51 5-14 144 23
Х 26

Р. ҲОРУНОВ

ЧИЗМА ГЕОМЕТРИЯ КУРСИ

Техника олий ўқув юртлари учун дарслик

КАЙТА ИШЛАНГАН ТЎРТИНЧИ НАШРИ

2033066
ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ
TEAI KUTUBXONASI
№ 354521

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1997

Бу дарслик техника олий ўқув юртларининг барча ихтисосликлари учун мўлжалланган. Дарсликни қайта нашрга тайёрлашда ҳозир фойдаланилаётган дастурлар асос қилиб олинган.

Китоб инженерлар, лойиҳачилар ва архитекторлар учун ҳам амалий қўлланма бўла олади.

Махсус муҳаррир: *проф. А. Акбаров*

X 66

Ҳорунов Р.

Чизма геометрия курси: Техника олий ўқув юрт. учун дарслик.— Т.: Ўқитувчи, 1997.—280 б.

ББК 22.151. 3Я73

$X \frac{1602050000-184}{353\ (04)-97}$ — инф.п.—96

© «Ўқитувчи» нашриёти, 1997.

ISBN 5—645—02086—3

СЎЗ БОШИ

«Чизма геометрия курси» дарслиги Ўзбекистон Олий ва махсус ўрта таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари учун тасдиқлаган «Чизма геометрия ва инженерлик графикаси» дастурига мувофиқ ёзилган.

Китобнинг биринчи нашри асосан олий техника ўқув юртларининг қурилиш ва архитектура ихтисосликларидан бошқа барча ихтисосликлари учун дарслик сифатида мўлжалланган эди. Китобнинг иккинчи нашри асосий метрик масалаларни ечишга бағишланган махсус параграф, ортогонал ва аксонометрик проекцияларда соялар, перспектива ва перспективада соялар ҳамда сонлар билан белгиланган проекциялар номли янги бўлимлар билан тўлдирилди.

Китобнинг учинчи нашри унинг иккинчи нашридан деярли фарқ қилмайди. Унда олдинги нашридаги айрим камчиликлар тузатилди ва зарур қўшимчалар киритилди.

Китобнинг тўртинчи нашри унинг учинчи нашридан анчагина фарқ қилади. Мавзулар қисқароқ ва лўндароқ қилиб берилди, ортиқча деб ҳисобланган материаллар олиб ташланди.

Дарсликнинг тўртинчи нашрини синчиклаб ўқиб, унинг сифатини яхшилашга қаратилган бир қанча фойдали маслаҳатлар берган Тошкент тўқимачилик институти графика кафедрасининг доценти Э. Собитовга муаллиф ўз миннатдорчилигини изҳор этади.

КИРИШ

1- §. Чизма геометрия тарихидан қисқача маълумот

Чизма геометриядан биринчи ўқиш китоби 1798 йилда Францияда пайдо бўлди. Унинг муаллифи давлат арбоби, математик, инженер, олим Гаспар Монж (1748—1818) эди. Монжнинг бу китобида фақат ортогонал проекциялар жами 49 та шаклда баён қилинган бўлиб, координаталар ва учинчи профил проекциялар текислиги ҳақида фикр юритилмаган эди. Китобнинг иккинчи қисмидаги соялар назарияси ва перспектива Г. Монж ва М. Бриссон ҳамкорлигида ёзилган эди.

XIX асрнинг бошларидан бу фан дунёдаги барча техника ва рассомлик мактабларида ўқитила бошланди.

Ўзбекистонда чизма геометрия фани тахминан 1930 йиллардан бошлаб ўқитила бошланди.

1953 йилгача республикамизда чизма геометрия соҳасидан бирорта ҳам мутахассис бўлмаган. 1953 йилда ушбу китоб муаллифи шу соҳада диссертация ёқлаб, фан номзоди унвонига сазовор бўлди.

Ҳозирги замон чизма геометрия курси Монж чизма геометриясидан жуда катта фарқ қилади. Тўлиқ курс тўртта асосий бўлим: ортогонал проекциялар, аксонометрия, перспектива, сонлар билан белгиланган проекциялар ва қўшимча соялар назариясидан иборат.

Ўзбек тилида биринчи чизма геометрия китоби Ўзбекистон давлат нашриёти томонидан 1959 й. чиқарилган бўлиб, муаллифи Ю. Қирғизбоев. Китоб қўлланма сифатида фақат машинасозлик олий ўқув юртлари учунгина тавсия этилган эди. Бу китоб 24 босма табоқли бўлиб, унда асосан ортогонал проекциялар ёритилган, аксонометрияга эса бир босма табоқ ажратилган холос.

1961 йилда барча олий техника ўқув юртлари учун Раҳим Ҳоруновнинг чизма геометрия курси дарслиги 16 босма табоқ ҳажмда чоп этилди. Кейинчалик тўлдирилган иккинчи ва учинчи нашрлари босмадан чиқди.

Дарсликнинг ушбу тўртинчи нашри китобхонларнинг фикр-мулоҳазалари ва янги дастур асосида тайёрланди.

2- §. Фазовий шаклларни текисликка проекциялаш схемалари

1. Марказий проекциялар. Фазода қўзғалмас S нуқта, P текислик ва A, B, C, D нуқталар берилган, деб фараз қилайлик (1-шакл). S нуқтани A, B, C, D нуқталар билан туташтириб, ҳосил бўлган чизиқларни давом эттирамиз. Бу чизиқ-

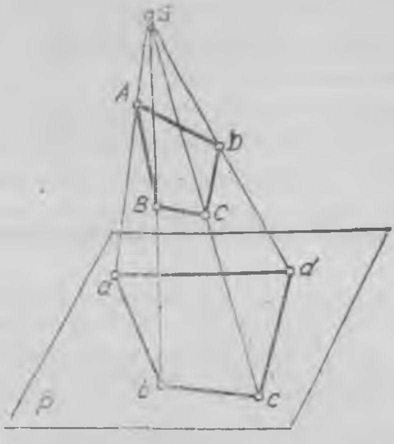
лар *P* текисликни *a, b, c, d* нуқталарда кесиб ўтади. *P* текислик проекциялар текислиги, *S* нуқта проекциялар маркази, *SA, SB, SC, SD* чизиқлар проекцияловчи нурлар; *a, b, c, d* нуқталар эса проекциялар дейилади. Демак, нуқтанинг проекцияси деганда шу нуқтани проекцияловчи нур билан проекциялар текислигининг кесишув нуқтасини тушуниш керак.

Фазонинг исталган жойида олинган тўртта нуқта, умуман, фазовий шаклни (пирамидани) ифодалайди; шунинг учун текис *abcd* шакл фазовий *ABCD* шаклнинг марказий проекциясидир.

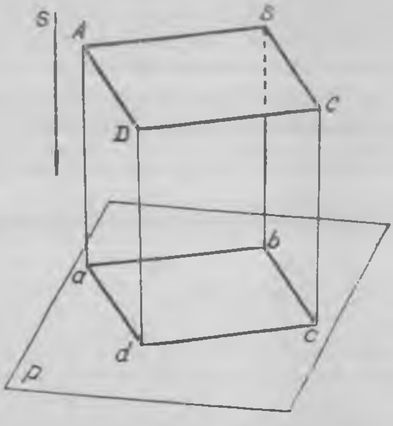
Марказий проекцияларга мисол қилиб, нарсаларнинг фотосуратларини ва чироқдан текисликка (полга ёки деворга) тушган сояларни кўрсатиш мумкин.

Марказий проекциялаш усули билан ясалган тасвир *перспектива* дейилади.

Шундай қилиб, яққоллик марказий проекцияларнинг (перспектив тасвирларнинг) муҳим хоссасидир. Аммо перспектив тасвирни ясаш ва бу тасвир асосида нарсанинг ҳақиқий шаклини ҳамда ўлчамларини аниқлаш қийин ва ноқулайдир. Шунинг учун инженерлик практикасида тасвирлар ясашда, кўпинча, параллел проекциялаш усулидан фойдаланилади.



1- шакл



2- шакл

2. Параллел проекциялар. Агар проекциялар маркази *S* берилган йўналиш бўйича чексиз узоқда, деб фараз қилсак, фазодаги нуқталарни проекцияловчи ҳамма нурлар ўзаро параллел бўлиб қолади (2- шакл). Бу ерда *S* йўналиш *проекциялаш йўналиши, a, b, c, d* нуқталар эса берилган нуқталарнинг *параллел проекциялари* дейилади. Демак, нуқтанинг параллел проекцияси деганда, шу нуқта орқали берилган йўналишга параллел қилиб ўтказилган проекцияловчи нур билан проекциялар текислигининг кесишув нуқтасини тушуниш керак.

Параллел проекцияларга мисол қилиб, нарсаларнинг Қуёшдан ёки Ойдан тушган сояларини кўрсатиш мумкин.

Проекциялаш йўналишининг проекциялар текислиги билан хосил қилган бурчагига кўра, параллел проекциялар иккига: кийшиқ бурчакли (ўткир бурчакли) ва тўғри бурчакли: (ортогонал) параллел проекцияларга бўлинади.

Чизма геометриянинг аксонометрик проекциялар бўлими қийшиқ бурчакли параллел проекцияларга асосланган.

Тўғри бурчакли параллел проекцияларни бундан кейин тўғри бурчакли проекциялар деб атаймиз, тўғри бурчакли проекциялашда проекциялар текислиги берилган бўлса, проекциялаш йўналиши берилмайди.

Тўғри бурчакли проекциялаш усули, шартли бўлишига қарамай, аниқ ва ўлчаш учун қулай бўлганлиги сабабли, техник чизмалар тузишнинг асосий усулидир. Чизма геометриянинг ортогонал проекциялар, аксонометрик проекциялар ва сонлар билан белгиланган проекциялар деган бўлимлари ана шу усулга асосланган.

3- §. Проекцияларнинг асосий хоссалари

1- ва 2- шаклларни кўздан кечириб, уларнинг марказий ва параллел проекциялаш учун умумий бўлган тубандаги асосий хоссаларини пайқаб олиш мумкин:

1. Нуқтанинг проекцияси нуқта бўлади. Фақат проекцияланувчи нуқта марказга тўғри келиб қолган ҳолдагина унинг проекцияси номаълум бўлади.

2. Проекциялар марказидан ўтмаган (ёки проекциялаш йўналишига параллел бўлмаган) тўғри чизиқнинг проекцияси ҳам тўғри чизиқ бўлади.

Марказдан ўтган (ёки берилган йўналишга параллел бўлган) тўғри чизиқ *проекцияловчи чизиқ* дейилади. Проекцияловчи чизиқнинг проекцияси нуқта бўлади.

Тўғри чизиқнинг барча нуқталарини проекцияловчи нурлар битта текисликда ётади. Бундай текислик *проекцияловчи текислик* дейилади. Масалан, 1-ёки 2-шакллардаги $AabB$ тўртбурчак берилган AB чизиқни проекцияловчи текисликни ифодалайди.

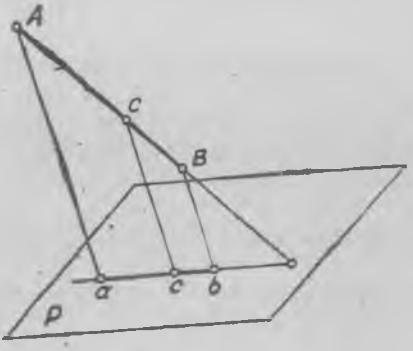
Агар берилган чизиқ эгри чизиқ бўлса, унинг барча нуқталарини проекцияловчи нурлар йиғиндиси проекцияловчи сирт ҳосил қилади.

3. Агар нуқта бирор чизиқда ётган бўлса, бундай нуқтанинг проекцияси ўша чизиқнинг проекциясида бўлади.

4. Проекциялар марказидан ўтмаган (ёки проекциялаш йўналишига параллел бўлмаган) текисликдаги нуқталарнинг ва чизиқларнинг проекциялари проекциялар текислигининг ҳаммасини қоплайди. Проекциялар марказидан ўтган ёки берилган йўналишга параллел бўлган текислик проекцияловчи текислик бўлади. Проекцияловчи текисликдаги нуқталарнинг ва чизиқларнинг проекциялари унинг изига, яъни унинг проекциялар текислиги билан кесишув чизиғига тушади.

Параллел проекцияларда, юқорида айтилган хоссалардан ташқари, яна тубандаги муҳим хоссалар ҳам бўлади:

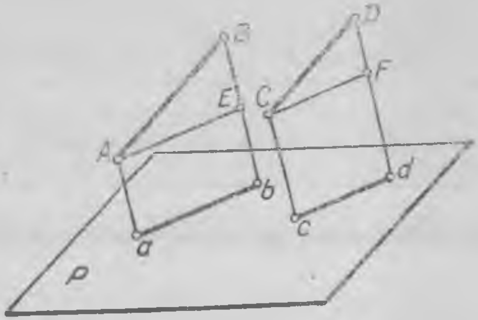
1. Тўғри чизиқ кесмаларининг нисбати уларнинг проекциялари нисбатига тенг, яъни $\frac{AC}{CB} = \frac{ac}{cb}$ бўлади (3- шакл). Бу хосса шундан келиб чиқадики, тўғри чизиқ бир текисликда ётган Aa, Bb ва Cc параллел чизиқлар билан пропорционал қисмларга бўлинади. Хусусий ҳолда, агар C нуқта AB кесмани тенг икки бўлакка бўлса, нуқтанинг проекцияси c ҳам ab ни тенг икки бўлакка бўлади.



3- шакл

2. Параллел тўғри чизиқларнинг проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлади (4-шакл). Агар $AB \parallel CD$ бўлса, $ab \parallel cd$ бўлади. Бу шундан келиб чиқадики, проекцияловчи $ABba$ ва $CDdc$ текисликлар ўзаро параллел, демак, уларнинг P текислик билан кесишув чизиқлари ҳам ўзаро параллел бўлади.

3. Икки параллел тўғри чизиқ кесмаларининг нисбати уларнинг проекциялари нисбатига тенг. Агар $AB \parallel CD$ бўлса, $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$ бўлади (4- шакл). Буни исбот қилиш учун, A нуқтадан $AE \parallel ab$ ва C нуқтадан $CF \parallel cd$ чизиқлар ўтказамиз. ABE ва CDF учбурчаклар ўхшаш ва кесмалар $AE = ab$, $CF = cd$ дир.



4- шакл

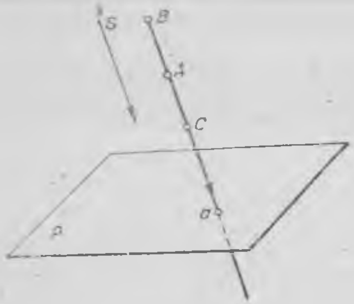
Демак, $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF}$ ёки $\frac{AB}{CD} = \frac{ab}{cd}$ бўлади.

Шундай қилиб, параллел проекциялашда тенг ва параллел кесмаларнинг проекциялари ҳам тенг ҳамда параллел бўлар экан. Демак, ҳар қандай параллелограммнинг (шу жумладан, тўғри тўртбурчак ва квадратнинг) проекцияси ҳам параллелограмм бўлади.

Параллел проекцияларнинг бу хоссалари кейинроқ катта аҳамиятга эга бўлади; улардан фойдаланиб, кўрилаётган нарсалардаги қандай муносабатлар уларнинг проекцияларида ҳам сақланиб қолишини аниқлаш мумкин.

4-§. Нуқталарнинг фазодаги ўринларини проекциялари бўйича аниқлаш

Текисликда (қоғозда) проекциялаш усули билан чизилган ҳар қандай тасвирга кўра унда ифодаланган нарсанинг фазодаги ҳақиқий шаклини, яъни уни ҳосил қилувчи нуқталарнинг фазодаги ўринларини аниқлаш ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди. Масалан, фазода берилган *A* нуқта берилган йўналиш бўйича проекцияланса, проекциялар текислигида унга хос фақат битта *a* проекция келиб чиқади (5-шакл). Аксинча, агар *a* проекция берилган бўлса, нуқтанинг ўзини топиб бўлмайди, чунки *A* нуқтани проекцияловчи нурда ётган исталган нуқтанинг (масалан, *B* ва *C* нуқталарнинг) проекцияси ҳам *a* нуқтага тушади. Демак, нуқтанинг битта проекциясига кўра, унинг фазодаги ўрнини аниқлаб бўлмайди.



5-шакл

Бу ҳол исталганча кўп нуқтага, яъни бирор шаклга ҳам тааллуқлидир. Масалан, номаълум бирор нарсанинг қоғоздаги тасвири айлана ёки доира бўлсин. Нарсанинг бу битта проекциясига қараб, унинг шаклини ва ўлчамларини била олмаймиз. Бу ерда қандай нарса (шар, цилиндр, конус ёки бошқа нарса) тасвирланганини ҳам айтиб бўлмайди.

Шундай қилиб, битта тасвир (проекция), геометрия нуқтаи назаридан олганда, аслининг ўрнини боса олмайди. Бундай тасвир асосида аслини ўрганиш мумкин бўлмайди.

Кишиларнинг амалий фаолиятида нарсанинг ҳақиқий шаклини аниқлашга имкон берадиган тасвиргина аҳамиятга эга. Бундай тасвирдан фойдаланиб, аслини ҳар тарафлама ўрганиш, яъни унинг шаклини, ўлчамларини аниқлаш ва унга оид турли геометрик масалаларни ечиш мумкин.

Шундай қилиб, тасвир асосида унда ифодаланган нарсага оид нуқталарнинг фазодаги ўринларини аниқлаш учун қўшимча шартлар керак. Бундай шартлар турли усуллар билан берилиши мумкин. Шунга кўра, фазовий нарсаларни текисликда проекциялар орқали тасвирлаш усуллари ҳам кўп. Ҳозирги замон чизма геометриясининг мукаммал курси, юқорида (1-параграфда) айтиб ўтилганидек, асосан тўртта усулни: перспектив, аксонометрик, ортогонал ва сонлар билан белгиланган проекциялар усулларини ўз ичига олади.

ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАР УСУЛИ

МОНЖ УСУЛИ

Нарсаларни бир-бирига перпендикуляр иккита текисликдаги тўғри бурчакли проекциялари билан тасвирлаш усули *ортогонал проекциялар* усули дейилади.

Ортогонал сўзи тўғри бурчакли деган сўз бўлиб, ортогонал проекциялар термини бундан кейин бир-бирига перпендикуляр иккита текисликдаги тўғри бурчакли проекцияларни кўрсатиш учунгина ишлатилади.

Геометрия нуқтаи назаридан олганда, ҳар қандай нарсани фазода маълум тартибда жойлашган нуқталар, чизиқлар ва сиртларнинг йиғиндиси, деб қараш мумкин. Шу сабабли, фазовий шаклларни тасвирлаш усулларини ўрганишни, яъни уларнинг проекцияларини ясашни энг оддий элементлар: нуқталар, чизиқлар ва ҳоказоларнинг алоҳида тасвирларини ўрганишдан бошлаган маъқул.

I боб. НУҚТАНИНГ ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯЛАРИ

5-§. Фазонинг тўрт чоракка бўлиниши; нуқтанинг эпюри

Фазода бир-бирига перпендикуляр бўлган иккита текислик оламиз. Бу текисликларнинг бирини горизонтал, иккинчисини вертикал (фронтал) вазиятда ўрнатамиз (6-шакл). Горизонтал текислик ($H - H_1$) фронтал текислик ($V - V_1$) билан OX чизиғи бўйича кесишиб, фазони тўрт чоракка бўлади. $H - H_1$ текислик *горизонтал проекциялар текислиги* деб, $V - V_1$ текислик эса *фронтал проекциялар текислиги* деб аталади. Текисликларнинг кесишув чизиғи *(OX) проекциялар ўқи* дейилади.

Фазонинг кўринадиган чораги, яъни горизонтал проекциялар текислигининг олдинги ярми (H) билан фронтал проекциялар текислигининг юқориги ярми (V) оралиғи *биринчи чорак* дейилади. Биринчи чоракнинг орқа томони — V билан H_1 оралиғи *иккинчи чорак* деб, унинг ости — H_1 билан V_1 оралиғи *учинчи чорак* деб, биринчи чоракнинг ости — H билан V_1 оралиғи эса *тўртинчи чорак* деб аталади.

Тасвирланаётган нуқта ёки нуқталар системаси фазонинг биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи чоракларида ёки проекция текисликларидан бирида ёхуд уларнинг кесишув чизиғида бўлиши мумкин. 6-шаклда фазонинг биринчи чорагида турган A нуқта ва унинг H, V текисликлардаги тўғри бурчакли проекциялари кўрсатилган. Нуқтанинг проекцияларини ясаш учун ундан горизонтал проекциялар текислигига перпендикуляр туширамиз ва перпендикулярнинг асосини a билан белгилаймиз, сўнгра берилган нуқтадан фронтал проекциялар текислигига перпендикуляр туширамиз ва бу перпендикулярнинг асосини a' билан белгилаймиз. a — нуқтанинг горизонтал проекцияси, a' — нуқтанинг фронтал проекцияси бўлади. a ва a' проекциялар биргаликда A нуқтанинг *ортогонал проекциялари* дейилади.

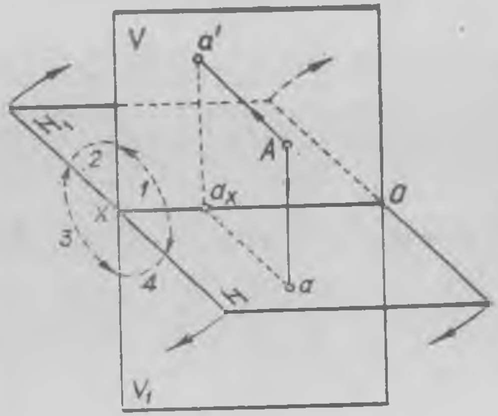
A нуқтанинг ортогонал проекциялари (a, a') шу нуқтанинг фазодаги ўрнини H ва V текисликларга нисбатан аниқ белгилайди. Ҳақиқатан ҳам, a ва a' берилган булса, A нуқтанинг ўзини топиш учун a нуқтадан H га, a' нуқтадан эса V га перпендикуляр кўтариш лозим. Бу перпендикулярлар битта нуқтада ўзаро кесишади, ана шу нуқта изланган A нуқта бўлади.

Бундан буён нуқталарнинг ўзини бош ҳарфлар — A, B, C, ... билан, уларнинг горизонтал проекцияларини ана шундай кичик ҳарфлар — a, b, c, ...билан, фронтал проекцияларини эса тепасига битта штрих қўйилган ўша кичик ҳарфлар — a', b', c', ...билан белгилаймиз, нуқтанинг иккита текисликдаги ортогонал проекциялари берилган бўлса, нуқтанинг фазодаги ўрни маълум деб ҳисоблаймиз.

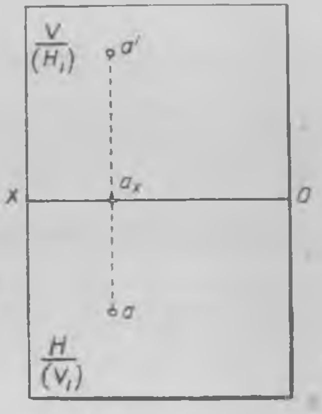
6-шаклдаги A нуқтадан проекция текисликларига туширилган Aa ва Aa' перпендикулярлар иккала текисликка, демак, уларнинг кесишув чизиғи (OX) га перпендикуляр бўлган Aaa_xa' текисликни ифодалайди. $Aa\,a_xa'$ тўғри бурчакли тўртбурчакдир. $a'a_x$ ва aa_x чизиқлар проекциялар ўқи (OX) га перпендикуляр ва $aa_x = Aa'$, $a'a_x = Aa$ дир; a_x — нуқтанинг OX ўқдаги проекцияси дейилади. Булардан тубандаги қоидани чиқариш мумкин.

Қоида. *Нуқтанинг горизонтал проекциялар текислигидан узоқлиги шу нуқта фронтал проекциясининг OX ўқидан узоқлигига тенг; нуқтанинг фронтал проекциялар текислигидан узоқлиги шу нуқта горизонтал проекциясининг OX ўқидан узоқлигига тенг.*

Нуқталарнинг ортогонал проекциялари шу нуқталарнинг ўзини ифодалайди, лекин бунинг учун ўзаро перпендикуляр иккита текисликни бир вақтда кўриш керак. Бу ҳол катта ноқулайлик туғдиради. Бу ноқулайликдан қутилиш учун проекция текисликларини бир-бири билан жипслаштириб, битта текислик ҳолига келтирамиз. Бунинг учун, 6-шаклда кўрсатилганидек, фронтал проекциялар текислигини ўз жойидан қўзғатмай, горизонтал проекциялар текислигини OX ўқи атрофида 90° га айлантирамиз. Шундай қилганимизда горизонтал



6-шакл



7-шакл

проекциялар текислигининг олдинги ярми (H) фронтал проекциялар текислигининг пастки ярми (V_1) билан, H_1 эса V билан жипслашиб, 7-шаклдаги чизмани ҳосил қилади. Бунда нуқтанинг горизонтал проекцияси (a) ҳам $a_x a$ радиуси билан 90°га айланади ва aa' кесма проекциялар ўқига перпендикуляр битта тўғри чизиқда бўлиб қолади (7-шакл). Натижада биз нуқтанинг иккала проекциясини битта текисликда кўра оламиз. Бундай текис чизма *нуқтанинг эпюри*[1] дейилади; эпюрдаги aa' кесма проекцияларнинг боғланиш чизиғи деб аталади. 7-шаклдаги эпюрга кўра, унда тасвирланган нуқтанинг фазодаги ўрнини аниқлаш учун H текисликни OX ўқи атрофида хаёлан 90° бурчакка айлантириб, V текисликка перпендикуляр вазиятга келтириш ва a нуқтадан H га a' нуқтадан эса V га перпендикуляр кўтариш лозим. Бу перпендикулярнинг кесишув нуқтаси изланаётган A нуқтанинг ўзи бўлади. Бундай жараён *эпюрни ўқиш* дейилади.

Проекция текисликлари чексиз катта сиртлардир. Шунинг учун эпюрда уларнинг фақат кесишув чизиғи (OX) кўрсатилади (8-шакл). 8-шаклдаги нуқтанинг эпюрини ўқиш учун, худди 7-шаклда тасвирланган эпюрни ўқиганимиздек, 6-шаклдаги фазовий чизмани кўз олдимизга келтиришимиз керак.

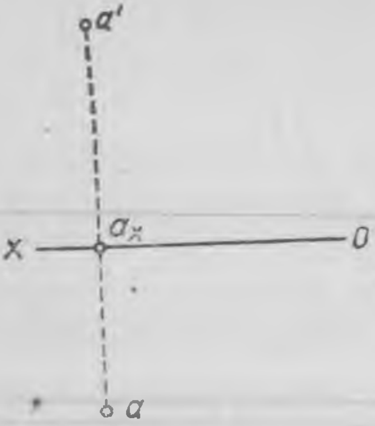
6- §. Проекциялар текисликларига нисбатан турли вазиятда жойлашган нуқталарнинг эпюрлари

Нуқтанинг фазодаги ўрнига қараб, унинг горизонтал ва фронтал проекциялари эпюрда проекциялар ўқига нисбатан турлича жойлашади.

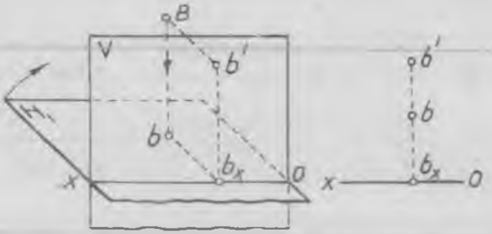
Бундай ҳоллар тўққизта:

1. A нуқта фазонинг биринчи чорагида V нинг олдида, H

[1] Epure (эпюр) французча бўлиб, ўзбекча маъноси текис чизма демакдир.



8- шакл

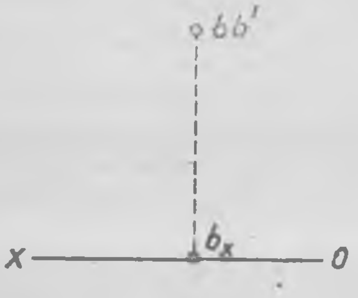


9- шакл

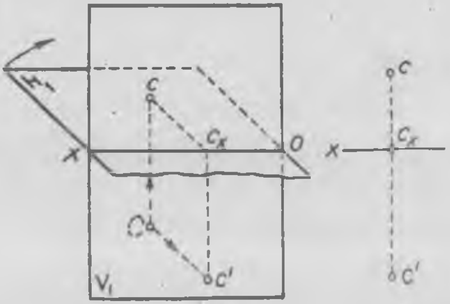
нинг устида (6, 7, 8-шакллар). Эпюрда бундай нуқтанинг горизонтал проекцияси *OX ўқининг* остида, фронтал проекцияси эса *OX* ўқининг устида ва горизонтал проекцияси ҳам, фронтал проекцияси ҳам ўққа нисбатан битта перпендикулярда жойлашади.

2. 9-шаклда фазонинг иккинчи чорагида турган *B* (*b*, *b′*) нуқта тасвирланган, текисликларнинг бошқа чоракдаги қисмлари узиб қўйилган. Бу нуқта фронтал текисликнинг орқа томонида, H_1 нинг уст томонида турибди. Шунинг учун нуқтанинг горизонтал проекцияси H_1 га, фронтал проекцияси эса *V* га тушади ва эпюрда иккала проекция *OX* ўқининг юқори томонида жойлашади. Агар иккинчи чоракда турган нуқта H_1 ва *V* текисликлардан тенг масофада бўлса, унинг иккала проекцияси эпюрда бир нуқтада бўлади (10 -шакл).

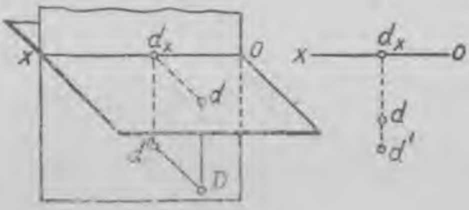
3. 11-шаклда кўрсатилган *C* нуқта фазонинг учинчи чорагида олинган. Эпюрда бундай нуқтанинг горизонтал проекцияси *OX* ўқининг юқори томонида, фронтал проекцияси эса *OX* ўқининг ост томонида жойлашади.



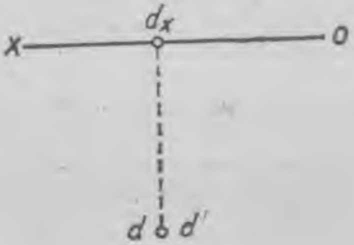
10- шакл



11- шакл



12- шакл



13- шакл

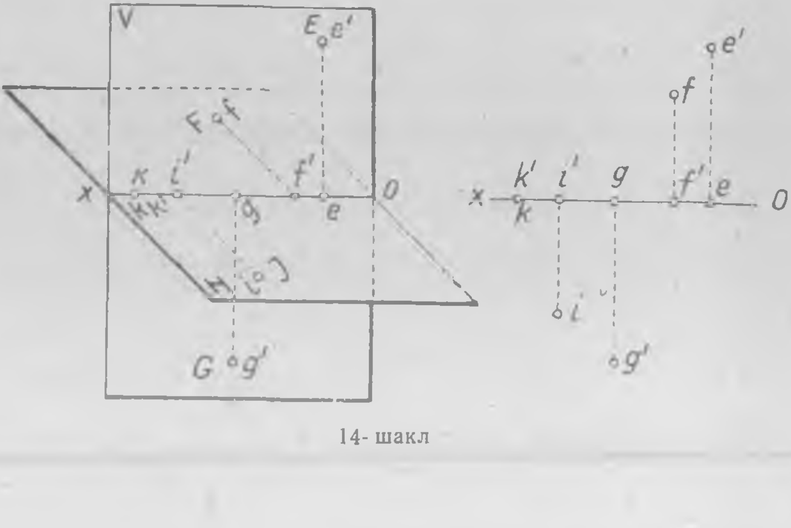
4. 12-шаклдаги D нуқта фазонинг тўртинчи чорагида олинган. Эпюрда бундай нуқтанинг иккала проекцияси OX ўқининг ост томонида келиб чиқади. Агар бу D нуқта H ва V_1 текисликлардан тенг масофада турган бўлса, унинг иккала проекцияси эпюрда бир нуқтада бўлади (13-шакл).

5. E нуқта биринчи ва иккинчи чораклар чегарасида — V текисликда ётибди (14-шакл). Бундай нуқтанинг фронтал проекцияси ўзи турган жойда, горизонтал проекцияси OX ўқида бўлади; эпюрда эса e' ўқнинг юқори томонида бўлади.

6. F нуқта иккинчи ва учинчи чораклар чегарасида — H_1 да ётибди. Нуқтанинг горизонтал проекцияси ўзи турган жойда бўлади, фронтал проекцияси OX ўқига тушади (14-шакл); эпюрда эса нуқтанинг горизонтал проекцияси f ўқнинг юқори томонида бўлади.

7. G нуқта учинчи ва тўртинчи чораклар чегарасида — фронтал проекциялар текислигининг V_1 ярмида ётибди (14-шакл). Эпюрда бундай нуқтанинг фронтал проекцияси OX ўқининг ост томонида бўлади, горизонтал проекцияси эса ўққа тушади.

8. I нуқта биринчи ва тўртинчи чораклар чегарасида — H да ётибди (14-шакл). Эпюрда нуқтанинг горизонтал проекцияси



14- шакл

OX ўқининг ост томонида, фронтал проекцияси эса *OX* ўқида бўлади.

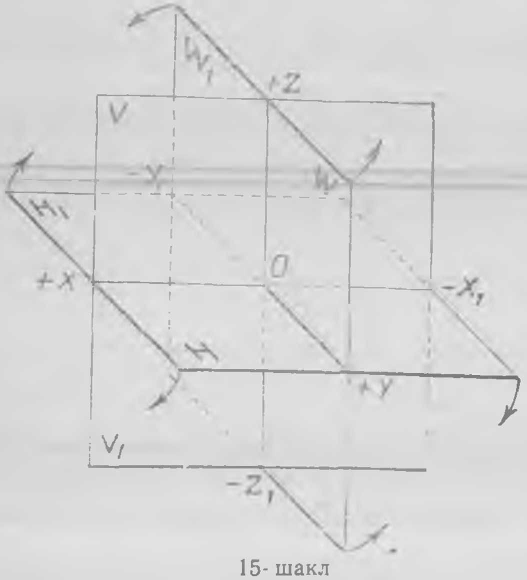
9. *K* нуқта проекциялар ўқида ётибди, унинг иккала проекцияси ҳам ўзи турган жойда бўлади (14-шакл).

Шундай қилиб, нуқталарнинг горизонтал ва фронтал проекцияларининг эпюрда *OX* проекциялар ўқига нисбатан жойлашувига қараб, шу нуқталар турган жойларни аниқ кўрсатиш мумкин.

7- §. Фазонинг октантларга бўлиниши ва нуқтанинг уч текисликдаги ортогонал проекциялари

Нуқтанинг иккита текисликдаги ортогонал проекцияларига кўра, унинг фазодаги ўрнини аниқ белгилаш мумкинлиги юқорида айтиб ўтилган эди. Лекин баъзи масалаларни осонроқ ҳал қилиш ёки нарсаларни тасвирлашда чизмаларни мукаммаллаштириш мақсадида, горизонтал проекциялар текислиги (*H*) билан фронтал проекциялар текислиги (*V*) нинг иккаласига перпендикуляр бўлган учинчи текисликдан фойдаланилади. Бу янги текислик *профил проекциялар текислиги* дейилади ва *W* ҳарфи билан белгиланади (15-шакл). Нуқталарнинг профил проекциялар текислигидаги проекциялари тепасига икки штрих қўйилган кичик ҳарфлар (a'', b'', c'',...) билан белгиланади.

H, *V*, *W* текисликлар ўзаро XX_1, YY_1 ва ZZ_1 тўғри чизиқлар бўйича кесишиб, фазони саккиз қисмга бўлади. Фазонинг саккиздан бир қисми *октант*[1] дейилади. Октантларнинг номерланишини эсда яхши сақлаб қолиш учун 15-шаклдаги тасвирни 6-шаклдаги чоракларнинг тасвири билан таққослаб кўриш тавсия қилинади. Бу шакллардан яққол кўриниб турибдики, *W* текислик фазонинг ҳар бир чорагини икки октантга: биринчи чоракни биринчи ва бешинчи октантларга, иккинчи чоракни иккинчи ва олтинчи октантларга, учинчи чоракни учинчи ва еттинчи октантларга, тўртинчи чоракни эса тўртинчи ва саккизинчи октантларга бўлади.

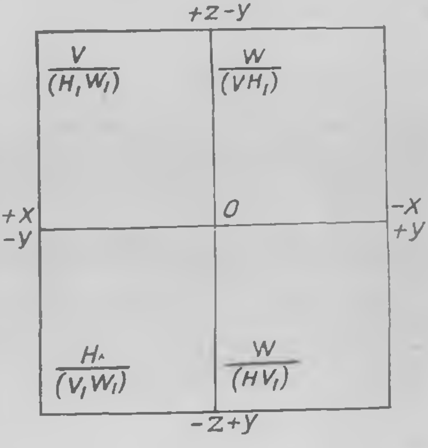


15- шакл

[1] *Octo* — саккиз, октант — саккиздан бир.

Текисликларнинг кесишув чизиқлари (OX, OY OZ) *проекция ўқлари,* уларнинг умумий кесишув нуқтаси (O) эса *координаталар боши* дейилади.

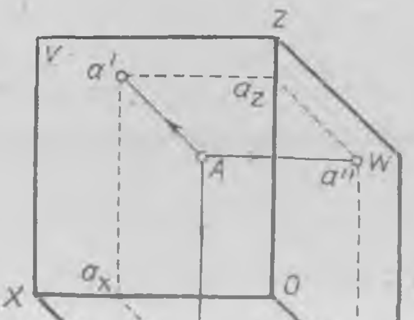
V текисликни ўз жойида қолдириб, H текисликни OX ўқи атрофида чапдан қараганда соат стрелкасининг юриш томонига 90°, W текисликни OZ ўқи атрофида юқоридан пастга қараганда соат стрелкасининг юришига тескари томонга 90° айлантириб, уларни V текислик билан жипслаштирсак, саккиз октантнинг эпюри келиб чиқади (16-шакл).



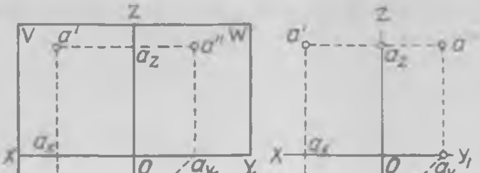
16- шакл

17-шаклдаги фазовий тасвирда биринчи октантда олинган A нуқта ва унинг ортогонал проекциялари тасвирланган. A нуқтадан H, V, W текисликларга бирин-кетин перпендикулярлар (проекцияловчи нурлар) ўтказиб, нуқтанинг a, a', a'' проекцияларини ва ўқлардаги a_x, a_y, a_z проекцияларини топамиз. Бу ерда ҳам a нуқта A нуқтанинг горизонтал проекцияси, a' нуқта A нуқтанинг фронтал проекцияси, a'' нуқта эса A нуқтанинг профил проекцияси бўлади. Нуқтани учта текисликка проекциялашда ҳосил бўлган параллелепипед ($A a a_x a' a_z a'' a_y O$) *координаталар параллелепипеди* дейилади.

18-шаклда фазонинг биринчи октантида турган A нуқтанинг (17-шакл) эпюри тасвирланган. Биринчи октант 15-шаклда кўрса-



17- шакл



18- шакл

тилган йўналишлар бўйича очилса, *H* ва *W* текисликлар *OУ* ўқи бўйича ажралади, шунинг учун, гўё узунасига тилинган *OУ* ўқ эпюрда кўрсатилган иккита йўналиш — *У* ва $У_1$ бўйича қўйилади; шу билан бирга ҳар қандай нуқта учун эпюрда $Oa_y = Oa_{y_1}$ бўлади.

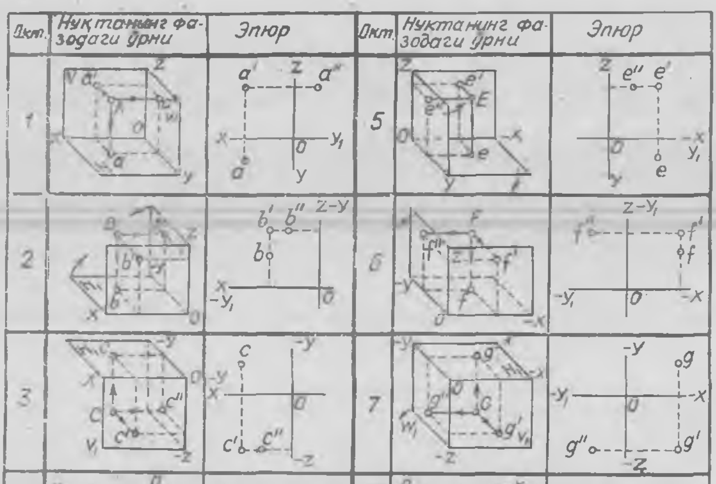
Юқоридаги 17 ва 18-шаклларни таҳлил қилиб, эпюрнинг тубандаги конструктив хоссаларини чиқариш мумкин.

1. Эпюрда нуқтанинг горизонтал ва фронтал проекциялари доимо *OX* ўқига перпендикуляр битта тўғри чизиқда жойлашади ($aa' \perp OX$); фронтал ва профил проекциялари эса доимо *OX* ўқига параллел битта горизонтал чизиқда жойлашади ($a'a'' \parallel OX$).

2. aa' ва $a'a''$ чизиқлар *боғланиш чизиқлари* дейилади. Боғланиш чизиқлари ўзаро перпендикуляр бўлади. Агар нуқтанинг бирбирига чизиқли боғланган иккита проекцияси маълум бўлса, проекциялар ўқининг йўналишини топиш мумкин.

3. Боғланиш чизиғининг борлиги нуқтанинг берилган иккита проекциясига кўра, учинчи проекциясини ясашга имкон беради.

Нуқтанинг горизонтал ва фронтал проекциялари (a, a') берилган бўлсин, унинг профил проекцияси (a'') ни топиш керак (18-шакл). Бунинг учун a нуқтадан *OX* ўқига параллел чизиқ ўтказиб, унинг *OУ* ўқи билан кесишган жойида a_y нуқтани топамиз. Сўнгра, радиусини Oa_y қилиб олиб, бу нуқтани *O* марказ атрофида соат стрелкасининг юришига тескари томонга 90° айлантирамиз-да, $OУ_1$ ўқида a_{y_1} нуқтани топамиз. Энди, a_{y_1} нуқтадан вертикал чизиқ ва a'



19- шакл

нуқтадан горизонтал чизиқ ўтказсак, бу чизиқларнинг ўзаро кесишув жойида a'' нуқта келиб чиқади.

Нуқта фазонинг қайси октантида туришига қараб, эпюрда унинг проекциялари проекция ўқларига нисбатан турлича жойлашади. 19-шаклда саккизта октантнинг ҳаммасида олинган нуқталарнинг эпюрлари кўрсатилган. Бу эпюрларни диққат билан кўздан кечириб, шундай хулоса чиқариш мумкин: биринчи ва еттинчи октантлардагина учала проекция чизманинг турли бурчакларида, бошқа октантларда эса иккитаси ёки учтаси битта бурчакда бўлади. Бошқача қилиб айтганда, биринчи ёки еттинчи октантда турган нарсанинг тасвирлари (олдидан, устидан ва ёнидан кўринишлари) чизма қоғозининг бошқа-бошқа жойларига тушади, бошқа октантларда эса тасвирларнинг иккитаси ёки учтаси бир жойда бўлиши (бир-бирининг устига тушиши) мумкин. Шунинг учун амалда биринчи ёки еттинчи октантдан фойдаланилади. Бизнинг мамлакатимизда ва Европа мамлакатларининг кўпчилигида биринчи октантдан, Америка мамлакатларининг кўпчилигида еттинчи октантдан фойдаланилади.

Биринчи октантда жойлашган нарсани тасвирлашда унинг устидан кўриниши (плани) олдидан кўринишининг (фасадининг) остига, чап томондан кўриниши эса олдидан кўринишининг ўнг томонига чизилади.

8- §. Нуқтанинг координаталари

Аналитик геометрияда нуқта координаталари билан берилади. Нуқтанинг координаталарини ўрганиш учун 17- шаклни кўриб чиқамиз. Шаклдаги H, V, W текисликларни координата текисликлари OX, OY, OZ чизиқларнинг координата ўқлари, O нуқтани эса координаталар боши деб қабул қилиш мумкин. Шундай бўлганда, берилган A нуқтадан W текисликкача бўлган $A\,a''$ масофани кўрсатувчи сон *нуқтанинг абсциссаси* дейилади ва x билан белгиланади. A нуқтадан V текисликкача бўлган $A\,a'$ масофани кўрсатувчи сон *нуқтанинг ординатаси* деб аталади ва y билан белгиланади. A нуқтадан H текисликкача бўлган $A\,a$ масофани кўрсатувчи сон *нуқтанинг аппликатаси* дейилади ва z билан белгиланади. Нуқтадан координата текисликларигача бўлган масофаларни кўрсатувчи x, y, z сонлар *нуқтанинг координаталари* деб аталади.

Баъзи ҳолларда нуқтанинг абсциссаси унинг кенглиги, ординатаси — чуқурлиги ва аппликатаси унинг баландлиги деб юритилади.

Чизма геометрияда нуқтанинг координаталари маълум масштабда чизилган тўғри чизиқ кесмалари билан тасвирланади. 17-шаклдаги координаталар параллелепипедига биноан қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$x = Aa'' = a'a_z = a_xO = aa_y;$$

ЧИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

TEAI KUTUBXONASI
№ 354524

$$y = Aa' = aa_z = a_yO = a'a_z;$$

$$z = Aa = a'a_x = a_zO = a''a_y.$$

Демак, нуқтанинг ортогонал проекцияларидан ҳар бири унинг икки координатасинии ўз ичига олади. Горизонтал проекцияси x ва y координаталарни, фронтал проекцияси x ва z координаталарни, профил проекцияси эса y ва z координаталарни ўз ичига олади.

Шундай қилиб, нуқтанинг координаталари берилган бўлса, унинг проекцияларини ясаш мумкин ва, аксинча, нуқтанинг проекциялари ҳамда масштаб маълум бўлса, унинг координаталарини аниқлаш мумкин.

Ясашларни тўғридан-тўғри эпюрда бажарса ҳам бўлади. Масалан, нуқтанинг горизонтал проекцияси (a) ни ясаш учун берилган масштабда координаталар бошидан OX ўқи бўйлаб, абсцисса (x) қўйилади (18-шакл). Топилган a_x нуқтадан перпендикуляр ўтказиб, унга ордината (y) қўйилади. Нуқтанинг фронтал проекцияси (a') ни ясаш учун a_x нуқтадан ўтказилган перпендикуляр бўйлаб аппликата z қўйилади. Нуқтанинг профил проекцияси (a'') ни ясаш учун эса y ва z координаталар қўйилади.

Нуқта ҳарф билан белгиланганда унинг координаталари, одатда, бундай ёзилади:

$$A\ (30,\ 20,\ 40).$$

Қавс ичидаги биринчи сон нуқтанинг абсциссасини, иккинчи сон ординатасини, учинчи сон эса аппликатасини кўрсатади. Демак, юқоридаги A нуқта учун $x=30$, $y=10$, $z=40$ дир.

Маълумки, H, V, W текисликлар фазони 8 октантга бўлади (15-шакл, 7-§). Нуқта 8 та октантнинг исталганида бўлиши мумкин. Нуқта фазонинг қайси октантида эканлигини шу нуқта координаталарининг аломатларига қараб билса бўлади.

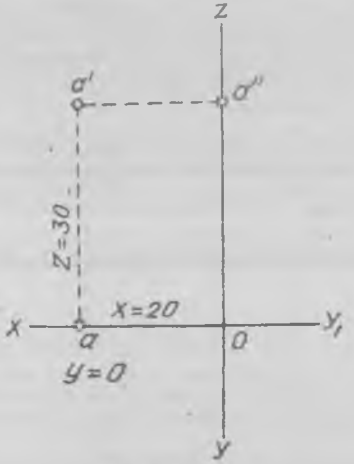
Агар нуқта W текисликнинг чап томонида (1, 2, 3, 4-октантларда) бўлса, унинг абсциссаси (x) мусбат, нуқта бошқа октантларда бўлса, унинг абсциссаси манфий деб ҳисобланади. Агар нуқта V текисликнинг олд томонида (1, 4, 5, 8-октантларда) бўлса, унинг ординатаси (y) мусбат нуқта бошқа октантларда бўлса, унинг ординатаси манфий деб ҳисобланади. Агар нуқта H текисликнинг юқори томонида (1, 2, 5, 6-октантларда) турган бўлса, унинг аппликатаси (z) мусбат, нуқта H текисликнинг остки томонида турган бўлса, унинг аппликатаси манфий деб ҳисобланади. Шундай қилиб, нуқта биринчи октантда бўлса, унинг ҳамма координаталари (x, y, z) мусбат бўлади, еттинчи октантда ҳамма координаталари манфий, бошқа октантларда эса мусбат ва манфий бўлади (1-жадвал).

Нуқтанинг координаталари берилган бўлса, нуқтанинг ўзи қайси октантда эканлигини бу жадвалдан фойдаланиб анча тез аниқлаш мумкин. Масалан, A (—10, 15, 10) бўлса, нуқта бешинчи октантда бўлади.

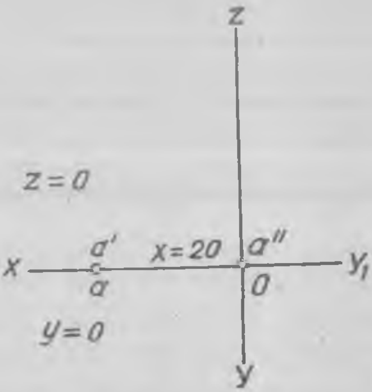
1- жадвал

Координаталар \ Октантлар	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	+	+	+	−	−	−	−
y	+	−	−	+	+	−	−	+
z	+	+	−	−	+	+	−	−

Агар нуқтанинг координаталаридан бири нолга тенг бўлса, бу нуқта проекциялар текислигида ётган бўлади; $x=0$ бўлса, нуқта W да, $y=0$ бўлса V да, $z=0$ бўлса H да ётади. Бундай нуқтанинг битта проекцияси ўзи ётган жойда, қолган икки проекцияси проекция ўқларида бўлади. 20-шаклда биринчи ва иккинчи октантлар чегарасида, V текислигида ётган A (20, 0, 30) нуқтанинг эпюри келтирилган.



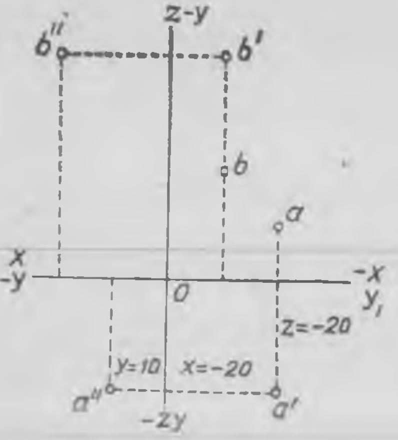
20- шакл



21- шакл

Агар нуқтанинг координаталаридан иккитаси нолга тенг бўлса, бундай нуқта проекция ўқларидан бирида ётган бўлади. Бу нуқтанинг икки проекцияси ўзи ётган жойда, бир проекцияси эса доимо координаталар бошида бўлади. 21-шаклда OX ўқида, 1, 2, 3 4-октантлар чегарасида ётган A (20, 0, 0) нуқтанинг эпюри келтирилган.

Эпюрда нуқтанинг проекцияларини ясашда шу нуқта координаталарини OX, OY, OZ ўқларининг бирор томонига қўйиш



22- шакл

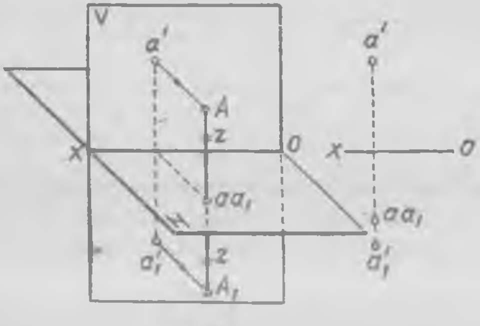
учун 16-шаклдаги чизмага риоя қилиш лозим. Горизонтал ва фронтал проекцияларни ясашда $+x$ координаталар бошидан чап томонга, $-x$ ўнг томонга, $+y$ паст томонга, $-y$ юқори томонга, $+z$ юқори томонга, $-z$ эса паст томонга қўйилади. Нуқтанинг профил проекциясини ясашда эса $+y$ координаталар бошидан ўнг томонга, $-y$ чап томонга, $+z$ юқори томонга, $-z$ эса паст томонга қўйилади. 22- шаклда 7-октантда жойлашган A (—20, —10, —20) ва 6-октантда жойлашган B (—10, —20, 40) нуқталарнинг эпюри келтирилган.

9- §. Нуқталар ва шакллар симметрияси

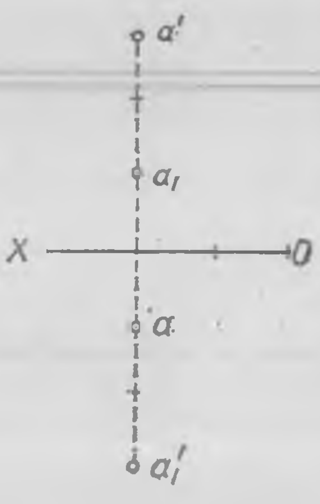
Геометрик масалаларни ечишда нуқталар ва шакллар симметриясининг уч туридан: текисликка нисбатан симметрия, ўққа нисбатан симметрия ва марказий симметриядан фойдаланилади.

Агар икки шаклдан биридаги ҳар қайси нуқта учун иккинчи шаклда бирор текисликка, тўғри чизиққа (ўққа) ёки марказга нисбатан симметрик нуқта бўлса, бундай шакллар симметрик бўлади.

1. Текисликнинг икки томонида олинган икки нуқтани ту-



23- шакл



24- шакл

таштирувчи кесма текисликка перпендикуляр бўлса ва бу текислик билан кесишган нуқтада тенг иккига бўлинса, бундай нуқталар шу текисликка нисбатан симметрик бўлади. Мисол тариқасида, 23-шаклда H текисликка нисбатан симметрик ва фазонинг биринчи ҳамда тўртинчи чоракларида турган A, A_1 нуқталарнинг яққол тасвири ва эпюри келтирилган.

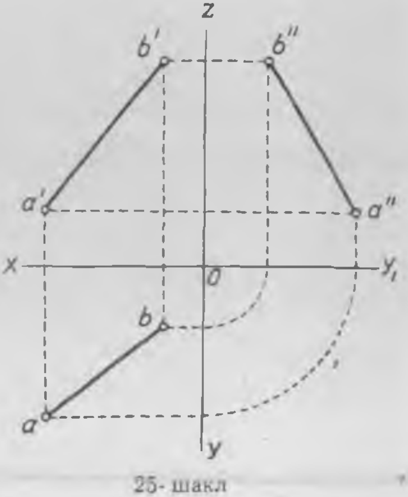
2. Проекциялар ўқига (ёки бирор тўғри чизиққа) нисбатан симметрик бўлган нуқталар шу ўқ ёки чизиққа ўтказилган перпендикулярда тенг оралиқларда ва перпендикулярнинг бошқа-бошқа томонларида жойлашади. Масалан, OX ўқига нисбатан олганда, биринчи чоракда турган A (20, 10, 30) нуқтага симметрик бўлган A_1 (20, —10, —30) нуқта учинчи чоракда бўлади (24-шакл).

3. Марказга (координаталар бошига ёки исталган бирор нуқтага) нисбатан симметрик бўлган нуқталар симметрия маркази билан бир тўғри чизиқда, тенг масофаларда ва бу чизиқнинг бошқа-бошқа томонларида жойлашади.

II боб. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ПРОЕКЦИЯЛАРИ

10- §. Асосий тушунчалар

Тўғри чизиқ ёки тўғри чизиқ кесмаси икки нуқта билан белгиланади. Бу нуқталар координаталари ёки проекциялари билан берилиши мумкин. Шунга кўра, эпюрда тўғри чизиқнинг проекцияларини ясаш учун нуқталарнинг бир номли проекцияларини ўзаро туташтириш керак. Мисол тариқасида, 25-шаклда A (a, a', a'') ва B $(b, b'\ b'')$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг проекциялари кўрсатилган. A ва B нуқталар проекция текисликларининг ҳар биридан ҳар хил оралиқда турибди. Демак, бу AB тўғри чизиқ проекция текисликларининг ҳар қайсисига ҳам оғмадир. Бундай тўғри чизиқ *умумий вазиятдаги тўғри чизиқ* дейилади.



25- шакл

Умумий вазиятдаги кесманинг ортогонал проекцияларидан ҳар бири кесманинг ўзидан қисқадир, ($ab < AB, a'b' < AB$, $a''b'' < AB$). Оғма кесманинг проекциялари проекция ўқларига нисбатан оғма бўлади.

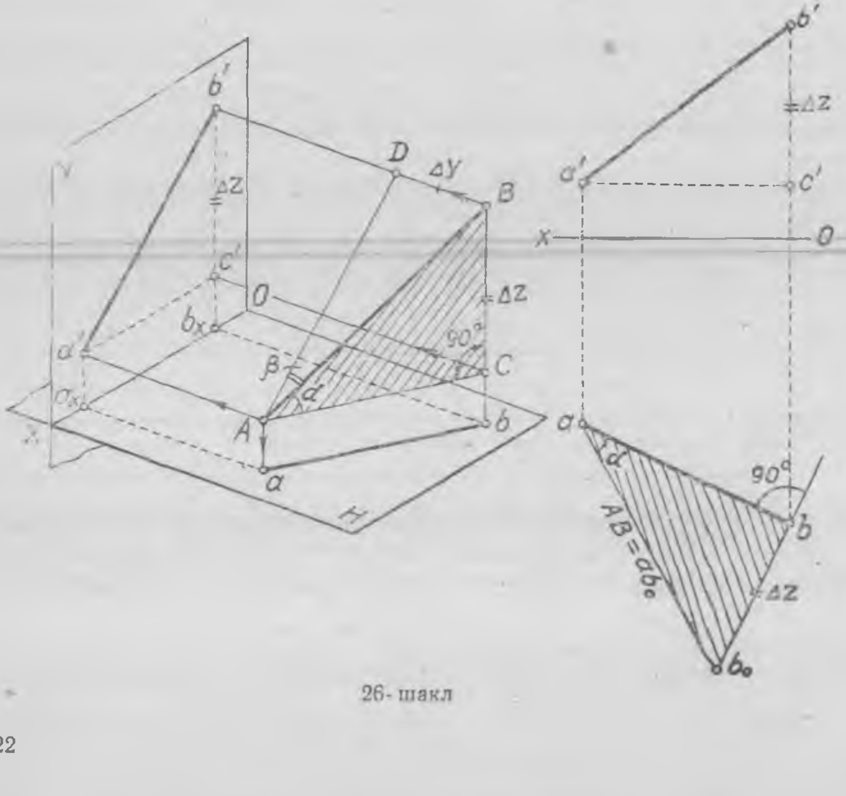
Проекция текисликларидан бирига перпендикуляр ёки параллел бўлган тўғри чизиқ *хусусий вазиятдаги тўғри чизиқ*

дейилади. Проекция текисликларида ётган тўғри чизиқлар ҳам шу группага киради.

11- §. Умумий вазиятдаги кесманинг ҳақиқий узунлигини ясаш

Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасининг тўғри бурчакли проекцияси ҳамма вақт ўзидан қисқа бўлади. Аммо эпюрда кесманинг икки проекцияси берилган бўлса, унинг ҳақиқий узунлигини ясаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, 26- шаклдан яққол кўриниб турибдики, AB кесма тўғри бурчакли ABC (ёки ABD) учбурчакнинг гипотенузасидир. ABC учбурчакнинг катетларидан бири $AC = ab$, иккинчиси $BC = z_B - z_A = \Delta z$ (яъни A ва B нуқта баландликларининг алгебраик айирмасига тенг).

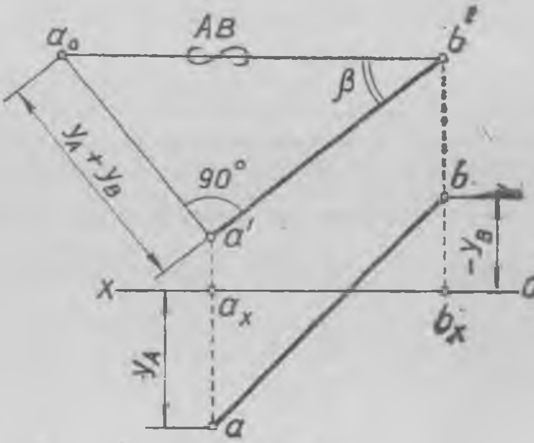
ABD учбурчакнинг бир катети $AD = a'b'$, иккинчиси эса $BD = Y_B - Y_A = \Delta Y$ (яъни A ва B нуқта чуқурликларининг алгебраик айирмасига тенг). Демак, эпюрда кесманинг горизонтал ва фронтал проекцияларидан фойдаланиб, унинг ҳақиқий узунлигини ясаш учун тўғри бурчакли ABC ёки ABD учбурчакка тенг учбурчак ясаш керак. Шунинг учун бу усул *тўғри бурчакли учбурчак усули* дейилади. 27- шаклдаги эпюрда ΔABC га тенг учбурчак ясалган. Бу $\Delta ab b_0$ ни ясаш учун a' нуқтадан горизонтал чизиқ ўтказиб, c' нуқтани топамиз. Сўнгра горизонтал проекция (ab) нинг бирор учидан,



26- шакл

масалан, b дан перпендикуляр бўйича $c'b' = \Delta z$ кесмани қўйиб b_0 нуқтани аниқлаймиз.

ab_0 гипотенуза берилган AB кесманинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади.



27- шакл

Маълумки, тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак тўғри чизиқ билан бу тўғри чизиқнинг шу текисликдаги тўғри бурчакли проекцияси орасидаги бурчакка тенг. Шунга кўра эпюрдаги горизонтал проекция (ab) билан гипотенуза (ab_0) орасидаги бурчак (a) берилган AB чизиқ билан H текислик орасидаги бурчакка тенг. Демак, кесманинг ҳақиқий узунлигини ясаш билан бир вақтда, унинг проекциялар текислигига оғиш (қиялик) бурчаги ҳам топилади.

Тўғри чизиқ билан H, V, W текисликлар орасидаги бурчаклар, одатда, α, β, γ билан белгиланади. Бу бурчаклардан бирини топиш учун тегишли проекцияда тўғри бурчакли учбурчак ясалади.

Кесма билан V текислик орасидаги β бурчакни топиш учун учбурчакнинг катетлари сифатида кесманинг фронтал проекцияси $(a'b')$ ва ординаталарининг алгебраик айирмаси (Δy) олинади (26- шаклдаги эпюрда $\Delta y = y_B - y_A = b_x b - a_x a$).

Кесма билан W текислик орасидаги γ бурчакни топиш учун, ясаладиган учбурчакнинг бир катети сифатида кесманинг профил проекцияси $(a'' b'')$, иккинчи катети сифатида эса абсциссаларнинг алгебраик айирмаси (Δx) олинади (эпюрда $\Delta x = a_x b_x$). 26- шаклдаги кесма учун эпюрда β ва γ бурчакларни ясаш ўқувчиларнинг ўзларига тавсия қилинади.

Шундай қилиб, проекциялари орқали берилган кесманинг ҳақиқий узунлигини ясаш учун шундай тўғри бурчакли учбурчак ясаш керакки, унинг бир катети кесманинг проекцияларидан бирига, иккинчи катети эса кесманинг бошқа проекцияси учларидан проекциялар ўқигача бўлган масофаларнинг алгебраик айирмасига (яъни, $z_B - z_A$ ё $y_B - y_A$ ёки $x_B - x_A$ га) тенг бўлсин. Бундай учбурчак гипотенузасининг узунлиги кесманинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади.

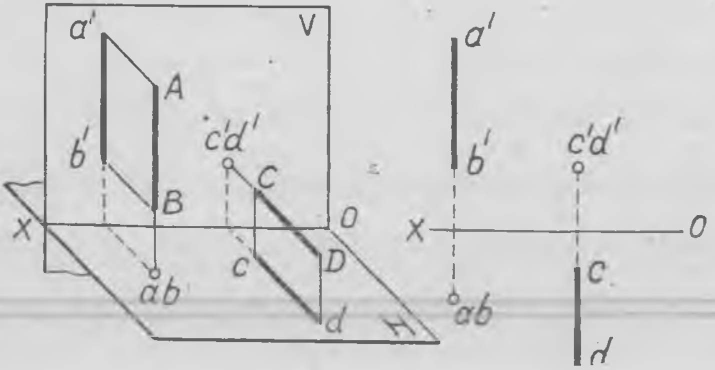
Мисол. Кесманинг горизонтал проекцияси (ab) ва фронтал проекцияси $(a'b')$ берилган (27- шакл). Кесманинг ҳақиқий узунлиги ва V текисликка оғиш бурчаги (β) ясалсин.

Кесманинг фронтал проекциясида тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз. Учбурчакнинг бир катети $a'b'$, иккинчи катети эса $a'a_0 = aa_x + b_xb = y_A + y_B$. Бу ерда A нуқтанинг ординатаси мусбат, B нуқтаники эса манфий, шунинг учун кесма горизонтал проекциясининг учларидан OX ўқигача бўлган масофаларни кўрсатувчи кесмалар қўшилади.

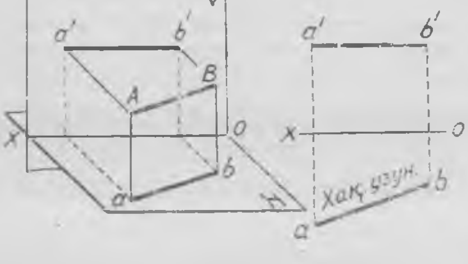
12- §. Тўғри чизиқнинг проекциялар текисликларига нисбатан хусусий ҳоллари

Тўғри чизиқни ўрганишда унинг эпюрда берилган горизонтал ва фронтал проекцияларига кўра, фазодаги вазиятини мумкин қадар тезроқ аниқлашга катта эътибор бериш лозим. Бунга системали равишда машқ қилиш йўли билангина эришиш мумкин.

1. Агар тўғри чизиқ проекциялар текисликларидан бирига перпендикуляр бўлса, унинг шу текисликдаги проекцияси нуқта бўлади, бу нуқта иккита ҳарф билан белгиланди; бошқа текисликлардаги проекциялари тегишли проекциялар ўқларига перпендикуляр тўғри чизиқлар бўлади. Мисол тариқасида, 28-шаклда горизонтал проекциялар текислигига перпендикуляр



28- шакл



29- шакл

бўлган AB чизиқнинг ва фронтал проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган CD чизиқнинг фазовий тасвири ва эпюри кўрсатилган AB ва CD кесмаларнинг уларга параллел бўлган текисликлардаги проекциялари шу кесмаларга тенг, яъни $AB = a'b'$; $CD = cd$ бўлади.

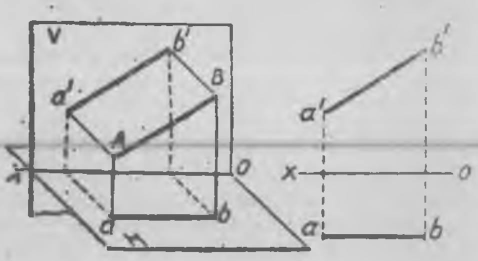
Проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ *проекцияловчи тўғри чизиқ* дейилади.

2. Агар тўғри чизиқ кесмаси проекциялар текисликларидан фақат биттасига параллел бўлса, унинг шу текисликдаги проекцияси ўзига тенг, бошқа проекциялари эса тегишли проекциялар ўқларига параллел бўлади.

29- шаклда H текисликка параллел AB кесма тасвирланган. Бу чизиқнинг барча нуқталари учун аппликата (z) ўзгармасдир. Кесманинг ҳақиқий узунлиги горизонтал проекциясига тенг ($AB=ab$). Кесманинг горизонтал проекцияси билан OX ўқи орасидаги бурчак AB билан V текислик орасидаги β бурчакка тенг.

H текисликка параллел чизиқ *горизонтал чизиқ* ёки, қисқача, *горизонтал* дейилади.

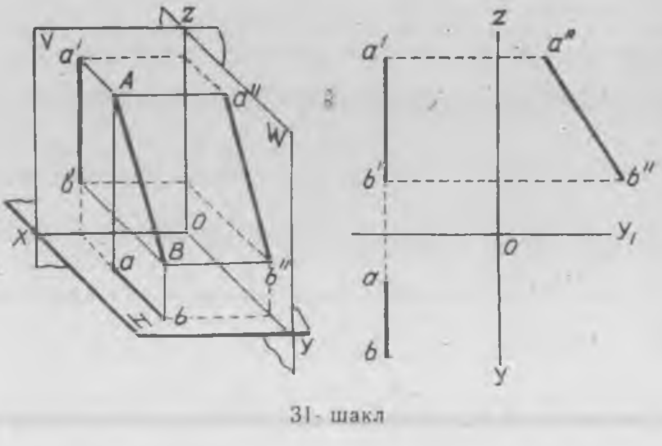
30-шаклда V текисликка параллел кесма тасвирланган. Бу чизиқ учун ордината (y) ўзгармасдир. $AB=a'b'$; $ab \parallel OX$. Кесманинг фронтал проекцияси билан OX ўқи орасидаги бурчак AB билан H орасидаги α бурчакка тенг.



30- шакл

V текисликка параллел чизиқ *фронтал чизиқ* ёки, қисқача, *фронтал* дейилади.

31- шаклда W текисликка параллел кесма тасвирланган. Бу кесма учун абсцисса (x) ўзгармасдир. Шу сабабли кесманинг горизонтал ва фронтал проекциялари эпюрда OX ўқига нисбатан бир перппендикулярда жойлашади. Кесманинг ҳақиқий



31- шакл

узунлиги профил проекциясига тенг бўлади. Бу кесманинг ҳақиқий узунлигини эпюрда, профил проекциясини ясамасдан туриб, умумий усул билан (11-параграф) топиш қулайроқ. Бунинг учун бир катети ab га, иккинчи катети $a'b'$ га тенг тўғри бурчакли учбурчак ясалади. Учбурчакнинг гипотенузаси кесманинг ҳақиқий узунлигига баравар бўлади.

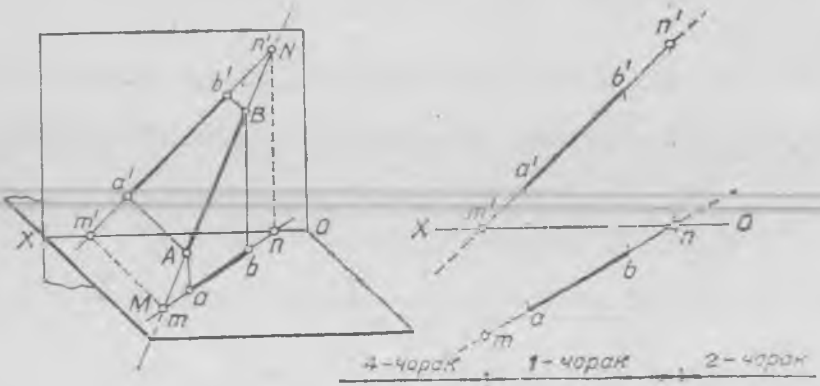
W текисликка параллел чизиқ *профил чизиқ* дейилади.

3. Агар тўғри чизиқ проекциялар текислигида ётган бўлса, унинг шу текислик билан бир номли проекцияси ўзи ётган жойда, бошқа проекциялари тегишли проекция ўқларида бўлади. Масалан, кесма V текисликда ётган бўлса, унинг горизонтал проекцияси OX ўқига тушади.

13- §. Тўғри чизиқнинг излари

Тўғри чизиқ фазонинг қайси чоракларидан ёки октантларидан ўтганлигини аниқлаш (унинг йўналишини билиш) учун проекция текисликлари билан кесишув нуқталарини билиш керак, чунки тўғри чизиқ бир октантдан иккинчи октантга H, V, W текисликларни кесмай ўта олмайди.

Тўғри чизиқнинг проекциялар текислиги билан кесишув нуқтаси шу *тўғри чизиқнинг изи* дейилади. Тўғри чизиқ кўпи билан уч чоракдан ёки тўрт октантдан ўтиши, ками билан бир чоракдан ёки икки октантдан ўтиши мумкин. Йўналишига қараб, тўғри чизиқнинг битта, иккита ёки учта изи бўлиши мумкин.



32- шакл

Агар бизга H, V текисликлар системасида умумий вазиятдаги AB кесма берилган бўлса (32- шакл), уни икки томонга давом эттириб, текисликлар билан кесишув нуқталарини аниқлаймиз.

Тўғри чизиқ H текислик билан M нуқтада кесишади, бу нуқта AB чизиқнинг горизонтал изи бўлади. Тўғри чизиқ V текислик билан N нуқтада кесишади, бу нуқта AB чизиқнинг фрон-

тал изи бўлади. Шу нуқталар бир вақтда ҳам AB чизиқда, ҳам H ёки V текисликда ётади.

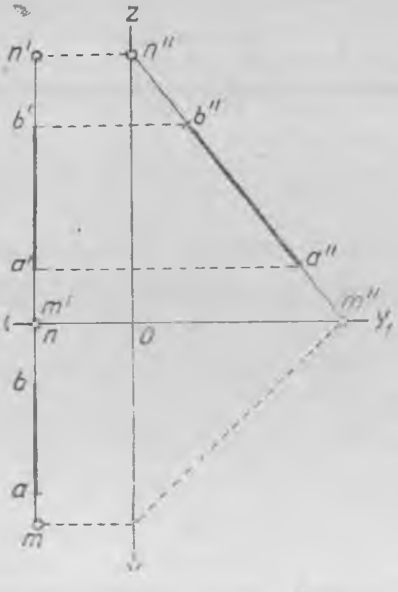
Шаклдан яққол кўриниб турибдики, горизонтал изнинг горизонтал проекцияси (m) изнинг ўзида, фронтал проекцияси (m') OX проекциялар ўқида жойлашади. Фронтал изнинг фронтал проекцияси (n') изнинг ўзида, горизонтал проекцияси (n) эса OX ўқида жойлашади. Бундан, тўғри чизиқ изларини топишнинг тубандаги қоидалари келиб чиқади.

1. Эпюрда тўғри чизиқнинг горизонтал изини топиш учун шу тўғри чизиқ проекциясининг OX ўқи билан кесишув нуқтасидан ўққа нисбатан перпендикуляр ўтказиш керак; бу перпендикуляр билан чизиқнинг горизонтал проекцияси кесишган нуқта тўғри чизиқнинг горизонтал изи M ($m\,m'$) бўлади (32- шакл, ўнгда).

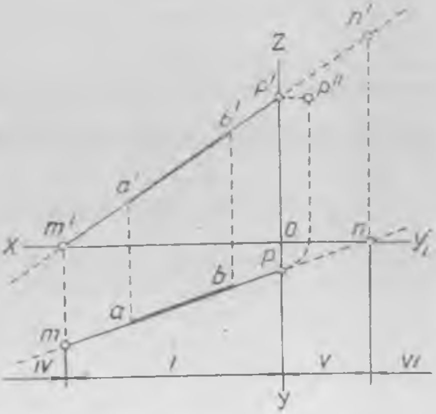
2. Эпюрда тўғри чизиқнинг фронтал изини топиш учун бу тўғри чизиқ горизонтал проекциясининг OX ўқи билан кесишув нуқтасидан ўққа нисбатан перпендикулр ўтказиш керак; бу перпендикуляр билан чизиқнинг фронтал проекцияси кесишган нуқта тўғри чизиқнинг фронтал изи N (nn') бўлади.

Шундай қилиб, 32- шаклдаги тўғри чизиқнинг M ва N излар орасидаги қисми биринчи чоракда, M издан пастки қисми тўртинчи чоракда, N издан юқори қисми иккинчи чоракда жойлашган.

Чизмаларни тахт қилиш қоидаларига мувофиқ эпюрда тўғри чизиқнинг фақат биринчи чоракдаги қисми проекцияла-



33- шакл



34- шакл

ри туташ чизиқлар билан, бошқа чораклардаги қисмларининг проекциялари эса штрих чизиқлар билан чизилиши лозим.

Агар тўғри чизиқ учта *H, V, W* текислик системасида берилган бўлса, шу тўғри чизиқ горизонтал изининг профил проекцияси (m'') проекциялар ўқи (OY) да, фронтал изининг профил проекцияси (n'']) проекциялар ўқи (OZ) да жойлашади.

33- шаклда *W* текисликка параллел бўлган *AB* тўғри чизиқнинг (профил тўғри чизиқнинг) изларини топиш усулларидан бири кўрсатилган. Бу усулга мувофиқ, профил тўғри чизиқнинг изларини топиш учун, аввало, эпюрда чизиқнинг профил проекцияси ($a''b''$) ясалади ва $m''n''$ нуқталар аниқланади. Кейин бу нуқталардан фойдаланиб, изларнинг бошқа проекциялари топилади, m нуқтада чизиқнинг горизонтал изи, n' нуқтада — фронтал изи булади.

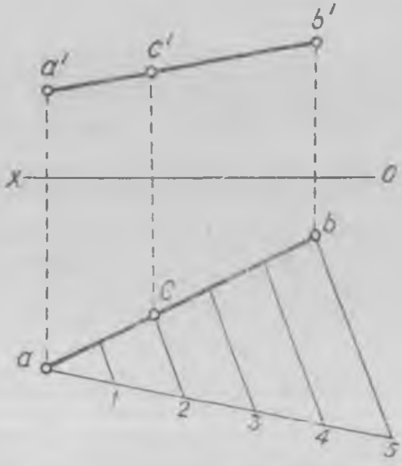
W текисликка оғма бўлган тўғри чизиқнинг профил изини топишга тўғри келганда, унинг профил проекциясини ясамаса ҳам бўлади, чунки чизиқнинг горизонтал проекцияси билан OY ўқининг кесишув p нуқтаси (34- шакл) профил изнинг горизонтал проекцияси, чизиқнинг фронтал проекцияси билан OZ ўқининг кесишув p' нуқтаси эса профил изнинг фронтал проекциясидир. Бу p ва p' нуқталардан фойдаланиб, p'' нуқтани, яъни чизиқнинг профил изини топиш қийин эмас. Чизиқнинг профил проекцияси, албатта, p'' нуқтадан ўтади (буни ўзингиз текшириб кўринг).

14- §. Эпюрда тўғри чизиқ кесмасини берилган нисбатда бўлиш

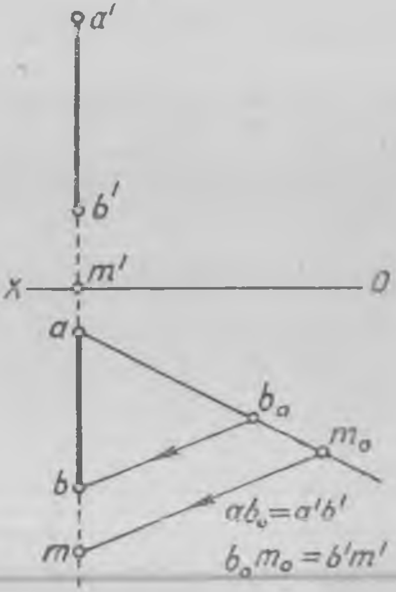
Параллел проекцияларнинг хоссаларига мувофиқ (3-параграф, 3- шакл), тўғри чизиқ кесмаларининг нисбати улар проекцияларининг нисбатига тенг. Шунга кўра, кесмани эпюрда берилган нисбатда бўлиш учун унинг проекцияларини шу нисбатда бўлиш керак.

35- шаклда *AB* кесмани берилган 2:3 нисбатда бўлиш кўрсатилган. Бунинг учун кесма горизонтал проекциясининг a учидан ўтказилган ёрдамчи чизиқда бешта (2+3) ихтиёрий узунликда, лекин ўзаро тенг кесма қўйилган. Сўнгра, 5- нуқта b билан туташтирилган ва 2-нуқтадан $5b$ га параллел чизиқ ўтказилиб, c нуқта, кейин эса c' нуқта топилган. Топилган *C* нуқта *AB* кесмани 2:3 нисбатда бўлади.

Кесмани берилган нисбатда бўлиш усулидан фойдаланиб, эпюрда *W* текисликка параллел бўлган профил чизиқдаги нуқтанинг бир проекцияси бўйича иккинчи проекциясини топиш мумкин. Мисол тариқасида, 36- шаклда *W* га параллел *AB* чизиқнинг горизонтал изини шу усул билан топиш кўрсатилган. Маълумки, тўғри чизиқ горизонтал изининг фронтал проекцияси (m') унинг фронтал проекцияси ($a'b'$) нинг давоми билан OX ўқининг кесишув жойида була-



35- шакл



36- шакл

ди. Демак, горизонтал проекцияда шундай m нуқта топиш керакки, ундаги кесмаларнинг нисбати $ab:bm = a'b':b'm'$ бўлсин. Бу нуқта ёрдамчи чизиққа қўйилган $ab_0 = a'b'$ ва $b_0m_0 = b'm'$ кесмалар ҳамда ўзаро параллел b_0b ва m_0m чизиқлар ёрдамида топилган. Худди шу каби ясаш билан чизиқнинг фронтал изини ҳам топса бўлади (буни ўзингиз топинг).

15- §. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви

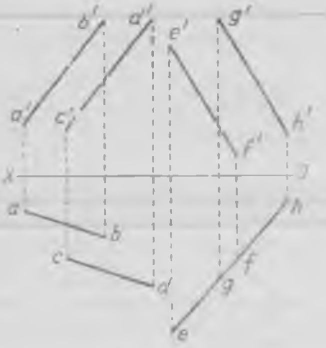
Икки тўғри чизиқ ўзаро параллел, кесишган ёки учрашмас бўлиши мумкин.

1. Параллел тўғри чизиқлар. Параллел проекцияларнинг хоссаларига мувофиқ (3- параграф, 4- шакл,) фазода ўзаро параллел бўлган чизиқларнинг бир номли проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлади, яъни $AB \| CD$ бўлса, $ab \| cd$; $a'b' \| c'd'$ ва $a''b'' \| c''d''$ бўлади. Хусусий ҳолда, агар параллел чизиқлар проекцияловчи текисликни ифодаласа, уларнинг бир номли проекциялари устма-уст тушади, яъни бир тўғри чизиқда бўлади.

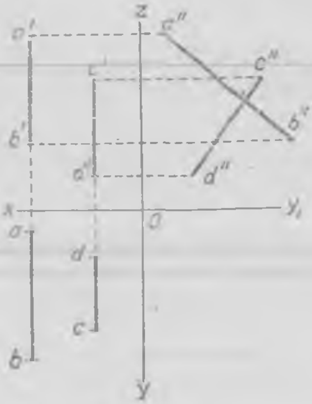
Профил проекциялар текислигига параллел бўлмаган тўғри чизиқларнинг ўзаро параллеллигини уларнинг горизонтал ва фронтал проекциялари бўйича аниқлаш мумкин. 37-шаклда тасвирланган AB чизиқ CD чизиққа параллел, EF чизиқ GH чизиққа параллелдир.

W текисликка параллел бўлган чизиқларнинг ўзаро параллел ёки параллел эмаслигини билиш учун уларнинг эпюрдаги

горизонтал ва фронтал проекциялари етарли бўлмайди. Бундай чизиқлар учун уларнинг профил проекцияларини ясаб, сўнгра улар ўзаро қандай муносабатда эканлигини айтиш мумкин. 38-шаклда тасвирланган профил чизиқлар (AB ва CD) учрашмас чизиқлардир.



37-шакл



38-шакл

2. Кесишган чизиқлар. Фазода бир умумий нуқтага эга бўлган икки тўғри чизиқ *кесишган чизиқлар* дейилади.

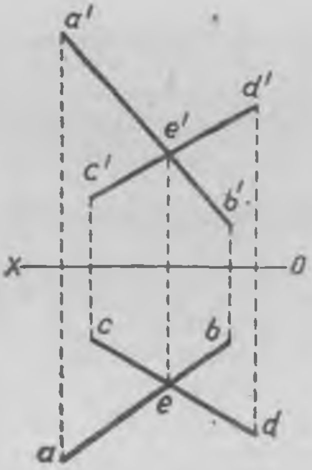
Кесишган чизиқларнинг бир номли проекциялари ҳам ўзаро кесишади ва уларнинг кесишув нуқталари эпюрда OX проекциялар ўқига нисбатан бир перпендикулярда ётади (39-шакл, $ee' \perp OX$).

Агар чизиқлардан ҳеч бўлмаганда бири профил тўғри чизиқ бўлса, бундай чизиқларнинг ўзаро қандай муносабатда эканлигини уларнинг профил проекцияларини ясаб ёки кесмани берилган нисбатда бўлиш усулидан фойдаланиб аниқлаш мумкин. 40-шаклда чизиқлар кесишмаган.

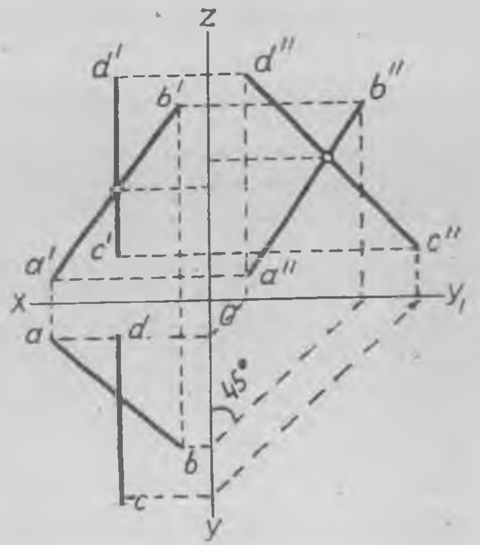
Кесишган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг проекцияси, умуман олганда, ўзидан бошқача (кичик ёки катта) бўлиши мумкин. Кесишган чизиқлар орасидаги бурчакнинг проекцияси хусусий ҳоллардагина ўзига тенг бўлади. Бу ҳақдаги маълумотлар 16-параграфда берилади.

3. Учрашмас (айқаш) чизиқлар. Ўзаро параллел бўлмаган ва кесишмаган тўғри чизиқлар *учрашмас (айқаш) чизиқлар* дейилади. Учрашмас чизиқларнинг бир номли проекциялари кесишгани билан уларнинг кесишган нуқталари эпюрда проекциялар ўқига нисбатан бир перпендикулярда ётмайди. 40 ва 41-шаклларда кўрсатилган чизиқлар учрашмас тўғри чизиқлардир.

Конкурент нуқталар. Бир проекцияловчи нурда (перпендикулярда) жойлашган нуқталар кўриниши жиҳатидан ***конкурент***

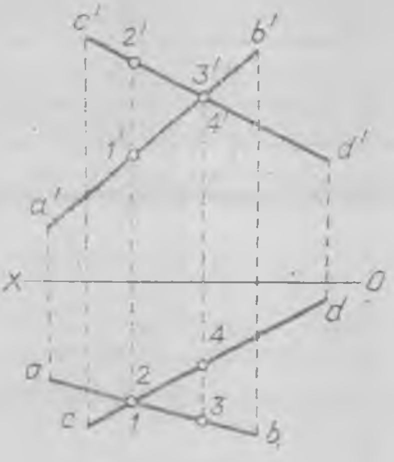


39- шакл



40- шакл

нуқталар дейилади. Конкурент нуқталарнинг шу нуқталар орқали ўтган йўналиш бўйича туширилган проекциялари ҳамма вақт бир нуқтада устма-уст жойлашади. 41-шаклдаги *1* ва *2* ҳамда *3* ва *4* нуқталар конкурент нуқталардир. Конкурент нуқталардан фойдаланиб, эпюрда геометрик шакллар, жисмлар ва шунга ўхшаш элементларнинг кўринар-кўринмаслигини аниқлаш мумкин.

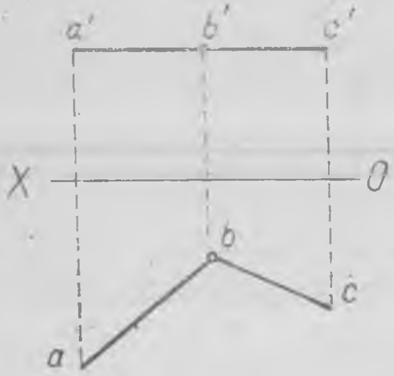


41- шакл

Шаклдаги икки конкурент (*1* ва *2*) нуқтадан *1* нуқта *H* текисликка *2* нуқтадан кўра яқин. Шунинг учун, юқоридан пастга *H* текисликка қаралса, *2* нуқта кўринади, *1* нуқта кўринмайди. Демак, горизонтал проекцияда *2* кўринар, *1* эса кўринмасдир. Худди шунга ўхшаш, *V* текисликка қаралганда конкурент *3* ва *4* нуқталардан *3* нуқта кўринади, *4* нуқта кўринмайди. Демак, фронтал проекцияда *3′* кўринар *4′* эса кўринмасдир.

16- §. Кесишган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг проекциялари

Проекциялар текисликларига параллел бўлмаган кесишган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг проекцияси умумий ҳолда ўзига тенг бўлмайди. Бурчакнинг проекциялар текисликларига нисбатан баъзи хусусий ҳолларидагина унинг проекцияларига кўра бу бурчакнинг ҳақиқатда қандай эканлигини айтиш мумкин бўлади.

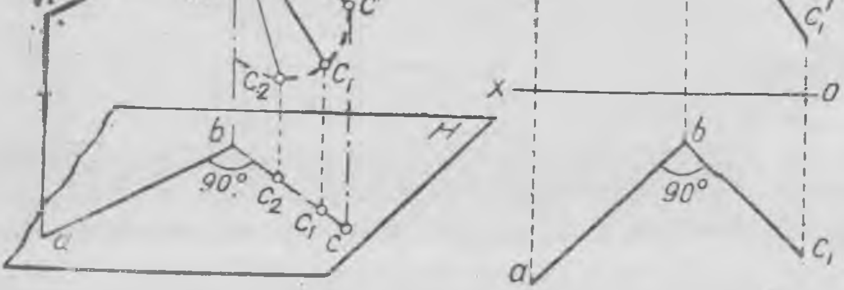


42 - шакл

1. Исталган (ўткир, ўтмас, тўғри) бурчакнинг томонлари проекция текисликларидан бирига параллел бўлса, бурчакнинг шу текисликдаги проекцияси ўзига тенг бўлади; бурчакнинг бошқа проекциялар текислигидаги проекцияси OX ўқига параллел тўғри чизиқ бўлади. 42- шаклда ABC бурчакнинг томонлари H текисликка параллел ($\angle abc = \angle ABC$).

2. Тўғри бурчакнинг томонларидан бири проекциялар текисликларидан бирига параллел бўлган ҳолда ҳам тўғри бурчакнинг шу текисликдаги проекцияси тўғри бурчак бўлади.

$\angle ABC = 90°$ ва унинг иккала томони H текисликка параллел жойлашган деб фараз қилайлик (43- шакл). Бунда бурчакнинг H

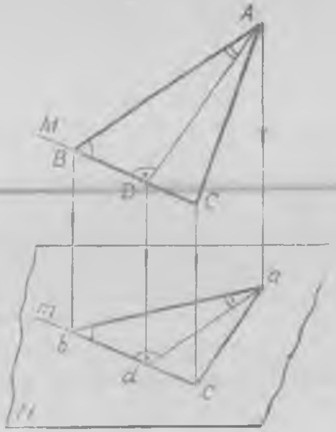


43- шакл

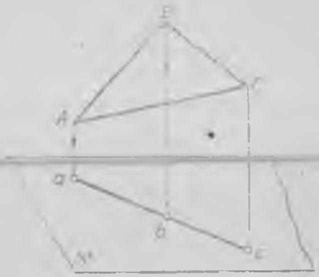
текисликдаги проекцияси ўзига тенг бўлади. Энди тўғри бурчакнинг BC томони AB томони атрофида айлантирилса, у ҳамма вақт AB га ва H га перпендикуляр бўлган Q текисликда қолади. $AB \perp Q$ бўлгани учун $\angle ABC_1 = \angle ABC_2 = 90°$. C_1, C_2 нуқталарнинг проекциялари (улар BC чизиқни проекцияловчи Q текисликда бўлганлиги учун) bc га тушади. Шундай қилиб:

$$\angle abc = \angle abc_1 = \angle abc_2 = 90°.$$

Шаклдан яққол кўриниб турибдики, ABC_1 ёки ABC_2 бурчакнинг ёлғиз AB томони H текисликка параллел, иккинчи томони H га оғмадир. Демак, тўғри бурчакнинг проекцияси ўзгармасдан (ўзига тенг бўлиб) тушуви учун унинг бир томони проекциялар текислигига параллел бўлиши керак.



44- шакл



45- шакл

3. Агар ўткир ёки ўтмас бурчакнинг томонларидан бири проекциялар текислигига параллел бўлса, ўткир бурчакнинг проекцияси ўзидан кичик, ўтмас бурчакнинг проекцияси эса ўзидан катта бўлади.

ABC учбурчакнинг BC томони H текисликка параллел, B учидаги бурчак эса ўткир деб фараз қилайлик (44-шакл). Учбурчакнинг A учидан BC томонига перпендикуляр тушириб, D нуқтани проекциялаймиз. Тўғри бурчакли проекциялашда $bd = BD$, $ad < AD$, $ab < AB$, демак, bad бурчак BAD бурчакдан катта бўлади; юқоридаги 2-пунктга мувофиқ, $\angle bda = 90°$, чунки BDA тўғри бурчакдир. Демак, ABD ўткир бурчакнинг abd проекцияси ўзидан кичик бўлади.

Ўткир бурчак ёнидаги ABM ўтмас бурчак ҳақида тескари хулоса чиқазиш мумкин: унинг проекцияси ўзидан катта, яъни $\angle abm > \angle ABM$ бўлади.

Пировардида шундай хулоса чиқариш мумкинки, битта бурчакнинг проекцияси, унинг проекциялар текислигига нисбатан жойлашувига қараб, 0° дан 180° гача ўзгариши мумкин.

Масалан, 45-шаклдаги проекцияловчи текисликда ётган учбурчакнинг *A* учидаги бурчагининг проекцияси 0° га, *B* учидаги бурчагининг проекцияси эса 180° га тенгдир.

III боб. ТЕКИСЛИК

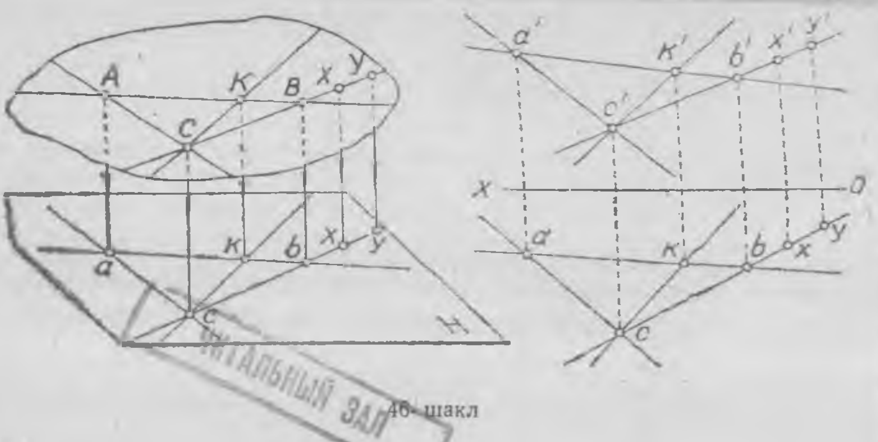
17- §. Текисликнинг эпюрда берилиш усуллари

Текислик ҳамма томонга чексиз чўзилган узлуксиз сиртдир. Проекциялар текислигига перпендикуляр бўлмаган бирор *P* текисликнинг ҳар бир нуқтаси шу перпендикуляр текислигига проекцияланса, *P* текисликнинг ҳамма нукталари проекциялари проекциялар текислигини бутунлай қоплайди; текисликнинг проекцияси аниқ бўлмай қолади. Шунинг учун текислик проекцияланмайди. Фақат унда ётган геометрик элементлар проекцияланади. Текисликнинг фазодаги вазиятини белгиловчи энг оддий геометрик элементлар нуқталар ва тўғри чизиқлардир.

Текисликнинг фазодаги вазияти унинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасининг ўрни билан белгиланади, яъни уч нуқта бўйича текисликнинг исталган бошқа нуқталарини ҳамма вақт топиш мумкин. Фазодаги *P* текислик бир тўғри чизиқда ётмаган *A, B, C* нуқталар билан берилган деб фараз қилайлик (46- шакл). Бу *A, B, C* нуқталарни ўзаро туташтиришдан ҳосил бўлган *AB, BC* ва *AC* чизиқларнинг чексиз давомидаги ҳамма нуқталар (масалан, *X, Y*, ...) берилган *P* текисликда ётади. Агар *AB* чизиқдаги *K* нуқтани *C* нукта билан туташтирсак, бу чизиқ ҳам шу текисликда ётади.

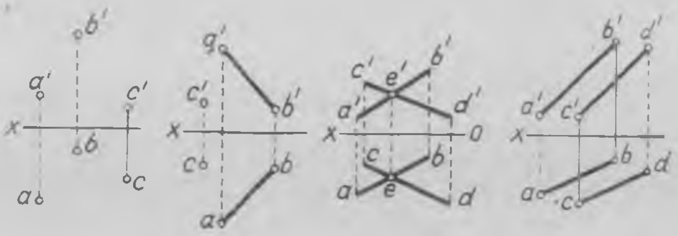
Учта нуқтадан иккитаси орқали ҳамма вақт бир тўғри чизиқ ёки уч нуқтадан ҳамма вақт кесишган икки тўғри чизиқ ёхуд параллел икки тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Шунга кўра, текислик эпюрда: 1) бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг проекциялари билан; 2) бир тўғри чизиқ-



ИТАЛЬНЫЙ ЗАЛ

46- шакл



47- шакл

нинг ва унда ётмаган бир нуқтанинг проекциялари билан; 3) кесишган икки чизиқнинг проекциялари билан ва 4) параллел икки чизиқнинг проекциялари билан берилиши мумкин (47- шакл).

Текисликнинг берилиш (ифодаланиш) усулларининг биридан иккинчисига ўтиш қийин эмас. Текисликни уч нуқта билан бериш усули энг умумий усулдир.

Текислик эпюрда бирорта текис шаклнинг (масалан, доиранинг, квадратнинг, учбурчакнинг ва шунга ўхшашларнинг) проекциялари билан ҳам берилиши мумкин.

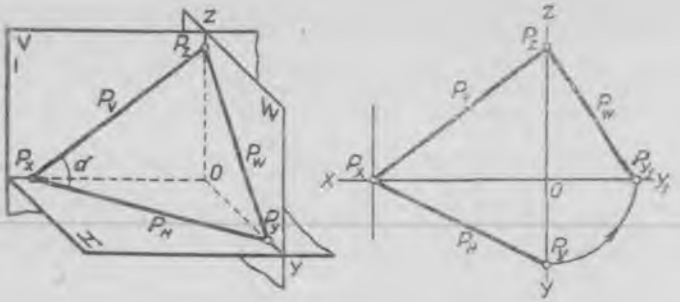
18- §. Текисликнинг излари

Бирорта текисликнинг проекциялар текислиги билан кесишув чизиғи *шу текисликнинг* изи дейилади. *H, Y, W* текисликлар системасида текисликнинг кўпи билан учта, энг камида эса иккита изи бўлиши мумкин.

48- шаклда горизонтал проекциялар текислигини P_H, фронтал проекциялар текислигини P_V ва профил проекциялар текислигини P_W тўғри чизиқлар бўйича кесувчи *P* текислик тасвирланган. P_H тўғри чизиқ текисликнинг *горизонтал изи*, P_V тўғри чизиқ текисликнинг *фронтал изи*, P_W тўғри чизиқ эса текисликнинг *профил изи* дейилади.

Текислик изининг ўзи билан бир номли проекцияси ўзи ётган жойда, бошқа икки проекцияси проекциялар ўқларида бўлади. Масалан, P_V нинг фронтал проекцияси ўзида, горизонтал проекцияси *OX* ўқида, профил проекцияси эса *Oz* ўқида бўлади. Шунинг учун, эпюрда изнинг фақат из ётган текисликдаги проекцияси кўрсатилади ва изнинг ўзи қандай белгиланган бўлса, бу проекция ҳам шундай белгиланади. Шундай қилиб, эпюрда текислик излари билан берилиши мумкин. Текисликнинг излари билан берилиши кесишув ёки параллел (52-шакл) чизиқлари билан берилиш усулининг хусусий ҳолидир.

P_H P_V P_W учбурчак берилган *R* текисликнинг *излар учбурчаги* дейилади. Излар учбурчагининг учлари (P_X, P_Y, P_Z нуқталар) из-



48- шакл

ларнинг *учрашув нуқталари* дейилади. Демак, текисликнинг излари ўзаро фақат проекция ўқларида ётган учрашув нуқталаридагина кесишиши мумкин экан.

Текислик билан кесишиш натижасида проекция ўқларида ҳосил бўлган OP_X, OP_Y ва OP_Z кесмалар P текисликнинг *параметрлари* дейилади. P_X, P_Y, P_Z нуқталарнинг ҳар бири учун икки координата нолга тенг. Шу сабабли текислик параметрлар билан берилганда $P(X;\ Y;\ Z)$ кўринишида ёзилади ($X = OP_X$; $Y = OP_Y$; $Z = OP_Z$).

Эпюрда текисликнинг излари берилган бўлса, унинг параметрларини топиш қийин эмас. Текисликнинг излари билан берилиши бошқа усуллар билан берилишига қараганда бирмунча яққолроқдир.

Изларининг эпюрда жойлашувига қараб, текисликнинг фазодаги вазиятини осонроқ тасаввур қилиш мумкин.

19-§. Текисликнинг проекциялар текисликларига нисбатан турли вазиятлари

Текислик проекция текисликларига нисбатан уч хил вазиятда туриши: уларнинг учаласига ҳам оғма ёки фақат бирига перпендикуляр ёхуд бирига параллел (демак, қолган иккитасига перпендикуляр) бўлиши мумкин.

1. Умумий вазиятдаги текислик. Проекция текисликларининг учаласига ҳам оғма бўлган текислик *умумий вазиятдаги текислик* дейилади (48- шакл).

Текисликнинг фазодаги вазиятига (йўналишига) қараб, унинг излари проекциялар ўқларига нисбатан турлича жойлашади. Умумий вазиятдаги текисликнинг ҳамма излари проекциялар ўқлари билан ҳамма вақт ўткир ёки ўтмас бурчак бўйича кесишади.

Текисликнинг икки изи, худди кесишган икки чизиқ каби, унинг фазодаги вазиятини тўла белгилайди. Шунинг учун эпюрда текисликнинг иккита изи бўлса кифоя; агар бирор масалани ечишда учинчи изи керак бўлиб қолса, уни берилган икки

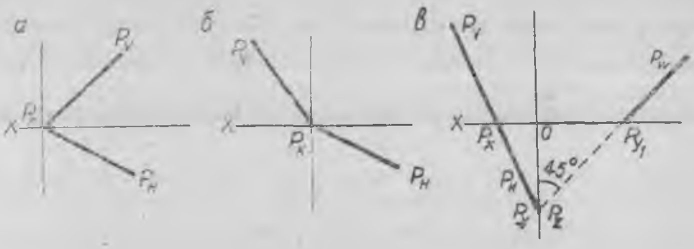
изи буйича 48-шаклда курсатилган усул билан ясаш мумкин.

Текисликнинг фазодаги излари орасидаги ҳақиқий бурчак эпюрдаги излари орасидаги бурчакдан ҳамма вақт кичик булади. Масалан, 48-шаклдаги горизонтал ва фронтал излар орасидаги фазовий α бурчак эпюрдаги P_H ва P_V орасидаги бурчакдан кичикдир.

Текисликнинг излари чексиз тўғри чизиқлар бўлганлиги учун, одатда, эпюрда изларнинг фақат биринчи чоракдаги ёки октантдаги қисмларигина кўрсатилади. Аммо зарур бўлган ҳолларда уларни учрашув нуқтасининг бошқа томонига ҳам давом эттириш мумкин.

Фазода текисликнинг кўринар излари орасидаги бурчак ўткир бўлса, бу текислик *ўткир бурчакли текислик*, ўтмас бўлса, *ўтмас бурчакли текислик* дейилади. Ўткир бурчакли текисликнинг излари эпюрда P_x нуқтадан OX ўқига ўтказилган перпендикулярнинг бир томонида жойлашади (49-шакл, *а*); ўтмас бурчакли текисликнинг излари эса кўрсатилган перпендикулярнинг турли томонларида жойлашади (49-шакл, *б*).

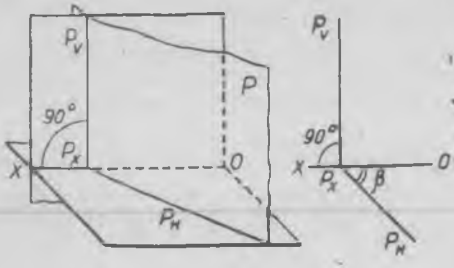
Эпюрда горизонтал ва фронтал излари бир тўғри чизиққа жойлашувчи текислик умумий ҳолдаги ўтмас бурчакли текисликнинг хусусий ҳолидир. Бундай текисликнинг Y ва Z параметрлари белгилари турлича, абсолют қийматлари эса тенг $(OP_Y = OP_Z)$, текислик H ва V текисликларга баб-баравар қия, унинг профил изи P_W эса OY ва OZ ўқлари билан 45° ли бурчаклар ҳосил қилган бўлади (49-шакл, *в*).



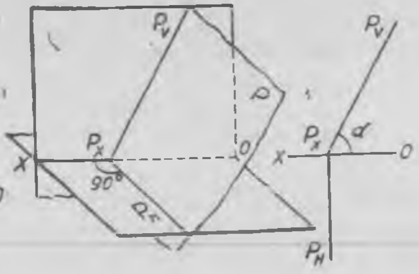
49-шакл

2. Проекцияловчи текисликлар. Проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган текислик *проекцияловчи текислик* дейилади. H текисликка перпендикуляр бўлган текислик *горизонтал проекцияловчи текислик* деб, V текисликка перпендикуляр бўлган текислик *фронтал проекцияловчи текислик* деб, W текисликка перпендикуляр бўлган текислик эса *профил проекцияловчи текислик* деб аталади.

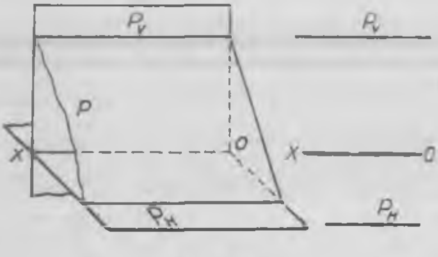
Горизонтал проекцияловчи текисликнинг фронтал изи P_V ҳамма вақт OX ўқига перпендикуляр бўлади, горизонтал изи эса OX ўқига ҳар қандай бурчак бўйича қия бўлиши мумкин. Бу P_H билан OX



50- шакл



51- шакл



52- шакл

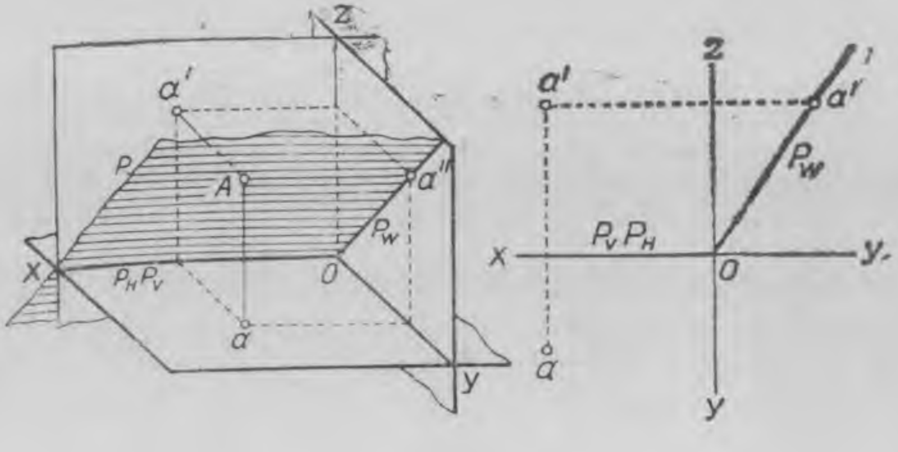
орасидаги β бурчак берилган текислик билан V текислик орасидаги икки ёқли бурчакнинг қийматига тенг (50-шакл).

Фронтал проекцияловчи текисликнинг горизонтал изи P_H OX ўқига перпендикуляр бўлади, P_V билан OX орасидаги α бурчак P текислик билан H орасидаги бурчакка тенг (51-шакл). Профил проекцияловчи текисликнинг горизонтал P_H ва фронтал P_V излари OX ўқига параллел жойлашади (52-шакл).

OX проекциялар ўқидан ўтган текислик профил проекцияловчи текисликларнинг хусусий ҳолидир (53-шакл). OX ўқидан ўтган текисликнинг горизонтал изи ҳам, фронтал изи ҳам OX ўқига тўғри келади. Шунинг учун бундай текисликни эпюрда ё профил изи ёки ундаги бирорта нуқтанинг иккита проекцияси берилган бўлиши лозим.

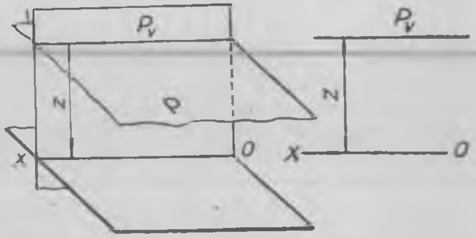
Агар проекциялар ўқидан ўтган текислик H ва V текисликлар орасидаги икки ёқли 90° ли бурчакни тенг иккига бўлса, бундай текислик *биссектор текислик* дейилади. Биссектор текисликнинг профил изи OY ва OZ ўқлари орасидаги тўғри бурчакнинг биссектрисасига тўғри келади. H ва V текисликлар системасида иккита биссектор текислик ўтказиш мумкин, улардан бири биринчи ва учинчи чораклардан, иккинчиси иккинчи ва тўртинчи чораклардан ўтади. Биссектор текисликлар H ва V текисликлардан баравар оралиқларда турган нуқталарнинг геометрик ўринларидир.

3. Проекция текисликларига параллел текисликлар. Проекция текисликларидан бирига параллел бўлган текислик айни пайтда проекция текисликларининг бошқа иккитасига проекцияловчи текислик бўлади. H, V, W системасида бундай текисликларнинг фақат иккита изи бўлади ва



53- шакл

улар эпюрда проекциялар ўқларидан бирига перпендикуляр бир тўғри чизиқда жойлашади.



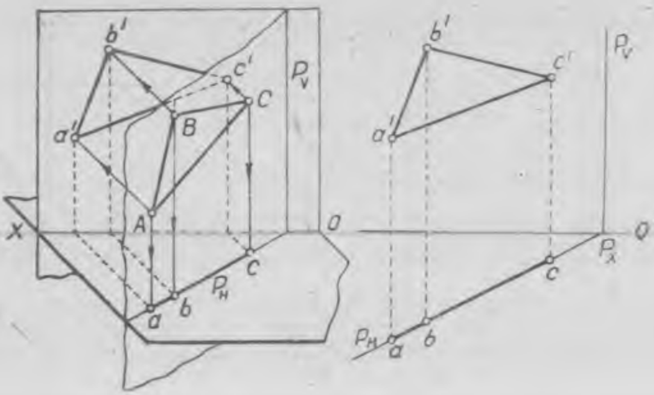
54- шакл

Агар берилган текислик *H* га параллел бўлса, *горизонтал текислик* деб *V* га параллел бўлса, *фронтал текислик* деб, *W* га параллел бўлса, *профил текислик* деб аталади. *H* ва *V* текисликлар системасида горизонтал текисликнинг *OX* ўқига параллел битта фронтал изи бўлади (54- шакл).

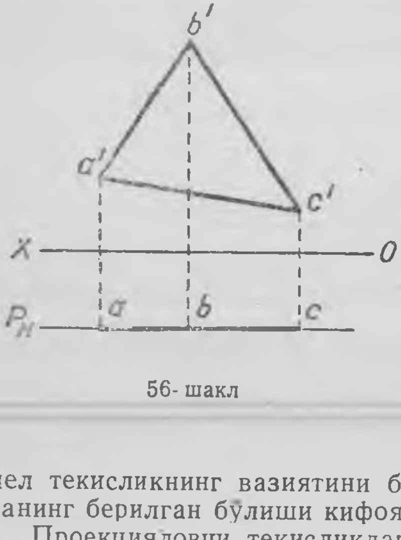
20- §. Проекцияловчи текисликларнинг хоссалари

Юқорида айтиб ўтилганидек, проекциялар текислигига перпендикуляр бўлган текислик проекцияловчи текислик дейилади.

Проекцияловчи текисликнинг шундай хоссаси борки, унда ётган нуқта, чизиқ ёки текис шаклларнинг (учбурчак, квадрат, доира ва шунга ўхшашларнинг) проекциялари текисликка перпендикуляр бўлган проекциялар текислигидаги изига тушади, яъни тўғри чизиқ кўринишида тасвирланади. Мисол тариқасида 55-шаклда горизонтал проекцияловчи *P* текислик ва унда ётган *ABC* учбурчак тасвирланган. Учбурчакнинг горизонтал проекцияси текисликнинг горизонтал изига тушган, фронтал проекцияси эса аслидан кичик бўлиб проекцияланган. Агар бу учбурчак *H* текисликка перпендикуляр ва *V* текислик-



55- шакл



56- шакл

ка параллел қилиб (яъни фронтал текисликда) жойлаштирилса, унинг фронтал проекцияси ўзига тенг бўлади (56-шакл).

55-шаклда тасвирланган текисликка ўхшаш проекцияловчи текисликларнинг фазодаги вазиятларини белгилаш учун икки нуқта (уч нуқта эмас) ёки бир тўғри чизиқ берилган бўлса кифоя. Бошқача қилиб айтганда, бир тўғри чизиқдан *H* га ёки *V* га перпендикуляр қилиб фақат битта текислик ўтказиш мумкин. Проекция текисликларидан бирига параллел текисликнинг вазиятини белгилаш учун фақат битта нуқтанинг берилган бўлиши кифоя.

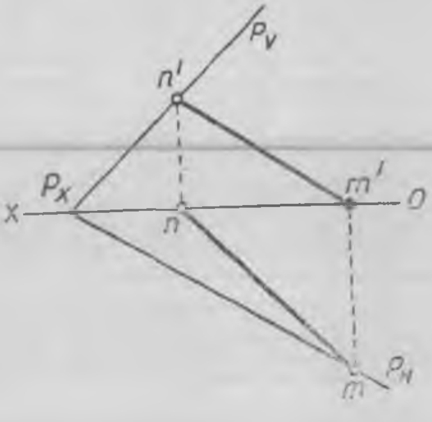
Проекцияловчи текисликларнинг яна бир хусусияти бор. Проекцияловчи текисликдаги нуқтанинг эпюрда берилган битта проекцияси бўйича бошқа проекцияларини ҳамма вақт ҳам топиб бўлавермайди. Масалан, 55- шаклдаги ёки 56-шаклдаги $a'b'c'$ берилган бўлса, abc текисликнинг горизонтал изида бўлади, аксинча, агар abc берилган бўлса, $a'b'c'$ ноаниқ бўлиб қолади, чунки нуқталарнинг фронтал проекциялари нуқталарнинг горизонтал проекцияларидан ўтказилган вертикал чизиқларнинг исталган жойида бўлиши мумкин.

21- §. Берилган текисликда ётган тўғри чизиқнинг проекцияларини ясаш

1. Агар тўғри чизиқнинг икки нуқтаси текисликда ётган бўлса, унинг ҳамма нуқтаси, яъни тўғри чизиқнинг ҳаммаси шу текисликда ётади. Шунинг учун, текисликда ётган тўғри чизиқ берилган текисликни ифодаловчи тўғри чизиқлардан ҳеч бўлмаганда иккитасини кесиб ўтади.

Демак, эпюрда берилган текисликда ётувчи ихтиёрий тўғри чизиқнинг проекцияларини ясаш учун, проекциялари берилган ёки текисликнинг берилишига қараб ясалиши мумкин бўлган бизга маълум тўғри чизиқларда икки нуқта топиш лозим.

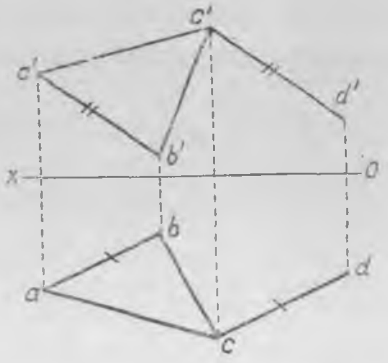
Текислик эпюрда P_H ва P_V излар (кесишган чизиқлар) билан берилган ва бу текисликда бирорта ихтиёрий тўғри чизиқ олиш керак, деб фараз қилайлик (57- шакл). Бунинг учун текисликнинг горизонтал изида m нуқтани, фронтал изида n' нуқтани белгилаб оламиз. Бу нуқталарнинг иккинчи проекциялари (m' ва n нуқталар) OX ўқида бўлади. Бир номли проекцияларни ўзаро туташтиришдан ҳосил бўлган чизиқлар (mn ва $m'n'$) берилган P текисликда ётган MN тўғри чизиқнинг проекцияларидир. Тўғри чизиқнинг горизонтал изи m нуқтада, фронтал изи эса n' нуқтададир (13-параграфга қаранг).



57- шакл

Бу ердан тубандаги қоида келиб чиқади: текисликда ётган тўғри чизиқнинг бир номли излари текисликнинг бир номли изларида, яъни чизиқнинг горизонтал изи текисликнинг горизонтал изида, фронтал изи фронтал изида, профил изи эса профил изида ётади.

2. Бирор текисликдаги нуқтадан ўтган ва унинг бирор тўғри чизиғига параллел бўлган тўғри чизиқ ҳам худди шу текисликда ётади. Масалан, 58- шаклда ABC учбурчак би-



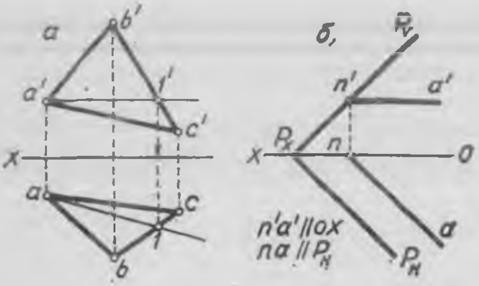
58- шакл

лан тасвирланган текисликнинг *C* нуқтасидан унинг *AB* чизиғига параллел қилиб ўтказилган *CD* (*cd*, *c'd'*) тўғри чизиқ шу *ABC* текисликда ётган чизиқдир.

22- §. Текисликнинг бош чизиқлари

Текисликда ётган горизонтал, фронтал ва профил чизиқлар ҳамда текисликнинг энг катта оғиш (қиялик) чизиқлари шу текисликнинг *бош чизиқлари* дейилади.

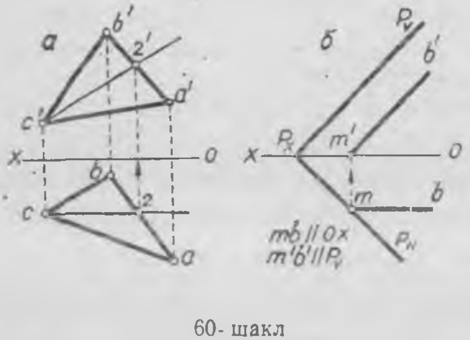
1. Текисликнинг горизонталлари. Текисликда ётган ва *H* текислик акрапаллел бўлган тўғри чизиқлар *текисликнинг горизонталлари* дейилади.



59- шакл

59-шакл, *a* да *ABC* учбурчак билан берилган текисликнинг *A* нуқтасидан ўтадиган горизонтали проекцияларини ясаш кўрсатилган. Маълумки, горизонтал чизиқнинг фронтал проекцияси *OX* ўқига параллел бўлади (12-параграф, 29-шакл). *a'* нуқтадан *OX* ўқига параллел чизиқ ўтказиб, унинг *b'c'* билан кесишув нуқтасини *1'* орқали белгилаймиз; *a'1'* горизонталнинг фронтал проекциясидир. Бу горизонталнинг горизонтал проекциясини ясаш учун *1* нуқтани топиб, *a* ва *1* нуқталар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз.

Агар текислик эпюрда излари билан тасвирланган бўлса, горизонталларнинг проекцияларини ясаш бирмунча қисқаради, чунки текисликнинг горизонтал изи унинг горизонталларидан бири бўлиб, унинг горизонтал проекцияси ўзида, фронтал проекцияси эса *OX* ўқидадир. Текисликнинг бошқа горизонталлари унинг горизонтал изига параллел, демак, уларнинг фронтал проекциялари ҳамма вақт *OX* ўқига параллел, горизонтал проекциялари эса текисликнинг горизонтал изига параллел бўлади. 59- шакл, *б* да излари билан берилган текислик горизонталларидан бирининг проекциялари (*n'a'*; *na*) тасвирланган. Горизонталнинг фронтал изи *n'* текисликнинг фронтал изида ётади.



60- шакл

2. Т е к и с л и к н и н г ф р о н т а л л а р и. Текисликда ётган ва *V* текисликка параллел бўлган тўғри чизиқлар *текисликнинг фронталлари* дейилади.

60- шакл, *а* да *ABC* учбурчак билан берилган текисликнинг *С* нуқтасидан ўтган фронтали тасвирланган. Фронталнинг горизонтал проекцияси *c2* проекциялар ўқига параллел қилиб чизилади, сўнгра фронталнинг фронтал проекцияси (*c′2′*) ясалади.

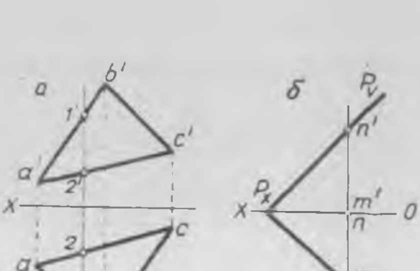
Агар эпюрда текислик излари P_H ва P_V билан берилган бўлса, бундай текисликнинг бирорта ихтиёрий фронталининг проекцияларини ясаш учун *OX* ўқига параллел тўғри чизиқ чизамиз ва унинг P_H билан кесишув нуқтасини белгилаб оламиз. Бу *m* нуқтада фронталнинг горизонтал изи ётади; изнинг фронтал проекцияси *m′* нуқтадан (бу нуқта ҳамма вақт *OX* да бўлади) текисликнинг фронтал изига параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз, чунки текисликнинг фронтал изи, хусусий ҳолда, унинг *V* текисликда ётган фронталидир. Ясалган чизиқлардан *mb* фронталнинг горизонтал проекцияси, *m′b′* эса фронтал проекциясидир.

3. Т е к и с л и к н и н г п р о ф и л ч и з и қ л а р и. Берилган текисликда ётган ва *W* текисликка параллел бўлган тўғри чизиқлар текисликнинг *профил чизиқлари* дейилади.

Маълумки, профил чизиқларнинг иккала проекцияси *OX* ўқига перпендикулярдир. 61- шакл, *а* да *ABC* учбурчак билан берилган текисликда олинган профил чизиқнинг проекциялари, 61- шакл, *b* да излари билан берилган *P* текисликдаги профил чизиқнинг проекциялари кўрсатилган.

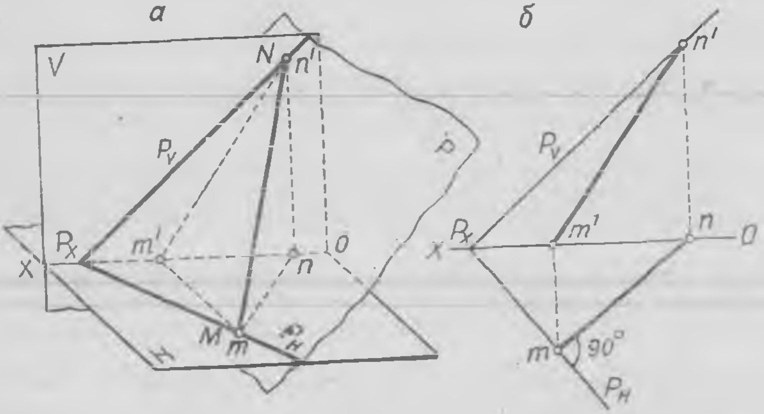
Тўғри чизиқ учбурчакнинг томонлари билан кесишиб, профил чизиқнинг фазодаги вазиятини белгилаш учун зарур *1, 1′* ва *2, 2′* нуқталарни беради. Текислик ўз излари билан тасвирланганда тўғри чизиқнинг излари (*m, m′* ва *n′, n*) ана шундай нуқталар бўлади.

4. Т е к и с л и к н и н г э н г катта оғма (қиялик) чизиқлари. Текисликда ётган ва унинг горизонталларига, фронталларига ёки профил чизиқларига перпендикуляр бўлган чизиқлар т е к и с л и к н и н г э н г к а т т а қ и я л и к ч и з и қ л а р и дейилади. Бу чизиқлардан, асосан, текисликнинг горизонталларига (шу жумладан, текисликнинг горизонтал изига) перпендикуляр бўлган энг катта қиялик чизиқларигина амалий аҳамиятга эга. Бундан кейин, алоҳида изоҳ берилмаган бўлса, «қиялик чизиғи» деб ана шундай текисликда ётган ва унинг горизонталларига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни тушуниш керак.



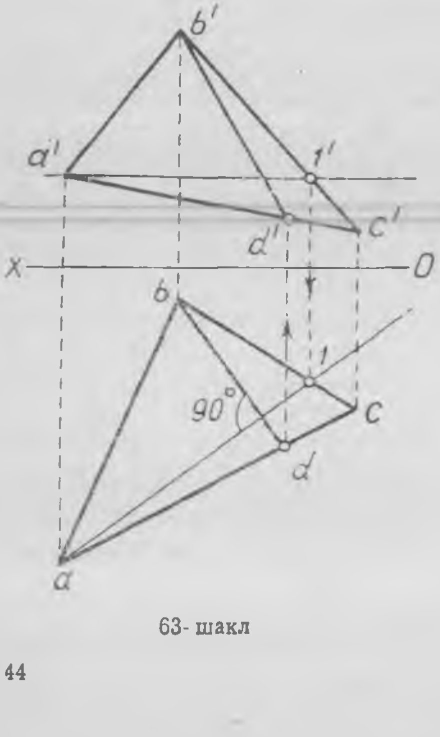
61- шакл

62- шаклда берилган текисликнинг энг катта қиялик чизиқларидан бири (MN) тасвирланган. MN чизиқ фазода P_H га перпендикулярдир. Шунинг учун қиялик чизиғининг горизонтал проекцияси mn текисликнинг горизонтал изига перпендикуляр бўлади (тўғри бурчак проекцияларининг хоссасига биноан, 16- параграф, 43- шакл).



62- шакл

63- шаклда ABC учбурчак билан берилган текисликнинг B нуқтасидан ўтказилган энг катта қиялик чизиғи (BD) тасвирланган. Бунинг учун, аввало, текисликда горизонтал ($a'1'$, $a1$) чизилган. Кейин горизонталнинг горизонтал проекциясига перпендикуляр қилиб, қиялик чизиғининг горизонтал проекцияси (bd) ўтказилган ва бу проекция асосида қиялик чизиғининг фронтал проекцияси ($b'd'$) ясалган.



63- шакл

Текисликнинг энг катта қиялик чизиғи (MN) билан H текислик орасидаги α бурчак (62- шаклда $\angle\alpha = \angle NMn$) берилган текислик билан H текислик орасидаги икки ёқли бурчакнинг қийматига тенг. Шунга кўра, берилган текислик билан H орасидаги α бурчакни эпюрда топиш учун 62- шаклдаги эпюрда mn,

$m'n'$ кесманинг, 63- шаклда bd, $b'd'$ кесманинг ҳақиқий узунлигини 11-параграфдаги усул билан) уларнинг горизонтал проекцияларида ясаш керак (буни ясаш китобхонларнинг ўзига тавсия қилинади).

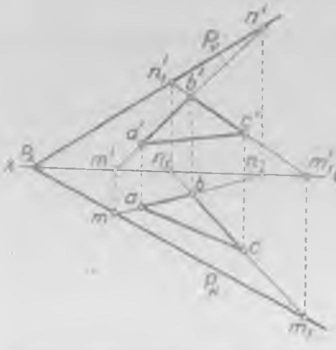
Агар берилган умумий вазиятдаги текислик билан V ёки W текислик орасидаги икки ёқли бурчакнинг қийматини эпюрда ясаш зарур бўлса, текисликнинг фронталларига ёки профил чизиқларига перпендикуляр қилиб ўтказилган қиялик чизиқларидан фойдаланиш мумкин.

Текисликнинг бош чизиқларидан, айниқса, унинг горизонтал ва фронталларидан ясашга доир масалаларни ечишда фойдаланилади, чунки уларни ясаш осонроқ бўлади.

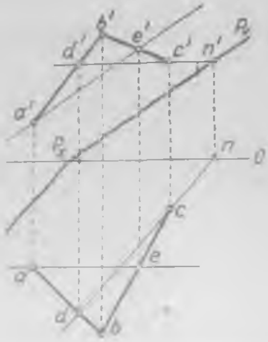
23- §. Нуқталар ёки тўғри чизиқлар билан берилган текисликнинг изларини ясаш

Тўғри чизиқни текисликда ётиш белгиларига (21- параграф) ҳамда текисликнинг горизонтал ва фронталларининг проекцияларини эпюрда жойлашувига асосланиб (22- параграф, 1 ва 2-пунктлар), геометрик элементларнинг проекциялари билан берилган текисликнинг изларини ясаш қийин эмас. Бунинг учун берилган текисликни тасвирловчи икки тўғри чизиқнинг изларини топиб, уларнинг бир номлиларини ўзаро туташтириш керак.

64- шаклда ABC учбурчак билан берилган P текисликнинг P_H ва P_V изларини ясаш кўрсатилган. Шаклда учбурчакнинг AB ва BC томонларининг излари эпюрда тўғри чизиқ изларини топиш усули билан (13- параграф) топилган. Кўрсатилган чизиқларнинг горизонтал изларидан (m ва m_1 дан) ўтган тўғри чизиқ текисликнинг горизонтал изи P_H, чизиқларнинг фронтал изларидан (n' ва n'_1 дан) ўтган тўғри чизиқ текисликнинг фронтал изи P_V бўлади. Бундай мисолларни ишлашда шунга эътибор бериш керакки, текисликнинг



64- шакл



65- шакл

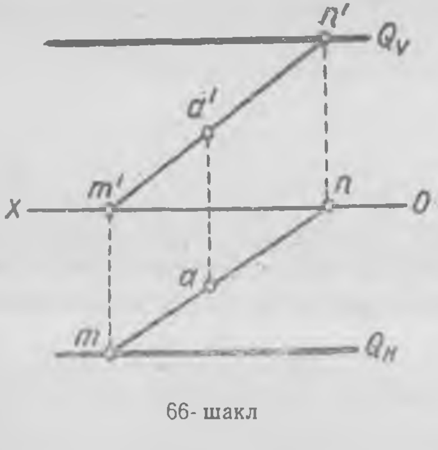
иккала изи P_H ва P_V ё OX ўқида бир P_X [нуқтада кесишуви ёкн ўзаро ва OX ўқига параллел бўлиши шарт.

Текисликнинг изларини ясашда, баъзан, унинг горизонталлари ва фронталларидан фойдаланиш қулай. 65- шаклда кесишувчи чизиқлар (ABC) билан берилган текисликнинг излари унинг горизонтали ($c'd'$; cd) ва фронтали (ae; $a'e'$) дан фойдаланиб ясалган. Текисликнинг горизонтал изи (P_H) фронталнинг горизонтал изи — m нуқтадан горизонталнинг горизонтал проекцияси — cd чизиққа параллел қилиб чизилади. Текисликнинг фронтал изи P_V горизонталнинг фронтал изи — n' нуқтадан фронталнинг фронтал проекцияси — $a'e'$ чизиққа параллел қилиб чизилади.

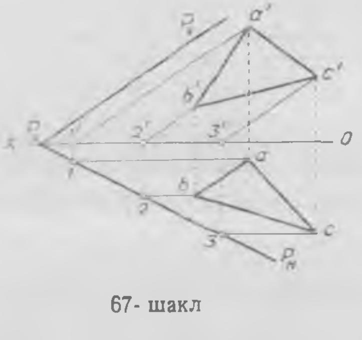
24- §. Текисликда ётган нуқталар

Агар нуқта фазода бирор текисликда ётган бўлса, бу нуқта орқали текисликда чексиз кўп тўғри чизиқ, шу жумладан, текисликнинг горизонтали ёки фронталини ўтказиш мумкин.

Шунинг учун, текисликнинг нуқтасини ясаш ҳамма вақт текисликда ётган тўғри чизиқдан бошланиши керак. Баъзан, текисликда ётган умумий вазиятдаги тўғри чизиқдан, кўп ҳолларда эса берилган текисликнинг горизонталлари ёки фронталларидан фойдаланиш қулай. 66- шаклда излари билан берилган профил проекцияловчи Q текисликда ётган A нуқтанинг берилган бир проекцияси бўйича унинг иккинчи проекциясини нуқтадан ўтган умумий вазиятдаги тўғри чизиқ ёрдамида топиш тасвирланган. Масалан, нуқтанинг фронтал проекцияси (a') берилган, нуқтининг горизонтал проекцияси (a) ни топиш керак бўлсин. Бунинг учун a' орқали ихтиёрий бир тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг Q_V билан кесишув нуқтасини n' билан, OX билан кесишув нуқтасини m' билан белгилаймиз. Маълумки (13- параграф), n' фазодаги текисликда A нуқта орқали ўтказилган ихтиёрий MN чизиқнинг фронтал изи ва унинг фронтал



66- шакл



67- шакл

проекциясидир, бу изнинг горизонтал проекцияси (n) проекциялар ўқида бўлади; m' нуқта эса ўша чизиқнинг горизонтал изининг фронтал проекциясидир, горизонтал изнинг горизонтал проекцияси (m) текисликнинг горизонтал изи (Q_H) да бўлади. Нуқтанинг изланган горизонтал проекцияси (a) MN чизиқнинг горизонтал проекцияси (mn) да бўлади.

67-шаклдаги мисолда излари билан берилган P текисликда ётган ABC учбурчакнинг эпюрда берилган бир проекцияси бўйича иккинчи проекциясини (масалан, фронтал проекцияси бўйича горизонтал проекциясини) текисликнинг фронталларидан фойдаланиб ясаш кўрсатилган. Бу мисолни учбурчакнинг учларидан ўтган текисликнинг горизонталларидан фойдаланиб ечса ҳам бўлади.

IV боб. ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ЎЗАРО ЖОЙЛАШУВИ. ТЕКИСЛИК БИЛАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

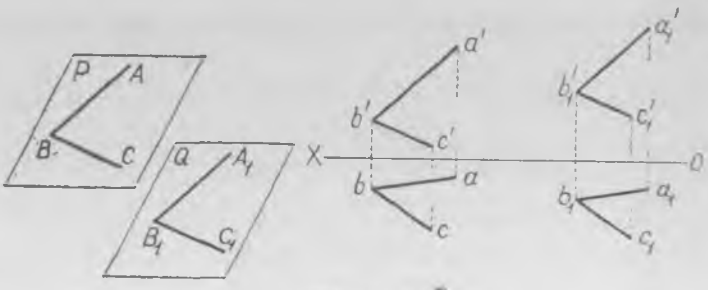
Фазода иккита текислик ё ўзаро параллел ёки кесишган вазиятда бўлиши мумкин.

Текислик билан тўғри чизиқ уч хил вазиятда: тўғри чизиқ текисликда ётган, тўғри чизиқ текисликка параллел ёки тўғри чизиқ текисликни кесувчи бўлиши мумкин. Текисликда ётган тўғри чизиқ ҳақидаги маълумотлар юқорида (21 ва 22-параграфларда) кўриб чиқилди. Шунинг учун бу бобда фақат текисликка параллел ва текисликни кесувчи тўғри чизиқлар ҳақидаги маълумотларгина берилади.

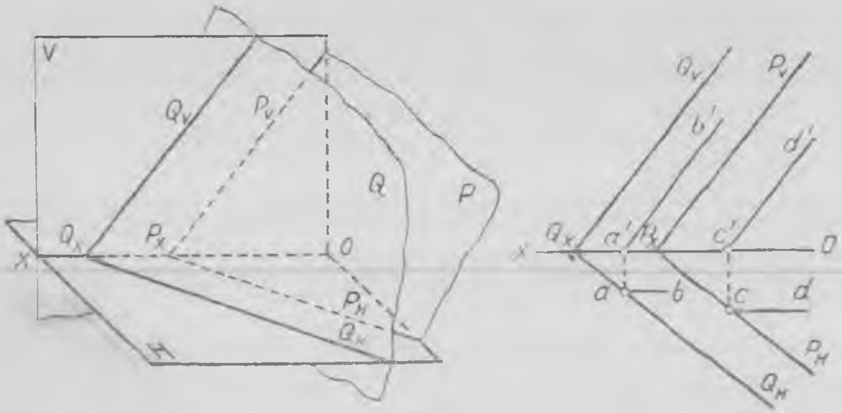
25- §. Параллел текисликлар

Бирор P текисликдаги кесишувчи икки AB ва BC тўғри чизиқ (68-шакл) иккинчи Q текисликдаги кесишувчи икки A_1B_1 ва B_1C_1 тўғри чизиққа мос равишда параллел бўлса, бу текисликлар ўзаро параллел бўлади.

Маълумки, бир-бирига параллел икки текислик учинчи текислик билан ўзаро параллел бўлган икки тўғри чизиқ бўйича кесишади.



68- шакл



69- шакл

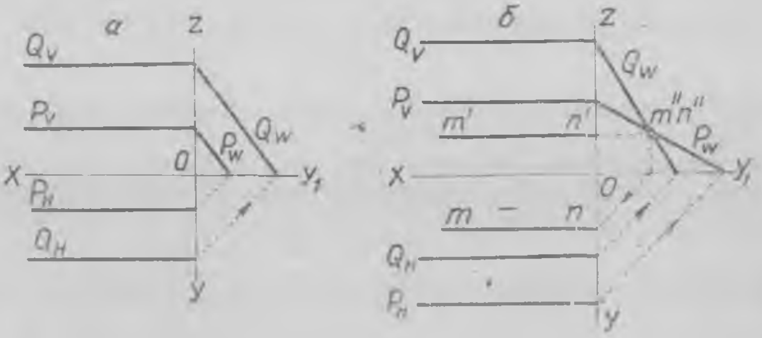
Бундан шундай хулоса келиб чиқадики, фазода ўзаро параллел бўлган текисликларнинг бир номли излари ҳам ўзаро параллел бўлади, яъни $P \parallel Q$ бўлса, $P_H \parallel Q_H$, $P_V \parallel Q_V$ ва $P_W \parallel Q_W$ бўлади (69-шакл). Аммо W текисликка перпендикуляр бўлмаган текисликларнинг ўзаро параллелликларини тасвирлаш учун уларнинг W текисликдаги изларини кўрсатишнинг ҳожати йўқ.

Маълумки, текисликнинг горизонтал изи унинг горизонталларига, фронтал изи эса фронталларига параллел бўлади; шунга кўра, эпюрда параллел текисликларнинг горизонтал ва фронталларининг бир номли проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлади. 69-шаклдаги эпюрда шундай параллел фронталлардан иккитаси (ab, $a'b'$ ва cd, $c'd'$) тасвирланган.

W текисликка перпендикуляр бўлган текисликларнинг ўзаро қандай муносабатда эканлигини уларнинг эпюрда берилган горизонтал ва фронтал изларидан аниқлаш қийин. Бундай текисликларнинг ўзаро қандай вазиятда эканлигини аниқлаш учун уларнинг профил изларидан фойдаланиш тавсия қилинади. Агар текисликларнинг профил излари ҳам ўзаро параллел бўлса, текисликлар фазода ўзаро параллел бўлади (70-шакл, а), акс ҳолда улар кесишади (70-шакл, *б*).

Эпюрда нуқталар ёки чизиқлар билан берилган текисликларнинг ўзаро параллел ёки параллел эмаслигини билиш учун ҳар қайси текисликда горизонтал ўтказиб кўриш керак. Агар ўтказилган горизонталларнинг горизонтал проекциялари параллел бўлмаса, текисликлар ҳам параллел бўлмайди. Агар горизонталларнинг горизонтал проекциялари параллел бўлганда ҳам, барибир, текисликларни параллел деб бўлмайди. Бундай ҳолда ҳар қайси текисликда фронтал ўтказиш керак; агар фронталларнинг фронтал проекциялари ҳам ўзаро параллел бўлса, текисликлар фазода бир-бирига параллел бўлади.

Турли масалаларни ечишда, кўпинча, берилган нуқта ор-



70- шакл

қали берилган текисликка параллел қилиб текислик ўтказишга тўғри келади. Бундай ясаш *асосий масала* дейилади.

1- мисол. Берилган B_1 нуқта орқали кесишувчи AB ва BC чизиқлар билан берилган P текисликка параллел Q текислик ўтказилсин (68- шакл).

Ечиш. B_1 нуқта орқали берилган AB ва BC чизиқларга мос равишда параллел A_1B_1 ва B_1C_1 чизиқлар ўтказамиз (эпюрда $a_1'b_1' \parallel a'b'$; $b_1'c_1' \parallel b'c'$ ва $a_1b_1 \parallel ab$; $b_1c_1 \parallel bc$). Кесишувчи A_1B_1 ва B_1C_1 чизиқлар изланган Q текисликни ифодалайди.

2- мисол. Эпюрда Q текисликнинг излари (Q_V, Q_H) ва D нуқтанинг проекциялари (d', d) берилган (69- шаклда, ўнгда). D нуқта орқали Q текисликка параллел қилиб ўтказилган P текисликнинг излари (P_V, P_H) ясалсин.

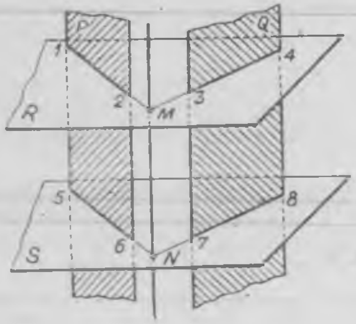
Ечиш. D нуқта орқали олдин изланган текисликнинг фронталини берилган текисликнинг фронтал изига параллел қилиб ўтказамиз ($d'c' \parallel Q_V$; $dc \parallel OX$). Кейин ўтказилган DC фронталнинг горизонтал изи c нуқтани топиб, бу нуқта орқали P_H изни Q_H изга параллел қилиб ўтказамиз ва OX ўқида келиб чиққан P_X нуқта орқали P_V изни Q_V изга параллел қилиб ўтказамиз. Ҳосил бўлган P_H, P_X, P_V берилган D нуқтадан ўтган ва Q текисликка параллел бўлган P текисликнинг изларидир.

Бу масалани ечишда изланган P текисликнинг фронталидан эмас, балки горизонталидан ёки D нуқтадан ўтган бирорта ихтиёрий йўналишдаги тўғри чизиқдан фойдаланса ҳам бўлар эди. Ихтиёрий йўналишдаги тўғри чизиқдан фойдаланиш учун олдин берилган текисликда бирорта (масалан, 62 ёки 66- шаклдаги $m'n'$, mn га ўхшаш) тўғри чизиқ олинади; кейин берилган нуқта орқали бу олинган чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказилиб, унинг горизонтал изидан изланган текисликнинг горизонтал изи, фронтал изидан эса изланган текисликнинг фронтал изи ўтказилади.

26- §. Икки текисликнинг ўзаро кесишув чизиғини ясаш

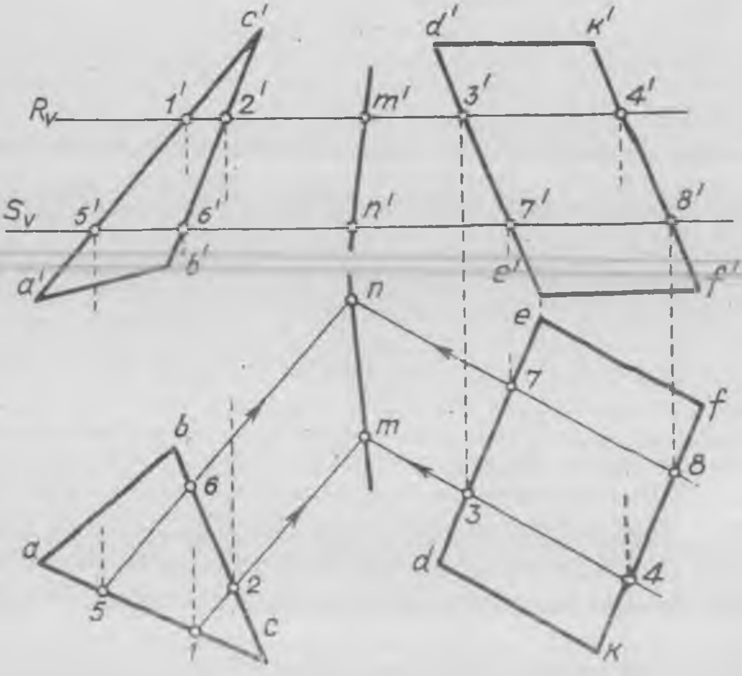
Икки текислик тўғри чизиқ бўйича кесишиб, икки ёқли бурчаклар ҳосил қилади. Текисликларнинг кесишув чизиғи икки ёқли бурчакларнинг қирраси дейилади.

Текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғини ясаш учун чизиқнинг икки нуқтасини ёки бир нуқтасини ва йўналишини топиш керак.



71- шакл

1. Умумий усул — ёрдамчи кесувчи текисликлар усули. Бу усулни тушуниб олиш учун 71- шаклдаги яққол чизмани диққат билан кўздан кечириш керак. Шаклдаги P ва Q текисликларнинг кесишув чизиғини ясаш учун уларни ёрдамчи, масалан, горизонтал R текислик билан кесамиз, R текислик берилган текисликларни *1—2* ва *3—4* горизонталлар бўйича кесади. Бу горизонталлар ўзаро M нуқтада кесишиб, изланган чизиққа оид, демак, текисликлар



72- шакл

учун умумий бўлган бир нуқтани беради. Иккинчи N нуқтани топиш учун иккинчи горизонтал текислик (S) ўтказилган. Бу текислик берилган текисликлар билан $5—6$ ва $7—8$ горизонталлар бўйича кесишиб, N нуктани беради. MN берилган P ва Q текисликларнинг кесишув чизиғидир.

Ёрдамчи кесувчи текисликлар сифатида горизонтал текисликлар эмас, балки фронтал текисликлар олинса ҳам бўлади. 72- шаклда бу усул билан ABC учбурчак ва $DEFK$ параллелограмм билан берилган текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғи проекцияларини ясаш кўрсатилган.

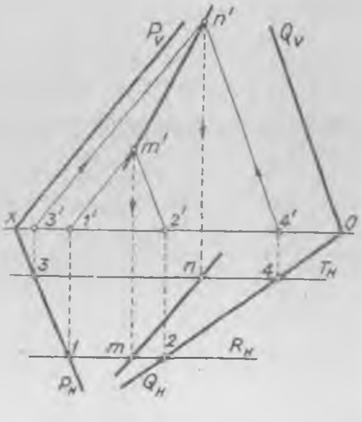
Умумий нуқталарни топиш учун, аввало, иккала текислик ёрдамчи горизонтал R текислик билан (изи R_V) кесилган; берилган чизиқларнинг фронтал проекцияларининг R_V билан кесишган $1'$, $2'$, $3'$ ва $4'$ нуқталари белгилаб олинган; кейин ўша нуқталарнинг горизонтал проекциялари (1, 2, 3, 4) топилган. Бу нуқталарни туташтирувчи $1—2$ ва $3—4$ чизиқлар берилган текисликларни R текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган горизонталларнинг горизонтал проекцияларидир; буларнинг кесишув нуқтаси (m) изланган умумий нуқталардан бирининг горизонтал проекцияси бўлади, фронтал проекцияси (m') ёрдамчи текисликнинг изи (R_V) да ётади. Худди шу тартибда, ёрдамчи S (изи S_V) текислик воситаси билан иккинчи умумий нуқтанинг проекциялари (n, n') топилади.

Топилган нуқталарнинг бир номли проекцияларини туташтирувчи mn ва $m'n'$ чизиқлар ABC учбурчак ва $DEFK$ параллелограмм билан ифодаланган текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғи проекцияларидир.

Берилган текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғига оид умумий нуқталарни топиш учун ёрдамчи текисликларни исталган қулай жойлардан ўтказиш мумкин.

Агар кесишувчи текисликлар ўз излари билан берилган ва уларнинг бир номли излари эпюр чегарасида кесишмаган бўлса, бундай текисликларнинг кесишув чизиғига оид умумий нуқталарнинг проекцияларини ҳам ёрдамчи горизонтал ёки фронтал текисликлар воситаси билан топиш қулай.

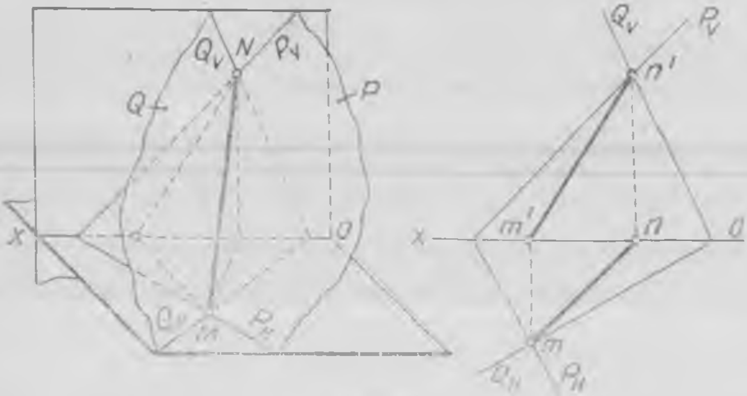
73- шаклда бир номли излари эпюр чегарасида кесишмаган P ва Q текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғига оид умумий нуқталарнинг проекцияларини (m, m' ва n, n' ни) ёрдамчи фронтал текисликлар (излари R_H ва T_H) воситаси билан топиш кўрсатилган.



73- шакл

2. Излари билан берил-

ган текисликларнинг кесишув чизиғини ясаш. Кесишувчи текисликлар ўз излари билан берилган ва уларнинг бир номли излари эпюр чегарасида кесишган ҳолларда ёрдамчи кесувчи текисликлар сифатида H, V текисликлардан фойдаланиш мумкин; бундай бўлганда, кесишган ёрдамчи чизиқлар вазифасини текисликларнинг P_H, P_V ва Q_H, Q_V излари ўтайди. Бир номли изларниниг ўзаро кесишув M ва N нуқталаридан ўтган тўғри чизиқ текисликларнинг кесишув чизиғи бўлади (74- шакл).



74- шакл

Бу ерда шуни ҳам эсда тутиш керакки, текисликнинг излари чексиз чизиқлардир, уларни учрашув нуқтасидан иккала томонга давом эттириш мумкин. Шунинг учун текисликларнинг бир номли излари OX ўқининг бир томонида кесишмаса, изларнинг кесишув нуқтасини бу изларни бошқа томонга давом эттириб топиш мумкин. 75- шаклда берилган текисликларнинг горизонтал излари m, m' нуқтада кесишади, фронтал излари OX ўқининг юқори томонида, биринчи чоракда кесишмайди; шунинг учун уларни OX ўқининг паст томонига давом эттирамиз; улар тўртинчи чоракда n', n нуқтада кесишади. Топилган нуқталарнинг бир номли проекциялари ўзаро туташтирилса, берилган P ва Q текисликларнинг кесишув чизиғи проекциялари (mn, $m'n'$) келиб чиқади.

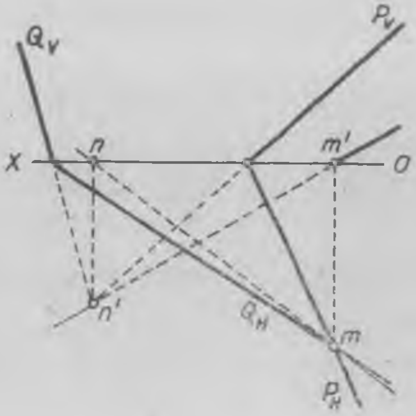
Кесишувчи текисликларнинг фазодаги вазиятларига қараб, хусусий ҳолларда уларнинг кесишув чизиқларини ясаш осонлашади. Комплекс масалаларни ечишда фойдаланиш учун бу хусусий ҳолларни пухта билиш керак.

1. Проекция текисликларидан бирига проекцияловчи бўлган текисликларнинг кесишув чизиғи ҳам проекцияловчи тўғри чизиқ бўлади (76- шакл, *а* да $n'b'$, nb; 76- шакл, *б* да k, k' нуқтадан ўтган OX га параллел бўлган тўғри чизиқ; k, k' нуқта ёрдамчи фронтал проекцияловчи R текислик воситаси билан топилган).

2. Турли проекциялар текислигига проекцияловчи бўлган текисликлар кесишув чизиғининг проекциялари улар перпендикуляр бўлан текисликдаги изларига тушади (76- шакл, *в* да *mn*, *m'n'*).

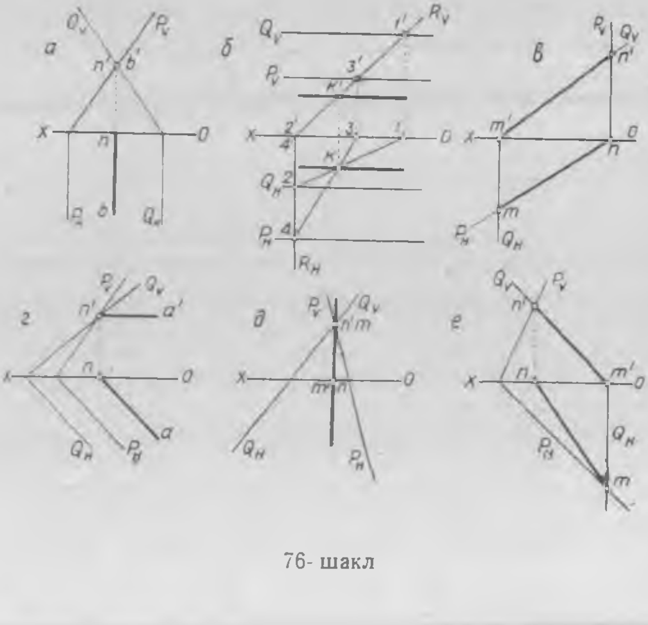
3. Бир номли икки изи параллел бўлган текисликлар шу изларга параллел бош чизиқ (горизонтал ёки фронтал) бўйича кесишади (76- шакл, *г* да *n'a* *na*).

4. Эпюрда излари бир тўғри чизиқда ётган текисликлар профил тўғри чизиқ бўйича кесишади (76- шакл, *д* да *mn*, *m'n'*).



75- шакл

5. Умумий вазиятдаги текислик билан проекцияловчи текислик кесишганда кесишув чизиғининг бир проекцияси проекцияловчи текисликнинг изига тушади (76- шакл, *е* да *m'n'*). Бу ҳолдан фойдаланиб, баъзан умумий нуқталарни топиш мумкин (76- шакл, *б*).



76- шакл

27- §. Текисликка параллел тўғри чизиқлар

Нуқталарининг ҳаммаси текисликдан баравар узоқликда турган ёки текисликда ётган бирор тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ ўша текисликка параллел бўлади.

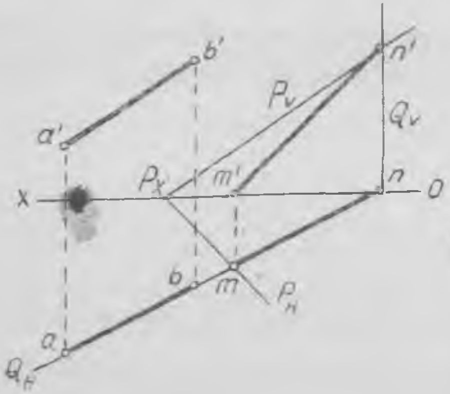
Бу ҳолдан фойдаланиб, эпюрда тубандаги конструктив масалаларни еча билиш керак:

а) тўғри чизиқ ва текислик берилган, уларнинг ўзаро параллел ёки параллел эмаслиги аниқлансин;

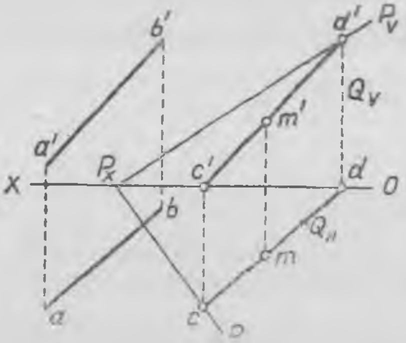
б) тўғри чизиқ берилган, унга (берилган нуқтадан ёки ихтиёрий) параллел текислик ўтказилсин;

в) текислик берилган, унга (берилган нуқтадан ёки ихтиёрий) параллел тўғри чизиқ ўтказилсин;

г) икки тўғри чизиқ берилган, уларнинг биридан шундай текислик ўтказилсинки, у текислик иккинчи тўғри чизиққа параллел бўлсин.



77- шакл



78- шакл

1. 77- шаклда *AB* чизиқ билан *P* текисликнинг ўзаро параллел ёки параллел эмаслигини аниқлаш усули кўрсатилган. Бунинг учун *AB* чизиқ орқали бирор ёрдамчи, масалан, горизонтал проекцияловчи *Q* текислик ўтказилади; кейин *P* билан *Q* текисликларнинг кесишув чизиғи (*mn*, *m n*) ясалади. Агар бу чизиқ *AB* чизиққа параллел бўлса, *AB* чизиқ берилган *P* текисликка параллел бўлади.

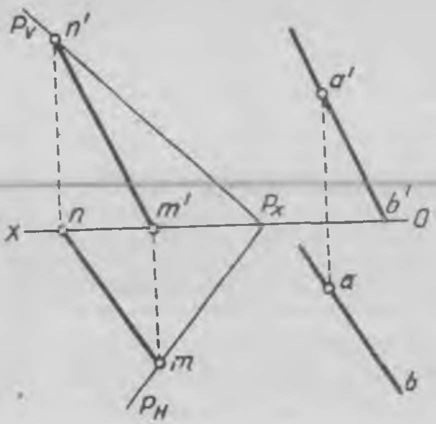
Шаклда *AB* чизиқ *P* текисликка параллел эмас, чунки $a'b' \nparallel m'n'$ демак, улар кесишган.

2. 78- шаклда берилган (m, m') нуқтадан берилган (ab, $a'b'$) тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказилган текисликнинг изларини ясаш (P_H, P_V) кўрсатилган. Бунинг учун, аввало берилган нуқтадан берилган чизиққа параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз (cd, $c'd'$). Маълумки, бир тўғри чизиқдан исталганча текислик ўтказиш

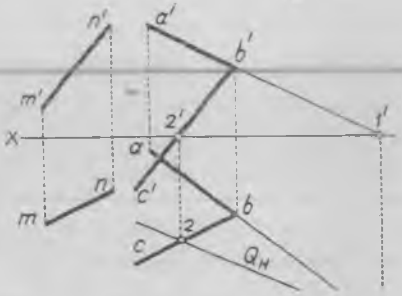
мумкин. Шунинг учун бу (cd, $c'd'$) чизиқдан ўтган ҳар қандай, масалан, P текислик берилган AB чизиққа параллел бўлади.

3. 79-шаклда берилган (a, a') нуқтадан берилган (P_H, P_V) текисликка параллел қилиб тўғри чизиқ (ab, $a'b'$) ўтказиш кўрсатилган. Бунинг учун берилган текисликда бирорта ихтиёрий тўғри чизиқ (масалан, mn, $m'n'$) олинади; кейин берилган нуқтадан шу чизиққа параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказилади (шаклда $ab \parallel mn$; $a'b' \parallel m'n'$). A нуқта орқали P текисликка параллел чексиз кўп тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Агар берилган A нуқтадан фазода текисликнинг изларидан бирига параллел қилиб горизонтал ёки фронтал ўтказилса, уларнинг ҳар бири текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлади.



79- шакл



80- шакл

4. 80-шаклда AB чизиқ орқали берилган MN чизиққа параллел қилиб текислик ўтказиш кўрсатилган. Бунинг учун AB чизиқнинг бирор иктиёрий, масалан, B нуқтасидан MN чизиққа параллел чизиқ ўтказилади ($bc \parallel mn$; $b'c' \parallel m'n'$).

Ҳосил бўлган кесишувчи ABC чизиқлар орқали тасвирланган Q текислик MN чизиққа параллел текисликдир. Шаклда бу текисликнинг горизонтал изи (Q_H) ҳам кўрсатилган.

28- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтасини ясаш

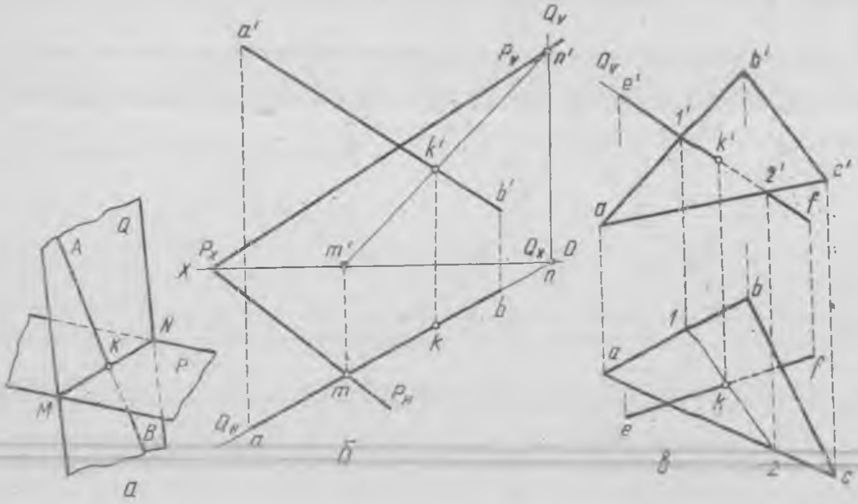
Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув (учрашув) нуқтаси проекцияларини эпюрда ясаш чизма геометриянинг асосий масалаларидан биридир. Кўпгина масалаларни ечиш усуллари шунга асосланган. Шунинг учун, текислик ва тўғри чизиқ ҳар қандай усул билан ва ҳар қандай вазиятда берилганда ҳам бу масалани тез ҳамда аниқ еча билиш керак.

Бунда асосан учта ҳол бўлади: 1) текислик ҳам, тўғри чизиқ ҳам умумий вазиятда берилган; 2) текислик умумий вазиятда берилган, тўғри чизиқ эса проекцияловчи; 3) берилган текислик проекцияловчи, тўғри чизиқ эса ихтиёрий вазиятда берилиши мумкин.

Учала ҳолда ҳам эпюрда берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтаси проекцияларини тубанда келтирилган умумий усул билан топиш мумкин.

Аммо бу умумий усулдан асосан биринчи ҳолда (баъзан иккинчи ҳолда ҳам) фойдаланилади. Иккинчи ва учинчи ҳолларда эса тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтаси проекциялари берилган тўғри чизиқ ёки текисликнинг хоссаларидан фойдаланиб топилса мақсадга мувофиқ бўлади.

Бу умумий усул ёрдамчи текислик усули дейилади ва уни тубандагича тушуниш керак.



81- шакл

Агар бирорта P текислик ва AB тўғри чизиқ берилган бўлса (81- шакл, *а*), ҳамма вақт AB чизиқ орқали ёрдамчи Q текислик ўтказиш ва P текислик билан Q текисликнинг кесишув MN чизиғи ясаш мумкин. MN чизиқ билан AB чизиқнинг кесишув нуқтаси (K) берилган P текислик билан AB чизиқнинг кесишув нуқтаси бўлади.

Эпюрда ясашни осонлаштириш учун ёрдамчи Q текислик сифатида проекцияловчи текислик олинади.

Шундай қилиб, эпюрда тўри чизиқ билан текислик кесишган нуқтанинг проекцияларини умумий усул билан ясаш учун:

1) берилган тўғри чизиқ орқали ёрдамчи (проекцияловчи) текислик ўтказиш;

2) ёрдамчи текислик билан берилган текисликнинг кесишув чизиғини ясаш;

3) ясалган ёрдамчи чизиқ билан берилган тўғри чизиқнинг кесишув нуқтасини топиш керак.

1-ҳол. 81-шакл, *б* да P_H, P_V излари орқали берилган текислик билан (ab, $a'b'$) тўғри чизиқнинг кесишув нуқтаси проекцияларини топиш кўрсатилган. Бунинг учун берилган тўғри чизиқ орқали горизонтал проекцияловчи текислик (Q_H, Q_V) ўтказилган ва текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғи (mn, $m'n'$) ясалган. Ясалган ёрдамчи чизиқнинг фронтал проекцияси ($m'n'$) билан берилган чизиқнинг фронтал проекцияси ($a'b'$) кесишиб, k' нуқтани ҳосил қилади, кейин бу нуқта бўйича k нуқта топилади; k', k' берилган AB чизиқ билан P текислик кесишган нуқталарнинг проекцияларидир.

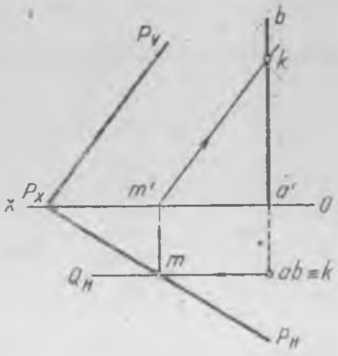
81-шакл, *в* да ABC учбурчаклик орқали берилган текислик билан EF тўғри чизиқнинг кесишув нуқтаси проекцияларини топиш кўрсатилган. Аввало, берилган EF тўғри чизиқ орқали фронтал проекцияловчи Q текислик ўтказилган. Эпюрда ёрдамчи текисликнинг фақат фронтал изи (Q_V) кўрсатилган; горизонтал изи керак бўлмагани учун кўрсатилмаган, уни OX проекциялар ўқига перпендикуляр деб фараз қилиш керак. Амалда Q_V изни ҳам кўрсатмаса (ёлғиз у кўзда тутилса) бўлади, чунки у тўғри чизиқнинг фронтал проекциясига тўғри келади. Кейин бу ёрдамчи текислик билан берилган текисликнинг кесишув чизиғи ($1' — 2'$, $1 — 2$) ясалган. Чизиқнинг горизонтал $1 — 2$ проекцияси билан ef кесишиб, k нуқтани ҳосил қилган, сўнгра $e'f'$ да k' топилган.

Топилган (k, k') нуқталар ABC текислик билан EF чизиқнинг кесишув нуқтаси проекцияларидир.

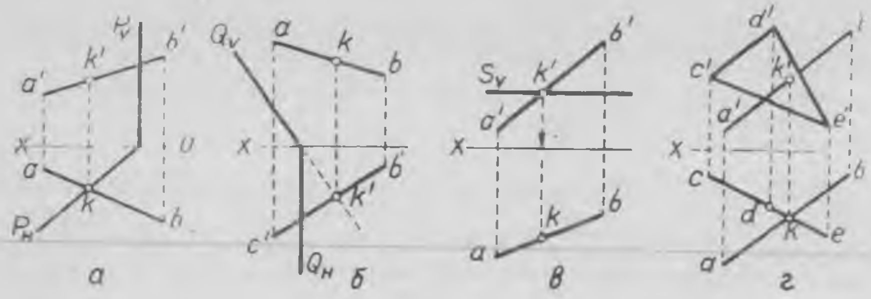
2-ҳол. Агар берилган тўғри чизиқ проекцияловчи бўлса, бундай тўғри чизиқ билан ҳар қандай текисликнинг кесишув нуқтаси проекцияларидан биттаси тўғри чизиқнинг нуқта кўринишидаги проекциясида бўлади. Кесишув нуқтасининг иккинчи проекцияси берилган текисликнинг шу кесишув нуқтаси орқали ўтказилган горизонтал ёки фронтал ёки бўлмаса, бирорта ихтиёрий тўғри чизиқ воситасида аниқланиши мумкин.

82-шаклда горизонтал проекцияловчи AB тўғри чизиқ билан умумий вазиятдаги P текисликнинг кесишув нуқтаси проекцияларини топиш кўрсатилган. Изланган нуқта горизонтал проекцияси k тўғри чизиқнинг горизонтал проекцияси k' да бўлади. k' нуқта текисликнинг фронтали mk, $m'k'$ ёрдамида топилган.

Бу масала умумий (ёрдамчи текис-



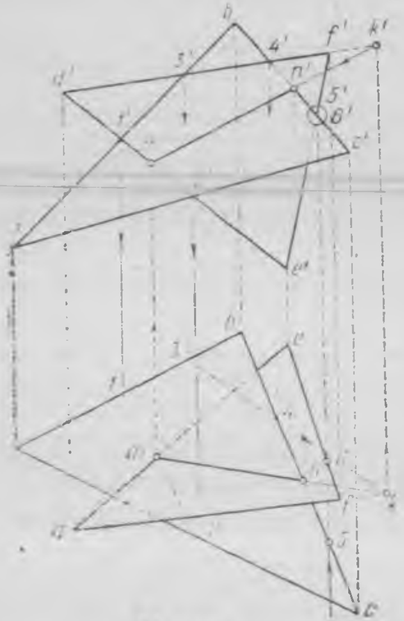
82- шакл



83- шакл

аик) усули билан ечилган деб қаралса ҳам бўлади. У ҳолда берилгн AB чизиқ орқали ёрдамчи фронтал Q текислик ўтказилган деб фараз қилайлик (унинг изи Q_H). Ёрдамчи Q текислик билан берилган P текислик фронтал чизиқ (m_R, $m'_R{}'$) бўйича кесишиб изланган k, k' нуқтани беради.

3-ҳол. Агар берилган текислик проекцияловчи бўлса, бундай текислик билан тўғри чизиқнинг кесишув нуқтаси проекцияларини эпюрда топиш жуда осонлашади. Бу ҳол 83-шаклда кўрсатилган. 93- шакл, *а* да горизонтал проекцияловчи P текислик билан AB чизиқ, 83- шакл, *б* да фронтал проекцияловчи Q текислик билан AB чизиқ, 83- шакл, *в* да горизонтал (H га параллел), S текислик билан AB чизиқ ва 83- шакл, *г* да CDE учбурчак орқали берилган горизонтал проекцияловчи текислик билан AB чизиқ кесишган. Проекцияловчи текисликлар билан тўғри чизиқларнинг кесишув нуқталарининг проекциялари (k, k') проекцияловчи текисликларнинг хоссаларидан (20-параграф) фойдаланиб топилган.



84- шакл

Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтаси проекцияларини топишдан (81- шакл, *в*) фойдаланиб, текис шакллар билан берилган икки текисликнинг ўзаро кесишув чизиғи проекцияларини ҳам ясаш мумкин.

84- шаклда икки ABC ва DEF учбурчакларнинг кесишув чизиғи проекцияларини ясаш ва уларнинг кўринган-кўринмаганлигини конкурент нуқталар усули билан аниқлаш кўрсатилган.

Бу масалани ечиш учбурчаклардан бирининг исталган икки томонини (тўғри чизиқларни) иккинчи учбурчак текислиги билан учрашган нуқталарини топишга келтирилади. Топилган бу нуқталар учбурчаклар текисликларининг кесишув чизиғини беради. Шаклда *DEF* учбурчакнинг *DE* ва *DF* томонлари билан *ABC* учбурчак текислигининг учрашган нуқталари топилган. *DE* чизиқ билан *ABC* учбурчакнинг кесишув нуқтаси проекциялари (*m*, *m'*) ни топиш учун *DE* орқали ёрдамчи фронтал проекцияловчи *Q* текислик ўтказилган. (Q_V фронтал из *DE* чизиғининг фронтал проекцияси *d'e'* да бўлади; у шаклда кўрсатилмаган). Ёрдамчи *Q* текислик билан *ABC* учбурчак, тўғри чизиқ (*1' — 2'*, *1 — 2*) бўйича кесишиб, изланган нуқтанинг проекциялари (*m*, *m'*) ни беради. *DF* чизиқ билан *ABC* учбурчак текислигининг кесишув нуқтаси проекциялари (*k*, *k'*) ҳам худди шу йўл билан топилган. *К* нуқта бизнинг мисолда *ABC* учбурчак контуридан ташқарида келиб чиқади. Бу эса иккинчи учбурчакнинг *DF* томони биринчи *ABC* учбурчак билан тўғридан-тўғри кесишмайди, балки унинг текислиги билан кесишади демакдир. Топилган нуқталарнинг бир номли проекциялари туташтирилса, учбурчаклар текисликларининг кесишув чизиғининг проекциялари *m'k'*, *mk* ҳосил бўлади. Бу *m'k'*, *mk* проекциялар *b'c'*, *bc* билан тегишли *n'*, *n* нуқталарда кесишади. Ҳосил бўлган *n'*, *n* нуқталар биринчи учбурчакнинг *BC* томони билан иккинчи *DEF* учбурчакнинг кесишув нуқтаси проекцияларидир. Шундай қилиб, учбурчаклар бизнинг мисолда қисман кесишган экан.

Учбурчакларнинг бир-бирига нисбатан кўринган-кўринмаганлигини аниқлаш учун учбурчакнинг бир томонини иккинчи учбурчакка нисбатан кўринган-кўринмаган қисмларга ажратилса кифоя. Бинобарин, шуни ҳам эсда тутиш керакки, геометрик элементларнинг кўринган-кўринмаганлиги ҳар қайси проекцияда алоҳида аниқланади.

Шаклдаги фронтал проекциялар *ABC* учбурчакнинг *BC* томонини *DEF* учбурчакка нисбатан кўринар-кўринмаслиги аниқланган. Бунинг учун *BC* ва *EF* томонлар фронтал проекцияларининг кесишув нуқтаси орқали *V* текисликка перпендикуляр кўриш нури ўтказилган. Горизонтал проекциядан кўриниб турибдики, кўриш нури олдин 5-нуқтада *BC* чизиқни, кейин 6-нуқтада *EF* чизиқни учратади. Демак, *BC* чизиқнинг *NC* қисми фронтал проекцияда кўринади.

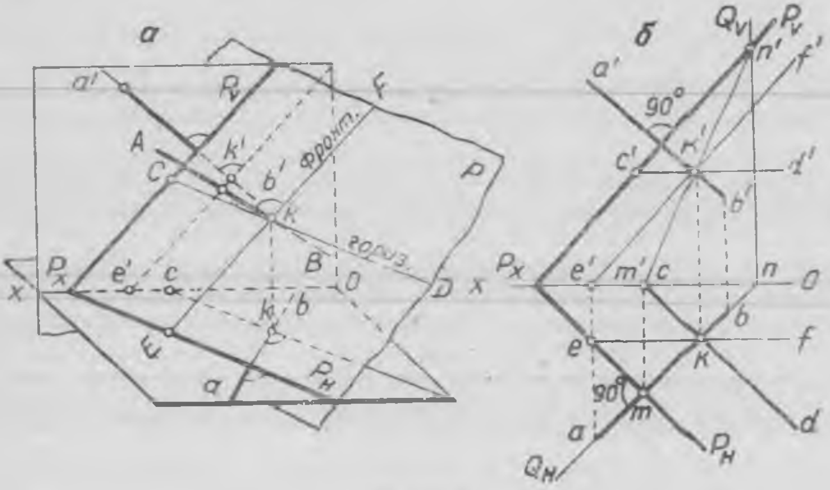
Горизонтал проекцияда кўринар-кўринмаслик шу сингари ясаш билан аниқланган. Фақат бу гал кўриш нури *H* текисликка перпендикуляр олинган (бу нур чизмада кўрсатилмаган).

29- §. Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ проекцияларини ясаш

Текисликни кесувчи тўғри чизиқ хусусий ҳолда текисликка перпендикуляр бўлиши мумкин.

Стереометриядан маълумки, берилган тўғри чизиқ текис-

ликда ётган ва берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтасидан ўтадиган ҳеч бўлмаганда икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у тўғри чизиқ текисликка ҳам перпендикуляр бўлади. Перпендикуляр билан текисликнинг кесишув нуқтаси *перпендикулярнинг асоси* дейилади.



85- шакл

Берилган *AB* тўғри чизиқ *P* текисликка перпендикуляр ва у билан *K* нуқтада кесишган деб фараз қилайлик (85- шакл, *а*). *K* нуқта орқали *P* текисликда ётган горизонтал *CD* ва фронтал *EF* ўтказамиз. Юқорида айтилганига кўра, берилган *AB* чизиқ *CD* чизиққа ҳам, *EF* чизиққа ҳам перяпендикуляр бўлади. Маълумки, *CD* горизонтал *H* текисликка параллел; шунинг учун *CD* билан *AB* орасидаги тўғри бурчакнинг горизонтал проекцияси ҳам тўғри бурчак бўлади (16-параграфдаги 2-пунктга мувофиқ).

Худди шунга ўхшаш, *AB* билан *EF* фронтал орасидаги тўғри бурчакнинг фронтал проекцияси ҳам тўғри бурчак бўлади.

Биламизки, горизонталнинг горизонтал проекцияси текисликнинг горизонтал изига фронталнинг фронтал проекцияси текисликнинг фронтал изига параллел бўлади. Демак, фазода текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг горизонтал проекцияси эпюрда ўша текисликнинг горизонтал изига ёки горизонталларининг горизонтал проекцияларига перпендикуляр, тўғри чизиқнинг фронтал проекцияси текисликнинг фронтал изига ёки фронталларининг фронтал проекцияларига перпендикуляр бўлади.

85- шакл, *б* да фазода ўзаро перпендикуляр бўлган *AB* чизиқ билан *P* текисликнинг эпюри кўрсатилган. Шаклда $ab \perp P_H$; $a'b' \perp P_V$; перпендикуляр асосининг проекциялари (k', k) тўғри чизиқ

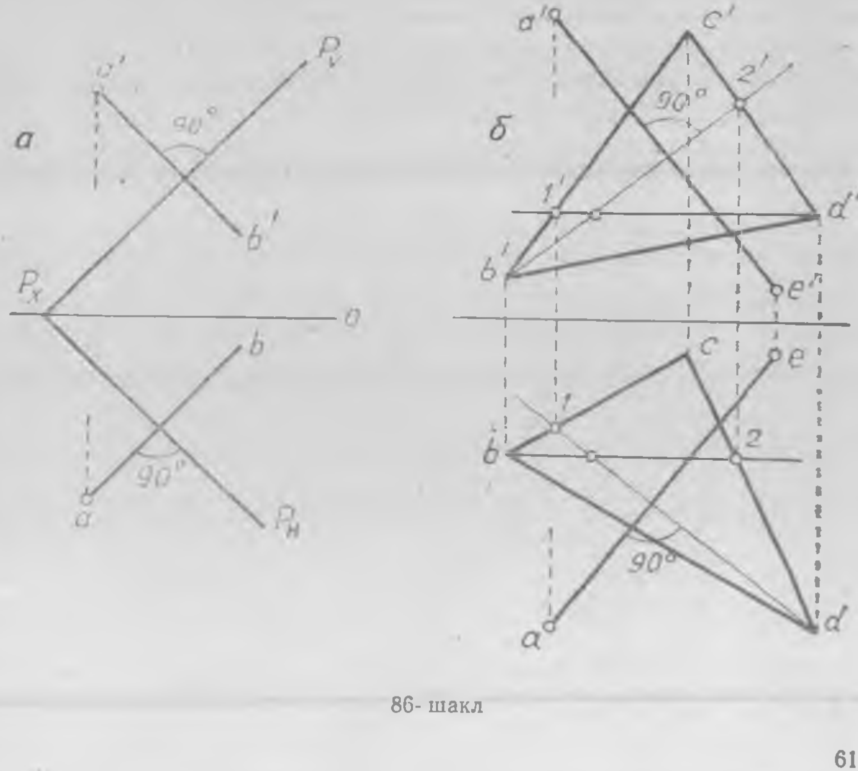
билан текисликнинг кесишув нуқтасини топиш усули билан (28- параграф) топилган. Эпюрда перпендикулярнинг асосидан ўтган ва P текисликда ётган горизонтал ҳамда фронтал чизиқларнинг проекциялари ($c'd'$, cd,; ef, $e'f'$) ҳам тасвирланган.

Метрик масалаларни ечишда ёки берилган элементлардан маълум масофада турган нуқта, тўғри чизиқ ва текисликларни ясашда перпендикулярдан фойдаланишга тўғри келади. Шунинг учун текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ проекцияларининг юқорида исбот қилинган хоссаларидан фойдаланиб, тубандаги асосий масалаларни эпюрда еча билиш керак:

1. Текисликдан четда турган нуқтадан текисликка перпендикуляр туширилсин.

86- шакл, *а* да A нуқтадан излари билан берилган. P текисликка перпендикуляр туширилган ($ab \perp P_H$; $a'b' \perp P_V$); $a'b'$ ва ab лар перпендикулярнинг проекцияларидир. Агар перпендикулярнинг асосини топиш зарур бўлса, 28- параграфда баён қилинган усулдан фойдаланиб, перпендикуляр билан текисликнинг кесишув нуқтасини ясаш керак.

86- шакл, *б* да A нуқтадан BCD учбурчак билан тасвирланган текисликка перпендикуляр тушириш кўрсатилган. Перпендикуляр тушириш учун, аввало, текисликда $D1$ горизонтал ва $B2$ фронтал ўтказилган, кейин A нуқтадан перпендикуляр туширилган ва у их-

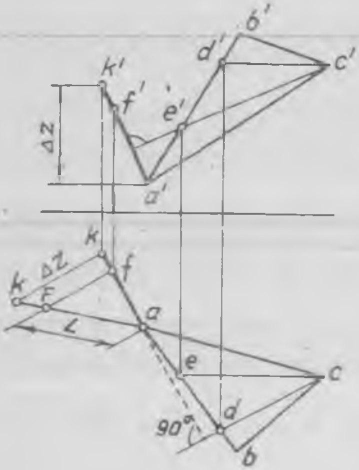


86- шакл

тиёрий E нуқта билан чегараланган ($ae \perp d1$; $a'e' \perp b'2'$); AE изланган перпендикулярдир.

Перпендикуляр асосининг проекциялари бу ерда ҳам кўрсатилмаган. У 81- шаклдаги усул билан топилади.

2. Берилган текисликда ётган нуқтадан шу текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказилсин.

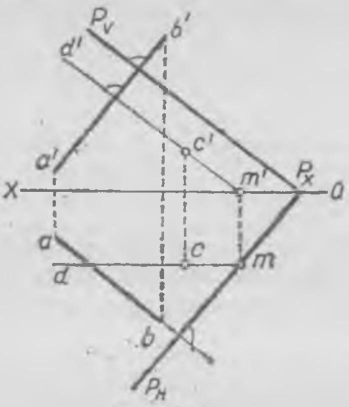


87- шакл

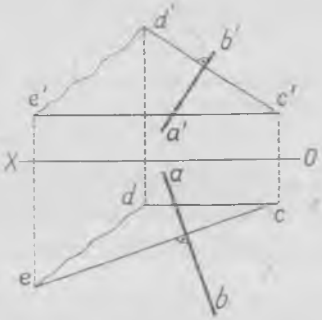
87- шаклда ABC учбурчакнинг A учидан узунлиги L мм бўлган перпендикуляр кўтариш кўрсатилган. Аввало, текисликда горизонтал ($c'd'$, cd) ва фронтал (ce, $c'e'$) ўтказилади. Кейин A нуқтанинг горизонтал проекциясидан горизонталнинг горизонтал проекциясига перпендикуляр, фронтал проекциясидан фронталнинг фронтал проекциясига перпендикуляр кўтарилган ва унда ихтиёрий K нуқта олинган (эпюрда $ak \perp cd$; $a'k' \perp c'e'$). Перпендикулярда ихтиёрий олинган AK кесманинг ҳақиқий узунлиги (11- параграфдаги усул билан) ясалган ва унда $aF = L$ мм ли кесма қўйилган. Пировардида F нуқтанинг горизонтал проекцияси (f), кейин фронтал проекцияси (f') топилган. Натижада келиб чиққан af ва $a'f'$ кесмалар A нуқтадан кўтарилган ва узунлиги L мм бўлган перпендикулярнинг проекцияларидир.

2. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик ўтказилсин. Бу масала биринчи масаланинг тескарисидир.

88- шаклда C нуқта орқали берилган AB чизиққа перпендикуляр текислик ўтказиш кўрсатилган. Олдин C нуқта орқали AB



88- шакл



89- шакл

чизиққа перпендикуляр қилиб, изланган текисликнинг фронтали (CD) ўтказилган (шаклда $cd \parallel OX$; $c'd' \perp a'b'$). Кейин ўтказилган фронталнинг горизонтал изи (m) дан берилган чизиқнинг горизонтал проекциясига перпендикуляр қилиб, текисликнинг горизонтал изи (P_H) ўтказилган (шаклда $P_H \perp ab$), сўнгра бу изнинг OX билан кесишув нуқтаси (P_X) дан берилган чизиқнинг фронтал проекциясига перпендикуляр қилиб, текисликнинг фронтал изи (P_V) ўтказилган (эпюрда $P_V \perp a'b'$). Шундай қилиб, P_H ва P_V лар изланган текисликнинг изларидир.

Юқоридаги масалани ечиш учун текисликнинг излари ясалмаса ҳам бўлади. 89-шаклда берилган (c', c) нуқтадан берилган ($a'b'$, ab) чизиққа перпендикуляр қилиб ўтказилган P текислик ўзининг шу (c', c) нуқтадан ўтган фронтал ($c'd'$, cd) ва горизонтал ($c'e'$, ce) чизиқлари билан тасвирланган.

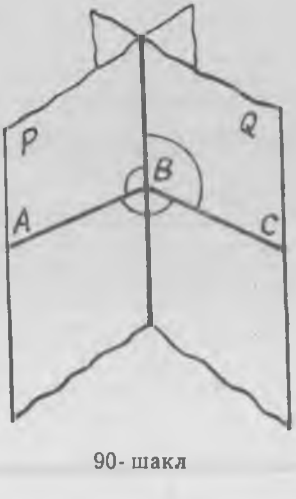
30-§. Ўзаро перпендикуляр текисликлар

Агар икки текислик бир-бири билан кесишганда икки ёқли тўғри бурчаклар ҳосил қилса, бундай текисликлар *ўзаро перпендикуляр текисликлар* дейилади.

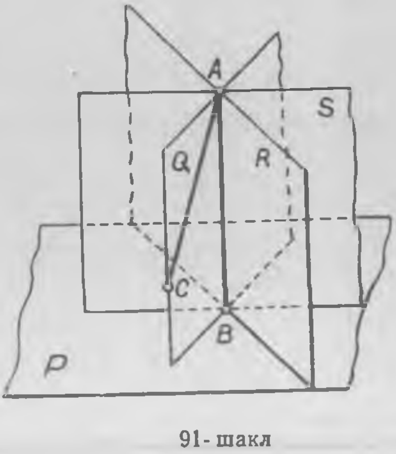
Агар ўзаро перпендикуляр текисликлар умумий вазиятдаги текисликлар бўлса, эпюрда уларни ясаш маълум даражада қийин бўлади, чунки бундай текисликлар эпюрда муайян эмас, шунинг учун уларни бевосита (ички) белгилари асосида, қўшимча ясашлар йўли билан билишга ёки тасвирлашга тўғри келади.

Стереометриядан маълумки, иккита P ва Q текислик фазода ўзаро перпендикуляр бўлса, улар ҳар бири иккинчисига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқдан ўтади (90-шакл).

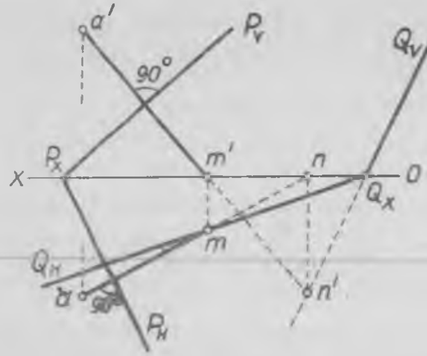
Перпендикулярлар орасидаги ABC тўғри бурчакнинг қиймати P ва Q текисликлар орасидаги икки ёқли тўғри бурчакнинг қийматига тенг.



90-шакл



91-шакл



92- шакл

Берилган P текисликка перпендикуляр бўлган AB тўғри чизиқ орқали саноқсиз кўп Q, R, ..., S текисликлар ўтказиш мумкин, уларнинг ҳаммаси P текисликка перпендикуляр бўлади (91-шакл). Масалан, тўла, яъни жавоби битта бўлиши учун қўшимча шартлар керак.

Берилган P текисликка перпендикуляр бўлмаган AC тўғри чизиқ орқали унга перпендикуляр қилиб ёлғиз битта Q текислик ўтказиш мумкин; бу Q текислик эпюрда AC чизиқ ва AB перпендикуляр билан тасвирланади.

Бир неча мисол ечамиз.

1. А нуқта орқали P текисликка перпендикуляр қилиб ўтказилган текисликнинг излари ясалсин (92- шакл).

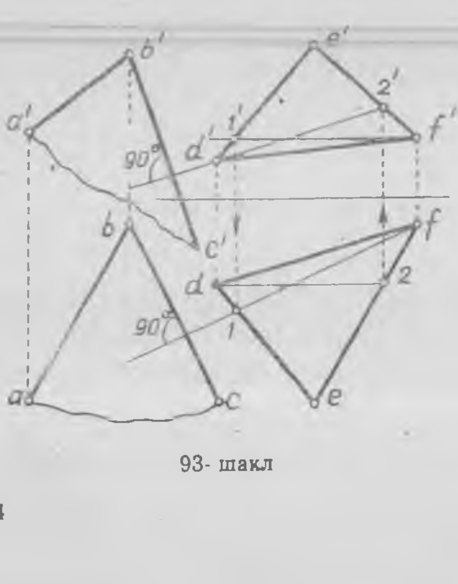
Ясаш тартиби

1) изланган текислик $Q \perp P$ бўлгани учун, A нуқтадан P текисликка перпендикуляр туширамиз: $a'm' \perp P_V$; $am \perp P_H$;

2) перпендикулярнинг изларини (m, m' ва n, n') топамиз;

3) перпендикулярнинг горизонтал изи (m) дан текисликнинг горизонтал изи (Q_H) ўтиши, перпендикулярнинг фронтал изи (n') дан текисликнинг фронтал изи (Q_V) ўтиши керак. Қўшимча шартлар бўлмагани учун m орқали Q_H ўтказамиз, n' ва Q_X орқали Q_V ўтказамиз. Масаланинг жавоби ниҳоятда кўпдир.

Ҳосил қилинган эпюрдан кўриниб турибдики, P ва O текислик лар фазода ўзаро перпендикуляр бўлгани билан уларнинг бир номли излари бир-бирига перпендикуляр эмас. Бундан шундай хулоса чиқариш мумкин; агар эпюрда икки текисликнинг бир номли излари ўзаро перпендикуляр (яъни $P_H \perp Q_H$; $P_V \perp Q_V$) бўлса, текисликларнинг бири иккинчисига перпендикуляр эмас (бири W га, иккинчиси OX га параллел бўлган текисликлар бундан мустасно).



93- шакл

2. Берилган AB тўғри чизиқ орқали эпюрда DEF учбурчак билан тас-

вирланган P текисликка перпендикуляр қилиб Q текислик ўтказилсин (93- шакл).

Ясаш тартиби:

1) берилган текисликда горизонтал ($1'f'$; $1f$) ва фронтал ($d2$; $d'2'$) ўтказамиз;

2) берилган тўғри чизиқнинг бирорта, масалан, B нуқтасидан берилган текисликка перпендикуляр туширамиз ($bc \perp f1$; $b'c' \perp d'2'$).

Изланган Q текислик кесишувчи AB ва BC чизиқлар билан ифодаланади, Q текислик DEF текисликка перпендикуляр бўлган AB чизиқ орқали ўтгани учун DEF текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

31- §. Умумий вазиятдаги ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар

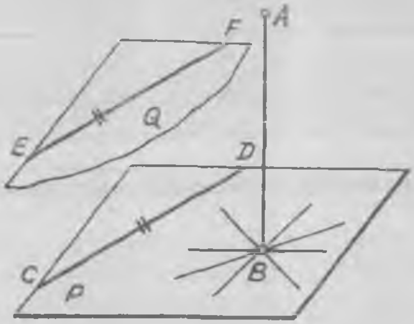
Агар икки тўғри чизиқнинг ҳар бири орқали иккинчисига перпендикуляр текислик ўтказиш мумкин бўлса, бундай тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлади.

AB тўғри чизиқ P текисликка перпендикуляр ва уни B нуқтада кесиб ўтади, деб фараз қилайлик (94-шакл). AB тўғри чизиқ B нуқтадан ўтган ва P текисликда ётган ҳамма тўғри чизиқларга перпендикулярдир, демак, P текисликда ётган ихтиёрий CD чизиққа ҳам перпендикуляр бўлади.

Энди, фазода CD га параллел қилиб, ихтиёрий EF чизиқ ўтказсак, AB чизиқ бу EF чизиққа перпендикуляр бўлади. EF орқали P текисликка параллел қилиб, Q текислик ўтказиш мумкин, унда $Q \perp AB$ бўлади.

Бинобарин, $EF \parallel CD$ бўлса, $EF \perp AB$ бўлади.

Агар EF чизиқ P текисликка ва CD чизиққа параллел бўлмаса, EF орқали AB га перпендикуляр Q текислик ўтказиб бўлмайди, демак, бундай бўлганда AB чизиқ EF га перпендикуляр эмас.



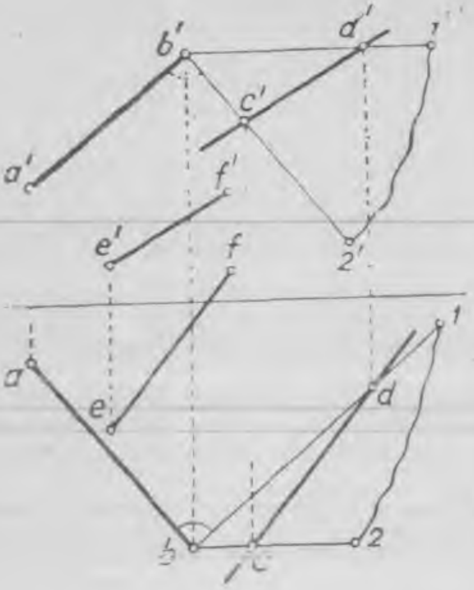
94- шакл

Шундай қилиб, умумий вазиятдаги икки AB ва EF тўғри чизиқ ўзаро перпендикуляр бўлиши учун бу тўғри чизиқлардан бири (масалан, 94- шаклда EF) иккинчи тўғри чизиққа (AB га) перпендикуляр бўлган P текисликдаги бирор CD тўғри чизиққа параллел бўлиши шарт.

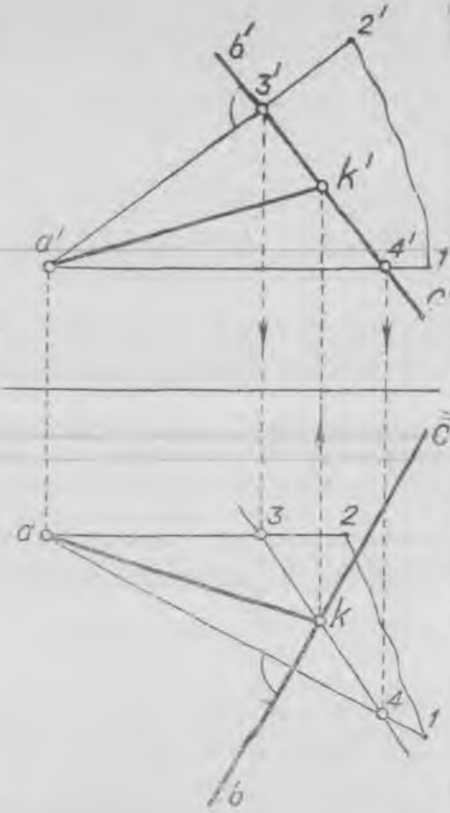
Бир неча мисол келтирамиз.

1. Фазода умумий вазиятдаги AB ва EF учрашмас тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр. Эпюрда ab, $a'b'$, $e'f'$ лар ва E нуқтанинг горизонтал проекцияси (e) берилган, ef ясалсин (95- шакл).

Ясаш тартиби:



95- шакл



96- шакл

1) *AB* тўғри чизиқнинг бирорта, масалан, *B* нуқтасидан унга перпендикуляр қилиб, *P* текислик ўтказамиз, эпюрда бу текислик горизонтали *B1* ва фронтали *B2* орқали тасвирланган (29- параграфга биноан: $b'1' \parallel OX \parallel b2$; $\angle ab1 = \angle a'2b'2 = 90^\circ$);

2) *P* текисликда ихтиёрий шундай бир *CD* чизиқ чизамизки, бу чизиқнинг фронтал проекцияси $e'f'$ га параллел ($c'd' \parallel e'f'$) бўлсин;

3) берилган *e* нуқтадан *cd* га параллел қилиб *ef* ни чизамиз.

2. Берилган умумий вазиятдаги *BC* тўғри чизиққа бирорта *A* нуқтадан туширилган перпендикулярнинг проекциялари ясалсин (96- шакл).

Ясаш тартиби:

1) *A* нуқтадан *BC* га перпендикуляр қилиб, *P* текислик ўтказамиз; шаклда бу текислик горизонтали *A1* ва фронтали *A2* орқали тасвирланган;

2) *P* текислик билан *BC* нинг кесишув нуқтаси (k, k') топилган;

3) *AK* (ak, $a'k'$) изланган перпендикулярдир. Ҳақиқатан ҳам, *AK* тўғри чизиқ берилган *BC* тўғри чизиқни кесади ва *BC* га перпендикуляр *P* текисликда ётади; демак, $AK \perp BC$.

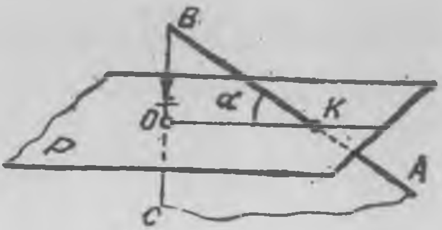
32- §. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

AB тўғри чизиқ P текисликка перпендикуляр бўлмаганда, шу тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги ўткир α бурчак AB тўғри чизиқ билан P текислик орасидаги бурчак деб аталади (97- шакл).

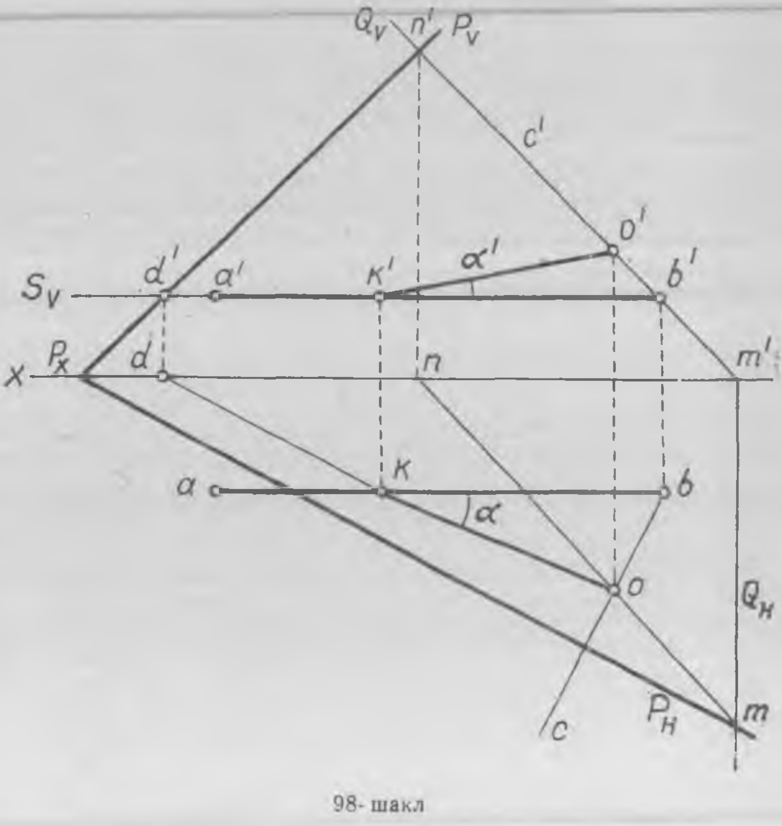
AB тўғри чизиқ билан P текислик орасидаги α бурчакнинг проекциялари тубандагича ясалиши мумкин (98- шакл):

1) P текислик билан AB тўғри чизиқнинг кесишув K нуқтасини топамиз. Бунинг учун ёрдамчи S текисликдан фойдаланилади.

S текислик H текисликка параллел (чунки: $AB \parallel H$), шунинг учун S билан P горизонтал DK бўйича кесишади;



97- шакл



98- шакл

2) AB тўғри чизиқдаги бирор B нуқтадан P текисликка перпендикуляр қилиб, BC ни туширамиз (эпюрда $b'c' \perp P_V$; $bc \perp P_H$);

3) бу перпендикуляр билан P текисликнинг кесишув O нуқтасини топамиз. Бунинг учун ёрдамчи Q текисликдан фойдаланилади. Q билан P текислик MN чизиқ бўйича кесишади;

4) k нуқтани O нуқта билан, k'ни o' билан туташтирамиз, ҳосил бўлган бурчаклар ($\angle okb$ ва $\angle o'k\,b'$) берилган AB тўғри чизиқ билан P текислик орасидаги ўткир α бурчакнинг проекцияларидир.

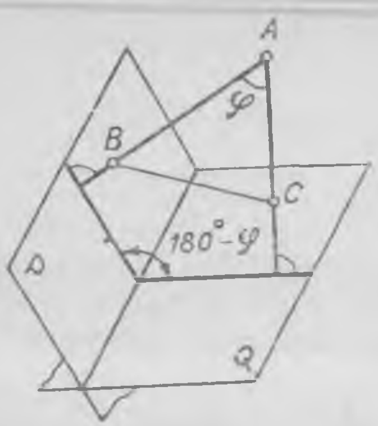
AB билан P текислик орасидаги α бурчакнинг ҳақиқий катталигини топиш зарур бўлса, тўғри бурчакли OKB учбурчакнинг ҳақиқий кўринишини ясаш керак. Бу учбурчак тўғри бурчакли бўлгани учун икки катети (OK ва OB) бўйича ёки катетларидан бири ва гипотенузаси (BK) бўйича ясаш мумкин. Учбурчак томонларининг ҳақиқий узунликларини топиш учун 11-параграфда баён этилган усулдан фойдаланиш тавсия қилинади.

33- §. Икки ёқли бурчаклар

Фазода ўзаро кесишувчи иккита текислик тўртта икки ёқли бурчак ҳосил қилади, бу бурчаклардан бир-бирига қўшни иккитасининг йиғиндиси 180° га тенгдир.

Текисликларнинг кесишув чизиғи икки ёқли бурчакларнинг умумий қиррасидир. Бурчаклардан бири маълум бўлса, бошқа учтасини ҳамма вақт топиш мумкин. Шунинг учун, кесишувчи ярим текисликлар (P ва Q) орасидаги битта икки ёқли бурчакнинг катталигини топиш усули билан танишиб чиқамиз (99- шакл).

1. Н о р м а л л а р у с у л и. Бу усул энг оддий усуллардан биридир; икки ёқли бурчакнинг катталигини топиш учун фазодаги бирор A нуқтадан берилган текисликларнинг ҳар қайсисига нормаллар (перпендикулярлар) туширилади (99- шакл).



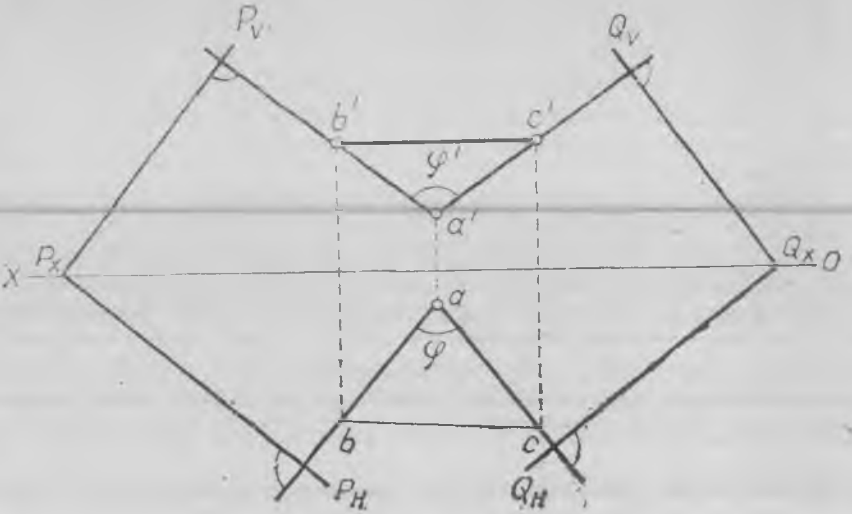
99- шакл

Нормаллар орасидаги чизиқли бурчак (φ) нинг катталиги икки ёқли бурчаклардан бирининг катталигига тенг бўлади.

Чизмадан кўриниб турибдики, икки ёқли бурчакни топиш учун ҳар қайси нормалнинг асосини аниқлаш шарт эмас. Чизиқли бурчак (φ) ихтиёрий B ва C нуқталар билан чегараланади, шундан кейин ABC учбурчакнинг ҳақиқий кўриниши ясалади. Учбурчакнинг A учидаги бурчак φ га тенг бўлади.

100-шаклда излари билан тасвирланган P ва Q текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакнинг катталигини нормаллар усули билан топиш кўрсатилган. Эпюрда ихтиёрий олинган A нуқтадан текисликларга перпендикулярлар туширилган ($a'b' \perp P_V$; $ab \perp P_H$; $a'c' \perp Q_V$; $ac \perp Q_H$). Нормаллардаги $B(b', b')$ ва $C(c, c')$ нуқталар ихтиёрий олинган. φ бурчакнинг ҳақиқий катталигини билиш учун ABC учбурчакнинг ҳақиқий кўринишини ясаш керак.

Ясашни осонлаштириш мақсадида, ҳосил бўлган учбурчакнинг BC томонини H га ёки V га параллел қилиб олиш тавсия этилади.



100-шакл

101-шакл

2. Нормал кесим усули. Бу усул билан икки ёқли бурчакнинг катталигини топиш учун, аввало, P ва Q текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғи (MN) ясалади (101-шакл); бу MN чизиқда олинган ихтиёрий A нуқтадан нормал текислик (S) ўтказилади ($S \perp MN$). Кейин S билан P нинг кесишув AB чизиғи ва S билан Q нинг кесишув чизиғи (AC) ясалади.

P ва Q текисликлар орасидаги икки ёқли бурчакка тенг бўлган BAC бурчакнинг ҳақиқий катталигини юқорида кўриб ўтилган ясаш усуллари билан топиш мумкин.

V боб. ЭПЮРНИ ҚАЙТА ТУЗИШ УСУЛЛАРИ

34- § Умумий тушунчалар

Маълумки, тўғри чизиқ кесмаси, текис шакл, бурчак ва бир текисликда ётган бошқа ўлчовлар проекция текисликларидан бирига параллел бўлса, уларнинг шу текисликдаги тўғри бурчакли проекциялари аслига тенг бўлади. Масалан, бирорта ABC учбурчак горизонтал проекциялар текислигига параллел бўлса, унинг горизонтал проекцияси ўзига тенг ($\Delta abc=\Delta ABC$), фронтал проекцияси OX проекциялар ўқига параллел тўғри чизиқ кесмаси тарзида бўлади. Бундай хусусий ҳолда берилган проекциялар *қулай ҳолдаги проекциялар* дейилади.

Агар ABC учбурчак проекциялар текислигига оғма бўлса, унинг шу текисликдаги проекцияси ўзидан кичик бўлади. Бундай проекциялар *ноқулай* (умумий ҳолдаги) *проекциялар* дейилади.

Геометрик элементларнинг ёки нарсаларнинг умумий ҳолда берилган проекцияларидан фойдаланиб, уларга оид масалаларни ечиш, кўпинча қийин кўчади. Шунинг учун кўп метрик ва позицион масалаларни[1] ечишда геометрик элементларнинг асосий H ва V текисликларда берилган ноқулай проекцияларидан фойдаланиб, уларнинг хусусий ҳолдаги қулай проекциялари тузилса, масалалар осонроқ ечилади.

Геометрик элементларнинг асосий $H \perp V$ системада берилган ноқулай проекциялари бўйича уларнинг масала шартига мувофиқ бўлган қулай проекцияларини ясаш *эпюрни қайта тузиш* дейилади.

Эпюрни қайта тузиш учун тубандаги асосий усуллар қўлланилади:

1. Проекция текисликларини алмаштириш усули. Бу усулда берилган геометрик элементлар қўзғалмас деб қаралади, асосий $H \perp V$ текисликлар системаси янги, масаланинг шартига мувофиқ қулай ҳолдаги системага алмаштирилади.

2. Айлантириш усули. Бу усулда, аксинча, асосий проекция текисликлари (H, V) қўзғалмас деб қаралади, берилган геометрик элементлар масаланинг шартига мувофиқ қулай ҳолга келгунча фазода бир ёки бир неча марта айлантирилади.

3. Қўшимча проекциялаш усули. Бу усулда, берилган геометрик элементлар янги йўналиш (масалан, тўғри

---

[1] Ўлчашга, яъни масофа, бурчак, юз ва шулар сингариларни аниқлашга доир масалалар *метрик масалалар* дейилади. Геометрик элементларнинг ўзаро вазиятларини аниқлашга доир масалалар *позицион масалалар* деб аталади.

бурчакли йўналиш ўрнига қийшиқ бурчакли йўналиш) бўйича янги проекциялар текислигига ёки эски проекция текисликларидан бирига проекцияланади.

Бу бобда эпюрни қайта тузишнинг юқорида кўрсатилган усуллари баён этилган.

35- §. Проекциялар текисликларини алмаштириш усули

Проекция текисликларини алмаштириш усулида объектнинг проекциялари берилган текисликлар системасидан («эски системадан») бир-бирига перпендикуляр бўлган иккита янги текислик системасига ўтилади. Шунинг билан бирга, объектнинг фазодаги вазияти ўзгармас бўлиб қолади.

Бир қанча масалани ечиш учун эски проекция текисликларидан фақат бирини, масалан, V текисликни горизонтал проекцияловчи V_1 текисликка алмаштириб, янги $V_1 \perp H$ системага ёки H текисликни фронтал проекцияловчи H_1 текисликка алмаштириб, $V \perp H_1$ системага ўтиш кифоя.

Мураккаброқ бошқа масалаларни ечиш учун эски система текисликларининг иккаласини янги текисликларга кетма-кет алмаштириб, $V_1 \perp H_1$ системага ўтишга тўғри келади. Бундай ҳолларда, аввало, эски текисликлардан бири, масалан, V текислик V_1 га алмаштирилиб, $V_1 \perp H$ системага ўтилади; кейин бу оралиқ системадаги эски H текислик H_1 текисликка алмаштирилиб, бутунлай янги $V_1 \perp H_1$ системага ўтилади.

Шундай қилиб, проекциялар текисликларининг иккаласини бирданига алмаштириб бўлмайди. Янги проекциялар текислиги ҳамма вақт қолган текисликка перпендикуляр бўлиши лозим. Шунинг учун текисликлар фақат кетма-кет алмаштирилиши, яъни аввал бир текислик, кейин иккинчи текислик алмаштирилиши керак. Башарти, масалани ечиш учун зарур бўлса, бу операция исталганча такрорланиши мумкин.

36- §. Фронтал проекциялар текислигини алмаштириш

102- шакл, *а* да H ва V текисликлар системасида A нуқтанинг тасвири берилган. V текисликни V_1 текисликка алмаштириш ва A нуқтанинг V_1 даги a_1' проекциясини ясаш керак.

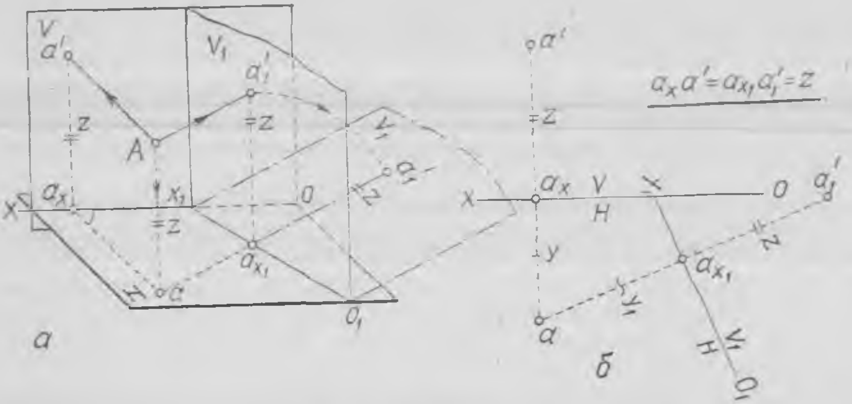
V_1 текислик H га перпендикуляр (горизонтал проекцияловчи) қилиб олинади, бу текислик *янги фронтал проекциялар текислиги* дейилади. Унинг горизонтал изи янги проекциялар ўқи деб қабул қилинади ва O_1X_1 билан белгиланади. A нуқтанинг V_1 текисликдаги a_1' проекцияси *янги фронтал проекция* дейилади.

V_1 текислик H га перпендикуляр қилиниб олинганлиги сабабли, V га нисбатан қандай вазиятда жойлашувидан қатъи назар, A нуқтадан H гача бўлган масофа (аппликата z) ўзгармайди. Янги фронтал a_1' проекцияни ясаш учун фазода A нуқтадан V_1 текисликка

перпендикуляр тушириш керак ($Aa_1' \perp V_1$). $V_1 \perp H$ ва $Aa \parallel a_1' a_{x_1}$ бўлгани учун, $Aa a_{x_1} a_1'$ тўғри тўртбурчак, демак, $a_1' a_{x_1} = Aa = a_x a' = z$ бўлади. Бу ҳол исталган нуқта учун ҳам яроқлидир.

Шундай қилиб, V текислик V_1 текисликка алмаштирилганда нуқтанинг янги фронтал проекциясидан янги проекциялар ўқигача бўлган масофа ўша нуқтанинг эски фронтал проекциясидан эски проекциялар ўқигача бўлган масофага тенг бўлади ($a_1' a_{x_1} = a' a_x$).

Фазовий кўринишдан эпюрга ўтиш учун V_1 текислик O_1X_1 ўқи атрофида айлантирилиб, H текисликка жойлаштирилади. Шундай



102- шакл

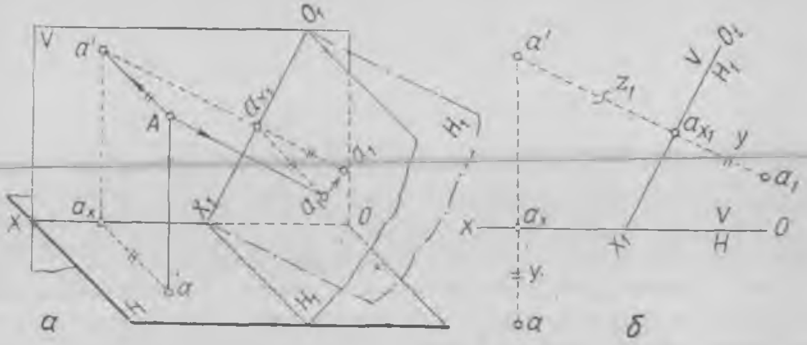
қилинганда нуқтанинг янги фронтал проекцияси (a_1') ҳам айланиб бориб, H текисликка жойлашади ва эски горизонтал проекция (a) билан иккаласи янги O_1X_1 ўққа перпендикуляр бир тўғри чизиқда бўлиб қолади.

Бу ерда шуни айтиб ўтиш керакки, V_1 текисликдан A нуқтагача бўлган масофа ($Aa_1' = aa_{x_1}$) ихтиёрий бўлиши ва V_1 текислик нуқтанинг исталган томонида олиниши мумкин. Эски $V \perp H$ системада берилган A нуқта учун ордината $y = Aa' = aa_x$ бўлса, янги $V_1 \perp H$ системада нуқтанинг ординатаси бошқа, яъни $y_1 = Aa_1' = a_{x_1} a$ бўлади, аппликатаси (z) эса ўзгармайди.

102- шакл, *б* да нуқтанинг $V \perp H$ системада берилган (a, a') проекциялари бўйича унинг $V_1 \perp H$ системадаги проекцияларини эпюрда ясаш кўрсатилган. Бунинг учун нуқтанинг горизонтал проекцияси (a) орқали O_1X_1 ўқига нисбатан перпендикуляр ўтказилган ва унда $a_{x_1} a_1' = a_x a' = z$ масофани қўйиб, янги фронтал проекция (a_1') топилган. Ҳосил бўлган (a, a_1') лар нуқтанинг $V_1 \perp H$ системадаги янги ортогонал проекцияларидир.

37- §. Горизонтал проекциялар текислигини алмаштириш

103- шакл, *a* да *A* нуқта учун горизонтал проекциялар текислиги *H* ни H_1 текисликка алмаштиришнинг фазовий схемаси кўрсатилган. H_1 текислик *V* га перпендикуляр (фронтал проекцияловчи) бўлгани учун у шартли суратда, ***янги горизонтал проекциялар текислиги*** дейилади. H_1 текисликнинг фронтал изи (O_1X_1) ***янги проекциялар ўқи*** дейилади. Эпюр ҳосил қилиш учун H_1 текислик O_1X_1 атрофида айлантирилиб, *V* текисликка жипслаштирилади. H_1 билан бирга нуқтанинг янги горизонтал проекцияси (a_1) ҳам айланиб бориб, *V* текисликка тушади ва эски фронтал проекция (a') билан иккаласи O_1X_1 ўқига перпендикуляр бир тўғри чизиқда бўлиб қолади.



103- шакл

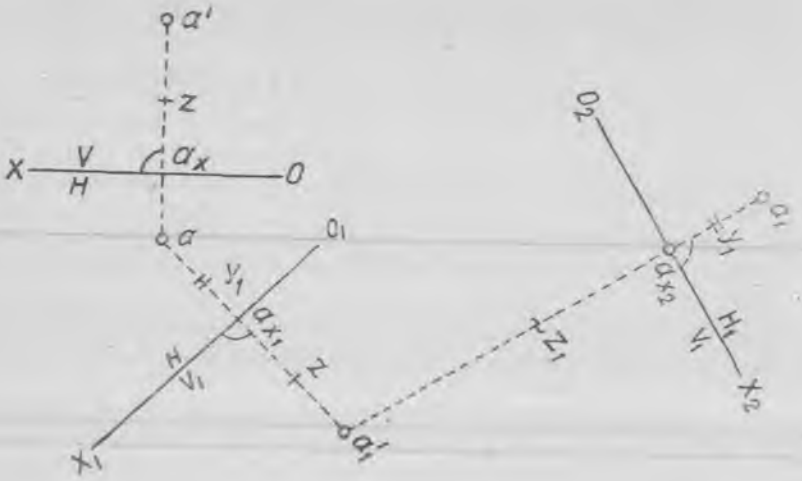
Нуқтадан *V* текисликкача бўлган масофа (ордината *y*) ўзгармайди ($a_1a_{x_1} = Aa' = aa_x = y$).

Нуқтанинг янги аппликатаси $z_1 = Aa_1 = a'a_{x_1}$ бўлиб қолади.

Шундай қилиб, *H* текислик H_1 текисликка алмаштирилганда нуқтанинг янги горизонтал проекциясидан янги проекциялар ўқигача бўлган масофа ўша нуқтанинг олдинги (эски) горизонтал проекциясидан олдинги проекциялар ўқигача бўлган масофага тенг, яъни $a_1a_{x_1} = aa_x = y$ бўлади. Шунга биноан, эпюрда O_1X_1 маълум бўлса, нуқтанинг янги горизонтал проекцияси (a_1) ни ясаш учун a' дан O_1X_1 га перпендикуляр тушириш ва унда $a_{x_1}a_1 = a_xa$ кесмани ўлчаб қўйиш керак (103- шакл, *б*).

38- §. Проекция текисликларининг иккаласини кетма- кет алмаштириш

A нуқтанинг $V \perp H$ системадаги проекцияларидан фойдаланиб, унинг бутунлай янги $V_1 \perp H_1$ системадаги проекцияларини ясаш зарур бўлсин (104- шакл). Масаланинг шартига қараб, дастлаб O_1X_1



104- шакл

ўқи чизилади ва текисликлардан бири, масалан, V текислик V_1 га алмаштирилади. Бунинг учун a орқали O_1X_1 ўқига перпендикуляр ўтказилади ва унда $a_{x_1}a_1' = a_xa' = z$ масофа қўйилиб, a_1' топилади. Шундай қилиб, берилган системадан $V_1 \perp H$ системага ўтилади. Кейин O_2X_2 проекциялар ўқи чизилади ва H текислик янги H_1 текисликка алмаштирилади. Бунинг учун нуқтанинг янги фронтал проекцияси (a_1') дан O_2X_2 ўқига перпендикуляр туширилади ва унда $a_{x_2}a_1 = a_{x_1}a = y_1$ масофа қўйилиб, a_1 топилади. Шу йўл билан $V_1 \perp H$ системадан бутунлай янги $V_1 \perp H_1$ системага кўчилади; ҳосил бўлган (a_1, a_1') нуқтанинг янги ортоганал проекцияларидир. Бу янги системада нуқтанинг координаталари ҳам янги: ордчнатаси $y_1 = a_1a_{x_2}$ ва аппликатаси $z_1 = a_1'a_{x_2}$ бўлиб қолади.

39- §. Проекция текисликларини алмаштириш усули билан ечиладиган асосий масалалар

Эпюрда янги проекциялар текислигининг вазияти янги проекциялар ўқининг вазияти билан тўла аниқланади; текисликнинг иккинчи изи кўрсатилмайди. Янги проекциялар ўқининг йўналиши ҳар қайси масаланинг шартига қараб белгиланади. Проекция текисликларини алмаштириш усули билан ечиладиган ҳамма масалаларни группаларга бўлиш мумкин. Группалардан ҳар бири тубандаги ясашлардан бирининг бажарилишини талаб қилади, яъни проекция текисликлари системаси шундай алмаштирилиши керакки:

1) берилган тўғри чизиқ янги системада хусусий ҳолдаги тўғри чизиқ (горизонтал ёки фронтал) бўлиб қолиши;

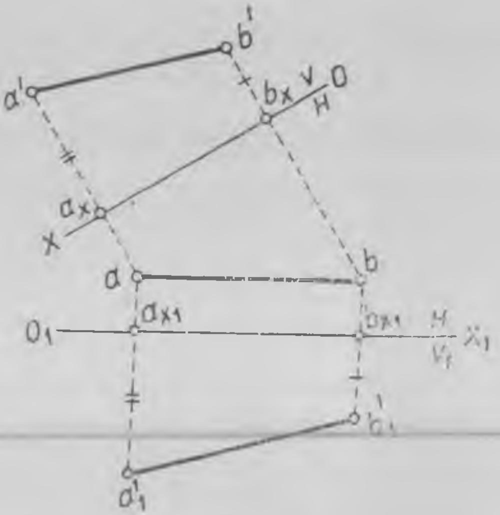
2) излари билан берилган текислик янги системадаги проекция текисликларидан бирига проекцияловчи бўлиб қолиши;

3) берилган умумий вазиятдаги тўғри чизиқ янги системада проекцияловчи тўғри чизиқ бўлиб, унинг бир проекцияси нуқтага айланиши;

4) текис шакл янги текисликка тўғри чизиқ кесмаси тарзида проекцияланиши;

5) берилган текис шаклнинг текислиги янги системадаги проекция текисликларидан бирига параллел бўлиб қолиши лозим.

1-мисол. Проекция текисликларидан бири шундай алмаштирилсинки, берилган AB тўғри чизиқ янги системада фронтал (ёки горизонтал) бўлиб қолсин (105-шакл).



105- шакл

Маълумки, агар тўғри чизиқ фронтал проекциялар текислигига параллел бўлса (12-параграф), унинг горизонтал проекцияси проекциялар ўқига параллел бўлади. Демак, V ни AB га параллел V_1 текисликка алмаштириш учун янги O_1X_1 проекциялар ўқини ab га параллел қилиб ўтказамиз; O_1X_1 билан ab орасидаги масофа ихтиёрийдир. AB кесманинг янги $a'_1 b'_1$ проекциясини ясаш учун a ва b нуқталардан O_1X_1 га перпендикулярлар ўтказиб, улар бўйича $a_{x_1} a'_1 = a_x a'$ ва $b_{x_1} b'_1 = b_x b'$ кесмаларни ўлчаб қўямиз.

Янги $V_1 \perp H$ системадаги проекциялардан кўриниб турибдики, тўғри чизиқ AB фронтал бўлиб қолди ($AB \parallel V_1$).

AB чизиқни горизонтал қилиш учун H ни H_1 га алмаштириш керак.

Биринчи мисолдаги ясашдан фойдаланиб:

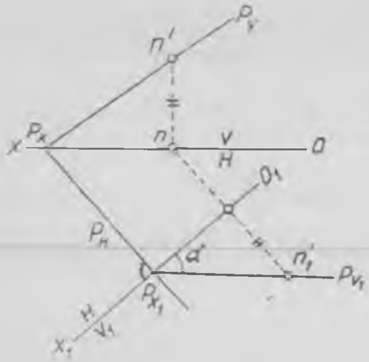
1) AB кесманинг узунлигини;

2) кесма билан H текислик орасидаги α бурчакни;

3) нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топиш мумкин.

(β бурчакни топиш учун H ни H_1 га алмаштириш керак).

Бу ҳолда янги текисликка берилган кесмани ва нуқтани проекциялаш керак, кейин нуқтадан чизиққа перпендикуляр тушириш учун тўғри бурчакни проекциялаш қоидасини (16-параграф) татбиқ этиш лозим.



106- шакл

2-мисол. Проекция текисликларидан бири шундай алмаштирилсинки, берилган P текислик янги текисликка проекцияловчи бўлиб қолсин (106- шакл).

Маълумки, текислик, масалан, фронтал проекцияловчи бўлса, унинг горизонтал изи проекциялар ўқига перпендикуляр бўлади. Шунга кўра, янги O_1X_1 ўқини берилган текисликнинг горизонтал изига перпендикуляр ($O_1X_1 \perp P_H$) қилиб, исталган жойдан ўтказамиз. Шундай бўлганда P_H ўз жойида қолади, лекин изларнинг учрашув нуқтаси янги проекциялар ўқидаги P_{X_1} нуқтада бўлади. Текисликнинг $V_1 \perp H$ системадаги янги P_{V_1} изини ясаш учун унинг эски P_V изида олинган ихтиёрий (n', n) нуқтадан фойдаланамиз. Бу нуқтанинг янги фронтал проекцияси (n_1') P_{X_1} билан туташтирилса, P_{V_1} ҳосил бўлади.

Иккинчи мисолдаги ясашдан фойдаланиб, қуйидагиларни топиш мумкин:

1) P текисликнинг H га қиялик бурчаги (α) ни ва V га қиялик бурчаги (β) ни (106- шаклда α бурчак топилган; β бурчакни топиш учун V ни ўз жойида қолдириб, H текисликни H_1 га алмаштириш керак);

2) параллел текисликлар орасидаги қисқа масофани;

3) текисликдан унга параллел тўғри чизиққача бўлган масофани;

4) тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтасини;

5) нуқтадан текисликкача бўлган масофани;

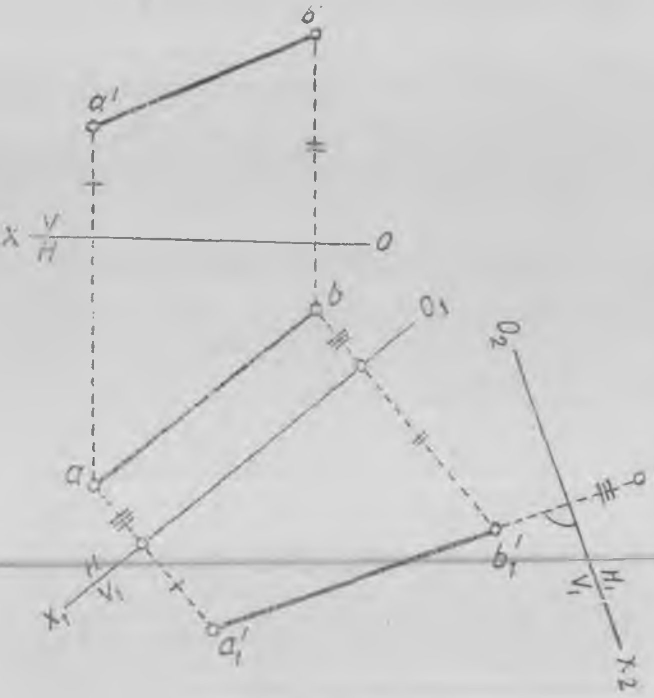
6) сиртларнинг текис кесимларини.

3-мисол. Проекция текисликлари шундай алмаштирилсинки, берилган AB тўғри чизиқ янги текисликлардан бирига, масалан, H_1 га проекцияловчи (перпендикуляр) бўлиб қолсин (107- шакл).

Аввало V текисликни AB га параллел бўлган янги V_1 текисликка алмаштирамиз. Бунинг учун $O_1X_1 \parallel ab$ қилиб чизамиз ва чизиқнинг янги фронтал проекцияси ($a_1' b_1'$) ни ясаймиз. Кейин H текисликни V_1 га ва AB га перпендикуляр бўлган янги H_1 текисликка алмаштирамиз. Бунинг учун O_2X_2 ўқини $a_1' b_1'$ га перпендикуляр қилиб, чизманинг исталган жойидан ўтказамиз ва чизиқнинг янги горизонтал проекцияси (a_1b_1) ни топамиз.

Шундай қилиб, янги $V_1 \perp H_1$ системада AB тўғри чизиқ H_1 га перпендикуляр, чунки унинг фронтал проекцияси $a_1' b_1' \perp O_2X_2$, янги горизонтал проекцияси (a_1b_1) эса бир нуқта бўлиб қолди.

Учинчи мисолдаги ясашдан фойдаланиб:



107- шакл

1) параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофани;

2) учрашмас икки тўғри чизиқ орасидаги қисқа масофани;

3) нуқтадан умумий вазиятдаги тўғри чизиққача бўлган масофани;

4) икки ёқли бурчакларнинг катталигини (бунда янги проекциялар ўқлари икки ёқли бурчак қиррасининг проекцияларига қараб чизилади);

5) берилган масофада жойлашган параллел чизиқларнинг проекцияларини;

6) текис шаклнинг ҳақиқий кўриниши ва унинг проекция текисликлари билан ҳосил қилган бурчакларини топиш мумкин.

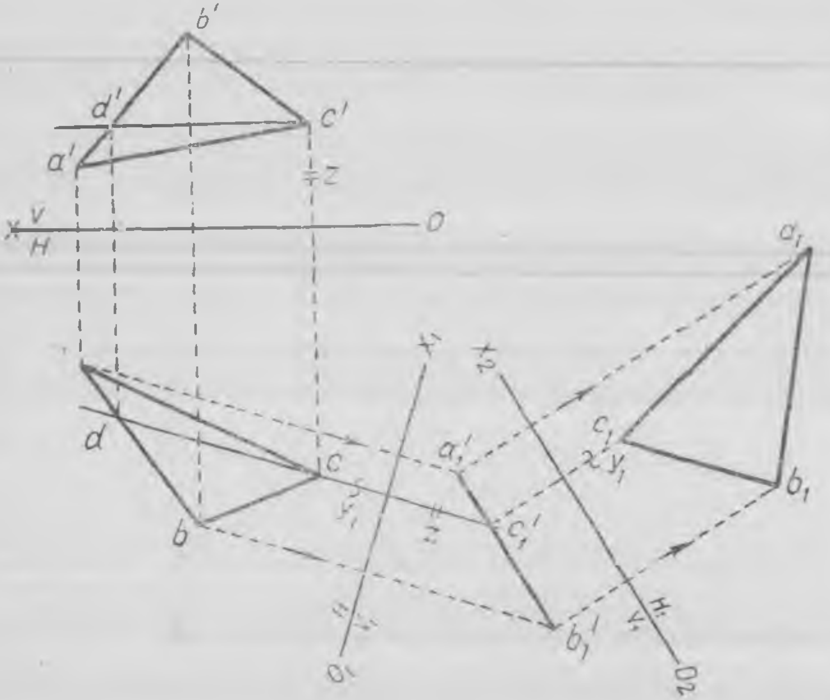
4-мисол. Проекция текисликларидан бири, масалан, V текислик V_1 га шундай алмаштирилсинки, берилган ΔABC янги текисликка проекцияловчи бўлиб қолсин (108- шакл).

Берилган ABC учбурчак янги системада фронтал проекцияловчи бўлиб қолиши учун янги V_1 текислик ABC учбурчакка ҳам, H текисликка ҳам перпендикуляр бўлиши керак.

Бунинг учун берилган учбурчакда CD горизонтал ўтказамиз ва текисликни горизонталга перпендикуляр қилиб оламиз. Шу мақсадда V_1 текисликнинг горизонтал изини, яъни O_1X_1 ўқини гори-

зонталнинг горизонтал проекциясига перпендикуляр ($O_1X_1 \perp cd$) қилиб чизамиз.

Учбурчакнинг янги фронтал проекцияси ($a_1' b_1' c_1'$) бир тўғри чизиқ тарзида бўлади. Демак, ABC учбурчак V_1 га перпендикуляр, яъни фронтал проекцияловчи текислик бўлиб қолди.



108- шакл

Тўртинчи мисолдаги ясашдан фойдаланиб, юқорида келтирилган иккинчи мисолнинг ҳамма масалаларини ечиш мумкин.

5-мисол. Берилган умумий вазиятдаги ABC учбурчакнинг текислиги янги системадаги проекция текисликларидан бирига, масалан, H_1 га параллел бўлиб қолсин (108- шакл).

Бунинг учун, аввало, V текисликни ABC учбурчакка перпендикуляр бўлган горизонтал проекцияловчи V_1 текисликка алмаштириб, $V_1 \perp H$ системага ўтамиз ва учбурчакнинг янги фронтал проекцияси ($a_1' b_1' c_1'$) ни ясаймиз. Кейин H текисликни учбурчакка параллел бўлган H_1 текисликка алмаштирамиз. Бу мақсадда O_2X_2 ўқини учбурчакнинг янги фронтал проекциясига параллел ($O_2X_2 \parallel a_1' b_1' c_1'$) қилиб чизамиз ва учбурчакнинг янги горизонтал проекциясини ясаймиз. Натижада, ҳосил бўлган янги $V_1 \perp H_1$ системада учбурчакнинг горизонтал проекцияси ўзига тенг бўлади ($\Delta a_1b_1c_1 = ABC$).

Агар O_2X_2 ўқи $a'_1b'_1c'_1$ дан ўтказилса, учбурчакнинг текислиги H_1 текислик бўлиб қолади.

Юқоридаги мисоллардан кўриниб турибдики, масалаларни проекция текисликларини алмаштириш усули билан ечиш осон ва қулайдир. Бу усул бир-бири билан боғланган бир қанча ясашларни устма-уст туширмасдан бажаришга ва чизманинг бўш жойларидан рационал фойдаланишга имкон беради. Алмаштириш усулининг бошқа усуллардан афзаллиги ана шулардан иборат.

40- §. Айлантириш усули (Асосий маълумот ва қоидалар)

Айлантириш усулида проекция текисликлари қўзғалмайди, проекцияланаётган шакл ёки жисм талабга мувофиқ вазиятга келгунча фазода айлантирилади. Айлантириш усулида шаклнинг янги айлантирилгандан кейинги вазиятдаги проекцияларини унинг олдинги (берилган) проекциялари бўйича ясаш йўллари ўрганилади.

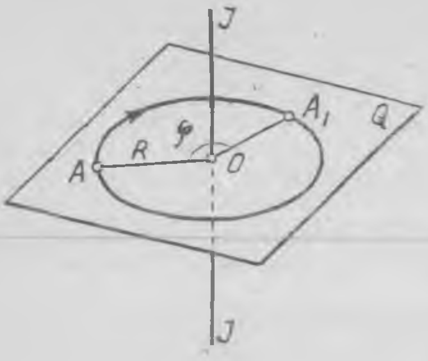
Проекцияланаётган объект фазода ҳамма вақт бирорта тўғри чизиқ (ўқ) атрофида айлантирилади. 109-шаклда A нуқтани JJ тўғри чизиқ атрофида айлантириш схемаси тасвирланган. JJ тўғри чизиқ *айлантириш ўқи* дейилади. A нуқтадан ўққача бўлган қисқа R масофа A нуқтанинг *айлантириш радиуси* деб, O нуқта *айлантириш маркази* деб, нуқтанинг айланишидан ҳосил бўлган чизиқ *айлантириш айланаси* деб, унинг текислиги Q эса нуқтанинг *айлантириш текислиги* деб аталади, A нуқта нуқтанинг *олдинги ўрни,* A_1 нуқта эса нуқтанинг *айлантирилгандан кейинги ўрни,* AOA_1 бурчак нуқтанинг *айлантириш бурчаги* дейилади.

Айлантириш ўқи масаланинг шартига қараб танлаб олинади ёки берилган бўлади. Айлантириш бручаги ($\varphi = \angle AOA_1$) асосан, ечилаётган масаланинг шартига қараб белгиланади, бу бурчак, баъзан, олдиндан берилиши ҳам мумкин. Фақат олдинги ва охирги вазиятларни кўриб чиқишда айлантириш йўналиши ҳисобга олинмайди, аммо айлантириш бурчаги (φ) берилган ёки уни топиш керак бўлса, йўналиш маълум бўлиши шарт. Шаклда айлантириш йўналиши стрелка билан белгиланган.

1-қоида. *Нуқта бирорта ўқ атрофида айлантирилганда унинг айлантириш текислиги ҳамма вақт айлантириш ўқига перпендикуляр бўлади* (109- шаклда $Q \perp JJ$).

Бу қоида фазонинг исталган нуқтаси учун тўғри келади; бир-бири билан қаттиқ боғланган нуқталар йиғиндиси айлантирилганда эса қуйидаги қоида келиб чиқади.

2-қоида. *Қаттиқ жисм фазода бирорта ўқ атрофида айлантирилганда унинг ҳар бир нуқтаси учун ўз айлантириш маркази, радиуси ва текислиги бўлади, шунинг билан бирга, ҳам-*



109- шакл

ма нуқталарнинг айлантириш текисликлари ўзаро параллел ва нуқталарнинг ҳаммаси учун айлантириш бурчаги ўзгармас катталикда бўлади, яъни нуқталар бир томонга ва бир хил бурчакка айлантирилади.

Нуқта ўқ атрофида айлантирилганда бу нуқта ўққа радиус билан қаттиқ боғланиши керак.

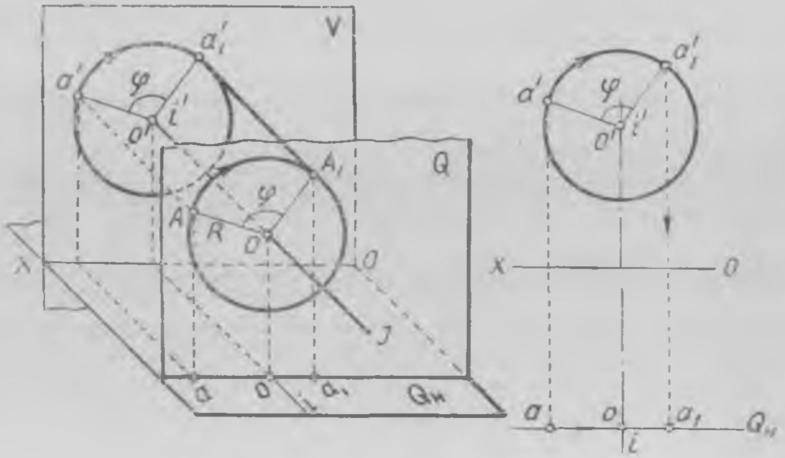
Радиуснинг айлантириш ўқида ётган *O* нуқтадан бошқа ҳар бир нуқтаси ўз айланасини чизади; *O* нуқта ўз жойида қолади. Айлантириш ўқидаги ҳар бир нуқтани фазодаги бирорта нуқтанинг айлантириш маркази деб ҳисоблаш мумкин. Шунга кўра, айлантириш ўқидаги ҳамма нуқталар айлантириш жараёнида *H* ва *V* текисликларга нисбатан ўз вазиятларини ўзгартирмайди.

Агар айлантириш ўқи (*JJ*) умумий вазиятдаги тўғри чизиқ бўлса, нуқталарнинг бундай ўқ атрофида айлантирилишидан хосил бўлган айланаларнинг *V* ва *H* текисликлардаги проекциялари эллипслар бўлади. Эллипсларни ясаш бирмунча қийинроқ. Шунинг учун айлантириш ўқи сифатида, одатда, проекциялар текисликларидан бирига перпендикуляр ёки параллел бўлган тўғри чизиқ олинади.

41- §. Проекциялар текислигига перпендикуляр ўқ атрофида айлантириш

1. Нуқтани айлантириш. Ҳар қандай шаклнинг асосий элементи нуқта, шунинг учун айлантиришни нуқтадан бошлаймиз ва айланиш жараёнида нуқта проекцияларининг қандай ҳаракат қилишини кўриб чиқамиз.

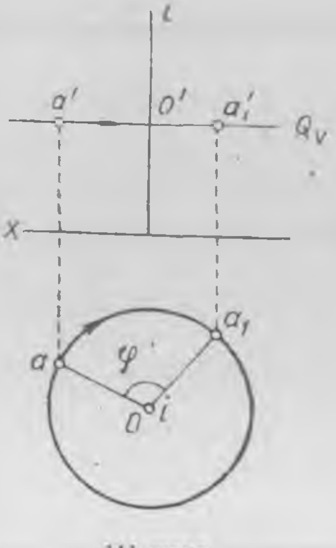
110- шаклда *A* нуқтани *V* текисликка перпендикуляр ўқ (*JJ*) атрофида айлантириш тасвирланган. Нуқта ўқ атрофида радиуси $R=AO$ бўлган айлана бўйича ҳаракат қилади. Бу айлананинг текислиги $Q \perp JJ$, шунинг учун айлананинг фронтал проекцияси ўзига тенг, горизонтал проекцияси *OX* проекциялар ўқига параллел тўғри чизиқ кесмаси бўлади ва у *Q* текисликнинг горизонтал изига тушади. Агар *A* нуқта φ бурчакка айлантирилиб, янги A_1 вазиятга келтирилса, унинг фронтал проекцияси (a') ҳам ўша φ бурчакка айланиб a'_1 нуқтага, горизонтал проекцияси эса *a* дан a_1 нуқтага келади. 110- шаклнинг ўнг томонида *A* нуқта проекцияларининг эпюрда ҳаракат қилиши кўрсатилган.



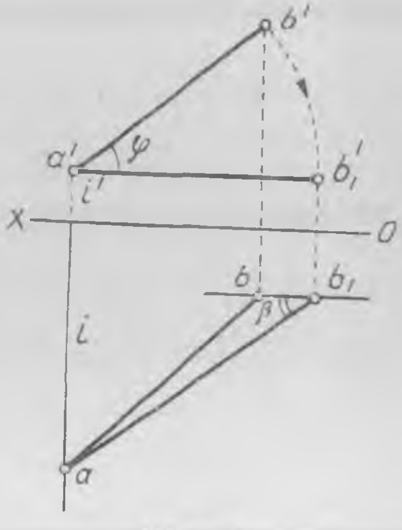
110- шакл

Шундай қилиб, нуқта *V* текисликка перпендикуляр ўқ атрофида айлантирилганда, нуқтанинг фронтал проекцияси маркази айлантириш ўқининг фронтал проекциясида бўлган айлана бўйича, горизонтал проекцияси эса айлантириш ўқининг горизонтал проекциясига перпендикуляр (яъни, *OX* га параллел) тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади.

Худди шунга ўхшаш, нуқта *H* текисликка перпендикуляр ўқ атрофида айлантирилганда тубандаги хулосани чиқариш мумкин:



111- шакл



112- шакл

Нуқта H текисликка перпендикуляр ўқ атрофида айлантирилганда, нуқтанинг горизонтал проекцияси маркази айлантириш ўқининг горизонтал проекциясида бўлган айлана бўйича, фронтал проекцияси эса айлантириш ўқининг фронтал проекциясига перпендикуляр (яъни, OX га параллел) тўғри чизиқ бўйича ҳаракат қилади (111- шакл).

Бу қоидаларни тушуниб олгандан кейин, тўғри чизиқ, текислик ёки шаклларнинг фазода айлантиргандан кейинги вазиятдаги янги проекцияларини уларнинг олдинги (берилган) проекциялари бўйича эпюрда ясаш қийин эмас.

2. Умумий вазиятдаги тўғри чизиқни хусусий вазиятга келтириш. Кўпгина масалаларни ечишда умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмаси хусусий вазиятга (проекция текисликларидан бирига параллел ёки перпендикуляр вазиятга) келтирилса, масалани ечиш осонлашади. Бунда айлантириш ўқини тўғри танлаб олиш (агар бу ўқ берилмаган бўлса) ва айлантириш бурчагини белгилаш масаланинг осонроқ ечилиши учун энг муҳим шартдир.

112- шаклда умумий вазиятдаги AB кесмани айлантириб, H текисликка параллел вазиятга келтириш тасвирланган. Айлантириш ўқини кесманинг бирор учидан, масалан, A нуқтадан ўтказиб олиш маъқулроқ бўлади. Шундай қилганда бу A нуқта ўқда бўлгани учун ўз ўрнини ўзгартирмайди, фақат иккинчи B нуқтанинг янги проекцияларини топиш керак бўлади.

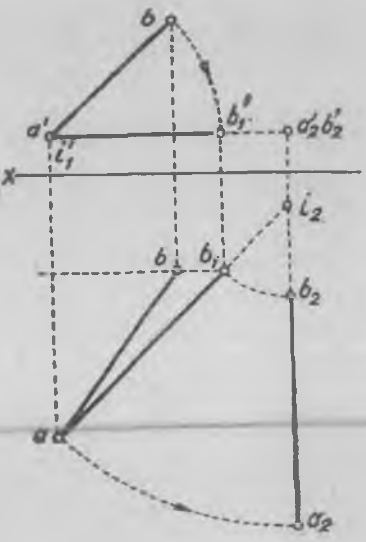
Шундай қилиб, айлантириш ўқини A нуқтадан ўтадиган ва V текисликка перпендикуляр қилиб оламиз. Бундай ўқнинг фронтал проекцияси нуқта бўлади ва a' га тўғри келади, горизонтал проекцияси OX га перпендикуляр тўғри чизиқ бўлади ва a дан ўтади. Кесма H га параллел вазиятга келганда унинг фронтал проекцияси OX га параллел бўлади. Шунинг учун кесманинг фронтал проекциясини a' атрофида $a'b'$ радиуси билан айлантириб, $a'b'_1 \parallel OX$ вазиятга келтирамиз. B нуқтанинг горизонтал проекцияси OX га параллел тўғри чизиқ бўйича сурилиб, b_1 нуқтага келади. Ҳосил бўлган $a'b'_1$ ва ab_1 берилган AB кесманинг H текисликка параллел вазиятга келтирилгандаги янги проекцияларидир.

Кесмани бу ўқ атрофида айлантириб, яна W текисликка параллел вазиятга келтириш мумкин (бунинг учун $a'b'_1 \perp OX$ бўлиши керак), лекин уни проекция текисликларидан ҳеч бирига перпендикуляр вазиятга келтириб бўлмайди, чунки бу айлантириш билан унинг V текисликка қиялигини ўзгартириб бўлмайди.

Шундай қилиб, битта ўқ атрофида айлантириш йўли билан умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасини фақат айлантириш ўқи параллел бўлган проекциялар текислигигагина параллел вазиятга келтириш мумкин. Масалан, ўқ V га перпендикуляр бўлса, H га ва W га параллел бўлади, бундай ўқ атрофида AB кесмани айлантириб H га ёки W га параллел вазиятга келтириш мумкин. Бу усул кесманинг ҳақиқий узунлигини, унинг

проекция текисликларига қиялик бурчакларини топиш ва шуларга ўхшаш масалаларни ечиш учун қўлланилади. 112-шаклда AB кесманинг узунлиги ($AB = ab_1$) ва V га қиялик бурчаги (β) топилган.

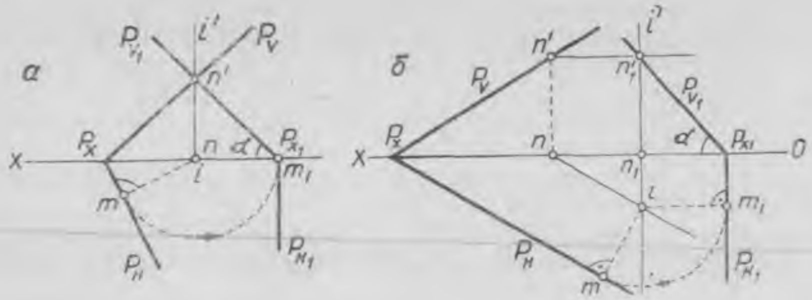
Умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмасини проекция текисликларидан бирига перпендикуляр вазиятга келтириш учун уни икки ўқ атрофида кетма-кет икки марта айлантириш керак. 113-шаклда умумий вазиятдаги AB кесмани V текисликка перпендикуляр вазиятга келтириш тасвирланган. Бунинг учун кесма биринчи марта V га перпендикуляр ва кесманинг A учидан ўтган ўқ атрофида айлантириб, H текисликка параллел вазиятга келтирилган ($a'b'_1$; ab_1). Иккинчи айлантириш ўқи кесманинг давомидаги нуқтадан ўтган ва H текисликка перпендикулярдир; бу ўқнинг горизонтал проекцияси (i_2) атрофида кесманинг горизонтал проекцияси (ab_1) ни айлантириб, OX ўқига перпендикуляр ($a_2b_2 \perp OX$) вазиятга келтирсак, кесманинг фронтал проекцияси ($a_2 b'_2$) бир нуқтага келиб қолади, демак, AB кесма V га перпендикуляр бўлиб қолди.



113- шакл

3. Умумий вазиятдаги текисликни проекловчи вазиятга келтириш. Излари орқали тасвирланган умумий вазиятдаги бирор P текисликни проекциялар текисликларидан бирига, масалан, V текисликка перпендикуляр ҳолга келтириш учун уни фазода шундай айлантириш керакки, горизонтал изи (агар текислик V га перпендикуляр туриши лозим бўлса) OX ўқига перпендикуляр бўлиб қолсин.

114-шакл, a да излари орқали берилган P текисликни айлантириб, V га проекцияловчи вазиятга келтириш кўрсатилган. Масалани осонлаштириш мақсадида айлантириш ўқи (JJ) фронтал проекциялар текислигида олинган, шунинг учун ўқ P_V изни n' нуқтада кесади. Бу нуқта текислик JJ ўқ атрофида айлантирилганда ўз ўрнини ўзгартирмайди. Текисликнинг горизонтал изини OX ўқига перпендикуляр қилиб қўйиш учун айлантириш ўқининг горизонтал проекцияси (i) дан P_H га перпендикуляр туширамиз ($im \perp P_H$) ва бу перпендикулярни P_H билан биргаликда то OX ўқига келгунча айлантирамиз. Шунда m нуқта m_1 га келади ва P_H из талаб қилинган P_{H_1} визиятни олади ($P_{H_1} \perp OX$). Қўзғалмас n' нуқтани m_1 нуқта билан туташтириб, янги фронтал из (P_{V_1}) ни топамиз.

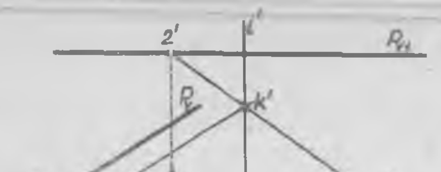


114- шакл

Агар айлантириш ўқи V_1 текисликда ётмаган бўлса, янги P_{V_1} изни текисликнинг айлантириш ўқи билан кесишган горизонталидан фойдаланиб топиш мумкин. P_{V_1} горизонталнинг янги (айлантирилгандан кейинги) фронтал изи n_1' нуқтадан ўтади (114- шакл, *б*).

Умумий вазиятдаги текисликни *H* текисликка перпендикуляр ўқ атрофида айлантириб, *W* текисликка ҳам перпендикуляр ҳолга келтириш мумкин.

115- шаклда излари (P_V, P_H) билан берилган умумий вазиятдаги текисликни *H* текисликка перпендикуляр ўқ ($i'i$) атрофида айлантириб, *W* га перпендикуляр ҳолга келтириш кўрсатилган. Текисликнинг айлантирилгандан кейинги горизонтал изи P_{H_1} ни ясаш шаклнинг ўзидан тушунарли (шаклда: $im \perp P_H$; $im_1 \perp OX$; $P_{H_1} \parallel OX$). Текисликнинг айлантирилгандан кейинги фронтал изи (P_{V_1}) ни аниқлаш учун олдин айлантириш ўқи билан *P* телисликнинг кесишган нуқтаси топилади. Бу нуқтанинг горизонтал проекцияси (*k*) айлантириш ўқининг горизонтал проекциясида бўлади ($k \equiv i$), фронтал проекцияси k' ни текисликнинг горизонтали ёки фронталидан фойдаланиб топиш қулай. Шаклда k' нуқта текисликнинг фронтали (nk, $n'k'$) ёрдамида топилган. Ўқ билан текисликнинг кесишган нуқтаси қўзғалмас нуқта, шунинг учун бу нуқта P_{H_1} изда олинган бирорта нуқта (1; $1'$) билан уланса, шу текисликнинг чизиғи ($k1$, $k'1'$) ҳосил бўлади. Изланган P_{V_1} из бу чизиқнинг фронтал изи $2'$ нуқтадан ўтади.



115- шакл

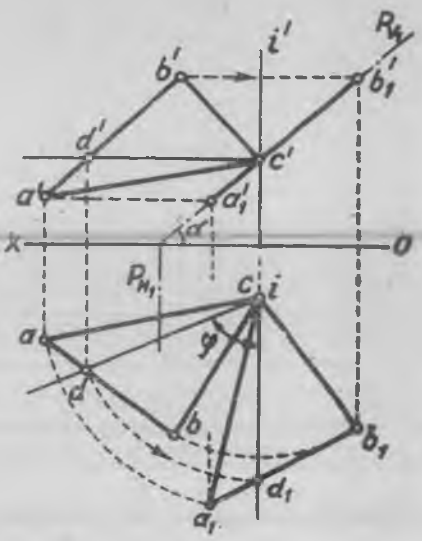
Текисликни айлантириш учун умуман унинг бирорта тўғри чизиғи (изи) лозим

бўлган бурчакка айлантирилса кифоя. Текисликнинг айлантирилгандан кейинги вазияти шу чизиғи (изи) ва ўқ билан текисликнинг кесишган қўзғалмас нуқтаси орқали тўла аниқланади.

Маълумки, текисликнинг горизонтал изи унинг горизонталларига, фронтал изи фронталларига параллел бўлади. Шунинг учун текислик излари орқали эмас, балки бошқача усул билан берилган бўлса, унинг излари ўрнига горизонталлари ва фронталлари олиниши мумкин.

116- шаклда *ABC* учбурчакни *V* текисликка перпендикуляр вазиятга келтириш кўрсатилган.

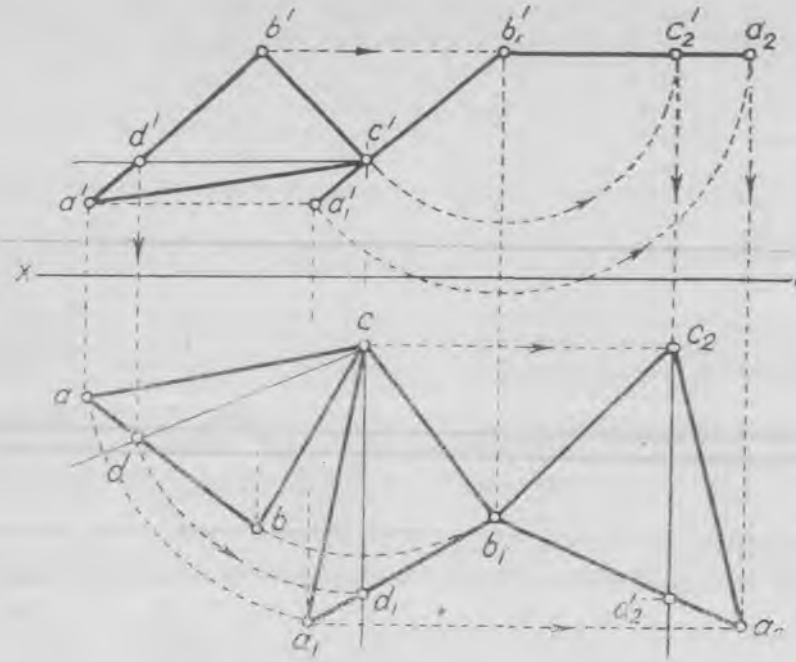
Учбурчакда горизонтал (*CD*) ўтказамиз ва унинг горизонтал проекциясини φ бурчакка, яъни *OX* ўқига перпендикуляр вазиятга келгунча айлантирамиз ($cd_1 \perp OX$). Айлантириш ўқи учбурчакнинг *C* учидан ўтган ва *H* га перпендикулярдир. Учбурчакнинг *A* ва *B* учларини ҳам φ бурчакка ($\varphi = \angle dcd_1$) айлантирсак, учбурчакнинг *V* га перпендикуляр вазиятга келтирилгандаги янги проекциялари ($a_1 b_1 c$ ва $a_1' b_1' c'$) ҳосил бўлади.



116- шакл

Текисликни проекцияловчи вазиятга келтириш йўли билан унинг *H* га ёки *V* га қиялик бурчагини топиш (114 ва 116- шаклларда текислик билан *H* орасидаги бурчак α топилган), нуқтадан текисликкача бўлган масофани, параллел текисликлар орасидаги масофани, нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани, тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтасини аниқлаш мумкин. Бу масалаларни ечишда айлантириш йўналиши ихтиёрий олинади, лекин бунда текислик билан бирга, берилган ҳамма элементларни ўша томонга ва ўша φ бурчакка айлантириш керак бўлади.

4. Т е к и с ш а к л н и п р о е к ц и я л а р т е к и с л и к л а р и д а н б и р и г а п а р а л л е л в а з и я т г а к е л г у н ч а а й л а н т и р и ш. Умумий вазиятдаги текис шаклни (унинг ҳақиқий кўринишини, бурчакларини, биссектрисаларини ва шу кабиларини ясаш мақсадида) проекция текисликларидан бирига параллел вазиятга келтириш учун *H* ва *V* текисликларга перпендикуляр бўлган икки ўқ атрофида кетма-кет икки марта айлантириш керак. Биринчи марта, масалан, *H* га перпенди-



117- шакл

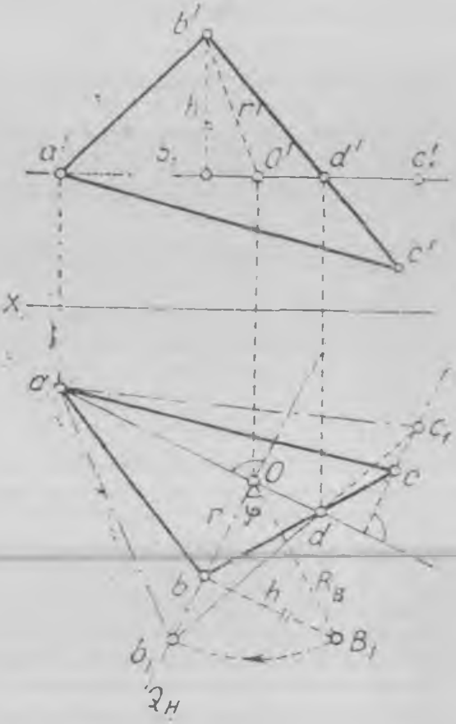
117- шаклда биринчи айлантириш ўқи H га перпендикуляр вазиятга келтирамиз (116- шакл). Иккинчи марта шаклни V га перпендикуляр ўқ атрофида айлантириб, H га параллел вазиятга келтирамиз (117- шакл).

117-шаклда биринчи айлантириш ўқи H га перпендикуляр ва учбурчакнинг C учидан ўтган, иккинчи айлантириш ўқи V га перпендикуляр ва учбурчакнинг В учидан ўтган. Эпюрда бу айлантириш ўқлари кўрсатилмаган, улар фақат фараз қилинган. Иккинчи марта айлантирилгандан кейин учбурчакнинг фронтал проекцияси $b'_1c'_2a'_2 \| OX$ вазиятга келгани учун горизонтал проекциясининг $(a_2b_1c_2)$ ўзига тенг бўлади, демак, бу $a_2b_1c_2$ проекцияда керак бўлган ясашларни бажариш мумкин.

42-§. Текисликни ўз горизонтали ёки фронтали атрофида айлантириш

Текис шаклни унинг горизонтали атрофида бир марта айлантириб, горизонтал проекциялар текислигига параллел вазиятга ёки фронтали атрофида бир марта айлантириб, фронтал проекциялар текислигига параллел вазиятга келтириш мумкин. Бундай усулдан, асосан, текис шаклнинг ҳақиқий кўринишини, унинг элементларини ясаш учун фойдаланилади.

Берилган ABC учбурчакни айлантириб, H текисликка параллел вазиятга келтириш лозим, деб фараз қилайлик (118-шакл). Учбурчакда AD горизонтал ўтказамиз ва уни айлантириш ўқи деб қабул қиламиз. Айлантириш ўқидаги ҳамма нуқталар, шу жумладан, A ва D нуқталар айлантиришда ўз жойларини ўзгартирмайди. Демак, учбурчакнинг янги горизонтал проекциясини ясаш учун, B ва C учларининг янги вазиятларини топиш кифоя. Айлантириш ўқи H текисликка параллел бўлгани учун, ҳар бир нуқтанинг горизонтал атрофида айланишидан ҳосил бўлган айлана текислиги ўққа, демак, H га ҳам перпендикуляр бўлади.



118- шакл

Қисқача қилиб айтганда, ҳар бир нуқта AD горизонтал атрофида горизонтал проекцияловчи текислик бўйича айланади, демак, нуқтанинг горизонтал проекцияси айлантириш ёки (горизонтал) нинг горизонтал проекциясига перпендикуляр тўғри чизиқ бўйича (16- параграфга биноан), фронтал проекцияси эса эллипс бўйича ҳаракат килади.

Текис шакл (бизнинг мисолимизда ABC учбурчак) H га параллел вазиятга келганда, ундаги ҳар бир нуқтанинг радиуси H текисликка ўз катталигида проекцияланади, V текисликдаги проекцияси горизонталнинг фронтал проекциясига тушади.

Юқорида айтилганларга биноан, берилган ABC учбурчакни унинг AD горизонтали атрофида айлантириб, H га параллел вазиятга келтириш учун ясашни тубандаги тартибда бажарамиз:

1) учбурчакнинг B учидан AD га перпендикуляр туширамиз ($BO \perp AD$); 16- параграфнинг иккинчи пунктига биноан, эпюрда $bO \perp ad$ бўлади, кейин o' ни топиб, уни b' билан туташтирамиз;

2) B нуқта учун унинг проекциялари (bo, $b'o'$) асосида тўғри бурчакли учбурчак ясаб, айлантириш радиусининг ҳақиқий узунлигини топамиз ($R_B = OB_1$);

3) B нуқтани айлантириш марказининг горизонтал проекцияси

(O) дан ad га перпендикуляр йўналиш бўйича $oB_1 = R_B$ кесмани қўйиб, b_1 ни топамиз ($ob_1 = R_B$);

4) C нуқтанинг янги горизонтал проекцияси (c_1) ни унинг айлантирилиш радиусини ясамай, b_1d чизиқнинг давоми билан c дан ad га туширилган перпендикулярнинг кесишув жойида топса ҳам бўлади.

Ясалган янги горизонтал проекция (ab_1c_1) ABC учбурчакнинг ҳақиқий катталигига тенг.

B ва C нуқталарнинг янги фронтал проекциялари (b_1' ва c_1') айлантириш ўқининг $a'd'$ цроекциясида бўлади.

Шаклда B ва C нуқталарнинг айлантирилишидан ҳосил бўлган горизонтал проекцияловчи текисликларнинг фақат горизонтал излари (Q_H, S_H) кўрсатилган.

118- шаклдаги учбурчак ўз горизонтали атрофида айлантирилиб, H га параллел вазиятга келтирилгандаги айлантириш бурчаги (φ) учбурчак билан H орасидаги икки ёқли бурчакнинг катталиги (α) га тенг ($\varphi=\alpha$). Бу бурчак эпюрда айлантириш радиусининг ҳақиқий узунлиги билан унинг горизонтал проекцияси орасидаги бурчакка баравардир, чунки айлантириш радиуси учбурчак текислигининг энг катта қиялик чизиғига тўғри келади (бу шаклни 63- шакл билан таққослаб кўринг).

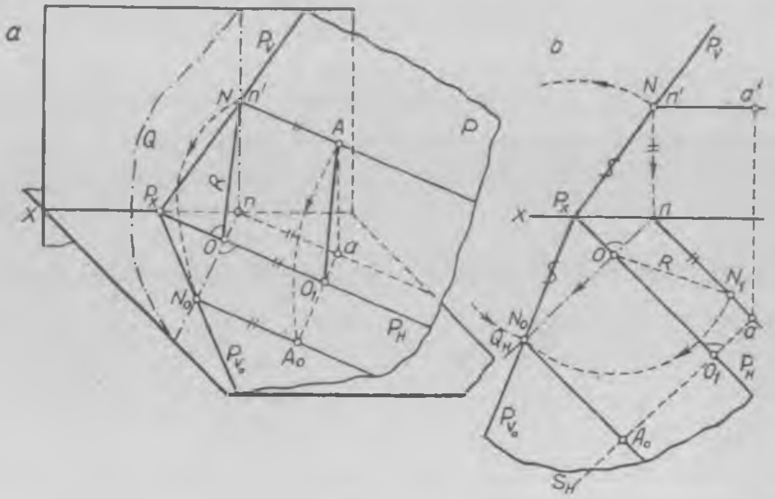
Берилган ABC учбурчакни горизонтли атрофида айлантириб, горизонтал проекцияловчи вазиятга ҳам келтириш мумкин. (Бу ишни қандай қилиб бажариш мумкин?)

Юқоридаги ясашга ўхшаш ясаш билан текис шаклни унинг фронтали атрофида айлантириб, V текисликка параллел вазиятга келтириш мумкин.

43- §. Текисликни ўз изларидан бири атрофида айлантириш

Излари билан берилган текисликда ясашга доир масалаларни ечиш ёки текисликда ётган шаклларнинг ҳақиқий кўринишини ясаш учун, берилган текисликни унинг изларидан бири атрофида айлантириб, ўша изи ётган проекциялар текислиги билан устма-уст тушириш (жипслаштириш) қулайдир. Текисликнинг горизонтал изи унинг горизонталларидан бири (хусусий вазиятдаги горизонтали), фронтал изи эса хусусий вазиятдаги фронтали бўлгани учун, бу айлантиришнинг юқоридаги текисликни ўз горизонтали ёки фронтали атрофида айлантиришдан (42-параграф) асосан фарқи йўқ.

119- шакл, a да умумий вазиятдаги P текисликни шу текислик да ётган A нуқта билан бирга горизонтал P_H изи атрофида айлантириб, H текисликка жойлаштириш кўрсатилган. A нуқтадан P текисликда AN горизонтал чизамиз; горизонталнинг фронтал изи (N) текисликнинг фронтал изида бўлади. Текислик H текисликка жипслаштирилгандан сўнг $P_H P_X P_V$ вазиятни олади; унинг горизонтал изи (P_H) ўз жойида қолади, фронтал изи текисликдаги бошқа нуқ-



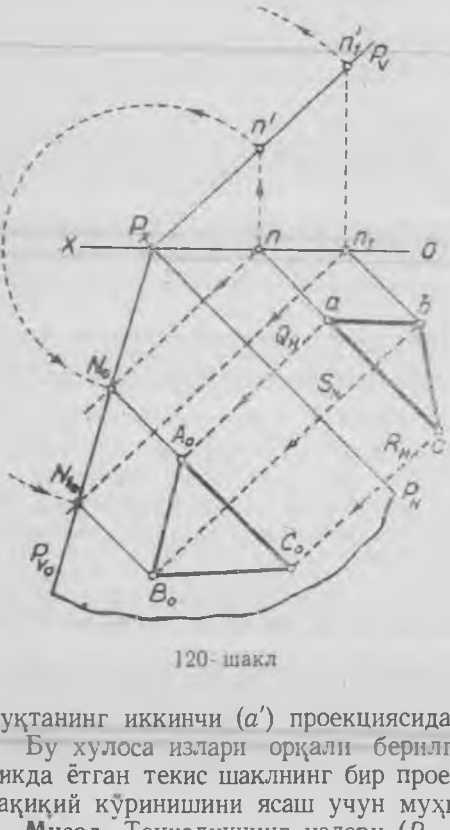
119- шакл

талар билан бирга айланиб, H текисликка тушади ва P_{V_0} вазиятни олади. Шунга кура, текисликдаги барча нуқталарнинг айлантирилгандан кейинги янги проекцияларини ясаш учун текисликнинг фронтал изидаги бирорта ихтиёрий нуқтанинг айлантирилгандан кейинги вазиятини топиб, уни P_X билан туташтирсак, P_{V0} келиб чиқади. Шаклда ихтиёрий нуқта сифатида N нуқта олинган. N нуқтанинг айлантириш текислиги (Q) горизонтал проекцияловчи текислик булиб, P_H га перпендикуляр жойлашган. Q билан P_H нинг кесишув нуқтаси (O) N нуқтанинг айлантирилиш маркази, ON кесма эса унинг айлантирилиш радиусидир. P текислик H га жипслаштирилгандан кейин айлантириш радиуси Q_H изга тушади ва унинг учида N_0 ҳосил булади. Бу N_0 нуқтани P_X билан туташтириб, P_V ни топамиз. Эпюрда N_0 нуқтани топиш учун (119-шакл, *б*) текисликнинг P_V изида ихтиёрий N нуқта оламиз (n' ҳам шу жойда) ва унинг горизонтал проекцияси (n) орқали айлантириш ўқи P_H изига перпендикуляр қилиб nO ни ўтказамиз. Бу перпендикуляр Q_H булади. Энди P_X нуқтадан $P_X n'$ радиусли ёй билан nO чизиқнинг давомини кесиб, N нуқтанинг янги — H га жипслаштирилгандаги ўрни (N_0) ни топамиз. N_0 нуқтани қўзғалмас P_X нуқта билан туташтирсак, P_{V0} ҳосил булади.

Текисликнинг A нуқтасидан ўтган горизонтали (AN) ҳам текислик билан бирга айланиб бориб, H текисликка жипслашади. AN горизонтал ҳамма вақт P_H га параллеллигича қолади ва H билан жипслашгандан кейин N_0 нуқтадан ўтади ($N_0 A_0 \parallel P_H$).

A нуқтанинг айлантирилиш радиуси N нуқтанинг айлантирилиш

радиусига тенг. A нуқтанинг айлантирилиш текислиги $S \parallel Q$ бўлади; унинг S_H изи A нуқтанинг горизонтал проекцияси (a) дан P_H га перпендикуляр бўлиб ўтади. Шундай қилиб, N_0 нуқтадан P_H га параллел ва a дан P_H га перпендикуляр ўтказсак, уларнинг кесишув жойида A нуқтанинг янги ўрни (A_0) келиб чиқади.



120- шакл

Текисликнинг янги P_{V_0} изини чизиш учун зарур бўлган N_0 нуқта айлантириш радиусининг ҳақиқий узунлигини ясаш йўли билан топилса ҳам бўлади. Бунинг учун, аввало, On ва nn' катетлари асосида тўғри бурчакли OnN_1 учбурчак ($aN_1 = nn'$) ясалса, унинг гипотенузаси (ON_1) айлантириш радиусига тенг бўлади. Кейин айлантириш маркази (O) дан nO чизиқ бўйича $ON_0 = ON_1 = R$ кесма қўйилиб, N_0 нуқта топилади.

Эпюрдан равшан кўриниб турибдики, A нуқтанинг жипслаштирилгандан кейинги ўрни P текисликнинг излари ва 119- шакл, *б* да тасвирланган H даги битта проекцияси бўлгандагина ясалиши мумкин, нуқтанинг иккинчи (a') проекциясидан ясашда фойдаланилмайди.

Бу хулоса излари орқали берилган умумий вазиятдаги текисликда ётган текис шаклнинг бир проекцияси мавжуд бўлганда унинг ҳақиқий кўринишини ясаш учун муҳимдир.

Мисол. Текисликнинг излари (P_H, P_V) ва унда ётган учбурчакнинг горизонтал проекцияси (Δabc) берилган. ABC учбурчакнинг ҳақиқий кўринишини ясаш керак (120- шакл).

P_H изни айлантириш ўқи деб қабул қиламиз ва текисликни H текислик билан жипслаштирамиз.

Ясаш тартиби:

1) берилган нуқталар орқали горизонталлар ўтказамиз ва уларнинг изларини топамиз (n, n' ва n_1, n_1');

2) горизонтал проекцияловчи айлантириш текисликларининг изларини ($Q_H \perp P_H$, $S_H \perp P_H$ ва бошқаларни) ўтказамиз;

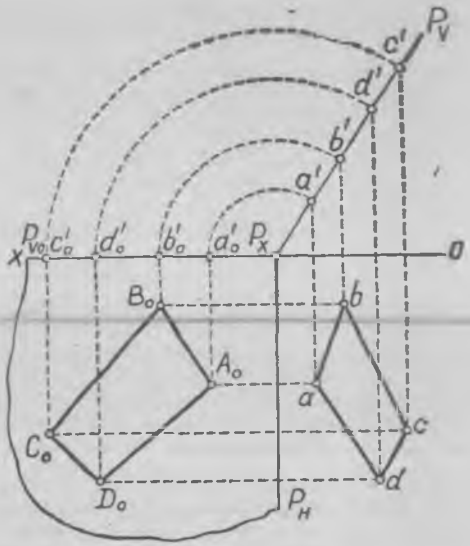
3) N_0 нуқтани топамиз ва уни P_X билан туташтириб, P_{V_0} изни ясаймиз;

4) N_0 ва N_{10} нуқталар орқали горизонталларнинг айлантирилгандан кейинги вазиятларини чизамиз ($N_0C_0 \parallel P_H \parallel N_{10}B_0$);

5) жипслаштирилган горизонталларни айлантириш текисликларининг горизонтал излари (Q_H S_H ва R_H) билан кесишув жойларида A_0, B_0, C_0 нуқталарни топамиз;

6) $A_0B_0C_0$ изланган учбурчак, яъни $\Delta A_0B_0C_0 = ABC$ бўлади.

Проекцияловчи текисликларни жицслаштириш айниқса осон, чунки бундай текисликларнинг излари орасидаги бурчак ҳақиқатда тўғри бурчакдир. Текислик жипслаштирилгандан кейин ҳам бу бурчак, албатта, сақланади. Мисол тариқасида 121-шаклда фронтал проекцияловчи P текислик шу текисликда ётган $ABCD$ тўртбурчак билан бирга P_H изи атрофида айлантирилиб H текисликка жипслаштирилган. Жипслаштирилгандан сўнг текисликнинг фронтал изи OX ўқига келиб қолади, a', b', c', d' нуқталар бир-бири орасидаги ва изларнинг учрашув нуқтасигача бўлган масофаларини ўзгартирмасдан, a_0', b_0', c_0', d_0' нуқталарга ўтади. Нуқталарнинг горизонтал проекциялари (a, b, c, d нуқталар) эса OX га параллел тўғри чизиқлар бўйлаб сурилади. Шундай қилиб, $A_0B_0C_0D_0$ берилган тўртбурчакнинг H га жипслаштирилган вазиятидир.



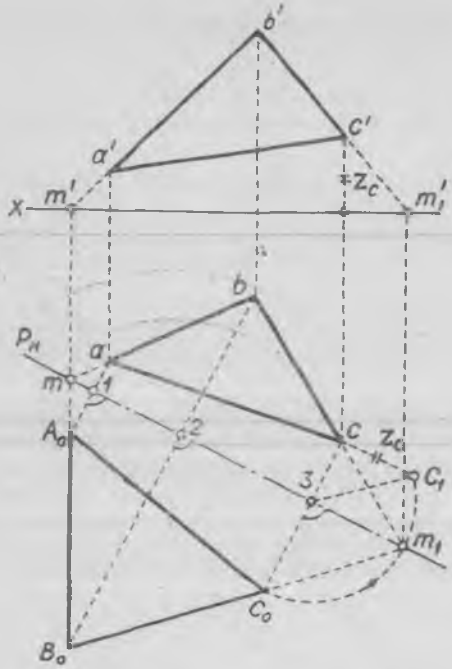
121-шакл

Бу ерда шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, проекцияловчи текисликнинг шу текислик изларидан бири атрофида айлантирилишини проекция текисликларидан бирига перпендикуляр ўқ атрофида айлантириш деб қараш мумкин (41-параграф), фақат бу ерда текисликдаги нуқталар исталган бурчакка айлантирилмасдан, проекциялар текислигига келгунча айлантирилади.

Агар эпюрда берилган текисликнинг излари бўлмаса, уни жипслаштириш учун айлантириш ўқи вазифасини бажарувчи изинигина ясаш кифоя.

Мисол. Бирор P текислик ABC учбурчакнинг проекциялари билан берилган. Учбурчакни H текисликка жипслаштириш керак (122-шакл).

Ясаш тартиби:



122- шакл

1) учбурчакнинг AB ва BC томонларини давом эттириб, уларнинг горизонтал изларини топамиз (m ва m_1 нуқталар);

2) текисликнинг P_H изини чизамиз ва уни айлантириш ўқи деб қабул қиламиз;

3) учбурчак учларидан бирининг, масалан, C учининг айлантирилгандан кейинги ўрнини топамиз. У c нуқтадан P_H га туширилган перпендикулярнинг давомида 3 нуқтадан айлантириш радиусининг ҳақиқий узунлигига тенг масофада бўлади ($3C_0 = 3C_1 = R_c$);

4) айлантириш ўқидаги m ва m_1 нуқталар ҳамма вақт қўзғалмас, шунинг учун m_1 нуқтани C_0 билан туташтириб, бу чизиқнинг давомида B_0 нуқтани топамиз; кейин B_0 ни m билан туташтирамизда, бу чизиқ билан a дан P_H га туширилган перпендикулярнинг кесишув жойида A_0 нуқтани топамиз;

5) $A_0B_0C_0$ учбурчак берилган ABC учбурчакнинг H текисликка жипслаштирилгандан кейинги вазиятидир.

Жипслаштириш усулидан фойдаланиб, берилган текисликда ётган ҳар қандай текис шаклнинг ҳақиқий кўриниши маълум бўлса, унинг проекцияларини ясаш мумкин. Бунинг учун олдин берилган текисликни унинг изларидан бири атрофида айлантириб, проекциялар текислиги билан жипслаштириш керак. Шундан кейин жипслаштирилган текисликда шаклнинг ҳақиқий кўринишини ясаш ва текисликни асли ҳолига яна қайтариш лозим.

Мисол. Эпюрда умумий вазиятдаги P текислик берилган; унда ётган квадратнинг проекцияларини ясаш керак. Квадратнинг томони L мм бўлиб, текисликда ихтиёрий жойлашган (123-шакл).

Ясаш тартиби:

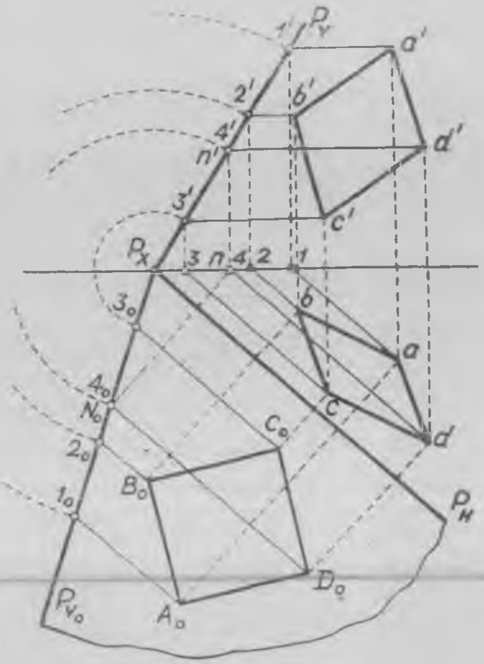
1) текисликни унинг изларидан бири, масалан, P_H атрофида айлантириб, H текисликка жипслаштирамиз;

2) жипслаштирилган текисликда (P_V, P_x P_H) томони Lмм бўлган $A_0B_0C_0D_0$ квадрат чизамиз;

3) квадратнинг учларидан текисликнинг горизонталларини ўтказамиз; жипслаштирилган ҳолатдаги горизонталларнинг фронтал излари 1_0, 2_0, 3_0 ва 4_0 рақамлар билан белгиланган;

4) горизонталларнинг фронтал изларидан фойдаланиб, уларнинг фронтал (OX га параллел) ва горизонтал (P_H га параллел) проекцияларини чизамиз;

5) A_0, $Б_0$, C_0, D_0 нуқталар орқали P_H изга перпендикулярлар ўтказамиз ва бу перпендикулярларнинг тегишли горизонталларнинг горизонтал проекциялари билан кесишув жойларида a, b, c, d нуқталарни топамиз;



123-шакл

6) квадратнинг горизонтал проекцияси ($abcd$) бўйича квадратнинг фронтал проекцияси ($a'b'c'd'$) ни ясаймиз.

Биз юқоридаги мисолда (олдинги 119 ва 120-шаклларда ҳам) нуқталарнинг проекцияларини ясаш учун улардан ўтган горизонталлардан фойдаландик, умуман, нуқталардан ўтган фронталлардан ёки текисликда ётган ихтиёрий йўналишдаги ҳар қандай тўғри чизиқлардан фойдаланса ҳам бўлади.

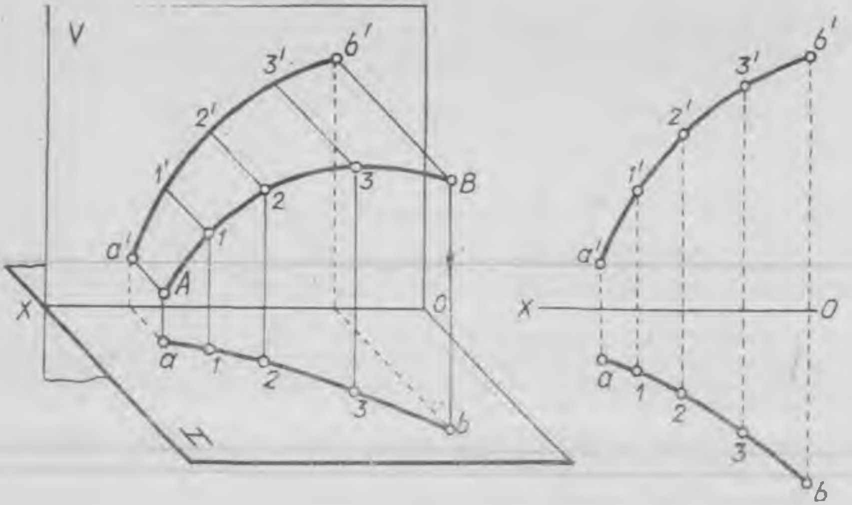
VI боб. ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

44-§. Умумий маълумот

Фазода ҳаракатланаётган нуқтанинг траекторияси *чизиқ* дейилади. Сиртлар назариясини ўрганишда эгри чизиқни сиртнинг текислик билан ёки бирорта бошқа сирт билан кесишув натижаси деб қараш қулайроқдир.

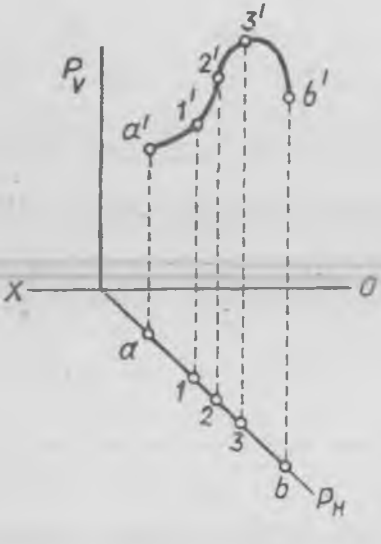
Эгри чизиқлар текис (ҳамма нуқталари бир текисликда ётган) ва фазовий эгри чизиқларга бўлинади.

Текис эгри чизиқлар ҳам, фазовий эгри чизиқлар ҳам қонуний ёки қонунсиз (график) чизиқлар бўлиши мумкин. Агар эгри чизиқнинг ҳосил бўлиш қонунини кўрсатувчи тенгламасини тузиш мумкин бўлса, бундай эгри чизиқ *қонуний эгри чизиқ* дейилади. Тенгламасининг кўринишига қараб, қонуний эгри



124- шакл

чизиқлар трансцендент (масалан, синусоида, циклоида ва бошқалар) ва алгебраик эгри чизиқларга бўлинади. Алгебраик эгри чизиқ тенгламасининг даражаси шу эгри чизиқнинг *тартиби* деб аталади. Масалан, эгри чизиқ тенгламасининг даражаси икки бўлса, бундай эгри чизиқ *иккинчи тартибли эгри чизиқ* дейилади.



125- шакл

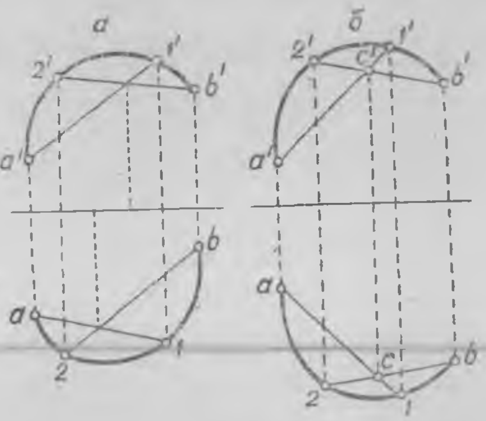
Эгри чизиқнинг тартибини график усулда, бу эгри чизиқнинг тўғри чизиқ ёки текислик билан мумкин бўлганча энг кўп кесишув нуқталари сонига қараб билиш мумкин. n-тартибли текис алгебраик эгри чизиқни ихтиёрий тўғри чизиқ n нуқтада кесади. n-тартибли фазовий алгебраик эгри чизиқ умумий вазиятдаги текислик билан n нуқтада кесишади.

Эгри чизиқда ётмаган ихтиёрий нуқтадан (текис эгри чизиқ учун унинг текислигида ётган ихтиёрий нуқтадан) унга ўтказилиши мумкин бўлган уринмаларнинг максимал сони эгри чизиқнинг *синфи* дейилади. Эгри чизиқнинг тартиби ва синфи бир хил бўлиши ҳам, бир хил бўлмаслиги ҳам мумкин.

Эгри чизиқнинг тартиби ва синфи деган тушунчалар трансцендент эгри чизиқларга тааллуқли эмас.

Агар эпюрда эгри чизиқнинг бир неча нуқтаси, проекциялари, шу жумладан, характерли нуқталарининг проекциялари ҳам берилган бўлса, эгри чизиқ маълум деб ҳисобланади. Характерли нуқталар уларда эгри чизиққа ўтказилган уринмаларнинг махсус вазияти билан белгиланади.

Эгри чизиқнинг проекциялари умуман эгри чизиқлар бўлади (124- шакл). Агар берилган эгри чизиқ текис эгри чизиқ бўлиб, унинг текислиги проекция текисликларидан бирига перпендикуляр бўлган ҳолдагина эгри чизиқнинг шу текисликдаги проекцияси тўғри чизиқ бўлади (125- шакл).



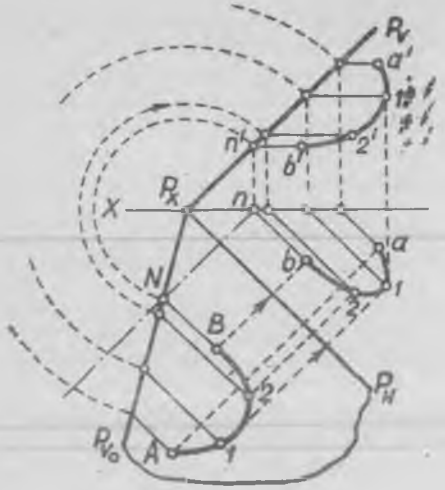
126- шакл

Эпюрда эгри чизиқнинг қандай эгри чизиқ эканлигини тубандагича аниқлаш мумкин: берилган чизиқда бир қанча ихтиёрий ватар оламиз; агар бу ватарлар ўзаро кесишмаса, берилган эгри чизиқ фазовий (126- шакл, *а*), агар ватарлар ўзаро кесишса, эгри чизиқ текис бўлади (126- шакл, *б*).

45- §. Текис эгри чизиқлар

Умуман, бирор текисликда ётган текис эгри чизиқнинг проекцияларини ясаш учун, берилган текисликни унинг изларидан бири атрофида айлантириб, проекция текисликларидан бирига жипслаштириш, шундан кейин эса бу текисликда эгри чизиқнинг ҳақиқий кўринишини ясаш ва текисликни ундаги эгри чизиқ билан бирга асл вазиятига келтириш керак (127- шакл). Аксинча, эпюрда проекциялари орқали берилган эгри чизиқнинг ҳақиқий кўринишини ясаш учун унинг текислигини проекциялар текисликларидан бирига жипслаштириш лозим.

Энди, текис эгри чизиқларга оид баъзи нуқталар устида тўхталамиз. Бундай характерли нуқталардан тубандагиларни кўрсатиб ўтиш мумкин: 1) букилиш нуқтаси — *A* (128- шакл, *а*), бундай нуқтада эгри чизиқ *T* тўғри чизиққа уриниб, унинг иккинчи томонига ўтиб кетади ва тўғри чизиққа шу нуқтада



127- шакл

уринма бўлиб қолади; 2) қўшалоқ нуқта — B (128- шакл, *б*), бундай нуқтада эгри чизиқ ўзини ўзи кесиб ўтади ва икки уринмага T, T_1 га) эга бўлади; 3) қайтиш нуқтаси C (128- шакл, *в*), бундай нуқтада эгри чизиқ тўғри чизиққа уриниб, йўналишини бирданига ўзгартиради ва ўша нуқтада тўғри чизиққа уринма бўлиб қолади.

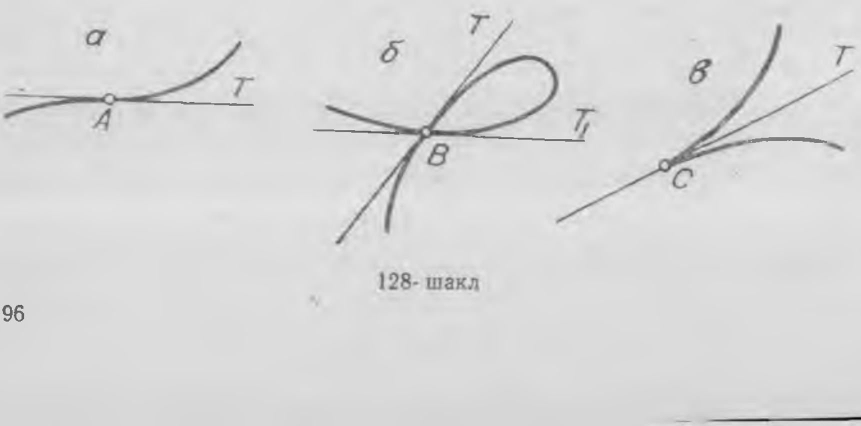
Бундай текис эгри чизиқларга хос нуқталар фазовий эгри чизиқларнинг текисликка проекцияланиши ёки сиртларнинг ўзаро кесилиши натижасида ҳам ҳосил бўлиши мумкин.

Ихтиёрий текис эгри чизиқнинг ҳақиқий узунлигини ясаш учун, аввал унинг ҳақиқий кўриниши чизилади, шундан кейин эса бир неча кичик бўлакчаларга бўлинади, ҳар қайси бўлакча тўғри чизиқ кесмаси деб қабул қилинади ва улар тартибли равишда бир тўғри чизиққа қўйилади. Натижада, ҳосил бўлган кесманинг узунлиги берилган эгри чизиқнинг узунлигига тахминан тенг бўлади (129- шакл).

Бу усул билан эгри чизиқларнинг ҳақиқий узунлигини топиш техникага оид кўпгина масалаларни ечишда қаноатланарли натижа беради.

Қонуний текис эгри чизиқлардан конус кесимлари деб аталадиган эгри чизиқлар инженерлик практикасида кўпроқ тарқалган.

Айлана, эллипс, парабола ва гипербола конус кесимлари деб аталади, чунки иккинчи тартибли бу эгри чизиқлар тўғри



128- шакл

129- шакл

доиравий конус (айланиш конусининг) текислик билан кесилишидан хосил қилиниши мумкин (бу ҳақда шу китобнинг X бобидаги 64- параграфга қаранг). Конус кесимларининг хоссалари аналитик геометрия курсида мукаммалроқ ўрганилади.

Техникада кўпроқ тарқалган бошқа қонуний текис эгри чизиқлардан синусоидани, Архимед спиралини, логарифмик спирални, эвольвентани, циклоида ва бошқаларни кўрсатиш мумкин. Бу эгри чизиқларни ясаш усуллари билан чизмачилик китобларида танишиш мумкин.

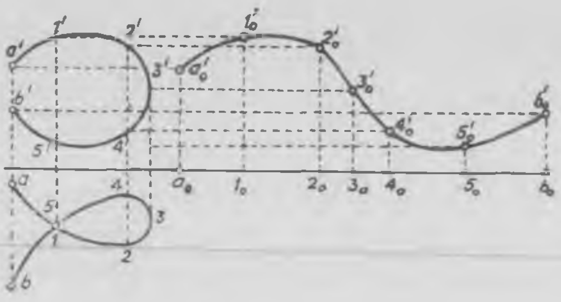
46- §. Фазовий эгри чизиқлар

Фазовий эгри чизиқ эпюрда икки проекцияси ва белгиланган бир ёки бир неча нуқтаси бўйича берилади. Эгри чизиқ проекцияларидан бирининг маълум бир қисмини иккинчи проекциясининг қайси кисмига оид эканлиги устида шубҳа туғилган ҳолларда проекциялардаги нуқталарни белгилаш ҳам зарур бўлади. Масалан, 130- шаклда проекциялардаги нуқталар белгиланмаса, шундай шубҳа туғилиши мумкин бўлади, яъни горизонтал проекциядаги a нуқта фронтал проекциядаги b' нуқтага тўғри келади деб ўйлаш мумкин эди.

Эпюрда эгри чизиққа оид бир қанча нуқталарнинг проекциялари белгиланганлиги учун ҳеч қандай шубҳага ўрин қолмайди.

Фазовий эгри чизиқнинг ҳақиқий кўринишини билиш учун унинг моделини ясаш керак.

Фазовий эгри чизиқ ёйининг ҳақиқий узунлиги тубандагича ясалади (130- шакл): проекциялардан бири, масалан, горизонтал проекция бир қанча бўлакчаларга бўлинади ва уларнинг ҳар бири ўз ватари билан алмаштирилиб, бу ватарлар тўғри чизиқ (OX) бўйича кетма- кет қўйилади (эпюрда $a_0 1_0 = a1$; $1_0 2_0 = 12, \ldots$). Шундан кейин, топилган a_0, 1_0, 2_0, ... нуқталардан тўғри чизиққа кўтарилган перпендикулярлар бўйича тегишли нуқталарнинг баландликлари (аппликаталари) қўйилиб, a_0', $1_0'$, $2_0'$, ... нуқталар ясалади. Бу нуқталарни туташтирувчи текис эгри чизиқнинг узунлиги фазо-



130- шакл

вий эгри чизиқнинг узунлигига тахминан тенг бўлади. Бу текис эгри чизиқнинг узунлиги 129- шаклдаги каби ясалади.

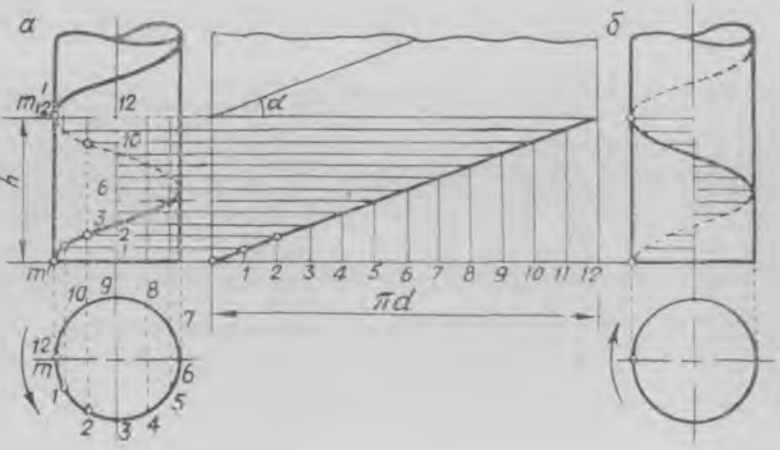
Қонуний фазовий эгри чизиқлардан техникада энг кўп тарқалгани винт чизиқлардир.

1. Цилиндрик винт чизиқ. Нуқта доиравий цилиндр сирти бўйича илгарилама ва айланма ҳаракат қилдирилганда қолдирган изи (траекторияси) *цилиндрик винт чизиқ* дейилади.

131- шаклда цилиндрик винт чизиқнинг проекциялари кўрсатилган. Винт чизиқ доиравий цилиндр сирти бўйича $M(m', m)$ нуқтанинг бир хил тезлик билан айланма ва илгарилама ҳаракат қилишидан ҳосил бўлган. M нуқта цилиндрнинг ўқи атрофида бир марта 360° айланганда цилиндрнинг ясовчиси бўйича h баландликка кўтарилади. Бу h баландлик цилиндрик винт чизиқнинг *қадами* дейилади. Техникада қадам, шароитга қараб, ҳар хил бўлиши мумкин. Винт чизиқнинг $M'M'_{12}$ қисми унинг *бир ўрами*, $p = \frac{h}{2\pi}$ карталик эса винт чизиқнинг *параметри* дейилади. Цилиндрнинг радиуси винт чизиқнинг *радиуси*, цилиндрнинг ўқи эса винт чизиқнинг *ўқи* дейилади. Винт чизиқ қадами ва радиуси орқали берилади.

Цилиндрик винт чизиқнинг горизонтал проекцияси айлана бўлади. Винт чизиқнинг фронтал проекциясини ясаш учун қадам (h) ва айлана n та тенг бўлакка бўлинади (131- шаклда $n=12$). Шундан кейин горизонтал проекциядаги 1, 2, 3, ..., n нуқталардан кўтарилган перпендикулярларнинг шу нуқталар фронтал проекцияларидан ўтган горизонтал чизиқлар билан кесишув нуқталари топилади. Бу нуқталар лекало билан туташтирилса, винт чизиқнинг фронтал проекцияси ҳосил бўлади. Унинг синусоида эканлиги ясашдан яққол кўриниб турибди.

Агар винт чизиқнинг фронтал проекцияси цилиндрнинг кўринадиган (олд) томонида чапдан ўнгга кўтарилса (горизонтал проекцияда айланани номерлаш соат стрелкасининг юришига тескари бўлса), винт чизиқ *ўнақай* дейилади. Агар фронтал



131- шакл

проекциянинг кўринадиган томонида винт чизиқ ўнгдан чапга кўтарилса, бундай винт чизиқ *чапақай* бўлади.

131- шакл, *а* да ўнақай винт чизиқ, 131- шакл, *б* да эса чапақай винт чизиқ тасвирланган.

Цилиндрик винт чизиқнинг ёйилмаси тўғри чизиқ бўлади (131-шаклда ўртада).

Ёйилмадаги α бурчак винт чизиқнинг *кўтарилиш бурчаги* дейилади. Бу бурчакни тубандаги формуладан топиш мумкин:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi R},$$

бу ерда h — винт чизиқнинг қадами;
R — винт чизиқнинг радиуси;

$$\pi \approx 3{,}14 \ldots$$

$$h = 3\frac{1}{2} \text{ мм ва } R = 15 \text{ мм}$$

бўлса, $\alpha = 2°5'$ бўлади.

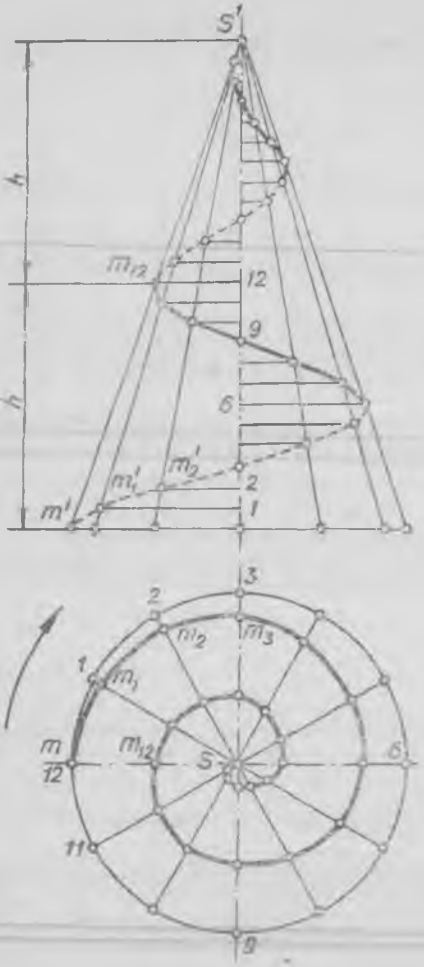
Винт чизиқ бир ўрамининг узунлиги ёйилмадаги тўғри бурчакли учбурчакдан топилади:

$$L = \sqrt{h^2 + (2\pi R)^2}.$$

Шундай қилиб ,винт чизиқ айланиш цилиндри сиртидаги икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа бўлади. Сиртда олинган икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа шу сиртнинг *геодезик чизиғи* дейилади.

Юқорида айтиб ўтилгандан ташқари, техникада қадами ўзгарувчан цилиндрик винт чизиқлардан ҳам фойдаланилади.

2. Конуссимон винт чизиқ. Агар M нуқта конуснинг MS ясовчиси бўйича бир хил тезлик билан илгариланма ҳаракат, MS ясовчи эса конуснинг ўқи атрофида бир хил бур-



132- шакл

чакли тезлик билан айланма ҳаракат қилдирилса, *М* нуқта фазода конуссимон винт чизиқ ясайди (132-шакл).

Конуссимон винт чизиқнинг радиуси ўзгарувчан бўлади, унинг ўзгариши айланиш бурчагига ёки марказнинг сурилишига пропорционалдир. Конуссимон винт чизиқнинг қадами ё ўзгармас ёки ўзгарувчан бўлиши мумкин. 132-шаклда ўзгармас қадамли коннуссимон винт чизиқни ясаш учун конус асосининг айланасини ҳамда винт чизиқнинг қадамини тенг бўлакларга бўлиш ва конуснинг тегишли ясовчиларини ўтказиш керак. Бизнинг мисолимизда айлана ҳам, қадам ҳам, 12 бўлакка бўлинган. *М* нуқта ясовчи бўйича $\frac{h}{12}$ масофага кўтарилганда, ясовчи $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ бурчакка айланади ва нуқтанинг проекциялари $m_1 m_1'$ бўлади; нуқта 2 $\frac{h}{12}$ масофага кўтарилганда, ясовчи 60° бурчакка айланади ва нуқтанинг проекциялари m_2, m_2' бўлади ва ҳоказо.

Конуссимон винт чизиқнинг фронтал проекцияси амплитудаси камаювчи эгри чизиқ, горизонтал проекцияси эса Архимед спирали бўлади.

Цилиндрик ва конуссимон винт чизиқлардан ташқари, техникада сферик (шар сиртига чизилган) ва ўзгарувчан параметрли махсус винт чизиқлар ҳам бўлади.

Винт чизиқ нарезкалар винт сиртларининг геометрик асосидир.

VII боб. ЭГРИ СИРТЛАРНИНГ ҲОСИЛ ҚИЛИНИШИ, ТАСВИРЛАНИШИ ВА ТЕХНИКАДА ИШЛАТИЛИШИ

47- §. Умумий маълумотлар

Иккита жисмнинг бир-бирига тегиб турган соҳаси шу жисмнинг *сирти* дейилади. Бу соҳа, умуман, ҳаракатланадиган соҳадир. Сиртнинг ҳаракатланиши бир-бирига тегиб турган жисмнинг ҳолатига боғлиқ. Жисм ҳамма вақт ҳажмга эга, шунинг учун унинг сирти берк соҳа бўлади.

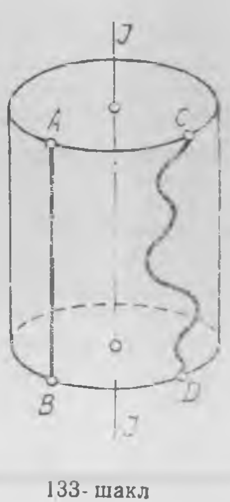
Атрофимиздаги нарсаларнинг бир талайи киши фаолиятининг самарасидир. Бу нарсалар маълум мақсад билан қилинади, шунинг учун ҳам уларнинг фазовий шакли (сирти) тасодифий бўлмай, балки маълум талабларга жавоб беради.

Чизма геометрияда сиртни чизиқнинг ёки бошқа бир сиртнинг ҳаракати натижасида қолдирган изи деб қараш қулайроқ. Бу принципга мувофиқ, сирт ўзгарувчан ёки ўзгармас кўринишдаги бирор чизиқнинг бошқа чизиқлар ёки сиртлар бўйича ҳаракат қилиши натижасида ҳосил бўлади.

Ҳаракатланиб сирт ҳосил қилувчи чизиқ *ясовчи* дейилади. Ясовчи чизиқнинг ҳаракатни белгиловчи чизиқлар *йўналтирувчилар* деб аталади.

Ҳамма сиртлар ясовчиларининг турларига қараб, икки синфга бўлинади: 1) чизиқли сиртлар — ясовчилари тўғри чизиқ бўлган сиртлар ва 2) чизиқсиз сиртлар — тўғри чизиқнинг ҳаракатидан ҳосил бўлиши мумкин бўлмаган сиртлар. Чизиқли сиртларга мисол қилиб цилиндр, конус сиртларни, чизиқсиз сиртларга мисол қилиб эса шар, эллипсоид сиртларни кўрсатиш мумкин.

Шунга ҳам эътибор бериш керакки, чизиқли сиртлар фақат тўғри чизиқнинг ҳаракати билангина эмас, балки эгри чизиқнинг ҳаракати билан ҳам ҳосил қилиниши мумкин. Масалан, 133-шаклда тасвирланган айланиш цилиндри ясовчи AB тўғри чизиқнинг айланиши натижасида ёки маркази цилиндрнинг ўқи бўйича сурилаётган айлананинг ҳаракати натижасида ва, ниҳоят, цилиндр сиртига чизилган ихтиёрий CD эгри чизиқнинг JJ ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил қилиниши мумкин. Аммо сирт ясашда мумкин бўлган усуллардан ва ясовчи чизиқлардан сиртни тасвирлаш ва унга оид масалаларни ечиш учун энг қулай ва оддий бўлганларигина олинади.



133- шакл

Тўғри чизиқли сиртлардан ёндош (бир-бирига мумкин қадар яқин) ясовчилари ўзаро параллел бўлган (масалан, цилиндр) ёки ўзаро кесишган (масалан, конус) сирт-

ларни текисликка ёйиш мумкин. Бундай чизиқли сиртлар *ёйиладиган сиртлар* дейилади. Ёндош ясовчилари учрашмас бўлган чизиқли сиртлар ва эгри чизиқли сиртлар (масалан, шар сирти) текисликка ёйилмайди, шунинг учун улар *ёйилмайдиган сиртлар* деб аталади.

Сиртлар аналитик усулда, яъни тенгламалари билан берилган бўлиши (алгебраик ва трансцендент сиртлар) ҳамда график усулларда берилиши мумкин.

Агар сиртнинг алгебраик тенгламаси $[\Phi(x, y, z)=0]$ n-даражали бўлса, бу сирт n-тартибли алгебраик сирт дейилади. Маълумки, текислик биринчи тартибли сиртдир. Сиртнинг тартибини шу сирт ва унга оид бўлмаган ихтиёрий тўғри чизиқнинг кесишув нуқталарига қараб билиш мумкин. Масалан, сирт тўғри чизиқ билан икки (ҳақиқий ёки мавҳум) нуқтада кесишса, бу сирт иккинчи тартибли сирт бўлади.

Шундай қилиб, «сиртлар» деган умумий тушунчадан сиртларнинг тубандаги бир неча синфи ажралади:

1) айланиш сиртлари — ихтиёрий ясовчи чизиқнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртлар, бу сиртлар, жумласига, масалан, иккинчи тартибли айланиш сиртлари киради;

2) чизиқли сиртлар; тўғри чизиқнинг йўналтирувчи винт чизиқлар бўйича ҳаракатланиши натижасида ҳосил бўлган винт сиртлар ҳам шулар жумласига киради;

3) диаметри ўзгармас ёки ўзгарувчан айлананинг ҳаракатидан ҳосил бўлиши мумкин бўлган циклик сиртлар;

4) чизмада сирт устида ётган бир қанча чизиқ (жумладан, горизонталлар) билан тасвирланадиган топографик сиртлар ва, умуман, график усулда бериладиган сиртлар.

48- §. Айланиш сиртлари

Бирорта эгри ёки тўғри чизиқнинг қўзғалмас тўғри чизиқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт *айланиш сирти* дейилади. 134- шаклда умумий кўринишдаги айланиш сирти тасвирланган. ABC эгри чизиқ айланиш сиртининг ясовчиси, OO_1 тўғри чизиқ унинг ўқи дейилади.

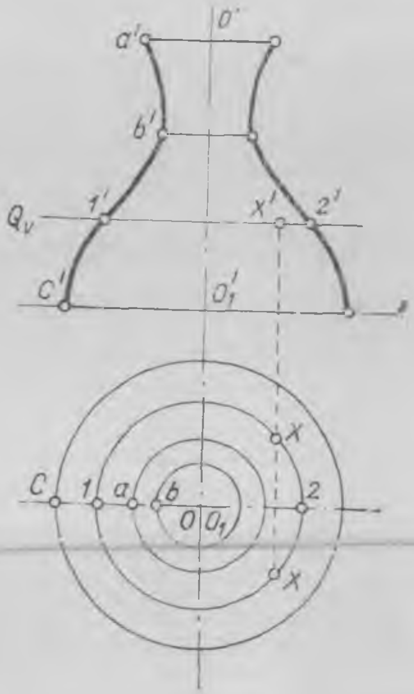
Айланиш сиртининг ўз ўқидан ўтган текисликлар билан кесилишидан ҳосил бўлган чизиқлар *меридианлар* дейилади. Айланиш сирти исталган меридионал текисликка нисбатан симметрик, ҳамма меридианлар эса конгруэнт (тенг) бўлади улардан ҳар бири сиртнинг ўқи билан икки симметрик қисмга бўлинади.

Ҳамма айланиш сиртларининг умумий хоссаси шундан иборатки, улар айлантириш ўқига перпендикуляр текислик билан кесилса, айлана ҳосил бўлади. Бундай айланалар сиртнинг *параллеллари* дейилади.

Ўзининг икки томонидаги ёндош параллелларидан катта бўлган параллелнинг меридиан чизиқларидан бири билан ке-

сишган нуқтасидан ўша меридианга уринма қилиб ўтказилган тўғри чизиқ айланиш сиртининг ўқига параллел бўлса, катта диаметрли бундай параллел *экватор* деб аталади. Айланиш сирти бир неча экватор чизиғига эга бўлиши мумкин.

Параллеллардан фойдаланиб, айланиш сиртида ётган нуқтанинг берилган битта проекцияси бўйича иккинчи проекциясини топиш қийин эмас. 134- шаклда нуқтанг берилган фронтал проекцияси (x^1) бўйича горизонтал проекцияси (x) ни топиш кўрсатилган.



134- шакл

Айланиш сиртини эпюрда тасвирлаш учун, одатда, унинг ўқи проекциялар текисликларидан бирига перпендикуляр қилиб олинади.

Айланиш сиртларини иккинчи тартибли ва юқори ($n>2$) тартибли сиртларга бўлиш мумкин.

1. Иккинчи тартибли айланиш сиртлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ ўз ўқи атрофида айлантирилса, иккинчи тартибили сирт ҳосил бўлади.

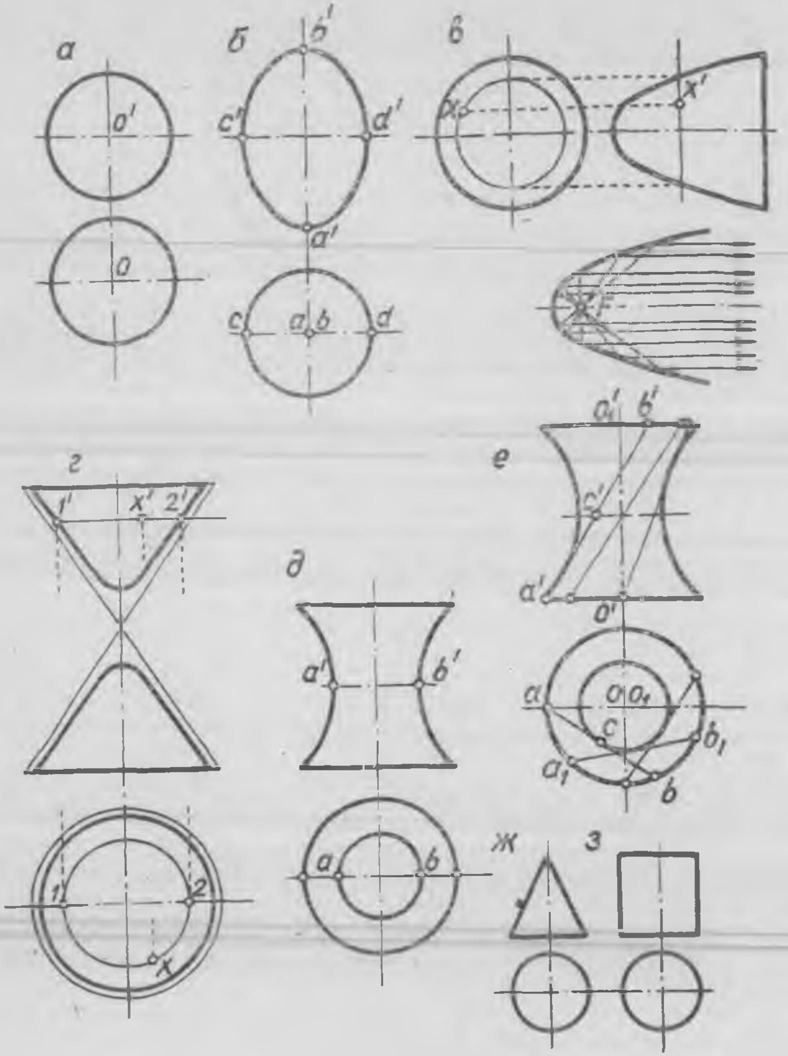
Техникада иккинчи тартибли айланиш сиртларининг тубандаги турлари учрайди:

1. Шар — айлананинг ўз диаметри атрофида айланишидан ҳосил бўлади (135- шакл, *а*).

2. Айланиш эллипсоиди — эллипснинг ўз ўқларидан бири атрофида айланишидан ҳосил бўлади (135- шакл, *б*).

3. Айланиш параболоиди — параболанинг ўз ўқи атрофида айланишидан ҳосил булади (135- шакл, *в*). Бу сиртнинг ажойиб хоссаси бор: параболанинг фокусида (*F* нуқтада) жойлашган ёруғлик манбаидан чиққан нурлар параллел тарам-тарам бўлиб акс этади. Бу хоссадан ёруғлик техникасида, прожекторларнинг акс эттиргичларида ва нур сочувчи бошқа манбаларда кенг фойдаланилади. Параболик кўзгунинг бу хоссасидан қуёшнинг параллел тушаётган нурларини айлананинг фокусига йиғиш учун гелиоустановкаларда фойдаланилади. Шундай усул билан йиғилган қуёш нурларининг иссиқлик энергияси техника мақсадлари учун ишлатилади.

4. Икки паллали айланиш гиперболоиди — гиперболанинг



135- шакл

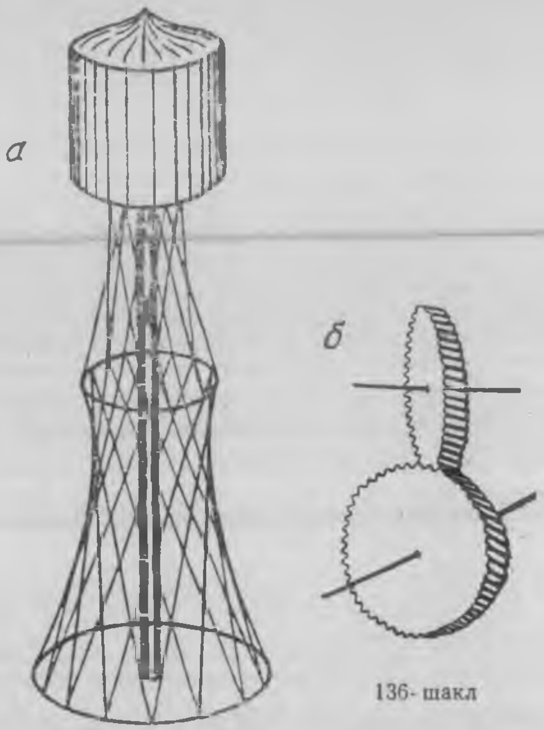
ўз ҳақиқий ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлади (135- шакл, *г*). 5. Бир паллали айланиш гиперболоиди — гиперболанинг ўз мавҳум ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлади (135- шакл, *д*). Бу сирт тўғри чизиқни шу тўғри чизиқ билан учрашмайдиган бошқа тўғри чизиқ (ўқ) атрофида айлантириш йўли билан ҳам ҳосил қилиниши мумкин (135- шакл, *е*). Сиртнинг икки система ясовчилари (*AB* ва *EF*) бор. Шаклда *EF* ясовчи кўрсатилмаган. Бир системага қарашли ясовчилар ўзаро кесишмайди, бир системанинг ясовчиси эса иккинчи система ясовчиларининг ҳаммаси билан кесишади.

Бир паллали айланиш гиперболоидининг бу хоссасидан қурилиш техникасида фойдаланилади. Бу усулни рус инженери В. Т. Шухов (1853—1939 й.) биринчи бўлиб таклиф қилган.

В. Г. Шухов радио мачтаси, таянч ва минораларнинг металл балкалардан ясалган нозик конструкцияларини яратди. Бундай металл конструкциялар (136- шакл, *а*) енгил бўлиши билан бирга, жуда мустаҳкам ҳамдир.

Бир паллали айланиш гиперболоиди сиртидан айқаш валларга айланма ҳаракат ўтказишда ишлатиладиган гиперболик тишли ғилдиракларда ҳам фойдаланилади (136- шакл, *б*).

6. Айланиш конуси (доиравий конус) (135- шакл, *ж*).

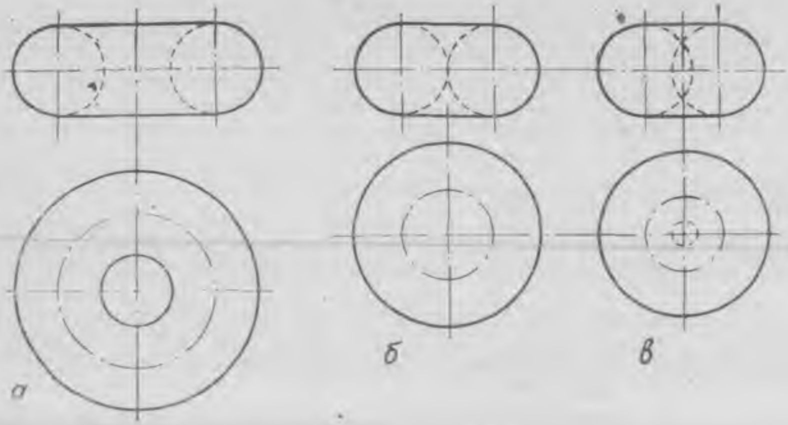


136- шакл

7. Айланиш цилиндри (доиравий цилиндр) (135-шакл, *з*) Юқорида баён этилган сиртларнинг ҳаммаси ҳам ихтиёрий ҳар қандай тўғри чизиқ билан икки нуқтада кесишади, шунинг учун улар *иккинчи тартибли айланиш сиртлари* дейилади.

Иккинчи тартибли айланиш сиртлари техникада энг кўп тарқалган сиртлардир. Машина ва механизмларнинг турли деталлари шундай сиртлар билан чегараланган.

2. Ю қ о р и т а р т и б л и а й л а н и ш с и р т л а р и. Агар айланиш сиртини ихтиёрий тўғри чизиқ иккитадан ортиқ нуқтада кесиб ўтса, бундай сирт *юқори тартибли айланиш сирти* дейилади. Умуман, *n*- тартибли текис ёки фазовий алгебраик



137- шакл

эгри чизиқ ихтиёрий ўқ атрофида айлантирилса, умумий ҳолда 2 n- тартибли айланиш сирти ҳосил бўлади.

Техникада айлананинг ўз текислигида ётган, лекин марказидан ўтмаган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўладиган сирт кўпроқ тарқалган. Бундай сирт *тор* деб аталади. Ясовчи айлананинг радиуси (r) га ва ўқдан айлананинг марказигача бўлган масофа (R) га қараб, сирт уч хил бўлади:

а) $r<R$ — ўқ айланани кесмайди — ҳалқа (137- шакл, *а*);

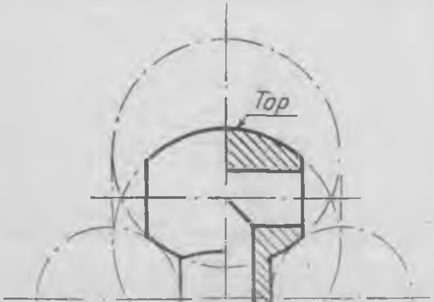
б) $r=R$ — ўқ айланага уринма (137- шакл, *б*);

в) $r>R$ — ўқ айланани кесиб ўтади (137- шакл, *в*).

Ихтиёрий тўғри чизиқ торни тўртта нуқтада кесиб ўтади, демак, тор тўртинчи тартибли айланиш сиртидир.

138- шаклда подшипник корпусининг детали тасвирланган. Деталнинг сиртлари тор, ҳалқа, цилиндр ва бошқа сиртлар билан чегараланган.

Айлантириш ўқи айлананинг марказидан ўтганда эди, тор ўрнига шар (сфера), яъни 4- тартибли эмас, балки 2-тартибли сирт ҳосил бўлар эди.



138- шакл

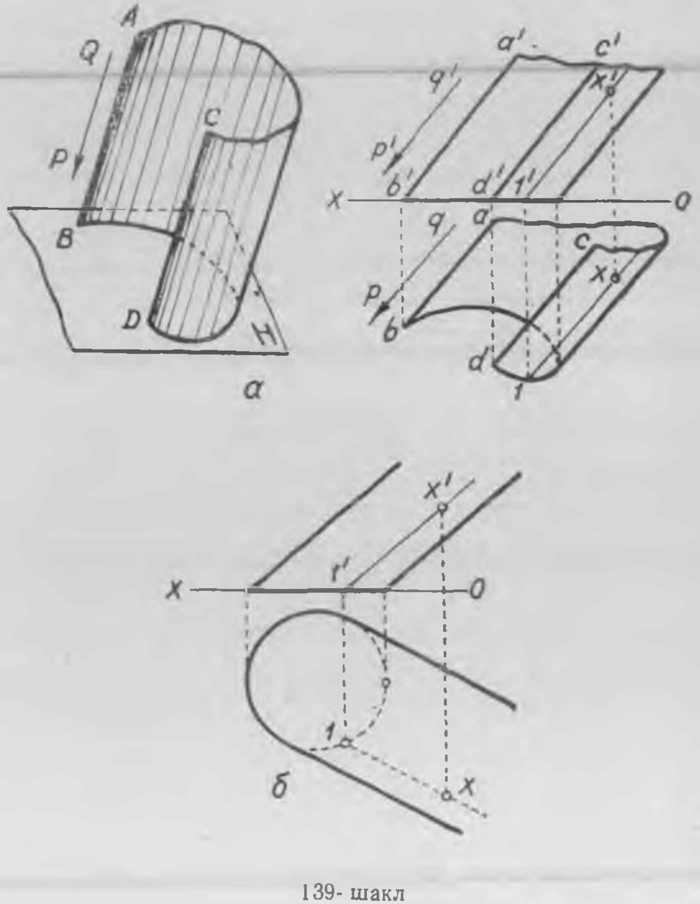
49- §. Чизиқли сиртлар

Тўғри чизиқнинг фазода ихтиёрий ҳаракат қилиши натижасида ҳосил бўлган сирт *чизиқли сирт* дейилади.

Йўналтирувчи чизиқларнинг турига ва ясовчи чизиқ ҳаракатининг характерига қараб, ҳар хил типдаги чизиқли сиртлар ҳосил бўлади. Тубанда шундай сиртларнинг бир неча типи ва уларнинг ҳосил қилиниши кўриб чиқилади.

А. Ёйиладиган чизиқли сиртлар (торслар)

1. Цилиндр сиртлар. Ясовчи AB тўғри чизиқнинг берилган PQ йўналишга параллел вазияти сақланиб, йўналтирувчи AC эгри чизиқ бўйича ҳаракатлантирилишидан ҳосил бўлган сирт *цилиндр сирт* дейилади (139- шакл, *а*). Агар йўналтирувчи берк эгри чизиқ бўлса, ҳосил бўлган сирт *цилиндр* деб аталади (139- шакл, *б*).



139- шакл

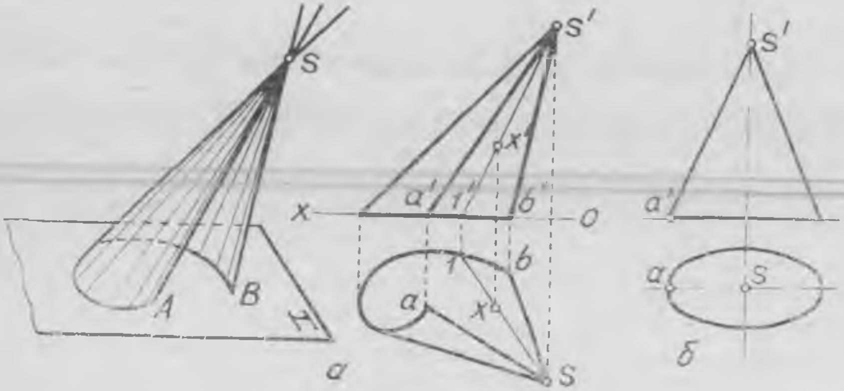
Цилиндр сиртнинг проекциялар текислиги билан кесишув чизиғи унинг *изи (асоси)* дейилади. Цилиндр сирт изи ва ясовчисининг йўналиши билан берилиши мумкин.

Цилиндр сиртнинг ўз ясовчиларига перпендикуляр текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган шакл цилиндр сиртнинг *нормал кесими* дейилади. Агар цилиндрнинг нормал кесими доира бўлса, бу цилиндр доиравий цилиндр (айланиш цилиндри) деб, эллипс бўлса, эллиптик цилиндр, парабола бўлса, параболик цилиндр, гипербола бўлса, гиперболик цилиндр деб аталади.

Агар цилиндрнинг асоси шу цилиндрнинг нормал кесими бўлса, бундай цилиндр тўғри цилиндр деб, асоси қандайдир қийшиқ кесимли бўлса оғма цилиндр деб аталади. Техникада асосан доиравий цилиндрлардан, камроқ ҳолларда эса эллиптик цилиндрлардан фойдаланилади.

139- шакл, б да эллиптик оғма цилиндр тасвирланган. Шаклда цилиндрик сиртда олинган ихтиёрий нуқта (x, x')нинг проекцияларини ясаш ҳам кўрсатилган.

2. Конус сиртлар. Ясовчи AS тўғри чизиқнинг йўналтирувчи AB эгри чизиқ бўйича сирпаниб ҳаракат қилиши билан бирга, доимо S нуқтадан ўтиши натижасида ҳосил бўлган сирт *конус сирт* дейилади (140- шакл, *а*). S нуқта конус сиртининг учи деб, AB чизиқ йўналтирувчи деб аталади. Берилган таърифга мувофиқ, конус сирт икки томонга чексиз кетган ковак сиртдир. Конус сирт унинг горизонтал (ёки бошқа) изи ва учининг проекциялари билан берилиши мумкин.



140- шакл

Конус сиртнинг ҳамма ясовчиларини кесиб ўтган бирор текислик билан учи орасидаги қисми *конус* дейилади. Конуснинг ҳамма ясовчиларини кесувчи текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган ҳар қандай шаклни конуснинг асоси деб қабул қилиш мумкин.

Агар конус сирт шу сиртнинг учидан ўтган ва ўзаро пер-

пендикуляр бўлган икки текислик билан кесилганда тенг ва симметрик бўлакларга бўлинса, бундай конусда симметрия ўқи бўлади. Қонус сиртнинг ўқи вазифасини ана шу симметрия текисликларининг кесишув чизиғи ўтайди.

Қонуснинг ўз симметрия ўқига перпендикуляр текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган шакл (шартли) конуснинг *нормал кесими* дейилади. Нормал кесимнинг шаклига қараб, конусга доиравий, эллиптик ва ҳоказо деган қўшимча номлар берилади. Агар конуснинг асоси сифатида унинг нормал кесими олинган бўлса, бу конус тўғри конус бўлади. 140- шакл, *б* да тўғри эллиптик конус тасвирланган. Техникада доиравий конуслардан кўпроқ фойдаланилади.

Қонус сиртда ётган бирор нуқтанинг проекцияларини (x', x) ясаш учун конуснинг шу нуқта орқали ўтган ясовчиси ($s'x'$, sx) дан фойдаланиш мумкин. Одатда, цилиндрлар ва конуслар очерклари ёрдами билан берилади.

3. Қайтиш қиррали сиртлар (торслар). Ясовчи AB тўғри чизиқнинг йўналтирувчи CD эгри чизиққа ҳамма вақт уринма бўлган ҳолда ҳаракат қилишидан ҳосил бўлган сирт *қайтиш қиррали сирт (торс)* дейилади (141- шакл, *а*).

CD эгри чизиқ торснинг қайтиш қирраси дейилади. Қайтиш қирраси — торснинг йўналтирувчиси берилган бўлса, торс берилган деб ҳисобланади.

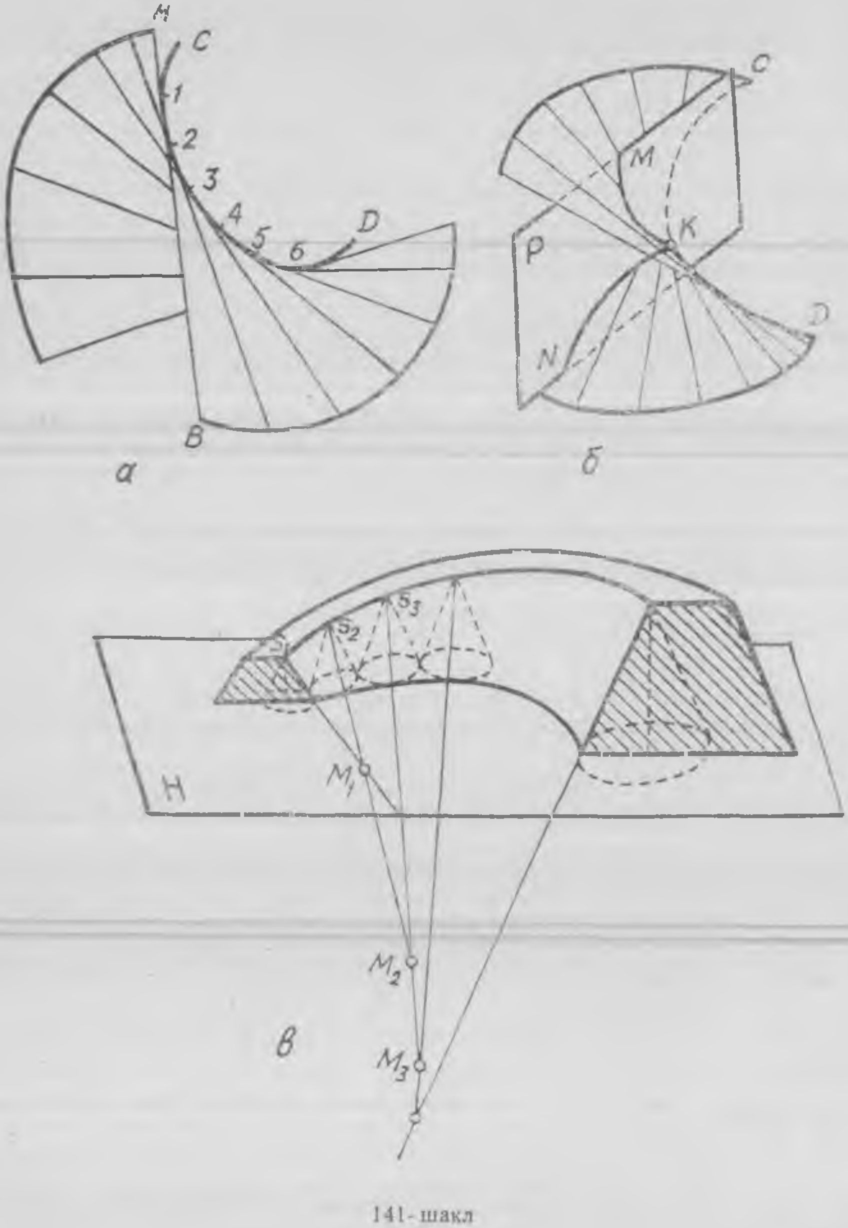
Торс ясаш учун, қайтиш қирраси CD фазовий эгри чизиқнинг *1, 2, 3,* ... нуқталари орқали унга уринмалар ўтказамиз. Бу уринмаларнинг йиғиндиси торс сиртни ҳосил қилади. Уриниш нуқталарининг оралиғини исталганча кичик қилиш мумкин бўлганлиги учун иккита қўшни уринма лимитда бир нуқтада кесишади; сиртнинг ана шундай икки уринма орасидаги қисмини текис майдонча (шакл) деб қабул қилиш мумкин. Шунинг учун бу сирт ҳам, конус сирти каби (маълумки, конуснинг ясовчилари унинг учида кесишади) текисликка ёйилади.

Агар қайтиш қиррасидаги бирорта K нуқта орқали сиртнинг иккала палласини кесувчи текислик ўтказилса, кесишдан ҳосил бўлган MKN эгри чизиқ қайтиш нуктаси K га эга бўлади (141- шакл, *б*).

Шундай қилиб, қайтиш қирраси бу сиртнинг турли текисликлар билан кесилишидан ҳосил бўлган эгри чизиқлар қайтиш нуқталарининг геометрик ўринларидир. Сиртнинг номи ҳам шундан келиб чиққан.

Цилиндр ва конус сиртларни қайтиш қиррали сиртларнинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин.

Торсларга техникадан мисол қилиб, ёйиладиган гелисоидни кўрсатиш мумкин (бу ҳақда 50-параграфга қаранг); тупроқ ва бошқа сочилувчан материаллардан қурилган сунъий иншоотларнинг (кўтармалар ва каналларнинг) ён бағирларини ҳосил қиладиган қиялиги бир хил сиртлар ҳам қайтиш қиррали сиртга мисол бўла олади (141- шакл, *в*). $M_1M_2M_3$... қайтиш қирраси шундайки, M_1S_1, M_2S_2,... ясовчилар қандайдир H текислик би-



141-шакл

лан бир хил бурчак ҳосил қилади. Бу сирт учи бирорта фазовий $S_1S_2S_3$... эгри чизиқда жойлашган тўғри доиравий конуснинг ҳаракати натижасида ҳам ҳосил қилиниши мумкин.

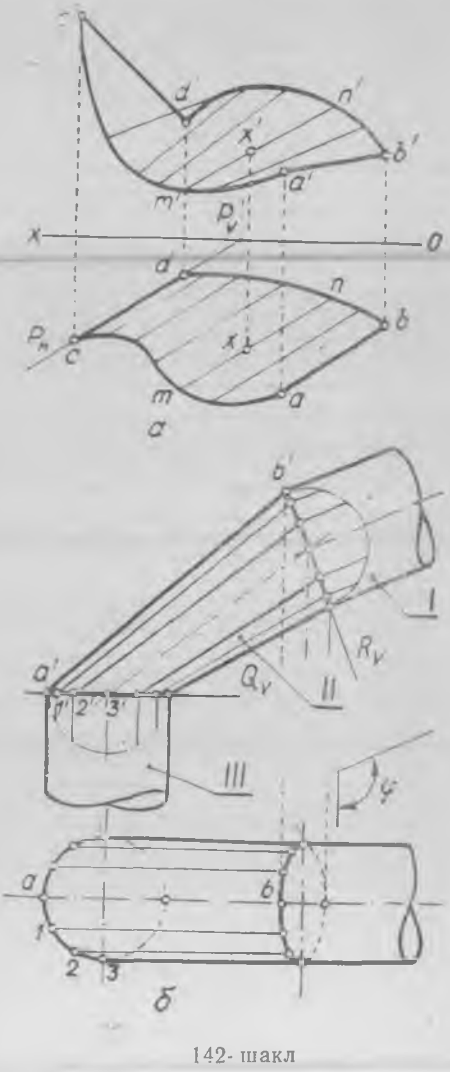
Б. Ейилмайдиган, параллелизм текислиги бор чизиқли сиртлар

Бу гуруҳдаги сиртлар тўғри чизиқнинг йўналтирувчи икки чизиқ бўйича ҳаракат қилишидан ҳосил бўлади. Ўз ҳаракатида ясовчи ҳамма вақт бирор текисликка параллел бўлиб қолади; бу текислик сиртнинг *параллелизм текислиги* дейилади.

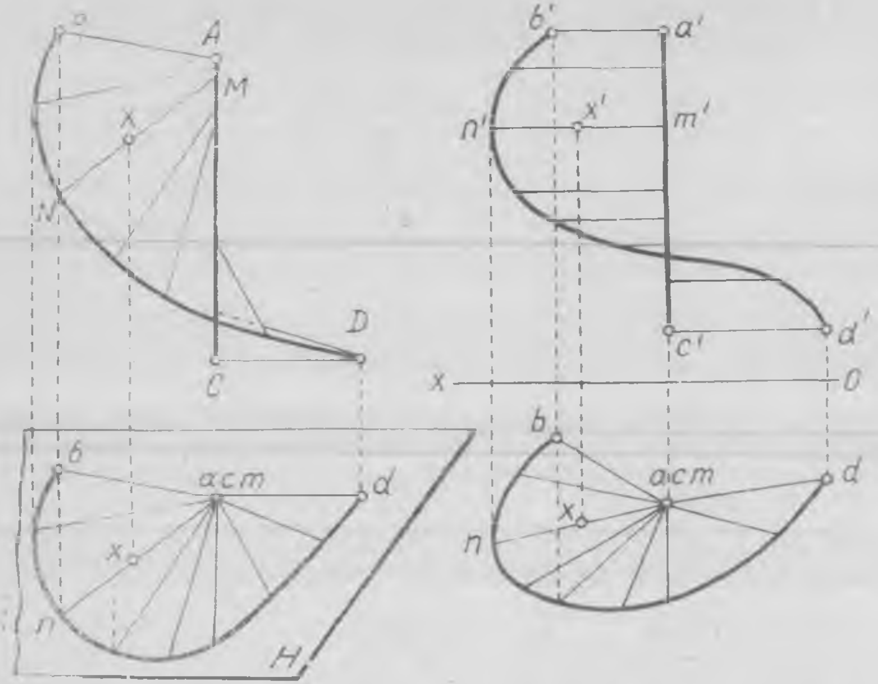
Бу сиртларнинг ёндош ясовчилари учрашмас чизиқлардир, шунинг учун уларни текисликка ёйиб бўлмайди. Баъзан бундай сиртларни қийшиқ сиртлар деб ҳам атайдилар.

1. Цилиндроидлар. Йўналтирувчилари бир текисликда ётмаган иккита эгри чизиқ бўлган ва параллелизм текислиги бор чизиқли сирт *цилиндроид* дейилади. 142-шакл, *а* да параллелизм текислиги горизонтал проекцияловчи *P* текислик, йўналтирувчилари эса *AC* ва *BD* бўлган цилиндроид тасвирланган. Шаклдан кўриниб турибдики, ясовчиларнинг горизонтал проекциялари текисликнинг горизонтал изига параллел, демак, ясовчиларнинг ҳаммаси *P* текисликка параллел. Шаклда цилиндроидда олинган ихтиёрий нуқта (x, x^1) нинг проекцияларини ясаш ҳам кўрсатилган.

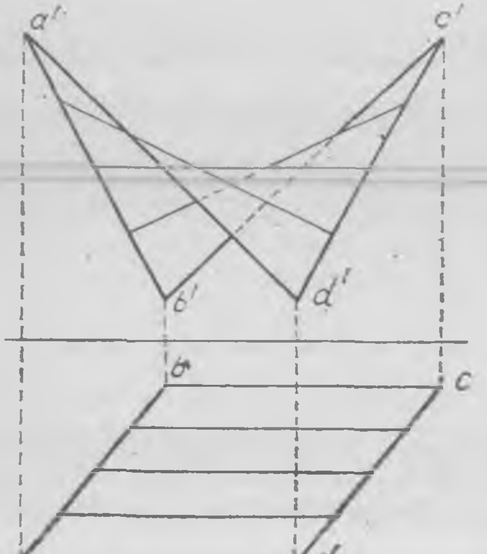
Бундай сиртлардан қурилиш ишларида кенг фойдаланилади. Қийшиқ гумбазлар, сув чиқариб юборувчи ва оқимни йўналтирувчи конструкциялар, одатда, цилиндроидлар билан чегараланади. 142-шакл, *б* да диаметрлари тенг бўлган *I* ва *III* трубопроводларни



142- шакл



143- шакл



144- шакл

улаш кўрсатилган. Трубопроводнинг ўтиш қисми (*II*) цилиндроид шаклидадир, унинг йўналтирувчилари *Q* ва *R* текисликларда жойлашган *D* диаметрли айланалар бўлиб, параллелизм текислиги *V* текисликдир.

2. Коноидлар. Йўналтирувчиларидан бири *AC* тўғри чизиқ, иккинчиси эса *BD* эгри чизиқ бўлган, параллелизм текислиги бор чизиқли сирт *коноид* дейилади (143- шакл). Бу коноид учун исталган горизонтал текислик (*H*) параллелизм текислиги бўлиб хизмат қилади ($H \perp AC$).

3. Қийшиқ текислик ёки гиперболик параболоид. Йўналтирувчиларининг иккаласи ҳам тўғри чизиқ бўлган, паралле-

лизм текислиги бор чизиқли сирт *қийшиқ текислик ёки гиперболик параболоид* дейилади (144- шакл). Бу сиртни кесувчи текисликларнинг йўналишини шундай танлаб олиш мумкинки, кесим чизиқлари гиперболалар ёки параболалар бўлади; демак, қийшиқ текислик параболани гипербола бўйича ёки гиперболани парабола бўйича ҳаракат қилдиришдан ҳам ҳосил бўлиши мумкин. Сиртнинг иккинчи номи ана шундан келиб чиққан.

144- шаклда AB ва CD йўналтирувчи тўғри чизиқлар, BC эса ясовчидир. Горизонтал проекциядан кўриниб турибдики, ясовчилар V текисликка параллел, демак, бу ерда параллелизм текислиги фронтал текисликдир.

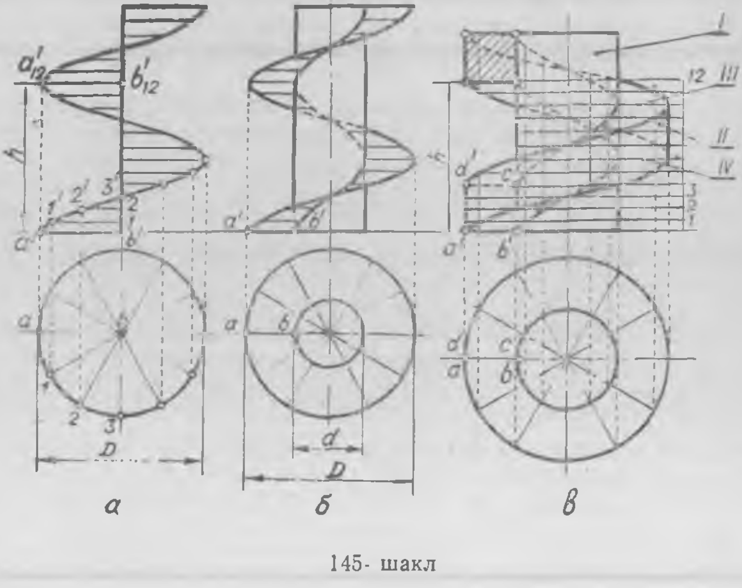
50- §. Винт сиртлар

Ясовчи чизиқнинг ўқ атрофида винтсимон (айланма ва илгариланма) ҳаракат қилиши натижасида ҳосил бўлган сирт *винт сирт* дейилади. Ясовчи тўғри чизиқ бўлса, винт сирт чизиқли бўлади.

Чизиқли винт сиртлар ёки геликоидлар техникада аҳамияти катта бўлган ва кенгроқ тарқалган сиртлардандир.

Винт сиртининг ўқи билан ясовчи тўғри чизиқ орасидаги бурчакка қараб, винт сиртлар тўғри ва оғма бўлиши мумкин. Ясовчи билан ўқ кесишган бўлса, сирт ёпиқ, кесишмаган бўлса сирт очиқ сирт бўлади.

Тубанда чизиқли винт сиртларнинг бир неча типи кўриб чиқилади.



145- шакл

1. Тўғри геликоид ёки винтсимон коноид. 145--шакл, *а* да *АВ* кесманинг берилган ўқ атрофида винтсимон ҳаракат қилиши натижасида ҳосил бўлган сиртни ясаш усули кўрсатилган. Кесманинг *В* учи ўқ бўйлаб сурилади. *А* учи ва бошқа нуқталари винтсимон ҳаракат қилади. Ҳосил бўладиган винтсимон сиртни ясаш учун *А* нуқтанинг траекториясини ясаш кифоя (46-параграф, 131- шакл). Ҳосил бўлган сирт *винтсимон коноид* дейилади, чунки *АВ* кесма бир тўғри чизиқ (ўқ) ва бир эгри винт чизиқ бўйича ҳаракат қилади ва ҳамма вақт *Н* текисликка параллеллигини сақлайди. Демак, *Н* текислик коноиднинг параллелизм текислигидир.

145- шакл, *б* да винтсимон коноид ўқи коноиднинг ўқи билан умумий бўлган доиравий цилиндр билан кесилган: натижада, қадами (h) йўналтирувчи винт чизиқнинг қадамига тенг цилиндрик винт чизиқ ҳосил бўлган. Иккала винт чизиқ оралиғидаги сирт *ҳалқа винтсимон сирт* дейилади.

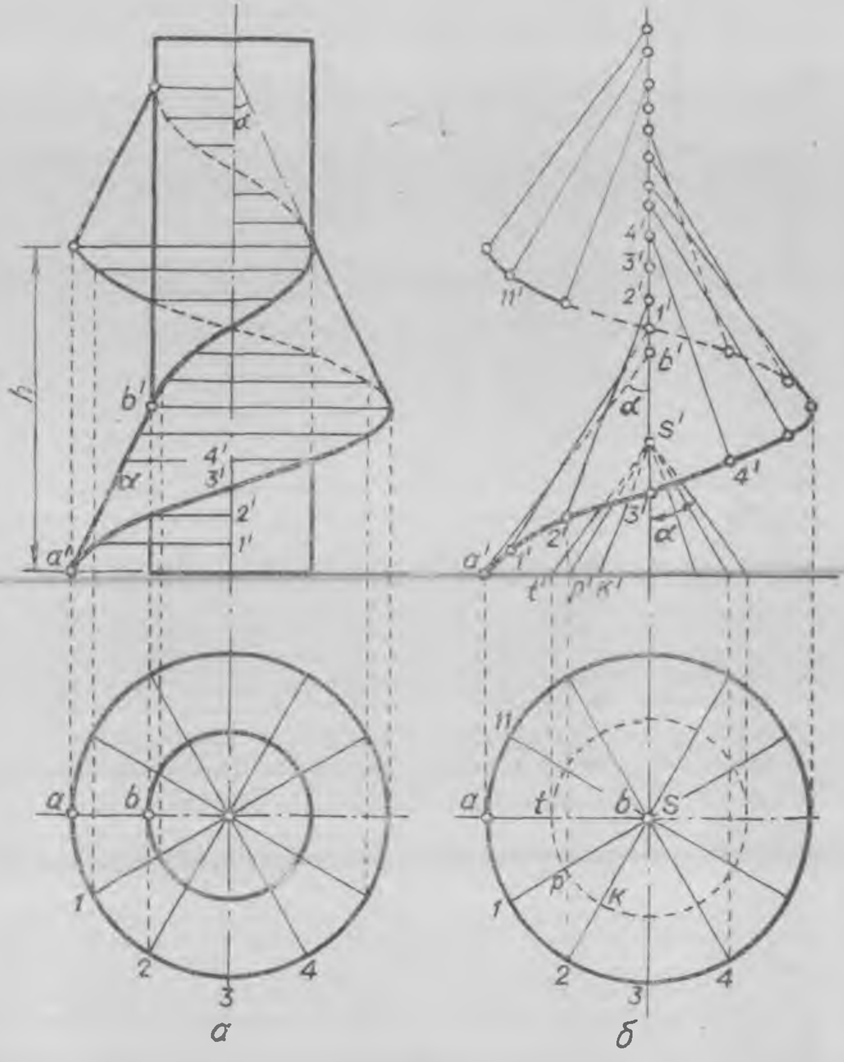
Винтсимон коноид техникада профили (резьбаси) тўғри бурчак ёки трапеция бўлган винтларда, гайкаларда, муфталарда, сочиладиган ва шунга ўхшаш материаллар учун мўлжалланган винтли транспортёрларнинг ҳамма турларида кўп ишлатилади. Бинокорликдаги винтсимон айланма зиналар коноид сингари каркасга эга. 145- расм, *в* да профили квадрат бўлган винт тасвирланган. Цилиндр ҳамда винт сиртлар билан чегараланган сирт *винт* деб аталади. Винт цилиндр сиртлари (*I*, *II*) ва коноидлар (*III*, *IV*) билан чегараланган.

2. Оғма геликоид. 146- шакл, *а* да оғма геликоид тасвирланган. Ясовчи *АВ* тўғри чизиқ доиравий цилиндр ўқини доимо ўткир α бурчак бўйича кесади ва бир учи (b, b' нуқта) билан цилиндр сирти бўйича сирпаниб, винтсимон ҳаракат қилади. Кесма учининг цилиндр ўқи бўйича сурилиши кесманинг бурчак бўйича сурилишига пропорционалдир.

АВ ясовчининг ҳамма нуқталари фазода винт чизиқлар ясайди: шунга кўра, винт сиртнинг фронтал проекциядаги контурини аниқроқ ясаш учун *АВ* кесманинг бир неча нуқтаси траекторияларини ясаб, кейин уларни ўровчи контурни чизиш керак эди: амалда эса кесманинг икки учи (*А* ва *В* нуқталар) учун винт чизиқлар ясаш билан чегараланса ҳам бўлади. 146-шакл, *а* да шундай қилинган.

Оғма геликоиднинг ясовчиси *АВ* кесма ўз ҳаракати вақтида ўқи винт чизиқнинг ўқи билан умумий бўлган бирор айланиш конуси ясовчиларига параллел бўлиб қолади (146- шакл, б). Бу конус оғма геликоиднинг *йўналтирувчи конуси* дейилади.

Эпюрда оғма геликоид ясаш учун аввал йўналтирувчи винт ч-изиқ ясалади, сўнгра учи S нуқтада ва бурчаги α га тенг йўналтирувчи конус ясалиб, унинг бир неча ясовчиси чизилади. Шундан кейин, винт чизиқдаги $1'$, $2'$, $3'$, . . . нуқталар орқали конуснинг тегишли ясовчиларига параллел қилиб, оғма геликоиднинг ясовчилари ўтказилади ($a'b' \parallel 1's'$; $1'1' \parallel p's'$; $2'2' \parallel k's'$). Оғма геликоид-

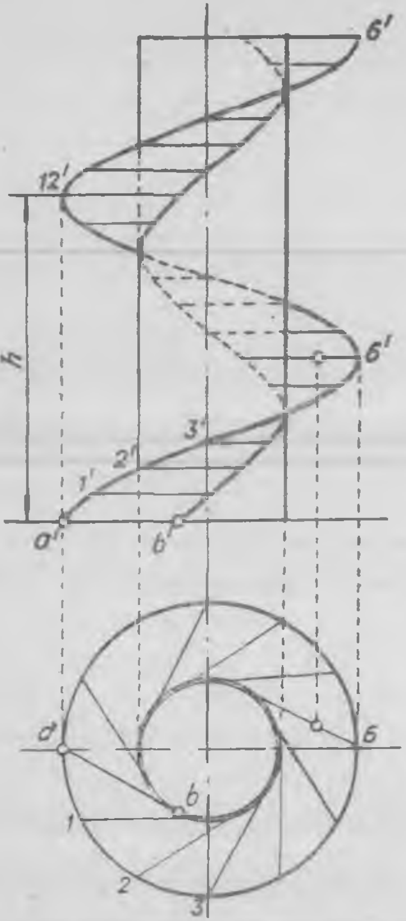


146- шакл

нинг ясовчилари винт чизиққа уринма бўлмайди. Горизонтал текисликка улар айлананинг радиуси бўйича проекцияланади.

Оғма геликоиддан техникада кўп фойдаланилади. Масалан, резьбасининг профили учбурчак, трапеция бўлган буюмларнинг (червяклар, винтлар, болтлар ва бошқаларнинг) сиртлари оғма геликоидлар билан чегараланган.

3. Винтсимон цилиндроид. Ясовчи *AB* тўғри чизиқни ҳамма вақт цилиндр ўқига перпендикуляр вазиятда сақлаб, йўналтирувчи иккита винт чизиқ бўйича ҳаракатлантириш



147- шакл

натижасида ҳосил бўлган сирт *винтсимон цилиндроид* дейилади (147- шакл). Цилиндрнинг ўқига перпендикуляр бўлган ҳар қандай горизонтал текислик бу сиртнинг параллелизм текислиги бўла олади.

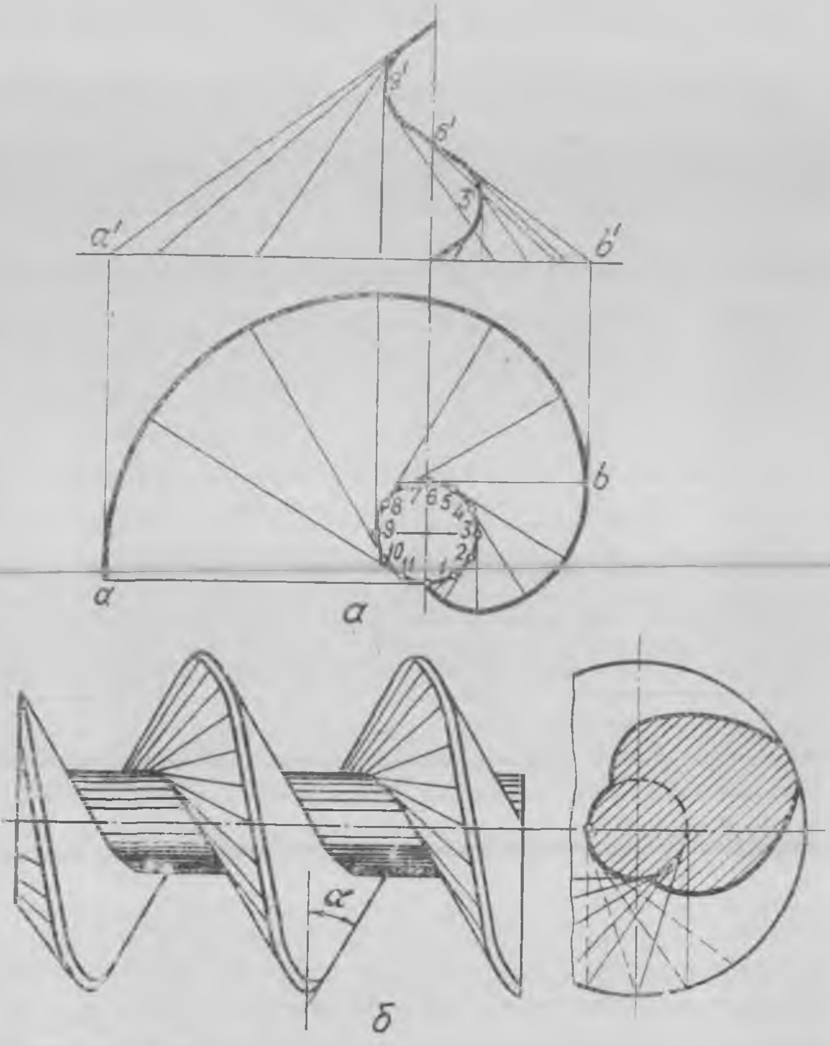
Винтсимон цилиндроид ва юқорида кўриб ўтилган тўғри ва оғма геликоидлар ёйилмайдиган чизиқли сиртлар группасига киради.

4. Ёйиладиган геликоид. Ясовчи тўғри чизиқнинг ҳамма вақт цилиндрик винтсимон чизиққа уринма вазиятда сақлаб характлантириш натижасида ҳосил бўлган сирт *ёйиладиган геликоид* дейилади (148- шакл, *a*). Бу сирт қайтиш қиррали сиртлар группасига киради. Сиртнинг қайтиш қирраси винт чизиқдир, шунинг учун бу сирт бир текисликка ёйилади ва торслар группасига киради (49- параграфдаги - *A* параграфчага қаранг).

Агар ясовчиларининг узунлиги чегараланмаса, сиртнинг ўқига парпендикуляр бўлган текисликдаги изи айлананинг *эвольвентаси* бўлади. Шунинг учун бу сирт *эвольвентали геликоид* деб ҳам аталади.

Амалда сиртнинг ясовчиси сифатида, кўпинча, маълум узунликдаги тўғри чизиқ кесмаси олинади. Бундай кесманинг ҳаракати натижасида *ёйиладиган халқасимон геликоид* деб аталадиган винт лента ҳосил бўлади.

148- шакл, *б* да иш сиртлари ёйиладиган геликоидлар билан чегараланган винт тасвирланган. α бурчак винт чизиқнинг кўтарилиш ва ясовчиларнинг *H* текисликка оғиш бурчагидир. Винт кўндаланг кесимининг шакли айлана ёйлари ва эвольвенталар билан чегараланган. Бунга ўхшаш винтлар червякли узатмаларда ишлатилади.

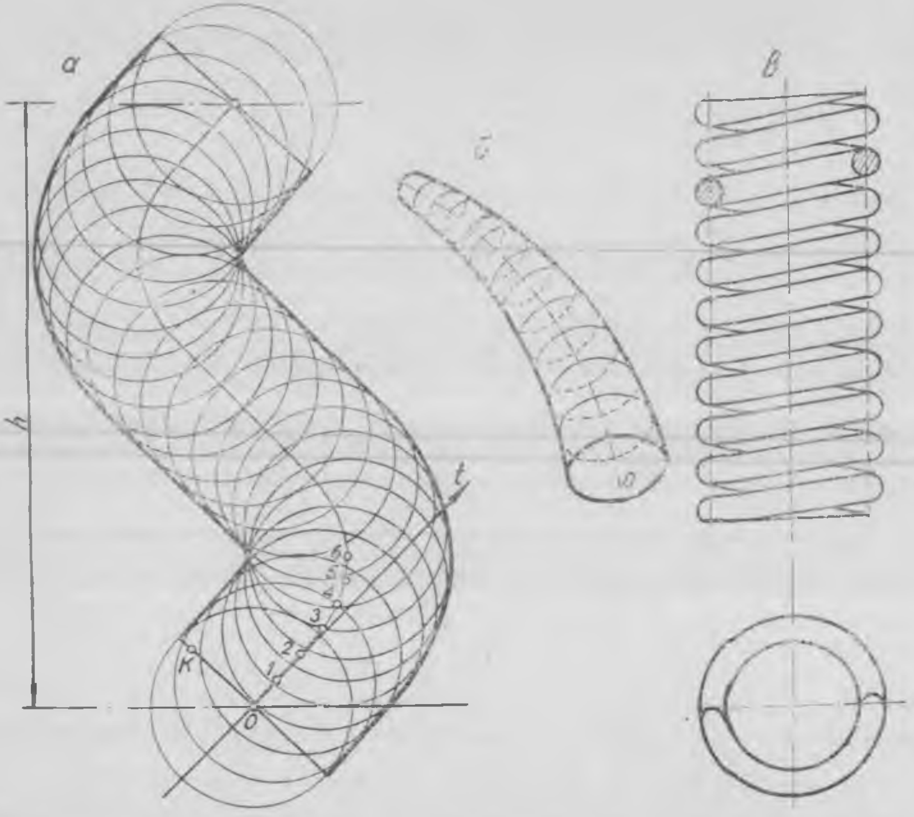


148- шакл

51-§. Циклик ва график сиртлар ҳақида қисқача маълумот

1. Ўзгарувчан радиусли айланани ихтиёрий суратда ҳаракатлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртлар *циклик сиртлар* дейилади.

Маркази (*O*) берилган эгри чизиқ бўйича сурилаётган ўзгарувчан радиусли айланани ҳаракатлантиришдан ҳосил бўладиган найсимон сиртлар циклик сиртларга мисол бўла олади (149- шакл, *б*).



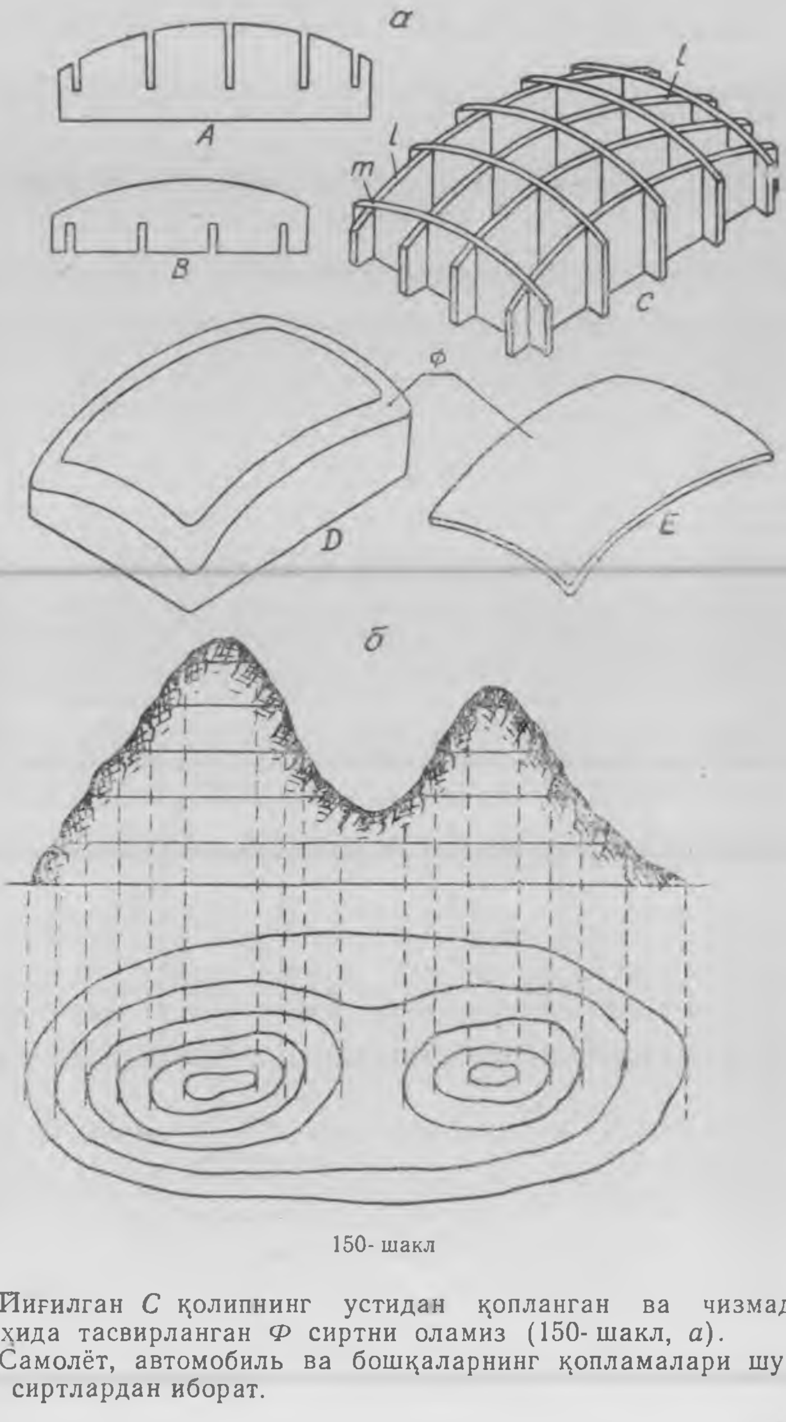
149- шакл

Агар найсимон сирт ясовчиси айланасининг радиуси ўзгармас бўлса, бундай сирт *труба сирт* дейилади. Ўқи тўғри чизиқ бўлган труба сирт айланиш цилиндри бўлади.

Агар радиуси ўзгармас бўлган шарнинг маркази цилиндрик винт чизиқ бўйича ҳаракатлантирилса, бундай шар трубага ўхшаш винт сирт ясайди (149- шакл, *а*). Кўндаланг кесими доира бўлиб, пўлат симдан ясалган цилиндрик пружиналар бундай сиртларга мисол бўла олади (149- шакл, *в*).

2. Ҳосил бўлиши ҳеч қандай геометрик қонунга бўйсунмаган сиртлар *график сиртлар* дейилади. Бундай сиртлар шу сиртларда ётган бир типдаги бир неча чизиқ орқали тасвирланади.

150- шакл, *а* да икки хил (*m* ва *l* типлардаги) чизиқлар билан берилган шундай сиртнинг модели кўрсатилган. Бу модель йиғиш учун тирқишлари бўлган бўйлама ва кўндаланг қўйиладиган *A* ва *B* стрингерлардан ясалган.



150- шакл

Йиғилган C қолипнинг устидан қопланган ва чизмада алоҳида тасвирланган Φ сиртни оламиз (150- шакл, *а*).

Самолёт, автомобиль ва бошқаларнинг қопламалари шундай сиртлардан иборат.

Топографияда ер сиртининг рельефи горизонтал чизиқлар орқали тасвирланади (150- шакл, *б*).

Шундай горизонталлар билан тасвирланган сирт *топографик сирт* дейилади.

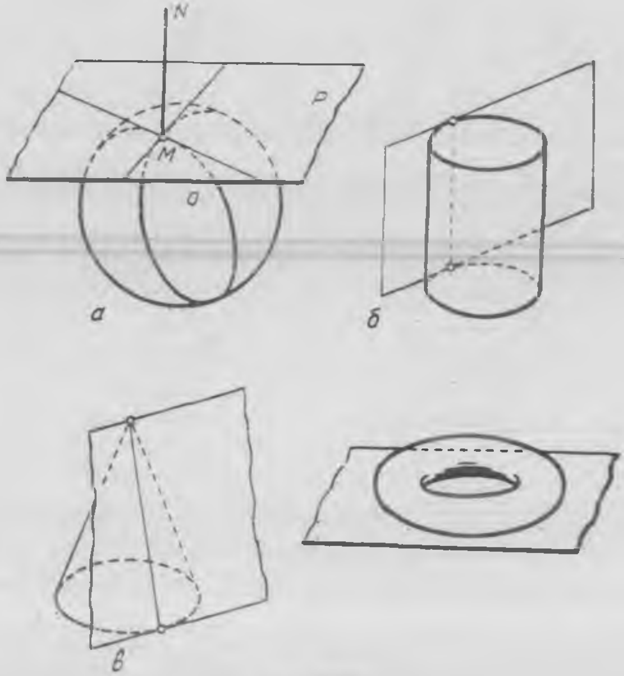
VIII боб. ЭГРИ СИРТЛАРГА УРИНМА ТЕКИСЛИК ЎТКАЗИШ

52- §. Асосий тушунчалар

Сиртнинг оддий бир нуқтаси орқали шу сиртга уринма бўлиб ўтган тўғри чизиқларнинг ҳаммаси бир текисликда ётади. Бу текислик сиртга *уринма текислик* деб аталади.

Маълумки, текислик икки кесишувчи тўғри чизиқ орқали ифодаланиши мумкин. Шунинг учун сиртдаги *М* нуқта орқали шу сиртга уринма текислик ўтказиш керак бўлса, олдин берилган сиртда мазкур нуқтадан ўтувчи икки чизиқ чизилади, сўнгра ўша чизиқларга уринма тўғри чизиқлар ўтказилади. Бу уринмалар *Р* уринма текисликнинг вазиятини белгилайди (151- шакл, *а*).

Сиртдаги *М* нуқтадан чиққан ва шу нуқта орқали сирт уринма бўлиб ўтган текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чи-



151- шакл

зиқ сиртнинг *М* нуқтадаги ***нормали*** дейилади. Нормаль *М* нуқтадан ўтган уринмаларга перпендикуляр бўлади.

Эгри сиртнинг турига қараб, уринма текислик шу эгри сиртга бир нуқтада уриниши (масалан, эгри сирт шар бўлганда, 151-шакл, *а*), тўғри чизиқ бўйича уриниши (масалан, эгри сирт цилиндр ва конус бўлганда, 151- шакл, *б, в*) ёки эгри чизиқ бўйича (масалан, торга айлана бўйича; 151- шакл, *г*) уриниши мумкин.

Баъзи сиртга уринма бўлган текислик шу сиртни кесиб ўтади. Масалан, цилиндроидга ясовчилардан бири бўйича уринма бўлган текислик цилиндроиднинг сиртини бирор эгри чизиқ бўйича кесади.

Уринма текисликларни ясашга доир масалалар асосан уч типга бўлинади:

1) сиртда берилган нуқта орқали уринма текислик ўтказиш;

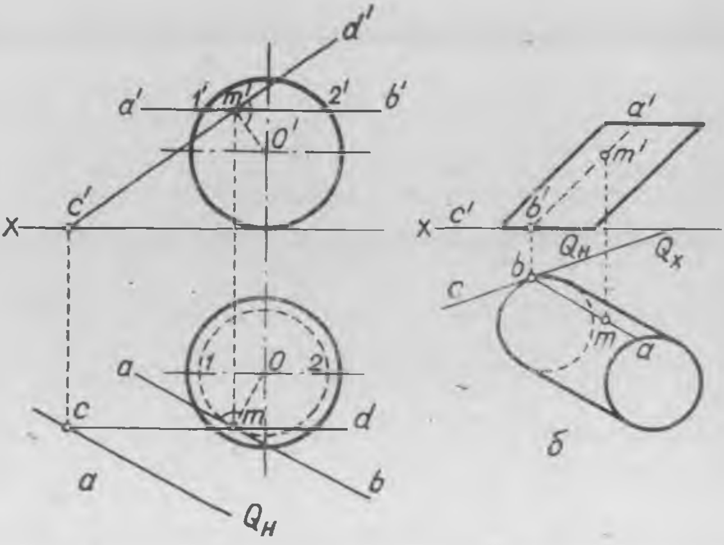
2) сиртда ётмаган нуқта орқали уринма текислик ўтказиш;

3) бошқа махсус шартлар бўйича (масалан, берилган тўғри чизиққа параллел қилиб, тўғри чизиқ орқали ёки берилган текисликка параллел қилиб) уринма текислик ўтказиш.

Агар эгри сиртнинг *H* ёки *V* текисликда изи бўлса, уринма текисликнинг изи сиртнинг изига уринма бўлади. Бу ҳолдан уринма текислик ясаш учун кенг фойдаланилади.

53- §. Уринма текисликлар ўтказиш мисоллари

1. Сиртда олинган нуқта орқали сиртга уринма текислик ўтказиш. 152- шакл, *а* да шар сиртида олинган m, m^1 нуқтадан шарга уринма текислик ўтказиш



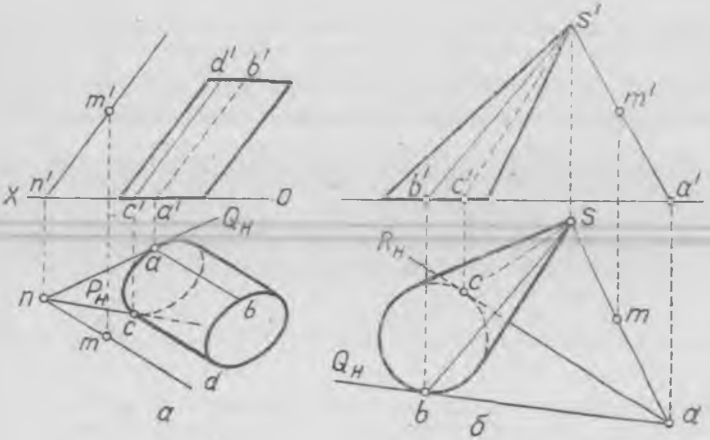
152- шакл

кўрсатилган. Уринма текислик шарнинг шу уриниш нуқтасидан ўтган радиусига перпендикуляр бўлади. Шунга кўра, M нуқтадан шарнинг радиусига перпендикуляр қилиб, иккита тўғри чизиқ — горизонтал ($a'b'$, ab) ва фронтал (cd, $c'd'$) ўтказилган. Бу кесишувчи тўғри чизиқлар изланган уринма текисликни ифодалайди (Q_H шу текисликнинг горизонтал изи).

152- шакл, *б* да цилиндр сиртида берилган M (m, m') нуқта орқали уринма текислик ўтказиш кўрсатилган. Уринма текисликни ясаш учун олдин M нуқтадан ўтган ясовчи $AБ$ (ab, $a'b'$) тўғри чизиқ чизилган. Сўнгра ясовчи чизиқнинг изи (b нуқта) орқали цилиндрнинг изига уринма чизиқ ўтказилган (bc, $b'c'$). ABC изланган текисликдир. BC тўғри чизиқ уринма текисликнинг горизонтал изи (Q_H) бўлади.

2. С и р т д а ё т м а г а н н у қ т а о р қ а л и ш у с и р т г а у р и н м а т е к и с л и к ў т к а з и ш. 153- шакл, *а* да цилиндр сиртида ётмаган M нуқта орқали цилиндр сиртга уринма текислик ўтказиш кўрсатилган.

Бунинг учун берилган нуқта орқали олдин цилиндрнинг ясовчиларига параллел қилиб MN тўғри чизиқ ўтказилган. Кейин бу чизиқнинг изидан цилиндрнинг изига уринма қилиб NA ва NC тўғри чизиқлар чизилган. Шундай қилиб, ҳосил бўлган MNA ва MNC кесишувчи чизиқлар изланган уринма текисликларни ифодалайди (масаланинг икки жавоби бор).



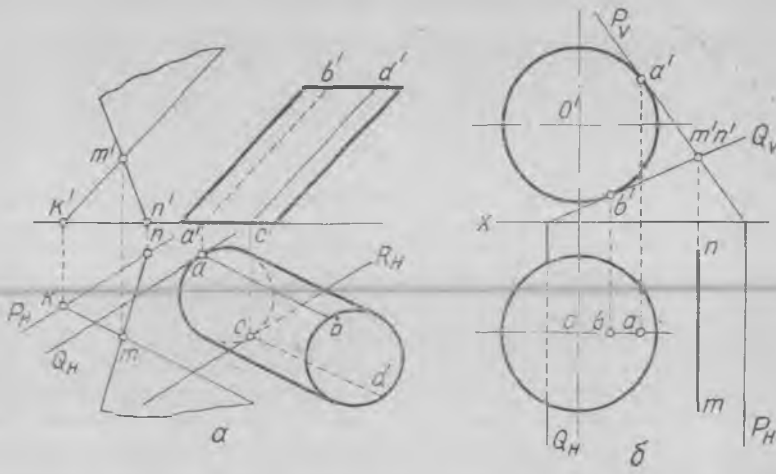
153- шакл

153- шакл, *б* да фазода берилган ихтиёрий M нуқта орқали конус сиртга уринма текислик ўтказиш кўрсатилган.

Изланган текислик конуснинг учидан ўтиши керак. Шунинг учун M нуқтани S билан туташтириб, изланган уринма текисликда ётган тўғри чизиқлардан бирини топамиз. MS чизиқнинг горизонтал изи (a нуқта) орқали конуснинг изига уринмалар

(AB ва AC) ўтказамиз. Ҳосил бўлган кесишувчи SAB ва SAC чизиқлар изланган Q ва R уринма текисликларни ифодалайди. Бу текисликлар конус сиртга BS ва CS ясовчилар бўйича уринади.

3. Махсус шартлар бўйича сиртга уринма текислик ўтказиш. 154-шакл, *а* даги мисолда берилган MN тўғри чизиққа параллел қилиб цилиндр сиртга уринма текисликлар ўтказиш тасвирланган.



154-шакл

Аввал берилган MN чизиқни кесувчи ва цилиндрнинг ясовчиларига параллел MK тўғри чизиқ ўтказамиз. Ҳосил бўлган кесувчи чизиқлар (KMN) билан ифодаланган P текислик изланган уринма текисликларга параллел бўлади; бу текислик цилиндрнинг *параллелизм текислиги* дейилади.

Уринма текисликларнинг горизонтал изларини параллелизм текислигининг горизонтал изига параллел ва цилиндрнинг горизонтал изига уринма қилиб чизамиз ($Q_H \parallel R_H \parallel R_H$). Уринма текисликлар цилиндрга AB ва CD ясовчилари бўйича уринади. Уринма текисликларнинг фронтал излари (Q_V, R_V) шу текисликлар уринма бўлган цилиндр ясовчиларининг (AB ва CD чизиқларнинг) фронтал изларидан ўтади (Q_V ва R_V изларни ясаш китобхоннинг ўзига тавсия қилинади).

154-шакл, *б* даги эпюрда берилган тўғри чизиқ (mn, $m'n'$) орқали шар сиртга уринма текисликлар ўтказиш кўрсатилган.

Бундай уринма текислик фақат берилган тўғри чизиқ шар билан кесишмаганидагина ўтказилиши мумкин.

Берилган тўғри чизиқ билан шарнинг қандай муносабатда эканлигини чизиқ проекция текисликларидан бирига перпенди-

куляр бўлгандагина тўғридан-тўғри билиб бўлади ва бундай ҳолларда берилган тўғри чизиқ орқали шарга уринма текислик ўтказиш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди. Берилган *MN* чизиқ *V* текисликка перпендикулярдир, шунинг учун у орқали шарга уринма бўлиб ўтган *P* ва *Q* текисликлар ҳам фронтал проекцияловчи текисликлар бўлади.

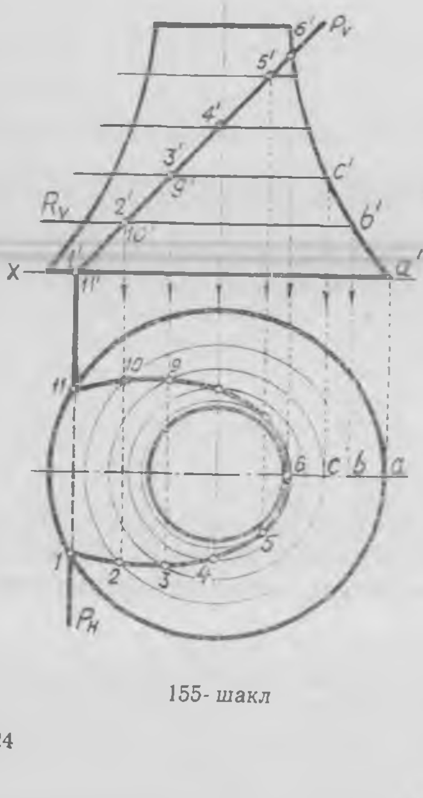
IX боб. СИРТНИНГ ТЕКИСЛИК ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН КЕСИЛИШИ

54-§. Айланиш сиртининг текислик билан кесилиши

Сиртнинг текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган чизиқ кесувчи текисликда ётган текис эгри чизиқ бўлади. Бу эгри чизиқнинг проекцияларини эпюрда ясаш учун, одатда, унга оид бир неча нуқтанинг проекциялари топилиб, сўнгра уларнинг бир номлилари лекало билан ўзаро туташтирилади.

Кесим чизиғининг ҳақиқий кўриниши эпюрни қайта тузиш усулларининг бири ёрдами билан ясалиши мумкин.

Ҳар қандай сиртнинг текислик билан кесишув чизиғини ясашда ёрдамчи кесувчи текисликлар усули умумий усул ҳисобланади. Бу усулни тубандагича тушуниш керак: берилган сирт ва кесувчи текислик бир неча ёрдамчи текислик билан кесилади. Ҳар қайси ёрдамчи текислик сиртни, умуман, бирор эгри чизиқ бўйича, кесувчи текисликни эса тўғри чизиқ бўйича кесади. Агар бу эгри чизиқ билан тўғри чизиқ кесишса, уларнинг кесишув нуқталари изланган кесим чизиғига оид умумий нуқталар бўлади.



155- шакл

Бу умумий усулдан фойдаланилганда, ёрдамчи кесувчи текисликлар шундай олиниши керакки, улар берилган сиртни айланалар ёки, имкони бўлса, тўғри чизиқлар бўйича кесадиган бўлсин.

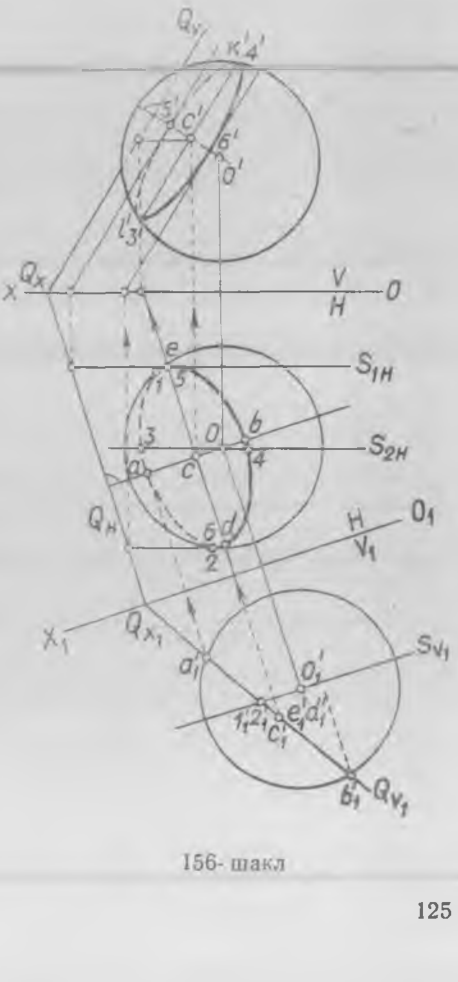
155- шаклда айланиш сирти билан фронтал проекцияловчи *P* текисликнинг кесишув чизиғини ясаш

кўрсатилган. Ёрдамчи текисликлар айланиш сиртининг ўқига перпендикуляр қилиб ўтказилган. Айланиш сиртининг ўқи H текисликка перпендикуляр бўлгани учун сиртнинг ёрдамчи текисликлар билан кесилишидан ҳосил бўлган айланаларнинг горизонтал проекциялари ўзларига тенг айланалар бўлади. Ёрдамчи текисликлар берилган кесувчи P текислик билан V текисликка перпендикуляр бўлган горизонтал чизиқлар бўйича кесишади. Бу горизонталлар билан тегишли айланаларнинг кесишув нуқталари изланган кесим чизиғига оид нуқталар бўлади.

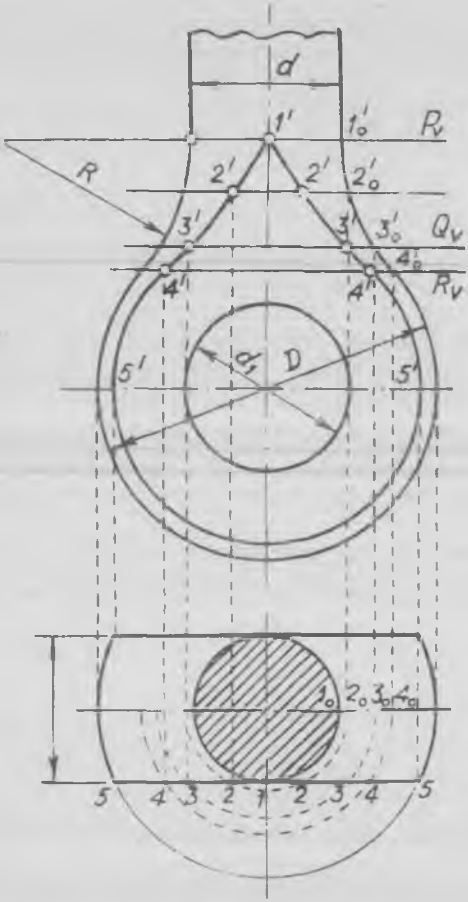
156-шаклда шар сиртнинг умумий вазиятдаги Q текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган айлананинг проекцияларини ясаш кўрсатилган. Бунинг учун, V текислик кесувчи Q текисликка перпендикуляр бўлган янги V_1 текислик билан алмаштирилган ($O_1X_1 \perp Q_H$) ва шарнинг янги фронтал проекцияси чизилган (унинг маркази O_1 нуқтада). Шарнинг кесими $a_1' b_1'$ кесмага тенг диаметрли айлана бўлади. Бу айлана H ва V текисликларга эллипслар тарзида проекцияланади. Горизонтал проекцияда эллипснинг кичик ўқи $ab \parallel O_1X_1$ бўлади, катта ўқи (de) эса ab кесманинг ўртасидан ўтади ва кесим айланасининг диаметрига тенг бўлади ($de = a_1' b_1''$).

Фронтал проекциядаги эллипснинг кичик ўқини топиш учун горизонтал проекциядаги эллипсга уринма қилиб фронталлар ўтказилади. Уларнинг эллипс маркази (c') орқали Q_V изга перпендикуляр қилиб ўтказилган энг катта қиялик чизиғи билан кесишув нуқталари ($5'$, $6'$) эллипс кичик ўқининг учлари бўлади. Эллипснинг катта ўқи c' орқали ўтган фронталдир, унинг узунлиги кесим айланасининг диаметрига тенг ($k't' = de = a_1' b_1'$).

Бу ерда кесим чизиғининг кўринар-кўринмаслиги контур айланасига боғлиқ бўлади. Урициш нуқталарининг аниқ ўрни экваторни ёки бош меридианни (V текисликка парал-



156- шакл



157- шакл

лел) ўтказиш йўли билан топилади. Масалан, горизонтал проекцияда S текисликдаги экваторда ётган *1*, *2* нуқталар эллипсни кўринар ва кўринмас қисмларга бўлади; фронтал проекциядаги уринма *3'*, *4'* нуқталар эса бош меридионал текислик (унинг изи S_{2H}) ўтказиш йўли билан топилган.

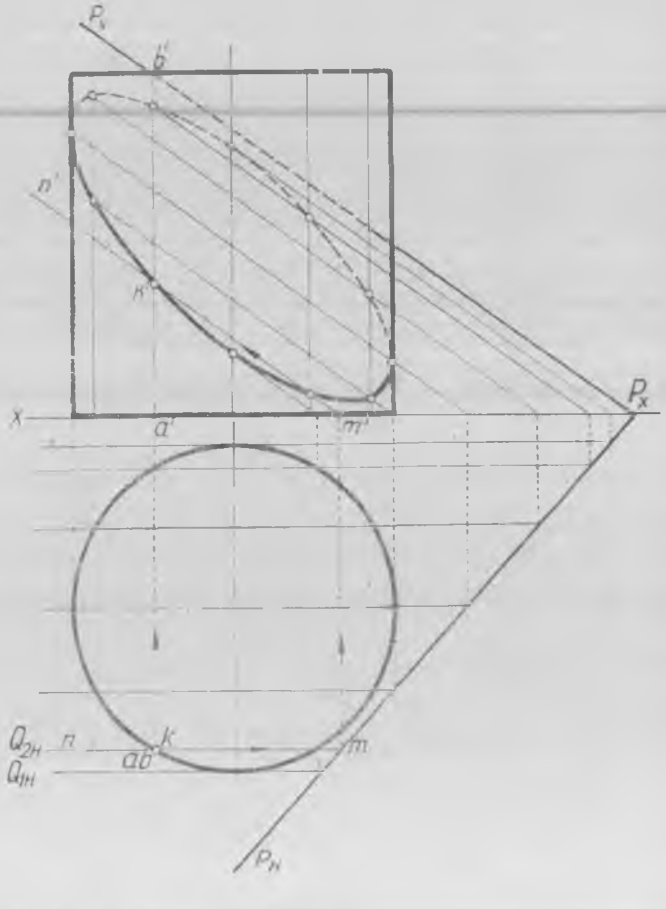
Агар ихтиёрий айланиш сирти билан умумий вазиятдаги текисликнинг кесишув чизиғини ясаш керак бўлса, проекция текисликларини алмаштириб, кесувчи текисликни 155- шаклда тасвирланган проекцияловчи вазиятга келтириб олиш тавсия қилинади.

Айланиш сиртларининг текислик билан кесишув чизиғини ясаш масаласи деталларнинг чизмаларини чизишда кўп учрайди. Мисол тариқасида, 157- шаклда айланиш сиртлари ва параллел иккита текис шакл билан чегараланган деталнинг (серьганинг) каллаги тасвирланган. Текис шакллар айланиш сиртининг фронтал текисликлар билан кесилишидан ҳосил бўлган; улар ўзаро тенгдир. Шаклнинг контури эгри чизиқ бўлиб, унинг *5'*, *5'* нуқталардан пастки қисми ва бириктириш ёйигача бўлган юқориги қисми диаметри *5 — 5* кесмага тенг айлананинг ёйидир, чунки деталнинг каллаги сфера шаклидадир. Фронтал проекциядаги энг юқориги *1'* нуқта деталнинг ўқида, сиртнинг цилиндрик қисмидан пастки қисмига ўтиш чизиғида (P_V текисликда) бўлади. Оралиқдаги бошқа нуқталар деталнинг ўқига перпендикуляр горизонтал текисликлар (Q_V, R_V, . . .) ёрдамида топилади.

55- §. Чизиқли сиртнинг текислик билан кесилиши

Ясовчилари тўғри чизиқлар бўлган сиртнинг текислик билан кесишув чизиғини ясаш учун, юқорида баён қилинган ёрдамчи кесувчи текисликлар усулидан ташқари, тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқталарини топиш усулидан ҳам фойдаланиш мумкин. Бу усулни тубандагича тушуниш керак: олдин берилган сиртнинг бир неча ясовчи тўғри чизиғи белгиланади; сўнгра ҳар бир ясовчи тўғри чизиқ билан кесувчи текисликнинг учрашув нуқтаси топилади; топилган нуқталар тартибли равишда ўзаро туташтирилса, изланган кесим чизиғи ҳосил бўлади.

158- шаклда *H* текисликда турган тўғри доиравий цилиндрнинг умумий вазиятдаги *P* текислик билан кесилиши тасвирланган. Цилиндр ясовчиларининг *P* текислик билан учрашув

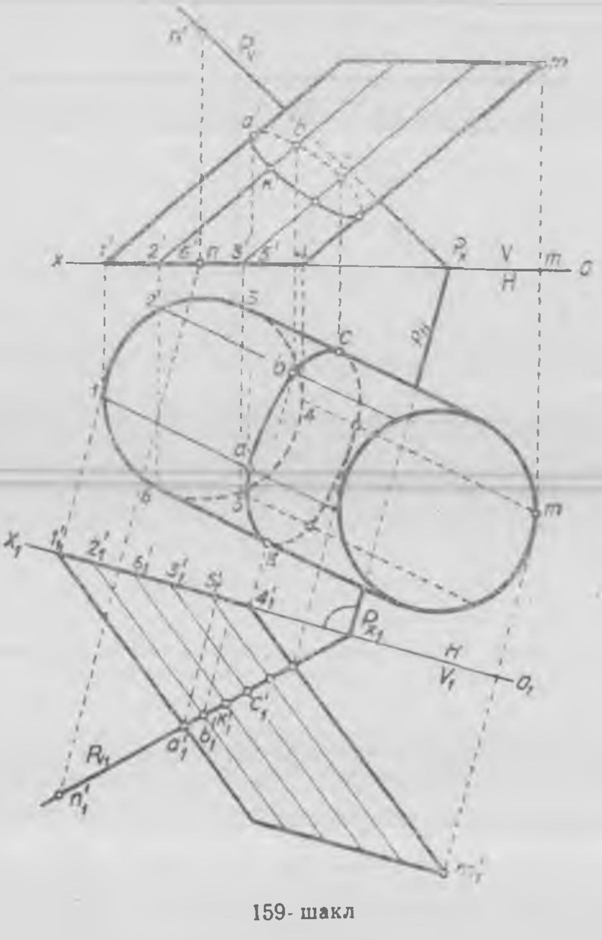


158- шакл

нуқталари шу нуқталар орқали ўтган фронтал текисликлар ёрдами билан топилган.

Масалан, цилиндрнинг AB (ab, $a'b'$) ясовчисидан ўтган Q_2 текислик P текисликни унинг MN (mn, $m'n'$) фронтали бўйича кесиб, K (k', k) нуқтани ҳосил қилади. Кесим шаклининг ҳақиқий кўринишини ясаш учун P текисликни проекциялар текисликларидан бирига жипслаштириш керак.

159-шаклда асоси доира бўлган эллиптик цилиндрнинг умумий вазиятдаги P текислик билан кесишув чизиғи проекцияларини ясаш кўрсатилган. Бунинг учун аввал V текисликни P га перпендикуляр бўлган янги V_1 текислик билан алмаштирамиз ($O_1X_1 \perp P_H$) ва P текисликнинг янги P_{V_1} изини ҳамда цилиндрнинг янги фронтал проекциясини ясаймиз. Бу мақсадда P_V изда ихтиёрий бирор N (n', n) нуқта олиб, унинг янги фронтал n_1' проекциясини топамиз. Бу нуқ-



159-шакл

та ва O_1X_1 ўқидаги P_{X_1} нуқта орқали P_{V_1} ўтади. O_1X_1 ўқида цилиндрнинг изидаги (асосидаги) нуқталарнинг проекциялари $1'_1$, $2'_1$, . . . , $6'_1$ бўлади. Бу нуқталардан ўтган ясовчиларнинг проекцияларини чизиш учун уларнинг бирида ихтиёрий $M(m', m)$ нуқта оламиз ва унинг янги фронтал m'_1 проекциясини топамиз, бу m'_1 нуқта ва шу нуқта ётган ясовчининг изи ($4'_1$) орқали ясовчининг проекциясини ўтказамиз. Бошқа ясовчилар унга параллел бўлади.

Янги $V_1 \perp H$ системада изланган кесим шаклининг фронтил пвоекцияси P_{V_1} изда, a'_1, b'_1, . . . , k'_1 кесма тарзида ҳосил бўлади. Нуқталарни цилиндрнинг тегишли ясовчиларига кўчириш йўли билан олдин кесим чизиғининг горизонтал проекцияси $a'b'c'$ . . . эллипсни, кейин эса фронтал проекцияси a' b' c'... эллипсни ясаймиз.

Бу ерда кесим шаклининг ҳақиқий кўринишини ясаш учун H текисликни P га параллел H_1 текислик билан алмаштириб, $V_1 \perp H_1$ системага ўтиш қулайдир.

56- §. Конус кесимлари

Иккинчи тартибли конус сиртнинг текислик билан кесилишидан ҳосил буладиган чизиқлар *конус кесимлар* дейилади.

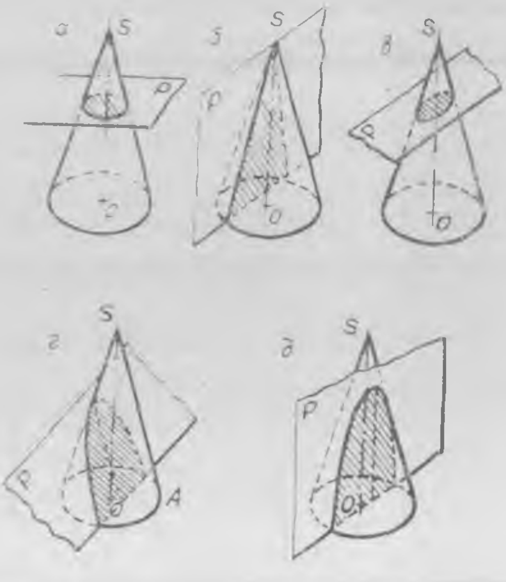
Бу чизиқлар жумласига айлана, эллипс, парабола, гипербола ва икки кесишган тўғри чизиқ киради.

Ясашни осонлаштириш мақсадида, иккинчи тартибли конуснинг хусусий тури бўлган тўғри доиравий конус оламиз ва унинг қандай текислик билан кесилганда юқорида айтилган чизиқлардан қайси бири ҳосил бўлишини кўриб чиқамиз.

1. Агар кесувчи текислик конуснинг ўқига перпендикуляр бўлса, кесим чизиғи *айлана* бўлади (160- шакл, *а*).

2. Агар текислик конуснинг учидан ўтиб, икки ясовчиси бўйича кесиб тушса, кесим чизиғи икки кесишган тўғри чизиқ бўлади (160-шакл, *б*).

3. Агар текислик конуснинг ўқига оғма бўлиш билан бирга, унинг ҳамма ясовчиларини кесиб ўтса, кесим чизиғи *эллипс* бўлади (160- шакл, *в*).



160- шакл

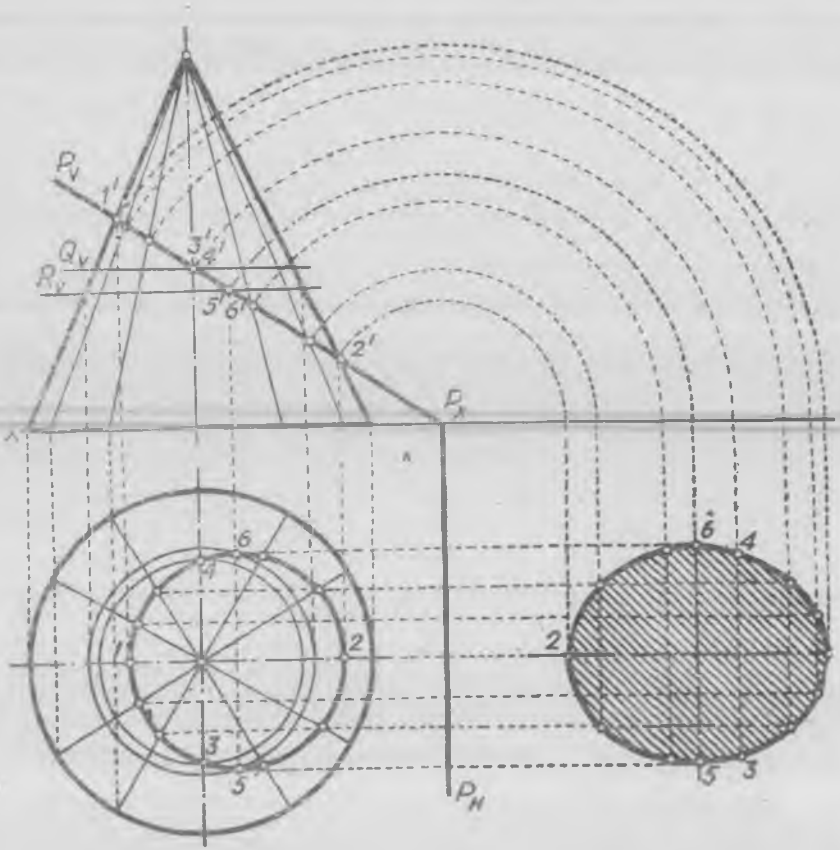
4. Агар кесувчи текислик конуснинг ясовчиларидан бирига параллел бўлса, кесим чизиғи *парабола* бўлади (160- шакл, *г*).

5. Агар кесувчи текислик конуснинг икки яссовчисига параллел бўлса, кесим чизиғи *гипербола* бўлади. Хусусий ҳолда бундай кесувчи текислик конуснинг ўқига параллел бўлиши мумкин (160 шакл, *д*).

Маълумки, конус сирт чизиқли сиртлардандир. Шунга кўра, конус сирт билан ҳар қандай текисликнинг кесишув чизиғини ясаш учун унинг бир неча ясовчиси кесувчи текислик билан учрашув нуқталарини топиб, сўнгра уларни тартибли равишда ўзаро туташтириш керак.

Тубанда конус кесимларидан эллипснинг, параболанинг ва гиперболанинг проекцияларини ҳамда уларнинг ҳақиқий кўринишларини ясашга мисоллар келтирилган.

1. Эллипс. 161- шаклдаги горизонтал проекциялар текислигида турган тўғри доиравий конуснинг сиртини фронтал проекцияловчи P текислик эллипс бўйича кесади. Бу эллипснинг



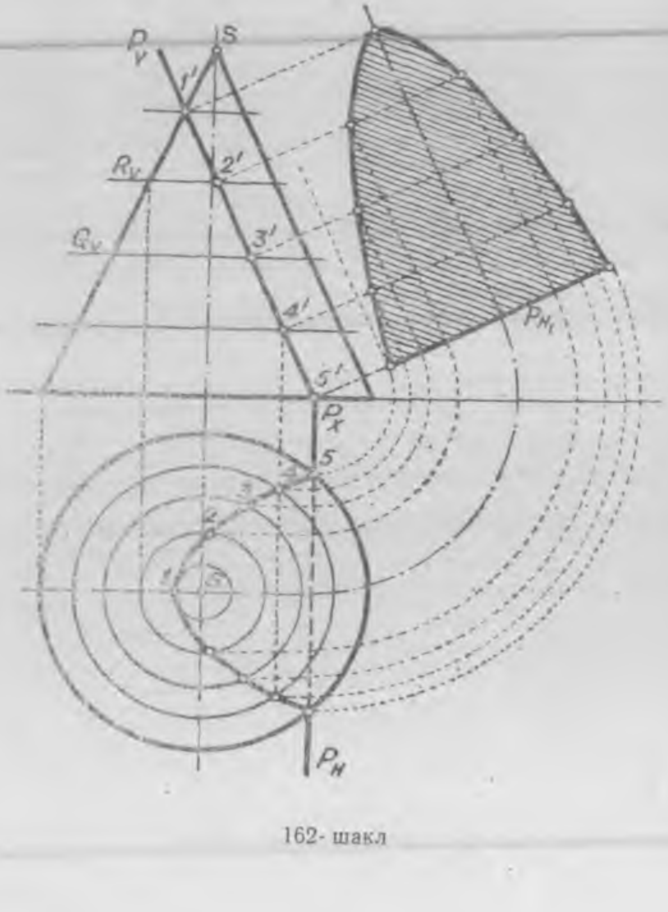
161- шакл

фронтал проекцияси кесувчи текисликнинг фронтал изида $1'$ $2'$ кесма, горизонтал проекцияси эса эллипс бўлади. Горизонтал проекциядаги эллипсга оид нуқталарни топиш учун конуснинг ясовчиларидан фойдаланилган. Фронтал проекциялари конус ўқининг фронтал проекциясига тўғри келган $3'$, $4'$ нуқталарнинг горизонтал *3, 4* проекцияларигина конуснинг сиртини ўша нуқталардан ўтган айлана бўйича кесувчи *Q* текислик ёрдамида топилган.

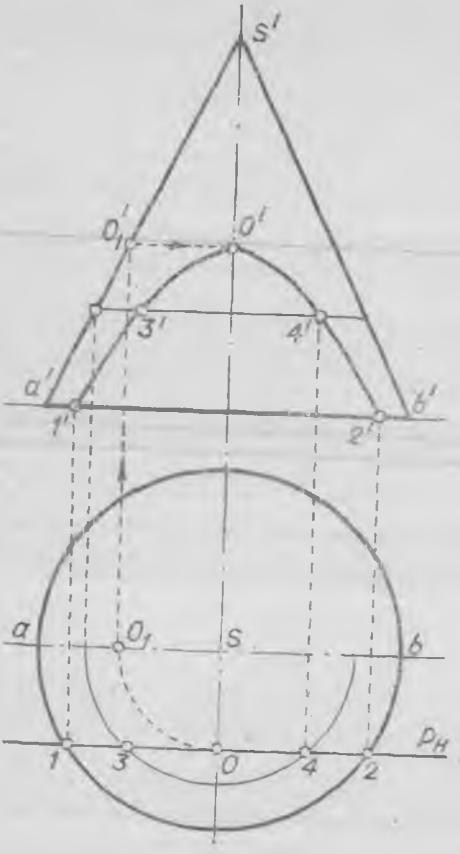
Кесим шаклининг ҳақиқий кўриниши (эллипс) *P* текисликни *H* текисликка жипслаштириш йўли билан ясалган.

Кесим чизиғи — эллипснинг ҳақиқий кўринишини унинг катта ва кичик ўқлари бўйича ясаш ҳам мумкин. Эллипснинг катта ўқи $1'$, $2'$ кесмага тенг, эллипснинг кичик ўқи катта ўқининг ўртасидан ўтган кесим айланасининг ватарига (*5, 6* га) тенг бўлади.

2. Парабола. 162-шаклдаги *H* текисликда турган доиравий конуснинг сиртини фронтал проекцияловчи *P* текислик парабола бўйича кесади. Параболанинг фронтал проекцияси



162- шакл



163- шакл

кесма бўлади ва текисликнинг фронтал изига тўғри келади, горизонтал проекцияси эса парабола бўлади. Бу ерда параболанинг горизонтал проекцияси конуснинг сиртини айланалар бўйича кесадиган ёрдамчи текисликлар воситасида ясалган.

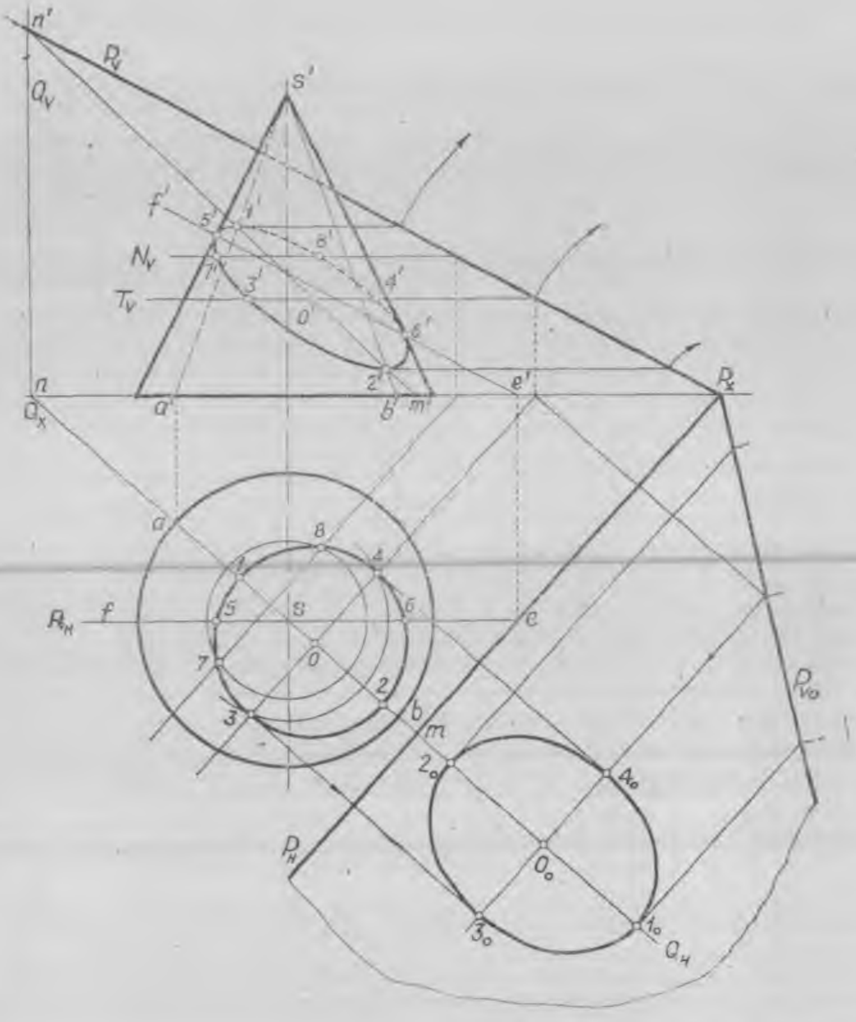
3. Гипербола. 163-шаклдаги доиравий конуснинг сиртини фронтал текислик ($P \parallel V$) гипербола бўйича кесади, чунки кесувчи текислик конуснинг AS ва BS ясовчиларига ҳамда ўқига параллелдир.

Гиперболанинг горизонтал проекцияси кесувчи текисликнинг изига тўғри келади (1—2 кесма), фронтал проекцияси эса ҳақиқий кўриниши бўлади. Гиперболанинг учини (Q' нуқтани) топиш учун унинг горизонтал проекцияси (O нукта $90°$ га айлантирилиб, четки AS ясовчига келтирилади, кейин $O_1 O'_1$ бўйича O' топилади. Гипербола мавҳум ўқига нибатан симметрик жойлашган икки тармоқдан иборат бўлади. Гиперболанинг иккинчи тармоғи конуснинг иккинчи палласи билан P текисликнинг кесишувидан ҳосил бўлади (конуснинг иккинчи палласи эпюрда кўрсатилмаган).

Агар конусни кесувчи текислик умумий вазиятдаги текислик бўлса, проекциялар текисликларини алмаштириш йўли билан эпюрни 161—163- шакллардаги кўринишлардан бирига келтириш, кейин эса кесим чизиғини ясаш тавсия қилинади.

164- шаклда излари (P_V, P_H) орқали берилган умумий вазиятдаги текислик билан тўғри доиравий конуснинг кесилишидан ҳосил бўлган эллипснинг проекцияларини ва ҳақиқий кўринишини ясаш кўрсатилган.

Кесим шаклининг проекцияларини ясаш фронтал проекциядаги энг юқориги нуқта $1'$ ни ва энг паетки нуқта $2'$ ни аниқлашдан



164- шакл

бошланган. Бунинг учун конуснинг ўқидан ўтган ва кесувчи текисликнинг горизонтал изига перпендикуляр бўлган горизонтал проекцияловчи *Q* текислик ўтказилган. *Q* текислик конусни *AS* (*as*, *a′s′*) ва *BS* (*bs*, *b′s′*) ясовчилари бўйича, *P* текисликни эса *MN* (*mn*, *m′n′*) чизиғи бўйича кесади. Ясовчиларнинг фронтал проекциялари (*a′s′*, *b′s′*) билан *m′n′* кесишиб, изланган *1′* ва *2′* нуқталарни беради; кейин улар бўйича горизонтал проекциядаги *1* ва *2* нуқталар аниқланади. *1′* — *2′* ва *1* — *2* кесмаларни тенг қисмларга бўлувчи *O′* ва *O* нуқталар кесим шаклининг проекциялари—эллипсларнинг марказларидир.

Фронтал проекциядаги эллипснинг кўринган қисмини кўринмаган қисмидан ажратувчи $5'$ ва $6'$ нуқталарни аниқлаш учун конуснинг ўқидан ўтган ва V текисликка параллел бўлган ёрдамчи R текислик ўтказилган (R_H — бу текисликнинг изи). R текислик конусни V текисликка параллел (контур) ясовчилар бўйича, P текисликни EF фронтали бўйича кесади. Ясовчиларнинг фронтал проекциялари билан фронталнинг фронтал проекцияси кесишиб, изланган $5'$ ва $6'$ нуқталарни беради; улар бўйича горизонтал проекциядаги 5 ва 6 нуқталар аниқланади.

Кесим чизиғининг бошқа оралиқдаги нуқталарини топиш учун конуснинг ўқига перпендикуляр бўлган горизонтал текисликлардан фойдаланиш қулай, чунки бундай текисликлар конусни айланалар бўйича, P текисликни эса унинг горизонталлари бўйича кесади. Ёрдамчи горизонтал текисликлар шундай ўтказилиши керакки, уларнинг фронтал излари $1'$ ва $2'$ нуқталар оралиғида жойлашсин. 164-шаклда иккита шундай текислик ёрдамида тўртта нуқтанинг проекцияларини (3, $3'$; 4, $4'$; 7, $7'$; 8, $8'$) топиш кўрсатилган; текисликлардан биттаси O нуқта орқали ўтказилган (T_V — бу текисликнинг изи), шунга кўра топилган $3 — 4$ кесма P текислик билан конуснинг кесилишидан ҳосил бўладиган эллипснинг кичик ўқи ва айни вақтда шу эллипс горизонтал проекциясининг кичик ўқидир. Горизонтал проекциядаги эллипснинг катта ўқи $1 — 2$ кесмадир.

$1' — 2'$ ва $3' — 4'$ кесмалар фронтал проекциядаги эллипснинг қўшма диаметрларидир.

Кесим шакли — эллипснинг ҳақиқий кўриниши P текисликни H текисликка устма-уст тушириш усули билан ясалган. Эллипс катта ($1_0 — 2_0$) ва кичик ($3_0 — 4_0 = 3 — 4$) ўқлари бўйича ясалиши ҳам мумкин.

57-§. Сиртнинг тўғри чизиқ билан кесилиши

Тўғри чизиқ билан ҳар қандай сиртнинг кесишув нуқталарини топиш масаласи сирт билан текисликнинг кесишув чизиғини ясаш масаласи каби бўлади ва ясаш принципи жиҳатидан олганда, текислик билан тўғри чизиқнинг учрашув нуқтасини топишдан фарқ қилмайди.

Умуман, бу масала тубандагича ечилади:

1. Берилган тўғри чизиқ орқали ёрдамчи текислик ўтказилади.

2. Сирт билан ёрдамчи текисликнинг кесишув чизиғи ясалади.

3. Ясалган кесим чизиғи билан берилган тўғри чизиқнинг кесишув нуқталари белгиланади. Бу нуқталар изланган нуқталар, яъни сирт билан тўғри чизиқнинг кесишув нуқталари бўлади.

Маълумки, тўғри чизиқ орқали исталганча текислик ўтказиш мумкин. Лекин ёрдамчи текислик сифатида берилган тўғри чизиқ орқали шундай текислик ўтказиш керакки, у билан

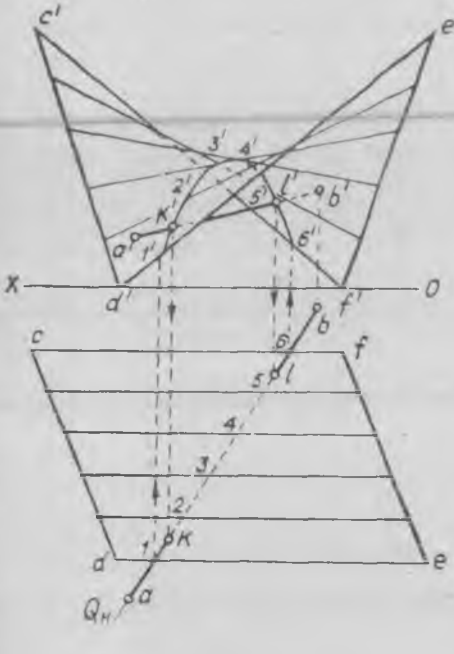
берилган сиртнинг кесишув чизиғини ясаш мумкин қадар осон бўлсин. Кўпгина масалаларни ечишда тўғри чизиқ орқали проекцияловчи текислик ўтказилади. Берилган сирт цилиндр ёки конус сирт бўлгандагина тўғри чизиқ орқали умумий вазиятдаги текислик ўтказиш қулайдир. Умумий вазиятдаги бундай ёрдамчи текислик, берилган сирт цилиндр бўлганда, шу цилиндр ясовчиларига параллел қилиб, берилган сирт конус бўлганда шу конус учидан ўтказилиши лозим.

1- мисол. AB тўғри чизиқ билан $CDEF$ қийшиқ текисликнинг кесишув нуқталари топилсин (165- шакл).

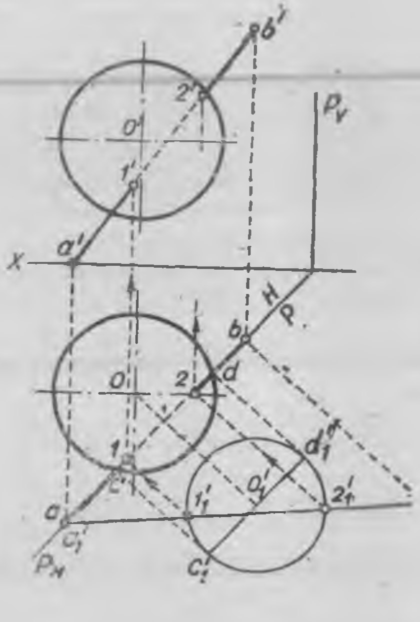
Я с а ш т а р т и б и:

1) қийшиқ текисликнинг бир неча ясовчисини белгилаймиз.

2) AB тўғри чизиқ орқали горизонтал проекцияловчи Q текислик ўтказамиз; Q_H из ab бўйича кетади, $Q_V \perp OX$ бўлади (эпюрда кўрсатилмаган);



165- шакл



166- шакл

3) бу текислик билан сиртнинг кесишув чизиғини ясаймиз ($1...6$, $1'...6'$);

4) ясалган кесим чизиғи билан тўғри чизиқнинг кесишув нуқталари (k', k; l', l) изланган нуқталар бўлади.

2-мисол. AB тўғри чизиқ билан сферанинг кесишув нуқталари топилсин (166- шакл).

Я с а ш т а р т и б и:

1) AB чизиқ орқали горизонтал проекцияловчи P текислик ўтказамиз;

2) V текисликни P текислик билан алмаштирамиз, AB чизиқнинг ва кесим чизиғининг P текисликдаги янги фронтал проекцияларини ясаймиз (бу $a_1' b_1'$ ва диаметри cd га тенг айлана бўлади);

3) P текисликда изланган нуқталарнинг проекциялари $1_1'$, $2_1'$ бўлади, улар бўйича $V \perp H$ системадаги проекцияларини ясаймиз ($1, 1'$ ва $2, 2'$).

3-мисол. AB чизиқ билан оғма эллиптик цилиндр сиртнинг кесишув нуқталари топилсин (167- шакл).

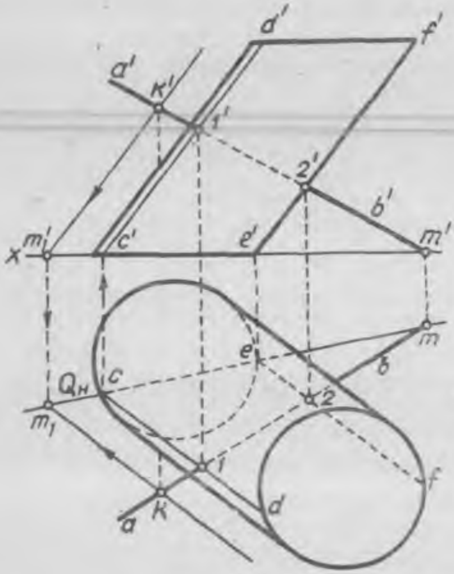
Ясаш тартиби:

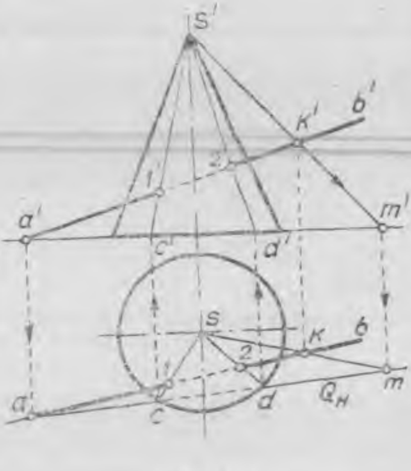
1) AB тўғри чизиқ орқали цилиндрнинг ясовчиларига параллел қилиб ёрдамчи текислик ўтказамиз; бунинг учун AB чизиқнинг бирорта, масалан, k, k' нуқтасидан цилиндрнинг ясовчиларига параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз ($k'm_1'$, km_1):

2) ҳосил бўлган AB ва KM кесишувчи чизиқлар орқали ифодаланган ёрдамчи текисликнинг горизонтал изини ясаймиз (Q_H);

3) ёрдамчи текисликнинг горизонтал изи (Q_H) билан цилиндрнинг горизонтал изи (асоси) c ва e нуқталарда кесишади, демак, Q текислик цилиндрни унинг шу нуқталаридан ўтган ясовчилари бўйича кесади; уларнинг проекцияларини чизамиз (cd, $c'd'$ ва ef, $e'f'$);

4) чизилган CD, EF ясовчилар билан AB тўғри чизиқнинг кесишув нуқталарини белгилаймиз ($1, 1'$ ва $2, 2'$), булар изланган нуқталар бўлади.





168- шакл

167- шакл

4-мисол. *AB* тўғри чизиқ билан конус сиртнинг кесишув нуқталари топилсин (168- шакл).

Ясаш тартиби.

1) *AB* тўғри чизиқ билан конуснинг учини ёрдамчи *Q* текислик деб қабул қиламиз ва унинг горизонтал изини ясаймиз (Q_H);

2) Q_H билан конуснинг асоси *c* ва *d* нуқталарда кесишади; бу нуқталарни *s* билан, уларнинг фронтал *c'*, *d'* проекцияларини эса *s'* билан туташтириб, конус сиртнинг ёрдамчи текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган *CS* ва *DS* ясовчиларнинг проекцияларини топамиз;

3) ясалган бу *CS* ва *DS* ясовчилар билан *AB* чизиқнинг кесишув нуқталари (*2, 1'* ва *2, 2'*) изланган нуқталар бўлади.

X боб. СИРТЛАРНИ ЁЙИШ

58- §. Асосий маълумотлар

Агар сиртлар сира чўзилмайдиган, лекин букиладиган парда деб қаралса, улардан баъзиларини секин-аста деформациялаб, буриштирмай ва йиртиб юбормай бир текисликка ётқизиш мумкин. Шундай хоссага эга бўлган сиртлар *ёйиладиган сиртлар* дейилади, сиртни текисликка жойлаштириш натижасида ҳосил бўлган текис шакл эса *ёйилма* деб аталади.

Турли трубопровод, резервуар, бак ва шулар сингари конструкцияларнинг маълум бир қисми, сув тарновлари, баъзи биноларнинг томлари тахта материални букиш йўли билан ясалади. Бундай конструкцияларнинг лойиҳаларини тузишда муҳим босқичлардан бири уларнинг ёйилмаларини ясашдир. Шунинг учун ёйилмаларни ясаш техниканинг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

Ёйиладиган сиртларга фақат ёндош ясовчилари бир текисликда ётган, яъни ўзаро параллел ёки кесишган чизиқли сиртларгина (масалан, цилиндр ва конус сиртлар) киради. Бундай чизиқли сиртларнинг аниқ ёйилмаларини ясаш мумкин.

Ёндош ясовчилари учрашмас тўғри чизиқлар бўлган чизиқли сиртларнинг (масалан, коноид, цилиндроид, қийшиқ текисликларнинг) ҳамда чизиқсиз сиртларнинг (масалан, шар, тор, эллипсоид ва шулар сингари сиртларнинг) аниқ ёйилмаларини ясаб бўлмайди. Ёйилмайдиган бундай сиртларнинг жуда тахминий ёйилмасинигина ясаш мумкин. Бунинг учун, ёйилмайдиган сиртлар шу сиртлар ичига ёки ташқи томонига чизилган ёйиладиган сиртлар (кўпёқлар, цилиндр ёки конус сиртлар) билан алмаштирилади ва бу ёйиладиган сиртнинг ёйилмаси ёйилмайдиган сиртнинг тахминий ёйилмаси деб қабул қилинади.

59- §. Конус сиртнинг ёйилмасини ясаш

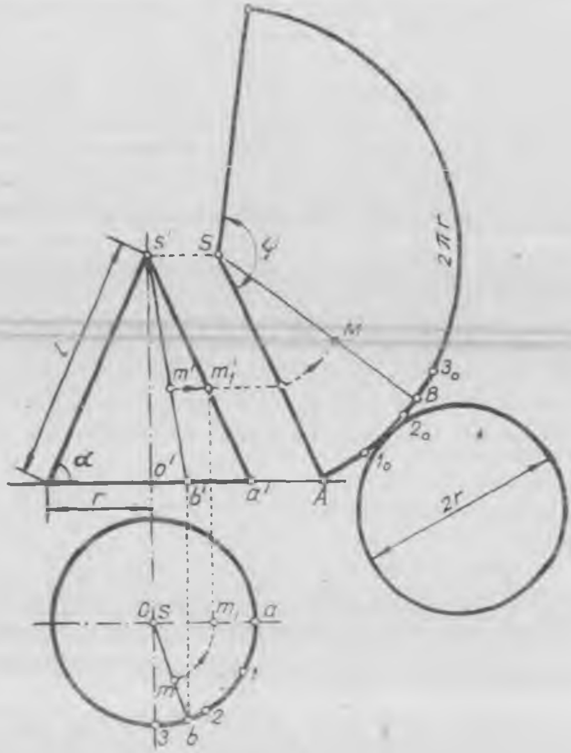
1. Тўғри доиравий конус сиртнинг ёйилмаси. Конуснинг ёйилмасини ясаш учун унинг сиртини бирор ясовчиси ва асосининг айланаси бўйича қийиб, проекция текисликларидан бирига жойлаштирамиз.

169- шаклдаги тўғри доиравий конуснинг ён сирти AS ясовчиси ва асосининг айланаси бўйича қийилиб, V текисликка ёткизилган. Конус ён сиртининг ёйилмаси доиранинг сектори тарзида тасвирланади. Секторнинг радиуси конус ясовчисининг узунлигига (l га), ёйининг узунлиги эса конус асоси айланасининг узунлигига ($2\pi r$ га) тенг бўлади (r — конус асосининг радиуси).

Секторнинг марказий бурчагини тубандаги формуладан топиш мумкин:

$$AA = 2\pi r;\quad \varphi_{\text{радиан}} = \frac{AA \text{ ёйининг узунлиги}}{\text{радиус}} = \frac{2\pi r}{l};$$

$$\frac{r}{l} = \cos\alpha;\quad \varphi = 360^\circ\,\frac{r}{l};$$

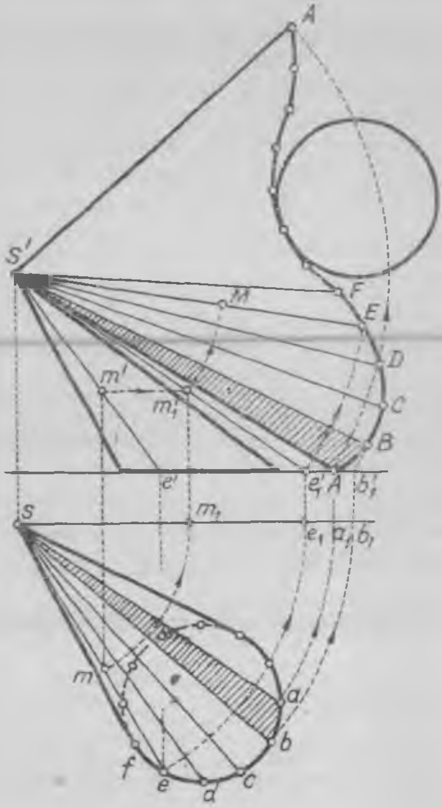


169- шакл

бу ерда α — конуснинг ясовчиси билан H текислик орасидаги бурчак.

Конуснинг сиртида чизилган ихтиёрий чизиқ ёйилмага нуқталар бўйича ўтказилади. Шаклда конуснинг сиртида олинган M нуқтани шу нуқта орқали ўтган SB ясовчи воситасида ёйилмага ўтказиш йўли кўрсатилган ($m'm_1' \parallel OX$; $SM = s'm_1'$).

2. Оғма конус сиртнинг ёйилмасини ясаш. Умуман, ҳар қандай конуснинг ёйилмасини ясаш учун, одатда, унинг сирти ичига чизилган пирамиданинг ёқлари билан алмаштирилади. Шунинг учун, конуснинг ёйилмасини ясаш пирамиданинг ёйилмасини ясашдан ҳеч қандай фарқ қилмайди.



170- шакл

170- шаклда асоси доира бўлган оғма эллиптик конуснинг ёйилмасини ясаш кўрсатилган. Конуснинг ён сирти унинг ичига чизилган 12 ёқли пирамида сирти билан алмаштирилган. Ёйилмани ясаш учун пирамиданинг ҳар қайси ёғининг (учбурчакнинг) ҳақиқий кўриниши ясалади. Ҳар қайси учбурчак томонлари бўйича ясалади. Ҳар қайси учбурчакнинг бир томони конус асосидаги айлананинг 1/12 қисмини кўрсатувчи ватар, қолган икки томони эса ясовчилардир. Ясовчиларнинг ҳақиқий узунликларини конуснинг учидан ўтган ва H текисликка перпендикуляр бўлган ўқ атрофида айлантириш йўли билан топиш қулай. Бунинг учун конуснинг белгиланган ҳар бир ясовчиси хусусий, яъни фронтал вазиятга келгунча айлантирилади.

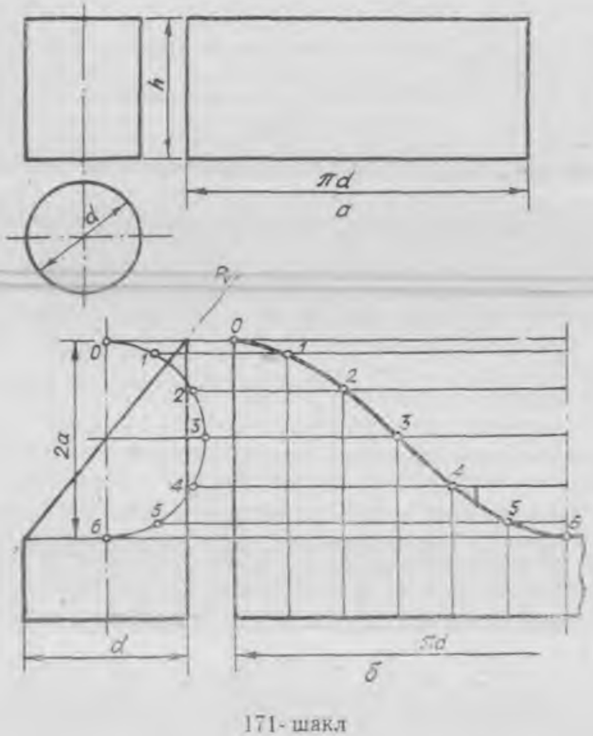
Эпюрда конуснинг SA, SB, SE ясовчиларининг ҳақиқий узунликларини ясаш ва унинг SE ясовчисида ётган M нуқтани ёйилмага ўтказиш кўрсатилган.

60- §. Цилиндр сиртнинг ёйилмасини ясаш

Цилиндрнинг ёйилмасини ясаш учун, ясовчиларининг ҳақиқий узунликларини ва нормал кесимининг ҳақиқий кўринишини билиш керак. Цилиндрнинг ясовчиларига перпендикуляр бўлган текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган текис шакл шу цилиндрнинг нормал кесими деб аталади.

1. Тўғри доиравий цилиндрнинг ёйилмаси. Асосининг диаметри d, баландлиги h бўлган цилиндр ён сиртнинг ёйилмаси тўғри бурчакли тўртбурчак бўлади. Тўртбурчакнинг томонларидан бири h га, иккинчиси πd га тенг (171-шакл, *а*)

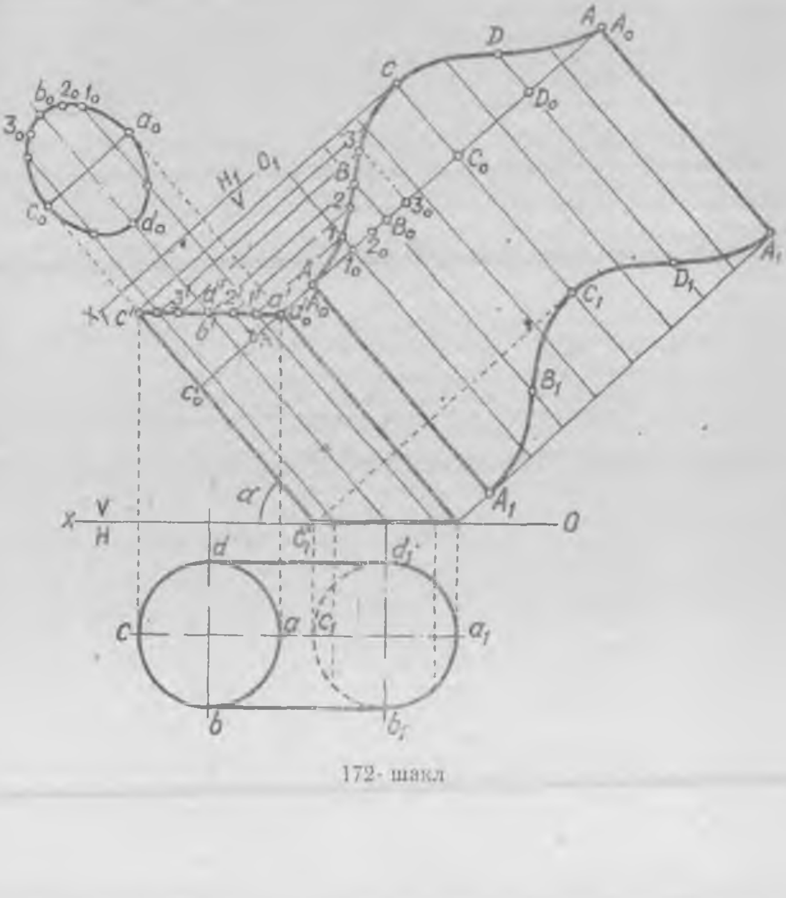
2. Қийшиқ кесилган доиравий цилиндрнинг ёйилмаси. 171-шакл, *б* да фронтал проекцияловчи P текислик билан қийшиқ кесилган тўғри доиравий цилиндрнинг ёйилмасини ясаш кўрсатилган. Цилиндрнинг қийшиқ кесилган асоси эллипсдир; бу эллипс ёйилмада синусоида кўринишида тасвирланади. Синусоиданинг амплитудаси a кесмага тенг, даври цилиндр асоси айланасининг узунлигига, яъни πd га баравардир. Булардан фойдаланиб, синусоидани тубандагича



171- шакл

ясаш мумкин. Цилиндр асоси айланасининг узунлигини (πd ни) тенг n та (масалан, 12 та) қисмга бўламиз ва бўлувчи нуқталар орқали цилиндрнинг ясовчиларига параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказамиз. Шундан кейин цилиндрнинг ўқидаги $2a$ кесмада диаметри шу кесмага тенг ярим айлана чизамиз ва уни 6 та тенг қисмга бўламиз. Бўлувчи нуқталар орқали горизонтал чизиқлар ўтказамиз. Бу чизиқларнинг тегишли вертикал чизиқлар билан кесишув нуқталари силлиқ эгри чизиқ билан туташтирилса, синусоида ҳосил бўлади. Ясашдан кўриниб турибдики, ёйилмани бу усул билан чизиш учун цилиндрнинг горизонтал проекцияси керак бўлмайди, шунинг учун эпюрда у кўрсатилмаган.

3. **Оғма цилиндрнинг ёйилмаси.** Ҳар қандай цилиндр ён сиртининг ёйилмасидаги энг четка параллел ясовчилар орасидаги масофа цилиндр нормал кесимининг периметрига тенг бўлади. 172-шаклдаги оғма эллиптик цилиндрнинг нормал кесими цилиндрни ясовчиларига перпендикуляр H_1 текисликка проекциялаш йўли билан топилган. Нормал кесим эллипсдир, бу эллипс катта ўқи (b_0d_0) ва кичик ўқи (a_0c_0) бўйича ясалиши мумкин. Бизнинг мисолимизда эллипснинг катта ўқи $b_0d_0 = 2R$, кичик ўқи эса $a_0c_0 = 2R \cos \alpha$

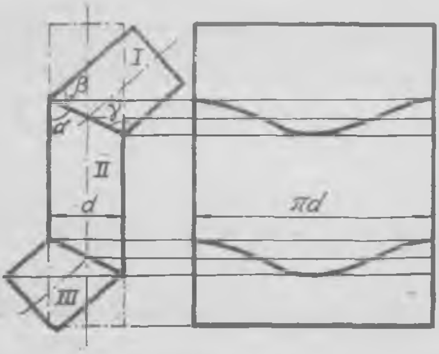


172- шакл

бўлади; бу ерда R — цилиндр асоси айланасининг радиуси α — цилиндр ясовчилари билан H текислик орасидаги бурчак.

Ёйилмани ясаш учун эллипсни a_0, 1_0, 2_0, b_0, 3_0, . . . нуқталар билан бир неча қисмга бўламиз; бу қисмларни цилиндрнинг ясовчиларига перпендикуляр йўналиш бўйича ўлчаб қўйиб, эллипсни тўғрилаймиз (A_0, 1_0, 2_0, . . . , A_1). Ҳосил бўлган A_0, 1_0, 2_0, B_0 3_0, . . . , A_0 нуқталардан нормал кесимнинг периметри A_0A_0 кесмага перпендикулярлар ўтказамиз ва улар бўйича нормал кесимдан иккала томонга тегишли ясовчиларнинг узунликларини қўямиз (масалан, C_0C — c_0c', $C_0C_1 = c_0'c_1'$ ва ҳоказо). Шундай қилиб, топилган A, 1, 2, B, 3, . . . ва A_1, . . . , B_1, . . . нуқталар силлиқ эгри чизиқлар билан ўзаро туташтирилса, ёйилма ҳосил бўлади. Бу ердан $A12B3$ . . . A эгри чизиқ синусоидадир, шунинг учун уни A_0A_0-даври ва $\frac{c_0'c'}{2}$ амплитудаси бўйича 246-шаклда кўрсатилган усул билан ҳам ясаш мумкин.

172- шаклдаги цилиндр V текисликка параллел, шунинг учун цилиндр ясовчиларининг фронтал проекциялари уларнинг ҳақиқий узунликларига тенг бўлади.



173- шакл

Агар берилган цилиндр H ва V текисликларнинг иккаласига хам оғама бўлса, бундай цилиндрнинг ёйилмасини ясаш учун аввал проекция текисликларини алмаштириш йўли билан уни проекция текисликларидан бирига параллел вазиятга келтириб олиш, сўнгра ясашни юқорида (172- шаклда) кўрсатилган тартибда бажариш тавсия қилинади.

173- шаклдаги мисолда уч элементдан тузилган тарновнинг ёйилмасини ясаш кўрсатилган. Тарнов элементларининг диаметрлари тенг бўлгани учун $\alpha = \beta$ дир, демак, $\beta + \gamma = 180°$ бўлади. Шунга биноан, тарновнинг I қисмини II қисмидан ажратиб олгандан кейин, ўз ўқи атрофида 180° айлантириб, яна ўз жойига қўйсак, II қисмнинг давоми бўлиб қолади. Янги вазиятда I қисм штрих пунктир чизиқ билан тасвирланган. Худди шундай III қисмни ҳам II қисмнинг давомига айлантирамиз. Натижада сиртига иккита эллипс чизилган битта цилиндрик труба ҳосил бўлади. Тўғриланган бу тарновнинг ёйилмасини ясаймиз ва унда эллипсларнинг ёйилмаларини — синусоидаларни чизамиз.

Бундай ёйилма асосида, тарнов элементларини пайвандлаш ёки кавшарлаш йўли билангина ясаш мумкин. Агар четлари

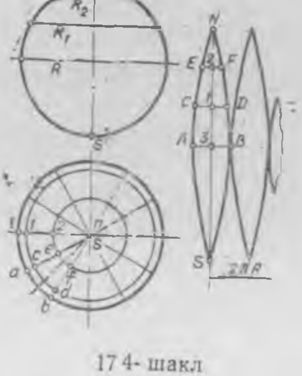
қайрилиб уланадиган бўлса, чок учун қайси элементнинг бўйига ҳам, энига ҳам қўшиш керак.

61- §. Ёйилмайдиган сиртларнинг тахминий ёйилмалари

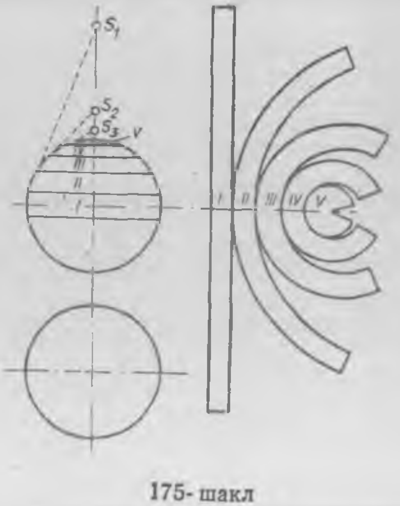
Ёйилмайдиган сиртларни буриштирмай ва йиртиб юбормай деформациялаш йўли билан текисликка жойлаштириб бўлмайди. Бундай сиртларнинг тахминий ёйилмаларинигина ясаш мумкин. Сиртларнинг тахминий ёйилмаларини ясашнинг умумий усули учбурчаклар усулидир. Бу усулни шундай тушуниш керак: берилган сирт 170- шаклда қилинганидек, бир неча учбурчакка бўлинади. Шундан кейин бу учбурчакларнинг ҳақиқий кўринишларидан ёйилма тузилади.

Ясовчилари эгри чизиқ бўлган айланиш сиртларининг тахминий ёйилмаларини ясаш учун ёрдамчи цилиндрлар ва конуслар усулидан фойдаланилади.

174- шаклда шарнинг тахминий ёйилмасини ёрдамчи цилиндрлар воситаси билан ясаш кўрсатилган. Бунинг учун, шарнинг сирти унинг ўқи NS орқали ўтган бир қанча меридианал текисликлар билан 12 та тенг тилимга (сферик иккибурчакларга) бўлинади. Бу тилимлардан бирининг тахминий ёйилмаси ясалса кифоя, чунки ҳамма тилимларнинг учлари шарнинг қутбларида (N ва S нуқталарда), тилимнинг тўғрилангандан кейинги узунлиги эса шар катта айланасининг ярмига тенг, яъни ёйилмадаги кесма $NS = \pi R$ бўлади; бу ерда R — шарнинг радиуси. A ва B нуқталарни топиш ҳам қийин эмас: улар орасидаги масофа катта айлананинг 1/12 қисмига тенг ва NS чизиққа нисбатан симметрик жойлашган $\left(AB = \frac{\pi R}{6}\right)$. C, D, E, F нуқталарни топиш учун NS кесманинг ярми *1* ва *2* нуқталар билан уч қисмга бўлинган. Бу нуқталар орқали AB чизиққа



174- шакл



175- шакл

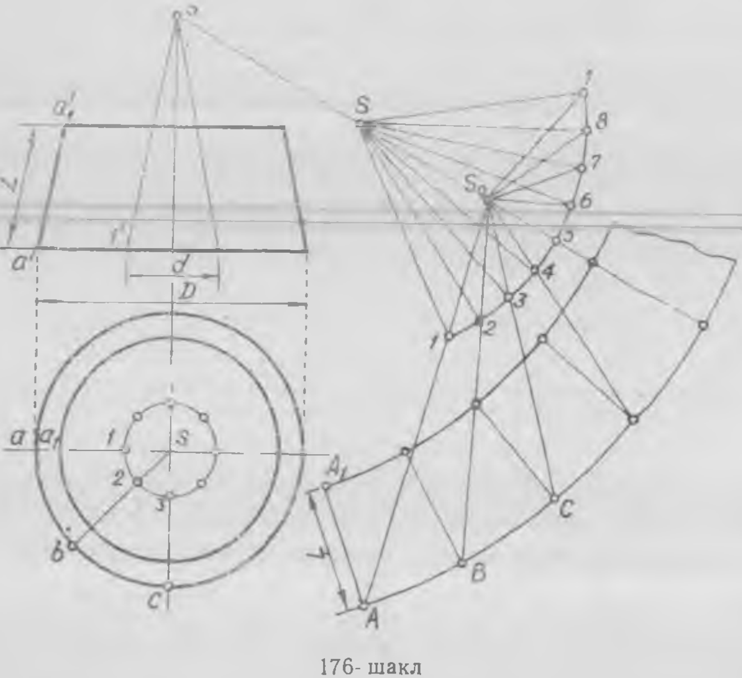
параллел тўғри чизиқлар ўтказилган ва уларда шарнинг экваторига параллел қилиб ўтказилган тегишли айланаларнинг 1/12 қисмига тенг CD ва EF кесмалар қўйилган $\left(CD = \frac{\pi R_1}{6};\ EF = \frac{\pi R_2}{6}\right)$. Топилган нуқталар лекало билан туташтирилади. Тилимнинг пастки қисми юқори қисмига симметрикдир. Ёйилманинг қолган 11 тилими ясалган биринчи тилимни кўчириб чизиш йўли билан ясалади.

175- шаклда шарнинг ёйилмаси ёрдамчи конуслар воситаси билан ясалган. Шар горизонтал текисликлар билан бир қанча пояслардан бўлинган. Ўртадаги *I* пояс цилиндр сирти билан, қолган пояслар кесик айланиш конусларининг ён сиртлари билан алмаштирилган.

62- §. Кесик айланиш конусининг ёйилмаси

Ўхшаш конусларнинг ёйилмалари ҳам ўхшаш бўлади. Шунга кўра учи чизмада жойлашмаган кесик айланиш конусининг ёйилмасини унга ўхшаш ёрдамчи конуснинг ёйилмасидан фойдаланиб ясаш мумкин.

Масалан, учи чизмада жойлашмаган кесик конуснинг ёйилмасини ясаш керак бўлсин (176- шакл). Бунинг учун конус остки асосининг диаметрини n та, масалан, 3 та тенг қисмга бўламиз ва асосининг диаметри $d = \frac{D}{3}$ бўлган ёрдамчи конус ясаймиз ($1's' \parallel$



176- шакл

$\| a'a_1'$). Кейин ёрдамчи конуснинг ёйилмасини чизамиз ва симметрия ўқида олинган ихтиёрий S_0 нуқтани секторнинг ёйидаги *1*, *2*, *3*, ... нуқталар билан туташтирамиз; бу S_0 *1*, S_0 *2* ... чизиқларнинг давомида шундай *A*, *B*, *C*, ... нуқталарни топамизки, AS_0 кесманинг $1S_0$ кесмага нисбати, BS_0 кесманинг $2S_0$ кесмага нисбати ва ... *n* га (бизнинг мисолимизда 3 га) тенг бўлсин. Топилган *A*, *B*, *C*, ... нуқталарни лекало билан туташтирсак, конус остки асосининг ёйилмаси ҳосил бўлади. *A*, *B*, *C*, ... нуқталар орқали ёрдамчи конуснинг тегишли ясовчиларига параллел чизиқлар ўтказамиз ва конус ясовчисининг узунлиги (*L*) ни қўйиб, устки асосининг ёйилмасини ясаймиз.

Берилган конус асосининг диаметрини ёрдамчи конус асосининг диаметрига нисбатини кўрсатувчи сон $\left(n = \frac{D}{d}\right)$ *ўхшашлик коэффициенти* дейилади.

XI боб. СИРТЛАРНИНГ ЎЗАРО КЕСИШИШИ

Турли буюмлар, машина деталлари ва инженерлик иншоотлари ҳар хил геометрик шакллардан (кўпёқлар, конуслар, цилиндрлар ва бошқалардан) тузилган деб қараш мумкин. Улар сиртларининг кесишиши натижасида текис ёки фазовий эгри чизиқлар ҳосил бўлади. Буюмларни, машина деталларини ва иншоотларни тасвирлашда чизмада бу чизиқларнинг проекцияларини ясашга тўғри келади. Бу бобда геометрик сиртларнинг ўзаро кесишишидан ҳосил бўладиган чизиқларни ясаш усуллари баён қилинади.

63- §. Кесишишнинг асосий турлари. Кесишиш чизиқларини ясаш усуллари

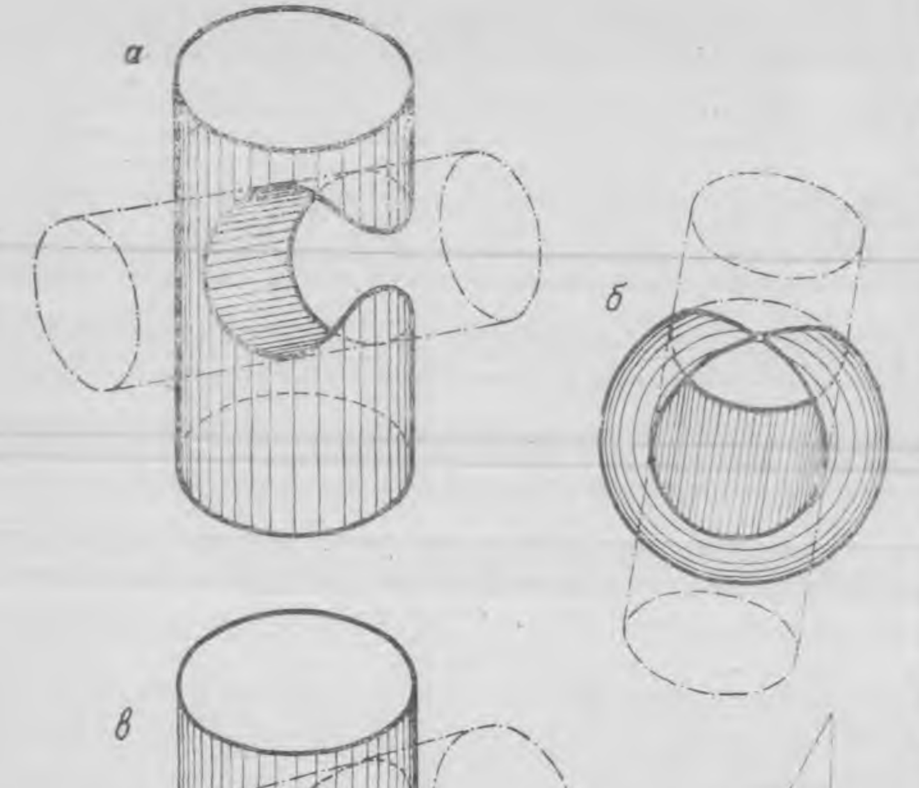
Икки сирт ўзаро кесишганда тубандаги тўрт ҳол юз бериши мумкин:

1. Сиртлар ўзаро қисман кесишган. Бу ҳолда биринчи сирт ясовчиларининг маълум бир қисми иккинчи сирт ясовчиларининг маълум бир қисми билан кесишади. 177-шакл, *а* да қисман кесишган икки цилиндрнинг яққол тасвири кўрсатилган.

Ёпиқ икки сирт қисман кесишганда уларнинг кесишиш чизиғи берк фазовий эгри чизиқ бўлади.

2. Сиртлар бир томонлама уриниб кесишган. Бундай ҳолда иккита берк сирт бир умумий нуқтали икки фазовий эгри чизиқ бўйича кесишади (177- шакл, *б*).

3. Сиртлар ўзаро икки томонлама уринма бўлиб кесишган. Бу ҳолда икки ёпиқ сирт бир-бири билан икки нуқтада кесишадиган (икки умумий нуқтали) иккита фазовий ёки текис эгри чизиқ бўйича кесишади (177- шакл, *в*).



177 - шакл

4. Сиртлар тўла кесишган. Бу ҳолда сиртлардан бири иккинчиси билан тўла кесишади. Натижада иккита алоҳида ёпиқ текис чизиқ ёки фазовий эгри чизиқ ҳосил бўлади (177- шакл, *г*).

Сиртларнинг ўзаро кесишишидан ҳосил бўладиган чизиқлар *ўтиш чизиқлари* (бир сиртдан иккинчи сиртга ўтиш чизиқлари) деб ҳам аталади.

Сиртларнинг кесишиш чизиғи, одатда, нуқталар бўйича ясалади. Олдин кесишиш чизиғи проекцияларининг характерли нуқталари — ўтиш чизиғининг энг четки нуқталари, контур ясовчиларининг уриниш нуқталари ва шулар сингари нуқталар топилиши тавсия қилинади.

Сиртларнинг кесишиш чизиқларига оид нуқталарни топишнинг умумий усули ёрдамчи сиртлар усулидир. Бу усулни тубандагича тушуниш керак:

1) берилган иккала сирт ёрдамчи сирт билан кесилади;

2) берилган ҳар қайси сирт билан ёрдамчи сиртнинг кесишиш чизиғи ясалади;

3) ясалган кесишиш чизиқларининг ўзаро кесишиш нуқталари ўтиш чизиғига оид изланган нуқталар бўлади.

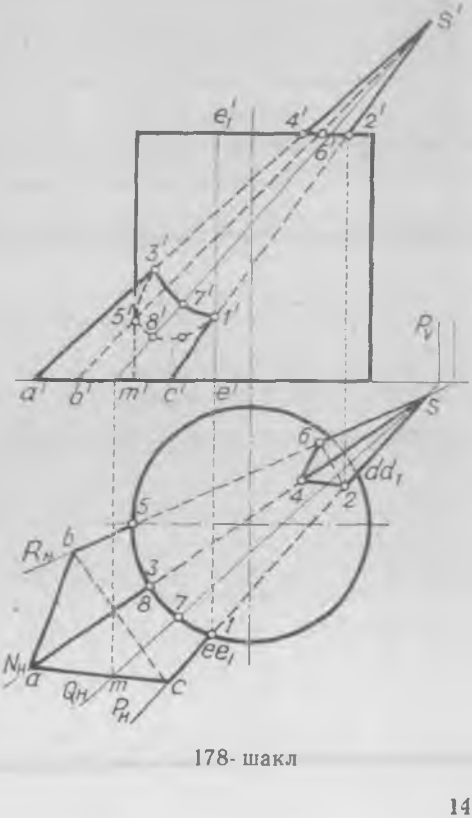
Ёрдамчи кесувчи сиртлар сифатида текислик, шар, цилиндр ёки конус сиртдан фойдаланиш мумкин.

Ёрдамчи сиртларнинг типини ҳамда вазиятини шундай танлаб олиш кераки, у билан берилган кесишувчи сиртлардан ҳар қайсисининг кесишиш чизиғи **тўғри чизиқ** ёки айлана бўлсин.

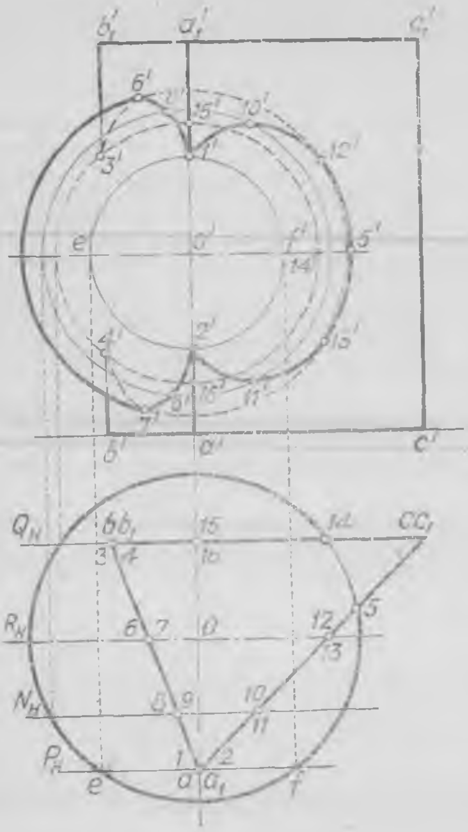
64-§. Кўпёқ билан эгри сиртнинг кесишиши

Кўпёқ билан эгри сиртнинг кесишиш чизиғини ясаш масаласи сиртни кўпёқнинг ёқлари ва қирралари (яъни текисликлар ва тўғри чизиқлар) билан кесилишини ясаш масаласига келтирилади.

1- мисол. Тўғри дои-



178- шакл



179- шакл

равий цилиндр билан уч ёқли пирамиданинг кесишиш чизиғи ясалсин (178- шакл).

Ясаш: пирамиданинг ҳар қайси қирраси орқали ёрдамчи горизонтал проекцияловчи *P, R, N* текислик ўтказамиз ва қирраларнинг цилиндр сирт билан кесишув нуқталарини (*1, 2, 3, 4,* ва *5, 6* нуқталарни) топамиз. Кейин пирамиданинг ёқларида, шу пирамида учини асоси билан туташтирувчи бир неча тўғри чизиқ оламиз ва уларнинг ҳам цилиндр сирт билан кесишув нуқталарини топамиз. Шаклда пирамиданинг *ACS* ёғида олинган *MS* чизиқнинг цилиндр сирт билан кесишув нуқтаси (*7,7′*) ни топиш кўрсатилган.

MS чизиғидан ўтган ёрдамчи *Q* текислик пирамиданинг *BCS* ёғини ҳам тўғри чизиқ бўйича кесиб яна битта (*7, 7′* дан бошқа) нуқтани беради. Бу нуқтанинг горизонтал проекцияси *7* да, фронтал проекцияси эса *8′ 1′* чизиқда бўлади.

AS қиррадан ўтган ёрдамчи *N* текислик пирамиданинг *BCS* ёғидаги *8, 8′* нуқтани беради.

Пирамида цилиндрнинг устки асоси билан учбурчак (*246, 2′, 4′, 6′*) бўйича, ён сирти билан эса берк синиқ эгри чизиқ бўйича кесишади.

2-мисол. Сфера билан уч ёқли призманинг кесишув чизиғи ясалсин (179- шакл).

Ясаш: призманинг қирралари орқали ва ёқларида олинган бир қанча ясовчи чизиқлар орқали *V* текисликка параллел ёрдамчи текисликлар ўтказамиз. Бундай текисликлар сферани айланалар бўйича кесади. Ҳар қайси айлананинг тегишли қирра ёки ясовчи чизиқ билан кесишув нуқталари сфера билан призманинг кесишув чизиғига оид умумий нуқталар бўлади. Масалан, призманинг AA_1 қиррасидан ўтган фронтал текислик (P_H) сферани *ef* диаметрли айлана

бўйича кесади. Айлананинг фронтал проекцияси билан $a'a'_1$ кесишиб, излангаи $1'$ ва $2'$ нуқталарни ҳосил қилади.

Призманинг ёқлари сферани айланалар ёки айланаларнинг ёйлари бўйича кесади. BB_1C_1C ёқ V текисликка параллел, шунинг учун бу ёқ билан сферанинг кесишувидан ҳосил бўлган айлана ёйининг фронтал проекцияси ўзига тенг айлана ёйи бўлади ($3'$, $15'$, $14'$, $16'$, $4'$) ва кўринмайди. Бошқа ёқлар билан сферанинг кесишувидан ҳосил бўлган айлана ёйлари V текисликка эллипс қисмлари тарзида проекцияланади.

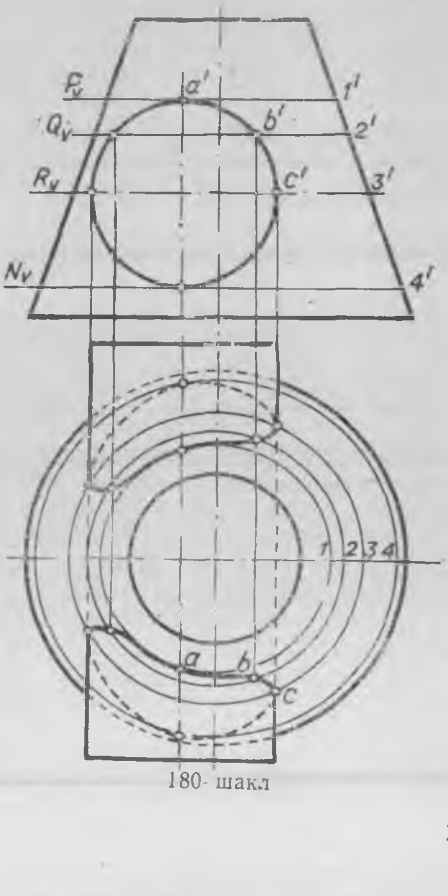
Сфера билан призма ўзаро қисман кесишган, шунинг учун уларнинг кесишиш чизиғи учта айлана ёйидан иборат берк синиқ эгри чизиқдир. Кесишиш чизиғининг фронтал проекцияда олдинги ярим сферадаги қисми кўринади, орқа томонидаги ярим сферадаги қисми эса кўринмайди. Кесишиш чизиғининг фронтал проекциясини кўринар ва кўринмас қисмларга бўлувчи нуқталар ($6'$, $7'$, $12'$, $13'$) сферани тенг икки қисмга бўлувчи фронтал текислик (R_H) воситаси билан топилади.

65-§. Сиртларнинг кесишиш чизиғини хусусий вазиятдаги параллел ёрдамчи текисликлар воситасида ясаш

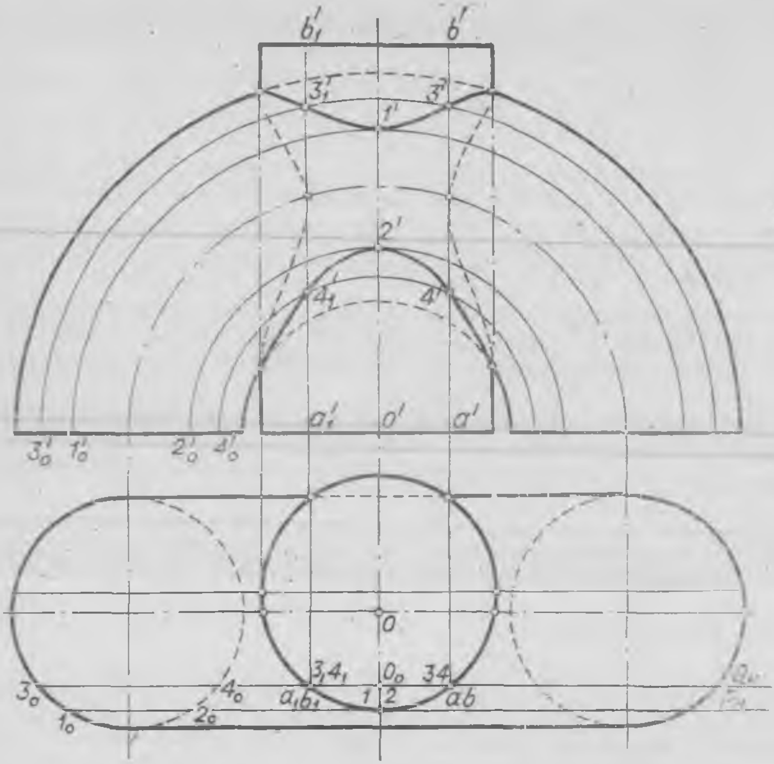
Бу усулдан кесишиш чизиғига оид умумий нуқталарни топишда кесишувчи сиртлардан ҳар қайсиси ёрдамчи текисликлар билан тўғри чизиқлар ёки айланалар бўйича кесишгандагина фойдаланилади.

1-мисол. Ўқлари учрашмас конус ва цилиндр сиртларнинг кесишиш чизиқлари ясалсин (180-шакл).

Ясаш: берилган иккала сиртни H текисликка параллел ёрдамчи текисликлар (P_V, Q_V, ...) билан кесамиз. Бундай текисликлар конусни айланалар бўйича, цилиндрни эса ясовчилари бўйича кесади. Ясовчиларнинг тегишли айланалари билан кесишув нуқталар (a, b, c, . . .) изланган нуқталарнинг горизонтал проекциялари бўлади.



180-шакл



181- шакл

Фронтал проекциядан кўриниб турибдики, цилиндр конус билан тўла кесишган, шунинг учун улар икки фазовий ёпиқ эгри чизиқ бўйича кесишади. Кесишиш чизиғининг цилиндр сирт устки ярмидаги қисми горизонтал проекцияда кўринади.

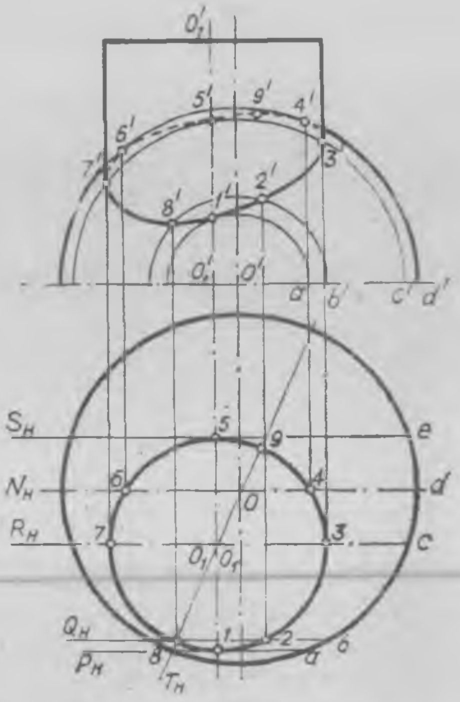
2- мисол. Цилиндр билан ярим ҳалқанинг кесишиш чизиғи ясалсин (181- шакл).

Я с а ш: горизонтал проекциядан кўриниб турибдики, сиртлар қисман кесишган, демак, кесишиш чизиғи ёпиқ бир эгри чизиқ бўлади. Кесишиш чизиғига оид нуқталарни топиш учун V текисликка параллел текисликлардан фойдаланамиз. Бундай текисликлар цилиндрни ясовчилари бўйича, ярим ҳалқани ярим айланалар бўйича кесади. Масалан, Q текислик цилиндрнинг сиртини AB ва A_1B_1 ясовчилари бўйича, ярим ҳалқани радиуслари O_03_0 ва O_04_0 кесмаларга тенг ярим айланалар бўйича кесади. Бу ясовчиларнинг фронтал проекциялари билан ярим айланаларнинг фронтал проекциялари кесишиб, изланган эгри чизиқда ётган тўрт нуқтанинг $3'$, $4'$; $3_1'$, $4_1'$ проекцияларини беради. Шу йўл билан топилган барча нуқталарни бирбирига тартибли равишда туташтирсак, кесишиш чизиғининг

фронтал проекцияси ҳосил бўлади, кесишиш чизиғининг фронтал проекцияси ҳосил бўлади, кесишиш чизиғининг горизонтал проекцияси цилиндрнинг горизонтал проекциясига тўғри келади.

3-мисол. Шар билан цилиндрнинг кесишиш чизиғи ясалсин (182-шакл). Цилиндрнинг ўқи (O_1O_1) шарнинг марказидан ўтган эмас H текисликка перпендикулярдир.

Ясаш: горизонтал проекциядан кўриниб турибдики, цилиндрнинг ҳамма ясовчилари шарни кесиб ўтган, шунинг учун ярим шарда бир фазовий эгри чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқнинг горизонтал проекцияси цилиндрнинг горизонтал проекциясига — айланага тўғри келади.



182-шакл

Кесишиш чизиғига оид нуқталарнинг фронтал проекцияларини топиш учун V текисликка параллел ёрдамчи текисликлардан фойдаланамиз. Бундай текисликлар билан шар сиртнинг кесилишидан ҳосил бўлган айланалар V текисликка ўзгармай проекцияланади. Бу айланаларнинг тегишли ясовчилар билан кесишиш нуқталари изланган нуқталар бўлади.

Олдин изланган кесишиш чизиғининг характерли (таянч) нуқталарини топамиз; бундай нуқталар қаторига шар ва цилиндр проекцияларининг контурларида ётган $4'$, $6'$, $3'$, $7'$ нуқталар, энг пастки $8'$ нуқта, энг юқориги $9'$ нуқта ва V текисликка энг яқин $5'$ нуқта, энг олис $1'$ нуқта киради. Кўрсатилган таянч нуқталарнинг ҳаммаси эпюрда фронтал текисликлар (P_H, Q_H, R_H, . . .) воситаси билан топилган.

Энг пастки ва энг юқориги нуқталар (*8*, *9*) шарнинг марказидан ва цилиндрнинг ўқидан ўтган текисликда, яъни уларнинг умумий симметрия текислигида бўлади.

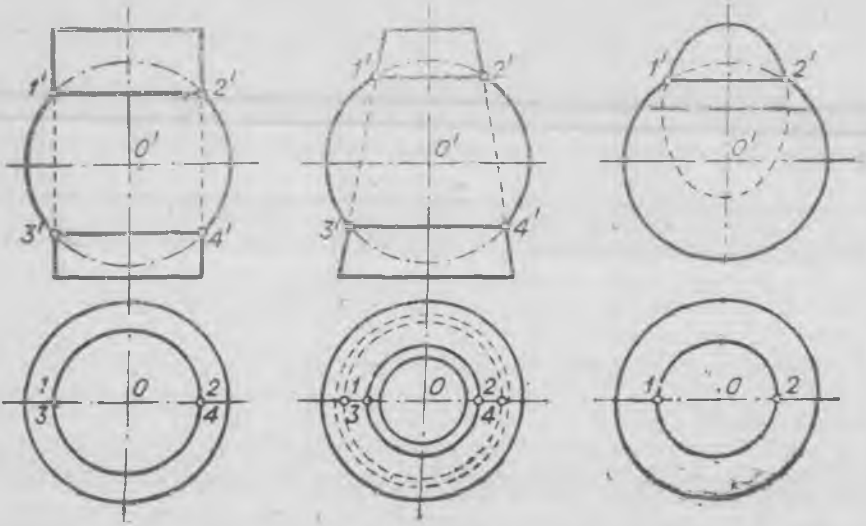
Юқорида келтирилган мисоллардан кўриниб турибдики, хусусий вазиятдаги ёрдамчи текисликлардан кесишувчи сиртлар проекция текисликларига нисбатан хусусий вазиятда жойлашгандагина фойдаланиш қулай.

Агар ўзаро кесишувчи берилган сиртларнинг асослари бош-

қа бирор текисликда бўлса, кесишиш чизиғига оид нуқталарни ёрдамчи кесувчи текисликларнинг ўша текисликдаги изларидан фойдаланиб топиш мумкин.

66- §. Ўқлари кесишган айланиш сиртларининг кесишиш чизиғини ёрдамчи шарлар воситасида ясаш

Ўқлари кесишган айланиш сиртларининг ўзаро кесишиш чизиғини ясаш учун, баъзи ҳолларда ёрдамчи кесувчи текисликлар ўрнига, ёрдамчи шарлардан фойдаланилса, масалани ҳал қилиш бирмунча осонлашади.

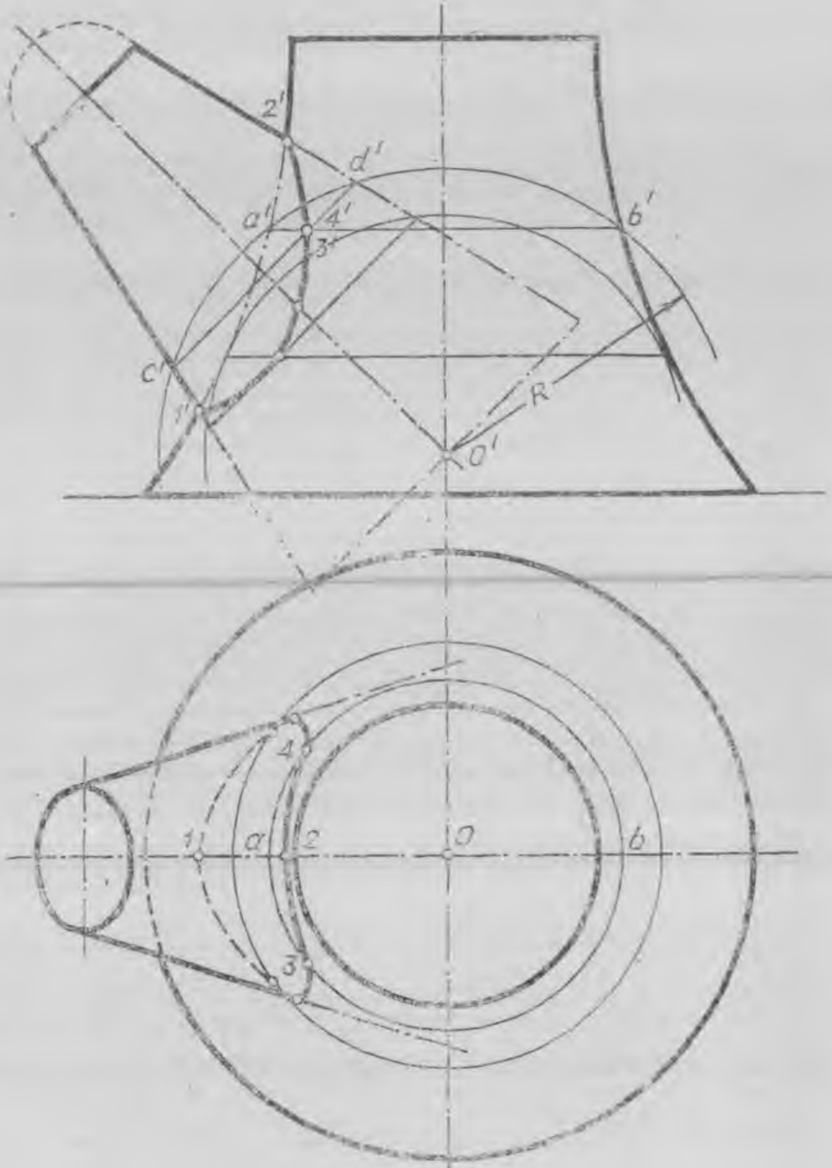


183- шакл

Бу усул тубандаги ҳолга асосланган: агар ҳар қандай айланиш сиртининг ўқи шарнинг марказидан ўтган бўлса, бу сирт шар билан айланалар бўйича кесишади. Бу айланаларнинг текисликлари айланиш сиртининг ўқига перпендикуляр бўлади. 183- шаклда ўқлари шарнинг марказидан ўтган доиравий цилиндрнинг, доиравий конуснинг ва айланиш эллипсоидининг шар билан кесишуви тасвирланган. Эпюрдаги *1′*, *2′* ва *3′*, *4′* кесмалар айланаларнинг фронтал проекцияларидир.

184- шаклдаги мисолда кесик доиравий конус билан ясовчиси эгри чизиқ бўлган айланиш сиртининг кесишиш чизиғини ёрдамчи шарлар усули билан ясаш кўрсатилган.

Кесишиш чизиғининг энг четдаги (пастки ва юқориги) нуқталари (*1′* ва *2′*) берилган сиртларнинг контур ясовчилари кесишган жойларда бўлади. Оралиқдаги нуқталарни топиш учун сиртларнинг ўқлари кесишган нуқтадан (*o′*, *o* дан) берилган иккала сиртни кесувчи шар чизилади (шарнинг радиуси *R* их-



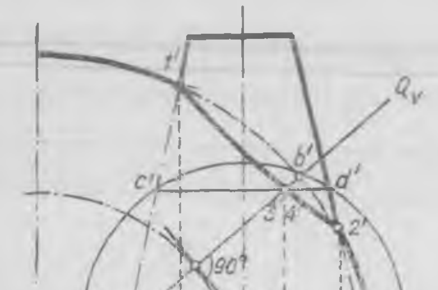
184- шакл

тиёрийдир). Шар билан конус айлана бўйича кесишади; бу айлана V текисликка тўғри чизиқ кесмаси ($c'd'$) тарзида проекцияланади. Берилган айланиш сирти ҳам ўша шар билан айлана бўйича кесишади; бу айлана V текисликка тўғри чизиқ кесмаси ($a'b'$) тарзида проекцияланади. Бу кесмалар ($a'b'$ ва

$c'd'$) ўзаро кесишиб, изланган $3'$, $4'$ нуқталарни ҳосил қилади. Иккала сиртни бошқа радиусли шарлар билан кесиб, яна бир қанча нуқталар топиш мумкин.

Ясаш фронтал проекцияда бажарилади. Фронтал проекцияси бўйича кесишиш чизиғининг горизонтал проекциясини ясаш қийин бўлмайди. Масалан, $3'$, $4'$ нуқталарнинг горизонтал проекцияларини топиш учун диаметри $a'b'$ кесмага тенг бўлган айлана чизилади ва унга $3'$, $4'$ нуқталардан вертикал чизиқ туширилади.

Баъзи ҳолларда, берилган сиртлар билан ёрдамчи шарнинг кесишиш чизиқлари айланалар бўлсин учун, ҳар сафар шарнинг марказини янги ўринга суриш керак бўлади.



185- шакл

185-шаклда конус билан ҳалқанинг ўзаро кесишиш чизиғини маркази конуснинг ўқи бўйича «сирпанувчи» шарлар воситаси билан ясаш усули кўрсатилган. Чизмада жойни тежаш мақсадида ҳалқанинг фақат бир чораги тасвирланган. Сиртларнинг умумий симметрия (бош меридианал) текислиги изи (P_H) да ётган $1'$, 1; $2'$, 2 нуқталар тўғридан-тўғри топилади. Оралиқдаги бошқа нуқталарни топиш учун ясашни ҳалқа билан шар кесилишидан ҳосил бўладиган айлана текислигининг изи (Q_V) ни ўтказишдан бошлаш керак. Бу текислик билан ҳалқанинг кесилишидан ҳосил бўлган айлана V текисликка тўғри чизиқ кесмаси ($a'b'$) тарзида проекцияланади. Бу $a'b'$ кесманинг ўртасидан шу кесмага ўтказилган перпендикуляр билан конус ўқининг кесишиш нуқтаси (o') ҳалқани ҳам, конусни ҳам айлана бўйича кесадиган ва радиуси $R = o'a' = o'b'$ бўлган ёрдамчи шарнинг марказидир. Шар билан конуснинг кесишишидан ҳосил бўлган айлана V текисликка $c'd'$ кесма тарзида проекцияланади. Натижада, $a'b'$ билан $c'd'$ кесишиб, изланган $3'$, $4'$ нуқталарни беради. Горизонтал проекцияга бу нуқталар конусдаги айлана $c'd'$ воситаси билан ўтказилади.

Худди Q текисликка ўхшаш бошқа текисликлар ўтказиб,

ёрдамчи шарларнинг янги бир неча марказини ва радиусларини топиш мумкин.

67- §. Айланиш сиртлари ўзаро кесишувининг хусусий ҳоллари[1]

Техникада сиртлар, одатда хусусий вазиятда қўйилади, шунинг учун деталларни чизишда айланиш сиртларининг энг оддий кўринишдаги ўтиш чизиқларини яхши билиш керак. Ўтиш чизиқлари асосан тўрт группадан иборат.

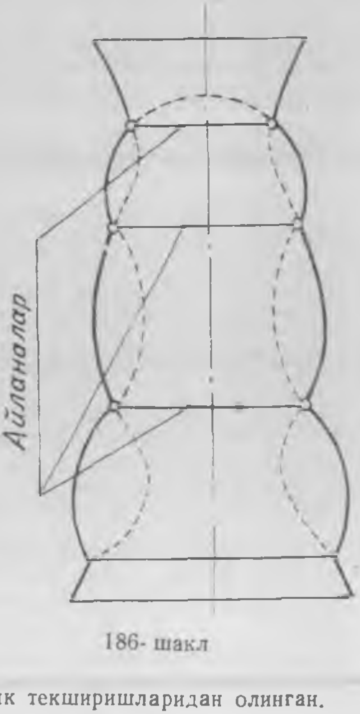
1. Ўқи умумий бўлган икки айланиш сирти ҳамма вақт ўзаро текис эгри чизиқлар (айланалар) бўйича кесишади (183-шакл ва 186- шакл). Бу айланалар уларнинг умумий параллелларидир.

2. Монж теоремасига кўра, биз шарнинг атрофиида чизилган икки айланиш сирти ўзаро икки текис эгри чизиқ (эллипслар) бўйича кесишади. Бу эллипслар сиртларнинг *антипараллел кесимлари* дейилади ва улар айлантириш ўқларининг иккаласига ҳам параллел бўлган текисликка тўғри чизиқ кесмалари тарзида проекцияланади (187- шакл). Кесишувчи сиртларнинг ўқлари горизонтал проекцияда *OX* ўқига параллелдир.

3. Ўқлари кесишган айланиш цилиндри билан конуси (цилиндр билан цилиндр ва конус билан конус ҳам), агар улар юқоридаги 2- пунктга тўғри келмаса, ўзаро фазовий эгри чизиқлар бўйича кесишади. Бу эгри чизиқлар иккала сирт ўқларининг параллелизм текислигига гипербола тармоқлари тарзида проекцияланади (188- шакл).

4. Айланиш цилиндри ва конуси маркази айлантириш ўқида ётмаган шар билан фазовий эгри чизиқлар бўйича кесишади. Бу чизиқлар айлантириш ўқи ва шар маркази орқали ўтган текисликка (ёки унга параллел бўлган текисликка) парабола тарзида проекцияланади (189- шакл).

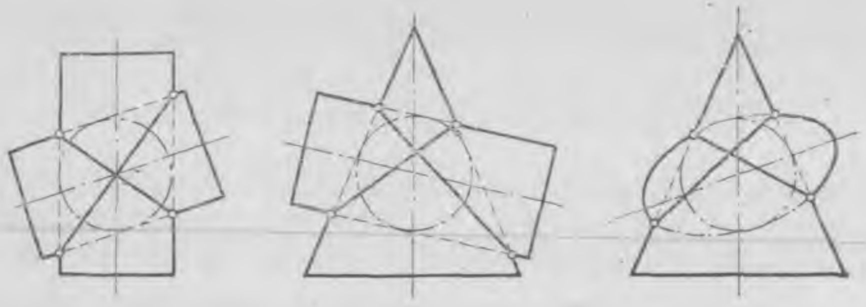
Ўтиш чизиқлари проекцияларининг характери ҳақидаги 2, 3, 4- пунктларда айтилган асосий фикрлар аналитик йўл билан исбот қилинади.



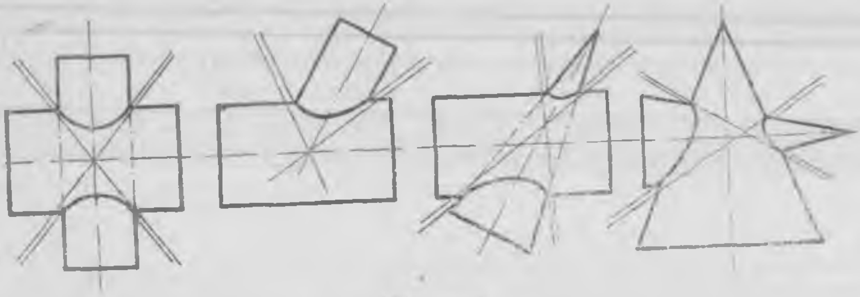
186- шакл

---

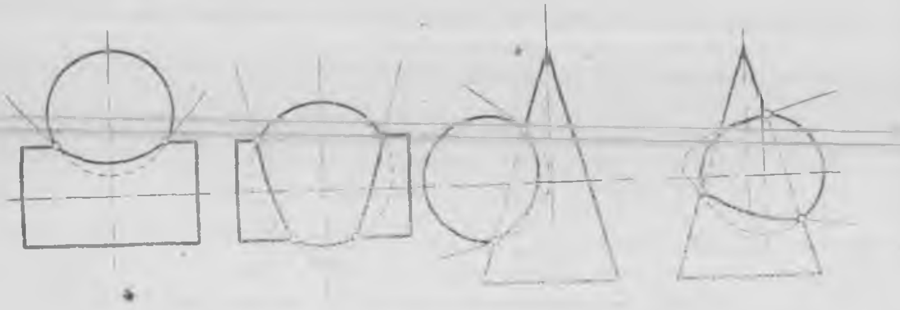
[1] Проф. Е. А. Глазуновнинг графоаналитик текширишларидан олинган.



187- шакл



188- шакл



189- шакл

Чизмачилик практикасида кўрсатилган хусусий ҳолларда ўтиш чизиқларининг проекцияларини (парабола ва гиперболани), агар бу ўтиш чизиғи детални ясаш (йўниш, пармалаш, фрезерлаш ва ҳоказолар) натижасида ўз-ўзидан аниқланадиган бўлса, оддийлаштириб, айлана ёйи тарзида чизишга ГОСТ бўйича рухсат берилган.

XII боб. АКСОНОМЕТРИК ПРОЕКЦИЯЛАР

68- §. Асосий тушунчалар. Аксонометрик проекцияларнинг турлари

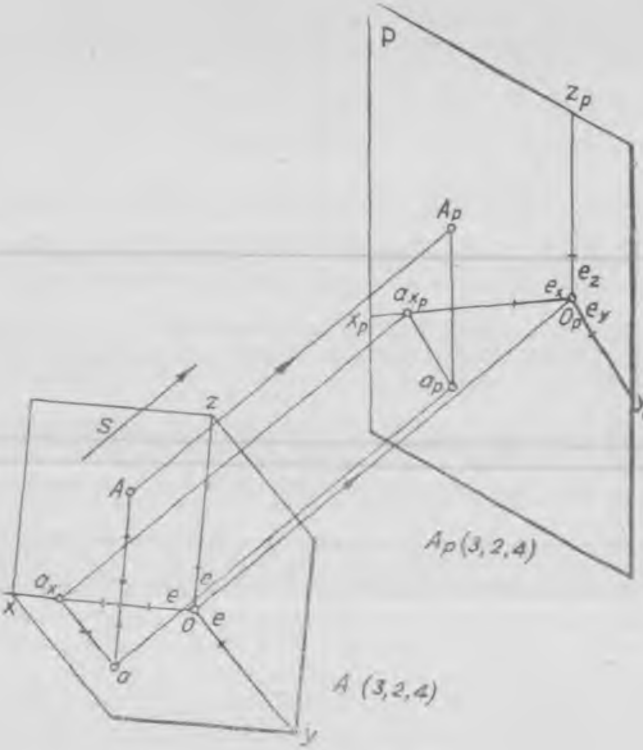
Нарсаларнинг чизмаларини ясаш учун, одатда, уларнинг асосий ўлчамларига (бўйига, энига ва баландлигига) параллел қўйилган *H, V* ва *W* текисликлардаги ортогонал проекцияларидан фойдаланилади. Бундай проекциялардан ҳар бири тасвирланган нарсанинг икки ўлчамини ўз ичига олади. Шунинг учун ортогонал проекциялар асосида тузилган чизмалар осон ясалиши ва уларда тасвирланган нарсаларнинг ўлчамлари тез аниқланиши мумкин. Лекин бундай чизмалар яққол эмас. Айниқса мураккаб нарсаларнинг шундай чизмаларига қараб, уларнинг фазовий шаклларини тасаввур қилиш анча қийин. Бу қийинчиликни йўқотиш мақсадида, нарсанинг ортогонал проекциялар асосида тузилган чизмаси унинг аксонометрик проекцияси билан тўлдирилади.

Аксонометрик проекция, қисқача қилиб, *аксонометрия* дейилади. «Аксонометрия» қадимги грек сўзи бўлиб, аксон — ўқ ва метрео — ўлчайман демакдир, яъни «аксонометрия» сўзи ўқлар бўйича ўлчаш деган гапдир.

Аксонометрик методни тушуниш учун 190- шаклни кўриб чиқамиз. Шаклда фазонинг биринчи октантида жойлашган *A* нуқтани координата ўқлари билан биргаликда бирор *P* текисликка *S* йўналиш бўйича проекциялаш схемаси тасвирланган. *P* текислик *аксонометрия текислиги* дейилади. Координата ўқларининг *P* текисликдаги проекциялари O_pX_p, O_pY_p, O_pZ_p чизиқлар *аксонометрик ўқлар* деб аталади. *S* йўналиш аксонометрия текислигига оғма ёки перпендикуляр бўлиши мумкин. Тасвирнинг яққол бўлиши учун йўналиш координаталар текисликларидан ҳеч бирига параллел олинмаслиги керак.

Ўлчаш қулай бўлиши учун фазодаги координата ўқларига мм, см, м ва шулар сингари узунлик бирлигига тенг кесмалар қўйиш мумкин. Яққол (аксонометрик) тасвири ясаладиган объектнинг узунлик ўлчов бирлиги *натурал масштаб бирлиги* дейилади.

OX, *OY*, *OZ* ўқларнинг ҳар бирига қандайдир натурал масштаб бирлигига тенг *e* кесма қўйилган, деб фараз қилайлик. Проекциялаш йўналиши ўқлардан ҳеч қайсисига параллел бўлмагани учун



190- шакл

натурал масштаб бирлиги (e) аксонометрия текислигида, умуман, бир-бирига тенг бўлмаган e_x, e_y, e_z кесмалар тарзида тасвирланади. Бу e_x, e_y, e_z кесмалар *аксонометрик масштаблар* деб аталади. Буларнинг натурал масштаб бирлигига нисбатлари $\left(\frac{e_x}{e}, \frac{e_y}{e}, \frac{e_z}{e}\right)$ аксонометрия ўқлари бўйича *ўзгариш коэффициентлари* дейилади. O_pX_p ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти k билан, O_pY_p ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти m билан ва O_pZ_p ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти n билан белгиланади.

Демак, $k = \frac{e_x}{e}$, $m = \frac{e_y}{e}$ ва $n = \frac{e_z}{e}$ бўлади.

Уч звеноли фазовий $Oa_x a A$ синиқ чизиқ аксонометрия текислигига текис синиқ чизиқ ($O_p a_{xp} a_p A_p$) тарзида проекцияланади. A_p нуқта A нуқтанинг аксонометрияси деб, a_p нуқта b нуқтанинг аксонометрияси деб аталади. Маълумки, a нуқта фазодаги A нуқтанинг горизонтал проекциясидир. Шунинг учун, a_p нуқта A нуқтанинг иккиламчи проекцияси дейилади. Нуқтанинг фронтал ва про-

фил проекцияларини тасвирловчи яна иккита иккиламчи проекциясини ясаш мумкин.

Параллел проекцияларнинг хоссаларига мувофиқ (3-параграф), $a_x a \| OY$ ва $aA \| OZ$ бўлгани учун $a_{xp} a_p \| O_p Y_p$, $a_p A_p \| O_p Z_p$ бўлади; демак, $\frac{a_{xp} a_p}{e_y} = \frac{a_x a}{e}$ ёки $\frac{a_{xp} a_p}{a_x a} = \frac{e_y}{e} = m$, худди шунга ўхшаш:

$$\frac{O_p a_{xp}}{Oa_x} = \frac{e_x}{e} = k, \quad \frac{a_p A_p}{aA} = \frac{e_z}{e} = n.$$

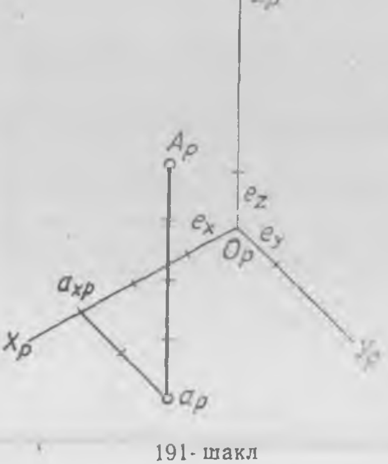
Фазовий синиқ чизиқнинг ҳар бир звеноси нуқтанинг тўғри бурчакли координаталаридан бирини белгилайди ($Oa_x = x$, $a_x a = y$, $aA = z$). P текисликдаги текис синиқ чизиқнинг звенолари нуқталарнинг *аксонометрик координаталари* дейилади ва x_p, y_p, z_p ҳарфлар билан белгиланади ($x_p = O_p a_{xp}$, $y_p = a_{xp} a_p$, $z_p = a_p A_p$).

Агар аксонометрия ўқлари бўйича ўзгариш коэффициентлари (k, m, n) маълум бўлса, нуқтанинг тўғри бурчакли координаталаридан унинг аксонометрик координаталарига тубандагича ўтиш мумкин:

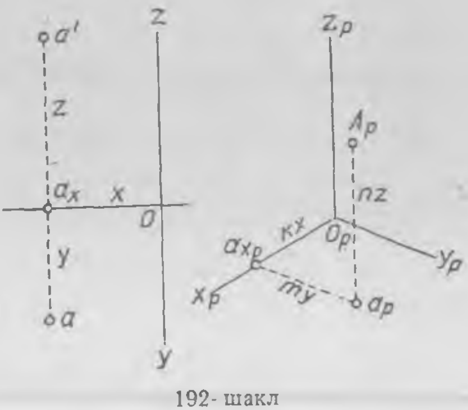
$$x_p = k \cdot x; \quad y_p = m \cdot y, \quad z_p = n \cdot z.$$

Аксонометрия ўқлари ($O_p X_p$, $O_p Y_p$, $O_p Z_p$) ва аксонометрик масштаблар (e_x, e_y, e_z) берилган деб фараз қилайлик (191-шакл). Фазодаги координаталари 3, 2, 4 сонларга тенг бўлган A нуқтанинг аксонометрик проекциясини ясаш зарур бўлсин. Бунинг учун $O_p X_p$ ўқи бўйича $O_p a_{xp} = 3e_x$ кесма қўямиз, a_{xp} нуқтадан $O_p Y_p$ ўқига параллел қилиб $a_{xp} a_p = 2e_y$ кесма қўямиз ва a_p нуқтадан $O_p Z_p$ ўқига параллел йўналиш бўйича $a_p A_p = 4e_z$ кесма қўямиз. A_p нуқта A нуқтанинг аксонометрик проекцияси, a_p — A нуқтанинг иккиламчи проекцияси бўлади.

Чизмадан кўриниб турибдики, ўзгариш коэффициентлари маълум бўлса, аксонометрик проекция (A_p) ва иккиламчи проекция (a_p) бўйича A нуқтанинг фазодаги ўрнини аниқлаш, яъни унинг тўғри



191-шакл



192-шакл

бурчакли координаталарини топиш мумкин. Бунинг учун $A_p a_p a_{xp} O_p$ синиқ чизиқ ясалади. Синиқ чизиқнинг кесмалари A нуқтанинг аксонометрик координаталаридир. Бу учта кесмадан ўзгариш коэффициентлари ёрдамида фазодаги Oa_x, $a_x a$ ва aA кесмаларга ўтиш мумкин (190- шаклга қаранг); $Oa_x = \frac{O_p a_{xp}}{k}$, $a_x a = \frac{a_{xp} a_p}{m}$, $aA = \frac{a_p A_p}{n}$. OX, OY, OZ ўқлари бўйича натурал масштаб бирлиги сифатида қандай кесма қабул қилинганлигини билиб, A нуқтанинг координаталари — x, y, z сонларни топиш мумкин.

Нарсаларнинг аксонометрик проекциялари, одатда, уларнинг ортогонал проекциялари бўйича ясалади. Бу бобдан кўзда тутилган асосий мақсад ҳам шундан иборат. 192- шаклда A нуқтанинг ортогонал проекциялари (a, a'), берилган аксонометрик ўқлар (O_pX_p, O_pY_p, O_pZ_p) ва ўзгариш коэффициентлари (k, m, n) бўйича нуқтанинг аксонометрияси (A_p) ни ясаш кўрсатилган. Бунинг учун эпюрдан нуқтанинг координаталари ($x = Oa_x$, $y = a_x a$, $z = a_x a'$) олинади. Сўнгра O_p нуқтадан $O_p a_{xp} = k \cdot x$, шундан кейин O_pY_p ўқига параллел $a_{xp} a_p = m \cdot y$, пировардида O_pZ_p ўқига параллел $a_p A_p - n \cdot z$ кесмалар қўйилади.

Шундай қилиб, координаталар бурчагида жойлашган нарсанинг координата ўқлари билан бирга бирор текисликка туширилган проекцияси шу нарсанинг *аксонометрияси* дейилади[1]. Аксонометрия яққол бўлиши билан бирга, унда тасвирланган нарсанинг ўлчамларини топишга ҳам имкон беради.

S йўналиш билан аксонометрия текислиги (P) орасидаги бурчакка қараб (190- шакл), аксонометрик проекциялар тўғри бурчакли ва қийшиқ бурчакли аксонометрияларга бўлинади.

Агар ўқлар бўйича ўзгариш коэффициентлари ўзаро тенг ($k = m = n$) бўлса, бундай аксонометрия *изометрик проекция* дейилади; агар икки ўзгариш коэффициенти ўзаро тенг бўлиб, учинчиси бошқача (масалан, $k = n \neq m$ ёки $k = m \neq n$ ва ҳоказо) бўлса, бундай аксонометрия *диметрик проекция* деб аталади; агар ўзгариш коэффициентлари ҳар хил ($k \neq m \neq n$) бўлса, бундай аксонометрия *триметрик проекция* дейилади.

Бундан кейин, қисқа бўлиши учун, изометрик проекцияни изометрия, диаметрик проекцияни диметрия ва триметрик проекцияни триметрия деб атайверамиз.

Пировардида, аксонометрия ўқлари (O_pX_p, O_pY_p, O_pZ_p) орасидаги бурчаклар ва ўзгариш коэффициентлари (k, m, n) қандай бўлиши керак деган савол туғилади. Бу саволга «аксонометриянинг асосий теоремаси» номи билан маълум бўлган теорема жавоб беради. Кейинги параграфда ана шу теореманинг қисқача мазмуни баён этилади.

---

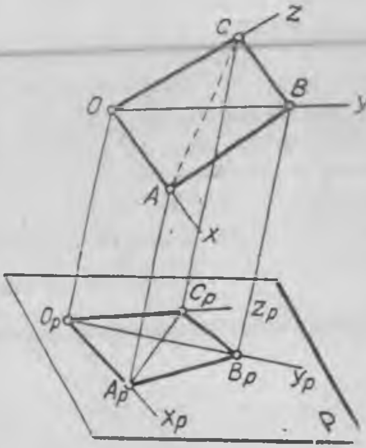
[1] Проекция параллел ёки марказий бўлиши мумкин. Шунга қараб, аксонометрия *параллел* ёки *марказий* аксонометрия дейилади. Бу ерда ва бундан кейин гап фақат параллел аксонометриялар ҳақида боради.

69- §. Аксонометриянинг асосий теоремаси

Аксонометриянинг асосий теоремасини 1853 йилда геометр Карл Польке (1810—1876) кашф этган. Бу теорема қуйидагича таърифланади: бир нуқтадан чиққан текисликдаги ҳар қандай учта кесма фазода бир-бирига перпендикуляр бўлган учта ўзаро тенг кесманинг параллел проекциялари деб қабул қилиниши мумкин.

Масалан, фазодаги O нуқтадан чиққан OX, OY, OZ тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр ва уларга қўйилган OA, OB, OC кесмалар ўзаро тенг ($OA=OB=OC=e$) бўлсин (193-шакл). Фазодаги O, A, B, C, нуқталарни ўзаро туташтирсак, учи O нуқтада бўлган уч ёқли тўғри бурчакли тетраэдр ($OABC$) ҳосил бўлади. Бундай тетраэдр *масштаб тетраэдри* дейилади[1], чунки унинг O учидан чиққан қирралари ўзаро тенг бўлгани учун, уларни натурал масштаб бирлиги сифатида қабул қилиш мумкин.

Масштаб тетраэдрининг бирор P текисликка параллел проекцияси туширилса, текисликда тўла тўртбурчак[2] ($O_pA_pB_pC_p$) ҳосил бўлади. Бу тўртбурчакнинг томонлари (O_pA_p, O_pC_p) ва диагонали (O_pB_p) аксонометрик масштаблар (e_x, e_y, e_z) бўлиб хизмат қилади.



193- шакл

$O_pA_pB_pC_p$ тўртбурчак олдин берилган ихтиёрий шаклда келиб чиқиши мумкин. Шунинг учун Польке теоремасини яна бундай деб таъриф қилса бўлади: диагоналлари билан бирга олинган текисликдаги ҳар қандай тўртбурчак учларидан бири уч ёқли тўғри бурчакли ва шу учидан чиққан қирралари ўзаро тенг бўлган тетраэдрнинг параллел проекцияси бўлиши мумкин.

1864 йилда бу теоремани немис геометри А. Шварц умумлаштирди; текисликда чизилган ҳар қандай тўла тўртбурчакни олдин берилган исталган шаклдаги тетраэдрга ўхшаш тетраэдрнинг параллел проекцияси деб қараш мумкин[3].

Бу теоремадан шундай хулоса келиб чиқадики, бир нуқтадан чиққан текисликдаги ҳар қандай учта тўғри чизиқ аксо-

---

[1] Масштаб тетраэдри терминини проф. Н. Ф. Четверухин таклиф қилган.

[2] Диагоналлари билан бирга олинган тўртбурчак тўла тўртбурчак дейилади.

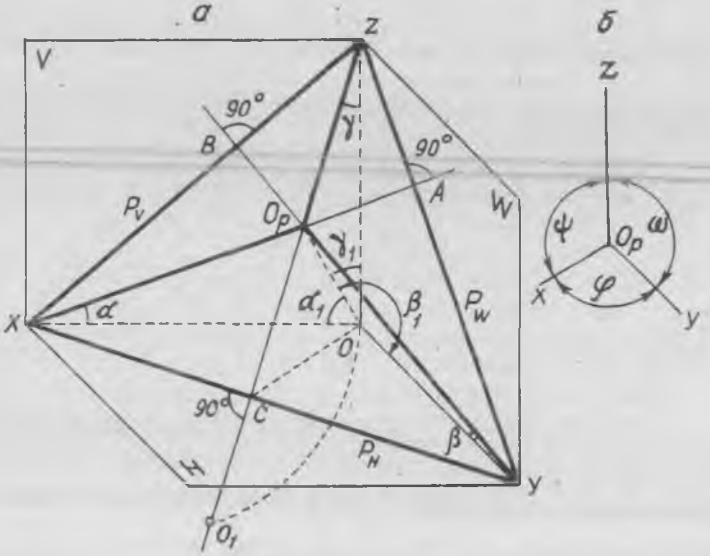
[3] Умумлаштирилган теореманинг исботини проф. Н. Ф. Четверухиннинг 1937 йилда нашр этилган «Введение в высшую геометрию» деган китобидан топиш мумкин.

.нометрия ўқлари сифатида ва уларда олинган учта ихтиёрий узунликдаги кесмалар аксонометрик масштаблар сифатида қабул қилиниши мумкин. Бошқача қилиб айтганда, бу теоремага биноан, аксонометрия ўқлари орасидаги бурчакларни ва улар бўйича ўзгариш коэффициентларини, умуман ихтиёрий олиш мумкин.

Аммо аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар ва улар бўйича ўзгариш коэффициентлари ихтиёрий олинган тақдирда ҳосил бўлган аксонометрия тасвирланган нарсанинг табиий кўринишига бутунлай ўхшамай қолиши ёки жуда оз ўхшаши мумкин. Ясалган аксонометрияни тасвирланган нарсанинг табиий кўринишига кўпроқ ўхшатиш ва аксонометрияни мумкин қадар осонроқ ясаш мақсадида, амалда, аксонометриянинг баъзи хусусий турларигина қўлланилади.

70- §. Тўғри бурчакли аксонометрия ясашнинг назарий асослари

1. Ўзгариш коэффициентлари ва улар орасидаги муносабатлар. Аксонометрия текислиги (P) координата ўқларини X, Y, Z нуқталарда кесувчи умумий вазиятдаги текислик бўлсин (194- шакл, *а*). Координаталар боши (O) дан P текисликка перпендикуляр тушириб, O_p нуқтани топамиз. Ҳосил бўлган O_pX, O_pY, O_pZ кесмалар OX, OY, OZ кесмаларнинг P текисликдаги тўғри бурчакли проекциялари бўлади. OO_pX, OO_pY, OO_pZ тўғри бурчакли учбурчакларга кўра бундай ёзиш мумкин:



194- шакл

$$\frac{O_pX}{OX} = \cos\alpha; \ \frac{O_pY}{OY} = \cos\beta; \ \frac{O_pZ}{OZ} = \cos\gamma$$

Маълумки (68-параграф), кесма проекцияси узунлигининг ўзининг ҳақиқий узунлигига нисбати *ўзгариш коэффициенти* дейилади. Шунга кўра, тўғри бурчакли аксонометрия учун ўзгариш коэффициентини бундай изоҳлаш мумкин: ўзгариш коэффициенти аксонометрия текислиги билан тегишли ўқ орасидаги бурчакнинг косинусига тенг, яъни:

$$k = \cos\alpha; \ m = \cos\beta; \ n = \cos\gamma. \qquad (1)$$

Бундан, тўғри бурчакли аксонометрияда ўзгариш коэффициентларидан ҳеч қайсисининг абсолют қиймати бирдан ортиқ бўлиши мумкин эмас, демак, ихтиёрий кесмаларни аксонометрик масштаб бирликлари сифатида қабул қилиб бўлмайди, деган хулоса чиқади.

Проекциялаш йўналиши (OO_p) билан координата ўқлари орасидаги бурчакларни α_1, β_1, γ_1 орқали белгилаймиз. Бу бурчаклар OO_p чизиқнинг *йўналтирувчи бурчаклари* дейилади.

Аналитик геометриядан маълумки, йўналтирувчи бурчаклар косинуслари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг, яъни:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

$\alpha = 90° - \alpha$, демак, $\cos\alpha_1 = \sin\alpha$ ва ҳоказо, шунинг учун:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$$

$$(1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma) = 1$$

ёки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$$

Юқоридаги (1) формулага биноан:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 2 \qquad (2)$$

бўлади.

Шундай қилиб, тўғри бурчакли аксонометрия учун тубандаги теорема исбот қилинади:

1-теорема. *Тўғри бурчакли аксонометрияда ўзгариш коэффициентлари квадратларининг йиғиндиси иккига тенг* (2-формула).

Демак, тўғри бурчакли аксонометрияда ўзгариш коэффициентларидан иккитаси берилган бўлса, учинчиси берилмайди, у берилган иккитаси бўйича (2) формуладан топилади. Берилган иккитасини ҳам текшириб кўриш керак, улар квадратларининг йиғиндиси бирдан ортиқ ва иккидан кам бўлиши лозим (бу ҳолни 1 ва 2-формулалар асосида осон исбот қилиш мумкин), масалан, 0,5 ва 0,8 сонларни ўзгариш коэффициентлари сифатида қабул қилиб бўлмайди, чунки улар квадратларининг йиғиндиси бирдан кичик.

2. Излар учбурчаги. Аксонометрия ўқлари.

Аксонометрия текислиги P билан координата ўқларининг кесилишидан ҳосил бўлган *XYZ учбурчак излар учбурчаги дейилади* (194- шакл, *а*).

Тўғри бурчакли аксонометрия учун излар учбурчагининг асосий хоссаларини кўриб ўтамиз.

2-теорема. *Тўғри бурчакли аксонометрияда аксонометрия ўқлари излар учбурчагининг баландликларидир.*

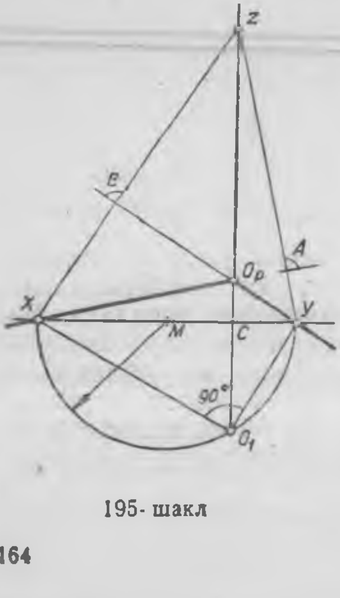
Ҳақиқатан ҳам, фазода $OZ \perp H$, $OO_p \perp P$, демак, ZOC учбурчак H текисликка ҳам, P текисликка ҳам перпендикуляр. H ва P текисликлар орасидаги икки ёқли бурчак қирраси $P_н$ изга перпендикуляр бўлган ΔZOC текислик билан кесилган. Шунинг учун $ZC \perp P_н$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $XA \perp P_W$, $YB \perp P_V$ бўлади; XA, YB, ZC чизиқлар эса аксонометрия ўқларидир. Шу билан 2- теорема исбот қилинди.

Тўғри бурчакли учёқнинг учбурчак шаклидаги исталган кесими ҳамма вақт ўткир бурчакли учбурчак бўлади. Демак, излар учбурчаги тўғри бурчакли аксонометрияда ўткир бурчакли учбурчакдир. Маълумки, учбурчак баландликларининг ўзаро кесишиш нуқтаси *ортомарказ* дейилади. Ўткир бурчакли учбурчакнинг ортомаркази ҳамма вақт ичида бўлади. Тўғри бурчакли аксонометрия учун аксонометрик ўқлар боши (O_p нуқта) излар учбурчагининг ортомарказида бўлади.

Ҳар қандай ўткир бурчакли учбурчакнинг баландликлари ўтмас бурчак бўйича кесишади; бундан тубандаги теорема келиб чиқади.

3. Теорема. *Тўғри бурчакли аксонометрияда аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар ўтмас бурчаклардир* (194- шакл, *б*).

Юқорида кўриб ўтилганлардан, тўғри бурчакли аксонометрияда бир нуқтадан чиққан ва ўзаро ўтмас бурчаклар бўйича кесишган учта тўғри чизиқни аксонометрик ўқлар сифатида олиш мумкин, бу ўқлар бўйича эса излар учбурчагига ўхшаш учбурчак ясаса бўлади, деган хулоса келиб чиқади.



195- шакл

3. **Аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар билан ўзгариш коэффициентлари ўртасидаги муносабатлар.** Тўғри бурчакли аксонометрияда ўзгариш коэффициентлари ва аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар бир-бирига боғлиқдир. Ўзгариш коэффициентлари маълум бўлса, ўқлар орасидаги бурчакларни (ёки ўқларнинг йўна-

лишини топиш ва, аксинча, аксонометрия ўқларининг йўналишлари берилган бўлса, ўзгариш коэффициентларини топиш керак.

1. Аксонометрия ўқларининг йўналишлари ва, демак, улар орасидаги бурчаклар берилган. Ўзгариш коэффициентларини топиш керак (195- шакл).

Даставвал излар учбурчагига ўхшаш учбурчак ясаймиз. Бунинг учун O_pX ўқида ихтиёрий олинган X нуқта орқали O_pZ ва O_pY ўқларга перпендикуляр қилиб, излар учбурчагининг томонларини чизамиз, бу чизиқларнинг ўқлар билан кесишув нуқталари (Y ва Z) ни ўзаро туташтирамиз. Ҳосил бўлган XYZ учбурчак излар учбурчаги вазифасини ўтайди. Бурчак XO_pY фазодаги XOY тўғри бурчакнинг проекциясидир (194- шакл, *а* га қаранг). XOY учбурчакнинг гипотенузаси XY атрофида айлантирилиб, аксонометрия текислиги (P) билан жипслаштирилса, O нуқта C марказ атрофида CO радиуси билан айланиб, O_1 нуқтага келади. Бу $XO_1Y = XOY$ тўғри бурчакли учбурчакни ясаш учун XY кесмада маркази M нуқтада ва радиуси $\frac{XY}{2}$ бўлган ярим айлана чизамиз. Ярим айлана O_pZ ўқининг давоми билан кесишиб, O_1 нуқтани беради. Шундай қилиб, хосил бўлган O_1X, O_1Y кесмалар фазодаги OX, OY кесмаларга тенг, O_pX, O_pY эса уларнинг аксонометрик проекцияларидир.

Ҳосил бўлган кесмаларнинг узунликларини ўлчаб ва уларнинг нисбатларини олиб, ўзгариш коэффициентларини топамиз:

$$k = \frac{O_pX}{O_1X}; \quad m = \frac{O_pY}{O_1Y}.$$

Масалан, кесмалар ўлчанганда $D_pX = 70$ мм, $O_1X = 80$ мм, $O_pY = 27$ мм, $O_1Y = 44$ мм бўлса, $k = \frac{70}{80} \approx 0,88$ ва $= m\frac{27}{44} \approx$ $\approx 0,61$ бўлади, n коэффициент (2) формуладан топилади ($n \approx 0,92$).

2. Энди, коэффициентлардан иккитаси (масалан, $n = 0,96$; $k = 0,80$) берилган, аксонометрия ўқларининг йўналишларини топиш керак бўлсин.

(2) формула бўйича учинчи коэффициентни топамиз, $m = 0,66$ бўлади.

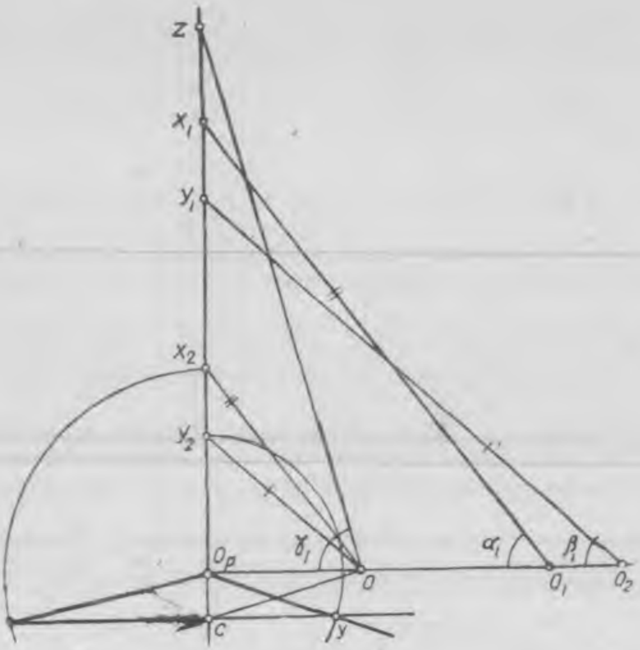
Аксонометрия ўқларини ясаш учун OO_p чизиқнинг йўналтирувчи α_1, β_1, γ_1 бурчакларини ясашдан фойдаланамиз (194- шакл, *а*).

Ўзгариш коэффициентлари (k, m, n) йўналтирувчи α_1, β, γ_1 бурчакларнинг синуслари бўлганлиги учун излар учбурчагини тубандаги тартибда ясаймиз (196- шакл):

1) бир-бирига перпендикуляр икки тўғри чизиқ чизамиз ва уларнинг кесишув нуқтаси (O_p) ни координаталар бошининг проекцияси деб қабул қиламиз;

2) $\sin\gamma_1 = n = \frac{96}{100}$ бўйича γ_1 бурчакни ясаймиз; бунинг учун O_p нуқтадан юқорига 96 мм қўйиб, Z нуқтани ва Z нуқтадан 100 мм радиус билан горизонтал чизиқни кесиб, O нуқтани топамиз[1];

[1] Узунлик бирлиги сифатида 100 мм қабул қилинган. 196- шакл 3:4 масштабда чизилган.



196- шакл

ҳосил бўлган $OO_р$ кесма координаталар бошидан аксонометрия текислигигача бўлган масофа, яъни проекцияловчи нурнинг узунлиги бўлади;

3) O нуқтадан OZ чизиққа перпендикуляр ўтказамиз; бу перпендикуляр билан вертикал чизиқнинг кесишув нуқтаси (C) дан излар учбурчагининг XY томони ўтади ва у (2- теоремага мувофиқ) $O_рZ$ ўқига перпендикуляр бўлади;

4) координата ўқларидаги OX ва OY кесмаларнинг проекциялари $O_рX$ ва $O_рY$ кесмаларнинг узунликларини ясаймиз; бунинг учун

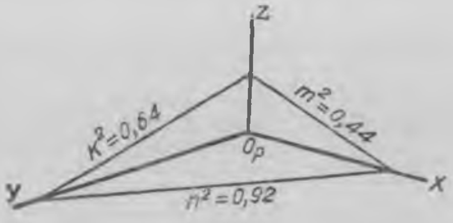
$$\sin\alpha_1 = k = \frac{80}{100} \quad \text{ва} \quad \sin\beta_1 = m = \frac{66}{100}$$

бўйича α_1, β_1 бурчакларни ясаймиз ($O_р X_1 = 80$ мм, $O_рY_1 = 66$ мм, $O_1X_1 = O_2Y_1 = 100$ мм); кейин 0 нуқтадан O_1X_1 ва O_2Y_1 чизиқларга параллел чизиқлар ўтказиб, вертикал чизиқдаги X_2 ва Y_2 нуқталарни топамиз, келиб чиққан $O_рX_2$ ва $O_рY_2$ кесмалар билан $O_р$ марказдан C нуқта орқали ўтган горизонтал чизиқни кесиб, X ва Y нуқталарни топамиз.

Шундай қилиб, ҳосил бўлган XYZ учбурчак излар учбурчаги, $O_рX$, $O_рY$ ва $O_рZ$ лар эса аксонометрия ўқларидир. 2- теоремага биноан, $O_рX \perp YZ$, $O_рY \perp XZ$ бўлиши шарт.

Бу ўзгариш коэффициентлари бўйича аксонометрия ўқларининг

йўналишларини топиш масаласи Вейсбахнинг аксонометрия ўқлари томонларининг узунликлари (a, b, c) ўзгариш коэффициентларининг квадратларига пропорционал бўлган учбурчакнинг биссектрисаларидир ($a : b : c = k^2 : m^2 : n^2$) деган теоремасидан фойдаланиб ҳам ечилиши мумкин[1].



197- шакл

Юқоридаги мисол учун:

$k^2 = 0{,}64$, $m^2 = 0{,}44$, $n^2 = 0{,}92$; демак, томонлари, масалан, 64, 44 ва 92 мм га тенг учбурчак ясаб, унинг биссектрисаларини ўтказсак, аксонометрия ўқлари келиб чиқади (197- шакл).

Аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар (φ, ψ, ω) (194- шакл, *б*) ва ўзгариш коэффициентлари (k, m, n) бир-бири билан тубандаги тенгламалар орқали боғланган:

$$\left.\begin{array}{l} k = \sqrt{-\dfrac{\sin 2\omega}{L}};\ m = \sqrt{-\dfrac{\sin 2\omega}{L}};\ n = \sqrt{-\dfrac{\sin 2\varphi}{L}}; \\ \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1-n^2}{M};\ \operatorname{tg}\psi = -\dfrac{1-m^2}{M};\ \operatorname{tg}\omega = -\dfrac{1-k^2}{M} \end{array}\right| \quad (3)$$[2]

Бу ерда:

$$L = 2\sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \sin\omega;$$

$$M = \sqrt{(1-k^2)(1-m^2)(1-n^2)}.$$

Бу формулалардан фойдаланиб, берилган ўзгариш коэффициентлари бўйича аксонометрия ўқлари орасидаги бурчакларни ёки ўқлар орасидаги бурчаклар бўйича ўзгариш коэффициентларини ҳисоблаш, демак, уларнинг ўзаро боғланишини кўрсатувчи жадваллар ва диаграммалар тузиш мумкин.

Агар ўзгариш коэффициентлари ҳар хил бўлса, аксонометрия ўқлари орасидаги бурчаклар ҳам ҳар хил бўлади; бундай аксонометрия *триметрия* дейилади (195—197- шакллар).

Икки ўзгариш коэффициентини ёки аксонометрик ўқларнинг йўналишини ихтиёрий танлаб олиш йўли билан тасвирнинг перспектива сингари таъсирлироқ бўлишига эришиш мумкин, лекин уч хил масштаб борлиги туфайли, ясашлар мураккаблашиб кетиши тўғри бурчакли триметриядан жуда кам фойдаланишга ва амалда фақат тўғри бурчакли изометриянинг ва диметриянинг кенг тарқалишига сабаб бўлади.

4. Тўғри бурчакли изометрия. Агар $k = m = n$ бўлса, проекция *изометрия* дейилади. Бу ҳолда $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, яъни

---

[1] Н. А. Глаголевнинг «Начертательная геометрия» деган китобига қаранг.

[2] Формулаларнинг келиб чиқиши билан қизиққанлар О. А. Вольбергнинг «Лекции по начертательной геометрии» деган китобига қараши мумкин.

198- шакл

$\alpha = \beta = \gamma$ демак, изометрик проекциялар текислиги ҳамма вақт OX, OY, OZ ўқларига баб-баравар қия бўлади.

194- шакл, *а* дан кўриниб турибдики, бу ҳолда ўқлардаги кесмалар тенг ($OX = OY = OZ$) бўлади ва улар тенг кесмалар ($O_pX = O_pY = O_pZ$) тарзида тасвирланади, шунинг учун излар учбурчаги (XYZ) тенг томонли учбурчакдир. Излар учбурчагининг баландликлари бўлган аксонометрия ўқлари изометрияда бир-бирига нисбатан 120° бурчак ҳосил қилиб кесишади (198- шакл).

Ўзгариш коэффициентларининг қиймати (2) формуладан топилади:

$$k^2 + m^2 + n^2 = 2 \text{ ёки } 3k^2 = 2$$

$$k = m = n \approx 0{,}82.$$

Демак, тўғри бурчакли изометрияда нарсанинг ўқлар бўйича қўйиладиган ўлчамлари бир хилда, яъни 0,82 марта ўзгарар экан.

5. Тўғри бурчакли диметрия. Ўзгариш коэффициентларидан иккитаси ўзаро тенг, учинчиси бошқача бўлган аксонометрия *диметрия* дейилади.

Диметрияларнинг сон-саноғи йўқ. Масалан: 1) $k = m = 0{,}718$ қилиб олинса, (2) формулага мувофиқ, $n = 0{,}93$ бўлади; 2) $k = m = 0{,}74$ қилиб олинса, $n - 0{,}95$ бўлади; 3) $k = n = 0{,}921$ қилиб олинса, $m = 0{,}55$ бўлади ва (3) формула бўйича аксонометрия ўқлари орасидаги тегишли бурчаклар (φ, ψ, ω) (194- шакл, *б*) ҳисобланса, биринчи мисол учун $\psi = \omega = 100°30'$, $\varphi = 159°$, иккинчи мисол учун $\psi = \omega = 107°20'$, $\varphi = 145°20'$, учинчи мисол учун $\varphi = \omega = 129°50'$, $\psi = 100°20'$ келиб чиқади ва ҳоказо.

Бу муносабатлардан ҳамма диметриялар учун умумий бўлган тубандаги хулосаларни чиқариш мумкин:

1. Икки ўзгариш коэффициенти ўзаро тенг бўлгани учун диметрик проекциялар текислиги ҳамма вақт икки координаталар ўқига баб-баравар қия бўлади.

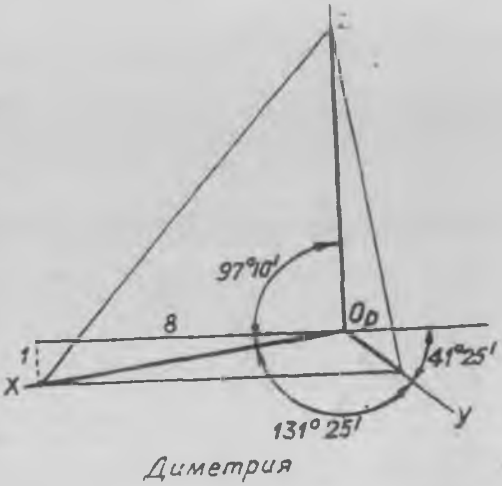
2. Излар учбурчаги диметрияда ҳамма вақт тенг ёнли учбурчак бўлади.

3. Ўзгариш коэффициентлари ўзаро тенг бўлган аксонометрик ўқлар орасидаги бурчак учинчи аксонометрик ўқ билан тенг иккига бўлинади, яъни учинчи ўқ бу бурчакнинг биссектрисаси бўлади.

Инженерлик практикасида тўғри бурчакли диметриялардан фақат ўзгариш коэффициентлари $k = n = 2m$ бўлган диметриягина кенг

тарқалган. Бу диметрия учун (2) формула бўйича $k = n = 0,94$ ва $m = 0,47$ келиб чиқади.

Аксонометрик ўқлар орасидаги бурчаклар $\varphi = \omega = 131°25'$, $\psi = 98°10'$ бўлади. Диметриянинг бу тури ясаш учун қулай бўлгани сабабли, стандартлар билан тасдиқланган; бу диметрия *тўғри бурчакли стандарт диметрия* дейилади (199- шакл).

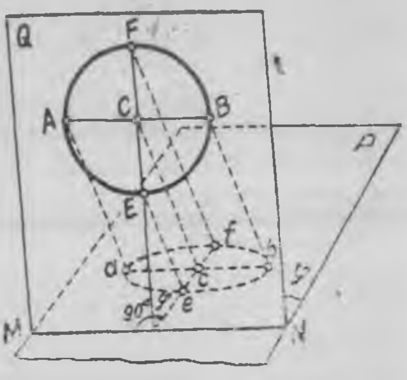


199- шакл

71- §. Айлананинг тўғри бурчакли аксонометрияси

Чизмачилик практикасида айлананинг тўғри бурчакли проекцияси тез-тез чизиб турилади.

Агар айлананинг текислиги (Q) проекциялар текислиги (P) билан бирор ўткир бурчак (φ) бўйича кесишган бўлса (200- шакл), айлананинг проекцияси эллипс бўлади. Бу эллипснинг катта ўқи (ab) сифатида айлананинг AB диаметри проекцияланади ($AB \parallel MN$); эллипснинг кичик ўқи (ef) сифатида айлананинг EF диаметри проекцияланади ($EF \perp AB$); проекциялашда айлананинг маркази — C нуқта эллипснинг маркази — c нуқтани ҳосил қилади.



200- шакл

Параллел проекцияларнинг хоссаларига кўра, ab айлана ётган Q текисликнинг аксонометрия текислиги (P) билан кесишув чизиғи (MN) га параллел жойлашади ва айлананинг диаметрига тенг бўлади ($ab = D$). Эллипснинг кичик ўқи $ef = D \cdot \cos\varphi$ бўлади. Шундай қилиб, айлананинг проекциясини ясаш учун айлана марказининг проекцияси бўлмиш эллипс марказини (c нуқтани) топиш керак. Бу нуқтадан эллипснинг катта ва кичик ўқлари ўтказилади.

Эллипснинг катта ўқи $ab \parallel MN$; $ab = D$.

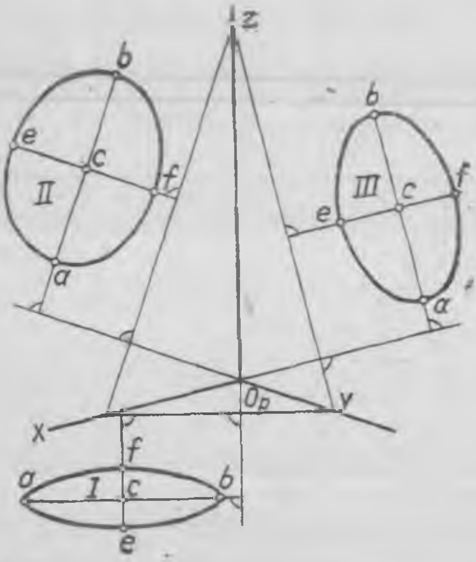
Эллипснинг кичик ўқи $ef \perp MN$; $ef = D \cos\varphi$.

Энди, эллипснинг катта ва кичик ўқлари бўйича эллипс ясаш қийин эмас.

Агар $\varphi=0°$ бўлса, $Q \parallel P$ бўлади ва айлананинг P текисликдаги проекцияси ўзига тенг айлана бўлади.

Агар $\varphi=90°$ бўлса, $Q \perp P$ бўлади ва айлананинг P текисликдаги проекцияси узунлиги айлананинг диаметрига тенг тўғри чизиқ кесмаси бўлади.

Амалда кўпроқ H, V, W ёки уларга параллел текисликларда жойлашган айланаларнинг аксонометрик проекцияларини ясашга тўғри келади[1]. Бундай айланалар устида алоҳида тўхталиб ўтамиз.



201- шакл

Маълумки, тўғри бурчакли аксонометрияда аксонометрия текислиги (P) координата текисликларининг учаласини кесади. Излар учбурчагининг томонлари P текислик билан H, V, W текисликларининг кесишув чизиқларидир. Демак, H текисликда ётган айланани P текисликка проекциялашдан келиб чиқадиган I эллипснинг катта ўқи излар учбурчагининг XY томонига параллел, V текисликда ётган айлана проекцияси II эллипснинг катта ўқи XZ томонига параллел, W текисликда ётган айлана проекцияси III эллипснинг катта ўқи YZ томонига параллел бўлади (201- шакл).

Маълумки, тўғри бурчакли аксонометрия учун $O_pZ \perp XY$, $O_pY \perp XZ$, $O_pX \perp YZ$ (2- теорема) демак, I эллипснинг катта ўқи $ab \perp O_pZ$; кичик ўқи $ef \parallel O_pZ$;

II эллипснинг катта ўқи $ab \perp O_pX$, кичик ўқи $ef \parallel O_pY$;

III эллипснинг катта ўқи $ab \perp O_pX$, кичик ўқи $ef \parallel O_pX$ бўлади.

Шундай қилиб, H, V, W текисликларда жойлашган айланаларни аксонометрия текислигига проекциялашдан келиб чиқадиган эллипсларнинг катта ўқлари аксонометрия текислигининг тегишли изларига параллел, кичик ўқлари эса уларга перпендикуляр бўлади.

I эллипс горизонтал текисликда ётган айлананинг проекциясидир.

---

[1] Бундан буён H, V, W ёки уларга параллел бўлган текисликларни фарқ қилмаймиз.

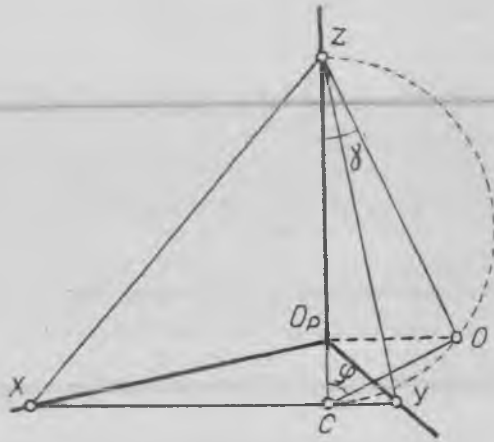
Унинг кичик ўқи $ef \parallel Q_pZ$ бўлади. O_pZ ўқ эса фазода H текисликка перпендикуляр жойлашган OZ координата ўқининг проекциясидир. Бундай айлананинг текислигига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тўғри бурчакли аксонометрияда айлананинг проекцияси—эллипснинг кичик ўқига параллел чизиқ кўринишида тасвирланади» деган хулоса чиқариш мумкин.

Демак, айлананинг марказидан шу айлана текислигига чиқарилган перпендикуляр (нормаль) тўғри бурчакли аксонометрияда айлананинг проекцияси — эллипс кичик ўқининг йўналишини ҳосил қилади.

Бу натижа, айланувчи элементлари бўлган механизмларнинг тўғри бурчакли проекцияларини ясашда уларнинг айлантириш ўқларини тўғри тасвирлаш учун муҳимдир.

Айлантириш ўқининг тасвири механизм элементининг айланишидан ҳосил бўладиган айлана проекцияси — эллипснинг кичик ўқи бўйича ўтади.

201-шаклга қайтамиз. Тўғри бурчакли аксонометриянинг ҳамма турлари (триметрия, диметрия ва изометрия) учун *I*, *II*, *III* эллипслар катта ўқларининг узунликлари доимо тегишли айланаларнинг диаметрларига тенг бўлади. Эллипсларнинг кичик ўқлари эса аксонометриянинг турига қараб ўзгаради. Кўрсатилган ҳолларда эллипсларнинг кичик ўқларини ҳисоблашда формулалардан фойдаланиш мумкин. Формулалар чиқариш учун 202-шаклни кўриб чиқамиз. Шаклда аксонометрия ўқлари ва излар учбурчаги (XYZ) тасвирланган. OZ ўқидан ўтувчи ва излар учбурчагининг XY томонига перпендикуляр текислик аксонометрия текислигини ZC тўғри чизиқ бўйича, H текисликни эса энг катта қиялик чизиғи (OC) бўйича кесади. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли ZOC учбурчакнинг Z учидаги γ бурчак OZ ўқи билан аксонометрия текислиги орасидаги бурчакни, C учидаги φ бурчак эса H текислик билан аксонометрия текислиги (P) орасидаги бурчакни, яъни H текисликни P текисликка нисбатан энг катта қиялик бурчагини кўрсатади.



202- шакл

Маълумки, OZ ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти $n = \cos\gamma$ (1- формула), H текисликнинг энг катта қиялик чизиғининг йўнали-

ши (OC) бўйича ўзгариш коэффициентини $k_{\text{н}}$ билан белгиласак, $k_{\text{н}} = \cos\varphi$ бўлади. Тўғри бурчакли ZOC учбурчакдан $\cos^2\varphi = 1 - \cos^2\gamma$ келиб чиқади, демак:

$$R_{\text{н}} = \sqrt{1-n^2} \tag{4}$$

бўлади; худди шундай йўл билан V ва W текисликларнинг энг катта қиялик чизиқлари йўналишлари учун тубандаги ўзгариш коэффициентларини чиқариш мумкин:

$$k_V = \sqrt{1-m^2}, \tag{5}$$

$$k_W = \sqrt{1-k^2}. \tag{6}$$

Тўғри бурчакли аксонометрияда айлананинг аксонометрия текислигига нисбатан фақат энг катта қиялик чизиғидаги диаметри (EF) эллипснинг кичик ўқи (ef) сифатида проекцияланишини юқорида кўриб ўтдик (200- шакл). Шунга кўра, айлананинг проекциясини— эллипснинг кичик ўқини тубандагича ҳисоблаш мумкин:

1) H текисликда ётган айлана учун;

$$ef = D \cdot \sqrt{1-n^2}. \tag{4'}$$

2) V текисликда ётган айлана учун:

$$ef = D \cdot \sqrt{1-m^2}. \tag{5'}$$

3) W текисликда ётган айлана учун:

$$ef = D \cdot \sqrt{1-k^2}. \tag{6'}$$

Тўғри бурчакли изометрия учун $k = m = n = 0{,}82$, демак, $ef = D \cdot \sqrt{1-0{,}82^2} = 0{,}58 \cdot D$ бўлади. Шундай қилиб, диаметри D бўлган айланалар горизонтал, фронтал ва профил текисликларга жойлашган бўлса, бундай айланаларнинг изометриясидаги эллипсларнинг катта ўқи D, кичик ўқи эса $0{,}58 \cdot D$ бўлади.

Тўғри бурчакли стандарт диметрия учун $k = n = 0{,}94$ ва $m = 0{,}47$; демак, H ва W текисликларда ётган айланалар учун эллипсларнинг кичик ўқлари $ef = D \cdot \sqrt{1-0{,}94^2} = 0{,}33 \cdot D$, V текисликда ётган айлана учун $ef = D \cdot \sqrt{1-0{,}47^2} = 0{,}88 \cdot D$ бўлади.

Шундай қилиб, диаметри D бўлган айланалар горизонтал ва профил текисликларга жойлашган бўлса, уларнинг диметриясидаги эллипсларнинг катта ўқлари D, кичик ўқлари эса $0{,}33 \cdot D$ бўлади.

Агар диаметри D бўлган айлана фронтал текисликда жойлашган бўлса, бундай айлананинг диметриясидаги эллипснинг катта ўқи D, кичик ўқи эса $0{,}88 \cdot D$ бўлади.

72- §. «Аниқ» ва «келтирилган» аксонометриялар

Берилган ўзгариш коэффициентлари бўйича аксонометрик проекцияни ясашда бирмунча ҳисоблар қилишга тўғри келади. Кўп ҳолларда бу иш кишини жуда чарчатиши мумкин. Ҳисобларни камайтириш учун, ўзгариш коэффициентларидан бирини бирга келтириш

ва бошқа иккитасини қайтадан ҳисоблаб чиқиш йўли билан берилган «ноқулай» ўзгариш коэффициентлари «қулай» ўзгариш коэффициентлари билан алмаштирилади. Масалан, O_pXYZ системада $k = 0{,}86$; $m = 0{,}58$; $n = 0\text{-}96$ берилган бўлса, $n = 0{,}96$ ўрнига $0{,}96 \cdot 1{,}04 = 1$ олиш мумкин. У вақтда $k = 0{,}86$ ўрнига $0{,}86 \cdot 1{,}04 \approx \approx 0{,}9$ ва $m = 0{,}58$ ўрнига $0{,}58 \cdot 1{,}04 \approx 0{,}6$ олинади.

Берилган 0,86; 0,58; 0,96 сонлар *натурал* (*«аниқ»*) *ўзгариш коэффициентлари* деб, улар ўрнига олинган 1; 0,9; 0,6 сонлар эса *«келтирилган» ўзгариш коэффициентлари* деб аталади. Юқоридаги 1,04 сон *келтириш коэффициенти* дейилади. Агар келтириш коэффициентини U билан ва келтирилган ўзгариш коэффициентларини K, M, N ҳарфлар билан белгиласак, ҳар қандай аксонометрия учун $K = U \cdot k$, $M = U \cdot m$, $N = U \cdot n$ бўлади.

(2) формуланинг иккала томонини U^2 га кўпайтириш йўли билан келтириш коэффициентини топиш учун тубандаги формулани чиқариш мумкин:

$$U = \sqrt{\frac{K^2 + M^2 + N^2}{2}} \tag{7}$$

Бу формуладан фойдаланиб, тўғри бурчакли аксонометрияда келтирилган ўзгариш коэффициентлари бўйича келтириш коэффициентини, сўнгра у бўйича ҳақиқий (натурал) ўзгариш коэффициентларини топиш мумкин.

U марта катталаштирилган келтирилган ўзгариш коэффициентлари K, M, N бўйича ясалган аксонометрик чизма натурал ўзгариш коэффициентлари бўйича ясалган аксонометрик чизмага қараганда U марта катта бўлади.

Натурал ўзгариш коэффициентлари бўйича ясалган аксонометрия *«аниқ» аксонометрия* деб, келтирилган ўзгариш коэффициентлари бўйича ясалган аксонометрия эса *«келтирилган» аксонометрия* деб аталади.

73- §. Тўғри бурчакли стандарт аксонометриялар

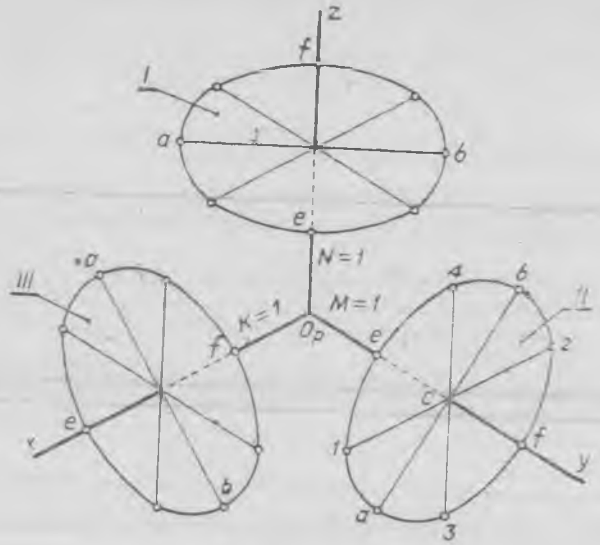
Саноқсиз кўп тўғри бурчакли аксонометриялардан изометрия ва $r = n = 2m$ бўлган диметрия *тўғри бурчакли стандарт аксонометриялар* дейилади.

1. Изометрия. Стандарт изометрияда $k = m = n = 0{,}82$ ўрнига, одатда, $K = M = N = 1$ олинади. Келтириш коэффициенти $U = 1 : 0{,}82 = 1{,}22$ бўлади.

Шундай қилиб, келтирилган ўзгариш коэффициентларидан фойдаланилганда, нормал изометриядаги тасвир тахминан 1,22 марта катта бўлиб чиқади (масштаб 1, 22:1).

Координата текисликларига (H, V, W га) параллел жойлашган айланаларнинг изометриялари — эллипсларнинг катта ўқи $ab = 1{,}22 \cdot D$, кичик ўқи $ef = 1{,}22 \cdot 0{,}58 \cdot D = 0{,}71 \cdot D$ бўлади (4, 5, 6-формулаларга кўра).

203- шаклда диаметрлари ўзаро тенг ва координата текис-



$ab = 1{,}22\,D$

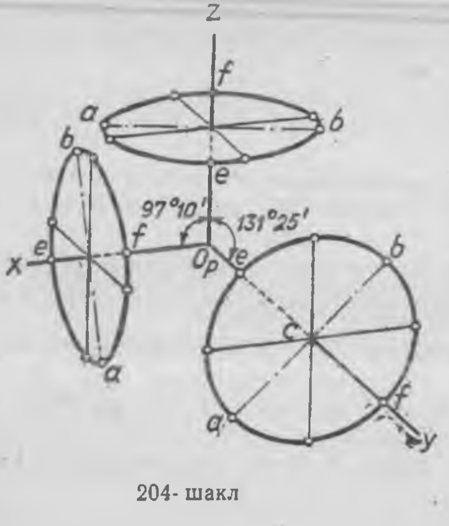
$ef = 0{,}71\,D$

$1\text{-}2 = 3\text{-}4 = D$

203- шакл

ликларига параллел жойлашган айланаларнинг нормал изометриядаги тасвирлари кўрсатилган.

Эллипсни 8 та нуқта бўйича ясаш мумкин. Масалан, II эллипсни ясаш учун айлана марказининг проекцияси — c нуқта орқали O_pX, O_pZ ўқларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқлар бўйича берилган айлананинг диаметрини қўйиб, *1*, *2*, *3*, *4* нуқталарни топамиз. Сўнгра O_pY ўқи бўйича эллипснинг кичик ўқига тенг $0{,}71 \cdot D$ кесмани қўйиб, e, f нуқталарни ва O_pY ўқига перпендикуляр қилиб c нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқ бўйича эллипснинг катта ўқига тенг $1{,}22 \cdot D$ кесмани қўйиб, a, b нуқталарни топамиз. Шундай қилиб, топилган 8 та нуқта лекало билан ўзаро туташтирилса, айлананинг изометрияси келиб чиқади.



204- шакл

2. Д и м е т р и я. Тўғри бурчакли стандарт диметрияда

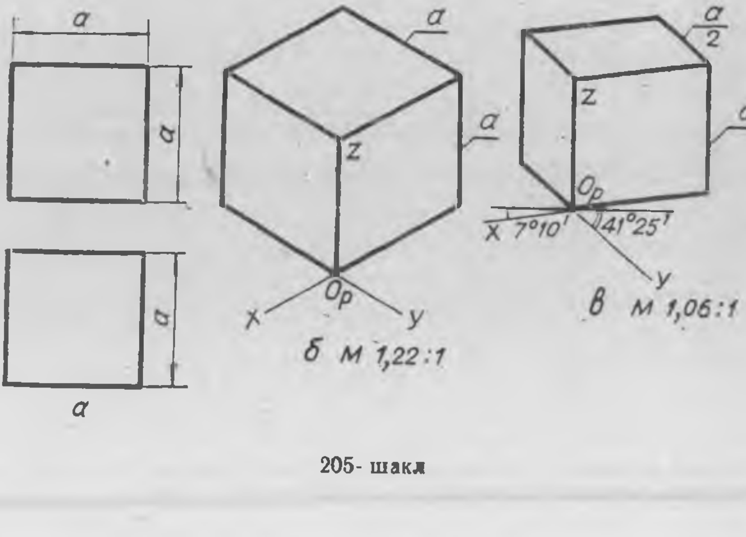
натурал ўзгариш коэффициентлари ($k = n = 2m = 0,94$) ўрнига, одатда, келтирилган коэффициентлар ($K = 2M = N = 1$) олинади. Шундай бўлганда, келтириш коэффициенти $U = 1 : 0,94 = 1,06$ бўлади. Демак, тасвир 1,06 марта катта бўлиб чиқади (масштаб 1,06 : 1).

XOY ва *YOZ* текисликларга параллел жойлашган айланалар учун эллипснинг катта ўқи $ab = 1,06 \cdot D$, кичик ўқи $ef = 0,35 \cdot D$ бўлади. *XOZ* текисликка параллел жойлашган айлана учун эллипснинг катта ўқи $ab = 1,06 \cdot D$, кичик ўқи эса $ef = 0,94 \cdot D$ бўлади (204-шакл).

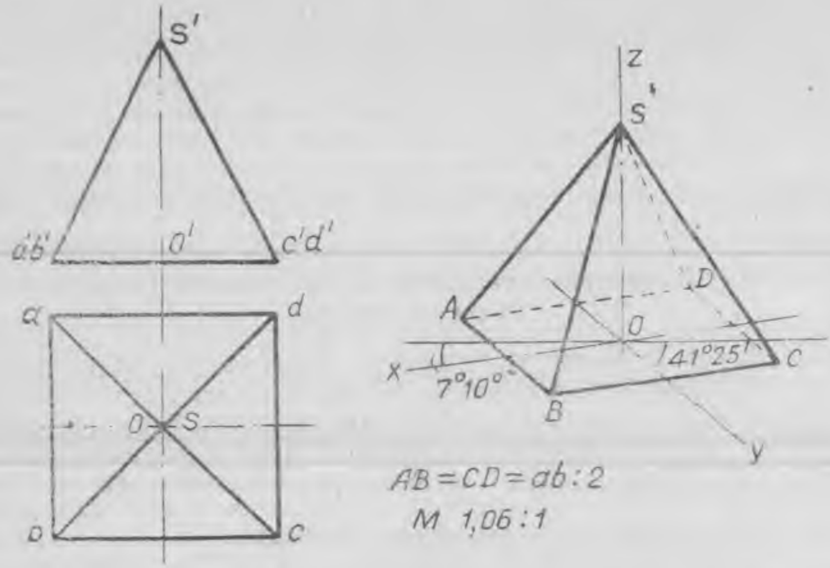
74- §. Тўғри бурчакли аксонометрияда яққол тасвирлар ясаш мисоллари

1. Куб. Кубнинг аксонометрик проекциясини ясаш унинг ёқлари — квадратларнинг проекцияларини ясашга келтирилади. 205- шаклда ёқлари координата текисликларига параллел жойлашган кубнинг ортогонал проекциялари ва изометрияда (205-шакл, *б*) ҳамда стандарт диметрияда (205-шакл, *в*) ясалган яққол тасвирлари кўрсатилган. Яққол тасвирлар келтирилган ўзгариш коэффициентлари бўйича ясалган.

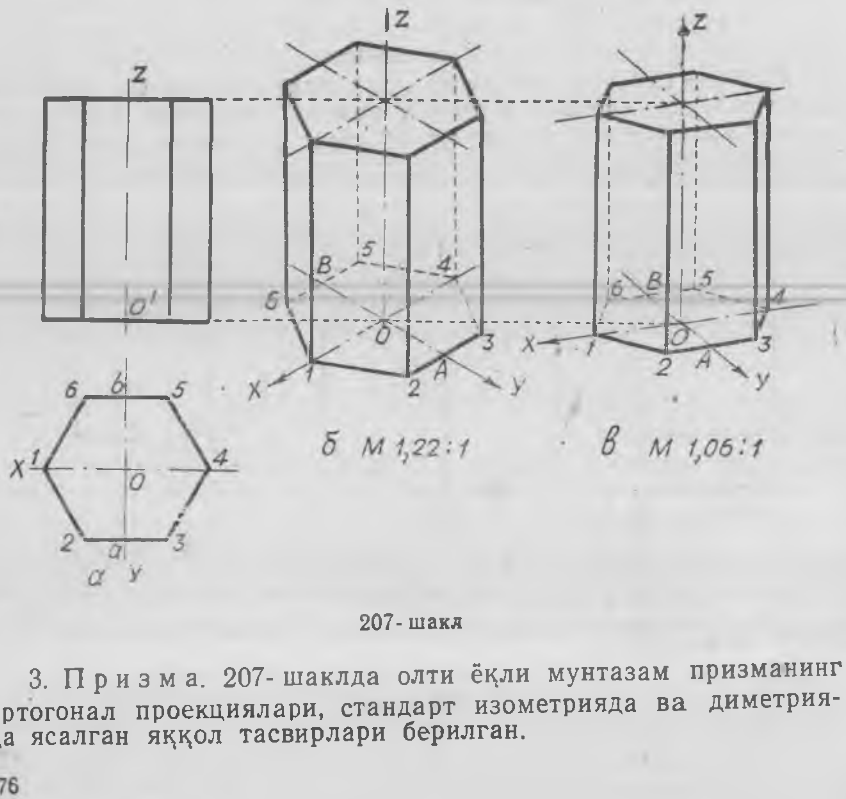
2. Пирамида. 206- шаклда асоси *XOY* координаталар текислигида турган мунтазам пирамиданинг ортогонал проекциялари ва стандарт диметрияда ясалган яққол тасвири кўрсатилган. Пирамида асоси — квадратнинг маркази координаталар боши деб қабул қилинган, квадратнинг томонлари *OX* ва *OY* ўқларга параллел жойлаштирилган. Шунинг учун пирамида асоси — квадрат диметрияда томонлари *OX* ва *OY* ўқларига параллел ва уларнинг иккитаси квадрат томонига, қолган иккитаси квадрат томонининг ярмиға тенг параллелограмм тарзида тасвирланади.



205- шакл

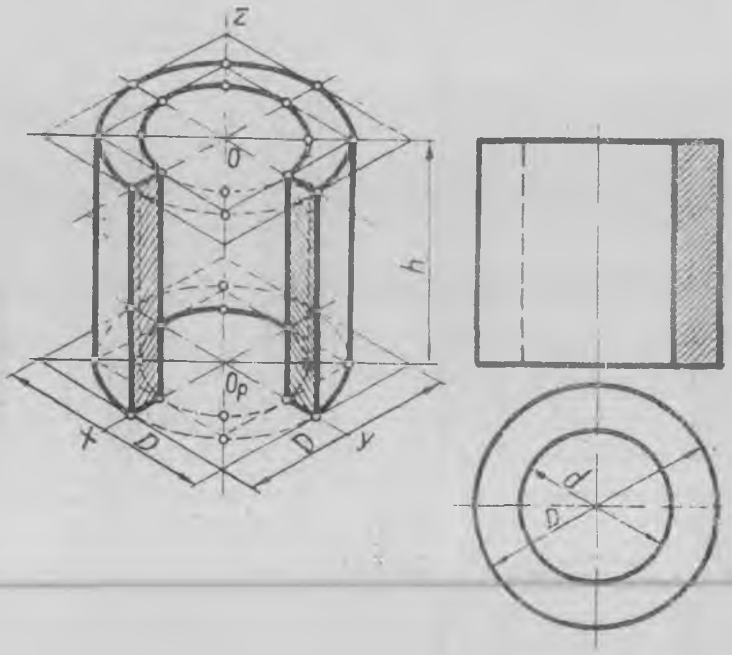


206- шакл



207- шакл

3. Призма. 207- шаклда олти ёқли мунтазам призманинг ортогонал проекциялари, стандарт изометрияда ва диметрияда ясалган яққол тасвирлари берилган.



208- шакл

Призманинг яққол тасвирини ясаш учун унинг қирралари *OX* ўқига параллел жойлаштирилган, остки асоси — мунтазам олтибурчакнинг маркази координаталар боши деб қабул қилинган.

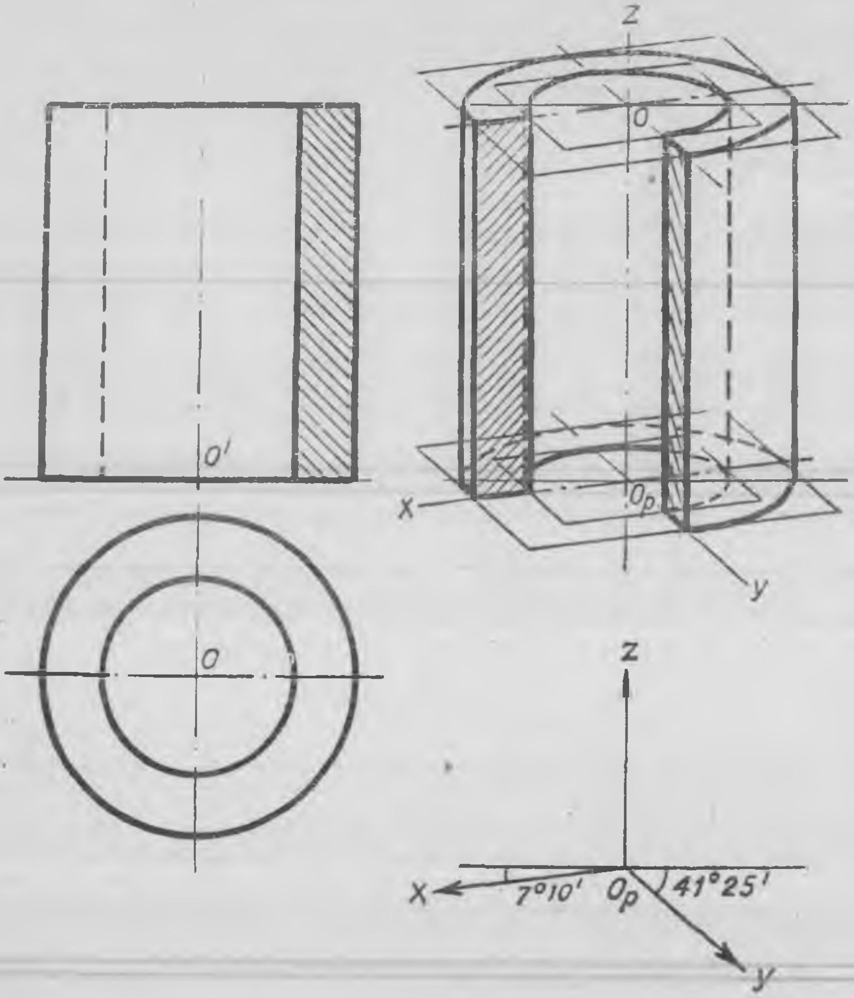
4. Ц и л и н д р. 208- шаклда *XOY* текисликда турган ковак тўғри доиравий цилиндрнинг ортогонал проекциялари ва изометрияда бажарилган яққол тасвири кўрсатилган.

Яққол тасвирини ясаш учун цилиндрнинг баландлигини O_pZ ўқига қўйиб, эллипсларнинг марказлари — O_p ва O нуқталарни аниқлаймиз. Кейин шу нуқталардан ўтган O_pX ва O_pY ўқлари бўйича цилиндр асосларининг изометрик проекциялари — эллипсларни ясаймиз (203- шаклга қаранг). Пировардида, ясалган эллипсларга O_pZ ўқига параллел қилиб уринма тўғри чизиқлар ўтказилса, цилиндрнинг изометрияси ҳосил бўлади.

Кўпинча, ковак нарсалар кесиб кўрсатилади. Деворларининг кесимлари, одатда, координата текисликларига параллел жойлаштирилади. Бизнинг мисолимизда цилиндрнинг бир чораги кесиб кўрсатилган.

209- шаклда ковак тўғри доиравий цилиндрнинг ортогонал чизмаси ва стандарт диметрияда бажарилган яққол тасвири келтирилган.

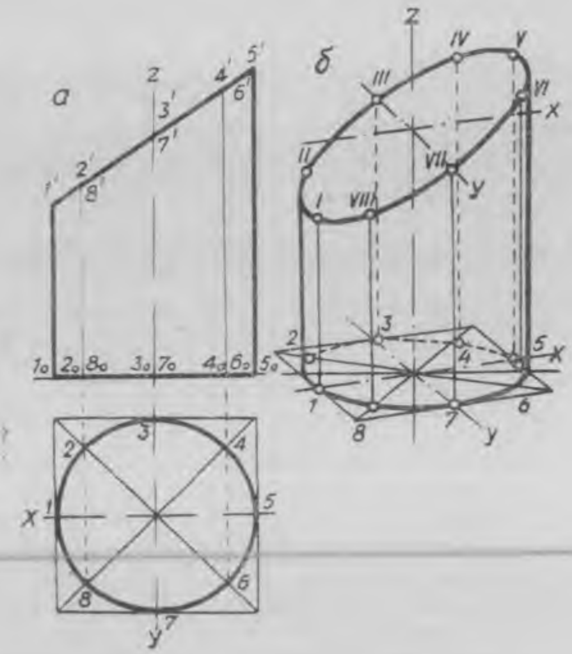
210- шаклда горизонтал текисликда турган ва қийшиқ кесилган доиравий цилиндрнинг ортогонал проекциялари бўйича диметрияда яққол тасвирини ясаш кўрсатилган.



209- шакл

Яққол тасвирини бажариш учун олдин цилиндр туби — доиранинг диметрик проекцияси 204- шаклда кўрсатилган усул билан ясалади. Шундан кейин, топилган *1*, *2*, *3*, . . . нуқталардан O_pZ ўқига (цилиндрнинг ўқига) параллел йўналишлар бўйича $1I = 1_01'$; $2II = 2_02'$; $3III = 3_03'$; масофалар цилиндрнинг ортогонал проекциясидан олиб қўйилади. Ҳосил бўлган *I*, *II*, *III*, . . . нуқталар лекало билан туташтирилиб, цилиндрнинг қийшиқ кесими — эллипснинг диметрияси, сўнгра цилиндрнинг ўзи ясалади.

5. Конус. 211- шаклда горизонтал текисликда турган тўғри доиравий конуснинг ортогонал проекциялари ва стандарт



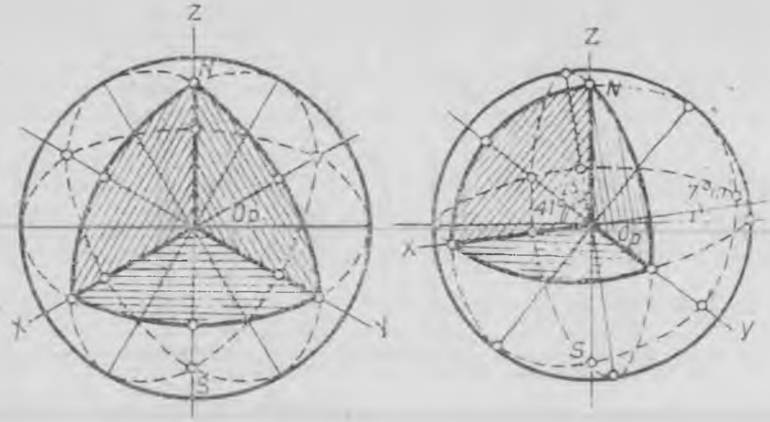
210- шакл

диметрияда бажарилган яққол тасвири кўрсатилган. Яққол тасвирда конуснинг сиртида ётган M нуқтани ясаш ҳам кўрсатилган. Бу нуқтани яққол тасвирга кўчириш учун конуснинг шу нуқта орқали ўтган NS ясовчисидан фойдаланилган.

6. Шар. Тўғри бурчакли аксонометрияда шарнинг проекцияси ҳамма вақт доира бўлади. Бу доиранинг диаметри натурал ўзгариш коэффициентларидан фойдаланилганда шарнинг диаметрига (D га) тенг, келтирилган ўзгариш коффициентларидан фойдаланилганда эса $U \cdot D$ га тенг бўлади (U — келтириш коэффициенти).

211- шакл

Демак, келтирилган ўзгариш коэффициентларидан фойдаланилганда шарнинг стандарт изометриядаги тасвири диаметри 1, 22 D бўлган доира, диметриядаги тасвири эса диаметри 1,06 · D бўлган доирадир.



212- шакл

Шарнинг аксонометрияси — доирага сферик кўриниш бериш учун, одатда, шарнинг координата текисликларига параллел текисликлар билан кесилишидан ҳосил бўладиган бир-бирига перпендикуляр учта катта доиранинг проекциялари ҳам кўрсатилади.

212- шаклда диаметри D бўлган шарнинг стандарт изометрияси (чапда) ва диметрияси кўрсатилган. Изометрик проекцияда юқорида кўрсатилган катта доиралар бир-бирига тенг учта эллипс тарзида тасвирланади. Бу эллипслар 203- шаклдаги кўрсатмаларга мувофиқ ясалади. Диметрик проекцияда эса эллипслардан иккитаси тенг, учинчиси бошқача бўлади ва улар 204- шаклдаги кўрсатмаларга мувофиқ ясалади.

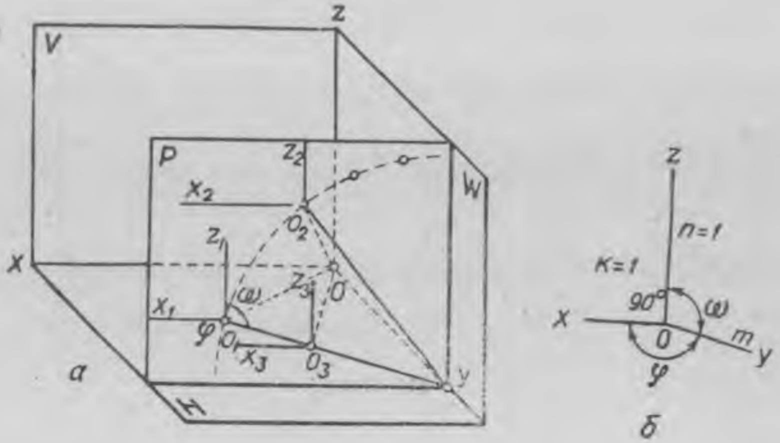
Изометрияда ҳам, диметрияда ҳам шарнинг ташқи контури учала эллипсга уринма айлана бўлади.

Умуман, шарнинг тўғри бурчакли аксонометриясини ясаш учун унинг юқорида айтилган учта текислик билан кесилишидан ҳосил бўладиган доираларнинг проекциялари — эллипсларни ясаб, сўнгра уларнинг учаласига уринма қилиб айлана чизилади.

75- §. Қийшиқ бурчакли баъзи аксонометрик проекциялар

Маълумки, аксонометрик проекциялар текислиги координата текисликларига нисбатан ҳар қандай вазиятда бўлиши мумкин. Лекин амалда XOZ координаталар текислигига параллел жойлашган текисликдаги қийшиқ бурчакли аксонометриядан кўпроқ фойдаланилади. Бундай текисликдаги аксонометрик проекция *қийшиқ бурчакли фронтал проекция* дейилади.

Фронтал проекцияда аксонометрия текислиги XOZ текисликка параллел бўлгани учун OX, OY ўқларидаги кесмалар ва улар орасидаги тўғри бурчак аксонометрия текислигига ўзгармай проекция-



213- шакл

ланади (213- шакл, *а*). Демак, O_1X_1 ва O_1Z_1 (ёки O_2X_2, O_2Z_2 . . .) аксонометрия ўқлари бўйича ўзгариш коэффициентлари бирга тенг ($k = n = 1$) бўлади. O_1Y ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти m эса ҳар хил, жумладан, бирга ҳам тенг бўлиши мумкин.

Агар $m = 1$ бўлса, қийшиқ бурчакли фронтал изометрия келиб чиқади, чунки бу ҳолда ҳамма ўқлар бўйича ўзгариш коэффициентлари тенг бўлади. Агар m бирдан кам ёки ортиқ бўлса, қийшиқ бурчакли фронтал диметрия келиб чиқади.

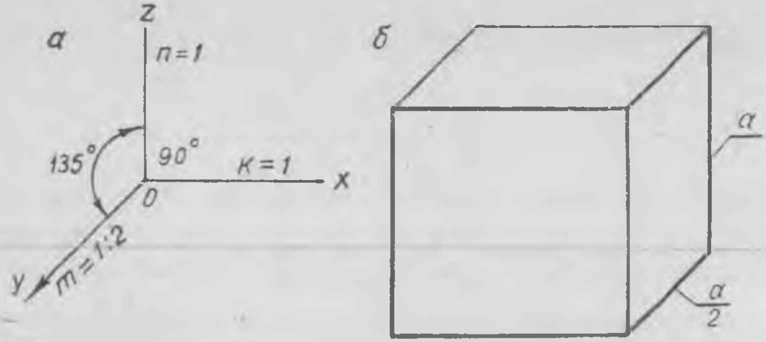
Қийшиқ бурчакли фронтал проекцияда триметрия бўлиши мумкин эмас.

213- шакл, *а* да OYO_1 тўғри бурчакли учбурчакдир, чунки $OY \perp P$, демак, $\angle OYO_1 = 90°$. Тўғри бурчакли учбурчакни OY катети атрофида айлантириш йўли билан P текисликдаги бошқа ўринларга (масалан, O_2 нуқтага) кўчириш мумкин. Бундай айлантириш вақтида O_1Y ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти ўзгармайди, лекин бу ўқ билан бошқа ўқлар орасидаги бурчаклар φ ва ω) ўзгарди. Агар O_1 нуқтани O_1Y ўқи бўйича суриб, бошқа ўринга (масалан, O_3 нуқтага) келтирсак, юқоридаги ҳолнинг тескарисини кўрамиз, яъни бу сафар O_1Y ўқи билан бошқа ўқлар орасидаги бурчаклар ўзгармасдан балки ўзгариш коэффициенти m ўзгаради:

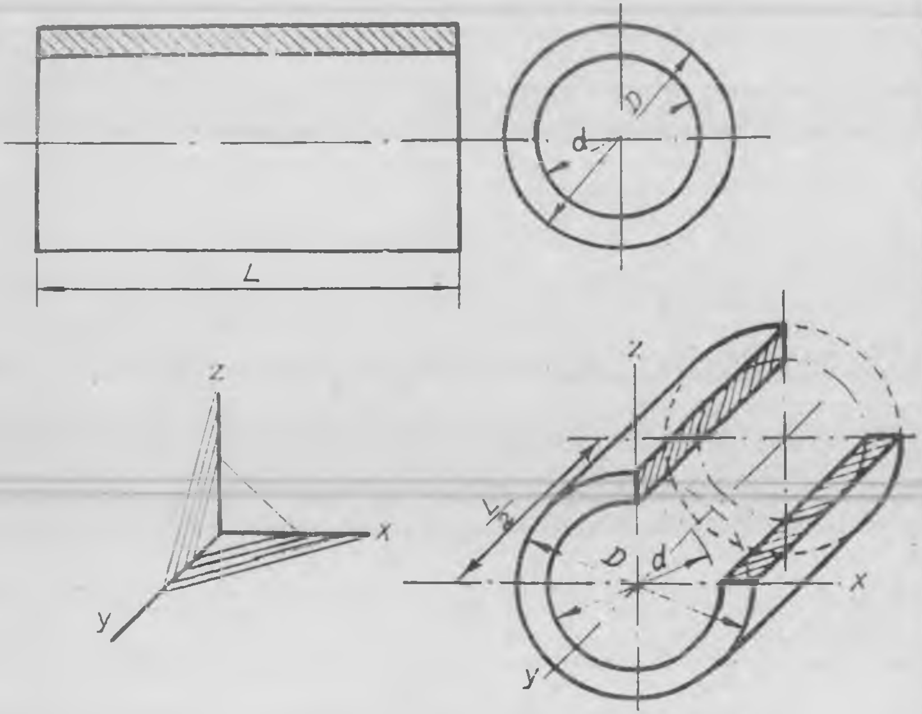
$$\left(m_1 = \frac{O_1Y}{OY};\ m_3 = \frac{O_3Y}{OY};\ \ldots\right).$$

Юқорида айтилганлардан қийшиқ бурчакли фронтал проекцияда OY ўқи бўйича ўзгариш коэффициентини ва бу ўқ билан бошқа ўқлар орасидаги φ, ω бурчакларни ихтиёрий олса бўлади, деган хулоса чиқариш мумкин (213- шакл, *б*).

Амалда бурчаклари $\varphi = \omega = 135°$ ва OY ўқи бўйича ўзгариш коэффициенти $m = 0{,}5$ бўлган фронтал проекциядан кўпроқ фойда-



214- шакл



215- шакл

ланилади (214-шакл, *a*). Яққол тасвирлар ясаш учун бундай фронтал диметрия стандартлар бўйича тасдиқланган.

Фронтал проекцияда *XOZ* текислигига параллел турган текис шаклларнинг проекциялари сира ўзгармайди. Масалан,

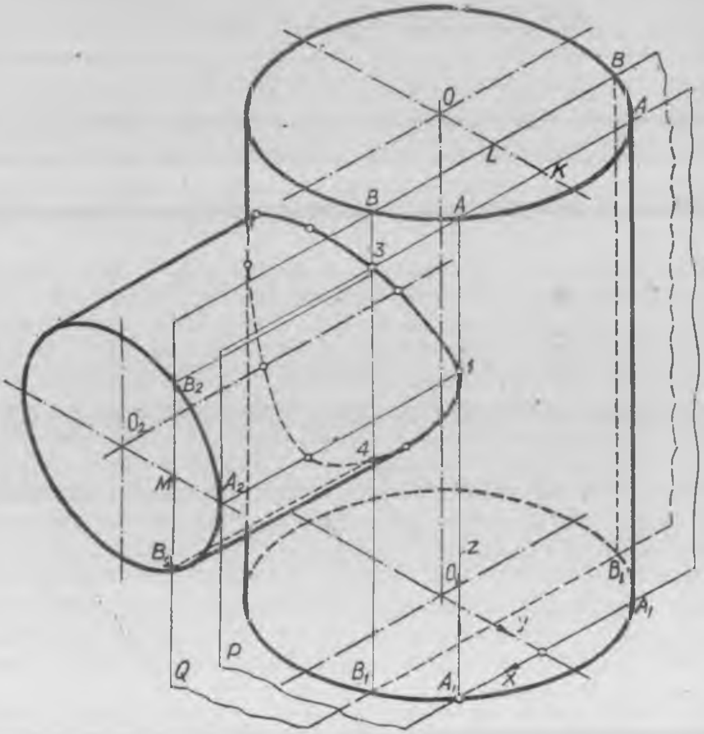
кубнинг ёқлари координата текисликларига параллел жойлаштирилган бўлса, унинг XOZ текисликка параллел бўлган ёқлари — квадратлар кубнинг қийшиқ бурчакли фронтал проекциясида ўзига тенг квадратлар тарзида тасвирланади, кубнинг бошқа ёқлари эса калта томонининг узун томонига бўлган нисбати 1:2 га тенг параллелограммлар тарзида тасвирланади (214- шакл, *б*).

Нарсанинг фронтал текисликка параллел контурларини ўзгартмасдан ўз катталигида тасвирлаш керак бўлган ҳоллардагина фронтал аксонометриядан фойдаланиш қулай.

Мисол тариқасида, 215- шаклда асослари аксонометрия текислигига параллел турган ковак доиравий цилиндрнинг ортогонал проекциялари ва қийшиқ бурчакли стандарт фронтал диметрияси кўрсатилган. Иккала чизмада ҳам цилиндрнинг бир чораги кесиб кўрсатилган.

76- §. Аксонометрияда сиртларнинг ўзаро кесишув чизиқларини ясаш

Аксонометрияда сиртларнинг ўзаро кесишув чизиқлари, ортогонал проекциялардаги сингари, нуқталар бўйича ясалади.



216- шакл

Бу нуқталар ё уларнинг эпюрдан олинган координаталари бўйича ёки ортогонал проекцияларда кўлланиладиган ёрдамчи кесувчи текисликлар воситаси билан ясалади.

Мисол тариқасида, 216- шаклда икки доиравий цилиндрнинг ўзаро кесишув чизиғини (ўтиш чизиғини) ясаш кўрсатилган. Олинган ёрдамчи текисликлар иккала цилиндрнинг ўқларига параллел бўлгани учун, уларни ясовчилари бўйича кесади. Ҳар қайси ёрдамчи текисликдаги иккала цилиндр ясовчиларининг ўзаро кесишув нуқталари цилиндрларнинг кесишув чизиғига оид нуқталар бўлади. Масалан, ёрдамчи P текислик кичик цициндрнинг сиртига $A_2 1$ ясовчиси бўйича уринади, катта цилиндрнинг ён сиртини AA_1, A_1A_1 ясовчилари бўйича кесади ва натижада *1* нуқтани ҳосил қилади; ёрдамчи Q текислик кичик цилиндрни $B_2 3$, $B_2 4$ ясовчилари бўйича ва катта цилиндрни BB_1, BB_1 ясовчилари бўйича кесиб, *3* ва *4* нуқталарни ҳосил қилади. Ёрдамчи P, Q текисликларни ўтказишда масофалар $OK = O_2A_2$ ва $OL = O_2M$ бўлиши шарт. Чизмада кесишув чизиғига қарашли *1* нуқтани аксонометрик координаталари (x, y, z) бўйича ясаш тартиби ҳам кўрсатилган.

XIII боб. ОРТОГОНАЛ ВА АКСОНОМЕТРИК ПРОЕКЦИЯЛАРДА СОЯЛАР

77- §. Умумий маълумотлар

Биз атрофимиздаги нарсаларни фақат улар қандайдир манбадан чиққан ёруғлик нурлари билан етарли даражада ёритилгандагина кўра оламиз. Масалан, қоронғи тунда ёритилмаган кўчадан кета туриб, биз нарсаларнинг сиртқи шаклларини аранг фарқ қиламиз, уларнинг кичик деталларини ва, шунингдек, фазода олган ҳажмларини фаҳмламаймиз. Бу ҳол ёруғликнинг етарли эмаслигидан келиб чиқади

Ҳар томондан бир хилда кучли ёритилган нарсалар ҳам текисга ўхшаб кўринади. Масалан, Қуёш тиккада бўлганда ундан чиққан нурлар асфальтни бир текисда ёритади дейиш мумкин. Шунинг учун биз кундузи асфальтланган йўлларнинг кичик паст-баланд жойларини пайқамаймиз ва йўл бизга текисга ўхшаб кўринади. Агар шундай йўлга кечаси чиқиб, масалан, фонарлари ёқилган автомобиль ўтаётганда назар ташласангиз, йўлнинг ҳатто жуда кичик паст-баландликларини ҳам равшан кўрасиз.

Тарқоқ ёруғликда яхши кўринмаган киши юзидаги кичик ажинлар шам ёруғида аниқ кўринади. Бу мисолларнинг ҳаммаси шуни кўрсатадики, нарсаларнинг сиртларида ёруғликнинг тақсимланиши уларнинг шаклини аниқлашга ёрдам беради.

Нарса сиртининг ёруғлик нурлари тўғридан-тўғри тушмаган пана қисми *шу нарсанинг сояси* дейилади. Ёруғлик нурларининг йўлда турган бошқа нарсалардан биз ўрганаётган нарсанинг

сиртида ҳосил бўлган соя ёки ёритилган нарсалардан бошқа сиртларга ташланган соя *тушган соя* дейилади.

Нарсанинг тасвирида унинг ўз сояси ва тушган сояси чизилса, тасвир яққолроқ ҳамда таъсирлироқ бўлиб чиқади.

Ёритилган нарса сиртининг турли қисмлари турли даражада ёритилган бўлади. Ёруғликнинг бундай тақсимланиши нарса сиртининг турли қисмларини ёруғлик манбаига нисбатан турлича жойлашуви натижасидир.

Аммо биз бундан кейин ёруғлик тақсимланишининг физикавий томонларига (ёруғлик нурларининг ҳавода тарқалишига, нарсадан ёруғлик манбаигача бўлган масофага ва ёруғлик нурларининг ёритилган сиртга нисбатан оғиш бурчагига қараб ёритилиш даражасининг ўзгаришига, рефлексларга ва шулар сингари объектив сабабларга) эътибор бермасдан, фақат нарсаларнинг ўз соялари ҳамда тушган сояларининг ёлғиз геометрик контурларини ўрганиш ва ясаш устида тўхталамиз.

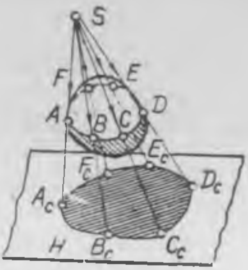
Нарсаларнинг ўз соялари уларнинг тушган сояларига нисбатан очроқ бўлади, чунки ўз сояларига бошқа сиртлардан қайтган нурлар кўпроқ тушади. Шунинг учун тасвирда нарсанинг ўз соясини очроқ, тушган соясини эса тўқроқ кўрсатиш лозим.

Нарсаларнинг ўз сояларини аниқлашда ва уларнинг тушган сояларини ясашда асосан икки хил ёритиш бўлиши мумкин.

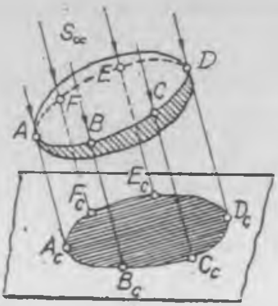
1. Ёруғлик манбаи нарсадан унча узоқ бўлмаган масофада жойлашган бўлиши мумкин. Масалан лампа ёки фонарь билан ёритиш (сунъий ёритиш). Бу ҳолда ёруғлик нурлари бир нуқтадан чиққан деб қаралади ва бундай ёритиш *марказий ёритиш* дейилади. Марказий ёритишда нарсанинг сиртига уринма бўлиб ўтаётган ёруғлик нурларининг йиғиндиси, нарсанинг шаклига қараб, конус ёки пирамида сирти ҳосил қилади (217-шакл).

Бир нуқтадан чиққан сунъий ёритишдан асосан бино ички кўринишларининг перспектив тасвирларидаги сояларни ясашда фойдаланилади.

2. Ёруғлик манбаи нарсадан жуда олис масофада жойлаш-



217- шакл



218- шакл

ган бўлиши мумкин. Масалан, Қуёш ёки Ой билан (табиий) ёритиш. Қуёшдан чиққан нурлар параллел нурлар деб қабул қилинади ва бундай ёритиш параллел ёритиш деб аталади. Қуёш билан ёритилганда нарсага уринма бўлиб ўтаётган нурларнинг йиғиндиси цилиндр ёки призма сирти ҳосил қилади (218- шакл).

Ёруғлик нурларининг нарса сиртига уринма бўлган нуқталарининг геометрик ўрни нарсанинг ўз *сояси контури* ёки сиртни ёритилган ва соя қисмларга бўлувчи чизиқ дейилади (217, 218- шаклларда *ABC ... A* чизиқ).

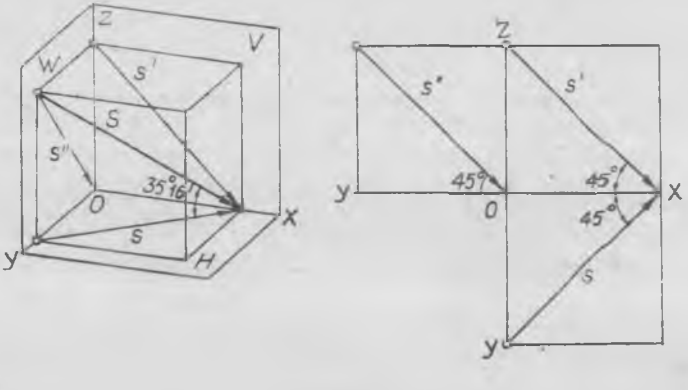
Нарсанинг сиртига уринма бўлиб ўтган ёруғлик нурларининг бошқа сирт билан учрашган нуқталарининг йиғиндиси нарсадан мазкур сиртга тушган соянинг контурини ҳосил қилади (217, 218- шаклларда $A_cB_cC_c$ . . . A_c чизиқ).

Шундай қилиб, *тушган соянинг контури нарсанинг ўз сояси контуридан тушган соядир.*

Юқорида айтилганлардан шундай хулоса чиқариш мумкин: тушган соянинг контурини ясаш масаласи тўғри чизиқларнинг (ёруғлик нурларининг) соя тушадиган сирт ёки текислик билан учрашган нуқталарини топиш масаласи билан боғланади; сояларни ясаш операциясининг ҳаммаси эса нарсага уринма бўлиб ўтган нурлар йиғиндисидан ҳосил бўладиган ўровчи сиртни ясаш ва бу сирт билан соя тушадиган сиртнинг кесишган чизиғини топиш масаласига келтирилади.

Бир жисмдан иккинчи жисмга тушган соя, одатда, жисмларнинг шаклини билдиради. Текис шаклдан унга параллел бўлган текисликка тушган соянинг контури шаклнинг контурига ўхшаш бўлади (учбурчакнинг сояси учбурчак, квадратнинг сояси квадрат, доиранинг сояси доира ва ҳоказо). Параллел нурлар билан ёритилганда текис шаклдан унга параллел бўлган текисликка тушган соя шаклнинг ўзига тенг (конгруэнт) бўлади.

Техник чизмалардаги сояларни ясашда асосан параллел



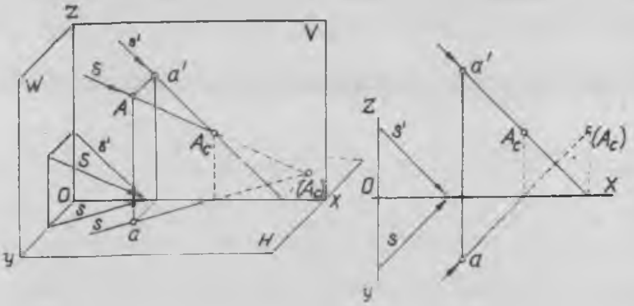
219- шакл

нурлар билан ёритишдан фойдаланилади. Ёруғлик нурларининг йўналиши ихтиёрий олиниши мумкин. Ортогонал ва аксонометрик проекцияларда соялар ясаш учун ёруғлик нурларининг йўналиши, кўпинча, ёқлари проекция текисликларида жойлашган кубнинг диагоналларидан бирига, одатда S (s, s′, s″) диагоналига параллел қилиб олинади (219- шакл). Шундай жойлашган куб диагоналининг ортогонал проекцияларидан ҳар бири проекциялар ўқига 45° қия бўлади. Кубнинг диагонали ёқларининг ҳар қайсиси билан 35°16′ бурчак ташкил қилади. Ёруғлик нурларининг бу оғиш бурчаги (35°16′) Қуёшнинг Тошкент областида март ойининг ўртасида соат 11 лардаги вазиятига тўғри келади.

78- §. Нуқтадан тушган сояни ясаш

Нуқтадан тушган сояни ясаш учун шу нуқта орқали ўтказилган ёруғлик нури билан соя тушадиган текислик ёки сиртнинг кесишган нуқтасини топиш керак.

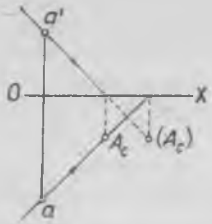
220- шаклдаги аксонометрик ва ортогонал проекцияларда A (a', a) нуқтадан тушган сояни ясаш кўрсатилган. Нуқта орқали ўтган S (s', s) нур фронтал проекциялар текислигини A_c нуқтада учратади. A_c нуқта A нуқтадан тушган соядир. Агар нурнинг йўлида V текислик бўлмаганда эди нуқтанинг сояси H текисликдаги (A_c) нуқтага тушар эди. (A_c) нуқта A нуқтанинг мавҳум сояси дейилади. Мавҳум сояларнинг белгиларини қавслар ичида ёзишни шарт қилиб оламиз.



220- шакл

221- шаклдаги эпюрда берилган A нуқта орқали ўтказилган нур олдин H текисликни A_c нуқтада, кейин V текисликни (A_c) нуқтада учратади. Демак, бу нуқтанинг ҳақиқий сояси H текисликдаги A_c нуқтада бўлади.

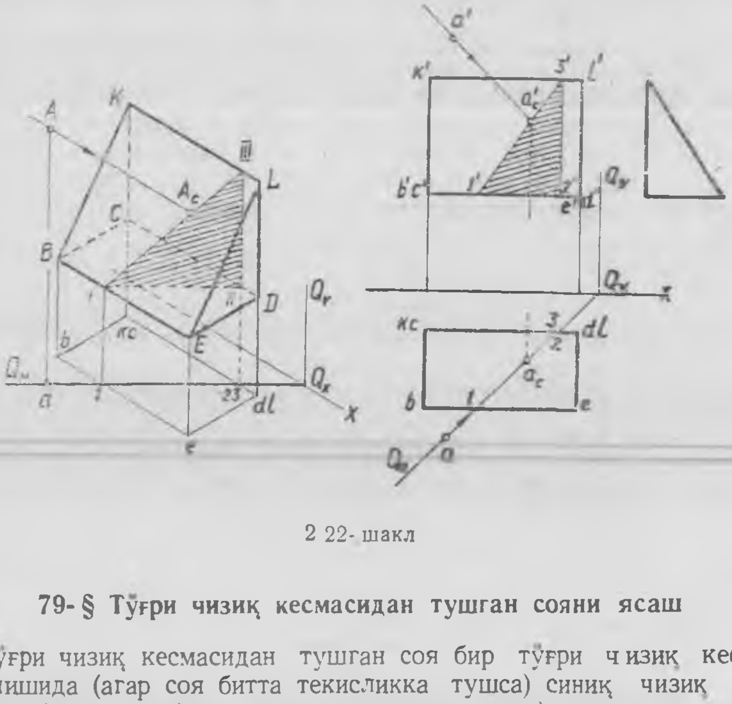
Чизманинг яққоллигини кучайтириш учун фақат ҳақиқий сояниНггина аҳамияти бор. Шунинг учун келгусида зарурият бўлмаса, нуқталарнинг мавҳум сояларини ясамаймиз.



221- шакл

Нуқтадан бирорта текисликка ёки сиртга тушган сояни ясаш учун шу нуқта орқали олдин ёруғлик нури ўтказилади. Кейин ёруғлик нури орқали ўтказилган ёрдамчи (одатда, проекцияловчи) текислик билан берилган текисликнинг ёки сиртнинг кесишган чизиғи ясалади. Бу ясалган кесишув чизиғи билан нуқта орқали ўтган нур кесишиб, изланган сояни ҳосил қилади.

222- шаклда A нуқтадан призмага тушган сояни ясаш кўрсатилган. A нуқта орқали ўтган нур текислиги $Q(Q_H, Q_V)$ призмани учбурчак $I\ II\ III$ $(1\ 2\ 3,\ 1'\ 2'\ 3')$ бўйича кесади. Бу учбурчакнинг $I\ III$ $(1'3',\ 1\ 3)$ томони билан нурнинг кесишган A_c нуқтаси A нуқтадан призманинг $BKLE$ ёғига тушган соядир. Эпюрдаги a'_c, a_c нуқталар A нуқтадан призмага тушган соянинг фронтал ва горизонтал проекцияларидир.

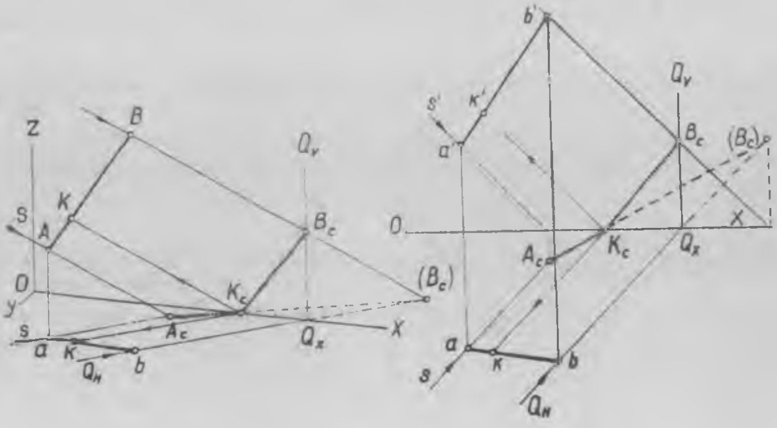


2 22- шакл

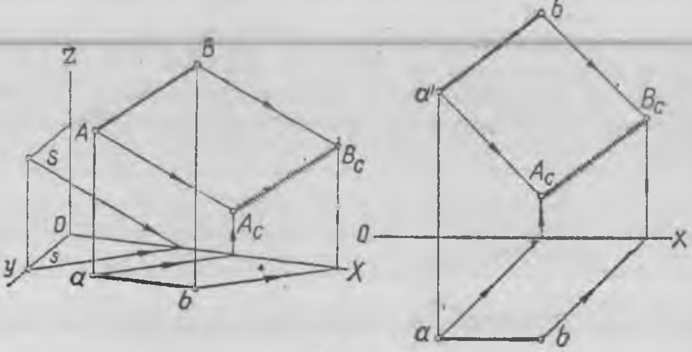
79- § Тўғри чизиқ кесмасидан тушган сояни ясаш

Тўғри чизиқ кесмасидан тушган соя бир тўғри чизиқ кесмаси кўринишида (агар соя битта текисликка тушса) синиқ чизиқ кўринишида (агар соя бир қанча текисликка тушса) ва эгри чизиқ кўринишида (агар соя эгри сиртга тушса) бўлиши мумкин.

223- шаклда умумий вазиятдаги тўғри чизиқ кесмаси $AB(a'\ b'\ ab)$ дан проекция текисликларига тушган сояни ясаш кўрсатилган. Кесмадан тушган сояни ясаш учун кесма учларидан тушган соялар ясалади. Шаклдан кўриниб турибдики, A нуқтанинг сояси A_c нуқта H текисликда, B нуқтанинг сояси B_c нуқта V текисликда



223- шакл



224- шакл

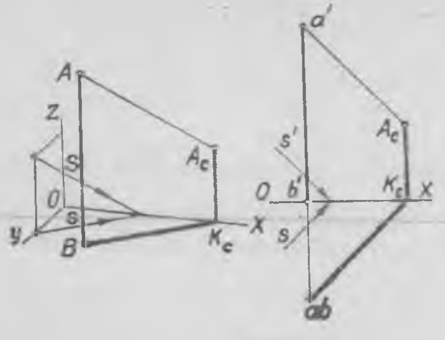
келиб чиққан. Демак, AB кесмадан соянинг бир қисми H текисликка, бошқа қисми V текисликка тушади. Соя синиқ чизиқ $A_c K_c B_c$ кўринишда тасвирланади. Соянинг синиш нуқтаси K_c ни A_c нуқтани B нуқтанинг H текисликдаги мавҳум сояси (B_c) нуқтага улаш йўли билан аниқлаш мумкин. Кесмадаги $K\,(k',\ k)$ нуқта соянинг синиш нуқтасидан ўтган тескари нур билан аниқланади.

Агар тўғри чизиқ кесмаси текисликка параллел бўлса, унинг шу текисликдаги сояси ўзига параллел бўлади.

224- шаклдаги $AB\,(a'b',\ ab)$ кесма V текисликка параллел (чунки $ab \parallel OX$), шунинг учун кесмадан V текисликка тушган соя кесманинг ўзига параллел ($A_cB_c \parallel AB$).

Агар тўғри чизиқ кесмаси текисликка перпендикуляр бўлса, унинг шу текисликдаги сояси ёруғлик нурининг шу текисликдаги проекцияси бўйича йўналади.

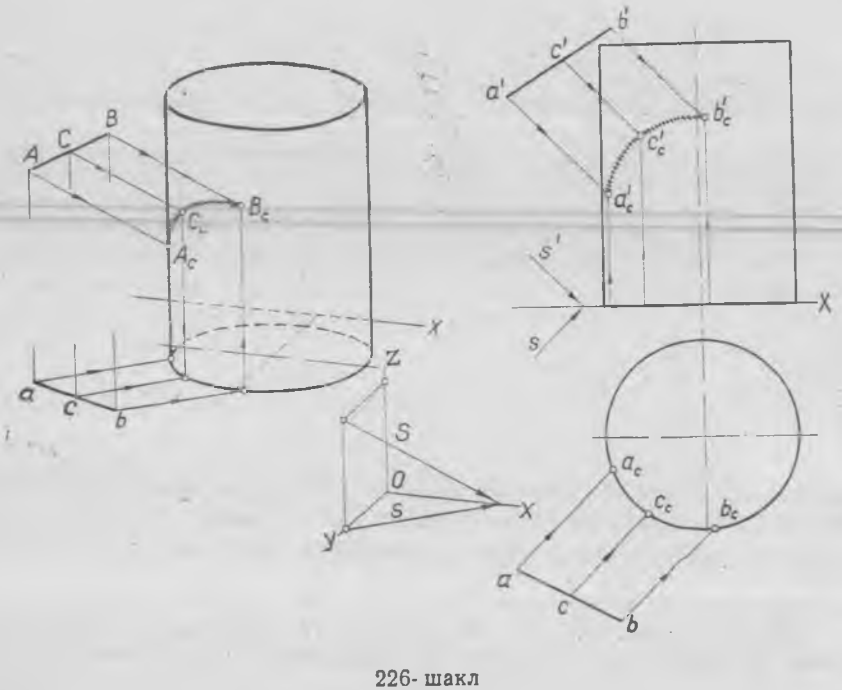
225- шаклдаги $AB\,(a'b',\ ab)$ кесма H текисликка перпендикуляр, шунинг учун кесмадан H текисликка тушган соя ёруғлик



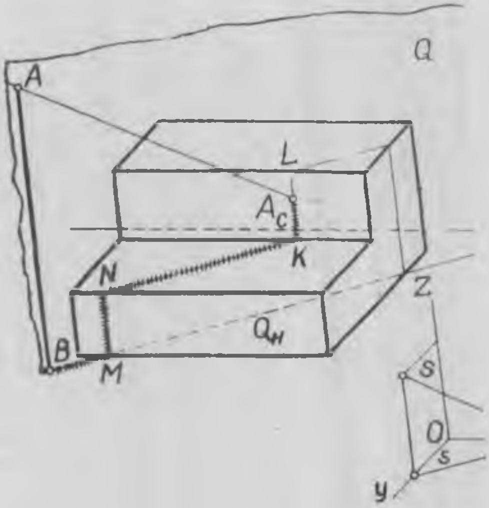
225- шакл

нурининг горизонтал проекциясига параллел йўналган, V текисликка тушган сояси кесманинг ўзига параллел йўналган ($BK_c \parallel s$; $K_cA_c \parallel AB$).

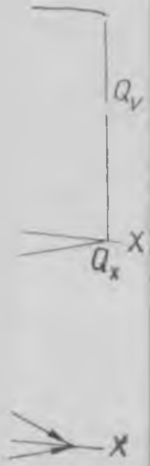
226- шаклда вертикал AB ($a'b'$, ab) кесмадан H текисликка ва зинага тушган сояни ясаш кўрсатилган. Сояни ясаш учун AB кесма орқали нур текислик $Q(Q_H, Q_V)$ ўтказилган. AB кесма H текисликка перпендикуляр бўлгани учун Q текислик ҳам H га перпендикуляр (горизонтал проекцияловчи) текисликдир. Q текислик H текисликни Q_H чизиқ бўйича, зинани $MNKL$ . . . ($mnkl$ . . . , $m'n'$ $k'l'$ . . .) синиқ чизиқ бўйича кесади. Бу синиқ чизиқ билан кесманинг A учи орқали ўтган нурнинг кесишган нуқтаси A_c (a'_c, a_c) сояни ҳосил қилади. Кесманинг B учи H текисликда бўлгани учун сояни ўзига тўғри келади. Шундай қилиб, $BMNKA_c$ синиқ чизиқ AB кесмадан H текисликка ва зинага тушган соядир. Соянинг горизонтал текисликлардаги қисмлари нурнинг горизонтал проекция-



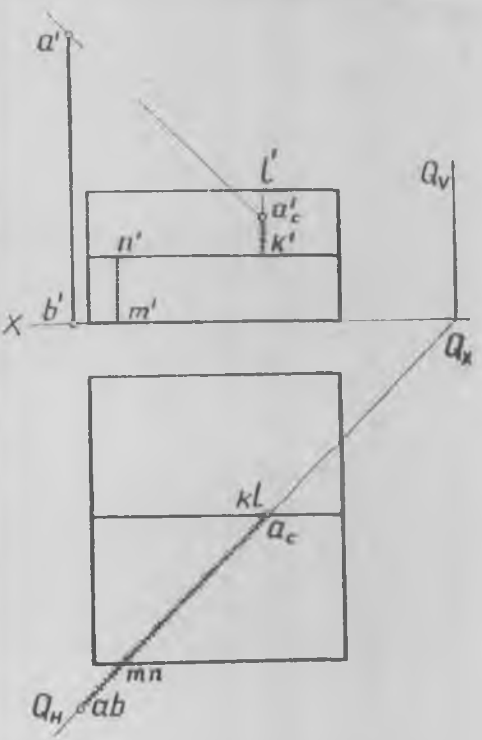
226- шакл



Q
A
L
A_c
K
N
Z
Q_H
B
M
s
O
s
y



227- шакл



си бўйича йўналган ($BM \parallel NK \parallel s$), вертикал текисликлардаги қисмлари кесманинг ўзига параллел, яъни вертикал йўналган ($MN \parallel KA_c \parallel AB$).

227-шаклда умумий вазиятдаги AB тўғри чизиқ кесмасидан цилиндр сиртга тушган сояни ясаш кўрсатилган. Кесма орқали ўтган нур текислиги цилиндрнинг сиртини эллипс бўйича кесади. Демак, AB кесмадан цилиндр сиртга тушган соя $A_cC_cB_c$ эгри чизиқ эллипснинг ёйидир. Бу сояни ясаш учун тўғри чизиқ кесмасининг бир неча (A, C, B) нуқталаридан цилиндр сиртига тушган сояларни ясаб, уларни лекало билан ўзаро туташтириш керак.

Ортогонал проекцияларда (эпюрда) соянинг горизонтал проекцияси (a_c, $c_c\, b_s$) цилиндрнинг контурига тўғри келади, фронтал проекцияси эгри чизиқ $a_c'\, c_c'\, b_c'$ кўринишида келиб чиқади.

228- шакл

228-шаклда вертикал тўғри чизиқ кесмаси AB дан H текисликка ва конуснинг сиртига тушган сояни ясаш кўрсатилган.

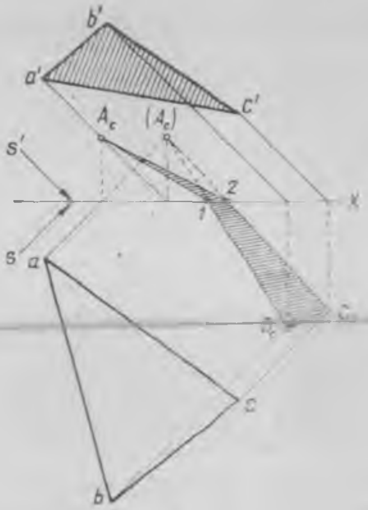
AB кесма орқали нур текислик ўтказилган. Нур текислик горизонтал проекцияловчи текислик бўлиб, Q_H унинг горизонтал изидир. Q текислик H текисликни Q_H чизиқ бўйича, конуснинг сиртини гипербола $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ ($1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'$, $1\ 2\ 3\ 4\ 5$) бўйича кесади. Гипербола билан кесманинг A учи орқали ўтган нур кесишиб, A_c(a''_c, a_c) нуқтани ҳосил қилади. $B12A_c$ ($b'1'2'a_c'$, $b12a_s$) синиқ чизиқ AB кесмадан H текисликка ва конуснинг сиртига тушган соядир.

80- §. Текис шаклдан тушган сояни ясаш

Текис шаклдан тушган сояни ясаш учун унинг умумий ҳолда олдин мазкур шаклнинг контури орқали, ясовчилар берилган ёруғлик нурининг йўналишига параллел бўлган ўровчи сирт ўтказилади: кейин бу ўровчи нур сирти билан соя тушадиган текисликнинг ёки сиртнинг кесишув чизиғи ясалади.

Агар текис шакл тўғри чизиқ кесмалари билан чегараланган бўлса, бундай шаклдан тушган сояни ясаш амалда тўғри чизиқ кесмаларидан тушган сояларни ясашга келтирилади.

229- шаклда умумий вазиятдаги ABC учбурчакдан H ва V проекция текисликларига тушган сояни ясаш кўрсатилган.



229- шакл

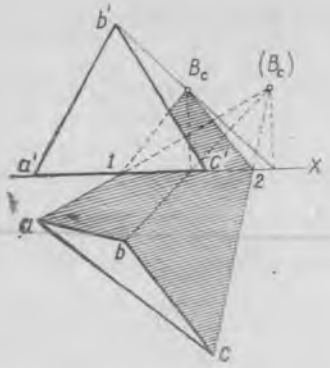
B_cC_c кесма учбурчакнинг BC томонидан H текисликка тушган соя, A_c1B_c ва A_c2C_c синиқ чизиқлар учбурчакнинг AB ва AC томонларидан H ва V текисликларга тушган соялардир. 1 ва 2 нуқталарни аниқлаш учун A нуқтанинг H текисликдаги мавҳум сояси (A_c) ни B_c ва C_c нуқталарга улаш керак.

$A_c\,1B_c\,C_c\,2A_c$ шакл ABC учбурчакдан проекция текисликларига тушган соядир.

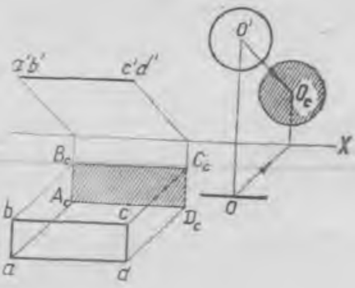
Учбурчак пластинканинг бир томони ёритилган, иккинчи томони соя бўлади. Проекцияларнинг ҳар бирида пластинканинг қайси томони кўринганлигини аниқлаймиз.

Проекцияда учбурчакнинг қайси (ёритилган ёки соя) томони кўринганлигини аниқлаш учун шу проекциянинг контури соат стрелкасининг юриши томонига ёки унга тескари йўналишда айланиб чиқилади ва учларни кўрсатувчи ҳарфларнинг тартиби тушган соя контурини худди шундай йўналиш бўйича айланиб чиқилгандаги ҳарфларнинг тартиби билан таққосланади. Ҳарфларнинг тартиби тўғри келса, мазкур проекцияда пластинканинг ёритилган томони кўрсатилган бўлади: агар проекциянинг контурини ва тушган соянинг контурини айланиб чиқишда ҳарфларнинг тартиби тўғри келмаса, проекцияда шаклнинг соя томони кўринган бўлади.

229- шаклдаги мисол учун тушган соянинг контури соат стрелкасининг юришига қарши йўналиш бўйича айланиб чиқилса, ҳарфларнинг тартиби $A_c\,B_c\,C_c$ бўлади. Шу йўналиш бўйича айланилса, горизонтал проекцияда ҳарфларнинг тартиби $ab\,c$, фронтал проекцияда $a'b'c'$ бўлади. Демак, горизонтал



230- шакл



231- шакл

проекцияда учбурчакнинг ёритилган томони, фронтал проекцияда эса соя томони кўринган.

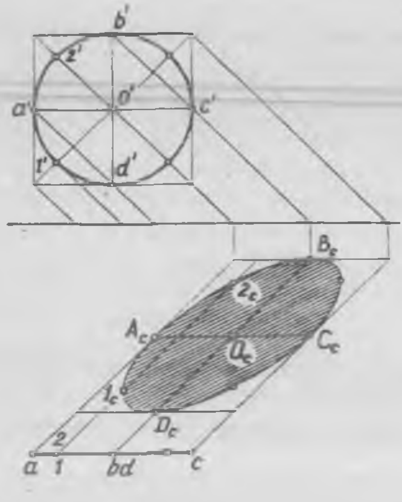
230- шаклдаги мисолда H га қараганда ҳам, V га қараганда ҳам берилган учбурчакнинг ёритилган томони кўринади.

Агар текис шакл бирорта текисликка параллел бўлса, унинг шу текисликдаги сояси шаклнинг ўзига тенг ва параллел бўлади.

231- шаклдаги мисолда берилган $ABCD$ тўртбурчак H га параллел, доира V га параллел. Шунинг учун тўртбурчакдан H текисликка тушган соя тўртбурчакнинг ўзига тенг ва параллел, доирадан V текисликка тушган соя эса доиранинг ўзига тенг ва параллелдир.

Айланадан (ёки ихтиёрий текис эгри чизиқдан) унга параллел бўлмаган текисликка тушадиган сояни нуқталар бўйича ясаш мумкин. Айланадан унга параллел бўлмаган текисликка тушган соя эллипс кўринишида бўлади.

232- шаклда фронтал текисликда жойлашган доирадан H текисликка тушган сояни ясаш кўрсатилган. Соянинг контури — эллипсни аниқроқ ясаш учун доиранинг сиртидан чизилган квадратнинг соясидан ҳам фойдаланилган.



232- шакл

81-§. Геометрик жисмларнинг сояларини ясаш

Геометрик жисмнинг сиртига уринма бўлиб ўтган ёруғлик нурларининг йиғиндиси ўровчи сирт ҳосил қилади. Бу ўровчи нур сиртининг жисм сиртига уринма бўлган нуқталарининг йиғиндиси ўз соясининг контурини ҳосил қилади, жисм сиртига уринма бўлган ёруғлик нурларининг соя тушадиган текислик ёки бошқа сирт билан кесишган нуқталари йиғиндиси эса жисмдан тушган соянинг контурини ҳосил қилади. Юқорида айтилганларга биноан, жисмларининг соялари тубандаги тартибда ясалади: 1. Жисмнинг ўз сояси аниқланади. 2. Ўз сояси контуридан тушган соя, яъни жисмдан тушган соя ясалади.

Жисмнинг шаклига қараб, ўровчи нур сирти кўп ёқли, эгри сирт ва уринма текисликлардан иборат бўлиши мумкин.

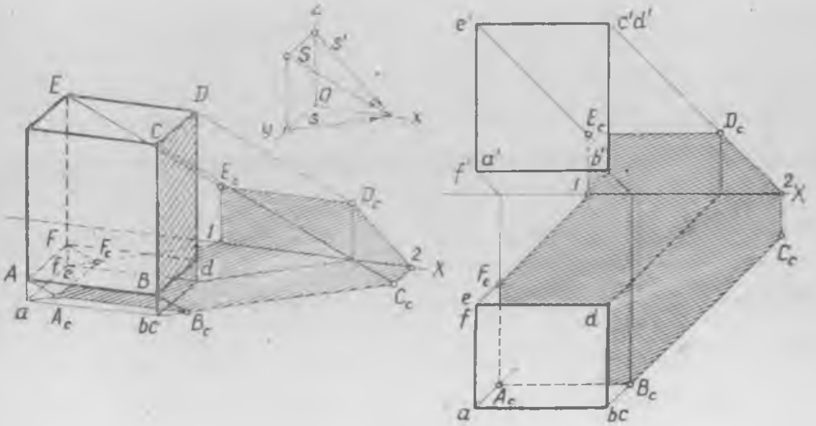
А. Кўпёқликларнинг сояларини ясаш

Кўп ёқлининг ўз сояси контури, одатда, ҳеч қандай график ясашлардан фойдаланилмай, фазода тасаввур қилиш йўли билан аниқланади. Синиқ чизиқ билан ифодаланган ўз сояси контуридан тушган соя кўпёқдан тушган соянинг контурини ҳосил қилади.

233- шаклда фазода вертикал жойлашган тўрт ёқли призмадан тушган сояни ясаш кўрсатилган.

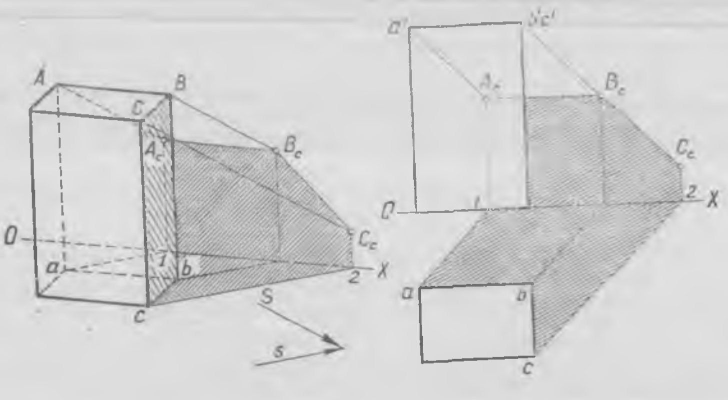
Аксонометрик тасвирдан яққол кўриниб турибдики, призманинг устки асоси, чап томондаги ва фасад томондаги ёқлари ёритилган, остки асоси ва қолган икки ёғи ўз соясидадир. Шунинг учун *ABCDEFA* синиқ чизиқ ёритилган ва соя ёқлар орасидаги чегара ва ўз соясининг контуридир.

ABCDEFA синиқ чизиқдан (унинг томонларидан) *H* ва *V* текис-

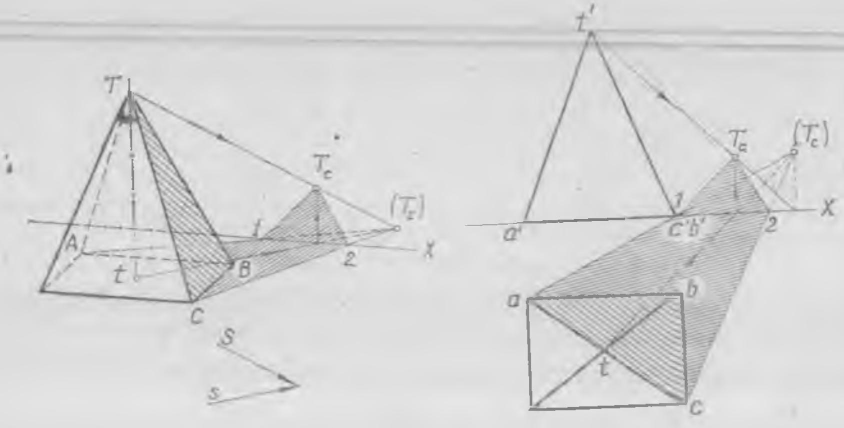


233- шакл

ликларга тушган соя ҳосил бўлади. Призманинг AB, CD, AF қирралари H текисликка параллел, шунинг учун бу қирралардан H текисликка тушган соялар қирраларнинг ўзларига параллел бўлади ($A_cB_c \parallel AB$; $CD \parallel C_c2$; $AF \parallel A_cF_c$). DE ва EF қирралар V текисликка параллел бўлгани учун улардан V га тушган соялар қирраларнинг ўзларига параллел бўлади ($DE \parallel D_cE_c$; $EF \parallel E_c1$). BC ва EF қирралар H текисликка перпендикуляр бўлгани учун улардан H га тушган соялар ёруғлик нурининг горизонтал проекцияси бўйича йўналган ($B_cC_c \parallel F_c\ 1 \parallel s$). CD қирра V текисликка перпендикуляр бўлгани учун ундан V га тушган соя ёруғлик нурининг фронтал проекцияси бўйича йўналади ($D_c\ 2 \parallel s'$). Агар кўпёқнинг асоси проекциялар текислигида жойлашган бўлса, сояларни ясаш бирмунча соддалашади. Бу ҳолда асосининг ҳамма учлари ўз соялари билан устма-уст тушган бўлади.



234- шакл



235- шакл

234- шаклда *H* текисликда турган тўрт ёқли призмадан *H* ва *V* текисликларга тушган сояни ясаш кўрсатилган.

Пирамидадан *H* ва *V* текисликларга тушган сояни ясаш учун (235- шакл) олдин унинг учидан тушган ҳақиқий соя T_c ва мавҳум соя (T_c) топилади. Кейин мавҳум соя (T_c) орқали пирамиданинг асосига уринма қилиб (T_c) *A* ва (T_c) C чизиқлар ўтказилади. Проекциялар ўқидаги *1* ва *2* нуқталар пирамида ён қирраларидан тушган сояларнинг синиш нуқталаридир. Бу нуқталар T_c нуқтага туташтирилса, пирамидадан *H* ва *V* текисликларга тушган соянинг контури $A1T_c$ $2C$ ҳосил бўлади.

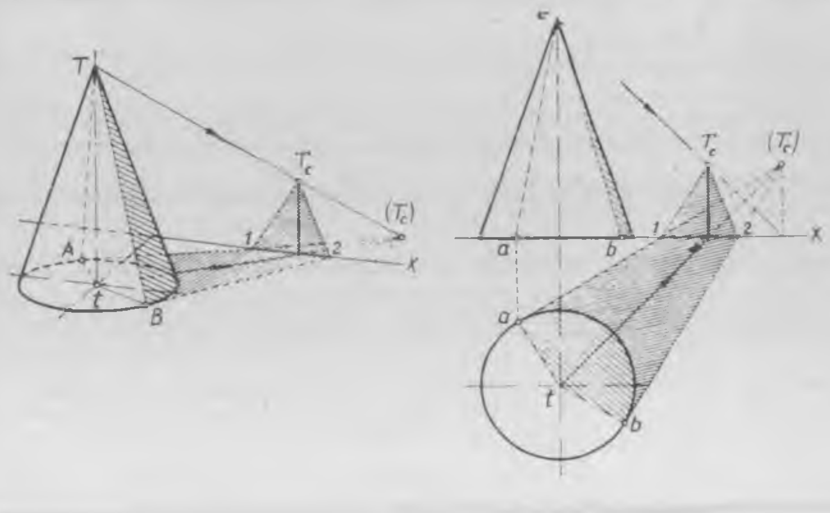
AT ва *CT* қирралар пирамиданинг ёқларини соя ва ёритилган қисмларга ажратади. Демак, пирамиданинг *ATB, BTC* ёқлари ва асоси ўз соясида бўлади. Ўз соясининг контури синиқ *TABCT* чизиқдан иборатдир.

Б. Эгри сиртларнинг сояларини ясаш

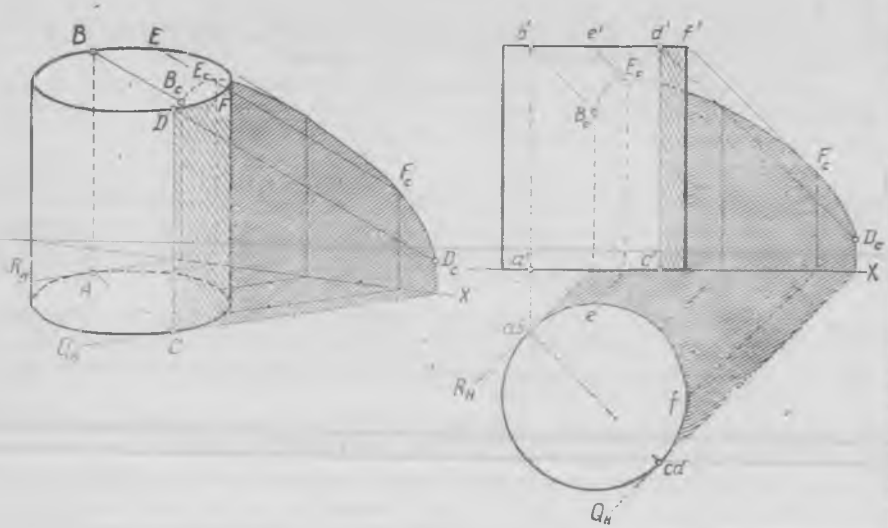
Ихтиёрий шаклдаги жисмга уринма бўлган ёруғлик нурларининг йиғиндиси умумий ҳолда цилиндр сирт ҳосил қилади. Бу цилиндр сирт нур цилиндри деб юритилади. Нур цилиндрининг берилган жисмга уринган чизиғи жисмнинг ёритилган қисмини унинг соя қисмидан ажратади ва бу чизиқ ўз соясининг контури дейилади. Нур цилиндрининг сирти билан проекциялар текислигининг ёки бошқа жисм сиртининг кесишув чизиғи тушган соянинг контури бўлади. Кўпёқлардагидек, бу ерда ҳам, ўз соясининг контуридан тушган соя тушган соянинг контуридир.

236- шаклда *H* текисликда турган доиравий конусдан *H* ва *V* текисликларга тушган сояни ясаш кўрсатилган.

Конусдан тушган соя пирамидадан тушган соя сингари ясалади. Олдин конуснинг учидан *H* га тушиши мумкин бўлган мавҳум



236- шакл



237- шакл

соя (T_c) ва V га тушган ҳақиқий соя T_c топилади. Кейин мавҳум соя орқали конуснинг асосига уринма қилиб ўтказилган чизиқларнинг OX ўқ билан кесишган 1 ва 2 нуқталари конус учидан V текисликка тушган сояга (T_c нуқтага) туташтирилади. Ҳосил бўлган $A1T_c\ 2B$ чизиқ тушган соянинг контури, AT ва BT ясовчилар эса ўз соясининг контуридир.

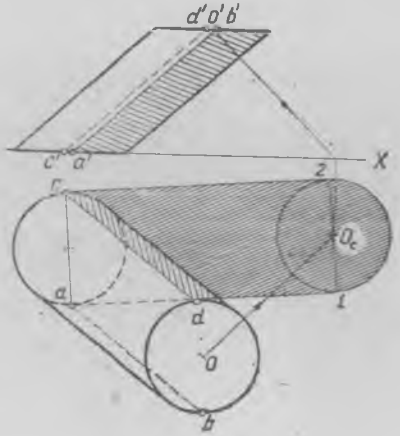
Юқорида айтилган нур цилиндри конус бўлган ҳолда ёруғлик нурларига параллел ва конусга уринма иккита текисликка айланиб кетади ($TA1$ ва $TB2$ чизиқлар билан ифодаланган текисликлар).

237- шаклда H текисликда турган тўғри доиравий цилиндрдан H ва V текисликларга тушган сояни ясаш кўрсатилган.

Олдин цилиндр ўз соясининг контури аниқланади. Шу мақсадда ёруғлик нурларига параллел ва цилиндрга уринма иккита (R, Q) текислик ўтказилади. Уринма текисликларнинг горизонтал излари (R_H, Q_H) бу хусусий ҳолда ёруғлик нурларининг горизонтал проекциялари бўйича йўналади. Цилиндрга Q ва R текисликлир уринишидан ҳосил бўлган AB ва CD чизиқлар цилиндрнинг ёритилган қисмини соя қисмидан ажратувчи ясовчилардир. Бу ясовчилар қисқача қилиб, соя ясовчилар дейилади. $ABEFDC$ чизиқ цилиндр ўз соясининг контури; бу чизиқдан H ва V текисликларга тушган соя цилиндрдан тушган соянинг контурини ҳосил қилади.

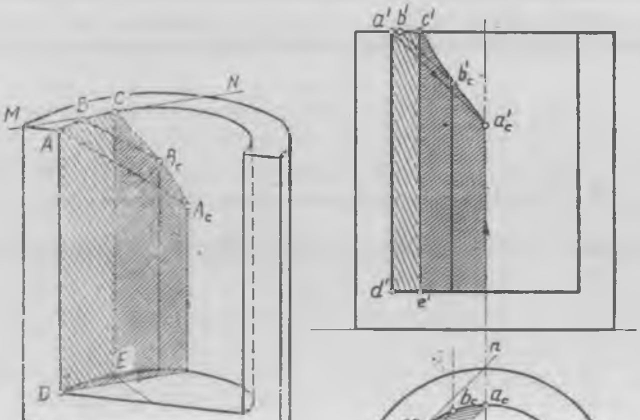
238- шаклдаги ортогонал проекцияларда асослари горизонтал текисликларда жойлашган доиралардан иборат умумий

вазиятдаги эллиптик цилиндрдан H текисликка тушган сояни ясаш кўрсатилган. Цилиндрнинг юқориги асоси ва ундан H текисликка тушган соя параллел текисликларда бўлгани учун улар икки конгруэнт шакллардир. Шунга кўра, бу цилиндрнинг сояларини ясаш учун ёлғиз биргина ёруғлик нури ўтказилган ва унинг ёрдамида устки асосининг марказидан тушган O_c соя топилган. Тушган соянинг контуридаги $a1$ ва $c2$ тўғри чизиқлар ёруғлик нурларига параллел ва цилиндрнинг AB ва CD ясовчиларига уринма бўлган R, Q текисликларнинг горизонтал изларидир.

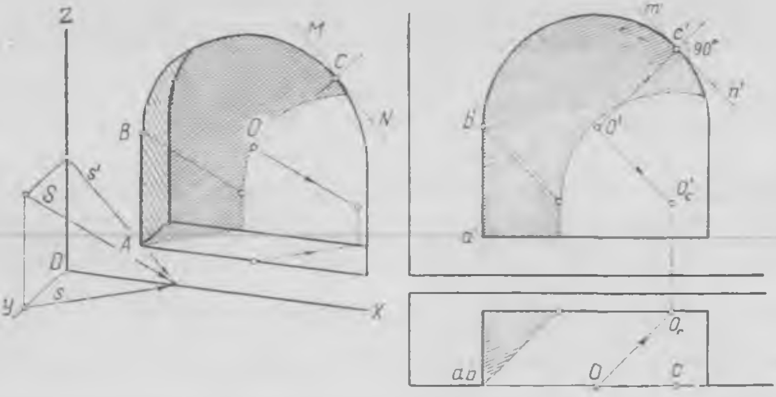


238- шакл

239- шаклда уст томони очиқ ярим цилиндрдан унинг ички сиртига тушган сояни ясаш кўрсатилган. Ёруғлик нурининг горизонтал проекциясига параллел қилиб, ярим айланага ўтказилган MN (mn) уринма ёрдамида цилиндрнинг соя ясовчиси (CE) аниқланади. Ҳосил бўлган $DABC$ чизиқ ўз соясининг контуридир. A нуқтанинг сояси (A_c) цилиндрнинг ўртадаги ясовчисига тушади. Айлананинг ABC ёйидан тушган соя (A_cB_cC) эллипснинг ёйидир.



239 шакл

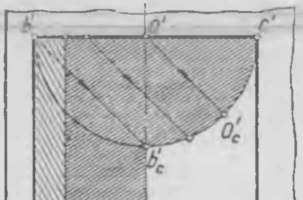


240- шакл

240- шаклда юқори томони ярим цилиндр аркадан иборат токча ичидаги сояни ясаш кўрсатилган. Ўз соясининг контури *ABC* чизиқдан токчанинг унга параллел бўлган ички деворига тушган соя чизиқнинг ўзига конгруэнт бўлади. Демак, сояни ясаш учун айлана марказидан тушган соя топилса кифоя.

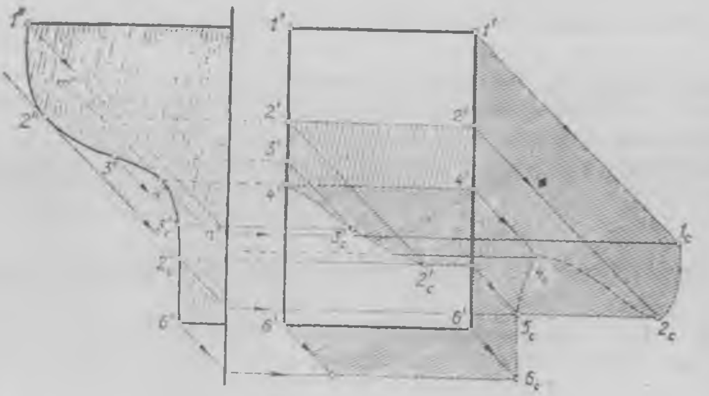
Ўз соясининг контури чегарасидаги C (c', c) нуқта ёруғлик нурининг фронтал проекциясига параллел қилиб, ярим айланага ўтказилган уринма *MN* чизиқ ёрдамида аниқланади ($MN \parallel s' \parallel m'n'$).

241- шаклдаги эпюрда тепаси текис ярим доира бўлган цилиндрик токчанинг ичидаги сояни ясаш кўрсатилган. *AB* қиррадан тушган соя 239- шаклдаги сингари ясалади. Горизонтал *BC* қиррадан ўтувчи нур текислик ярим цилиндрни ярим эллипс бўйича кесади. Бу ярим эллипс ярим айлана ($b'b'_c o'_c c'$) кўринишида проекцияланади.



241- шакл

242- шаклда фасад томони цилиндр сирт билан чегараланган кронштейннинг сояларини ясаш кўрсатилган. Ўз соясининг контурини аниқлаш учун ёруғлик нурининг профил проекциясига параллел қилиб, цилиндр сиртнинг профил проекциясига уринма чизиқлар ўтказилади. Бу чизиқлар $2''$ ви $4''$ нуқталарда уринади. Цилиндр сиртнинг $2-2$ ва $4-4$ ясовчилари орасидаги қисми ўз соясида бўлади. $2-2$ ясовчи орқали ўтувчи нур текислик цилиндр сирт билан $2c$ ($2''c\ 2'c$) нуқтадан ўтган ясовчи бўйича кесишади. $2-4$ эгри чизиқдан тушган соянинг фронтал проекцияси $4'$ ва $2'c$ нуқталар орасида бўлади. Бу эгри чизиқдан тушган сояни ясаш учун оралиқда олинган бир неча нуқталарнинг сояларини топиш



242- шакл

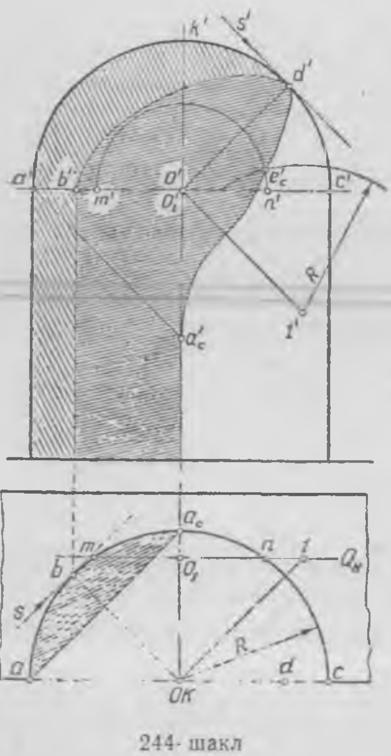
243- шакл

керак. Шаклда эгри чизиққа оид 3 ($3''$,$3'$) нуқтадан тушган соя-ни ($3c$, $3'c$) топиш кўрсатилган. V текисликка тушган сояни ясаш чизманинг ўзидан тушунарли. 2—2 ясовчидан тушадиган соянинг бир қисми кронштейнга, қолган қисми V текисликка тушади. Кронштейннинг ости ва ўнг томонлари ҳам ўз соясида бўлади.

243-шаклда шарнинг ўз соясини ва тушган соясини ясаш кўрсатилган. Шарга уринма бўлган ёруғлик нурларининг йиғиндиси доиравий цилиндр ҳосил қилади. Шарнинг марказидан ёруғлик нурларига перпендикуляр қилиб ўтказилган P текислик билан нур цилиндрнинг кесишган чизиғи (катта айлана) шарнинг ўз сояси контурини беради. Бу айлана H ва V текисликларга катталиклари бир хилда бўлган эллипслар кўринишида проекцияланади. Эллипсларнинг катта ўқи шарнинг диаметрига тенг ва ёруғлик нурининг тегишли проекциясиға перпендикуляр бўлади ($ab \perp s$; $e'f' \perp s'$). Эллипсларнинг кичик ўқи V текисликни ёруғлик нурларига параллел қўйилган вертикал V_1 текислик билан алмаштириб топилган ($cd = k'l'$). Нур цилиндрнинг горизонтал изи ёки, барибир, $ACBD$ айлананинг H текисликдаги сояси шардан H текисликка тушган соянинг контури — $A_c C_c B_c D_c$ эллипсни ҳосил қилади. Шар марказидан тушган соя шу эллипснинг марказидир.

Ёруғлик нурининг проекция текисликларига нисбатан оғиш бурчаги (45° 16′) B_1 текисликка ўз катталигида проекцияланади. Бу ҳолдан фойдаланиб, эллипсларнинг ўқларини аналитик усул билан топса ҳам бўлади. Шарнинг проекциясидаги эллипснинг кичик ярим ўқи $od = R \cdot \sin 35°16'$; шардан тушган соя эллипснинг катта ярим ўқи $O_c D_c = \frac{R}{\sin 35° 16'}$ бўлади (R — шарнинг радиуси).

Синус 35°16′ тахминан 0,577 . . . га тенг, демак, $od = 0{,}577 \cdot R$; $O_c D_c = 1{,}7331 \cdot R$.



244- шакл

244-шаклда юқори қисми чорак шардан иборат цилиндрик токчанинг сояларини ясаш кўрсатилган. Фронтал ярим айлана AKC ($a'k'c'$, akc) дан тушган соя нуқталар бўйича ясалади. Масалан, бирорта E нуқтадан (бу нуқта шаклда кўрсатилмаган) тушган Ec (e'_c) сояни топиш учун фронтал Q текислик ўтказилган. Q текислик чорак шарни маркази O_1 (o_1 o_1') нуқтада ва диаметри MN (mn, $m'n'$) кесмага

тенг ярим айлана бўйича, нур цилиндрини маркази 1, $1'$ нуқтада ва радиуси шар радиусига тенг ярим айлана бўйича кесади. Бу ярим айланаларнинг кесишган нуқтаси тушган соянинг контурига оид нуқ та бўлади. Шаклда E_c нуқтанинг фақат фронтал проекцияси ($e'c'$) кўрсатилган, нуқтанинг горизонтал проекциясини топиш зарур бўлса, шу нуқтадан ўтган горизонтал текисликдан фойдаланиш мумкин. A_c (a_c, a_c') нуқта A нуқтадан токчанинг цилиндр қисмига тушган соя. D (d', d) нуқта, ёруғлик нурининг V текисликдаги проекциясига параллел қилиб, токчанинг фасадига ўтказилган уринма чизиқ ёрдамида топилган. Цилиндрдаги контур ясовчи ўтган B (b, b') нуқта нурнинг H текисликдаги проекциясига параллел қилиб, токчанинг планига ўтказилган уринма чизиқ ёрдамида аниқланган. Токчага тушган соя контурининг бошланиш чизиғи BD($b'a'$) нур цилиндрининг чорак шарга уринган чизиғидир. Бу чизиқ ҳақиқатда айлана бўлиб, проекциялар текислигига эллипс ёйи кўринишида проекцияланади (243-шаклга қаранг).

245- шаклда ясовчиси эгри чизиқ бўлган айланиш сиртининг сояларини ясаш кўрсатилган. Олдин сиртнинг H текисликка тушган сояси ясалган. Кейин, тушган соянинг контуридан фойдаланиб, сирт ўз соясининг контури аниқланган.

Сиртдан тушган сояни ясаш учун унинг бир неча горизонтал кесимларидан (параллелларидан) тушган соялар ясалади. Бунинг учун горизонтал кесимларнинг (айланаларнинг марказларидан тушган соялар топилса кифоя. Улар сиртнинг ўқидан тушган сояда (OT_c чизиқда) жойлашади. Айланаларнинг H текисликдаги соялари ўзларига тенг айланалар кўринишида тасвирланади. Бу соя айланаларни ўровчи чизиқ сиртдан тушган соянинг контури бўлади.

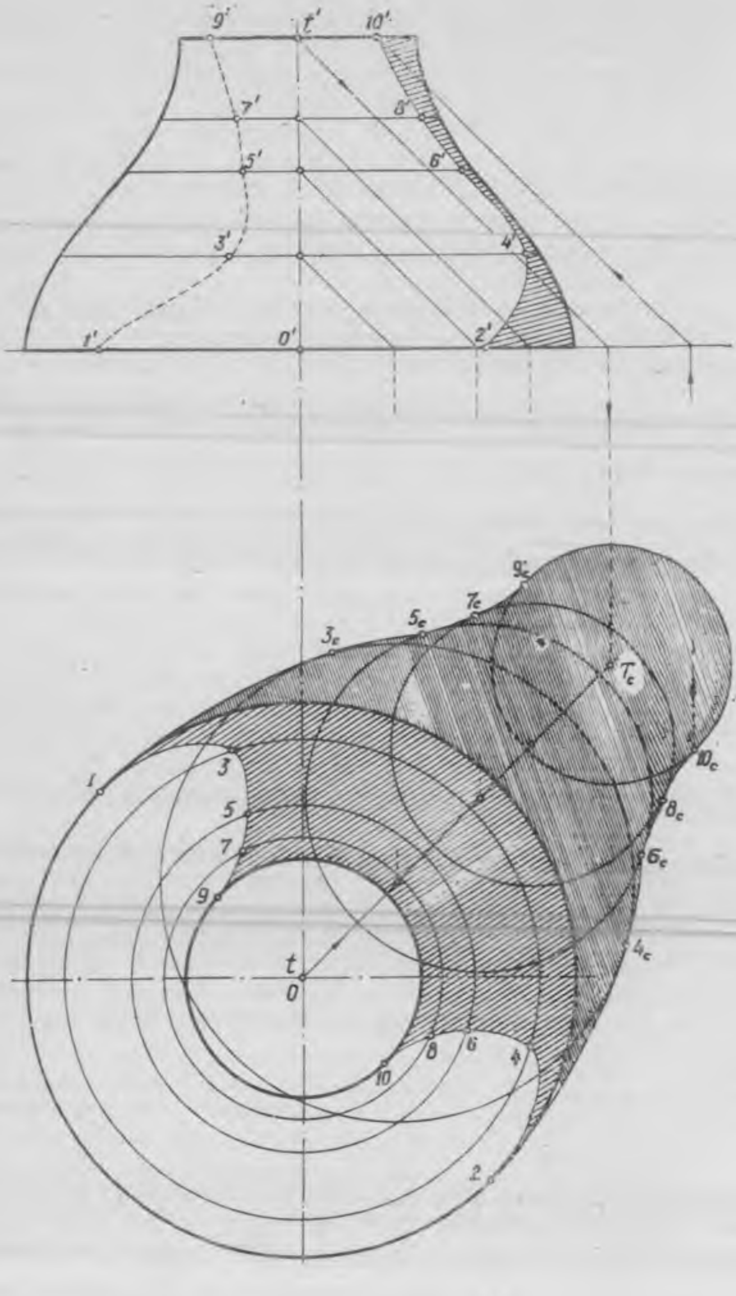
Шундан кейин, ўровчи чизиқнинг параллеллардан тушган соя айланаларга уринган нуқталари (1, 2, 3_c, 4_c, . . . , 10_c) белгиланади, сўнг бу нуқталарни тескари нурлар ёрдамида тегишли параллелларга олиб бориб, улар силлиқ эгри чизиқлар билан туташтирилса, айланиш сиртининг ўз сояси контури ҳосил бўлади.

Юқорида келтирилган усул, яъни параллеллардан тушган соялардан фойдаланиб, олдин айланиш сиртидан тушган сояни, кейин ўз соясини ясаш қулай ва содда усул бўлиб, ундан ўқи вертикал жойлашган ҳар қандай айланиш сиртининг сояларини ясаш учун фойдаланиш мумкин.

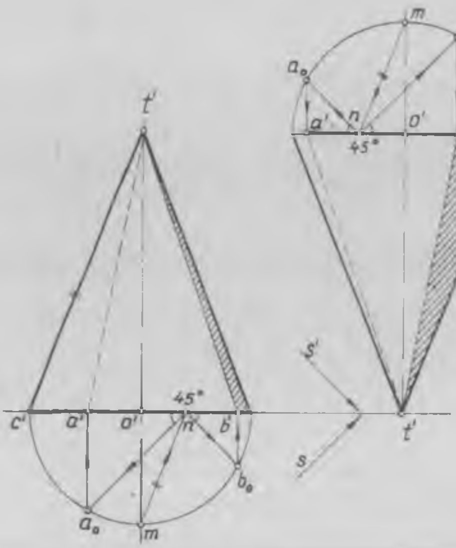
Аммо бу усул билан айланиш сирти ўз соясининг контури ноаниқроқ топилади, чунки параллеллардан тушган соя айланаларга ўровчи эгри чизиқнинг уринган нуқталарини (1, 2, 3_c, 4_c, . . . , ни) аниқ топиш қийин.

Айланиш сиртининг ўз сояси контурини аниқроқ ясаш учун уринма конуслар ва цилиндрлар усулидан фойдаланиш тавсия қилинади.

Бу усулни баён қилишдан олдин тўғри доиравий конуснинг ёлғиз фасадидан (фронтал проекциясидан) фойдаланиб, соя ясовчиларини топиш йўли билан танишиб чиқиш зарур. Проф. С. М. Колотов таклиф қилган анча оддий йўлни исботсиз келтирамиз.



245- шакл



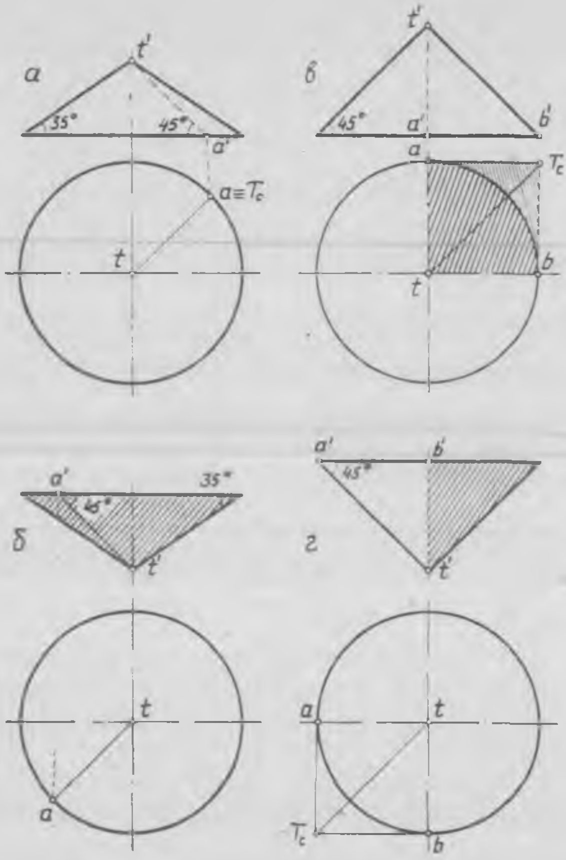
246- шакл

Конус асосининг фронтал проекциясида ярим айлана чизилади. (246- шакл). Ярим айлана билан конус ўқининг кесишган m нуқтаси орқали конуснинг очерк ясовчисига параллел қилиб mn чизиқ ўтказилади ($mn \| c't'$). Бу чизиқ конус асосининг проекцияси билан кесишган n нуқтасидан (ярим айланани a_0 ва b_0 нуқталарда кесувчи) 45′ бурчак остида иккита чизиқ ўтказилади. a_0 *ва* b_0 нуқталардан ўтказилган вертикал чизиқлар конус асосининг проекциясидаги a' ва b' нуқталарни ҳосил қилади. Бу нуқталардан изланган соя ясовчиларнинг фронтал проекциялари ($a't'$, $b't'$) ўтади.

Агар конуснинг ясовчилари асосининг текислиги билан 35° бурчак ташкил қилса, бундай конуснинг ҳамма сирти ёритилган бўлади (247- шакл, *а*). Бу ҳолда конуснинг ўз сояси битта ясовчисидан (AT) иборат бўлади. Агар шундай конуснинг учи паст томонда бўлса, унинг ҳамма сирти ўз соясида бўлади (247- шакл *б*). Бу ҳолда конуснинг сиртида битта ёруғлик нури ($a't'$, at) бўлади.

Агар конуснинг ясовчилари горизонтал текисликка 35° дан кам бурчакка қия бўлса, учи асосининг юқори томонида жойлашган конуснинг ҳамма сирти ёритилган, учи асосининг паст томонида жойлашган конуснинг ҳамма сирти ўз соясида бўлади (бу ҳоллар учун алоҳида чизмалар келтирилган эмас).

Ясовчилари горизонтал текисликка 45° га қия конуснинг чорак сирти ўз соясида бўлади ва бу соя чорак фронтал проекцияда кўринмайди (247- шакл, *в*). Агар шундай конуснинг учи асосининг паст томонида бўлса, сиртининг тўртдан уч қисми ўз



247- шакл

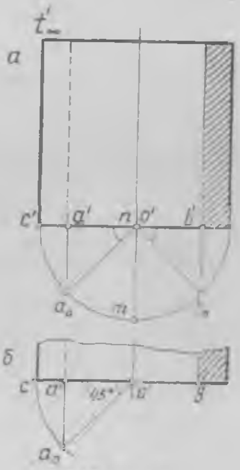
сояси остида бўлади ва фронтал проекцияда ёритилган чорак билан битта соя чорак кўринади (247- шакл, *г*).

Юқорида айтилганларнинг ҳаммаси ёруғлик нурларининг йўналиши кубнинг диагоналига параллел олингандагина кучга эгадир, чунки шундай бўлганда ёруғлик нурлари билан горизонтал текислик орасидаги бурчак 35°16′ ёки, яхлитлаганда 35° бўлади.

246- шаклда келтирилган доиравий конуснинг фақат фронтал проекциясидан фойдаланиб, соя ясовчиларини топиш усулидан тўғри доиравий цилиндр учун ҳам фойдаланиш мумкин. Бунинг учун цилиндрни учи чексиз узоқлашган конус деб фараз этиш керак. Шундай ўйлаганда 246- шаклда ўтказилган *mn* чизиқнинг *n* нуқтаси цилиндр учун *O* нуқтада келиб чиқади (248- шакл, *a*). Цилиндрнинг фронтал проекциясида $a'o'=o'b'$ бўлгани учун ясашни бирмунча соддалаштириш мумкин (248-

шакл, *б*). Цилиндрнинг *А* ва *В* нуқталаридан ўтган ясовчилари унинг соя ясовчиларидир.

Энди айланиш сиртининг ўз сояси контурини аниқроқ ясаш учун юқорида тавсия қилинган уринма конуслар ва цилиндрлар усули устида тўхталамиз. Бу усулдан фойдаланиб, ҳар қандай айланиш сиртининг ўз сояси контурини ясаш учун: 1) сиртнинг бир қанча параллеллари ўтказилади: 2) бу параллелларни конусларнинг асослари деб қабул қилиб, сиртга уринма конуслар чизилади (агар параллел экватор ёки бўйин чизиғи бўлса, уринма цилиндр чизилади) ва 3) уринма конусга ёки цилиндрга асосланиб, ўша параллелдаги соя нуқталар топилади (246, 247, 248- шакллар). Топилган соя нуқталар силлиқ эгри чизиқ билан уланса, берилган айланиш сиртининг ўз сояси контури ҳосил бўлади. Бу усулдан фойдаланилганда ҳамма ясашлар айланиш сиртининг фронтал проекциясида (фасадида) бажарилади.



248- шакл

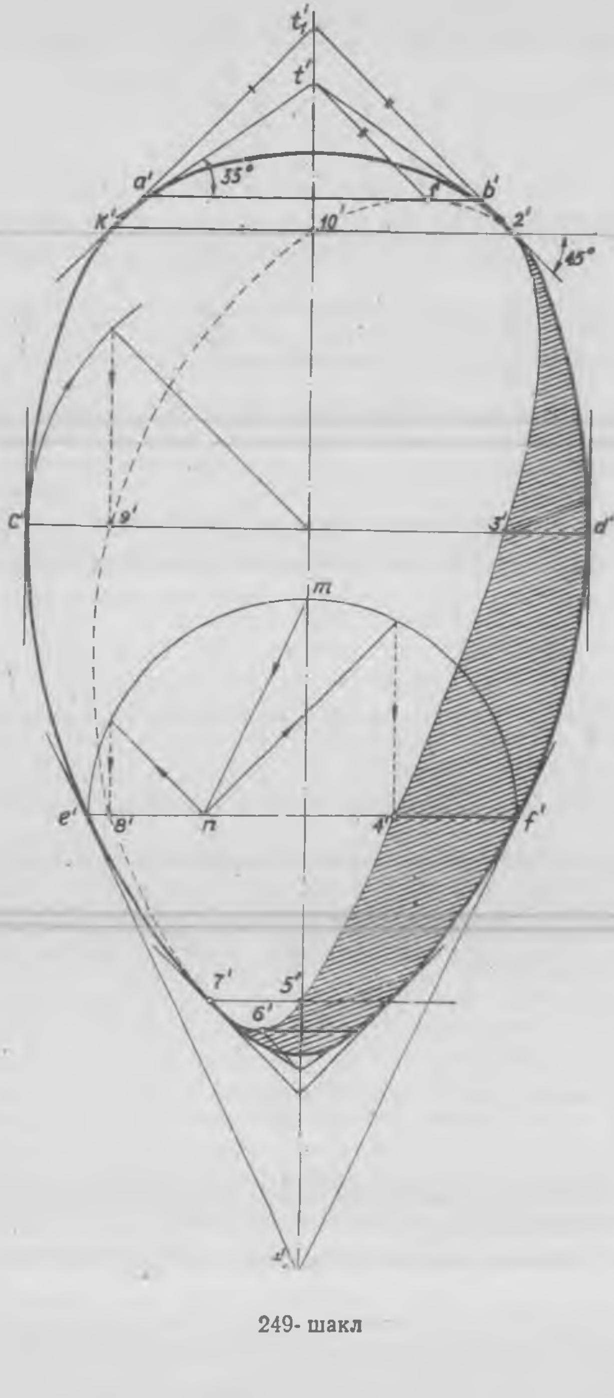
249- шаклдаги айланиш сиртининг ўз сояси контури уринма конуслар ва цилиндрлар усули билан ясалган.

Ясашни сиртнинг ўз сояси контурига оид характерли (энг юқориги ва энг пастки, фронтал проекциянинг очеркидаги, экватор ва бўйин чизиғидаги) нуқталарни аниқлашдан бошлаш тавсия қилинади.

249- шаклда энг юқори *1′* ва энг пастки *6′* соя нуқталар, ясовчилари ўзининг асосига 35° бурчак қия уринма конуслар ёрдамида аниқланади (247- шаклга қаранг). Бунинг учун сиртнинг очеркига горизонтал чизиқ билан 35° бурчак ташкил қилувчи уринма ўтказилади ва унинг уриниш нуқтаси *a′* ҳамда сиртнинг ўқи билан кесишган нуқтаси (конус учининг проекцияси) *t′* белгиланади. Уриниш нуқтаси *a′* орқали ёрдамчи конуснинг асоси — параллелнинг проекцияси *a′b′* ўтказилади. Ҳосил бўлган тенг ёнли учбурчак *a′t′b′* сиртга уринма бўлган ёрдамчи 35° ли конуснинг проекциясидир. *t′* нуқта орқали ўтказилган 45 ° ли чизиқ ёруғлик нурининг фронтал проекцияси *a′b′* билан кесишиб, изланган энг юқориги *1′* нуқтани беради. Энг пастки *6′* нуқтани аниқлаш учун худди шунга ўхшаш, лекин учи асосининг паст томонида жойлашган ёрдамчи 35° ли конусдан фойдаланилади.

Проекциянинг очеркида ётган соя нуқталар (*2′*, *7′*) ва сирт ўқининг проекциясидаги соя нуқталар (*5′*, *10′*) ясовчилари ўз асосига 45° бурчак қия уринма конуслар ёрдамида топилади.

45° бурчак сиртнинг очеркига уринма тўғри чизиқ ўтказилади. Бу тўғри чизиқнинг очеркка уринган нуқтаси изланган *2′*



249- шакл

нуқта бўлади. Сирт ўқининг проекцияси билан *2'* нуқтадан ўтган параллелнинг проекцияси кесишиб, *10'* нуқтани ҳосил қилади. Тенг ёнли учбурчак *k't' 2'* ёрдамчи 45° ли уринма конуснинг фронтал проекциясидир. *5'* ва *7'* нуқталар ҳам худди шундай 45° ли конус ёрдамида топилади, фақат бунда конуснинг учи пастга қараган бўлади.

Экваторнинг проекциясидаги соя нуқталар ((*3'*, *9'*) сиртга уринма қилиб ўтказилган цилиндр ёрдамида аниқланади (248- шаклга қаранг). Экваторнинг проекцияси (*c' d'*) ёрдамчи цилиндр асосининг проекцияси сифатида қабул қилинади.

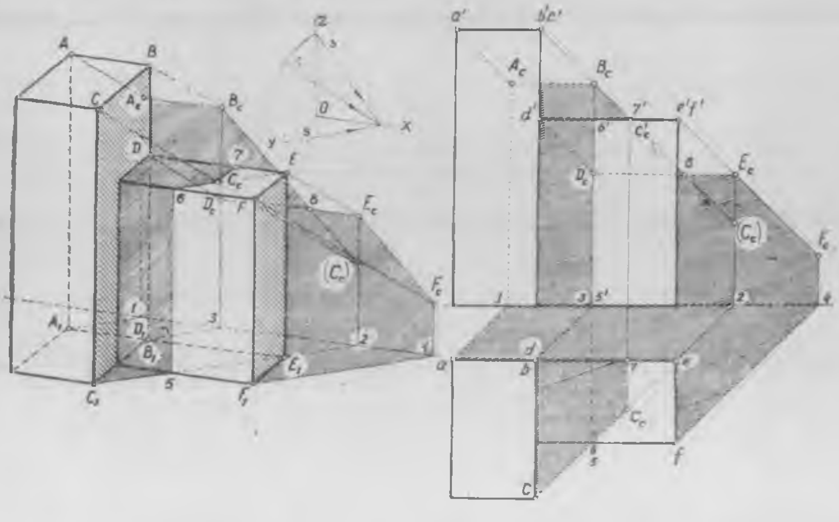
Айланиш сиртининг ўз сояси контурининг проекциясидаги тасодифий соя нуқталарни топиш учун ихтиёрий горизонтал чизиқ *e'f'* ўтказилади. Бу чизиқ ихтиёрий параллелнинг проекцияси бўлиб, у ёрдамчи уринма конус асосининг проекцияси сифатида қабул қилинади ва уринма конуснинг проекцияси *e'f'* t'_2 ясалади. Кейин, 246- шаклда келтирилган усулдан фойдаланиб, изланган тасодифий нуқталар (*4'*, *8'*) топилади .

Айланиш сиртининг очерки айлана ёки айлана ёйи бўлган ҳолларда горизонтал чизиқ билан 35° ва 45° бурчаклар ҳосил қилувчи тўғри чизиқларнинг уриниш нуқталарини нормаллар ёрдамида аниқлаш тавсия қилинади.

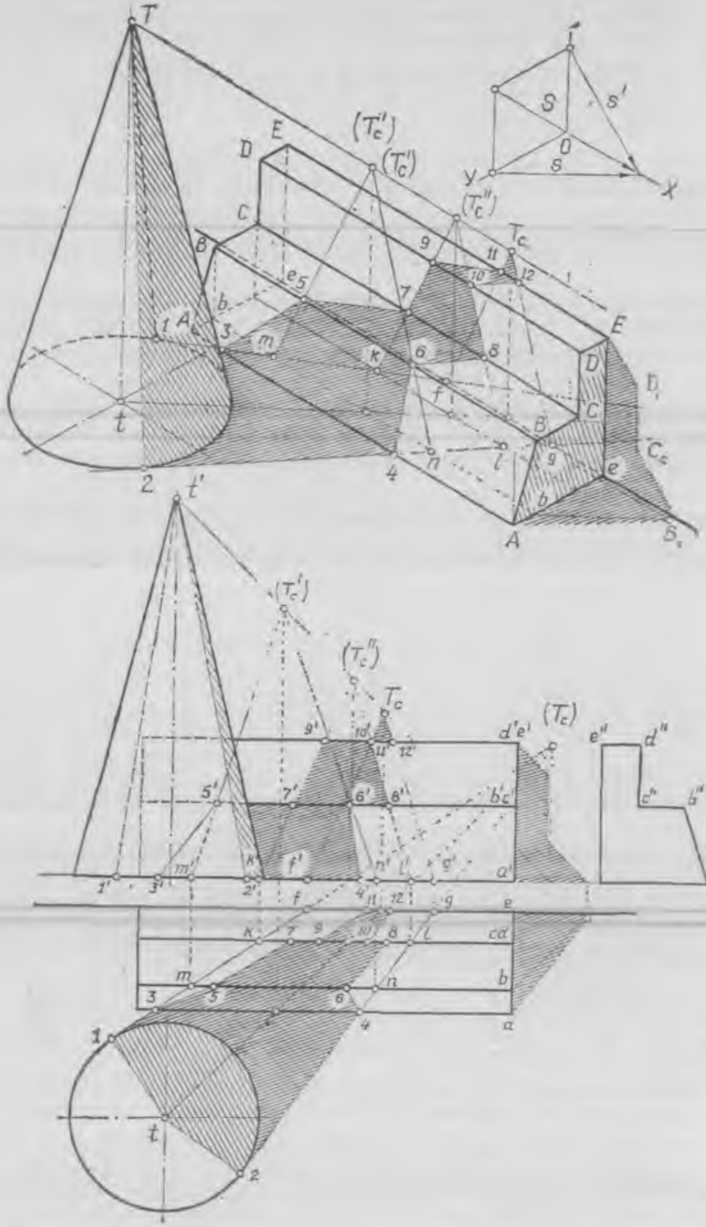
82- §. Сояларни ясашга мисоллар

1- мисол. 250- шаклдаги аксонометрик ва ортогонал проекцияларда иккита призмадан тушган сояларни ясаш кўрсатилган.

Ясаш тартиби:



250 шакл



251- шакл

1. Ҳар қайси призманинг ўз сояси контури аниқланади, $ABCC_1B_1A_1$ синиқ чизиқ катта призманинг ўз сояси контури, $DEFF_1E_1D_1$ синиқ чизиқ кичик призманинг ўз сояси контуридир.

Ортогонал проекцияларда A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 нуқталарнинг проекциялари белгиланмаган.

2. Ҳар қайси призмадан H ва V текисликларга тушган соянинг контури алоҳида (иккинчи призмани ҳисобга олмай) ясалади. Катта призманинг A_1A қиррасидан тушган соя синиқ чизиқ $A_1 1 A_c$ кўринишида, AB қиррасидан V га тушган соя ўзига параллел ва тенг ($A_cB_c = AB$),BC қиррасидан V га тушган соя ёруғлик нурининг фронтал проекциясига параллел [$B_c(C_c) \parallel s'$], CC_1 қиррасидан тушган соя эса синиқ чизиқ $C_1 2 (C_c)$ кўринишида бўлади. Агар катта призманинг ёнида кичик призма бўлмаса, ясалган $A_1 1 A_c B_c (C_c) 2 C_1$ синиқ чизиқ катта призмадан тушган соянинг контури бўлар эди.

Кичик призмадан проекция текисликларига тушган соянинг контури синиқ чизиқ $D_1 3 D_c E_c F_c 4 F_1$ кўринишида бўлади.

3. Катта призманинг ёнида кичик призма тургани учун C_1C қиррадан соянинг бир қисми кичик призманинг фасад ёғига, иккинчи қисми кичик призманинг устига тушади ($56\ C_c$ чизиқ). CB қиррадан соянинг бир қисми ҳам кичик призманинг устига тушади ва шу қиррага параллел бўлади ($C_c 7 \parallel CB$).

Призмалардан тушган соянинг контурини белгилаш учун улардан V текисликка тушган соялар контурларининг ўзаро кесишган умумий нуқтаси (*8*) топилади. Бу нуқтани кичик призманинг DE қиррасидаги *7* нуқтадан тушган соя деб қараш ҳам мумкин.

Призмалардан H ва V текисликларга тушган соянинг умумий контури $A_1 1 A_c B_c 8 E_c F_c 4 F_1$ чизиқ билан ифодаланади.

2-мисол. 251-шаклдаги аксонометрик ва ортогонал проекцияларда тўғри доиравий конусдан деворга тақаб қўйилган кўп ёқли призмага тушган сояни ясаш кўрсатилган.

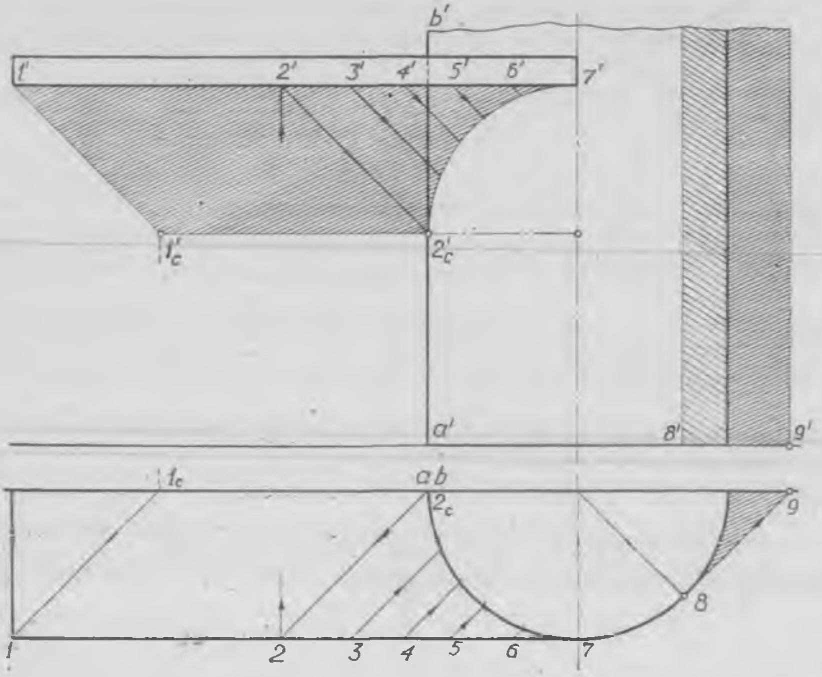
Ясаш тартиби:

1. Конуснинг учидан H текисликка тушган мавҳум соя (T_c) топилади: бу нуқта орқали конуснинг асосига уринмалар ўтказиб, *1*, *2* нуқталар ва призманинг AA қиррасидаги *3*, *4* нуқталар аниқланади.

2. Конуснинг учидан призманинг BB қирраси орқали ўтган вертикал текисликка тушган мавҳум соя (T_c) топилади ва уни m, n нуқталарга туташтириб, BB қиррадаги *5*, *6* нуқталар аниқланади. *3* ни *5* га, *4* ни *6* га туташтирсак, конусдан призманинг қия $ABBA$ ёғига тушган соянинг контури ҳосил бўлади.

3. Конуснинг учидан призманинг $CDDC$ ёки текислигига тушган мавҳум соя (T''_c) топилади ва уни k, l нуқталарга туташтириб, CC қиррадаги *7*, *8* нуқталар ва DD қиррадаги *9*, *10* нуқталар аниқланади. Кейин *5* ни *7* га, *6* ни *8* га туташтирсак, конусдан призманинг $BCCB$ ёғига тушган соянинг контури ҳосил бўлади.

4. Конуснинг учидан деворга (фронтал текисликка) тушган ҳақиқий соя T_c топилади ва уни f, g нуқталарга туташтириб, призманинг EE қиррасидаги *11*, *12* нуқталар аниқланади. $11\ T_c\ 12$ конус-



252- шакл

дан деворга тушган соянинг контури, *9*, *11*, *12*, *10* нуқталар билан чегараланган тўртбурчак эса конусдан призманинг *DEED* ёғига тушган соянинг контуридир.

Шаклда призмадан деворга ва полга тушган соя ҳам кўрсатилган.

3- мисол. 252- шаклдаги ортогонал проекцияларда балкондан деворга ва ярим цилиндр шаклидаги устунга тушган сояни ясаш кўрсатилган.

Ясаш тартиби:

1. Цилиндрнинг *AB* ясовчисига сояси тушадиган балкон қиррасидаги нуқта (*2*, *2'*) аниқланади.

2. Қирранинг *1 — 2* қисмидан деворга тушган соя (1_c — *2*, $1'$ $2'$) ясалади. Соянинг бу қисми кесманинг ўзига параллел ва тенг бўлади.

3. Қирранинг *2—7* қисмидан цилиндр сиртига тушган соя (2_c — — *7*, 2_c — *7*) фасадда радиуси цилиндр асосининг радиусига тенг, чорак айлана кўринишида тасвирланади.

4- мисол. 253- шакл *а*, *б* лардаги аксонометрик ва ортогонал проекцияларда дарвозанинг сояларини ясаш кўрсатилмаган.

Ясаш тартиби:

1. Дарвозанинг таркибига кирган ҳар қайси геометрик шаклнинг ўз сояси контури аниқланади.

Карнизнинг аксонометрияда кўриниб турган ўнг ёғи, ости ва орқа томони ўз соясида бўлади. Демак, *ABCDEFA* чизиқ карнизнинг ўз сояси контуридир.

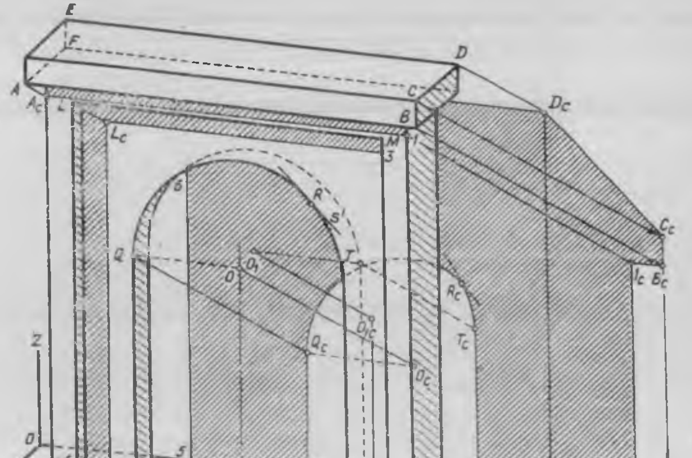
Дарвоза деворининг ва арканинг аксонометрияда кўриниб турган ён ёқлари, пастки горизонтал ёғи ва орқа томондаги фронтал ёғи ўз соясида бўлади. Шунга кўра, синиқ чизиқ *KLM*, тўғри чизиқ ва айлана ёйидан иборат *PQR* чизиқ ҳамда *G*, *H* ва *N* нуқталардан чиққан вертикал қирралар дарвоза деворларининг ўз соялари контурларидир.

2. Ўз сояларининг контурларидан тушган соялар ясалади.

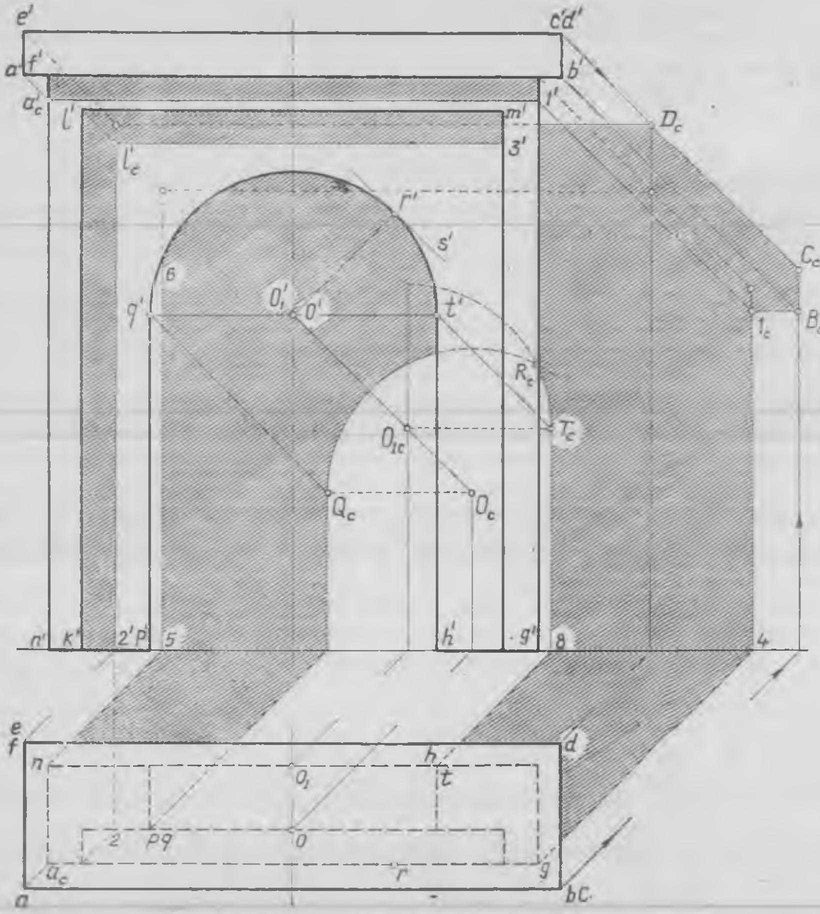
а) Карнизнинг *B*, *C*, *D* нуқталаридан фронтал текисликка тушган соялар (B_c, C_c, D_c) топилади. B_c ва D_c нуқталар орқали *AB* қиррага параллел чизиқлар чизилса, карниздан *V* текисликка тушган соя контурнинг кўринган қисми ($1_c B_c C_c D_c$ . . .) ҳосил бўлади. Карнизнинг *AB* қиррасидан дарвозанинг фасад деворига тушган соя қирранинг ўзига параллел йўналади ($A_c1 \parallel AB$). A_c нуқта *A* нуқтадан фасад деворга тушган соядир.

б) *KLM* чизиқдан иккинчи фасад деворга тушган соя ясалади. Бунинг учун *L* нуқтадан тушган соя L_c топилса кифоя. $K2L_c$ синиқ чизиқ вертикал *KL* қиррадан тушган соя, L_c^13 чизиқ горизонтал *LM* қиррадан тушган соя бўлади ($L_c3 \parallel LM$).

в) *G*, *N* нуқталардан чиққан вертикал қирралардан тушган соялар ($G41_c$, $N56$) ясалади. 1_c нуқта карниздан ва дарвоза ёқларидан тушган соялар контурларининг кесишган нуқтаси. Дарвоза ёқлари-



253- шакл, *а*.



253- шакл, *б*

дан *V* текисликка тушган соя контурининг юқори томондаги кўринмаган қисми кўрсатилмаган.

г) Дарвозадан тушган соянинг очеркига ярим цилиндр арканинг деворларидан ва гумбаздан тушган соянинг контури чизилади. Бун сояни аниқлаш учун олдин вертикал *PQ* ва *HT* қирралардан тушга соялар ($P7Q_c$, $H8T_c$) ясалади. Кейин арка ёйларидан *V* текисликка тушган соялар O_c ва O_{1c} марказлардан чизилади. Ёйларнинг соялари ўзаро кесишиб, R_c нуқтани ҳосил қилади. Ҳосил бўлган Q_cR_c контур маркази *O* нуқтада бўлган ёйдан тушган соя, R_cT_c эса маркази O_1 нуқтада бўлган ёйдан тушган соядир. Шундай қилиб, келиб чиққан $P7Q_cR_cT_c8H$ чизиқ дарвоза ўрни орқали ўтиб, *H* ва *V* текисликларга тушган ёруғлик нурларининг контуридир.

5- мисол. 254- шакл, *а*, *б* ларда геометрик жисмлар группа-

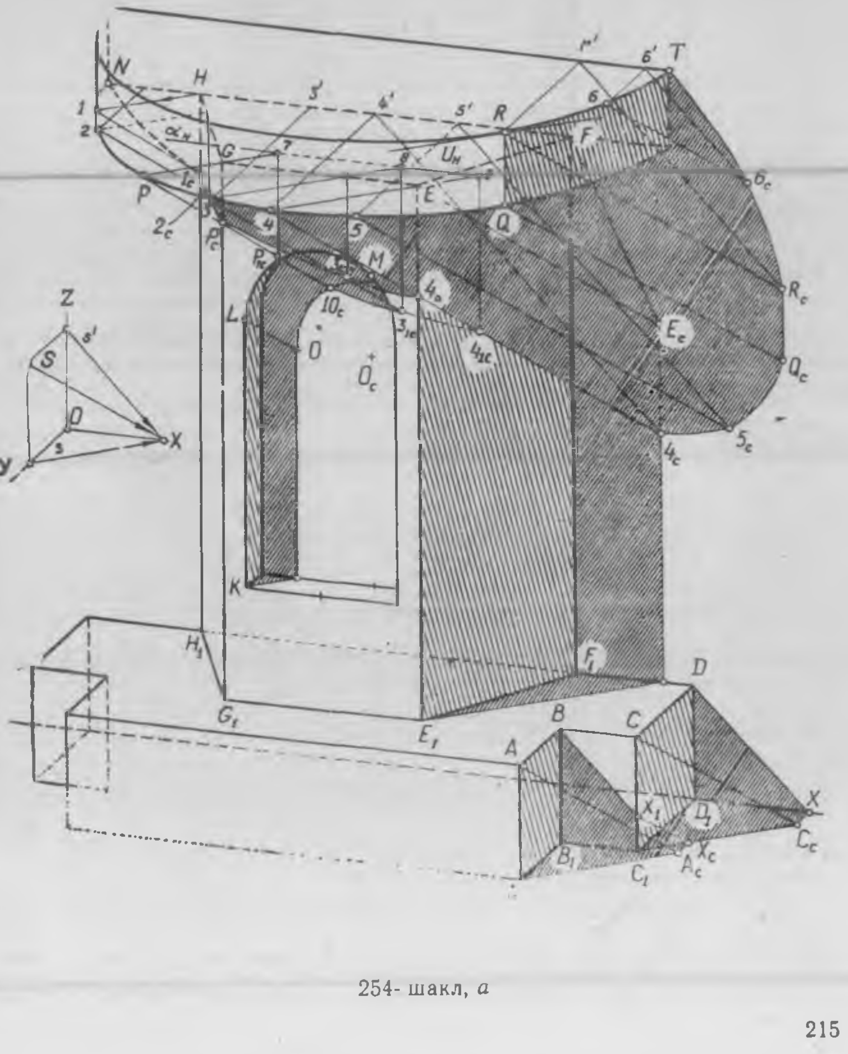
сининг сояларини ясаш кўрсатилган. Жисмларнинг орқа ёқлари вертикал деворга тақаб қўйилган.

Я с а ш т а р т и б и:

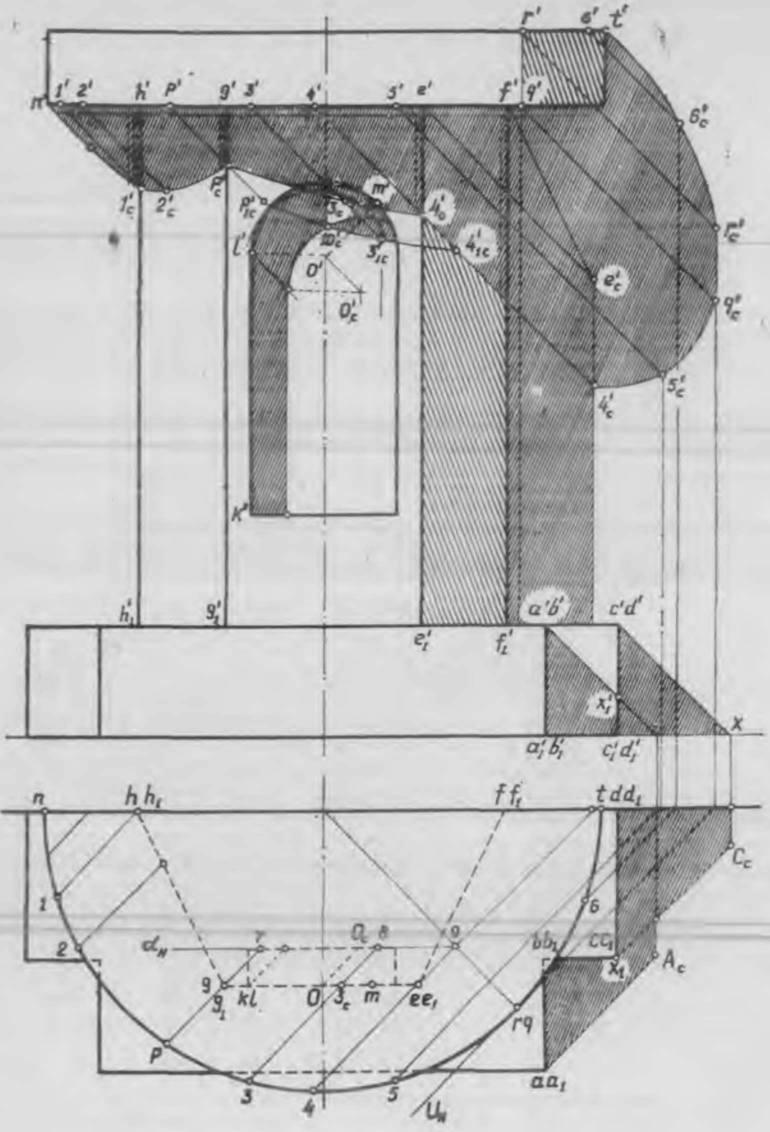
1. Ҳар қайси жисмнинг ўз сояси контури аниқланади.

Берилган кўпёқларнинг ўз соялари чизма бўйича аниқланади. Аксонометриядан яққол кўриниб турибдики, пастки кўпёқнинг ўнг томондаги кўндаланг ёқлари ўз соясида бўлади (A_1ABB_1, C_1CDD_1 ёқлар). Бу соялар ортогонал проекцияларда кўринмайди, аммо тушган сояларни ясаш учун уларни тасаввур қила олиш керак.

Ўртада жойлашган токчали призманинг E_1EFF_1 ёғи ўз соясида бўлади. Токча ўз соясининг контури (KLM) 240- шаклда



254- шакл, *a*



254- шакл, *б*

кўрсатилган усул билан аниқланади. Токчанинг ўз сояси ҳам ортогонал проекцияларда кўринмайди.

Ярим цилиндрнинг ўз сояси контурини аниқлаш учун соя ясовчи QR топилади. Ясовчи QR уринма нур текислиги ёрдамида топилади. Бу уринма нур текислигининг горизонтал изи U_H ярим айланага R нуқтада уринади (аксонометрияда уринма нур текислигининг

ярим цилиндр асоси—ярим доирадаги изидан фойдаланилган). Цилиндрнинг RQ ясовчисида ўнг томондаги сирти ва пастки асоси ўз соясида қолади. Демак, $NPQRT$ чизиқ цилиндрнинг ўз сояси контуридир.

2. Ҳар қайси геометрик жисмнинг топилган ўз соясининг контурларидан тушган соялар ясалади.

Кўпёқлардан тушган сояларнинг контурлари юқорида кўриб ўтилган мисоллардаги сингари ясалади. Бу ерда A_c, X_1, C_c, E_c характерли нуқталардир. Тушган соялар контурларидаги BX_1 ва DX чизиқлар ёруғлик нурининг фронтал проекцияси s' га параллел йўналган.

KLM чизиқдан токчанинг ички сиртига тушган соя 240- шаклда келтирилган усул билан ясалади.

Цилиндр ўз соясининг контурига қарашли $45QR6T$ чизиқнинг сояси (4_c 5_c Q_c R_c 6_c T) фронтал текисликка тушади. Аксонометрияда 4_c, 5_c, Q_c, . . . нуқталар ёруғлик нурларининг фронтал девор текислигидаги проекциялари ёрдамида топилган ($4'4_c \parallel 5'5_c \parallel \ldots 6'6_c \parallel s'$). 4_c нуқта призмадан тушган соянинг контури билан цилиндрдан тушган соя контурининг кесишган нуқтаси. 4 нуқтани аниқлаш учун E_1E қирранинг E учидан ёруғлик нурининг горизонтал проекциясига параллел тескари нур ўтказилади ($E4 \parallel 4e \parallel s$).

$12P$ ёйнинг сояси призманинг H_1HGG_1 ёғига тушади. 1_c нуқта H_1H қиррада, P_c нуқта G_1G қиррада, 2_c нуқта эса оралиқда олинган. 1 ва P нуқталар ҳам сояси E_1E қиррага тушадиган 4 нуқта сингари аниқланади ($1H_s \parallel PG \parallel s$).

$N1$ ёйнинг сояси фронтал девор текислигига тушади ва ортогонал проекциялардаги фасадда $n'1'e$ кўринишида тасвирланади. Аксонометрияда бу соя кўринмайди, шунинг учун у чизилмаган.

$P34$ ёйнинг қисман токчанинг ички фронтал деворига, қисман призманинг G_1GEE_1 ёғига тушади. Олдин $P34$ ёйдан токча ички фронтал деворининг текислигига тушган соя (P_{1c} 3_{1c} 4_{1c}) ясалади. Бунинг учун соя тушадиган текисликнинг горизонтал изи a_H билан P, 3, 4 нуқталардан ўтган ёруғлик нурлари горизонтал проекцияларининг кесишган 7, 8, 9 нуқталаридан фойдаланилган (аксонометрияда горизонтал проекциялар текислиги сифатида ярим цилиндрнинг пастки асоси қабул қилинган) 10_c нуқта $P34$ ёйдан α текисликка тушган соянинг KLM чизиқдан шу текисликка тушган соя билан кесишган нуқтасидир.

Пировардида $P34$ ёйдан призманинг G_1GEE_1 ёғига тушган соя (P_c 3_c 4_0) ясалади.

XIV боб. ПЕРСПЕКТИВА

83- §. Умумий маълумот

Биринчидан, нарсаларнинг марказий проекциялар асосида тасвирларини ясаш ҳақидаги фан перспектива деб аталса, иккинчидан, шу проекциялар ёрдамида олинган тасвирнинг ўзи ҳам *перспектива* дейилади.

Перспектива чизма геометриянинг асосий бўлимларидан биридир.

Нарсалар тасвир қилинаётганда қандай омиллар ҳисобга олинаётганлигига қараб, перспективанинг тубандаги бўлимлари бўлади.

1. *Кузатиш перспективаси.* Нарсанинг шакли қараб турувчига қандай кўринса, шундай тасвирланади.

2. *Ҳавойи перспектива.* Нарсанинг шакли билан бир қаторда унинг ранги ва ёритилиши ҳам тасвирланади.

3. *Аналитик перспектива.* Тасвирдаги нуқталарнинг ўрни ҳисоблаш йўли билан аниқланади.

4. *Геометрик перспектива.* Тасвирнинг кўриниши геометрик ясашлар билан аниқланади. Тасвири ясаладиган сиртнинг турига қараб, геометрик перспектива, ўз навбатида, тубандагиларга бўлинади:

а) чизиқли перспектива — тасвир текисликда ясалади ва кўриш нуқтаси бир нуқтада олинади;

б) панорама перспектива — тасвир цилиндрнинг ички сиртида ясалади:

в) гумбаз перспектива — тасвир шарнинг ички сиртида ясалади;

г) театрал перспектива — тасвир бир неча сиртларда ясалади;

д) диорали перспектива — чизиқли перспектива билан (орқа томонда) ўз катталигидаги нарсаларнинг (олд томонда) бирга олиниши;

е) архитекторлар усулидаги перспектива — планлаштиришда энг яхши натижаларга эришиш учун ясалган биноларнинг, кўчаларнинг, майдонларнинг, боғларнинг ва ҳоказоларнинг тасвирлари;

ж) стереоскопик перспектива — тасвир текисликда чизиқли перспективанинг қоидалари бўйича икки кўринишда ясалади:

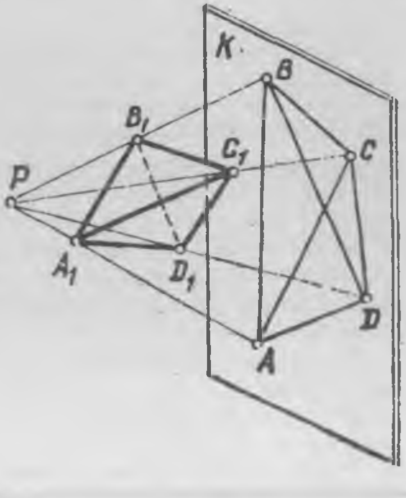
тасвирдаги кўринишлардан ҳар қайсиси қараб турувчининг иккала кўзидан ҳар бирига нарса қандай кўринган бўлса, шундай кўринишда чизилади.

5. Киноперспектива — ҳаракатланувчи объектларнинг тасвирларини ўрганувчи илм.

Перспектив тасвирларни чизиш назарияси уйғониш даврида (XV—XVI асрларда) вужудга кела бошлади. Бу соҳада итальян олими Леон Баттиста Альберти (1404—1472), итальян рассоми, олими ва инженери Леонардо да Винчи (1452—1519), немис рассоми ва ўймакори Альбрехт Дюрер (1471—1528), итальян олими Гвидо Убальди (1545—1607) ва француз меъмори ҳамда математиги Жирар Дезарг (1593—1662) асарлари айниқса диққатга сазовордир. Альберти ўзининг «Тасвирий санъат ҳақида» ва «Меъморлик ҳақида» деган трактатларида амалда катта аҳамиятга эга бўлган перспективани тўр ёрдамида ясаш усулини берди. Леонардо да Винчи асарларида перспектив тасвирларнинг, хусусан, «кузатиш» перспективанинг татбиқ этилишига кўп мисоллар учрайди. Альбрехт Дюрернинг «Қўлланма» деган китобида расм солиш асосларининг мукаммал ишланмалари, кўпгина текис ва баъзи фазовий эгри чизиқларни ясашнинг график усуллари баён қилиниши билан бирга, нарсанинг перспективасини ва соясини унинг берилган горизонтал ва фронтал проекциялари бўйича ясашнинг оригинал усули келтирилган. Гвидо Убальди назарий перспективага асос солувчи деб ҳисобланиши мумкин. Убальдининг «Перспективадан олтита китоб» деган асарида перспективанинг деярли ҳамма асосий масалалари ечиб берилади. Дезарг ўзининг 1636 йилда нашр қилинган «Нарсаларни перспективада тасвирлашнинг умумий методи» деган асарида перспективани ясаш учун биринчи марта координаталар методини татбиқ этади.

Перспектив тасвирларни ясаш марказий проекциялар методига асосланган.

Фазода кўзғалмас P нуқта, K текислик ва A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталар берилган деб фараз қилайлик (255- шакл). P нуқтани A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталар билан туташтириб, ҳосил бўлган чизиқларни давом эттирамиз. Бу чизиқлар K текисликни A, B, C, D нуқталарда кесиб ўтади. P нуқта проекциялар маркази, K текислик проекциялар текислиги, PA_1, PB_1, PC_1, PD_1 чизиқлар проекцияловчи нурлар, A, B, C, D нуқталар эса проекциялар дейилади.



255- шакл

Фазонинг исталган жойида олинган тўртта нуқта, умуман, фазовий шаклни (пирамидани) ифодалайди; шунинг учун текис $ABCD$ шакл фазовий $A_1B_1C_1D_1$ шаклнинг марказий проекциясидир.

255-шаклни кўздан кечириб, марказий проекцияларнинг тубандаги асосий хоссаларини пайқаб олиш мумкин:

1. Нуқтанинг проекцияси нуқта бўлади. Фақат проекцияланувчи нуқта марказга тўғри келиб қолган ҳолдагина унинг проекцияси номаълум бўлади.

2. Агар нуқта бирор чизиқда ётган бўлса, унинг проекцияси ўша чизиқнинг проекциясида бўлади.

3. Проекциялар марказидан ўтмаган тўғри чизиқнинг проекцияси тўғри чизиқ бўлади. Марказдан ўтган тўғри чизиқ *проекцияловчи тўғри чизиқ* дейилади. Проекцияловчи чизиқнинг проекцияси нуқта бўлади.

4. Проекциялар марказидан ўтмаган текисликдаги нуқталарнинг ва чизиқларнинг проекциялари проекциялар текислигининг ҳаммасини қоплайди. Проекциялар марказидан ўтган текислик проекцияловчи текислик дейилади. Проекцияловчи текисликдаги нуқталарнинг ва чизиқларнинг проекциялари шу текислик билан проекциялар текислигининг кесишув чизиғига (текисликнинг изига) тушади.

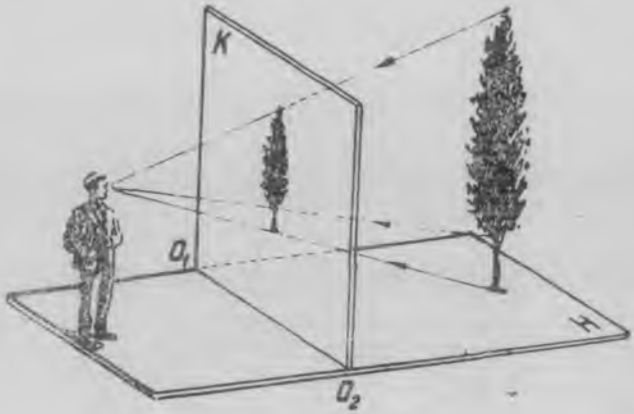
Аммо биз марказий проекциялаш операциясини одатдаги евклид фазосида бажарадиган бўлсак, юқоридаги хоссалар бузилади. Масалан, проекцияловчи PA_1 нур (340-шакл) проекциялар текислигига параллел бўлса, A_1 нуқтанинг проекцияси A бўлмайди, чунки одатдаги евклид фазосида бирор текисликка параллел бўлган тўғри чизиқ у текислик билан кесишмайди, демак, 1-хосса бузилади. Худди шунингдек, проекциялар маркази P нуқта ва A_1B_2 тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик проекциялар текислигига параллел бўлса, A_1B_1 тўғри чизиқнинг K текисликда проекцияси бўлмайди, чунки параллел текисликлар ўзаро кесишмайди.

Бу камчиликларни йўқотиш учун евклид фазоси кенгайтирилади, яъни у чексиз узоқлашган (нохос) элементлар билан тўлдирилади: тўғри чизиқ битта чексиз узоқлашган нуқта билан, текислик битта чексиз узоқлашган тўғри чизиқ билан, фазо битта чексиз узоқлашган текислик билан тўлдирилади. Шундай қилинганда параллел тўғри чизиқларнинг чексиз узоқлашган нуқтада ва параллел — текисликларни чексиз узоқлашган тўғри чизиқда кесишади деб ҳисоблаш мумкин.

Марказий проекцияларга мисол қилиб, нарсаларнинг фотосуратларини ва чироқдан бирорта сиртга (масалан, полга ёки деворга) тушган сояларини кўрсатиш мумкин.

Марказий проекциялаш усули билан ясалган тасвир жуда яққол бўлади.

Агар кузатувчи P нуқтадан ойна сингари тиниқ K текислик орқали H текисликда турган бирорта нарсага (масалан, дарахтга) қараса ва нарсанинг унга кўринган контурини K текисликда чизиб чиқса, шу нарсанинг тасвирини ҳосил қилади



256- шакл

(256- шакл). Бу тасвир *нарсанинг перспектив тасвири* ёки, қисқача, перспективаси дейилади. Кузатувчига бу тасвир худди нарсанинг ўзини кўргандагидек таассурот беради. Бу ҳол перспектив тасвирларнинг асосий сифатидир.

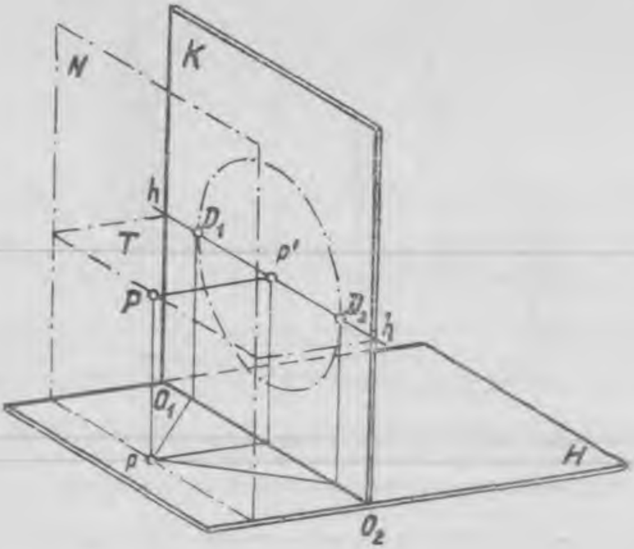
Перспективанинг бундай яққоллиги киши кўриш аппаратининг тузилиши билан боғлиқдир. Кишининг кўриш аппаратини, тахминан, марказий проекциялаш принципи асосида ишлайди, дейиш мумкин, чунки кўз корачиғининг оптик марказини проекциялар маркази деб, кўзнинг ёруғлик таассуротини қабул қилувчи орқа қисмини проекциялар текислиги деб қабул қилса бўлади. Демак, нарсанинг характерли нуқталаридан кўз қорачиғининг марказига борувчи кўриш нурлари кўзнинг орқа пардасида тасвир ҳосил қилади (257- шакл).

257- шакл

84- §. Асосий терминлар

Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш керакки, биз бундан кейин фақат чизиқли перспективага оид масалалар устидагина тўхталамиз. *Чизиқли перспективанинг вазифаси нарсаларнинг текисликдаги перспектив тасвирини ясаш йўлларини ўрганишдан иборат.* Шу муносабат билан биз бу параграфда чизиқли перспективанинг проекциялаш аппарати билан танишиб чиқишимиз лозим (258- шакл).

Шаклдаги горизонтал *H* текислик нарсалар текислиги ёки ер дейилади, чунки бу тексликка тасвирланаётган нарсалар қў-



258- шакл

йилади. Нарсалар текислигига перпендикуляр бўлган вертикал текислик K проекциялар текислиги бўлиб, у *картина текислиги* ёки *картина* дейилади[1]. Картина билан нарсалар текислигининг кесишган чизиғи O_1O_2 *картинанинг асоси* дейилади. P нуқта проекциялар маркази ёки *кўриш нуқтаси* деб аталади. Кўриш нуқтасининг горизонтал проекцияси, яъни P нуқтадан H текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси p нуқта *туриш нуқтаси* дейилади. Pp перпендикулярнинг узунлиги кўриш нуқтасининг баландлиги бўлиб, у одатда ўртача одамнинг бўйига тенг (1,7 м) қилиб олинади. Кўриш нуқтасининг картинадаги тўғри бурчакли проекцияси, яъни P нуқтадан картинага туширилган перпендикулярнинг асоси p' нуқта *картинанинг бош нуқтаси* дейилади. Кўриш нуқтасидан картинагача бўлган масофани кўрсатувчи Pp' кесма *бош масофа* ёки *бош нур* деб аталади. Кўриш нуқтасидан ўтган горизонт T текислик билан картинанинг кесишган чизиғи *hh горизонт чизиғи* дейилади. Горизонт чизиғи картинанинг асосига параллел бўлади ва бош нуқта p' дан ўтади. Кўриш нуқтасидан ўтган ва картинага параллел бўлган вертикал N текислик *нейтрал текислик* деб аталади.

Картина ва нейтрал текислик орасидаги фазо *оралиқ фазо* дейилади. Картинанинг орқа томонидаги нарсалар жойлаштириладиган фазо *нарсалар фазоси* дейилади. Кўрсатувчининг

[1] Картина нарсалар текислигига қия бўлиши ҳам мумкин. Қия текисликда перспективани ясаш усуллари перспективанинг махсус бўлимида ўрганилади.

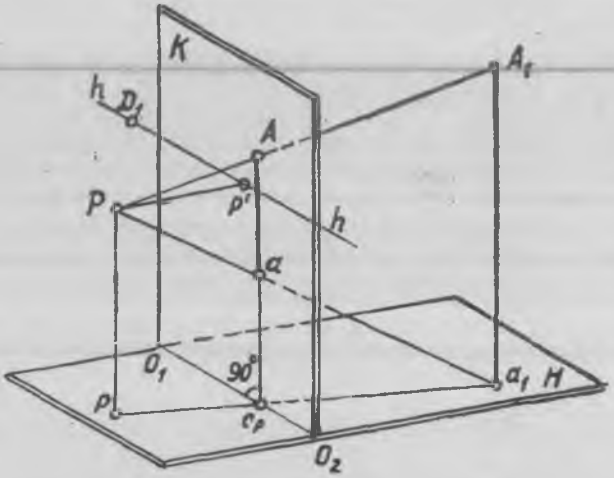
орқасидаги нейтрал текисликнинг орқа томонидаги фазо *мавҳум фазо* деб аталади.

Картинадаги бош нуқта p' дан радиуси бош масофа $Pp' = d$ га тенг қилиб, картинада чизилган айлана *дистанцион айлана* дейилади. Бу айлана билан горизонт чизиғининг кесишган D_1 ва D_2 нуқталари *дистанцион нуқталар* деб аталади.

Картинанинг бош нуқтаси p' ва дистанцион нуқталар D_1, D_2 перспективани ясашда ва турли масалаларни ечишда катта аҳамиятга эга.

85- §. Нуқтанинг перспективаси

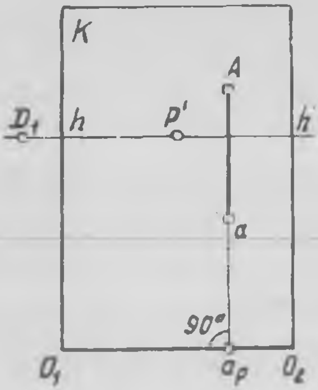
Нарсалар фазосида бирорта A_1 нуқта ва унинг нарсалар текислигидаги тўғри бурчали (горизонтал) проекцияси a_1 берилган деб фараз қилайлик (259- шакл). Перспективада горизонтал a_1 проекция A_1 нуқтанинг асоси дейилади.



259- шакл

Нуқтанинг ва нуқта асосининг перспективасини ясаш учун A_1 ва a_1 нуқталарни кўриш нуқтаси P билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган проекцияловчи нурлар картинани A ва a нуқталарда кесиб ўтади. A нуқта нуқтанинг перспективаси, a нуқта эса нуқта асосининг перспективаси дейилади. Кўриниб турибдики, a нуқта горизонт чизиғидан пастда. aA тўғри чизиқ эса картинанинг асосига ва, демак горизонт чизиғига ҳам перпендикуляр бўлади, чунки $PA_1\,a_1p$ вертикал текислик картина текислиги K билан вертикал тўғри чизиқ бўйича кесишади ($a_pA \perp O_1O_2$).260- шаклда картина кузатувчига айлантирилган ҳолда берилган.

Энди, аксинча, картинада нуқтанинг перспективаси A ва нуқта



260- шакл

асосининг перспективаси a, картинанинг асоси O_1O_2, горизонт чизиғи hh, бош нуқта p' ва дистанцион нуқталардан бири (D_1 ёки D_2) берилган, A_1 нуқтанинг фазодаги ўрнини аниқлаш зарур, деб фараз қилайлик (345- шакл).

Бунинг учун: 1) картинани O_1O_2 асоси билан горизонтал текисликка вертикал вазиятда ўрнатилади: 2) картинага унинг p' нуқтасидан ўтказилган перпендикуляр бўйича бош масофага тенг $p'D_1$ кесмани қўйиб, кўриш нуқтаси P топилади; 3) P нуқтани a нуқта билан туташтириб, Pa тўғри чизиқ горизонтал текислик билан a_1 нуқтада кесишгунча давом эттирилади (259- шакл); 4) P нуқтани A нуқта билан туташтириб, ҳосил бўлган PA чизиқ a_1 нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ билан кесишгунча давом эттирилади.

Келиб чиққан A_1 нуқта (картинада асоси a ва ўзи A нуқта кўринишида тасвирланган) фазонинг ёлғиз бир нуқтаси бўлади.

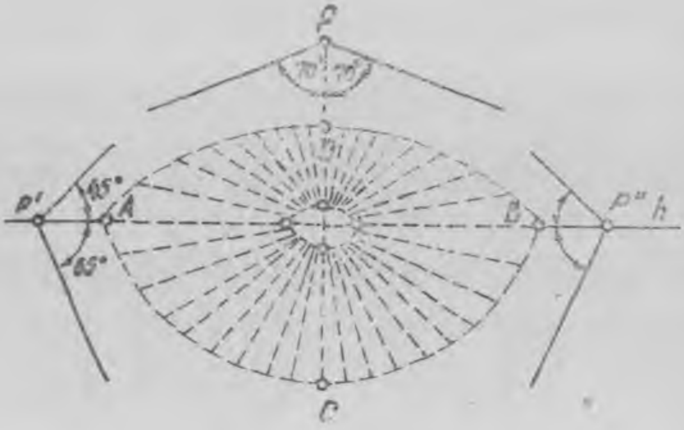
Шундай қилиб, биринчидан, нуқтанинг перспективаси ва нуқта асосининг перспективаси картинада ҳамма вақт бир вертикал чизиқда ётади, иккинчидан, нуқтанинг перспективаси ва шу нуқта асосининг перспективаси, агар картинанинг асосий элементлари (асоси, бош нуқта ва дистанцион нуқталардан бири) берилган бўлса, нуқтанинг фазодаги ўрнини аниқлаш имконини туғдиради.

86- §. Перспектива ясашда кўриш нуқтасини танлаш

Перспектив тасвир ясаш учун кўриш нуқтасини (проекциялар марказини) картина текислигидан умуман исталган масофада олиш мумкин, лекин ясалган перспектив тасвирни нарсанинг ўзини биз ўша кўриш нуқтасидан қараганимизда кўринишига ўхшаш таассуротли бўлиши учун киши кўзининг кўриш имкониятини ҳисобга олиш лозим, акс ҳолда ясалган тасвир ҳақиқатдан олис бўлиши ва ундай тасвирга қараганда киши нарсанинг ўзини кўргандагидек таассурот олмаслиги мумкин.

Кўз фазонинг маълум бир қисмини — кўриш майдонига тўғри келган қисминигина кўра олади: демак, кўриладиган нарса кўздан маълум масофада (катта нарсалар кўздан олисроқ, кичик нарсалар кўзга яқинроқ) бўлиши керак.

Олдинга тўппа-тўғри қараб турган киши горизонтдан юқори томонда паст томондагига қараганда камроқ фазони кўради. Тажрибадан шу нарса аниқланганки, кўриш нурлари билан горизонт чизиғи орасидаги бурчак юқорига тахминан 45° ва пастга 65° дир. Ўнг ва чап томонлардаги фазоларни ўз ичига



261- шакл

олган кўриш нурлари орасидаги бурчак тахминан 140° га тенг. Агар бир-бирига перпендикуляр икки ўқдаги *A, B, C, D* нуқталарни шартли равишда эгри чизиқ воситасида туташтирсак, киши кўриш майдонининг тахминий шакли келиб чиқади (261-шакл).

Биз кўриш майдонининг марказидаги кичик бир қисмидагина жойлашган нарсаларни аниқ кўра оламиз.

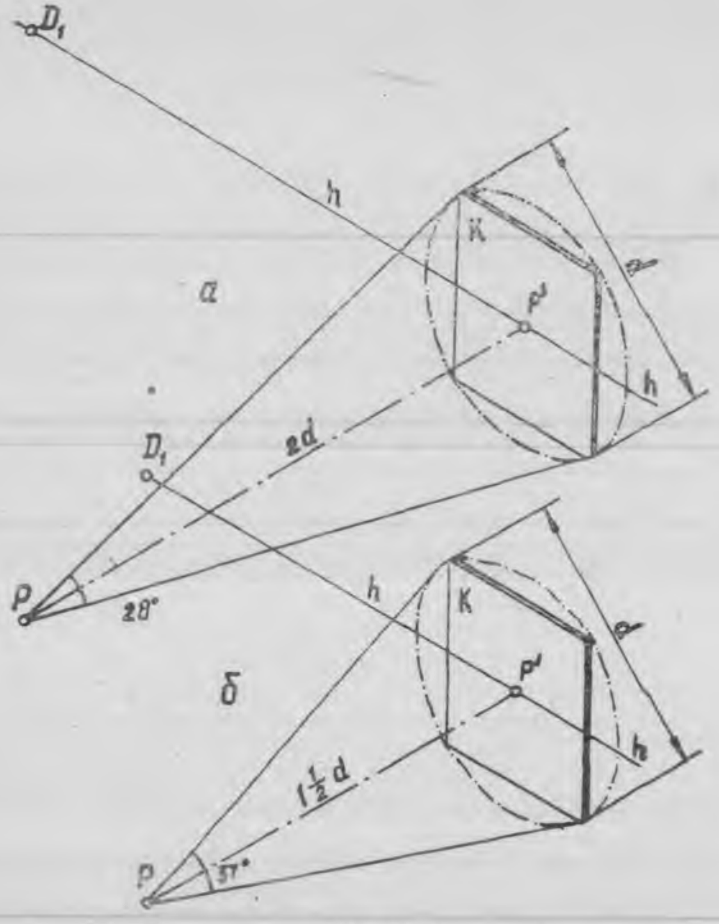
Нарсалардан кўзга келган нурлар кўриш нурлари дейилади. Кўриш нурлари шартли конус ясайди деб фараз қилиш мумкин. Ҳақиқатда бу конус тўғри конус бўлмай, унинг асоси 261-шаклда келтирилган эллипсга тахминан ўхшаган нотўғри шаклдир. Лекин соддалаштириш мақсадида уни доиравий конус деб қабул қиламиз.

Кўриш нурлари орасидаги энг катта бурчак кўриш бурчаги дейилади. Кўриш бурчаги нарса билан кўз орасидаги масофага қараб ўзгаради. Нарсаларни аниқ кўриш учун кўриш бурчаги турли одамлар учун ҳар хил бўлиб, у 18° дан 53° гача бўлиши мумкин.

Энг яхши кўриш бурчаги 28°; бундай кўриш бурчаги учун кўриш нуқтасидан картинагача бўлган масофа (конуснинг баландлиги) кўриш доирасининг (конус асосининг) икки диаметрига тенг бўлади (262-шакл, *а*). Баъзи ҳолларда кўриш бурчагини 37° гача олиш мумкин; бундай бурчак учун кўриш нуқтасидан картинагача бўлган масофа кўриш доирасининг $1\frac{1}{2}$ диаметрига тенг бўлади (262-шакл, *б*).

Картинанинг шакли ҳар хил, масалан, квадрат, тўртбурчак, доира, эллипс бўлиши мумкин; фақат картина кўриш доирасидан чиқмаса бас.

Картинанинг эни тасвири чизилаётган нарсанинг энига қараб, баландлиги эса нарсанинг баландлигига қараб аниқланади.

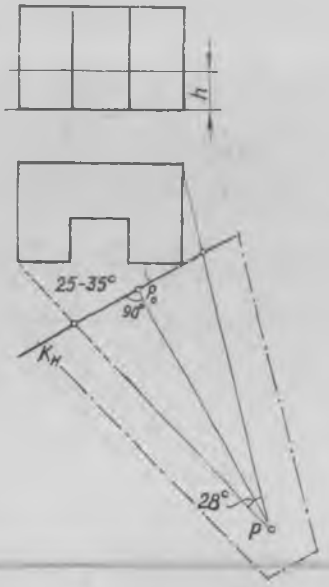


262- шакл

Кўриш нуқтасини шундай жойда олиш керакки, нарсанинг бизни кўпроқ қизиқтирадиган қисмлари кўринадиган бўлсин. Агар нарса, нозик ишланган, бир томондан қараганда иккинчи томони кўринадиган, масалан, стол, стул ва шунга ўхшашлар бўлса, кўриш нуқтасини диагонал бўйича жойламаслик керак, чунки кўриш нуқтаси диагоналда олинса, масалан, стол учун унинг олди оёғи диагоналдаги орқа оёғини бекитади ва стол тўрт оёқлига эмас, уч оёқлига ўхшаб қолади.

Янги биноларни лойиҳалашда бинонинг перспективаси унинг ортогонал чизмаси (плани ва фасади) бўйича ясалади. Бундай ҳолларда картина текислигининг вазиятини ва кўриш нуқтасини тубандагича танлаш мумкин (263- шакл).

1. Планда кўриш нуқтасининг асоси (горизонтал проекцияси) *р* нуқта шундай жойда олинадики, ундан чиққан ва бино



263- шакл

264- шакл

планининг контурига уринма бўлган четки нурлар орасидаги бурчак 28° бўлади. Бунинг учун картон қоғоздан кесиб олинган ва тенг ёнлари орасидаги бурчаги 28° бўлган андазадан фойдаланиш мумкин (264- шакл).

2. Олинган *p* нуқта орқали 28° ли кўриш бурчагининг биссектрисаси ўтказилади. Биссектриса бош нурнинг горизонтал проекцияси бўлади.

3. Планда картина текислигининг нарсалар текислигидаги (горизонтал) изи K_H чизилган биссектрисага перпендикуляр қилиб ўтказилади. Архитектура перспективаларни ясашда картина текислигини бинонинг бирорта вертикал қиррасидан ўтказиш ва бош фасадига 25°—35° қия қилиб олиш тавсия этилади. Шундай қилинганда бинонинг ён фасади кўпроқ қисқариб тасвирланади ва ясалган перспектива таассуротлироқ бўлиб чиқади.

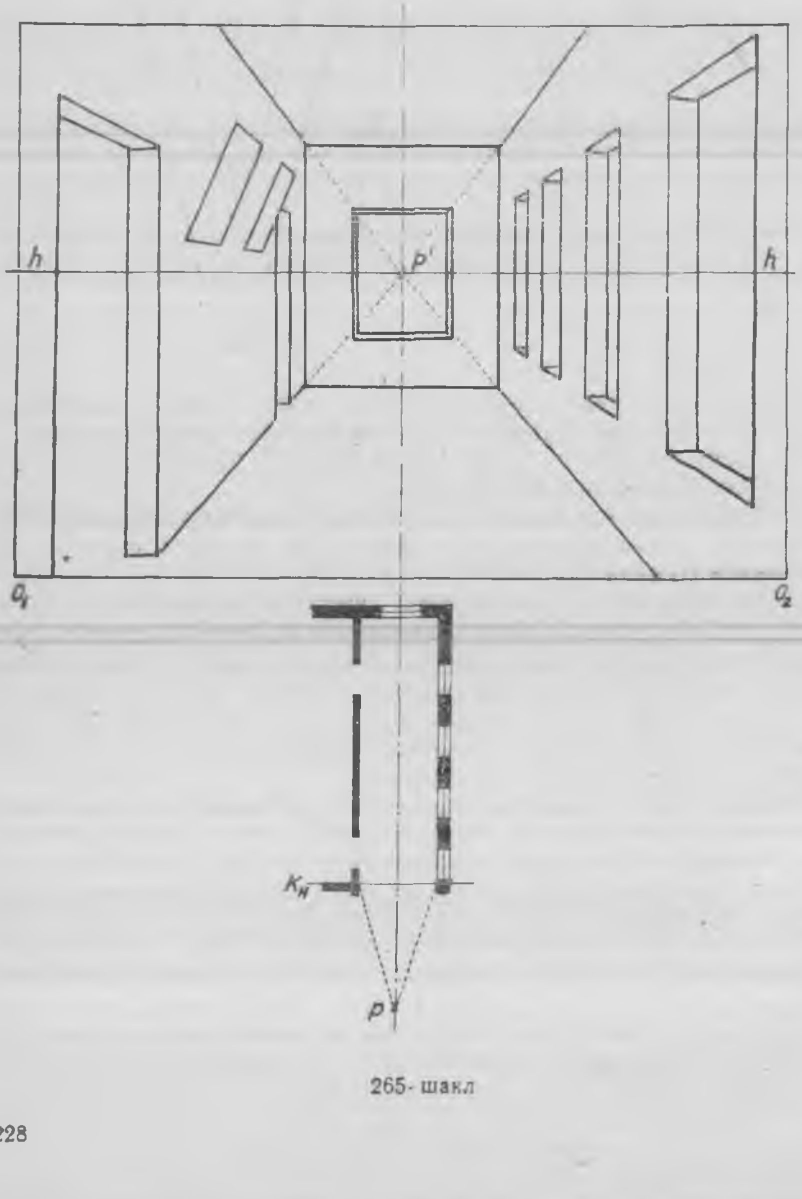
Баъзи махсус ҳолларда, масалан, икки томондан симметрик бинолар билан ўралган майдонларни ҳамда интерьерларни (биноларнинг ички кўринишларини), залларни тасвирлашда картина текислиги 265- шаклда кўрсатилгандай фронтал ҳолда жойлаштирилади.

Биноларнинг перспективасини ясашда кўриш нуқтасининг баландлиги ўрта бўйли одамнинг кўзи баландлигига тенг қилиб олинади ($h=1,7$ м); баъзан кўриш нуқтасининг баландлигини 2,5 дан 5 метргача ҳам олиш мумкин. Бундай ҳолларда горизонт чизиғини бинонинг 1:3 баландлигидан пастда ёки 2:3 баландлигидан юқорида олиш лозим. Агар горизонт чизиғи

объект баландлигининг ўртасига тўғри келса, перспектив тасвир яхши чиқмайди.

Катта майдондаги биноларнинг перспективасини ясашда кўриш нуқтасининг баландлиги 100 метргача ва баъзан, ундан ҳам ортиқ олинади. Бундай перспектива «қушучар» масофадан олинган перспектива дейилади.

Биноларнинг карнизларини ва пастдан кўришга тўғри келадиган бошқа архитектура қисмларини, шунингдек, тоғ этакларидан кўринадиган тоғли жойлардаги биноларни тасвирлаш-



265- шакл

да кўриш нуқтаси объект турган нарсалар текислигидан ҳам пастда олинади.

Пировардида шуни ҳам кўрсатиб ўтиш керакки, интерьерларни (ички кўринишларни) тасвирлашда, кўриш нуқтасини картинадан узоқлаштириш учун бинонинг деворлари халақит берса, кўриш бурчагини 60° гача олишга йўл қўйилади.

Бундан ташқари, пландаги картина текислигининг горизонтал изи K_H нинг, баъзан кўриш бурчагининг биссектрисасига перпендикуляр бўлмаслигига ҳам йўл қўйилади; аммо бош нур картинанинг изи билан энг четки нурлар кесишган нуқталар орасидаги масофанинг ўртадаги учдан бир қисмида бўлишини таъминлаш керак.

87- §. Перспектива ясаш усуллари

Нарсанинг перспективасини ясаш учун, одатда, олдин нарса асосининг перспективаси ясалади, кейин нуқталарнинг перспективадаги баландликлари қўйилади. Асоснинг ҳар бир нуқтаси перспективада бирор учрашув нуқталарига борадиган икки чизиқ билан кесилади. Умуман нарсанинг перспективаси унинг алоҳида нуқталарининг перспективалари йиғиндисидан иборат ва ҳар қайси нуқта кўриш нурининг картина текислигидаги изи тарзида ясалади. Шу нуқтаи назардан қаралганда нарсанинг нуқталаридан кўриш нуқтасига борган нурлар билан нарса нуқталарининг картина текислигидаги проекцияларини аниқлашга олиб келадиган ёлғиз бир метод бор дейиш мумкин. Аммо картина текислигидаги бу проекцияларни турли график йўллар билан ясаш мумкин. Бу график йўллар, шартли равишда, перспективани ясаш усуллари деб аталади.

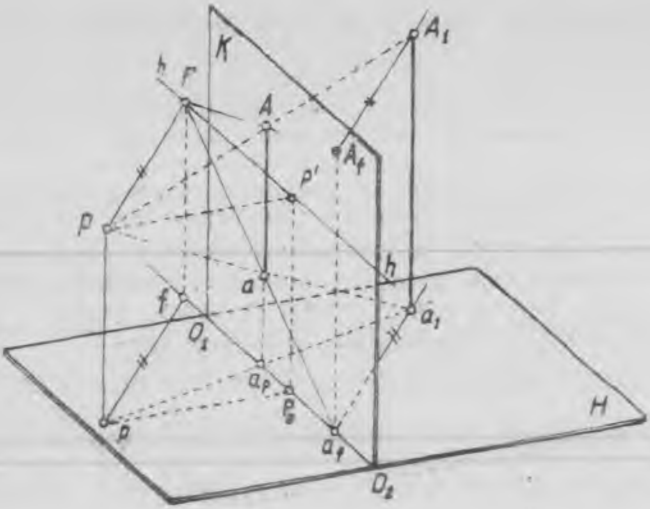
Тубанда нарсанинг ортогонал проекциялари (плани ва фасади) асосида унинг перспективасини ясаш усулларидан бири баён этилган.

Архитекторлар усули

Архитекторлар орасида перспектив тасвирларни параллел чизиқларнинг учрашув нуқталаридан фойдаланиб ясаш усули кенг тарқалган. Бу архитекторлар усули деб юритилади.

266- шаклда нарсалар фазосида берилган A_1 нуқтанинг перспективасини архитекторлар усули билан ясаш тасвирланган. Бу усулда ҳам нуқтанинг (объектнинг) перспективасини ясаш нуқта (объект) асосининг перспективасини ясашдан бошланади. Бунинг учун нуқтанинг асоси a_1 туриш нуқтаси p билан туташтирилади ва a_1 орқали H текисликда бирорта тўғри чизиқ a_1f ўтказилади. Тўғри чизиқ a_1p картинада унинг асосидаги a_p нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ кўринишида тасвирланади, a_1a_f чизиқ эса a_fF чизиқ кўринишида тасвирланади ($PF \parallel pf \parallel a_fa_1$). Натижада a_fF билан a_p нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ кесишиб, a_1 нуқтанинг перспективаси a нуқтани ҳосил қилади.

Нуқтанинг ўз перспективасини ясаш учун картинадаги a_f нуқтадан баландлигини қўйиб, A_f нуқта аниқланади ($a_fA_f = a_1A_1 = z$) ва у F нуқта билан туташтирилади. Ҳосил бўлган A_fF чизиқ фазодаги



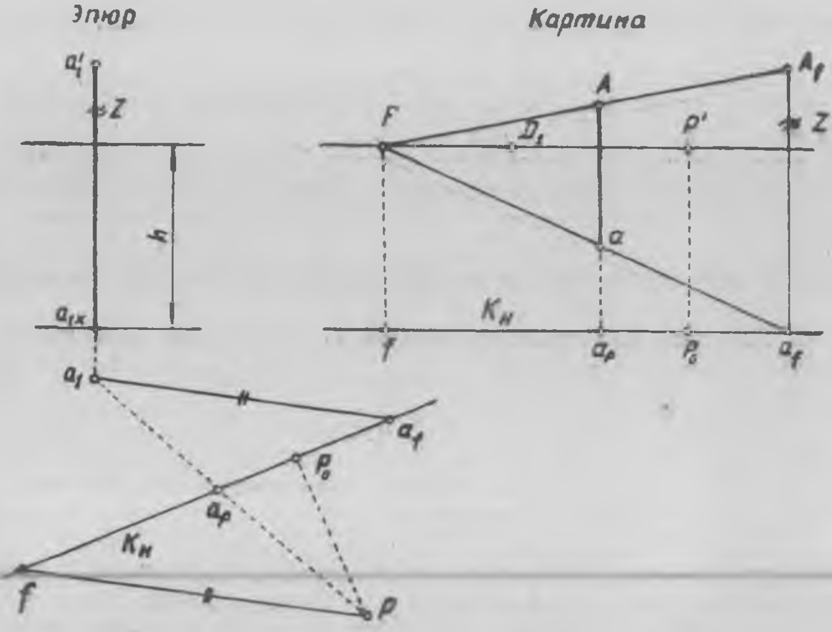
266- шакл

A_fA_1 чизиқнинг перспективасидир. A_fF чизиқ билан вертикал a_pa чизиқнинг давоми кесишиб, изланган A нуқтани ҳосил қилади. Шундай қилиб, ясалган A_a нуқта фазода берилган. A_1a_1 нуқтанинг перспективасидир. Aa кесмани нарсалар текислигида турган A_1a_1 вертикал кесманинг перспективаси деб қараш ҳам мумкин.

Бу ерда яна шунга эътибор бериш керакки, умуман a_fa_1 чизиқ сифатида картинанинг асосини чизма чегарасида кесадиган ҳар қандай тўғри чизиқ, шу жумладан картина текислигига перпендикуляр ёки уни 45° бурчак остида кесадиган чизиқ олиниши мумкин. Аммо бино ёки кўп ёқли объектнинг перспективасини ясашда бу чизиқни объектнинг асосий томонларидан бирига параллел қилиб олиш ёки мавжуд чизиқлардан фойдаланиш ясашни бирмунча осонлаштиради.

267- шаклда ортогонал проекциялари a_1, a_1 билан эпюрда берилган нуқтанинг перспективасини архитекторлар усули билан ясаш кўрсатилган. K_H картина текислигининг нарсалар (горизонтал проекциялар) текислигидаги изи. a_1a_f берилган нуқтанинг горизонтал проекцияси a_1 дан H текисликда ўтган мавжуд чизиқ (ёки H текисликда ўтказилган ихтиёрий чизиқ), a_f нуқта бу чизиқ билан картина асосининг кесишган нуқтаси, p туриш нуқтаси ва h кўриш нуқтасининг баландлиги деб фараз қилайлик.

Берилган нуқтанинг перспективасини ясаш учун олдин эпюрда a_1 нуқта p нуқта билан туташтирилиб, a_p нуқта ва p нуқта орқали a_fa_1 га параллел pf чизиқ ўтказилади-да, f нуқта аниқланади. Кейин бу f, a_p, a_f нуқталар картинанинг асосига олиб келинади ва f нуқтадан кўтарилган вертикал чизиққа кўриш нуқтасининг баландлигини қўйиб, F нуқта топилади, F нуқтадан горизонт чизиғи ўтади.



267- шакл

Энди картинанинг асосидаги a_f нуқта горизонт чизиғидаги F нуқта билан туташтирилиб, a_p нуқтадан вертикал чизиқ кўтарилса, улар ўзаро кесишиб a нуқтани ҳосил қилади. Бу a нуқта фазодаги A_1 нуқта асосининг перспективасидир. A_1 нуқтанинг ўз перспективасини ясаш учун картинанинг асосидаги a_f нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ бўйича нуқтанинг баландлигини қўйиб, A_f нуқта аниқланади ($a_fA_f = a_{1x}a_1' = z$). A_f нуқта F нуқта билан туташтирилса, у чизиқ вертикал a_pa чизиқнинг давоми билан кесишиб, фазодаги A_1 нуқтанинг ўз перспективаси A нуқтани ҳосил қилади.

Мисол. Томининг нишаби икки томонга кетган бинонинг схематик плани ва фасади берилган, унинг перспективаси ясалсин (268 ва 269- шакллар).

Ясаш тубандаги тартибда бажарилади:

1. Эпюрда (268- шакл) картинанинг асоси K_H ўтказилади ва туриш нуқтаси p танланади; ясашни соддалаштириш мақсадида картинанинг асосини бино планининг бирорта бурчаги орқали ўтказиш тавсия қилинади. Шундай бўлганда бинонинг мазкур қирраси перспективада ўз катталигида тасвирланади. Туриш нуқтасини танлашда, 86- параграфда кўрсатилганидек, кўриш бурчагининг 28° атрофида бўлишига ва бош нурнинг горизонтал проекцияси pp_0 ни картина энининг ўртасидаги учдан бир қисмидан чиқиб кетмаслигига эътибор берилади. Картинанинг эни сифатида планнинг энг четки нуқталаридан картина асосига туширилган перпендикуляр орасидаги a_0c_0

кесмани қабул қилиш мумкин. Кейин фасадда горизонт чизиғи ўтказилади.

2. Туриш нуқтасидан бинонинг фасад ва ён томонларига параллел қилиб горизонтал икки тўғри чизиқ ўтказилади. Бу чизиқлар картинанинг асоси билан кесишиб f_1 ва f_2 нуқталарни ҳосил қилади. f_1 нуқта бино фасадига параллел бўлган барча горизонтал тўғри чизиқларнинг перспективада учрашув нуқтаси F_1 нинг асосидир (яъни H текисликдаги горизонтал проекциясидир), f_2 нуқта эса бинонинг ён томонларига параллел бўлган барча горизонтал тўғри чизиқларнинг перспективада учрашув нуқтаси F_2 нинг асосидир.

3. Пландаги характерли нуқталарни туриш нуқтаси билан туташтириб, картинанинг асосидаги a_p, b_p, c_p, . . . нуқталар билан аниқланади.

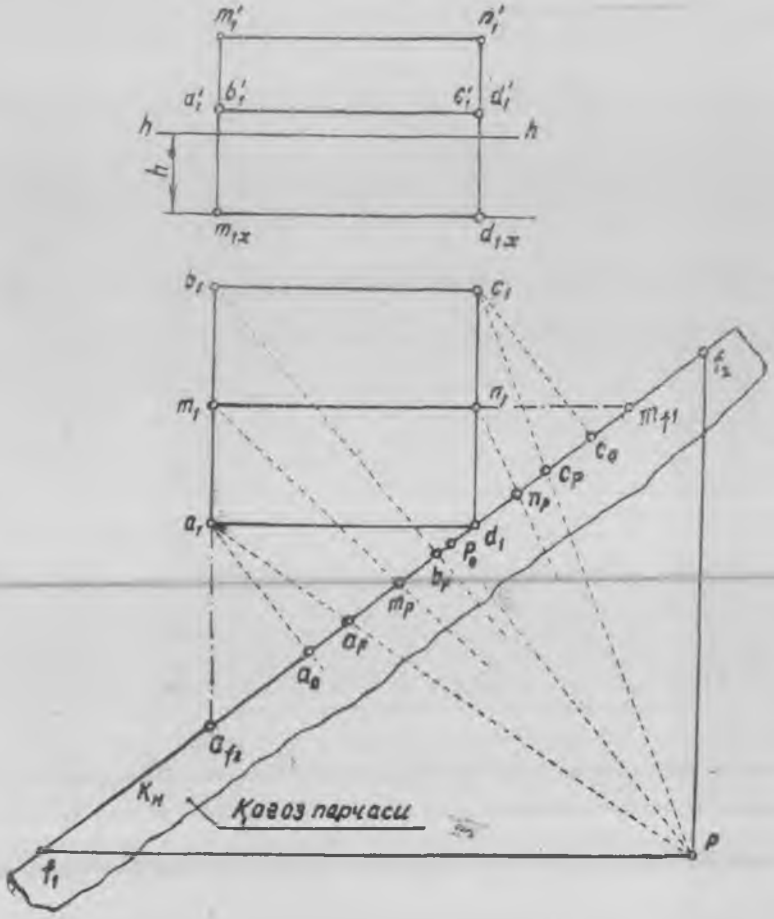
4. Эпюрдаги f_1, a_p, b_p, . . . , f_2 нуқталар картинанинг асосига қоғоз парчаси ёки асбоб ёрдами билан олиб ўтилади (269- шакл). Сўнгра f_1 ва f_2 нуқталардан перпендикуляр кўтариб, горизонт чизиғидаги F_1 ва F_2 нуқталар аниқланади.

5. Бу мисолда бинонинг d_1D_1 қирраси картина текислигига тегиб тургани учун у ўз катталигида тасвирланади. Шунга кўра, картинадаги d нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқда, бино деворларининг баландлигини эпюрдан олиб қўйиб, D нуқта топилади (перспективадаги dD — эпюрдаги $d_{1x}d'_1$).

D, d нуқталар F_1 ва F_2 нуқталар билан туташтирилади. F_1d ва F_1D чизиқлар билан a_p нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ кесишиб, A_1a_1 қирранинг перспектив тасвири Aa кесмани ҳосил қилади, DF_2 ва dF_2 чизиқлар билан c_p нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ кесишиб, C_1c_1 қирранинг перспектив тасвири Cc кесмани беради. Кейин A, a нуқталарни F_2 билан ёки C, c нуқталарни F_1 билан туташтириб, ҳосил бўлган чизиқлар билан b_p нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқнинг кесишган жойларида B, b нуқталар топилади. Bb кесма B_1b_1 қирранинг перспективаси бўлиб, у картинада кўринмайди.

Шундай қилиб, картинада ясалган $abcd$ тўртбурчак бино плани — $a_1b_1c_1d_1$ тўғри тўртбурчакнинг перспективаси, $ABCDdcba$ шакл эса берилган бино коробкаси — $A_1B_1C_1D_1d_1c_1b_1a_1$ призманинг перспективасидир.

6. Томнинг M_1N_1 қиррасини картинада ясаш учун у картина билан кесишгунча давом эттирилади (268- шаклдаги планда m_{f_1} нуқта). MN чизиқнинг картина билан кесишган жойида баландлигининг перспективаси ўзгармайди. Шунинг учун пландаги m_{f_1} нуқта 269- шаклдаги картинанинг асосига олиб келинади ва ундан кўтарилган вертикал чизиққа том қиррасининг баландлиги қўйилиб, M_{f1} нуқта аниқланади ($m_{f_1}M_{f_1}=m_{1x}m'_1$). Кейин M_{f_1} нуқта F_1 нуқта билан туташтирилади. Бу чизиқ картинанинг асосидаги m_p ва n_p нуқталардан кўтарилган вертикал чизиқлар билан кесишиб, M ва N нуқталарни ҳосил қилади. M нуқта A ва B нуқталар билан ҳамда N нуқта

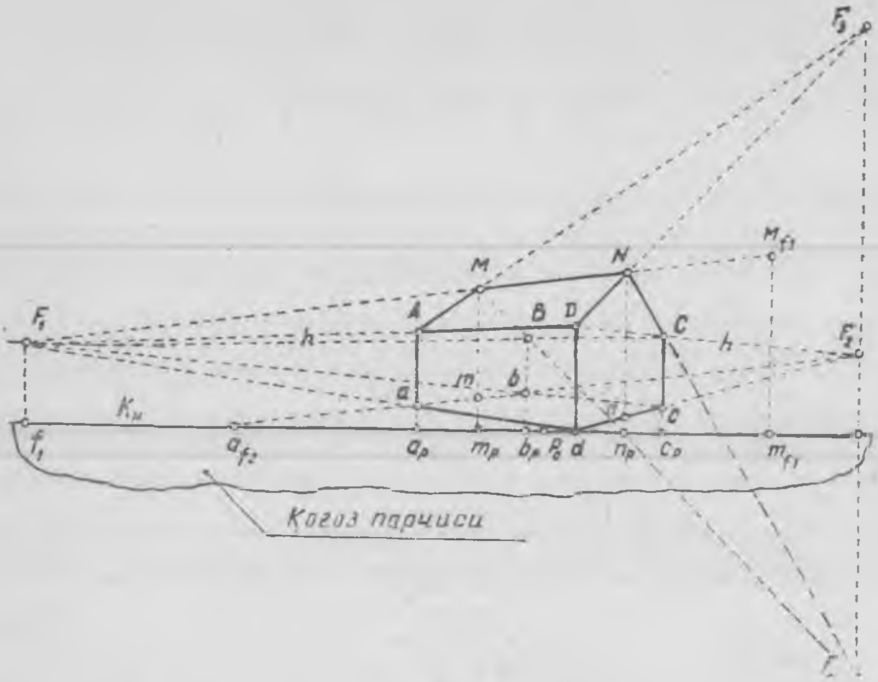


268-шакл.

C ва D нуқталар билан туташтирилса, томнинг перспективаси келиб чиқади.

Том перспективасининг тўғри ясалганлигини текшириш учун унинг ён томондаги MA ва ND қирралари ҳамда MB ва NC қирралари давом эттирилади. Агар улар F_2 нуқтадан ўтказилган вертикал чизиқдаги F_3 ва F_4 нуқталарда кесишса ($F_2F_3 = F_2F_4$), том перспективада тўғри ясалган бўлади.

Объект планининг перспективасини архитекторлар методи билан ясашда характерли нуқталардан туриш нуқтасига кетган a_1p, b_1p, . . . чизиқлар ўрнига (268- шакл) пландаги мавжуд чизиқлардан фойдаланса ҳам бўлади. Масалан, a_1 нуқтанинг перспективасини ясаш учун b_1a_1 чизиқни давом эттириб, уни картинанинг асоси билан кесишган a_{f_2} нуқтаси 269- шаклдаги картинага олиб борилиб,



269- шакл.

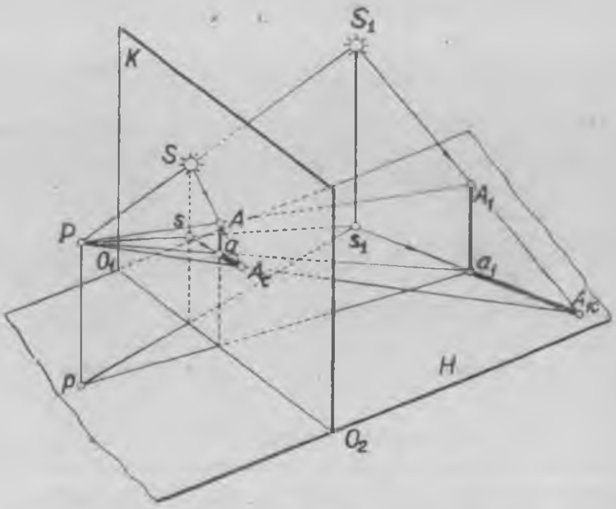
F_2 нуқта билан туташтирилади; бу $a_{f_2}F_2$ чизиқ dF_1 чизиқ билан кесишиб, a нуқтани ҳосил қилади.

Архитекторлар методи билан ясаладиган перспективани катталаштириш зарур бўлса, олдин перспективани ясаш, кейин уни юқоридаги шаклда кўрсатилган усул билан катталаштириш мумкин. Ё бўлмаса, эпюрдаги ўлчамларни тўғридан-тўғри картинага катталаштириб қўйиш йўли билан катта перспектива ясаса ҳам бўлади. Бу усулни шундай тушуниш керакки, масалан, 269- шаклдаги перспективани 2 марта катта қилиш керак бўлса, горизонт чизиғининг баландлиги 268- шаклдаги h га тенг қилиб эмас, балки $2h$ га тенг қилиб олинади. 269- шаклдаги f_1f_2, f_1a_p,... кесмалар 268- шаклдаги ўшандай кесмалардан 2 марта катта қилиб олинади.

XV б о б. ПЕРСПЕКТИВАДА СОЯЛАР

88- §. Марказий ёритишда соялар ясаш

270- шаклдаги яққол тасвирда лампа билан ёритилганда тушган сояни перспективада ясаш усули кўрсатилган. Шаклда S_1 нуқта лампа, s_1 нуқта лампанинг соя тушадиган текисликдаги (нарсалар текислигидаги) тўғри бурчакли проекцияси



270- шакл

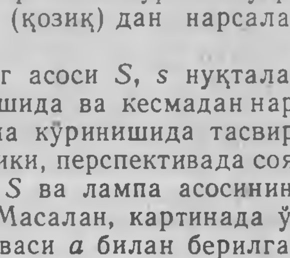
(асоси), A_1a_1 — нарсалар текислигида вертикал турган тўғри чизиқ кесмаси (қозиқ), a_1A_{1c} — кесма (қозиқ) дан нарсалар текислигига тушган соя.

Картина текислигида лампа ва унинг асоси S, s нуқталар кўринишида, берилган кесма Aa кўринишида ва кесмадан нарсалар текислигига тушган соя aAc кесма кўринишида тасвирланади. Шаклдан яққол кўриниб турибдики, перспективада сояни ясаш учун лампанинг перспективаси S ва лампа асосининг перспективаси s берилган бўлса кифоя. Масалан, картинада ўз перспективаси A ва асосининг перспективаси a билан берилган бирорта нуқтадан тушган сояни ясаш керак бўлсин (271- шакл). Бунинг учун SA нур ва унинг проекцияси sa ўтказилади. Нур ўз проекцияси билан кесишиб, берилган А нуқтадан нарсалар текислигига тушган соя A_c нуқтани ҳосил қилади.

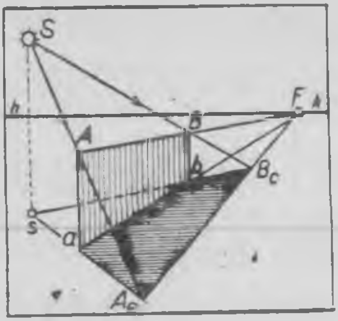
Кўрсатилган усулдан фойдаланиб, ҳар қандай нарсанинг соясини ясаш мумкин. Бунинг учун нарсанинг тушган сояси контурини аниқловчи нуқталарнинг соялари топилиб, улар тегишли тартибда ўзаро туташтирилади.

1- мисол. Нарсалар текислигида вертикал вазиятда турган тўғри тўртбурчак пластинканинг сояси ясалсин (272- шакл).

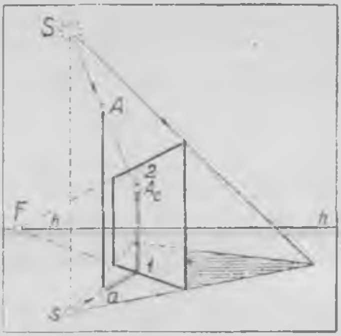
Ясаш. Юқорида баён қилинган усулга мувофиқ пластинканинг А ва В учларидан тушган соялар топилади. aA_cbB_c



271- шакл



272- шакл

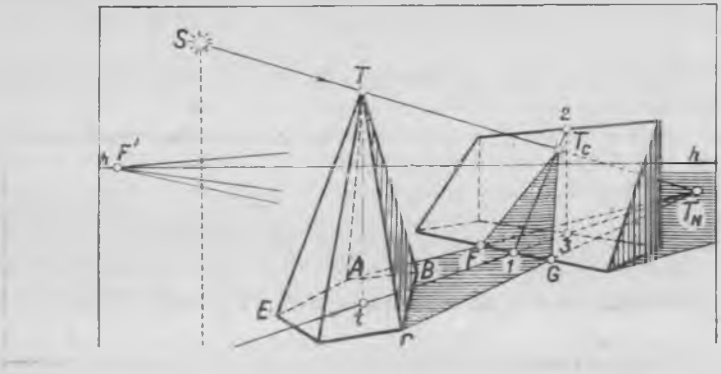


273- шакл

пластинкадан тушган соянинг контури бўлади. Пластинканинг бизга кўриниб турган томони лампага тескари, шунинг учун бу томон соя томондир. Бу ерда яна шунга эътибор бериш керакки, ҳақиқатда пластинканинг *AB* қирраси нарсалар текислигига параллел бўлгани учун унинг сояси A_cB_c ўзига параллел бўлади; демак, перспективада улар бир нуқтада учрашади. Бу ҳол ясашнинг тўғри эканлигини текширишга ва аниқлашга ёрдам беради.

2- мисол. Нарсалар текислигида турган вертикал тўғри чизиқ кесмаси *Aa* дан вертикал тўғри тўртбурчак пластинкага тушган соя ясалсин (273- шакл).

Ясаш. Ёруғлик нури *SA* ва унинг проекцияси *sa* ўтказилади. Ҳосил бўлган нур текислиги нарсалар текислигини sa_1 чизиғи бўйича, пластинкани вертикал чизиқ 1 — 2 бўйича кесиб ўтади. *1* — 2 чизиқ билан *SA* нурнинг кесишган нуқтаси A_c кесманинг *A* учидан пластинкага тушган соя бўлади. Шундай қилиб, ҳосил бўлган a_1 чизиқ берилган кесмадан нарсалар текислигига тушган соя, $1A_c$ чизиқ эса пластинкага тушган соядир.



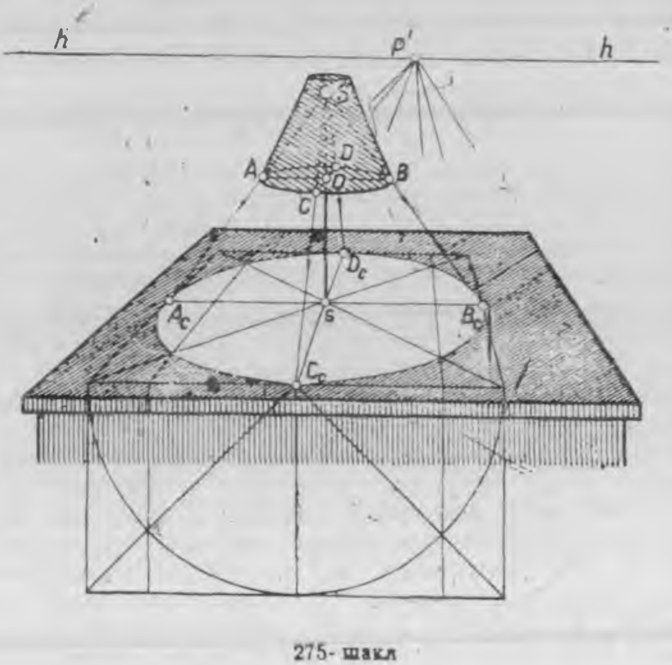
274- шакл

3- мисол. Пирамидадан нарсалар текислигига ва призмага тушган соя ясалсин (274- шакл).

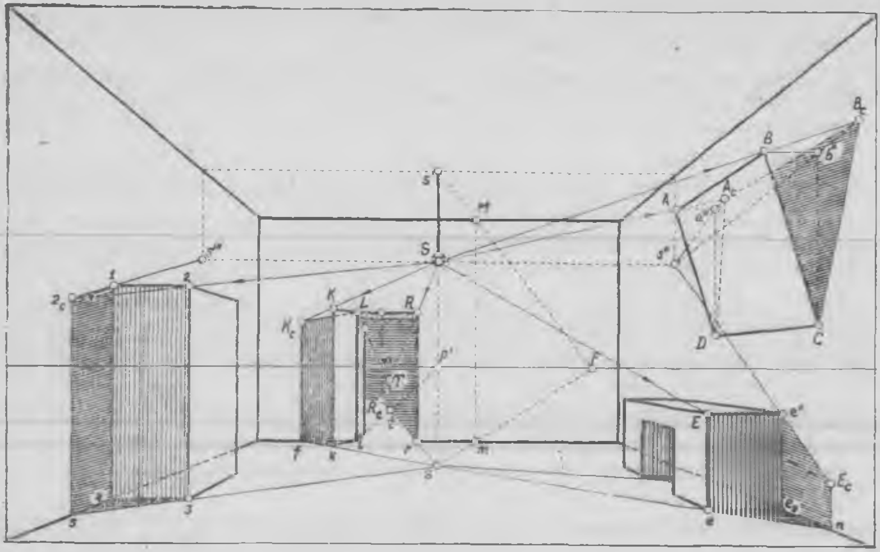
Ясаш. Олдин призмани гуё йўқ деб фараз қилиб, пирамидадан нарсалар текислигига тушган соя ясалади. Бунинг учун биринчи галда пирамида учининг сояси $T_н$ нуқта топилади ва бу нуқтадан пирамида асосига уринмалар ўтказилади. $AT_н$ ва $CT_н$ чизиқлар пирамидадан H текисликка тушган соянинг контури бўлади. Бу чизиқлар призманинг қия (соя тушадиган) ёғини F ва G нуқталарда учратади. Шу нуқталардан бошлаб, пирамидадан соя призмага туша бошлайди. Пирамиданинг учидан призмага тушган соя T_c нуқтани топиш учун $TT_н$ нур орқали горизонтал проекцияловчи текислик ўтказилади. Бу ёрдамчи текислик учбурчак $SsT_н$ билан ифодаланади ва призмани учбурчак $1-2-3$ бўйича кесади. $1-2$ чизиқ билан $TT_н$ нур кесишиб, T_c нуқтани ҳосил қилади. FT_cG — пирамидадан призмага тушган соянинг контури.

4- мисол. Столда турган лампанинг абажуридан тушган соя ясалсин. Картинанинг бош нуқтаси p', столнинг қопқоғи, ёруғлик манбаи S ва унинг стол текислигидаги асоси s, абажур пастки айланасининг контури ва шу айлананинг маркази O нуқта берилган (275- шакл).

Ясаш. Картинанинг бош нуқтаси p' ва айлана маркази O нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказилади. Бу чизиқ айлананинг картина текислигига перпендикуляр бўлган CD диаметрини ҳосил қилади. Айлана марказидан горизонтга параллел қилиб, айлананинг иккинчи диаметри AB ўтказилади ($AB \perp CD$). A, B, C, D нуқталарнинг



275- шакл



276- шакл

стол текислигидаги соялари A_c, B_c, C_c, D_c нуқталар топилади. Бу нуқталар бўйича сиртига чизилган квадрат усули билан айлананинг порспективаси (эллипс) ясалади. Бу эллипс абажурдан столга тушган соя контурининг перспективадаги тасвири бўлади.

5- мисол. Уй жиҳозларининг ўз соялари ва тушган соялари ясалсин. Электр лампочкаси S ва унинг шипдаги проекцияси s' берилган (276- шакл).

Ясаш. Хона ичидаги сояларни аниқлаш учун ёруғлик манбаини соялар тушадиган текисликларга проекциялаш керак. Бу мисолда S нуқта полга s, шипга s', ўнг томондаги деворга s'', чап томондаги деворга s'' тарзида проекцияланган.

Ёруғ сочаётган нуқтанинг полдаги проекциясини топиш учун шипдаги S' нуқта горизонт чизиғида ихтиёрий олинган F нуқта билан туташтирилади. $S'F$ тўғри чизиқ деворнинг тепасини M нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқтанинг полдаги асоси m нуқтани F нуқта билан туташтириб, F_m чизиқ S нуқтадан туширилган перпендикуляр билан кесишгунча давом эттирилса, s нуқта келиб чиқади. Ёруғ сочаётган нуқтанинг деворлардаги проекцияларини ясаш шаклнинг ўзидан тушунарли

Қия вазиятда осиб қўйилган суратдан тушган сояни ясаш учун олдин унинг A ва B нуқталарининг девордаги ортогонал проекциялари a'', b'' нуқталар аниқланади. Кейин s'' нуқтадан a'' ва b'' нуқталар орқали ёруғлик нурларининг девордаги проекциялари, S нуқтадан эса A ва B нуқталар орқали ёруғлик нурларининг ўзи ўтказилади. Ёруғлик нурларининг ўз проекциялари билан кесишган нуқталари A_c, B_c суратнинг A ва B учларидан тушган сояларни ҳосил қилади. Нуқталарни кетма- кет туташтириш натижасида ҳосил

бўлган A_cB_cCD тўртбурчак суратдан деворга тушган соянинг контуридир.

Жавондан тушган сояни ясаш учун ёруғлик нурининг проекцияси $s3$ ўтказилади. Бу чизиқ деворнинг асосини 5 нуқтада кесади. 5 нуқтадан кўтарилган перпендикуляр билан $S2$ нур кесишиб, 2_c нуқтани ҳосил қилади. 1, 2_c, 5, 3 нуқталар туташтирилса, шкафдан полга ва деворга тушган соя ҳосил бўлади. Шкафнинг ёруғлик нурлари тушмаган 1 2 3 4 томони сояда бўлади.

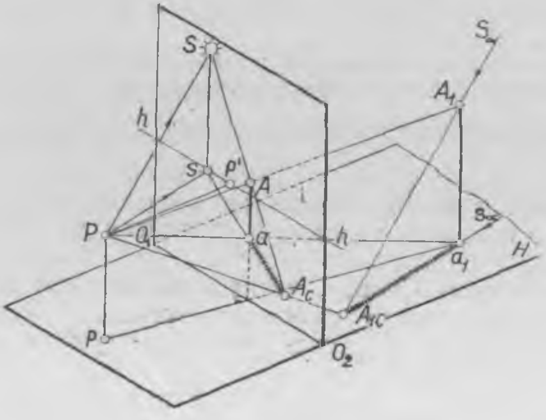
Ёзув столидан ва эшикдан тушган соялар ҳам шкафнинг сояси сингари ясалади.

89-§. Параллел ёритишда соялар ясаш

Қуёшдан ёки ойдан тушган сояларни ясаш учун фазода нурларнинг йўналишини ва уларнинг нарсалар текислигидаги проекцияларини билиш керак. Масалан, нурларнинг фазодаги йўналиши A_1S_∞ проекция a_1s_∞ бўлсин (277-шакл). Маълумки, ҳақиқатда ўзаро параллел бўлган тўғри чизиқлар перспективада бир нуқтада учрашади. Шунинг учун картина текислигидаги S нуқта фазодаги қуёш ёки ой нурларининг перспективада учрашув нуқтаси, горизонт чизиғидаги s нуқта эса нурларнинг нарсалар текислигидаги проекцияларининг перспективада учрашув нуқтаси бўлади (шаклда $PS \parallel A_1S_\infty$, $Ps \parallel a_1s_\infty$).

Картинадаги S нуқта, қисқалик учун, баъзан қуёш, горизонт чизиғидаги s нуқта эса қуёшнинг асоси дейилади. Картинада қуёш ва унинг асоси горизонт чизиғига нисбатан бир перпендикулярда жойлашади ($Ss \perp hh$).

Картинадаги қуёш асосининг перспективаси s нуқтани A нуқта



277-шакл

асосининг перспективаси *a* билан уловчи *sa* тўғри чизиқ фазодаги A_1 нуқтадан ўтган ёруғлик нури проекциясининг перспективаси, қуёшнинг перспективаси *S* ни нуқтанинг перспективаси *A* билан туташтирувчи тўғри чизиқ *SA* эса фазодаги A_1 нуқта орқали ўтган ёруғлик нурининг перспективаси бўлади. Ёруғлик нурининг перспективаси *SA* билан нур проекциясининг перспективаси *sa* ўзаро кесишиб, A_1 нуқтадан нарсалар текислигига тушган соянинг перспективаси A_c нуқтани ҳосил қилади.

Бошқа ҳар қандай нуқта соясининг перспективасини топиш учун,олдин аниқланган (ёки берилган) *S*, *s* нуқталардан фойдаланиб, A_c нуқта топилгандаги сингари ясашларни бажариш керак.

Шундай қилиб, перспективада қуёшдан тушган сояни ясаш учун ўзаро кесишувчи икки тўғри чизиқ ўтказиш керак. Чизиқлардан бири қуёшнинг перспективаси ва нуқтанинг перспективаси орқали, иккинчиси эса қуёш асосининг перспективаси ва нуқта асосининг перспективаси орқали ўтказилади.

Картинада ясаладиган соянинг келиб чиқиши қуёшнинг перспективаси *S* ва қуёш асосининг перспективаси *s* нуқталарнинг вазиятига боғлиқдир. Қуёш асосининг перспективаси *s* нуқта ҳамма вақт горизонт чизиғида бўлади, чунки қуёш чексиз узоқда деб фараз қилинади. Қуёшнинг ўз перспективаси *S* нуқта эса горизонт чизиғининг юқорисида ёки остида бўлиши мумкин. Иккала ҳолда ҳам қуёш нарсалар текислигидан юқорида туради.

S, *s* нуқталарнинг горизонт чизиғига нисбатан вазияти қуёшнинг кўриш нуқтаси *P* га нисбатан турлича жойлашувига боғлиқ (227- шакл).

278- шаклда кўриш нуқтасига нисбатан қуёшнинг 6 та типавий вазияти ва вертикал қозиқдан горизонтал текисликка тушган сояни перспективада ясаш кўрсатилган.

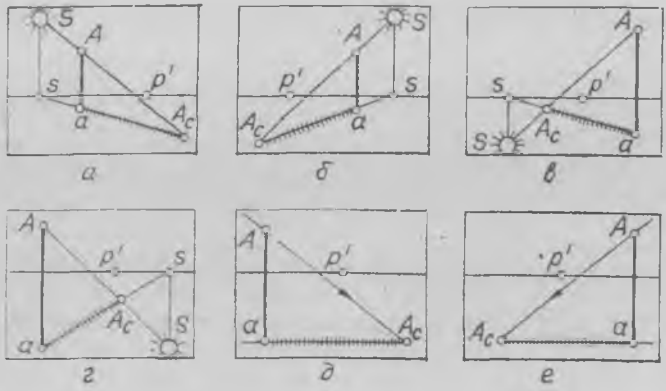
1. Қуёш нарсалар фазосида, кузатувчининг олд томонида ва чапда; *S* нуқта горизонт чизиғидан юқорида, бош нуқта *p'* нинг чап томонида. Кузатувчи нарсанинг соя томонини кўради (227- шакл ва 278- шакл, *а*).

2. Қуёш нарсалар фазосида, кузатувчининг олд томонида ва ўнгда, *S* нуқта горизонт чизиғидан юқорида, бош нуқта *p'* нинг ўнг томонида. Кузатувчи нарсанинг соя томонини кўради (278- шакл, *б*).

3. Қуёш мавҳум фазода, кузатувчининг орқа томонида ва ўнгда: *S* нуқта горизонт чизиғидан пастда *p'* нуқтанинг чап томонида. Кузатувчи нарсанинг ёритилган томонини кўради (278- шакл, *в*).

4. Қуёш мавҳум фазода, кузатувчининг орқа томонида ва чапда. *S* нуқта горизонт чизиғидан пастда, *p'* нуқтанинг ўнг томонида. Кузатувчи нарсанинг қуёш нури тушган томонини кўради (278- шакл, *г*).

5. Қуёш чапди. Бу ҳолда ёруғлик нурлари картина текислигига параллел чизиқлардир ва шунинг учун уларнинг перспективасида учрашув нуқталари *S*, *s* бўлмайди. Нурларнинг



278- шакл

перспективалари қабул қилинган йўналишга, проекцияларининг перспективалари эса горизонт чизиғига параллел бўлади (278- шакл, *д*).

6. Қуёш ўнгда (278- шакл, *е*).

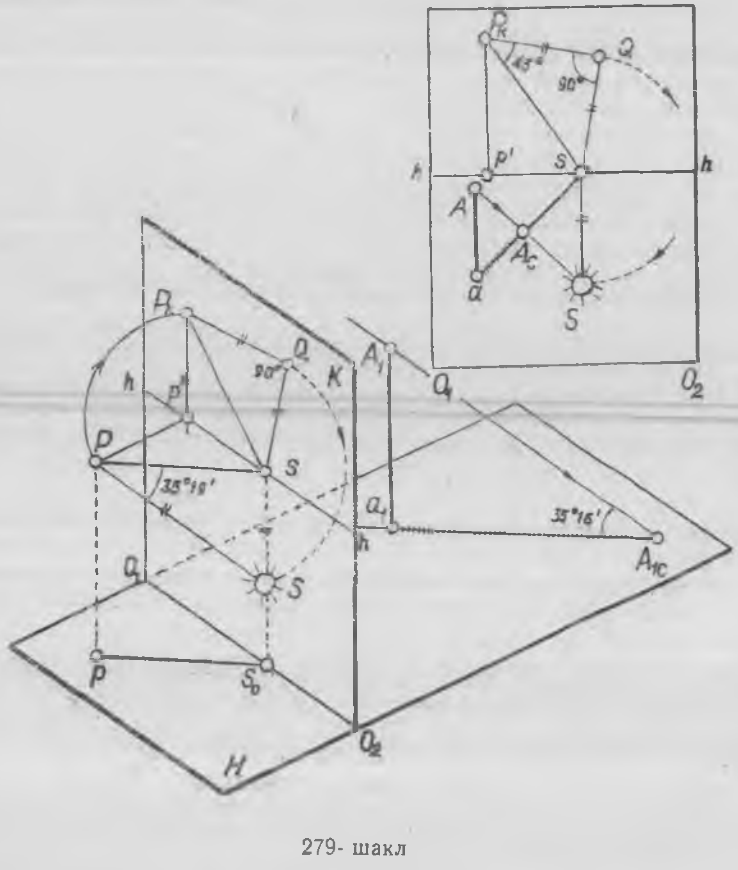
Перспективада S нуқтани ихтиёрий жойда олиш мумкин. Лекин ясалган соя лойиҳаланаётган бинодан тушадиган ҳақиқий сояни кўрсатиши учун S нуқтани танлашда бино фасади дунёнинг қайси томонига қараганлигини, жойнинг географик кенглигини, йилнинг фаслини, ойни, кунни ва соатни ҳисобга олиш керак. Шу шартларга риоя қилиб, махсус жадвалдан қуёшнинг азимутини (меридианнинг шимолий йўналиши билан вертикал кесмадан тушган соя йўналиши орасидаги β бурчакни) ва қуёш нурлари билан горизонтал текислик (нарсалар текислиги) орасидаги α бурчакни олиш мумкин. Мамлакатимизнинг асосий кенгликлари учун қуёш нурлари билан нарсалар текислиги орасидаги бурчак 30° дан 45° гача олиниши мумкин; эрталаб ва кечга яқин ҳамда ўрта кенгликлар учун 30° атрофида, жанубий кенгликлар ва туш вақтларида эса 45° атрофида олиниши лозим. Умуман бу бурчак 35°16′ қилиб олинади. Бундай бурчак остида ерга тушаётган ёруғлик нурлари ерда турган кубнинг диагоналига параллел бўлади. Ортогонал проекцияларда сояларни ясаш учун ҳам бурчак 35°16′ қилиб олинади. Бундай бурчак тахминан Ўзбекистоннинг Тошкент областида март ойининг ўрталарида соат 11 да қуёшнинг вазиятига тўғри келади.

Қуёшни бундан тик олиш тавсия қилинмайди; чунки нурларнинг ерга қиялик бурчаги қанча катта бўлса, карнизлардан, балконлардан бинонинг ён деворларига тушган соялар шунча узун бўлади ва бино фасадининг кўп қисми сояда қолади.

Шундай қилиб, перспективада сояларни ясашдан олдин қуёш асосининг перспективаси s нуқтани ва қуёшнинг перспективаси S нуқтани тўғри танлаб ола билиши керак. s нуқта қу-

ёшнинг азимутига боғлиқ ва уни, умуман, горизонт чизиғининг исталган нуқтасида олиш мумкин, чунки қуёшли кунларда кун чиққандан то кун ботгунча ер қуёшга нисбатан турли вазиятларда бўлади ва соялар турли томонларга тушади. Картинадаги sS кесманинг узунлиги қуёш нурлари билан ер орасидаги бурчакка боғлиқ, шунинг учун уни ихтиёрий олиш ярамайди .

279- шаклдаги яққол тасвирда картина текислигидаги Ss кесманинг узунлигини топиш усули кўрсатилган. Масалан, вертикал кесма A_1a_1 дан тушган соя a_1A_{1c} бирорта кубнинг диагоналига параллел бўлган нур билан аниқланган ва картинада қуёш нурлари проекцияларининг учрашув нуқтаси s берилган бўлсин. Кўриш нурлари $Ps \parallel a_1A_{1c}$ ва $PS \parallel A_1A_{1c}$ бўлгани учун $\angle sPS = \angle A_1A_{1c}a_1$ бўлади. Картинадаги қуёш нурларининг учрашув нуқтаси S ни топиш учун $Pp's$ учбурчак $p's$ катети атрофида айлантирилиб, картина текислигига жипслаштирилади. Бунинг учун картинадаги бош нуқтадан горизонт чизиғига нисбатан кўтарилган перпендикуляр бўйича кўриш нуқтасидан картинагача бўлган бош масофани қўйиб келиб,

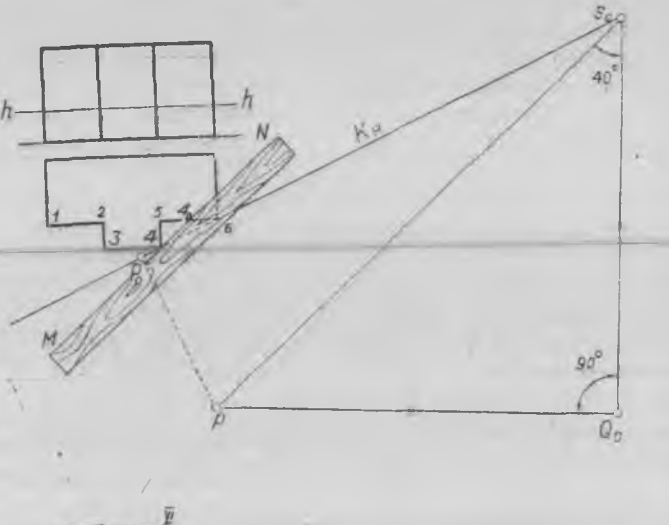


279- шакл

чиққан $P_{\text{к}}$ нуқта берилган s нуқта билан туташтирилади ($\Delta P_{\text{к}}p's =$ $= \Delta Pps1 \cdot P_{\text{к}}s$ кесмани гипотенуза сифатида қабул қилиб, тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак $sP_{\text{к}}Q$ ясалса, унинг катети sQ изланган sS кесмага тенг бўлади.

Нарсалар текислигидаги туриш нуқтасидан ўтган ps_0 кесма Ps кесмага ёки $P_{\text{к}}S$ кесмага тенг. Шунинг учун $sP_{\text{к}}Q$ учбурчакка баравар тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакни нарсалар текислигида, ps_0 кесмани гипотенуза деб қабул қилиб ясалса ҳам бўлади.

280- шакл, *а* даги ортогонал проекцияларда бинонинг схематик



280- шакл

фасади ва плани, горизонт чизиғи, картинанинг асоси $K_н$ ва туриш нуқтаси p берилган.

Ёруғлик нурларининг йўналишини танлаш учун планда чизғични бинонинг чиққан 4 бурчагига шундай қўйиш керакки, *4—5* девордан *5—6* фасад деворга тушган *5—4*$_0$ соя чиққан *4—5* девор перспективасидан кичик ёки катта бўлсин (соя ва чиққан девор тенг бўлса, монотонлик юз беради ва тасвир яхши чиқмайди). Кейин туриш нуқтаси p орқали MN чизиққа параллел чизиқ ўтказиб, картина асосидаги s_0 нуқта аниқланади ($ps_0 \| MN$).

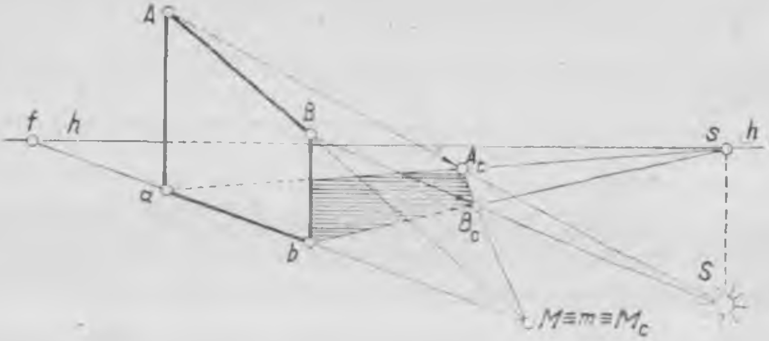
Шундан кейин, ps_0 кесмани гипотенуза деб олиб, тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ps_0Q_0 ясалади. Пировардида бу ясалган учбурчакнинг катети s_0Q_0 картинадаги (280-шакл, *б* s нуқтадан горизонт чизиғига нисбатан ўтказилган перпендикуляр бўйича қўйилса, қуёшнинг перспективаси — S нуқта келиб чиқади (280- шакл, *б*) даги sS кесма горизонтдан пастга қўйилса, Қуёш кузатувчининг орқа томонида, юқорига қўйилса, Қуёш кузатувчининг олд томонида бўлади. 280- шакл, *а* ва 280- шакл, *б* да қуёш кузатувчининг орқа томонида ва чапда олинган.

Агар сояларни тез ясаш зарур бўлса, нурларнинг йўналишини картина текислигига параллел қилиб олиш мумкин. Нурлар картина текислигига параллел бўлса, сояларни ясаш бирмунча соддалашади (278- шаклда *д, е* схемалар).

6- мисол. Нарсалар текислигида вертикал вазиятда турган $aABb$ тўртбурчакдан соя ясалсин. Қуёш ва қуёш асосининг перспективаси S, s нуқталар берилган (281- шакл).

Ясаш. A, B нуқталар S нуқта билан, a, b нуқталар s нуқта билан туташтирилади. AS нур билан as, BS нур билан bs кесишиб, A_cB_c нуқталарни ҳосил қилади. aA_cB_cb тўртбурчак пластинкадан тушган соя бўлади.

Агар $AB \| ab$ бўлганда эди A_cB_c чизиқнинг давоми горизонт чизиғини ab чизиқнинг учрашув нуқтаси f да учратар эди. Лекин бу

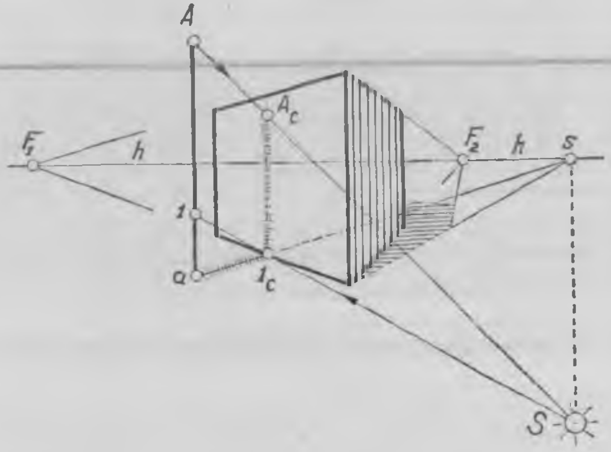


281- шакл

мисолда AB чизиқ ab га параллел эмас, улар ўзаро M нуқтада кесишади. M нуқта AB чизиқнинг нарсалар текислигидаги изидир. Шунинг учун M нуқтанинг сояси M_c ўзига тўғри келади. Демак, AB чизиқнинг нарсалар текислигидаги сояси A_cB_c нинг давоми M нуқтадан ўтади.

7- мисол. Вертикал қозиқ aA дан нарсалар текислигига ва бинонинг вертикал деворига тушган соя ясалсин. Қуёш орқа томонда, чапда берилган (282- шакл).

Ясаш. Қозиқдан тушган сояни ясаш учун кесувчи нур текислигидан фойдаланиш мумкин. Нур текислигининг изи as чизиққа тўғри келади. Нур текислиги вертикал текислик бўлгани учун у бинонинг вертикал девори билан вертикал чизиқ бўйича кесишади. Бу чизиқ билан AS нур кесишиб, A нуқтадан тушган A_c сояни ҳосил қилади. Кесма ai_c қозиқнинг al қисмидан нарсалар текислигига тушган сояси, l_cA_c қозиқнинг lA қисмидан вертикал деворга тушган сояси бўлади. Шундай қилиб, перспективада вертикал тўғри чизиқдан вертикал деворга тушган соя ҳам вертикал чизиқ бўлади.

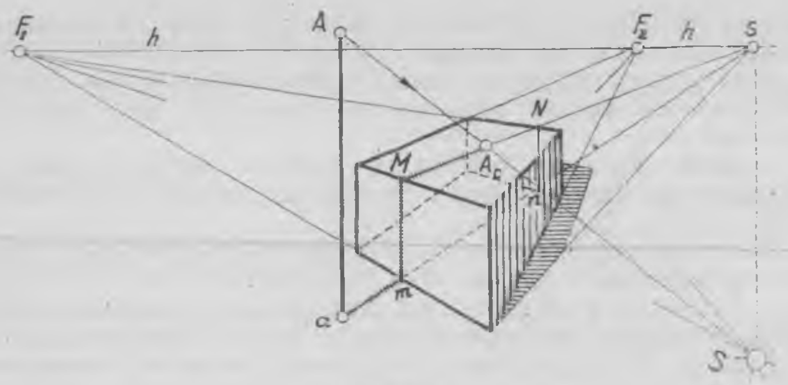


282- шакл

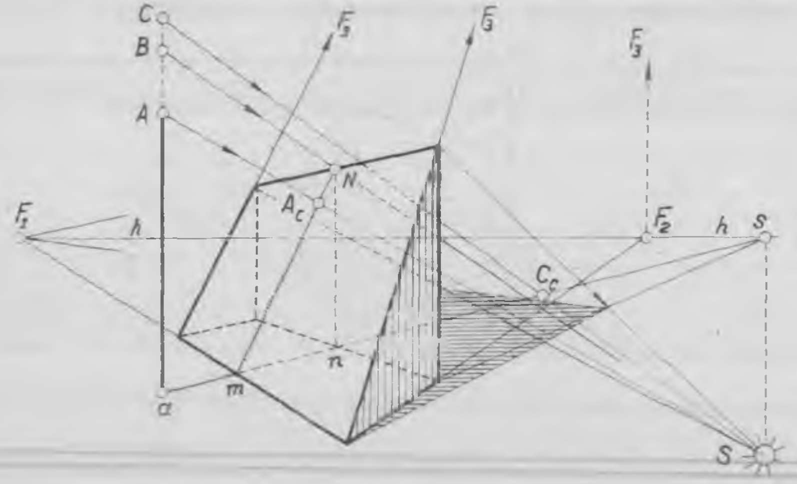
282- шаклда бинонинг ўз сояси ва тушган сояси ҳам кўрсатилган. Агар қуёш асосининг перспективаси S нуқта F_2 нуқтага тўғри келганда эди, қуёш нурлари бино ён фасадининг текислиги бўйича сирпаниб ўтар, агар s нуқта F_2 нуқтанинг чап томонида бўлса, ён фасад ҳам ёритилган бўлар эди.

8- мисол. Перспективада вертикал қозиқ aA, тўрт ёқли призма, Қуёш ва қуёш асоси (S, s нуқталар) берилган. Қозиқдан тушган соя ясалсин (283- шакл)

Ясаш. Вертикал қозиқ орқали нур текислиги ўтказилади (изи as). Бу текислик призмани $mMnN$ тўртбурчак бўйича кесади. Бу тўртбурчак билан AS нур кесишиб, A_c нуқтани ҳосил қилади. am MA_c қозиқдан тушган соя. Соянинг am ва MA_c қисмлари s нуқтага йўналган, mM қисми вертикал. Шаклда призманинг соялари ҳам



283- шакл



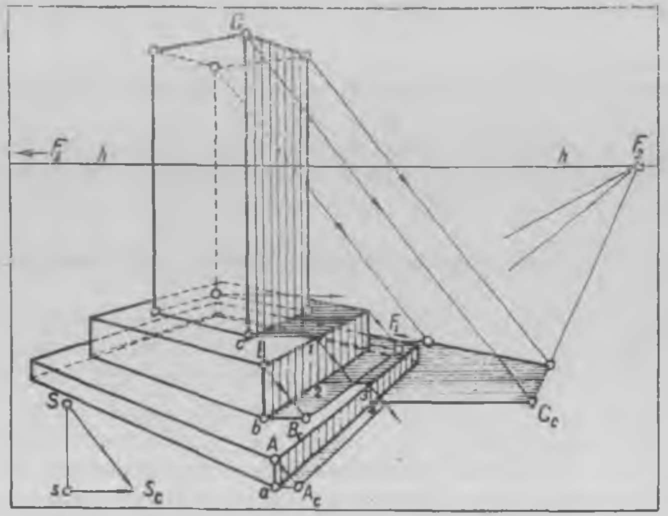
284- шакл

кўрсатилган. Уларни ясашни шаклнинг ўзидан тушуниб олиш қийин эмас.

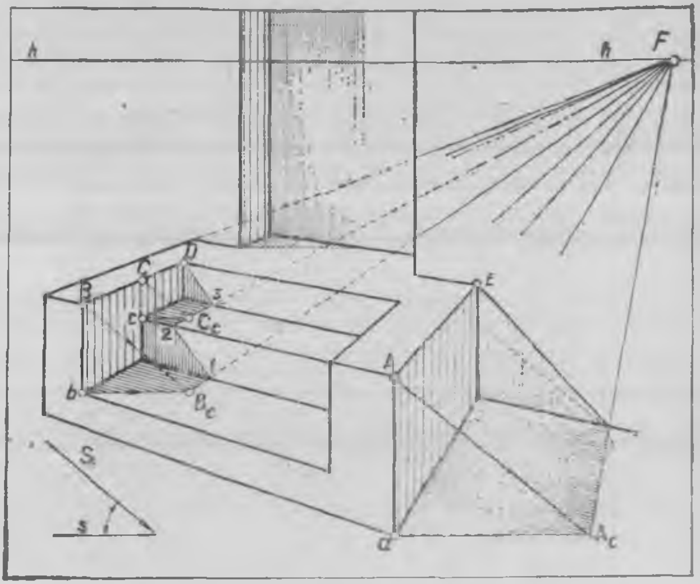
9- мисол. Перспективада вертикал қозиқ, уч ёқли призма ва S, s нуқталар берилган. Қозиқдан ерга ва призманинг қия ёғига тушган соя ясалсин (284- шакл).

Ясаш. Қозиқ орқали ўтказилган нур текислиги Aas призмани mnN учбурчак бўйича кесади. Бу учбурчак билан AS нур кесишиб, A нуқтадан тушган соя A_c нуқтани хосил қиладн. Синиқ чизиқ $am\ A_c$ — қозиқдан тушган соя. Соянинг mA_c қисми призманинг горизонтал текисликка қия бўлган қирраларининг учрашув нуқтаси F_3 га йўналган.

Агар қозиқнинг узунлиги aB га тенг қилиб олинса, унинг сояси amN булади; агар қозиқнинг узунлиги aC га тенг қилиб



285- шакл



286- шакл

олинса, aB қисмининг сояси amN бўлади, BC қисмининг сояси эса ерга тушади.

10- мисол. Монументнинг перспективаси берилган. Унинг соялари ясалсин (285- шакл).

Ясаш. Қуёш чап томонда ва ёруғлик нурлари картина текислигига параллел, деб фараз қилайлик. У вақтда барча вертикал чизиқлардан горизонтал текисликларга тушган соялар картинанинг асосига параллел бўлади. F_1 нуқтада учрашадиган горизонтал чизиқлардан тушган соялар F_1 нуқтага йўналган, F_2 нуқтада учрашадиган горизонтал чизиқлардан тушган соялар F_2 нуқтага йўналган бўлади. Монументнинг барча учларидан тушган соялар ясалиб, улар тегишли тартибда туташтирилса, монументдан тушган соянинг контури ҳосил бўлади. Шаклда *A, B, C* нуқталардан тушган соялар учун зарур бўлган ҳамма ясашлар белгиланган.

11- мисол. Перспективада зинанинг соялари ясалсин. Қуёш нурлари картина текислигига параллел; уларнинг йўналиши нур *S* ва унинг проекцияси *s* билан берилган (286- шакл).

Ясаш. Зинанинг *A*, *B*, *C*, . . . нуқталари орқали нурга параллел чизиқлар ўтказилади; нуқталарнинг нарсалар текислигидаги ёки унга параллел горизонтал текисликлардаги проекциялари *a*, *b*, *c*, . . . нуқталар орқали нур проекцияси *s* га параллел чизиқлар ўтказилади. Бир номли чизиқлар ўзаро кесишиб, нуқталардан тушган сояларни ҳосил қилади. Масалан, *A* нуқтадан ўтган нур билан *a* дан ўтган нур проекцияси кесишиб, A_c сояни, *B* нуқтадан ўтган нур билан *b* дан ўтган нур проекцияси кесишиб эса B_c сояни ҳосил қилади ва ҳоказо. Зинанинг *BD* қиррасидан тушган сояни ясаш учун B_c, C_c нуқталар *F* нуқта билан туташтирилади. Келиб чиққан *1* нуқта *2* нуқта билан, *3* нуқта *D* нуқта билан туташтирилади. Ҳосил бўлган $B_c — 1 — 2 — 3 — D$ синиқ чизиқ *BD* қиррадан тушган соядир. *AE* қиррадан тушган соя ҳам шундай йўл билан ясалган.

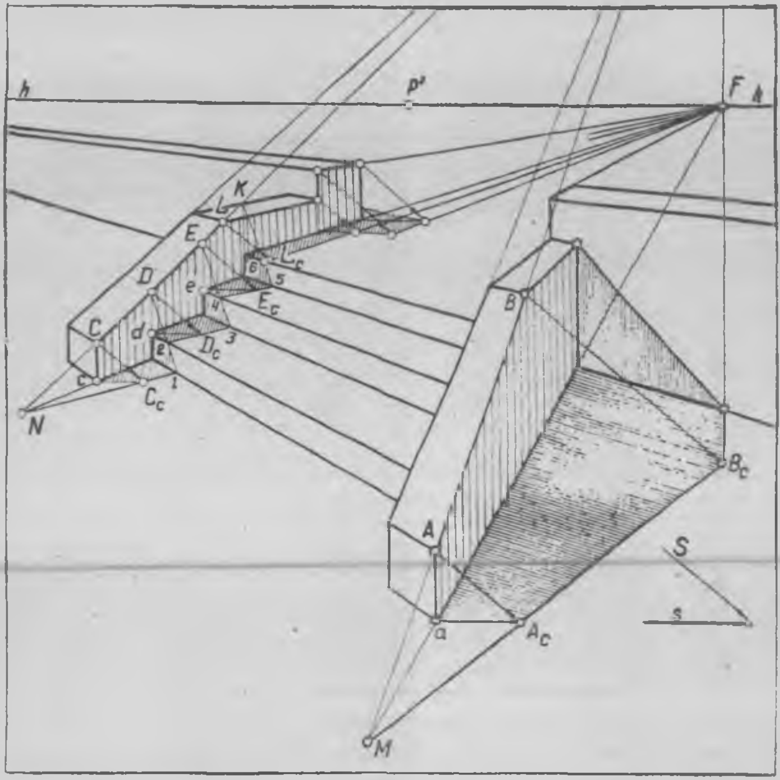
12- мисол. Қия пандусли зинанинг соялари ясалсин. Қуёш нурларининг йўналиши *S*, *s* билан берилган (287- шакл).

Ясаш. Зинанинг қия *AB* қиррасидан тушган сояни ясаш учун шу қирранинг горизонтал изи *M* нуқта аниқланади ва у *A* учидан тушган A_c соя билан туташтирилади. MA_c чизиқ қирранинг *B* учидан ўтган нур билан кесишиб, B_c сояни ҳосил қилади. A_cB_c чизиқ — *AB* қирралардан тушган соя.

Пандуснинг *CL* қиррасидан тушган сояни ясаш учун бу қирранинг горизонтал изи *N* нуқта ва *C* учидан тушган соя C_c нуқта орқали чизиқ ўтказиб, *1* нуқта аниқланади; кейин *1* нуқтани *D* нуқта билан туташтириб *2* нуқта, *2* нуқтани *D* нуқтадан тушган соя D_c билан туташтириб *3* нуқта, *3* нуқтани *E* билан туташтириб *4* нуқта, *4* нуқтани E_c соя билан туташтириб *5* нуқта ва *5* нуқтани *K* нуқта билан туташтириб *6* нуқта аниқланади, *6* нуқтадан *F* учрашув нуқтага йўналган чизиқ билан *L* дан ўтган нур кесишиб *L* нуқтадан тушган соя L_c нуқтани ҳосил қилади. Шундай қилиб, ҳосил бўлган $C\ 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6\ L_c$ синиқ чизиқ пандуснинг *CL* қиррасидан тушган соя бўлади. Бошқа қирралардан тушган соялар олдинги мисоллардаги йўллар билан ясалади.

13- мисол. Карниз ва пилястрнинг соялари ясалсин (288- шакл).

Ясаш. 1. Қуёш ва қуёш асосининг перспективалари *S*, *s* нуқ-

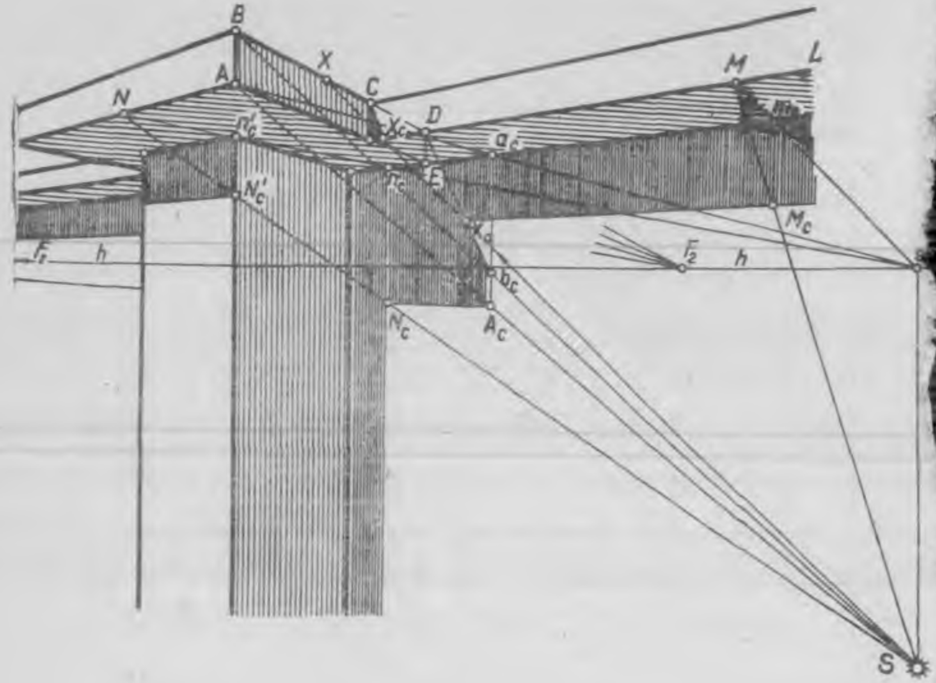


287- шакл

таларни аниқлаш учун бирорта нуқтадан тушган соя берилиши мумкин. Масалан, A нуқтадан деворга тушган соя A_c нуқта бўлсин. Карнизнинг пастки горизонтал текислиги нарсалар текислиги деб олинади (кўтарилган план) ва A_c нуқтанинг карниздаги проекцияси a_c нуқта топилади. Aa_c чизиқ нур асосининг перспективаси бўлади; бу чизиқ горизонт чизиғи билан кесишиб, қуёш асосининг перспективаси s нуқтани ҳосил қилади. AA_c чизиқ — нурнинг перспективаси; бу чизиқ s нуқтадан ўтказилган вертикал чизиқ билан кесишиб, қуёшнинг перспективаси S нуқтани ҳосил қилади.

2. Деворга тушган сояни ясаш учун A_c орқали вертикал чизиқ ўтказилади; бу чизиқ BS нур билан кесишиб, B_c нуқтани ҳосил қилади. Вертикал кесма A_cB_c вертикал AB кесмадан деворга тушган соя бўлади. E нуқта ёрдамида BC чизиқнинг девор текислигида ётган мавҳум нуқтаси D аниқланади. BD кесмадан деворга тушадиган соя B_cD кесма бўлади.

Карнизнинг ML чизиғидан деворга тушган сояни ясаш учун кесувчи нур текислигидан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун карнизда ихтиёрий олинган бирорта M нуқта орқали нур MS ва нурнинг



288- шакл

проекцияси M_s ўтказилади. Нурнинг проекцияси карниз текислиги билан девор текислигининг кесишган чизиғини кесиб, m_c нуқтани ҳосил қилади. Нур MS билан m_c нуқтадан ўтказилган вертикал чизиқнинг кесишган нуқтаси M_c карниздаги M нуқтадан деворга тушган соя бўлади. Карнизнинг қирраси деворга параллел бўлгани учун топилган M_c нуқта орқали F_1 учрашув нуқтасига йўналган чизиқ ўтказилса, қиррадан деворга тушган соя ҳосил бўлади.

Пилястрнинг вертикал $n'_cN'_c$ қиррасидан деворга тушган соя ҳам шу йўл билан ясалади. Бунинг учун нур проекцияси sn'_c чизилади ва унинг карниз ҳамда девор учун умумий бўлган қирра билан кесишган нуқтаси n_c орқали вертикал чизиқ ўтказилади.

3. Пилястрдаги сояни ясаш учун SN нур билан пилястр қиррасининг кесишган нуқтаси N'_c орқали F учрашув нуқтага йўналган чизиқ ўтказилади.

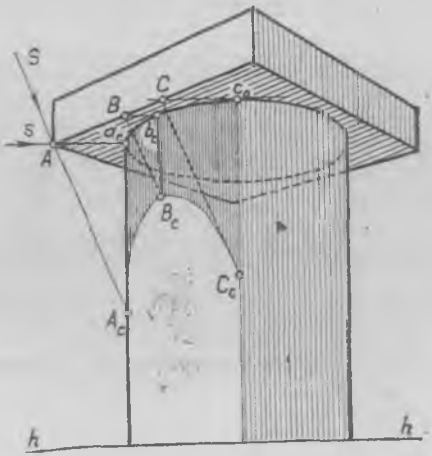
4. Карниздаги соя тескари нур Sx_c ёрдами билан ясалган.

14- мисол. Квадрат абакали цилиндрик устуннинг соялари ясалсин. Ёруғлик нурлари картина текислигига параллел ва уларнинг йўналиши SA, sA чизиқлар билан берилган (289- шакл).

Ясаш. Нарсалар текислиги сифатида абаканинг пастки текислилигини қабул қилса ҳам бўлади (кўтарилган план).

Устуннинг доира асосига Cc_0 уринма ўтказиб, цилиндрнинг ёри-

тилган қисмини соя қисмидан ажратувчи ясовчиси c_0C_c аниқланади ($Cc_0 \parallel sA$). Абаканинг қиррасидаги C нуқта орқали SA нурга параллел нур ўтказиб, C нуқтадан тушган соя Cc топилади. Цилиндрнинг контур ясовчисига сояси тушадиган абака қиррасидаги A нуқтани аниқлаш учун контур ясовчисининг асоси a_c нуқта орқали нур проекцияси sA га параллел чизиқ ўтказилади. Бу чизиқ абака қирраси билан кесишиб, A нуқтани ҳосил қилади. A нуқтадан ўтказилган нур цилиндрнинг контур ясовчиси билан кесишиб, A нуқтадан тушган соя A_c нуқтани ҳосил қилади. Aa_cA_c учбурчакка ўхшаш учбурчаклар ясаш йўли билан тушган соя контуридаги B_c ва бошқа нуқталар топилади. Топилган нуқталар ўзаро силлиқ эгри чизиқ воситасида туташтирилса, абаканинг қиррасидан устуннинг цилиндрик қисмига тушган соя (эллипс ёйи) келиб чиқади.



289- шакл

15- мисол. Юқори қисми ярим цилиндрдан иборат тоннелнинг перспективадаги соялари ясалсин. Қуёш ва қуёш асосининг перспективаси S, s нуқталар берилган (290- шакл, *а*).

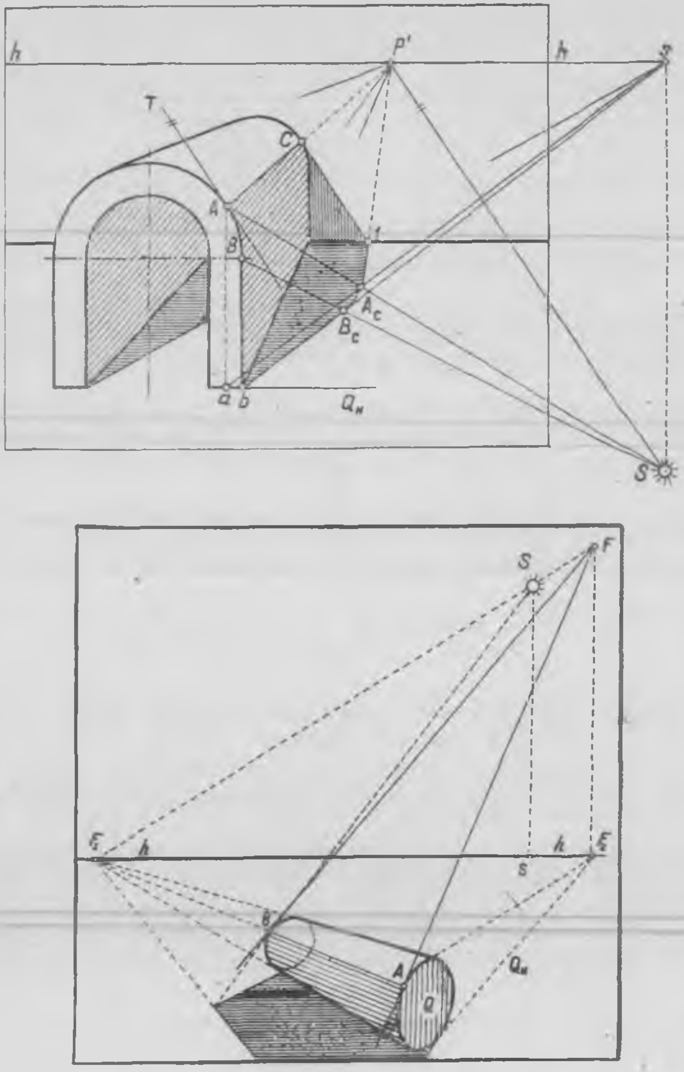
Я с а ш. Бу мисолни ечишдан олдин нарсалар текислигида ихтиёрий вазиятда ётган цилиндрнинг ёритилган қисмини соя қисмидан ажратувчи ясовчисини аниқлаш усулини кўриб чиқиш фойдали. Нарсалар текислигида ётган тўғри цилиндр ва S, s нуқталар берилган, деб фараз қилайлик (290- шакл *б*). Изланган ясовчини аниқлаш учун ёруғлик нурларининг цилиндр асосининг текислиги Q даги тўғри бурчакли проекцияларининг йўналишини, яъни учрашув нуқтасини билиш керак. Шу мақсадда цилиндр ясовчиларининг учрашув нуқтаси F_1 ва қуёшнинг перспективаси S нуқта орқали нур ўтказилади. Бу F_1S нур ҳақиқатда цилиндр асосининг текислиги Q га перпендикуляр бўлади.

F_1S нурнинг Q текисликдаги учрашув нуқтаси $F(F_2)$ топилади (F_2 нуқта Q текисликдаги горизонтал чизиқларнинг, шу жумладан текисликнинг горизонтал изи $Q_н$ нинг учрашув нуқтасидир). F нуқта орқали цилиндр асосига уринма ўтказиб, A нуқта топилади.

AB чизиқ цилиндрнинг соя қисмини ёритилган қисмидан ажратувчи ясовчиси бўлади.

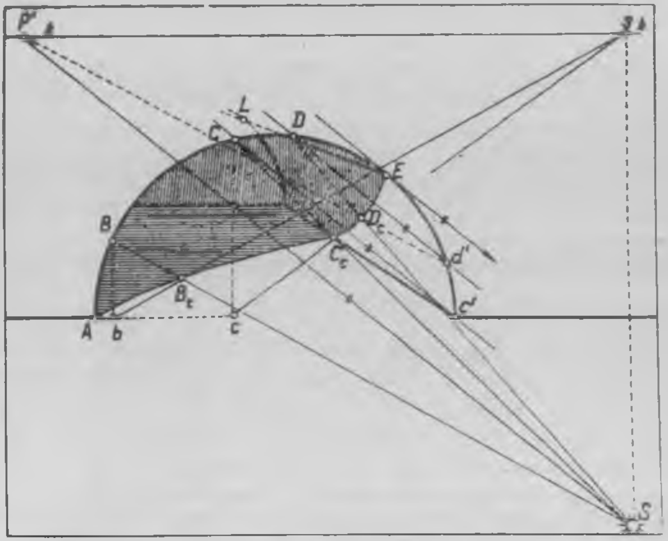
Энди 290- шакл, *а* да берилган мисолни ечишга ўтиш мумкин.

290-) шакл *а*, даги мисолда тоннель сиртини ҳосил қилувчи



290- шакл, *а*

цилиндрнинг ясовчилари картина текислигига перпендикуляр, чунки улар перспективада бош нуқтада учрашган. Шунинг учун цилиндр нормал асосининг горизонтал изи $Q_н$ горизонт чизиғи билан кесишмайди, яъни F_2 нуқта чексиз узоқда (290-шакл, *б* га қаранг) бўлади. Демак, $p'S$ нурнинг Q текисликдаги тўғри бурчакли проекциясининг учрашув нуқтаси F ҳам чексиз узоқда бўлади. Шунинг учун $p'S$ нурга параллел қилиб, цилиндр асосига уринма ўтказиб, A нуқта аниқланади. Бу нуқта-



291- шакл

дан ўтган AC чизиқ цилиндрнинг ёритилган қисмини соя қисмидан ажратувчи ясовчиси бўлади. Тоннелдан ерга ва вертикал деворга тушган сояни ясашни чизманинг ўзидан тушуниб олиш қийин эмас.

16- мисол. Асослари картина текислигига параллел яримцилиндр кўринишидаги арканинг ва Қуёш ҳамда қуёш асосининг перспективаси S, s нуқталар берилган. Арканинг соялари ясалсин (291- шакл).

Ясаш. Маълумки, ёруғлик нурларининг учрашув нуқтаси фазодаги кўриш нуқтаси P орқали қабул қилинган ёруғлик нурларининг йўналишига параллел қилиб ўтказилган PS чизиқ билан картина текислигининг кесишган нуқтасидир. Параллел тўғри чизиқларнинг бир номли проекциялари параллел бўлганлиги учун нурнинг картина текислигидаги проекцияси PS чизиқнинг картина текислигидаги проекциясига параллел бўлади. PS чизиқнинг картина текислигидаги проекцияси эса $p'S$ чизиқдир. Арка ярим айланасининг текислиги картина текислигига параллел бўлгани учун нурларнинг ярим айлана текислигидаги проекциялари картина текислигидаги проекцияларига параллел ва уларнинг перспективадаги учрашув нуқтаси чексиз узоқлашган нуқта бўлади. Шунга кўра, арка ички сиртига тушган соя контурининг бошланиш нуқтаси E ни аниқлаш учун $p'S$ чизиққа параллел ва ярим айланага уринма тўғри чизиқ ўтказиш керак. E нуқта орқали p' нуқтага йўналган тўғри чизиқ ўтказилса, арка цилиндрининг соя ва ёритилган қисмларга ажратувчи ясовчиси EL келиб чиқади. Арка ёйининг би-

рорта D нуқтасидан цилиндрнинг ички сиртига тушган нуқтани топиш учун D нуқта орқали $p'S$ чизиққа параллел тўғри чизиқ Dd' ўтказиб, ёйдаги d' нуқта аниқланади. Dd' чизиқ — ёруғлик нурининг ярим айлана текислигидаги проекцияси. DS нур билан арка цилиндрининг ясовчиси $p'd'$ кесишиб, изланган Dc нуқтани ҳосил қилади.

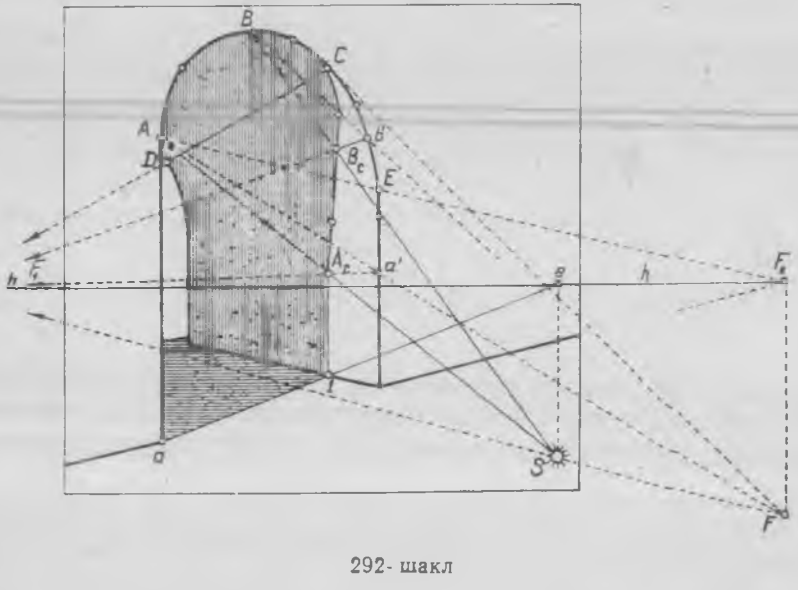
$Dd'D_c$ учбурчакни арка цилиндри билан нурлар цилиндрининг кесишув чизиғига оид D_c нуқтани топиш учун ўтказилган ёрдамчи текислик деб қараш мумкин. Бу текислик арка цилиндрини $p'd'$ ясовчиси бўйича, нурлар цилиндрини DS ясовчиси бўйича кесади: Dd' тўғри чизиқ эса шу текисликнинг фасад ярим айлана текислигидаги изи бўлади.

Юқоридаги мулоҳазаларга биноан, арка цилиндрининг горизонтал текисликдаги ясовчисига сояси тушадиган ярим айланадаги характерли C нуқтани аниқлаш учун c' нуқта орқали $p'S$ чизиққа параллел қилиб, тўғри чизиқ ўтказилади. CS нур билан $p'c'$ ясовчи кесишиб, изланган соя C_c нуқтани ҳосил қилади.

Арка цилиндрининг ички сиртига тушган соя контури C_cD_cE эгри чизиқ эллипс ёйидир. Горизонтал текисликка тушган соя контури AB_cC_c ҳам эллипс ёйи бўлади. $Б$ чизиққа оид нуқталарни топиш учун оддий умумий усулдан фойдаланилади. Шаклда B нуқтадан тушган соя B_c нуқтани топиш кўрсатилган.

17- мисол. Арканинг соялари ясалсин. Арканинг ички ABE қисми цилиндрик сирт, фасад томонининг текислиги картина текислигига қия. S, s нуқталар берилган (292- шакл).

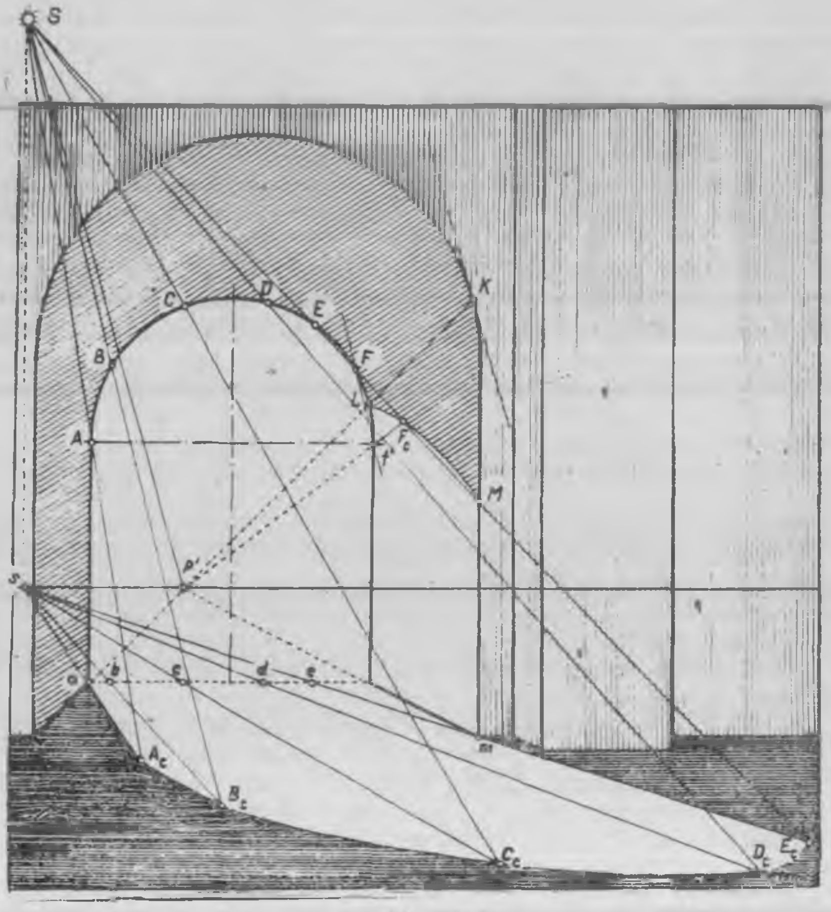
Ясаш. Арканинг вертикал қирраси Aa дан ерга ва арканинг вертикал деворига тушган соя $a1A_c$ синиқ чизиқ олдинги мисоллар-



292- шакл

да кўриб чиқилган нур текислиги *Aas* ёрдамида топилади. Арка ички сиртига тушган соя контурининг қолган A_cB_cC қисмини ясаш учун олдин цилиндрнинг ўз сояси контуридаги ясовчиси *CD* аниқланади. Шу мақсадда цилиндр ясовчиларининг учрашув нуқтаси F_1 ва Қуёш *S* орқали ўтган тўғри чизиқ ила арка фасади текислигидаги горизонтал чизиқларнинг учрашув нуқтаси F_2 дан ўтказилган вертикал чизиқ билан кесишган нуқтаси *F* аниқланади.

Маълумки, бу *F* нуқта ёруғлик нурларнинг арка фасади текислигидаги тўғри бурчакли проекцияларининг учрашув нуқтасидир (15- мисол, 290-шакл, *б* га қаранг) *F* нуқта орқали цилиндр асосига уринма ўтказиб, изланган *C* нуқта аниқланади. Шундан кейин *AC* ёйда ихтиёрий олинган бирорта *B* нуқтадан арканинг ички сиртига тушган B_c сояни топиш учун олдин *B* нуқта орқали *F* нуқтага йўналган тўғри чизиқ ўтказиб, b' нуқта аниқланади. Арка цилиндрининг ясовчиси $b'F_1$ билан нурлар



293- шакл

цилиндрининг ясовчиси BS кесишиб, изланган Bc нуқтани хосил қилади.

Шаклдаги AA_ca', BB_cb' учбурчакларни арка цилиндри билан нурлар цилиндрининг кесишув чизиғига оид умумий A_cB_c нуқталарни топиш учун ишлатилган ёрдамчи кесувчи текисликлар деб қараш мумкин. Ясалган A_cB_cC эгри чизиқ эллипснинг ёйидир.

18- мисол. Фасад томони картина текислигига параллел бўлган цилиндрик аркадан ўтган соя ясалсин. Қуёш кузатувчининг олд томонида чапда берилган (293- шакл).

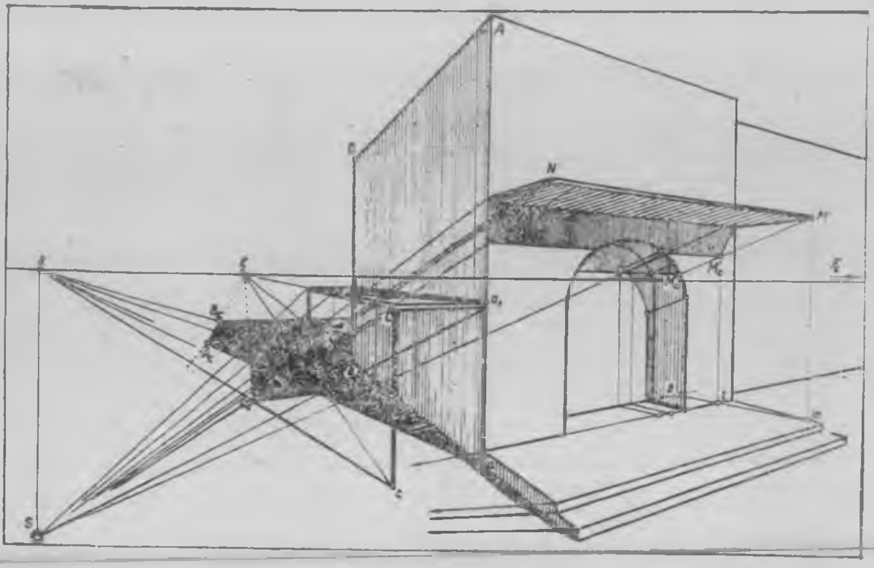
Ясаш. Арканинг орқа томонидаги эшик ўрнидан ерга тушган соянинг контури $aA_cB_cC_cD_cE_c$ чизиқ олдинги мисолларда кўриб ўтилган умумий усул билан топилади. Масалан, SA нур билан нур проекцияси sa кесишиб, A_c сояни, SB нур билан бу нурнинг проекцияси sb кесишиб, B_c сояни хосил қилади ва хоказо. Арка фасадининг ўнг томондаги қирраси орқали ўтадиган нур текислигининг горизонтал изи sm чизилса, бу из бояги топилган эллипс ёйи билан E_c нуқтада кесишади, шунинг билан ерга тушган соянинг контурини ясаш тугайди. E_c нуқтадан ўтказилган тескари нур E_cS ёрдамида қиррадаги M нуқта аниқланади M нуқта соянинг йўқолиш нуқтаси дейилади. $M(m)$ нуқтага арканинг орқа томонидаги E (e) нуқта тўғри келади. Бошқача қилиб айтганда, ердаги E_c нуқтани E нуқтадан тушган соя деб ҳам, M нуқтадан тушган соя деб ҳам қараш мумкин. M нуқтанинг ўзи эса E нуқтадан қиррага тушган соя деб қаралади. Арканинг орқа томонидаги ярим айлана қиррасидан арканинг ички сиртига тушган соя LF_cM чизиқни ясаш учун олдин арка ташқи сиртининг ёритилган қисмини соя қисмидан ажратувчи ясовчиси KL аниқланади. Бунинг учун нурнинг арка фасади текислигидаги проекцияси $p'S$ тўғри чизиққа параллел қилиб, ярим айлана қиррага уринма ўтказилса, K нуқта келиб чиқади. K нуқтадан p' нуқтага йўналган тўғри чизиқ ўтказилса, изланган L нуқта хосил бўлади (бу мисолда p' нуқта арка цилиндри ясовчиларининг перспективада учрашув нуқтасидир).

Эллипс ёйи LM орқа томондаги айлана ёйи EL дан тушган соядир.

Оралиқдаги бирорта F нуқтадан тушган соя F_c нуқтани топиш учун олдин шу нуқтадан ўтган нурнинг фасад текислигидаги проекцияси Ff' ўтказилади ($F'f' \parallel p'S$). SF нур билан цилиндрнинг ясовчиси $p'f'$ кесишиб, изланган F_c нуқтани хосил қилади.

19- мисол. Перспективада берилган объектнинг соялари ясалсин. Қуёш кузатувчининг орқа томонида, ўнгда (S, s нуқталар) берилган (294- шакл).

Ясаш. Объектнинг ўзига хос нуқталаридан, қирраларидан тушган соялар олдинги мисолларда қўлланилган ёруғлик нурлари текисликларидан фойдаланиб топилади. Масалан, арка тепасидаги зонтдан тушган сояни ясаш учун зонтнинг M нуқтаси орқали горизонтал проекцияловчи нур текислиги ўтказилади. Нур текислиги (бу текисликнинг объектга кирадиган зинапоя майдончасидаги изи sm) объект фасадидаги вертикал девор текислигини 1 нуқтадан кўтарилган вертикал чизиқ бў-



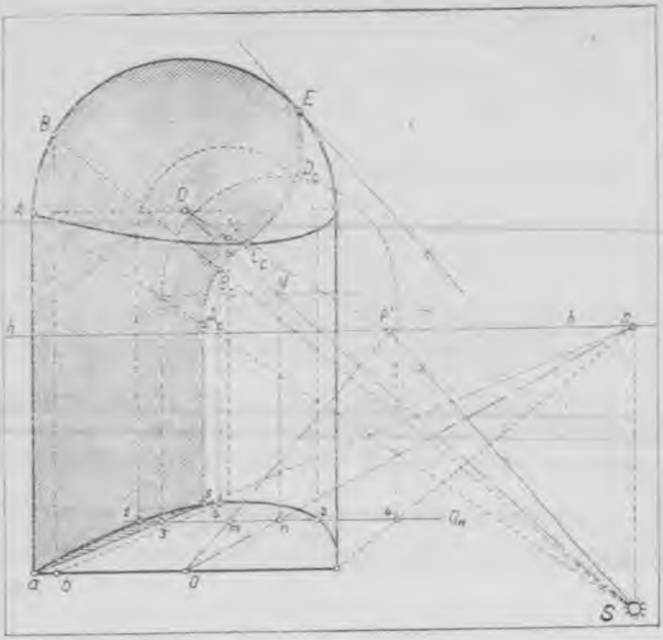
294- шакл

йича, ичкарироқдаги вертикал текисликни *2* нуктадан кўтарилган вертикал чизиқ бўйича кесиб ўтади. *1* ва *2* нукталардан кўтарилган чизиқлар билан SM нур кесишиб, M нуктадан фасад томондаги вертикал текисликларга тушган ва тушиши мумкин бўлган соялар —M_c , M'_c нуқталарни хосил қилади. Бу нуқталар орқали F_2 нуқтага йўналган чизиқлар ўтказилса, MN қиррадан фасад томондаги вертикал текисликларга тушган соя келиб чиқади. Аркнинг фасад томондаги қиррасидан ичкари томондаги вертикал текисликка тушган соя қирранинг шаклини ўзгартирмай такрорлайди, яъни вертикал қисмининг сояси вертикал чизиқ, айлана ёйининг сояси айлана ёйи бўлади, чунки фасаддаги қиррани ва қирранинг вертикал текисликдаги соясини битта нурлар цилиндрининг ўзаро параллел икки текислик билан кесилишидан хосил бўлган чизиқ деб қараш мумкин.

20- мисол. Юқори томони шарсимон цилиндрик токчанинг соялари ясалсин. Қуёшнинг вазияти перспективада S, s нуқталар билан берилган (295- шакл).

Ясаш. Токчанинг $aABE$ қиррасидан тушадиган соянинг $a5$ қисми токчанинг горизонтал текислигига, $5A_cB_cC_c$ қисми цилиндр сиртига ва қолган C_cD_cE қисми чорак шарнинг ички сиртига тушади. Соянинг текисликка ва цилиндр ички сиртига тушган қисмлари, олдинги мисоллардагидек, горизонтал проекцияловчи нур текисликлари ёрдамида топилади, уларни ясаш шаклнинг ўзидан тушунарли.

Соя контурининг бошланиш нуқтаси E токчанинг ярим айлана қиррасига нурларнинг фасад текислигидаги проекцияларининг йўна-



295- шакл

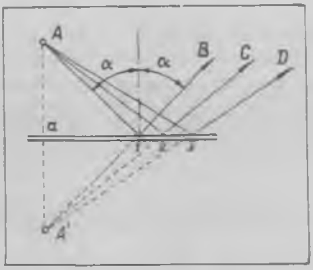
лиши $p'S$ га параллел қилиб, уринма ўтказиш йўли билан аниқланади.

Соя контурининг EC_c қисмидаги бирорта D_c нуқтани аниқлаш учун фасад текислигига параллел бўлган ёрдамчи фронтал Q текисликдан фойдаланиш мумкин ($Q_н$ — текисликнинг горизонтал изи). Бу текислик токчанинг шарсимон қисмини маркази M нуқтада бўлган ва радиуси $1m = m2$ га тенг ярим айлана бўйича, нурлар цилиндрини маркази N нуқтада бўлган ва радиуси $3n = n4$ кесмага тенг ярим айлана бўйича кесади. Бу ярим айланаларнинг кесишган нуқтаси D_c соя контурига оид изланган нуқта бўлади.

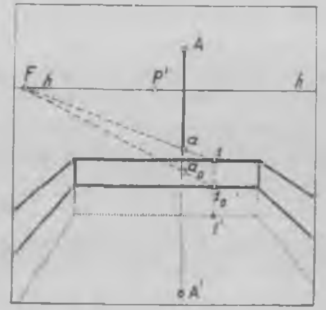
90- §. Кўзгу сиртларда акс этиб кўриниш

Қўзгунинг олд томонида турган A нуқтадан чиққан $A1$, $A2$, $A3$,... нурлар кўзгу сиртидан акс этиб тарқалган $1B$, $2C$, $3D$,... йўналишлар бўйича кетади (296- шакл). Агар тарқалган бу нурларнинг боғлами кишининг кўзига тушса, улар кўзгунинг орқа томонидаги A' нуқтадан чиққанга ўхшаб кўринади.

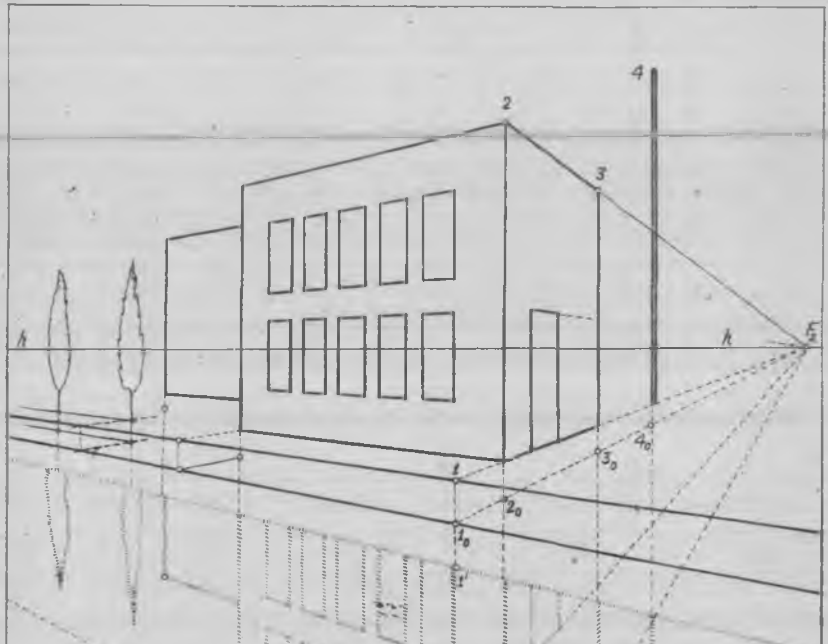
Физикадан маълумки, тушган нур (масалан, $A1$) ва акс этган нур ($1B$) нинг тушган нуқтасидан кўзгу текислигига нисбатан ўтказилган перпендикуляр билан бир текисликда ётади ҳамда нурнинг тушиш бурчаги акс этиш бурчагига тенг бўлади ($\alpha = \beta$). Шунинг учун A, A' нуқталар кўзгунинг текислигига



296- шакл



297- шакл



298- шакл

нисбатан симметрик нуқталар бўлади (AA' кўзгу текислигига перпендикуляр ва $aA=aA'$) A' нуқта A нуқтанинг кўзгуда акс этиб кўриниши ёки мавҳум тасвири дейилади.

Нарсанинг кўзгуда (ёки сувда) акс этиб кўринишини ясаш учун нарсанинг ҳар қайси характерли нуқтаси орқали кўзгу текислигига нисбатан перпендикуляр ўтказиб, уни кўзгунинг орқа томонига тенг масофада давом эттириш керак; шундай қилиб, топилган нуқталар тегишли равишда ўзаро туташтирилса, нарсанинг акси келиб чиқади.

297- шаклда ҳовуз бўйида турган вертикал Aa қозиқдан сувга тушган тасвирни ясаш кўрсатилган. Қозиқдан сувга тушган тасвирни ясаш учун горизонт чизиғида олинган бирорта ихтиёрий F нуқта қозиқнинг асоси a нуқта билан туташтирилади ва Fa чизиқ ҳовузнинг вертикал девори қирраси билан 1 нуқтада кесишгунча давом эттирилади. Бу 1 нуқтанинг сув сиртидаги проекцияси 1_0 нуқта F нуқта билан туташтирилади. 1_0F чизиқ билан Aa чизиқнинг давоми кесишиб, қозиқнинг сув сиртидаги асоси a_0 нуқтани ҳосил қилади. Энди a_0 нуқтадан узунлиги Aa_0 кесмага тенг кесма қўйилса, қозиқнинг сувдаги акси келиб чиқади.

298- шаклда сув бўйига қурилган бино ва унинг сувдаги акси перспективада тасвирланган.

XVI боб. СОНЛАР БИЛАН БЕЛГИЛАНГАН ПРОЕКЦИЯЛАР

91- §. Усулнинг таърифи. Нуқталарнинг проекциялари

Инженерлик қурилиш ишларида кўпинча ер сиртини тасвирлашга ва шундай тасвирларда турли сунъий иншоотларни (темир йўлларни ва автомобиль йўлларини, каналларни, гидроузелларни, аэродромларни, майдонча ва бошқаларни) проекциялашга ва бир қатор метрик масалаларни ечишга тўғри келади.

Ер юзининг ва ер иншоотларининг шакллари мураккаб, баландликлари бошқа ўлчамларига нисбатан ниҳоятда кичик бўлгани учун уларни бир-бирига перпендикуляр бўлган икки текисликдаги ортогонал проекциялар методида, бинобарин, аксонометрик ёки перспектива методларида ҳам тасвирлаш жуда қийин ва ноқулайдир. Шунинг учун бу мақсадда ўрта асрлардан бери махсус усулда (сонлар билан белгиланган проекциялар) қўлланилади. Бу усулда нуқталарнинг горизонтал проекциялар текислигидан олисликларини (нуқталарнинг баландликларини) кўрсатувчи фронтал проекциялари сонлар (белгилар) билан алмаштирилади.

Шундай қилиб, нуқталарнинг проекциялар текислиги сифатида қабул қилинган бирорта горизонтал текисликдан олисликларини кўрсатувчи сонлар билан таъминланган тўғри бур-

чакли проекциялари *сонлар билан белгиланган проекциялар* дейилади.

Баъзи масалаларни ечишда вертикал текисликдаги проекцияни ясашга ҳам тўғри келади, лекин бу проекция фасад кўринишида эмас, балки асосий горизонтал проекциялар текислиги билан жипслаштирилган вертикал кесим кўринишида ясалади.

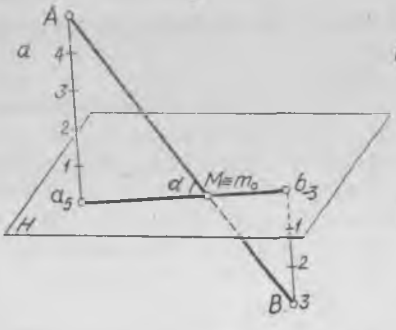
Асосий горизонтал проекциялар текислиги (ноль даражали текислик) сифатида, одатда, денгиз, дарё ёки океан сувининг юзи қабул қилинади.

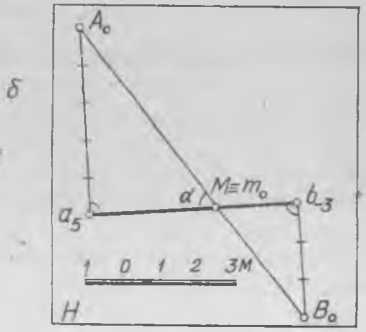
Асосий горизонтал текисликнинг юқори томонида жойлашган нуқталарнинг белгилари мусбат ҳисобланади ва бундай белгиларни кўрсатувчи сонлар ишорасиз ёзилади. Асосий текисликнинг ост томонида жойлашган нуқталарнинг белгилари манфий ҳисобланади. Манфий белгиларни кўрсатувчи сонлар олдига минус ишораси қўйилади. Асосий текисликдаги нуқталарнинг белгилари ноль бўлади.

Узунлик бирлиги сифатида кўпинча метр олинади.

299- шакл, *а* да асосий горизонтал текисликнинг юқори томонида 5 м баландда турган *A* нуқтани ва асосий текисликнинг ост томонида 3 м пастда турган *B* нуқтани проекциялаш кўрсатилган. *A* ва *B* нуқталардан асосий (*H*) текисликка туширилган перпендикулярларнинг асослари a_5, b_3 нуқталар *A*, *B* нуқталарнинг сонлар билан белгиланган проекциялари бўлади. Нуқтанинг фазодаги ўрнини унинг сонлар билан белгиланган проекцияси бўйича аниқлаш учун чизманинг масштабини билиш керак. Нуқтанинг проекциясидан текисликка нисбатан ўтказилган перпендикуляр бўйича тегишли масштабда нуқтанинг баландлиги қўйилса, унинг фазодаги ўрни келиб чиқади.

299- шакл, *б* да нуқталарнинг сонлар билан белгиланган проекциялари кўрсатилган чизмаси тасвирланган. Бундай чизмаларни шартли разишда планлар деб атаймиз. Планларда узунлик масштаби чизилиши лозим.

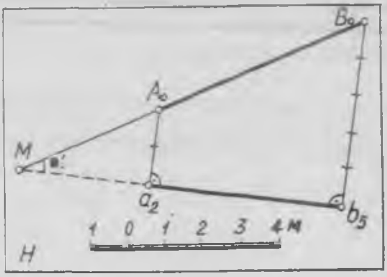




299- шакл

92- §. Тўғри чизиқнинг проекцияси

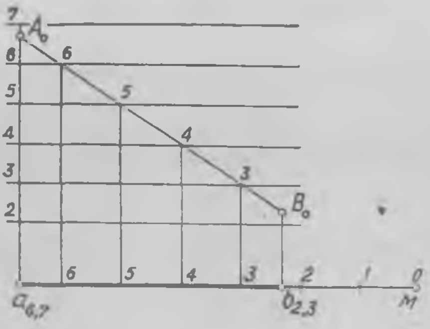
Асосий (H) текисликдаги a_5 ва b_{-3} нуқталарни туташтирсак (299-шакл, *a* ва *b*), фазодаги *AB* кесманинг сонлар билан белгиланган проекцияси ҳосил бўлади. Тўғри чизиқ кесмаси проекциянинг узунлиги (a_5 b_{-3}) *тўғри чизиқнинг қўймаси* дейилади. *M* нуқта тўғри чизиқнинг асосий текисликдаги изи, α бурчак тўғри чизиқнинг асосий текисликка *қиялик бурчагидир.* 299- шакл, *б* даги планда тасвирланган *AB* кесманинг ҳақиқий узунлиги A_0B_0 ни, изи *M* нуқтани ва *H* текислик билан ҳосил қилган бурчаги α ни топиш кўрсатилган. Бунинг учун кесмани проекцияловчи текислик ABb_{-3} a_5 унинг изи a_5 b_{-3} атрофида айлантириб, *H* текисликка жойлаштирилган.



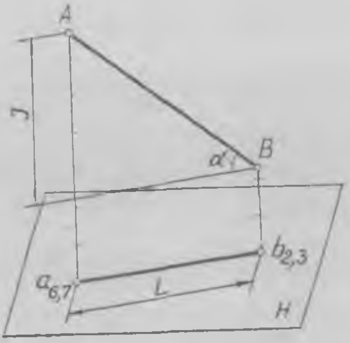
300- шакл

300- шаклда асосий текисликнинг юқори томонида жойлашган *AB* тўғри чизиқ кесманинг берилган a_2b_5 проекцияси бўйича ҳақиқий узунлигини, *M* нуқтани ва α бурчакни топиш кўрсатилган. Бунинг учун проекцияга нисбатан a_2 нуқтадан ўтказилган перпендикуляр бўйича 2 м, b_5 нуқтадан ўтказилган перпендикуляр бўйича 5 м қўйилса, ҳосил бўлган трапециянинг A_0B_0 томони кесманинг ҳақиқий узунлигига тенг бўлади. *A* ва *B* нуқталар асосий текисликнинг бир томонида бўлгани учун уларнинг баландликлари (2м, 5 м) ўтказилган перпендикулярлар бўйича проекциянинг бир томонига қўйилади. Проекция a_2b_5нинг давоми билан A_0B_0 давомининг кесишган нуқтаси **AB** чизиқнинг **H** текисликдаги изини (*M* нуқтани) ҳосил қилади.

Кўпинча тўғри чизиқ планда каср сонлар билан белгиланган проекция орқали берилади. Шундай ҳолларда проекциянинг бутун сонлар билан белгиланадиган нуқталарини топишга тўғри келади. Бундай нуқталарни топиш тўғри чизиқни интерполяция қилиш дейилади. 301- шаклда нуқталарнинг проекциялари $a_{6,7}$ ва $b_{2,3}$ орқали берилган тўғри чизиқ проекциясининг бутун сонлар билан белгиланган нуқталарини аниқлаш усули (интерполяция қилиш) кўрсатилган. Бунинг учун тўғри чизиқнинг проекцияси $a_{6,7}$ ва $b_{2,3}$ га параллел ва оралиқлари ўзаро тенг бир неча тўғри чизиқ ўтказиб, уларни *2, 3, 4,* ... белгили даража чизиқлари сифатида қабул қиламиз. Берилган тўғри чизиқнинг проекциясига нисбатан $a_{6,7}$ ва $b_{2,3}$ нуқталардан кўтарилган перпендикулярларнинг тегишли *6, 7* ва *2, 3* даражаларида A_0 ва B_0 нуқталарни аниқлаймиз. A_0 ни B_0 билан туташтирамиз. Бу чизиқнинг даража чизиқлари билан кесишган



301- шакл



302- шакл

нуқталари *3, 4, 5, 6* белгиларга эга бўлади. Бу нуқталардан тўғри чизикнинг проекциясига туширилган перпендикулярнинг асослари белгилари бутун сонлар *3, 4, 5, 6* бўлган нуқталарнинг проекциялари бўлади. Кўриниб турибдики, бу нуқталар тўғри чизиқнинг проекциясини тенг кесмаларга бўлади. *3* нуқтадан ўнг томонга шундай кесмаларни қўйиб, *2, 1, 0* нуқталарни топамиз. Белгиси ноль бўлган *M* нуқта тўғри чизиқнинг асосий текисликдаги изидир.

Проекциядаги *6—5, 5—4, 4—3*, ... кесмалар ўзаро тенг бўлиб, уларнинг ҳар бири тўғри чизиқнинг интервали (оралиғи) дейилади.

Демак, *баландликларининг фарқи бир бирликка* (1 м га) *тенг бўлган икки нуқта орасидаги горизонтал масофа интервал деб аталади.*

Тўғри чизиқнинг ихтиёрий иккита *A* ва *B* нуқтаси орасидаги горизонтал масофа *L* қўйма деб, шу нуқталар орасидаги вертикал масофа *I* эса кўтарилиш деб аталди (302- шакл). Қўймани кўтарилишга бўлган нисбати интервал *l* ни беради, яъни:

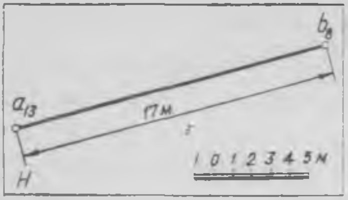
$$l = \frac{L}{I} = \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (1)$$

Қўймаси бир бирликка (1м *га*) *тўғри келадиган кўтарилиш тўғри чизиқнинг қиялиги деб аталади.* Кўтарилишнинг қўймага бўлган нисбати қиялик *i* ни беради, яъни:

$$i = \frac{I}{L} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг интервали қиялигининг тескари қийматига тенгдир, яъни:

$$l = \frac{1}{i}. \qquad (3)$$



303- шакл

1- мисол. AB кесманинг интервали l аниқлансин (303- шакл).

Ечиш. $a_{13}b_8$ проекциянинг узунлигини чизманинг масштаби бўйича ўлчаб, қуймани топамиз ($L = 17$ м). Кўтарилиш $I = 13 - 8 = 5$ м. Бундан:

$$l = \frac{L}{I} = \frac{17}{5} = 3{,}4 \text{ м}$$

келиб чиқади.

Демак, AB тўғри чизиқ горизонтал проекциясининг ҳар бир 3,4 метридан кейин 1 метр кўтарилади.

2- мисол. AB кесманинг проекцияси $a_{24,3}$ $b_{12,3}$ ва проекциянинг узунлиги $L = a_{24,3}$ $b_{12,3} = 36$ м берилган. Чизиқнинг интервали, қиялиги ва A нуқтадан B нуқта томонга қараб, 10 м масофада турган C нуқтанинг белгиси топилсин.

Ечиш. Интервал:

$$l = \frac{36}{24{,}3 - 12{,}3} = 3 \text{ м};$$

қиялик:

$$i = \frac{I}{l} = \frac{1}{3} \text{ м}.$$

C нуқтанинг белгиси A нуқтаникидан $10 \times \frac{1}{3} = 3{,}33$ м кам бўлади. Демак, C нуқтанинг белгиси $24{,}3 - 3{,}33 = 20{,}97$ м дир.

Бу мисолдан шундай хулоса чиқариш мумкинки, сонлар билан белгиланган проекцияларда тўғри чизиқни унинг проекцияси йўналиши, бирорта нуқтасининг белгиси ва қиялиги (ёки интервали) билан берилса ҳам бўлар экан.

98-§. Икки тўғри чизиқнинг проекциялари

Икки тўғри чизиқ параллел, кесишган ёки учрашмас бўлиши мумкин.

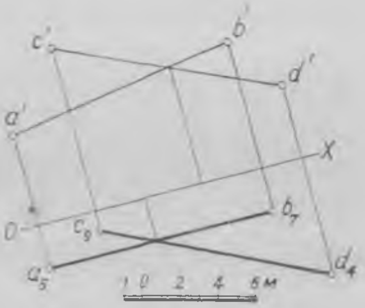
1. *Ўзаро параллел тўғри чизиқлар.* Бу ҳолда тўғри чизиқларнинг проекциялари ўзаро параллел, қиялик (ёки интерваллари) тенг, белгилари эса бир томонга ўсади.

2. *Ўзаро кесишувчи икки чизиқ.* Бундай тўғри чизиқларнинг проекциялари ўзаро кесишади ва бу кесишув нуқтасининг белгиси иккала тўғри чизиқ учун ҳам бир хил бўлади.

3. *Учрашмас тўғри чизиқлар.* Агар тўғри чизиқларнинг проекциялари ўзаро параллел ёки кесишув шартларини қаноатлантирмаса, ундай тўғри чизиқлар учрашмас бўлади.

Икки тўғри чизиқнинг ўзаро қандай жойлашганлигини аниқ-

лаш учун уларни бирорта вертикал текисликка проекциялаб, бу текисликни асосий (H) текисликка жипслаштирса ҳам бўлади. Чизиқларнинг янги проекциялари ва сонлар билан белгиланган проекциялари биргаликда уларнинг фазода ўзаро қандай жойлашганини, ортогонал проекциялар бўлимида кўриб ўтилган шартларга мувофиқ аниқлаш имконини беради.



304- шакл

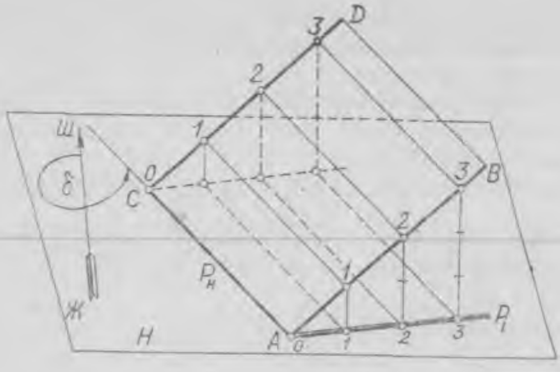
Мисол. Сонлар билан белгиланган проекциялари (a_5b_7, c_9d_4) орқали берилган тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашуви аниқлансин (304- шакл).

Ечиш. AB чизиқнинг проекциясига параллел тўғри чизиқ ўтказиб, уни проекциялар ўқи сифатида қабул қиламиз ($OX \parallel a_5b_7$). Ўқдан бошлаб, чизманинг масштабида нуқталарнинг баландликларини қўямиз. Тўғри чизиқларнинг янги проекциялари ($a'b'c'd'$) билан берилган горизонтал проекциялари (a_5b_7, c_9d_4) биргаликда чизиқларнинг фазода ўзаро жойлашувини аниқлайди. Бу мисолдаги чизиқлар учрашмас, чунки бир номли проекцияларнинг кесишган нуқталари OX ўққа нисбатан бир перпендикулярда эмас.

94- §. Текислик

Сонлар билан белгиланган проекцияларда текислик, ортогонал проекциялардаги сингари, бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтанинг проекциялари, тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқтанинг проекциялари, иккита кесишувчи ёки параллел чизиқларнинг проекциялари орқали берилиши мумкин. Аммо сонлар билан белгиланган проекцияларда текисликни унинг қиялик масштаби билан бериш энг қулай усуллардандир. *Энг катта қиялик чизиғининг даражаларга бўлинган (интервали кўрсатилган) проекцияси текисликнинг қиялик масштаби деб аталади.*

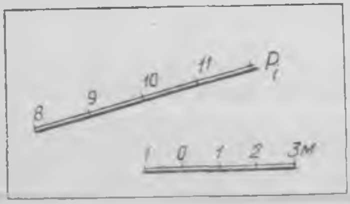
305- шаклдаги яққол тасвирда P текислик ва унинг элементлари кўрсатилган. AB, CD чизиқлар текисликнинг энг катта қиялик чизиқлари, AC чизиқ текисликнинг H текисликдаги изи, $1-1$, $2-2$, $3-3$ чизиқлар бир- биридан (баландлиги бўйича) 1 м масофада турган горизонталлардир. Энг катта қиялик чизиғи AB нинг проекцияси қўш (бири иккинчисидан йўғонроқ) чизиқ билан чизилган ва P_i билан белгиланган. Шу P_i чизиқ текисликнинг қиялик масштаби дейилади. Текислик горизонталларининг проекциялари билан қиялик масштаби P_i тўғри бурчак остида кесишади. Ёндош горизонталларнинг проекциялари орасида масофа текисликнинг интервали дейилади. Текисликнинг интервали унинг энг катта қиялик чизиғининг интер-



305- шакл

валига тенг ва тўғри келади. Шунга кўра, текисликни унинг бирорта энг катта қиялик чизиғининг даражаларга бўлинган проекцияси (P_i) билан бериш мумкин (306- шакл).

P текисликнинг *H* текисликка нисбатан қиялик бурчаги α (305- шакл) текисликнинг пасайиш бурчаги дейилади. Бу бурчак энг катта қиялик чизиғи (*AB*) ва унинг проекцияси (P_i) орасидаги бурчак билан ўлчанади (305- шакл).



306- шакл

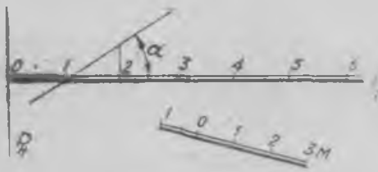
Ер меридианининг йўналиши билан текисликнинг изи ёки горизонталларининг проекциялари орасидаги δ бурчак *текисликнинг ёйилиш бурчаги* дейилади. Белгиларнинг ўсиш томонига қараб турилганда горизонталларнинг ўнг тарафидаги йўналиши *текисликнинг ёйилиш йўналиши* дейилади. δ бурчак меридианнинг (магнит стрелкасининг) шимолий учида ёйилиш йўналишигача соат стрелкаси юришининг тескари томони бўйича ўлчанади (305- шакл).

Текисликнинг пасайиш бурчаги ва ёйилиш бурчаги геологияда қўлланилади. Пасайиш ва ёйилиш бурчаклари тоғ жинслари қатламларининг ер қобиғида жойланишини кўрсатувчи элементлардир.

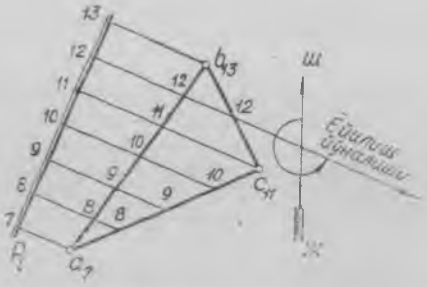
1- мисол. Текисликнинг қиялик масштаби P_1 ва чизманинг масштаби берилган (307- шакл). Текисликнинг изи ($P_н$) ва пасайиш бурчаги (α) топилсин.

Ечиш. *3* нуқтадан чап томонга уч интервал қўйиб, белгиси *0* бўлган нуқтани аниқлаймиз. Текисликнинг изи шу нуқтадан қиялик масштабига перпендикуляр бўлиб ўтади ($P_н \perp P_i$)

Текисликнинг пасайиш бурчагини топиш учун, бир катети



307- шакл



308- шакл

интервалга, иккинчи катети баландлик масштабининг (чизма масштабининг) бирлигига тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз. Бу учбурчакнинг интервалга тенг катети билан гипотенузаси орасидаги бурчак изланган α бурчакка тенг бўлади.

2- мисол. Учта *A*, *B*, *C* нуқталарнинг проекциялари билан берилган *P* текисликнинг қиялик масштаби (P_i) ясалсин ва ёйилиш бурчаги δ аниқлансин (308- шакл).

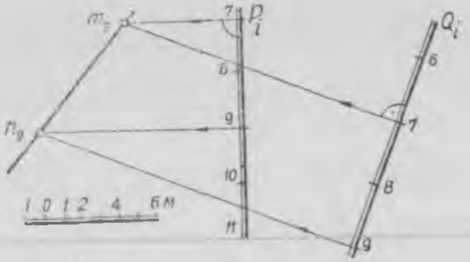
Ечиш. *AB* ва *AC* чизиқларнинг проекцияларини даражаларга бўлиб (301- шаклда курсатилган усул билан), белгилари бир хил бўлган нуқталарни тўғри чизиқлар воситасида туташтирамиз. Бу чизиқлар *P* текислик горизонталларининг проекциялари бўлади. Қиялик масштаби P_i горизонталларнинг проекцияларига перпендикуляр қилиб чизилади. Уни исталган жойдан ўтказиш мумкин. Текисликни ёйилиш бурчаги δ ни ўлчаш чизманинг ўзидан тушунарли.

95- §. Икки текислик

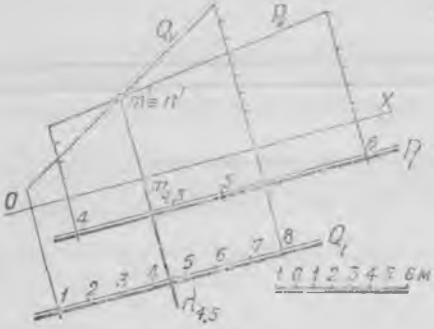
1. Параллел текисликлар. Агар бир текисликнинг қиялик масштаби иккинчи текисликнинг қиялик масштабига параллел, интервали интервалига тенг ва белгиларининг кўпайиши бир йўналишда бўлса, бундай текисликлар фазода ўзаро параллел бўлади (309- шакл).

2. Кесишувчи текисликлар Икки текисликнинг ўзаро кесишув чизиғини ясаш учун бу ерда ҳам ортогонал проекциялардагидек, ёрдамчи кесувчи горизонтал текисликлардан фойдаланилади. Ҳар қайси ёрдамчи текислик берилган текисликларни уларнинг бир хил белгили горизонталлари бўйича кесади. Бу горизонталларнинг кесишган нуқтаси текисликларнинг ўзаро кесишув чизиғига оид умумий нуқта бўлади.

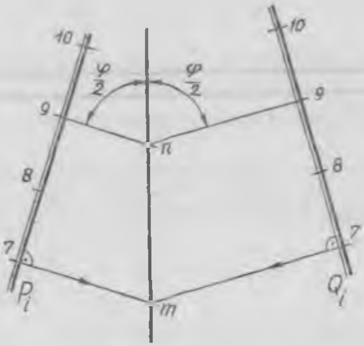
309- шакл



310- шакл



311- шакл



312- шакл

Мисол. P ва Q текисликларнинг қиялик масштаблари P_i ва Q_i берилган (310- шакл). Текисликлар кесишув чизиғининг проекцияси ясалсин.

Ечиш. Қиялик масштаблари P_i ва Q_i да белгилари бир хил бўлган, масалан, *7* ва *9* нуқталар оламиз ва улар орқали қиялик масштабларига перпендикуляр қилиб, горизонталларнинг проекцияларини ўтказамиз. Бир горизонтал текисликда ётган тегишли горизонталлар проекцияларининг кесишган нуқталари m_7, n_9 орқали ўтган тўғри чизиқ берилган P ва Q текисликлар кесишув чизиғининг проекцияси бўлади.

Агар берилган текисликларнинг қиялик масштаблари P_i ва Q_i ўзаро параллел бўлса, кесишув чизиғининг проекциясини топиш учун P ва Q текисликларни уларнинг горизонталларига перпендикуляр вертикал текисликка қўшимча проекциялашдан фойдаланиш мумкин (311- шакл). Текисликларнинг янги (вертикал проекциялар) текисликдаги излари P_V, Q_V нинг кесишган нуқтаси $m' \equiv n'$ кесишув чизиғининг горизонтал проекцияси m_4, 5 . . . n_4, *5* . . . ни беради.

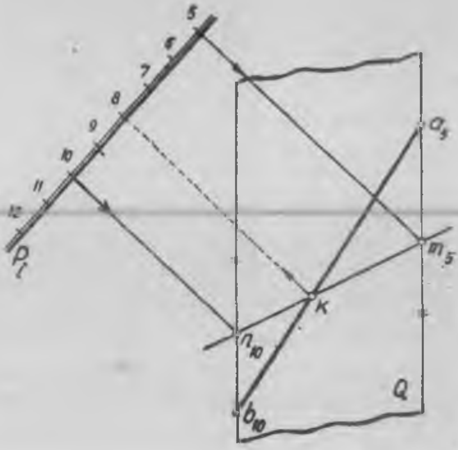
Агар берилган текисликларнинг пасайиш бурчаклари (демак, интерваллари) тенг бўлса, уларнинг кесишув чизиғининг проекцияси мазкур текисликлар горизонталлари орасидаги бур-

чакнинг биссектрисаси бўлади (312--шакл). Бу ҳолдан, нишаблари горизонтал текислик билан бир хил α бурчак ҳосил қилувчи бино томларининг планларини чизишда фойдаланилади.

96- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишуви

Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган нуқтасини сонлар билан белгиланган проекцияларда ҳам, ортогонал проекциялардаги сингари, тўғри чизиқ орқали ўтказилган ёрдамчи текислик воситасида топиш мумкин. Фақат бу ерда ёрдамчи текислик сифатида умумий вазиятдаги текислик ўтказилади.

Мисол. Қиялик масштаби P_i орқали берилган текислик билан проекцияси a_5b_{10} орқали берилган тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси (k) топилсин (313-шакл).

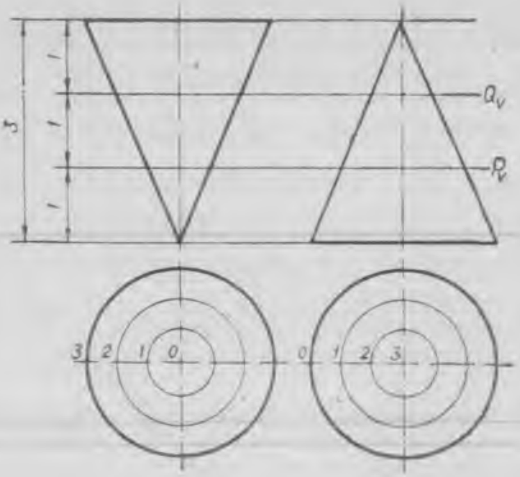


313- шакл

Ечиш. Берилган тўғри чизиқ орқали умумий вазиятдаги ёрдамчи Q текислик ўтказамиз. Бунинг учун a_5, b_{10} йўналган иккита ўзаро параллел чизиқ ўтказамиз ва уларни ёрдамчи Q текисликнинг горизонталлари сифатида қабул қиламиз. Ёрдамчи Q текислик билан берилган P текислик кесишув чизиғининг проекцияси m_5n_{10} ни ясаймиз. Бу чизиқ a_5b_{10} билан кесишиб, изланган K нуқтанинг проекциясини ҳосил қилади. Агар m_5n_{10} чизиқ a_5b_{10} чизиққа параллел бўлса, AB тўғри чизиқ P текисликка параллел бўлади.

97- §. Сиртларнинг проекциялари

Сонлар билан белгиланган проекцияларда сирт ўз горизонталларининг проекциялари билан берилади. Сиртнинг асосий проекциялар текислигига параллел текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган чизиқ шу сиртнинг горизонтали деб аталади. Иккита ёндош горизонтал орасидаги вертикал масофа, одатда, кабул қилинган бирликка (1 м га) тенг қилиб олинади. Горизонталлар асосий текисликка ўзгармай проекцияланади. Горизонталнинг нуқтаси ёнида турган белги чизиқнинг ҳаммасига қарашли бўлади. Горизонталларнинг проекцияларига ва белгиларига қараб, берилан сиртнинг шаклини аниқлаш қийин эмас. 314- шаклда иккита бир хил конус тавсирланган. Тушун-



314- шакл

тиришни осонлаштириш мақсадида конусларнинг фронтал текисликдаги проекциялари ҳам берилган.

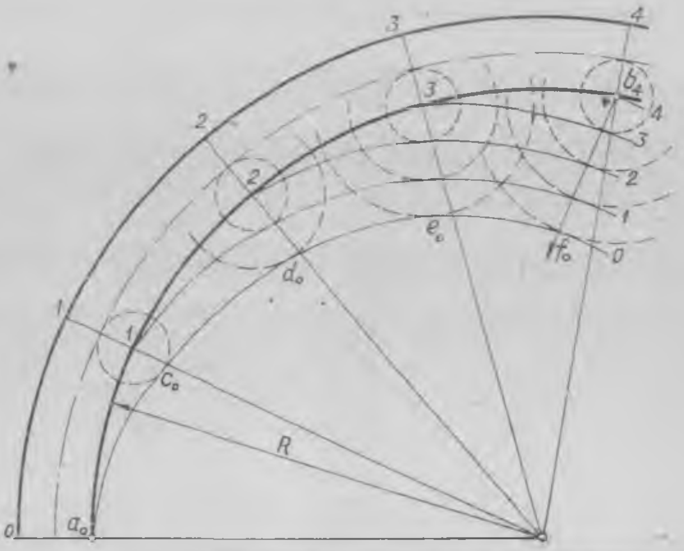
Фронтал проекциядаги P_V, Q_V чизиқлар кесувчи горизонтал текисликларнинг изларидир. Конусларнинг фақат сонлар билан белгиланган (горизонтал) проекцияларига қараб, улардан чапдаги учи билан *H* текисликда, ўнгдагиси эса асоси билан *H* текисликда турганлигини ва уларнинг бир хил конуслар эканлигини тасаввур қилиш унча қийин эмас.

Конусларнинг ҳамма ясовчилари *H* текисликка бир хил бурчак остида қия бўлганлиги сабабли горизонталларнинг проекциялари орасидаги масофалар (интерваллар) тенгдир. Тўғри доиравий конуснинг проекцияларидан қиялиги бир хил бўлган сиртларнинг горизонталларини ясашда фойдаланилади.

Мисол. Ички чети (лаби) *R* радиусли a_2b_4 ёйдан иборат ва ён бағрининг қиялиги 2/3 га тенг темир йўл тупроқ кўтармаси сиртининг горизонталлари ясалсин (315- шакл).

Ечиш. 1. Кўтарма устки сиртининг горизонталларини ясаш учун a_0b_4 ёйни тенг 4 қисмга бўлиб, белгилари *1*, *2*, *3* бўлган нуқталарни аниқлаймиз. Бу нуқталарни ёй маркази билан туташтиришдан ҳосил бўлган кўтарма четлари орасидаги кесмалар $0 — a_0$, *1 — 1*, *2 — 2*, *3 — 3* ва *4 — 4* кўтарма устки сиртининг горизонталлари бўлади.

2. Кўтарма ён бағирларининг сиртлари бу мисолда қиялиги бир хил бўлган қайтиш қиррали эгри сиртлардир (141- шаклга қаранг). Қиялиги бир хил сирт, ясовчисининг қиялиги $\frac{2}{3}$ ва учи кўтарманинг чети бўйичи сурилаётган тўғри доиравий ёрдамчи конуснинг кетма- кет ҳолатларини ўровчи сиртдир. Бундан кўтарма ён бағирла-



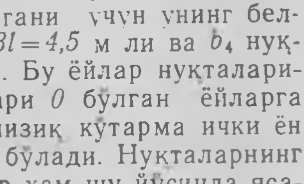
315- шакл

ринининг горизонталларини ясаш усули келиб чиқади. Олдин кўтарма ички ён бағрининг горизонталларини ясаймиз. $\frac{2}{3}$ қиялик учун интервал $l = \frac{3}{2} = 1{,}5$ м бўлади.

Чизманинг масштабидан олинган ва $l = 1{,}5$ радиус билан *1* нуқтадан ёй чизамиз. Бу ёйнинг ҳар бир нуқтаси *1* нуқтадан бир интервал масофада булгани учун, белгиси *0* бўлади, *2* нуқтадан радиуси $2l = 3$ м ёй чизамиз. Бу ёйнинг ҳар бир нуқтаси *2* нуқтадан икки интервал масофада бўлгани учун унинг белгиси ҳам *0* бўлади. *3* нуқтадан радиуси $3l = 4{,}5$ м ли ва b_4 нуқтадан радиуси $4l = 6$ м ли ёйлар чизамиз. Бу ёйлар нуқталарининг белгилари ҳам *0* бўлади. Белгилари *0* бўлган ёйларга уринма қилиб ўтказилган силлиқ эгри чизиқ кўтарма ички ён бағрининг белгиси *0* бўлган горизонтали бўлади. Нуқталарнинг белгилари *1, 2, 3,* 4 бўлган горизонталлар ҳам шу йўсинда ясалади. Уриниш нуқталаридан ўтган $b_4 f_0$ тўғри чизиқ ички ён бағирнинг қиялик масштаби бўлади.

Кўтарма сиртқи ён бағрининг горизонтларини ясаш учун юқоридаги ёрдамчи конуслар горизонталларидан фойдаланиш мумкин.

Ер сиртининг ҳосил бўлиши ҳеч қандай геометрия қонунларига бўйсунмайди. Ер сирти топографик сирт дейилади. Топографик сиртларни уларнинг гори-



316- шакл

зонталлари проекциялари билан тасвирлаш энг қулай усулдир. 316- шаклда тепалик горизонталларининг проекциялари ёрдамида тасвирланган. Тасвирланган ернинг тепалик эканлигини горизонталларининг шакл ва белгилари кўрсатиб турибди.

98- §. Сиртларнинг текислик билан кесилиши

Сиртнинг текислик билан кесишув чизиғини ясаш учун уларнинг белгилари бир хил бўлган горизонталларининг кесишган нуқталарини аниқлаш ва бу нуқталарни тартибли равишда ўзаро туташтириш керак.

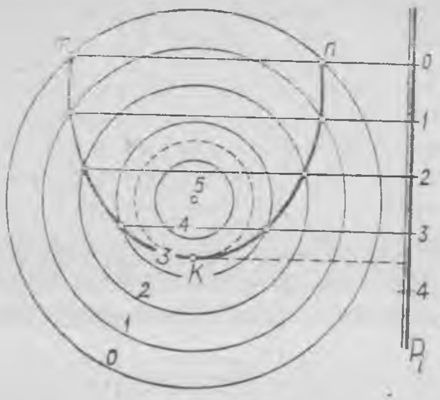
1- мисол. Горизонтал текисликда турган тўғри доиравий конус горизонталларининг проекциялари ва P текисликнинг қиялик масштаби P берилган. Конус билан текисликнинг кесишув чизиғининг проекцияси ясалсин (317- шакл).

Ечиш. 1. Текислик горизонталларининг проекцияларини ўтказамиз.

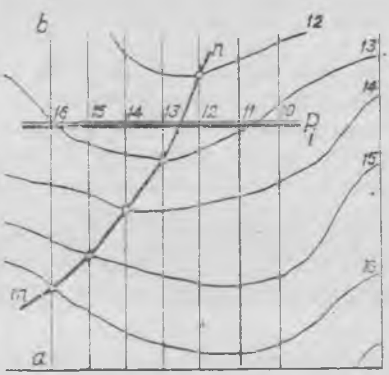
2. Конус горизонталларининг белгилари бир хил бўлган текислик горизонталлари билан кесишган нуқталарини аниқлаймиз ва уларни кетма-кет силлиқ эгри чизиқ воситасида туташтирамиз. mkn эгри чизиқ конус билан текисликнинг кесишувидан хосил бўлган эгри чизиқнинг проекцияси бўлади.

2- мисол. Типографик сиртнинг горизонталлари, P текисликнинг 16- горизонтали ab ва оғиши $i=\frac{1}{2}$ берилган. Топографик сирт билан P текисликнинг кесишган чизиғи ясалсин (318- шакл)

Ечиш. 1. Текисликнинг *15, 14, 13, ...* горизонталларини ўтказамиз. Икки ёндош горизонталь орасидаги масофа интервалга тенг ($l=\frac{1}{i}=2$ м) бўлади. Чизмада текисликнинг қиялик масштаби P_i хам кўрсатилган. У, горизонталларга перпендикуляр қилиб, чизманинг исталган жойидан ўтказилиши мумкин.



317- шакл



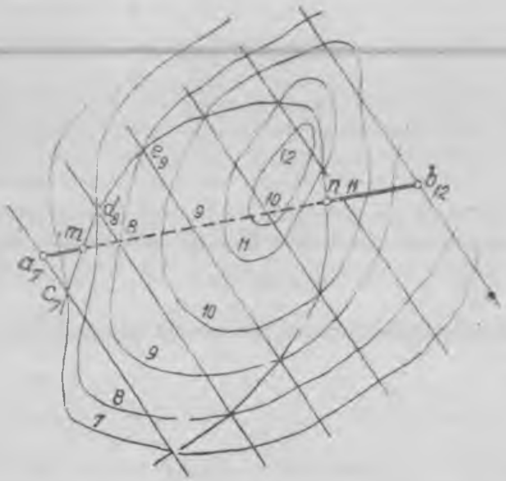
318- шакл

2. Топографик сиртнинг горизонталлари билан текисликнинг белгилари бир хил бўлган горизонталларининг кесишган нуқталарини аниқлаймиз ва уларни бир-бири билан кетма-кет туташтирамиз. Келиб чиққан mn чизиқ топографик сирт билан берилган P текисликнинг кесишувидан ҳосил бўлган чизиқнинг проекциясидир.

99-§. Сирт билан тўғри чизиқнинг кесишиши

Сирт билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқталарини аниқлаш учун олдин тўғри чизиқ орқали бирорта ёрдамчи текислик ўтказилади. Кейин ёрдамчи текислик билан берилган сиртнинг кесишган чизиғи ясалади. Бу чизиқ билан берилган тўғри чизиқнинг кесишган нуқталари изланган нуқталар бўлади.

Мисол. AB тўғри чизиқнинг проекцияси a_7b_{12} ва топографик сирт горизонталларининг проекциялари берилган. Тўғри чизиқ билан сиртнинг кесишган нуқталари аниқлансин. (319-шакл).



319-шакл

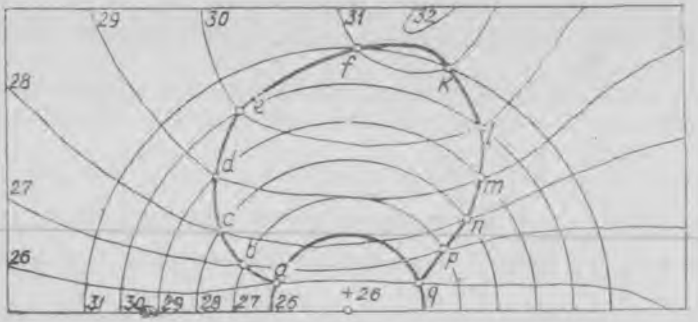
Ечиш. 1. Берилган тўғри чизиқнинг a_7 ва b_{12} нуқталари орқали иккита параллел чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқлар AB орқали ўтказилган ихтиёрий ёрдамчи текислик горизонталларининг проекциялари бўлади. a_7b_{12} чизиқда белгилари *8, 9, 10, 11* бўлган нуқталарни аниқлаймиз ва улар орқали ёрдамчи текислик горизонталларининг проекцияларини a_7 ва b_{12} нуқталардан ўтган чизиқларга параллел қилиб ўтказамиз.

2. Ёрдамчи текислик билан топографик сиртнинг кесишган чизиғи $c_7d_8e_9$ . . . ни ясаймиз.

3. a_7b_{12} билан $c_7d_8e_9$ . . . чизиқларнинг кесишган нуқталари m, n топографик сирт билан AB чизиқ кесишган нуқталарнинг проекциялари бўлади.

100-§. Сиртларнинг ўзаро кесишиши

Икки сиртнинг ўзаро кесишув чизиғини сонлар билан белгиланган проекцияларда ясаш учун умумий ёрдамчи текисликлар усулидан фойдаланилади. Ёрдамчи кесувчи текисликлар сифатида горизонтал текисликлар қўлланилади. Ҳар бир шун-



320- шакл

дай ёрдамчи горизонтал текислик берилган сиртларни уларнинг горизонталлари бўйича кесади. Бу горизонталларнинг ўзаро кесишган нуқтаси берилган сиртларнинг ўзаро кесишув чизиғига оид умумий нуқта бўлади. Амалда ёрдамчи горизонтал текисликлар ўтказилади деб фараз қилинади, чизмада эса сиртларнинг белгилари бир хил бўлган горизонталларидан фойдаланилади.

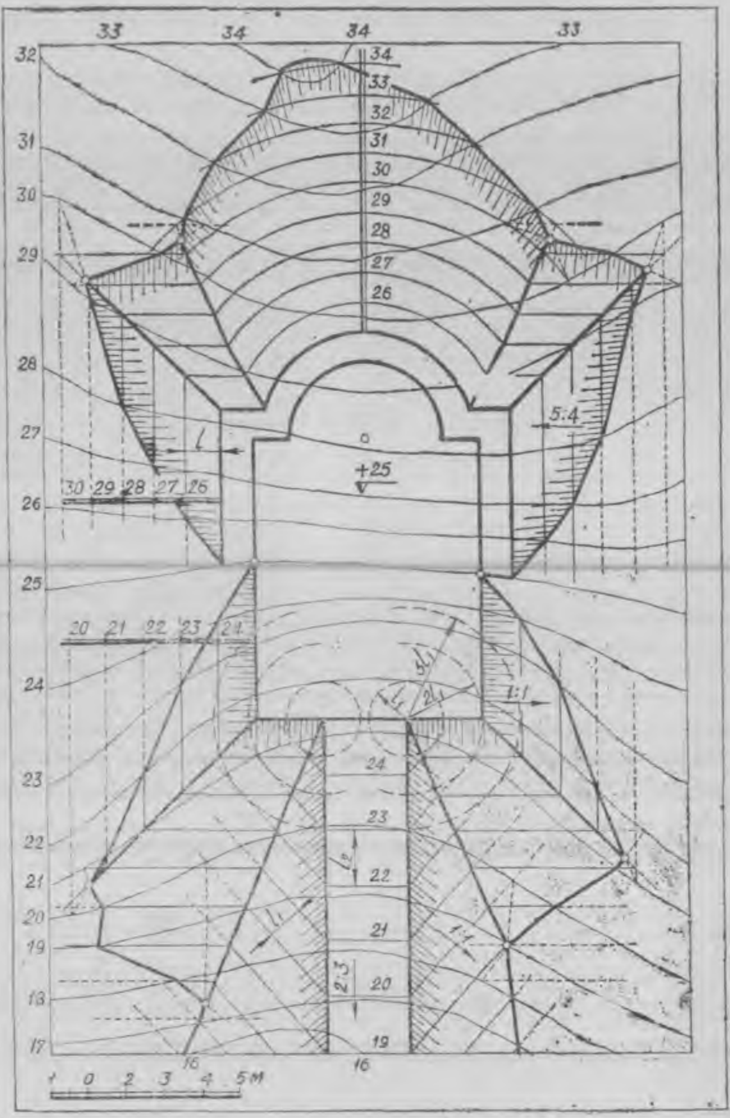
1- мисол. Горизонталлари орқали берилган тўғри доиравий конус сирт билан топографик сиртнинг кесишув чизиғи ясалсин (320- шакл).

Ечиш: Конус сиртнинг горизонталлари билан белгилари бир хил бўлган топографик сирт горизонталларининг кесишган нуқталарини аниқлаб, уларни кетма-кет туташтирсак, изланган кесишув чизиғининг проекцияси *abc...q* ҳосил бўлади.

2- мисол. Топографик сиртнинг горизонталлар билан ифодаланган плани берилган. Шу ерда контури кўрсатилган шаклдаги майдонча (супа) ва унга чиқадиган қия йўл (аппарель) қуриш керак (321- шакл). Майдончанинг белгиси (асосий (H) текисликдан баландлиги] +25. майдончанинг бир қисми чуқурликда (тупроқ олинган жойда), иккинчи қисми кўтармада (тупроқ тўкилган ерда) бўлади. Чуқурлик ён бағрининг қиялиги 5:4, кўтарма ён бағирларининг ва кўтармадаги аппарель ён бағирларининг қиялиги 1:1, аппарелнинг қиялиги 2:3 берилган.

Майдонча ва аппарель ён бағирларининг ўзаро ва топографик сирт билан кесишган чизиқлари ясалсин.

Ечиш. Берилган қияликлар учун мос бўлган интерваллар аниқланади. Кейин топилган интервалларга биноан, майдонча ва аппарель ён бағирларининг горизонталлари чизилади. Бу горизонталларнинг белгилари бир хил бўлган топографик сирт горизонталлари билан кесишган нуқталари кетма-кет туташтирилса, топографик сирт билан майдонча ва аппарель ён бағирларининг кесишган чизиқлари ҳосил бўлади. Ёндош қияликларининг белгилари бир хил бўлган горизонталлари кесиш-



321-шакл

ган нуқталар ўзаро туташтирилса, қияликларнинг (ён бағирларнинг) ўзаро кесишган чизиқлари келиб чиқади.

Майдончанинг белгиси +25 м бўлгани учун унинг ер сирти 25-горизонталидан юқори (шимол) томондаги қисми чуқурликда жойлашган. Майдончанинг бу қисмини ва ён бағирларини қуриш учун ерни қазиб, тупроғини олиш керак. Майдон-

чанинг 25-горизонталдан паст (жануб) томондаги қисмини, аппарелни ва уларнинг ён бағирларини қуриш учун бу томонга тупроқ (масалан, майдонча учун 24 —горизонтал ўтган ерга 1 м, 23 — горизонталда —2 м ва ҳоказо қалинликда зичланган тупроқ) тўкиш керак.

Чуқурлик горизонталларининг проекциялари орасидаги масофа (интервал) 0,8 м $\left(l = \frac{1}{i} = 1 : \frac{5}{4}\right)$, кўтарма горизонталларининг проекциялари орасидаги масофа эса 1 м $\left(l_1 = \frac{1}{i}\right)$. Текис қияликларнинг горизонталлари майдончанинг тегишли ён томонларига параллел тўғри чизиқлар бўлади. Чуқурликнинг ярим айланага туташган сирти конус сирт бўлиб, унинг горизонталлари бир марказдан чизилган (концентрик) айланаларнинг ёйлари кўринишида тасвирланади. Аппарель горизонталларининг проекциялари орасидаги масофа 1,5 м $\left(l_2 = \frac{1}{i_2} = 1 : \frac{2}{3}\right)$. Аппарель ён бағирларининт горизонталлари, 315-шаклдаги қиялиги бир хил бўлган қайтиш қиррали сирт горизонталларини ясаш сингари, ёрдамчи конуслардан фойдаланиб чизилади. Аппарель четлари билан майдонча четининг кесишган нуқталаридан, радиуслари l_1, $2l_1$, $3l_1$, . . . бўлган айланалар чизилади. Бу айланалар ёрдамчи конусларнинг *24*, *23*, *22*, . . . горизонталлари бўлади. Аппарель четларидаги *24* нуқталардан l_1 радиусли айланаларга, белгилари *23* нуқталардан $2l_1$ радиусли айланаларга, белгилари *22* нуқталардан $3l_1$ радиусли айланаларга . . . ўтказилган уринмалар аппарель ён бағирларининг *24*, *23*, *22*, . . . горизонталлари бўлади.

Майдончанинг чуқурликдаги қисми периметри бўйича кенгайтирилган. Бу запас ер қор-ёмғир сувлари чиқариладиган кюветлар ясаш учун керак бўлади.

МУНДАРИЖА

Кириш

Сўз боши 3

1- §. Чизма геометрия тарихидан қисқача маълумот 4
2- §. Фазовий шаклларни текисликка проекциялаш схемалари 5
3- §. Проекцияларнинг асосий хоссалари 6
4- §. Нуқталарнинг фазодаги ўринларини проекциялари бўйича аниқлаш 8

БИРИНЧИ БЎЛИМ

Ортогонал проекциялар усули
(Монж усули)

I. боб. Нуқтанинг ортогонал проекциялари 9

5- §. Фазонинг тўрт чоракка бўлиниши; нуқтанинг эпюри 9
6- §. Проекциялар текисликларига нисбатан турли вазиятда жойлашган нуқталарнинг эпюрлари 11
7- §. Фазонинг октантларга бўлиниши ва нуқтанинг уч текисликдаги ортогонал проекциялари 14
8- §. Нуқтанинг координаталари 17
9- §. Нуқталар ва шакллар симметрияси 20

II боб. Тўғри чизиқнинг проекциялари 21

10- §. Асосий тушунчалар 21
11- §. Умумий вазиятдаги кесманинг ҳақиқий узунлигини ясаш . . . 22
12- §. Тўғри чизиқнинг проекциялар текисликларига нисбатан хусусий ҳоллари 24
13- §. Тўғри чизиқнинг излари 26
14- §. Эпюрда тўғри чизиқ кесмасини берилган нисбатда бўлиш . . . 28
15- §. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви 29
16- §. Кесишган тўғри чизиклар орасидаги бурчакнинг проекциялари . 32

III боб. Текислик 34

17- §. Текисликнинг эпюрда берилиш усуллари 34
18- §. Текисликнинг излари 35
19- §. Текисликнинг проекциялар текисликларига нисбатан турли вазиятлари 36
20- §. Проекцияловчи текисликларнинг хоссалари 39
21- §. Берилган текисликда ётган тўғри чизиқнинг проекцияларини ясаш . 41
22- §. Текисликнинг бош чизиқлари 42
23- §. Нуқталар ёки тўғри чизиқлар билан берилган текисликнинг изларини ясаш 45
24- §. Текисликда ётган нуқталар 46

IV боб. Текисликларнинг ўзаро жойлашуви 47
Текислик билан тўғри чизиқ 47

25- §. Параллел текисликлар 47

26- §. Икки текисликнинг ўзаро кесишув чизиғини ясаш 50
27- §. Текисликка параллел тўғри чизиқлар 54
28- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишув нуқтасини ясаш . . . 55
29- §. Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ проекцияларини ясаш . . 59
30- §. Ўзаро перпендикуляр текисликлар 63
31- §. Умумий вазиятдаги ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар . . . 65
32- §. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак 66
33- §. Икки ёқли бурчаклар 68

V боб. Эпюрни қайта тузиш усуллари 70

34- § Умумий тушунчалар 70
35- §.. Проекциялар текисликларини алмаштириш усули 71
36- §. Фронтал проекциялар текислигини алмаштириш 71
37- §. Горизонтал проекциялар текислигини алмаштириш 73
38- §. Проекция текисликларининг иккаласини кетма-кет алмаштириш 73
39- §. Проекция текисликларини алмаштириш усули билан ечиладиган асосий масалалар 74
40- §. Айлантириш усули (Асосий маълумот ва қоидалар) 79
41- §. Проекциялар текислигига перпендикулар ўқ атрофида айлантириш 80
42- §. Текисликни ўз горизонтали ёки фронтали атрофида айлантириш 86
43- §. Текисликни ўз изларидан бири атрофида айлантириш 88

VI боб. Эгри чизиқлар 94

44- §. Умумий маълумот 94
45- §. Текис эгри чизиқлар 95
46- §. Фазовий эгри чизиқлар 97

VII боб. Эгри сиртларнинг ҳосил қилиниши, тасвирланиши ва техникада ишлатилиши 101

47- §. Умумий маълумотлар 101
48- §. Айланиш сиртлари 102
49- §. Чизиқли сиртлар 107
50- §. Винт сиртлар 113
51- §. Циклик ва график сиртлар ҳақида қисқача маълумот 117

VIII боб. Эгри сиртларга уринма текислик ўтказиш 120

52- §. Асосий тушунчалар 120
53- §. Уринма текисликлар ўтказиш мисоллари 121

IX боб. Сиртнинг текислик ва тўғри чизиқ билан кесилиши . . . 124

54- §. Айланиш сиртининг текислик билан кесилиши 124
55- §. Чизиқли сиртнинг текислик билан кесилиши 127
56- §. Конус кесимлари 129
57- §. Сиртнинг тўғри чизиқ билан кесилиши 134

X боб. Сиртларни ёйиш 137

58- §. Асосий маълумотлар 137
59- §. Конус сиртнинг ёйилмасини ясаш 138
60- §. Цилиндр сиртнинг ёйилмасини ясаш 140
61- §. Ёйилмайдиган сиртларнинг тахминий ёйилмалари 143
62- §. Кесик айланиш конусининг ёйилмаси 144

XI боб. Сиртларнинг ўзаро кесишиши 145

63- §. Кесишишнинг асосий турлари. Кесишиш чизиқларини ясаш усуллари 145
64- §. Кўпёқ билан эгри сиртнинг кесишиши 147
65- §. Сиртларнинг кесишиш чизиғини хусусий вазиятдаги параллел ёрдамчи текисликлар воситасида ясаш 149
66- §. Ўқлари кесишган айланиш сиртларининг кесишиш чизиғини ёрдамчи шарлар воситасида ясаш 152
67- §. Айланиш сиртлари ўзаро кесишувининг хусусий ҳоллари . . . 155

ИККИНЧИ БЎЛИМ

XII боб. Аксонометрик проекциялар 157

68- §. Асосий тушунчалар. Аксонометрик проекцияларнинг турлари . . 157
69- §. Аксонометриянинг асосий теоремаси 161
70- §. Тўғри бурчакли аксонометрия ясашнинг назарий асослари . . . 162
71- §. Айлананинг тўғри бурчакли аксонометрияси 169
72- §. «Аниқ» ва «келтирилган» аксонометриялар 171
73- §. Тўғри бурчакли стандарт аксонометриялар 173
74- §. Тўғри бурчакдаги аксонометрияда яққол тасвирлар ясаш мисоллари 175
75- §. Қийшиқ бурчакли баъзи аксонометрик проекциялар 180
76- §. Аксонометрияда сиртларнинг ўзаро кесишув чизиқларини ясаш . 183

XIII боб. Ортогонал ва аксонометрик проекцияларда соялар . . 184

77- §. Умумий маълумотлар 184
78- §. Нуқтадан тушган сояни ясаш 187
79- §. Тўғри чизиқ кесмасидан тушган сояни ясаш 188
80- §. Текис шаклдан тушган сояни ясаш 193
81- §. Геометрик жисмларнинг сояларини ясаш 195
82- §. Сояларни ясашга мисоллар 209

УЧИНЧИ БЎЛИМ

XIV боб. Перспектива 218

83- §. Умумий маълумот 218
84- §. Асосий терминлар 221
85- §. Нуқтанинг перспективаси 223
86- §. Перспектива ясашда кўриш нуқтасини танлаш 224
87- §. Перспектива ясаш усуллари 229

XV боб. Перспективада соялар 234

88- §. Марказий ёритишда соялар ясаш 234
89- §. Параллел ёритишда соялар ясаш 239
90- §. Кўзгу сиртларда акс этиб кўриниш 258

XVI боб. Сонлар билан белгиланган проекциялар 260

91- §. Усулнинг таърифи. Нуқталарнинг проекциялари 260
92- §. Тўғри чизиқнинг проекцияси 262
93- §. Икки тўғри чизиқнинг проекциялари 264
94- §. Текислик 265
95- §. Икки текислик 267
96- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишуви 269
97- §. Сиртларнинг проекциялари 269
98- §. Сиртларнинг текислик билан кесилиши 272
99- §. Сирт билан тўғри чизиқнинг кесишиши 273
100- §. Сиртларнинг ўзаро кесишиши 273

РАҲИМ ҲОРУНОВ

ЧИЗМА ГЕОМЕТРИЯ КУРСИ

Тошкент — «Ўқитувчи» —1997

Муҳаррир **Д. Аббосова**
Бадиий муҳаррир **Ф. Неккадамбоев**
Техн. муҳаррир **С. Турсунова**
Мусаҳҳиҳ **З. Содиқова**

ИБ № 6257

Теришга берилди 26.01.96. Босишга рухсат этилди 10.07.96. Бичими $60\times90^{1}/_{16}$. Гип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. т. 17,5. Шартли кр.-отт. 17,68. Нашр. т. 17,98. 2000 нусхада. Буюртма № 2816.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 11—247—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. 1997.