

$$P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \tag{2}$$

Teorema. Taqsimot funksiya $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

1) $F(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

2) $F(x)$ – o'ngdan uzluksiz funksiya;

3) $F(+\infty)=1$;

4) $F(-\infty)=0$.

Izoh. Ixtiyoriy $(\Omega,\Im,P)$ ehtimollar fazosida aniqlangan $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor biror intervalda uzluksiz qiymatlar qabul qilgani uchun uni **uzluksiz tasodifiy miqdor** deb atashadi.

Ta'rif. Agar ikki uzluksiz tasodifiy miqdor ξ va η lar uchun $F_{\xi\eta}(x_1,x_2)=P(\xi<x_1,\eta<x_2)=P(\xi<x_1)\cdot P(\eta<x_2)=F_\xi(x_1)\cdot F_\eta(x_2)$ tenglik bajarilsa, u holda ξ va η lar **bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar** deyiladi.

16-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Biz yuqorida tasodifiy miqdor tushunchasi va uning taqsimot qonunini ikki holda kiritdik. Birinchisi: $(\Omega,\Im,P)$ – ehtimollar fazosi chekli yoki sanoqli bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar **diskret tasodifiy miqdorlar** deb ataladi. Ikkinchisi: $(\Omega,\Im,P)$ – ehtimollar fazosi ixtiyoriy, ya'ni Ω ning elementlari uzluksiz, bu holda kiritilgan tasodifiy miqdorlar **uzluksiz tasodifiy miqdorlar** deb ataladi.

Yuqorida kiritilgan tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari ularni to'la xarakterlaydi. Ammo ba'zan taqsimot qonunlari noma'lum bo'ladilar va kamroq ma'lumotlar bilan qanoatlanishga to'g'ri keladi. Ba'zan shunday son qiymatlar bilan ishlash maqsadga muvofiq bo'ladiki, bu son qiymatlar tasodifiy miqdorning xususiyatlarini belgi beradi. Bunday son qiymatlarni **tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari** deb ataladi. Eng muhim sonli xarakteristikalar sifatida matematik kutilish va dispersiyalarni qarash mumkin.

Bizga *X* diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

17-§. Matematik kutilma

Ta'rif. X-diskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** deb, quyidagi yig'indiga aytamiz:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Matematik kutilishning xossalari:

1. O'zgarmas sonning matematik kutilishi shu o'zgarmas sonning o'ziga teng:

$$M(C) = C$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutilma belgisi oldiga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = CM(X)$$

3. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'lsa, u holda:

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

4. Ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar X va Y lar uchun:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Misollar. 1) O'zaro bog'liqsiz n ta tajribaning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ-diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi:

$$M(\mu) = n \cdot p, \quad p = P(A)$$

2) $\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ dagi tekis taqsimlangan ξ – diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi:

$$M(\xi) = \frac{1+N}{2}.$$

18-§. Dispersiya

Shunday ikkita turli tasodifiy miqdor ko'rsatish mumkinki, ularning matematik kutilmasi bir xil bo'ladi. Masalan:

X:	– 0,01	0,01		Y:	– 100	100
P:	0,5	0,5		P:	0,5	0,5

M(X)=–0,01 · 0,5+0,01 · 0,5=0; M(Y)=–100 · 0,5+100 · 0,5=0

Demak, tasodifiy miqdorning faqatgina matematik kutilmasini bilish bilan uni xarakterlab bo'lmas ekan. Shuning uchun ham matematik kutilmadan tashqari tasodifiy miqdor qabul qiluvchi qiymatlarning matematik kutilma atrofida sochilish darajasini aniqlashimiz kerak bo'ladi.

Ta'rif. X-diskret tasodifiy miqdorning **dispersiyasi (tarqoqligi)** deb, quyidagi matematik kutilmaga aytiladi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

X-tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo'lsin:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Bu taqsimot qonuniga qarab $[X - M(X)]^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozish mumkin:

$[x-M(x)]^2$:	$[x_1 - M(x)]^2$	$[x_2 - M(x)]^2$	$[x_3 - M(x)]^2$	...	$[x_n - M(x)]^2$
P:	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ta'rif bo'yicha:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = [X_1 - M(X)] \cdot p_1 + [X_2 - M(X)] \cdot p_2 + \dots$$
$$\dots + [X_n - M(X)] \cdot p_n$$

Amalda dispersiyani hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Dispersiyaning xossalari:

1) $D(C) = 0$

2) $D(CX) = C^2 D(X)$

3) Agar X va Y bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Bundan $D(C+X)=D(X)$ kelib chiqadi.

4) X va Y lar bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'lsalar, u holda

$$D(X-Y)=D(X)-D(Y).$$

Misol. O'zaro bog'liqsiz n ta tajribaning Bernulli sxemasidagi A hodisaning ro'y berishlar soni μ-diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(\mu)=n\cdot p\cdot q, \quad p=P(A), \quad q=1-p.$$

Dispersiyadan olingan arifmetik kvadrat ildizga **o'rtacha kvadratik chetlanish** deb ataladi va $\sigma(\mu)$ bilan belgilanadi:

$$\sigma(\mu)=\sqrt{npq}$$

19-§. Ehtimollikning zichlik funksiyasi va uning xossalari

Biz uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi orqali aniqlagan edik. Bu aniqlash yagona bo'lmay, uzluksiz tasodifiy miqdorni ehtimollikning zichlik funksiyasi orqali ham aniqlash mumkin.

Ta'rif. Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ – differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning **ehtimolligining zichlik funksiyasi** deb taqsimot funksiyadan olingan hosilaga aytamiz:

$$p_\xi(x)=F'_\xi(x) \tag{1}$$

Demak, taqsimot funksiyasi zichlik funksiyaning boshlang'ichi ekan.

Zichlik funksiyasining asosiy xossalari:

1-teorema. *Ixtiyoriy x lar uchun* $p_\xi(x)\geq 0$ *va*

$$P(x_1<\xi\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx \tag{2}$$

Isboti.

$F_\xi(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lgani uchun:

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) \geq 0$$

(2) tenglik quyidagi munosabatlardan kelib chiqadi:

$$P(x_1 < \xi \leq x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \overset{(1)}{=} F_\xi(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx$$

2-teorema. Agar $p_\xi(x)$ – zichlik funksiyasi bo'lsa, y holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$$

Isboti.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b p_\xi(x)dx \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left[F_\xi(b) - F_\xi(a)\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F_\xi(b) - \lim_{a\to-\infty} F_\xi(a) = 1$$

3-teorema. Agar $F_\xi(x)$ va $p_\xi(x)$ lar mos ravishda taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyalari bo'lsa u holda:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt.$$

Isboti. Xosmas integral ta'rifi va Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra taqsimot funksiyasining xossalaridan quyidagini olamiz:

$$\int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x p_\xi(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty} \left(F_\xi(x) - F_\xi(a)\right) =$$

$$= F_\xi(x) - \lim_{a\to-\infty} F_\xi(a) = F_\xi(x)$$

Misol. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_\xi(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$

berilgan. a-sonini aniqlang va taqsimot funksiyasining ko'rinishini toping.

Yechish. a parametrni topish uchun 2-teoremani qo'llaymiz:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{adx}{1+x^2}=a\cdot arctg\,x\Big|_{-\infty}^{\infty}=a\cdot\frac{\pi}{2}-a\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=a\pi$$

Bundan esa $a=\frac{1}{\pi}$ kelib chiqadi. Taqsimot funksiyani topish uchun 3-teoremani qo'llaymiz:

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(t)dt=\int_{-\infty}^{x} \frac{\frac{1}{\pi}dt}{1+t^2}=\frac{1}{\pi}arctg\,t\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}arctg\,x-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}arctg\,x+\frac{1}{2}$$

Misol. ξ-tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ a\dfrac{\ln x}{x^3}, & x>1\end{cases}$$

berilgan. a ni toping va $F_{\xi}(x)$- ni hisoblang:

Yechish:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{1} p_{\xi}(x)dx+\int_{1}^{\infty} p_{\xi}(x)dx=\int_{1}^{\infty} a\frac{\ln x}{x^3}dx=$$

$$=a\left|\frac{\ln x}{-2x^2}\right|_1^{\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty} a\frac{dx}{x^3}\Bigg|=\frac{a}{4}\frac{1}{x^2}\Bigg|_1^{\infty}=\frac{a}{4}\cdot\left(0+\frac{1}{1^2}\right)=\frac{a}{4}$$

Bundan a=4 kelib chiqadi. $F_{\xi}(x)$ ni topamiz: $x\le 1$ bo'lganda $F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x} p_{\xi}(x)dx=0$. $x>1$ bo'lganda esa

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x}p_{\xi}(t)dt=\int_{-\infty}^{1}p(t)dt+\int_{1}^{\infty}p(t)dt=4\int_{1}^{\infty}\frac{\ln t}{t^3}dt=$$

$$=4\cdot\left|\frac{\ln t}{-2t^2}\Big|_1^x+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{dt}{t^3}\right|=4\cdot\left(\frac{\ln t}{2t^2}-\frac{1}{4t^2}\right)\Big|_1^x=1-\frac{1+2\ln x}{x^2}$$

20-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Zichlik funksiyasiga ega bo‘lgan uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari aniq integral orqali aniqlanadi.

Ta’rif. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p_{\xi}(x)$ ga teng bo‘lsa, uning matematik kutilmasi quyidagi aniq integralga teng bo‘ladi:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{\xi}(x)dx \tag{1}$$

va dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2p_{\xi}(x)dx \tag{2}$$

Diskret tasodifiy miqdorlarda aniqlangan barcha hisoblash formulalari uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblashda ham saqlanadi:

1) $M(a\xi+b)=a\cdot M\xi+b$ (3)

2) $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$ (4)

3) $D(a\xi+b)=a^2D\xi$ (5)

4) $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$ (6)

(3) tenglikni isbotlashdan oldin ξ va $a\xi+b$ tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari va taqsimot funksiyalari orasidagi bog‘lanishni o‘rnatamiz.

1-teorema. Agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ va zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ bo'lsa, u holda $a\xi+b$ tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiya quyidagicha bo'ladi:

$$p_{a\xi+b}(x)=\frac{1}{|a|}p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) \tag{7}$$

taqsimot funksiyasi esa

$$F_{a\xi+b}(x)=F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right),\ a>0 \tag{8}$$

$$F_{a\xi+b}(x)=1-F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right),\qquad a<0 \tag{9}$$

Isboti. a>0 bo'lsin. U holda:

$$F_{a\xi+b}(x)=P(a\xi+b\le x)\overset{(1)}{=}P\left(\xi\le\frac{x-b}{a}\right)\overset{(2)}{=}F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

(1): $a\xi+b\le x$ va $\xi\le\dfrac{x-b}{a}$ lar teng kuchli bo'lganlari uchun $\{\omega: a\xi+b\le x\}$ va $\left\{\omega:\xi\le\dfrac{x-b}{a}\right\}$ hodisalar teng bo'ladi. Teng hodisalarning ehtimollari ham teng bo'ladi.

(2): ξ tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra tenglik o'rinli.

Endi zichlik funksiyasining ta'rifiga ko'ra:

$$P_{a\xi+b}(x)=F'_{a\xi+b}(x)=\left(F_\xi'\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)=\frac{1}{a}F_\xi'\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{1}{a}p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

a>0 da $|a|=a$ bo'lgani uchun (7) formula isbot bo'ldi. Endi a<0 bo'lgan holni isbotlaymiz. $a\cdot\xi+b$ tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra

$$F_{a\xi+b}(x)=P(a\xi+b\le x)\overset{(1)}{=}P\left(\xi\ge\frac{x-b}{a}\right)\overset{(2)}{=}1-P\left(\xi\le\frac{x-b}{a}\right)=$$

$$=1-F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

(1): a > 0 bo‘lgani uchun $a\xi + b \leq x$ tengsizlik bilan $\xi \leq \frac{x-b}{a}$ tengsizlik teng kuchli bo‘ladi va shuning uchun $\{\omega : a\xi + b \leq x\}$ va $\left\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\right\}$ hodisalar teng bo‘ladi.

(2): $\left\{\omega : \xi \geq \frac{x-b}{a}\right\} = \left\{\omega : \xi < \frac{x-b}{a}\right\}$ va $F_{\xi}(x)$ taqsimot funksiyasi o‘ngdan uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun qat’iy tengsizlikni noqat'iy tengsizlik bilan almashtirish mumkin.

Endi zichlik funksiyasining ta’rifiga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$p_{a\xi+b}(x) = F'_{a\xi+b}(x) = \left(1 - F_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)' = -\frac{1}{a}F'_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{|a|}p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Chunki a < 0 da $|a| = -a$ bo‘ladi. (7) formula to‘la isbot bo‘ldi.

Endi biz. (3) tenglikni quyidagi teoremaga asoslanib isbot qilamiz:

2-teorema. Agar a va b lar o‘zgarmas son $(a \neq 0)$ bo‘lib, $p_{\xi}(x)$ – zichlik funksiyasi bo‘lsa u holda:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\, p_{\xi}(x)\, dx \tag{10}$$

Isboti. $p_{a\xi+b}(x)$ deb $a\xi + b$ ning zichlik funksiyasini belgilaymiz.

1) a > 0. U holda uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik qutilishi ta’rifiga ko‘ra

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{a\xi+b}(x)\, dx \stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{a} p_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \stackrel{2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (at + b) \frac{1}{a} p_{\xi}(t)\, a\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (at + b)\, p_{\xi}(t)\, dt$$

(1): 1-teoremaga ko‘ra a > 0 da $p_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko‘rinishda o‘zgaruvchilarni almashtirishni bajarsak, u holda $dx = adt$ va $x = at + b$ bo‘ladi. a > 0 bo‘lgani uchun $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-b}{a} = \lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$ (integrallashning yangi yuqori chegarasi), va $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-b}{a} = \lim\limits_{x\to-\infty} t = -\infty$, (integrallashning yangi quyi chegarasi)

Agar a < 0 bo‘lsa, hisoblashda juda katta bo‘lmagan o‘zgarish bo‘ladi:

$$M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{a\xi+b}(x)\,dx \overset{1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{-1}{a} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \overset{2}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (at+b)\frac{-1}{a} p_\xi(t)\,adt \overset{3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (at+b) p_\xi(t)\,dt$$

(1): 1-teoremaga ko‘ra $a < 0$ da $p_{a\xi+b}(x) = \frac{-1}{a} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Shunday qilib, (10) formula to‘liq isbot bo‘ldi.

(2): $t = \frac{x-b}{a}$ ko‘rinishda o‘zgaruvchilarni almashtiramiz, u holda $dx = adt$, $x = at + b$ bo‘ladi va $a < 0$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-b}{a} = -\infty$ (integrallashning yangi yuqori chegarasi), $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-b}{a} = \lim\limits_{x\to-\infty} t = +\infty$ (integrallashning yangi quyi chegarasi).

(3) integrallash chegaralarining o‘rnini almashtiramiz. Bu teoremadan, integralning chiziqliligidan va avvalgi mavzudagi 2-teoremadan (3) formula to‘la isbot bo‘ladi.

Ya'ni: $M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (at + b)\, p_\xi(x)\, dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\, dx +$

$$+ b \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, dx = aM\xi + b$$

Endi tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblash formulasini chiqaramiz.

3-teorema. Agar $p_\xi(x)$ zichlik funksiya bo'lib, $m = M\xi$ bo'lsa, u holda:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2\, p_\xi(x) dx \tag{11}$$

Isboti. Avvalo $(\xi - m)^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_{(\xi-m)^2}(x)$ – ni topamiz:

$(\xi - m)^2 \geq 0$ bo'lgani uchun $x \leq 0$ da

$\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = \emptyset$ va shuning uchun:

$$F_{(\xi-m)^2}(x) = P\{\omega : (\xi - m)^2 < x\} = P(\emptyset) = 0$$

$x > 0$ da

$$F_{(\xi-m)^2}(x) = P\{(\xi - m)^2 < x\} = P(m - \sqrt{x} < \xi < m + \sqrt{x}) =$$
$$= F_\xi(m + \sqrt{x}) - F_\xi(m - \sqrt{x})$$

$p_{(\xi-m)^2}(x)$ deb $(\xi - m)^2$ – tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini belgilasak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$p_{(\xi-m)^2}(x) = F'_{(\xi-m)^2}(x) = F'_\xi(m + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - F'_\xi(m - \sqrt{x}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(m + \sqrt{x}) + p_\xi(m - \sqrt{x})\right)$$

Shunday qilib:

$$p_{(\xi-m)^2}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \; \partial a \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(m+\sqrt{x})+p_\xi(m-\sqrt{x})\right), & x>0 \; \partial a \end{cases}$$

Endi ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini ta'rifga asosan hisoblash mumkin

$D\xi = M(x-\xi)^2 =$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_{(\xi-m)^2}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} xp_{(\xi-m)^2}(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty} xp_{(\xi-m)^2}(x)\,dx\overset{(1)}{=}$$

$$=\int_0^{\infty} x\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(m+\sqrt{x})+p_\xi(m-\sqrt{x})\right)dx=\int_0^{\infty} xp_\xi(m+\sqrt{x})\frac{dx}{2\sqrt{x}}+$$

$$\int_0^{\infty} xp_\xi(m-\sqrt{x})\frac{dx}{2\sqrt{x}}\overset{(2)}{=}\int_m^{\infty}(y-m)^2\,p_\xi(y)\,dy-\int_m^{-\infty}(z-m)^2\,p_\xi(z)\,dz\overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=}\int_m^{\infty}(x-m)^2\,p_\xi(x)\,dx+\int_{-m}^{\infty}(x-m)^2\,p_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,p_\xi(x)\,dx$$

(1): $x\le 0$ lar uchun $p_{(\xi-m)^2}(x)=0$ bo'lganidan

$$\int_{-\infty}^{0} p_{(\xi-m)^2}(x)dx=0$$

(2): Birinchi integralda $y=m+\sqrt{x}$ almashtirish bajarsak $dy=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ va $\lim\limits_{x\to+\infty}(m+\sqrt{x})=+\infty$ bo'ladi (integrallashning yangi yuqori chegarasi), ikkinchi integralda $z=m-\sqrt{x}$ almashtirishni bajarsak $dz=-\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ va $\lim\limits_{x\to+\infty}(m-\sqrt{x})=-\infty$ bo'ladi (integrallashning yangi quyi chegarasi).

(3): Integrallash o'zgaruvchisini yana x deb belgilaymiz (Integrallashning o'zgaruvchiga nisbatan invariantligi uchun integral qiymati o'zgarmaydi), ikkinchi integralda esa integrallash tartibini o'zgartiramiz. Shunday qilib (11) formula isbot bo'ldi.

Misol. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} h, & -2 \le x \le 3 \quad da \\ 0, & x < -2 \ va \ x > 3 \ da \end{cases}$$

$h, M\xi, D\xi, P(1 < \xi < 5)$ va $F_\xi(x)$ larni toping:

$$1)\ 1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} p_\xi(x)dx + \int_{-2}^{3} p_\xi(x)dx + \int_{3}^{\infty} p_\xi(x)dx = 5h$$

$$2)\ M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_\xi(x)dx = \int_{-2}^{3} xp_\xi(x)dx = 0,2\int_{-2}^{3} xdx = 0,1\cdot x^2\Big|_{-2}^{3} = 0,5$$

$$3)\ D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0,5)^2\, p_\xi(x)dx = \int_{-2}^{3} (x-0,5)^2\, p_\xi(x)dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} (x-0,5)^2 \cdot 0,2dx = \frac{0,2}{3}(x-0,5)^3\Big|_{-2}^{3} = \frac{6,25}{3} \approx 2,1$$

$$4)\ P(1<\xi<5) = \int_{1}^{5} p_\xi(x)dx = \int_{1}^{3} p_\xi(x)dx + \int_{3}^{5} p_\xi(x)dx = \int_{1}^{3} 0,2dx = 0,4$$

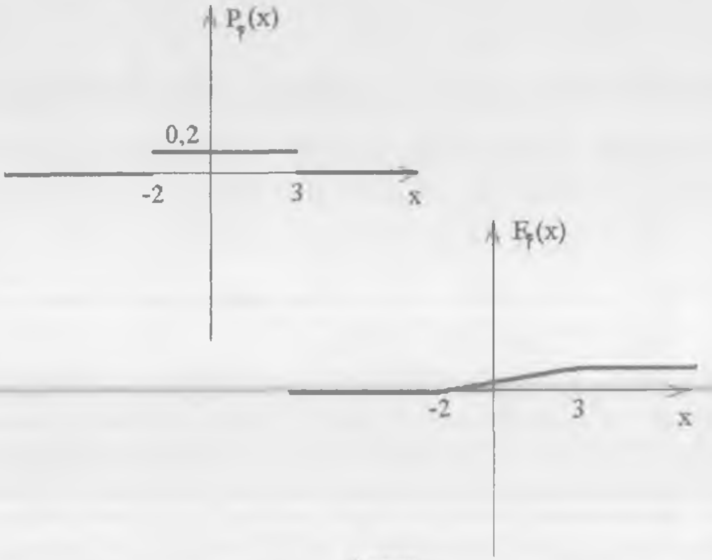
5) Agar $x < -2$ bo'lsa $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = 0$

Agar $x > 3$ bo'lsa

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} p_\xi(t)dt + \int_{-2}^{3} p_\xi(t)dt + \int_{3}^{x} p_\xi(t)dt = \int_{-2}^{3} 0,2dt = 1$$

chunki $x < -2$ da va $x > 3$ da $p_\xi(x) = 0$.

Agar $-2 \le x \le 3$ bo'lsa



1-rasm

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} p_\xi(t)dt + \int_{-2}^{x} p_\xi(t)dt = \int_{-2}^{x} 0,2dt = 0,2(x+2)$$

Shunday qilib: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \quad da \\ 0,2(x+2), & -2 \le x \le 3 \quad da \\ 1, & x \ge 3 \quad da \end{cases}$

21-§. Boshlang'ich va markaziy momentlar

X-tasodifiy miqdorning k-tartibli boshlang'ich momenti deb, X^k tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi, ya'ni $\mu_k = MX^k$.

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i$

ko'rinishda bo'lib, uzluksiz tasodifiy miqdor uchun esa

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bizga X-tasodifiy miqdor berilgan bo'lsa, unga mos markaziy tasodifiy miqdor $\overline{X}^0$ deb, X-tasodifiy miqdorning o'zi matematik kutilmasidan chetlanishiga aytiladi, ya'ni $\overline{X}^0 = X - \mu_1$.

X-tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy momenti deb markaziy $\overline{X}^0$ tasodifiy miqdorning k-tartibli boshlang'ich momentiga aytiladi, ya'ni $\eta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1)^k \varphi(x)dx$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda $\eta_1 = 0, \eta_2 = D(X)$.

Bulardan tashqari, tasodifiy miqdorlarning quyidagi ikki sonli xarakteristikalarini ko'rish mumkin. Mediana Me deb, tasodifiy miqdorning shunday qiymatiga aytamizki, bunda

$$P(X < Me) - P(X > Me) = 0,5$$

bo'ladi. Demak tasodifiy tajribada X-tasodifiy miqdor bir xil ehtimol bilan yoki Me dan katta bo'ladi yoki Me dan kichik bo'ladi. Bu xarakteristika tasodifiy miqdorning qiymatlari sonlar o'qida qanday joylashganligini xarakterlaydi. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ uchun $Me = M\xi$. Mediana noparametrik statistikada muhim rol o'ynaydi.

Moda deb, diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun tasodifiy miqdorning eng katta ehtimolga ega bo'lgan qiymatiga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun moda tasodifiy miqdorning zichlik funksiya maksimum qiymatga erishadigan qiymatiga teng.

Zichlik funksiyasi bitta maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar unimodal taqsimotlar, bir necha maksimumga ega bo'lgan taqsimotlar polimodal taqsimotlar deyiladi. Moda ham matematik kutilma va mediana kabi tasodifiy miqdorning sonlar o'qidagi joylanishini xarakterlovchi sonli xarakteristikadir. Simmetrik, unimodal taqsimotlar uchun bu uchala xarakteristika bir xildir. Normal taqsimot uchun moda bilan matematik kutilma teng bo'ladi.

22-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlariga misollar

1. Agar $\xi -$ tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., n qiymatlarni $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ ehtimol bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x < 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k} & \text{agar} \quad 0 \le x \le n \quad \text{bo'lsa} \\ 1, & \text{agar} \quad n < x \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi = np$, $D\xi = npq$, $\sigma(\xi) = \sqrt{npq}$.

2: Agar ξ - tasodifiy miqdor 0,1,2,.... qiymatlarni $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0$ ehtimollar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad k < o \quad \text{bo'lsa,} \\ \sum\limits_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar} \quad 0 \le k \le x \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

3. Agar $\xi -$ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_N$ qiymatlarni $P\{\xi = x_k\} = \frac{1}{N}$, $k = 1, 2, ..., N$ ehtimollar bilan qabul qilsin. Bu tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyila-

di. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le x_1 \quad \text{bo‘lsa} \\ \dfrac{k}{N}, & \text{agar} \quad x_k < x \le x_{k+1} \quad \text{bo‘lsa} \\ 1, & \text{agar} \quad x_N < x \quad \text{bo‘lsa} \end{cases}$$

4. $\alpha-$ parametrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \alpha\cdot e^{-\alpha x}, & x\ge 0 \end{cases}$ ko‘rinishga, taqsimot funksiyasi esa $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\alpha x}, & x\ge 0 \end{cases}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Asosiy sonli xarakteristikalari: $M\xi=\dfrac{1}{\lambda}$, $D\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(\xi)=\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}}$.

23-§. Gaussning normal taqsimot qonuni

Ta’rif. ξ – uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\pi^2}} \qquad (\sigma>0) \tag{1}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u **Gaussning normal qonuni bo‘yicha taqsimlangan** deb ataladi.

$p_\xi(x)$ funksiyaning musbatligi va juftligi ravshan. $x\to\pm\infty$ da $p_\xi(x)\to 0$ ligini oddiygina ko‘rsatish mumkin. $x=a$ nuqtada funksiya yagona $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ga teng bo‘lgan yagona maksimumga ega. Funksiyaning grafigi $x=\sigma+a$ va $x=-\sigma+a$ da burilish nuqtalariga ega ekanligini ikkinchi hosila yordamida aniqlash mumkin. Odatda $a=0$ va $\sigma=1$ bo‘lgan holda

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

ko'p qaraladi. Bu holda $\varphi(x)$ funksiya markazlashtirilgan va normallangan $\frac{(\xi-a)}{\sigma}$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyaning qiymatlari jadvallari tuzilgan. Bu funksiya yordamida ξ normal taqsimotli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{3}$$

Puasson integralini biz matematik analiz kursida ko'rgan edik, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

Bundan foydalanib quyidagini ko'rsatish oson:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1 \tag{4}$$

Bizga yana quyidagi ikki integralning qiymatlari kerak bo'ladi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=0 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=1 \tag{6}$$

Isboti. (5) tenglik integral ostidagi funksiyaning toqligi va integrallash chegarasining 0 ga nisbatan simmetrikligidan osongina kelib chiqadi. (6) tenglikni hosil qilish uchun bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{\frac{-x^2}{2}}dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{\frac{-x^2}{2}}d\left(-\frac{-x^2}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(xe^{\frac{-x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx=1$$

Endi (1) zichlik funksiyaga ega bo'lgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor ξ ning matematik kutilmasi

$$M\xi = a \tag{7}$$

va dispersiyasi

$$D\xi = \sigma^2 \tag{8}$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Matematik kutilmaning ta'rifidan

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx \overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)\varphi(t)\,dt = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(t)\,dt + a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt \overset{(2)}{=} a$$

(1): $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \dfrac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (4) va (5) tengliklardan (7) tenglik isbot bo'ldi. (8) ni isbot qilish uchun dispersiyani hisoblashning quyidagi formulasidan foydalanamiz:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2\, p_\xi(x)dx$$

$m = M\xi = a$ bo'lgani uchun,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dt \overset{(1)}{=} \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)\,dt \overset{(2)}{=} \sigma^2$$

(1): $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bajaramiz, bunda $dt = \dfrac{dx}{\sigma}$ bo'ladi.

(2): (6) formulaga asosan normal taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi funksiyadan foydalanamiz:

$$F_0(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

Bundan esa zichlik funksiyasi $p_\xi(x)$ bo'lgan ξ normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi munosabat orqali topiladi: $F_\xi(x) = F_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. $F_0(x)$ funksiyaning qiymatlari jadvali tuzilgan.

$F_0(x)$ funksiyaning quyidagi xossalarini isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = -F_0(x) \tag{9}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Avval (9) tenglikni isbotlaymiz:

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t)\,dt \overset{(1)}{=} -\int_0^{x} \varphi(-z)\,dz \overset{(2)}{=} -\int_0^{x} \varphi(z)\,dz = -F_0(x)$$

(1): $z = -t$ almashtirish bajaramiz, bunda $-dz = dt$ bo‘ladi.

(2) $\varphi(z)$ funksiyaning juftligidan (10) tenglikni isbot qilamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} F_0(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

ξ – normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning (α, β) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha < \xi < \beta) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = F_0(\beta) - F_0(\alpha)$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan chetlanishi absolyut qiymati bo‘yicha biror musbat sondan kichikligi ehtimolligini hisoblash uchun quyidagi formula o‘rinli:

$$P\left(|\xi - a| < \delta\right) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \quad \delta > 0 \tag{11}$$

Xususan $a = 0$ bo‘lganda $P\left(|\xi| < \delta\right) = 2F_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ tenglik o‘rinli.

Agar (11) tenglikda $\delta = \sigma \cdot t$ deb olsak $P\left(|\xi - a| < \sigma \cdot t\right) = 2F_0(t)$ ni hosil qilamiz. Xususan $t = 3$ bo‘lganda

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2F_0(3) = 0{,}9973$$

ga egamiz. Bu tasdiq **“uch sigma”** qoidasi deb ataladi.

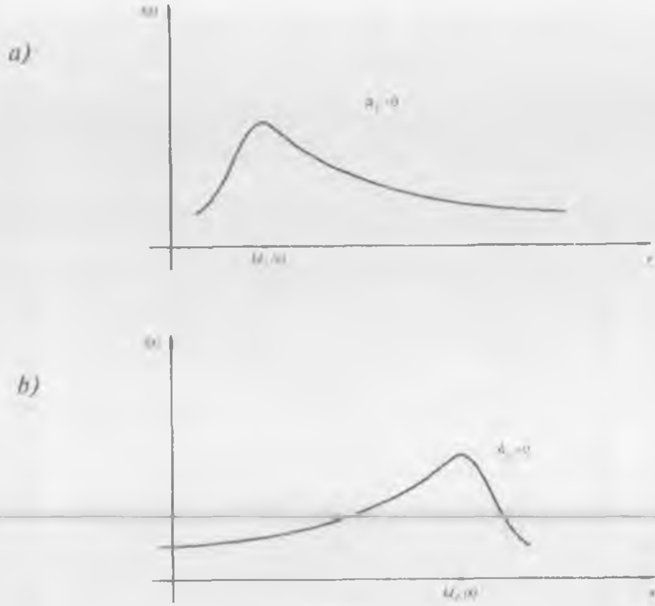
24-§. Asimmetriya va ekstsess

Normal taqsimotdan o'zga taqsimotlarni o'rganishda ularning normal taqsimotdan farqini sonli baholash masalasi kelib chiqadi. Shu maqsadda maxsus sonli xarakteristikalar kiritiladi. Shulardan, xususan asimmetriya va ekstsess tushunchasini ko'rib chiqaylik. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun bu xarakteristikalar nolga teng. Shu sababli o'rganilayotgan taqsimot uchun bu xarakteristikalarning sonli qiymatlari yetarlicha nolga yaqin bo'lsa, bu taqsimotning normal taqsimotga yaqinligi haqida gapirish mumkin. Aksincha, asimmetriya va ekstsesslarning katta qiymatlari bu taqsimotning normal taqsimotdan katta farqlanganligini bildiradi.

Asimmetriyaning baholanishini ko'rib chiqaylik. Simmetrik taqsimot uchun (bunday taqsimotning grafigi $x = M(X)$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetrik) har bir toq tartibli markaziy momenti nolga teng. Shuning uchun bu toq tartibli ixtiyoriy (birinchi tartibli momentidan boshqa, chunki ixtiyoriy taqsimotning birinchi tartibli markaziy momenti nolga teng) momentlar asimmetriyani baholash uchun xizmat qiladi. Tabiiyki, ularning eng soddasi η_3−uchinchi tartibli markaziy momenti tanlanadi.Lekin bu η_3−moment tasodifiy miqdor o'lchanayotgan o'lchov birligidan bog'liq bo'lganligi sababli uni $\sigma^3 = \sqrt{D(X)}^3$ ga bo'lib, birlik o'lchovisiz xarakteristikaga o'tib olinadi. Shunday qilib, nazariy taqsimotning asimmetriyasi deb, markaziy uchinchi tartibli momentning o'rtacha kvadratik chetlanish kubiga nisbatiga aytiladi:

$$A_3 = \frac{\eta_3}{\sigma^3}.$$

Agar taqsimot egri chizig'ining uzun qismi, matematik kutilmadan o'ng tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya musbat (2-a rasm) va agar taqsimot egri chizig'ining uzun qismi matematik kutilmadan chap tomonda joylashgan bo'lsa, asimmetriya manfiy bo'ladi. (2-b rasm).



2-rasm

Nazariy taqsimot egri chizig'ining maksimumi normal taqsimot egri chizig'ining maksimumidan pastroqda yoki yuqoriroqda joylashganligini, ya'ni taqsimot egri chizig'ining "qiyaligini" baholash uchun ekstsess deb ataluvchi sonli xarakteristikadan foydalaniladi. Ekstsess quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

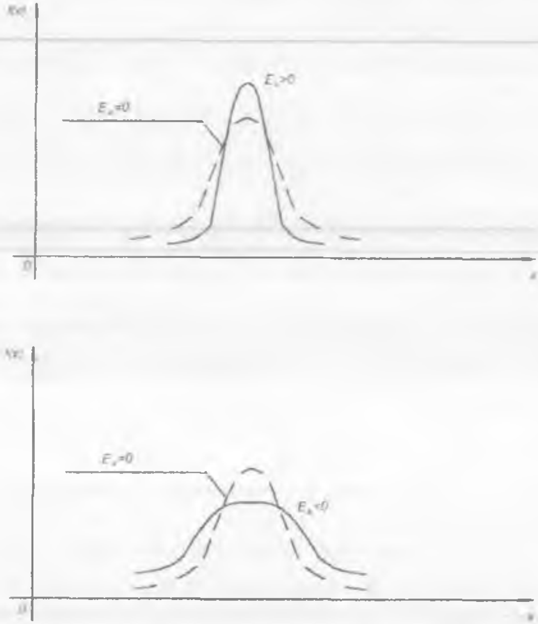
$$E_4 = \frac{\eta_4}{\sigma^4} - 3 .$$

Normal taqsimot uchun $\frac{\eta_4}{\sigma^4} = 3$ bo'lganligi sababli $E_4 = 0$. Shu sababli, agar biror taqsimot uchun ekstsess noldan farqli bo'lsa, uning zichlik funksiyasi grafigi normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan farqli bo'ladi: agar ekstsess musbat bo'lsa, unda uning zichlik funksiyasining grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan balandroq bo'ladi (3-a rasm). Agar ekstsess manfiy bo'lsa, unda solishtirilayotgan taqsimot zichlik funksiyasi grafigi maksimum nuqtada normal taqsimot zichlik funksiyasi grafigidan pastroq, ya'ni "yassi"roq bo'ladi

(3-b rasm). Lekin bunda shu narsa ko‘zda tutiladiki, normal taqsimot ham, solishtirilayotgan taqsimot ham bir xil matematik kutilmaga ega.

a)

b)



3-rasm.

24-§. Matematik statistikada ishlatiladigan ba’zi bir taqsimotlar.

χ^2-taqsimot.

ξ-tasodifiy miqdor n-ozodlik darajasiga ega bo‘lgan χ^2-taqsimot qonuniga ega deyiladi, agarda uning zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsa:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}, & x>0. \\ 0, & x\geq 0. \end{cases}$$

Bu yerda $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ gamma funksiya bo'lib, xususan $\Gamma(n+1)=n!$. Bu tasodifiy miqdorning momentlari quyidagicha aniqlanadi: $M\xi^k=n(n+1).....[n+2(k-1)]$, $D\xi=2n$, $\eta_3=8n$, $\eta_4=48n+12n^2$, ... Asimmetriya koeffitsienti $A_3=\sqrt{\frac{8}{n}}$, ekstsess koeffitsienti $E_3=\frac{12}{n}$.

$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va (0,1) parametrli normal qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ tasodifiy miqdor n-ozodlik darajali χ^2-taqsimot qonuniga ega bo'ladi. Statistikada nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ bilan tajriba natijalari orasidagi muvofiqlikni tekshirish kriteriyasi Pirsonning χ^2-statistikasini o'rganishga asoslangan. χ^2-statistika quyidagicha aniqlanadi: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i-np_i}{np_i}$. Bu yerda $p_i=F(x_i)-F(x_{i-1})$, $x_0=-\infty<x_1<...<x_k=\infty$, $(-\infty;+\infty)$ intervalning ixtiyoriy bo'linishi, $n_i-[x_{i-1},x_i)$ intervalga tushgan kuzatmalar soni. Qo'yilgan gipoteza to'g'ri deb faraz qilinganda χ^2-statistika $n\to\infty$ da k−1 ozodlik darajasiga ega bo'lgan χ^2-taqsimot qonuniga ega bo'ladi va bu χ^2-taqsimot $F(x)$ taqsimot funksiyasidan bog'liq bo'lmaydi.

St'yudent taqsimoti. ξ-tasodifiy miqdor α-ozodlik darajali St'yudent taqsimotiga ega deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa:

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x\in(-\infty;\infty).$$

Bunday tasodifiy miqdorlarning momentlari quyidagicha topiladi:

$$M\xi^{2k-1}=0 \qquad M\xi^{2k}=\frac{\alpha^k\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-k\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \qquad 2k<\alpha,$$

$$D\xi=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha-2}, & \alpha>2,\\ \infty, & \alpha\le 2.\end{cases}$$

Agar η va ς — o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, va ς — n-ozodlik darajali χ^2-taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'lib, η-standart normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, u holda $\xi=\eta\sqrt{\frac{\alpha}{\varsigma}}$ n-ozodlik darajali St'yudent taqsimot qonuni bilan taqsimlangan bo'ladi. Bu taqsimotning statistikadagi tatbiqlarida ko'p hollarda α-natural son bo'ladi. St'yudent taqsimoti statistikada normal taqsimlangan bosh to'plam o'rta qiymatiga qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda dispersiya noma'lum bo'lganda ishlatiladi. α-ning yetarlicha katta qiymatlarida St'yudent taqsimoti standart normal taqsimotga asimptotik yaqinlashib boradi.

Fisher taqsimoti. Agar ξ va η bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lib, ular k_1 va k_2 ozodlik darajali χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda $F=\frac{\xi/k_1}{\eta/k_2}$ tasodifiy miqdor F taqsimotga (yoki k_1 va k_2 ozodlik darajali Fisher taqsimotiga) ega deyiladi. F taqsimotning zichligi:

$$P_{k_1,k_2}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C_0\frac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1x+k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & x>0\end{cases}$$

Bu yerda $x>0$ da $C_0\dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}$.

26-§. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning qo'shma taqsimot qonuni

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari (x,y) sonlar jufti bo'lgan (ξ,η) ikki tasodifiy miqdor sistemasiga aytiladi. **Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor** deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi. **Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor** deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi. **Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni** deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi. **Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni** deb, bu miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari $P_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_i)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n,\ i = 1,\ 2, ..., m$ ro'yxatiga aytiladi. Taqsimot qonuni odatda jadval shaklida beriladi.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	...	p_{nm}

Uzluksiz ikki o'lchovli (ξ,η) **tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi** deb, $F_{\xi\eta} = P(\xi < x, \eta < y)$ ehtimolga aytiladi.

$F_{\xi\eta}(x,y)$ taqsimot funksiyasining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1) $0 \le F_{\xi\eta}(x,y) \le 1$

2) $F_{\xi\eta}(x_2,y) \ge F_{\xi\eta}(x_1,y)$, agar $x_2 > x_1$ bo'lsa, $F_{\xi\eta}(x,y_2) \ge F_{\xi\eta}(x,y_1)$, agar $y_2 > y_1$ bo'lsa.

3) Ushbu tengliklar o'rinli:

$$F_{\xi\eta}(-\infty,y) = 0,\ F_{\xi\eta}(y,-\infty) = 0,\ F_{\xi\eta}(-\infty,-\infty) = 0$$

4) $F_{\xi\eta}(\infty,\infty) = 1$

5) $F_{\xi\eta}(x,+\infty)=F_1(x), \qquad F_{\xi\eta}(+\infty,y)=F_2(y)$

Bu yerda $F_1(x)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdor (ξ,η) ning ξ tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi, $F_2(y)$ esa η tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasi.

6) $P(a<\xi<b, c<\eta<d)=F_{\xi\eta}(b,d)-F_{\xi\eta}(a,d)-F_{\xi\eta}(b,c)+F_{\xi\eta}(a,c).$

Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining zichlik funksiyasi deb, taqsimot funksiyadan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Zichlik funksiyasini bilgan holda taqsimot funksiyasini

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$$

formula bo'yicha topish mumkin.

(ξ,η) tasodifiy nuqtaning D sohaga tushish ehtimoli

$P[(\xi,\eta)\in D]=\iint\limits_{D} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$ tenglik bilan aniqlanadi.

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) $p_{\xi\eta}(x,y)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=1$

(ξ,η) **ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning koovariatsiyasi** deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu_{\xi\eta}(x,y)=M\big((\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\big)$$

ξ va η miqdorlarning korrelyatsiya koeffisienti deb koovariatsiyaning bu miqdorlarning o'rtacha kvadratik chetlanishlari ko'paytmasiga nisbatiga aytiladi:

$$r_{\xi\eta}=\frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}.$$

Agar $\mu_{\xi\eta}\neq 0$ bo'lsa, bu miqdorlar **korrelyatsiyalangan** deyiladi.

Agar $\mu_{\xi\eta} = 0$ bo'lsa, bu miqdorlar **korrelyatsiyalanmagan** deyiladi.

Ikkita korrelyatsiyalangan miqdor, shuningdek, bog'liq hamdir; agar ikkita miqdor bog'liq bo'lsa, ularning korrelyatsiyalangan bo'lishi shart emas.

Ikkita miqdorning erkliligidan ularning korrelyatsiyalanmaganligi kelib chiqadi, lekin bu miqdorlarning korrellyatsiyalanmaganligidan ularning erkliligi haqida xulosa chiqarish mumkin emas. (Normal taqsimlangan miqdorlar bundan mustasno).

27-§. Bir tasodifiy argumentning funksiyasi

Agar ξ tasodifiy argumentning har bir mumkin bo'lgan qiymatiga η tasodifiy argumentning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda η **ni** ξ **tasodifiy argumentning funksiyasi** deyiladi va bunday yoziladi: $\eta = \varphi(\xi)$. Agar ξ diskret tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'lsa, u holda ξ ning turli qiymatlariga η ning turli qiymatlari mos keladi, shu bilan birga ξ va η ning mos qiymatlarining ehtimollari bir xil bo'ladi. Boshqacha aytganda, η ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ tenglikdan topiladi, ξ_i argument ξ ning mumkin bo'lgan qiymatlari; η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari $P(\eta = \eta_i) = P(\xi = \xi_i)$ tenglikdan topiladi. Agar $\eta = \varphi(\xi)$ monoton funksiya bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, ξ ning turli qiymatlariga η ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin.

Bunday holda η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topish uchun ξ ning η bir xil qiymat qabul qiladigan qiymalarining ehtimollarini qo'shish lozim.

Agar ξ ushbu $p_\xi(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor va $\eta = \varphi(\xi)$ differensiallanuvchi monoton funksiya bo'lib, unga teskari funksiya $\eta = \psi(\xi)$ bo'lsa, u holda η tasodifiy miqdorning $p_\eta(y)$ zichlik funksiyasini $p_\eta(y) = p_\xi[\psi(\eta)] \cdot |\psi'(\eta)|$ tenglikdan topiladi.

Agar $\eta = \varphi(\xi)$ funksiya ξ ning qiymatlari intervalida monoton bo'lmasa, u holda bu intervalni $\varphi(\xi)$ funksiya monoton bo'ladigan intervallarga ajratib, monotonlik intervallarining har biri uchun $p_{\eta_i}(y)$ zichlik funksiyalarini topish, keyin esa $p_\eta(y)$ ni $p_\eta(y) = \sum p_{\eta_i}(y)$ yig'indi ko'rinishida ifodalash lozim.

28-§. Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi

Agar ξ va η tasodifiy miqdorlarning mumkin bo'lgan qiymatlarining har bir juftiga μ tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda μ **ikkita** ξ **va** η **tasodifiy argumentning funksiyasi** deyiladi va bunday yoziladi: $\mu = \varphi(\xi,\eta)$. Agar ξ va η diskret erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\mu = \xi + \eta$ funksiyaning taqsimotini topish uchun μ ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topish lozim, buning uchun ξ ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini η ning mumkin bo'lgan qiymatlarining hammasi bilan qo'shib chiqish lozim. μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi.

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi + \eta = \xi_i + \eta_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

Huddi shuningdek $\mu = \xi \cdot \eta$ funksiyaning ham taqsimoti topiladi. Bunda $\mu_i = \xi_i \cdot \eta_i$ lar μ ning mumkin bo'lgan har bir qiymati bo'ladi va μ ning ehtimoli quyidagi tenglikdan topiladi:

$$P(\mu = \mu_i) = P(\xi \cdot \eta = \xi_i \cdot \eta_i) = P(\xi = \xi_i) \cdot P(\eta = \eta_i)$$

29-§. Katta sonlar qonuni

Ehtimollik nazariyasida "katta sonlar qonuni" deyilganda tor ma'noda bir qator matematik teoremalar tushuniladi va ularning har birida katta sondagi tajribalar o'rtacha xarakteristikalarning u yoki bu shartlarda biror ma'lum o'zgarmas miqdorlarga yaqinlashish fakti belgilanadi. Katta sonlar qonuni ehtimollik nazariyasining amaliyotga tatbiqlari uchun nazariy asos bo'ladi.

Bernulli teoremasi: S tajribada A hodisa $p = P(A)$ ehtimol bilan ro'y beradi. S tajriba o'zaro bog'liq bo'lmagan holda n marta takrorlanganda A hodisa m marta ro‘y bersin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bu teoremadan ko‘rinib turibdiki, A hodisaning ro‘y berish chastotasi $\frac{m}{n}$ bizga katta n larda A hodisaning ro‘y berish ehtimolini berar ekan. Ko‘pincha amaliyotda quyidagi Chebishev tengsizligi ishlatiladi.

Chebishev teoremasi. *Chekli dispersiyaga ega bo‘lgan istalgan ξ tasodifiy miqdor uchun har bir $\varepsilon > 0$ da*

$$P\left(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

30-§. Markaziy limit teoremasi

Markaziy limit teoremalar tasodifiy miqdorlar yig‘indilari ketma-ketliklarining qanday shartlarda normal taqsimotga bo‘ysunishini aniqlab beruvchi teoremalardir. Ular bir-birlaridan yig‘indini hosil qiluvchi tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlariga qo‘yiladigan shartlar bilan farq qiladi. Biz markaziy limit teoremasining eng sodda shaklini ta’riflaymiz, u qo‘shiluvchilar bir xil taqsimlangan hol uchun to‘g‘ridir.

Teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning matematik kutilishi m va dispersiyasi σ^2 bo‘lgan bir xil taqsimot qonuniga ega bo‘lsa, u holda n cheksiz ortganida

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

ning taqsimot qonuni matematik kutilishi 0 va dispersiyasi 1 bo‘lgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Muavr- Laplasning lokal teoremasi bu teoremaning xususiy holi ekanini aytib o‘tamiz.

II bob
MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

1-§. Matematik statistika masalasi

Ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni o'rganish, kuzatishlar natijalari statistik ko'rsatkichlarni o'rganishga asoslangan.

Matematik statistikaning birinchi masalasi – statistik ko'rsatkichlarni yig'ish va gruppalash metodlarini ko'rsatish;

Matematik statistikaning ikkinchi masalasi – tadqiqotning maqsadiga bog'liq ravishda statistik ko'rsatkichlarni analiz qiluvchi usullarni ishlab chiqish.

Shunday qilib, matematik statistikaning asosiy masalasi – statistik ko'rsatkichlarini yig'ish va ularni ilmiy va amaliy xulosalar qilish uchun ishlab chiqishdir.

2-§. Bosh va tanlanma to'plam

Bir jinsli obyektlar to'plamini, bu obyektlarni xarakterlovchi ularning miqdoriy yoki sifat belgilariga nisbatan o'rganish talab qilingan bo'lsin. Agar bu tekshirish obyektlarni yo'q qilish yoki moddiy zarar keltirish bilan bog'langan bo'lsa, bu holda barcha obyektlar to'plamidan tasodifiy ravishda chekli sondagilari tanlanib, ular tekshiriladi.

Tanlanma to'plam deb yoki oddiygina **tanlanma** deb, tasodifiy ravishda tanlangan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma olingan obyektlar to'plamiga aytiladi. **To'plamning (bosh yoki tanlanma) hajmi** deb bu to'plamdagi obyektlar soniga aytiladi.

Tanlanmalar hosil qilinish usuli bo'yicha takror va takrormas tanlanmalarga bo'linadi.

Agar tanlanmaning elementlari bosh to'plamdan tanlangan elementni (keyingisini olishdan oldin) yana bosh to'plamga qaytarish yo'li bilan ajratilsa, bunday tanlanma **takror tanlanma** deyiladi. Agar tanlanma elementlarini bosh to'plamga qaytarmasdan uning elementlari bosh to'plamdan ajratilsa, bunday tanlanma **takrormas tanlanma** deyiladi.

3-§. Tanlash usullari

Tajribada tanlashning turli usullari qo'llaniladi. Bu usullarni asosan ikki turga bo'lish mumkin:

1. Bosh tanlanmani qismlarga ajratish talab etilmaydigan tanlash. Bularga:

a) oddiy tasodifiy takror tanlash;

b) oddiy tasodifiy takrormas tanlash kiradi.

2. Bosh tanlanmani qismlarga bo'lib tanlash usuli.

Bularga:

a) tipik tanlash;

b) mexanik tanlash;

d) seriyali tanlash.

Tipik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar barcha bosh to'plamdan emas, ularning har bir "tipik" qismlaridan tanlanadi.

Mexanik tanlash usuli deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to'plam "mexanik" ravishda tanlanmaga nechta obyekt kerak bo'lsa, shuncha qismlarga bo'linadi va har bir qismdan bittadan obyekt olinadi.

Seriyali tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar bosh to'plamdan bittadan emas "seriyalar" bilan tanlanib yoppasiga tekshiriladi.

4-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti

X (diskret yoki uzluksiz) belgining miqdoriy xususiyatini o'rganish uchun bosh to'plamdan n hajmli tanlanma olingan bo'lsin, bunda X_1 $-n_1$ marta, X_2 $-n_2$ marta va hakozo X_k $-n_k$ marta uchrasin. $\sum n_i = n$ – tanlanmaning hajmi bo'ladi. Kuzatilgan X_i qiymat varianta deb ataladi va variantalarning o'sib borish tartibda yozilgan ketma-ketligi variasion qator deyiladi.

Kuzatmalarning soni n_i ga chastota deyiladi yoki variantalar qiymatlarining takrorlanish soni deyiladi. Chastotaning tanlanma hajmiga nisbati

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastota deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, belgining turli qiymatlari bilan ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalaridan tuzilgan quyidagi jadvalga aytiladi:

$$\left.\begin{array}{l} X_i : X_1, X_2, X_3, \ldots X_k \\ W_i : W_1, W_2, W_3, \ldots W_k \end{array}\right|$$

5-§. Empirik taqsimot funksiyasi

Miqdoriy belgi X chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

n_x - belgining x – dan kichik qiymatlari soni

n – tanlanma hajmi.

$X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ bo'ladi. Agar x – o'zgarsa, umuman aytganda, nisbiy chastota ham o'zgaradi, ya'ni $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik (tajriba) yo'li bilan topilgani uchun uni **empirik funksiya** deyiladi. **Empirik taqsimot funksiyasi** deb, (yoki tanlanmaning taqsimot funksiyasi deb) shunday $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladiki, u har bir x uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi. Ta'rifga ko'ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Bu yerda n_x — x dan kichik bo'lgan variantlar soni, n — tanlanmaning hajmi. Bosh tanlanmaning taqsimoti $F(x)$ — funksiyaga **nazariy taqsimot funksiyasi** deyiladi. Empirik va nazariy taqsimot funksiyasi orasidagi farq shundan iboratki, nazariy taqsimot funksiya $\{X < x\}$ hodisaning ehtimolini ifodalasa, empirik taqsimot funksiyasi shu hodisaning nisbiy chastotasini ifodalaydi.

Bernulli teoremasidan $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi $F_n^*(x)$ ehtimol bo'yicha shu hodisaning ehtimoli bo'lgan $F(x)$ nazariy taqsimot funksiyasiga intilishi kelib chiqadi. Boshqa so'z bilan aytganda $F_n^*(x)$ bilan $F(x)$ bir-biridan yetarlicha katta n larda kam farq qiladi.

Yuqorida aytilganlardan kelib chiqadiki, bosh to'plamning nazariy taqsimot funksiyasini empirik taqsimot funksiyasi bilan yetarlicha aniqlikda almashtirish mumkin ekan.

Misol. Berilgan tanlanma taqsimotga ko'ra empirik funksiya tuzing:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Yechish.

$$n = 12 + 18 + 30 = 60$$

Tanlanmaning hajmi $n = 60$ ga teng. Eng kichik varianta 2 ga teng bo'lgani uchun, $x \leq 2$ qiymatlarda $F_n^*(x) = 0$ bo'ladi. Belgining $X < 6$ qiymatlari, chunonchi $x_1 = 2$ qiymati 12 marta kuzatilgan, demak, $2 < x \leq 6$ bo'lganda

$$F_n^*(x) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2$$

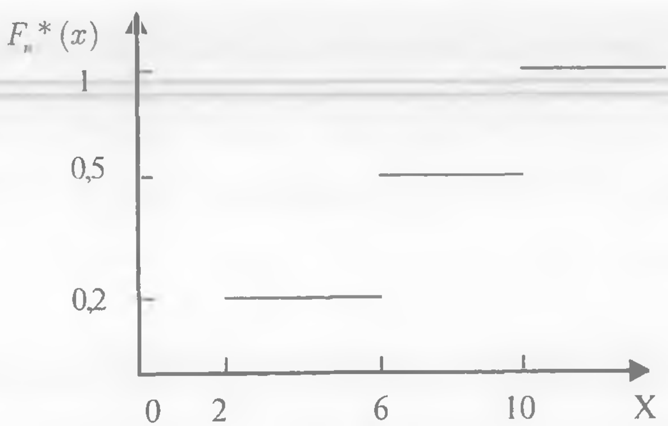
Belgining $X < 10$ qiymatlari, chunonchi $x_1 = 2$ va $x_2 = 6$ qiymatlari 12+18=30 marta kuzatilgan, demak, $6 < x \leq 10$ bo'lganda $F_n^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5$.

Belgining $x_3 = 10$ qiymati eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 10$ bo'lganda $F_n^*(x) = 1$ ga teng bo'ladi.

Izlanayotgan empirik funksiyani yozamiz:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0.2, & 2 < x \leq 6 \\ 0.5, & 6 < x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 4-rasmda berilgan.



4-rasm

6-§. Poligon va gistogramma

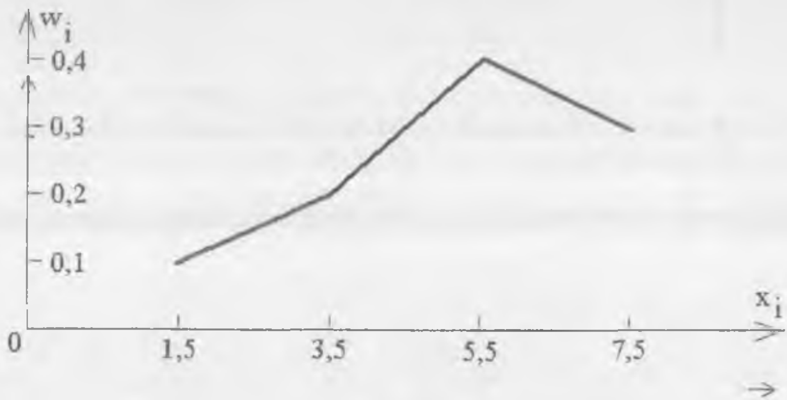
X belgining diskret taqsimoti.

Chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanmaning variantalari va n_i – ularga mos chastotalardir.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ldots (x_k, w_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanmaning variantalari va w_i – ularga mos nisbiy chastotalar.

Misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
w_i	0,1	0,2	0,4	0,3



5-rasm

Yechish. Absissalar o'qida x_i variantalarni, koordinatalar o'qida esa mos keluvchi w_i nisbiy chastotalarni qo'yamiz; (x_i, w_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan nisbiy chastotalar poligonini hosil qilamiz (5-rasm).

***X* belgining uzluksiz taqsimoti.**

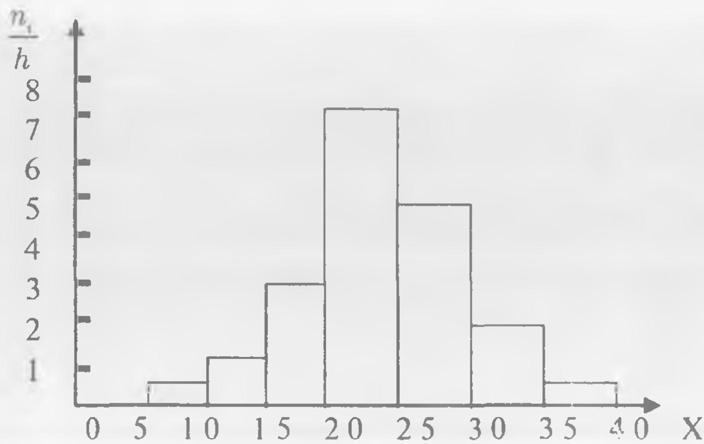
Belgi uzluksiz taqsimlangan holda belgining barcha kuzatilgan qiymatlari yotgan intervalning uzunligi h bo'lgan qator qismiy intervallarga bo'linadi va i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig'indisi n_i topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligiga) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi. **Nisbiy chastotalar gistogrammasi** deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval tartib raqami	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i-1}$	n_i	n_i/h
1	5–10	4	0,8
2	10–15	6	1,2
3	15–20	16	3,2
4	20–25	36	7,2
5	25–30	24	4,8
6	30–35	10	2,0
7	35–40	4	0,8

Yechish. Abssissalar o'qida h = 5 uzunlikdagi berilgan intervallarni yasaymiz. Bu intervallarning ustida abssissalar o'qiga parallel va undan tegishli



6-rasm.

chastota zichliklari $\frac{n_i}{h}$ ga teng masofada bo'lgan kesmalar o'tkazamiz.

Masalan, (5;10) intervalning ustida abssissalar o'qiga parallel qilib, $\frac{n_i}{h} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ masofada kesma yasaymiz. Qolgan kesmalar ham shunga o'xshash yasaladi. Izlanayotgan chastotalar gistogrammasi 6-rasmda tasvirlangan.

7-§. Taqsimot parametrlarining statistik baholari

Bosh tanlanmaning miqdoriy belgisini o'rganish talab etilgan bo'lsin. Faraz qilamizki, nazariy mulohazalarga asosan belgi taqsimoti aniqlangan bo'lsin. Tabiiy ravishda taqsimotni xarakterlovchi parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Masalan, normal taqsimot uchun bu parametrlar matematik kutilma bilan dispersiyadir. Odatda biz faqatgina tanlanmaning berilishiga ega bo'lamiz. Masalan, tanlanmaning berilishi – miqdoriy belgining qiymatlari $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ lar- n-ta kuzatishlar natijasi bo'lsin. U holda baholanayotgan parametr shu miqdoriy belgining qiymatlari $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ lar orqali ifodalanadi. Ya'ni parametrning statistik bahosi $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, x_3, ... x_n)$ n o'zgaruvchili funksiya bo'ladi. Statistik baho o'zi baholanayotgan parametrlarga yetarlicha yaqin bo'lishi uchun ma'lum talabalarni bajarishi kerak.

Aytaylik $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ statistik baho berilgan nazariy taqsimotning noma'lum parametr Θ ning bahosi bo'lsin. Θ^* ni har bir n hajmli tanlanmada qiymati Θ_i^* ga teng tasodifiy miqdor sifatida qarash mumkin.

Siljimagan baho deb, tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistik bahoga aytiladi. YA'ni $M(\Theta^*) = \Theta$. Siljigan baho deb, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan bahoga aytiladi.

Effektli baho deb, berilgan n hajmli tanlanma uchun eng kichik dispersiyali statistik bahoga aytiladi (yetarlicha katta n lar uchun).

Salmoqli baho deb $n \to \infty$ bo'lganda baholanayotgan bahoga ehtimol bo'yicha yaqinlashuvchi statistik bahoga aytiladi, ya'ni:

$$p(\omega : |\Theta^* - \Theta| > \varepsilon) = 0$$

8-§. Bosh o'rtacha qiymat

$\overline{x}_b$ **bosh o'rtacha qiymat** deb, bosh to'plam belgisi qiymatlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi. Agar bosh to'plam hajmi N ga teng bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_b = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}.$$

Agar x_i ning chastotasi N_i bo'lsa $\overline{x}_b = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}{N}$;

$$N_1 + \ldots + N_k = N.$$

Bosh o'rtacha qiymat bosh to'plam miqdoriy belgisi X – ning nazariy matematik kutilmasidir:

$$\overline{x}_b = M(X)$$

9-§. Tanlanma o'rtacha qiymat

Bosh to'plam X belgisining miqdoriy xususiyatini o'rganish uchun bosh to'plamdan n hajmli $x_1, x_2, x_3, ... x_n$ tanlanma olingan bo'lsin.

Tanlanma o'rtacha qiymat deb, tanlanma to'plam belgisining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi va $\overline{x}_t$ bilan belgilanadi:

$$\overline{x}_t = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Agar x_i ning chastotasi n_i ga teng bo'lsa, u holda

$$\overline{x}_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}; \quad n_1 + ... + n_i = n$$

Bosh o'rtacha qiymatning bahosi sifatida tanlanma o'rtacha qiymat qabul qilinadi. $\overline{x}_t$ – bu siljimagan, salmoqli baho.

10-§. Bosh dispersiya

Bosh dispersiya deb, bosh to'plami belgisi qiymatlari bilan bosh to'plam o'rtacha qiymati $\overline{x}_b$ orasidagi kvadratik chetlanishlarining o'rta arifmetigiga aytiladi.

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_б)^2}{N}$$

Bosh dispersiya bosh to'plamning miqdoriy belgisi X ning nazariy dispersiyasidir:

$$D_b = D(X)$$

Agarda x_i lar N_i chastotalarga ega bo'lsa, u holda

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot (x_i - \overline{x}_б)^2}{N}, \text{ bunda } N_1 + N_2 + ... + N_k = N$$

Misol. Bosh to'plam quyidagi taqsimot jadvali bilan berilgan:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Bosh dispersiya topilsin.

Yechish. Bosh o'rtacha qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_b = \frac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 3}{8 + 9 + 10 + 3} = \frac{120}{30} = 4$$

Bosh dispersiyani topamiz:

$$D_b = \frac{8 \cdot (2-4)^2 + 9 \cdot (4-4)^2 + 10 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{30} = 1.8$$

Bosh o'rtacha kvadratik chetlashish deb, bosh dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi.

$$\sigma_b = \sqrt{D_b}$$

11-§. Tanlanma dispersiya

Bosh to'plam miqdoriy belgisi X ning kuzatilgan qiymatlari o'zining tanlanma o'rtacha qiymati $\bar{x}_t$ atrofida tarqoqlik xarakteristikasi sifatida tanlanma dispersiya kiritiladi. **Tanlanma dispersiya** deb, X belgining kuzatilgan qiymatlari bilan tanlanma o'rtacha qiymati orasidagi kvadratik chetlanishlarning o'rtacha arifmetigiga aytiladi.

$$D_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_t)^2}{n}$$

Agarda x_i lar n_i chastotalarga ega bo'lsa, u holda:

$$D_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_t)^2}{n},$$

bunda $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Teorema. Belgining dispersiyasi shu belgi qiymatlari kvadratlari o‘rtacha qiymati bilan belgining o‘rtacha qiymati ayirmasiga teng:

$$DX = \overline{x}^2 - [\overline{x}]^2$$

Bu yerda: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$; $\overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n}$.

Bosh dispersiyani tuzatilgan tanlanma dispersiya bilan quyidagicha baholanadi.

Bizda quyidagi tanlanma berilgan bo‘lsin:

$$X: \quad x_1, x_2, \dots x_k$$
$$n: \quad n_1, n_2, \dots n_k$$

va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ tanlanmaning hajmi bo‘lsin. Tanlanmaning berilishiga qarab noma’lum bosh dispersiya D_b ni baholash (taxminiy topish) talab qilingan bo‘lsin. Agarda D_b bosh dispersiya bahosi sifatida D_t tanlanma dispersiyani olsak, u holda bu baho sistematik xatoliklarga olib keladi, chunki D_t tanlanma dispersiya bosh dispersiya D_b uchun siljigan bahodir. Ya’ni:

$$M(D_t) = \frac{n-1}{n} D_b$$

Bu oson tuzatiladi. Buning uchun D_t - tanlanma dispersiyani $\frac{n}{n-1}$ ga ko‘paytirish yetarlidir. Shunday qilib biz “tuzatilgan” dispersiya hosil qilamiz va uni s^2 bilan belgilaymiz:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_i)^2}{n-1}$$

Endi s^2- tuzatilgan dispersiya D_b bosh dispersiya uchun siljimagan baho bo‘ladi:

$$M(s^2)=M\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x}_t)^2\right)\overset{(1)}{=}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(D(x_i-\overline{x}_t)+M^2(x_i-\overline{x}_t)\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}D\left[(1-\frac{1}{n})x_k-\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}x_i\right]+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}[Mx_k-M\overline{x}_t]^2\overset{(2)}{=}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2Dx_k+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}Dx_i\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2DX+\frac{n-1}{n^2}DX\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot n\cdot\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2D_b+\frac{n-1}{n^2}D_b\right]=D_b\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)=D_b.$$

(1): $D\eta=M\eta^2-M^2\eta$ dan $M\eta^2=D\eta+M^2\eta$ kelib chiqadi va uni $\eta=x_k-\overline{x}_t$ ga qo'llaymiz.

(2): $Mx_k=M\overline{x}_b$ va $M\overline{x}_t=M\overline{x}_b$ bo'lgani uchun $Mx_k-M\overline{x}_t=0$ bo'ladi.

12-§. Nuqtaviy baholar, ishonchli ehtimol, ishonchli interval

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniqlanadigan statistik bahoga aytiladi. Yuqorida ko'rilgan barcha baholar nuqtaviy baholardir. Agar tanlanmaning hajmi kichik bo'lsa nuqtaviy baho o'zi baholayotgan parametrdan anchagina farq qilishi mumkin, ya'ni qo'pol xatoliklarga yo'l qo'yiladi. Shu sababdan kichik hajmli tanlanmalar uchun intervallik baholardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Intervallik baho deb, baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning uchlari bo'lgan ikkita son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

Intervallik baholar bahoning aniqligini va ishonchini aniqlashni ta'minlaydi.

Faraz qilamiz, tanlanma berilishiga qarab topilgan statistik xarakteristika Θ^*, noma'lum parametr Θ ning bahosi bo'lsin.

Θ- o'zgarmas son deb hisoblaymiz. Agar $|\Theta-\Theta^*|$ qiymat qanchalik kichik bo'lsa, shuncha Θ^* statistik baho Θ parametrni aniq baholaydi. Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $|.\Theta-\Theta^*|<\delta$ bo'lsa, shunchalik baho aniq bo'ladi. Shunday qilib, $\delta>0$ son bahoning aniqligini ifodalaydi. Ammo statistik metodlar Θ^* bahoning $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ tengsizlikni muqarrar qanoatlantirishini tasdiq qilishga ojizlik qiladi. Faqat bu tengsizlik bajarilishining ehtimoli γ haqida gapirish mumkin.

Θ^* **statistik bahoning ishonchli ehtimoli deb,** $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoliga aytiladi.

Odatda bahoning ishonchli qiymati deb oldindan birga yaqin son olinadi. Ko'pincha 0.95, 0.99, va 0. 999 ga teng ishonch qiymatlari beriladi.

Faraz qilamiz $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ tengsizlikning ehtimoli γ ga teng bo'lsin, ya'ni

$$P(|\Theta-\Theta^*|<\delta)=\gamma \qquad (1)$$

Endi $|\Theta-\Theta^*|<\delta$ tengsizlikni unga ekvivalent bo'lgan qo'sh tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta<\Theta-\Theta^*<\delta \text{ yoki } \Theta^*-\delta<\Theta<\delta+\Theta^*.$$

Natijada (1) o'rniga quyidagini olamiz:

$$P(\Theta^*-\delta<\Theta<\delta+\Theta^*)=\gamma$$

Bu tenglikni quyidagicha tushinish mumkin: $(\Theta^*-\delta;\ \delta+\Theta^*)$ interval noma'lum parametr Θ ni o'z ichiga olishining (qoplashining) ehtimoli γ ga teng. **Ishonchli interval** $(\Theta^*-\delta;\ \delta+\Theta^*)$ deb noma'lum parametr Θ ni berilgan γ ishonch bilan qoplaydigan $(\Theta^*-\delta;\ \delta+\Theta^*)$ intervalga aytiladi.

13-§. Normal taqsimot parametrlari uchun ishonchli baholar

Asosiy masalaning qo'yilishi. Berilgan o'zgarmas a sonini aniqlash maqsadida n-ta o'zaro bog'liqsiz o'lchashlar o'tkazilgan bo'lsin. Bu o'lchashlar xatoliklari Z tasodifiy miqdor bo'ladi. Ihtiyoriy o'lchashlar natijalarida turli xil turdagi xatoliklarga yo'l qo'yiladi. Bular sistematik, tasodifiy va qo'pol xatoliklardan iborat bo'ladi.

1. Sistematik xatoliklar. Sistematik xatoliklarga birinchi navbatda asboblar xatoliklari kiradi. Ya'ni o'lchashlar uchun ishlatiladigan asboblarni ishlab chiqishda aniqlikni yuz foyiz ta'minlash mumkin emas. Oddiy asboblar xatoliklariga asbobdagi o'lchash shkalalarini xatoliklar bilan belgilash yoki hisob boshini noto'g'ri belgilashlar kiradi. Bu xatoliklar tufayli o'lchash natijalari aniq qiymatdan har doim bir xil ishorali qiymatga farq qiladi. Shu sababdan ham bu xatoliklar sistematik xatoliklar deb ataladi.

2. Tasodifiy xatoliklar. Tasodifiy xatoliklarga asosan o'lchashlar natijalariga oldindan bilib bo'lmaydirgan tasodifiy fizik sabablar ta'siri ostida yo'l qo'yiladigan xatoliklar kiradi.

Xatoliklar nazariyasi deganda biz tasodifiy xatoliklarni o'rganadigan nazariyani ko'zda tutamiz. Xatoliklar nazariyasi qurish uchun ehtimollar nazariyasini ishlatiladi.

3. Qo'pol xatoliklar. O'lchashlar natijalarini qayta ishlash jarayonida tashqi ta'sirlar yoki mumkin bo'lgan chetlanishlar ta'sirida shunday xatoliklarga yo'l qo'yish mumkinki, o'lchash natijasi katta xatolik bilan aniqlanadi. Eng oddiy mumkin bo'lgan chetlanishlardan biri shunday bo'lishi mumkin: o'lchov o'tkazuvchi asbobdagi o'lchov natijasi 20 o'rniga jadvalga 30 soni yoziladi. Qo'pol xatolikka olib keluvchi eng oddiy tashqi sabablardan biri, kuzatuvchining o'zi sezmagan holda yo'l qo'ygan hatoligidir. Qo'pol xatolikning borligini ko'rsatuvchi belgilardan biri, bir biridan kam farq qiladigan o'lchash natijalari orasida ulardan tubdan farq qiladigan natijalarning mavjudligidir.

Umuman olganda, o'lchash natijalarining tasodifiy xatoliklari turlicha taqsimot qonunlariga bo'ysinishi mumkin. Lekin amalda juda ko'p hollarda tasodifiy xatoliklar normal taqsimot qonuniga boysinadi.

Gauss postuloti. O'lchash haqiqiy kattaligining eng ehtimolli qiymati o'lchash natijalarining o'rta arifetigiga teng.

Teorema. Agar tasodifiy xatoliklar Gauss postulotini qanoatlantirsa, u holda tasodifiy xatoliklarining taqsimot qonuni normal qonun bo'ladi.

Shunday qilib, agar Gauss postulotini qabul qilinsa, tasodifiy xatoliklar normal qonun bilan taqsimlangan bo'ladi. Xuddi shunday buning teskarisi ham o'rinli: Agar tasodifiy xatoliklar normal taqsimot bilan taqsimlangan bo'lsa, u holda o'lchash haqiqiy kattaligining eng ehtimolli qiymati o'lchash natijalarining o'rta arifmetigiga teng.

Shuni alohida qayd qilish joizki, bu teoremadan tasodifiy xatoliklarning har doim ham normal taqsimot bilan taqsimlanganligi kelib chiqmaydi. Ba'zi bir tip o'lchashlarda (ayniqsa, kam sondagi o'lchashlarda) Gauss postuloti bajarilmaydi va bu hollarda boshqa taqsimot qonunlarini qarashga to'g'ri keladi.

Lyapunovning markaziy limit teoremasi shunday umumiy yetarli shartlarni berganki, bu shartlar bajarilganda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi asimptotik normal qonunga bo'ysinadi.

Bu shartlar asosan shunga olib keladiki, markazlashtirilgan qo'shiluvchilar orasida qolgan markazlashtirilgan qo'shiluvchilardan tubdan farq qiluvchilari yo'q.

Albatta, $MX_к = a_к$ matematik kutilmaning mavjudligi talab qilinadi. Bundan tashqari, markazlashtirilgan tasodifiy miqdor kvadratining matematik kutilmasi mavjudligi ham talab qilinadi.

Ko'rsatilgan shartlarda $X_1+X_2+...+X_n$ yig'indi $a = a_1+a_2+...+a_n$ va $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)^2}$ parametrli asimptotik normal qonunga ega bo'ladi.

Agar o'lchash natijalari sistematik xatoliklardan xoli bo'lsa, u holda xatolikning ta'rifidan $(Z=X-a)$ o'lchash natijalari $X=a+Z$, a va σ parametrli normal qonunga bo'ysinishligi kelib chiqadi. Demak, o'lchash natijalarining taqsimot markazi o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $MX=a$. (Bu esa o'lchash natijasida sistematik xatoliklarning yo'qligini bildiradi.)

O‘lchashlarning birinchi asosiy masalasi — o‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini baholash, matematik tilda aytganda, normal taqsimotning markazini, ya’ni matematik kutilmasini baholashdir. Normal taqsimot markazining bahosi deb, quyidagi kattalikni olishadi:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

O‘lchashlarning ikkinchi asosiy masalasi — o‘lchash aniqligini (o‘lchash asbobining aniqligini) baholashdir. Matematik tilda bu masala normal taqsimotning σ parametrini yoki uning dispersiyasi σ^2 ni baholashni bildiradi. Dispersiya yoki o‘lchash aniqligining bahosi sifatida quyidagi kattalikni olishadi:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Shunday qilib, ko‘rsatilgan ikki asosiy masala normal taqsimotning ikki parametrini baholashga keltiriladi.

14-§. Taqsimot markazining ishonchli baholari

Taqsimot markazining bahosini biz ikki holda o‘rganamiz: σ^2 ma’lum bo‘lgan holda (o‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatining bahosini o‘lchash aniqligi ma’lum bo‘lgan holda) va σ^2 noma’lum bo‘lgan holda.

1. Agar dispersiya σ^2 ma’lum bo‘lsa, u holda o‘rta arifmetik qiymat $\bar{x}$ ning a va $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega bo‘lishligidan foydalanish mumkin. Bu esa $Z = \frac{\bar{x} - a}{\sigma}\sqrt{n}$ kattalik normallashtirilgan N(0; 1) normal taqsimotga ega ekanligini bildirib, $\bar{x}$ ni dispersiya oldindan ma’lum bo‘lgan holda baholash imkoniyatini beradi.

$|\bar{x} - a|$ ning ixtiyoriy chetlanishi ehtimolini quyidagi formula yordamida aniq hisoblash mumkin:

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right|<t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\Phi(t)$$

Aniq bir ishonchli ehtimollik δ ni berib, biz $t(\delta)$ ning qiymatini $\Phi(t)=\delta$ tenglamadan jadval yordamida topamiz va ishonchli bahoni δ ishonchli ehtimolligi bilan topamiz:

$$\left|\bar{x}-a\right|<t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bu bahoi odatda quyidagi ko‘rinishda yozishadi:

$$\bar{x}-t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Masalan, $\delta=0,99$ ishonchli ehtimol bilan quyidagi baho o‘rinli:

$$\bar{x}-2,576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+2,576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\delta=0,997$ ishonchli ehtimol bilan esa quyidagi baho o‘rinlidir:

$$\bar{x}-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(uch sigma qoyidasi).

Endi biz tasodifiy xatoliklarning normal taqsimlanganligiga asoslangan holda qo‘pol xatoliklarni yo‘qatish usulini ko‘rib o‘tamiz. Faraz qilamiz, bir nechta o‘lchashlar natijasida biz o‘lchanayotgan kattalikning taqribiy qiymati $\bar{x}$ va o‘rtacha kvadratik xatolik σ ni topdik. Har bir o‘lchash hatoligining taqribiy qiymatini aniqlaymiz:

$$\varepsilon_k=x_k-\bar{x}\approx\delta_k.$$

Normal taqsimotning xossasiga asosan:

$$P(\left|\delta\right|<3\sigma)=0,9973.$$

Demak:

$$P(\left|\delta\right|>3\sigma)=0,0027.$$

Odatda xatolikning absolyut qiymati 3σ dan oshishining ehtimoli juda ham kam deb hisoblashadi. Shuning uchun ham agar ε_k lardan birortasining moduli 3σ dan oshgan bo‘lsa, u holda bu o‘lchash qo‘pol xatolik bilan o‘tkazilgan hisoblanib, uning natijasini tashlab yuboriladi. Ba'zi bir o'lchash natijalari shu usulda tashlab yuborilgandan so'ng $\bar{x}$ va σ larning taqribiy qiymatlari qaytadan hisoblanishi kerak.

2. Agar σ^2 dispersiya noma'lum bo'lsa, u holda Styudent taqsimotidan foydalanish mumkin. Uning uchun empirik dispersiyani qaraymiz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

$\bar{x}$ miqdor a va $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega bo'lganligidan $\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ miqdor 0 va 1 parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi. Ularga bo'g'liq bo'lmagan holda $u = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ miqdor χ^2_{n-1} - hi-kvadrat taqsimotga ega bo'ladi.

$T = \frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} : \sqrt{\frac{u}{n-1}} = \frac{\bar{x}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ kattalik esa Styudent taqsimotiga ega bo'lib, bu taqsimot uchun ham zichlik funksiyasining ko'rinishi mavjud bo'lib, uning qiymatlari jadvallari tuzilgan.

Bu nisbat σ ga bog'liq bo'lmaganligi uchun u taqsimotning markazi bahosini qurish imkonini beradi. Buning uchun Styudent taqsimotining jadvali yordamida berilgan

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t(\gamma, n-1)\right) = 2\int_0^t p_T^k(t)dt = \gamma$$

ehtimollikka ko'ra t ning qiymati topiladi. Bu yerda

$$p_T^k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}(1+\frac{t^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad (-\infty < t < \infty),$$

$$\lim_{k\to\infty} P_T^k(t) = \varphi_{0,1}(t).$$

Bu esa quyidagi ishonchli bahoni beradi:

$$\left|\frac{\bar{x}-a}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < t(\gamma, n-1).$$

Ya'ni

$$\bar{x} - t(\gamma, n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t(\gamma, n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Bu yerda t faqatgina γ dan emas, balki tajribalar soniga ham bog'liq. Bu narsa kam sonli o'lchashlarda sezilarlidir. Masalan: $n=5$, $k=4$, $\gamma=0{,}99$ bo'lsa

$$\bar{x} - 4{,}604\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 4{,}604\frac{s}{\sqrt{n}}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, o'lchashlar soni kamayganda ishonchli interval kattalashadi (bir hil ishonchli ehtimollikda). Agar intervalni o'zgartirmasak, o'lchashlar soni kamayganda ularning ishonchli ehtimolligi kamayadi. Hususan

$$\bar{x} - 3\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 3\frac{s}{\sqrt{n}}$$

ko'rinishdagi uch sigma qoidasi, kam sonli o'lchashlarda, 0,997 dan kam bo'lgan ishonchli ehtimollikka ega bo'ladi.

n=14 bo'lganda $\gamma < 0{,}99$,

n=8 bo'lganda $\gamma < 0{,}98$,

n=5 bo'lganda $\gamma < 0{,}96$.

Styudent taqsimotini tajribalar soni katta bo'lganda ishlatish tavsiya etilmaydi, chunki n=20 da u normal taqsimotdan juda ham kam farq qiladi.

15-§. Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ning bahosi uchun ishonchli intervallar

Bosh to'plamning *X*-sonli belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Tuzatilgan tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish s orqali noma'lum bosh o'rtacha kvadratik chelanish σ ni baholash talab etilgan bo'lsin. Oldimizga γ ishonchli ehtimollik bilan σ parametrni qoplaydigan ishonchli intervalni topish masalasini qo'yamiz:

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab etamiz. Bu munosabat quyidagiga teng kuchli:

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

Mavjud jadvallardan foydalanish mumkin bo'lishligi uchun quyidagi

$$s - \delta < \sigma < s + \delta$$

qo'sh tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan quyidagi tengsizlikka almashtiramiz:

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

$\frac{\delta}{s} = q$ deb belgilab

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q) \qquad (1)$$

tengsizlikka kelamiz. q ni topish uchun quyidagi "xi" tasodifiy miqdorini kiritamiz: $\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1}$; n-tanlanma hajmi. Isbot qilinganki, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ miqdor xi-kvadrat qonun bilan taqsimlangan, shuning uchun ham uning kvadrat ildizini χ bilan belgilaymiz. χ taqsimotining zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$p(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (2)$$

Bu yerda Γ – gamma funksiya. Ko'rinib turibdiki, bu taqsimot baholanayotgan σ parametrga bog'liq bo'lmay, faqatgina tanlanma hajmi n ga bog'liq. (1) tengsizlikni shunday almashtiramizki, u quyidagi ko'rinishga kelsin:

$$\chi_1 < \chi < \chi_2.$$

Bu tengsizlik bajarilishining ehtimoli γ ga teng bo'lgani uchun

$$P(\chi_1 < \chi < \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} p(\chi, n) d\chi = \gamma.$$

$q < 1$ deb faraz qilib, (1) tengsizlikni boshqa ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)}.$$

Bu tengsizlikni $s\sqrt{n-1}$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q},$$

yoki

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Bu tengsizlik bajarilishi ehtimoli yoki unga teng kuchli bo'lgan (1) tengsizlik bajarilishi ehtimoli quyidagicha:

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} p(\chi, n) d\chi = \gamma.$$

Bu tenglikdan berilgan n va γ larga ko'ra q topiladi. Amalda q ni topishda jadvaldan foydalaniladi. Tanlanmadan s ni hisoblab va jadvaldan q ni topib, izlanayotgan (1) ishonchli interval, ya'ni σ ni γ ishonchli ehtimol bilan qoplovchi

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$$

Interval topiladi.

16-§. Statistik gipotezalarni tekshirish

Agar bosh to‘plam taqsimoti qonuni noma’lum bo‘lib, lekin uning ko‘rinishini $F(x)$ ekanligini taxmin qilishga asos bo‘lsa, u holda quyidagi gipoteza (faraz) ni oldinga surishadi: bosh to‘plam $F(x)$ qonuni bo‘yicha taqsimlangan.

Boshqacha hol ham bo‘lishi mumkin: taqsimot qonuni ma’lum, lekin uning parametrlari noma’lum. Agar noma’lum parametr Θ ni aniq bir qiymat Θ_0 ga tengligini faraz qilishga asos bo‘lsa, quyidagi gipotezani oldinga surishadi: $\Theta = \Theta_0$.

Yana boshqacha gipotezalarni oldinga surish mumkin: ikki yoki bir necha taqsimotlarning parametrlari tengligi, tanlanmaning bog‘liqsizligi va boshqalar.

17-§. Statistik gipoteza. Nolinchi, konkurent (alternativ), oddiy va murakkab gipotezalar

Statistik gipoteza deb, noma’lum taqsimotning ko‘rinishi yoki ma’lum taqsimotlarning parametrlari haqidagi gipotezalarga aytiladi.

Masalan: 1) bosh to‘plam Puasson qonuniga asosan taqsimlangan; 2) ikki normal taqsimlangan to‘plamning dispersiyalari o‘zaro teng degan farazlarni oldinga suruvchi gipotezalar statistik gipotezalardir.

Ammo “2010-yilda urush bo‘lmaydi” degan gipoteza statistik gipoteza emas. Oldinga surilgan gipoteza bilan bir qatorda unga qarama-qarshi (zid) gipoteza ham qaraladi. Agar F(x) o‘rinli bo‘lmasa, u holda uning aksi o‘rinlidir. Nolinchi (asosiy) gipoteza deb, qo‘yilgan H_0 gipotezaga aytiladi. **Konkurent (alternativ)** gipoteza deb, nolinchi gipotezaga zid H_1 gipotezaga aytiladi.

Misol.

$H_0 : M(x) = a = 10,\quad \Phi(x)$ taqsimot uchun,

$H_1 : M(x) = a \neq 10,\quad \Phi(x)$ taqsimot uchun.

Sodda gipoteza deb, yolg'iz bir farazdan tashkil topgan gipotezaga aytiladi. Masalan: $H_0 : \lambda = 5$, bu yerda λ – ko'rsatkichli taqsimotning parametri.

Murakkab gipoteza deb, chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gipotezalardan tashkil topgan gipotezalarga aytiladi.

Masalan:

1) $H : \lambda > 5$ – bu murakkab gipoteza bo'lib, quyidagi sanoqsiz sondagi oddiy gipoteza $H_i : \lambda = b_i$, $b_i > 5$ lardan tashkil topgan.

1) $H_0 : Mx = a = 3$ (σ -ma'lum) – oddiy gipoteza,

2) $H_0 : Mx = a = 3$ (σ -noma'lum) – murakkab gipoteza.

18-§. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar

Qo'yilgan gipotezalar to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shuning uchun uni tekshirishga extiyoj tug'iladi. Tekshirish statistik metodlar asosida olib borilgani uchun uni statistik tekshirish deyiladi. Natijada gipotezalarni statistik **tekshirish** davomida ikki holda xato xulosa qabul qilinishi mumkin, ya'ni ikki tur xatolikka yo'l qo'yilishi mumkin.

Birinchi tur xato shundan iboratki, bunda to'g'ri gipoteza rad qilinadi.

Ikkinchi tur xato shundan iboratki, bunda noto'g'ri gipoteza qabul qilinadi.

Birinchi tur xatoning ehtimoli qiymatdorlik darajasi deyiladi va α bilan belgilanadi. Ko'proq $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$ qiymatlar beriladi. Agar, $\alpha = 0{,}05$ **qiymatdorlik darajasi** qabul qilingan bo‘lsa bu 100 ta holdan 5 tasida birinchi tur xatolikka yo‘l qo‘yilish xavfi borligini bildiradi. (to‘g‘ri gipotezani rad etish). Ikkinchi tur xatoning ehtimolini β orqali belgilanadi.

19-§. Nolinchi gipotezani tekshiruvchi ba’zi bir statistik kriteriyalar

Nolinchi gipotezani tekshirish uchun maxsus tanlangan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Uning aniq yoki taxminiy taqsimoti ma’lum bo‘ladi. Bu miqdorni:

– taqsimoti normal bo‘lganda U yoki Z bilan;

– taqsimoti Fisher-Snedekor qonuni bo‘lganda F yoki B^2 bilan;

– taqsimoti Styudent qonuni bo‘lganda T bilan;

– taqsimoti “xi- kvadrat” qonun bo‘lganda χ^2 bilan va hakozalar bilan belgilanadi.

Statistik kriteriya (yoki oddiygina kriteriya) deb, nolinchi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K tasodifiy miqdorga aytiladi. Masalan: Agar ikki normal taqsimlangan bosh to‘plamning dispersiyalari o‘zaro tengligi to‘g‘risidagi gipotezani tekshirish kerak bo‘lsa, u holda kriteriya K sifatida ikki bosh to‘plam tuzatilgan dispersiyalarining nisbati olinadi:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Bu tasodifiy miqdor bo‘lib Fisher-Snedekor qonuni bo‘yicha taqsimlangandir.

Gipotezani tekshirish uchun tanlanmaning qiymatlariga asosan kriteriya tarkibiga kirgan kattaliklarning xususiy qiymatlari hisoblanadi va shu tahlikada kriteriyaning xususiy (kuzatilgan) qiymati hosil qilinadi va uni K_{kuz} deb belgilaymiz.

20-§. Kritik soha. Gipotezani qabul qilish sohasi. Kritik nuqtalar

Aniq bir kriteriya qabul qilingan. Uning qabul qiladigan qiymatlari to'plami ikkita kesishmaydigan to'plam ostlariga quyidagicha bo'linadi: ularning biri kriteriyaning nolinchi gipotezani rad etadigan qiymatlaridan, ikkinchisi kriteriyaning nolinchi gipotezani qabul etadigan qiymatlaridan tashkil topgan bo'ladi.

Kritik soha deb, kriteriyaning nolinchi gipoteza rad qilinadigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.

Gipotezaning qabul qilinish sohasi (yo'l qo'yilgan qiymatlar sohasi) deb kriteriyaning nolinchi gipoteza qabul qilinadigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy prinsipi quyidagicha: agar kriteriyaning kuzatilayotgan qiymati kritik sohaga tegishli bo'lsa, nolinchi gipoteza rad qilinadi; agar kriteriyaning kuzatiladigan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, gipoteza qabul qilinadi.

Agar K bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda kriteriyaning qiymati biror intervalga tegishli bo'ladi. Bizga ma'lumki, bu interval ikki intervalga, kritik interval va yo'l qo'yiladigan qiymatlar intervaliga ajraladi.

Kritik nuqtalar (chegaralar) K_{kr} deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turadigan nuqtalarga aytiladi.

O'ng tomonlama kritik soha deb, $K > K_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda K_{kr} — musbat son (7-rasm).

7-rasm.

Chap tomonlama kritik soha deb, $K < K_{кr}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $K_{кr} < 0$ son (8-rasm).

8-rasm

Bir tomonlama kritik soha deb, o'ng tomonlama yoki chap tomonlama kritik sohaga aytiladi. **Ikki tomonlama kritik soha** deb, $K < K^1_{кr}$, $K > K^2_{кr}$ tengsizliklar bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $K^2_{кr} > K^1_{кr}$. Xususan, kritik nuqtalar nolga nisbati simmetrik bo'lsa, u holda ikki tomonlama kritik soha ($K_{кr} > 0$ degan farazda) $K < -K_{кr}, k > K_{кr}$ tengsizliklar bilan yoki bunga teng kuchli bo'lgan $|K| > K_{кr}$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Endi $K_{кr}$ qanday topilinishini ko'raylik. Shu maqsadda avvalo qiymatdorlik darajasi α beriladi. So'ngra o'ng tomonlama kritik soha uchun kritik nuqta $K_{кr}$ ni H_0 gipoteza o'rinli bo'lganda kriteriya qiymati K ning $K_{кr}$ dan katta bo'lish ehtimoli oldindan berilgan α ga teng bo'lishlik shartidan topiladi. Ya'ni H_0 o'rinli bo'lganda

$$P(K > K_{кr}) = \alpha \qquad (1)$$

dan topiladi.

Har bir kriteriya uchun maxsus jadvallar berilgan bo'lib [1, 2], ulardan berilgan munosabatni qanoatlantiruvchi kritik nuqtaning qiymati topiladi.

Eslatma: kritik nuqta $K_{кr}$ topilgandan keyin tanlanmaning berilganiga ko'ra, kriteriyaning kuzatilgan qiymati hisoblanadi va agar $K_{кuz} > K_{кr}$ bo'lsa, u holda H_0 – rad etiladi; agar $K_{кuz} < K_{кr}$ bo'lsa, u holda H_0 ni rad etishga asos yo'q. (1)

tenglikdan foydalanganda biz α ehtimollik bilan birinchi tur xatolikka yo'l qo'yapmiz. Chap tomonlama kritik sohani topish uchun $K < K_{\kappa r}$ tengsizlikdan foydalanamiz. Bunda $K_{\kappa r}$ kritik nuqta H_0 o'rinli bo'lgan holda $P(K < K_{\kappa r}) = \alpha$ shartdan topiladi.

Ikki tomonlama kritik sohani topish uchun $K < K^1_{\kappa r}$, $K > K^2_{\kappa r}$ tengsizliklardan foydalanamiz, bunda $K^1_{\kappa r}$ va $K^2_{\kappa r}$ – kritik nuqtalar H_0 o'rinli bo'lgan holda $P(K < K^1_{\kappa r}) + P(K > K^2_{kr}) = \alpha$ shartdan topiladi.

21-§. Kriteriyaning quvvati

Biz kritik sohani, H_0 o'rinli bo'lganda bu sohaga kriteriya qiymati tegishli bo'lishning ehtimoli α ga teng bo'lishlik shartidan topdik. Tajriba shuni ko'rsatadiki, kriteriya qiymatining kritik sohaga tegishli bo'lishlik ehtimolini, H_0 noto'g'ri bo'lganda, ya'ni H_1 o'rinli bo'lganda, kiritish maqsadga muvofiq ekan. **Kriteriyaning quvvati** deb, H_1 o'rinli bo'lganda kriteriya qiymatining kritik sohaga tegishli bo'lish ehtimoliga aytamiz. Ya'ni, kriteriya quvvati, H_1 to'g'ri bo'lganda H_0-rad etilishi ehtimoliga teng. Gipotezani tekshirish uchun qiymatdorlik darajasi qabul qilingan va tanlanma hajmi fiksirlangan songa teng bo'lib, faqat kritik sohani tanlashda erkinlik qolgan bo'lsin. Kritik sohani kriteriyaning quvvati eng katta bo'ladigan qilib qurish maqsadga muvofiqligini ko'rsataylik. Avvalo ikkinchi tur xatolikning (noto'g'ri gipoteza qabul qilishning) ehtimoli β ga teng bo'lsa, u holda kriteriyaning quvvati $1-\beta$ ga teng bo'lishiga ishonch hosil qilaylik. Haqiqatan, agar β–ikkinchi tur xatolikning, ya'ni "H_0 qabul qilindi, H_1 o'rinli" hodisasining ehtimoli bo'lsa, u holda unga teskari "H_0 rad etildi, H_1 o'rinli" hodisaning ehtimoli, ya'ni kriteriyaning quvvati $1-\beta$ ga teng. Agar quvvat $1-\beta$ o'ssa, albatta β ehtimol, ya'ni ikkinchi tur xatolikka yo'l qo'yish kamayadi.

Demak, qanchalik kriteriyaning quvvati katta bo‘lsa, shunchalik ikkinchi tur xatolikka yo‘l qo‘yish ehtimoli kichik bo‘ladi.

Eslatma: Kriteriya quvvati – bu ikkinchi tur xatolikka yo‘l qo‘yilmaslik ehtimolidir. Shu narsa aniq bo‘ldiki, α va β lar qanchalik kichik bo‘lsa, shunchalik kriteriya yaxshi hisoblanadi. Lekin bir vaqtning o‘zida α ni ham, β ni ham kichik qilish mumkin emas. Agar α ni kichraytirsak, β oshib ketadi.

Endi savol tug‘iladi: α ni eng maqsadga muvofiq qilib qanday tanlash kerak?

Eslatma: Birinchi va ikkinchi tur xatoliklarning ehtimollarini bir vaqtda kichraytirishning yagona yo‘li – bu tanlanma hajmini oshirish.

22-§. Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi

Agar bosh to‘plamning taqsimot qonuni noma’lum bo‘lib, lekin bu qonun ko‘rinishi F ekanligini taxmin qilishga asos bo‘lsa, u holda quyidagi nolinchi gipoteza H_0 tekshiriadi: H_0: bosh to‘plam F taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. Buning uchun maxsus tanlangan tasodifiy miqdor – muvofiqlik kriteriyasidan foydalaniladi. **Muvofiqlik kriteriyasi** deb, noma’lum taqsimotning taxmin qilingan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish kriteriyasiga aytiladi.

Muvofiqlik kriteriyalaridan biri Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi bo‘lib, bu kriteriya yordamida empirik va nazariy chastotalar taqqoslanadi. **Empirik chastotalar** deb, tanlanmaning kuzatilayotgan chastotalariga aytiladi. **Nazariy chastotalar** deb, bosh to‘plamning X miqdoriy belgisi faraz qilingan taqsimot bilan taqsimlangan degan shart bo‘yicha nazariy yo‘l bilan hisoblangan chastotalarga aytiladi va ular $n_i' = n \cdot P_i$ tenglikdan topiladi. Bu yerda n– tanlanma hajmi, P_i – X miqdoriy belgi diskret bo‘lgan holda shu miqdoriy belgining qiymati x_i ning faraz qilingan taqsimot bo‘yicha hisoblangan ehtimolidir.

Agar X miqdoriy belgi ma'lum bir uzluksiz taqsimot qonuni bilan taqsimlangan degan gipotezani tekshirish kerak bo'lsa, u holda X ning barcha qabul qiladigan qiymatlari sohasini teng uzunlikdagi, kesishmaydigan s intervalga bo'lishadi. Tanlanmaning qiymatlari sifatida intervallar o'rtalarini, mos chastotalari sifatida tanlanmaning shu intervalga tushgan qiymatlarining sonini olishadi. Bu holda P_i tanlanma x_i qiymatining i-nchi intervalga tushish ehtimolidir. Pirsonning muvofiqlik kriteriyasini bosh to'plam normal taqsimlanganligini tekshirishda ko'rsatamiz (kriteriya boshqa taqsimotlar uchun ham xuddi shunday ishlatiladi).

Faraz qilamiz, n-hajmli tanlanma berilgan bo'lsin:

$$\begin{array}{l} X_i:\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s \\ n_i:\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s \\ \hline n=n_1+n_2+\ldots+n_s \end{array}$$

Berilgan qiymatdorlik darajasi α da bosh to'plam normal taqsimlangan degan gipotezani tekshirish talab qilingan bo'lsin. Buning uchun H_0 bosh to'plam normal taqsimlangan degan farazda n_i' nazariy chastotalar hisoblanadi. H_0 ni tekshirish kriteriyasi sifatida quyidagi tasodifiy miqdor olinadi:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \tag{1}$$

$n \to \infty$ da bu tasodifiy miqdor taqsimoti ozodlik darajasi k ga teng bo'lgan χ^2 ning taqsimot qonuniga intiladi. k ozodlik darajasi quyidagi tenglikdan topiladi:

$$k = s - 1 - r$$

Bu yerda s — tanlanma guruhlar soni (xususiy intervallar).

r — faraz qilingan taqsimotning parametrlari soni.

H_0 gipoteza to'g'ri degan faraz ostida $P(\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha;k)) = \alpha$ bo'lishlik shartidan kelib chiqib, o'ng tomonlama kritik sohani tuzamiz. Shunday qilib, o'ng tomonlama kritik soha quyidagi tengsizlik orqali ifodalanadi:

$$\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha;k)$$

H_0 ni qabul qilish sohasi esa quyidagi tengsizlik bilan ifodalanadi.

$$\chi^2 < \chi^2_{kr}(\alpha;k).$$

Kuzatishlar natijasida hisoblangan kriteriyaning qiymatini χ^2_{kuz} bilan belgilaymiz va H_0 ni tekshirish qoidasini keltiramiz.

Qoida. Qiymatdorlik darajasining berilgan qiymatida H_0 gipotezani tekshirish uchun avvalo nazariy chastota hisoblanadi, so'ngra kriteriyaning kuzatilgan qiymati:

$$\chi^2_{kuz} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} \tag{2}$$

hisoblanadi va χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvali [1] dan berilgan qiymatdorlik darajasi bilan ozodlik darajasi $k = s - 3$ (normal taqsimot uchun $r = 2$) ga mos keluvchi o'ng tomonlama kritik sohaning kritik nuqtasi $\chi^2_{kr}(\alpha;k)$ topiladi.

Agarda $\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo'lsa, bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipotezani rad etishga asos yo'q. Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim emas (tasodifiy).

Agar $\chi^2_{kuz} > \chi^2_{kr}$ bo'lsa, nolinchi gipoteza rad qilinadi. Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim.

Misol. $\alpha = 0,05$

Empirik chastotalar:

n_i : 6, 13, 38, 74, 106, 85, 30, 14

Nazariy chastotalar:

n_i' : 6. 14. 42. 82. 99. 76. 37. 13

H_0: bosh to'plam normal taqsimlangan.

Yechish. Quyidagi hisoblash jadvalini to'ldiramiz:

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	−1	1	0.07	169	12.07
3	38	42	4	16	0.38	1444	34.38
4	74	82	−8	64	0.78	5476	66.78
5	106	99	7	49	0.49	4236	113.49
6	85	76	9	81	1.07	7225	95.07
7	30	37	−7	49	1.32	900	24.32
8	14	13	1	1	0.08	196	15.08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{kuz} = 7.19$		373.19

Tekshirish. $\chi^2_{kuz} = 7,19 \quad \sum \frac{n_i^2}{n_i'} - n = 373,19 - 366 = 7,19$

Demak, hisoblashlar to'g'ri bajarilgan. Tanlanma guruhlari soni $s = 8$. Demak $k = 8 - 3 = 5$.

χ^2 taqsimotining kritik nuqtalari jadvalidan $\alpha = 0,05$ va $k = 5$ ga mos keluvchi χ^2_{kr} qiymatini topamiz:

$$\chi^2_{kr}(0.05;5) = 11,1$$

$\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo'lgani uchun H_0 gipotezani rad etishga asos yo'q.

Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim emas (tasodifiy).

Demak kuzatishlar natijasi bilan bosh to'plam normal taqsimlangan degan gipoteza muvofiq keladi.

23-§. Normal taqsimotning nazariy chastotalarini hisoblash usuli

Biz ko'rdikki, Pirson kriteriyasining asosi empirik va nazariy chastotalarni taqqsoslashdan iborat. Empirik chastotalar tajriba yo'li bilan topiladi. Endi bosh to'plam normal taqsimlangan degan faraz ostida nazariy chastotalar qanday topilishining bir usulini ko'ramiz.

1. X belgining kuzatilgan qiymatlar intervalini (tanlanma hajmi n-ga teng) s ta bir xil uzunlikdagi xususiy $(x_i,\ x_{i+1})$ intervallarga bo'linadi. Ularning o'rtalari topiladi:

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

x_i^* variantaning chastotasi n_i^* sifatida bu intervalga tushgan variantlar sonini olamiz. Shunday qilib, teng uzoqlikda turuvchi variantalar va ularga mos keluvchi chastotalar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$$X_i^* \quad x_2^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$$

$$n_i^* \quad n_1^*, n_2^*, \ldots, n_n^*$$

$$\sum n_i^* = n$$

2. Ko'paytmalar yoki yig'indilar usuli yordamida $\bar{X}_i^*$ - tanlanma o'rta qiymat va τ^* tanlanma o'rtacha kvadratik chetlashishni hisoblaymiz.

A) Ko'paytmalar metodi:

$$X_i^* \quad x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$$

$$n_i^* \quad n_1^*, n_2^*, \ldots, n_m^*$$

Bu yerda x_i^* lar teng uzoqlashgan variantalar va n_i^*-lar mos chastotalar.

$$\bar{X}_i^* = M_1^*\ h + C$$

$$\tau_i^* = [M_2^* - (M_1^*)] \cdot h^2$$

larni ko'paytmalar metodi bilan topish usuli quyida keltiriladi.

Bu yerda h qadam (ikkita qo'shni varianta orasidagi ayirma); C soxta nol (eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta).

$u_i = \frac{x_i^* - C}{h}$ - shartli variantaga o'tib olib so'ngra

$M_1^* = \frac{\sum(n_i^* u_i)}{n}$, $M_2^* = \frac{\sum(n_i^* u_i^2)}{n}$ larni hisoblaymiz.

Hisoblashlarni tekshirish uchun

$\sum n_i^*(u_i + 1)^2 = \sum n_i^* u_i^2 + 2\sum n_i^* u_i + n$ ayniyatdan foydalaniladi.

M_1^* *va* M_2^* larni hisoblashlar quyidagi jadval ko'rinishiga olib boriladi:

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i^*	u_i	$n_i^* u_i$	$n_i^* u_i^2$	$n_i^*(u_i + 1)^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	n=N		$\sum n_i^* u_i$	$\sum n_i^* u_i^2$	$\sum n_i^*(u_i + 1)^2$

B) Yig'indilar usuli:

(1) tanlanma empirik taqsimoti berilgan bo'lsin. Huddi ko'paytmalar usulidagidek bunda ham

$$\overline{X}*_i = M_1 * h + C$$

$$\tau *_i = [M *_2 - (M_1 *)] \cdot h^2$$

larni hisoblash talab etiladi. Yig'indilar usulidan foydalanishda birinchi va ikkinchi tartibli shartli momentlar ushbu formulalar bilan topiladi.

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \quad M_2^* = \frac{S_1 - 2 \cdot S_s}{n}$$

Bu yerda $d_1 = a_1 - b_1, \quad S_1 = a_1 + b_1, \quad S_2 = a_2 + b_2$.

Shunday qilib, pirovardida a_1, a_2, b_1, b_2 larni hisoblash lozim. Hisoblashlar quyidagi jadval ko'rinishida olib boriladi.

x_1	n_1	n_1	n_1
x_2	n_2	$n_1 + n_2$	$n_1 + (n_1 + n_2)$
x_3	n_3	$n_1 + n_2 + n_3$	$n_1 + (n_1 + n_2) +$ $+(n_1 + n_2 + n_3)$
...	...	...	...
x_{S-2}	n_{S-2}	$n_1 + n_2 + \ldots + n_{S-2}$	$n_1 + (n_1 + n_2) + \ldots +$ $+(n_1 + n_2 + \ldots + n_{S-2})$
x_{S-1}	n_{S-1}	$n_1 + n_2 + \ldots + n_{S-1}$	0
x_S	n_S	0	0
x_{S+1}	n_{S+1}	$n_1 + n_2 + \ldots + n_{S+1}$	0
x_{S+2}	n_{S+2}	$n_1 + n_2 + \ldots + n_{S+2}$	$n_1 + (n_1 + n_2) + \ldots +$ $+(n_1 + n_2 + \ldots + n_{S+2})$
...	...	...	...
x_{m-2}	n_{m-2}	$n_m + n_{m-1} + n_{m-2}$	$n_m + (n_m + n_{m-1}) +$ $+(n_m + n_{m-1} + n_{m-2})$
x_{m-1}	n_{m-1}	$n_m + n_{m-1}$	$n_m + (n_m + n_{m-1})$
x_m	n_m	n_m	n_m

Bu yerda x_S – eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m, \quad b_1 = (s-1)n_1 + (S-2)n_2 + \ldots + 2n_{s-1} + n_s$$

$$a_1 = (m-s)n_m + (m-s-1)n_{m-1} + \ldots + 2n_{s+1} + n_{s+1}$$

$$b_2 = \frac{(s-1)(s-2)}{2}n_1 + \frac{(s-2)(s-3)}{2}n_2 + \ldots + 2n_{s-3} + n_{s-2}$$

$$a_2 = \frac{(m-s)(m-s-1)}{2}n_m + \frac{(m-s-1)(m-s-2)}{2}n_{m-1} + + \ldots + 2n_{s+3} + n_{s+2}$$

3. X ni normallaymiz, ya'ni

$$Z = \frac{X - \bar{x}^*}{\sigma^*}$$

Tasodifiy miqdorga o‘tamiz. Intervallarning uchlarini hisoblaymiz:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}^*}{\sigma^*}; \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}^*}{\sigma^*}$$

Bunda Z ning eng kichik qiymatini, ya’ni z_1 ni $-\infty$ ga teng, eng katta qiymatini, ya’ni z_m ni esa $+\infty$ ga teng deb olamiz.

4. Ushbu nazariy chastotalar hisoblanadi:

$n_i' = n \cdot P_i$

Bu yerda n tanlanma hajmi (barcha chastotalar yig‘indisi). $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ esa X ning $(x_i; x_{i+1})$ intervallarga tushish ehtimoli, $\Phi(z)$ — Laplas funksiyasi.

Misol. Bosh to‘plam normal taqsimlangan deb faraz qilib, n = 200 hajmli tanlanmaning, bir xil uzunlikdagi intervallar ketma ketligi va ularga mos chastotalar ko‘rinishida berilgan empirik taqsimoti bo‘yicha nazariy chastotalarini toping.

Interval tartib raqami	Interval uchlari		Chastotalar
i	x_i	x_{i+1}	h_i
1	4	6	15
2	6	8	26
3	8	10	25
4	10	12	30
5	12	14	26
6	14	16	21
7	16	18	24
8	18	20	20
9	20	22	19

Yechish.

1. $X^*_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$ o‘rtalarini topib, quyidagi jadvalni olamiz:

2. Ko'paytmalar usulidan foydalanib $X^* = 12,63$, $\tau^* = 4,695$ larni topamiz;

3. $(z_i; z_{i+1})$ intervallarni topamiz:

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - x^*$	$x_{i+1} - x^*$	$z_i = \frac{x_i - x^*}{\tau^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x^*}{\tau^*}$
1	4	6	–	– 6,63	∞	–1,41
2	6	8	– 6,63	– 4,63	– 1,41	– 0,99
3	8	10	– 4,63	– 2,63	– 0,99	– 0,156
4	10	12	– 2,63	– 0,63	– 0,156	– 0,13
5	12	14	– 0,63	1,37	– 0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	–	1,57	∞

4. P_i nazariy ehtimollarni va n_i' izlanayotgan nazariy chastotalarni topamiz: $n_i' = n \cdot P_i$

Interval uchlari		$\hat{O}(z_i)$	$\hat{O}(z_{i+1})$	$P_i = \hat{O}(z_i) - -\hat{O}(z_{i+1})$	$n_i' = nP_i = = 200P_i$
z_i	z_{i+1}				
– ∞	– 1,41	– 0,5	– 0,4207	0,0793	15,86
– 1,41	– 0,99	– 0,4209	– 0,3389	0,0818	16,36
– 0,99	– 0,156	– 0,3389	– 0,2123	0,1266	25,32
– 0,156	– 0,13	– 0,2123	– 0,0517	0,1606	32,16
– 0,13	0,29	– 0,0517	0,1141	0,1658	33,16
0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11.64
				$\sum P_i = 1$	$\sum n_i' = 200$

24-§. Korrelyatsiya nazariyasining elementlari

Ma'lumki, fizik va biologik jarayonlar katta sondagi o'zaro bog'liq faktorlar ta'siri ostida kechadi. Ularning orasida jarayonning asosiy xususiyatlari bilan xarakteristikalarini aniqlovchi asosiy faktorlar bilan bir qatorda ikkilamchi faktorlar ham bo'ladi.

Kuzatishlar natijasida olingan ikki tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni bir miqdorning har bir qiymatiga ikkinchi miqdorning bir necha qiymati mos kelganda formula ko'rinishda qanday topish mumkin?

Bu formulaning o'rganilayotgan jarayon asl ma'nosini aks ettiradigan va ikkilamchi tasodifiy faktorlar ta'sirini "silliqlab" beradigan parametrlari qanday topiladi?

Bir miqdor o'zgarishi ikkinchi miqdor o'zgarishiga qay darajada ta'sir ko'rsatadi?

Va shu singari savollarga javob berishda korrelyatsion analiz metodlarini qo'llash mumkin.

25-§. Masalaning qo'yilishi va yechilishi

Amaliyotda biror tasodifiy miqdor Y ning ikkinchi tasodifiy miqdor X ga bog'liqligini formula ko'rinishda ifodalash va bu bog'liqlik kuchini aniqlash masalasi qo'yiladi. Bu ikki masala korrelyatsion analizning asosiy masalalaridir.

Kuzatishlar natijasida olingan *Y* va *X* o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini dastlabki sifat analizi yordamida quyidagi korrelyatsion jadval ko'rinishida yozib olamiz:

1-jadval

X \ Y	Y_1	Y_2	Y_3	....	Y_n	Σn_{x_i}
X_1	n_{11}	N_{12}	n_{13}	....	n_{1n}	Σn_{x_1}
X_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2n}	Σn_{x_2}
X_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3n}	Σn_{x_3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	....	n_{mn}	Σn_{x_m}
Σn_{y_1}	Σn_{y_2}	Σn_{y_3}	Σn_{y_4}	....	Σn_{y_n}	Σn_{xy}

Ikki tasodifiy miqdorlar o'zaro funksional bog'langan bo'lishi, statistik bog'langan bo'lishi yoki o'zaro bog'liqsiz bo'lishi mumkin.

Funksional bog'lanish deb,

$$Y=\varphi(X) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi bog'lanishga aytiladi.

Bir tasodifiy miqdorning o'zgarishi, ikkinchi tasodifiy miqdorning taqsimoti o'zgarishiga olib keladigan bog'lanishga **statistik bog'lanish** deyiladi.

Korrelyatsion bog'lanish statistik bog'lanishning xususiy holi bo'lib, bunda bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning o'rtacha qiymati o'zgarishiga olib keladi.

Agar bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning o'zgarishiga umuman ta'sir etmasa, bu ikki miqdor **o'zaro bog'liqsiz** deyiladi.

Y miqdor bilan X miqdor funksional bog'liq bo'lmay, korrelyatsion bog'liq bo'lishiga misol keltiramiz.

Y – bug'doy hosili, X – bug'doy dalasiga solingan mineral o'g'it bo'lsin.

Ma'lumki, bir xil dala va bir xil mineral o'g'it berilishiga qaramay ikki daladan ikki xil hosil yig'iladi.

Bunga sabab, har xil o'zga tasodifiy faktorlarning ta'siridir (yog'in-sochin, havoning darajasi va boshqalar). Lekin tajriba shuni ko'rsatadiki, olingan o'rtacha hosil dalaga solingan mineral o'g'it miqdoriga bog'liq bo'ladi, ya'ni Y va X lar korrelyatsion bog'langandir.

Korrelyatsion bog'lanish ta'rifining matematik modelini qurish uchun shartli o'rtacha qiymat tushunchasini kiritamiz.

Bizga X va Y tasodifiy miqdorlar bog'lanishini o'rganish talab etilgan bo'lsin.

Shartli o'rtacha qiymat $\overline{y}_x$ deb, Y miqdorning $X = x$ qiymatiga mos keluvchi o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar X ning har bir x qiymatiga yagona shartli o'rtacha qiymat mos kelsa, bu holda shartli o'rtacha qiymat x ning funksiyasi bo'ladi va Y miqdor X miqdordan korrelyatsion bog'liq bo'ladi.

Demak, Y ning X dan **korrelyatsion bog'liqligi** deb, $\overline{y}_x$ shartli o'rtacha qiymatning X dan funksional bog'liqligiga aytiladi:

$$\overline{y}_x = f(X) \qquad (2)$$

(2) tenglama Y ning X ga **regressiya tenglamasi** deyiladi. $f(X)$ funksiya Y ning X ga **regressiyasi** va uning grafigi **nazariy regressiya** chizig'i deyiladi.

Shunday qilib, biz korrelyatsion analizning ikki asosiy masalasini yechishning matematik modelini yaratdik. Endi korrelyatsion analizning ikki asosiy masalasini alohida aniqlab olamiz.

Birinchi masala: korrelyatsion bog'liqlikning formasini, ya'ni regressiya funksiyasi $f(X)$ ning ko'rinishini topish (chiziqli, kvadratik, ko'rsatkichli va hokazolar).

Ikkinchi masala: korrelyatsion bog'liqlikning zichligini (kuchini) sonli xarakteristika bilan ifodalash.

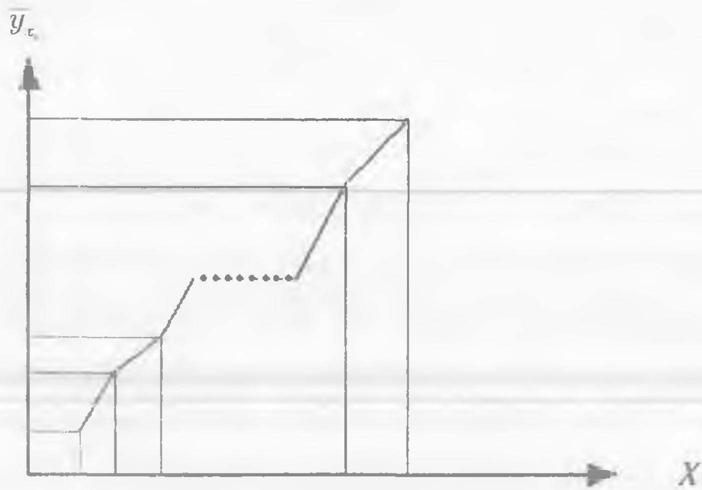
Birinchi masalani yechish uchun regressiyaning empirik chizig'ini topamiz.

1-korrelyatsion jadvalga asosan X miqdorning qiymatlari x_i lar bilan shartli o'rta qiymatlar $\overline{y}_{x_i}$ lar bilan orasidagi moslik jadvalini tuzamiz.

2-jadval

X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_m
$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	$\overline{y}_{x_3}$	...	$\overline{y}_{x_m}$

So'ngra dekart koordinatalar sistemasida Y o'qni $\overline{y}_x$ bilan belgilaymiz. Bu sistemada $M_i(x_i, \overline{y}_{x_i})$ nuqtalarni belgilab, ulrani kesmalar bilan o'zaro tutashtiramiz. Hosil bo'lgan siniq chiziq Y ning X ga regressiyasining **empirik chizig'i** deyiladi.



9-rasm.

26-§. Chiziqli korrelyatsiya

Regressiya chizig'ining formasi va tenglamasini regressiyaning empirik chizig'i ko'rinishiga qarab taxmin qilishadi. Agar

$M_i(x_i, \overline{y}_x)$ nuqtalar biror to'g'ri chiziq atrofida taqsimlangan bo'lsa, u holda regressiya chizig'i *$f(X)$* to'g'ri chiziqli regressiya **deb ataladi va *$f(X)$* funksiyaning ko'rinishini topish**

$$\overline{y}_x = aX + b \qquad (3)$$

funksiya parametrlari *a* va *b* larni topishga keltiriladi.

Eng kichik kvadratlar usuli yordamida a va b lar quyidagi tengliklardan topiladi:

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \quad b = \overline{y} - a\,\overline{x}$$

Bu yerda:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i}{N}; \quad \overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} n_{y_j} y_j}{N};$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=m\\ j=n}} n_{x_i y_j} x_i y_j}{N}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i^2}{N}; \quad \overline{y^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} n_{y_j} y_j}{N}.$$

Bularni (3) ga qo‘yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = a(x - \overline{x}) \tag{4}$$

ni hosil qilamiz.

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$$

kattalikni Y ning X ga tanlanma regressiya koeffitsienti deb ataym iz, va rr_{yx} bilan belgilaymiz, ya’ni

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \tag{5}$$

(5) ni (4) ga qo‘yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}) \tag{6}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Endi $\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sigma_x^{\ 2}$ va $\overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \sigma_y^{\ 2}$ ekanligini hisobga olib, (5) tenglikdan

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\sigma_x^{\ 2}}$$

yoki

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

$\rho_{yx} \cdot \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ni korrelyatsiya koeffitsienti deb ataymiz va r_T bilan belgilaymiz:

$$r_T = \rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y};$$

Bu oxirgi tenglikdan:

$$\rho_{yx} = r_T \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x};$$

.tenglikni hosil qilamiz va bu qiymatni (6) tenglikka qo'yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad (7)$$

Y ning *X* ga to'g'ri chiziqli regressiyasining tanlanma tenglamasini hosil qilamiz.

Shunday qilib, birinchi masala echildi.

Endi ikkinchi masalani qaraymiz. *Y* ning *X* ga bog'liqlik zichligi *Y* ning qiymatlari shartli o'rtacha qiymat $\overline{y}_x$ atrofida tarqalish (sochilish) kattaligiga bog'liq bo'ladi.

Agar tarqalish kattaligi katta bo'lsa, *Y* ning *X* ga kuchsiz bog'liqligini yoki umuman bog'liq emasligini ko'rsatadi.

Tarqalish kattaligining kichik bo'lishi yetarlicha kuchli bog'liqlik borligini ko'rsatadi. Ba'zan *Y* bilan *X* funksional bog'lanishda bo'lsa-da, ikkilamchi tasodifiy faktorlar ta'siri ostida bu bog'lanish buzilgan, natijada *X* ning yagona qiymatida *Y* bir necha qiymat olishi mumkin.

Agar biz S_y deb *Y* ning $\overline{y}_x$ shartli o'rta qiymat atrofida kuzatilgan qiymatlarining dispersiyasi (sochilishi) ni, D_y deb *Y* ning $\overline{y}$ umumiy o'rta qiymat atrofida kuzatilgan qiymatlarining dispersiyasini belgilasak, u holda

$$S_y = D_y(1 - r_T^2) \qquad (8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, $|r_T| \le 1$ bo'ladi (chunki $S_y \ge 0$) va S_y katta bo'lishi uchun r_T ning 0 ga yaqin bo'lishi yetarli. Xuddi shunday, S_y kichik bo'lishi uchun $|r_T|$ ning 0 ga yaqin bo'lishi yetarli. Yuqorida aytilganlardan r_T tanlanma korrelyatsiya koeffisienti *Y* belgi bilan *X* belgi orasidagi to'g'ri chiziqli bog'liqlikning zichligi me'yorini aniqlab berishi kelib chiqadi. $|r_T|$ qanchalik 1 ga yaqin bo'lsa, bog'liqlik shuncha kuchli, $|r_T|$ qanchalik 0 ga yaqin bo'lsa shuncha kuchsiz bo'ladi.

Misol.

3-jadval

Y \ X	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	–	–	–	–	12
25	–	20	23	–	–	–	43
35	–	–	30	47	2	–	79
45	–	–	10	11	20	6	47
55	–	–	–	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	N=20

3-jadvalda berilganlarga ko'ra, *Y* ning *X* ga to'g'ri chiziqli regressiyasining tanlanma tenglamasini yozing va tanlanma korrelyatsiya koeffisienti orqali *Y* ning *X* dan bog'liqlik zichligini aniqlang.

Yechish.

Topilishi kerak bo'lgan nazariy regressiya chizig'i ko'rinishini taxmin qilish uchun empirik regressiya chizig'ini yasab olamiz. Buning uchun har bir x_i ga mos keluvchi $\overline{y}_i$ larni hisoblab chiqamiz:

$$x_1 = 10 \text{ da } \overline{y}_{x_1} = \frac{15 \cdot 5}{5} = 15;$$

$$x_2 = 20 \text{ da } \overline{y}_{x_2} = \frac{7 \cdot 15 + 20 \cdot 25}{27} = 22,41$$

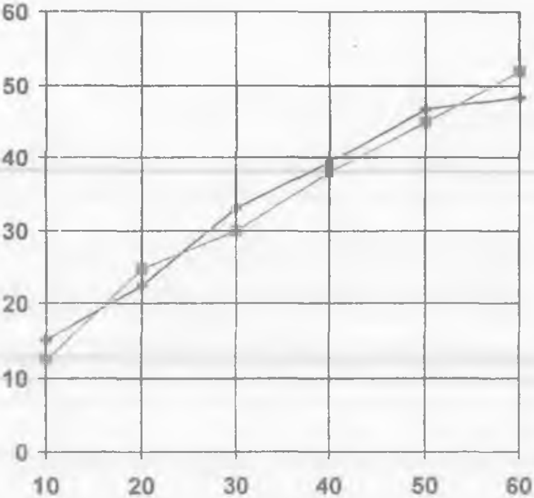
Xuddi shu usulda qolganlarini ham topamiz:

$$\overline{y}_{x_3} = 32,33; \quad \overline{y}_{x_4} = 39,33; \quad \overline{y}_{x_5} = 46,72; \quad \overline{y}_{x_6} = 48,3$$

Natijada quyidagi x_i bilan $\overline{y}_{x_i}$ lar orasidagi moslik jadvali hosil bo'ladi:

4-jadval

x_i	10	20	30	40	50	60
$\overline{y}_{x_i}$	15	22,41	32,94	39,33	46,72	48,33



10-rasm.

Empirik regressiya chizig'i grafigidan ko'rinib turibdiki, $(x_i, \overline{y}_{x_i})$ nuqtalar to'g'ri chiziq atrofida taqsimlangan bo'lib, bu Y bilan X orasidagi bog'liqlik to'g'ri chiziqli ekanligini ko'rsatadi. Y ning X ga to'g'ri chiziqli regeressiya tenglamasi (7) tenglik bilan berilgan bo'lib, uning parametrlari $\overline{y}$, $\overline{x}$, σ_y, σ_x va r_T larni topish qoladi.

Hisoblashlarni yengillashtirish uchun shartli variantlarga o'tish maqsadga muvofiqdir:

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} \quad \text{va} \quad v = \frac{y - c_2}{h_2};$$

Bu yerda c_1 berilgan X belgi qiymatlarining "soxta noli" (yangi sanoq boshi) bo'lib, "soxta nol" sifatida eng katta chastotaga ega bo'lgan X ning qiymatini qabul qilish mumkin; h_1 qadam, X ning ikki qo'shni qiymati orasidagi ayirma. c_1 va h_2 lar mos ravishda tekshirilayotgan Y qiymatlarining "soxta noli" va qadami.

U holda korrelyatsiya koeffitsienti quyidagi formuladan topiladi:

$$r_T = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\sigma_u \sigma_v} \tag{9}$$

Shartli variantlarga o'tish r_T ning qiymatini o'zgartirmaydi.

3-jadvalda berilgan X miqdor qiymatlarining "soxta noli" (sanoq boshi) c_1 deb, eng katta chastotaga ega bo'lgan X miqdorning $x=40$ qiymatini olamiz. h_1 deb X ning ikki qo'shni qiymatlari orasidagi farqni: 20−10=10 ni olamiz.

U holda

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} = \frac{x - 40}{10};$$

Y miqdor qiymatlarining "soxta noli" (sanoq boshi) c_2 deb, eng katta chastotaga ega bo'lgan Y ning qiymati $y = 35$ ni olamiz. h_2 deb, Y ning ikki qo'shni qiymati orasidagi farqni: 25−15 = 10 ni olamiz.

U holda $v = \dfrac{y - c_2}{h_2} = \dfrac{y - 35}{10};$

Shartli variantlar korrelyatsion jadvalini tuzamiz. Buning uchun 3 jadvalni quyidagicha o'zgartiramiz: birinchi ustundagi eng katta chastotaga ega bo'lgan u = 35 varianta o'rniga 0 yozamiz va uning tagiga ketma-ket 1, 2 larni, ustiga −1, -2 larni yozamiz. Birinchi qatordagi eng katta chastotaga ega bo'lgan x = 40 varianta o'rniga 0 yozamiz va uning o'ng tomoniga ketma-ket 1, 2 larni, chap tomoniga ketma-ket −1, −2, −3 larni yozamiz. qolgan barcha kataklar 2-jadvaldagidek to'ldiriladi. Natijada 5-shartli variantlar korrelyatsion jadvali hosil bo'ladi

5-jadval

u / v	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
−2	5	7	–	–	–	–	12
−1	–	20	23	–	–	–	43
0	–	–	30	47	2	–	79
1	–	–	10	11	20	6	47
2	–	–	–	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	N=20

Endi $\bar{u}$ *ва* $\bar{v}$ larni hisoblaymiz:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{N} = \frac{5\cdot(-3)+27\cdot(-2)+63\cdot(-1)+29\cdot1+9\cdot2}{200} = 0,425$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v u}{N} = \frac{12\cdot(-2)+43\cdot(-1)+47\cdot1+19\cdot2}{200} = 0,09$$

Avval $\overline{u^2}$ ni hisoblab, uning yordamida σ_u ni hisoblaymiz:

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot9+27\cdot4+63\cdot1+29\cdot1+9\cdot4}{200} = 1,405$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2}-(\bar{u})^2} = \sqrt{1,405-(0,425)^2} = 1,106$$

Xuddi shunday $\sigma_v = 1,209$ ni topamiz.

Endi $\overline{uv} = \frac{\sum n_{uv}\cdot u\cdot v}{N}$ qiymatni topish uchun "to'rt chorak" usulidan foydalanib hisoblash jadvalini tuzamiz.

Hisoblash jadvali quyidagicha tuziladi:

Eng katta chastota turgan katakda kesishuvchi ustun va qator bilan 3-jadvalni 4 chorakka bo'lamiz:

— yuqori chapdagi chorakni 1-chorak;

— yuqori o'ngdagi chorakni 2-chorak;

— pastki chapdagi chorakni 3-chorak;

— pastki o'ngdagi chorakni 4-chorak

deb ataymiz. Hisoblashlar qay usulda olib borilishini 1-chorakda ko'rsatamiz. u va v variantlar ko'paytmasini ularga mos chastotasi turgan katakning yuqori o'ng qismiga yozib qo'yamiz. $u=-3$ va $v=-2$ variantlar juftligi 5 marta kuzatilgan.

$uv=(-3)\cdot(-2)=6$ ko'paytmani 5 chastota turgan katakning yuqori o'ng qismiga yozamiz.

$u=-2$; $v=-2$ variantlar juftligi 7-marta kuzatilgan. $uv=(-2)(-2)=4$ ko'paytmani 7-chastota turgan katakning yuqori o'ng qismiga yozamiz. Hisoblash jadvalining birinchi maydonidagi qolgan kataklar ham xuddi shu usulda to'ldiriladi.

Shunday qilib, har bir n_{uv} chastota turgan katakda uv ko'paytma yozilib qoladi. Bu ko'paytmalarni n_{uv} chastotalarga ko'paytirib yozib chiqilsa, izlangan $\Sigma n_{uv}uv$ qiymat hosil bo'ladi. Hisoblash natijasini tekshirish oson bo'lishi uchun n_{uv} bilan uv ning ko'paytmalarini har bir chorak uchun alohida qo'shiladi; alohida qator bo'yicha va alohida ustun bo'yicha; qator bo'yicha, $\Sigma n_{uv}uv$ yig'indi jadvalning pastida qo'shimcha kiritilgan ikki qatorning yig'indi hisoblangan chorak nomeri bilan belgilanganiga yoziladi.

6-jadval

V \ U	−3	−2	−1	0	1	2	I	II
−2	6 5	4 7	–		–	–	58	–
−1	–	2 20	1 23		–	–	63	–
0							III	IV
1	–	–	-1 10		1 20	2 6	– 10	32
2	–	–	–		2 7	4 3	–	26
I	30	68	23	II	–	–	121	–
III	–	–	−10	IV	34	24	−10	58

Alohida har bir chorak bo'yicha $\Sigma n_{uv}uv$ sonlar yig'indisi jadvalning pastki o'ng qismidagi to'rtta natija kataklariga mos ravishda yoziladi (6-jadval).

Natijaviy 4 ta katakdagi sonlarni yig'ib, izlangan $\Sigma n_{uv}uv$ sonni topamiz:

$$\sum n_{uv} \cdot u \cdot v = 121 - 10 + 58;$$

$$\overline{uv} = \frac{\sum n_{uv} \cdot u \cdot v}{N} = \frac{169}{200};$$

Endi biz (9) tenglikka topilgan kattaliklarning qiymatlarini qo'yib, izlangan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini topamiz.

$$r_T = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\overline{v}}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{\frac{169}{200} - (-0,425) \cdot 0,09}{1,106 \cdot 1,209} = 0,603$$

Shunday qilib: $r_T = 0,603$.

Endi Y ning X ga to‘g‘ri chiziqli tanlanma regressiya tenglamasidagi boshqa parametrlarni hisoblaymiz.

Ular $\sigma_x, \sigma_y, \overline{y}$ *ва* $\overline{x}$ lar bo‘lib, quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v, \quad \overline{x} = \overline{u} \cdot h_1 + c_1 \text{ ва } \overline{y} = \overline{v} \cdot h_2 + c_2$$

$$\overline{x} = \overline{u} \cdot h_1 + c_1 = -0,425 \cdot 10 + 40 = 35,75$$

$$\overline{y} = \overline{v} \cdot h_2 + c_2 = 0,09 \cdot 10 + 35 = 35,9$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 1,106 \cdot 10 = 11,06$$

$$\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 1,209 \cdot 10 = 12,09$$

Hosil bo‘lganlarni (7) tenglikka qo‘yib, izlangan tenglamani topamiz:

$$\overline{y}_x - 35,9 = 0,603 \cdot \frac{12,09}{11,06} \cdot (x - 35,75)$$

$$\overline{y}_x = 0,659 \cdot x + 12,34 \tag{10}$$

Endi biz

a) Hosil bo‘lgan (10) tenglama bo‘yicha;

b) 2-jadval bo‘yicha;

topilgan shartli o‘rtacha qiymatlarni solishtiramiz:

Masalan: $x = 30$ bo‘lsa

a) $\overline{y}_{30} = 0,659 \cdot 30 + 12,34 = 32,11$

b) $\overline{y}_{30} = 32,94$

Ko'rinib turibdiki, (10) bo'yicha hisoblangan va 2-jadvaldan topilgan shartli o'rta qiymatlar yaqinligi qoniqarli darajadadir. Agar bir dekart koordinatalar sistemasida empirik regressiya chizig'i bilan birga (10) formula bilan berilgan nazariy regressiya chizig'ini yasasak, bu yaqinlik yanada yaqqol ko'rinadi (9-rasm).

Natija (Xulosa).

Bajarilgan misolda 3-jadval bilan berilgan Y va X belgilar orasidagi korrelyatsion bog'liqlikning analitik ko'rinishi (10) formula topildi va bu bog'liqlikning zichligi $r_{\text{T}}=0{,}603$ kattalik orqali baholandi. Bundan tashqari, empirik regressiya chizig'i bilan nazariy regressiya chizig'i grafiklari solishtirildi.

Shuni xulosa qilib aytish mumkinki:

1. Y bilan X o'zaro to'g'ri chiziqli korrelyatsion bog'liqlik bilan (10) formula ko'rinishida bog'langan.

2. Y ning X dan bog'liqligi $r_{\text{T}}=0{,}603$ bo'lib, 0 dan ko'ra 1 soniga yaqin bo'lgani uchun bog'liqlik kuchi yetarlicha katta.

3. 10-rasmdan ko'rinib turibdiki, topilgan nazariy regressiya chizig'i empirik regressiya chizig'ini yetarlicha aniq ifodalaydi.

III bob
MISOL VA MASALALAR

1-§. Namunaviy misol va masalalar yechimi

1. Tasodifiy sonlar jadvalidan ikki son tavakkaliga olingan. A va B hodisalar mos ravishda olingan sonlarning kamida biri tub son va kamida biri juft son ekanligini bildiradi. AB va $A+B$ hodisalar qanday hodisalarni aniqlaydi?

Yechilishi. AB hodisa A va B hodisalarning bir vaqtda ro‘y berganligini bildiradi, ya’ni olingan ikki sonning biri tub, ikkinchisi juft. $A+B$ hodisa esa A va B hodisalarning kamida biri ro‘y berganligini bildiradi, ya’ni olingan sonlarning kamida biri tub yoki kamida biri juft yo‘ki kamida biri juft va ikkinchisi tub.

2. Tavakkaliga olingan butun son N kubining oxirgi ikki raqami birga tengligi ehtimolini toping. Tavakkaliga olingan son deb, biz har bir xonasi teng imkoniyat bilan 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlarni qabul qiladigan k-xonali sonni tushunamiz (k>1).

Yechilishi. N sonini $N=a+10b+...$, ko‘rinishda ifodalaymiz, bu yerda $a, b,...$ — ixtiyoriy sonlar bo‘lib, 0 dan 9 gacha bo‘lgan sonlarni qabul qila oladi. U holda $N^3=a^3+a^2b+...$ Bundan ko‘rinib turibdiki, N^3 ning oxirgi ikki raqamiga faqatgina a va b larning qiymatlari ta’sir ko‘rsata oladi. Shuning uchun mumkin bo‘lgan qiymatlar soni $n=100$. N^3 sonining oxirgi raqami birga teng bo‘lganligi sababli birgina $a=1$ qulaylik tug‘diruvchi imkoniyat mavjud. Bundan tashqari, $\frac{N^3-1}{10}$ ning oxirgi raqami ham birga teng bo‘lishi lozim, ya’ni $3b$ ko‘paytma ham bir bilan tugashi lozim. Bu esa faqatgina $b=7$ da bajariladi. Shunday qilib, qulaylik tug'diruvchi imkoniyat yagonadir ($a=1$, $b=7$). Demak: $p=0{,}01$.

3. 200 m magnitofon lentasining bir yo'liga 20 m intervalda axborot yozilgan va ikkinchi yo'liga ham huddi shunday axborot yozilgan. Agar ikkala axborotlar boshlanishi 0 dan 180 m gacha teng imkoniyatli bo'lsa, 60 dan 85 m gacha bo'lgan intervalda yozuv bo'lmagan oraliq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechilishi. x va y yozuvlar boshlanishlarining koordinatalari bo'lsin. Bundan tashqari, $x \geq y$ bo'lsin. $0 \leq x \leq 180$, $0 \leq y \leq 180$ va $x \geq y$ bo'lganligi sababli x va y ning qiymatlari qabul qilishi mumkin bo'lgan soha katetlari 180 m bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Bu uchburchakning yuzasi $S=\frac{1}{2}\cdot 180^2$ м² ga teng.

Ko'rsatilgan hodisaga qulaylik tug'diruvchi x va y ni topamiz. Uzluksiz yozuv hosil bo'lishligi uchun quyidagi tengsizlik bajarilishi lozim: $x-y\leq 20$ м. Yozuv intervali 25 м dan kam bo'lmasligi uchun $x-y\geq 5$ м bo'lishi kerak. Bundan tashqari, 60 dan 85 m gacha uzluksiz yo'zuv hosil bo'lishligi uchun

$$45\text{м} \leq y \leq 60 \text{ м}, \quad 65\text{м} \leq x \leq 80 \text{ м}$$

tengsizliklar bajarilishi kerak.

Bu sohalarning chegaralarini chizib shuni ko'ramizki, x va y ning qulaylik tug'diruvchi qiymatlari yuzasi $S_A=\frac{1}{2}\cdot 15^2$ м² bo'lgan uchburchak ichida bo'lar ekan. Shunday qilib, izlanayotgan ehtimollik $p=\frac{S_A}{S}=\left(\frac{15}{180}\right)^2=\frac{1}{144}$ ga teng bo'ladi.

4. Agar barcha mahsulotning 4% yaroqsiz va qolgan yaroqli mahsulotlarning 75% birinchi nav mahsulot bo'lsa, tavakkaliga tanlangan mahsulotning birinchi nav bo'lishligi ehtimolini toping.

Yechilishi. A hodisa tanlangan mahsulot yaroqli, B — hodisa esa tanlangan mahsulot birinchi nav.

Berilgan: $P(A)= 1 - 0{,}04 = 0{,}96$, $P(B \mid A) = 0{,}75$.

Izlanayotgan ehtimollik $p = P(AB) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72$.

5. Yuzta mahsulotdan beshtasi yaroqsiz. Agar tavakkaliga elliktasi tanlanganda ko'pi bilan bittasi yaroqsiz bo'lganda mahsulotlar qabul qilinishi ehtimjlini toping.

Yechilishi. A hodisa tekshirilayotgan mahsulotlar ichida yaroqsizi yo'q. B – hodisa esa tekshirilayotgan mahsulotlar ichida faqatgina bittasi yaroqsiz. Izlanayotgan ehtimollik $p=P(A+B)$. A va B hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun $p=P(A)+P(B)$.

100 mahsulotdan 50 tadan $\tilde{N}_{100}^{50}$ xil usul bilan tanlash mumkin. 95 yaroqli mahsulotdan 50 tani $\tilde{N}_{95}^{50}$ xil usul bilan tanlash mumkin. Shuning uchun $P(A)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$. Huddi shuningdek.

$$P(B)=\frac{C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}.$$

U holda

$$p=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}=0{,}181.$$

6. Telegraf axboroti "nuqta" va "tire" belgilaridan tashkil topgan. Xatoliklarning statistik hossasi shundayki, "nuqta" belgisi o'rtacha 2/5 signalga va "tire" belgisi o'rtacha 1/3 signalga xatolik beradi. Shu narsa ma'lumki, uzatilayotgan signallar orasida "nuqta" va "tire" 5:3 nisbatda uchraydi.

Uzatilayotgan signalning qabul qilinganligining a) "nuqta" belgisi qabul qilingandagi; b) "tire" belgisi qabul qilingandagi ehtimolini toping.

Yechilishi A – hodisa "nuqta" belgisi qabul qilindi. B – hodisa "tire" belgisi qabul qilindi.

Ikki xil farazni oldinga surish mumkin: H_1 – "nuqta" belgisi uzatilgan, H_2 – "tire" belgisi uzatilgan. Shartga ko'ra $P(H_1):P(H_2)=5:3$. Bundan tashqari, $P(H_1)+P(H_2)=1$. Shuning uchun $P(H_1)=\frac{5}{8}$, $P(H_2)=\frac{3}{8}$. Ma'lumki:

$$P\langle A|H_1\rangle=\frac{3}{5},\qquad P\langle A|H_2\rangle=\frac{1}{3},$$

$$P\langle B|H_1\rangle=\frac{2}{5},\qquad P\langle B|H_2\rangle=\frac{2}{3}.$$

A va B hodisalarning ehtimolini to‘la ehtimollik formulasidan topamiz:

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Izlanayotgan ehtimolliklar quyidagilarga teng:

a) $$P\langle H_1|A\rangle=\frac{P(H_1)P\langle A|H_1\rangle}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{1/2}=\frac{3}{4};$$

b) $$P\langle H_2|B\rangle=\frac{P(H_2)P\langle B|H_2\rangle}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

7. Teng kuchli raqiblarning nimani yutish ehtimoli katta: (durang o‘yin bundan mustasno):

a) to‘rt partiyadan uchtasini yoki sakkiz partiyadan beshtasinimi?

b) to‘rt partiyadan kamida uchtasinimi yoki sakizta partiyadan kamida beshtasinimi?

Yechilishi. Raqiblar teng kuchli bo‘lganligi sababli har bir partiyada yutish va yutqazish ehtimolligi teng va quyidagicha

$$p=q=1/2.$$

a) to‘rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli:

$$P_{4,3}=C_4^1\frac{1}{2^4}=\frac{1}{4}.$$

Sakkiz partiyadan beshtasini yutish ehtimoli:

$$P_{8,5}=C_8^3\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32}.$$

$\frac{1}{4}>\frac{7}{32}$ bo‘lganligi uchun to‘rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli katta.

b) to‘rt partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimoli:

$$R_{4,3}=P_{4,3}+P_{4,4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16},$$

sakkizta partiyadan kamida beshtasini yutish ehtimoli esa

$$R_{8;5}=P_{8;5}+P_{8;6}+P_{8;7}+P_{8;8}=\frac{7}{32}+\left(\frac{8\cdot 7}{2}+8+1\right)\frac{1}{2^8}=\frac{93}{256}.$$

$\frac{93}{256}>\frac{5}{16}$ bo'lganligi uchun sakkizta partiyadan kamida beshtasini yutish ehtimoli katta.

8. 100 ta mahsulotdan iborat partiya orasida 10 ta yaroqsiz mahsulot bor. Tavakkaliga 5 ta mahsulot tekshirishga olingan. Tanlanmadagi yaroqsiz mahsulotlar soni X tasodifiy miqdorning taqsimotini tuzing.

Yechilishi. Tanlanmadagi yaroqsiz mahsulotlarning soni 0 dan 5 gacha ixtiyoriy butun sonlarga teng bo'lishi mumkin bo'lganligi uchun X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari x_i lar quyidagilar bo'lishi mumkin:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$

Tanlanmada $k(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ ta yaroqsiz mahsulot bo'lishligining ehtimoli

$$P(X=k)=\frac{C_{10}^{k}C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}$$

ga teng.

0,001 aniqlikda berilgan formula bilan hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

$p_1 = P(X = 0)=0,583,$ $p_2 = P(X = 1)=0,340,$
$p_3 = P(X = 2)=0,070,$ $p_4 = P(X = 3)=0,007,$
$p_5 = P(X = 4)=0,$ $p_6 = P(X = 5)=0.$

$\sum_{k=1}^{6} p_k=1$ tenglik yordamida tekshirib hisoblashlar to'g'ri olib borilganligiga ishonch hosil qilamiz.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

9. Agar A hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 243 ta sinovda rosa 70 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechilishi: Masala shartiga ko'ra $n=243$, $k=70$, $p=0,25$, $q=0,75$; $n=243$ yetarlicha katta son bo'lgani uchun Laplasning ushbu lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

bu yerda

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning qiymatini topamiz:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0,25}{\sqrt{243\cdot 0,25\cdot 0,75}}=\frac{9,25}{6,75}=1,73.$$

Jadvaldan (Ilovadan) j(1,37)=0,1561 ni topamiz.

Izlanayotgan ehtimol

$$P_{243}(70)=\frac{1}{6,75}\cdot 0,1561=0,0231.$$

10. X- diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib $x_1>x_2$. X-ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. Matematik kutilish va dispersiya ma'lum: $M(x)=1,4$, $D(x)=0,24$. X-ning taqsimat qonunini toping.

Diskret tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollari yig'indisi birga teng. Shuning uchun X-ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli $1-0,6=0,4$ ga teng. Demak:

X:	x_1	x_2
P	0,6	0,4

x_1 va x_2 larni topish uchun bu sonlarni o'zaro bog'laydigan ikkita tenglamani tuzish lozim. Shu maqsadda biz ma'lum matematik kutilish va dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

$M(X)$ ni topamiz. $M(X)=0,6\,x_1+0,4x_2$. Shartga ko'ra $M(X)=1,4$. Demak:

$$0,6x_1+0,4x_2=1,4.$$

Ikkinchi tenglamani hosil qilish uchun bizga ma'lum dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz. Buning uchun X^2 ning taqsimot qonunini yozamiz:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4

$$M(x^2)=0,6x_1^2+0,4x_2^2;$$

$$D(x)=M(x^2)-\left(M(x)\right)^2=0,6x_1^2+0,4x_2^2-(1,4)^2.$$

$D(x)=0,24$ bo'lgani uchun: $0,6x_1^2+0,4x_2^2=2,2;$

$$\begin{cases}0,6x_1^2+0,4x_2^2=1,4;\\0,6x_1^2+0,4x_2^2=2,2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}\cup\begin{cases}x_1=1,8\\x_2=0.8\end{cases}$$

Shartga ko'ra $x_1 > x_2$, shuning uchun masalani faqat birinchi yechim

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}\tag{2}$$

qanoatlantiradi. (2) ni (1) ga qo'yib, izlanayotgan taqsimat qonunini hosil qilamiz:

X	1	2
P	0,6	0,4

11. Radiusi a bo'lgan aylanadan olingan tasodifiy nuqta radius-vektorining aylana diametriga proeksiyasi X ning taqsimot funksiyasi quyidagicha (arcsinus qonuni):

$$F(x)=\begin{cases}1 & agar\quad x\ge a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & agar\ -a<x<a,\\ 0 & agar\quad x\le -a.\end{cases}$$

Aniqlang:

a) X ning qiymatlari $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushishi ehtimolini;

b) X tasodifiy miqdor ehtimolligining zichlik funksiyasi f(x) ni;
d) taqsimotning moda va medianasini.

Yechilishi. a) X tasodifiy miqdor qiymatlari $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushishi ehtimoli quyidagiga teng:

$$\mathrm{P}\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

b) X tasodifiy miqdor ehtimolligining zichlik funksiyasi f(x) quyidagiga teng:

1) (−a; a) oraliqqa tegishli barcha x lar uchun

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2) x ning qolgan barcha qiymatlarida nolga teng.

d) $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$ funksiya maksimumga ega bo‘lmagani uchun arcsinus qonuni modaga ega emas. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_{0,5}}{a} = \frac{1}{2}$ tenglamani yechib $x_{0,5} = 0$ medianani topamiz.

12. 100 dona mahsulotdan 10 donasining kamchiligi bor. Tekshirish maqsadida barcha mahsulotlardan tasodifiy suratda 5 donasi tanlanadi (tasodifiy tanlanma). Tanlanmadagi kamchiligi bor mahsulotlar sonining matematik kutilmasini toping.

Yechilishi. Tanlanmadagi kamchiligi bor mahsulotlarning tasodifiy soni quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4,\ x_6=5.$$

X tasodifiy miqdorning berilgan x_i qiymatlarni qabul qilishligi ehtimoli $p_i = P(X=x_i)$ quyidagiga teng:

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Izlanayotgan matematik kutilma quyidagiga teng:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{6}(i-1)\frac{C_{10}^{i-1}C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}} = \frac{1}{C_{100}^{5}}\sum_{j=0}^{5} jC_{10}^{j}C_{90}^{5-j}.$$

$(1+u)^{10}(1+u)^{90}$ ko‘paytmadagi u^5 had oldidagi koeffitsient

$\sum_{i=0}^{6} C_{10}^{j} C_{90}^{5-j}$ ga teng bo‘lganligi uchun:

$\frac{\partial}{\partial x}\{(1+tu)^{10}(1+u)^{90}\}\Big|_{t=1} = 10u(1+u)^{99}$ ifodadagi u^5 oldida turgan

koeffitsient $\sum_{j=0}^{5} jC_{10}^{j}C_{90}^{5-j}$ ga teng. Shunga ko‘ra: $\sum_{j=0}^{5} jC_{10}^{j}C_{90}^{5-j} = 10C_{99}^{4}$,

Bundan esa:

$$\bar{x} = \frac{10C_{99}^{4}}{C_{100}^{5}} = 0,5.$$

13. Kemaning yon tomonga chayqalishi amplitudasini tasodifiy miqdor sifatida ko‘rsak, uning ehtimolligi zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi (Relye qonuni):

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad (x \geq 0).$$

a) Matematik kutilma M[X] ni, b) dispersiya D[X] va o‘rtacha kvadratik chetlashish σ_x ni; d) uchinchi va to‘rtinchi tartibli μ_3 va μ_4 markaziy momentlarni aniqlang.

Yechilishi. Momentlarni hisoblash quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashga keltiriladi:

$$J_n = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt, \quad (n>0 \text{ butun}).$$

Bu integral n juft bo‘lganda:

$$J_{2k} = \frac{1}{2}\tilde{A}\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

bu yerda

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5)...3 \cdot 1,$$

va *n* toq bo‘lganda:

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2}\tilde{A}(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

a) Yon tomonga chayqalish tasodifiy amplitudasinining matematik kutilmasi:

$$\bar{x} = \mathrm{M}[X] = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx.$$

$\frac{x}{a\sqrt{2}} = t$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$M[X] = 2\sqrt{2a} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2} a J_2 = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} a = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

b) $\sigma_x^2 = \mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - (\bar{x})^2 = 4a^2 J_3 - \frac{\pi}{2} a^2 = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$,

bo‘lganligi uchun $\sigma_x = a\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$ bo‘ladi.

d) $\mu_3 = \mathrm{M}[(X - \bar{x})^3] = m_3 - 3\bar{x} m_2 + 2(\bar{x})^3$ ifodaga

$m_3 = 4\sqrt{2} a^3 J_4 = 3a^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ qiymatni qo‘yib $\mu_3 = a^3(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ni hosil qilamiz.

$\mu_4 = \mathrm{M}[(X - \bar{x})^4] = m_4 - 4\bar{x} m_3 + 6\bar{x}^2 m_2 - 3\bar{x}^4$ ifodaga $m_4 = 8a^4 J_5 = 8a^4$

qiymatni qo‘yib $\mu_4 = a^4\left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right)$ ni hosil qilamiz.

14. Radioapparat 1000 ta elektroelementlardan tashkil topgan. Bir yil ichida bitta element buzilishi ehtimolligi 0,001 ga teng va bu ehtimollik qolgan elementlarning holatiga bog‘liq emas. Bir yil ichida ikki va hech bo‘lmaganda ikkita element buzilishi ehtimolini toping.

Yechilishi. X tasodifiy miqdor deb, buzilgan elementlar sonini belgilasak, bu tasodifiy miqdor Puasson qonuni bilan taqsimlangan bo‘ladi, ya’ni

$$\mathrm{P}(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Bu yerda a = np = 1000 · 0,001 = 1 ekanligini hisobga olgan holda

1) ikki elementning buzilishi ehtimolligi:

$$P(X=2)=P_2=\frac{a^2}{2!}e^{-a}=\frac{1}{2e}=0,184;$$

2) hech bo'lmaganda ikkita element buzilishi ehtimolligi

$$P(X\geq 2)=\sum_{m=2}^{\infty}P_m=1-P_0-P_1=1-e^{-a}(1+a)=1-\frac{2}{e}\approx 0,264.$$

15. Obyektgacha bo'lgan masofani o'lchashda, sistematik va tasodifiy xatoliklarga yo'l qo'yiladi. Sistematik xatolik kattaligi 50 м ga teng bo'lib, masofa kamaytirilib o'lchangan. Tasodifiy xatoliklar σ =100 м, o'rtacha kvadratik chetlanishga ega bo'lgan normal qonun bilan taqsimlangan.

1) Absolyut qiymati bo'yicha 150 м dan oshmaydirgan xatolik bilan masofani o'lchash ehtimolligini toping.

2) O'lchangan masofaning haqiqiy masofadan oshmasligi ehtimolligini toping.

Yechilishi. X deb masofa o'lchashdagi xatoliklar yig'indisini belgilaymiz. Uning sistematik tashkil etuvchisi $\bar{x}=-50$ м ga teng. Demak, xatoliklar yig'indisi ehtimolliklari zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}.$$

1) Umumiy formulaga ko'ra

$$P(|X|<150)=P(-150<X<150)=\frac{1}{2}\left[\hat{O}\left(\frac{150+50}{100}\right)-\hat{O}\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\hat{O}(2)-\hat{O}(-1)].$$

Ehtimollik integrali toq funksiya bo'lganligi sababli

$$\hat{O}(-1)=-\hat{O}(1).$$

Bundan esa

$$P(|X|<150)=\frac{1}{2}\left[\hat{O}(2)+\hat{O}(1)\right].$$

Jadvaldan quyidagilarni topamiz: $\Phi(2) = 0{,}9545$, $\Phi(1) = 0{,}6827$.

Demak: $P(|X| < 150) = 0{,}8186$.

2) O'lchangan masofaning haqiqiy masofadan oshmasligi ehtimolligi

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}5) + \Phi(\infty)].$$

$\hat{O}(\infty) = \lim_{x\to\infty}\hat{O}(x) = 1$ va jadvalga ko'ra $\Phi(0{,}5) = 0{,}3829$ bolganligi uchun

$$P(-\infty < X < 0) = 0{,}6914$$

bo'ladi.

16. ξ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$P_\xi(x) = \begin{cases} h, -2 \le x \le 3 \text{ää} \\ 0, x < -2, x > 3 \text{ää} \end{cases}$$

h, $M\xi$, $D\xi$, $P(1 < \xi < 5)$ ää $F_\xi(x)$ larni toping:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-2} P_\xi(x)dx + \int\limits_{-2}^{3} P_\xi(x)dx + \int\limits_{3}^{\infty} P_\xi(x)dx = 5h = 1 \Rightarrow h = 0{,}2;$

2) $M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xP_\xi(x)dx = \int\limits_{-2}^{3} xP_\xi(x)dx = 0{,}2\int\limits_{-2}^{3} xdx = 0{,}1x^2\Big|_{-2}^{3} = 0{,}5;$

3) $D_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-0{,}5)^2 \cdot P_\xi(x)dx = \int\limits_{-2}^{3} (x-0{,}5)^2 \cdot 0{,}2dx \approx 2{,}1;$

4) $P(1 < \xi < 5) = \int\limits_{1}^{5} P_\xi(x)dx = \int\limits_{1}^{3} P_\xi(x)dx + \int\limits_{3}^{5} P_\xi(x)dx = \int\limits_{1}^{3} 0{,}2dx = 0{,}4.$

5) Agar $x<-2$ bo'lsa

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} P_\xi(x)dx = 0.$$

Agar $x>3$ bo'lsa

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x}P_{\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{-2}P_{\xi}(x)dx+\int_{-2}^{3}P_{\xi}(x)dx+\int_{3}^{x}P_{\xi}(x)dx=\int_{-2}^{3}0,2dx=1,$$

chunki x<-2 da va x>3 da $P_{\xi}(x)=0$.

Agar $-2\le x\le 3$ bo'lsa

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x}P_{\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{-2}P_{\xi}(x)dx+\int_{-2}^{x}P_{\xi}(x)dx=\int_{-2}^{x}0,2dx=0,2\cdot(x+2).$$

Shunday qilib

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ 0,2(x+2) & -2\le x\le 3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

11-rasm.

17. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 2 ga teng. Tajriba natijasida X ning (12:14) intervalda yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

X-ning(α,β) intervalda tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli

$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\tau}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\tau}\right)$; bu yerda

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-x^2/2}dx-$ Laplas funksiyasidir.

Bunga $\alpha=12;\beta=14;a=10;\tau=2$ — juftlikni qo'yib

$$\frac{\beta-a}{\tau}=\frac{14-10}{2}=2;\frac{\alpha-a}{\tau}=\frac{12-10}{2}=1$$

va $P(\alpha<x<\beta)=\Phi(2)-\Phi(1)$ ni hosil qilamiz.

Jadvaldan foydalanib:

$\Phi(2)=0,4772, \Phi(1)=0,3413$ ni topamiz.

Izlanayotgan ehtimollik

$P(\alpha<x<\beta)=0,1359$ ga teng.

18. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum $a-$ matematik kutilishini 0,95 ishonchlik bilan baholash uchun ishonchlik intervalini toping. Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=5$, tanlanma o'rtacha qiymat $\bar{x}=14$ va tanlanma hajmi $n=25$ berilgan.

Ushbu ishonchlik intervalini tolish talab etilmoqda:

$$\bar{x}-t\frac{\tau}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t\frac{\tau}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Bu yerda t-dan boshqa barcha kattaliklar ma'lum, t ni topamiz:

$2\Phi(t)=0,95$ munosabatdan $\Phi(t)=0,475$ ni hosil qilamiz. Jadvaldan t=1,96 ni topamiz, t=1,96, $\tau=5$, $\bar{x}=14$, $n=25$ ni (1) ga qo'yib uzil-kesil ushbu izlanayotgan ishonchlik intervalini hosil qilamiz: $12,04<a<15,96$

2-§. Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Berilgan hodisalarning ehtimolini toping.

1. Talaba dasturdagi 60 savoldan 45 tasini biladi. Har bir imtihon bileti uchta savoldan tashkil topgan. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

Talaba tushgan biletning:

a) barcha uchta savolini biladi;

b) faqat ikkita savolini biladi;

d) faqat bitta savolini biladi.

2. Ikkita yashikning birida 5 ta oq va ikkinchisida 10 ta qora shar bor. Birinchi yashikdan ikkinchisiga tavakkaliga bir shar olindi, so'ngra ikkinchi yashikdan tavakkaliga bir shar olindi. Olingan shar qora bo'lishligi ehtimolini toping.

3. Uchta mergan bir xil va bog'liqsiz sharoitda bitta mo'ljalga qarab bir martadan o'q uzishdi. Birinchi merganning mo'ljalga o‘q tekkizish ehtimoli 0,9 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga, uchinchisiniki esa 0,7 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) faqat bir mergan mo‘ljalga o‘q tekkizdi;

b) faqat ikkita mergan mo‘ljalga o‘q tekkizdi;

d) uchta mergan ham mo‘ljalga o‘q tekkizdi.

4. Bir xil va bog‘liqsiz tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 1600 tajribada hodisa 1200 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

5. Avariya ro‘y berishini bildirish uchun uchta bir-biridan bog‘liq bo‘lmagan holda ishlovchi qurilma o‘rnatilgan. Avariya vaqtida birinchi qurilma ishga tushishining ehtimoli 0,9 ga, ikkinchi qurilma ishga tushishining ehtimoli 0,95 ga va uchinchisi ishga tushishining ehtimoli 0,85 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimoli topilsin:

avariya vaqtida:

a) faqat bitta qurilma ishga tushishi;

b) faqat ikkita qurilma ishga tushishi;

d) barcha qurilmalar ishga tushishi.

6. Bir xil va bog‘liqsiz tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,02 ga teng. 150 ta tajriba o‘tkazilganda hodisa 5 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

7. 1000 dona tovarda 10 ta yaroqsiz tovar uchraydi. Shu 1000 dona tovardan tavakkaliga 50 dona olinganda ularning rosa 3 donasi yaroqsiz bo‘lishligi ehtimolini toping.

8. Bir xil va bog‘liqsiz tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 125 ta tajriba o‘tkazilganda hodisa 75 dan kam bo‘lmagan va 90 dan ko‘p bo‘lmagan marta ro‘y berish ehtimolini toping.

9. Uchta dastgohda bir xil va bog‘liqsiz sharoitda bir turli detal tayyorlanadi. Birinchi dastgohda 10% detal, ikkinchisida 30% detal, uchinchisida 60% detal tayyorlanadi. Har bir detalning yaroqli bo‘lib tayyorlanish ehtimoli: birinchi dastgohda 0,7 ga, ikkinchi dastgoxda 0,8 ga va uchinchi dastgohda 0,9 ga teng. Barcha tayyorlangan detallardan tavakkaliga olingan detalning yaroqli bo'lishi ehtimolini toping.

10. Aka-uka har biri 12 kishidan iborat ikkita sport komandasiga qatnashadilar. Ikki yashikda 1 dan 12 gacha nomerlangan 12 ta bilet bor. Har bir komanda a'zolari tavakkaliga bittadan biletni aniq bir yashikdan olishadi. Olingan bilet yashikka qaytarilmaydi. Ikkala aka-ukaning 6-nomerli bilet olishligi ehtimoli topilsin.

11. Uchta quroldan bir vaqtda mo'ljalga qarab o'q uzishdi. Bir otishda mo'ljalga tekkizish ehtimoli birinchi qurol uchun 0,8 ga, ikkinchi qurol uchun 0,7 ga va uchinchi qurol uchun esa 0,9 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) faqat bir o'q mo'ljalga tegishi;

b) faqat ikkita o'q mo'ljalga tegishi;

d) barcha uchta o'q mo'ljalga tegishi;

e) hech bo'lmaganda bir o'q mo'ljalga tegishi.

12. Uch mergan bir vaqtda mo'ljalga o'q uzishdi. Mo'ljalga o'q tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7 ga, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga, uchinchi mergan uchun esa 0,9 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) faqat bir mergan mo'ljalga o'q tekkizishi;

b) faqat ikki mergan mo'ljalga o'q tekkizishi;

d) barcha uchta mergan mo'ljalga o'q tekkizishi;

e) hech bo'lmaganda bitta mergan mo'ljalga o'q tekkizishi ehtimolini toping.

13. Talaba dasturning 60 ta savolidan 50 tasini biladi.

Imtihon bileti 3 ta savoldan iborat. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: Talaba

a) faqat ikkita savolni biladi;

b) uchta savolni biladi;

d) hech bo'lmaganda bitta savolni biladi.

14. Har biri 10 sportchidan iborat ikki komanda musobaqa qatnashchilariga nomer berish uchun qur'a tashlashmoqda. Ikki aka-uka turli komandalarning a'zosidirlar. Aka-ukaning ikkalasi ham musobaqada 5-nomer bilan qatnashish ehtimolini toping.

15. Ikki mergan mo'ljalga bittadan o'q uzishdi. Har bir merganning mo'ljalga o'q tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) ikkala mergan mo'ljalga o'q tekkizishdi;

b) ikkala mergan mo'ljalga o'q tekkizishmadi;

d) hech bo'lmaganda bir mergan mo'ljalga o'q tekkizishdi.

16. Ikki o'q otishda hech bo'lmaganda bir marta mo'ljalga o'q tekkizish ehtimoli 0,96 ga teng. To'rt marta o'q otishda uch marta mo'ljalga o'q tekkizish ehtimolini toping.

17. Nashriyot ikkita aloqa bo'limiga gazetalar yuboradi. O'z vaqtida gazeta yetib borishi ehtimoli har bir aloqa bo'limi uchun 0,9 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

a) ikkala aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta yetib borishi;

b) faqat bir aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta yetib borishi;

d) hech bo'lmaganda bitta aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta yetib borishi.

18. Ikkita yashikning har birida 2 ta qora va 8 ta oq shar bor. Birinchi yashikdan tavakkaliga bir shar olinib, ikkinchi yashikka solindi. So'ngra ikkinchi yashikdan bir shar olindi. Ikkinchi yashikdan olingan shar oq bo'lishining ehtimolini toping.

19. Ikkita harf teruvchilar bir xil hajmda harf terdilar. Birinchi harf teruvchi xatoga yo'l qo'yishining ehtimoli 0,051 ga teng, ikkinchisi xatoga yo'l qo'yishining ehtimoli 0,1 ga teng. Terilgan harflarni tekshirilganda xato topishdi. Bu xatoga birinchi harf teruvchi yo'l qo'yganligining ehtimolini toping.

20. Bog'liqsiz tajribalarning har birida hodisaning ro'y berishi ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda hodisaning 70 dan kam bo'lmagan va 80 dan ortiq bo'lmagan marta ro'y berishligining ehtimolini toping.

Diskret tasodifiy miqdor X faqat ikkita $\tilde{o}_1$ va $\tilde{o}_2$ qiymat qabul qiladi va $\tilde{o}_1 < \eth_2$. X ning $\tilde{o}_1$ qiymatini qabul qilish ehtimoli $\eth_1$

ma'lum, matematik kutilmasi $M(X)$ va dispersiyasi $D(X)$ ma'lum. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

№	P_1	M(X)	D(X)	№	P_1	M(X)	D(X)
1	0,1	1,9	0,09	11	0,2	5,8	0,16
2	0,2	2,8	0,16	12	0,3	6,7	0,21
3	0,3	3,7	0,21	13	0,4	1,6	0,24
4	0,4	4,6	0,24	14	0,5	2,5	0,25
5	0,5	5,5	0,25	15	0,6	3,4	0,24
6	0,6	6,4	0,24	16	0,7	4,3	0,21
7	0,7	1,3	0,21	17	0,8	5,2	0,16
8	0,8	2,2	0,16	18	0,9	6,1	0,09
9	0,9	3,1	0,09	19	0,1	1,2	0,36
10	0,1	4,9	0,09	20	0,2	3,8	0,16

X – tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi G'(x) bilan berilgan. Uning zichlik funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin. Taqsimot va zichlik funksiyalarining grafigi chizilsin.

1. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \text{ő}^2 & \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 1 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 1 \end{cases}$$

2. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le 1 \\ \dfrac{1}{10}(3\text{ő}^2 + \text{ő} - 4) & \text{agar} \quad 1 < \text{ő} \le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 2 \end{cases}$$

3. $$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le -0,2 \\ 5\text{ő}+1 & \text{agar} \quad -0,2 < \text{ő} \le 0 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 0 \end{cases}$$

4. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le -\pi \\ \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{agar} \quad -\pi < \text{ő} \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \frac{\sqrt{\text{ő}}}{2} \quad \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 4 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > 4 \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 4 \\ Ln\frac{x}{2} \quad \text{agar} \quad 4 < \text{ő} \le 4e \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > 4e \end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \frac{1}{3}(2\text{ő}^2 + x) \quad \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > 1 \end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \frac{1}{2}(\text{ő}^3 + x) \quad \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > 1 \end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ 3\text{ő}^2 + 2\text{ő} \quad \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le \frac{1}{3} \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > \frac{1}{3} \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ 2\sin x \quad \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le \frac{\pi}{6} \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő} > \frac{\pi}{6} \end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le 1 \\ \frac{1}{6}(\text{ő}^2+3x-4) \quad \text{agar} \quad 1<\text{ő}\le 2 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>2 \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}(3\text{ő}-1) \quad \text{agar} \quad \frac{1}{3}<\text{ő}\le 2 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>2 \end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le 0 \\ \text{ő}^3 \quad \text{agar} \quad 0<\text{ő}\le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>1 \end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le -1 \\ \sqrt{x+1} \quad \text{agar} \quad -1<\text{ő}\le 0 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>0 \end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le 3 \\ Ln\frac{x}{3} \quad \text{agar} \quad 3<\text{ő}\le 3e \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>3e \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le \frac{3\pi}{4} \\ \cos 2\text{ő} \quad \text{agar} \quad \frac{3\pi}{4}<\text{ő}\le \pi \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>\pi \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad \text{ő}\le -1 \\ \text{ő}^2 \quad \text{agar} \quad -1<\text{ő}\le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad \text{ő}>1 \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 3 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 3 \end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le 0 \\ \dfrac{1}{4}(\text{ő}^3 - 2\text{ő}) & \text{agar} \quad 0 < \text{ő} \le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 2 \end{cases}$

20 $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad \text{ő} \le 2 \\ \dfrac{1}{2}(\text{ő}^2 - 3\text{ő}) & \text{agar} \quad 2 < \text{ő} \le 3 \\ 1 & \text{agar} \quad \text{ő} > 3 \end{cases}$

Normal taqsimlangan *X*- tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi *a* va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ-lar berilgan. Bu tasodifiy miqdorning berilgan (α; β) intervalga tushishligining ehtimolini toping.

№	*a*	σ	α	β	№	*a*	σ	α	β
1	2	6	4	9	11	12	4	7	18
2	3	2	3	10	12	13	5	9	18
3	4	2	2	10	13	14	9	11	17
4	5	4	5	9	14	15	8	9	21
5	6	2	4	12	15	16	6	12	9
6	7	2	3	10	16	17	11	9	20
7	8	5	3	15	17	18	6	10	22
8	9	6	5	14	18	19	7	11	23
9	10	4	2	13	19	20	7	13	24
10	11	5	7	17	20	21	9	9	15

Tanlanma o'rtacha qiymati x ga, tanlanma hajmi n ga va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ ga teng bo'lgan normal taqsimottning matematik kutilmasi a ning bahosi uchun 0,95 ishonchlilik bilan ishonch intervalini toping.

№	$\bar{x}$	n	σ	№	$\bar{x}$	n	σ
1	74,69	25	2,5	11	74,79	225	7,5
2	74,70	36	3	12	74,80	256	8
3	74,71	49	3,5	13	74,81	289	8,5
4	74,72	64	4	14	74,82	324	9
5	74,73	81	4,5	15	74,83	381	9,5
6	74,74	100	5	16	74,84	400	10
7	74,75	121	5,5	17	74,85	441	10,5
8	74,76	144	6	18	74,86	484	11
9	74,77	169	6,5	19	74,87	529	11,5
10	74,78	196	7	20	74,88	576	12

3-§. Korrelyatsiya nazariyasi elementlaridan mustaqil ish variantlari

1-variant

Y \ X	18	23	28	33	38	43	n_y
125	1	2					3
150	1	2	5				8
175		3	2	12			17
200			1	8	7		16
225					3	3	6
n_x	2	7	8	20	10	3	n=50

2-variant

Y \ X	5	7	9	11	13	15	n_y
40	2	4					8
50		3	7				6
60			5	30	10		8
70			7	10	8		12
80				5	6	3	11
n_x	4	9	8	9	10	5	n=45

3-variant

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4					6
50		3	7				10
60			5	30	10		45
70			7	10	8		25
80				5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n=100

4-variant

Y \ X	7	12	17	22	27	32	n_y
1					2	3	5
4			1	3	2	1	7
7		1	4	3	2		10
10		1	3	3			7
13	3	3					6
n_x	3	5	8	9	6	4	n=35

5-variant

Y \ X	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	n=100

6-variant

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	n=100

7-variant

Y \ X	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	n=100

8-variant

Y \ X	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3					6
40		5	4				9
50	4		40	2	4		50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
n_x	7	8	49	16	17	3	n=100

9-variant

Y \ X	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	n=100

10-variant

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
110	1	5					6
120		5	3				8
130			3	40	12		55
140			2	10	5		17
150				3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	n=100

11-variant

Y \ X	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	1					6
30		6	2				8
40			5	40	5		50
50			2	8	7		17
60				4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n=100

12-variant

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	n=100

13-variant

Y \ X	11	14	17	20	23	26	n_y
30	1	3					4
60		3	4				7
90			5	11	9		25
120				10	5	3	18
150						2	2
n_x	1	6	9	21	24	5	n=56

14-variant

Y \ X	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	35	4		45
55			2	8	6		16
65				14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	n=100

15-variant

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
100	1	5					6
110		5	3				8
120			3	40	12		55
130			2	10	5		17
140				3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	n=100

16-variant

Y \ X	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	n=100

17-variant

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
100	2	1					3
120		3	4	3			10
140			5	10	8		23
160				2	6	1	9
180					1	4	5
n_x	2	4	9	15	15	5	n=50

18-variant

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4					6
55		3	5				8
65			5	35	5		45
75			2	8	17		27
85				4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	n=100

19-variant

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5					8
20		4	4				8
30			7	35	8		50
40			2	10	8		20
50				5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	n=100

20-variant

Y \ X	0	2	4	6	8	10	n_y
7	19	1					20
20	2	14					16
33		1	20	1			2
46				15	6	6	27
59				2	9		11
n_x	21	16	20	18	19	6	n=100

21-variant

Y \ X	11	14	17	20	23	26	n_y
30	1	3					4
60		3	4				7
90			5	11	9		25
120				10	5	3	18
150						2	2
n_x	1	6	9	21	14	5	n=56

22-variant

Y \ X	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3					6
40		5	4				9
50			40	2	4	4	50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	17	7	n=100

23-variant

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5				25
15	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
25			8	13	7	28
30				5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	n=150

24-variant

Y \ X	0	4	6	8	10	n_y
20	19	1	1			21
40	2	14				16
60		3	22	2		27
80				15		15
100					21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

25-variant

Y \ X	0	1	2	3	4	n_y
9	20	7				27
19	5	15	3			23
29		3	17	8		28
39		1	4	13	5	23
49				7	42	49
n_x	25	26	24	28	47	n=150

26-variant

Y \ X	30	60	90	120	150	180	210	n_y
100	3	2	2	1				8
200	1	4	3	1				9
300		1	5	2				8
400		1	4	4	1			10
500				2	3			5
600				1	4	1		6
700					3	2	1	6
800					1	4	5	10
n_x	4	8	14	11	12	7	6	n=62

27-variant

Y \ X	0	4	5	7	n_y
5	10	5	5		20
10	5	25			30
15			14	13	27
20			13	10	23
n_x	15	30	32	23	n=100

28-variant

Y \ X	13	15	17	19	21	23	25	n_y
15					7	5	3	15
25			3	5	4	2		14
35			6	8	4			18
45	1	4	3	1				9
55	2	5						7
n_x	3	9	12	14	15	7	3	n=63

29-variant

Y \ X	3	9	12	15	21	27	n_y
35				1		1	2
45			1	5	4	5	15
55			2	18	10	2	32
65		6	14	2	2		24
75		6	3				9
85	4	8					12
95	6						6
n_x	10	20	20	26	16	8	n=100

30-variant

Y \ X	18	24	30	36	42	n_y
55			1	1	1	3
65	1	4	3	2		10
75	1	8	5	4		18
85	4	6	3			13
95	3	3				6
n_x	9	21	12	7	1	n=50

ADABIYOTLAR

1. *Гмурман В.П.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: 1999.

2. *Гмурман В.П.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. —М.: 2000.

3. *Sirojiddinov S.X., Matatov M.M.* Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. —T.: "O'qituvchi", 1980.

4. *Севостянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. —М.: 1982.

5. *Калинина В.Н., Панкин В.Ф.* Математическая статистика. —М.: 1998.

6. *Румшиский Л.З.* Элементы теории вероятностей. —М.: 1970.

7. *Вентцел Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложение. —М.: 2000.

8. *Абзалимов Р.Р.* Элементарные сведения из теории корреляции. Методические указания. —Т.: —1997 г.

9. *Калинина В.М.* Математическая статистика. —М.: Дрофа, 2002. 336 стр.

10. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПБ-Лан, 2002. 256 стр.

11. *Манита А.Д.* Теория вероятностей и математическая статистика. Интернет — учебник. WWW.teor.ver.-online.narod.ru

12. *Корнилов Г.И.* Математическая статистика. Конспект лекций. Кафедра информационных систем и высшей математики. Институт делового Админстрирования. Кривой Рог. Библиотека Интернет-учебник. WWW.5 ballov.ru.

13. *Рыбников К.А.* Учебник по математической статистики. Интернет-учебник. WWW.5 ballov.ru.

14. *Боровиков В.П. Ивченко Г.И.* Учебник по математической статистике с упражнениями в системе Statistica. Интернет-учебник. WWW.5 ballov.ru.

ILOVALAR

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ funksiyaning qiymatlari jadvali

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.00	0.0000	0,29	0,1141	0,58	0,2190	0,87	0,3078
0,01	0,0040	0,30	0,1179	0,59	0,2224	0,88	0,3106
0,02	0,0080	0,31	0,1217	0,60	0.2257	0.89	0.3133
0,03	0,0120	0,32	0.1255	0.61	0,2291	0,90	0,3159
0,04	0,0160	0,33	0,1293	0,62	0,2324	0,91	0,3186
0,05	0,0199	0,34	0,1331	0,63	0,2357	0,92	0,3212
0,06	0.0239	0,35	0,1368	0,64	0,2389	0,93	0,3238
0,07	0,0279	0,36	0,1406	0,65	0,2422	0,94	0,3264
0,08	0,0319	0,37	0,1443	0,66	0,2454	0.95	0,3289
0,09	0,0359	0,38	0,1480	0,67	0,2486	0,96	0,3315
0,10	0.0398	0,39	0.1517	0,68	0,2517	0,97	0,3340
0,11	0,0438	0,40	0,1554	0,69	0,2549	0,98	0,3365
0,12	0.0478	0,41	0,1591	0,70	0,2580	0,99	0,3389
0,13	0,0517	0,42	0,1628	0,71	0,2611	1,00	0,3413
0,14	0,0557	0,43	0.1664	0,72	0,2642	1,01	0,3438
0.15	0.0596	0.44	0.1700	0.73	0,2573	1,02	0,3461
0,16	0.0636	0.45	0.1736	0,74	0,2703	1,03	0,3485
0,17	0,0675	0.46	0.1772	0,75	0,2734	1,04	0,3508
0,18	0,0714	0,47	0,1808	0,76	0,2764	1,05	0,3531
0,19	0,0753	.0.48	0,1844	0,77	0,2794	1,06	0.3554
0,20	0,0793	0,49	0,1879	0,78	0,2823	1,07	0,3577
0,21	0,0832	0.50	0,1915	0,79	0,2852	1,08	0,3599
0,22	0,0871	0,51	0,1950	0,80	0,2881	1,09	0,3621
0,23	0,0910	0,52	0,1985	0,81	0,2910	1,10	0,3643
0,24	0,0948	0,53	0,2019	0,82	0,2939	1,11	0,3665
0,25	0,0987	0,54	0,2054	0,83	0,2967	1.12	0,3686
0,26	0,1026	0,55	0,2088	0,84	0,2995	1,13	0,3708
0,27	0,1064	0,56	0.2123	0.85	0.3023	1,14	0,3729
0,28	0.1103	0,57	0,2157	0,86	0,3051	1,15	0,3749

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1,16	0,3770	1,47	0,4292	1,78	0,4625	2,18	0,4854
1,17	0,3790	1,48	0.4306	1,79	0,4633	2,20	0,4861
1,18	0.3810	1,49	0,4319	1.80	0.4641	2,22	0,4868
1.19	0.3830	1.50	0.4332	1.81	0.4649	2.24	0.4875
1,20	0.3849	1.51	0.4345	1.82	0.4656	2.26	0.4881
1,21	0,3869	1,52	0,4357	1,83	0,4664	2,28	0,4887
1,22	0,3883	1,53	0,4370	1,84	0,4671	2,30	0,4893
1,23	0,3907	1,54	0,4382	1,85	0,4678	2.32	0,4898
1,24	0,3925	1,55	0,4394	1,86	0,4686	2,34	0,4904
1,25	0,3944	1,56	0,4406	1,87	0,4693	2,36	0,4909
1,26	0,3962	1,57	0,4418	1,88	0,4699	2.38	0,4913
1,27	0,3980	1,58	0,4429	1,89	0,4706	2,40	0,4918
1,28	0.3997	1,59	0,4441	1,90	0,4713	2,42	0,4922
1,29	0,4015	1,60	0,4452	1,91	0,4719	2,44	0,4927
1.30	0,4032	1,61	0.4463	1,92	0,4726	2,46	0,4931
1,31	0,4049	1,62	0,4474	1,93	0,4732	2,48	0,4934
1,32	0,4066	1,63	0,4484	1,94	0,4738	2,50	0,4938
1,33	0,4082	1,64	0,4495	1,95	0,4744	2,52	0,4941
1.34	0,4099	1,65	0,4505	1,96	0,4750	2,54	0,4945
1,35	0,4115	1,66	0,4515	1,97	0.4756	2,56	0,4948
1,36	0,4131	1,67	0,4525	1,98	0.4761	2,58	0,4951
1,37	0,4147	1,68	0,4535	1,99	0,4767	2,60	0,4953'
1,38	0,4162	1,69	0,4545	2,00	0,4772	2,62	0,4956
1,39	0,4177	1,70	0,4554	2,02	0,4783	2,64	0,4959
1,40	0.4192	1.71	0,4564	2,04	0,4793	2,66	0,4961
1,41	0,4207	1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,68	0,4963
1,42	0,4222	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,70	0,4965
1,43	0,4236	1,74	0,4591	2,10	0,4821	2,72	0,4967
1,44	0,4251	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,74	0,4969
1,45	0,4265	1.76	0,4608	2,14	0,4838	2,76	0,4971
1,46	0,4279	1,77	0.4616	2,16	0,4846	2,78	0,4973

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
2,80	0,4974	2,90	0,4981	3,00	0,49865	4,00	0,49996
2,82	0,4976	2,92	0,4982	3,20	0,49931	4,50	0,49999
2,84	0,4977	2,94	0,4984	3,40	0,49966	5,00	0,49999
2,86	0,4979	2,96	0,4985	3,60	0,4998		
2,88	0,4980	2,98	0,4986	3,80	0,49992		

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qiymatlari jadvali

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0149
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,6	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	.010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0102	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$q = q(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

ABZALIMOV
Ravil Rashidovich

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

Muhandislik va muhandislik ishi bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.
100029, Toshkent shahri, Matbuotchilar ko'chasi, 32-uy.
Tel: 236-55-79; faks: 239-88-61.

Nashr uchun mas'ul *M. Tursunova*
Muharrir *A. Bahromov*
Texnik muharrir *A. Berdiyeva*
Musahhih *H. Zokirova*
Sahifalovchi *Z. Boltayev*

Bosishga ruxsat etildi: 10.06.2008. «Tayms» garniturasi. Ofset usulida chop etildi. Qog'oz bichimi 60x84 $^1/_{16}$. Shartli bosma tobog'i 10,0. Nashr bosma tobog'i 9,0. Adadi 500 nusxa. Buyurtma №19. Bahosi shartnoma asosida.

«AVTO-NASHR» bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent sh., 8-mart ko'chasi, 57-uy.