ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ
ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Г. ҒАЙМНАЗАРОВ, О.Г.ҒАЙМНАЗАРОВ

ФУНКЦИОНАЛ АНАЛИЗ КУРСИДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

(Ҳақиқий ўзгарувчанлик функциялар назарияси ва метрик фазолардан масалалар ечиш намуналари)

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган

«FAN VA TEXNOLOGIYA» – 2006

Г.Ғаймназаров, О.Г.Ғаймназаров. Функционал анализ курсидан масалалар ечиш (ҳақиқий ўзгарувчанлик функциялар назарияси ва метрик фазолардан масалалар ечиш намуналари). — Т., «Fan va texnologiya» нашриёти, 2006. 115 бет.

Университетларда В-460100 (математика таълими), В-480100 (амалий математика ва информатика таълими) йўналиши бўйича таҳсил олаётган талабалар учун қўлланма.

Бу қўлланмадан педагогика олий ўқув юртларининг математика, математика ва информатика йўналишидаги бакалаврият талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Тақризчилар: К.О.ҚЎРҒОНОВ – ЎзМУ физика-математика фанлар номзоди, доцент; Э.М.МАРДОНОВ – СамДУ физика-математика фанлар номзоди, доцент; К.ЖАМУРАТОВ – ГулДУ физика-математика фанлар номзоди, доцент.

СЎЗ БОШИ

Ушбу қўлланма В–460100 (математика) ва В–480100 (амалий математика ва информатика) таълими йўналиши бўйича университетларда таҳсил олаётган талабалар учун мўлжалланган.

Бу ўқув қўлланмада функционал анализдан масалалар ечиш учун талабаларга ёрдам бериши асосий мақсад қилиб олинди. Чунки функционал анализдан масалалар ечишда талабалар кўпгина қийинчиликка дуч келадилар, яъни муҳокама – мулоҳаза юритишда камчилик ва хатоларга йўл қўядилар. Шу нуқтаи назардан бу ерда масалалар ечиб кўрсатилди. Бу эса улар олган назарий билимларни чуқуррок ўрганишга ва мавзуларни туб мохияти билан англаб олишга ёрдам беради.

Функционал анализ кенг маънода айтганда математик билимларнинг таркибий қисмларини ташкил этиб, ҳозирги замон математика фани учун умумийдир. Шунинг учун у математик билимларда асосий аҳамиятга эга.

Функционал анализ физика, техника масалаларини ечишда ва математик назарияни ривожлантиришда кенг ўрганилаёпилади.

Функционал анализ ҳозирги замон математикасининг тилидан иборат. Лекин бу тилни талабалар томонидан ўзлаштириш осон эмас. Уни ўзлаштириш учун албатта масалалар ечиш талаб этилади.

Ушбу қўлланма функционал анализдан масалалар ечишдаги кўп йиллик тажрибалар асосида, яъни университетда олиб борилган кўп йиллик назарий ва амалий машғулотлар асосида тайёрланди.

Ушбу қўлланма ҳақида фикр-мулохазаларини билдирган шахсларга миннатдорчилик билдирамиз.

Муаллифлар

1-§. ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1. Асосий тушунчалар

Агар А ва В тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлса, А ва В тўпламлар **эквивалент** дейилади ёки **тенг қувватли** тўпламлар дейилади.

Эквивалентлик $\sim$ деб белгиланади, яъни $A \sim B$.

Иккита чекли А ва В тўпламлардаги элементлар сони бир хил бўлса, бундай А ва В тўпламлар эквивалент ёки тенг қувватли бўлади.

Шундай қилиб тўпламларнинг тенг қувватли (бир хил қувватлилик) тушунчаси чекли тўпламлар элементлар сонининг бир хиллик тушунчасининг йиғиндисидан иборат.

Ихтиёрий А тўпламнинг қувватини $\overline{\overline{A}}$ ёки $m(A)$ деб белгилаймиз. Чекли тўплам қуввати тўпламни ташкил этувчи элементлар сонидан иборат.

Масалан: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_3\}$, $\overline{\overline{A}} = 23$, $m(A) = 23$.

Агар А тўплам $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ натурал сонлар тўпламига эквивалент бўлса, А саноқли тўплам дейилади.

Саноқли тўпламнинг қувватини $\aleph_0$ ҳарф билан белгилаймиз:

$$m(N) = \aleph_0 \quad \text{ёки} \quad \overline{\overline{N}} = \aleph_0$$

Натурал сонлар тўпламига эквивалент бўлмаган чексиз тўплам **саноқсиз** тўплам дейилади.

Теорема. [0,1] кесмадаги нуқталар тўплами саноқсиздир.

Таъриф. [0,1] кесмадаги нуқталар тўпламига эквивалент бўлган тўплам **континуум қувватли** тўплам дейилади.

Континуум тўплам қувватини с ҳарф билан белгилаймиз.

$$U = [0,1], \quad m(U) = c \quad \text{ёки} \quad \overline{\overline{U}} = c$$

2. Асосий теоремалар

1.1-теорема. (Кантор-Бернштейн) агар A тўпламнинг A_1 кисм тўплами $A_1 \sim B$ бўлиб B тўпламнинг B_1 кисм тўплами $B_1 \sim A$ булса, у холда $A \sim B$ булади.

1.2-теорема. Чекли ёки саноқли микдордаги чекли ёки саноқли тўпламларнинг бирлашмаси, яна чекли ёки саноқли тўпламдан иборат.

1.3-теорема. Агар A тўпламнинг элементлари чекли параметрлар билан аниқланган бўлиб, ҳар бири бир-бирига боғлиқ бўлмаган холда саноқли тўпламлар қийматларини қабул қилса, у ҳолда бундай $A = \{a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}\}$ тўпламнинг қуввати

$m(A) = \aleph_0$ бўлади.

Бу теоремани қуйидагича хам келтириш мумкин.

1.3А-теорема. Агар A тўпламнинг элементлари n параметр билан аниқланган бўлиб, уларнинг хар бири бошқасига боглиқ бўлмаган ҳолда саноқли тўплам қийматларини қабул қилса, яъни

$$A = \{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\}, \quad x_k = \{x_k^1, x_k^2, \ldots\}; \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

бўлса, у ҳолда $m(A) = \aleph_0$ бўлади.

1.4-теорема. Чекли ёки саноқли миқдордаги континуум тўпламларнинг бирлашмаси яна континуум тўпламдан иборат.

1.4А-теорема. Ҳар қандай $[a, b]$ сегментдаги нуқталар тўплами континуум қувватли тўпламдир.

1.5-теорема. Агар A тўпламнинг элементлари $A = \{a_{i_1, i_2, \ldots}\}$

саноқли параметрлар билан аниқланган бўлиб ҳар бири бир-бирига боғлиқ бўлмасдан иккита хар хил қийматларни қабул қилса, у ҳолда бундай A тўплам қуввати $m(A)=c$ бўлади.

1.6-теорема. Агар A тўпламнинг элементлари $A = \{a_{i_1, i_2, \ldots}\}$

чекли ёки саноқли параметрлар танлаш билан аниқланган бўлиб, хар бири бошқасига боғлиқ бўлмаган ҳолда континуум қийматни қабул қилса, у ҳолда бундай A тўплам қуввати $m(A)=c$ бўлади.

1.7-теорема. Узлуксиз функциялар тўплами континуум

$$m(C[a, b]) = c$$

1.8-теорема. Фараз қилайлик, M ихтиёрий тўплами бўлсин. Агар элементлари Mнинг хамма қисм тўпламларидан иборат бўлган тўплам $\mathcal{M}$ бўлса, у холда $\mathcal{M}$нинг қуввати берилган M тўпламнинг қувватидан катта бўлади, яъни

$$m(\mathcal{M}) > m(M).$$

Демак, биз берилган M ихтиёрий тўпламдан қуввати ундан катта бўлган $\mathcal{M}$ тўпламни тузишимиз мумкин ва бундан яна қуввати $\mathcal{M}$никидан катта бўлган бошқа тўпламни тузишимиз мумкин. Шундай қилиб биз қувватларнинг юқоридан чегараланмаган шкаласини хосил қилишимиз мумкин.

Агар Mнинг қувватини α десак, у холда $\mathcal{M}$нинг қуввати 2^{α} бўлиб, 1.8-теоремани

$$\alpha<2^{\alpha}$$

тенгсизлик кўринишда ифодалаш мумкин. Бу тенгсизлик M чекли тўплам бўлганда кўриниб турибди.

Агар $\alpha = \aleph_0$ бўлса, у ҳолда $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, яъни натурал сонлар тўпламидан тузилган қисм тўпламлар тўпламнинг қуввати, натурал сонлар тўпламнинг қувватидан катта.

1.9-теорема. Натурал сонлар тўпламининг хамма қисм тўпламларидан тузилган тўпламнинг қуввати континуумдир, яъни

$$2^{\aleph_0} = c$$

1.10-теорема. Чекли ёки саноқли миқдордаги саноқли тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси саноқли тўпламдир.

1.11-теорема. Агар A ва B тўпламлар континуум қувватга эга бўлса, у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси AxB хам континуум қувватга эга бўлади.

Агар $\alpha = c$ континуум бўлса, у ҳолда 2^c – гиперконтинуум дейилади.

1.12-теорема. [0,1] сегментда берилган ҳақиқий функциялар тўпламининг қуввати 2^c га тенг, яъни гиперконтинуум қувватидан иборат.

1.13-теорема. Тўғри чизиқнинг барча қисмларидан тузилган тўпламлар тизимининг қуввати 2^c га тенг.

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

қийматлардан қабул қилади ва тўққиз рақамли ёйилмада мумкин бўлган

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

қийматлардан қабул қилади.

1.7-масала.

$$A\{(x,y)\in R^2:\ \ |x|+x=|y|+y,\ \ x^2+y^2\le 1\}$$

тўпламнинг қуввати нимага тенг?

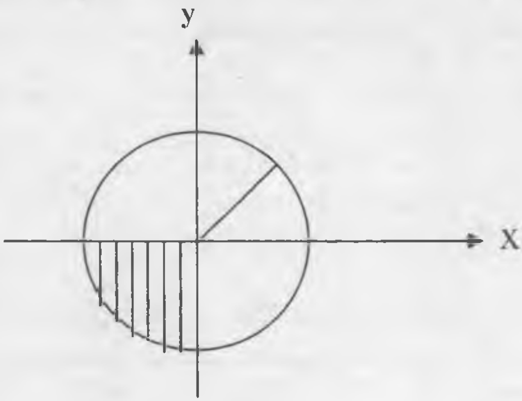
Ечиш. Маркази координат бошида ва радиуси бирга тенг бўлган доиранинг нуқталар тўпламини A_1 деб белгилайлик. Текисликнинг учинчи чоракдаги нуқталар тўпламини (чегарасидагилар билан биргаликда) ва $y=x$, $x\ge 0$ нурда ётувчи нуқталар тўпламини A_2 деб белгилайлик. У ҳолда,

$$A=A_1\cap A_2$$

$$A_1=\{(x,\ y)\in R^2:\ \ x^2+y^2\le 1\}$$

$$A_2=\{(x,\ y)\in R^2:\ \ |x|+x=|y|+y\}$$

бўлади (шаклга қаранг):



$A\subset R^2$ бўлганда $\quad m(A)\le m(R^2)=c$.

Энди

$$B=\{(x,y\ )\in R^2:\ y=x,\ \ x\ge 0,\ \ x^2+y^2\le 1\}$$

бўлсин.

У ҳолда $B\subset A$ ва $m(B)=c$ эканлиги кўриниб турибди.

Шундай килиб,

$$c=m(B)\leq m(A)$$

Энди $c\leq m(A)$ ва $m(A)\leq c$ тенгсизликлардан

$$m(A)=c$$

келиб чиқади.

1.8-масала. $A=[0,1]$, $B=Q\cap[0,1]$ бўлса, у ҳолда $D=A\times B$ тўплам қувватини топинг. Бунда Q рационал сонлар тўплами.

Ечиш. A ва B тўпламларининг Декарт кўпайтмаси (x, y) жуфтлар тўпламидан иборат бўлиб $x\in A$, $y\in B$ лардан иборатдир. Шунинг учун D тўплам қуйидагича ифодаланади.

$$D=\{(x, y)\in R^2:\ 0\leq x\leq 1,\ \ y=\alpha,\ \ \alpha\in B\}$$

Энди $D\subset R^2$ бўлганидан $m(D)\leq m(R^2)=c$

Иккинчи томондан $[0,1]\subset D$ бўлганидан

$$m([0,1])=c\leq m(D)$$

Демак, $m(D)=c$

1.9-масала. «Агар A саноқли тўплам бўлса, у холда $\overline{A}$ тўплам ҳам саноқли» деб тасдиқлаш мумкинми? $\overline{A}$ эса Aнинг туташмаси.

Ечиш. Фараз қилайлик, Q рационал сонлар тўплами бўлсин, яъни

$$Q\subset R=(-\infty, \infty)$$

У ҳолда

$$m(Q)=\aleph_0$$

Энди $\overline{Q}=R$ бўлганидан ва $m(R)=c$ бўлганидан

$$m(\overline{Q})=c$$

ҳосил бўлади. Демак, масаладаги тасдиқ ўринли эмас.

1.10-масала. Комплекс текисликда $\sin z$ функция фақат мавҳум қийматга эга бўладиган нуқталар тўпламининг қувватини топинг.

Ечиш. Изланаётган тўпламни A деб белгилайлик

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x ch y+i\cos x sh y$$

$$shy=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad chy=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

бўлганидан A тўпламда фақат $\sin x ch y=0$ бўладиган R^2 фазонинг нукталари киради. Лекин $chy\neq 0$, $y\in R$. Шунинг учун $A=\{(x,y)\in R^2:\ \ \sin x=0,\ \ |y|<\infty\}$ $A\subset R^2$ бўлганидан $m(A)\leq c$.

Иккинчи томондан

$$B=\{(x,\ y)\in R^2:\ \ x=0,\ \ |y|<\infty\}$$

тўплам A тўплам ичида жойлашган, яъни $B\subset A$.

Энди $m(B)=c$ эканлигини қайд қилсак ва $B\subset A$ муносабатни эътиборга олсак,

$$c=m(B)\leq m(A)$$

Ниҳоят $m(A)\leq c$ ва $m(A)\geq c$ тенгсизликдан $m(A)=c$ келиб чиқади, яъни масала шартидаги тўплам куввати континуумга тенг.

1.11-масала. $[0,1]$ ва $[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{n}\right\}$ тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатинг.

Ечиш. A ва B тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин.

Фараз қилайлик:

$$A_1=\left\{x\in[0,1]:\ \ x=\tfrac{\sqrt{2}}{2^n},\ n\in N\right\},\qquad A=[0,1]$$

$$B_1=\left\{x\in[0,1]:\ \ x=\tfrac{1}{n},\ n\in N\right\},\qquad B=[0,1]\setminus\left\{\tfrac{1}{n}\right\}$$

Энди

$$C_1=A_1\cup B_1=\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{1}{3},\ldots\right)$$

деб белгилайлик.

B_1 ва C_1 тўпламлар саноқли. Шунинг учун унинг элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни рақамлаш қоидаси бўйича ўрнатиш мумкин.

$$A/C_1=B/A_1$$

бўлгани учун бу тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мосликни «ўзини ўзига» қоидаси билан ўрнатиш мумкин.

Бу эса A ва B тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин эканлигини кўрсатади.

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $A=\{x(t)\in C[0,1]:\ x\left(\frac{1}{2}\right)>0\}$ тўплам қуввати қандай бўлади?

2. Фараз қилайлик, A тўғри чизиқда саноқли тўплам бўлсин. Бу A тўпламни α миқдорга ($\alpha\in R$) силжишдан ҳосил бўлган A_α билан кесишмайдиган қилиб силжитиш мумкинми?

3. A тўплам ўзи билан устма-уст тушмайдиган қисм тўпламга эквивалент бўлгандагина чексиз тўплам бўлишини исботланг.

4. $[a,b]$ кесмада берилган ва бу кесманинг ҳеч бўлмаса битта нуқтасида узилишга эга бўлган функциялар тўпламининг қуввати қандай бўлади?

5. Ҳамма монотон функциялар тўпламининг қуввати қандай топилади?

6. Фараз қилайлик, $[a, b]$ кесмада берилган $x(t)$ функциялар ҳар бир t_0 ($t_0\in[a, b]$) нуқтада локал минимумга эга бўлсин.

Бундай $x(t)$ функциялар $[a, b]$да ҳар хил қийматларни сони саноқлидан ортиқ бўлмаслиги исботлансин.

7. $[0,1]$ ва $[0,1]/Q$ тўплам элементлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилсин. Бунда Q рационал сонлар тўплами.

8. $[-1, 1]$ кесмадаги рационал нуқталар тўплами A ва $B=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\le 1\}$ бўлса, у ҳолда $D=A\times B$ тўплам қуввати қандай бўлади?

2-§. ЎЛЧОВЛИ ТЎПЛАМЛАР

1. Масалаларни ечиш учун зарурий тушунчалар

Фараз қилайлик $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ ва $b=(b_1, b_2, ..., b_n)$ лар R фазонинг иккита нуқтаси бўлиб $a_i \leq b_i$ $(i=1, 2, ..., n)$ бўлсин. Ушбу

$$G=\{x \in R_n, x=(x_1, x_2, ..., x_n), a_i<x_i<b_i\}$$

тўплам R_n фазода n ўлчовли очиқ параллелепипед дейилади ва

$$F=\{x \in R_n, x=(x_1, x_2, ..., x_n), a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

тўплам R_n фазода n ўлчовли ёпиқ параллелепипед дейилади.

$G \subset D \subset F$ шартни қаноатлантирувчи D тўплам учи a ва b нуқталарда бўлган n-ўлчовли параллелепипед дейилади.

Агар $A \subset R_n$ тўпламни ўзаро кесишмайдиган $\{D_k\}$ параллелепипедларнинг бирлашмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлса $(A=\cup D_k)$, у холда A элементар тўплам дейилади.

Ушбу

$$\mu^* A = \inf_{A \subset \bigcup_k D_k} \sum_k m D_k$$

сон A $(A \subset R_n)$ тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади, бунда

$$mD = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

сон n ўлчовли параллелепипед ёки F(G - очиқ ёки F -ёпиқ)-нинг хажми дейилади.

Таъриф. Агар $\forall \varepsilon>0$ учун шундай элементар $B \subset R_n$ тўплам мавжуд бўлиб, $A \subset R_n$ бўлганда

$$\mu^* (A \Delta B) < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда A тўплам Лебег бўйича ўлчовли дейилади.

Лебег бўйича қаралаётган ўлчовли тўпламлардаги A тўпламнинг ташқи ўлчови шу тўпламнинг Лебег ўлчови дейилади ва μA деб ёзилади. Ташқи ўлчов билан бир вақтда ички ўлчовни ҳам қайд қилайлик.

Ушбу $\mu_* A = mD - \mu^*(C_A D)$, $A \subset D = \bigcup_k D_k$

сон A тўпламнинг ички ўлчови дейилади.

Энди A тўпламнинг Лебег ўлчовини қуйидагича таърифлаш мумкин.

Таъриф. Агар ташқи ва ички ўлчовлар тенг бўлса, у ҳолда A ***тўплам ўлчовли*** дейилади ва бу сон унинг Лебег ўлчови деб аталади ва

$$\mu^* A = \mu_* A = \mu A$$

деб ёзилади.

Агар бу тенглик бажарилмаса ***тўплам ўлчовсиз*** дейилади.

Агар $n=1$ бўлса, у ҳолда $A \subset R_1$ тўпламнинг ўлчовини чизиқли (бир ўлчовли), $n=2$ бўлса $A \subset R_2$ тўпламнинг ўлчовини ясси (текис икки ўлчовли) деб атаймиз. Ихтиёрий k ўлчовли $(1 \le k \le n)$ $A \subset R_n$ тўплам учун s ўлчовли ўлчовни $(k \le s \le n)$ тушунчасини киритиш мумкин.

Тўпламнинг ўлчови чексиз қийматни ҳам қабул қилиши мумкин. Бу ҳақда қуйидагини қайд этамиз. Саноқли миқдордаги чекли ўлчовга эга бўлган тўпламлар бирлашмасининг ўлчови чексиз қийматни қабул қилиши мумкин.

2. Асосий теоремалар

2.1-теорема. Ўлчовли тўпламнинг тўлдирувчиси яна ўлчовли тўпламдан иборат.

2.2-теорема. Ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси, кесими, айирмаси, симметрик айирмаси яна ўлчовли тўпламдир.

2.3-теорема. Ўлчовли тўпламни ўлчови нолга тенг бўлган тўпламга ўзгартириш унинг ўлчовига таъсир қилмайди.

2.4-теорема. Ҳар қандай параллелепипед ўлчовлидир ва унинг ўлчови n-ўлчовли ҳажмга тенг.

2.5-теорема. Ҳар қандай элементар тўплам ўлчовли ва унинг ўлчови уни ташкил қилган параллелепипедлар ўлчовларининг йиғиндисига тенг.

2.6-теорема. Саноқли миқдордаги ўлчовли тўпламлар бирлашмаси ва кесишмаси ўлчовли тўпламдан иборат.

2.7-теорема. Ихтиёрий ёпиқ (очиқ) тўплам ўлчовлидир.

2.8-теорема. Агар ўлчовли $A_1, A_2, \ldots$ тўпламлар кенгаювчи $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ ёки қисқарувчи $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ кетма-кетликни ташкил этиб мос равишда

$$A = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \quad \text{ёки} \quad A = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa$$

бўлса, у холда ҳар икки ҳолатда

$$\lim_{n \to \infty} (\mu A_n) = \mu A$$

бўлади.

2.9-теорема. Агар $A = \bigcup_{\kappa=1} A_\kappa$ бўлиб, A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) тўпламлар ўлчовли бўлса, у холда

$$\mu A \leq \sum_k \mu A_k$$

2.10-теорема. Агар A_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) ўлчовли тўпламлар бўлиб $A = \bigcup_{\kappa=1} A_\kappa$; $A_i \cap A_j = \varnothing$; $i \neq j$ бўлса, у ҳолда $\mu A = \sum_\kappa A_\kappa$ бўлади.

Энди ўлчовсиз тўплам ҳақида тўхталиб ўтамиз.

Чегараланган ўлчовсиз тўпламнинг мавжудлиги қуйидаги мисолда кўрсатилади.

Аввало, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегментнинг нуқталари орасида эквивалентлик тушунчаси киритилади. Агар x ва y нинг айирмаси $x-y$ сон рационал бўлса, улар ***эквивалент*** дейилади ва $x \sim y$ деб ёзамиз. Бу эквивалентлик қуйидаги хоссаларга эга:

1) Симметриклик: агар $x \sim y$ бўлса, $y \sim x$.

2) Транзитивлик: агар $x \sim y$, $y \sim z$ бўлса, $x \sim z$.

3) Рефлексивлик: ҳар қандай x элемент учун $x \sim x$.

Бу ерда, асосан $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегмент, ўзаро эквивалент бўлган элементлардан иборат бўлган $K(x)$ синфларга ажратилади

($x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$). Бу ерда иккита ҳар хил К(х) синф ўзаро кесишмайди. Шундай қилиб, $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ сегмент ўзаро кесишмайдиган синфларга бўлинади.

Энди бу синфларнинг ҳар бирида биттадан элемент танлаб олиб, бу танлаб олинган элементлар тўпламини А билан белгиланади. Бундай А тўпламнинг ўлчовсиз эканлиги, яъни

$$\mu^* A \neq \mu_* A$$

муносабат [1] нинг 22-§ да батафсил баён қилинган.

Масалалари ечиш учун қуйидагиларни эслатиб ўтамиз.

1. Тўғри чизикдаги ξ ***нуқтанинг атрофи*** деб шу нуқтани ўз ичига олган ораликка (интервалга айтилади).

2. Тўғри чизиқда бирор ξ нуқта ва Е тўплам берилган бўлсин. Агар ξ нуқтанинг ҳар қандай атрофида Е тўпламнинг ξ дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, у ҳолда ξ нукта Е тўпламнинг ***лимит нуқтаси*** дейилади.

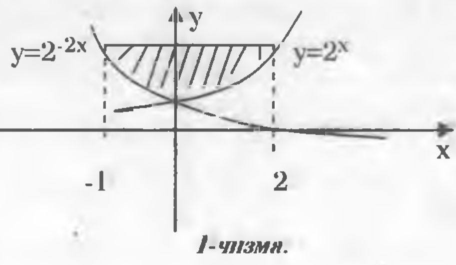
3. Е тўпламнинг барча лимит нуқталаридан иборат бўлган тўплам Е тўпламнинг ***ҳосила тўплами*** дейилади ва уни Е' билан белгилаймиз.

4. $\overline{E} = E \cup E'$ тўплам Е тўпламнинг ёпилмаси дейилади.

3. Масалалар ечиш намуналари

1-масала. $A=\{(x,y)\in R_2,\ y=2^x,\ y=2^{-2x},\ y\leq 4\}$ тўпламнинг ўлчовини топинг?

Ечиш: Масала шартидан $2^x=4$, $2^{-2x}=4$ бўлганда $x_1=2$, $x_2=-1$ топамиз. А тўплам қуйидаги чизмада (1-чизма) текисликнинг штрихланган қисмидан иборат.



1-чизма.

Бу тўплам ёпиқ ва 2.7-теоремага асосан ўлчовли, унинг ўлчови μA эса штрихланган юзага мос келади. Шунинг учун

$$\mu A = \int_{-1}^{0}(4-2^{-2x})dx + \int_{0}^{2}(4-2^{x})dx =$$

$$= 4x\Big/_{-1}^{0} + \frac{2^{-2x}}{2\ln 2}\Big/_{-1}^{0} + 4x\Big/_{0}^{2} - \frac{2^{x}}{2\ln 2}\Big/_{0}^{2} = 12 - \frac{9}{2\ln 2}$$

2-масала. Фараз қилайлик, A тўпламнинг ёпилмаси $\overline{A}$ бўлсин. «Агар μA=0 бўлса, у холда $\mu\overline{A}=0$ бўлади» деб тасдиқлаш мумкинми?

Тўплам туташмасини эслатиб ўтамиз.

A тўпламнинг ҳосилавий тўплами A′ бўлсин. У ҳолда $A\cup A'=\overline{A}$ тўплам A тўпламнинг туташмаси дейилади. (A′ – бу Анинг лимит нуқталар тўплами).

Ечиш. Фараз қилайлик, ҳамма ҳақиқий ўқдаги рационал сонлар тўплами Q бўлсин. Q тўплам саноқли бўлгани учун унинг нуқталарини рақамлаб (номерлаб) чиқамиз:

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

У холда

$$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_k\}$$

Энди $\{\tau_k\}\cap\{\tau_s\}=\varnothing$ (k≠s) бўлганидан.

Теорема 9 га асосан

$$\mu Q=\sum_{k=1}^{\infty}\mu\{\tau_k\}=0$$

чунки $\mu\{\tau_k\}=0$

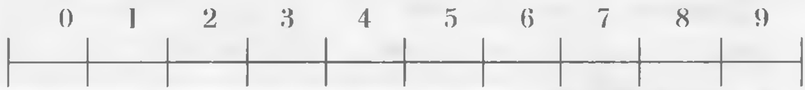
Иккинчи томондан $\overline{Q}=R_1$ бўлиб унинг чизиқли ўлчови

$$\mu\overline{Q}=\mu R=\infty$$

Демак, «$\mu A=0$ бўлса, у холда $\mu\overline{A}=0$ бўлади» деб тасдиқлаш нотўғридир.

3-масала. A тўплам $[0,1]$ нуқталарини ўнли каср сонлар кўринишида ифодалаганда 1 ва 4 рақамлар қатнашмайдиган нуқталар тўпламидан иборат бўлсин. Бундай A тўпламнинг ўлчови нимага тенг?

Ечиш. $[0,1]$ кесмани 10 та тенг бўлакларга бўламиз ва ҳар бир бўлакни ўсувчи $0,1,2,\ldots,9$ рақамлар орқали белгилаймиз. A тўпламда биринчи ўнли рақами 1 ва 4 бўлган нуқталар қатнашмайди (2-чизмага қаранг).



2-чизма.

Бу эса бизга $[0, 1]$ кесмадан $[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}]$ ва $[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}]$ интервалларни чиқариб ташлашни билдиради, яъни биринчи қадамда $[0, 1]$ кесмадан узунлиги $\frac{2}{10}$ бўлган иккита интервални чиқариб ташлаш керак. Қолган саккизта кесмада шундай муҳокамани юритамиз: ҳар бирини 10 та тенг бўлакка бўламиз ва узунлиги $\frac{2}{10^2}$ га тенг бўлган иккитадан интервални ташлаймиз, яъни иккинчи қадамда $[0, 1]$ кесмадан ўлчови $8\cdot\frac{2}{10^2}$ бўлган тўпламни чиқариб ташлаймиз ва ҳоказолар. Нихоят $[0,1]$ кесмадан ўлчови

$$\mu G=\frac{2}{10}+8\cdot\frac{1}{10^2}+8^2\cdot\frac{1}{10^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 8^{n-1}}{10^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=1$$

бўлган G очиқ тўплам чиқариб ташланади. Энди $A=[0,1]\setminus G$ бўлиб

$$\mu A=\mu[0,1]-\mu G=1-1=0$$

бўлиши ўз-ўзидан равшан.

4-масала. Ўлчови нолга тенг бўлган хар кандай бўшмас ва ёпиқ тўплам хеч қаерда зич эмаслиги исботлансин.

Масалани ечишдан аввал тўпламнинг зичлик таърифини эслаймиз. Агар тўпламнинг бирорта хам ***ёлғиз*** (дискрет) нуктаси бўлмаса, бундай тўпламни ўзида зич тўплам дейилади. Агар Анинг туташмаси бўлган $\overline{A}\supset B$ бўлса, у холда А тўплам В тўпламда зич дейилади. Агар А тўплам хеч кандай шарда зич бўлмаса, у холда А тўплам хеч каерда зич эмас дейилади, яъни ҳар бир $B\subset R_1$ шарда бошка $B'\subset B$ шар мавжуд бўлиб А тўплам билан умумий нуқтага эга бўлмаса, А ҳеч каерда зичмас дейилади.

$$B'\cap A=\varnothing$$

Масала ечими. Фараз килайлик, $F\subset R_n$ тўплам ўлчови нолга тенг бўлган бўшмас ёпиқ тўплам бўлсин. $B(\bullet,r)\subset R_n$ эса $B(\bullet,r)\cap F=\varnothing$ бўлган ихтиёрий очиқ шар бўлсин.

Агар $B(\bullet,r)\subset F$ бўлса, у ҳолда

$$0<\mu B(\bullet,\ r)\leq\mu F$$

Лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки

$$\mu F=0$$

Демак, шундай $x\in B(\bullet,r)$ мавжуд бўлиб $x\notin F$. У ҳолда $x\in CF$. Лекин CF очиқ тўплам. Шунинг учун Хнинг атрофи бўлган А(х)

$$A(x)\cap F=\varnothing$$

шартни каноатлантирувчи

$$A(x)\subset CF$$

бўлган А(х) тўплам мавжуддир. Энди В(•, r) – очиқ тўплам бўлгани учун

$$U(x)\subset B(\bullet,\ r)$$

бўлган U(х) тўпламни олайлик. Фараз килайлик,

$$V(x)=A(x)\cap U(x)$$

бўлсин. У ҳолда V(х) тўплам х нукта атрофидир ва

$$V(x)\subset A(x),\qquad A(x)\cap F=\varnothing$$

бўлганидан

$$V(x)\cap F=\varnothing$$

Бу муҳокамаларга асосан

$$B(\bullet, r')\cap F=\varnothing$$

бўлиб

$$B(\bullet, r')\subset V(x)\subset U(x)\subset B(\bullet, r)$$

бўлган $B(\bullet, r')$ очик шар мавжуд.

Демак F тўплам хеч қаерда зич эмас.

5-масала. Агар $-1\leq x\leq 0$ бўлганда $f(x)=-x^2$ ва $0< x\leq 1$ бўлганда $f(x)=1$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $a\in R_1$ сон учун $E(f>a)$ тўплам ўлчовли бўладими?

Ечиш. Агар $a\geq 1$ бўлса $E(f>a)=\varnothing$ Агар $0\leq a<1$ бўлса, $E(f>a)=(0,1]$. Агар $-1\leq a<0$ бўлса, $E(f>a)=(-\sqrt{-a}, 1]$. Ниҳоят агар $a<-1$ бўлса, у ҳолда $E(f>a)=[-1, 1]$. Энди $\varnothing$, $(0,1]$, $(-\sqrt{-a}, 1)$, $[-1, 1]$ тўпламлар ўлчови бўлганидан $\forall a\in R_1$ учун $E(f>a)$ тўплам ўлчовли бўлади.

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Агар

$$A=\{t\in[0, 1]: x'(t)=0,\ x'(t)\in C[0, 1]\}$$

бўлса у ҳолда

$$\mu A=0$$

бўлишини исботланг.

2. Агар $[0, 1]$ кесманинг қисм тўплами бўлган A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ тўплам учун

$$\sum_{k=1}^{n}\mu A_k > n-1 \quad \text{бўлса, у ҳолда} \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)>0$$

бўлишини исботланг.

3. $[0, 1]$ кесманинг хамма ўлчовли кисм тўпламлар тўпламининг қуввати континуум кувватдан катта эканлиги исботлансин.

4. Текисликнинг бирлик квадратдаги $|\sin\alpha|<\frac{1}{2}$ ва $\cos(x+y)$ иррационал сон бўладиган $(x, y)\in R^2$ нукталар тўпламининг кисм тўплам ўлчовини топинг.

5.Сонни учли саноқ тизимида ёзганда, 2 рақам 3 рақамдан аввал учрайдиган [0, 1] кесманинг қисм тўплам ўлчовини топинг.

6. Фараз қилайлик, C айлананинг узунлиги 1 га тенг бўлсин ва α бирор иррационал сон бўлсин. C айланани $n \cdot \alpha \pi$ (n-бутун сон) бурчакка буришда бирор нукта айлананинг бошқа нуқтасига ўтувчи нуқталарни бир синфга киритамиз. Бу синфларнинг хар бири нуқталарнинг саноқли тўпламидан иборат бўлади. Ҳар бир синфда биттадан нукта танлаймиз. Бундай нукталар тўпламини Φ_0 деб белгилаймиз. Φ_0 тўпламнинг ўлчовсиз эканлигини кўрсатинг (кўрсатма [4] 264–265 бетга қаранг)

3-§. ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАР

1. Зарурий тушунчалар

Ўлчовли E тўпламда берилган $f(x)$ функция ва ихтиёрий $a\in R_1$ сон учун

$$E(f>a)=\{x\in E : f(x)>a\}$$

тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ E тўпламда ўлчовли функция дейилади.

Агар

$$\mu\{x\in E, \ |f(x)|=\infty\}=0$$

бўлса, у ҳолда E тўпламда берилган $f(x)$ функция деярли ҳамма жойда чекли дейилади.

Агар

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x\in E: f_n(x)\not\to f(x)\}=0$$

бўлса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда $f(x)$ функцияга деярли ҳамма жойда яқинлашувчи дейилади.

Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x\in E: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}=0$$

бўлса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда берилган $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашади дейилади.

Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E ўлчовли тўпламда берилган бўлиб

$$\mu\{x\in E: f(x)\neq\varphi(x)\}=0$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда эквивалент дейилади ва $f(x)\sim\varphi(x)$ деб белгиланади.

2. Асосий теоремалар

3.1-теорема. Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция E тўпламнинг ўлчовли қисм тўпламида ўлчовли бўлади.

3.2-теорема. Агар $f(x)$ва $g(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда

$$f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$$

функциялар E тўпламда ўлчовли бўлади.

3.3-теорема. Агар ўлчовли ва деярли ҳамма жойда чекли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламнинг деярли ҳамма жойида $f(x)$ функцияга яқинлашса, у холда бу $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

3.4-теорема. Агар ўлчовли функциялар $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлиги E тўпламнинг деярли хамма жойида $f(x)$ функцияга яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик шу $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашади.

3.5-теорема. (Ф.Рисс). Ўлчов бўйича $f(x)$га якинлашувчи хар қандай $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигидан шу $f(x)$га деярли ҳамма жойда яқинлашувчи қисмий

$$\{f_{n_k}(x)\}$$

кетма-кетликларни (ҳар хил бўлиши мумкин) ажратиш мумкин.

3.6-теорема. (Д.Ф.Егоров, 1911 йил). Агар ўлчовли функциялар $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлиги E тўпламнинг деярли хамма жойида $f(x)$ функцияга якинлашса, у ҳолда $\forall\delta>0$ учун шундай E_δ $(E_\delta\subset E)$ ўлчовли қисмий тўплам мавжуд бўлиб қуйидагилар бажарилади:

1) $\mu E_\delta>\mu E-\delta$

2) E_δ тўпламда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

3.7-теорема. (Н.Н.Лузин,1913 й). $[a, b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция ўлчовли бўлиш учун $\forall\varepsilon>0$ учун $[a, b]$ кесмада шундай $\varphi(x)$ узлуксиз функция мавжуд бўлиб,

$$\mu\{x\in[a,b]: f(x)\neq\varphi(x)\}<\varepsilon$$

бўлиши зарур ва кифоя.

3. Масалалар ечиш

1-масала. $f(x)$ функция E тўпламда $(E\subset R_1)$ ўлчовли. $\exp f(x)=e^{f(x)}$ функция хам E тўпламда ўлчовли бўладими?

Ечиш. Агар $a\leq 0$ сон бўлса, у холда $E\{e^{f(x)}>a\}$ тўплам E тўплам билан устма-уст тушади. Бу ҳолда $f(x)$ функция Eда ўлчовлидир.

Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда

$$E\{e^{f(x)}>a\}=E\{f(x)>\ln a\}$$

бўлиб, $E\{f(x)>\ln a\}$ ўлчовли тўплам бўлганидан, таърифга асосан $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади. Бу ҳолда ҳам $e^{f(x)}$ функция Eда ўлчовли. Демак, $e^{f(x)}$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

2-масала. $[0, 1]$ кесмада ўлчовли бўлган $F(x)$ функция фақат битта нуктада узлуксиз бўлиши мумкинми?

Ечиш. Фараз қилайлик, $f(x)=x\cdot D(x)$ бўлиб, бунда $D(x)$ Дирихле функциясидан иборат бўлсин, яъни $x\in[0,1]$ да

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{-рационал нуқтада} \\ 0, & x\text{-иррационал нуқтада} \end{cases}$$

У ҳолда $f(x)$ функция $(0,1]$ ярим интервалнинг хар бир нуқтасида узилишга эга, чунки x рационал нуқта бўлса, $f(x)=x\neq 0$; x иррационал нуқта бўлса, $f(x)=0$. Энди $x_n\to 0$, $(n\to\infty)$ ихтиёрий $\{x_n\}\subset(0,1]$ кетма-кетликни олайлик. У ҳолда $x_n\to 0$ да $f(x_n)\to f(0)=0$ бўлади, чунки $f(x_n)=x_n\cdot D(x_n)$эди. Демак, $f(x)$ функция Гейне таърифига асосан $x=0$ нуқтада узлуксиздир.

Шундай қилиб фақат битта ноль нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз. Энди $f(x)=x\cdot D(x)$ функциянинг ўлчовли эканлигини кўрсатиш кифоя.

$f_1(x)=x$ функция узлуксиз функция бўлганидан ўлчовлидир. Дирихле функцияси $D(x)$ эса чегараланган функция, яъни ўлчовли функция. Демак, 3.2-теоремага асосан $f(x)=x\cdot D(x)$ функция ўлчовлидир. Шундай қилиб, Eда ўлчовли бўлган функция фақат битта нуқта узлуксиз бўлиши мумкин, қолган барча нуқталарда узилишга эга бўлади.

3-масала. Фараз қилайлик, f(x) функция [0, 1] кесмада ўлчовли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий очиқ G тўплам учун ($G\subset[0, 1]$) унинг асли $f^{-1}(G)$ ўлчовли тўплам эканлигини исботланг.

Ечиш. G тўпламни ўзаро кесишмайдиган саноқли интервалларнинг бирлашмаси кўринишида тасвирлаймиз, яъни

$$G=\bigcup_k(\alpha_k,\beta_k)$$

$$(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)=\varnothing \qquad i\neq j$$

Энди (α_k, β_k) интервални

$$(\alpha_k, \beta_k)=(-\infty, \beta_k)\cap(\alpha_k, \infty)$$

кўринишда қараймиз. Берилган f(x) функция [0,1]да ўлчовли бўлганида

$$E(f(x)>\alpha_k)=f^{-1}((\alpha_k,\infty)$$

$$E(f(x)<\beta_k)=f^{-1}((-\infty,\beta_k))$$

тўпламлар ўлчовлидир. У ҳолда

$$f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))=f^{-1}((\alpha_k,\infty))\cap f^{-1}((-\infty,\beta_k))$$

бўлганидан 2.2-теоремага асосан саноқли бўлган

$$f^{-1}((\alpha_k,\beta_k)$$

тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли тўпламлардан иборатдир. Энди

$$f^{-1}(G)=\bigcup_k f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))$$

тенгликни эътиборга олиб 2.6-теоремага асосан, $f^{-1}(G)$ тўпламнинг ўлчовли эканлигини тасдиқлаймиз.

4-масала. Агар $\{f_n(x)\}$ ва $\{g_n(x)\}$ функциялар кетма-кетликлар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларга E тўпламда ўлчов бўйича яқинлашса, у холда уларнинг йиғиндиси $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ хам E тўпламда $f(x)+g(x)$ функциялар йиғиндисига ўлчов бўйича яқинлашишини исботланг.

Ечиш. $\{f_n(x)\}$ ва $\{g_n(x)\}$ кетма-кетликларининг ўлчови бўйича $f(x)$ва $g(x)$ яқинлашишидан қуйидагилар келиб чиқади. Хар қандай $\varepsilon>0$ учун $n\to\infty$ да

$$\mu E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to 0$$

$$\mu E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to 0$$

Энди

$$E(\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right|\geq\varepsilon)\subset \qquad (*)$$

$$\subset E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})\cup E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})=A$$

эканлигини кўрсатамиз.

Хақиқатан, агар $x\notin A$, у холда

$$x\notin E(\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2})$$

ва

$$x\notin E(\left|g_n(x)-g(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}$$

Бу эса $\forall x\notin A$ учун

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|g_n(x)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликларининг бажарилишини кўрсатади. Бу охирги тенгсизликлардан

$$\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right|<\varepsilon$$

келиб чиқади.

Демак,

$$x \notin E\left(\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right| \geq \sigma\right)$$

Шундай қилиб (*) муносабат исботланди ва бундай $\forall\varepsilon>0$ учун $n\to\infty$да

$$\mu E\{\left|[f_n(x)+g_n(x)]-[f(x)+g(x)]\right| \geq \sigma\} \to 0$$

муносабат келиб чиқади. Шу билан масала тўла ечилди.

5-масала. Ҳар қандай

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$$

кетма-кетлик учун яқинлашиш турларини кўрсатинг.

Ечиш. Агар $x=0$ бўлса, у ҳолда $\forall n\in N$ учун $f(x)=0$ ва $x=0$ нуқтада $n\to\infty$да $f_n(x)\to0$. Агар $0<x<1$ бўлса, у ҳолда $n_0\to\infty$ да $x^n\to0$. Шунинг учун $n\to\infty$ да $f_n(x)\to0$. Агар $x=1$ бўлса, у ҳолда $\forall n\in N$ учун $f_n(x)=\frac{1}{2}$, яъни $x=1$ нуқтада $n\to\infty$да $f_n(x)\to\frac{1}{2}$.

Фараз қилайлик, $0\leq x<1$ бўлганда $f_0(x)=0$ ва $x=1$ бўлганда $f_0(x)=\frac{1}{2}$ бўлсин. У ҳолда юқоридаги муҳокамаларга асосан $n\to\infty$ да $f_n(x)\to f_0(x)$ келиб чиқади. Кетма-кетликнинг нуқтавий яқинлашишидан ҳамма жойда деярли яқинлашиши ва ўлчов бўйича яқинлашиши (3.4-теорема) келиб чиққанлиги учун берилган кетма-кетлик $f_0(x)$ функцияга яқинлашади ва ҳамма жойда деярли яқинлашади ҳамда ўлчов бўйича ҳам яқинлашади. Лекин бу кетма-кетлик $f_0(x)$ функцияга текис яқинлашмайди, чунки акс ҳолда $f_0(x)$ функция узлуксиз функциядан иборат бўлиши керак эди.

6-масала. (Лебег теоремасига доир, яъни 3.4-теоремага доир)

Фараз қилайлик,

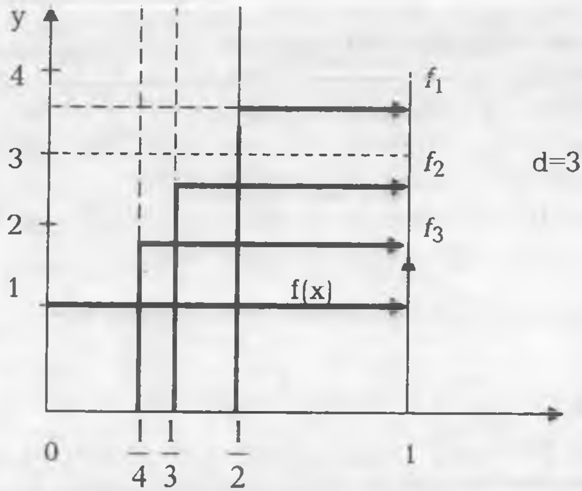
$$f_n(x)=\begin{cases}1+\dfrac{5}{n+1}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le 1 \text{ бўлганда;}\\ \infty, & x=\dfrac{1}{n+1} \text{ бўлганда}\end{cases}$$

функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ \infty, & x=1\end{cases}$$

функцияга ўлчов бўйича яқинлашиши кўрсатилсин.

Ечиш. Берилган функциянинг шакли қуйидагича.



Берилган *{fn(x)}* функциялар кетма-кетлигининг E=[0, 1] даги *f(x)* функцияга яқинлашмайдиган нуқталар тўпламини B деб белгилайлик,

$$B=E(f_n \nrightarrow f). \qquad (1)$$

Яна қуйидаги белгилашларни олайлик

$$\left.\begin{aligned} A &= E(|f|=\infty),\\ A_n &= E(|f_n|=\infty),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$Q = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup B \cdot$$

Бу белгилашларга асосан

$$A = \{1\}, \quad A_n = \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}, \quad B = \{0.1\}.$$

$$Q = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., 0 \right\}.$$

Бундан

$$\mu Q = 0 \qquad (3)$$

эканини кўрамиз. Демак,

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

муносабат E тўпламнинг деярли ҳамма нуқталарида бажарилади.

Энди

$$E_k(\sigma) = E(|f_k - f| \geq \sigma), \qquad (4)$$

$$R_n(\sigma) \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma),$$

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma)$$

бўлсин. Агар σ=3 десак, у ҳолда

$$E_1(3) = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad E_2(3) = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}, \ \dots, \quad E_n(3) = \left\{ \frac{1}{n+1}, 1 \right\},$$

яъни $E_n(3)$ тўплам иккита $x = \frac{1}{n+1}$, $x = 1$ нуқталардан иборат ва

$R_n(3) = \left\{ 1, \ \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n+1}, \ \dots, \ 0 \right\}$, M=$\{0, 1\}$бўлиб, E_k, R_k, M тўпламлар ўлчовлидир ва ўлчовлари нолга тенг.

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset R_3(\sigma) \supset \dots$$

бўлгандан n→∞ да (ўлчовли тўпламлар кетма-кетлигининг хоссасига асосан)

$$\mu R_n(\sigma) \to \mu M \qquad (5)$$

Энди масалани ечиш учун

$$M \subset Q \qquad (6)$$

муносабатни кўрсатиш кифоя, чунки (6) кўрсатилса, (3) га асосан $\mu M=0$ ва (5) дан $n\to\infty$ да

$$\mu R_n(\sigma)=0 \qquad (7)$$

эканлиги келиб чиқади. Сўнгра

$$E_n(\sigma)\subset R_n(\sigma)$$

бўлганидан

$$E_n(\sigma)\to 0$$

бўлиб, масала ечилган бўлади.

Шундай қилиб (6)ни кўрсатамиз. Агар $x_0\notin Q$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_0)=f(x_0)$$

мавжуд бўлиб, барча

$$f_1(x_0),\quad f_2(x_0),\ \ldots$$

чекли сонлардир ва уларнинг лимити $f(x_0)$ хам чекли сон бўлади. Шуниг учун $k\geq n$ бўлганда

$$\left|f_k(x_0)-f(x_0)\right|<\sigma$$

бўладиган n сонини топиш мумкин. Бундан (4)га асосан

$$x_0\notin E_k(\sigma), \qquad k\geq n$$

эканлиги келиб чиқади. Шунга асосан

$$x_0\notin R_n(\sigma), \qquad x_0\notin M$$

Демак,

$$M\subset Q$$

7-масала. (Рисс теоремасига доир) Ҳар бир натурал k ва s=1, 2, ..., k сонлар учун [0,1) оралиқда аниқланган (k = 1, 2,...)

$$f_s^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{s-1}{k},\frac{s}{k}\right),\\ 0, & x\notin\left[\frac{s-1}{k},\frac{s}{k}\right),\end{cases}$$

функциялар кетма-кетлигининг ўлчов бўйича яқинлашиши кўрсатилсин ва бундан деярли яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратилсин.

Ечиш. Берилган функциялар кетма-кетлигини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x), \qquad \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x),$$

$$\varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x), \qquad \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x), \ \ldots$$

Агар $\varphi_n(x) = f_s^{(k)}(x)$ бўлса, у холда хар қандай σ сон $(0<\sigma\le 1)$ учун

$$\mathrm{E}\{|\varphi_n| \ge \sigma\} = \left[\frac{s-1}{k}, \frac{s}{k}\right)$$

бўлади. Бундан

$$\mu\left(E\{|\varphi_n| \ge \sigma\}\right) = \frac{1}{k}$$

ва $n\to\infty$ да $k\to\infty$ учун

$$\mu\left(E\{|\varphi_n| \ge \sigma\}\right) \to 0 \qquad \text{(A)}$$

Демак, берилган функциялар кетма-кетлиги ўлчов бўйича нолга яқинлашади.

Энди (A) муносабат бажарилганлиги учун

$$n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$$

бўладиган n_k натурал сонларни

$$\left.\begin{array}{l} \mu\left(E\left\{|\varphi_{n_1}| \ge \frac{1}{2}\right\}\right) < \frac{1}{2^2}, \\ \mu\left(E\left\{|\varphi_{n_2}| \ge \frac{1}{3}\right\}\right) < \frac{1}{2^3}, \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots, \\ \mu\left(E\left\{|\varphi_{n_k}| \ge \frac{1}{k+1}\right\}\right) < \frac{1}{2^{k+1}} \end{array}\right\} \qquad \text{(B)}$$

шартлар бажариладиган қилиб танлаймиз.

Масалан, $\varphi_{n_1}(x)$ функцияни

$$\varphi_{n_s}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\frac{s-1}{n_1},\ \frac{s}{n_1}\right)\\ 0, & x\notin\left[\frac{s-1}{n_1},\ \frac{s}{n_1}\right)\end{cases}$$

деб танлаш мумкин.

Бу $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг $E=[0,1)$ тўпламда деярли яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз.

$$R_m=\bigcup_{k=m}^{\infty}E\left\{\left|\varphi_{n_k}\right|\geq\frac{1}{k+1}\right\},$$

$$Q=\bigcap_{m=1}^{\infty}R_m$$

тўпламларни тузайлик. Бу ерда

$$R_1\supset R_2\supset R_3\supset\ldots$$

бўлгани учун ўлчовли тўпламлар кетма-кетлигининг хоссасига асосан $m\to\infty$да

$$\mu(R_m)\to\mu Q.$$

Иккинчи томондан, (B) тенгсизликларга кўра

$$\mu(R_m)<\sum_{s=m}^{\infty}\frac{1}{2^{s+1}}=\frac{1}{2^m}.$$

Демак $m\to\infty$ да

$$\mu(R_m)\to 0.$$

Бундан

$$\mu(Q)=0$$

тенглик келиб чиқади.

Энди E/Q тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $x_0\in E/Q$ учун $x_0\notin R_m$ бўладиган $m=m_0$ ни топиш мумкин. Агар $k\geq m_0$ бўлса, у ҳолда $x_0\notin R_{m_0}$ дан $x_0\notin E\left\{\left|\varphi_{n_k}\right|\geq\frac{1}{k+1}\right\}$ келиб чиқади. Демак, $k\geq m_0$ бўлганда

$$\left|\varphi_{n_k}(x_0)\right| < \frac{1}{k+1}$$

Лекин k→∞ да $\frac{1}{k+1} \to 0$ бўлгани учун

$$\varphi_{n_k}(x_0) \to 0, \quad (k \to \infty),$$

яъни $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик E тўпламда деярли нолга яқинлашади.

8-масала (Егоров теоремасига доир). Фараз қилайлик, E чегараланган тўпламда *f(x)* аниқланган ва ўлчовли функция бўлсин. F⊆E бўладиган F тўпламда узлуксиз ва *f(x)* функцияга текис яқинлашадиган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини кўрсатинг.

Ечиш. Шартга асосан *f(x)* функция E да аниқланган, чекли ва ўлчовли бўлгани учун

$$\{|f(x)|<1\} \subseteq \{|f(x)|<2\} \subseteq \ldots \quad \text{ва} \quad \cup\{|f(x)|<N\}=E$$

деб ёза оламиз.

У ҳолда

$$\lim \mu\{|f(x)|<N\} = \mu E < \infty$$

ва ихтиёрий ε мусбат сон учун

$$\mu\{|f(x)|<N\} > \mu E - \frac{\varepsilon}{2}$$

муносабат бажарилади.

Энди [-N, N] кесмани m та тенг оралиққа бўламиз:

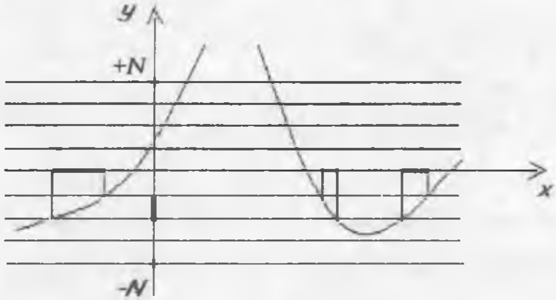
$$-N=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_m=N$$

ва $y_k - y_{k-1} = \nu$ деб белгилаймиз.

Энди

$$E_k=\{y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$$

тўпламни қарайлик. Шакл қуйидагича



E_k тўпламлар устма-уст тушмайди ва

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m \supseteq \{|f(x)| < N\}$$

Ҳар бир E_k тўпламда ўлчови

$$\mu F_k > \mu E_k - \frac{\varepsilon}{4m}$$

бўладиган F_k тўпламни олайлик, чунки

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right) > \mu E - \varepsilon$$

Энди $\cup F_k = F_{\varepsilon\nu}$ тўпламда $f_{\varepsilon\nu}(x)$ функцияни

$$f_{\varepsilon\nu}(x) = y_k, \quad x \in F_k$$

деб белгилаймиз. Бундай $f_{\varepsilon\nu}(x)$ функциялар ҳар бир F_k да узлуксиз (ўзгармас). Демак, $f_{\varepsilon\nu}(x)$ функция $F_{\varepsilon\nu}$ да узлуксиз ва шу билан бирга

$$|f_{\varepsilon\nu}(x) - f(x)| < \nu$$

тенгсизлик $F_{\varepsilon\nu}$ нинг ҳамма нуқталарида бажарилади.

Энди

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots < \varepsilon$$

бўлган ε_k $(k=1, 2, \ldots)$ мусбат сонларни ва $n \to \infty$ да $\nu_n \to 0$ бўладиган ν_n мусбат сонларни олайлик. Ҳар бир $(\varepsilon, \nu) = (\varepsilon_n, \nu_n)$ жуфтлик учун худди юқоридагидек

$$F_n = F_{\varepsilon\nu}, \quad f_n(x) = f_{\varepsilon\nu}(x)$$

ларни тузайлик. У ҳолда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликлар $F=\cap F_n$ да ҳамма $f_n(x)$ функциялар аниқланган, узлуксиз бўлиб $f(x)$ функцияга текис яқинлашади, чунки

$$|f_n(x)-f(x)|<\nu_n$$

тенгсизлик ихтиёрий $x\in F\subseteq F_n$ учун бажарилади. Шундай қилиб F тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб, текис яқинлашувчи узлуксиз $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг лимитидан иборатдир ва шу билан бирга $F\subseteq E$,

$$\mu(E/F)=\mu(\cup E/E_n)<\varepsilon_1+\varepsilon_2+...<\varepsilon.$$

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Агар $f(x)$ ўлчовли функция бўлса, у ҳолда $\ln|f(x)|$ ўлчовли функция бўладими?

2. Агар $f(x)$ функция $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ўлчовли бўлса ва $|f(x)|\leq 1$ бўлса, у холда $\arcsin f(x)$ функция ўлчовли бўладими?

3. Агар E тўпламда $|f(x)|$ функция ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўладими?

4. $[0,1]$ кесмада ўлчовли бўлиб, фақат битта нуктада узилишга эга бўлган, хеч кандай узлуксиз функцияга эквивалент бўлмаган функция бўлиши мумкинми?

5. Агар $f(x)$ функция хар кандай $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$ кесмада ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада хам ўлчовли бўлишини исботланг.

6. Фараз қилайлик, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича якинлашсин ва ихтиёрий n натурал сон учун $f_n(x)\leq a$, $x\in[0,1]$ бўлсин. У ҳолда $[0,1]$ кесманинг деярли ҳамма жойида $f(x)\leq a$ тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

7. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада бу ҳосила ўлчовли функциядан иборатлиги исботлансин.

4-§. ЛЕБЕГ ИНТЕГРАЛИ. ИНТЕГРАЛ ОСТИДА ЛИМИТГА ЎТИШ. РИМАН ВА ЛЕБЕГ ИНТЕГРАЛЛАРИНИ СОЛИШТИРИШ

1. Зарурий тушунчалар

Агар f(x) функциянинг E тўпламдаги хар хил қийматлар сони саноқли тўпламдан ортиқ бўлмаса, у ҳолда бундай f(x) функция E тўпламда содда функция дейилади.

Агар $E_к$ тўплам ўлчовли $\mu E_к$ ва

$$E_k = \{x \in E : f(x) = C_k\}$$

бўлиб

$$\sum_k |C_k| \mu E_k$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда E тўпламда берилган ва ўлчовли бўлган f(x) содда функция E тўплам бўйича Лебег маъносида интегралланувчи дейилади.

Агар E тўпламдаги f(x) содда функция интегралланувчи бўлса, у холда

$$\sum_k |C_k| \mu E_k$$

қатор Лебег интеграли дейилади ва

$$\int_E f(x)dx$$

деб белгиланади.

Агар E тўплам деярли ҳамма жойида f(x) функцияга текис яқинлашувчи интегралланувчи содда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлса, у ҳолда ўлчовли ва деярли хамма жойда чекли бўлган f(x) функция E тўплам бўйича Лебег маъносида интегралланувчи дейилади.

Агар f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

E тўплам бўйича Лебег интеграли дейилади ва

$$\int_E f(x)dx$$

деб белгиланади.

2. Асосий теоремалар

4.1-теорема. Фараз қилайлик, f(x) содда функция

$$E=\bigcup_k E_k,(E_k=\{x\in E; f(x)=C_k\}< E_k\cap E_s=\varnothing,\ k\neq s$$

тўпламда берилган бўлсин. Агар E_k тўпламнинг ҳар бири ўлчовли бўлса, у ҳолда f(x) функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

4.2-теорема. Ўлчови нол бўлган тўплам бўйича ихтиёрий f(x) функциядан олинган интеграл нога тенг.

4.3-теорема. Ўлчови нол бўлган тўпламдаги интегралланувчи функциянинг ўзгариши, унинг интеграл қийматини ўзгартирмайди.

4.4-теорема (аддитивлик хоссаси). Фараз қилайлик, E тўплам A_k тўпламларнинг бирлашмаси сифатида тасвирланган бўлиб A_kларнинг ихтиёрий бир жуфти кесишмайдиган бўлсин ва $\{A_k\}$ тўплам сони саноқли тўпламдан ортиқ бўлмасин. Агар f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлса, у ҳолда f(x) ҳар бир A_k тўпламда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_E f(x)d\mu=\sum_k \int_{A_k} f(x)d\mu$$

шу билан бирга

$$\sum_k \int_{A_k} |f(x)|d\mu<\infty$$

4.5-теорема. Фараз қилайлик, E тўплам A_k тўпламларнинг бирлашмаси сифатида тасвирланган бўлиб, A_kларнинг ихтиёрий бир жуфти кесишмайдиган бўлсин ва $\{A_k\}$ тўплам саноқли тўламдан ортиқ бўлмасин. Агар f(x) функция ҳар бир A_k тўпламларда интегралланувчи бўлса ва

$$\sum_k \int_{A_k} |f(x)| d\mu < \infty$$

бўлса, у холда f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлади.

4.6-теорема (абсолют узлуксизлик хоссаси). Агар f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлса, у холда $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ бўлиб, ихтиёрий $e\subset E$ ($\mu e<\delta$) учун

$$\int_e |f(x)| d\mu < \varepsilon$$

бўлади.

4.7-теорема (А.Л.Лебег). Фараз килайлик, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f(x) функцияга ўлчов бўйича яқинлашсин ва E тўпламда интегралланувчи бўлган φ(x) учун

$$|f_n(x)| \le \varphi(x), \forall n \in N$$

тенгсизликни E тўпламда деярли бажарилсин. У ҳолда f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлади ва

$$\lim_n \int_E f_n(x) d\mu = \int_E (\lim_n f_n(x)) d\mu$$

тенглик ўринли бўлади.

4.8-теорема (Б.Леви). Фараз килайлик, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик камаймадиган (ўсмайдиган) бўлсин;

2) E тўпламда $f_n(x)$ функциялар интегралланувчи бўлиб

$$\int_E f_n(x) dx \le K, \forall n \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

мавжуд ва f(x) функция E да интегралланувчи бўлади ва шу билан бирга

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)d\mu=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu=\int_E f(x)dx$$

Натижа. Агар манфий бўлмаган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун E тўпламда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n(x)d\mu$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

қатор E тўпламда деярли ҳамма жойда яқинлашувчи бўлади ва

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)d\mu$$

тенглик бажарилади.

4.9-теорема (П.Фату). Агар манфий бўлмаган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f(x) функция деярли яқинлашувчи бўлиб, E тўпламда $f_n(x)$ функциялар интегралланувчи бўлса ва ихтиёрий n натурал сон учун

$$\int_E f_n(x)d\mu\le K,\ \ k=const$$

бўлса, у ҳолда f(x) функция E тўпламда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_E f(x)d\mu\le K$$

бўлади.

4.10-теорема. $[a, b]$ кесмада берилган $f(x)$ функция Риман бўйича интегралланувчи бўлиши учун $f(x)$ функция чегараланган ва $[a, b]$ кесмада деярли ҳамма жойда узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.

3. Масалалар ечиш

4.1-масала. $[-1,1]$ кесмада интегралланмайдиган содда функцияни тузинг.

Ечиш. $f(x)$ функцияни қуйидагича тузамиз. Агар

$$x\in\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\setminus\left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]\right), \quad n=1, 2, 3,...$$

бўлса, $f(x)=n$ деб оламиз ва $x=0$ бўлса, $f(x)=0$ деб оламиз. У ҳолда $f(x)$ содда ва ўлчовли функциялардан иборат бўлади. Агар

$$E_n=\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\setminus\left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$$

бўлса, у ҳолда E_n ўлчови

$$\mu E_n=\frac{2}{n(n+1)}$$

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\mu E_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty$$

бўлгани учун $f(x)$ функция $[-1,1]$ кесмада интегралланувчи эмас.

4.2-масала. Агар P ва Q_{n-1} тўплам Кантор тўпламлари бўлиб

$$x\in\Delta_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(\alpha_{kn},\beta_{kn})\in G$$

бўлганда

$$f(x)=(\alpha_{kn}-x)(x-\beta_{kn})$$

бўлса ва $x\in P$ бўлганда

$$f(x)=0$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_0^1 f(x)dx$$

интегрални хисобланг.

Ечиш. Бундай берилган $f(x)$ функция $[0,1]$ кесмада узлуксиз. Шунинг учун $[0,1]$ да Лебег маъносида ва демак Риман маъносида ҳам интегралланувчи. 4.4-теоремага асосан

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_P f(x)dx+\int_Q f(x)dx \cdot \quad P\cup Q=[0,1]$$

Энди $\mu P=0$ бўлгани учун 4.2-теоремага кўра,

$$\int_P f(x)dx=0$$

Бу тенгликни эътиборга олиб 4.4-теоремага асосан тенгликка қуйидагини топамиз.

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n} f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_{\alpha_{k_n}}^{\beta_{k_n}}(\alpha_{k_n}-x)(\beta_{k_n}-x)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{\frac{1}{2^k}}x\left(\frac{1}{3^n}-x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\int_0^{\frac{1}{3^n}}\left(\frac{1}{3^n}x-x^2\right)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}}=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{27}\right)^n=\frac{1}{150}$$

4.3-масала. Фараз қилайлик, $\mu A<\infty$ бўлиб, A тўпламнинг ҳамма жойида деярли $f(x)>0$ бўлсин. Агар

$$\int_A f(x)dx=0$$

бўлса, у ҳолда $\mu A=0$ эканлиги исботлансин.

Ечиш. B тўпламни қуйидагича аниқлаймиз

$$B=\{x\in A;\ f(x)\leq 0\}$$

У ҳолда $\mu B=0$ эканлиги масала шартидан келиб чиқади. 4.3-теоремани эътиборга олсак, A тўпламда $f(x)>0$ деб қарашимиз мумкин.

Энди фараз қилайлик, $\mu A\neq 0$ бўлсин. У ҳолда $\mu F\neq 0$ бўлса $F\subset A$, берк қисм тўплам мавжуддир ва F тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлади (Лузин теоремасига қаранг). F тўпламнинг ихтиёрий x нуқтаси учун $f(x)>0$ бўлганидан ва $f(x)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлганидан $f(x)\geq C$ тенгсизлик ўринли бўладиган $C>0$ сон мавжуд.

Энди

$$0=\int_A f(x)d\mu\geq\int_F f(x)d\mu\geq C\cdot(\mu F)>0$$

Бу қарама-қаршилик (зиддият) бизнинг фаразимиз нотўғри эканлигини кўрсатади.

Демак, $\mu A=0$.

4.4-масала.

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx,\ p>1, q>0$$

интегрални ҳисобланг.

Ечиш. Маълумки, $\ln(1-x^q)$ функцияни $[0,1)$ оралиқда ушбу

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{kq}}{k}$$

даражали қаторга ёйилади. Бу қатор $[0,1)$да текис яқинлашувчидир. Демак, қатор $\ln(1-x^q)$ функцияга $[0,1)$ ҳамма жойида деярли яқинлашади.

Энди

$$f_n(x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{kq+p-1}}{k}$$

деб фараз қилайлик. $f_n(x)$ функциялар ўсмайдиган кетма-кетликни ташкил қилади ва унинг интеграли

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(kq+p)}=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+\frac{p}{2})}<\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\infty$$

Бу эса $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг 4.8-теорема шартларини қаноатлантиришини кўрсатади.

Демак,

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^2)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(kq+p)}$$

4.5-масала. Ушбу

$$\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+100}$$

функция $[0, \infty)$ оралиқда:

а) Риман бўйича интеграллаиувчи бўладими?

в) Лебег бўйича интегралланувчи бўладими?

Ечиш. Қуйидагича белгилаш қиламиз.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}\to g(x)=\sin x$$

$f(x)$ функция $x\to\infty$да монотон камаювчидир ва $f(x)\to 0$. $g(x)$ функциянинг $[0, A]$ оралиқдаги бошланғич функцияси текис чегараланган. Шунинг учун $[0, \infty)$да $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг Риман интеграли мавжуд (Дирихле аломатига асосан).

Лебег маъносида $f(x)\cdot g(x)$ ва $|f(x)\cdot g(x)|$ функциялар бир вақтда ёки интегралланувчи ёки интеграли мавжуд эмас. $[0,\infty)$да $|f(x)\cdot g(x)|$ функциянинг интегралланувчи эмас эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, агар $|f(x)\cdot g(x)|$интегралланувчи бўлса, у холда $\sin^2 x \le |\sin x|$ $(\forall x \in R)$ га асосан

$$f(x)\sin^2 x = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(x)\cos 2x$$

$$\left(\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)$$

функция ҳам интегралланувчи бўлади.

Демак, $[0, \infty)$да $f(x)$ ва $f(x)\cos 2x$ функциялар интегралланувчи.

Лекин

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{\pi}{2}a$$

бўлгани учун

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x+100}dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2\int_0^\infty \frac{t^2}{t^2+100}dt = \int_0^\infty dt - 10\pi = \infty$$

бу охирги қарама-қаршилик (зиддият) $|f(x)\cdot g(x)|$ функциянинг $[0,\infty)$ да интегралланувчи эмас эканлигини кўрсатади.

Демак, бу функциянинг Лебег интеграли мавжуд эмас.

4.6-масала. $f(x)$ функциянинг ихтиёрий $[\alpha, \beta]$да $([\alpha,\beta] \subset (a,b))$ Риман интеграли мавжуд. Бу функциянинг $[a, b]$ кесмада интеграли мавжудми?

Ечиш. Юқоридаги 4.10-теоремага асосан $f(x)$ функция чегараланган ва $[a, b]$ нинг деярли ҳамма жойида узлуксиз бўлиши керак.

Ихтиёрий $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ кесмада $f(x)$ функция интегралланувчи бўлганлигидан $f(x)$ функция (a, b) интервалда деярли ҳамма жойда узлуксизлиги келиб чиқади. У холда $[a, b]$ кесманинг ҳамма жойида деярли узлуксиз. Лекин ихтиёрий $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ кесмада $f(x)$нинг чегараланганлигидан $[a, b]$ кесмада чегараланганлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чегараланмаган, лекин ихтиёрий $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$да функция чегараланган.

Демак, $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмада Риман интеграли мавжуд бўлмаслиги мумкин.

4.7-масала. Агар

$$f(x)=nxe^{-nx^2}$$

бўлса

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 \lim_n f_n(x)dx, \quad n=1, 2,...$$

тенглик ўринли бўладими?

Ечиш. $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $[0,1]$ кесмада нолга яқинлашади. Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $n\to\infty$ ўлчов бўйича нолга яқинлашади. Бу эса Лебег теоремасининг (4.7-теорема) биринчи шарти бажарилишини кўрсатади.

Энди

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=\frac{1}{2}n\int_0^1 e^{-nt}dt=\frac{1}{2}(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}, n\to\infty$$

бўлгани учун Лебег теоремасининг иккинчи шарти бажарилмаслигини кўрамиз.

Шундай қилиб $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун интегралланувчи можаранта (таққосланувчи) функция мавжуд эмаслигини тасдиқлаймиз.

Демак, берилган функция учун

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1(\lim f_n(x))dx$$

4.8-масала. Агар

$$f_n(x)=n^{\alpha}x(1-x)^n$$

бўлса, у ҳолда αнинг қандай қийматларида

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(\lim f_n(x))dx$$

тенглик ўринли бўлади?

Ечиш. Ихтиёрий $n\in N=\{1,\ 2,\ ...\}$ учун

$$f_n(0)=f_n(1)=0$$

Бу эса $n\to\infty$ да $x=0$, $x=1$ нукталарда $f_n(x)\to 0$ эканлигини кўрсатади. Агар $0<x<1$ бўлса, у ҳолда $0<1\text{-}x=\theta$ ва

$$n^{\alpha}(1-\theta)\theta^{n}=n^{\alpha}\theta^{n}-n^{\alpha}\theta^{n+1}$$

Ихтиёрий $\alpha\in R\in(-\infty,\ \infty)$ учун $n\to\infty$ да $n^{\alpha}\theta^{n}\to 0$ бўлганидан $n\to\infty$ да $[0,1]$ кесмада $f_n(x)\to 0$, $\alpha\in R$.

Шунинг учун $\alpha\in R$ бўлиб $n\to\infty$ да

$$\int_0^1(\lim f_n(x))dx\to 0$$

Иккинчи томондан

$$\int_0^1 f_n(x)dx=n^{\alpha}\int_0^1 x(1-x)^n dx=n^{\alpha}\int_0^1(1-x)x^n dx=\frac{n^{\alpha}}{(n+1)(n+2)}$$

Бу охирги тенглик $\alpha<2$ бўлганда

$$\lim_n\int_0^1 f_n(x)dx=0,n\to\infty$$

тенгликни келтириб чиқаради.

Демак, берилган функция учун кўрсатилган тенглик $\alpha<2$ ҳамма қийматлар учун бажарилади.

4.9-масала. $[0,\ 1]$ кесмада қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $\{f_n(x)\}$ интегралланувчи функциялар кетма-кетлигини тузинг:

1) $n\to\infty$ да $f_n(x)\to f(x)$ деярли ҳамма жойда;

2) $f(x)$ функция $[0,1]$ да интегралланувчи;

3) $\lim\limits_n\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx\neq 0$

Ечиш. $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини қуйидагича тузамиз:

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2, & 0\le x<\frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

$[0,1]$ кесмада деярли, $n\to\infty$да $f_n(x)\to 0$ эканлиги кўриниб турибди ва шу билан бирга

$$\int_0^1(\lim f_n(x))dx=0$$

Бу эса 1) ва 2) шарт бажарилишини кўрсатади. Лекин

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f_n(x)|dx=\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^{\frac{1}{n}}dx=\infty\ne 0$$

Бу 3) шарт бажарилишини кўрсатади.

4.10-масала. Агар

$$f_n(x)=\begin{cases} |\ln x|, & 0\le x\le\frac{1}{n} \\ \cos^2 x, & \frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда $[0,1]$ кесмада $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг лимит функцияси интегралланувчи бўладими?

Ечиш. Ҳар қандай $x>0$ учун $\frac{1}{n_0}<x$ бўладиган $n_0=n_0(x)$ сон топилади. Бу эса $n\ge n_0$ бўлганда ихтиёрий $x>0$ учун $f_n(x)=\cos^2 x$, яъни $n\to\infty$ да ихтиёрий $x>0$ учун $f_n(x)\to\cos^2 x$ муносабатни билдиради. Агар $x=0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий n $(n\in N)$ учун $f_n(x)=\infty$. Демак, $n\to\infty$ да деярли ҳамма жойда $f_n(x)\to\cos^2 x$ ва бу лимит функция $[0,1]$да интегралланувчидир.

Энди чегараланмаган функциянинг Лебег интегралига доир масалаларни кўрайлик.

Аввало, чегараланмаган функциянинг Лебег интеграли тушунчасини эслайлик.

Фараз қилалийлик, $f(x)\geq 0$ функция бўлсин ва $[f(x)]_n$ эса қуйидагича аниклансин.

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & f(x)\leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

Бу $\{f(x)\}_n$ функция чегараланган ва ўлчовли. Демак, у интегралланувчи.

Энди $f(x)$ функциядан E тўплам бўйича олинган интегрални $[f(x)]_n$ функция интегралининг лимити сифатида аниклайлик (лимит мавжуд бўлган холда), яъни

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E [f(x)]_n\,dx$$

4.11-масала. Ушбу

$$\int\limits_0^1 x^{-\alpha}dx$$

интеграл α-нинг қандай қийматларида мавжуд?

Ечиш. Бизда $a(ч)=ч^{-\alpha}$ берилган. Шунинг учун

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} x^{-\alpha}, & x\in\left[n^{-\frac{1}{\alpha}},1\right] \\ n, & x\in\left[0,n^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \end{cases}$$

деб оламиз.

Энди Лебег бўйича интеграл қуйидагича

$$\int\limits_0^1 x^{-\alpha}dx = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_0^{n^{-\frac{1}{\alpha}}} ndx + \int\limits_{n^{-\frac{1}{\alpha}}}^1 x^{-\alpha}dx\right\} = \frac{1}{1-\alpha},$$

бунда, $0<\alpha<1$; агар $\alpha=1$ бўлса интеграл мавжуд эмас.

Демак, берилган интеграл $0<\alpha<1$ да мавжуд.

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{[x]}$ интегрални ҳисобланг, бунда [x] эса хнинг бутун қисми.

2. Фараз қилайлик, $\mu A < \infty$ бўлиб, f(x) функция A тўпламда интегралланувчи ва деярли Анинг деярли ҳамма жойида $|g(x)| \leq m$ бўлсин. A тўпламда f(x)g(x) функциянинг интегралланувчи эканлиги исботлансин.

3. $[0,\infty)$ да

$$f(x)=\frac{x^p \sin x}{1+x^q}, \quad p>-2,\ p<q\leq p+1$$

функция Риман ва Лебег бўйича интегралланувчи бўладими?

4.

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$$

интегрални ҳисобланг.

5. Агар

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^n}$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1(\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

тенглик ўринлими?

6. Агар

$$f_n(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg} x, & 0\leq x\leq \frac{1}{n} \\ -1, & \frac{1}{n}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (\lim f_n(x))dx$$

ўринлими?

7. Фараз қилайлик, чегараланган, манфиймас $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги учун $n\to\infty$

$$\int_E f_n(x)dx \to 0$$

бўлсин. У ҳолда E тўпламнинг деярли ҳамма жойида $f(x)\to 0$ деб тасдиқлаш мумкинми?

8. Агар $f(x)=(\cos m!nx)^{2n}$ бўлса,

$$\int_0^1 f(x)dx$$

интегрални ҳисобланг.

9.

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx$$

интегрални ҳисобланг?

5-§. МЕТРИК ФАЗОЛАР. КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ МЕТРИК ФАЗОДА ЯҚИНЛАШИШИ

1. Асосий тушунчалар

Фараз қилайлик, X ихтиёрий бўш бўлмаган тўплам бўлсин. Бу тўпламда манфий бўлмаган икки ўзгарувчили $\rho(x, y)\geq 0$ функция қуйидаги шартларни (аксиомаларни) қаноатлантирса, бундай $\rho(x, y)$ функция X тўпламда метрика (ёки масофа) дейилади:

1) $\rho(x, y)=0 \leftrightarrow x=y$

2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$

3) $\rho(x, y)\leq \rho(x, z)+\rho(z, y)$, $\forall x, y, z\in X$

Бир жуфт (X, ρ) метрик фазо дейилади. Агар чизиқли фазога метрика тушунчаси киритилса, у чизиқли метрик фазо дейилади.

Агар $n\to\infty$да $\rho(x_n, x)\to 0$ бўлса, $\{X_n\}\subset X$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашувчи дейилади. Буни $n\to\infty$да $x_n\to x$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ деб белгилаймиз.

$$B(x_0, r)=\{x\in X: \rho(x_0, x)<r\}$$

тўплам r радиусли $x_0\in X$ марказли очиқ шар деб аталади ва

$$\overline{B}(x_0, r)=\{x\in X: \rho(x_0, x)\leq r\}$$

тўплам r радиусли маркази $x_0\in X$ нуқтада бўлган ёпиқ шар дейилади. Агар A тўпламни $(A\subset X)$ бирор (очиқ ёки ёпиқ) шар билан ўраб олиш мумкин бўлса, у ҳолда A тўплам чегараланган дейилади. Агар m, $n\to\infty$да $\rho(x_n, x_m)\to 0$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик фундаментал дейилади.

Агар $n\to\infty$да $x_n\to x_0$ дан $f(x)\to f(x_0)$ келиб чиқса, у ҳолда X ни У га f акслантириш x_0 нуқтада $(x_0\in X)$ узлуксиз дейилади, бунда $x_0\in X$, $\forall\{x_n\}\subset X$, $f(x)\in Y$, $f(x_0)\in Y$ ва X, У метрик фазолар. Агар Хни Уга акслантирувчи f, яъни $f: X\to Y$.

X метрик фазонинг хар бир нуктасида узлуксиз бўлса, у ҳолда f акслантириш X метрик фазода узлуксиз дейилади.

Агар X метрик фазода ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бундай X метрик фазода **тўла** дейилади.

2. Зарурий теоремалар

5.1-теорема. Агар $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик $x\in X$ элементга яқинлашса, у ҳолда бундай x лимит элемент факат биттадир.

5.2-теорема. Агар $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик $x\in X$ элементга яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик чегараланган.

5.3-теорема. Агар $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик яқинлашса, у ҳолда бундай кетма-кетлик фундаментал кетма-кетликдан иборат. Агар $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик фундаментал бўлмаса, у ҳолда бундай кетма-кетлик яқинлашувчи бўлмайди.

3. Масалалар ечиш

5.1-масала. $X=(-\infty,\infty)$ тўпламда метрика

$$\rho(x,\ y) = |e^x-e^y|$$

деб аниқланган. Метрика аксиомаларининг бажарилишини текширинг.

Ечиш. Агар $\rho(x,\ y)=0$ бўлса, у ҳолда $|e^x-e^y|=0$, яъни $x=y$ ва аксинча, агар $x=y$ бўлса, у ҳолда $e^x=e^y$ ва $\rho(x,\ y)=0$. $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$ ўз-ўзидан равшан. Нихоят

$$\rho(x,\ y) = |e^x-e^y|=|e^x-e^z+e^z-e^y|\le|e^x-e^z|+|e^z-e^y|=$$
$$=\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y).$$

Демак, X тўпламда метрик шартлари бажарилди, яъни $x=(-\infty,\ \infty)$ метрик фазо.

5.2-масала. Фараз қилайлик, $C^1[a,\ b]$ тўплам $[a,\ b]$ кесмадаги узлуксиз ва биринчи тартибли ҳосиласи ҳам узлуксиз бўлган функциялар тўпламидан иборат бўлсин. Бу тўпламда метрикани

$$\rho(x,y) = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)-y'(t)|$$

деб аниқлайлик.

Метрика аксиомаларининг бажарилишини текширинг.

Ечиш. Агар $\rho(x, y)=0$ бўлса, у ҳолда $\max|x(t)-y(t)|=0$ ва $\max|x'(t)-y'(t)|=0$. У ҳолда $x(t)=y(t)$, яъни $x=y$. Аксинча, агар $x=y$ бўлса, у ҳолда $x(t)=y(t)$ ва $x'(t)y'(t)$. Шунинг учун $\rho(x,y)=0$. Иккинчи аксиома ўз-ўзидан равшан. Учинчи аксиомани текширамиз. Абсолют қийматлар хоссасига асосан.

$$|x(t)-y(t)|+|x'(t)-y'(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|+$$
$$+|x'(t)-z'(t)|+|z'(t)-y'(t)|\le \max_t |x(t)-z(t)|+$$
$$+\max_t |z(t)-y(t)|+ \max_t |x'(t)-z'(t)|+ \max_t |z'(t)-y'(t)|$$

$$y'(t)$$

У ҳолда

$$\rho(x, y)\le \rho(x, z)+\rho(z, y)$$

Демак, метрика аксиомалари бажарилади. Шундай қилиб $C^1[a, b]$ метрик фазо.

5.3-масала. R_n Евклид фазосида иккита

$$x=(x_1, x_2,..., x_n) \text{ ва } y=(y_1, y_2,..., y_n)$$

элемент (вектор) учун метрика

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

деб аниқланган. Метрика шартларининг бажарилишини текширинг.

Ечиш. 1) Агар $\rho(x, y)=0$ бўлса, у ҳолда $(x_k-y_k)^2=0$, яъни $x_k=y_k$, $k=1, 2,..., n$. Демак, $x=y$.

Агар $x=y$ бўлса, у ҳолда $x_k=y_k$ $(k=1, 2,...,n)$. Демак, $\rho(x, y)=0$.

2) $\rho(x, y)= \rho(y, x)$ тенглик бажарилиши ўз-ўзидан равшан.

3) Учбурчак тенгсизлиги, яъни $\rho(x, y)\le \rho(x, z)+ \rho(z, y)$ эса, $z=(z_1, z_2, ..., z_n)$ деб қаралганда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Коши-Буняковский тенгсизлигидан келиб чикади. Шундай килиб чекли n-ўлчовли Евклид фазоси метрик фазодир.

5.4-масала. Чексиз ўлчовли Евклид фазоси l_2 бўлсин. Бунда элементлар $x=(x_1, x_2, ..., x_n ,...)$ бўлиб, унинг координаталари

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

шартни қаноатлантирсин.

Метрикани

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

деб аниклаб l_2 нинг метрик фазо эканлиги текширилсин.

Ечиш. Метрик фазо шартларини худди аввалги мисолдагидек текширамиз. Демак, чексиз ўлчовли Евклид фазоси l_2 метрик фазодан иборат.

5.5-масала. Ҳамма чегараланган ҳақиқий сонли кетма-кетликдан иборат бўлган фазо m бўлсин. Бунда иккита $x=\{a_n\}=(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ ва $y=\{b_n\}=(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ элемент учун метрика

$$\rho(x,y) = \sup_k |a_k - b_k|$$

деб аниқланган бўлсин. Бу m фазо метрик фазо эканлигини текширинг.

Ечиш. Метриканинг биринчи ва иккинчи шартлари бажарилиши равшан, чунки бу ерда ҳамма n учун $|a_n| < A$, $|b_n| < B$. Учинчи шартни қуйидагича текширамиз. $z=\{c_n\}=(c_1,c_2,...,c_n,...)$, $|c_n| \le C$ бўлгани учун

$$\rho(x,y) = \sup_k |a_k - b_k| \le \sup_k |a_k - c_k| + \sup_k |c_k - b_k| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

5.6-масала. Элементлари $x=\{a_n\}$ ихтиёрий чексиз кетма-кетликдан иборат бўлган фазо S бўлсин. Иккита $x=\{a_n\}= (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ ва $y=\{b_n\}=(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ элемент учун

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n-b_n|}{[1+|a_n-b_n|]}$$

бўлсин. S-фазонинг метрик фазодан иборатлиги текширилсин.

Ечиш. Метриканинг биринчи ва иккинчи шартларини текшириш қийин эмас. Учинчи шартнинг бажарилишини кўрсатиш учун

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|} \qquad (*)$$

тенгсизликни эътиборга оламиз. Бу (*) тенгсизлик [1]нинг 26 бетида исботланган.

Агар биз $z=\{c_n\}$ ихтиёрий кетма-кетликни олсак, у ҳолда (*) тенгсизликдан $\rho(x, y)\leq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ келиб чиқади, яъни S фазо метрик фазодан иборат.

5.7-масала. $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлган $x(t)$ функцияларнинг фазосини $C[a, b]$ деб белгилайлик. Бу $C[a, b]$ фазода иккита $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар учун

$$\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

деб аниқлансин. $C[a, b]$ метрик фазо эканлиги текширилсин.

Ечиш. Метриканинг биринчи ва иккинчи шартлари бажарилиши равшандир. Учинчи шартнинг бажарилиши қуйидагидан келиб чиқади (анализ курсидаги Вейерштрасс теоремасига асосан)

$$|x(t)-y(t)|\leq|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\leq$$
$$\leq\max|x(t)-z(t)|+\max|z(t)-y(t)|$$

Бу тенгсизлик ихтиёрий $t\in[a,b]$ нуқта ва ихтиёрий $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ узлуксиз функциялар учун бажарилади.

Демак, $C[a, b]$ фазо метрик фазодан иборат.

5.8-масала. $[a, b]$ кесмада аниқланган узлуксиз функциялар фазоси учун метрика

$$\rho(x,y)=\left\{\int_a^b[x(t)-y(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

деб аниқланган. Метрика шартларини текширинг.

Ечиш. Метриканинг учинчи шартини текшириш билан кифояланамиз. Бунинг учун Буняковскийнинг ушбу

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)dt\right|\le\left\{\int_a^b[x(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_a^b[y(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

тенгсизлигидан

$$\left\{\int_a^b[x(t)+y(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\int_a^b[x(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b[y(t)]^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди бундан

$$\rho(x,\ y)\le\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$$

тенгсизликни ҳосил қилиш қийин эмас. Шундай қилиб қаралаётган фазо метрик фазодан иборатдир. Биз бундай метрик фазони $C_{L_2}[a,\ b]$ деб белгилаймиз.

5.9-масала. Метрика

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\qquad p\ge1$$

деб аниқланган, элементлари $x=(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\dots)$ кетма-кетликдан тузилган l_p фазонинг метрик фазодан иборат эканлиги исботлансин, бу ерда $x=\{x_n\}=(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\dots)$ учун

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$$

шарт бажарилади деб қаралсин.

Ечиш. Метрик фазонинг биринчи ва иккинчи шартлари бажарилиши равшан. Учинчи шарт бажарилиши

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (a)$$

тенгсизликдан келиб чиқади. Бу (А) тенгсизликни ўз вақтида қуйидаги Гельдернинг

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (б)$$

тенгсизликдан келиб чиқади. Юқоридаги (а) ва (в) тенгсизликлар [4]нинг 52 бетдаги (13), (14) тенгсизликлардан лимитга ўтиш билан ҳосил қилинади.

5.10-масала. Агар i=n да $\xi_i^n=1$ ва i≠n, бўлганда $\xi_i^n=0$ бўлган $X_n=\{\xi_i^n\}$, n=1, 2, 3,... кетма-кетлик l_2 фазода яқинлашадими?

Ечиш. l_2 фазо тўла. Шунинг учун $\{X_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашишини текшириш учун унинг фундаменталлигини кўрсатиш кифоя. $\{X_n\}$ кетма-кетликнинг аниқланишидан n≠m бўлганда $\xi_i^n=1$, $\xi_i^m=0$ тенгликлар $\xi_i^m=1$, $\xi_i^n=0$ бўлганда бажарилади. У холда

$$\rho(x_n, x_m)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^n-\xi_i^m\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндида факат 2 та қўшилувчи нолдан фарқли, шу билан бирга иккаласи ҳам 1га тенг, яъни

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\xi_i^m-\xi_i^n\right|^2 = 1+1 = 2$$

демак,

$$\rho\ (x_n, x_m)=\sqrt{2}, \qquad n, m=1,2\ \ldots$$

Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади. У холда 5.3-теоремага асосан $\{x_n\}$ кетма-кетлик якинлашмайди.

5.11-масала. Агар

$$x_n = \{\xi_i^n\} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

бўлса бу кетма-кетлик l_p $(1 \le p \le 2)$ фазода якинлашувчи бўладими?

Бунда $i=n,\ n+1, \ldots\ 2n-1$ бўлганида

$$\xi_i^n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$$

ва $i< n$, $i \ge 2n$ бўлганда $\xi_i^n = o$

Ечиш. l_p фазо тўла бўлгани учун $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлигини текшириш кифоя, фараз қилайлик, $2m< n+1$ бўлсин у ҳолда

$$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p + \sum_{i=m}^{2m-1} \left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p + \sum_{i=2m}^{n-1} \left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p + \sum_{i=2n}^{\infty} \left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

энди n, m сонларнинг танланишига асосан ва $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг аниқланишига асосан $i \le m-1$, $2m \le 1 \le n-1$ ва $i \ge 2n$ бўлганда $\left|\xi_i^n - \xi_i^m\right| = 0$

$m \le i \le 2m - 1$ бўлганда

$$\left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p = \frac{1}{m}$$

$n \le i \le 2m - 1$ бўлганда

$$\left|\xi_i^n - \xi_i^m\right|^p = \frac{1}{n}$$

эканлиги келиб чикади.

Буларни эътиборга олсак ихтиёрий $n,\ m = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$ $2m< n+1$ учун

$$\rho(x_n,\ x_m) = \left(m \cdot \frac{1}{m} + n \cdot \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

бўлади. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади. У холда 5.3-теоремага асосан, $\{x_n\}$ кетма-кетлик l_p метрик фазода яқинлашмайди.

5.12-масала. Агар $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ бўлганда $x_n(t) = -nt + 1$ ва $\frac{1}{n} < t \leq 1$ бўлганда $x_n(t)=0$ бўлса, у ҳолда $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C^2[0,1]$ фазода яқинлашувчи бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, $X(t)= 0$ бўлсин. У ҳолда $x(t)\in C^2[0,1]$ бўлиши равшан. Энди

$$\rho(x_n,x) = \left(\int_0^1 \left|\alpha_n(t) - x(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|x_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} [x_n(t)]^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 [x_n(t)]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} [x_n(t)]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (-nt+1)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \to 0, \qquad n \to \infty$$

бўлгани учун $n\to\infty$ да $C^2[0,1]$ метрик фазода $X_n(t)\to 0$ келиб чиқади. Демак, берилган $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C^2[0,1]$ метрик фазода яқинлашувчидир.

5.13-масала. $C[0,1]$ фазода $x_n(t)=t^{2n}-t^{3n}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўладими?

Ечиш. Ихтиёрий $n=1, 2, 3,\ldots$ бўлганда $x_n(0)=x_n(1)=0$, $n\to\infty$да ихтиёрий $t\in(0,1)$ учун $x_n(t)\to 0$. Бу эса $[0,1]$ кесмада $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг нол элементга яқинлашишини кўрсатади. Лекин бу яқинлашиш $[0,1]$да текис яқинлашиш эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $n\to\infty$да $\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x_n(t)|\to 0$ бўлса, у холда $C[0,1]$ фазода $n\to\infty$да $x_n(t)\to 0$ бўлади. $|x_n(t)|$ функция n соннинг хар бир тайин қийматида бирор $t_n\in(0,1)$ нуқтада ўзининг энг катта қийматига эришади.

$$x_n^1(t) = 2nt^{2n-1} - 3nt^{3n-1} = 0,$$

$$1 = \frac{3}{2}t^n \to t = t_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Шунинг учун

$$\max|x_n(t)| = x_n(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

бўлганидан $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $n\to\infty$да нолга яқинлашмайди.

Демак, берилган $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C[0,1]$ фазода яқинлашмайди.

5.14-масала. $l_p(1\le p<\infty)$ фазода

$$x_k = \left\{\frac{1}{2^{ik}}\right\}_{i=0}^{\infty} \qquad (k=1,2...)$$

кетма-кетлик яқинлашадими?

Ечиш. Ҳамма $i=1, 2, 3,...$ сонлар учун $k\to\infty$да

$$\frac{1}{2^{ik}} \to 0,$$

$i=0$ бўлганда ихтиёрий k учун

$$\frac{1}{2^{ik}} = 1$$

Энди $\{x_k\}$ кетма-кетликни

$$x=\{\xi_i\}=(1, 0, 0...)$$

элементга яқинлашади деб фараз қилиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам

$$\rho_0(x_k, x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{ik}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^{kp}-1}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad k\to\infty$$

Демак, берилган $\{x_k\}$ кетма-кетлик l_p метрик фазода яқинлашувчи.

5.15-масала. Агар

$$f:\ C_L[0,1]\to R$$
$$f(x)=x(1)$$

бўлса, у ҳолда f акслантириш узлуксиз бўладими?

Ечиш. $\{x_n(t)\}$ функциялар кетма-кетлигини кўриб ўтайлик. Агар $0\le t\le 1-\frac{1}{n}$ бўлса, $x_n(t)=0$ ва $1-\frac{1}{n}< t \le 1$ бўлса, у ҳолда $X_n(t)=n^{1+E}(t-1+\frac{1}{n})$, $0< E< 1$ бўлсин деб олайлик.

$C_L[0,1]$ фазода бу кетма-кетлик нол элементга яқинлашади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\rho(x_n,0)=\int_0^1|x_n(t)-0|dt=\int_0^1|x_n(t)|dt=\int_{1-\frac{1}{n}}^1 n^{1+\varepsilon}\left(t-1+\frac{1}{n}\right)dt=$$

$$=n^{1+\varepsilon}\int_0^{\frac{1}{n}} tdt=\frac{1}{2n^{1-\varepsilon}}\to 0,\qquad n\to\infty$$

Лекин, $f(x)=x_n(1)=n^{\varepsilon}\to\infty$, $n\to\infty$.
Демак, f акслантириш узлуксиз эмас.

5.16-масала. $X_n=\{\xi^n_i\}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$ кетма-кетлик учун m фазода яқинлашиб l_1 фазода яқинлашмайдиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни кўрсатинг.

Ечиш. Қуйидаги $x_n=\{\xi^n_i\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ кетма-кетликни олиб қарайлик.

Агар $i \le n$ ва $i\ge 2n+1$ бўлганда

$$\xi^n_i=0$$

ва $n+1\le i\le 2n$ бўлганда

$$\xi^n_i=\frac{1}{i}$$

бўлсин.

Бу кетма-кетлик m фазода нол элементга яқинлашади, чунки $n\to\infty$да $\rho(x_n,0)=\sup|\xi^n_i|=\frac{1}{n+1}\to 0$.

Бу кетма-кетлик l_1 фазода фундаментал эмас. Ҳақиқатан ҳам, $2m<n$ деб қараб $\rho(x_n, x_m)$ни пастдан чегаралаймиз

$$\rho(x_n, x_m)=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi^n_i-\xi^m_i|=\sum_{i=m+1}^{2m}\frac{1}{i}+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}>\frac{m}{2m}+\frac{n}{2n}=1$$

5.17-масала. $C[0, 1]$ фазода $x(t)=\sin\pi t$ ва $y(t)=\frac{\pi\cdot t}{2}$ элементлар орасидаги масофани топинг.

Ечиш.

$$\rho(x_n,\ x_m) = \max\left|\sin \pi t - \frac{\pi t}{2}\right|$$

бўлгани учун аввало, $t\in[0,\ 1]$ нуктани топамиз.

$$\varphi(t)=\sin\ \pi t-\frac{\pi t}{2}$$

функциянинг экстремумини аниклаймиз.

$$\varphi'(t)=\pi\cos\pi t-\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\cos\pi(t)=\frac{1}{2},\quad t_k=\frac{1}{3}+2k,\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2...)$$

Энди t_k нуқталардан фақат $[0,\ 1]$га тушадиганларини ажратамиз. Бу фақат битта, яъни

$$t_0=\frac{1}{3}$$

Бу нуктада

$$\varphi(t_0)=\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{3}$$

$t=0$ ва $t=1$ нуқталарда $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\dfrac{\pi}{2}$ бўлгани учун

$$\rho(x,\ y)=\max\{\varphi(0),\ \varphi(t_0),\ \varphi(1)\}=\frac{\pi}{2}$$

Демак, берилган элементлар орасидаги масофа

$$\rho(x,\ y)=\frac{\pi}{2}$$

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $C[0,1]$ тўпламда метрика

$$\rho(x,\ y)=\int_0^1\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt$$

деб аникланган. Метрика шартларининг бажарилишини текширинг.

2. N натурал сонлар тўпламида метрика

$$\rho(n, m)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{n+m}, & n\neq m, \\ 0, & n=m \end{cases}$$

деб аниқланган. Метрика шартларини текширинг.

3. $C^{(n)}$ элементлари $[a\ ,b]$ сегментда аниқланган ва n-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган *x(t)* функциялар фазосидан иборат бўлсин. Бу фазода *x(t)* ва *y(t)* функциялар учун метрикани

$$\rho(x, y)=\sum_{k=0}^{n}\max_{t}\left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|$$

деб аниқлаб, $C^{(n)}$ фазонинг метрик фазо эканлигини исботланг.

4. $C_L[a,\ b]$ фазо элементлари $[a,\ b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлган *x(t)* функциялар фазосидан иборат бўлсин. Метрикани

$$\rho(x, y)=\int_{a}^{b}\left|x(t)-y(t)\right|dt$$

деб қабул қилинган бўлса, $C_L[a,\ b]$ фазо метрик фазо бўладими?

5. n-ўлчовли R_n Евклид фазосида метрикани

$$\rho(x, y)=\max_{1\le k\le n}\left|y_k-x_k\right|$$

деб олинса, $\rho(x, y)$ метрика шартларини қаноатлантирадими?

6. Элементлари ҳақиқий сонлар кетма-кетлигидан иборат бўлган $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва координаталари

$$\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p<\infty, \quad (p\ge 1)$$

шартни қаноатлантирган R_n^p фазода метрикани

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k-y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

деб олинса, бундай R_n^p фазо метрик фазодан иборат эканлиги исботлансин.

7. X метрик фазода $n\to\infty$да $\forall k\in N=\{1, 2,...\}$ бўлганда $x_n^k \to x^k$ ва $k\to\infty$ да $x^k\to\infty$ бўладиган $\left\{x_n^k\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(k=1,2,3,...)$ кетма-кетлик берилган. Бундай кетма-кетлик учун $i\to\infty$да $x\in X$ элементга яқинлашувчи ва

$$\left\{x_{n_i}^{k_i}\right\}\subset\left\{x_n^k\right\}$$

бўладиган

$$\left\{x_{n_i}^{k_i}\right\}$$

қисмий кетма-кетлик мавжудми?

8. m фазода яқинлашувчи ва l_p $(1\le p<\infty)$ фазода яқинлашувчи кетма-кетликни тузинг.

9. l_2 фазода ва l_1 фазода яқинлашмайдиган кетма-кетликни тузинг.

10. $L_p[0,1]$ фазода яқинлашувчи ва $C[0,1]$ фазода яқинлашмайдиган кетма-кетликни тузинг.

11. Ушбу

$$f: C\to R, \quad f(\xi_1, \xi_2,...)=\lim\xi_n$$

акслантириш узлуксиз бўладими?

12. Ушбу

$$f: m\to l_2, \qquad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3,...)=(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3},...)$$

акслантириш узлуксиз бўладими?

13. Агар (X, ρ) метрик фазода $n\to\infty$ да $x_n\to x$ ва $n\to\infty$ да $\lambda_n\to\lambda$ $(\{\lambda_n\}\subset R=(-\infty; \infty))$ бўлса, у ҳолда $n\to\infty$ да $x_n\lambda_n\to x\lambda$ бўлишини исботланг.

14. m фазода

$$x=\left\{\frac{1}{2^i}\right\}, \qquad y=\left\{\frac{1}{4^{i-3}}\right\}$$

элементлар орасидаги масофани топинг.

6-§. МЕТРИК ФАЗОДА ОЧИҚ ВА ЁПИҚ ТЎПЛАМЛАР

1. Асосий тушунчалар

X метрик фазода маркази x нуқтадаги ихтиёрий шар (очик ёки ёпиқ шар) $x\in X$ нуқтанинг **сферик атрофи** дейилади.

x нуқтанинг сферик атрофини ўз ичига олган ихтиёрий $A\subset X$ тўплам x **нуқтанинг атрофи** дейилади ва $O(x)$ деб белгиланади.

Агар ихтиёрий $O(x)$ да ҳеч бўлмаганда битта $y\in A$ нуқта мавжуд бўлса, у ҳолда $x\in X$ нуқта $A\subset X$ тўпламнинг **уриниш нуқтаси** дейилади.

$A\subset X$ тўпламнинг хамма уриниш нуқталар тўплами A тўпламнинг **туташ** тўплами дейилади ва уни $\overline{A}$ деб белгиланади.

Агар $O(x)$ атроф битта $y\neq x$, $y\in A$ нуқтани ўз ичига олса, у ҳолда $x\in X$ нуқта A тўпламнинг $(A\subset X)$ **лимит нуқтаси** дейилади.

$A\subset X$ тўпламнинг лимит нуқталар тўплами **ҳосилавий тўплам** дейилади ва Aé деб белгиланади.

2. Асосий теоремалар

6.1-теорема. Ихтиёрий x нуқта $(x\in X)$ A тўпламнинг $(A\subset X)$ лимит нуқтаси бўлиши учун $n\neq m$ бўлганда $x_n\neq x_m$ бўлиб $n\to\infty$ да $x_n\to x$ бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $(\{x_n\}\subset A)$ мавжуд бўлиши зарур ва кифоя.

Таъриф. Агар $A=\overline{A}$ бўлса $(A\subset X)$, у ҳолда A тўплам ёпиқ дейилади.

6.2-теорема. A тўплам $(A\subset X)$ X фазода ёпиқ бўлиши учун $Aé\subset A$ бўлиши зарур ва кифоя.

Таъриф. Агар x нуқтанинг атрофи бўлган $O(x)$ мавжуд бўлиб, $O(x)\subset A$ бўлса, у ҳолда бундай x нуқта $(x\in A\subset X)$ A тўпламнинг **ички нуқтаси** дейилади.

Агар A тўплам ($A\subset X$) фақат ички нуқталардан тузилган бўлса, у холда A тўплам **очиқ тўплам** дейилади.

6.3-теорема. A тўплам ($A\subset X$) X фазода очиқ бўлиши учун унинг тўлдирувчи бўлган CA тўплам X метрик фазода ёпиқ бўлиши зарур ва кифоя.

Таъриф. Агар $\bar{A}\supset B$ бўлса, у холда A тўплам ($A\subset X$) B тўпламда ($B\subset X$) **зич** дейилади.

Агар $\bar{A} = X$ бўлса, у холда A тўплам ($A\subset X$) X метрик фазонинг **ҳамма жойида зич** дейилади.

Таъриф. Агар ихтиёрий $B(x,r)$ учун шундай $B(x_1, r_1)$ мавжуд бўлиб $B(x_1, r_1)\cap A=\varnothing$ бўлса, у холда A тўплам ($A\subset X$) X метрик фазонинг **ҳеч қаерда зич эмас** дейилади.

Таъриф. Агар x нукта атрофи $O(x)$ да A тўпламда ётувчи ва A тўпламда ($A\subset X$) ётмайдиган x нуқталар бўлса, у холда бундай x ($x\in X$) нукта A тўпламнинг чегаравий нуктаси дейилади.

3. Масалар ечиш

6.1-масала. Агар $A=\{x\in m,\ x=\{\xi_i\},\ i\to\infty,\ \xi_i\to 0\}$ бўлса, у ҳолда A тўплам m фазода ёпик бўладими?

Ечиш. A ётўпламдан ихтиёрий x_0 олайлик. У холда 6.1-теоремага асосан ихтиёрий $n\in N$ учун $x_n\neq x_{n+1}$, $x_n\to x_0$ ва ихтиёрий $n\in N$ учун $x_n=\{\xi_i^n\}$, $x_o=\{\xi_i^o\}$ бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ($\{x_n\}\subset A$) мавжуд.

Ихтиёрий $n\in N$ учун $i\to\infty$да $\xi_i^n\to 0$ бўлгани учун хар қандай ε учун шундай $i_0=i_0(\varepsilon)$ мавжуд бўлиб $i\geq i_0$ бўлганда

$$\left|\xi_i^n\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad n=1,\ 2,\ldots \tag{1}$$

бўлади. Лекин $i\in N$ бўлиб, $n\to\infty$да $\xi_i^n\to\xi_i^o$. Шунинг учун (1)да $n\to\infty$да лимитга ўтиб $\left|\xi_i^o\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ни хосил қиламиз, ($i\geq i_o$) яъни $i\to\infty$да $\xi_i^o\to 0$. Бу эса x_0 нуктанинг $x_0\in A$ эканлигини ва

6.2-теоремага асосан A тўплам m фазода ёпиқ эканлигини кўрсатади.

<u>6.2-масала.</u> C[0,1] фазода $A=\{x(t)\in C[0,1];\ x(0)\leq x(1)\}$ тўплам ёпиқ бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, $x_0\in A'$ бўлсин. У холда $n\to\infty$да $x_n\to x_0$ бўладиган $\{x_n\}\subset A$ кетма-кетлик мавжуд (6.1-теоремага каранг) ва n=1, 2,... учун

$$x_n(0)\leq x_n(1) \qquad (2)$$

$\{x_n(t)\}\subset C[0,1]$ кетма-кетлик [0,1] кесмада текис яқинлашади. Шунинг учун $\{x_n(0)\}$ ва $\{x_n(1)\}$ сонли кетма-кетликлар мос равишда $x_0(0)$ ва $x_0(1)$ларга яқинлашади.

Энди (2)дан лимитга ўтиб $x_0(0)\leq x_0(1)$ тенгсизликни хосил қиламиз, яъни $x_0\in A$ ва 6.2-теоремага асосан A тўплам ёпиқ.

6.3.масала. C[-1,1] фазода

$$A=\{x(t)\in C[-1,1]:\ \int_{-1}^{0}|x(t)|dt=1\}$$

тўплам ёпиқ бўладими?

Ечиш. $x_0\in A'$ оламиз. У холда 6.1-теоремага асосан, $n\to\infty$да $x_n\to x_0$ бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ($\{x_n\}\subset A$) мавжуд.

Энди $n\to\infty$да

$$\int_{-1}^{0}|x_n(t)|dt\to\int_{-1}^{0}|x_0(t)|dt \qquad (3)$$

муносабатни кўрсатамиз. Бунинг учун

$$\varphi(t)=\begin{cases}0, 0\leq t\leq 1\\ 1, -1\leq t\leq 1\end{cases}$$

деб оламиз. У ҳолда

$$\left|\int_{-1}^{0}|x_n(t)|dt-\int_{-1}^{0}|x_0(t)|dt\right|=\left|\int_{-1}^{1}\varphi(t)\big[|x_n(t)|-|x_0(t)|\big]dt\right|\le$$

$$\le\int_{-1}^{1}\varphi(t)\big||x_n(t)|-|x_0(t)|\big|dt\le\int_{-1}^{1}\varphi(t)|x_n(t)-x_0(t)|dt\le\rho(x_n,x_0)$$

Энди $n\to\infty$да $\rho(x_n,x_0)\to 0$ бўладиган (3) муносабат келиб чиқишини кўрамиз.

$$\int_{-1}^{0}|x_n(t)|dt=1$$

тенгликдан лимитга ўтиб

$$\int_{-1}^{0}|x_0(t)|dt=1$$

ҳосил қиламиз, яъни $x_0\in A$ экан. Шундай қилиб, A тўплам ёпиқ.

6.4-масала. R^2 фазода

$$A=\{(x,y)\in R^2,\quad |y|=y\sin x\}$$

тўплам ёпиқ бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, $(x_o, y_o)\in A'$ бўлсин. У ҳолда R^2 даги метрика бўйича $n\to\infty$да $(x_n, y_n)\to(x_o, y_o)$ бўладиган $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик ($\{x_n, y_n\}\subset A$) мавжуд, яъни $n\to\infty$да координаталар бўйича $x_n\to x_o$, $y_n\to y_o$. $\big||a|-|в|\big|\le|a-в|$ тенгсизликдан $|y_n|\to|y_o|$ ($n\to\infty$) келиб чиқади. Энди $\sin x$ функция узлуксиз бўлганидан $n\to\infty$да $\sin x_n\to\sin x_o$. Масала шартига асосан ихтиёрий n учун $|y_n|=y_n\sin x_n$ бўлганидан $n\to\infty$да бундан лимитга ўтиб $|y_o|=y_o\sin x_o$ ни ҳосил қиламиз.

Демак, $(x_o, y_o)\in A$. Шундай қилиб A тўплам ёпиқ.

6.5-масала. $L_q(0,1)$ фазода

$$L_p(0,1)=\left\{x(t):\int_0^1|x(t)|^p dt<\infty\right\}, p>q\geq 1$$

тўплам очиқ бўладими?

Ечиш. Аввало $p>q$ бўлганда $L_p(0,1)\subset L_q(0,1)$ эканлигини қайд қиламиз. Ихтиёрий $x(t)\in L_p(0,1)$ олиб

$$A=\{t\in[0,1];\ x(t)\leq 1\}$$

деб белгилаймиз ва

$$B=\{t\in[0,1];\ x(t)>1\}$$

деб белгилаймиз. $X(t)$ функция ўлчовли бўлгани учун A ва B тўпламлар ўлчовлидир. A тўпламда $|x(t)|^q\leq 1$, яъни $x(t)$ функция ўлчовли ва чегараланган. Демак, интегралланувчи, яъни

$$\int_A|x(t)|^q dt$$

мавжуд. B тўпламда $|x(t)|^p\geq|x(t)|^q$. Шунинг учун

$$\int_B|x(t)|^q dt\leq\int_B|x(t)|^p dt<\infty$$

Демак, $|x(t)|^q$ функция A ва B тўпламларда интегралланувчи. У ҳолда Лебег интегралининг хоссаларига асосан $|x(t)|^q$ функция $[0,1]$ да интегралланувчи. Шундай қилиб $L_p(0,1)\subset L_q(0,1)<(p>q\geq 1)$ жойлаштириш исботланди.

Агар тўплам фақат ички нуқталардан тузилган бўлса, бундай тўплам очиқ бўлади.

Масалан, $L_p(0,1)$да ётувчи θ нуқта $L_p(0,1)$ учун ички нуқта эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$x(t)=t^{-\frac{1}{p}}$$

функцияни олайлик. Бу функция $L_p(0,1)$да ётмайди. Лекин

$$\rho_q(x,\theta)=\left(\int_0^1 t^{-\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

яъни $x(t)\in L_p(0,1)$.

Ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун

$$x_\varepsilon(t)=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{p-q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}x(t)$$

функцияни олайлик. Бу функция учун

$$\rho_q(x_\varepsilon,\theta)=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{p-q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^{-\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon,$$

яъни $x_\varepsilon(t)\in L_q(0,1)$. Лекин $x_\varepsilon(t)\notin L_p(0,1)$.

Шундай қилиб ихтиёрий $O_\varepsilon(\theta)$ атрофда ётувчи $x_\varepsilon(t)$ функция $L_p(0,1)$ да ётмайди, яъни $x_\varepsilon(t)\notin L_p(0,1)$.

Бу эса фақат $L_p(0,1)$ тўпламнинг нуқталаридан иборат бўлган θ нуқтанинг атрофи мавжуд эмаслигини кўрсатади.

Демак, $L_p(0,1)$ тўплам $L_q(0,1)$ фазода очиқ эмас.

6.6-масала. $C[0,1]$ фазода

$$A=\{x\in C[0,1]:x\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

тўплам очиқ бўладими?

Ечиш.

$$CA=\{x\in C[0,1]:x\left(\frac{1}{2}\right)>0$$

тўпламни олиб қарайлик. Агар CA ёпиқ бўлса, у ҳолда 6.3-теоремага асосан, A тўплам очиқ бўлади. Фараз қилайлик, $x_0\in(CA)'$ бўлсин. У ҳолда $n\to\infty$ да $x_n\to x_0$ бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик ($\{x_n\}\subset(CA)$) мавжуд. $C[0,1]$ фазода $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик текис яқинлашади. Шунинг учун $\left\{x_n\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ сонли кетма-кетлик $x_0\left(\frac{1}{2}\right)$ га яқинлашади. Ихтиёрий n=1, 2, 3, ... учун $x_n\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$ бўлгани учун бундан лимитга ўтиб $x_0\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$ ҳосил қиламиз, яъни $x_0\in(CA)$. Шундай қилиб CA тўплам ёпиқ. У ҳолда 6.3-теоремага асосан A тўплам C[0,1] фазода очиқ бўлади.

6.7-масала. C[-1, 1] фазода

$$A = \{x(t) \in C[-1,1] : x^2(t) < 1, t \in [-1,1]\}$$

тўплам очиқ бўладими?

Ечиш. $x^2(t)<1$, $t\in[-1,1]$ шарт $|x(t)|<1$, $t\in[-1,1]$ шарт билан тенг кучли. Ихтиёрий $x_0 \in A$ оламиз. $x_0(t)$ узлуксиз функция бўлганидан ва $|x_0(t)|<1$ бўлганидан

$$\min_{t\in[-1,1]}\{1-|x_o(t)|\} = \varepsilon \qquad (4)$$

бўладиган $\varepsilon>0$ мавжуд.

$B\left(x_o, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ шарни олиб $B\left(x_o, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$ муносабатни кўрсатамиз.

$t\in[-1,1]$ да $|x(t)-x_o(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $x(t)\in B\left(x_o, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ёки

$$x_o(t) - \frac{\varepsilon}{2} < x(t) < x_o + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

Энди (4) тенгликни бундай ёзамиз

$$\min_t\{1-|x_o(t)|\} = 1 + \min_t\{-|x_o(t)|\} = \varepsilon$$

у ҳолда

$$1-\varepsilon = \max_t |x_o(t)|$$

ёки

$$|x_o(t)| \le 1-\varepsilon, t\in[-1,1],$$

$$\varepsilon - 1 \le x_o(t) \le 1-\varepsilon \qquad (6)$$

бу (6) тенгсизлик (5) га асосан қуйидагича кўринишга эга бўлади.

$$x(t) < x_o(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1,$$

$$x(t) > x_o - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon - 1 - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} - 1 > -1,$$

яъни $|x(t)| < 1$. Бу билан $B\left(x_o, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$ муносабат исботланди, яъни ҳар қандай $x_0 \in A$ нуқта ўзининг бирор атрофи билан A тўпламга киради.

Демак, C[-1,1] фазода A очиқ тўплам.

6.8-масала. Фараз қилайлик,

$$A = \left\{ x \in m; x = \{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty \right\}$$

бўлсин. У ҳолда $\overline{A} = c_0$ тенгликни исботланг. Бунда c_0 эса нолга яқинлашувчи кетма-кетликлар фазоси.

Ечиш.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$$

бўлганидан ихтиёрий $x \in A$ учун $i \to \infty$ да $\xi_i \to 0$, бу эса $A \subset c_0$ муносабатни билдиради.

Иккинчи томондан ихтиёрий $x \in c_0$ ва $\varepsilon > 0$ учун

$$\rho(x_n, x) = \sup_{i \geq n+1} |\xi_i| < \varepsilon \qquad (x \in c_0, \ i \to \infty \text{ да } \xi_i \to 0)$$

бўладиган

$$\{x_n\} = \{\xi_i\}_1^n \in A$$

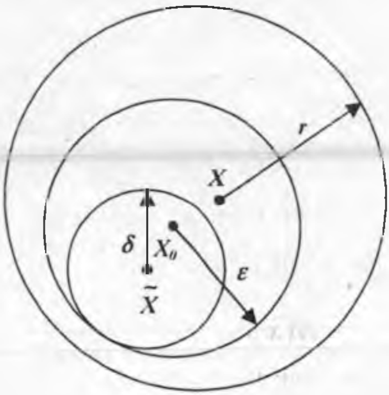
кетма-кетлик мавжуд, яъни A тўплам c_0 фазонинг ҳамма жойида зич. Демак, $\overline{A} = c_0$ тенглик ўринли.

6.9-масала. m фазода

$$A = \left\{ x \in m; x = \{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty \right\}$$

тўплам ҳеч қаерда зич эмаслиги исботлансин.

Ечиш. Ихтиёрий B(x, r) шарни m фазода кўриб ўтайлик (шаклга қаранг).



Агар бу шар А тўпламнинг нукталарини ўз ичига олмаса, у холда масала ечилган бўлади.

Фараз қилайлик, $x_0 \in A$, $x_0 = \{\xi_i\}$, $x_0 \in B(x, r)$ бўлсин. У ҳолда $y = \left\{1 - \frac{1}{i}\right\}$ элемент m фазода ётади ва у фақат А тўпламда ётмасдан хатто c_0 фазода ҳам ётмайди, чунки

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \infty, \qquad 1 - \frac{1}{i} \to 1, i \to \infty$$

у ҳолда ихтиёрий ε>0 учун

$$\widetilde{x} = \left(x_o + \frac{1}{2}\varepsilon y\right)$$

элемент учун

$$\widetilde{x} \notin A, \widetilde{x} \notin c_0$$

муносабат бажарилади.

Энди ε>0ни $B(x_0, \varepsilon) \subset B(x, r)$ бўладиган қилиб аниқлаймиз. Бунинг учун $\varepsilon = r - \rho(x, x_0)$ деб олиш кифоя.

Энди

$$\rho(\widetilde{x}, x_0) = \sup_{i \geq 1}\left|\xi_i + \frac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{i}\right) - \xi_i\right| = \frac{\varepsilon}{2}\sup_{i \geq 1}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

бўлганидан ихтиёрий ε учун

$$\widetilde{x} \in B(x_0,\varepsilon), \qquad 0<\varepsilon<r-\rho(x,x_0)$$

Бу $\widetilde{x}$ элемент учун $\widetilde{x} \in (C_{C_0})$ муносабат бажарилади. Юқоридаги 6.1-масалада C_0 тўпламнинг ёпиқлиги исботланган. Шунинг учун унинг тўлдирувчиси C_{C_0} тўплам очиқдир. Демак? $\widetilde{x} \in (C_{C_0})$ элемент ўзининг бирор атрофи билан $B(\widetilde{x},\delta)$ шарда ётади. Бу ерда $\delta>0$ сонни

$$B(\widetilde{x},\delta) \subset B(x_0,\varepsilon)$$

муносабат бажариладиган қилиб олиш мумкин.

Бундай ҳолатда,

$$B(\widetilde{x},\delta)\cap c_0=\varnothing$$

эканлиги тушунарлидир ва $A\subset c_0$ бўлганидан (6.8-теоремага қаранг)

$$B(\widetilde{x},\delta)\cap A=\varnothing$$

муносабат келиб чиқади, яъни A тўплам m фазонинг хеч қаерда зич эмас.

6.10-масала.

$$A=\{x\in l_2:\ \ x=\{\xi_i\},\ \ \xi_i\neq 0\ \ i \text{ нинг чекли қиймати учун}\}$$

тўпламнинг туташмаси $\bar{A}$ тўпламни топинг.

Ечиш. A тўпламнинг l_2 фазонинг хамма жойида зич эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, l_2 фазога

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty$$

шартни қаноатлантирувчи $x=\{\xi_i\}$ элементлар киради. Шунинг учун $x\in l_2$ ва $\varepsilon>0$ бўлганда.

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \xi_i^2 < \varepsilon^2$$

бўладиган $n_0(x,\varepsilon)$ натурал сон мавжуд.

Фараз қилайлик,

$$\bar{x}=\{\xi\}_1^{n_0}$$

бўлсин. У ҳолда $\overline{x}\in A$ бўлиши тушунарлидир. Шундай қилиб ихтиёрий $x\in l_2$ ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\rho(x,\overline{x})<\varepsilon$ бўладиган $\overline{x}$ элемент $(\overline{x}\in A)$ мавжуд, яъни А тўплам l_2 фазонинг ҳамма жойида зич. Шунинг учун $\overline{A}=l_2$ тенглик ўринли.

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. m фазода

$$A=\left\{x\in m : x=\{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p <\infty, 1\le p<\infty\right\}$$

тўплам ёпиқ бўладими?

2. l_2 фазода

$$A=\{x\in l_2 :\ x=\{\xi_i\},\ \xi_i\neq 0,\ \ i \text{ нинг чекли қийматларида}\}$$

тўплам ёпиқ бўладими?

3. l_p фазода

$$A=\left\{x ; x=\{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^q <\infty, p>q\ge 1\right\}$$

тўплам ёпиқ бўладими?

4. l_5 фазода

$$A=\{x\in l_5 :\ x=\{\xi_i\},\ \xi_i\neq 0,\ \ i \text{ нинг чекли қийматларида}\}$$

тўплам очиқ бўладими?

5. l_2 фазода

$$A=\left\{x\in l_2, x=\{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i=0\right\}$$

тўплам очиқ бўладими?

6. m фазода

$$A=\left\{x\in m, x=\{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i=0\right\}$$

тўплам очиқ бўладими?

7. C[-1,1] фазода монотон узлуксиз функциялар тўплами ёпиқ бўладими?

8. C[a, b] фазода даражаси n дан ошмайдиган алгебраик кўпхадлар тўплами ҳеч қаерда зич эмаслиги исботлансин.

9. l_2 фазода

$$A = \left\{ x \in l_2, x = \{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = 0 \right\}$$

тўплам ҳамма жойда зич эканлиги исботлансин.

10. m фазода

$$A = \left\{ x \in m : x = \{\xi_i\}, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty, 1 \le p < \infty \right\}$$

тўплам ҳеч қаерда зич эмаслиги исботлансин.

7-§. МЕТРИК ФАЗОНИНГ ТЎЛАЛИГИ ВА СЕПАРАБЕЛЛИГИ

1. Асосий тушунчалар ва теоремалар

Агар X метрик фазода ҳар қандай фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда X **тўла метрик фазо** дейилади.

Агар Y фазо тўла бўлиб Y да зич бўлган Z қисм тўплам мавжуд ($Z \subset Y$) ва Y фазо X фазо билан изометрик бўлса, у ҳолда Y метрик фазо X фазонинг тўлдирувчиси дейилади.

Агар X метрик фазо ҳамма жойида зич бўлган саноқли тўпламни ўз ичига олса, у ҳолда X **сепарабел фазо** дейилади.

7.1-теорема. X метрик фазо тўла бўлиши учун $n \to \infty$да радиуслари $r_n \to 0$ бир-бирига жойлашадиган ҳар қандай ёпиқ шарлар кетма-кетлиги бўш бўлмаган кесимга эга бўлиши зарур ва кифоя.

7.2-теорема. X сепарабел фазонинг A қисм тўплами ($A \subset X$) яна сепарабел фазодир.

2. Масалалар ечиш

7.1-масала. Агар

$$A=\{x \in l_1:\ x=\{\xi_i\}_1^n,\quad n=1, 2, \ldots\}$$

тўпламда l_1 фазонинг метрикаси киритилган бўлса, у ҳолда бундай A фазо тўла бўладими?

Ечиш. Ихтиёрий $x_0 \in l_1$, $x_0=\{\xi_i^0\}$ элемент оламиз. У ҳолда

$$x_0^n = \{\xi_i^0\}_1^n,\ n \in N = \{1,2,\ldots\}$$

элементлар A тўпламда ётади.

Энди $x_0 \in l_1$ бўлиши учун $n\to\infty$да

$$\rho(x_0^n, x_0) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|\xi_i^0\right| \to 0$$

бўлади. Бу эса l_1 фазода $\left\{x_0^n\right\}$ кетма-кетликнинг x_0 элементга яқинлашишини кўрсатади. У ҳолда $\left\{x_0^n\right\}$ кетма-кетлик l_1 фазода фундаментал бўлади. Демак, бу А фазода ҳам фундаментал бўлади. Агар А фазо тўла бўлганда $x_0 \in A$ бўлар эди. Лекин x_0 элемент ξ_i^0 саноқли сонлар танланиши билан аниқланганлиги учун $x_0 \notin A$ бўлади. Демак, А фазо тўла эмас.

7.2-масала. Агар

$$A=\{(x,y)\in R^2: \quad 0<x^2+y^2\leq 2\}$$

тўпламда R^2 фазонинг метрикаси қабул қилинган бўлса, А фазо тўла бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, А тўпламда $B\left[\theta, \frac{1}{n}\right]$, $n\in N$ шарлар кетма-кетлиги бўлсин. Бу ерда, $n\to\infty$да радиуслари $r_n = \frac{1}{n} \to 0$, бўлган шарлар бир-бирига жойлашганлиги кўриниб турибди.

Энди R^2 фазода $\theta\in A$ ва $\theta\in B\left[\theta, \frac{1}{n}\right]$, $n\in N$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[\theta, \tfrac{1}{n}\right] = \{\theta\}$$

бўлганидан А тўпламда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left[\theta, \tfrac{1}{n}\right] = \varnothing$$

Демак, А тўплам тўла эмас.

7.3-масала.

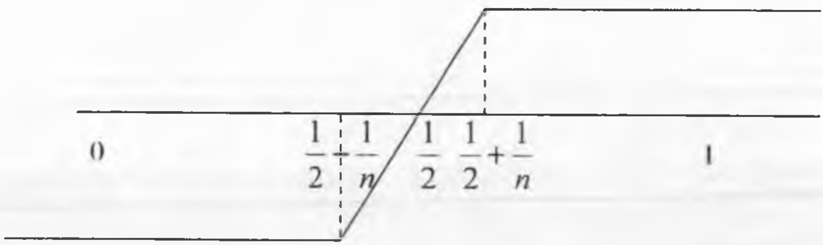
$$C^2[0,1] = \left\{ x(t)\in C[0,1];\ \int_0^1 \left|x(t)\right|^2 dt < \infty \right\}$$

фазо тўлами?

Ечиш. Фараз қилайлик,

$$x_n(t)=\begin{cases} -1, & 0\le t<\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \\ n(t-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\le t<\frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}<t\le 1 \end{cases}$$

бўлсин (шаклни қуйидагича қаранг).



$x_n(t)$

Бу $x_n(t)$, $n\in N$ узлуксиз функциялардан иборат. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $C^2[0,1]$ фазода фундаментал эканлигини кўрсатамиз.

$m>n$ бўлганда

$$\rho(x_n,x_m)=\left(\int_0^1 |x_n(t)-x_m(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}\left(m\left(t-\tfrac{1}{2}\right)-n\left(t-\tfrac{1}{2}\right)\right)^2dt+2\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}\left(1-n\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(2(m-n)^2\int_0^{\frac{1}{m}}t^2\,dt+2\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}(1-nt)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2(m-n)^2}{3m^3}+\frac{2}{3n}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

$$n,m\to\infty,\qquad \frac{n}{m}<1,\qquad \left(1-\frac{n}{m}\right)^2<1,\qquad n,m\in N$$

Агар m<n бўлса, худди шундай m,n→∞ да $\rho(x_n,x_m)\to 0$ исботланади.

Шундай килиб $C^2[0,1]$ фазода $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик фундаментал.

Фараз қилайлик,

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 0, & t = \frac{1}{2} \\ -1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда $L_2[0,1]$ фазода

$$\rho(x_n,x_0) = \left(\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3n}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \qquad n \to \infty$$

Бу эса $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $x_0(t)\in L_2[0,1]$ элементга яқинлашишини кўрсатади. Лекин $x_0(t)\notin C^2[0,1]$ бўлгани учун $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C^2[0,1]$ фазода яқинлашмайди.

Демак, $C^2[0,1]$ фазо тўла эмас.

7.4-масала. Агар X тўла метрик фазодаги $B[x, r]$ шарда метрика X дагидек аниқланган бўлса, у ҳолда $B[x, r]$ шар тўла метрик фазодан иборат эканлиги исботлансин.

Ечиш. Фараз қилайлик, $B[x, r]$ шарда $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин.

$$\{x_n(t)\}\subset B[x, r]$$

бўлганидан бу кетма-кетлик X да ҳам фундаментал бўлади. X тўла фазо. Шунинг учун $n\to\infty$ да $x_n\to x_0\in X$ ва $B[x,r]$.

X да ёпиқ. Демак, $x_0(t)\in B[x, r]$. Шундай килиб $B[x, r]$ даги ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик $B(x, r)$да яқинлашувчи, яъни $B[x,r]$ фазо тўла.

7.5-масала. Агар

$$A = \{x \in l_2 : \quad x = \{\xi_i\}, \quad |\xi_i| \le a, \quad i \in N$$

тўпламда l_2 фазонинг метрикаси қабул қилинган бўлса, у ҳолда А фазо тўла бўладими?

Ечиш. Юқоридаги 6.4-теоремага асосан, А тўпламнинг ёпиқ эканлигини кўрсатиш кифоя. Фараз қилайлик, $x_0(1) \in A$é. У ҳолда $n \to \infty$да $x_n \to x_0$ бўладиган $\{x_n(1)\} \subset A$ кетма-кетлик мавжуд. l_2 даги яқинлашиш координаталар бўйичадир. Бу эса $x_n = \{\xi_i^0\}$, $x_0 = \{\xi_i^0\}$ бўлганда $n \to \infty$ да $i \in N$да $\xi_i^n \to \xi_i^0$ эканлигини кўрсатади. Лекин

$$|\xi_i^n| \le a, \qquad i, n \in N$$

Шунинг учун $n \to \infty$ да лимитга ўтиб

$$|\xi_i^n| \le a, \qquad i \in N$$

эканини топамиз.

Демак, А тўплам ёпиқ, шунинг учун А тўла метрик фазодан иборат.

7.6-масала. Агар

$$A = \{(x, y) \in R^2 : \quad |x| \le 1, \quad x^2 + y^2 \le 4\}$$

тўпламда R^2 фазонинг метрикаси қабул қилинган бўлса, у ҳолда А сепарабел фазо бўладими?

Ечиш. R^2 сепарабел фазодан иборат. Шунинг учун 7.2-теоремага асосан А сепарабел фазо бўлади.

7.7-масала.

$$C^1[a,b] = \left\{ x(t) \in C[a,b], \quad \int_a^b |x(t)| dt < \infty \right\}$$

фазонинг тўлдирувчисини топинг.

Ечиш. $\overline{C}^1[a, b] = L[a, b]$ муносабатни кўрсатиш кифоя. $L[a, b]$ фазо тўла ва бу фазода ўз-ўзига изометрик бўлган $C^1[a, b]$ фазони олиш мумкин.

Аввало,

$$\overline{O}[a, b] = L[a, b]$$

муносабатни кўрсатамиз, бунда $O[a, b]$ билан $[a, b]$ кесмада ўлчовли ва чегараланган функциялар фазоси белгиланган. $\overline{O}[a,b]$ эса унинг тўлдирмаси.

Фараз қилайлик,

$$A_n = \{t \in [a,b]; \quad x(t) > n\},$$
$$A = \{t \in [a,b]; \quad |x(t)| = \infty\}$$

бўлсин. У ҳолда, $\mu A=0$ ва $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in N$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

эканини кўрсатамиз. Агар $t \in A$ бўлса, $|x(t)|=\infty$ ва демак, $n \in N$ учун $|x(t)|=\infty>n$. Бу эса $n \in N$ да $t \in A_n$ ни кўрсатади. Аксинча, агар $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда $t \in A_n$, $n \in N$. Яъни $n \in N$ учун $|x(t)|>n$

Охирги тенгсизликдан лимитга ўтиб $|x(t)|\geq\infty$, яъни $|x(t)|=\infty$ ва $t \in A$ ҳосил қиламиз.

Энди ўлчовнинг узлуксизлигига асосан

$$\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu A = 0 \qquad (1)$$

эканини топамиз.

Бу (1) тенгликдан ихтиёрий $\delta>0$ учун $n>n_0(\delta)$ да

$$\mu A_n < \delta \qquad (2)$$

бўладиган $n_0(\delta)$ натурал сон топилиши келиб чиқади.

Энди

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [a,b] \setminus A_n \\ 0, & t \in A_{n_0} \end{cases}$$

деб қараймиз.

$[a, b]$ кесмада $|x(t)|>n_0$ бўладиган t нуқталарни ташлаб юборсак, у ҳолда $[a,b]/A_{n_0}$ тўпламда $|x(t)|\leq n_0$ бўлади. Лекин ихтиёрий $t \in [a,b]/A_{n_0}$ учун $|y(t)|=|x(t)|\leq n_0$, яъни $y \in O[a, b]$.

Энди

$$\rho(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt=\int_{A_{n_0}}|x(t)|dt \qquad (3)$$

эканини кўрсатамиз.

Бу (3) дан Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссасига (4-§даги 4.6-теоремага қаранг) асосан (2) тенгсизликдан ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун

$$\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

бўладиган $\delta>0$ сонни танлаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб $O[a, b]$ тўплам $L[a, b]$нинг ҳамма жойида зичдир. Лузин теоремасига (3-§даги 3.7-теоремага қаранг) асосан ихтиёрий $\eta>0$ учун $\mu B=\mu\{t\in[a,b]: z(t)\neq y(t)\}<\eta$ бўладиган $[a, b]$ да узлуксиз $z(t)$ функция мавжуд. У ҳолда Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссасига асосан $\eta>0$ сонни

$$\rho(y,z)=\int_B|y(t)-z(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

бўладиган қилиб танлаш ҳам мумкин.

Энди (4) ва (5)ларга асосан

$$\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)<\varepsilon$$

Демак, $C^1[a, b]$ фазонинг тўлдирувчиси $L[a, b]$ фазодан иборат.

7.8-масала. $L_p(0,1)$, $1\le p<\infty$ фазода $x_n(t)=t^{3n}-t^{6n}$ кетма-кетлик фундаментал бўладими?

Ечиш. Юқоридаги 7.3-масалага асосан $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг $L_p(0,1)$ да яқинлашишини кўрсатиш кифоя. $n\to\infty$да $[0,1]$ кесмада $x_n(t)\to 0$ кўриниб турибди. Энди $L_p(0,1)$да $x_n(t)\to 0$, $n\to\infty$ бўлишини кўрсатамиз.

$$\rho(x_n,0)=\left(\int_0^1|t^{3n}-t^{6n}|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1 t^{3n}(1-t^{3n})^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$t\in[0,1]$ ва $|1-t^{3n}|\leq 1$ бўлганидан

$$\int_0^1 \left|t^{3n}-t^{6n}\right|^p dt \leq \int_0^1 t^{3np}\,dt = \frac{1}{3np+1}$$

Шунинг учун

$$\rho(x_n,0)\leq\left(\frac{1}{3np+1}\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,\quad n\to\infty$$

Демак, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $L_p(0,1)$, $(1\leq p<\infty)$да фундаментал дир.

7.9-масала. $C[0,1]$ фазода 7.8-масаладаги кетма-кетлик фундаментал бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, $n=2m$ бўлсин, яъни $n>m$ ва $t_n=2^{-\frac{1}{3n}}$. У ҳолда

$$\rho(x_n,x_m)=\max_{t\in[0,1]}\left|t^{3n}-t^{6n}+t^{6m}-t^{3m}\right|\geq$$

$$\geq\left|t_n^{3n}-t_n^{6n}-t^{3m}+t^{6m}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}>0$$

$n\in N$ ва $n=2m$.

Демак, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C[0,1]$ фазода фундаментал эмас.

3. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Ҳар қандай тўла метрик фазонинг ажримсиз нуқталари саноқсиз тўплам эканлиги исботлансин.

2. Саноқли миқдордаги ҳамма жойда зич бўлган тўликмас метрик фазонинг очиқ тўпламлар кесими ҳамма жойда зич эмаслигига мисоллар келтиринг.

3. $C^1[a,b]$ тўла фазоми?

4. Саноқли миқдордаги ҳамма жойда зич бўлган тўла метрик фазонинг очиқ тўпламлар кесими ҳамма жойда зич тўплам эканлигини исботланг.

5. S сепарабел фазо бўладими? Бунда S сонли кетма-кетликлар фазоси.

6. S[a, b] сепарабел фазо бўладими? Бунда, S[a, b] фазо [a, b] кесмада ўлчовли бўлган функциялар фазосидир.

7. Ҳамма сонли кетма-кетликлар тўпламида метрика

$$\rho(x, y) = \sup_{i\geq 1} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

формула билан аниқланган. Бу фазо сепарабел фазо бўладими?

8. $C(-\infty, \infty)$ сепарабел фазо бўладими?

9. Агар X метрик фазода ихтиёрий кетма-кетлик фундаментал кетма-кетликни ўз ичига олса, у ҳолда X сепарабел фазо эканлигини исботланг.

10. $C[0, 1]$ фазода $x_n(t)=t^n-t^{4n}$, $(n\in N)$ кетма-кетлик фундаментал бўладими?

8-§. МЕТРИК ФАЗОДА КОМПАКТ ТЎПЛАМЛАР ВА ҚИСҚАРТИРИШ ОПЕРАТОРИ

1. Асосий тушунчалар

$X=(X, \rho)$ метрик фазодаги K тўпламнинг ихтиёрий элементлар кетма-кетлигидан яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин бўлса, у ҳолда K тўплам ($K\subset X$) **нисбий компакт** дейилади.

Агар $K\subset(X, \rho)$ тўплам нисбий компакт бўлса ва ёпиқ бўлса, у холда K тўплам (X,ρ) метрик фазода **компакт** дейилади.

Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ ва ихтиёрий $x\in K$ учун ($K\subset(X, \rho)$

$$\rho(x, y)<\varepsilon$$

бўладиган $y\in A$ мавжуд бўлса ($A\subset(X,\rho)$ у ҳолда бундай A тўплам $K\subset(X, \rho)$ тўплам учун **ε - тўр** дейилади.

Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун ва K тўплам учун чекли ε тўр мавжуд бўлса, у ҳолда $K\subset(X, \rho)$ тўплам **батамом (тўла)** чегараланган дейилади.

Компакт бўлган X метрик **фазо компакт** дейилади.

Агар K тўплам ($K\subset(X, \rho)$) чегараланган бўлса, у ҳолда $x(t)\in K$ функция текис чегараланган дейилади, яъни $t\in[a, b]$ бўлганда хамма $x(t)\in K$ учун $C>0$ сон мавжуд бўлиб $|x(t)|\leq C$ бўлса, у ҳолда $x(t)$ функциялар текис чегараланган дейилади.

Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ ихтиёрий t_1, $t_2\in[a, b]$ учун шундай $\delta>0$ мавжуд бўлиб

$$|t_2-t_1|<\delta$$

бўлганда $x(t)\in K\subset C[a,b]$ функциялар учун

$$|x(t_2)-x(t_1)|<\varepsilon$$

бўлса, у холда $x(t)$ функциялар **бир хил даражали узлуксиз** функциялар дейилади.

Агар А оператор учун $0<\alpha<1$ сон мавжуд бўлиб ($A: X\to X$), $X=(X, \rho)$

$$\rho(Ax, Ay)\le\alpha\rho(x, y), \quad x, y\in X$$

бўлса, у ҳолда А қисқартириш оператори дейилади.

Агар $Ax=x$ бўлса, у ҳолда $x\in X$ нуқта А операторининг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

2. Асосий теоремалар

8.1-теорема. X чекли ўлчовли метрик фазодаги К тўплам нисбий компакт бўлиши учун X фазода К тўплам чегараланган бўлиши зарур ва кифоядир.

8.2-теорема. (Хаусдорф). К тўплам ($K\subset X$) нисбий компакт бўлиши учун X нинг тўла бўлиши зарур ва X нинг тўлалиги К нинг батамом чегараланган бўлиши учун кифоя.

8.3-теорема. (Арцела) $K\subset C[a, b]$ нисбий компакт бўлиши учун К нинг функциялар тўплами текис чегараланган ва текис (бир хил) даражада узлуксиз бўлиши зарур ва кифоя.

8.4-теорема. Қисқартирувчи А оператор ($A: X\to X$) учун тўла метрик X фазода биргина қўзғалмас нукта мавжуд.

3. Масалалар ечиш

8.1-масала. Агар

$$K=\{(x, y)\in R^2: \quad x^2+y^2\le1, \quad x>0\}$$

бўлса, у ҳолда К тўплам R^2 да компакт бўладими?

Ечиш. К тўплам чегараланган. Шунинг учун 8.1-теоремага асосан К нисбий компактдир. Лекин бу тўплам ёпиқ эмас, чунки $O(0, 0)$ нуқта У тўплам учун лимит нукта бўлиб $O(0, 0)\notin K$.

Демак, К компакт эмас.

8.2-масала. Агар

$$K=\{(x, y)\in R^2: \quad |y| =y\cos x, \quad |y| \le1 \}$$

бўлса, у ҳолда К тўплам R^2 фазода компакт бўладими?

Ечиш. Агар y>0 бўлса, у ҳолда cosx=1, x=2kπ (k∈Z). Агар y<0 бўлса, у ҳолда cosx=-1, x=(2k+1)π (k∈Z). Нихоят y=0 да $|y|$ =ycosx тенглик ҳар қандай x∈R учун ўринли.

Шундай қилиб, К тўплам

$$\{(2k\pi,\ 0\le y\le 1)\}\cup\{((2k+1)\pi,\ -1\le y\le 0)\}\cup R, \qquad k\in Z$$

кўринишдаги нуқталар тўпламидан иборат. Бу тўплам OX ўқ бўйлаб чегараланмаган, яъни 8.1-теорема шарти бажарилмайди.

Демак, К тўплам компакт эмас.

8.3-масала. Агар

$$K=\left\{x\in l_p,\quad x=\{\xi_i\},\quad \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p=1\right\}$$

бўлса, у ҳолда К тўплам l_p фазода нисбий компакт бўладими?

Ечиш. l_p фазода

$$\{e_n\},\qquad e_n=(\underbrace{0,0,...,1}_{n},0,...)$$

кетма-кетликни кўриб ўтамиз. Бу ерда

$$\rho(e_n,e_s)=2^{\frac{1}{p}},\qquad n,s\in N, n\ne s$$

энди ε сонни $0<\varepsilon<2^{\frac{1}{q}}$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ деб танлаймиз. У ҳолда ҳар қандай $O_\varepsilon(x)$ да ($x\in l_p$) e_n кўринишда биттадан нуқта бўлади, яъни берилган ε>0 учун К нинг чекли ε-тўри мавжуд бўлмайди.

Шунинг учун 8.2-теоремага асосан, К тўплам нисбий компакт бўла олмайди.

8.4-масала. Агар

$$A=\{(x,\ y)\in R^2,\quad x^2+y^2\le 1,\quad x\ge 0\}$$

Бўлиб, В тўплам [-1, 1] кесмадаги рационал сонлардан иборат бўлса, у ҳолда К=А×В тўплам R^3 фазода компакт бўладими?

Ечиш. К тўплам R^3 да чегараланган. Шунинг учун 8.1-теоремага асосан К нисбий компакт. Лекин К тўплам R^3 да ёпиқ эмас. Буни қуйидагича кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, $\{r_k\}$ кетма-кетлик B тўпламдан олинган рационал сонлар кетма-кетлиги бўлиб, $k\to\infty$ да $r_k \to -\frac{\sqrt{2}}{2}$ бўлсин.

$$\{S_n\}=\{(x_k,\ y_k)\}\subset A$$

бўлганда

$$z_n=(s_n,\ r_n),\qquad n\in N$$

кетма-кетликни олиб қарайлик. $\{S_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлгани учун $n_k\to\infty$ да $s_{n_k}\to s$ бўладиган $\{s_{n_k}\}$ мавжуд, бунда $\{s_{n_k}\}\subset\{s_n\}$.

A тўплам ёпиқ. Шунинг учун $s\in A$. Лекин

$$\lim_n r_n=-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin B$$

Демак, $\{z_{n_k}\}$ кетма-кетлик R^3 даги $\left(s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ элементга яқинлашади, чунки

$$\{z_{n_k}\}\subset\{z_n\},\qquad z_{n_k}=(s_{n_k},r_k).$$

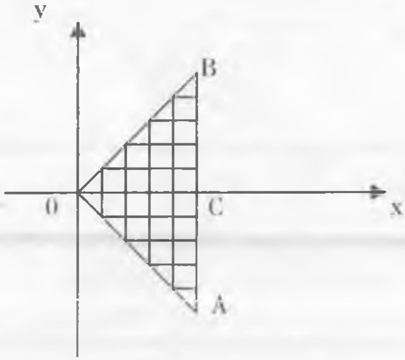
Шундай қилиб $\left(s,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ элемент K=AxB тўпламга тегишли бўлмаганидан K компакт бўла олмайди.

8.5-масала.

$$K=\{x(t)\in C[0,1],\ \ x(0)=0,\ \ |x(t_1)-x(t_2)|\le|t_1-t_2|,\ \ t_1,t_2\in[0,1]\}$$

тўплам учун $\varepsilon=0,2$ – тўр тузинг.

Ечиш. K тўпламдаги $x(t)$ функцияларнинг графиклари OAB учбурчакка жойлаштирилган (шаклга қаранг).



$|t_1-t_2| \le 0,2$ шартга асосан $[0,1]$ кесмани 5 тадан кам бўлмаган бўлакка бўлиш керак. Худди шундай AC ва BC кесмаларни ҳам шунча бўлакка бўлиш керак, чунки

$$|x(t_1)-x(t_2)| \le |t_1-t_2| \le 0,2$$

бўлиниш нуқталардан координата ўқларига параллел чизиқлар ўтказамиз. Натижада, OAB учбурчакда тўр ҳосил қиламиз.

Фараз қилайлик, U тўплам тўрда мавжуд бўлиши мумкин бўлган синиқ чизиқлар тўплами бўлиб, учлари тўрнинг тугунларида бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in K$ учун

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \le 0,2$$

бўладиган $y(t)$ мавжуд ($y(t) \in U$), яъни U тўплам K тўплам учун 0,2 тўрдан иборат.

8.6-масала. A оператор

$$y_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j + b_k, \quad (k=1,\ 2,\ldots,n)$$

тенглик билан аниқланган бўлиб R^n ни R^n га акслантиради, яъни

$$A:\ R^n \to R^n$$

Агар ихтиёрий $k,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n$ учун

$$\left|a_{kj}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{3}}$$

бўлса, у ҳолда A қисқартириш оператори бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик, $x^{(1)}$ ва $x^{(2)}$ нукталар R^n фазонинг ихтиёрий нукталар бўлсин. У ҳолда,

$$\rho(Ax^{(1)}, Ax^{(2)}) = \left(\sum_{k=1}^{n} (y_k^{(1)} - y_k^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^{(2)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \left(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Бу (1)даги ички йиғиндига Коши – Буняковский тенгсизлигини қўллаймиз.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x^{(1)}, x^{(2)})$$

Бу (2) га асосан (1) қуйидагича

$$\rho(Ax^{(1)}, Ax^{(2)}) \le \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

бўлади. Ихтиёрий k, j=1, 2, 3,..., n учун масала шартига кўра,

$$a_{kj}^2 \le \frac{1}{3n^2} \qquad (4)$$

Энди (4) ни эътиборга олсак (3) дан

$$\rho(Ax^{(1)}, Ax^{(2)}) \le \frac{1}{\sqrt{3}}\rho(x^{(1)}, x^{(2)})$$

ҳосил бўлади. Бу эса A қисқартириш оператори эканлигини кўрсатади.

8.7-масала. A оператор $x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ элемент учун

$$Ax = y = \left(x_1, 2x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \tfrac{1}{4}x_4, 6x_5, \tfrac{1}{6}x_6, 7x_7\right)$$

тенглик билан аниқланган ва A: $R^7 \to R^7$

Бундай оператор қисқартириш оператори бўладими?

Ечиш. Фараз қилайлик

$Z_1=0=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ва $Z_2=(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$

бўлсин. У ҳолда

$Az_1=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ва $Az_2=(1, 2, 0, 0, 5, 0, 7)$

бўлиб

$$\rho(z_1, z_2) = 2, \qquad \rho(Az_1, Az_2) = \sqrt{79}$$

яъни

$$\rho(Az_1, Az_2) = \sqrt{79} > 2 = \rho(z_1, z_2)$$

Демак, A қисқартириш оператори бўлмайди.

8.8-масала. Агар $x \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ элемент учун A оператор

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(s)\sin t \cos s ds$$

тенглик билан аниқланган бўлса, у ҳолда A қисқартириш оператори бўладими?

Ечиш. Ихтиёрий $x_1(t),\ x_2(t) \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ учун

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = \max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [x_1(s) - x_2(s)] \sin t \cos s ds \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \max_t |\sin t| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x_1(s) - x_2(s)| |\cos s| ds \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos s \max_s |x_1(s) - x_2(s)| ds = \frac{1}{2} \rho(x_1, x_2)$$

Демак, A қисқартириш операторидан иборат.

8.9-масала. Фараз қилайлик, A: X→X бунда X компакт ва

$$\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y), \quad x, y \in X \tag{5}$$

бўлсин. У ҳолда A операторининг қўзғалмас нуқтаси мавжуд эканлиги исботлансин.

Ечиш. Тескаридан фараз қиламиз. Бундай ҳолатда X фазода

$$\rho(Ax_n, Ay_n) \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rho(x_n, y_n) \tag{6}$$

бўладиган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар топилади. X компакт бўлгани учун $n_k \to \infty$да $x_{nk} \to \alpha$ ва $y_{nk} \to y$ бўладиган мос равишда $\{x_{nk}\}$, $\{x_{nk}\} \subset \{x_n\}$, $\{y_{nk}\}$, $\{y_{nk}\} \subset \{y_n\}$ кетма-кетликлар мавжуд.

Бундай кетма-кетликлар учун ҳам (6) тенгсизлик сақланади. Энди $n_k \to \infty$да (6)дан лимитга ўтиб

$$\rho(Ax, Ay) \ge \rho(x, y) \tag{7}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, бунда A оператор ва $\rho(x,y)$ лар узлуксизлиги эътиборга олинди. Охирги (7) тенгсизлик (5)га зиддият A оперторининг қўзғалмас нуқтаси мавжуд эканлигини кўрсатади.

8.10-масала. Фараз қилайлик, $\{A_n\}$ бўшмас тўпламлар X метрик фазонинг

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

компакт тўпламлари бўлсин.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$$

эканлиги исботлансин.

Ечиш. Ҳар бир A_n тўпламдан a_n нуқта танлаймиз. $\{A_n\}$ кетма-кетликлар кисқариб борувчи бўлганидан

$$\{a_n\} \subset A_1$$

A_1 тўплам компактдир. Шунинг учун $\{a_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи $\{a_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетликни ўз ичига олади.

$$n_k \to \infty \text{да} \quad a_{n_k} \to a \in A_1.$$

Энди n_k сонни аниқлаймиз. У холда

$$\left\{a_{n_i}\right\}_{i=k}^{\infty} \subset A_{n_k}$$

ва кетма-кетлик ҳам a элементга яқинлашгани учун

$$a \in A_{n_k}, \quad n_k = 1,2$$

яъни $\quad a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

Демак, $\quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$

4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $C[a, b]$ фазодаги чегараланган алгебраик кўпҳадлар тўплами нисбий компакт эканлиги исботлансин.

2. Агар $K=\{(x, y)\in R^2: (1-x^2-|1-x^2|)^2+y^2=0\}$ бўлса, у холда K тўплам R^2 да компакт бўладими?

3. $A: m \to m$ ва

$$Ax = \left\{\frac{\xi_i}{2^i}\right\}, \qquad x = \{\xi_i\}$$

Бу A кисқартириш опeратори бўладими?

4.

$$K=\{x(t)\in C[0,1]:\ x'(t)\in C[0,1],\ |x'(t)|\le 1\}$$

тўплам $C[0, 1]$ фазода фақат ихтиёрий $x\in K$ учун

$$\left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \le M$$

бўладиган $M>0$ сон мавжуд бўлгандагина нисбий компакт бўлиши исботлансин.

5. $\{\sin\alpha t\}$, $(\alpha\in A\subset R)$ функциялар тўплами $C[0, 1]$ фазода фақат A тўплам R фазода чегараланган бўлгандагина нисбий компакт бўлиши исботлансин.

6. l_p фазода бирлик шар нисбий компакт эмаслиги исботлансин.

7. Агар $K\subset X$ компакт бўлиб $x(t)\in X$ бўлса, у ҳолда $\rho(x, K)=\rho(x, a)$ бўладиган a элемент $(a\in K)$ мавжуд эканлиги исботлансин.

8. Агар $K\subset X$ тўплам компакт бўлса, у холда

$$\sup_{x,y\in K}\rho(x,y)=\rho(a,b)$$

бўладиган а, в элементлар (а, в$\in K$) мавжуд эканлиги исботлансин.

9. Чексиз ўлчовли фазода хар қандай компакт тўплам хеч қаерда зич эмаслиги исботлансин.

10. Ўзининг хусусий қисм фазосига изометрик акслапувчи компакт мавжуд эмаслиги исботлансин.

ҚЎШИМЧА
Ихтиёрий вектор фазоларда чизиқли операторлар

1. Асосий тушунчалар

Агар хар бир $a \in V$ векторга бир қийматли аниқланган $в=\varphi(a)$ вектор мос қўйилса ва қуйидаги шартлар бажарилса, V вектор фазода чизикли операторлар аниқланган дейилади.

1. $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \quad \forall x, y \in V$
2. $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x), \quad \forall x \in V, \forall\lambda \in R$

Агар A_φ матрица устунларининг элементлари, $\{e_1, e_2,...,e_n\}$ базисдаги $e_1'=\varphi(e_1)$, $e_2'=\varphi(e_2)$,..., $e_n'=\varphi(e_n)$ базис вектор образларининг координаталаридан тузилган бўлса, у холда A_φ матрица φ чизикли операторининг $\{e_1, e_2,...e_n\}$ базисдаги матрицаси дейилади.

Агар V фазода иккита $\{e_1, e_2,...e_n\}$ ва $\{f_1, f_2,...f_n\}$ базислар берилган бўлиб, φ чизиқли операторнинг бу базислардаги матрицалари A_φ ва B_φ бўлса, у ҳолда бу матрицалар қуйидаги формула билан боғланади.

$$B_\varphi=C^{-1}\cdot A_\varphi\cdot C$$

Бу ерда, C - $\{e_1, e_2,...e_n\}$ базисдан $\{f_1, f_2,...f_n\}$ базисга ўтувчи матрица. V фазодаги иккита φ ва Ψ чизиқли операторларнинг $\varphi+\psi$ йиғиндиси, $\varphi\cdot\psi$ кўпайтмаси ва $\alpha\cdot\varphi$ α сонининг φ чизиқли операторга кўпайтмаси мос равишда қуйидаги тенгликлар билан ифодаланади:

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x);$$
$$(\varphi\cdot\psi)(x)=\varphi(\psi(x));$$
$$(\alpha\cdot\varphi)(x)=\alpha(\varphi(x)).$$

Агар λ сон мавжуд бўлиб, x нолмас вектор учун

$$\varphi(x)=\lambda x$$

шарт бажарилса, x вектор V вектор фазодаги φ чизиқли операторнинг махсус вектори дейилади. λ сон – x векторга мос келувчи махсус сон дейилади.

Энди чексиз ўлчовли фазоларни қарайлик. Фараз қилайлик, R фазо ихтиёрий чексиз ўлчовли Евклид фазоси бўлсин.

R чексиз ўлчовли фазода базис тушунчаси қуйидагича киритилади.

Таъриф: Агар R чексиз ўлчовли фазодаги

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \qquad (1)$$

векторларнинг бирортаси ҳам шу тизимнинг чекли миқдордаги бошқа векторларининг чизиқли ифодаси бўлмаса, у холда бундай (1) векторлар тизими чизиқли боғланмаган дейилади ва R даги ҳар қандай чизиқли боғланмаган векторлар тизими шу фазонинг базиси дейилади.

Энди бирор чексиз ўлчовли фазонинг (масалан l_2 нинг) базиси

$$e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}, \dots \qquad (2)$$

берилган бўлсин. Бу тизимдан олинган чекли миқдордаги ихтиёрий векторларнинг чизиқли

$$x=\lambda_1 e^{(n_1)}+\lambda_2 e^{(n_2)}+\dots+\lambda_m e^{(n_m)} \qquad (3)$$

(λ_k – сонлар, k=1, 2, …, m)

ифодаларнинг тўпламини M деб белгилайлик. Бу M тўплам

$$e^{(n_1)}, e^{(n_2)}, \dots, e^{(n_m)} \qquad (4)$$

тизимнинг чизиқли қобиғи дейилади.

M чизиқли қобиқнинг ёпиғи L тўплам (2) тизимнинг векторлари хосил қилган фазонинг (масалан, l_2 нинг) қисм фазоси дейилади. Демак, L тўпламга (3) кўринишдаги векторлар ва бундай векторлар кетма-кетликларининг лимитлари киради.

Таъриф: Агар (2) тизим базисдан бўлиб ихтиёрий иккита ҳар хил векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$$\left(e^{(i)},e^{(j)}\right)=0, \qquad i\neq j \qquad (5)$$

бўлса, у ҳолда (2) ортогонал базис дейилади ва

$$\left(e^{(i)},e^{(j)}\right)=1$$

бўлса ортонормал базис дейилади.

Ортогонал тизим учун қуйидаги хоссаларни келтирамиз.

1-теорема. L қисм фазо қуйидаги ихтиёрий векторлар тизими

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}, \ldots \qquad (6)$$

дан ҳосил қилинган бўлиб, z вектор ($z\in l_2$) (6) даги векторларнинг ҳар бири билан ортогонал бўлган бўлса, у ҳолда z вектор L даги ихтиёрий x векторга ҳам ортогонал бўлади.

2-теорема. l_2 даги x вектор L фазода ётиши учун унинг

$$x=\sum_{m=1}^{\infty} d_m y^{(m)}$$

кўринишида ифодаланиши зарур ва кифоядир. Бунда

$$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}, \ldots$$

векторлар L қисм фазонинг ортонормал базисидан иборат ва

$$d_m=(x,y^{(m)}), \qquad m=1,2,3,\ldots$$

2. Масалалар ечиш

1-масала. $X=(x_1, x_2, x_3)$ векторни

$$\varphi(x)=(4x_1-3x_2+2x_3,\ x_1+x_2,\ 3x_1-x_3)$$

формула билан алмаштириш чизиқли оператор бўлишини исботланг ва

$$\begin{cases} b_1=(3,2,3) \\ b_2=(-4,-3,-5) \\ b_3=(5,1,-1) \end{cases}$$

базисда шу операторнинг матрицасини топинг.

Ечиш. Чизиқлилик шартларини текширайлик.

a. $\varphi(x+y)=(4x_1-3x_2+2x_3+4y_1-3y_2+2y_3,\ x_1+x_2+y_1+y_2,$
$3x_1-x_3+3y_1-y_3)=(4x_1+4y_1-3x_2-3y_2+2x_3+2y_3,$
$x_1+y_1+x_2+y_2,\ 3x_1+3y_1-x_3-y_3)=\varphi(x)+\varphi(y)$

b. $\varphi(\lambda\cdot x)=(\lambda 4x_1-\lambda 3x_2+\lambda 2x_3,\ \lambda x_1+\lambda x_2,\ \lambda 3x_1-\lambda x_3)=\lambda\varphi(x)$

φ операторининг (e_1, e_2, e_3) базисдаги A_φ матрицаси қуйидаги кўринишга эга

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

φ операторининг $\{b_1, b_2, b_3\}$ базисдаги матрицасини

$$B_\varphi=C^{-1}\cdot A_\varphi\cdot C \qquad (1)$$

фомула билан аниқлаймиз, бу ерда,

$$C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -5 & 1\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

C матрицага тескари матрицани аниқлаб қуйидагига эга бўламиз.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

У ҳолда

$$B_\varphi=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17 & 10 & -122\\ -12 & 8 & 79\\ 3 & -3 & 13\end{pmatrix}$$

2-масала.

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

матрица φ операторнинг

$$\begin{cases} a_1 = (-1, 1) \\ a_2 = (1, 2) \end{cases}$$

базисдаги матрицаси,

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрица эса ψ операторнинг

$$\begin{cases} b_1 = (1, -1) \\ b_2 = (1, 2) \end{cases}$$

базисдаги матрицаси бўлсин.

φ·ψ чизиқли операторнинг $\{e_1, e_2\}$ базисдаги матрицаси топилсин.

Ечиш. C_1 ва C_2 матрицалар $\{e_1, e_2\}$ базисдан мос равишда $\{a_1, a_2\}$ ва $\{b_1, b_2\}$ базисларга ўтувчи матрицалардир. C_1 ва C_2 матрицаларга тескари матрицалар қуйидагича бўлади.

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Бу ердан C_1 ва C_2 ларни аниқлаш мумкин.

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

φ ва ψ операторларнинг $\{e_1, e_2\}$ базисдаги матрицаларини E_φ ва E_ψ деб белгилаймиз. У ҳолда юқоридаги (1) формулага асосан

$$E_\varphi = C_1^{-1} \cdot A_\varphi \cdot C_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$E_\psi = C_2^{-1} \cdot B_\psi \cdot C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Булардан

$$E_\varphi \cdot E_\psi = \begin{pmatrix} \frac{31}{6} & -\frac{33}{6} \\ \frac{41}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 31 & -33 \\ 41 & -1 \end{pmatrix}$$

3-масала. Қуйида матрица кўринишида берилган φ чизиқли операторнинг махсус вектори ва махсус сонини топинг,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ечиш. Характеристик тенглама орқали махсус сонни топамиз.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - \lambda = 0$$

Бу тенглама қуйидаги илдизларга эга

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$$

Ҳар бир махсус сон учун тенгламалар тизими тузилади.

$$1.\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Бу тизимларни ечиб, уларнинг умумий ечимини хосил қиламиз.

$$x=\alpha(0,\ -1,\ 1),\quad y=\beta(1,1,\ -2),\quad z=\gamma(-1,\ -1,\ 1)$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0,\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma\in R)$$

x, y, z векторлар берилган чизиқли операторнинг махсус векторларидир.

4-масала. l_2 даги x вектор L фазода ётиш шарти нимадан иборат?

Ечиш. Ортонормал базис сифатида қуйидагини оламиз

$$\{y^{(m)}\}=\{e_{2m}\},\quad m=1,\ 2,\ 3,\ldots\ .$$

$$y^{(1)}=e_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots),$$
$$y^{(2)}=e_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Бундай базисдан ҳосил бўлган L қисм фазо

$$x=\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}e_{2m}=(0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ldots)$$

кўринишидаги векторлардан иборат, яъни бу векторларнинг тоқ рақамли координаталари нолга тенг бўлиб,

$$d_m=(x,\ y^{(m)})=(x,\ e_{2m})=a_{2m}$$

Энди $x\in L$ векторлар учун ($x\in l_2$)

$$(x,\ x)^2=\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2$$

Агар $x\in l_2$ вектор L да ётмас, у ҳолда a_{2m-1} ларнинг бирортаси албатта, нолдан фарқли бўлиб

$$(x,\ x)^2=\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2+\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1}^2>\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m}^2=\sum_{m=1}^{\infty} d_m^2$$

бўлади.

Демак, $x \in l_2$ даги x вектор L қисм фазода ётиши учун

$$(x, x)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^2$$

бўлиши шартдир.

5-масала. $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$ вектор учун $Ax=y$ оператор қуйидаги тенгламалар тизимини ифодаласин

$$\begin{array}{ll} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+\ldots & \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (*) \\ y_n=a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n+\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Бунда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k < \infty, \qquad \text{n} = 1, 2, \ldots$$

қандай шарт бажарилганда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik} x_k| \qquad i = 1, 2, \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади.

Ечиш. Масала шартига кўра

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leq A$$

A ўзгармас сон. Энди

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 \leq c \qquad \text{n} = 1, 2, \ldots$$

деб фараз қилсак, у холда Коши-Буняковский тенгсизлигига асосан

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = (CA)^{\frac{1}{2}}$$

Демак, агар (*) тизимнинг коэффициентларидан тузилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}^2, \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2, \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty \qquad n = 1, 2, \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлади, шу билан бирга

$$y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

учун

$$|y_n| \le K, \quad n=1, 2, \ldots$$

тенгсизлик бажарилади ва y вектор m фазонинг векторидан иборат, $y \in m$.

3. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $X=(x_1, x_2, x_3)$ векторни

$$\varphi(x)=(3x_1-x_2+2x_3,\ x_1+x_2-x_3,\ 2x_1+x_2-3x_2)$$

формула билан алмаштириш чизикли оператор эканлигини исботланг ва

$$\begin{cases} b_1 = (1,2,-3) \\ b_2 = (-1,0,1) \\ b_3 = (0,2,3) \end{cases}$$

базисда шу операторнинг матрицасини топинг.

2. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрица φ операторнинг $\begin{cases} a_1 = (-3,1) \\ a_2 = (1,1) \end{cases}$ базисдаги матрицаси, $B_\psi = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрица эса ψ операторнинг $\begin{cases} b_1 = (3,-2) \\ b_2 = (1,2) \end{cases}$ базисдаги матрицаси бўлсин. $\psi \cdot \varphi$ чизикли оператнинг $\{e_1, e_2\}$ базисдаги матрицаси топилсин.

3. Матрица кўринишда берилган чизиқли операторнинг махсус вектори ва махсус сонини топинг.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Ортогонал базисни

$$\{y^{(m)}\}=\{e_{2m-1}\} \quad m=1, 2, 3,...$$

деб танлаганда l_2 даги x вектор L қисм фазода ётадими?

5. $Ax=y$ $(x\in l_2)$ оператор чексиз ўлчовли фазода берилиб

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k, \qquad n = 1, 2,...$$

тенгламалар тизимини ифодаласи ва бунда

$$x=(x_1, x_2,..., x_n ,...) \qquad y=(y_1, y_2,..., y_n ,...)$$

бўлса, қуйидагилар аниқлансин:

1) Бу операторнинг чизиқли эканлиги текширилсин.

2) x ва y векторлар s ҳамда l_2 фазоларнинг элементлари бўла оладими?

Мустақил ечиш учун берилган масалаларнинг жавоблари ва кўрсатмалари

1-§.

2. Ҳа, мумкин.
4. Континуум.
5. Континуум.
8. Континуум

2-§.

1. A тўплам ёпиқ ва ихтиёрий $\delta>0$ учун $\mu(G/A)<\delta$ бўладиган G очиқ тўплам $(G\supset A)$ мавжуд.

Энди

$$X(A) \subset X(G) = X(\bigcup_k(\alpha_k, \beta_k)) = \bigcup_k X(\alpha_k, \beta_k)$$

эканлиги кўриниб турибди.

Шуниг учун

$$\mu A = \mu X(A) \le \sum_k \mu(X(\alpha_k, \beta_k)) =$$

$$= \sum_k \left(\sup_t x(t) - \inf_t x(t) \right) = \sum_k \left(x(\nu_k) - x(\mu_k) \right) =$$

$$= \sum_k \left| \int_{\mu_k}^{\nu_k} x'(t)dt \right| \le \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |x'(t)dt| = \int_G |x'(t)|dt = \int_{G \setminus A} |x'(t)|dt.$$

Ихтиёрий ε>0 учун δ=δ(ε) сонни

$$\int_{G \setminus A} |x'(t)|dt < \varepsilon$$

бўладиган қилиб танлаймиз.

2. $A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ деб олайлик, у ҳолда

$$\mu A = 1 - \mu(CA) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} CA_k \right) \ge$$

$$\ge 1 - \sum_{k=1}^{n} \mu(CA_k) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n} \mu A_k > 0$$

3. Фараз қилайлик, [0, 1] кесманинг ҳамма қисм тўпламлар тўплами А бўлсин, M_p эса Кантор тўплами бўлган Р нинг қисм тўпламлар тўплами бўлсин. μ(Р)=0 бўлгани учун $B \in M_p$ тўплам ўлчовлидир. m(p)=c бўлганидан

$$m(M_p) \ge 2^c$$

Лекин $M_p \subset A$ шунинг учун

$$m(A) \ge m(M_p) \ge 2^c > c$$

4. Жавоб: $\dfrac{\pi}{6}$

5. Жавоб: 0,5

3-§.

1. Ҳа, бўлади.
2. Ҳа, бўлади.
3. Ҳа, бўлади.
4. Ҳа, бўлади. Масалан, $x(t) = sign(t - \frac{1}{2})$

6. Бунинг учун 3.5-теоремадан фойдаланинг.

4-§.

1. Жавоби:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

3. Риман бўйича интегралланувчи, Лебег бўйича интегралланувчи эмас.

4. Жавоби:

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5. Ҳа, ўринли.
6. Йўқ, ўринли эмас.
7. Йўқ, тасдиқлаш мумкин эмас.
8. Жавоби: 0

5-§.

2. Метрика шартлари бажарилади.
7. Метрика шартлари бажарилади.
8. Ҳа, мавжуд.
9. Фараз қилайлик, $x_n = \{\xi_i^n\}$ бўлиб бунда

$$\xi_i^n = \begin{cases} n^{-\frac{1}{p}}, & i \le n; \\ 0, & i > n \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда n→∞ да

$$\rho_m(x_n, \theta) = n^{-\frac{1}{p}} \to 0;$$

$$\rho_{l_p}(x_n, \theta) = 1, \quad n \in N$$

10. Фараз қилайлик, $x_n = \left\{ \xi_i^n \right\}$ бўлиб бунда

$$\xi_i^n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i \le n; \\ 0, & i > n \end{cases}$$

бўлсин. У ҳолда n→∞ да

$$\rho_{l_2}(x_n, \theta) = n^{-\frac{1}{2}} \to 0;$$

$$\rho_{l_1}(x_n, \theta) = 1, \quad n \in N$$

Фараз қилайлик,

$$x_n(t) = t^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

У ҳолда n→∞ да

$$\rho_{L_p}(x_n, \theta) = (np+1)^{-\frac{1}{p}} \to 0.$$

Лекин $x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$ бўлиб, бунда

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

11. Ҳа бўлади. Чунки

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| \lim \xi_n^{(1)} - \lim \xi_n^{(2)} \right| \le$$
$$\le \sup \left| \xi_n^{(1)} - \xi_n^{(2)} \right| = \rho_m(x_1, x_2).$$

12. Ҳа бўлади. Чунки

$$\rho_{l_2}(f(x_1), f(x_2)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \tfrac{1}{k} \left(\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)} \right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x_1, x_2)$$

13. Жавоби: $\rho(x, y) = 15,5$

6-§.

1. Йўқ, бўлмайди. Бунинг учун масалан

$$x_n = \left\{ \frac{1}{i^{\frac{1}{p}}} \right\}_{i=1}^{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

кетма-кетликни кўриб ўтинг.

2. Йўқ бўлмайди.

3. Йўқ, бўлмайди. Масалан,

$$x_n = \left\{ \frac{1}{i^{\frac{1}{a}}} \right\}_{i=1}^{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

кетма-кетликни олиб қараш кифоя.

4. Йўқ, бўлмайди. Бунинг учун хеч қандай атроф мавжуд эмаслигини кўрсатинг. Масалан, A тўпламнинг нуқталаридан тузилган θ нуқта қаралсин.

5. Йўқ, бўлмайди. Масалан, $x_0=(1, -1, 0, \ldots)$ нуқта A тўпламда ётади, лекин A тўплам нуқталарини ўз ичига олувчи x_0 нуқтанинг хеч қандай атрофлари мавжуд эмас.

3. Йўқ, бўлмайди. Бунинг учун $\{x_n\} \in A$

$$x_n = \left\{ 1, \underbrace{-\tfrac{1}{n}, -\tfrac{1}{n}, \ldots, -\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots \right\}$$

кетма-кетликни кўриб ўтиш кифоя.

4. Йўқ бўлмайди. Бунинг учун

$$x_n(t) = (t+1)^n, \qquad n \in N$$

кетма-кетликдан фойдаланиш мумкин.

5. Аввало, $C[a, b]$ фазода даражаси n дан ошмайдиган кўпҳадлар тўплами ёпиқ эканлиги кўрсатилсин, сўнгра ихтиёрий $B(x_0, r)$ тўплам хеч бўлмаганда битта функцияни ўз ичига олиши ва бу функция даражаси n дан ошмайдиган кўпҳад эмаслиги кўрсатилсин.

7-§.

1. $X=\{x_k\}$ бўлсин. $x_k \notin B[y_k, r_k]$ бўладиган ва $k \to \infty$да $r_k \to 0$ бўладиган $\{B[y_k, r_k]\}$ ёпиқ шарлар кетма-кетлигини тузинг ҳамда X фазонинг тўлалигидан фойдаланинг.

2. Q тўпламда R фазонинг метрикасини киритинг ва

$$F_n=\{r_1, r_2,\ldots, r_k\}, \quad r_k\in Q, \quad k\in N$$

ёпиқ тўпламларнинг тўлдирувчиси бўлган очиқ тўпламлар тизимини кўриб ўтинг.

3. Ҳа, тўла фазо бўлади.

4. Ҳар қандай $\varepsilon>0$, $x\in X$ учун

$$B[x_1, r_1]\subset O_\varepsilon(x)\cap G_1, \quad r_1<1$$

бўладиган $B[x_1,r_1]$ ёпиқ шар мавжуд.

Худди шундай

$$B[x_2, r_2]\subset B[x_1, r_1]\cap G_2, \qquad r_2<\frac{1}{2}$$

бўладиган $B[x_2, r_2]$ мавжуд ва ҳоказо.

Ниҳоят ихтиёрий $y\in O_\varepsilon(x)$ учун

$$y\in \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(B[x_k,r_k]\cap G_k\right)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

5. Ҳа, бўлади.

6. Ҳа, бўлади.

7. Йўқ, бўлмайди. Буни қуйидагича изоҳлаймиз.

Фараз қилайлик,

$$A=\{x:\ x=\{\xi_i\},\ \ \xi_i=0 \ \text{ ёки } \ \xi_i=1, \quad i=N\}$$

У ҳолда

$$m(A)\equiv c, \quad \rho(x,y)=\frac{1}{2}, \quad (x,y\in A), \quad x\neq y$$

8. Йўқ, бўлмайди. Буни қуйидагича кўрсатиш мумкин.

Ҳар бир

$$\{\xi_i\}, \ \ \xi_i=0 \ \text{ ёки } \ \xi_i=1, \quad i=N$$

кетма-кетликка қуйидаги узлуксиз функцияни мос келтирамиз

$$x(t)=\begin{cases} 0, & t\in[n,n+1], \ \ \xi_n=0 \\ \text{чизиқли функция}, & (n,n+\tfrac{1}{2}),\ (n+\tfrac{1}{2},n+1) \text{ да}, \ \xi_n=1 \\ 0, & t<1 \end{cases}$$

$$x\left(n+\frac{1}{2}\right)=1, \qquad x(n)=x(n+1)=0$$

Бундай $x(t)$ функциялар тўпламини A деб белгилайлик. У ҳолда $m(A)=c$ ва $\rho(x, y)=2$, $x, y\in A$, $x\neq y$ бўлади.

8-§.

2. Ҳа, бўлади.
3. Ҳа, бўлади.
5. Ушбу

$$|\sin \alpha t_1 - \sin \alpha t_2| = 2\left|\cos \alpha \frac{t_1+t_2}{2} \sin \alpha \frac{t_1-t_2}{2}\right| \leq$$

$$\leq |\alpha||t_1 - t_2| < |\alpha|\delta < \varepsilon$$

тенгсизликдан фойдаланинг.

9. Фараз қилайлик, K компакт ($K\subset X$) тўплам бўлсин. X фазода ихтиёрий $B(x_0,r)$ очиқ шарни олайлик ва

$$K\cap B[x_0, r]\neq\varnothing$$

бўлсин. $B(x_0, r)$ шар учун

$$B(x_0, r)\not\subset K\cap B[x_0, r]$$

муносабат кўриниб турибди, яъни

$$y\notin K\cap B[x_0, r]$$

бўладиган $y\in B(x_0, r)$ очиқ шар мавжуд. У ҳолда $K\cap B[x_0, r]$ тўплам учун

$$O_\varepsilon(y)\not\subset K\cap B[x_0, r]$$

бўладиган $O_\varepsilon(x)$ атроф мавжуд.

Энди

$$O_\varepsilon(y)\subset B(x_0, r)$$

бўладиган $\varepsilon>0$ сонни танлаш кифоя.

10. Фараз қилайлик,

$$A: X\to X_1\subset X, \qquad X/X_1\neq 0$$

бўладиган изометрик A акслантириш мавжуд бўлсин.

$$\rho(Ax, Ay)=\rho(x, y)$$

бўлганидан A узлуксиз акслантиришдан иборат.

Демак,

$$A(X)=X_1$$

компактдир. $X/X_1\neq 0$ бўлганидан шундай x_0 $(x_0\in X)$ мавжуд бўлиб, $x_0\notin X_1$ ва

$$\rho(x_0, Ax_0)\geq\varepsilon \tag{1}$$

бўладиган $\varepsilon>0$ сон мавжуд. Бу жараённи саноқли марта такрорлаб

$$\rho\left(A^n x_0, A^{n+p} x_0\right)=\rho\left(A^{n-1} x_0, A^{n+p-1} x_0\right)=$$
$$=\rho(x_0, A^p x_0)\geq\varepsilon, \qquad x_n=A^n x_0$$

бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни ҳосил қиламиз. X компакт бўлганидан $n_k\to\infty$ да

$$x_{n_k}\to y_0\in X$$

бўладиган

$$\left\{x_{n_k}\right\}$$

қисмий кетма-кетлик мавжуд ва

$$\left\{x_{n_k}\right\}\subset\left\{x_n\right\}$$

бўлади. У ҳолда n_k, $n_s\to\infty$ да

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_s})\to 0$$

лекин $n_k\neq n_s$ бўлганда (1) га асосан

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_s})=\rho(A^{n_k} x_0, A^{n_s} x_0)\geq\varepsilon$$

Бу зиддиятдир.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. *Т.А.Саримсоқов.* Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси, «Ўзбекистон» Т. 1993 й. – 340 б.

2. *Т.А.Саримсоқов.* Функционал анализ курси, «Ўқитувчи» Т., 1986 й. – 400 б.

3. *В.К.Қобулов.* Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси, «Ўқитувчи», Т., 1976 й. – 436 б.

4. *А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа, М.: «Наука», 1989 г. – 624 с.

5. *А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани.* Теоремы и задачи функционального анализа, М.: «Наука», 1979 г. – 381 с.

6. *Г.Ғаймназаров.* Функционал анализ маъруза матнлари I, II-қисм. Гулистон «ГулДУ» 2000 й. – 83 б.

7. *Г.И.Архипов, В.А.Садовничий, В.Н.Чубариков.* Лекции по математическому анализу, М.: «Высшая школа» 1999 г. – 523 с.

8. *Ш.А.Аюпов, М.А.Бердикулов, Р.М.Турғунбоев.* Функциялар назарияси (функциялар назарияси ва функционал анализ курсига кириш). «ЎАЖБНТ» Маркази, Т. 2004 й. – 148 б.

МУНДАРИЖА

ГУЛМУРОД ҒАЙМНАЗАРОВ, ОЛИМЖОН ҒАЙМНАЗАРОВ

ФУНКЦИОНАЛ АНАЛИЗ КУРСИДАН МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

(Ҳақиқий ўзгарувчанлик функциялар назарияси ва метрик фазолардан масалалар ечиш намуналари)

Тошкент – «Fan va texnologiya» – 2006

Муҳаррир: *С. Бадалбоева*
Тех. муҳаррир: *А. Мойдинов*
Мусаххих: *М. Ҳайитова*

Босишга рухсат этилди 20.03.2006. Бичими 60х84 $^{1}/_{16}$.
Босма табоғи 8,0. Адади 1000. Буюртма №24.

«Fan va texnologiya» нашриёти, 700003,
Тошкент ш., Олмазор, 171. Шартнома №04-06.

«Fan va texnologiyalar markazi bosmaxonasi»да чоп этилди.
Тошкент ш., Олмазор кўчаси, 171-уй.