O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

I.SAFAROV, M.PO'LATOVA, M.TESHAYEV,
Z.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA QISQA KURSI

(I qism)

TOSHKENT – 2012

UDK: 517 (075)
BBK 22.1я73
S34

S34 I.Safarov, M.Po‘latova, M.Teshayev, Z.Boltayev. Oliy matematika qisqa kursi (I qism). –T.: «Fan va texnologiya», 2012, 284 bet.

ISBN 978–9943–10–603–1

«Oliy matematika qisqa kursi» (I qism) o‘quv qo‘llanmasi barcha yo‘nalishidagi oliy o‘quv yurtlarining bakalavrlar tayyorlash uchun «Oliy matematika» fani bo‘yicha tasdiqlangan namunaviy dastur asosida yozilgan. O‘quv qo‘llanma chiziqli algebra va analitik geometriya; bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobiga; ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobiga doir ma’ruzalarni o‘z ichiga olgan.

***

Учебное пособие «Краткий курс высшей математики» (часть I), написан на основе утвержденной типовой программы «Высшая математика», предназначается для подготовки бакалавров высших учебных заведений. Учебное пособие включает лекции, посвященные линейной алгебре и аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функции одной переменной, дифференциальному исчислению функции многих переменных.

***

The manual «A higher mathematics short course» (part I) is written on the basis of the confirmed typical program «Higher mathematics», intended for preparation of bachelors by higher educational institutions in all directions. The manual includes the lectures devoted to linear algebra and analytical geometry, differenttial and to integral calculus of function of one variable, differential calculus of function of many variables. It is intended for all directions bachelors higher educational institutions.

Taqrizchilar: **Sh.R.Mo‘minov**– professor;
J.J.Jumayev– dotsent.

ISBN 978–9943–10–603–1

O'quv qo'llanma Buxoro yuqori texnologiyalar muhandislik-texnika institutining 30 yilligiga bag'ishlanadi.

SO'Z BOSHI

Mualliflar Buxoro yuqori texnologiyalar muhandislik-texnika institutidagi ko'p yillik tajribalariga tayanib, o'tgan darslar davomida vujudga kelgan mulohazalar asosida o'quv dasturiga mos keluvchi o'quv qo'llanma yozib, uni o'quvchilar muhokamasiga taqdim etyaptilar. Uni yozishda mualliflar zamonamizning mashhur olimlari tomonidan yaratilgan darsliklardan hamda Buxoro institutining «Oliy matematika» kafedrasi o'qituvchilari tomonidan yaratilgan ma'ruzalar matnlaridan keng foydalandilar.

O'quv qo'llanmani yozish jarayonida uning ayrim qismlari kafedraning uslubiy seminarida ko'p marta muhokama qilindi. O'quv qo'llanma shubhasiz, kamchiliklardan holi emas. Bu kitob to'g'risidagi hurmatli kitobxonlarning tanqidiy fikr va mulohazalarini mualliflar chuqur mamnuniyat bilan qabul qiladilar.

Mualliflar.

KIRISH

MATEMATIKANING ASOSIY RIVOJLANISH BOSQICHLARI. HOZIRGI ZAMON MATEMATIKASINING TARKIBI, AHAMIYATI VA TATBIQLARI

Eng avvalo «Matematika» fani nimani o'rgatadi, degan savolni qo'yamiz. Bu juda murakkab savol bo'lib, unga ta'lim darajasi har xil bo'lgan insonlar turli xil javoblar beradilar. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchilari matematika–narsalarni sanash qoidalarini o'rgatadi deb javob beradilar va bu javobni noto'g'ri deb bo'lmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi bo'lmish arifmetikaning mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani to'liq o'z ichiga olgan. O'rta sinf o'quvchilari bu javobga matematikani chiziqlar, figuralar, jismlarni, ya'ni geometrik obyektlarni ham o'rganadi deb qo'shimcha qiladilar. Yuqori sinf o'quvchilari esa bu savolga matematika funksiyalarni o'rganishini ham ilova etadilar. Talabalar oliy o'quv yurtlarida matematikaning differensial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan-yangi bo'limlarini o'rganadilar va shu sababli, ularning javoblari o'quvchilar javobiga nisbatan kengroq va to'laroq bo'ladi.

Ammo barcha bu javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo'lib, matematikaning u yoki bu yo'nalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko'p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi A.N.Kolmogorov (1902–1987) tomonidan quyidagicha keltirilgan:

Ta'rif: Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Matematika so'zi grek tilidan olingan bo'lib, miqdorlar haqidagi fan degan ma'noni bildiradi.

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi obyekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o'rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o'rganuvchi fan bo'lib, unda qo'llaniladigan usullar xususiy xarakterga ega va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikka tatbiq etib bo'lmaydi. Xuddi shunday gaplarni fizika, kimyo, geologiya va boshqa fanlar to'g'risida ham aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun - qoidalarini biologiya obyektlariga ham, fizik-kimyo tadqiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni yechishda ham, qishloq xo'jaligi masalalarida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qo'llash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi Gauss «Arifmetika – matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» -deb bejiz aytmagan.

Albatta, matematika bunday ulkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yo'lini bosib o'tishga to'g'ri kelgan. A.N.Kolmogorov o'zining 1954-yilda qobusnoma uchun yozilgan va «Matematika» deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu to'rt davrga ajratadi.

I. Matematikaning shakllanish davri.

II. Elementar matematika davri.

III. O'zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davrni shartli ravishda «Oliy matematika» davri deb ham aytish mumkin.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, har bir keyingi davrda elementar matematikani rivojlanishi to'xtab qolgan emas.

I. Matematikaning shakllanish davri eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o'rgandi. Sanoq sistemalari oldin og'zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalari topila boshlandi. Yo'llarni uzunligini o'lchash, daromadlarni va yetishtirilgan hosilni taqsimlash kabi masalalar natijasida kasr sonlar tushunchasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish qoidalari ishlab chiqildi.

Natijada, eng qadimiy matematik fan – arifmetikaga asos solindi. Maydonlarni o'lchash, jismlar hajmlarini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga ehtiyoj paydo bo'lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqki, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog'liqmas ravishda, parallel ko'rinishda amalga oshdi.

Ayniqsa, bu jarayonlar Misr va Vavilon davlatlarida yaqqol namoyon bo'ldi.

II. Elementar matematika davri eramizdan avvalgi V asrdan boshlab XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko'rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko'rinishga keltirish qadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning «Negizlar» asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar ikki ming yil davomida boshqa matematik fanlarni asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyani) rivojlanishiga Pifagor, Aristotel, Arximed, Geron, Diofant, Ptolomey, Evklid kabi mutafakkirlar katta hissa qo'shdilar. Turli gidrotexnik qurilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog'liq masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo'ldi.

Ko'rilayotgan davrning IX–XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O'rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo'ldi. Bu vaqtda arablar juda ko'p yerlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu yerlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o'sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar bu yerda ilmni rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy birinchi bo'lib o'zining «Al-jabr» asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni yechish usuli bilan tanishdilar. X asrda Beruniy $x^3+1=2x$ ko'rinishdagi kub tenglamani taqribiy yechish usulini topdi. XI–XII asrda yashagan Umar Xayyom kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va yechilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan ozarbayjon matematigi Nasriddin Tusiy sferik trigonometriyani asos solinishiga yakun yasadi va Evklidning «Negizlar» kitobini arab tiliga tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik Mirzo Ulug'bek (1394–1449) «Ziji Ko'ragoniy» asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko'rsatib o'tish kerak. Ulardan eng mashhuri G'iyosiddin Jamshid ibn Masud Ali Qushchi bo'lib hisoblanadi. U o'nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (ungacha O'rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo‘llanilgan). Yevropada bu natijalarga atigi XVI asrda erishildi. Ali Qushchi Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og‘zaki ko‘rinishda ifodaladi, «Aylana haqidagi risola» asarida π sonini 17 xona aniqlikda hisobladi, astronomik hisoblashlar uchun kerak bo‘lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli yechish yo‘lini ko‘rsatdi.

Hindiston olimlarining matematikaga qo‘shgan eng katta hissasi – o‘nli sanoq sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar yevropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma’lum bo‘lgani uchun hozirgi paytda noto‘g‘ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor.

XII–XV asrlar davomida G‘arbiy Yevropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o‘rganish bilan shug‘ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu yerlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi Kopernikning astronomik kashfiyoti, italiyalik olim Galileyning mexanika bo‘yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo‘ldi.

Italiyalik matematiklar Tartaliya, Ferrari, Kardano uchinchi va to‘rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni yechish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy yechilar edi). Fransuz matematigi Viet n-darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsiyentlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III.Oliy matematika davri XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik obyektlar qo‘zg‘almas, o‘zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o‘zgaruvchi miqdorlarni ko‘rishga to‘g‘ri kela boshladi. Masalan, Boyl-Mariott (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o‘rtasida o‘zaro bog‘lanish mavjud ekanligini, Guk (1660) esa qattiq jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma=\alpha\varepsilon$ ko‘rinishdagi chiziqli bog‘lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o‘zgaruvchi miqdor orasidagi o‘zaro bog‘lanishni o‘rganishga to‘g‘ri keldi va bunday bog‘lanishlar funksiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo‘lsa, oliy matematikada funksiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funksiyalarni o'rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi Leybnits 1682–1686-yillarda va ingliz matematigi, mexanigi Nyuton 1665–1666-yillarda differensial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga Dekart, Furye, Paskal, Ferma, Gyugens, Bernulli, Eyler, Lagranj, Dalamber, Koshi kabi buyuk olimlar katta hissa qo'shdilar. Bu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni yechish natijasida amalga oshgan bo'lsa, endi matematika o'z ichki qonuniyatlari bo'yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil etish kabi yo'nalishlarda amalga oshadi. Masalan, kvadrat tenglama ildizga ega ekanligi ma'lum, ammo unga juda o'xshash tenglama haqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli haqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo'lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to'g'ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funksiyalarini o'rganish natijasida «Kompleks tahlil» fani paydo bo'ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tatbiqlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni yechish masalalari bilan shug'ullanish natijasida Abel, Galua (1820) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o'rganishda, kvant fizikasida o'z tatbig'ini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko'p sohalarga qo'llanilishi, tarkibini juda kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtayi nazardan qayta ko'rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo'ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to'plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda ko'p matematik fanlar poydevori to'plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX–XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan, to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, funksional tahlil, topologiya, matematik fizika tenglamalari.

O‘zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to‘xtalib o‘taylik. O‘zbekistonda matematika fani bo‘yicha yutuqlar Toshkentda 1920-yilda universitet tashkil etilishi bilan bog‘liq. O‘zbekistonga kelgan rus olimlari ichida V.I.Romanovskiy ham bor edi. U matematik statistika bo‘yicha ko‘zga ko‘ringan olim edi va u o‘zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo‘shdi. O‘zbek matematiklaridan birichi bo‘lib akademik Qori-Niyoziyni ko‘rsatish mumkin. U matematika bo‘yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo‘lsada, matematikani targ‘ib qilish, o‘zbek tilida darsliklar yozish bilan O‘zbekistonda matematikani rivojlanishiga katta hissa qo‘shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan akademik T.A.Sarimsoqov (1915–1995), akademik S.X. Sirojiddinov (1920–1988), akademik M.S.Salohitdinov funksional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo‘yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o‘zbek matematika maktabini jahonga tanitdilar.

Matematikaning amaliy tatbiqlari bo‘yicha ba’zi bir misollarni keltiramiz.

1. 1845-yilda fransuz matematigi Leverye Uran planetasi trayektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma’lum osmon jismi borligini, uning trayektoriyasini va massasini nazariy yo‘l bilan, ya’ni «qalam uchida» hisoblab topdi. U ko‘rsatgan koordinatalar bo‘yicha 1846-yil 22-sentabr kuni nemis astronomi Galley teleskopda Neptun planetasini kashf etdi.

2. Neytron, kvark kabi elementlar zarrachalarning mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas, hisoblashlar asosida kashf etildi.

3. Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshqarish masalasi paydo bo‘ldi. Bu masalani L.S.Pontryagin (Rossiya) va Belman (AQSH) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshqarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.

4. Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa bo‘limlarida abenentlarning navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim Erlang «Ommaviy xizmat ko‘rsatish nazariyasi» nomli yangi matematik fanga asos soldi.

5. Kosmosni o‘zlashtirish muammolarini yechishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik Keldish (Rossiya) rahbarlik qilgan «Amaliy matematika» ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni yechish usullari ishlab chiqildi va ular EHM lar yordamida amalga oshirildi.

6. Iqtisodiyotda xalq xo‘jaligini boshqarish uchun amerikalik iqtisodchi olim Leontyev tomonidan tarmoqlararo muvozanatning

matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari yechilib, ishlab chiqarishni oqilona boshqarishga erishildi.

7. Akademik Kantorovich (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo'llarini axtarish bilan shug'ullandi va natijada «Chiziqli dasturlash» nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalq xo'jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli Kantorovich iqtisodiyot bo'yicha Nobel mukofotiga sazovor bo'ldi.

Bunday misollarni yana ko'plab keltirish mumkin.

8. Nemis matematigi Georgiy Kantor (1845–1918) tomonidan to'plam nazariyasining kirib kelishi akademik A.N.Kolmogorovning matematika fanini to'plam asosida qayta qurishiga, ya'ni yangi aksiomatik qurilishning dunyoga kelishiga sabab bo'ldi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matematika fani predmeti akademik A.N. Kolmogorov va T.A.Sarimsoqov tomonidan qanday ta'riflangan?
2. Matematika boshqa tabiiy fanlardan qanday xususiyati bilan ajralib turadi?
2. Matematikaning rivojlanish davri A.N. Kolmogorov tomonidan necha davrga ajratilgan?
4. Matematikaning shakllanish davri qanday xususiyatlarga ega?
5. Elementar matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
6. Elementar matematika davri qanday xususiyatlarga ega?
7. O'rta Osiyolik olimlarning elementar matematika rivojlanishiga qo'shgan hissalarini ko'rsatib o'ting.
8. Oliy matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
9. Oliy matematika davrining asosiy xususiyatlari nimalardan iborat?
10. Hozirgi zamon matematikasining asosiy xususiyati nimadan iborat?
11. O'zbek matematiklaridan kimlarni bilasiz va ularning xizmatlari nimadan iborat?
12. Matematikaning amaliy masalalarni yechish tatbiqlaridan qaysi birini bilasiz?

I bob. MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR

Bobning o'quv maqsadi

Matritsalar va determinantlar nazariyasi bugungi kunga kelib, juda keng o'rganilgan.

Ularning xususiyatlaridan, qonuniyatlaridan foydalanib, matematikada, fizikada, iqtisodda va boshqa fanlarda uchraydigan ko'pgina masalalar yechimi topiladi.

Mazkur bobning o'quv maqsadi quyidagilardan iborat: matritsalar va ular ustida amallar, determinantlar va ularning xossalari, determinantlarni hisoblash kabi malakalarni talabalarga yetkazish.

Iqtisodiy jarayonlarni o'rganish turli iqtisodiy ko'rsatkichlarning qiymatlaridan tuzilgan jadvalni tahlil qilish yordamida olib boriladi. Unda turli gipotezalar tekshiriladi, talab va taklif funksiyalarining elastikligi hisoblanadi, iqtisodiy jarayonni ifodalab beradigan empirik formulalar, matematik modellar quriladi va h.k.. Gapning lo'ndasini aytganda, statistik ma'lumotlardan tuzilgan jadval iqtisodchilar uchun muhim ahamiyat kasb etadi.

Determinant so'zi–lotincha «determino» – «topish» so'zidan olinib, uni Koshi O. 1815 yilda kiritgan (hozirgi ba'zi adabiyotlarda «determinant» so'zi o'rniga «aniqlovchi» so'zi ishlatiladi). Determinant belgisini esa ingliz matematigi Keli V. ifodalagan. Koshi Ogyusten Lui-fransuz matematigi birinchi bo'lib «determinant» tushunchasini kiritib, matritsalar nazariyasini rivojlantirgan.

Fransuz matematigi Laplas P'er Simon esa matematika sohasida determinantni minorlar ko'paytmasining yig'indisi shaklida ifodalagan.

Determinantlar nazariyasining asoschilaridan biri Kramer G. 1750-yilda «Kramer usuli» nomi bilan atalgan teoremani isbot qildi. Matritsa va uning rangi tushunchasini o'z asarlarida ingliz matematigi Sil'vester Dj. qo'llagan. Matritsalar nazariyasi faqatgina chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishda, shu bilan birga matematik analizning ko'pgina masalalarida, mexanika va fizikada qo'llanadi.

Taniqli matematiklar K.Veyershtrass, M.Jordan va F.Frobenius matritsalar nazariyasini rivojlantirishga katta hissa qo'shganlar.

1.1-§. MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1-ta'rif. Ixtiyoriy m ta satr va n ta ustundan iborat quyidagi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}..a_{mn} \end{pmatrix}$$

to'g'ri to'rtburchak shaklidagi m n ta sondan tuzilgan jadval matritsa deb ataladi. Matritsalar A,B,C kabi bosh lotin harflar bilan, ularni tashkil etuvchi sonlar esa a_{ij}, $в_{ij}$, c_{ij} $i=1,2,..m$, $j=1,2,..n$ kabi belgilanadi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari yoki hadlari deb ataladi. Agar A matritsa faqat satri yoki faqat ustuni, ya'ni $(a_{11},\ a_{12},\ ...\ a_{1n})$, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ qaralsa, ular mos ravishda satr yoki ustun matritsa deyiladi. Bu yerda i - element joylashgan satrni, j esa ustunning tartib raqamini bildiradi. Matritsaga A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$, satr $(1\ \ -3\ \ 1,2)$ va ustunga $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ misol bo'ladi.

2- ta'rif. m satrli va n ustunli ikkita A va B matirtsadan birining hamma elementlari ikkinchisining mos elementlariga teng bo'lgandagina, bu matritsalar teng (bir xil) deb hisoblanadi. Matritsalarning tengligi A=B ko'rinishida yoziladi.

Bu ta'rifdan, bir matritsaning aqalli bitta elementi ikkinchisining mos elementiga teng bo'lmasa, matritsalar ham teng emas (har xil) ligi ko'rinadi va bu hol $A \neq B$ shaklida yoziladi.

Matritsalar uchun **«kichik»** va **«katta»** tushunchasi yo'q.

Agar A matritsaning hamma elementlari biror P sonlar maydoniga tegishli bo'lsa, A ni P maydondagi matritsa deb ham aytadilar. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ \frac{1}{4} & 1 & 5 & 2 \\ 7 & \frac{3}{8} & -\frac{15}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa ratsional sonlar maydonidagi uch satrli va to'rt ustunli matritsadir. Quyidagi:

$$A=\begin{pmatrix} i & 2 \\ -1 & 3i \\ 9 & 1 \\ -i & 4 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

matritsa esa kompleks sonlar maydonidagi besh satrli va ikki ustunli matritsadir.

3-ta'rif. A matritsadagi hamma satrlarni quyida ko'rsatilgancha ustunlar qilib, (va, demak, aksincha, ustunlarini satrlar qilib) yozsak, ushbu

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \ldots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \ldots a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \ldots a_{m3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishdagi yangi matritsa hosil bo'ladi. A matritsani bu xilda almashtirish uni transpozitsiyalash (transponirlash) deyiladi. A matritsa A' matritsani transpozitsiyalash natijasida vujudga kelgan. Aksincha, A' ni transpozitsiyalash natijasida A ning hosil bo'lishi ravshan.

Masalan,

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} \text{ matritsa, } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani transpozitsiyalashdan hosil bo'ladi.

Transponirlash xossalari;

$$1)(A')' = A; \qquad 3)(A+B)' = A'+B';$$

$$2)(\lambda A)' = \lambda A'; \quad 4)(AB)' = A'B'.$$

4-ta'rif . Agar A_{mxn} matritsada m = n bo'lsa, u kvadrat, m ≠ n bo'lsa to'g'ri to'rtburchakli matritsa deyiladi.

Bunda, agar m = 1 bo'lsa satr, n = 1 bo'lsa ustun va m=1 va n =1 bo'lsa bitta soni bo'lgan matritsaga ega bo'lamiz .

A=$\{a_{ij}\}$ matritsada a_{ii} ko'rinishdagi elementlar **diagonal elementlar** deyiladi. Agar $a_{ij}=a_{ji}$ bo'lsa, A kvadrat matritsa bosh diagonalga nisbatan simmetrik matritsa deyiladi.

5-ta'rif. Bosh diagonal elementlaridan tashqari hamma elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa diagonal matritsa deyiladi.

Barcha diagonal elementlari birga teng ($a_{ii}=1$), qolgan barcha elementlari esa nolga teng ($a_{ij}=0$, $i\neq j$) bo‘lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi va E kabi belgilanadi:

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo‘lgan matritsa nol matritsa deyiladi va 0 kabi belgilanadi:

$$O=\begin{pmatrix}0&0.....0\\0&0.....0\\ \multicolumn{2}{c}{..........}\\0&0.....0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\qquad(0\ 0\ 0\ 0).$$

Simmetrik matritsa o‘zining transpozitsiyalangan matritsasi bilan bir xil bo‘ladi. Bir xil $m\times n$ tartibli A va B matritsalar yig‘indisi yoki ayirmasi deb shunday $m\times n$ tartibli C matritsaga aytiladiki, uning elementlari $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$ kabi aniqlanadi va C=A+B deb yoziladi:

$$A+B=C=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}...a_{1n}\\a_{21}\ a_{22}...a_{2n}\\ ....\\a_{m1}\ a_{m2}\ a_{mn}\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_{11}\ b_{12}\ ...b_{1n}\\b_{21}\ b_{22}...b_{2n}\\ ....\\b_{m1}b_{m2}...b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}...&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}...&a_{2n}\pm b_{2n}\\ ....&..........&..........\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}...&a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&...&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&...&c_{2n}\\...&...&...&...\\c_{m1}&c_{m2}&...&c_{mn}\end{pmatrix}.$$

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}5&3&-1\\0&7&2\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-3&4\end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A+B=\begin{pmatrix}5+1&3+0&-1+1\\0+2&7+(-3)&2+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&0\\2&4&6\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}5-1&3-0&-1-1\\0-2&7-(-3)&2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&-2\\-2&10&-2\end{pmatrix}.$$

Matritsalar yig‘indisi uchun

A+B=B+A (kommutativlik);

A+(B+C) = (A+B)+C (assotsiativlik),

qonunlari o‘rinli bo‘ladi. Bundan tashqari A-A = 0, A±0 = A, A+A =2A tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Berilgan matritsani o‘zgarmas λ soniga ko‘paytirish, matritsaning har bir elementlarini shu songa ko‘paytirish demakdir, ya’ni matritsani o‘zgarmas songa ko‘paytirish, ixtiyoriy $m\times n$ tartibli $A=\{a_{ij}\}$ matritsaning λ songa ko'paytmasi deb $\lambda A=\lambda\{a_{ij}\}$ matritsaga aytiladi. Demak,

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ matritsa uchun

$$6A=\begin{pmatrix} 6\cdot 5 & 6\cdot 4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\lambda(A\pm B)=\lambda A\pm\lambda B,\ (\lambda\pm\mu)A=\lambda A\pm\mu A,$$
$$0\cdot A=O,$$

Ikkita matritsani ko'paytirish. A_{mxr} va B_{qxn} matritsalar uchun $r=q$ shart bajarilganda ularning ko'paytmasi (AB) deb shunday c_{ij} matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari $((i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}))$ ushbu

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{kj}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

bo'lsa, bunda

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, c_{ij} element A matritsaning i - satr elementlarini B matritsaning j - ustun mos elementlariga ko'paytirib, ularni qo'shib chiqishdan hosil qilinadi, ya'ni «satrni ustunga ko'paytirish» qoidasi bilan topiladi. Masalan,

$$\hat{A}_{3x2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}, \qquad \hat{A}_{2x2}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

matritsalar uchun m=2, r=q=2, n = 2 bo'lgani uchun ularni ko'paytirish mumkin va AB=C_{3x2} matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3x2}=\begin{pmatrix}3\cdot 6+1\cdot 1 & 3\cdot(-4)+1\cdot 2\\ 0\cdot 6+(-2)\cdot 1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot 2\\ 4\cdot 6+5\cdot 1 & 4\cdot(-4)+5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & -10\\ -2 & -4\\ 29 & -6\end{pmatrix}$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun AB≠BA, ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Ammo (κA)B=A(κB) (κ=const) A(BC)=(AB)C (assotsiativlik), A(B+C)=AB+AC, (A+B)C=AC+BC distributivlik qonunlari bajariladi.

Darajaga ko'tarish. Kvadrat A matritsani, butun musbat k darajaga ko'tarish deyilganda k ta matritsalar ko'paytmasi tushuniladi,

$$A^{\kappa}=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots A}_{\kappa}.$$

Bundan ko'rinadiki, darajaga ko'tarish amali faqat kvadrat matritsalar uchun kiritilgan. Ta'rif bo'yicha

$$A^0=E,\quad A^1=A,\quad A^p\cdot A^q=A^{p+q},\ \left(A^p\right)^q=A^{pq}.$$

Ikkita kvadrat matritsa ko'paytmasi nol matritsa bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ammo $A^{\kappa}=0$ tenglikdan A=(0) ekani doim kelib chiqavermaydi.

Bundan tashqari AE = EA = A, A·0 = 0·A = 0, (λ A) B = A (λ B) tengliklar ham o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$AE=EA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\ldots\ldots 0\\ 0 & 1\ldots\ldots 0\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ 0 & 0\ldots\ldots 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn}\end{pmatrix}=A.$$

1.2-§. ANIQLOVCHILAR (DETERMINANTLAR) VA ULARNING XOSSALARI

Determinant tushunchasi faqat kvadrat matritsalar uchun kiritilgan bo'lib, u matritsani xarakterlaydi. Bu tushuncha chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan bevosita bog‘langan. Birinchi tartibli matritsaning determinanti deb elementning o‘ziga aytiladi:

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}\,; \quad A = (3) \text{ bo‘lsa, } \quad \Delta_1 = |A| = 3\,.$$

Kvadrat matritsaning hadlaridan (o‘rin almashtirmasdan) tuzilgan sonli ifodaga berilgan matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi deyiladi va Δ bilan belgilanadi. Masalan, ikkinchi tartibli aniqlovchi deb, ikkinchi tartibli kvadrat matritsadan quyidagicha hosil qilingan va belgilangan sonli ifodaga aytiladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1.1)$$

Bu yerda a_{11}, a_{22} va a_{12}, a_{21} lar mos ravishda ikkinchi tartibli aniqlovchining birinchi va ikkinchi diagonali elementlaridir.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

Uchinchi tartibli aniqlovchi esa quyidagi sonli ifoda kabi aniqlanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} - \qquad (1.2)$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}$$

Uchinchi tartibli aniqlovchini hisoblashga misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$

$$- (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot (4) = 112$$

Aniqlovchilar va matritsalar orasida quyidagi o‘xshashlik va farqlar mavjud:

1) matritsa sonlar jadvali bo‘lsa, aniqlovchi esa sonli ifoda bo‘lib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) matritsa yoysimon chiziqlar bilan belgilansa, aniqlovchi to‘g‘ri chiziqlar bilan belgilanadi;

3) ular ichidagi sonlar elementlar deyiladi;

4) ular satrlar va ustunlardan iborat;

5) aniqlovchilarda ustun va satrlar soni teng bo‘lishi kerak, ammo matritsalarda esa bunday bo‘lishi shart emas.

Aniqlovchilarning xossalari. Aniqlik va soddalik uchun bu xossalarni uchinchi tartibli aniqlovchilar uchun ifodalaymiz.

1-xossa. Agar aniqlovchining barcha satrlari mos ustunlar bilan almashtirilsa, determinant (yoki aniqlovchi) ning qiymati o‘zgarmaydi. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossadan aniqlovchining satr va ustunlari teng mohiyatli ekanligi kelib chiqadi.

2-xossa. Aniqlovchining ikkita ixtiyoriy satrlari (ustunlari) o‘rni o‘zaro almashsa, aniqlovchining faqat ishorasi teskarisiga o‘zgaradi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ikkita satrni (ikkita ustunni) o‘rinlari ikkinchi marta almashtirish aniqlovchini dastlabki ishorasiga keltiradi.

3-xossa. Agar aniqlovchining ikkita satr (ustun) elementlari bir xil bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng. Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

4-xossa. Satrning (ustunning) umumiy ko‘paytuvchisini aniqlovchi belgisidan tashqariga chiqarib, ko‘paytma shaklida yozish mumkin.

5-xossa. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) nollardan iborat bo‘lsa, u holda aniqlovchining qiymati nolga teng bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6-xossa. Agar aniqlovchining ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o‘zaro proporsional bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

7-xossa. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) ikki had yig‘indisidan iborat bo‘lsa, u holda bu aniqlovchi ikkita mos aniqlovchilar yig‘indisiga yoyiladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+в_{31} & a_{32}+в_{32} & a_{33}+в_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{vmatrix}.$$

Umumiy holda n - tartibli (n∈N) aniqlovchi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}...a_{1j}.....a_{n} \\ .... \\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}...a_{ij}.......a_{in} \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}...a_{nj}.....a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Yuqori tartibli aniqlovchilarni umumiy holda hisoblash formulalari juda murakkab ko'rinishda bo'ladi. Shu sababli elementining algebraik to'ldiruvchi tushunchasi kiritiladi.

7-ta'rif. a_{ij} (i=$\overline{1,m}$, j=$\overline{1,n}$) elementning A_{ij} algebraik to'ldiruvchisi deb aniqlovchining *i*-satri va *j*- ustunini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan (n-1) tartibli aniqlovchi qiymatini $(-1)^{i+j}$ ga ko'paytmasiga aytiladi va A_{ij} kabi belgilanadi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aniqlovchining quyidagi to'qqizta algebraik to'ldiruvchilari mavjud:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Xuddi shunday, n - tartibli aniqlovchining algebraik to'ldiruvchilari n^2 ta (*n*- *1*)- tartibli aniqlovchilardan iborat bo'ladi.

Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash algebraik to'ldiruvchilar yordamida quyidagi teorema orqali osonroq bajariladi.

Teorema (Laplas): Aniqlovchining qiymati uning istalgan satr (ustun) elementlarini ularning mos algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni masalan, uchinchi tartibli aniqlovchi uchun:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} \\ \Delta &= a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} \\ \Delta &= a_{31}\cdot A_{31} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{33}\cdot A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} \\ \Delta &= a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} \\ \Delta &= a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Bu tengliklarning o‘rinli ekanligini to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblashlar yordamida ko‘rsatish mumkin. (1.3)- yoki (1.4)- aniqlovchini satrlar yoki ustunlar bo‘yicha yoyilmasi deyiladi.

Masalan, quyidagi aniqlovchini birinchi satr elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari yordamida hisoblaylik,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 & 11 \\ 5 & 5 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 6 & 11 \\ 5 & -3 & 6 \\ 6 & -5 & 0 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -3 & 6 & 11 \\ 5 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & -2 & 11 \\ 5 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-3\begin{vmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 5 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 909.$$

Yuqori tartibli aniqlovchi qiymatini topishda hisoblashlarni kamaytirish maqsadida uning nollari ko‘proq bo‘lgan satr yoki ustun bo‘yicha yoyish maqsadga muvofiqdir.

Misol: To‘rtinchi tartibli aniqlovchini ikkinchi satr bo‘yicha yoyib, qiymatini Laplas teoremasi orqali hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}3\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 66 - 18 = 198 - 18 = 180$$

Izoh: Aniqlovchining biror satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib, ko‘paytmalarni qo‘shib chiqsak, yig‘indida doimo 0 hosil bo‘ladi. Masalan,

$$a_{11}\cdot A_{21} + a_{12}\cdot A_{22} + a_{13}\cdot A_{23} = 0$$

$$a_{12}\cdot A_{11} + a_{22}\cdot A_{21} + a_{32}\cdot A_{31} = 0,$$

8-ta'rif. Berilgan matritsaning minori deb, uning bir necha yo'l va ustunlari chizib o'chirgandan keyin matritsaning qolgan elementlaridan ularning o'rnini o'zgartirmasdan tuzilgan aniqlovchiga aytiladi.

9-ta'rif. A matritsaning noldan farqli minorlaridan eng yuqorisining tartibi bu matritsaning rangi deb ataladi.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaning hamma to'rtta 3-tartibli minorlari nolga teng (buni tekshirib ko'ring), lekin

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=9.$$

Demak, $r(A)=2$.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -6 & 12 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 1 ga teng, ya'ni $r(B)=1$ (tekshirib ko'ring).

Endi, matritsani elementar almashtirishlarga o'tamiz.

10-ta'rif. Matritsani elementar almashtirishlari deb:

1. Transpozitsiyalashni.
2. Istalgan ikki satr (ikki ustun) ni o'zaro almashtirishni.
3. Istalgan satr (ustun) ning elementlarini noldan farqli har qanday m songa ko'paytirishni.
4. Bir satr (ustun) ning elementlarini istalgan *m* songa (*m*=0 bo'lishi mumkin) ko'paytirib, boshqa satr (ustun) ning mos elementlariga qo'shishni aytamiz.

Teorema. Elementar almashtirishlar matritsaning rangini o'zgartirmaydi. Demak, A matritsaning, shuningdek, transponirlashdan hosil bo'lgan matritsaning rangi ulardagi bir xil minorlar bilan aniqlanadi. Shu sababli,

$$r(A)=r(A').$$

Misol.

1. Ushbu matritsani rangini hisoblaymiz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -7 & -4 \\ -5 & -15 & -10 & 35 & 20 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 1 & 4 & 23 & 60 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avval 2- satrni 5 ga qisqatirib (ya'ni $\frac{1}{5}$ ga ko'paytirib),

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -7 & -4 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 1 & 4 & 23 & 60 & -1 \end{pmatrix},$$

so'ngra hosil bo'lgan 2 – satrni 1 – satrga qo'shamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 1 & 4 & 23 & 60 & -1 \end{pmatrix}$$

Endi, 2 – satrni 4 – satrga qo'shamiz, 3 – satrni esa 4 – satrdan ayiramiz :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 67 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu so'nggi matritsada hamma 4 – va 3 – tartibli minorlar nolga teng. Lekin

2 – tartibli minorlardan, masalan,

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

noldan farqli, demak, $r(A) = 2$.

XULOSA

Matritsalar va aniqlovchilar ta'riflarini, ular ustida bajarilishi mumkin bo'lgan amallarni kuzatsak, matritsalar va aniqlovchilar orasida farq va o'xshashliklar borligini ko'ramiz. Masalan, 3×3 o'lchamli matritsa va uchinchi tartibli aniqlovchi ifodalari, bir qarashda, kam farq qiladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Matritsa jadval bo'lib bir qiymatga ega bo'lmasada, uning ustida elementar almashtirishlar, amallar bajarish, ya'ni matritsalarni songa ko'paytirish, matritsalarni qo'shish, ko'paytirish, matritsaga teskari bo'lgan matritsani hisoblash kabi amallarni bajarish mumkinligi kelib chiqadi. Aniqlovchilarga kelganda, har bir aniqlovchiga uning qiymati mos qo'yilgan. Aniqlovchilar xossalaridan birini ko'raylik. Aniqlovchida yonma-yon turgan ikkita satr yoki ustun o'rinlari almashtirilsa, unda aniqlovchining ishorasi o'zgaradi. Bunday amal esa matritsani o'zgartirmas ekan.

Shunga qaramasdan, matritsa va aniqlovchilarni o'rganish parallel ravishda olib borildi. Bu masalan, matritsa rangini hisoblashda, teskari matritsani hisoblashda aniqlovchilardan foydalanishga imkon berdi.

Mazkur bobda matritsa va aniqlovchilarning asosiy xossalari, ular ustida bajarilishi mumkin bo'lgan amallar o'rganildi. Ularning tatbiqlari va ko'p masalalarda uchraydi. Iqtisodda masalan, mahsulotni ishlab chiqarishda to'liq sarflanishlar matritsasi, mexanikada deformatsiya, kuchlanish, bosim kabi matritsalar ishlatiladi.

Mazkur bobni o'zlashtirgan kitobxon matritsa va aniqlovchilarni masalalarga tatbiq qila olishini xulosa sifatida aytish mumkin.

1-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Matritsa mazmuni qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?
A) sonlar yig'indisi; B) sonlar ko'paytmasi;
C) sonlar to'plami; D) sonlar jadvali;
E) sonlar birlashmasi.

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning tartibini aniqlang.
A) 2x3; B) 2x2; C) 2x4; D) 2x1; E) 3x2.

2.Elementlari a_{ij} bo'lgan matritsa qachon nol matritsa deyiladi?
A) barcha a_{ij} elementlar yig'indisi nolga teng bo'lsa;
B) barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo'lsa;
C) barcha a_{ij} elementlar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa;
D) biror satrdagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo'lsa;
E) biror ustundagi barcha a_{ij} elementlar nolga teng bo'lsa.
4. Birlik matritsani ko'rsating.

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.Qaysi shartda A va B matritsalar teng deyiladi?
A) A va B bir xil tartibli matritsalar bo'lsa;
B) A va B har xil tartibli matritsalar bo'lsa;
C) A va B matritsalar har xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa;
D) A va B matritsalarning faqat diagonal elementlari o'zaro teng bo'lsa;
E) A va B matritsalarning tartiblari bir xil va mos elementlari o'zaro teng bo'lsa.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ matritsa bo'yicha 2A matritsani toping.

A) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 14 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$.

7.$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalarning yig'indisini toping.

A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; E)yig'indi aniqlanmagan.

8.Qaysi shartda A_{mn} va B_{pq} matritsalarni ko'paytirish mumkin?
A) m=p; B) m=q; C) n=p; D) n=q; E) mq=np.

9. Matritsalar ko'paytmasini toping: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

A) $AB=\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$; B) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; C) AB mavjud emas;

D) $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; E) $AB=\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&7\\4&2&2\end{pmatrix}$ matritsadagi 7-elementining algebraik to‘ldiruvchisini toping.

A) $A_{22}=10$; B) $A_{22}=12$; C) $A_{22}=-8$; D) $A_{22}=8$; E) $A_{22}=-10$.

11. Berilgan $A=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3&4&2\\2&0&0\end{pmatrix}$ matritsalar uchun C=2A+2B matritsani toping.

A) C=(1;0;12) ; B) C=(9;4;8) ; C) C=(6;0;0);

D) mavjud emas; E) $C=\begin{pmatrix}9&12\\8&0\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\\1&-1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}4&6\\1&3\\-3&2\end{pmatrix}$ matritsalar uchun C=2A–B matritsani ko‘rsating.

A) $C=\begin{pmatrix}0&0\\-1&-7\\5&-4\end{pmatrix}$; B) $C=\begin{pmatrix}4&6\\0&-4\\2&-2\end{pmatrix}$; C) $C=\begin{pmatrix}-4&-6\\-1&-3\\3&-2\end{pmatrix}$;

D) $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1`&3\end{pmatrix}$; E) $C=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&3\end{pmatrix}$.

13. Agar matritsalar $M=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$ bo‘lsa, M+N ni toping.

A) $\begin{pmatrix}4&0\\2&1\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix}2&-2\\-1&0\end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix}3&-2\\0&2\end{pmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix}5&-2\\3&4\end{vmatrix}$ aniqlovchini hisoblang.

A) 14; B) -26; C) 26; D) -14; E) 0.

15. $\begin{vmatrix}3&-5&1\\0&4&2\\0&0&-1\end{vmatrix}$ aniqlovchini hisoblang.

A) 0; B) 12; C) 10; D) -10; E) -12.

16. $\begin{vmatrix}x&1&0\\0&-1&4\\2&0&2\end{vmatrix}=5$ tenglamani yeching.

A) x=1; B) x=1,5; C) x=-1,6; D) yechim yo'q; E) x=6.

17. Quyidagi aniqlovchilardan o'zaro tenglarini ko'rsating.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

A) $\Delta_1=\Delta_2=2$; B) $\Delta_1=\Delta_2=1$; C) o'zaro tenglari yo'q; D) $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_2=\Delta_4=0$; E) $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_4=-16$.

18. Aniqlovchini hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$

A) 0; B) -12; C) 12; D) 2; E) 2.

19. Aniqlovchini hisoblang: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

A) 1; B) 0; C) -2; D) 4; E) 12.

20. Tenglamani yeching: $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

A) x=1; B) x=2.5; C) x=0.5; D) x=0; E) x= –1.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsalarni transponirlash deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsa nima?
4. Matritsalar ustida chiziqli amallar qanday aniqlanadi?
5. Qanday kvadrat matritsalar uchun AB=BA bo'ladi?
6. Ikkinchi va uchinchi tartibli aniqlovchilarni hisoblash uchun formulalar yozing.
7. Uchinchi tartibli aniqlovchilarining xossalarini aytib bering.
8. Uchinchi tartibli aniqlovchi biror elementning minori deb nimaga aytiladi?
9. Uchinchi tartibli aniqlovchi biror elementining algebraik to'ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
10. Uchinchi tartibli determinant biror elementlarining algebraik minori va algebraik to'ldiruvchisi o'zaro qanday bog'langan?

II bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Algebra va geometriya – shunday yagona mamlakatlarki, ularda jimlik va tinchlik hukm suradi.

M.Anezi

Bobning o‘quv maqsadi

Bobning o‘quv maqsadi talabalarga chiziqli tenglamalar sistemasining nazariyasi asoslarini, ularni Kramer, Gauss va matritsa usullarida yechish kabi malakalarni yetkazishdan iborat.

Kardano Jirolamo - italiyalik matematik «Buyuk san`at yoki algebra qoidalari haqida» (1545) kitobida uchinchi va to‘rtinchi darajali bir noma’lumli tenglamalarni va ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yechish formulasini tenglamalar koeffitsiyentlari orqali ifoda qilgan.

Fransuz matematigi Lagranj Jozef Lui birinchi bo‘lib, uzluksiz kasrlar yordamida ikkinchi darajali ikki noma’lumli (aniqmas) tenglamalar sistemasini yechdi.

Buyuk ingliz matematigi Isaak Nyuton o‘zining «Umumiy arifmetika» (1707) kitobida kvadrat tenglama va kvadrat tenglamalar sistemasini yechish masalalarini yoritdi.

Shvetsariyalik matematik Kramer Karl Haral'd 1750-yilda chop etilgan «Введение в анализ алгебраических кривих линий» nomli asarida Kramer usuli deb atalgan metod yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechimlarini ko‘rsatdi va aniqlovchilar nazariyasini yaratishga kirishgan birinchilardan hisoblanadi.

XVII–XVIII asrlarda P.Ferma, I.N'yuton, J.Lagranj, L.Eyler, E.Bezu va boshqalar, chiziqli tenglamalardan noma’lumlarni yo‘qotish usulini yaratganlar.

Harflarni indeks orqali ifodalash birinchi bo‘lib, nemis matematigi G.Leybnits tomonidan 1675-yilda foydalanilgan.

Koordinatalar usuli yordamida ikki noma’lumni tenglamaning geometrik yechimini XVII asrda P.Ferma, R.Dekart o‘z asarlarida bayon qilganlar.

Agar (2.3) ni (2.2) ga qo‘ysak, u holda yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \quad \text{va} \quad x_2 = \Delta_2/\Delta \tag{2.4}$$

Ular (2.1) sistema yechimi uchun Kramer formulalari deb yuritiladi.

Misol . Quyidagi $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Sistema aniqlovchisi noldan farqli , $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$, demak, sistema Kramer formulalari bilan aniqlanuvchi yagona yechimga ega bo‘ladi. Yuqorida keltirilgan (2.2) va (2.3) formulalarga asosan,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 9 = -7 \quad \text{va} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14.$$

Endi Kramer formulalariga asosan

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Noma’lum x_1 va x_2 ning topilgan qiymatlarini berilgan sistemaga qo‘yib, yechimning to‘g‘ri topilganligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Endi uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraylik. Bu sistemaning yechimi uchun ham Kramer formulalarini chiqarish qiyin emas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.5}$$

Quyidagi asosiy aniqlovchini kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bunda j-ustunni b_1, b_2, b_3 ozod hadlar ustuni bilan almashtirib, Δ_j, j=1,2,3 yordamchi aniqlovchilarni hosil qilamiz, ya’ni

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (2.5) sistemaning yechimi yagona bo'lib, quyidagi Kramer formulalari yordamida aniqlanadi:

$$x_1=\Delta_1/\Delta, \qquad x_2=\Delta_2/\Delta, \qquad x_3=\Delta_3/\Delta.$$

Misol : Sistema Kramer usulida yechilsin:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi aniqlovchilarni hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=6, \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4.$$

Kramer formulalariga asosan,

$$x_1=\Delta_1/\Delta=1, \qquad x_2=\Delta_2/\Delta=-6/7, \qquad x_3=\Delta_3/\Delta=4/7.$$

Endi quyidagi n ta noma'lumli n ta tenglamalar sistemasini ko'ramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (2.6)$$

Bu yerda a_{ij}, $i=1,2..n$, $j=1,2..n$ koeffitsiyentlar, $b_1, b_2,..b_n$- berilgan sonlar, $x_1, x_2,..x_n$- noma'lumlar. Sistemaning asosiy aniqlovchisini tuzamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mumkin bo'lgan eng sodda uch hol bilan tanishamiz.

1) Sistemaning asosiy aniqlovchisi nolga teng emas: $\Delta \neq 0$, bunda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va Kramer formulalari bilan aniqlanadi:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \ldots\ldots \quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (2.7)$$

(2.7) da keltirilgan Δ_1, Δ_2......Δ_n aniqlovchilar sistemaning asosiy aniqlovchisi Δ ning j - ustunida turgan $a_{1j}, a_{2j},...a_{nj}$ elementlari $b_1, b_2,..., b_n$ ozod hadlar ustuni bilan almashtirish natijasida hosil qilinadi.

2) Sistemaning aniqlovchisi nolga teng: $\Delta = 0$, shu bilan birga $\Delta_1, \Delta_2 .... \Delta_n$ aniqlovchilardan noldan farqlilari ham mavjud. Bu holda (2.6) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$ va Δ aniqlovchining hech bo'lmasa (n-1) - tartibli minorlaridan birortasi noldan farqli bo'lsin. Bunda n ta tenglamalardan iborat sistema n-1 ta tenglamalar sitemasiga keltiriladi va tekshirish keyingi sistema uchun davom ettiriladi.

1 - teorema (Kroneker - Kapelli). (2.6) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lish uchun sistemaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}.....a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}.....a_{mn} \end{pmatrix}$$

bilan kengaytirilgan matritsa

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & ...... & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

ning ranglari teng, ya'ni $r_A = r_B$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti zarurligi. (2.6) sistema birgalikda va

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$$

yechimga ega bo'lsin. $r(A) = r(B)$ekanligini isbotlaymiz.

$\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ larni (2.6) sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, ushbu m ta tenglik hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ...a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ...a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ...a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

B matritsaning so'nggi ustunidan α_1 ga ko'paytirilgan birinchi ustunni, keyin α_2 ga ko'paytirilgan ikkinchi ustunni va hokazo, nihoyat α_n ga ko'paytirilgan n - ustunni ayiramiz. B matritsaga ekvivalent ushbu matritsani olamiz, unda so'nggi ustunda nollar bo'ladi:

$$B \sim B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

$r_A = r_B$ ekanligi ravshan, chunki B_1 matritsa B matritsadan elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'ldi. Demak, $r_A = r_B$ bo'lishi zarurligi isbotlandi.

Yetarliligi. Endi $r(A) = r(B)$ ekanligi ma'lum bo'lsin. (2.6) – sistema birgalikda ekanligini isbotlaymiz. r-tartibli noldan farqli Δ_r aniqlovchi A matritsaning ham, B matritsaning ham yuqori chap burchagida joylashgan deb faraz qilish mumkin, ya'ni

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Aks holda noma'lumlar va tenglamalarning o'rinlarini almashtirib Δ_r ni aytilgan joyiga keltira olamiz. Matritsaning rangi uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soniga teng bo'lganligi uchun A va B matritsalarning birinchi r ta satrning chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodasi birinchi r ta tenglamaning natijalari, degan so'zdir. Shuning uchun ularni tushirib qoldirish mumkin, berilgan sistema birinchi r ta tenglamalardan iborat, ushbu sistemaga teng kuchlidir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Ushbu ikki hol bo'lishi mumkin: $r = n$ yoki $r < n$.

Agar $r = n$ bo'lsa, (2.6.1) sistemaning tenglamalari soni uning noma'lumlar soniga teng, shu bilan birga bu sistemaning determinanti nolga teng emas. Demak, bu sistema yagona va Kramer formulalari yordamida topish mumkin bo'lgan yechimga ega.

Agar $r < n$ bo'lsa, u holda tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik. (2.6)- da $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ noma'lumlar o'z ichiga olgan hadlarni tenglamalarning o'ng tomonlariga o'tkazib,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

sistemani hosil qilamiz. $x_{r+1}, x_{r+2},...x_n$ ozod noma'lumlarga $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2},...\lambda_n$ qiymatlarni berib, r ta $x_1, x_2,...x_n$ noma'lumlarga nisbatan r ta tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\ r+1}\lambda_{r+1} - ... - a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2\ r+1}\lambda_{r+1} - ... - a_{2n}\lambda_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\ r+1}\lambda_{r+1} - ... - a_{rn}\lambda_n \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

Bu sistemaning Δ_r aniqlovchi noldan farqli bo'lganligi uchun u yagona yechimga ega.

$\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2},...\lambda_n$ qiymatlar ixtiyoriy bo'lganligi uchun (2.6.2) sistema, binobarin, unga teng kuchli bo'lgan (2.6) sistema ham cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega.

Shunday qilib, A va B matritsalarning ranglari noma'lumlar soniga teng, ya'ni $r(A)=r(B)=n$ bo'lsa, u holda (2.6) sistema yagona yechimga ega.

Agar matritsalar rangi uchun $r(A)=r(B)<n$ bo'lsa, u holda (2.6) tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega. Teorema isbotlandi.

b) Gauss usuli

Endi (2.6) sistemani **Gauss usuli**da yechishni ko'rib chiqamiz. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli bo'lib, bunda elementlar almashtirishlar yordamida tenglamalar sistemasi unga teng kuchli bo'lgan pog'onali (yoki uchburchak) ko'rinishidagi sistemaga keltiriladi. So'ngra tartib bo'yicha oxirgi noma'lumdan, hamma noma'lumlarning qiymatlari topib olinadi. Tenglamalar sistemasida birinchi tenglamadagi x_1 o'zgaruvchi oldidagi koeffitsiyent $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilamiz (agar bunday bo'lmasa, sistema tenglamalarining o'rinlarini almashtirib, bunga erishish mumkin).

Birinchi qadam. Birinchi tenglamani mos ravishda $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}},...., -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ larga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni mos ravishda ikkinchi, uchinchi va hokazo n-tenglamalarga qo'shamiz. Natijada ikkinchi tenglamadan boshlab barcha tenglamalarda x_1 noma'lum yo'qoladi:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}{}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}{}^{(1)}x_n = b_2{}^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a_{i2}{}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}{}^{(1)}x_n = b_i{}^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a^{(1)}{}_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a^{(1)}{}_{nn}x_n = b^{(1)}{}_n
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

Bu yerda $a_{ij}^{(1)}$ ko‘rinishdagi koeffitsiyentlar birinchi qadamdan keyin hosil bo‘lgan yangi koeffitsiyentlarni ifodalaydi.

Ikkinchi qadam. $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilamiz (agar bunday bo‘lmasa, tenglamalar joylashish o‘rinlarini almashtirib, bunga erishish mumkin) (2.8) da ikkinchi, uchinchi va hokazo n-tenglamalarni $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots, -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ larga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni uchinchi, to‘rtinchi va hokazo n- tenglamalarga qo‘shsak, uchinchi tenglamadan boshlab, hamma tenglamalarda x_2 noma’lum yo‘qoladi. Bu jarayonni davom ettirib va noma’lumlarni ketma- ket yo‘qotib, $(n-1)$ - qadamdan keyin quyidagi sistemaga kelamiz:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

3-qadam. Uchburchakli (2.9) sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab, birin-ketin noma’lumlarni ketma-ket topamiz.

Bu Gauss usulining teskari yo‘li deb ataladi.

Misol :

$$
\begin{cases}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\
3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\
4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9
\end{cases}
$$

Yechish: Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma’lumni yuqotamiz:

$$
\begin{cases}
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\
\qquad -17x_2 + 16x_3 = 82 \\
\qquad -8x_2 + 4x_3 = 31
\end{cases}
$$

Endi uchinchi tenglamadan x_2 noma’lumni yuqotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ \quad -17x_2 + 16x_3 = 82 \\ \qquad\qquad 60x_3 = 129 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan $x_3 = \frac{43}{20}$, so‘ngra ikkinchi tenglamadan $x_2 = -\frac{238}{85}$ va nihoyat birinchi tenglamadan $x_1 = \frac{51}{34}$ ekanligini topamiz.

Kramer va Gauss usullarining qulayliklari va kamchiliklarini ko‘rsatamiz.

1) Kramer formulalari ixtiyoriy chiziqli sistema uchun bir xil ko‘rinishga ega.

2) Kramer formulalarida yechimlarning ixtiyoriy biri topilishi mumkin.

3) Kramer formulasi ikki va uch noma’lumli sistema uchun qulay.

4) To‘rt va undan ortiq noma’lumli sistema uchun Kramer formulalaridan foydalanish murakkab.

5) Gauss usuli aniqlovchilarni hisoblashni talab etmasdan, faqat koeffitsiyentlar va ozod hadlar ustida arifmetik amallar bajarish orqali amalga oshiriladi.

6) Gauss usulini kompyutyerda amalga oshirish oson.

7) Gauss usulida juda ko‘p arifmetik amallar bajarish talab etiladi.

8) Gauss usulida noma’lumlardan faqat birini topib bo‘lmaydi.

2.2-§.BIR JINSLI SISTEMALAR

Endi bir jinsli tenglamalar sistemasini mukammal ko‘rib o‘taylik:

$$\begin{cases} \grave{a}_{11}\tilde{o}_1 + \grave{a}_{12}\tilde{o}_2 + \ldots + \grave{a}_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Bunday sistemalar uchun asosiy va kengaytirilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \hat{a}\grave{a} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

matritsalarning ranglari bir xil. Demak, o‘tgan paragrafdagi teoremaga (yechilish alomatiga) asosan, (2.10) sistemani $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ qiymatlar qanoatlantiradi. Shunday qilib, bir jinsli sistema har vaqt quyidagi yechimga ega: $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,..x_n = 0$. Bu **nol** yechim (trivial yechim) deyiladi.

Agar (2.10) sistema yechimini tashkil etuvchi:

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$

sonlar orasida bittasi nolga teng bo'lmasa, bu yechim nolmas **yechim** deb ataladi. Yechilish alomatiga asosan, $s = n$ bo'lgan holda bunda s bilan A va B matritsalarning rangini belgiladik, (2.10) sistema bitta yechimga, demak, nol yechimgagina ega; $s \prec n$ bo'lganida esa (2.10) sistemaning cheksiz ko'p yechimlari mavjud bo'lib, ularning bittasi nol yechim, demak, qolganlari nolmas yechimlardan iborat. (2.10) sistemaning $m = n$ bo'lgandagi xususiy holiga to'xtab o'tamiz. Agar (2.10) sistemaning

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aniqlovchi noldan farqli bo'lsa, (2.10) sistema bitta yechimga, demak, nol yechimgagina ega. Bunga yana quyidagicha ishonch hosil qilish mumkin: $D \neq 0$ bo'lishi shuni bildiradiki, A va B matritsalarning rangi *n* ga teng; bunday holda, ma'lumki, (2.10) sistema bittagina yechimga ega bo'ladi. Kramer formulalari yordami bilan ham xuddi shu natijaga kelish mumkin. Haqiqatan, (2.10) sistema uchun $D_s = 0$ bo'lishini e'tiborga olsak (chunki D_s ning ustuni ozod hadlardan, demak, nollardan iborat),

$$x_s = -\frac{D_s}{D} = \frac{0}{D} = 0 \qquad (s = 1,2,........,n)\ ,$$

kelib chiqadi. Qanday shartlarda (2.10) sistema nolmas yechimlarga ega ekanini quyidagi teorema ko'rsatadi.

Teorema. *n* noma'lumli *n* ta bir jinsli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun, sistema determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. 1.(2.10) sistema $a_1, a_2, ..., a_n$ nolmas yechimga ega deb faraz qilaylik. (2.6) sistemaga nisbatan qilingan mulohazalarni (2.10)sistemaga nisbatan ham takrorlasak,

$$D \cdot X_s = D_s$$

tenglamalarga kelamiz. Ma'lumki, (2.10) sistemaning yechimi bu tenglamalarni ham qanoatlantiradi, ya'ni

$$D \cdot a_s = D_s$$

yoki

$$D \cdot a_s = 0 \qquad (2.11)$$

(chunki $D_s = 0$). Endi, teorema shartidan va (2.11) dan D=0 kelib chiqadi.

2. Aksincha, (2.10) sistema uchun D=0 bo'lsin. Bu vaqtda A va B matritsalarning rangi n dan kichik bo'lib, (2.10) sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi.

Misollar.

1. $$\begin{cases} 2\bar{o}_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema uchun:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

Demak, sistema bittagina 0,0,0 yechimga ega.

2. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistemaning aniqlovchisi esa:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

shu sababli, sistema nolmas yechimlarga ega. Ulardan bittasi: 2,1, 1.

Fundamental yechimlar sistemasi. (2.10) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (demak, $s \prec n$) bo'lgan holni ko'ramiz.

Ta'rif. (2.10) tenglamalar sistemasining

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad ...., \quad \beta_n$$

dan iborat bitta yechimi o'zaro chiziqli bog'lanmagan bo'lib, (2.10) sistemaning istalgan yechimlar orqali chiziqli ifodalansa, ya'ni

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + ... + c_l a_{l1} \\ \beta_2 &= c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + ... + c_l a_{l2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + ... + c_l a_{ln} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi $c_1, c_2, ... c_l$ sonlar topilsa, (2.12) sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi.

Teorema. (2.10) tenglamalar sistemasining asosiy A matritsasi noma'lumlar sonidan kichik rangga ega $(s \prec n)$ bo'lsa, bu sistema uchun fundamental yechimlar sistemasi mavjud va fundamental sistemaga kiruvchi yechimlar soni parametrlar soniga teng. Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Misol. Quyidagi bir jinsli sistemaning fundamental yechimlar sistemasini va umumiy yechimini toping:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Yechish. Bu sistemaning matritsasini tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ (tekshiring!). Bazis minor sifatida, masalan,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

ni olishimiz mumkin. U holda sistemaning 3-tenglamasini tashlab yuborib, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2,$$
$$4x_3 + 2x_4 = -3x_1 + 6x_2.$$

Agar $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$ desak, u holda

$$x_3 = -\frac{5}{2}C_1 + 5C_2, \quad x_4 = \frac{7}{2}C_1 - 7C_2$$

topiladi, Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$X = (C_1, C_2) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -\frac{5}{2}C_1 + 5C_2 \\ \frac{7}{2}C_1 - 7C_2 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Bundan mos ravishda $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ va $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ deb fundamental yechimlar sistemasini topamiz:

$$E_1 = X = (1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \qquad E_2 = X = (0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi (2.10) sistema uchun m=n bo‘lib, sistemaning aniqlovchisi esa noldan farqli bo‘lsa, bunday sistema faqat nol yechimga ega bo‘lishi Kramer teoremasidan kelib chiqadi. Noldan farqli yechimlar esa, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik yoki unga teng bo‘lgan holda, sistema dederminanti nolga teng bo‘lganda mavjud bo‘lishi mumkin. Aksincha, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga faqat va faqat uning noma’lumlari oldidagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa rangi noma’lumlar sonidan kichik, ya’ni $r(A) \prec n$ bo‘lganda ega bo‘ladi. (2.10)-sistemaning $x_1=\kappa_1, x_2=\kappa_2, ... x_n=\kappa_n$ yechimini $e_1=(k_1, k_2..., k_n)$ satr kabi belgilaymiz. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega bo‘ladi.

1) Agar $e_1=(k_1,k_2,.....,k_n)$ (2.10) sistemaning yechimi bo‘lsa, $\lambda e_1=(\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2,......, \lambda\kappa_n)$ ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.

2) Agar $e_1=(\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_n)$ va $e_2=(i_1, i_2, ..., i_n)$ lar (2.10)-sistemaning yechimlari bo‘lsa, ixtiyoriy c_1 va c_2 lar uchun e_1 va e_2 larning chiziqli kombinatsiyasi $c_1e_1+c_2e_2=(c_1k_1+c_2i_1, c_1k_2+c_2i_2, ..., c_1k_n+c_2i_n)$ ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.

Yechimlarining bu xossalarga ega ekanligiga ularni tenglamalar sistemasiga qo‘yish yo‘li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Keltirilgan xossalardan ko‘rinadiki, chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham shu tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

Shuning uchun ham (2.10) tenglamalar sistemasining shunday chiziqli bog‘lanmagan yechimlarini topish zaruriyati tug‘iladiki, uning qolgan barcha yechimlari chiziqli bog‘lanmagan yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalansin.

Ta’rif: Agar (2.10) sistemaning har bir yechimi chiziqli bog‘lanmagan yechimlar sistemasi $e_1, e_2, ...,e_\kappa$ larning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalansa, $e_1, e_2, ...,e_\kappa$ lar **fundamental yechimlar sistemasi** deyiladi.

Isbotiga to‘xtalmagan holda quyidagi teoremani keltiramiz:

Teorema. Agar (2.10) bir jinsli tenglamalar sistemasi noma’lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsa rangi r noma’lumlar soni n dan kichik bo‘lsa, (2.10) sistemaning har qanday fundamental yechimlari sistemasi (n-r) ta yechimdan iborat bo‘ladi.

Demak, (2.10) sistemaning umumiy yechimi e quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$e=c_1e_1+c_2e_2+......+c_\kappa e_\kappa .$$

Bu yerda $e_1, e_2, ...,e_к$ - ixtiyoriy fundamental yechimlar sistemasi $c_1, c_2, ...,c_к$ - ixtiyoriy sonlar va k=n-r.

Bir jinsli sistemani ko'ramiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.14)$$

Bu sistema birgalikda bo'lib, uni yechimi $x=0,\ y=0,\ z=0$ bo'ladi. Sistemaning nolga teng bo'lmagan yechimini topishni ko'ramiz.

Buning uchun

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\dfrac{x_1}{x_3} + a_{12}\dfrac{x_2}{x_3} = -a_{13} \\ a_{21}\dfrac{x_1}{x_3} + a_{22}\dfrac{x_2}{x_3} = -a_{23} \end{array}\right|$$

va faraz qilaylik,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

u holda,

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan (2.14) sistemani koeffitsiyentlaridan matritsa tuzamiz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

Ikkinchi tartibli aniqlovchi $D_1,\ D_2,\ D_3$ (2.15) matritsadan olinadi.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$$

Bu belgilash yordamida quyidagi tenglamani yozish mumkin.

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{D_1}{D_3}; \quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{D_2}{D_3}$$

Demak,

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{-D_2} = \frac{x_3}{D_3}$$

Agar t orqali proporsionallik koeffitsiyentini ifodalasak, u holda

$$x_1 = D_1t; \quad x_2 = -D_2t; \quad x_3 = D_3t \ (-\infty \prec t \prec +\infty).$$

Misol:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z=0 \\ 4x+5y-6z=0 \end{array}\right\}$$

Koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Bu matritsadan

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=12-15=-3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=-6-12=-18:$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=5+8=13$$

Yuqorida keltirilgan formuladan foydalanib, $x=-3t,\quad y=18t,\quad z=13t$, bu yerda $-\infty < t < +\infty$.

Agar $t=1$ bo'lsa, u holda $x=-3:\quad y=18:\quad z=13$ bo'ladi.

2.3-§. TESKARI MATRITSA. TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSALAR USULIDA YECHISH

Ta'rif: Berilgan A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb shunday A^{-1} kvadrat matritsaga aytiladiki, uning uchun $A^{-1}A= AA^{-1}= E$ (E-birlik matritsa) tenglik o'rinli bo'ladi. $A^{-1}=\{a_{ij}^{-1}\}$ teskari matritsaning elementlari quyidagi formula asosida hisoblanadi:

$$a_{ij}^{-1}=\frac{A_{ij}}{\Delta(A)}.$$

Agar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

va

$$\Delta=\det(\mathrm{A})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

bo'lsa, u holda

$$A^{-1} = (1/\Delta)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. Bu yerda $\Delta = \Delta(A)$ – aniqlovchi, A_{ij} lar mos elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari. Demak, berilgan A matritsaga teskari matritsani topish uchun, avvalo $\Delta = \Delta(A) \neq 0$ va A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblash, keyin esa A^{-1} ni topish kerak. Algebraik to‘ldiruvchilardan tashkil topgan

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa A ga **biriktirilgan matritsa** deyiladi. Biriktirilgan matritsa $\tilde{A}$ va teskari matritsa A^{-1} orasidagi quyidagi bog‘lanish mavjud:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\Delta(A)}$$

Agar berilgan matritsa teskari matritsaga ega bo‘lsa, **maxsusmas**, aks holda **maxsus** matritsa deyiladi. A matritsaga **teskari matritsa** mavjud bo‘lishini Laplas teoremasi yordamida ham ko‘rsatish mumkin. Bunda A_{ij} - A matritsaning a_{ij} elementining algebraik to‘ldiruvchisi (i=1,2,3; j=1,2,3).

Teorema. Agar A matritsa maxsusmas bo‘lsa, unga teskari matritsa mavjud va u yagonadir.

Isbot. Teskari matritsani hisoblashning turli usullari mavjud. Uni sodda holda algebraik to‘ldiruvchilar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} T_{11} \; T_{21} \; \dots \; T_{n1} \\ T_{12} \; T_{22} \dots T_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{1n} \; T_{2n} \dots T_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\tilde{T} \quad , (|A| \neq 0),$$

bunda $\tilde{T}$ matritsa $T = (T_{ij})$ matritsadan transponirlash yordamida hosil qilinadi.

Teskari matritsani hisoblash algoritmi quyidagicha:

1) Berilgan A matritsani aniqlovchisini hisoblaymiz;

2) Agar $|A| \neq 0$ bo‘lsa, A matritsa elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari T_{ij} larni hisoblaymiz;

3) $T = (T_{ij})$ ni tuzib, uni transponirlab, $\tilde{T}$ matritsani hosil qilamiz;

4) A^{-1} ni oxirgi formula yordamida hisoblaymiz;

5) Teskari matritsa to‘g‘ri topilganini $A \cdot A^{-1} = E$ bo‘lishi kerakligiga asoslanib tekshiramiz.

Maxsusmas matritsalar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

$$1.\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}; \qquad 3.\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T};$$

$$2.\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \qquad 4.(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Misol : Teskari matritsa topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Yechish.

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43$$

Dastlab A matritsa elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(-9-8) = 17$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10; \qquad ; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4 + 12) = -16;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10;$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 12) = 16;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17.$$

Natijada teskari matritsa ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$A^{-1} = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Tekshirish o‘tkazamiz. Haqiqatan,

$$A^{-1}A = (1/43)\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1/43\begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Bu tenglikdan teskari matritsa to‘g‘ri topilganligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli bilan tanishamiz. Quyidagi yordamchi matritsalarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko'paytirish ta'rifiga asosan (2.5) sistemani **AX=B** ko'rinishda yoza olamiz. Oxirgi matritsali tenglamani har ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytiramiz va X yechimlar matritsasini hosil qilamiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Misol : Tenglamalar sistemasi matritsa usulida yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bunda A matritsa

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega va unga teskari A^{-1} matritsa oldingi misolda aniqlangan.

Qaralayotgan sistema uchun yuqorida topilgan formulalarga asosan, quyidagi tengliklarni yoza olamiz :

$$B=\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A^{-1}B = 1/43\begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = 1/43\begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demak, sistemaning yechimi $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, teskari matritsa tushunchasi ixtiyoriy n-tartibli kvadrat matritsa uchun ham yuqoridagidek aniqlanadi. Matritsa usuli har qanday sondagi tenglamalar sistemasi uchun ($\Delta \neq 0$) ham qo'llanilishi mumkin va tenglamalar sistemasi, uning yechimlari matritsa ko'rinishida ixcham ifodalanadi. Bu usulning kamchiligi shundan iboratki, teskari matritsani topish jarayoni murakkab va juda ko'p hisoblashlarni talab etadi.

XULOSA

Matritsalar va aniqlovchilar nazariyasi bu kunga kelganda, keng rivojlangan bo'lib matematika, mexanika, iqtisod va boshqa fanlarda uchraydigan masalalarni yechishda ishlatiladi. Bu nazariyaning faqat asoslari «Oliy matematika» kursida kiritildi.

Jumlada, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda matritsa va aniqlovchilardan teng kuchli foydalaniladi.

Misol uchun, mazkur bobda chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usuli bilan yechish tartibini ko'rdik. Bunda Gauss usulini ham aytish mumkin.

Haqiqatda ham, quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan tuzilgan kengaytirilgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

matritsani elementar almashtirishlar orqali diagonal matritsaga keltirilsa:

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \overline{a}_{13} & \overline{b}_1 \\ & \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \overline{b}_2 \\ & & \overline{a}_{33} & \overline{b}_3 \end{pmatrix}$$

unda mos tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \overline{a}_{11}x+\overline{a}_{12}y+\overline{a}_{13}z=\overline{b}_1 \\ \qquad \overline{a}_{21}y+\overline{a}_{22}z=\overline{b}_2 \\ \qquad\qquad \overline{a}_{33}z=\overline{b}_3 \end{cases}$$

ildizlari odatdagiday aniqlanadi.

Mazkur bobni o'zlashtirgan kitobxon chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, Gauss va matritsalar usullaridan foydalanib yechib bilishini xulosa sifatida aytish mumkin.

2-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi ildizlari yig'indisini toping.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=5 \\ 2x_1-3x_2=0 \end{cases}$$

A) 10; B) 0; C) 5; D) 15; E) to'g'ri javob yo'q.

2. Ta'rifni to'ldiring:

Ta'rif: α, β va γ sonlarga uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi deyiladi, agarda ular sistemaning ...... tenglamalarini qanoatlantirsa.

A) birinchi ; B) ikkinchi; C) birorta; D) kamida bitta; E) uchala.

3. Ushbu ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy aniqlovchisi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

A) $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$; B) $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$; C) $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$;

D) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; E) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

4. Tenglamalar sistemasini yechishda Kramer usulini qanday hollarda qo'llash mumkin?

A) sistemaning asosiy aniqlovchisi noldan farqli bo'lsa;

B) sistemaning yechimi uchta bo'lsa;

C) sistemaning ozod hadlari o'zaro teng bo'lsa;

D) sistemaning koeffitsiyentlari proporsional bo'lsa;

E) Noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlar bir xil bo'lsa.

5. Gauss usulining mazmuni qayerda to'g'ri ifodalangan?

A) Aniqlovchilar hisoblanadi;

B) Matritsalar topiladi;

C) Teskari matritsa aniqlanadi;

D) Noma'lumlar birin-ketin yo'qotiladi;

E) To'g'ri javob keltirilmagan.

6. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri ?

A) sistemaning yechimi yo'q; B) sistema yagona yechimga ega;

C) sistema cheksiz ko'p yechimga ega; D) sistemaning yechimi ikkita;

E) sistemaning yechimi yo'q yoki cheksiz ko'p yechimga ega.

7. Agar ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasida

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

koeffitsiyentlar va ozod hadlar uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

shart bajarilsa, u holda sistemaning yechimi to'g'risida nima deyish mumkin?

A) yechim yagona; B) yechim cheksiz ko'p; C) yechim mavjud emas;

D) yechimlar o'zaro teng; E) yechimlar proporsional.

8. Agar ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasida

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

koeffitsiyent uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

shart bajarilsa, u holda sistemaning yechimi to'g'risida nima deyish mumkin?

A) yechim yagona; B) yechim cheksiz ko'p; C) yechim mavjud emas; D) yechimlar o'zaro teng; E) yechimlar proporsional.

9. Agar ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasida

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

koeffitsiyentlar va ozod hadlar uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

shart bajarilsa, u holda quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

A) sistema yagona yechimga ega; B) sistema cheksiz ko'p yechimga ega;

C) sistema yechimga ega emas; D) sistemaning yechimlari o'zaro teng;

E) sistemaning yechimlari proporsional.

10. Tenglamalar sistemasi uchun

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

A)sistema yagona yechimga ega; B) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega;

C) sistema yechimga ega emas; D) sistemaning yechimlari o‘zaro teng; E) sistemaning yechimlari proporsional.

11. Tenglamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$

A) x=1,y=2; B) x=0,y=1; C) x=2,y=1; D) x=1,y=1; E) x=0,y=1.

12. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 3x+5y-3z=8 \\ 2x-2y+z=-3 \\ x+3y+4z=-1 \end{cases}$$

A) $\begin{cases} x=1 \\ y=1; \\ z=2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=0 \\ y=1; \\ z=-1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x=1 \\ y=2; \\ z=1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=2 \\ y=1; \\ z=1 \end{cases}$ E) $\begin{cases} x=1 \\ y=2. \\ z=2 \end{cases}$

14. Sistemaning xususiy yechimlaridan bittasini ko‘rsating.

$$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

A) $\begin{cases} x=1 \\ y=1; \\ z=5 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=0 \\ y=0; \\ z=0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1; \\ z=-1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=1 \\ y=1; \\ z=1 \end{cases}$ E) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2; \\ z=-2 \end{cases}$

15. Agar uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasi uchun asosiy aniqlovchi $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, sistemaning yechimi haqida nima deyish mumkin?

A) sistema yechimga ega bo‘lmaydi; B) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega;

C) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi; D) sistema 2 ta yechimga ega; E) sistema uchta yechimga ega bo‘ladi.

16. A matritsa va unga teskari A^{-1} matritsalar ko‘paytmasi uchun qaysi tasdiq o‘rinli?

A) $A A^{-1}$ faqat 0 lardan iborat matritsa bo‘ladi;

B) AA^{-1} faqat 1 lardan iborat matritsa bo‘ladi;

C) AA^{-1} asosiy diagonalida 0 lar va qolgan joylarida faqat 1 lardan iborat matritsa bo‘ladi;

D) AA^{-1} asosiy diagonalida 1 lar va qolgan joylarida faqat 0 lardan iborat matritsa bo‘ladi;

E) AA^{-1} ixtiyoriy kvadrat matritsa bo‘ladi.

17. Ushbu A matritsaga teskari A^{-1} matritsa topilsin. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 0.3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; C) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

D) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; E) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ martrisaga tesraki A^{-1} matritsa topilsin.

A) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; B) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; C) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

D) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; E) mavjud emas.

19. A va unga teskari A^{-1} matritsalar uchun quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri (E - birlik matritsa, 0 - nol matritsa)?

A) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$; B) $A \cdot A^{-1} = E$; C) $A^{-1} \cdot A = E$;

D) $A A^{-1} - A^{-1} A = 0$; E) $A - A^{-1} = 0$.

20. Agarda A kvadrat matritsa aniqlovchisi Δ bo'lsa, qaysi shartda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo'lmaydi?

A) Δ=0; B) Δ<0; C) Δ>0; D) Δ≠0; E) Δ ixtiyoriy qiymatli.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Kramer qoidasini aytib bering.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qaysi holda birgina yechimga ega?
2. Ikkita va uchta tenglama sistemalari uchun buni geometrik nuqtayi nazardan qanday talqin etish mumkin?
4.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
5. Qanday matritsa berilgan matritsa uchun teskari matritsa deb ataladi ? Teskari matritsa qanday topiladi?

III bob. VEKTORLAR ALGEBRASI

Sonlar tabiatni miqdor jihatda boshqaradi deb aytish mumkin.

J.Maksvell

Bobning o'quv maqsadi

Mazkur bobda talabalarga quyidagilarni yetkazish maqsad qilib qo'yilgan: vektor miqdorlarni kiritilishi zaruriyati, vektor miqdorlarning berilish usullari, vektor miqdorlar ustida amallar bajarish, xossalari, tatbiqlari.

Vektor miqdori matematika fanining eng asosiy va muhim tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Vektor hisobi, ya'ni yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar bilan hisob hozirgi darajasiga faqat XIX asrning oxirida bu tushunchaning fizika va mexanika fanlarida keng qo'llanilishi tufayli erishdi.

Biz bu yerda vektor hisobi deb shartli ravishda yo'nalishga ega kesma deb olayapmiz. Nazariy jihatdan olganda vektor – bu kesma emas. Chunki kesma nuqtalar to'plami bo'lib, vektor bu tushuncha (psixologik tushuncha) bo'lib, ular bir jinsli matematik tushunchalar emas, ya'ni kesmadan foydalanib ikkinchisiga ta'rif berib bo'lmaydi. Parallelogramm, to'g'ri burchak, kvadrat – bir jinsli tushunchalar. Kesma va vektor bir jinsli emas. Kesma – nuqtalar to'plami vektor esa nuqtalar to'plami emas.

Miqdorlarni kesmalar bilan ifodalash va geometrik hisoblashning asosini biz qadimiy yunon matematikasidan topamiz. XVI asrning oxirida – XVII asrning boshlarida Leonardo da Vinchi, Galileo Galiley va boshqa bir qancha olimlar fizikada kuchlarni yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar sifatida ifodalay boshladilar. Og'ma tekislikda jismlarning muvozanatini o'rganish jarayonida Simon Stevin ham shu yo'l bilan kuchlarni tashkil etuvchilarga ajratishga kelib qoldi va kuchlarni qo'shishning parallelogramm qoidasini ochadi.

Kepler ham planetalarning harakat qonunini o'rganish jarayonida doimo yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar bilan ish olib boradi. Hozirgi zamongacha vektor hisobining o'sishi XIX asrga to'g'ri keladi. Vektor hisobining taraqqiyoti uch yo'nalishda bordi: geometrik, fizik va algebraik. Yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar hisobi birinchi marta 1799-yilda norvegiyalik olim Kaspar Vesselning «Tekis va sferik ko'pburchaklarni yechishda yo'nalishlarni analitik ifodalash va uning qo'llanishi tajribasi» nomli kitobida chop etilgan. XVIII asrda Kaspar Vessel tekislikda vektor algebrasini qanday tartibda yoritgan bo'lsa, hozirgi darsliklarda xuddi shunday qilib yoritish saqlanib qolgan. Misol tariqasida uning turli yo'nalishlarga ega bo'lgan kesmalarning yig'indisini topish qoidasini keltiramiz: «Ikkitadan ko'p bo'lgan kesmalarni qo'shish uchun quyidagi qoidaga amal qilish kerak: ularni shunday joylashtirish lozimki, birinchi kesmaning boshi bilan, ikkinchi kesmaning oxiri esa uchinchi kesmaning boshi mos kelsin va h.k.. eng oxirida esa birinchi kesmaning boshlang'ich nuqtasi bilan eng oxirgi kesmaning oxirgi nuqtasini kesma bilan tutashtiramiz va shu kesmani hamma kesmalarning yig'indisi deb ataymiz».

Fransuz matematigi L.Karnoning ishlarida hozirga qadar saqlanib qolgan ba'zi bir atama va belgilarni, xususiy holda, vektorni $\overline{AB}$ va $\bar{a}$ kabi belgilashini ko'rish mumkin. Vektor hisobining keyingi o'sish davri U. Gamilton ishlari bilan bog'liqdir. U birinchi marta «vektor» atamasini ishlata boshladi va «skalyar» atamasini kiritdi. Vektor hisobi XIX asrning oxiridan boshlab muntazam ravishda elektromagnit maydoni va gidrodinamika nazariyalarida, XX asrda esa nazariy mexanikada hamda analitik va differensial geometriyada keng qo'llanila boshlandi.

3.1-§. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

Fizika, mexanika, texnika va matematikada asosan ikki xil kattaliklar bilan ish ko'riladi. Ulardan biri o'zining son qiymati bilan to'la aniqlanib, o'zgarmas miqdorlar deb ataladi. Bunday kattaliklarga yuza, hajm, temperatura, issiqlik miqdori,elektr miqdori va boshqalar misol bo'ladi. Ikkinchi tur kattaliklarni to'la xarakterlash uchun esa ularning son qiymatlarigina yetarli bo'lmay, balki yo'nalishi ham berilgan bo'lishi kerak. Bunday kattaliklarga kuch, tezlik va tezlanish kabilar misol bo'ladi. O'zining miqdori bilan birga yo'nalishi bilan ham xarakterlanadigan kattaliklar **vektor miqdori yoki vektorlar** deb ataladi

Bu ta'rifdan ko'rinib turibdiki, geometriyadagi yo'nalgan kesma vektor kattalikni ifodalaydi. Vektorlar boshlanish va tugash nuqtalari orqali $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}$ kabi, ko'pincha $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ kabi belgilanadi. Biz kelgusida dastlabki ikki xil belgilashdan foydalanamiz. Vektorlar son qiymati shartli ravishda uning **moduli** yoki **uzunligi** deyiladi va $|\bar{a}|$ simvol bilan ko'rsatiladi.

Agar vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar shartli ravishda **kollinear vektorlar** deyiladi. Agar ikki vektorning: 1) modullari teng, 2) kollinear va 3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa, bunday vektorlar bir-biriga **teng** bo'ladi. Boshlang'ich nuqtasi tekislik yoki fazoning har qanday nuqtasida yotishi mumkin bo'lgan vektorlar ozod vektorlar deyiladi. Biz kelgusida ozod vektorlar bilan ish ko'ramiz. Faraz qilaylik, quyidagicha $\bar{a}$ vektor berilgan va $\bar{a}$ vektorning uzunligi bir birlikka teng $\bar{a}_0$ vektor yo'nalishi ustma- ust tushsin.

Uzunligi bir birlikka teng bo'lgan vektor birlik vektor deyiladi. Agar $\bar{a}_0$ birlik vektor bo'lsa, $|\bar{a}| = a$ bo'lsa, unda $\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}_0$ ekani ravshan.

Bu tenglilikdan:

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \tag{3.1}$$

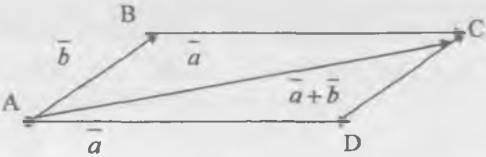
Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan vektorlar komplanar vektorlar deyiladi. Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo'lgan vektor nol vektor deyiladi. Nol vektor $\bar{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\bar{0}| = 0$ bo'ladi. Bu vektor yo'nalishi to'g'risida so'z yuritib bo'lmaydi. Nol vektor $\bar{0}$ har qanday $\bar{a}$ vektorga kollinear deb hisoblanadi. Ikkita $\bar{a}$, $\bar{в}$ vektorlar teng deyiladi va $\bar{a} = \bar{в}$ kabi belgilanadi, agarda quyidagi uchta shart bajarilsa:

$\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlar kollinear;

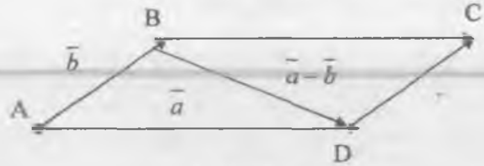
$\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega, ya'ni $|\bar{a}| = |\bar{в}|$; $\bar{a}$ va $\bar{в}$ bir xil yo'nalishga ega.

Masalan, ABCD parallelogrammda $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{DC}$ bo'ladi. Bu yerdan vektorlarni parallel ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.

Endi ikkita $\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlarni qo'shish va ayirish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel ko'chirish orqali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\bar{a} = \overline{AD}$, $\bar{в} = \overline{AB}$ kabi belgilab, ABCD parallelogrammni hosil qilamiz. Bu holda $\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlarning yig'indisi deb parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overline{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{в}$ kabi belgilanadi (3.1-chizma). Bu vektorlarning $\vec{a}-\vec{в}$ ayirmasi parallelogrammning B uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{BD}$ vektorga aytiladi (3.1-chizma).



3.1- chizma.



3.2-chizma.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}+\vec{в}=\vec{в}+\vec{a}$ **2.** $(\vec{a}+\vec{в})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{в}+\vec{c})$

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

a) O'rin almashtirish qonuni. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarni qo'shishda ularning o'rinlarini almashtirish mumkin.

b) Gruppalash qonuni. Bir nechta vektorni qo'shishda ularni gruppalash mumkin.

s) Har qanday vektorni nol vektorga qo'shish mumkin.

$\vec{a}$ vektorni λ songa (o'zgarmasga) ko'paytmasi deb, $\lambda\vec{a}$ kabi belgilanadigan va quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan vektorga aytiladi:

1. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, ya'ni vektorning uzunligi $|\lambda|$ marta o'zgaradi;
2. $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinear;
3. $\lambda>0$ bo'lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ bir xil yo'nalgan,

$\lambda<0$ bo'lsa, $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ qarama-qarshi yo'nalgan.

Masalan, ABCD trapetsiya bo‘lib, uning asoslari $|AD|=8$ va $|BD|=4$ bo‘lsa, unda $\overline{AD}=2\overline{BC}$ va $\overline{AD}=-2\overline{CB}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

$\lambda=0$ bo‘lsa, har qanday $\bar{a}$ vektor uchun $0\cdot\bar{a}=\bar{0}$ bo‘ladi.

Vektorni songa ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\bar{a})=\beta(\lambda\bar{a})$ 2. $(\lambda\pm\beta)\bar{a}=\lambda\bar{a}\pm\beta\bar{a}$ 3. $\lambda(\bar{a}\pm\bar{b})=\lambda\bar{a}\pm\lambda\bar{b}$

Bu yerda α va β ixtiyoriy sonlar, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ ixtiyoriy vektorlardir.

$(-1)\bar{a}$ vektor $\bar{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $-\bar{a}$ kabi belgilanadi. Bunda doimo $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$ bo‘ladi.

Endi bir tekislikda joylashgan vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun bu tekislikda XOY koordinatalar sistemasini olamiz.OX(OY) koordinata o‘qida joylashgan, musbat yo‘nalishda yo‘nalgan va uzunligi birga teng bo‘lgan $\bar{i}(\bar{j})$ vektorni kiritamiz.

Kiritilgan $\bar{i}$ va $\bar{j}$ vektorlar **ort vektorlar** yoki qisqacha **ortlar** deb ataladi. Endi berilgan $\bar{a}$ vektorni shartli ravishda yo‘naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o‘qdagi proyeksiyalarini qaraymiz. Bu proyeksiyalar $\bar{a}$ vektorning OX va OY o‘qdagi proyeksiyalari deb ataladi va a_x, a_y kabi belgilanadi. Unda, vektorlarni qo‘shish ta’rifidan foydalanib, $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ tenglikni yozish mumkin.

Endi $\bar{a}$ vektor proyeksiyalarining uzunligini $a_x=x,\ a_y=y$ kabi belgilaymiz. U holda tekislikdagi ixtiyoriy $\bar{a}$ vektorni $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar orqali

$$\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j} \tag{3.2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

(3.2) tenglik $\bar{a}$ vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi, x va y sonlari esa uning koordinatalari deb ataladi va $\bar{a}(x;y)$ kabi ifodalanadi.

Masalan, $\bar{a}=2\bar{i}-2\bar{j}$ vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-2$ bo‘ladi.

Nol vektor uchun $\bar{0}=0\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{j}$ bo‘lgani uchun uning koordinatalari $x=0, y=0$ bo‘ladi.

Har qanday $\bar{a}$ vektor o‘zining x va y koordinatalari bilan (3.2) tenglik orqali to‘liq aniqlanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi, kollinearligi va ular ustidagi qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi.

Ikkita $\vec{a}(x_1;y_1)$ va $\vec{в}(x_2;y_2)$ vektorlar teng bo‘lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya’ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bo‘lishi zarur va yetarli.

$\vec{a}(x_1;\ y_1)$ va $\vec{в}(x_2;\ y_2)$ vektorlar kollinear bo‘lishi uchun ularning mos koordinatalari proporsional, ya’ni

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=k \Rightarrow \ x_1=kx_2, y_1=ky_2$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Masalan, $\vec{a}(3;-2)$ va $\vec{в}(9;-6)$ kollinear vektorlar, chunki 9/3=(-6/-2)=3.

Vektorlarni qo‘shish. $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ va $\vec{в}(x_2;\ y_2)$ vektorlar yig‘indisi yoki ayirmasi mos koordinatalarning yig‘indisi yoki ayirmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\vec{a}(x_1;y_1)\pm\vec{в}(x_2;y_2)=\vec{c}(x_1\pm x_2, y_1\pm y_2)$$

Masalan, $\vec{a}$ (4;-2) va $\vec{в}(5;9)$ bo‘lsa, $\vec{a}+\vec{в}$={4+5;-2+9}={9;7},

$\vec{a}-\vec{в}$={4-5;-2-9} = {-1;-11} koordinatali vektorlardan iborat bo‘ladi.

$\vec{a}(x;\ y)$ vektorni λ songa ko‘paytmasi uning har bir koordinatasini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya’ni $\lambda\cdot\vec{a}\ (x;y)=\vec{c}\,(\lambda x;\ \lambda y)$.

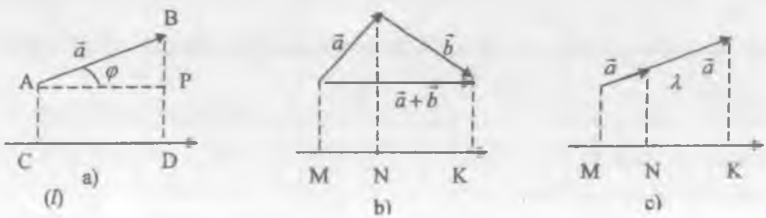
Masalan, $\vec{a}(4;-7)$ bo‘lsa, $2\vec{a}$={2·4; 2·(-7)}={8;-14} koordinatali vektor bo‘ladi.

Fazodagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritish uchun OX, OY va OZ o‘qlari bo‘yicha $\vec{i}, \vec{j}$ va $\vec{k}$ ort vektorlarni kiritamiz. Unda yuqorida ko‘rsatilgan singari, fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\cdot\vec{k}$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi. Bu tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasi deb atalib, undagi x, y va z sonlari uning koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ kabi yoziladi.

Vektorlarning proyeksiyasi. $\bar{l}$ o‘q va unda yotmagan $\overline{AB}$ vektor berilgan bo‘lsin.



3.3 - chizma.

A va B nuqtalardan $\bar{l}$ o'qqa perpendikular tushiramiz. C va D nuqtalar $\overline{AB}$ vektorlarning A boshi va B oxirining $\bar{l}$ o'qqa proyeksiyalari deyiladi.

Ta'rif: $\overline{AB}$ vektorlarning $\bar{l}$ o'qqa proyeksiyasi deb CD kesmaning uzunligiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$|CD| = \Pi p_{\bar{l}}\overline{AB}.$$

Proyeksiyalarning asosiy xossalarini qaraymiz:

1. $\bar{a}$ vektorning $\bar{l}$ o'qqa proyeksiyasi $\bar{a}$ vektor modulining bu vektor bilan o'q orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\Pi p_{\bar{l}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi .$$

Bu 3.3.a-chizmadan ko'rinib turibdi.

2. Ikki vektor yig'indisining $\bar{l}$ o'qqa proyeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proyeksiyalari yig'indisiga teng

$$\Pi p_{\bar{l}}\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = \Pi p_{\bar{l}}\bar{a} + \Pi p_{\bar{l}}\bar{b} .$$

Bu xossa to'g'riligini 3.3.b-chizmada ko'rinib turibdi.

3. λ sonning $\bar{a}$ vektorga ko'paytmasining $\bar{l}$ o'qqa proyeksiyasi λ sonni $\bar{a}$ vektorning shu o'qqa proyeksiyasi ko'paytmasiga teng :

$$\Pi p_{\bar{l}}\lambda\bar{a} = \lambda\Pi p_{\bar{l}}\bar{a} .$$

Bu xossa to'g'riligini 3.3.c-chizmadan ko'rish mumkin.

4. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar φ burchak tashkil etsin. Agar $\bar{l}$ o'q sifatida $\bar{b}$ vektor olinsa, u holda $\bar{a}$ vektorni $\bar{b}$ vektorga proyektsiyasi, ta'rifga asosan $\Pi p_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$ bo'ladi.

3.2-§. VEKTORLARNING SKALYAR KO'PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

Ta'rif: $\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlarning **skalyar ko'paytmasi** deb $\bar{a}\cdot\bar{в}$ yoki $(\bar{a};\ \bar{в})$ kabi belgilanadigan va

$$\bar{a}\cdot\bar{в} = |\bar{a}|\cdot|\bar{в}|\cdot\cos\varphi \qquad (3.3)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu yerda φ orqali $\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlar orasidagi burchak belgilangan.

$\bar{a}$ va $\bar{в}$ vektorlarni (3.3) formula orqali ko'paytirilganda son, ya'ni skalyar kattalik hosil bo'ladi va shu sababli $\bar{a}\cdot\bar{в}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

Skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini ko'ramiz. $\bar{F}$ kuch moddiy nuqtaga ta'sir etib, uni to'g'ri chiziq bo'ylab $\bar{S}$ vektor bo'yicha harakatlantirgan bo'lsin. Agarda kuch va harakat yo'nalishlari orasidagi burchak φ bo'lsa, bajarilgan A ish miqdori

$$\mathbf{A} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi$$

formula bilan aniqlanishi bizga fizika kursidan ma'lum. Ammo bu formulani (3.3) ga asosan $\mathbf{A}=\vec{F}\cdot\vec{S}$ deb yozish mumkin. Demak, $\vec{F}$ kuch va $\vec{S}$ ko'chish vektorlarining skalyar ko'paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{в}\cdot\vec{a}$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 3. $\lambda\vec{a}\cdot\vec{в}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{в}$ 4. $(\vec{a}\pm\vec{в})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{в}\cdot\vec{c}$

Ta'rif: $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a}\perp\vec{в}$ kabi belgilanadi.

Masalan, oldingi paragrafda ko'rib o'tilgan ort vektorlar ortogonaldirlar, ya'ni $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$ va $\vec{j}\perp\vec{k}$.

Teorema. Noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{в}=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Zaruriyligi. $\vec{a}\perp\vec{в}$ bo'lsin. Unda ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'ladi va skalyar ko'paytma ta'rifiga asosan

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos 90^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot 0=0$$

Yetarliligi. $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{в}|\neq 0$ bo'lib, $\vec{a}\cdot\vec{в}=0$ bo'lsin. Unda skalyar ko'paytma ta'rifidan

$$\vec{a}\cdot\vec{в}= |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=0\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{в}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi tekislikda yotuvchi va koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1,y_1)$, $\vec{в}(x_2,y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Buning uchun $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ va $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ va $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ ekanligidan va skalyar ko'paytmaning 2) va 4) xossalaridan foydalanamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=x_1x_2\vec{i}\,\vec{i}+x_1x_2\vec{i}\,\vec{j}+y_1x_2\vec{j}\,\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\,\vec{j}=$$
$$=x_1x_2\cdot 1+x_1y_2\cdot 0+y_1x_2\cdot 0+y_1y_2\cdot 1=x_1x_2+y_1y_2.$$

Demak, $\vec{a}(x_1;\ y_1)\cdot\vec{в}(x_2;\ y_2)= x_1x_2+ y_1y_2$, ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, $\vec{a}(2;6)$ va $\vec{в}(5;-2)$ bo'lsa, $\vec{a}\cdot\vec{в}=2\cdot5+6\cdot(-2)=10-12=-2$ natijani olamiz. Xuddi shunday tarzda fazodagi $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ va $\vec{в}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)\cdot\vec{в}(x_2; y_2; z_2) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3.4)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi skalyar ko'paytma tatbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko'ramiz.

1-masala. $\vec{a}\ (x; y; z)$ vektorning modulini toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning 2- xossasiga va (3.4) formulaga asosan

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{x\cdot x + y\cdot y + z\cdot z} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3.5)$$

Masalan, $\vec{a}(2; 4; 12)$ vektorning moduli

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$$

2-masala. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{в}\ (x_2; y_2; z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko'paytma ta'rifi, (3.4), (3.5) formulalarga asosan

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (3.6)$$

Masalan, $\vec{a}(1; 0; 1)$ va $\vec{в}\ (0; 1; 1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

3-masala. $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ va $\vec{в}\ (x_2; y_2; z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Yechish. $\vec{a}\perp\vec{в}$ bo'lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo'ladi va shu sababli $\cos\varphi=0$. Unda (3.3), (3.4) formulalardan

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \qquad (3.7)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\vec{a}(3; -2; 1)$ va $\vec{в}\ (5; 7; -1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot5+(-2)\cdot7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Yechish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, $\overline{AB}$ vektorni hosil qilamiz. Ma'lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni $\overline{AB}\ (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$. Unda (3.5) formulaga asosan,

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (3.8)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Masalan, A(5; -3; 1) va B(8; 1; 13) nuqtalar orasidagi masofa $d=\sqrt{(8-5)^2+(1-(-3))^2+(13-1)^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$ bo'ladi.

Skalyar ko'paytmaning iqtisodiy ma'nosini ko'rsatish uchun uch xil mahsulotlarning narx va miqdorlarini ifodalovchi ushbu $\bar{p}\,(p_1;\ p_2;\ p_2)$ va $\bar{q}\,(q_1;q_2;q_2)$ vektorlarni kiritamiz. Unda ularning skalyar ko'paytmasi $\bar{p}\cdot\bar{q}=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$ uchala mahsulot qiymatini ifodalaydi.

5-masala. Korxona 4 ta P_1, P_2, P_3, P_4 turdagi 50; 80; 20; 120 birlik miqdorida mahsulot ishlab chiqaradi, xomashyoning xarajat sarfi normasi esa har bir mahsulot turiga 7; 2,5; 10; 4 kg ni tashkil etadi.

Korxona P_1, P_2, P_3, P_4 mahsulotni ishlab chiqarishi 5; -4; -2; 10 birlikka o'zgargan holda xomashyo xarajatlari yig'indisini aniqlang.

Yechish: Mahsulot ishlab chiqarish vektori $\bar{x}$ = {50; 80; 20; 120}, xomashyo sarfi vektori esa $\bar{y}$= {7; 2,5; 10; 4}, $\Delta\bar{x}=\{5;-4;-2;10\}$ bo'lsin.

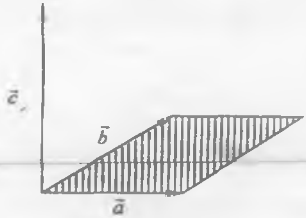
U holda xomashyo sarfi yig'indisi S esa $\bar{x}$ va $\bar{y}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'ladi, ya'ni: S=50·7+80·2,5+20·10+120·4=1210 kg. Vektorlarning skalyar ko'paytmasining xossasiga ko'ra, xomashyo sarflari yig'indisining o'zgarishi : $\Delta S=(x+\Delta x)\cdot y-(x;y)=(\Delta x\cdot y)$=5·7-4·2,5-2·10+10·4=41 kg bo'ladi.

6-masala. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini proyeksiyalar orqali ifodalang.

Yechish: $(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi=|\bar{b}|\Pi p_{\bar{b}}\bar{a}$. Bu yerda $\Pi p_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi$ tenglikdan foydalandik.

3.3-§. VEKTORIAL KO'PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

Ta'rif: $\vec{a}$ vektorning $\vec{в}$ vektorga **vektorial ko'paytmasi** deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi yangi $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{в}$ vektorga aytiladi:



3.4 - chizma.

1. $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarda qurilgan paralelleogramm yuzini ifodalovchi songa teng bo‘lib, quyidagicha ifodalanadi:
$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi$, bu yerda $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{в}$, ya’ni vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.
2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikular, ya’ni

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{a}, \qquad \vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{в}.$$

3. $\vec{c}$ vektor shunday yo‘nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{в}$ vektorga qisqa burilish soat strelkasi harakatiga teskari bo‘ladi.

Agarda **F** radius vektori bo‘lib $\boldsymbol{r}$ esa A moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi kuch bo‘lsa, u holda **F**×$\boldsymbol{r}$ vektorial ko‘paytma **F** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi (3.4-chizma).

Vektorial ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1. Vektorial ko‘paytmada ko‘paytuvchilarning o‘rni almashsa, ko‘paytmaning faqat ishorasi o‘zgaradi, ya’ni $\vec{a} \times \vec{в} = -(\vec{в} \times \vec{a})$
2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini vektorial ko‘paytma belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$\bar{a} \times (\lambda \bar{в}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{в} = \lambda(\bar{a} \times \bar{в})$$

3. Vektorial ko‘paytma uchun taqsimot qonuni o‘rinli, ya’ni

$$\vec{a} \times (\bar{в} + \bar{m}) = \vec{a} \times \vec{в} + \vec{a} \times \vec{m}$$

Teorema. Ikkita nolmas $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo‘lishlari uchun ularning vektorial ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli, ya’ni

$$\vec{a} \,||\, \vec{в} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{в} = 0$$

Isbot: $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ bo'lsin. U holda φ=0 yoki φ=π va sin φ=0. Demak, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ sin φ= $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$. Uzunligi nolga teng bo'lgan vektorning o'zi ham nol vektor bo'ladi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Endi, aksincha $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'lsin. U holda $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ bo'ladi. Bunda $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lgani uchun faqat sin φ=0, ya'ni φ=0 yoki φ=π ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ ekanligini bildiradi.

Natija: Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$ bo'ladi.

Misol: $(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Yechish: $(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{b} \times 2\vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b} = 5\vec{a} \times \vec{b}$

Vektorial ko'paytmani koordinatalarda hisoblash

Avval koordinata o'qlaridagi $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ ortlarning vektorial ko'paytmasini hisoblaymiz. Vektorial ko'paytmaning ta'rifiga asosan

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Endi **i x j** vektorni hisoblaymiz. Ort vektorlar ta'rifiga asosan

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Bu yerdan va vektorial ko'paytmaning ta'rifidan **i x j** vektor OZ o'qi bo'ylab yo'nalgan va uning uzunligi 1 ga teng. Demak, **i x j = k** ekan. Xuddi shunga o'xshash **j x k =i, kxi =j.** Vektorial ko'paytmaning 1 - xossasiga asosan

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k};$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini topamiz. Vektorial ko'paytma xossalari va ortlarning vektorial ko'paytmasiga asosan

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) +$

$+ a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) +$

$a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + 0 + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} +$

$+a_z в_y \vec{i} + 0 = (a_y в_z - a_z в_y)\vec{i} + (a_z в_x - a_x в_z)\vec{j} + (a_x в_y - a_y в_x)\vec{k} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$.

Bunda c_x, c_y, c_z koordinatalar orqali mos qavslardagi ifodalar belgilandi. Bu koordinatalarni mos ravishda aniqlovchilar yordamida ham ko'rsatsa bo'ladi:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

yoki

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

Misol. $\vec{a}(2; 2; -1)$ va $\vec{в}(2; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini toping.

Yechish:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

Endi vektorial ko'paytmaning ba'zi bir tatbiqlarini ko'ramiz.

1-masala. $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ va $\vec{в}(в_x; в_y; в_z)$ vektorlar bilan yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

Yechish: Vektorial ko'paytmaning ta'rifiga asosan parallelogramm yuzi quyidagicha topiladi:

$$S = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $\vec{a}(2; 2; -1)$ va $\vec{в}(2; -1; -4)$ vektorlarda yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Yechish: Oldin ko'rsatilganga asosan

$$\vec{a} \times \vec{в} = -9\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

bo'lgani uchun, izlangan S yuza

$$S = \sqrt{(-9)^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{81 + 36 + 36} = \sqrt{153}$$

Natija. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{в}|$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ va $\vec{в}(в_x; в_y; в_z)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Yechish: Oldin ko'rilgan teoremada $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning vektorial ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{в} = 0$ bo'lishi kerak ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu tenglikni koordinatalarda ifodalaymiz:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix} = 0.$$

Bu aniqlovchining birinchi satri vektorlardan, ikkinchi va uchinchi satrlari esa skalyarlardan iborat bo'lgani uchun, yuqoridagi tenglik faqat

$$\frac{a_x}{в_x} = \frac{a_y}{в_y} = \frac{a_z}{в_z}$$

bo'lganda o'rinli bo'ladi. Bu tenglik vektorlarning kollinearlik shartini ifodalaydi.

3-masala. $\vec{a}(m;\ 3;\ 2)$ va $\vec{в}(4;\ 6;\ n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini toping.

Yechish. Kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2, n = 4.$$

3.4-§. VEKTORLARNING ARALASH KO'PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TATBIQLARI

Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarni o'zaro ko'paytirish masalasini ko'raylik. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni skalyar ko'paytirib, natijani $\vec{c}$ vektorga ko'paytirsak, u holda $\vec{c}$ vektorga kollinear vektor hosil bo'ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko'paytirib, so'ngra hosil bo'lgan natijani uchinchi $\vec{c}$ vektorga yana vektorial ko'paytirsak, natijada yana bir yangi vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari, uchta vektorni quyidagi usulda ham ko'paytirish mumkin.

1- ta'rif: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb $\vec{a}$ x $\vec{b}$ vektorial ko'paytmani $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi va $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga asosan aralash (vektor – skalyar) ko'paytma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2- ta'rif: Vektorlar komplanar deyiladi, agarda ular bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda joylashgan bo'lsa.

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosini ko'rib o'taylik. Buning uchun komplanar bo'lmagan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarni qaraylik. Ma'lumki, $\bar{a}$ x $\bar{b}$ uzunligi ko'paytuvchi vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikular yo'nalgan vektordan iborat bo'ladi.

Agar $\bar{a}$ x $\bar{b}$ vektorga $\bar{c}$ vektorni proyeksiyalasak, u holda shu proyeksiya parallelogramm tekisligiga perpendikular bo'lib, uning moduli $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektorlarga qurilgan parallelopiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V=S_{acoc}\cdot H=|(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}|$$

formulaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, aralash ko'paytma parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko'paytmaning xossalarini ko'rib o'tamiz:

1.Aralash ko'paytmada vektorial va skalyar ko'paytma amallari o'rnini almashtirish mumkin, ya'ni

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}).$$

Shu sababli aralash ko'paytmada amallarni ko'rsatmasdan, qisqacha $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ kabi yozish mumkin.

2.Aralash ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rnini soat miliga teskari yo'nalish bo'yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmasdan qoladi, ya'ni

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}$$

Bunga aralash ko'paytmaning aylanma xossasi deb yuritishadi.

3.Aralash ko'paytmada yonma-yon turgan vektorlarni o'rni almashtirilsa, uning ishorasi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$$

Skalyar hamda vektorial ko'paytmalarning qanday sharoitda nolga teng bo'lishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko'paytma uchun ko'rib chiqaylik. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

– ko'paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;

– ko'paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;

– ko'paytuvchi vektorlar komplanar.

Birinchi holda aralash ko'paytmaning nol bo'lishi o'z-o'zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya'ni ikkita vektor kollinear bo'lsa, unda ularning vektorial ko'paytmasi nol va shu sababli aralash ko'paytma ham nolga teng bo'ladi. Uchinchi holda $\bar{a}\times\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar perpendikular bo‘ladi va shu tufayli ularning skalyar ko‘paytmasidan hosil bo‘lgan aralash ko‘paytma nol bo‘ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

Teorema. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo‘lishi uchun ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(в_x,в_y,в_z)$, $\bar{c}=(c_x,c_y,c_z)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko‘paytmani hisoblash formulasiga asosan

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix} = (a_y в_z - a_z в_y)\,\bar{i} + (a_z в_x - a_x в_z)\,\bar{j} +$$

$$+ (a_x в_y - a_y в_x)\,\bar{k} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}\ .$$

Skalyar ko‘paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda aniqlovchining satr bo‘yicha yoyilmasiga asosan

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c} = Ac_x + Bc_y + Cc_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Demak, aralash ko‘paytma ko‘paytuvchi vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli aniqlovchi kabi hisoblanadi.

Masalan, $\bar{a}=(2;\ 1;\ -2)$, $\bar{b}=(4;\ 0;\ 1)$, $\bar{c}=(0;\ 2;\ -1)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini topamiz:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 - 4 + 4 = -16.$$

Aralash ko‘paytmaning koordinatalardagi ko‘rinishidan foydalanib, uchta vektorlarning komplanarlik shartini topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Aralash ko‘paytmadan foydalanib, quyidagi masalalarni yechamiz:

1-masala: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ vektorlardan tuzilgan uchburchakli piramida hajmini toping.

Yechish: Berilgan $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi $\bar{a},\bar{b}$ vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligi $|\bar{a}\times\bar{b}| = h$ va hajmini V deb olsak, V=Sh/3 tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Demak,

$$V=\frac{\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\varphi}{3}=\frac{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x+\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z}{6}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

formula bilan hisoblanadi.

2-masala: Fazodagi to'rtta M_1 (x_1; y_1; z_1), M_2 (x_2; y_2; z_2), M_3 (x_3; y_3,; z_3) va M_4 (x_4; y_4; z_4) nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

Yechish: M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, $\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;\ z_3-z_1)$, $\overline{M_1M_4}=(x_4-x_1;\ y_4-y_1;z_4-z_1)$ vektorlarni komplanar bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$

shart kelib chiqadi.

3.5-§. CHIZIQLI OPERATOR HAQIDA TUSHUNCHA

vektorlar va $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonlarni qaraymiz.

Ta'rif: $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ vektorlar uchun kamida bittasi noldan farqli shunday $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+...+\lambda_n\bar{a}_n=0$$

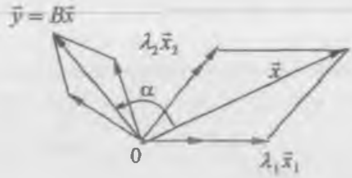
bo'lsa, $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ vektorlar chiziqli bog'liq vektorlar deb aytiladi. Aks holda bu vektorlar chiziqli erkli deb aytiladi.

Vektorlar fazosini qaraylik.

Ta'rif: Agar fazoda har bir $\bar{x}$ vektorga o'sha fazoning aniq $\bar{y}=A\bar{x}$ vektori mos qo'yilgan bo'lib, u ushbu

$$A(\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2)=\lambda_1A\bar{x}_1+\lambda_2A\bar{x}_2 \qquad (3.9)$$

chiziqlilik shartiga bo'ysunsa, bu yerda $\bar{x}_1$ va $\bar{x}_2$ qaralayotgan fazoning ixtiyoriy vektorlari, λ_1 va λ_2 istalgan sonlar, u holda bu fazoda A chiziqli operator (yoki chiziqli almashtirish) berilgan deb aytiladi. $\bar{y}$ vektor $\bar{x}$ vektorning aksi deb aytiladi



3.5 -chizma.

1-masala. Fazoning har bir $\bar{x}$ vektoriga o‘sha $\bar{x}$ vektorining o‘zini mos qo‘yadigan E operator chiziqli operator ekanini ko‘rsating.

Yechish. Shartga ko‘ra

$$E\cdot\bar{x}=\bar{x}$$

E operatorni $\bar{x}=\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2$ vektorga qo‘llab,

$$E(\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2)=\lambda_1E\bar{x}_1+\lambda_2E\bar{x}_2=\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2 \qquad (3.10)$$

ni hosil qilamiz, bundan (3.9) shartning bajarilishi va E chiziqli operator ekani ko‘rinib turibdi. U birlik operator yoki ayniy operator deb ataladi.

2-masala. Fazoning har bir $\bar{x}$ vektorini o‘sha k marta (k-noldan farqli istalgan son) cho‘zadigan A operator chiziqli operatordir.

Yechish. Shartga ko‘ra $A\bar{x}=k\bar{x}$ ga egamiz. A operatorni $\bar{x}=\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2$ vektorga qo‘llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$A(\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2)=\lambda_1A\bar{x}_1+\lambda_2A\bar{x}_2=\lambda_1(k\bar{x}_1)+\lambda_2(k\bar{x}_2)=k\bar{x}$$

Bu yerda (3.9) shartning bajarilishi va A operator chiziqli ekani ko‘rinib turibdi. Bunday operator **o‘xshashlik operator** deyiladi.

3-masala. Biror tekslikda yotadigan har bir $\bar{x}$ vektorni biror O nuqta atrofiga bir xil tomonga va bir xil α burchakka buradigan B operator chiziqli operatordir (3.5-chizma).

Yechish. $\bar{y}=B\bar{x}$ bo‘lsin, bu yerda $\bar{y}$ vektor $\bar{x}$ vektorni berilgan burchakka burish bilan hosil qilingan. 3.4-shakldan (3.9) shartning bajarilishi va B chiziqli operator ekani ko‘rinib turibdi. Bunday operator **burish operatori** deyiladi.

Chiziqli operator va uning berilgan bazisdagi matritsasi haqida tushuncha

Chiziqli operator va kvadrat matritsa orasidagi bog'lanishni ko'rib chiqamiz. Fazoda biror bazis vektorlarni tanlaymiz va bazis vektorlarni har biriga A chiziqli operatorni tatbiq qilamiz:

$$\begin{cases} A(\bar{e}_1) = \bar{f}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3 \\ A(\bar{e}_2) = \bar{f}_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{32}\bar{e}_3 \\ A(\bar{e}_3) = \bar{f}_3 = a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3 \end{cases} \quad (3.11)$$

Bu yerda x_1, x_2, x_3 vektorlar $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorlarning obrazlari, ular $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazis bo'yicha yoyiladi. (3.11) formulalarning berilishi bilan A chiziqli operatorni aniqlashni ko'ramiz.

Fazoning ixtiyoriy vektorini olamiz va uni bazis bo'yicha yozamiz:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$$

Bu yerda x_1, x_2, x_3 lar $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vektorning bazisdagi koordinatalari. U holda $\bar{y} = A\bar{x} = A(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) = x_1A(\bar{e}_1) + x_2A(\bar{e}_2) + x_3A(\bar{e}_3)$. (3.11) formuladan foydalanib va o'xshash hadlarini ixchamlab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\bar{y} = x_1(a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + a_{31}\bar{e}_3) + x_2(a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + a_{32}\bar{e}_3) + x_3(a_{13}\bar{e}_1 + a_{23}\bar{e}_2 + a_{33}\bar{e}_3) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\bar{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\bar{e}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\bar{e}_3$$

$\bar{y}$ vektorning $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisdagi koordinatalarini y_1, y_2, y_3 orqali belgilab, ularni aniqlaydigan formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ y_2 = (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ y_3 = (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \end{cases} \quad (3.12)$$

Bu formuladan ko'rinib turibdiki, fazoda ixtiyoriy vektorning aksi (3.11) formula bilan berilgan $a_{ij}(i, j = \overline{1.3})$ koeffitsiyentlari orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Shunday qilib, fazoda ta'sir etayotgan A chiziqli operatorga $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bazisda (3.12) tengliklarning o'ng tomonlaridagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan ushbu matritsa mos qo'yildi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A matritsa berilgan chiziqli operatorining $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi matritsasi deyiladi. Agar vektorlarning bu bazisdagi koordinatalari ustun-matritsa shaklida yozsak, u holda (3.13) dagi A matritsa A chiziqli operatorni ushbu formula bo'yicha aniqlaydi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

Boshqacha aytganda, $\bar{y} = A\bar{x}$ vektorning koordinatalarini topish uchun A chiziqli operator matritsasini $\bar{x}$ vektor koordinatalari ustuniga ko'paytirish lozim.

Aksincha, berilgan bazisda operatorga to'la bir qiymatli ravishda A matritsa to'g'ri keladi va operatorning ta'siri (3.13) yoki (3.14)formula bo'yicha amalga oshadi.

Demak, fazoda ta'sir etadigan chiziqli operatorlar bilan kvadrat matritsalar orasida bir qiymatli moslik mavjuddir.

R^2 *va* R^3 dagi chiziqli operatorlarga misollar

1.**Birlik operator**. E birlik operator bo'lsa, u holda $E\bar{x} = \bar{x}$, $\bar{y} = E\bar{x}$ va $\bar{x}$ vektorning ixtiyoriy $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdagi koordinatalari ushbu

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3$$

moslik bilan bog'langan. Bu formulalarni (3.12) formulalar ko'rinishida yozsak, quyidagini olamiz:

$$y_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$
$$y_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3$$
$$y_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$$

Bundan E chiziqli operatorning ixtiyoriy bazisdagi E matritsasi

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishida bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, birlik operator matritsasi birlik matritsa bo'ladi.

2.**O'xshashlik operatori**. A operator R^3 da ta'sir etayotgan o'xshashlik operatori bo'lsin. U holda $A\bar{x} = k\bar{x}$, $\bar{y} = A\bar{x}$ va $\bar{x}$ vektorlarning ixtiyoriy bazisdagi koordinatalari ushbu munosabatlar bilan bog'langan:

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2, \quad y_3 = kx_3$$

Bu munosabatlarni (3.12) formulalar ko‘rinishida yozib, quyidagini olamiz:

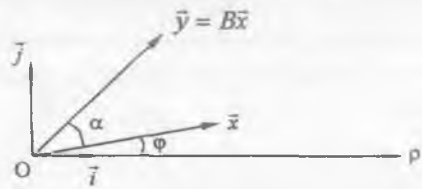
$$y_1 = kx_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3$$
$$y_2 = 0\cdot x_1 + kx_2 + 0\cdot x_3$$
$$y_3 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + k\cdot x_3$$

Bu yerda o‘xshashlik operatorining ixtiyoriy bazisdagi A matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

ko‘rinishida bo‘lishi kelib chiqadi.

3.**Burish operatori.** B- biror R^2 tekislikda ta’sir etayotgan burish chiziqli operatori bo‘lsin. Bu tekislikda bazisni (o‘zaro perpendikular birlik vektorlarni) olamiz.



3.6 -chizma.

Qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz (3.6-chizma). U holda vektorining koordinatalari

$$x_1 = p\cos\varphi, \quad x_2 = p\sin\varphi, \quad p = |\bar{x}|, \quad \varphi = \widehat{\bar{x}OX}$$

ko‘rinishida yoziladi. $\bar{y} = B\bar{x}$ vektor $\bar{x}$ vektorni O nuqta atrofida α burchakka burish bilan hosil qilingani uchun uning koordinatalari quyidagicha yoziladi:

$$y_1 = p\cos(\varphi + \alpha) = p(\cos\varphi\cdot\cos\alpha - \sin\varphi\cdot\sin\alpha),$$
$$y_2 = p\sin(\varphi + \alpha) = p(\cos\varphi\cdot\sin\alpha + \sin\varphi\cdot\cos\alpha)$$

Bundan burish chiziqli operatorining B matritsasi $\bar{i}, \bar{j}$ bazisda ushbu

$$B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lishi kelib chiqadi.

3.6-§. CHIZIQLI OPERATORLARNING XOS VEKTORLARI VA XOS QIYMATLARI

Agar biror haqiqiy son va har qanday nolmas vektor uchun

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{3.15}$$

bo'lsa, $\bar{x}$ vektor A chiziqli operatorning xos vektori, λ soni esa shu chiziqli operatorning xos qiymati deb ataladi. Agar biror bazisda A chiziqli operator va $\bar{x}$ vektor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

matritsalar bilan berilgan bo'lsa, u holda (3.15) tenglikka ushbu uchta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

tenglamalar sistemasi mos keladi. Hosil qilingan x_1, x_2, x_3 larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi determinanti nolga teng bo'lgan holda va faqat shundagina (3.16) sistema noldan farqli yechimga ega bo'ladi ($\bar{x} \neq 0$ bo'lgani uchun nol yechim bizni qiziqtirmaydi).Bundan

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.17}$$

tenglama berilgan chiziqli operator matritsasining xarakteristik tenglamasi deb ataladi.

Bu tenglamaning har bir λ haqiqiy ildizi chiziqli operatorning xos qiymati bo'ladi. λ songa mos xos vektorning koordinatalari (3.16) sistemadan topiladi.

1-izoh. Agar $\bar{x}$ vektor berilgan chiziqli operatorning xos vektori bo'lsa, u holda unga kollinear bo'lgan har qanday nolmas vektor ham berilgan operatorning o'sha xos sonli xos vektori bo'ladi.

2-izoh. Agar barcha xos qiymatlar haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda ularga xos vektorlar doimo chiziqli erkli bo'ladi va ularni yangi bazis sifatida qabul qilish mumkin. Bu yangi bazisda A matritsa ham soddalashadi:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

3-izoh. Agar A simmetrik matritsa bo'lsa, u holda uning barcha xos qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi, xos vektorlar esa o'zaro perpendikular bo'ladi.

Misol. Biror bazisda ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsa bilan berilgan chiziqli operatorning xos qiymatlarini va xos vektorlarini toping.

Yechish: Matritsa simmetrik, shu sababli, uning barcha xos qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi. Ularni topamiz. Buning uchun xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.18)$$

Aniqlovchini hisoblab,

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamaning koeffitsiyentlari yig'indisi nolga teng bo'lgani uchun uning ildizlaridan biri $\lambda_1 = 1$ bo'ladi.

$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28$ ko'phadning qolgan ildizlarini topish uchun uni $(\lambda - 1)$ ga bo'lib, ushbu kvadrat tenglamani olamiz:

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ bo'ladi. Shunday qilib, xarakteristik tenglama ildizlari: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$ ni berilgan chiziqli operatorning xos qiymatlarini topdik. Xos vektorlarni topish uchun (3.16) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} (3-\lambda)\delta_1 + 2\delta_2 = 0 \\ 2\delta_1 + (4-\lambda)\delta_2 - 2\delta_3 = 0 \\ -2\delta_2 + (5-\lambda)\delta_3 = 0 \end{cases} \qquad (3.19)$$

ni $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ da yechamiz.

1) $\lambda = \lambda_1 = 1$ bo'lsin, u holda (3.19) sistema ushbu ko'rinishni oladi.

$$\begin{cases}(3-1)x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+(4-1)x_2-2x_3=0\\ -2x_2+(5-1)x_3=0\end{cases}\quad \text{yoki}\quad \begin{cases}2x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+3x_2-2x_3=0\\ -2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ 2x_1+3x_2-2x_3=0\\ x_2-2x_3=0\end{cases}$$

Bu bir jinsli sistemaning (3.18) determinanti nolga teng bo'lgani uchun u nolmas yechimlarga ega. Demak, tenglamalardan biri (masalan, ikkinchi tenglama) qolgan tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Ikkinchi tenglamani tashlab yuborib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-2x_3=0\end{cases}$$

«Ozod noma'lum» bitta. Natijada sistema yechimini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_3=\frac{1}{2}x_2\end{cases}$$

x_2 «ozod noma'lum» ga ixtiyoriy qiymat berib, istalgan nolmas yechimni olamiz. $x_2=2$ bo'lsin, u holda $x_1=-2,\ x_3=1$. Demak, $\lambda_1=1$ xos qiymatga mos xos vektor $\vec{x}'$ ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\vec{x}'=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\quad \text{yoki}\quad \vec{x}'=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

bunga kollinear istalgan vektor ham xos vektor bo'ladi.

2) $\lambda=\lambda_2=4$ xos qiymatga mos xos vektorni ham shunga o'xshash aniqlaymiz.

Ushbu

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0,\\ 2x_1-2x_3=0\\ -2x_2+x_3=0\end{cases}$$

sistemasini yechib, $x_1,\ x_2,\ x_3$ ni topamiz. Bu sistemadagi birinchi tenglamani tashlab yuborib,

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\ x_2=\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

ni hosil qilamiz. «Ozod noma'lumga» ixtiyoriy qiymat berib, istalgan nolmas yechimni olamiz. $x_3=2$ bo'lsin. U holda

$$x_1=2,\quad x_2=1$$

Demak, $\lambda_2=4$ xos qiymatga mos xos vektor $\bar{x}''$ ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{x}''=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{yoki} \quad \bar{x}''=2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$$

3) Xuddi shunga o'xshash, uchinchi $\lambda=\lambda_3=7$ xos qiymatga mos xos vektorni ham ushbu

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2=0,\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0\\ -2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan hosil qilamiz. Sistemadan ikkinchi tenglamani tashlab yuborib,

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_2,\\ x_3=-x_2\end{cases}$$

yechimlarni hosil qilamiz.

$x_2=2$ bo'lsin, u holda $x_1=1$, $x_3=-2$. Demak, $\lambda_3=7$ xos qiymatga mos xos vektor quyidagicha bo'ladi:

$$\bar{x}'''=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \quad \text{yoki} \quad \bar{x}'''=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$$

A matritsa simmetrik edi. Uchala xos vektor o'zaro perpendikular ekanini tekshirish oson, chunki $\bar{x}'\cdot\bar{x}''=0$, $\bar{x}'''\cdot\bar{x}'=0$, $\bar{x}''\cdot\bar{x}'''=0$. Bu xos vektorlarni yangi bazis sifatida olish mumkin va unda A matritsa

$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$

ko'inishida bo'ladi.

Kvadratik formalarni kanonik ko'rinishga keltirish. Kvadratik forma deb $\phi=ax_1^2+bx_2^2+cx_1x_2$ ko'rinishdagi ifodaga aytiladi. O'zgaruvchilarni faqat kvadratlarini o'z ichiga olgan kvadratik forma kanonik ko'rinishga ega deyiladi. Shu sababli kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish degan so'z shunday yangi bazisni (yangi koordinatalar sistemasini) topishdan iboratki, unda kvadratik forma o'zgaruvchilarining ko'paytmasini o'z ichiga olmasin. Bu yangi bazisda kvadratik forma ushbu

$$F = a(x_1')^2 + b(x_2')^2 \qquad (3.20)$$

ko'rinishni oladi yoki uning matritsa shaklidagi yozuvi

$$F = (x_1', x_2')\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad x' = (x_1', x_2')$$

ko'rinishida bo'ladi. Buni quyidagicha yozish mumkin:

$$F = x'\cdot A'\bar{x}'$$

Bunda $\bar{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ $\bar{x}$ vektorning yangi bazisdagi koordinatalaridan tuzilgan ustun, transponirlangan ustun, $x' = (x_1', x_2')$ kvadratik formaning yangi bazisdagi matritsasi. Yuqorida aytilganidek, agar yangi bazis sifatida A matritsaning xos vektorlari olinsa, u holda A matritsa bu yangi bazisda bosh diagonalda xos qiymatlar joylashgan

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

diagonal matritsa ko'rinishini oladi. U holda (3.20) kvadratik forma ushbu

$$F = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2$$

ko'rinishni oladi, bu yerda λ_1, λ_2 lar A matritsaning xos qiymatlari. Shunday qilib, A matritsani kanonik ko'rinishga keltirish uchun A matritsaning xos qiymatlarini va xos vektorlarini topish lozim.

Misol. $F(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Bu kvadratik formaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. A' matritsaning tuzish uchun A matritsaning xos sonlarini topamiz:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6.$$

Demak, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ bo'ladi va berilgan kvadratik forma quyidagi koanonik shaklni oladi.

$$F(x_1' + x_2') = (x_1')^2 + 6(x_2')^2.$$

XULOSA

Mexanika, gidrodinamika, aerodinamika, astronomiya, geodeziya va boshqa bir qator sonlarda uchraydigan masalalarni yechishda o'zgarmas sonlarni borligi kifoya qilmadi. Yangi xususiyatlarga ega bo'lgan miqdorlarni kiritilishida ehtiyoj paydo bo'ldi. Bunday miqdorlar vektorlar deb ataldi va ular yo'naltiruvchi kesma ko'rinishda tasvirlanib, shu kesmaning uzunligi va yo'nalishi bilan xarakterlandi.

Vektorlar to'plami kiritilgan ekan, ular ustida amallar bajarish, ularning xossalarini, tatbiqlarini o'rganish masalalari hosil bo'ldi. Bu masalalarni yechish mazkur bob oldiga qo'yildi. Bob mavzularida vektorlarning bir qator xususiyatlari yoritildi. Misol uchun haqiqiy sonlarni bir xil usul bilan ko'paytirish mumkin. Vektor miqdorlarni esa songa ko'paytirish, vektorlarning skalyar, vektorial, aralash, qo'sh vektorial ko'paytmalari mavjud.

Skalyar ko'paytmasi orqali kuchlarni bajarilgan vektorlarning ishi kattaligini aniqlash, vektorial ko'paytma orqali parallelogramm, uchburchaklar yuzlarini hisoblash, aralash ko'paytma orqali parallelepiped va piramida hajmlarini hisoblash kabi xususiyatlar haqiqiy sonlar ichida bevosita uchramaydi.

Mazkur bobda vektorlar fazodagi chiziqli operatorlar ta'riflandi va ularga bir qator misollar keltirildi. Masalan, chiziqli operatorlarning xos sonlarini va xos vektorlarini aniqlab bilish ko'p masalalar yechimi aniqlanishini osonlashtiradi.

3-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Vektor deb qanday kattalikka aytiladi?
A) AB kesmaga vektor deyiladi;
B) Yo'nalishga ega kesma vektor deyiladi;
C) Yo'nalishga ega ikki kesma vektor deyiladi;
D) Parallel ko'chirishga vektor deyiladi;
E) Qiymati son bo'lgan kattalik vektor deyiladi.
2.Quyidagilardan qaysi biri vektor bo'lmaydi?
A) Kuch; B) Masofa; C) Harakat;
D) Yo'naltirilgan kesma; E) Bosim.
3. $\overline{AB}$ vektorning uzunligi (moduli) deb nimaga aytiladi?
A) AB kesmaning boshiga; B) AB kesmaning oxiriga;
C) AB kesmaning o'rtasiga; D) AB kesmaning uzunligiga;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

4. $\overline{AB}$ vektor uchun quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A) A nuqta vektorning boshi deyiladi;

B) B nuqta vektorning uchi deyiladi;

C) AB kesma uzunligi vektorning moduli deyiladi;

D) $\overline{AB} = -\overline{BA}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi;

E) barcha tasdiqlar to‘g‘ri.

5. Agar $\bar{a} = \bar{b}$ bo‘lsa, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli bo‘lmaydi?

A) $|\bar{a}| = |\bar{b}|$; B) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ kollinear; C) $\bar{a} \perp \bar{b}$;

D) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ bir xil yo‘nalgan; E) $\bar{a} - \bar{b} = \bar{0}$.

6.Agar $\bar{a} = \alpha \cdot \bar{b}$ bo‘la, quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ bir xil yo‘nalgan; B) $|\bar{a}| = |\alpha| \cdot |\bar{b}|$;

C) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ kollinear; D) $\bar{a} - \alpha\bar{b} = \bar{0}$;

E) $\bar{a}$ vektor yo‘nalishi α ko‘paytuvchi ishorasiga bog‘liq.

7. Qarama-qarshi vektorlar deb qanday vektorlarga aytiladi?

A) bir tekislikda joylashgan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi;

B) uzunliklari teng, ammo yo‘nalishlari teskari vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi;

C) parallel vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi;

D) perpendikular vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi;

E) bir tekislikda yotmagan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi.

8.Qarama-qarshi $\bar{a}, -\bar{a}$ vektorlarning xususiyatlari qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $-\bar{a} = (-1) \cdot \bar{a}$; B) $|\bar{a}| = |-\bar{a}|$; C) $-\bar{a}$ va $\bar{a}$ kollinear;

D) $-\bar{a}$ va $\bar{a}$ qarama-qarshi yo‘nalgan;

E) Barcha xususiyatlar noto‘g‘ri ko‘rsatilgan.

9.Vektorlar yig‘indisi qaysi qoida asosida topiladi?

A) to‘rtburchak; B) to‘g‘ri to‘rtburchak; C) trapetsiya;

D) parallelogramm; E) romb.

10. ABCD parallelogramm bo‘lsa, unda $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ vektorlarning yig‘indisi nimaga teng bo‘ladi?

A) $\overline{BD}$; B) $\overline{BC}$; C) $\overline{CB}$; D) $\overline{AC}$; E) $\overline{CA}$.

11. Vektorlar yig‘indisi xossalari qayerda noto‘g‘ri ifodalangan?

A) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$; B) $\bar{a}+\bar{a}=\bar{a}$; C) $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;

D) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$; E) $\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}=\alpha(\bar{a}+\bar{b})$.

12. ABCD parallelogramm bo'lsa, unda $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ vektorlarning ayirmasi nimaga teng bo'ladi?

A) $\overline{BD}$; B) $\overline{BC}$; C) $\overline{DB}$; D) $\overline{AC}$; E) $\overline{CA}$.

13. Birlik ortlar deb fazodagi qanday vektorlarga aytiladi?

A) Ixtiyoriy $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vektorlarga;

B) $\bar{i}\perp\bar{k},\bar{k}\perp\bar{j}$ shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlarga;

C) $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$, $\bar{i}\perp\bar{j}$, $\bar{i}\perp\bar{k}$, $\bar{j}\perp\bar{k}$ shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlarga;

D) $\bar{i}\perp\bar{j},\bar{j}\,//\,\bar{k}$ shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlarga;

E) $\bar{j}+\bar{k}=\bar{i}$, $\bar{i}+\bar{k}=\bar{j}$, $\bar{j}+\bar{i}=\bar{k}$ shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlarga.

14. Fazodagi $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ort vektorlarning xossalari qayerda noto'g'ri ifodalangan?

A) Ularning uzunliklari birga teng;

B) Ular o'zaro perpendikular; C) ular komplanar;

D) Ularning yo'nalishi mos koordinata o'qlarining musbat yo'nalishi kabi;

E) Barcha xossalar to'g'ri ifodalangan.

15. $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}-5\bar{k}$ vektorning koordinatalari qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) {2;2;5}; B) {2;-2;5}; C) {-2;2;5};

D) {3;-2;-5}; E) 2+(-2)+(-5)=-4.

16. $\bar{a}(x;\ y;\ z)$ vektorning $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ortlar bo'yicha yoyilmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $\bar{a}=(x+y+z)(i+j+k)$; B) $\bar{a}=x\bar{j}+y\bar{k}+z\bar{i}$;

C) $\bar{a}=x\bar{k}+y\bar{j}+z\bar{i}$; D) $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$; E) $\bar{a}=x+y+z$.

17. $\bar{a}_1(x_1,y_1,z_1)$ va $\bar{a}_2(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar qaysi shartda teng bo'ladi?

A) $x_1=x_2, y_1\neq y_2, z_1\neq z_2)$; B) $x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$;

C) $x_1\neq x_2, y_1=y_2, z_1=z_2$; D) $x_1\neq x_2, y_1\neq y_2, z_1\neq z_2$;

E) $x_1=y_1=z_1$, $x_2=y_2=z_2$.

18. $\bar{a}(x,y,z)$ vektorni α songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan $\alpha\bar{a}$ vektorning koordinatalari qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $(\alpha x; y; z)$; B) $(x; \alpha y; z)$; C) $(x; y; \alpha z)$;

D) $(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$; E) to‘g‘ri javob yo‘q.

19. $\bar{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\bar{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar yig‘indisining koordinatalari qanday topiladi ?

A) (x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2); B) $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;

C) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$; D) $(x_1 / x_2, y_1 / y_2, z_1 / z_2)$;

E) $(x_1 + y_1 + z_1,\ \ x_2 + y_2 + z_2)$.

20. $\bar{a}(3;-2;5)$ va $\bar{b}(4;-3;-2)$ vektorlar yig‘indisining koordinatalarini toping.

A) (7;5;7); B) (7;-5;7); C) (7;-5;2);

D) (7;-5;-2); E) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1.Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng deb ataladi?

2.Vektorning moduli nima ?

3.Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi?

4. Qanday vektorlar chiziqli bog‘liq va qanday vektorlar chiziqli erkli deb ataladi?

5.Fazoning bazisi va o‘lchami nima?

6.Vektorning o‘qdagi tashkil etuvchisi nima?

7.Vektorning o‘qga praeksiyasi nima?

8. Chiziqli operatorning matritsasi nima?

9.Chiziqli operatorga misol keltiring va uning matritsasini yozing.

10.Chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari deb nimaga aytiladi?

11.Chiziqli operator matritsasini xarakteristik tenglamasi nima?

12.Chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini topish usulini aytib bering.

IV bob. ANALITIK GEOMETRIYA

Dekartning buyuk ishi u analitik geometriyani yaratishi bilan algebra va geometriya orasida ko'prik yasadi.

S. I. Vavilov

Bobning o'quv maqsadi

Ma'lumki, analitik geometriya fani geometriya fani masalalarini chizmasiz o'rganish masalasidan hosil bo'lgan. Keyinchalik kerak bo'lganda chizmalar chizilgan, ammo analitik geometriya nomi saqlanib qolgan.

Mazkur bob oldiga tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari, ikkinchi tartibli chiziqlar elementlari, fazoda tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari, ba'zi sirtlar tenglamalari mavzularini yoritish maqsad qilib qo'yilgan.

Analitik geometriya so'zini birinchi bor fransuz matematik-akademigi Lakrua (1762–1848) XVIII asrning oxirida kiritdi. Fransuz matematigi Pyer Ferma (1601–1665) analitik geometriya asoschisi sifatida Dekartga qaraganda ilgariroq va izchilroq to'g'ri burchakli koordinatalarni kiritdi, koordinatalar usulini bayon qildi va uni geometriyaga tatbiq qildi.Yunon matematigi Apolloniy Pergskiy ishlarini davom ettirib, Ferma to'g'ri chiziqlarga birinchi darajali tenglamalar, konussimon qismlarga ikkinchi tartibli tenglamalar mos kelishini ko'rsatdi.

Analitik geometriyaning asoschilaridan biri yana bir fransuz matematigi Rene Dekart (1596–1650) hisoblanadi. Dekartning asosiy xizmati shundaki, u tabiat hodisalarini fan yordamida tushuntirdi.

Dekart koordinatalar usulini yaratdi, uning yordamida geometriya va algebra o'rtasida mustahkam aloqa o'rnatdi. Dekart abssissalar o'qi «0» sanoq boshi hisoblangan O nuqta belgilangan to'g'ri chiziqni kiritib, birorta kesmani birlik sifatida tanladi, uning yordamida har qanday kesmaning uzunligini o'lchash mumkinligini ko'rsatdi. Dekart geometriyasining asosiy g'oyasi shundan iboratki, chiziqlarning geometrik xossalarini, ularning tenglamalari ustida algebraik almashtirishlarni bajarib o'rganish mumkin. Dekartning «Geometriya» asari matematika rivojiga ulkan ta'sir o'tkazib, deyarli 150 yil davomida algebra va analitik geometriya Dekart ko'rsatgan yo'nalishlar bo'yicha rivojlandi. Analitik geometriya rivojiga matematiklar Neyl, Paran, I.Nyuton, K.Klero, L.Eyler, G.Monj, Lagranj katta hissa qo'shgan. Analitik geometriyadan birinchi kitob Lakruaning darsligi edi, unda birinchi bor analitik geometriya tushunchasi berilgan.

4.1-§. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Tekislikda xOy Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning koordinatalari deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to'liq aniqlanadi va $M(x,y)$ kabi yoziladi. Tekislikdagi turli geometrik obyektlarni nuqtalar to'plami kabi qarash mumkin.

Ta'rif 1: Tekislikdagi geometrik obyektlarni ularning $M(x;\ y)$ nuqtalarining koordinatalari orqali ifodalovchi tengliklar shu **obyektning tenglamasi** deb ataladi.

Tenglama odatda $F(x;\ y) = 0$ ko'rinishda yoziladi. Agarda $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqta uchun $F(x_0;\ y_0) = 0$ shart bajarilsa, M_0 shu tenglama bilan aniqlangan geometrik obyektga tegishli bo'ladi. Aks holda M_0 nuqta bu obyektga tegishli bo'lmaydi. Shunday qilib, geometrik obyekt o'zining $F(x,y)=0$ tenglamasi bilan to'liq aniqlanadi.

Ta'rif 2: Geometrik obyektlarni ularning tenglamalari orqali o'rganuvchi matematik fan analitik geometriya deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo'lib fransuz matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi.

Analitik geometriyada asosan **ikkita masala** qaraladi:

1. Berilgan geometrik obyektning tenglamasini topish.

2. Geometrik obyektning tenglamasi bo'yicha uning xossalarini o'rganib, obyektni aniqlash.

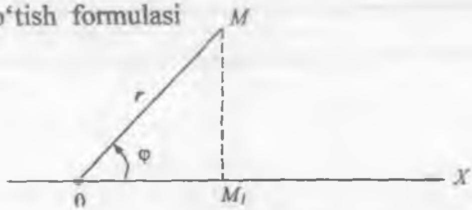
Bu masalalarni yechishda vektorlar algebrasidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida analitik geometriyaning quyidagi masalalarini ko'ramiz.

Dekart koordinalar sistemasi. Tekislikda o'zaro perpendikular ikkita to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Ularning kesishish nuqtasi O (0;0)-koordinatalar boshi deyiladi. Koordinatalar sistemasida Ox o'q-abssissalar o'qi, Oy o'qi esa ordinatalar o'qi deyiladi. Tekislikda ixtiyoriy M nuqtani tanlab olamiz va Ox, Oy o'qlarga perpendikular tushiramiz. $OP=x$ va $ON=y$ mos ravishda M nuqtaning abssissasi va ordinatasi deyiladi. x va y lar M nuqtaning koordinatalari deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $M(x\ ;\ y)$. Shunday qilib, tekislikda har bir nuqta $(x\ ;\ y)$ bilan berilgan bo'ladi.

Qutb koordinatalar sistemasi. Tekislikda biror O nuqta berilgan bo'lsin, undan o'tuvchi to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilaymiz. Bunda O qutb, Ox esa qutb o'qi deb olamiz.Tekislikda M nuqta qutb r va φ koordinatalar bilan belgilangan bo'lsin, ya'ni $M(r;\ \varphi)$ $OM=r$ -qutb radiusi, φ esa qutb burchagi va $0<\varphi\leq 2\pi$. Har bir r va φ sonlariga tekislikda faqat bitta nuqta mos keladi (4.1-chizma). $\Delta \tilde{O}M_1$ dan

$$\begin{cases} \tilde{o} = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{4.1}$$

kelib chiqadi. Bu formula qutb koordinatalar sistemasidan Dekart koordinatalarga o'tish formulasi



4.1-chizma.

Misol: Nuqtaning qutb koordinatalari berilgan, ya'ni $M\left(4;\frac{\pi}{4}\right)$. Uning dekart koordinatalarini toping.

Yechish.

$r=4$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$; (4.1)- formulaga ko'ra;

$$x = r\cdot\cos\varphi = 4\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$y = r\cdot\sin\varphi = 4\cdot\sin\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Demak, $M\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ nuqtaning dekart koordinatalaridagi ifodasidir.

Agar (4.1) ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, unda

$$x^2 = r^2\cos^2\varphi, y^2 = r^2\sin^2\varphi$$

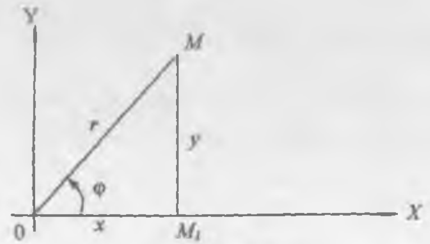
bo'ladi va

$$x^2+y^2 = r^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) \Rightarrow x^2+y^2 = r^2,$$

tenglikni olish mumkin, bundan

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad tg\varphi=\frac{y}{x} \qquad (4.2)$$

bo'ladi. (4.1) tengliklar M nuqtaning Dekart koordinatalaridan qutb koordinatalariga o'tish formulalari deb aytiladi.



4.2-chizma.

Misol: $M(\sqrt{3},1)$ nuqtasining qutb koordinatalarini toping.

Yechish.

Bu yerda $x=\sqrt{3}$; $y=1$, (4.2) formulaga binoan: $tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\varphi=\frac{\pi}{6}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$$

Shunday qilib, berilgan nuqtaning qutb koordinatalari $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$ bo'ladi.

Tekislikdagi $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani topish masalasini qaraylik.

Berilgan nuqtalar bo'yicha $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ vektorni hosil qilamiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofa shu vektorning uzunligiga teng, ya'ni

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (4.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Masalan, $M_1(3;1)$ va $M_2(-2;6)$ nuqtalar orasidagi masofa (4.3) ga ko'ra

$$d=\sqrt{(-2-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Uchlari $M_1(x_1;\ y_1)$ va $M_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalarda joylashgan M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqta koordinatalarini toping.

$M_1M_0=\{x_0-x_1;\ y_0-y_1\}$ va $M_0M_2=\{x_2-x_0;\ y_2-y_0\}$ vektorlarni qaraymiz. Ular bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun kollinear va masala shartiga ko'ra $\frac{|M_1M_0|}{|M_0M_2|}=\lambda$.

Aytilganlarga asosan $M_1M_0=\lambda M_0M_2$ deb yozish mumkin. Bu tenglikni vektorlarning koordinatalari orqali ifodalaymiz (koordinatalar ko'rinishidagi ikki vektor teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishi kerak):

$$x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0)\,,\ y_0-y_1=\lambda\,(y_2-y_0).$$

Bu tengliklardan izlangan x_0 va y_0 koordinatalarni topamiz:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ . \qquad (4.5)$$

Xususiy, $\lambda=1$, holda M_1M_2 kesmaning o'rta nuqtasi koordinatalari

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4.6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

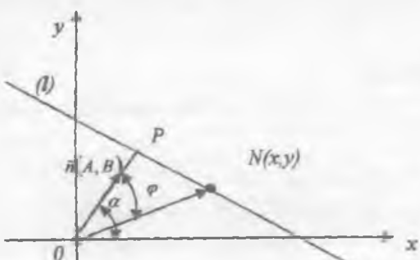
Masalan, $M_1(3;\ -5)$ va $M_2(1;\ 1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning o'rta nuqtasi

$$x_0=\frac{3+1}{2}=2,\qquad y_0=\frac{-5+1}{2}=-2$$

koordinatalar bilan aniqlanadi.

4.2-§. TO'G'RI CHIZIQNING TURLI TENGLAMALARI

1. **To'g'ri chiziqning normal tenglamasi**. Tekislikda biror (l) to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin va uning tenglamasini topish talab etilsin. Buning uchun bu to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $\bar{n}$ birlik vektor va koordinata boshidan bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $|0P|=$ p ma'lum deb olamiz.



4.3-chizma.

Agarda $\vec{n}$ vektor Ox koordinata o‘qi bilan α burchak tashkil etgan bo‘lsa,

$\vec{n} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ deb yozish mumkin. $N(x; y)$ berilgan to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta $\vec{n}$ va $\overline{ON}$ vektorlar orasidagi burchak φ bo‘lsin($\angle PON=\varphi$). Hosil bo‘lgan $\vec{n}\cdot ON$ skalyar ko‘paytmani ikki usulda hisoblaymiz.

$$\vec{n}\cdot ON = x\cos\alpha + y\sin\alpha\ ;$$

$$\vec{n}\cdot ON = |\vec{n}|\cdot|ON|\cos\varphi = |ON|\cdot\cos\varphi\ \Pi_{p_n} ON = p.$$

Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqdagi barcha $N(x; y)$ nuqtalar uchun

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

tenglik o‘rinlidir. Bu tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning ***normal tenglamasi*** deyiladi.

Agarda $K(x_0; y_0)$ berilgan (l) to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsa, undan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan d masofa

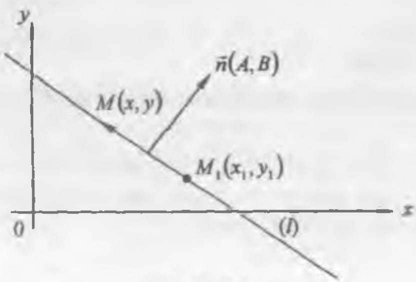
$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|$$

formula bilan aniqlanishini isbotlash mumkin.

Yuqorida to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi ko‘rsatilgan edi. Endi to‘g‘ri chiziqlarning boshqa ko‘rinishdagi tenglamalari bilan tanishib chiqamiz.

2.To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va berilgan $\vec{n}(A; B)$ vektorga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini chiqaramiz.

Izlanayotgan l to‘g‘ri chiziqning $\forall\ M(x; y)$ nuqtasini olamiz va $\overline{M_1M}$ vektorni hosil qilamiz (4.4-chizma). Unda $\overline{M_1M}=(x-x_1,y-y_1)$ bo‘lib, masala shartiga ko‘ra $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo‘ladi. Vektorlarning ortogonallik shartiga ko‘ra



4.4-chizma.

$\vec{n}\cdot\overline{M_1M}=0 \Rightarrow A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,\quad Ax+By+C=0,\quad C=-Ax_1-By_1$ (4.7)
tenglamani olamiz. Shunday qilib, $M(x;\ y)$ nuqta (l) da yotsa, u holda $\overline{M_1M}$ va $\vec{n}$ vektorlar perpendikular. Aks holda esa $\overline{M_1M}\cdot\vec{n}\neq 0$ bo'ladi, ya'ni $M(x;\ y)$ nuqta (4.7) tenglamani qanoatlantirmaydi. To'g'ri chiziqning (4.7) ko'rinishdagi tenglamasi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb aytiladi.

Misol: $M(2;\ -5)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=2i-2j$ vektorga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: (4.7) tenglamaga asosan $2(x-2)-2(y+5)=0$, bu yerda $2x-2y-14=0$ izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi (davomi). Yuqorida to'g'ri chiziqning tenglamasi ikki noma'lumli chiziqli tenglama bo'lishi kelib chiqqan edi (analitik geometriyaning birinchi asosiy masalasi).

Endi bo'lsa ixtiyoriy ikki noma'lumli chiziqli tenglama

$$Ax+By+C=0 \tag{4.8}$$

tekislikda to'g'ri chiziqni ifodalashini ko'rsatamiz (analitik geometriyaning 2-asosiy masalasi). Berilgan tenglamani shaklini quyidagicha almashtiramiz:

$$Ax+By+C=Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x-0)+B(y-(-C/B))=0$$

Bu esa, oldingi punktdagi (4.7) ga asosan, $\vec{n}(A;\ B)$ vektorga perpendikular va $M(0;\ -C/B)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir. Ko'rinib turibdiki, (4.8) tenglamada A va B koeffitsiyentlar bir vaqtda 0 ga teng bo'lmasligi kerak.

$\vec{n}$ $(A;\ B)$ vektor esa shu to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lib, uning ***normal vektori*** deyiladi.

Agar $C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani $O(0{:}0)$ nuqta koordinatalari qanoatlantirganligi uchun, u koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasini ifodalaydi.

Xususan, $y=0$ ($A=0$, $C=0$, $B\neq 0$) Ox o'qining, $x=0$ ($A\neq 0$, $C=0$, $B=0$) esa Oy o'qining tenglamasidir.

3.To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. Ikkita to'g'ri chiziq umumiy tenglamalari $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqlarning $M(x_0;\ y_0)$ kesishish nuqtasi har ikkala to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun uning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

Olingan sistemaning yechimi to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘ladi.

1-misol: $2x+y-1=0$ va $x+2y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlarning $M_0(x_0; y_0)$kesishish nuqtasini toping.

Yechish. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow M_0(1;-1)$.

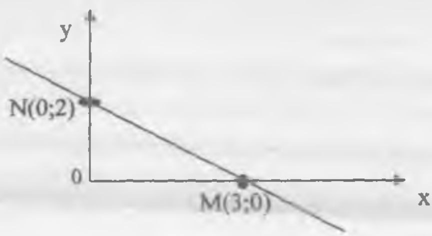
4.To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi. Koordinata boshidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziq Ox va Oy o‘qlaridan uzunligi $|a|$ va $|b|$ bo‘lgan kesmalar ajratgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish uchun $M(a,0)$ va $N(0,b)$ nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalar koordinatalarini $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamaga qo‘yib, $A=-C/a$, $B=-C/b$ ekanligini topamiz. Bu yerdan

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow (-C/a)x+(-C/b)y+C=0 \Rightarrow -C(x/a+y/b-1)=0 \Rightarrow x/a+y/b=1$$

Demak, izlangan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

bo‘ladi. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deyiladi.



4.5-chizma.

2-misol: $2x+2y-6=0$ to‘g‘ri chiziqni yasang.

Yechish: Uni Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi M ni topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani yechish kifoya:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M(3;0).$$

Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqning OX o‘qi bilan kesishish nuqtasi topildi. Endi uning Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtasi N ni topamiz:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow N(0;2).$$

M va N nuqtalarni yasab va ulardan o'tuvchi izlangan to'g'ri chiziqni hosil qilamiz (5.5-chizma). Bu yerdan berilgan to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi $x/3+y/2=1$ ekanligini ko'ramiz.

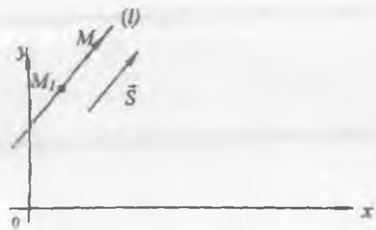
4.3-§. TO'G'RI CHIZIQNING KANONIK, BURCHAK KOEFFITSIYENTLI VA IKKI NUQTADAN O'TUVCHI TENGLAMALARI

1. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Tekislikdagi (l) to'g'ri chiziqning biror $M_1(x_1; y_1)$ nuqtasi berilgan hamda $\vec{S}=m\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}$ vektor shu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. U holda berilgan M_1 nuqta va $\vec{S}$ vektor to'g'ri chiziqning holatini to'la belgilaydi. Shu sababli $\vec{S}$ to'g'ri chiziqning ***yo'naltiruvchi vektori*** deyiladi.

Berilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olamiz va $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1; y-y_1\}$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan bu $\overline{M_1M}$ va $\vec{S}$ vektorlar kollinear, ya'ni ularning mos koordinatalari proporsionaldir(4.6-chizma):

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{n}. \tag{4.9}$$



4.6-chizma.

Hosil bo'lgan (4.9) tenglama berilgan to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Izoh: Agar to'g'ri chiziq Ox o'qiga parallel, ya'ni to'g'ri chiziq $\vec{i}$ vektorga parallel bo'lsa, u holda $m=0$ bo'ladi va uning kanonik tenglamasi

$$\frac{y-y_1}{0}=\frac{x-x_1}{n}\Rightarrow 0(x-x_1)=n(y-y_1)\Rightarrow y=y_1.$$

Shunday qilib, Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $y=y_1$ bo‘ladi. Aksincha to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi $x=x_1$ bo‘ladi.

2. Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. To‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi

Aytaylik (l) to‘g‘ri chiziq va Ox o‘qi orasidagi burchak α bo‘lsin. Agar to‘g‘ri chiziq Ox o‘qiga parallel yoki u bilan ustma-ust tushsa, unda $\alpha=0$ bo‘ladi. Agarda $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 90^0$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziqning holati α burchak va (l) ga tegishli bo‘lib, koordinatalari $M_1(x_1; y_1)$ nuqta to‘la aniqlanishini ko‘rsatamiz. Yo‘naltiruvchi vektor sifatida (l) ga parallel bo‘lgan, ya’ni Ox o‘qi bilan α burchak tashkil qiluvchi $\vec{e}$ birlik vektorni qaraymiz. Ma’lumki ixtiyoriy birlik vektor o‘zining yo‘naltiruvchi kosinuslari bilan aniqlanadi, ya’ni $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$. Bunda $\cos\beta=\sin\alpha$ bo‘lgani uchun

$$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}.$$

To‘g‘ri chiziqning (4.9) kanonik tenglamasiga $m=\cos\alpha$ va $n=\sin\alpha$ deb, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=\frac{x-x_1}{\cos\alpha}\Rightarrow tg\alpha\ (x-x_1)=y-y_1.$$

Agar bunda $k=tg\alpha$ deb olsak, u holda

$$y-y_1=k\,(x-x_1) \qquad (4.10)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. (4.10) tenglama berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘lib, unda k – to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsiyenti** deyiladi.

Misol: $M(1;\,2)$ nuqtadan o‘tib, Ox o‘qi bilan $\pi/2$ burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$k=tg\alpha=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

Natijada to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (4.10) ga asosan quyidagicha bo‘ladi:

$$y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow y-2=\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow\sqrt{3}\,x-y+2-\sqrt{3}=0.$$

Tekislikning biror M_0 nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami **to'g'ri chiziqlar dastasi**, umumiy nuqta M_0 esa **dastaning markazi** deyiladi.

(4.10) ga asosan M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq dastasi tenglamasi

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda «k» ixtiyoriy qiymat qabul qilishi mumkin.

3. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

To'g'ri chiziq Ox o'qi bilan α burchak tashkil qilib, Oy o'qini $B(0,b)$ nuqtada kesib o'tsin. Shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz. Buning uchun (4.10) tenglamaga $x_1=0$, $y_1=b$ qo'yib,

$$y-b=k(x-0) \Rightarrow y=kx+b \qquad (4.11)$$

tenglamani olamiz. (4.11) tenglama to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsiyentli tenglamasi** deyiladi. Xususan, agar $b=0$ bo'lsa, $y=kx$ koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi. Agarda $k=0$ bo'lsa, u holda Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziqning $y=b$ tenglamasiga ega bo'lamiz.

4. Berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Tekislikda $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1; y_1)$ nuqtani boshlang'ich, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ vektorni esa yo'naltiruvchi vektor deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

ko'rinishda bo'ladi.

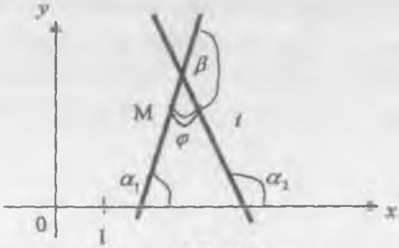
Masalan, $M_1(2; 1)$ va $M_2(-3; 0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1} \Rightarrow -x+2=-5y+5 \Rightarrow x-5y+3=0.$$

4.4-§. TO‘G‘RI CHIZIQLARGA DOIR AYRIM MASALALAR

Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Tekislikning biror M nuqtasida kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish bilan shug‘ullanamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsiyentli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$y_1=k_1x+b_1 \text{ va } y_2=k_2x+b_2.$$



4.7-chizma.

Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan va ularning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 bilan belgilaymiz (4.7-chizma). Chizmaga asosan izlanayotgan burchak tangensini topamiz:

$$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}.$$

Bunda $\mathrm{tg}\alpha_1=k_1$ va $\mathrm{tg}\alpha_2=k_2$ ekanligini hisobga olsak va $\varphi\neq 90^0$ shartni qanoatlantirsa, u holda to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (4.12)$$

formula orqali aniqlashimiz mumkin.

Agar to‘g‘ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, ularning $\bar{n}_1(A_1;\ B_1)$ va $\bar{n}_2(A_2;\ B_2)$ normal vektorlariga murojaat qilamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo‘ladi va vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

formula bilan topiladi.

To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari. Agar ikkita to‘g‘ri chiziq parallel yoki ustma-ust tushsa, y holda,

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha_1 = \text{tg}\,\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, u holda tg $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Shunday qilib, ikki to'g'ri chiziqning parallel bo'lishining zaruriy va yetarli sharti $k_1 = k_2$ bo'ladi.

1-misol. $y=4x+1$ va $y=4x-7$ to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashgan.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari bir xil, $k_1=4$, $k_2=4$ bo'lganligi sababli ular o'zaro parallel joylashgan.

Agar to'g'ri chiziqlar penpendikular bo'lsalar, u holda (4.12) formula ma'nosiz bo'ladi. Aytaylik $0<\varphi<90^0$ bo'lsin. Bunda $\cos\varphi\neq0$, $\sin\varphi\neq0$ bo'lgani uchun φ burchakni kotangensini (4.12) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{ctg}\varphi=1/\text{tg}\varphi=(1+\text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2)/(\text{tg}\,\alpha_2-\text{tg}\,\alpha_1)=(1+k_1\,k_2)/(k_2-k_1)$$

Bu formulada $\varphi=\pi/2$ desak, ctg $\varphi=0 \Rightarrow k_1k_2=-1$ natijani olamiz. Aksincha bu tenglik bajarilsa, u holda $\text{ctg}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=\pi/2$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

Demak, ikkita to'g'ri chiziqning perpendikularligining zaruriy va yetarli sharti $k_1\,k_2=-1$ bo'ladi.

2-misol: $4x+2y-1=0$ va $x-2y+2=0$ to'g'ri chiziqlarning perpendikularligini ko'rsating.

Yechish: $2y=-4x+1$ $\qquad$ $2y=x+2$

$y=-2x+1/2$ $\qquad$ $y=x/2+1$

$k_1=-2$ $\qquad$ $k_2=1/2$

Natijada $k_1\,k_2=-1$ ekanligini ko'ramiz, ya'ni $\varphi=90^\circ$ va bu to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikular ekan.

3-misol: $M(-3;\ -1)$ nuqta orqali o'tuvchi va $-1/2x+y-2=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Yechish: Berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k_1=-1/2$ ga teng. Demak, unga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti
$k_2=-1/k_1=2$ va uning tenglamasi $y=2x+b$ ko'rinishga ega. $M(-3;\ -1)$ nuqta izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi:

$$-1=2\cdot(-3)+b \Rightarrow b=5.$$

Natijada izlangan to'g'ri chiziq tenglamasi $y=2x+5$ ekanligini topamiz.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishdagi tenglamaga keltirish. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \qquad (4.13)$$

berilgan bo'lsin. Uni normal ko'rinishidagi tenglamaga keltirish uchun hamma hadlarni normallovchi ko'paytuvchi M ga ko'paytirish kerak, ya'ni

$$MAx+MBy+MC=0\,. \qquad (4.14)$$

Oxirgi tenglamaga

$$MA=\cos\alpha,\ MB=\sin\alpha,\ Mc=-p.$$

deb belgilab olsak, unda $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ bo'ladi.

(4.14) da MA va MB larni kvadratga ko'tarib qo'shamiz:

$$\left.\begin{aligned} M^2A^2&=\cos^2\alpha \\ M^2B^2&=\sin^2\alpha \end{aligned}\right\} M^2A^2+M^2B^2=1, M^2\left(A^2+B^2\right)=1\,.$$

Unda normallovchi ko'paytuvchi M ning qiymati $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ bo'ladi.

M ning ishorasi berilgan tenglamaning ozod hadining ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning qiymatini (4.14) ga qo'ysak, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad \sin\alpha=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad -p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0\,.$$

Bu to'g'ri chiziqning normal ko'rinishidagi tenglamasi deyiladi.

Misol: $2x-3y-6=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning tenglamasini normal ko'rinishga keltiring. $A=2$; $B=-3$; $C=-6$ bo'lganligi uchun normallovchi ko'paytuvchi

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+9}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

qiymatga ega bo'ladi. Unda berilgan tenglamaning ikkala tomonini bu ko'paytuvchiga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$, bundan $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $p=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Aytaylik M_0 (x_0; y_0) nuqta va undan o'tmaydigan biror to'g'ri chiziq o'zining umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ bilan berilgan bo'lsin. Berilgan nuqta va shu to'g'ri chiziq orasidagi masofani topish masalasini qo'yamiz. Berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan $\vec{n}=(A;B)$ va $M_1M_0=(x_0-x_1;\ y_0-y_1)$ vektorlar parallel bo'ladi (4.8-chizma). Bunda $\vec{n}$ to'g'ri chiziqning normal vektori, M_1 esa to'g'ri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan perpendikular asosini ifodalaydi. 4.8- chizmaga asosan va skalyar ko'paytmaning har ikkala ko'rinishiga binoan formula bilan ham topilishi ravshan.

5-masala. Bir partiya detallarni tayyorlashga sarflanadigan xarajatlar quyidagi formula bilan aniqlanadi $y=ax+в$, bu yerda x - partiya hajmi. I chi variantdagi texnologik jarayon uchun $y=1,45x+20$, II chi variant uchun quyidagilar ma'lum: y=157,5 (so'м) –x=100 (det.), bo'lganda va y= 452,5 (so'm) - x =200 (det.) bo'lganda. Bir tomondan y – xarajat hamma, ikkinchi tomondan y – mahsulotlar soni. Texnologik jarayonning ikkita variantiga baho bering va ikkala variant uchun x=200 (det.) bo'lganda mahsulot tan narxini hisoblang.

Yechish: II variant uchun «a» va «b» parametrlarni quyidagi tenglamalar sistemasidan aniqlaymiz:

$$\begin{cases} 157,5 = a\cdot 100 + b \\ 425,5 = a\cdot 300 + b \end{cases}$$

Bu yerdan a=1,475 va $в$ =10, ya`ni $y=ax+в \Rightarrow y=1,475\,x+10$ $(x_0; y_0)$- ikki to'g'ri chiziq kesishishi nuqtasini quyidagi tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\begin{cases} y = 1,45x + 20 \\ y = 1,475x + 10 \end{cases}$$ bu yerdan $x_0 = 400$ va $y_0 = 600$ bo'ladi.

Bu yerdan kelib chiqadiki, partiya hajmi $x < 400$ bo'lgan holda texnologik jarayonning II chi varianti samarali va $x > 400$ bo'lganda I variant samarali bo'ladi.

Mahsulot tan narxi x=200 bo'lganda I chi variant bo'yicha quyidagicha bo'ladi:

$$y= 1,45\cdot 200 + 20 = 200 \text{ so'm},$$

va II chi variant bo'yicha:

$$y=1,475\cdot 200+10=205 \text{ so'm}.$$

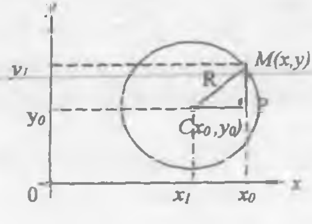
4.5-§. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR. AYLANA VA ELLIPS

Ushbu II darajali tenglama

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F=0 \qquad (4.17)$$

tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu yerda A, B, C lardan kamida bittasi nolga teng emas. (4.17) tenglama koeffitsiyentlarining qiymatlariga qarab turli ikkinchi tartibli chiziqlarni tasvirlashi mumkin. Biz quyida shu egri chiziqlarni tenglamalari bilan tanishamiz.

Aylananing umumiy tenglamasi. Ta'rif: Aylana deb har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha (aylananing markazi) masofalari (aylananing radiusi) bir xil bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi. Radiusi r ga teng va markazi $C(a;b)$ nuqtada yotgan aylana tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ shu aylanadagi ixtiyoriy bir nuqta bo'lsin. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga va Pifagor teoremasiga asosan (4.9-chizma).



4.9-chizma.

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow |MC|^2 = |CP|^2 + |MP|^2 \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (4.18)$$

Bu markazi $C(a;b)$ nuqtada bo'lib, radiusi r ga teng bo'lgan aylananing tenglamasidir. Agar $a=b=0$ bo'lsa $x^2+y^2=r^2$. Bu markazi koordinatalar boshida yotgan aylananing tenglamasidir. (4.18) tenglamadagi qavslarni ochsak,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$$

ya'ni (4.17) ko'rinishdagi tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamada

$$D=-2a; \quad E=-2b; \quad F=a^2+b^2-r^2$$

belgilashlarni qo'yib, ushbu

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

aylananing umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb ataluvchi tenglamani olamiz.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli (4.17) umumiy tenglama aylananing tenglamasi bo'lishi uchun x^2 va y^2 oldidagi koeffitsiyentlar teng va xy ko'paytma oldidagi koeffitsiyentning nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Masalan, $x^2+y^2-2x+3y+2=0$ tenglamani ko'ramiz. Bu tenglamada x va y qatnashgan hadlarni alohida - alohida guruhlab, va to'la kvadrat ajratib, quyidagi aylana tenglamasini hosil qilish mumkin:

$$x^2-2x+1-1+y^2+3y+9/4-9/4+2=(x-1)^2+(y+3/2)^2-5/4=0$$

$$(x-1)^2+(y+3/2)^2=5/4$$

Bu markazi $C(1,-3/2)$ nuqtada joylashgan va radiusi $r=\sqrt{5}/2$ bo'lgan aylana tenglamasidir.

Ellips va uning kanonik tenglamasi. Ikkinchi tartibli chiziq (4.17) ellipsning tenglamasini ifodalashi uchun koeffitsiyentlardan tashkil topgan $AC>0$ bo'lishi kerak.

Ta'rif: Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning yig'indisi o'zgarmas $2a$ soniga teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi. Biz F_1 va F_2 fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz (4.10-chizma).Unda fokuslar $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Agar $M(x;y)$ ellipsda yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsa, unda ellips ta'rifiga asosan F_1M+F_2M yigindi o'zgarmas son bo'lishi kerak, bu masofani $2a$ ga teng deb olamiz, ya'ni

$$|F_1M|+|F_2M|=2a\ . \qquad (4.19)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan $|F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Bu natijalarni (4.19) tenglikka qo'yib, uni soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

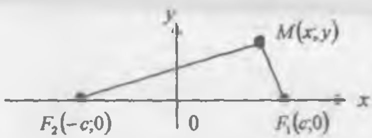
$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4a^2-4xc=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ;\ a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2 \quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (4.20)$$

F_1MF_2 uchburchakdan $|MF_1|+|MF_2|>F_1F_2$, bundan esa $2a>2c$, $a>c$ bo'lishi kerakligi kelib chiqadi.



4.10-chizma.

Natijada $a^2-c^2>0$ bo'ladi va uni $a^2-c^2=b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu holda (4.20) tenglik $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ga bo'lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (4.21)$$

Hosil bo'lgan tenglama ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Ellipsning shakli. Ellipsning kanonik tenglamasiga asosan $(x; y)$ nuqta ellipsda yotsa, u holda $(-x; y)$, $(-x; -y)$, $(x; -y)$ nuqtalar ham unda yotadi. Shuning uchun ham koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lib hisoblanadi.

Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari ellipsning uchlari deyiladi. Ularni topish uchun (4.21) ga mos ravishda $x=0$ va $y=0$ qiymatlarni qo'yib, hosil bo'lgan tenglamalarni yechamiz:

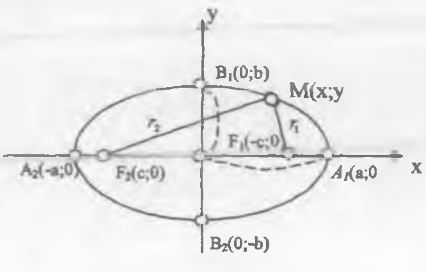
$$x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b, \quad y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a.$$

Natijada ellipsning quyidagi to'rtta uchlari hosil bo'ladi: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. $A_1A_2=2a$ – ellipsning katta o'qi, $B_1B_2=2b$ - kichik o'qi, a va b esa uning yarim o'qlari deyiladi. Kanonik tenglamadan

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow |x| \le a, \quad \frac{y^2}{в^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le в^2 \Rightarrow |y| \le в,$$

natijalarni olamiz. Demak, ellips chegaralangan egri chiziq bo'ladi.

Koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya chiziqlari ekanligidan uning shaklini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Birinchi chorakda $x \ge 0$, $y \ge 0$ bo'lgani uchun (4.21) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya uchun $x \in [0;a]$ bo'lib, x oshib borganda, y o'zgaruvchi b dan boshlab nolgacha kamayib boradi va ellipsning birinchi chorakdagi qismini hosil qiladi. Bu qismni simmetriya asosida davom ettirib, ellips shakli quyidagicha bo'lishini topamiz (4.11-chizma):



4.11-chizma.

Ellipsning ekssentrisiteti. Ta'rif: Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning **ekssentrisiteti** deb ataladi va ε kabi belgilanadi.

4.12-chizma.

Ta'rifga asosan $\varepsilon=2c/2a=c/a$ va $c\in(0;a)$ bo'lgani uchun $0<\varepsilon<1$ qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi. Kanonik tenglama bo'yicha ε quyidagicha topiladi:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Bu yerda $\varepsilon=0$ bo'lsa, a=b bo'ladi va ellips aylanaga o'tadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi bo'ladi. ε birga yaqinlashgan sari ellips Ox o'qiga yaqinlashadi, ya'ni b nolga yaqin bo'ladi (4.12-chizma).

Ellips nuqtasining fokal radiuslari. Ellipsning ixtiyoriy $M(x;\ y)$ nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan r_1 va r_2 masofalar shu nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi. Ellips ta'rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo'ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1=MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,\quad r_2=MF_2=\sqrt{(x+x)^2+y^2}\,.$$

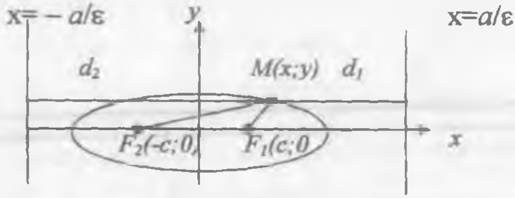
Bu fokal radiuslarni kvadratga ko'tarib ayirsak, u holda $r_2^2-r_1^2=4cx$ va $r_1+r_2=2a$ tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va uni yechib fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1=a-\varepsilon x\,,r_2=a+\varepsilon x$$

Ellipsning direktrissalari. Ellipsning katta o'qiga perpendikular va kichik o'qiga parallel bo'lgan $x=\pm l$ $(l>0)$ to'g'ri chiziqlarni qaraymiz. Ellipsning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan shu nuqtaga yaqin $x=\pm l$ $(l>0)$ perpendikular to'g'ri chiziqqacha (d_1) hamda yaqin fokusigacha bo'lgan r_1 masofalar nisbatini olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{l-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{l-x}$$

Agar l sifatida $l=a/\varepsilon$ olinsa, u holda yuqoridagi nisbat o'zgarmas bo'lib, doimo ε ga teng bo'ladi. $M(x;\ y)$ nuqtadan $x=-l$ to'g'ri chizig'igacha bo'lgan masofani d_2 orqali belgilasak, u holda yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $r_2/d_2 = \varepsilon$ tenglikni hosil qilamiz (4.13-chizma). Ellips markazining chap va o‘ng tomonida bir xil masofada joylashgan $x=\pm a/\varepsilon$ to‘g‘ri chiziqlariga ellipsning **direktrissalari** deyiladi. Aylanada direktrissa bo‘lmaydi, chunki unda $\varepsilon=0$. Shunday qilib, ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha va mos direktrissasigacha bo‘lgan masofalar nisbati o‘zgarmas son bo‘lib, doimo ε ga teng bo‘ladi.



4.13-chizma.

Misol: $x^2+4y^2=4$ ellipsning barcha xarakteristikalarini toping.

Yechish: Dastlab ellipsning kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \Rightarrow a^2=4; \; b^2=1 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=3.$$

Unda fokuslar $F_2(-\sqrt{3},0)$ va $F_1(\sqrt{3},0)$, yarim o‘qlar $a=2$ va $b=1$ bo‘ladi. Bulardan ekssentrisitet va direktrissalarni topamiz:

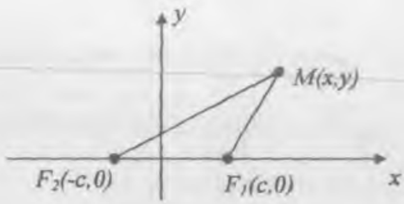
$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm 2:\frac{\sqrt{3}}{2}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Fokal radiuslar $r_1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\; r_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ formulalar bilan topiladi.

4.6-§. GIPERBOLA VA PARABOLA

Ta’rif: Giperbola deb, tekislikning har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslarigacha) masofalarining ayirmasi o‘zgarmas $2a$ songa teng bo‘lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi. Bu o‘zgarmas $2a$ soni fokuslar orasidagi $2c$ masofadan kichik bo‘lishi kerak. Fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz.

Unda ularni $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ deb ifodalash mumkin. $M(x;y)$ giperboladagi ixtiyoriy bir nuqta bo‘lsin (4.14-chizma).



4.14-chizma.

Ta'rifdan foydalanib, giperbola tenglamasini chiqaramiz. Ta'rifga asosan, $|F_2M|-|F_1M|=2a$ bo'ladi. Bu yerda

$$|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va bu masofalarni yuqoridagi tenglikka qo'yib, soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \Rightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2,$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=c^2x^2-2cx\,a^2+a^4$$

$$a^2x^2-2cx\,a^2+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2-2cx\,a^2+a^4$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

F_1MF_2 uchburchakdan $|F_2M|-|F_1M|<|F_1F_2|\Rightarrow 2a<2c\Rightarrow a<c$ bo'lgani uchun $b^2=c^2-a^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglikni $a^2\cdot b^2$ bo'lib, ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.22}$$

Bu tenglamaga giperbolaning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Ellipsdagidek bu yerda ham $r_2=|F_2M|$ va $r_1=|F_1M|$ giperbolaning **fokal radiuslari** deyiladi.

Giperbolaning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz:

$$y=0\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=\pm a$$

Agar $x=0$ desak, u holda $y^2=-b^2 \Rightarrow y\in\varnothing$ bo'lib, giperbolani Oy o'qi bilan kesishmasligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, giperbolani Ox o'qidagi kesishish nuqtalari $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ bo'lib, ular giperbolaning **uchlari** deyiladi.

Giperbola uchlari orasidagi $2a$ masofani giperbolaning **haqiqiy o'qi** va $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalar orasidagi $2b$ masofani esa giperbolaning **mavhum o'qi** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning yarim haqiqiy va yarim mavhum o'qlari deyiladi. O'qlarning o'rta nuqtasi giperbolaning **markazi** deyiladi (4.15-chizma).

Giperbolaning shakli. Agar $(x;\ y)$ giperbolada yotgan nuqta bo'lsa, u holda, $(\pm x;\ \pm y)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo'ladi, ya'ni giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \ |x| \geq a.$$

Agar ellipsga qaraganimizda, faqat birinchi chorak bilan kifoyalansak, u holda

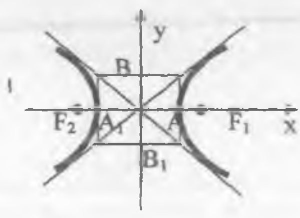
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

funksiyada x o'zgaruvchi a dan ∞ gacha o'zgarib borganda, y o'zgaruvchi 0 dan ∞ gacha o'sadi, ya'ni giperbola chegaralanmagan egri chiziqdir. I-chorakdagi giperbola grafigini simmetriya bo'yicha davom ettirib, giperbola ikkita bo'lakdan iborat egri chiziq bo'lishini ko'ramiz. Bu bo'laklar giperbolaning ***shoxlari*** deb ataladi.

Giperbolaning asimptotalari. Ta'rif: Berilgan egri chiziq asimptotaga ega deyiladi, agarda shunday (l) to'g'ri chiziq mavjud bo'lsaki, egri chiziq assimtota deb atalmush bu to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borib, ammo uni hech qachon kesib o'tmaydi.

Giperbolaning $A_1A=2a$ va $BB_1=2b$ o'qlaridan yasalgan to'g'ri to'rtburchak diagonallari yotgan to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Giperbolaning grafigi va asimptotalari quyidagi chizmada ko'rsatilgan (4.15-chizma):



4.15-chizma.

Asimptotalarning tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{4.23}$$

Agarda $a=b$ bo'lsa, giperbola teng yonli deyiladi. Unda $y=\pm x$ asimptotalarni Dekart koordinatalari sifatida olsak, giperbola tenglamasi bizga maktabdan tanish bo'lgan $x \cdot y=k \Rightarrow y=k/x$ ko'rinishga keladi.

Misol. $a=3$ va $b=2$ ga teng bo'lsa, giperbola va uning asimptotalari tenglamasi yozilsin.

Yechish. Giperbolaning (4.22) kanonik tenglamasi va (4.23) asimptotalar tenglamasiga asosan ushbu natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \qquad y = \pm \frac{2}{3} x$$

Giperbolaning ekssentrisiteti. Ta'rif: Giperbolani fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning haqiqiy o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning **ekssentrisiteti** deyiladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1. \tag{4.24}$$

Agar a parametr b ga nisbatan kichik bo'lsa, giperbolaning shoxlari Ox o'qiga qarab siqiq bo'ladi, b qancha a ga yaqin bo'lsa, uning shoxlari shuncha yoyiq bo'ladi.

Giperbolaning M nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan masofalar shu nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi.

Ellipsning fokal radiuslarini topish usulidan foydalanib, giperbolaning fokal radiuslarini topamiz:

$r_1= -a+\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$ (o'ng shox uchun), $r_1=a - \varepsilon x$, $r_2= -a-\varepsilon x$ (chap shox uchun)

1-misol: $x^2 / 16 - y^2 / 9=1$ giperbolaning abssissasi 8 ga teng, ordinatasi musbat bo'lgan nuqtasining fokal radiuslari hisoblansin.

Yechish: Masala sharti va (4.24) formulaga asosan

$$x=8,\ y>0,\ a=4,\ b=3,\ c=\sqrt{16+9}=5,\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

va yuqorida ko'rsatilgan formulaga asosan o'ng shox fokal radiuslari

$$r_1=-a+\varepsilon x=-4+{}^5/_4 \cdot 8=6, \qquad r_2=a+\varepsilon x=4+{}^5/_4 \cdot 8=14.$$

Giperbolaning direktrissalari. Ta'rif: Giperbolaning **direktrissalari** deb uning markazidan $\pm a/\varepsilon$ masofada o'tib, fokal o'qiga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqlarga aytiladi.

Ta'rifga asosan direktrissa tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo'ladi.

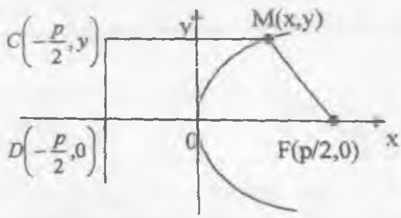
Ekssentrisitet $\varepsilon>1$ bo'lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak, direktrissa O markaz bilan A_1 va A uchlar orasidan o'tadi.

Teorema: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha masofaning mos direktrissagacha masofasiga nisbati o'zgarmas bo'lib, ekssentrisitetga teng bo'ladi, ya'ni $r/d=\varepsilon$. Teorema isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

Ta'rif: Parabola deb, har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha (fokusigacha) va berilgan to'g'ri chiziqqacha (direktrissagacha) masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

Bunda direktrissa fokusdan o'tmasligi kerak.

Parabola tenglamasini topish uchun F fokus va (l) direktrissa orasidagi masofani $FD=p$, koordinata boshini ular o'rtasida deb olamiz. Unda fokus $F(p/2,0)$, direktrissa tenglamasi $x=-p/2$ bo'ladi (4.16-chizma). Parabolaga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz.



4.16-chizma.

Ta'rifga ko'ra $|CM|=|MF|$ va

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\quad |CM|=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

bo'lgani uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2=2px\cdot \qquad (4.25)$$

Hosil bo'lgan (4.25) tenglama parabolaning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Bu parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi va p parabolaning parametri deyiladi.

Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan direktirissagacha bo'lgan masofani $|CM|=d$, fokusigacha bo'lgan masofani $|FM|=r$ deb belgilasak, ta'rifga asosan $r=d$ va parabolaning ekssentrisiteti $\varepsilon=r/d=1$ bo'ladi. Parabola uchun direktrissa tenglamasi $x=-p/2$, bo'ladi.

Misol: Ox o'qi parabolaning simmetriya o'qi, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasini tuzing.

Yechish: Masala shartiga va (4.25) formulaga asosan,

$$OF=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8 \Rightarrow y^2=2px \Rightarrow y^2=2\cdot 8x,\ y^2=16x.$$

4.7-§. FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI

Tekislikning umumiy tenglamasi. Aytaylik, fazoda ixtiyoriy $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin, unda x,y,z o'zgaruvchili istalgan birinchi tartibli tenglama berilgan sistemaga nisbatan tekislikni ifodalaydi. Bunday tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'lsin:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.26}$$

Bu yerda A,B,C va D lar ixtiyoriy o'zgarmaslar bo'lib, A,B,C lar bir paytda nolga teng bo'lmaydi. (4.26) tenglamani qanoatlantiradigan hech bo'lmaganda bitta $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani belgilab olamiz, ya'ni

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{4.27}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Agar (4.26)- dan (4.27) ni ayirsak, tekislikning (4.26) ga teng kuchli

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4.28}$$

ko'rinishidagi tenglamasini hosil qilamiz. Endi (4.28) tenglama $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{n}=\{A,B,C\}$ vektorga perpendikular tekislikni ifodalashini ko'rsatamiz. $\vec{n}$ vektor nol vektor emas, chunki A,B,C lar bir paytda nolga teng bo'lolmaydi.

Agar haqiqatan ham, $M(x,y,z)$ nuqta tekshirilayotgan tekislikda yotsa, uning koordinatalari (4.28) tenglamani qanoatlantirishi kerak. Demak, bu paytda shu tekislikda yotgan $\vec{r}=\overline{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$ yo'nalgan kesma (radius-vektor) va $\vec{n}=\{A,B,C\}$ o'zaro perpendikular (ortogonal) bo'lishi, ularning skalyar ko'paytmasi esa

$$(\vec{n}\vec{r})=\left(\vec{n}\cdot\overline{M_0M}\right)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4.29}$$

bo'lishi kerak, aks holda qaralayotgan vektorlar o'zaro perpendikular bo'lolmaydi. $\vec{n}$ vektor faqat tekislikdagina yotgan istalgan bir yo'nalgan kesmaga perpendikular bo'lishi mumkin. Shunday qilib, (4.28) va demak, (4.26) tenlama fazoda tekislikni ifodalab, unga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi. $\vec{n}=\{A,B,C\}$ vektorga esa tekislikning normal vektori deyiladi.

Tekislikning umumiy tenglamasini tekshirish. Tekislikning umumiy ko'rinishidagi (4.26) tenglamasida A, B, C va D lar noldan farqli bo'lsa, unda (4.26) ga to'la tenglama deyiladi. Agar A, B, C, D lardan birortasi nolga teng bo'lsa, to'la bo'lmagan tenglama deyiladi. Quyida to‘la bo‘lmagan tenglamaning ba’zi xususiy hollari bilan tanishib o‘tamiz.

1) $D=0$; tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko‘rinishini olib, kordinatalar boshidan o‘tuvchi tekislikni ifodalaydi.

2) $A=0$; tenglama $By+Cz+D=0$ ko‘rinishini olib, Ox o‘qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Chunki bunday tekislikning $\vec{n}=\{0,B,C\}$ normal vektor Ox o‘qiga perpendikulardir.

3) $B=0$ tenglama $Ax+Cz+D=0$ ko‘rinishini olib, Oy o‘qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Chunki bunday tekislikning $\vec{n}=\{A,0,C\}$ normal vektori Oy o‘qiga perpendikulardir.

4) $C=0$; tenglama $Ax+By+D=0$ ko‘rinishini olib, Oz o‘qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Chunki bunday tekislikning $\vec{n}=\{A,B,0\}$ normal vektori Oz o‘qiga perpendikulardir.

5) $B=0, C=0$ tenglama $Ax+D=0$ yoki $x=-\frac{D}{A}$ ko‘rinishini oladi. Agar $a=-\frac{D}{A}$ deb olsak, $x=a$ tenglama Oyz koordinata tekisligiga parallel va Ox o‘qidan a ga teng kesma ajratuvchi tekislikni ifodalaydi.

6) $A=0, B=0$; tenglama $Cz+D=0$ yoki $z=-\frac{D}{C}$ ko‘rinishni oladi. Agar $c=\frac{-D}{C}$ deb olsak, $z=c$ tenglama Oxy koordinata tekisligiga parallel va Oz o‘qidan c ga teng kesma ajratuvchi tekislikni ifodalaydi.

7) $A=0, C=0$; tenglama $By+D=0$ yoki $y=-\frac{D}{B}$ ko‘rinishini oladi. Agar $b=-\frac{D}{B}$ deb olsak, $y=b$ tenglama Oxz kordinata tekisligiga parallel va Oy o‘qidan b ga teng kesma ajratuvchi tekislikni ifodalaydi.

8) $B=0, C=0, D=0$ tenglama $Ax=0$ ko‘rinishini olib, Oyz koordinata tekisligini ifodalaydi.

9) $A=0, C=0, D=0$ tenglama $By=0$ ko‘rinishini olib, Oxz koordinata tekisligini ifodalaydi.

10) $A=0, B=0, D=0$ tenglama $Cz=0$ ko‘rinishini olib, Oxy koordinata tekisligini ifodalaydi.

Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. Tekislikning (4.26) ko‘rinishidagi umumiy tenglamasini yozib olamiz:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Tenglamada D koeffitsiyentni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, hamma hadlarni ($-D$) ga bo'lib chiqamiz:

$$\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1 \qquad (4.30)$$

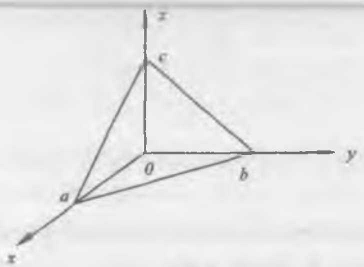
yoki

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \qquad (4.31)$$

(4.31) tenglamada $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}$ va $c=-\frac{D}{C}$ belgilashlarni kiritamiz, a,b,c lar tekislikning mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlardan ajratgan kesmalarini ko'rsatadi (4.17-chizma). Unda (4.31) tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (4.32)$$

ko'rinishini olib, tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.



4.17-chizma.

Masala. Tekislikning umumiy tenglamasi $2x-y-4z+20=0$ ni uning kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltiring.

Yechish. Tenglamaning ozod hadi 20 ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, hamma hadlarini -20 ga bo'lamiz:

$$2x-y-4z=-20, \qquad \frac{2}{-20}x-\frac{1}{-20}y-\frac{4}{-20}z=1$$

yoki tekislikning

$$\frac{x}{-\frac{20}{2}}-\frac{y}{\frac{-20}{1}}-\frac{z}{\frac{-20}{4}}=1 \text{ yoki } \frac{x}{-10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{5}=1$$

ko'rinishidagi kesmalar bo'yicha tenglamasini hosil qilamiz. Demak, berilgan tekislik Ox o'qidan $a=-10$, Oy o'qidan $b=20$ va Oz o'qidan $c=5$ ga teng kesmalar ajratar ekan.

Natijada (4.35) ni (4.36) yordamida quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (4.37)$$

(4.37) tekislikning koordinatalar shaklidagi normal tenglamasidir.

Tekislikning umumiy tenglamasini normal ko'rinishiga keltirish. Yuqorida tekislikning (4.37) ko'rinishidagi tenglamasini ikkita $\vec{n} = \{A, B, C\}$ va $\vec{r} = \overline{M_0M}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkinligini ko'rsatgan edik. Endi tekislikning (4.37) ko'rinishidagi tenglamasining

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4.38)$$

ko'rinishini (4.38) dan foydalanib, quyidagi $\vec{n} = \{A, B, C\}$ va $\vec{r} = \{x, y, z\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\vec{n}\vec{r}) = Ax + By + Cz$ yordamida o'zgartirib yozamiz. Unda tekislikning vektor ko'rinishidagi tenglamasi

$$(\vec{n}\vec{r}) + D = 0 \qquad (4.39)$$

ko'rinishini oladi. Bu yerda $\vec{n}$ - tekislikning normal vektori esa $\vec{r}$ tekislik nuqtasining radius-vektoridir. Agar normal vektorni

$$\vec{n} = \vec{n}^{\circ} \cdot |\vec{n}| = \vec{n}^{\circ} \cdot n \qquad (4.40)$$

ko'rinishida yozish mumkinligini e'tiborga olsak, (4.39) ushbu ko'rinishga keladi.

$$(\vec{n}^{\circ}\vec{r})n + D = 0 \qquad (4.41)$$

(4.41) tenglikni $(\pm n)$ ga bo'lsak,

$$\pm(\vec{n}\vec{r}) + \frac{D}{\pm n} = 0 \qquad (4.42)$$

hosil bo'ladi. Quyidagi

$$\begin{aligned} D \succ 0 \quad da \quad & \frac{D}{-n} = -p \\ D \prec 0 \quad da \quad & \frac{D}{+n} = -p \end{aligned} \qquad (4.43)$$

belgilashlarni kiritib, tekislikning ushbu

$$\pm(\vec{n}^{\circ}\vec{r}) - p = 0$$

normal tenglamasini hosil qilamiz. Demak, tekislikning (4.38) ko'rinishidagi tenglamasini normal ko'rinishga keltirish uchun tenglamaning hamma hadlarini $\pm n$ ga bo'lish yoki $M = \frac{1}{\pm n}$ ga ko'paytirish kerak. Agar $n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4.44)$$

ga ega bo‘lib, unga normallovchi ko‘paytuvchi deyiladi. Agar $D>0$ bo‘lsa, M manfiy ishora bilan, agar $D<0$ bo‘lsa, M musbat ishora bilan olinadi.

Shunday qilib, (4.38) tenglamani M ga ko‘paytirsh namunasiga (4.37) ko‘rinishidagi normal tenglama ko‘rinishiga keladi.

$$MAx+MBy+MCz+MD=0 \qquad (4.45)$$

(4.45) va (4.37) ni solishtirib, quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz.

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad p=\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Misol. Tekislikning $6x+7y+6z-34=0$ ko‘rinishidagi umumiy tenglamasi berilgan. Bu tekislikning normal tenglamasini tuzing va normalining yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada: $A=6, B=7, C=6, D=-34$ (4.44) formulaga asosan normallovchi ko‘paytuvchini topamiz.

$$M=\frac{1}{+\sqrt{6^2+7^2+6^2}}=\frac{1}{+\sqrt{36+49+36}}=\frac{1}{11}$$

Berilgan umumiy ko‘rinishdagi tenglamani $\frac{1}{11}$ ga ko‘paytirib, tekislikning

$$\frac{6}{11}x+\frac{7}{11}y+\frac{6}{11}z-\frac{34}{11}=0$$

ko‘rinishidagi normal tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerdan esa yo‘naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$\cos\alpha=\frac{6}{11},\quad \cos\beta=\frac{7}{11},\quad \cos\gamma=\frac{6}{11}.$$

Berilgan nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa. Berilgan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofasini topish masalasini qaraymiz. Bu chetlanishni δ deb, M nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani d deb olsak, ular orasida quyidagi munosabat mavjud: agar M nuqta va koordinatalar boshi tekislikning har tomonida bo‘lsa, $d=\delta$ aks holda, ya’ni M nuqta va koordinatalar boshi tekislikning bir tomonida bo‘lsa, $d=-\delta$ bo‘ladi. Biz birinchi hol bilan chegaralanamiz. 4.19-chizmadan ko‘rinib turibdiki,

$$\delta=|PQ|=|OQ|-|OP| \qquad (4.46)$$

shu bilan birga, $\overline{OM}$ vektorning $\vec{n}^{\circ}$ birlik normal vektorga proyeksiyasi ikki vektorning skalyar ko‘paytmasiga teng:

$$|OQ|=\text{Пр}_{\vec n}\overline{OM}=\left(\vec{n}^0\cdot\overline{OM}\right)$$

Agar $\vec{n}^{\circ}=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$, $\overline{OM}=\{x_1;y_1;z_1\}$ ekanligini nazarda tutsak,

$$|OQ| = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma \tag{4.47}$$

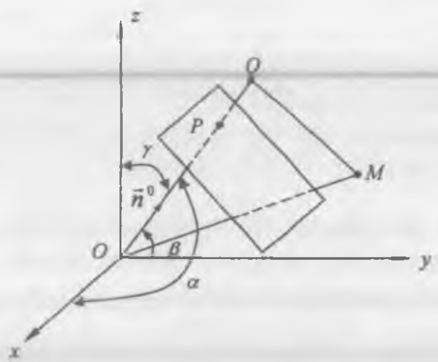
ni topamiz. $|OP| = p$ ligini (I punktga qarang) e'tiborga olib, (4.46) ni (4.47) yordamida qayta yozamiz:

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p \tag{4.48}$$

Bu nuqtaning tekislikdan chetlanishidir. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagi formula yordamida topiladi:

$$d = \pm|x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p| \tag{4.49}$$

Masala. $M(2,1,2)$ nuqtadan $6x+7y+6z-34=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.



4.19-chizma.

Yechish. Yuqorida bu tekislik tenglamasi normal ko'rinishiga keltirilgan edi:

$$\frac{6}{11}x + \frac{7}{11}y + \frac{6}{11}z - \frac{34}{11} = 0$$

(4.39) formulaga asosan, $x_1 = 2, y_1 = 1$ va $z_1 = 2$ ligini e'tiborga olib, d ni topamiz:

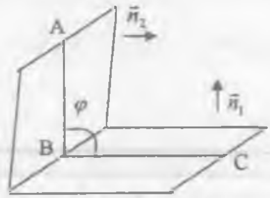
$$d = \left|\frac{6}{11}\cdot 2 + \frac{7}{11}\cdot 1 + \frac{6}{11}\cdot 2 - \frac{34}{11}\right| = \left|\frac{12+7+12-34}{11}\right| = \left|\frac{-3}{11}\right| = \frac{3}{11}$$

Demak, $d = \frac{3}{11}$.

Ikki tekislik orasidagi burchak. Ikki tekislikning parallellik va perpendikularlik shartlari. Ikki tekislik o'zining (4.39) ko'rinishidagi tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$(\bar{r}\bar{n}_1)+D_1=0, \quad (\bar{r}\bar{n}_2)+D_2=0$$

bu yerda, $\bar{n}_1$ va $\bar{n}_2$ –tekisliklarning normal vektorlaridir. Bu ikki tekislik orasidagi burchak ikki yoqli burchak bilan aniqlanib, u esa o'z navbatida o'zining chiziqli burchagi $A\hat{B}C=\varphi$ bilan o'lchanadi (4.20-chizma).



4.20-chizma.

Shu bilan birga ikki tekislik orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Shuning uchun ham berilgan ikki tekislik orasidagi burchakni ularning normallari, ya'ni ikki vektor orasidagi burchak sifatida aniqlaymiz.

Ma`lumki, $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2)}{|n_1||n_2|}$. Agar berilgan tekisliklar bir-biriga parallel bo'lsa, ularning normal vektorlari kollinear bo'ladi va shuning uchun tekisliklar parallelligining zarur va yetarli sharti

$$\bar{n}_1=\lambda\bar{n}_2$$

tenglik bilan ifodalanadi, bu yerda λ biror o'zgarmas son. Shunga o'xshash berilgan tekisliklarning perpendikularlik sharti, ularning normallarining perpendikularlik shartiga teng bo'lib, bu shart normal vektorlari skalyar ko'paytmasining nolga teng bo'lishi bilan aniqlanadi.

$$(\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2)=0$$

Endi tekisliklar umumiy tenglamalari bilan berilganda, yuqoridagi shartlar qanday ko'rinishda bo'lishini aniqlaylik. Ushbu

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

va

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

tekisliklar berilgan bo'lsin. Bu tekisliklarning normal vektorlari $n_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ va $n_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ bo'ldi. Unda ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ta'rifidan foydalanib, ikki tekislik orasidagi burchakni (ularning normallari orasidagi burchak) hisoblash formulasini quyidagi ko‘rinishda olamiz:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{4.50}$$

Ikki tekislikning parallellik sharti (normallarining parallelligi)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{4.51}$$

ko‘rinishni oladi.

Va nihoyat ikki tekislikning perpendikularlik sharti (normallarining perpendikularligi)

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4.52}$$

ko‘rinishini oladi.

Masala. $2x + y - 3z + 3 = 0$ va $x - y + 2z - 4 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Bu yerda

$$A_1 = 2, \quad B_1 = 1, \quad C = -3$$

$$A_2 = 1, \quad B_2 = -1, \quad C_2 = 2$$

Unda (4.50) formulaga asosan

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1(-1) + (-3)\cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = -\frac{5}{2\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{2\sqrt{21}}\right) = \pi - \arccos\frac{5}{2\sqrt{21}}$$

Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasi. Fazoda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Shu nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasini topamiz. Shartga ko‘ra nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmagani uchun, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ va $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ vektorlar kollinear bo‘lolmaydi, ya’ni ular parallel yoki bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Shuning uchun ham ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqta M_1, M_2 va M_3 nuqtalar bilan bir tekislikda yotishi uchun $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ va $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ vektorlar komplanar va shu sababli ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi shart. Shunday qilib, $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ va $\overline{M_1M}$ vektorlarning komplanarlik sharti yoki M, M_1, M_2 va M_3 nuqtalarning bir tekislikda yotish sharti quyidagidan iborat ekan:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Bu esa bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasidir.

Masala. $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$ va $C(0;3;7)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislikning tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilishiga ko‘ra

$$x_1=4,\quad y_1=2,\quad z_1=5$$
$$x_2=0,\quad y_2=7,\quad z_2=2$$
$$x_3=0,\quad y_3=3,\quad z_3=7$$

Bu qiymatlardan foydalanib tekislikning tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 2-5 \\ 0-4 & 3-2 & 7-5 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-4)[5\cdot 2-1(-3)]-(y-2)[(-4)\cdot 2-(-3)(-4)]+(z-5)[(-4)\cdot 1-5(-4)]=0$$

$$13(x-4)+20(y-2)+16(z-5)=0$$

Demak, tekislik tenglamasi

$$13x-52+20y-40+16z-80=0$$
$$13x+20y+16z-172=0$$

ga teng.

Tekislik tenglamasiga doir masala.
Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi masalasi.

Aytaylik, tekislik berilgan $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nuqtadan o‘tsin va uning tenglamasini topish talab etilsin. Izlanayotgan tekislikning umumiy tenglamasini qaraymiz:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

M_1 nuqta tekislikda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

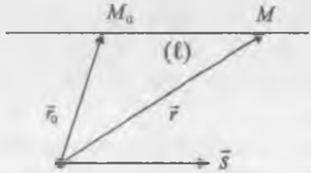
Hosil bo‘lgan bu tenglikni yuqoridagi tenglamadan ayirib, izlangan

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0,$$

ya’ni berilgan M_1 nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar tenglamasini hosil qilamiz. Undagi koeffitsiyentlarga turli qiymatlar berib, M_1 nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar dastasini olamiz.

4.8-§. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Fazodagi (l) to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan har qanday $\bar{s}$ vektorga shu to‘g‘ri chiziqning ***yo‘naltiruvchi vektori*** deyiladi. Aytaylik $M_0(x_0; y_0; z_0)$ to‘g‘ri chiziqning ma’lum bir nuqtasi, $M(x; y; z)$ esa to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M_0 shu to‘g‘ri chiziqning ***boshlang‘ich nuqtasi*** deyiladi. Bu nuqtalarning radius-vektorlari $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}(x, y, z)$ va M_0M $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ vektorni olamiz. Unda, 4.21-chizmaga asosan, $\bar{r}=\bar{r}_0+\overline{M_0M}$ tenglikka ishonch hosil qilish mumkin:



4.21-chizma.

Agar $\bar{s}(m; n; p)$ shu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori bo‘lsa, u holda $\overline{M_0M}$ va $\bar{s}(m; n; p)$ vektorlar kollinear (4.21-chizma), ya’ni $\overline{M_0M}= t\cdot\bar{s}$, bunda t – o‘zgarmas son. Natijada ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\bar{r}=\bar{r}_0+t\cdot\bar{s}. \qquad (4.53)$$

Bu fazodagi to‘g‘ri chiziqning **vektor ko‘rinishidagi tenglamasi** deyiladi. Agar (4.53) vektor tenglamani koordinatalarda ifodalasak, u holda

$$(x; y; z)= (x_0; y_0; z_0) +t\,(m; n; p)\Rightarrow (x; y; z)= (x_0+tm; y_0+tn; z_0+tp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=x_0+tm,\quad y=y_0+tn,\quad z= z_0+tp \qquad (4.54)$$

bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan tenglamalarda t parametr o‘zgarishi bilan (x; y; z) o‘zgaruvchilar to‘g‘ri chiziqning turli nuqtalarini ifodalaydi, ya’ni (4.54) to‘g‘ri chiziqni to‘liq aniqlaydi. Shu sababli (4.54) to‘g‘ri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi. Agarda (4.54) dan t ni topsak, u holda

$$t=\frac{x-x_0}{m},\quad t=\frac{y-y_0}{n},\quad t=\frac{z-z_0}{p}\Rightarrow\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (4.55)$$

(4.55) tenglama to‘g‘ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Unda maxrajdagi m,n,p sonlari yo‘naltiruvchi vektor koordinatalari, suratdagi x_0,y_0,z_0 sonlari esa boshlang‘ich nuqtaning koordinatalari bo'lishini ta'kidlab o'tamiz. Bu tenglamani $\vec{s}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlarning kollinearlik shartidan ham bevosita olishimiz mumkin edi. To'g'ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Bunda $p\neq 0$ deb olamiz. Bu tenglamani ikkiga ajratib,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{4.56}$$

(4.56) tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va bu sistema ham to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Ammo ularning har biri tekislik tenglamasidir. Birinchi tenglama *Oy* o'qiga parallel, ikkinchi tenglama esa *Ox* o'qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Bu tekisliklarning kesishmasida (4.56) kanonik tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziq hosil bo'lmoqda.

Umuman olganda, fazoda to'g'ri chiziqning nuqtalari ikkita tekislik tenglamalaridan tuzilgan quyidagi sistemaning yechimlaridan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Bu tenglamalar sistemasi fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori s tekisliklarning

$$\vec{n}_1=(A_1;\, B_1;\, C_1), \quad \vec{n}_2=(A_2;\, B_2;\, C_2)$$

normallariga perpendikular bo'ladi. Shuning uchun ham to'g'ri chiziqqa parallel $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ vektorni uning yo'naltiruvchi vektori sifatida olish mumkin.

1-misol: Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

$$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{cases}$$

Yechish: Izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotuvchi biror M_0 nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Tenglamalar sistemasida noma'lumlar 3 ta, lekin tenglamalar soni esa ikkita. Shuning uchun bitta noma'lumni erkin qilib olamiz. Masalan, z=1 deb olamiz. Natijada berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

ko‘rinishni oladi. Bu sistemadan $x=2$, $y=0$ ekanligini topamiz. Demak, $M_0(2;0;1)$ nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Yo‘naltiruvchi vektor esa tekisliklarning $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ normallari vektorial ko‘paytmasi kabi topiladi:

$$\vec{n}_1 x \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}$$

Demak, yo‘naltiruvchi vektor $\vec{s}\,(-7;7;11)$.Unda to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-0}{7} = \frac{z-1}{11}$$

2-misol. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini parametrik va kanonik ko‘rinishga keltiring:

$$\begin{cases} 2\text{õ} + \text{ó} - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Yechish: Tenglamalarni har birini x va y ga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} 2\text{õ} + \text{ó} = z - 1 \\ 3x - y = 3 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\text{õ} = 2 - z \\ 5y = 7z - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x - 2/5}{-1/5} \\ z = \dfrac{y + 9/5}{7/5} \end{cases}$$

Natijada to‘g‘ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{x - 2/5}{-1/5} = \frac{y + 9/5}{7/5} = \frac{z}{1}$$

Bu yerdan parametrik tenglamalarni olish qiyin emas. Darhaqiqat, har bir nisbatni t ga tenglashtirsak, u holda

$$x = \frac{-t}{5} + \frac{2}{5}; \quad y = \frac{7}{5}t - \frac{9}{5}; \quad z = t$$

izlangan parametrik tenglama bo‘ladi.

4.9-§. FAZODAGI TO‘G‘RI CHIZIQLARGA DOIR MASALALAR

1.Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Fazoda ikkita to‘g‘ri chiziq o‘zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Ular orasidagi α burchakni topish masalasini ko‘ramiz. Bu masalani ularning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin.

Yo‘naltiruvchi $\bar{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\},\bar{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (4.57)$$

Misol: Kanonik tenglamalari bilan berilgan quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

Yechish: (4.57) formulaga asosan

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Demak, 2 to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak $\alpha=45^0$ ga teng ekan.

2. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari. Agar to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lsa, u holda (4.57)-formulada $\cos\alpha=0$ bo‘ladi. Bundan esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti kelib chiqadi:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, u holda ularning yo‘naltiruvchi vektorlari ham o‘zaro parallel bo‘ladi va bundan ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

3.Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Aytaylik, fazoda $M(a;в;c)$ nuqta va kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

bo‘lgan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

kabi ifodalash mumkin. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartiga asosan

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bundan, $m=m_1$, $n=n_1$ va $p=p_1$ deb olish mumkinligini ko‘ramiz. Demak, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y-в}{n_1}=\frac{z-c}{p_1}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

4. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Aytaylik, fazoning ikkita nuqtasi o‘zining koordinatalari bilan berilgan bo‘lsin. Ular $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ bo‘lsin. Shu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun unda yotuvchi biror nuqtaning koordinatalarini va yo‘naltiruvchi vektorini bilish kifoya. Shunday nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalganini, masalan M_1 ni olamiz.

Yo‘naltiruvchi vektor sifatida esa unda yotuvchi $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ vektorni tanlaymiz. Natijada berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

5. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Aytaylik, to‘g‘ri chiziq va tekislik mos ravishda o‘zlarining kanonik va umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Ma’lumki tekislik va uni kesuvchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni aniqlash uchun shu to‘g‘ri chiziqni tekislikka proeksiyalab, hosil bo‘lgan chiziqli burchak topiladi. Uni α orqali belgilaylik. Shu burchakning sinusini to‘g‘ri chiziqning $\vec{s}(m;\ n;\ p)$ yo‘naltiruvchi vektori va tekislikning $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ normal vektori orqali topamiz:

$$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)=\frac{Am+\hat{A}n+\tilde{N}p}{\sqrt{\grave{A}^2+\hat{A}^2+\tilde{N}^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

6. To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikularlik shartlari. Aytaylik, quyidagi

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+By+Cz+D=0$$

tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro parallel bo‘lsin. U holda to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{s}(m;\ n;\ p)$ va tekislik normali $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ o‘zaro perpendikular bo‘ladi. Bundan to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Bu tenglikni sin $\alpha=0$ shartdan ham keltirib chiqarish mumkin edi.

Endi berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik shartini keltirib chiqaraylik. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va tekislik normali kollinear vektorlar ekanligidan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{a}=\frac{n}{b}=\frac{\delta}{c} \quad \text{yoki} \quad \frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik shartini ifodalaydi.

7. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan chiziqqa parallel bo'lgan tekislik dastasining tenglamasi. Berilgan $M(a;\, в;\, c)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bo'lsin. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan $Am+Bn+Cp=0$ munosabatni olamiz. Nisbatlarning tengligidan esa $m=x-a$, $n=y-в$, $p=z-c$ deb olishimiz mumkin. U holda izlanayotgan tekisliklar dastasining quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$A(x-a)+B(y-в)+C(z-c)=0.$$

8. Ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti. Ikkita to'g'ri chiziq o'zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Ularning yo'naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\vec{s}_1(m_1;\, n_1;\, p_1)$ va $\vec{s}_2(m_2; n_2; p_2)$ kabi belgilaymiz. To'g'ri chiziqlarning $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ va $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ boshlang'ich nuqtalarining radius-vektorlarini $\vec{r}_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ va $\vec{r}_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ kabi belgilaymiz. Unda bu nuqtalarning biridan ikkinchisiga yo'nalgan $\overline{M_1M_2}$ vektor $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ bo'ladi. Vektorlarni ayirish qoidasiga asosan $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\{x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\}$ tenglikni yoza olamiz. Geometrik mulohazalarga asosan berilgan ikkita to'g'ri chiziqning bitta tekislikda yotishi uchun $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ va $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ vektorlarning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir. Bundan aralash ko'paytma $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,\vec{s}_1\,\vec{s}_2=0$ yoki

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

bo'ladi. Bu ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

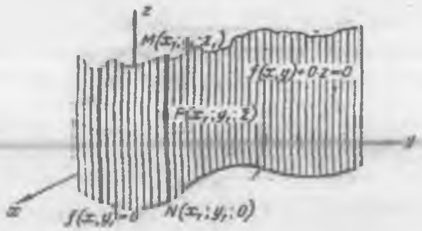
4.10-§. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Ma'lumki, fazodagi sirt uchta o'zgaruvchi x,y,z ni bog'laydigan tenglama bilan aniqlanadi.

x,y va z ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan sirt ikkinchi tartibli sirt deb ataladi. Bunday sirtning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Eyz + 2Fxy + ax + by + cz + d = 0, \qquad (4.58)$$

bunda A, B, C, D, E, F koeffitsiyentlaridan aqalli bittasi noldan farqli. $A, B, C, D, E, F, a, b, c, d$ o'zgarmas koeffitsiyentlarning qiymatlariga bog'liq ravishda bu tenglama turli sitrlarini aniqlashi mumkin.



4.22-chizma.

Masalan: $A = B = C = 1,\ D = E = F = 0,\ a = b = c = 0,\ d = -R^2$ bo'lsa, bu tenglama $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ko'rinishini oladi, bu esa radiusi R ga teng va markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera tenglamasidir. Agar markazi $O_1(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bo'lgan sferani qaraydigan bo'lsak, uning tenglamasi bunday bo'ladi:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

buni

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

ko'rinishga keltiramiz va sitrning umumiy tenglamasi (4.58) bilan solishtiramiz. Ravshanki,

$$A = 1,\quad B = 1,\quad C = 1,\quad D = E = F = 0,\quad a = -2x_0,\quad b = -2y_0,$$
$$c = -2z_0,\quad d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2.$$

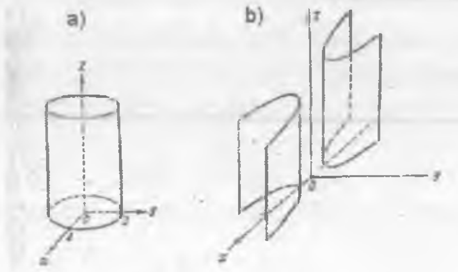
Shunday qilib, sfera ikkinchi tartibli sirtdir. Ikkinchi tartibli sirtlarni xususiy hollarini ko'rib chiqamiz.

1. Yasovchilari koordinata o'qlaridan biriga parallel bo'lgan sirtlar. Biror berilgan chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqning bu chiziq bo'ylab va berilgan yo'nalishga parallel harakatidan hosil bo'lgan sirt silindrik sirt deb ataladi. Harakatlanuvchi to'g'ri chiziq yasovchi , berilgan chiziq esa yo'naltiruvchi deb ataladi .

Yasovchi Oz o'qqa parallel yo'naltiruvchi chiziq esa Oxy tekislikda yotadigan va $F(x,y)=0$ tenglama bilan aniqlanadigan holni qaraymiz (4.22-chizma). Sirtning yasovchisida ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqta olamiz, uning birinchi ikkita koordinatasi $N(x,y;0)$ nuqta koordinatalari bilan bir xil bo'ladi. Shu sababli silindrik sirtning $M(x,y,z)$ nuqtasining koordinatalari yo'naltiruvchi chiziq tenglamasi $F(x,y)=0$ ni qanoatlantiradi.

Demak, bu tenglama yasovchilari Oz o'qqa parallel silindrik sirtning tenglamasidir. Shunday qilib, z koordinatani o'z ichiga olmagan va fazoda qaralayotgan $F(x,y)=0$ tenglama yasovchilari Oz o'qqa parallel va yo'naltiruvchisi Oxy tekislikda yotgan silindrik sirtni aniqlaydi. Shunga o'xshash x koordinatani o'z ichiga olmagan $F(y,z)=0$ tenglama va y koordinatani o'z ichiga olmagan $F(x,z)=0$ tenglama yasovchilari mos ravishda Ox va Oy o'qlariga parallel bo'lgan silindrik sirtlarini aniqlaydi.

1-misol. $y^2+z^2=R^2$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt silindrik sirt bo'lib, u doiraviy silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Ox o'qqa parallel, Oyz tekislikdagi yo'naltiruvchi esa radiusi R va markazi koordinatalar boshida bo'lgan $y^2+z^2=R^2$ aylana tenglamasidir.



4.23-chizma.

2-misol. Ushbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt elliptik silindr deb ataladi.

Uning yasovchilari Oz o'qqa parallel, Oxy tekislikda yo'naltiruvchisi esa yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsdir (4.23 a-chizma).

3-misol. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt giperbolik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o'qqa parallel, Oxy tekislikdagi yo'naltiruvchisi esa haqiqiy o'qi a va mavhum o'qi b bo'lgan giperboladir (4.23,b-chizma).

4-misol. Ushbu

$$x^2=2py$$

tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt parabolik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o'qqa parallel, Oxy tekisligidagi yo'naltiruvchisi esa paraboladir (4.24-chizma).

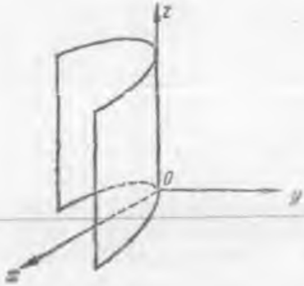
2. Aylanish sirtlari. Oyz tekislikdagi $F(y,z)=0$ **tenglama bilan** berilgan L chiziqni qaraylik. Bu chiziq Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt tenglamasini topamiz. Bu sirtda ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani olamiz va u orqali aylanish o'qiga perpendikular tekislik o'tkazamiz. Kesimda markazi aylanish o'qidagi $N(0;y;0)$ nuqtada bo'lgan aylana hosil bo'ladi. Bu aylana $\sqrt{x^2+z^2}$ radiusiga ega (4.23,b-chizma). Lekin ikkinchi tomondan, bu radius berilgan L applikatasining absolyut qiymatiga teng, ordinatasi chiziqdagi nuqtalar x va y ga teng. Demak,

$$Y=y,\quad Z=\pm\sqrt{x^2+z^2}$$

izlanayotgan aylanish sirtning ushbu tenglamasini hosil qilamiz:

$$F\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$$

Shunday qilib, L chiziqning Oy o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirt tenglamasini olish uchun bu chiziq tenglamasida z ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtirish kerak. Shunga o'xshash qoida chiziqlarning boshqa koordinata o'qlari atrofida aylanishdan hosil bo'lgan sirtlar uchun ham o'rinlidir.



4.24-chizma.

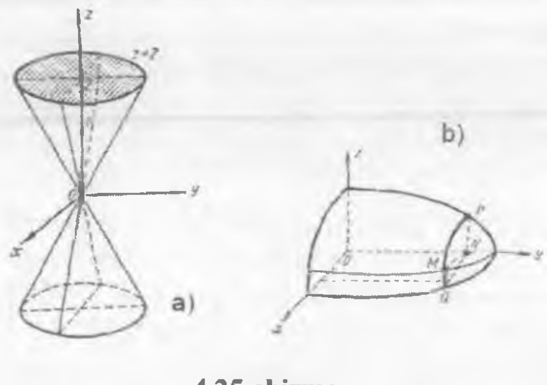
5-misol. Oxz tekislikda joylashgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ ellipsning Ox o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini z ni $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ ga almashtirib, x koordinatani esa o‘zgarishsiz qoldirib, hosil qilamiz, ya’ni

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

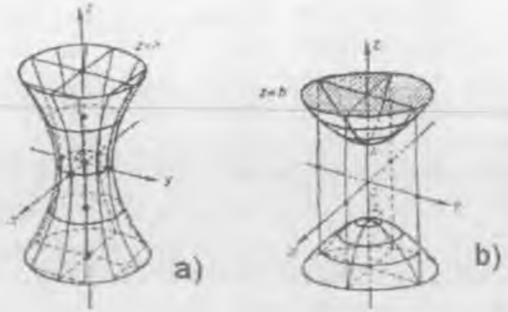
Agar ellips Oz o‘qi atrofida aylanayotgan bo‘lsa, u holda uning tenglamasida x koordinatani $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtirish, z koordinatani esa o‘zicha qoldirish lozim. Natijada

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bo‘ladi. Hosil bo‘lgan sirtlar aylanish ellipsoidlari deb ataladi. $a=c$ bo‘lganda sferaga ega bo‘lamiz.



4.25-chizma.



4.26-chizma.

6-misol. *Oyz* tekislikda joylashgan

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

giperbolaning *Oz* o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirt tenglamasi

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

bo‘ladi. Bu bir pallali aylanish giperboloidi deb ataladigan sirtdir (4.26.a-chizma).

Agar shu giperbolaning o‘zini *Oy* o‘qi atrofida aylantirilsa, hosil bo‘lgan sirt $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$ tenglamaga ega bo‘ladi. Bu ikki pallali giperboloid deb ataladigan sirtdir (4.26,b-chizma).

7-misol. *Oyz* tekislikda joylashgan $y^2=2pz$ parabolaning *Oz* o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasi

$$x^2+y^2=2pz$$

bo‘ladi. Bu aylanish paraboloidi deb ataladigan sirtdir.

3. Konussimon sirtlar. Konussimon sirt deb konusning uchi deb ataladigan berilgan nuqtadan o‘tuvchi va konusning yo‘naltiruvchisi deb ataladigan berilgan chiziqni kesuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirtiga aytiladi. Bunda berilgan nuqta berilgan chiziqda yotmaydi. Konussimon sirt tashkil etadigan to‘g‘ri chiziqlarning har biri konusning yasovchisi deb ataladi.

Uchi koordinatalar boshida bo‘lgan ikkinchi tartibli konussimon sirt har doim x,y va z koordinatlariga nisbatan ikkinchi darajali bir jinsli tenglama bilan berilishini isbotsiz aytib o‘tamiz. Masalan, $x^2+y^2-z^2=0$ tenglama uchi koordinatalar boshida bo‘lgan doraviy konusni aniqlaydi (4.25,a-chizma).

4. Asosiy ikkinchi tartibli sirtlar tenglamalarining kanonik shakli. Sirtlarni kesimlar usuli bilan tekshirish. Ikkinchi tartibli sirtlar tenglamalarining kanonik shakllarini qaraymiz. Bu sirtlarining xususiyati shundaki, koordinata o'qlari ular uchun simmetriya o'qlari bo'ladi, ularning uchi simmetriya markazi yoki koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi. Sirtning tenglamasi bo'yicha uning ko'rinishi haqida kesimlar usuli yordamida tasavvur hosil qilish mumkin bo'lib, u quyidagidan iborat. Berilgan sirt koordinata tekisliklari yoki koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesiladi va olingan kesimlarini turi bo'yicha sirt turi tekshiriladi.

Ellipsoid. Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4.59}$$

ko'rinishida bo'lgan ikkinchi tartibli sirt **ellipsoid** deb ataladi, bu yerda a,b,c - berilgan o'zgarmas musbat sonlar.

Ellipsoidning shaklini aniqlaymiz. (4.59) tenglama koordinatalarining faqat kvadratlarini o'z ichiga oladi. Shu sababli ellipsoidga $M(x;y;z)$ nuqta tegishli bo'lsa, u holda unga ishoralari istalgancha kombinatsiyalangan $M(\pm x;\pm y;\pm z)$ nuqtalar ham kiradi. Demak, ellipsoid koordinatalar boshi va koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Bu ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kesimlarini qaraymiz. Ellipsoid *Oxy* koordinata tekisligi ($z=0$ tekislik) bilan kesilganda yarim o'qlari a va b bo'lgan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellips hosil bo'ladi. Ellipsoid *Oyz* koordinata tekisligi ($x=0$ tekislik) bilan kesilganda yarim o'qlari b va c bo'lgan

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellips hosil bo'ladi. Ellipsoid *Oxz* koordinata tekisligi ($y=0$ tekislik) bilan kesilganda yarim o'qlari a va c bo'lgan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Ellipsoidning *Oxy* koordinata tekisligiga parallel $z=h$ tekislik bilan kesimini ko'ramiz. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2} \tag{4.60}$$

tenglamani olamiz. Agar $h=\pm c$ bo'lsa, u holda (4.60) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

ko'rinishga keladi, $(0;0;\pm c)$ nuqtalariga aylanadi.

Agar $|h|>c$ bo'lsa, u holda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ bo'ladi va (4.60) chiziq mavhum ellipsni aniqlaydi, ya'ni ellipsoidning $z=h$ tekislik bilan kesishish nuqtalari yo'q.

Agar $|h|<c$ bo'lsa, u holda (4.60) ni bunday ifodalash mumkin.

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Bu tenglama $z=h$ tekislikda yarim o'qlari

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, \qquad b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

bo'lgan ellipsni aniqlaydi. $|h|$ kamayganda a_1 va b_1 ning qiymatlari orta boradi va eng katta qiymatlariga $h=0$ da erishadi. U holda ellipsoidning $Oxy(z=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari $a_1=a,\ b_1=b$ bo'lgan eng katta ellips hosil bo'ladi.

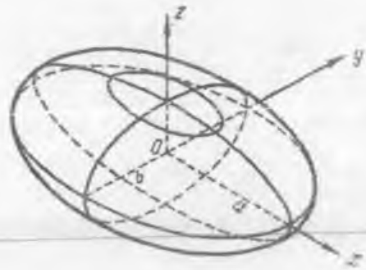
Shunday qilib, qaralgan kesimlar ellipsoidni yopiq oval sirt sifatida ifodalash imkonini beradi. a,b,c kattaliklar ellipsoidning yarim o'qlari deb ataladi, agar a,b,c sonlar orasida tenglari bo'lmasa, ellipsoid uch o'qli ellipsoid deb ataladi. Agar a,b,c sonlar orasida qandaydir ikkitasi o'zaro teng bo'lsa, u holda aylanish ellipsoidiga ega bo'lamiz (4.27-chizma).

Bir pallali giperboloid. Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4.61)$$

bo'lgan sirt bir pallali giperboloid deb ataladi, bu yerdan a,b,c musbat sonlar.

Bir pallali giperboloidning shaklini aniqlaymiz. (4.61) tenglama koordinatalarining faqat kvadratlarini o'z ichiga oladi. Shu sababli bu sirt koordinatalar boshi va koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik. Giperboloidning koordinata tekisliklari bilan kesimini qaraymiz.



4.27-chizma.

Giperboloidning $Oxy(z=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari a va b bo'lgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips hosil bo'ladi. Giperboloidning $Oxz(y=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari a (haqiqiy o'q) va c (mavhum o'q) bo'lgan

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

giperbola hosil bo'ladi. Giperboloidning $Oyz(x=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari b va c bo'lgan

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

giperbola hosil bo'ladi. Berilgan giperboloidning Oxy koordinata tekisligiga parallel $z=h$ tekislik bilan kesimini qaraymiz. Ushbu tenglamani olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Bu tenglama $z=h$ tekislikda yarim o'qlari

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\qquad b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

bo'lgan ellipsni aniqlaydi. Bu yarim o'qlari eng kichik qiymatlariga $h=0$ da erishadi, ya'ni berilgan giperboloidning $Oxy(z=0)$ koordinatlar bilan kesimida $a_1=a$ va $b_1=b$ yarim o'qli eng kichik ellips hosil bo'ladi. $h\to\infty$ da a_1 va b_1 ning qiymatlari cheksiz ortadi. Shunday qilib, bu ko'rib chiqilgan kesimlar bir pallali giperboloidni Oxy tekisligidan (ikkala tomonga) cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan cheksiz quvur sifatida tasvirlash imkonini beradi. a,b,c kattaliklar bir pallali giperboloidning yarim o'qlari deb ataladi. Agar a=b bo'lsa, u holda bir pallali aylanish giperboloidi hosil bo'ladi (4.26, a-chizma).

Ikki pallali giperboloid. Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (4.62)$$

bo'lgan ikkinchi tartibli sirt ikki pallali giperboloid deb ataladi, bunda a,b,c - berilgan o'zgarmas musbat sonlar. (4.62) tenglama koordinatalarining faqat kvadratlarini o'z ichiga oladi, shu sababli sirt koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik. Giperboloidning $Oxz(y=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari a (mavhum o'q) va c (haqiqiy o'q) bo'lgan

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

giperbola hosil bo'ladi. Giperboloidning $Oyz(x=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida yarim o'qlari b (mavhum o'q) va c (haqiqiy o'q) bo'lgan

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

giperbola hosil bo'ladi. Giperboloidning Oxy koordinata tekisligiga parallel $z=h$ tekislik bilan kesimini ko'ramiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1. \qquad (4.63)$$

(4.63) tenglamadan kelib chiqadiki, $|h|>c$ bo'lganda tekislik giperboloidni

$$a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \qquad b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

yarim o'qli ellips bo'yicha kesadi va $h\to\infty$ da a_1,b_1 lar ortib boradi. $h=\pm c$ bo'lganda (4.63) tenglamani $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalar qanoatlantiradi (ya'ni $z=\pm c$ tekisliklar bu sirtga urinadi). $h<c$ bo'lganda (4.63) tenglama mavhum ellipsni aniqlaydi, ya'ni giperboloid $z=h$ tekislik bilan kesishmaydi.

Shunday qilib, ko'rib chiqilgan kesimlar ikki pallali giperboloidni ikkita alohida palladan iborat sirt sifati tasvirlash imkonini beradi. a,b,c kattaliklar ikki pallali giperboloidning yarim o'qlari deb ataladi. Agar $a=b$ bo'lsa, u holda ikki pallali aylanish giperboloidi hosil bo'ladi (4.26,b-chizma).

Elliptik paraboloid. Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (4.64)$$

bo'lgan ikkinchi tartibli sirt elliptik paraboloid deb ataladi, bu yerda p va q bir xil ishorali berilgan sonlar (masalan, $q>0, p>0$)).

Elliptik paraboloidning shaklini aniqlaymiz. (4.64) tenglama x va y koordinatalarining kvadratlarini o'z ichiga oladi, shu sababli $M(x;y;z)$ nuqta paraboloidga tegishli bo'lsa, unga ishoralari istalgancha almashtirilgan $M(\pm x;\pm y;z)$ nuqtalar ham tegishli bo'ladi. Demak, sirt Oxz, Oyz koordinata tekisliklariga va Oz koordinata o'qiga nisbatan simmetrik. Paraboloidning koordinata tekisliklari bilan kesimini qaraymiz. Paraboloidning $Oxz(y=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida uchi koordinata boshida va simmetriya o'qi Oz bo'lgan parabola hosil bo'ladi.

$$x^2=2pz \qquad (4.65)$$

Paraboloidning $Oyz(x=0)$ koordinata tekisligi bilan kesimida uchi koordinatalar boshida va simmetriya o'qi Oz bo'lgan

$$y^2=2qz$$

parabola hosil bo'ladi.

Paraboloidning Oxy koordinata tekisligiga parallel $z=h$ tekislik bilan kesimini qaraymiz

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1\,. \qquad (4.66)$$

(4.66) tenglamasidan ko'rinadiki, $h>0$ bo'lganda $z=h$ tekislik elliptik paraboloidni yarim o'qlari

$$a_1=\sqrt{2ph},\ \ b_1=\sqrt{2qh}$$

bo'lgan ellips bo'yicha kesadi. $h\to\infty$ da a_1 va b_1 nuqtaning kattaliklari ortadi. $h=0$ da ellips nuqtaga aylanadi. h<0 bo'lganda (4.66) tenglama mavhum ellipsni aniqlaydi, ya'ni $z=h$ tekislik paraboloid bilan kesishmaydi.

Shunday qilib, ko'rib chiqilgan bu kesimlar elliptik paraboloidni cheksiz qavariq idish sifatida tasavvur qilishga imkon beradi. $O(0;0;0)$ nuqta elliptik paraboloidning uchi, p va q sonlar uning parametrlari deb ataladi. $p=q$ bo'lganda aylanma paraboloid hosil bo'ladi (4.28,a-chizma).

Giperbolik paraboloid. Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (4.67)$$

bo'lgan ikkinchi tartibli sirt giperbolik paraboloid deb ataladi, bu yerda p va q bir xil ishorali berilgan sonlar (masalan, $p>0,\ q>0$).

Giperbolik paraboloid shaklini aniqlaymiz. (4.67) tenglama x va y koordinatalarining kvadratlarini o'z ichiga oladi, shu sababli, bu sirt OXZ,OYZ koordinata tekisligiga va Oz o'qiga simmetrik.

Giperbolik paraboloidning koordinata tekisliklari bilan kesimlarini qaraymiz. Giperbolik paraboloidning Oxz koordinata tekisligi bilan kesimida uchi koordinatalar boshida, simmetriya Oz o'qi bo'lgan

$$x^2 = 2pz$$

parabola hosil bo'ladi. Bu parabola yuqoriga yo'nalgan.

Sirtni *Oxz* koordinata tekisligiga y=h parallel tekisliklar bilan kesimida ham yuqoriga yo'nalgan

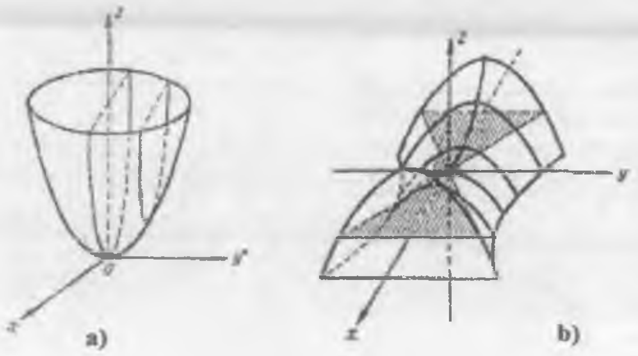
$$x^2=2p(z+\frac{h^2}{2q})$$

parabola hosil bo'ladi.

Berilgan giperbolik paraboloidning *Oyz*(*x*=0) koordinata tekisligi bilan kesimida pastga yo'nalgan, *Oz* o'qga nisbatan simmetrik va uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola hosil bo'ladi. Giperbolik paraboloidning *Oyz* koordinata tekisligiga parallel *x*=*h* tekislik bilan kesimini qaraymiz. Ushbu tenglamani olamiz:

$$y^2=-2q\left(z-\frac{h^2}{2p}\right)$$

Bundan kelib chiqadiki, istalgan $x=h$ kesimdan pastga yo'nalgan, giperbolik paraboloidda yotadigan parabola hosil bo'ladi.



4.28-chizma.

Nihoyat giperbolik paraboloidning Oxy koordinata tekisligiga parallel $z=h$ tekisliklar bilan kesimlarini qaraymiz. Bu kesimda

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$$

chiziq hosil bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, h>0 bo'lganda kesimda Oxz tekislikni kesib o'tadigan giperbolalar, h<0 bo'lganda Oyz kesimda tekislikni kesib o'tadigan giperbolalar hosil bo'ladi, $h=0$ bo'lganda giperbola kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftiga aylanadi

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \text{va} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

Shunday qilib, ko'rib chiqilgan kesimlar giperbolik paraboloidni egarsimon sirt sifatida ifodalashga imkon beradi. $O(0;0;0)$ nuqta giperbolik paraboloidning uchi, p va q sonlar esa uning parametrlari deb ataladi (4.28,b-chizma).

XULOSA

IV bobni analitik geometriya deb atadik. Analitik geometriya degani bu – geometrik figuralarni algebraik tenglamalar orqali ifodalash degan ma'noni bildiradi.

Analitik geometriyani biz tekislikdagi analitik geometriya va fazodagi analitik geometriyaga ajratib o'rganamiz.

Tekislikdagi analitik geometriya qismida tekislikda to'g'ri chiziqlar, ularning tenglamalari, ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi masalalari, shuningdek, ikkinchi tartibli to'g'ri chiziqlarning tenglamalari, shakli, asosiy parametrlari qaralgan. Tekislikda analitik geometriya qismini o'rgangan kitobxon chiziqning tenglamasidan foydalanib uning to'g'ri chiziq, aylana yoki ellips, parabola yoki giperbola ekanligini, shuningdek, uning asosiy parametrlaridan foydalanib chiziq haqida yetarli tasavvurga ega bo'ladi.

Fazodagi analitik geometriya bo'limida tekislik tenglamalari, fazodagi to'g'ri chiziqning tenglamasi, tekisliklarning va fazodagi to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishi masalalari qaralgan. Shuningdek, ikkinchi tartibli sirtlar ham ushbu bo'limdan o'rin olgan.

4-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Ta'rifni to'ldiring.
Geometrik obyekt tenglamasi deb uning … aytiladi.
A) Chizmasiga; B) Proeksiyalariga; C) Nuqtalariga;
D) Nuqtalar koordinatalariga;
E) Nuqtalar koordinatalari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglikka.

2. Analitik geometriyada geometrik obyekt nima asosida o'rganiladi?
A) Tenglama; B) Chizma; C) Proeksiya; D) Ta'rif;
E) To'g'ri javob yo'q.

3. Sonlar o'qida A(x) va B(y) nuqtalar orasidagi masofani topish formulasini ko'rsating.
A) $|x-y|$; B) $\sqrt{x^2+y^2}$; C) $\sqrt{|x^2-y^2|}$; D) $(x-y)^2$; E) $(x+y)^2$;

4. Agar A(2), B(-4) bo'lsa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping.
A) –7; B) 2; C) 6; D) 4; E) 1 .

5. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasini ko'rsating.
A) $\sqrt{|x_2-x_1|+|y_2-y_1|}$; B) $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$;
C) $\sqrt{|x_2-x_1|}+\sqrt{|y_2-y_1|}$;
D) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$; E) $\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$.

6. M(2, 2) va N(–2, 2) nuqtalar orasidagi masofani hisoblang.
A) $\sqrt{15}$; B) $\sqrt{26}$; C) $\sqrt{23}$; D) $\sqrt{91}$; E) 4.

7. Agar A(-4;2) B(0;-1) bo'lsa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping.
A) 5; B) $\sqrt{15}$; C) 4 ; D) 1; E) -2 .

8. Agar A(1;-1) B(-1;0) C(-1;-2) bo'lsa, ABC uchburchakning yuzini toping.
A) 2; B) 4; C) 2; D) 1; E) 5 .

9. Markazi M(a;b) nuqtada va radiusi R bo'lgan aylana tenglamasini ko'rsating.
A) $(x+a)^2+(y+b)^2=R^2$; B) $(x+b)^2+(y+a)^2=R^2$; C) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
D) $(x-b)^2+(y-a)^2=R^2$; E) $(x-a)+(y-b)=R$.

10. Agar aylana markazi (2;4) nuqtada, radiusi 5 ga teng bo'lsa A(-1;1), B(2;9) va C(4;1) nuqtalardan qaysi biri aylanada yotadi?

A) A,B,C; B) B,C ; C) A, C ; D) A ; E) B .

11. Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalari qaysi formula bilan topiladi?

A) $x_0 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 - \lambda z_2}{2}$;

B) $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2}$;

C) $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$;

D) $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{1+\lambda}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{1+\lambda}$, $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{1+\lambda}$;

E) $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

12. Uchlari A(2, 1) va B(–2, 9) nuqtalarda joylashgan kesmani 1/2 nisbatda bo'luvchi $M(x_0, y_0)$ nuqta koordinatalarini toping.

A) M(1, 7/2); B) M(1, 7/2); C) M(2/4, 4/2); D) M(2/4,2); E)M(2/3, 11/3).

13. Uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda joylashgan kesmaning

$C(x_0, y_0, z_0)$ o'rta nuqtasi koordinatalari qaysi formula bilan topiladi?

A) $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{4}$, $y_0 = \frac{y_1 - y_2}{4}$, $z_0 = \frac{z_1 - z_2}{4}$;

B) $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$;

C) $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{4}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{4}$, $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{4}$;

D) $x_0 = \frac{x_1 - x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 - y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 - z_2}{2}$;

E) $x_0 = \frac{x_1 x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 z_2}{2}$.

14. Agar A(2;6), B(1;-2) bo'lsa, AB kesma o'rtasining koordinatalarini toping.

A) (1,5;2); B) (2;2); C) (1;-2); D) (-1;-4); E) $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

15. Nuqtaning (x,y) Dekart koordinatalaridan (ρ,φ) qutb koordinatalariga o'tish formulasini ko'rsating.

A) $\rho = \sqrt{x+y}, \varphi = arctg\frac{y}{x}$; B) $\rho = \sqrt{x-y}, \varphi = arctg\frac{x}{y}$;

C) $\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x}$; D) $\rho = \sqrt{x^2-y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x}$;

E) To'g'ri javob keltirilmagan.

16. Dekart koordinatalar sistemasida berilgan M(1,0) nuqtaning qutb koordinatalardagi M(ρ,φ) ifodasini toping.

A. M(1, 0); B. M(1, 20^0); C. M(4, 45^0); D. M(2, π/2); E. M(1, π/2).

17. Nuqtaning (ρ,φ) qutb koordinatalaridan (x,y) Dekart koordinatalariga o'tish formulasini ko'rsating.

A) $x = \rho \cdot tg\varphi, y = \rho \cdot ctg\varphi$; B) $x = \rho \cdot \sin\varphi, y = \rho \cdot \cos\varphi$;

C) $x = \rho \cdot \cos\varphi, y = \rho \cdot \sin\varphi$; D) $x = \rho \cdot \varphi, y = \rho / \varphi$;

E) $x = \rho, y = \varphi$.

18. Qutb koordinatalari bilan berilgan M(1/2,π/6) nuqtaning Dekart sistemasidagi koordinatalarini toping.

A) M(1/4, $\sqrt{3}/4$); B) M(1/4,4/$\sqrt{3}$); C) M($\sqrt{3}/4$, 1/4) ;

D) M(1, 1); E) M(π, 1).

19. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan A($\sqrt{3}/2$), π/3) nuqtaning Dekart koordinatalarini toping.

A) A(1, 2); B) A(–2, 1); C) A(–2, –1); D) A(1, –2); E)A($\sqrt{3}/4, 3/4$).

20. M(0, 2) nuqtaning qutb koordinatalarini toping.

A) M(0, 1); B) M(1, 20^0); C) M(4, 45^0); D) M(2, π/2); E) M(2, π/2).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Analitik geometriyada chiziq deb nimani tushunasiz? Chiziq tenglamasi deganda nimani tushunasiz?

2. Tenglamalari berilgan ikki chiziqning kesishish nuqtasini qanday topish mumkin?

3. Tenglamani har doim ham tekislikda biror chiziqni aniqlaydimi? Misol keltiring.

4. Fazoda chiziq tenglamasi qanday aniqlanadi?

5. Tenglama har doim ham biror sirtni aniqlaydimi? Misol keltiring.

6. Nuqta berilgan chiziqda va sirtda yotishiga qanday ishonch hosil qilish mumkin?

7 Dekart koordinatalarida tekislik tenglamasi boshqa sirtlarning tenglamalaridan qanday xarakterli belgi bilan farq qiladi?

8. Fazodagi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?

9. Agar fazodagi to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, uning yo‘naltiruvchi vektorini qanday aniqlash mumkin?

10. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning normal vektori nima?

11. Koordinata o‘qlarining koordinata tekisliklarining kesishmasi sifatida qarab, ularning tenglamalarini yozing.

12. To‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasini keltirib chiqaring.

13. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.

14. Tekislikda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

15. Qanday chiziq ellips deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

16. Qanday nuqta ellips markazi deb ataladi?

17. Qanday nuqtalar ellipsning uchlari deb ataladi?

18. Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday tenglikni qanoatlantiradi?

19. Ellipsning direktrissasi nima? Ellipsning fokuslari qayerda yotadi? Ular qanday xossa bilan bog‘langan?

20. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

21. Qanday nuqta giperbolaning markazi deb ataladi?

22. Qanday nuqtalar giperbolaning uchlari deb ataladi?

23. Giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday tenglikni qanoatlantiradi?

24. Giperbola direktrissasi nima? Giperbolaning fokuslari qayerda yotadi?

25. Giperbolaning asimptotalari nima?

26. Qanday chiziq parabola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.

27. Parabolaning fokusi va direktrissasi nima?

28. Uch noma’lumli ikkinchi darajali umumiy tenglama qaysi shartlarida markazi koordinatalar boshida bo‘lgan sferani aniqlaydi?

29. Analitik geometriyada sirt tenglamasi nima?

30. Silindrik sirtning ta’rifini aytib bering. Yo‘naltiruvchisi Oxy tekisligida yotadigan va yasovchisi Oz o‘qqa parallel silindrik sirtning tenglamasini keltirib chiqaring.

31. Quyidagilarni yozing: a) yasovchisi Ox o‘qiga parallel elliptik silindr tenglamasini, b) yasovchisi Oy o‘qiga parallel giperbolik silindr tenglamasini,

d) *Oxy* tekislik simmetriya tekisligi va yasovchilari *Oy* o‘qiga parallel bo‘lgan parabolik silindr tenglamasini.

32. Uch o‘qli ellipsoidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.

33. Elliptik paraboloidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.

34. Giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.

35. Bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.

36. Ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamasini yozing va uning shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.

37. Yassi chiziqning *Ox* o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘ladigan sirt tenglamasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

38. Parabolaning *Oy* simmetriya o‘qi atrofida aylanishidan qanday sirt hosil bo‘ladi?

39. Giperbolaning *Ox* o‘qi atrofida, *Oy* o‘qi atrofida aylanishidan qanday sirt hosil bo‘ladi?

40. Qanday shartda elliptik silindr o‘qi *Oz* bo‘lgan aylanish sirti bo‘ladi?

V bob. MATEMATIK TAHLIL ELEMENTLARI

To'plamlarning elementlari turli xil narsalar: harflar, atamalar, sonlar, funksiyalar, nuqtalar va h.k. bo'lishi mumkin. Bu yerda eng avval to'plamlar nazariyasining juda ham kengligi va uning bilimlarning ko'pgina sohalariga (matematikaga, mexanikaga, fizikaga) tatbiq qilinishi ravshandir.

Bobning o'quv maqsadi

XIX asrdan boshlab to'plamlar nazariyasi matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida olindi.

Bu nazariya elementlarini yoritish bilan u qanchalik oliy matematikaning matematik tahlil bo'limiga muhim ekanligini talabalarga yetkazish mazkur bob oldiga maqsad qilib qo'yilgan.

Fransuz matematigi X.Kramp birinchi bo'lib, fanga $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots$ ko'paytma ko'rinishdagi murakkab ifodani qisqacha (R !) shaklda yozishni va «factorial» tushunchasini kiritdi. Ingliz matematik – logik B.Rassel o'zi-o'ziga tegishli bo'lmagan to'plamlar haqida fikr yuritib, ularni normal yoki oddiy to'plamlar deb atagan. Masalan, sonlar to'plami, natural son emas. Demak, natural sonlar to'plami oddiy to'plamdir. F.Xausdorf nemis matematigi to'plamlar nazariyasi sohasida ijod qilgan. Natijada, u «To'plamlar nazariyasi asosi» (1914) kitobida topologik fazoda birinchi bo'lib, to'la ta'riflab berdi. To'plam nazariyasiga tayanib tuzilgan bu kitob, matematika taraqqiyotiga ijobiy ta'sir ko'rsatdi.

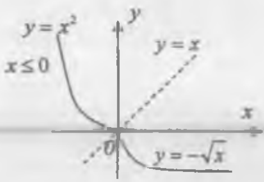
To'plam o'lchovli, to'plam va gruppalar nazariyasi, matematik tahlilga doir ko'pgina teoremalar Xausdorf nomi bilan yuritiladi. XX asrning oxirlarida taniqli rus matematigi N.Kolmogorov to'plam nazariyasi tushunchasini boyitdi va aksiomatik qurilishni to'plam asosida berdi. Bunda to'plam va son tushunchalari algebrada boshlang'ich tushuncha; geometriyada esa – nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik; fazoda esa – sirt tushunchalar boshlang'ich tushuncha bo'lib hisoblanadi.

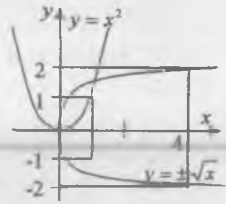
N.Kolmogorov aksimotikasining dunyo matematiklari qiziqtirgan tomoni shundaki, bu yerda to'plam (figura) o'zi-o'ziga teng, ya'ni uzunligi teng bo'lgan ikkita kesma teng emas, balki kongurientdir. Bu yerda funksiya bir qiymatli akslantirish bo'lib, har qanday funksiyaga teskari funksiya mavjud emas.

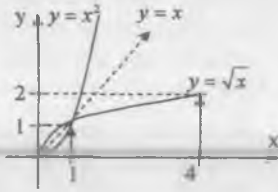
Masalan, $y=x^2$ ga $y=\pm\sqrt{x}$ moslik teskari funksiya emas.

Nemis matematigi G.Kantor (1845–1918) tomonidan to'plam nazariyasining kirib kelishi bilan A.N.Kolmogorov (1902–1987) fanda katta yo'nalishni boshladi va matematika fanini qayta qurdi. 1969 – 1970-yillarda Kolmogorov aksiomatikasi dunyoga keldi. $y=x^2$ $x\geq 0$ bo'lsa, funksiya bo'ladi va unga teskari funksiya (bir qiymatli moslik) mavjud.

Xuddi shunday $y=x^2$ $x\leq 0$ bo'lganda $y=-\sqrt{x}$ teskari funksiya mavjud. Umumiy holda $y=x^2$ teskarilanuvchi funksiya emas.







I va II holda birgalikda qarasak $y=\pm\sqrt{x}$ funksiya emas. Ikki tomonlama akslantirish funksiya emas. Funksiya – bir tomonlama akslantirishdir. Demak, $y=x^2$ funksiya $(-\infty 0]\cup[0;\infty)$ oraliqda mavjud bo'lib, $(-\infty;0]$ kamayadi. $[0;\infty)$o'sadi. Kritik nuqta kamayish oralig'iga ham, o'sish oralig'iga ham kiradi.

Agar y nuqta kirmasa undan keyingi (yoki oldingi) nuqta kirishi kerak, y nuqtaning mavjudligi natural sondan keyin keladigan natural son mavjud (Peano aksiomalari) yoki 1 dan boshqa istalgan natural sondan oldin keladigan natural son mavjud. Bu aksiomani nuqtalar to'plami uchun tatbiq etib bo'lmaydi. Shuning uchun kritik nuqtani A.N.Kolmogorov ham kamayish oralig'iga, ham o'sih oralig'iga kiritishga majbur bo'ldi.

5.1-§. TO'PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

To'plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarning asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884-yillarda nemis matematigi **Georg Kantor** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u juda umumiy xarakterga ega va shu sababli unga aniq ta'rif berib bo'lmaydi. Masalan, institutimizdagi I kurs talabalari to'plami, [0;1] kesmadagi nuqtalar to'plami, natural sonlar to'plami, biror zavoddagi stanoklar to'plami va hokazo. Shunday qilib, to'plam deganda ko'pincha bir umumiy xususiyatga ega bo'lgan turli ko'rinishdagi obyektlar majmuasini tushunamiz. Matematikada to'plamlar $A,B,C,D,\ldots$ kabi bosh lotin harflari bilan belgilanadi. To'plamga kiruvchi obyektlar uning elementlari deyiladi va mos ravishda a,в,s,d,... kabi belgilanadi. «a element A to'plamga tegishli» degan ibora simvolik ko'rinishda $\mathbf{a\in A}$ kabi yoziladi. $\mathbf{b\notin A}$ kabi yozuvlar esa **b** element **A** to'plamga tegishli emasligini bildiradi.

1- ta'rif: Agar A to'plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa ($\mathbf{a\in A\Rightarrow a\in B}$), u holda A to'plam B to'plamining qismi deyiladi va $\mathbf{A\subset B}$ (yoki $\mathbf{B\supset A}$) kabi belgilanadi.

Misol: Iqtisod yo'nalishdagi talabalar to'plami oliygoh talabalar to'plamining qism to'plami bo'ladi.

2- ta'rif: Agarda **A** va **B** to'plamlar uchun $\mathbf{A\subset B}$ va $\mathbf{B\subset A}$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar teng deyiladi va **A=B** kabi yoziladi.

Misol: 1) **A**={-1;1}, **B**={$x^2-1=0$ tenglama yechimlari} uchun **A=B** bo'ladi.

2) **A**={to'g'ri burchakli uchburchaklar}, **B**={tomonlari a,в,c bo'lgan va $c^2=a^2+в^2$ shartni qanoatlantiruvchi uchburchaklar} to'plamlar uchun **A=B.**

3)A= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar},

B= {alfavitdagi harflar} bo'lsa, **A=B** bo'ladi,

3-ta'rif: Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

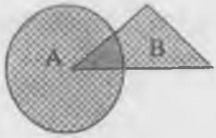
Ixtiyoriy A to'plam uchun $A\subset A$ va $\varnothing\subset A$ shartlar doimo bajariladi. Arifmetikada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to'plamlar nazariyasida $\varnothing$ to'plam shunga o'xshash vazifani bajaradi.

Misol: {sin x =2 tenglamaning yechimlari}=$\varnothing$, {perimetri 0 bo'lgan kvadratlar}=$\varnothing$.

Arifmetikada haqiqiy sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan. Bu amallar shunday kiritilganki, qo'shish va ayirish natijasida yana haqiqiy sonlar paydo bo'ladi va bu amallar ma'lum bir xossalarga (qonunlarga) ega bo'ladi. Bu amallarni va ularning xossalarini bilmasak, ko'p arifmetik masalalarni yecha olmas edik. Xuddi shunday sababga ko'ra to'plamlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallarini kiritishga ehtiyoj paydo bo'ldi.

Ammo bu amallar arifmetikadagi qo'shish va ko'paytirish amallaridan farq qiladi.

4-ta'rif: A va B to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) deb shunday C to'plamga aytiladiki, uning elementlari A va B to'plamlardan hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi va $C=A+B$ yoki $C=A\cup B$ kabi belgilanadi.



5.1-chizma.

Shunday qilib, $A\cup B$ to'plam elementlari yoki A ga, yoki B ga yoki ham A ga, ham B ga tegishli elementlardan iboratdir, ya'ni $c\in A\cup B \Rightarrow c\in A$ yoki $c\in B$ yoki $c\in A$ va $c\in B$ (5.1-chizma).

Xuddi shuningdek $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ –to'plamlar yig'indisi $C=A_1\cup A_2\cup A_3 \cup \ldots\cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ kabi belgilanadi. Bu yerda C hech bo'lmaganda bitta A_k to'plamga tegishli elementlar to'plami sifatida aniqlanadi.

Misol. 1) A={ juft sonlar}, B={ toq sonlar}$\Rightarrow A\cup B=Z=${butun sonlar}.

2) A_1 ={1 kurs talabalari}, A_2={2 kurs talabalari},… . A_5={5 kurs talabalari}$\Rightarrow A_1\cup A_2\ldots\cup A_5$={ institutdagi barcha talabalar}.

3) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}\Rightarrow A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$.

4) A={ juft sonlar}, B={ to'rtga bo'linadigan sonlar}$\Rightarrow A\cup B=A$. Umuman olganda $B\subset A$ yoki $B=A$ bo'lsa, u holda $A\cup B=A$ bo'ladi.

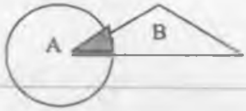
Demak, to'plamlarda arifmetikadagi qo'shish amali uchun «$B\neq 0$ bo'lsa, unda $A+B\neq A$ bo'ladi» degan tasdiq o'rinli bo'lmasligi mumkin ekan. Ammo arifmetikadagi $A+0=A$ degan xossa to'plamlar uchun saqlanib qoladi, ya'ni $\forall A$ to'plam uchun $A\cup\varnothing=A$ bo'ladi.

Arifmetikada qo'shish amali uchun $a+b=b+a$ (kommutativlik) va $(a+b)+c=a+(b+c)$ (assotsiativlik) qonunlari o'rinli. Bu qonunlar to'plamlarni qo'shish amali uchun ham saqlanib qoladi, ya'ni $\forall A$ va B,C to'plamlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$A\cup B=B\cup A,\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

Bu tengliklar qo'shish ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

5-ta'rif: A va B to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deb shunday C to'plamga aytiladiki, uning elementlari ham A ga, ham B ga tegishli bo'ladi va C=AB yoki $C=A\cap B$ kabi belgilanadi (5.2-chizma).



5.2-chizma.

Shunday qilib, $c\in A\cap B\Rightarrow c\in A$, $c\in B$. Xuddi shuningdek A_1, A_2, A_3,...,A_n to'plamlarning ko'paytmasi $C=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ kabi belgilanadi va C to'plam barcha A_k larga tegishli elementlardangina iborat bo'ladi.

Misol: 1) A={juft sonlar}={2,4,6,8,10,12...}, B={3 ga bo'linadigan sonlar}={3,6,9,12...} bo'lsa, u holda

$A\cap B$={6,12,18,...}={ 6 ga bo'linadigan sonlar}

2) A={talabalar}, B={futbolchilar}$\Rightarrow A\cap B$={futbol bilan shug'ullanuvchi talabalar}.

Arifmetikada sonlarni ko'paytirish uchun kommutativlik va assotsiativlik qonunlari o'rinli. To'plamlar ko'paytmasi ta'rifidan bu qonunlar bu yerda ham saqlanib qolishini ko'rish mumkin, ya'ni

$$A\cap B=B\cap A,\quad (A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C).$$

Arifmetikada qo'shish va ko'paytirish amallari o'zaro distributivlik qonuni bilan bog'langan, ya'ni (a+в)c=ac+вc. Bu qonun to'plamlar uchun ham o'rinlidir, ya'ni

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

Shu tenglikni isbotlaymiz.

$x\in(A\cup B)\cap C$ bo'lsin. Unda $x\in A\cup B$ va $x\in C$ bo'ladi. $x\in A\cup B\Rightarrow$ $x\in A$ yoki $x\in B$ bo'lsin. Bundan $x\in A\cap C$ yoki $x\in B\cap C$. Bundan $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ va $x\in B$ hol ham xuddi shunday qaraladi.

Shunday qilib, $x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$, ya'ni

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C) \qquad (5.1)$$

Endi $y\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ bo'lsin. Unda $y\in A\cap C$ yoki $y\in B\cap C$ yoki $y\in A\cap C$ va $y\in B\cap C$.

$y\in A\cap C$ bo'lsin. U holda $y\in A, y\in C\Rightarrow y\in A\cup B, y\in C\Rightarrow y\in(A\cup B)\cap C$.

$y \in A \cap C$, $y \in B \cap C \Rightarrow y \in A$, $y \in B$, $y \in C \Rightarrow y \in A \cup B$, $y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$.

Demak, $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$, ya'ni

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \qquad (5.2)$$

(5.1) va (5.2) munosabatlardan, 2- ta'rifga asosan, $A \cup B) \cap C= =(A \cap C) \cup (B \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda yana bir ushbu distributivlik qonunini isbotlash mumkin:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

6- ta'rif: A va B to'plamlarning ayirmasi deb, shunday C to'plamga aytiladiki, u A ga tegishli, ammo B ga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topadi va $C=A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Demak, $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ va $x \notin B$. $\forall A$ to'plam uchun $A \setminus A=\varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$ munosabatlar o'rinlidir.

Misol: 1) Z={ butun sonlar}, B={juft sonlar} bo'lsa, Z\B={toq sonlar}.

2) A={barcha talabalar}, B={I kurs talabalari} bo'lsa, A\B={II–IV kurs talabalari}.

3) A={1,2,3,4,5}, B={1,3,7,9} bo'lsa, A\B={2,4,5}, B\A={7,9}.

7-ta'rif: A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb $A \times B$ kabi belgilanadigan va (x,y), $x \in A$, $y \in B$ ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to'plamga aytiladi.

Masalan, $A=[0;1]$, $B=[0;1]$ bo'lsa, $A \times B$ uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(1,1)$ va $M_4(0,1)$ nuqtalarda joylashgan to'rtburchakdagi nuqtalarni ifodalaydi. Agarda A=R, B=R (R- haqiqiy sonlar to'plami) bo'lsa, $A \times B = R^2$, ya'ni tekislikdagi barcha nuqtalarni ifodalaydi.Dekart ko'paytmasi uchun $A \times B \neq B \times A$, ya'ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

5.2-§. CHEKLI VA CHEKSIZ TO'PLAMLAR. TO'PLAMLARNING EKVIVALENTLIGI

1-ta'rif: A to'plam chekli deyiladi, agarda uning elementlarini bittadan birin -ketin ola boshlasak, ma'lum bir qadamdan keyin bo'sh to'plam hosil bo'lsa.

Misollar: 1) O'quv guruhidagi talabalar to'plami;

2) Yer yuzidagi barcha odamlar to'plami;

3) Ko'pburchakning tomonlari to'plami;

4)1000 dan kichik bo'lgan tub sonlar to'plami;

5) Kitobdagi varaqlar to'plami;

6) $Ax^2+Bx+C=0$ tenglama yechimlari to'plami.

Ba'zi hollarda chekli to'plamdagi elementlar sonini aniq ko'rsatib bo'ladi, ba'zi hollarda esa bu sonni aniq ko'rsatib bo'lmaydi.

Masalan, marketing yo'nalishi bo'yicha I kurs talabalari to'plami chekli va uning elementlar soni aniq bir qiymatga, (masalan 125 ga) ega bo'ladi. Yer yuzidagi barcha suv molekulalaridan tashkil topgan to'plam ham chekli, ammo undagi elementlar sonini aniq ko'rsata olmaymiz.

Umumiy holda *A* chekli to'plamdagi elementlar sonini $a_1 a_2,\ldots a_n$ bilan belgilasak, u holda $A=\{a_1 a_2,\ldots a_n\}$ deb yozish mumkin.

2-ta'rif: A to'plam cheksiz deyiladi, agarda uning elementlarini bittadan birin- ketin olganimizda hech qachon bo'sh to'plam hosil bo'lmasa.

Misollar: 1) Natural sonlar to'plami N;

2) Ratsional sonlar to'plami Q;

3) [0;1] kesmadagi nuqtalar to'plami;

4) $\sin x=a$ ($|a|\leq 1$) tenglama yechimlari to'plami;

5) Tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami.

Agar A va B chekli to'plamlar bo'lsa, ularni elementlar soni bo'yicha o'zaro solishtirish mumkin. Ularning elementlari sonini n(A), n(B) deb belgilasak, n(A)>n(B), n(A)=n(B), n(A)<n(B) bo'lishi mumkin. Chekli to'plamlarni ikki xil usulda solishtirish mumkin.

1-usul: A va B to'plamdagi elementlarni sanab, n(A) va n(B) ni topamiz, keyin n(A) va n(B) larni solishtiramiz.

2-usul: A to'plamdagi har bitta a elementga B to'plamning bitta va faqat bitta b elementini mos qo'yamiz va aksincha. Agarda A va B elementlar orasida bunday o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatib bo'lsa, u holda n(A)=n(B) bo'ladi (bunda n(A) va n(B) qiymatlarini bilishimiz shart emas). Agarda bu o'zaro bir qiymatli moslikda A ning elementlari ortib qolsa, u holda n(A)>n(B) va B ning elementlari ortib qolsa, n(A)<n(B) bo'ladi.

Misol: A={auditoriyadagi talabalar}, V={auditoriyadagi stullar}. Talabalar va stullar sonini sanamasdan har bitta stulga bittadan talabani o'tqazamiz. Hamma talabalarga joy yetsa va stullar ortib qolmasa n(A)=n(B), agar talabalarga stul yetmasa n(A)>n(B) va stullar ortib qolsa, n(A)<n(B) bo'ladi.

Har qanday chekli A to‘plamning elementlar soni har qanday cheksiz B to‘plamdagi elementlar sonidan kichik ekanligi tushunarli. Endi A va B cheksiz to‘plamlar bo‘lsin. U holda ularni solishtirib bo‘ladimi, degan savol paydo bo‘ladi.

Masalan, tekislikdagi doiralar (A to‘plam) ko‘pmi yoki ratsional sonlar (B to‘plam) ko‘pmi? A va B cheksiz to‘plam bo‘lgani uchun bu savolga javob berish uchun birinchi usul yaramaydi. Birinchi usul bilan faqat chekli to‘plamlarni solishtirish mumkin. Ammo ikkinchi usulni cheksiz to‘plamlarga ham qo‘llash mumkin.

Misol: A={toq sonlar}, B={juft sonlar} bo‘lsin. Unda $2n-1\in A\Leftrightarrow 2n\in B$, ya’ni $1\Leftrightarrow 2$, $3\Leftrightarrow 4$, $5\Leftrightarrow 6$, ..., $2n-1\Leftrightarrow 2n$,... ko‘rinishda A va B to‘plam elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. Demak, A va B elementlar soni bo‘yicha bir xil cheksiz to‘plamlar bo‘ladi.

3-ta’rif: A va B to‘plamlar ekvivalent deb ataladi, agarda ularning elementlari o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo‘lsa. Ekvivalent to‘plamlar $A\sim B$ kabi belgilanadi. Chekli A va B to‘plamlar ekvivalent bo‘lishi uchun albatta $n(A)=n(B)$ bo‘lishi kerak.

Cheksiz to‘plamlar ichida eng «kichigi» natural sonlar to‘plami $N=\{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$ bo‘lib hisoblanadi.

4-ta’rif: Natural sonlar to‘plami *N* ga ekvivalent ixtiyoriy cheksiz to‘plam sanoqli to‘plam deyiladi.

Agarda $A\sim N$ bo‘lsa, A elementlarini raqamlab chiqish mumkin, ya’ni $A=\{a_1, a_2, a_3 ,\ldots,a_n\ldots\}$ deb yozish mumkin.

Misol: 1) Z={butun sonlar}=$\{\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ sanoqli to‘plam bo‘ladi. Bunga $Z\in n\Leftrightarrow 2n+1\in N$, agar $n\geq 0$ bo‘lsa va $Z\in n\Leftrightarrow 2|n|\in N$, $n<0$ bo‘lsa, ya’ni musbat butun sonlarga toq natural sonlarni, manfiy butun sonlarga esa juft natural sonlarni mos qo‘yish bilan ishonch hosil qilish mumkin.

2) $A=\{2,4,8,\ldots 2^n,\ldots\}\sim N$. Bunga $A\ni 2^n\Leftrightarrow n\in N$ orqali ishonch hosil qilish mumkin.

4) $A=\{2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots\}\sim N$. Buni $A\ni 2n \Leftrightarrow n\in N$ orqali ko‘rish mumkin.

1-teorema: Ratsional sonlar to‘plami *Q* sanoqli.

Isbot: Har qanday ratsional sonni $a=p/q$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda *q*- natural son, *p*- butun son bo‘lib, ular o‘zaro qisqarmaydigan sonlardir. Bu sonning balandligi deb $h=|p|+q$ songa aytiladi. Balandligi $h=m$ bo‘lgan ratsional sonlar soni chekli va ularni balandligi oshib borishi bo'yicha birin-ketin raqamlab chiqish mumkin. Natijada Q~N ekanligini ko'ramiz.

2-teorema: Sanoqli to'plamning qism to'plami chekli yoki sanoqli to'plam bo'ladi.

3-teorema. Chekli yoki sanoqli sondagi sanoqli to'plamlar yig'indisi yana sanoqli to'plam bo'ladi. Masalan, ratsional koeffitsiyentli kvadrat uchhadlar, tekislikdagi butun koordinatali nuqtalar, tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to'plamlari sanoqli bo'ladi.

5-ta'rif: Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deb aytiladi.

4-teorema: 0 va 1 orasida joylashgan barcha haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir, ya'ni [0,1] kesmadagi nuqtalar to'plami sanoqsizdir.

Masalan, $\forall a,в$ ($в>a$) uchun $[a,в] \sim [0,1]$, ya'ni sanoqsiz to'plam bo'ladi. Bunga $y=a+(в-a)x$ ($y\in[a,в]$, $x\in[0,1]$) o'zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

5-teorema: Agarda A~B, B~C bo'lsa, A~C bo'ladi.

Isbot: A~B bo'lgani uchun $A\ni a \Leftrightarrow в\in B$, B~C bo'lgani uchun $B\ni в \Leftrightarrow c\in C$. U holda $A\ni a \Leftrightarrow c\in C$ desak, A va C to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi, ya'ni A ~C bo'ladi.

Natija: 1) A va B ixtiyoriy sanoqli to'plamlar bo'lsa, undan A~B bo'ladi.

2) Ixtiyoriy ikkita [a,b] va [c,d] kesmalar uchun [a,b]~[c,d]. 3) $(0;1) \sim (-\infty;\infty)$. Bunga $x\in(-\infty;\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi}\text{arctg}x+1/2=y\in(0,1)$ o'zaro bir qiymatli akslantirish orqali ishonch hosil qilish mumkin.

6-teorema: Har qanday cheksiz to'plam o'zining qandaydir bir qismiga ekvivalent bo'ladi.

Masalan, $(0;1)\subset(-\infty;\infty)$ va $(0;1)\sim(-\infty;\infty)$, $\{2n\}\in\{n\}$ va $\{2n\}\sim\{n\}$.

6-ta'rif: Agarda A~B bo'lsa, A va B to'plamlar bir xil quvvatga ega deyiladi.

Chekli to'plamning quvvati undagi elementlar soniga teng bo'ladi. Sanoqli to'plamlarning hammasi o'zaro ekvivalent bo'lgani uchun ular bir xil quvvatga ega va y α_0 (alfa nol) kabi belgilanadi. [0,1] va unga ekvivalent barcha to'plamlar quvvati C orqali belgilanadi va ular kontinium quvvatga ega deyiladi.

Agar A va B to'plamlar quvvati m(A) va m(B) bo'lsa, bu yerda yoki m(A)=m(B) yoki m(A)<m(B) yoki m(A)>m(B) bo'ladi.

m(A)=m(B) tenglik A~B ekanligini bildiradi. m(A)>m(B) yozuv A ning bir qismi B ga ekvivalent, ammo B da A ga ekvivalent qism yo‘qligini bildiradi.

α_0 quvvatli sanoqli to‘plamlar «eng kichkina» cheksiz to‘plamdir. C quvvatli to‘plamlar «kattaroq» cheksiz to‘plamdir. Eng katta quvvatli cheksiz to‘plam bormi degan savolga quyidagi teorema javob beradi:

7-teorema: A to‘plam quvvati m(A) bo‘lsin. U holda A to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan iborat B to‘plam quvvati m(B)>m(A) bo‘ladi.

Agarda m(A)= 0 bo‘lsa, u holda m(B)=C bo‘ladi, ya’ni sanoqli to‘plamning barcha qism to‘plamlari kontinium quvvatli to‘plamni tashkil etadi.

5.3-§. ASOSIY ALGEBRAIK STRUKTURALAR

Bizga ixtiyoriy σ to‘plam berilgan bo‘lib, uning har qanday ikkita a va b elementlariga biror $c\in\sigma$ elementni mos qo‘yadigan qandaydir $(*)$ binar amal kiritilgan bo‘lsin. Masalan, σ haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsa, amal sifatida sonlarni qo‘shish (+) yoki ko‘paytirish $(\times)$ amalini, σ to‘plamlardan tashkil topgan bo‘lsa, $(*)$ sifatida to‘plamlar birlashmasi $(\cup)$ yoki kesishmasi $(\cap)$ amallarini olish mumkin.

1-ta’rif: To‘plam va unda aniqlangan $(*)$ amaldan tashkil topgan $<\sigma, *>$ sistema gruppa deb ataladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

1.$\forall$ a,в,c$\in\sigma$ uchun a$*$(в$*$c)=(a$*$в)$*$c (assotsiativlik qonuni);

2. Shunday e $\in\sigma$ e element mavjudki, a uchun a$*$e= e$*$a=a ;

3. $\forall$ a$\in\sigma$ uchun shunday $\bar{a}$ element mavjudki, a$*\bar{a}=\bar{a}*$a=e.

Bu holda e element gruppaning birlik elementi, $\bar{a}$ esa a elementga teskari element, $(*)$ esa gruppaviy amal deyiladi.

Misollar: 1) σ=Z butun sonlar to‘plami bo‘lib, unda $*$ sifatida qo‘shish (+) amali olinib, birlik element e=0 va teskari element $\bar{a}$=-a kabi aniqlansa, (Z,+) sistema gruppani tashkil etadi.

2) <Z, $\times$> sistema gruppani tashkil etmaydi, chunki bu yerda e=1 va $\bar{a}=a^{-1}$ bo‘lib, a=0 element uchun teskari element mavjud emas. Z'=Z-{0} deb olsak, <Z', $\times$> gruppani hosil qiladi.

3) Q - ratsional sonlar to‘plami bo‘lsa, <Q,+> va <Q-{0},$\times$ > sistemalar gruppani tashkil etadi.

Gruppada bo'lish (/) amalini $a/в=a*\bar{в}$ kabi aniqlash mumkin. Bu holda gruppada $a*x=в$ tenglama doimo yechimga ega bo'ladi va bu yechim x= *$в$ kabi topiladi. Haqiqatan ham, bu holda $a*x=a*(\bar{a}*в)=(a*\bar{a})*в=e*в=в$.

Gruppada natural daraja tushunchasi $a^n=a*a*\ldots*a$ kabi kiritilishi mumkin. Bunda darajaga xos barcha xossalar saqlanadi.

2-ta'rif : Agarda {σ , ∗} gruppa bo'lib, unda ∀ a,в∈σ uchun a∗в=в∗a shart (kommutativlik qonuni) bajarilsa, u kommutativ yoki Abel gruppasi deb ataladi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan gruppalar kommutativlik qonuniga bo'ysunadi. Kommutativ bo'lmagan gruppalarga misollarni kelgusida ko'rib o'tamiz (matritsalar algebrasiga qarang).

3-ta'rif: <σ,∗> sistema yarim gruppa deyiladi, agarda unda faqat (a∗в)∗c=a∗ (в∗c) shart bajarilsa.

Masalan, σ (A) orqali A to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan to'plamni belgilasak, <σ(A),⋃> yoki <σ(A),⋂> sistemalar yarim gruppani tashkil etadi, ammo gruppani tashkil etmaydi. Bunda ⋃ va ⋂ amallar mos ravishda to'plamlar birlashmasi va kesishmasini ifodalaydi.

Har qanday gruppa albatta yarim gruppani tashkil etadi.

Yarim gruppalar tushunchasi avtomatik qurilmalar nazariyasida keng qo'llaniladi.

4-ta'rif: Agar σ to'plamda ikkita ⊗,⊕ binar amallar aniqlangan bo'lib, <σ,⊕,⊗> sistema uchun quyidagi shartlar bajarilsa, u halqa deyiladi:

1) <σ,⊕ > - kommutativ gruppa ; 2) <σ,⊗ > - yarim gruppa ;

3) a ⊗(в⊕c)=(a⊗в)+(a⊗c) , 4) (a⊕в)⊗c = (a⊗c)⊕(в⊗c).

Bunda ⊕ - gruppaviy qo'shish, ⊗- gruppaviy ko'paytirish amali, 3-shart esa distributivlik yoki taqsimot qonunlari deyiladi.

Qo'shish amaliga nisbatan birlik element e_0 shu halqaning noli deyiladi va 0 kabi belgilanadi.

Agarda ∀a∈σ uchun a⊗e==e⊗a=a shartni qanoatdantiruvchi e∈σ element mavjud bo'lsa, u birlik element deyiladi.

Misollar : 1) σ ={juft sonlar}. Bu holda <σ,+,x> halqani tashkil etadi (bunda nol element e_0=0, birlik element e mavjud emas). Ammo <σ,x,+ > halqani tashkil etmaydi.

2) $<\sigma(A), \cup, \cap>$ to'plamlar sistemasi halqani tashkil etadi va unda birlik element e=A, nol element esa $0=\varnothing$, ya'ni bo'sh to'plam bo'ladi.

3) Barcha ko'phadlar to'plami qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan halqa tashkil etishini ko'rsatish mumkin.

5-ta'rif : Agarda $<\sigma,\oplus,\otimes>$ halqada $\otimes$ amaliga nisbatan e birlik element mavjud bo'lsa, bu halqa algebra deyiladi.

Masalan, $<Z,+,\times>$ yoki $<Q,+,\times>$ yoki $<R,+,\times>$ yoki $<\sigma(A),\cup,\cap>$ halqalar algebrani tashkil etadi.

6-ta'rif : Agarda $<\sigma,\oplus,\otimes>$ halqada $\otimes$ ko'paytirish amali kommutativlik qonuniga bo'ysunsa va unda bu halqa maydon deb ataladi.

Masalan, $<R,+,\times>$ haqiqiy sonlar maydonini tashkil etadi.

7-ta'rif : σ to'plam va $\oplus$, $\otimes$ binar amallardan tuzilgan $<\sigma \oplus,\otimes>$ sistema struktura deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

1) Ixtiyoriy $a\in\sigma$ uchun $a\oplus a=a$, $a\otimes a=a$ (idenpotentlik qonuni);

2) Ixtiyoriy uchun $a,в\in\sigma$ uchun $a\otimes в=в\oplus a$, $a\otimes в=в\otimes a$ (kommutativlik qonuni) ;

3) $(a\oplus в)\oplus c=a\oplus(в\oplus c)$, $(a\otimes в)\otimes c=a\otimes(в\otimes c)$ (assotsiativlik qonuni);

4) $(a\oplus в)\oplus a=a$, $(a\otimes в)\otimes a=a$ (yutilish qonuni).

Masalan, $<\sigma(A), \cap, \cup)>$ sistema strukturani tashkil etadi. Bunda $\sigma(A)$ A to'plamning barcha qism to'plamlarini, $\cap$ va $\cup$ esa to'plamlar ustida ko'paytirish (kesishma) va qo'shish (birlashma) amallarini ifodalaydi.

$<R,+,\times>$ sistema esa strukturani tashkil etmaydi, chunki unda 2) va 3) qonunlar bajarilib, 1) va 4) qonunlar esa bajarilmaydi.

5.4-§. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

1-ta'rif: Biror chekli to'plam elementlari ichidan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlardan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar **kombinatorik masalalar** deyiladi.

2-ta'rif: To'plamlar nazariyasining kombinatorik masalalar bilan shug'ullanadigan qismi **kombinatorika** deyiladi.

Masalan, o'nta talabani ikki kishilik partali sinfga necha xil usulda o'tkazish mumkinligi, molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarning qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turlicha tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini har xil tartibda ekish (agronomiya), ehtimolliklar nazariyasining turli masalalarini yechishda natijalarni u yoki bu guruhlarini qurish kombinatorik masalalarga misol bo'ladi va kombinatorikani ham matematikada, ham insonning boshqa faoliyatlarida qo'llanilishini ko'rsatadi.

Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud. Ularni ifodalash uchun dastlab to'plamlar nazariyasiga doir bir teoremani keltiramiz.

Teorema: Agarda A va B chekli to'plamlar bo'lib, ulardagi elementlar soni n(A) va n(B) bo'lsa, u holda $A\cup B$ to'plamdagi elementlar soni $n(A\cup B)$ quyidagicha topiladi:

$$n(A\cup B)= n(A)+ n(B), \text{ agarda } A\cap B= \varnothing \text{ bo'lsa,}$$

$$n(A\cup B)= n(A)+ n(B)- n(A\cap B), \text{ agarda } A\cap B\neq\varnothing \text{ bo'lsa.}$$

Bu teoremadan kombinatorikaning qo'shish qoidasi kelib chiqadi

Qo'shish qoidasi: Agarda biror α tanlovni n (α) usulda, β tanlovni esa n(β) usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu yerda α ni ixtiyoriy tanlash usuli β ni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ yoki } \beta) = n(\alpha) + n(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Misol: Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: α -erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo'lsin. Unda

$$n(\alpha) = 10,\ n(\beta) = 8 \text{ va bitta xodimni}$$

$$n(\alpha \text{ yoki } \beta) = n(\alpha) + n(\beta) = 10+8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

Ko'paytirish qoidasi. Agarda biror α tanlovning (α) usulda, β tanlovni n(β) usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ va } \beta) = n(\alpha)\, n(\beta)$$

formula bilan topiladi. Masalan, korxonada 10 erkak va 8 ayol ishlasa, ulardan bir erkak va bir ayol xodimdan iborat juftlikni n (α va β) = $10 \cdot 8 = 80$ usulda tanlash mumkin.

Misol: 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo'llanma berildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin ?

Yechish: α I yo'llanmani, β esa II yo'llanmani tarqatish usullari bo'lsin. Unda $n(\alpha)=10$ va $n(\beta)=9$, chunki bitta talabaga I yo'llanma berilganda II yo'llanmaga 9 talaba ega bo'lishi mumkin. Demak, ikkita yo'llanmani tarqatishlar soni (α va β)$=10\cdot 9=90$ bo'ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ tanlovlarni mos ravishda $n(\alpha_1)$, $n(\alpha_2)$, ..., $n(\alpha_m)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo'lsa,

$$n(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki} \dots \text{yoki } \alpha_m) = n(\alpha_1) + n(\alpha_2) + \dots + n(\alpha_m),$$

$$n(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va} \dots \text{va } \alpha_m) = n(\alpha_1) \cdot n(\alpha_2) \cdot \dots \cdot n(\alpha_m)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

3-ta'rif: n ta elementli to'plamning k ($k \le n$) ta elementli ixtiyoriy qism to'plami n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya deyiladi va ularning soni C_n^k kabi belgilanadi.

Faqat elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladigan barcha qism to'plamlar bitta kombinatsiya hisoblanadi.

Kombinatsiyalarda elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas va bu qism to'plamlar bir-biridan kamida bitta elementi bilan farq qilishi kerak .

Masalan, $\{a,в,c\}$ n=3 elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a;в\}$, $\{a;c\}$, $\{в;c\}$ bo'ladi. Bu yerda $\{в;a\}=\{a;в\}$, $\{c;a\}=\{a;c\}$, $\{в;c\}=\{c;в\}$ deb hisoblanadi.

Umumiy holda quyidagi formula o'rinli:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (5.3)$$

Bu yerda n! (en faktorial) $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ va $0! = 1$ deb olinadi

Misol: Beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \text{x} 2!} = 10$$

usulda tuzish mumkin:

4-ta'rif: n ta elementdan iborat to'plamning elementlarini joylashish tartibini o'zgartirish natijasida hosil bo'lgan n ta elementli ixtiyoriy to'plam **o'rin almashtirish** deb ataladi va ularning soni P_n kabi belgilanadi.

Misol: 1) $n = 2 \Rightarrow \{a;в\},\{в;a\} \Rightarrow P_2=2$

2) $n = 3 \Rightarrow \{a;в;c\},\{a;c;в\},\{c;a;в\},\{в;a;c\},\{в;c;a\},\{c;в;a\} \Rightarrow P_3=6$

Umumiy holda n elementli o'rin almashtirishlar soni uchun

$$P_n = n! \qquad (5.4)$$

formula o'rinli.

Misol: Navbat kutib turgan 5 ta odamni $P_5 = 5! = 120$ usulda navbatga joylashtirish mumkin.

5-ta'rif: n ta elementlardan iborat to'plamning k ta elementdan iborat qism to'plamlari bir-biridan elementlari yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farq qilsa, ular n ta elementdan k tadan **o'rinlashtirish** deb ataladi va ularning soni A_n^k kabi belgilanadi.

Misol : 1) $\{a;в;c\}$ n=3, k=2 =>$\{a;в\},\{a;c\},\{в;c\},\{в;a\},\{c;a\},\{c;в\}$=>$A_4^2=6$.

2) $\{a;в;c;d\}$ n=4, k=3 =>$\{a;в;c\},\{a;c;в\},\{в;a;c\},\{c;a;в\},\{c;в;a\}$ ...=> $A_4^3= 16$.

Umumiy holda o'rinlashtirishlar soni quyidagicha topiladi:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (5.5)$$

Masala : Talaba 8 kunda 4 ta imtihon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechish: Kunlarni 1,2,3, ... , 8 kabi raqamlab chiqsak, imtihonlar qo'yilish kunlari {1;2;3;4}, {1;3;2;5} kabi to'rtliklardan iborat va ularning soni

$$A_8^4 = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 1680.$$

Shuningdek, takrorlab o'rinlashtirish mumkin. Agar takrorlab o'rinlashtirish bo'lsa, u holda $\bar{A}_m^n = m^n$ ko'rinishda izlanadi.

Masalan, 1; 2; 3 sonlaridan 2 xonali sonlarni yozing. 12; 13; 23; 31; 32 6 ta. Takrorlansa yana 3 ta 11; 22; 33 qo'shiladi va 9 ta bo'ladi. $A_3^2 = 3^2 = 9$. Buxoroda telefonlar taxminan $A_{10}^5 = 10^5 = 100000$ tagacha telefon bilan ta'minlanadi. Toshkentda - $A_{10}^6 = 10^6 = 1000000$, Moskvada taxminan $A_{10}^7 = 10^7 = 10000000$. Bu hisoblar aholi soni bilan bog'liq

C_n^k sonlari yordamida quyidagi formulani yozish mumkin:

$$(a+в)^n = C_n^0\, a^n в^0 + C_n^1\, a^{n-1} в^1 + \ldots + C_n^k\, a^{n-k} в^k + \ldots + C_n^n\, a^0 в^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (5.6)$$

Bu **Nyuton binomi formulasi** deyiladi, C_n^k esa binomial koeffitsiyentlar deb ataladi. Nyutondan oldin bu formulani natural daraja uchun **Umar Xayyom** (1048–1131), **Giyosiddin ali - Qushchi** (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati shuki, u (5.6) formulani nafaqat natural n daraja uchun, balkim kasr darajalar uchun ham o'rinli ekanligini ko'rsatgan.

Nyuton binomidan va ta'rifdan C_n^k uchun quyidagi kombinatorik ayniyatlar kelib chiqadi:

1) $a=b=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ 2) $a=1,\ b=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 4) $C_n^0 = C_n^n = 1.$

Bu ayniyatlarning to'g'riligini tekshirish talabalarga havola qilinadi.

XULOSA

V bob matematikaning fundamental asosi bo'lgan to'plamlar nazariyasiga bag'ishlangan.To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchasi bo'lib, to'plamga ta'rif berib bo'lmaydi. To'plam bu bir umumiy xususiyatga ega bo'lgan obyektlar majmuasidir.

To'plamlar ustida xuddi arifmetikadagiga o'xshash amallar bajarish mumkin. Bu amallarni kiritishdan maqsad – berilgan to'plmalardan yangi to'plamlar yaratishdan iborat.

To'plamlar ustida amallardan tashqari to'plamlarni sinflarga ajratib chekli va cheksiz, shuningdek, sanoqli va sanoqsiz to'plamlar o'rganilgan sanoqsiz to'plam elementlari soni cheksiz bo'lishi bilan birga ularni nomerlashning ham iloji yo'q. Shu sababli to'plamlarni solishtirganda ularning quvvati haqida gapirish o'rinlidir, ya'ni bunday to'plamlar quvvatiga ko'ra solishtiriladi.

Shuningdek, bu bo'limdan asosiy algebraik strukturalar va kombinatorika elementlari o'rin olgan. Asosisy algebraik strukturalarda halqa, gruppa maydon tushunchalari keltirilgan. Agar to'plamda ma'lum amallar bajarilishi bilan birga, bu amallarga nisbatan ma'lum xossalar o'rinli bo'lsa, u o'z navbatida gruppa, halqa yoki maydon bo'lar ekan.

5-BOBGA DOIR TESTLAR

1.Quyidagi to'plamlardan qaysi biri bo'sh to'plam emas?
A) Kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar;
B) sinx = 2 tenglama yechimlari to'plami;
C) Ikkita burchagi o'tmas bo'lgan uchburchaklar to'plami;
D) Kubi manfiy bo'lgan sonlar to'plami;
E) Ikkiga bo'linmaydigan juft sonlar to'plami.
2.Qachon A to'plam B to'plamning qismi deyiladi ?

A) Agar A va B bir xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa;

B) Agar A va B har xil elementlardan tashkil topgan bo‘lsa;

C) Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamga tegishli bo‘lsa;

D) Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamga tegishli bo‘lsa;

E) To‘g‘ri javob keltirilmagan.

3. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A. Bo‘sh to‘plam barcha to‘plamlarning to‘plam ostisi hisoblanadi;

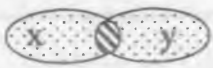
B. Har bir to‘plam o‘zining to‘plam ostisi;

C. Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $C\subset B$;

D. Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cap C=C$;

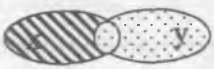
E. Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo‘lsa, unda $A\cup C=B$.

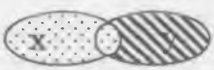
4.X va Y to‘plamlar birlashmasi qaysi chizmada ifodalangan?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

5.To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan (Ω-universal to‘plam, $\varnothing$- bo‘sh to‘plam)?

A) $A\cup B=B\cup A$; B) $A\cup\varnothing=A$; C) $A\cup A=A$;

D) $A\cup\Omega=\Omega$; E) Barcha xossalar noto‘g‘ri ko‘rsatilgan.

6. A=[-3;0] va B=(-1; 5] to‘plamlar birlashmasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) [-3; 5]; B) [-3; 1]; C) (-1; 0); D) (0; 5]; E) [-1; 5].

7. X va Y to‘plamlar kesishmasi amali qayerda to‘g‘ri ifodalangan?

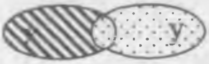
A) $X \cup Y$; B) $X \cap Y$; C) $X \subset Y$; D) $X \in Y$; E) $X \setminus Y$.

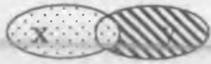
8. X va У to‘plamlar kesishmasi qaysi chizmada ifodalangan?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

9. To‘plamlar birlashmasi amalining xossasi qayerda noto‘g‘ri ko‘rsatilgan (Ω-universal to‘plam, $\varnothing$- bo‘sh to‘plam)?

A) $A \cap B = B \cap A$; B) $A \cap \varnothing = \varnothing$; C) $A \cap A = \varnothing$;

D) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; E) $A \cap \Omega = A$.

10. A=[-3,0) va B=(-1,5] to‘plamlar ayirmasi A\B qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) [-3,5]; B) [-3,-1]; C) [-1,0]; D) (-1,0); E) [-3,0).

11. Ω universal to‘plamga tegishli A to‘plam to‘ldiruvchisi $\overline{A}$ ta’rifi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $\overline{A}$ =A\Ω; B) $\overline{A}$ =A\∅; C) $\overline{A}$ =∅\A; D) $\overline{A}$ = Ω\A; E) $\overline{A}$ = A\A.

12.A={0;1;3;5} va B={1;2;3;4;6} to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasini toping.

A. A∪B={0;1;3;5}, A∩B=∅;

B. A∪B={0;1;2;3;4;5;6}, A∩B={1;3};

C. A∪B={0;5}, A∩B={-2;3;5};

D. A∪B={0;6}, A∩B={-2;3;5};

E. A∪B=∅, A∩B={2;4;6}.

13. Agar A=(-∞;4); B=(0;4) bo‘lsa, quyidagilardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A. $A\cap B=B$; B. $A\cup B=A$; C. $A/B=\{-\infty;0]$; D. $B/A=\varnothing$;
E. $A\cup B=B$.

14. Agar $A=(2,13)$, $B=(-\infty;15)$ bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri noto'g'ri?

A. $A\cap B=A$; B. $A\cup B=B$; C. $A/B=\varnothing$; D. $B/A=B$;
E. $A\cup\varnothing=A$.

15. Agar $A\subset B$ bo'lsa, quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri?

A. $A\cup B=B$; B. $A\cap B=A$; C. $A/B=\varnothing$; D. $B/A=A$;
E. $B\cup A=B$.

16. Agar $A\subset B$ bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri to'g'ri?

A. $\bar{A}=B$; B. $\bar{B}=A$; C. $A\cup B=A$; D. $A\cap B=A$; E. $B/A=\varnothing$.

17. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri noto'g'ri ?

A. Bo'sh to'plam barcha to'plamlarning to'plam ostisi hisoblanadi;
B. Har bir to'plam o'zining to'plam ostisi;
C. Aga $A\subset B$ va $C\subset A$ bo'lsa, unda $C\subset B$;
D. Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo'lsa, unda $A\cap C=C$;
E. Agar $A\subset B$ va $C\subset A$ bo'lsa, unda $A\cup C=B$.

18. Agar A-barcha to'rtburchaklar, B-barcha parallelogrammlar va C-barcha romblar to'plamlari bo'lsa, unda ularning kesishmasi topilsin.

A. $A\cap B\cap C=\varnothing$; B. $A\cap B\cap C=A$; C. $A\cap B\cap C=B$;
D. $A\cap B\cap C=C$; E. $A\cap B\cap C=\{$barcha kvadratlar$\}$.

19. Agar N, Z, Q va R mos ravishda natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to'plamlari bo'lsa, unda quyidagi munosobatlardan qaysi biri noto'g'ri ekanligini ko'rsating?

A. $N\subset Z\subset Q\subset R$; B. $N\cap Z=N$; C. $Z\cap Q=Z$; D. $Q\cap R=Z$;
E. $Q\cup R=R$.

20. Agar N, Z, Q va R mos ravishda natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to'plamlari bo'lsa, unda quyidagi munosobatlardan qaysi biri noto'g'ri ekanligini ko'rsating?

A. $Z\subset R$; B. $N\subset R$; C. $Z\cup N=Z$; D. $N\cap R=Q$; E. $Z\cup R=R$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'plam deganda nima tushuniladi ?
2. To'plam elementi qanday aniqlanadi ?
3. To'plamlarga misollar keltiring.
4. Qism to'plam qanday ta'riflanadi ?
5. Qachon ikkita to'plam teng deyiladi ?

6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi ?
7. To‘plamlar yig‘indisi qanday ta’riflanadi ?
8. To‘plamlar yig‘indisi amali qanday xossalarga ega?
9. To‘plamlar ko‘paytmasi qanday ta’riflanadi ?
10. To‘plamlar ko‘paytmasi amali qanday xossalarga ega ?
11. To‘plamlar ayirmasi qanday ta’riflanadi ?
12. To‘plamlar ustidagi amallar chizmada qanday ifodalanadi ?
13. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi ?
14. Qanday to‘plamlar chekli deyiladi ?
15. Chekli to‘plamlarga misollar keltiring.
16. Cheksiz to‘plamlarga misollar keltiring.
17. Ekvivalent to‘plamlar qanday ta’riflanadi ?
18. Qaysi shartda chekli to‘plamlar ekvivalent bo‘ladi ?
19. Qanday to‘plamlar sanoqli deyiladi ?
20. Sanoqli to‘plamlarga misollar keltiring.
21. Sanoqli to‘plamlar qanday xossalarga ega ?
22. Sanoqsiz to‘plam qanday ta’riflanadi ?
23. Gruppa qanday ta’riflanadi ?
24. Gruppalarga misollar keltiring.
25. Qaysi shartda gruppa kommutativ deyiladi ?

VI bob. FUNKSIYA

> **Funksiya tushunchasi to'plam tushunchasi kabi asosiy va boshlang'ich hisoblanadi.**
>
> **F.Xausdorf**

Bobning o'quv maqsadi

Arifmetikada son qanday ahamiyatga ega bo'lsa, oliy matematikada funksiya shunday asosiy ahamiyatga egadir.

Funksiya tushunchasi qanchalik fanlarga kirib qolganini, funksiya ta'rifini, xususiyatlarini, uning ustida bajariladigan amallarni, tatbiqlarini talabalarga yetkazish mazkur bob oldiga maqsad qilib qo'yilgan.

«Funksiya» so'zi lotincha «functio» so'zidan kelib, u «bajarish» so'zini ifodalaydi. Birinchi bo'lib, funksiya, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdor kabi termin va tushunchalarni G.Leybnits kiritdi. Funksiyani matematiklar quyidagicha belgilashgan:

Eyler L $- f\!: u; f\!:(x+c)$

Leybnits G. $- f_1(x)$ va $f_2(x)$ o'rniga x' va x

Dalamber J. - τ , $(t+S)$

Funksiyaga birinchi bo'lib, Bernulli I. 1718 yilda quyidagicha ta'rif bergan: «Funksiya – bu o'zgaruvchi va o'zgarmasdan tuzilgan miqdordir». F.Xausdorfga ko'ra, funksiya ham xuddi to'plam tushunchasidek dastlabki va asosiy tushunchadir. Funksiya tushunchasini rivojlantirishga L.Eyler, J.Fur'e, O.Koshi va yana ko'pgina olimlar o'z hissalarini qo'shganlar.

6.1-§. FUNKSIYA VA U BILAN BOG'LIQ BO'LGAN TUSHUNCHALAR

Tabiat, fan va texnika masalalarida bir miqdorning ikkinchi miqdorga bog'liq o'zgarishini ko'p kuzatamiz. Shu sababli o'zgaruvchi miqdor tushunchasi matematikada asosiy tushunchalardan hisoblanadi.

Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

1-ta'rif: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar **o'zgarmas miqdorlar** deyiladi.

Masalan, yorug'lik o'lchami *c*, erkin tushish tezlanishi *g*, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat t^0 o'zgarmas miqdorlardir.

2-ta'rif: Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar o'zgaruvchi miqdorlar deyiladi.

Masalan, tekis harakatda vaqt *t* va bosib o'tilgan masofa *s* **o'zgaruvchi miqdorlardir.**

Biror jarayonni o'rganayotganimizda bir nechta o'zgaruvchi miqdorlar o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni *v*, vaqtni *t* va bosib o'tilgan yo'lni *s* desak, u holda bu o'zgaruvchilar o'zaro $s=v\cdot t$ ko'rinishda bog'lanadi. Bunday bog'lanishlarni juda ko'p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o'rganish maqsadida funksiya tushunchasi kiritiladi.

3-ta'rif: Agarda *x* o'zgaruvchini har bir mumkin bo'lgan son qiymatiga *y* o'zgaruvchining yagona bir son qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, *y* o'zgaruvchi *x* **o'zgaruvchining funksiyasi** deyiladi.

Biror *y* o'zgaruvchi *x* o'zgaruvchining funksiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (*f* harfi o'rniga *F*, *h*, *g*, φ kabi boshqa harflarni ham qo'llash mumkin). Bu yerda *x* erkli o'zgaruvchi yoki argument, *y* esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deb ataladi.

4-ta'rif: $y=f(x)$ funksiyada *x* argumentning *y* funksiya ma'noga ega bo'ladigan barcha son qiymatlari to'plami shu funksiyaning **aniqlanish sohasi** deyiladi va **D{f}** kabi belgilanadi. Funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlar to'plami esa shu funksiyaning **o'zgarish sohasi** deyiladi va **E{f}** kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x)=\sin\sqrt{x}$ funksiya uchun $D\{f\}=[0,\infty)$, $E\{f\}=[-1,1]$ bo'ladi.

Quyidagi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deb aytiladi:

1. Darajali funksiya $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$. Masalan, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=1/x$.
2. Ko'rsatkichli funksiya $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$. Masalan, $y=3^x$, $y=(1/10)^x$
3. Logarifmik funksiya $y=\log_a x$, $(a>0, a\neq1)$. Masalan, $y=\log_2 x$, $y=\lg x$, $y=\ln x$.
4. Trigonometrik funksiyalar $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.
5. Teskari trigonometrik funksiyalar $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$,
   $y=\operatorname{arcctg} x$.

5-ta'rif. Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi munosabatlar yordamida hosil qilinadigan funksiyalar **elementar funksiyalar** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$y=\sqrt{\sin^2 x+5}+\frac{\lg x-e^{2x}}{\sqrt{3x}+2^{3x^2}}$$

funksiya **elementar funksiya** deyiladi. Ammo $y=|x|$, $y=[x]$ (x ning butun qismi-ante) funksiyalar noelementar funksiyalardir.

Elementar funksiyalar **algebraik** va **noalgebraik (transendent)** funksiyalarga bo'linadi.

Algebraik funksiya deb argumenti ustida chekli sonda algebraik amallar bajarilgan funksiyaga aytiladi. Bunday funksiyalarga quyidagilar kiradi:

1) Butun ratsional funksiya (ko'phad yoki polinom):

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n;$$

2) Kasr-ratsional funksiya-ikki ko'phad nisbati;

3) Irratsional funksiya (argumentdan ildiz chiqarish amali bor bo'lganda).

Har bir noalgebraik funksiya **trasnserdent funksiya** deyiladi. Trasnsendent funksiyalarga ko'rsatkichli logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik funksiyalar kiradi.

Funksiyani iqtisodiyotda qo'llanilishini misolda ko'raylik.

1) $y=e^{\eta},\eta\succ 0$ demografiyada qo'llaniladigan, **Maltus funksiyasi** deb ataladigan funksiya;

2) $y=f(k)-$ o'rtacha mehnat unumdorligi, k- **qurollanganlik**;

3) **Talab funksiyasi**: a) $y=kx+b,k\prec 0;$ b) $y=\frac{a}{x}+b,a\succ 0;$

4) **Taklif funksiyasi**: a) $y=kx+b,k\succ 0;$ b) $y=a\sqrt{x}+b,a\succ 0;$

5) **Ishlab chiqarish funksiyasi.**

6) Turli tovarlarga bo'lgan talabning daromadga bog'liqligi funksiyasi **(Tornkvist L. funksiyalari)**

Bitta koordinata sistemasida narxga nisbatan talab va taklif funksiyalarini ko'rilsa, ularning kesishish nuqtasi egar nuqtasi (tovar realizatsiya bo'ladigan hol).Uning abssissasi esa **muvozanat narxi** deyiladi.

6-ta'rif : Agar har bir natural son n ga biror qoida yoki qonun yordamida faqat bitta a_n, n=1,2,..., son mos qo'yilgan bo'lsa, unda $\{a_n\}$ sonli ketma-ketlik berilgan deyiladi va u quyidagicha yoziladi:

$$\{a_n\}: a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$$

Boshqacha aytganda, sonli ketma-ketlik natural argumentli funksiyalar:

$$a_n = f(n)$$

Unda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlar ketma-ketligi hadlar deyiladi.

Misollar:

1) $\{2n\}$,2,4,8,...2n,....,

2) $\{1\}$,1,1,1,....,1,.....,

3) $\left\{\frac{1}{n}\right\}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n};$

4) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}, 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots$

7-ta'rif : Berilgan $\{a_n\}$ ketma-ketlik va A son uchun ixtiyoriy (xohlagancha) kichik musbat son $\varepsilon \succ 0$ berilganda ham shunday N $(N = N(\varepsilon))$ nomer topilsaki,

$n \succ N$ bo'lganda,

$$|a_n - A| \prec \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, A son $\{a_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ko'rinishida yoziladi.

Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik **yaqinlashuvchi**, aks holda, uzoqlashuvchi deyiladi.

Misol: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ ekanini isbotlaymiz. Unda

A=1, $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| \prec \varepsilon$ dan $\frac{1}{n} \prec \varepsilon \Rightarrow n \succ \frac{1}{\varepsilon}$ kelib chiqadi.

Demak, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (butun qism) deb olinsa, $n \succ N$ bo'lganda ta'rif sharti bajariladi.

8-ta'rif: XOY tekislikdagi (x, f(x)), x∈D{f}, koordinatali nuqtalarning geometrik o'rni y=f(x) **funksiyaning grafigi** deyiladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya grafigi paraboladan, y=cosx funksiya grafigi cosinusoidadan, y=2x+5 funksiya grafigi esa to'g'ri chiziqdan iboratdir.

Funksiyalar analitik ko‘rinishda, ya’ni formulalar orqali, jadval yoki grafik ko‘rinishda berilishi mumkin.

Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi y orasidagi bog‘lanish funksiyasi $y=\pi x^2$ formula orqali analitik ko‘rinishda, Bradisning matematik jadvallar kitobchasida funksiyalar jadval ko‘rinishida, yurak ishlashini ifodalovchi funksiya kardiogramma orqali grafik ko‘rinishda ifodalanadi.

9-ta’rif: $y=f(x)$ funksiya biror $D\subset D\{f\}$ sohada **o‘suvchi (kamayuvchi)** deyiladi, agarda $\forall x_1, x_2\in D$ uchun $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ shart bajarilsa.**Masalan,** $y=x^2$ funksiya $(-\infty;0)$ sohada kamayuvchi, $(0,\infty)$ sohada esa o‘suvchi bo‘ladi.

10-ta’rif: $y=f(x)$ funksiya nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $D\{f\}$
aniqlash sohasida **juft (toq)** deyiladi, agarda $\forall x\in D\{f\}$ uchun $f(-x)=f(x)$
$(f(-x)=-f(x))$ shart bajarilsa. **Masalan,** $f(x)=x^2$ - juft funksiya, $f(x)=x^3$ esa toq funksiya bo‘ladi. Lekin $f(x)=x^2-3x+1$, $f(x)=2x-3$ funksiyalar na juft va na toqdir.

11-ta’rif: $y=f(x)$ funksiya davriy deb ataladi, agarda shunday $T>0$ son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in D(f)$ uchun $f(x+T)=f(x)$ shart bajarilsa. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik T soni shu **funksiyaning davri** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ davri $T=2\pi$, $y=\{x\}$ (x ning kasr qismi) davri $T=1$ bo‘lgan davriy funksiyalardir. $y=x^2$ funksiya esa davriy emas.

12-ta’rif: $y=f(\varphi),\varphi=\varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $x\in D\{\varphi\}$ bo‘lganda $E\{\varphi\}\subset D\{f\}$ shart bajarilsin. Bu holda, $F(x)=f(\varphi(x))$ funksiya ma’noga ega bo‘ladi va u **murakkab funksiya** deb ataladi. Bu yerda φ ichki, f esa **tashqi funksiya** deyiladi.

Masalan, $y=\sin x^2$ funksiya uchun $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashqi funksiya bo‘ladi. $y=\sin^2 x$ murakkab funksiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashqi funksiya bo‘ladi.

13-ta’rif: $y=f(x)$ funksiyadan x argumentni y funksiya orqali ifodalashdan hosil bo‘lgan $x=\varphi(y)$ ko‘rinishidagi φ funksiya f funksiyaga **teskari funksiya** deb ataladi va f^{-1} kabi belgilanadi.

Odatda argument x, funksiya esa y orqali belgilanganligi uchun, teskari funksiya $y=\varphi(x)$ yoki $y=f^{-1}(x)$ ko‘rinishda yoziladi. Teskari funksiyani $f(y)=x$ tenglama yechimi kabi topishimiz mumkin. **Masalan,**

$f(x)=3x-1$ bo'lsa, $3y-1=x$ tenglamadan bu funksiya uchun teskari funksiya $f^{-1}(x)=(x+1)/3$ ekanligini aniqlaymiz.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki,bunda $E\{f\}=E\{f^{-1}\}$, $E\{f^{-1}\}=E\{f\}$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

6.2-§. FUNKSIYA LIMITI VA UNING XOSSALARI

Oliy matematikaning muhim tushunchalaridan biri limit bo'lib, uning yordamida egri chiziqqa urinma, egri chiziq yoyi uzunligi, funksiya uzluksizligi va hosilasi, aniq integral kabi juda ko'p tushunchalar kiritiladi.

Ta'rif: Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga bog'liq shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $y=f(x)$ funksiyaning $x\to a$ bo'lgandagi limiti deb ataladi va bu tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko'rinishda yoziladi.

Misol sifatida, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ ekanligini ko'rsatamiz. Bu yerda $x\to 3$ bo'lgani uchun $2<x<4$, ya'ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya'ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta'rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda cheksiz ($+\infty$ yoki $-\infty$) limitga ega deyiladi, agarda har qanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ son mavjud bo'lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-8)^{-2}=\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

Ta'rif: A soni $y=f(x)$ funksiyaning $x\to\pm\infty$ bo'lgandagi limiti deyiladi, agarda har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun

$|f(x)-A|=|\frac{x+1}{x}-1|=|1/x|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun, $|x|>\varepsilon^{-1}$, ya'ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu yerdan, ta'rifga asosan, yuqoridagi tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif : $y=f(x)$ funksiyaning $x\to\pm\infty$ bo'lgandagi limiti cheksiz deyiladi, agarda har qanday katta $N>0$ soni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ta'rif bo'yicha isbotlash mumkin.

Ba'zi hollarda funksiyaning chap va o'ng limiti tushunchalari kerak bo'ladi.

Ta'rif : $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x qandaydir a soniga faqat chap ($x<a$) yoki o'ng ($x>a$) tomondan yaqinlashib borganda funksiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, u funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ yoki $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ funksiya uchun

$$A_1=\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn}x=-1,\ A_2=\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn}x=1.$$

Agarda biror a nuqtada $y=f(x)$ funksiya A limitga ega, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ bo'lsa, u holda $A_1=A_2=A$ tenglik o'rinli bo'lishi chap va o'ng limit ta'rifidan kelib chiqadi. Aksincha, agar chap va o'ng limitlar teng bo'lsa, u holda limitning ta'rifidan funksiya limiti mavjudligi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, funksiya limiti har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Masalan, $y=\operatorname{sgn}x$ funksiya $x\to 0$ bo'lganda limitga ega emas, chunki bu holda $A_1=-1$ va $A_2=1$ bo'lib, $A_1\neq A_2$. Ammo bu funksiya $x\to a$, $a\neq 0$, bo'lganda 1 yoki 1 limitga egadir.

Teorema: Agar $x \to a$ bo'lganda funksiya limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni funksiya $x \to a$ bo'lganda ikkita A va B limitlarga ega bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra, har qanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_2$ shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon_1$ va $|f(x)-B|<\varepsilon_2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ deb olsak $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|A-B|=|A- f(x)+ f(x)+B|\leq |f(x)-A|+ |f(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda ε ixtiyoriy kichik son bo'lganidan va A, B sonlar x ga bog'liq emasligidan $|A-B|=0$, ya'ni $A=B$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, funksiya limiti mavjud bo'lsa, u faqat yagona bo'ladi.

Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muhim ahamiyatga ega.

Ta'rif: $\alpha(x)$ funksiya $x \to a(|a|<\infty$ yoki $a=\pm\infty)$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor deb ataladi, agarda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ shart bajarilsa.

Teorema : Agar $x \to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, $f(x)$ biror M soni bilan chegaralangan, ya'ni $|f(x)|\leq M$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)\pm\beta(x)$; $\alpha(x)\,\beta(x)$; $f(x)\,\alpha(x)$; $c\alpha(x)$ (c = const) funksiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Isbot : $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya'ni $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ bo'lgani uchun limit ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartlarda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda o'rinli bo'ladi. Natijada $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\leq |\alpha(x)|+|\beta(x)| <\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\,\beta(x)|= |\alpha(x)|\,|\beta(x)| <\varepsilon/2\;\varepsilon/2=\varepsilon^2/2,$$

$$|f(x)\,\alpha(x)|= |f(x)|\,|\alpha(x)| <|M|\,\varepsilon/2, \quad |c\,\alpha(x)|=|c|\,|\alpha(x)| < |c|\,\varepsilon/2$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bulardan va limit ta'rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0, \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)\,\beta(x)=0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,\alpha(x)=0, \quad \lim_{x\to a} c\,\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Teorema isbotlandi.

Natija: Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat bo'ladi.

Bu natijani oldingi teoremani bir necha marta qo'llab isbotlash mumkin.

Lemma: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ tenglik o'rinli bo'lishi uchun f(x) funksiya $f(x)=A+\alpha(x)$ ko'rinishda bo'lishi zarur va yetarli. Bunda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ya'ni $\alpha(x)$ cheksiz kichik miqdordir.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta'rifidan kelib chiqadi.

Asosiy teorema: Agar $x\to a$ bo'lganda f(x) va g(x) funksiyalar chekli limitlarga ega bo'lsalar, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\,g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\,\lim_{x\to a}g(x)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Agar $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ bo'lsin. Bu holda, lemmaga asosan, $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ deb yoza olamiz. Bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x\to a$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib,

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha(x))\pm(B+\beta(x))=(A\pm B)+(\alpha(x)\pm\beta(x))$$

natijani olamiz. Cheksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu yerda $\gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)$ funksiya $x\to a$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu holda yuqoridagi tenglikdan va lemmaga asosan,

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Teoremadagi qolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

Yuqorida ko'rsatilganidek, funksiya har doim ham limitga ega bo'lavermaydi. Shu sababli funksiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko'rishga to'g'ri keladi. Shu maqsadda quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

1-teorema: Agar $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ tengsizliklar ixtiyoriy x uchun o'rinli bo'lib, $x\to a$ bo'lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarining limitlari mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$ bo'lsa, u holda $x\to a$ bo'lganda f(x) funksiya uchun ham limit mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

2-teorema: Agarda f(x) funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, yuqoridan (quyidan) biror M (yoki m) soni bilan chegaralangan bo‘lsa, u holda bu funksiya $x\to a$ bo‘lganda limitga ega va bu limit uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)\le M$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)\ge m$) munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Turli funksiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2.7182818284.......$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Bular matematikada ajoyib limitlar deb ataladi va ularning isboti kelgusi ma’ruzalarda beriladi.

6.3-§. UZLUKSIZ FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI

y=f(x) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Ta’rif : y= f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda u bu nuqtada aniqlangan va quyidagi shart bajarilsa:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (6.1)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini hisobga olib, (6.1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin.

Demak, f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiya olish va limit olish amallarini o‘rnini almashtirish mumkin bo‘lishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funksiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orqali tekshirish qulay.

Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo'lsa, $x-x_0$ ayirma argument orttirmasi deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu holda $f(x)-f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi va Δf yoki Δy kabi belgilanadi.

Demak, Δx argumentning o'zgarishini, Δf esa funksiya o'zgarishini ifodalaydi. Agarda $x \to x_0$ bo'lsa, u holda $\Delta x \to 0$ bo'ladi. $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (6.1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (6.2)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu shartni $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f=0 \qquad (6.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lishi uchun argumentning «kichik» Δx o'zgarishiga funksiyaning ham «kichik» Δf o'zgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $y=x^2$ funksiyaning har qanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (6.3) shart yordamida ko'rsatamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0.$$

Teorema: Agarda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agarda qo'shimcha ravishda $g(x_0)\neq 0$ shart bajarilsa, $f(x)/g(x)$ nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir. Agarda $U_0=g(x_0)$ nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, $f(g(x))=F(x)$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot: Teoremaning isboti limitlar xossalaridan va uzluksizlikning (6.1) shartidan kelib chiqadi.

Masalan, $h(x)=f(x)\pm g(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. Teorema shartiga asosan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Ta'rifga asosan $h(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Teoremaning qolgan qismini isboti talabalarga mustaqil ish sifatida tavsiya etiladi.

Asosiy teorema va bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Barcha elementar funksiyalar aniqlanish sohasidagi har bir x_0 nuqtasida uzluksiz bo'ladi.

Ta'rif: y=f(x) funksiya biror chekli yoki cheksiz $(a,в)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u shu intervalda uzluksiz deyiladi.

Masalan, $y=(1-x^2)^{-1/2}$ moslik (-1,1) da uzluksizdir.

Ta'rif : y=f(x) funksiya *a* nuqtada aniqlangan bo'lib,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a) \ (\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a))$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f(x) funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases} 1>0 \\ -1<0 \end{cases} \tag{6.4}$$

funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1=f(0).$$

Ammo

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} (-1)=-1\neq f(0),$$

ya'ni $x=0$ nuqtada funksiya chapdan uzluksiz emas.

Agarda $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu nuqtada ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'ladi.

Aksincha, $x=a$ nuqtada funksiya chapdan va o'ngdan uzluksiz bo'lsa, bu nuqtada funksiya uzluksizdir.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a) \tag{6.5}$$

shart zarur va yetarlidir.

Ta'rif : $y=f(x)$ funksiya uchun biror *a* nuqtada (6.5) tenglik bajarilmasa, u shu nuqtada uzlukli, *a* esa uning uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan, (6.4) funksiya uchun $x=0$, $y=(1-x^2)^{-2}$ funksiya uchun esa $x=\pm1$ uning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Agarda a nuqta $y=f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lib, bu nuqtada funksiyaning chap va o'ng limitlari chekli sonlardan iborat bo'lsa, x=a funksiyaning I tur uzilish nuqtasi deyiladi. Masalan, (6.4)-funksiya uchun x=0 I tur uzilish nuqtasi bo'ladi. Bu holda $f(a+0)-f(a-0)$ funksiyaning a nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

Agarda $y=f(x)$ funksiyaning *a* uzilish nuqtasida uning chap va o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa $x=a$ II tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$y = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ x^{-2}, x < 0 \end{cases}$$

funksiya x=0 nuqtada II tur uzilishga ega, chunki $f(+0)=0$, $f(-0)=\infty$ bo'lmoqda.

Xuddi shunday, $f(x)=(x-2)^{-1}$ funksiya uchun $x=2$ II tur uzilish nuqtasi bo'ladi, chunki $f(2-0)=-\infty, f(2+0)=\infty$.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiya $[a, в]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agarda $y(a, в)$ intervalda uzluksiz, $x=a$ $(x=в)$ chegaraviy nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lsa.

Masalan, $y=sinx$ funksiya har qanday $[a, в]$ kesmada uzluksizdir.

Agarda funksiya [a,в] kesmada uzluksiz bo'lsa, uning grafigining shu kesmaga mos keluvchi qismi yaxlit (uzluksiz) chiziqdan iborat bo'ladi. Agarda f(x) funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lsa, uning grafigi ham shu nuqtada uziladigan chiziqdan iborat bo'ladi. Uzluksizlikning bu geometrik talqini uzluksiz funksiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

1 xossa: Agarda $f(x)$ funksiya $[a, в]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada kamida bitta shunday $x_1(x_2)$ nuqta mavjudki, har qanday $x\in[a, в]$ uchun $f(x_1)\geq f(x)$ $(f(x_2)\leq f(x))$ munosabat bajariladi.

Bu xossadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a, в]$ kesmadagi eng katta yoki eng kichik qiymati deb ataladi va

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

kabi belgilandi. Haqiqatan ham, funksiya grafigining eng baland yoki eng past joylashgan nuqta yoki nuqtalaridan birining abssissasi x_1 yoki x_2 deb olsak, xossada aytilgan tasdiq kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funksiya uchun $x_1=4$, $x_2=2$ bo'ladi, chunki bu kesmada $4\leq x^2\leq 16$, ya'ni $f(2)\leq f(x)\leq f(4)$ munosabat o'rinli.

2 xossa: Agar f(x) funksiya [a,в] kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)f(в)<0$ shart bajarilsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a, в)$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

Bu xossaning geometrik ma'nosi shundan iboratki, ko'rsatilgan shartlarda funksiya grafigi [a,в] kesmada uzluksiz chiziqdan iborat bo'lib, uning bir uchi *Ox* koordinata o'qidan pastda, ikkinchi uchi esa undan yuqorida bo'ladi. Shu sababli funksiya grafigi *Ox* o'qini kamida bitta $x=c$ nuqtada kesib o'tadi va shu nuqtada $f(x)=0$ bo'ladi.

Bu xossa yordamida $f(x)=0$ ko'rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliqlarni topish mumkin. Masalan, $x\text{-}cosx=0$ tenglama $(0,\pi)$ oraliqda ildizga ega, chunki $f(x)=x\text{-}cosx$ funksiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz va $f(0)=-1<0, f(\pi)=+1>0$.

Demak, qandaydir $x_0\in(0,\pi)$ nuqtada $f(x_0)=0$ bo'ladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

3 xossa: Agarda $f(x)$ funksiya $[a, в]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(в)=B$, $A\neq B$ bo'lsa, har qanday $\mu\in(A, B)$ son uchun kamida bitta shunday $c\in(a, в)$ nuqta topiladiki, unda $f(c)=\mu$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu xossani geometrik nuqtayi nazardan quyidagicha talqin etish mumkin. Oy koordinata o'qida joylashgan va $A<\mu<B$ shartni qanoatlantiradigan μ nuqtadan Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$, $x\in[a,в]$, funksiya grafigini hech bo'lmaganda bitta M nuqtada kesib o'tadi. Shu nuqtaning abssissasi $x=c$ uchun $f(c)=\mu$ tenglik bajariladi.

Masalan, $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$, funksiya uchun $A=1$, $B=27$ va har qanday $\mu\in(1,27)$ uchun $c=\sqrt[3]{\mu}$ deb olsak, $f(c)=c^3=(\sqrt[3]{\mu})^3=\mu$ tenglik bajariladi. Bu xossadan ushbu natijani chiqarish mumkin:

Natija: Agarda $f(x)$ funksiya $[a, в]$ kesmada uzluksiz va bu yerda uning eng katta va eng kichik qiymatlari M va m bo'lsa, u holda funksiya qiymatlari $[m,M]$ kesmani to'liq to'ldiradi.

XULOSA

6-bob matematik tahlilning bosh tushunchasi bo'lgan funksiya tushunchasiga bag'ishlangan. Funksiya – bu ikkita to'plam elementlari o'rtasida o'rnatilgan moslikni bildiradi. Agarda bu moslik bir qiymatli bo'lsa, funksiya ham bir qiymatli funksiya, ko'p qiymatli bo'lsa, ko'p qiymatli funksiya deyiladi.

Funksiya tushunchasining kiritilishi bilan funksiyaning xususiyatlari [va ular ustida bajariladigan amallar] to'g'risida gapirganda, avvalo o'zgarmas funksiya, chiziqli funksiya, kvadratik funksiya, kasr-ratsional funksiya, ko'rsatkichli funksiya, logarifmik funksiya, trigonometrik kabi funksiya teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar va ularning xossalarini esga olish kerak. Asosiy elementar funksiyalar ustida amallar bajarish natijasida elementar funksiyalar tuziladi.

Funksiyani xarakterlashda uning limiti va uzluksizligi tushunchalari muhim o‘rin tutadi. Funksiyaning biror x_0 nuqtadagi limiti funksiya qiymatlari qandaydir n_0 nomerdan boshlab qolgan barcha qiymatlari A_0 qiymatiga yetarlicha yaqin atrofida yotsa, A_0 ga funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi. Limit degani chegara ma’nosini berib, funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatining chegaralanganligini bildiradi. Agar bu limit ∞ bo‘lsa, funksiya ∞ limitga ega yoki chegaralangan degan ma’noni bildiradi.

Funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi tushunchasi funksiyaning limiti tushunchasi bilan uzviy bog‘liq. Funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun funksiyaning x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlari mavjud bo‘lib, bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishi shart.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi uzilishi biz uch guruhga bo‘lib o‘rganamiz: yo‘qotiladigan uzilish nuqtasi, I tur uzilish nuqtasi, II tur uzilish nuqtasi. Bu uzilish turlari funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlarining, shuningdek, x_0 nuqtaning o‘zida qabul qiladigan qiymatiga bog‘liq bo‘ladi.

6-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Ta’rifni to‘ldiring.

Ta’rif: $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D{f} deb .... aytiladi.

A) $f(x)$ funksiya qabul qiladigan qiymatlar to‘plamiga;
B) x argument qabul qiladigan qiymatlar to‘plamiga;
C) $f(x)$ funksiyaning musbat qiymatlari to‘plamiga;
D) $f(x)=0$ tenglama ildizlari to‘plamiga;
E) $f(x)$ funksiyaning manfiy qiymatlari to‘plamiga.

2. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasi qayerda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?

A) $[-1; +\infty)$; B) $[-1; 1)$; C) $(-\infty; 1)$; D) $(-\infty; +\infty)$; E) $x \neq 1$.

3. Ushbu $f(x)=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A. $[0,+\infty)$; B. $(-\infty;0)$; C. $[-4,+\infty)$; D. $[0,4]$;
E. $[-4;0]$.

4. Ushbu funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\sqrt{2x+1}-\lg x$

A. $(-1,+\infty)$; B. $(0,+\infty)$; C. $(2,11)$; D. $(-\infty,+\infty)$; E. $(1,+\infty)$.

5. Ushbu funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$

A. $[1,+\infty)$; B. $[0,+\infty)$; C. $(-\infty,+\infty)$; D. $(-\infty,1)$; E. $(1,+\infty)$.

6. Ushbu funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2}$

A. $[0,1]$; B. $[1,2]$; C. $(-\infty,+\infty)$; D. $[-1,3]$; E. $[-1,1]$.

7. Ushbu funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $f(x)=arctg\frac{x-1}{2}$

A. $[0,1]$; B. $[1,2]$; C. $(-\infty,+\infty)$; D. $[-1,3]$; E. $[-1,1]$.

8. Agar $f(x)=x^2$ va $g(x)=\sqrt{3-x}$ bo'lsa, ularning aniqlanish sohalari bo'yicha $D\{f\}\cap D\{g\}$ to'plamni toping.

A. R; B. $(-\infty;3]$; C. $(-\infty,2]$; D. $[2,3]$; E. $(-3;0]$.

9. Ta'rifni to'ldiring.

Ta'rif: *y =f(x)* funksiyaning o'zgarish sohasi E{f} deb .... aytiladi.

A) *f(x)* funksiya qabul qiladigan qiymatlar to'plamiga;
B) *x* argument qabul qiladigan qiymatlar to'plamiga;
C) *f(x)* funksiyaning musbat qiymatlari to'plamiga;
D) *f(x)*=0 tenglama ildizlari to'plamiga;
E) *f(x)* funksiyaning manfiy qiymatlari to'plamiga.

10. $y=\sqrt{4-x^2}$ funksiyaning o'zgarish (qiymatlar) sohasini toping.

A) $[0,4]$; B) $[0,2]$; C) $[0,5]$; D) $[-1,3]$; E) $[0,3]$.

11. Qaysi shartda y=f(x) funksiya albatta juft bo'ladi?

A) $f(x)f(-x)>1$; B) $f(x)-f(-x)=0$; C) $f(x)+f(-x)=0$;
D) $f(x)f(-x)\le 0$; E) $|f(x)|=|f(-x)|$.

12. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri juft emas?

A) $y=\cos^3 x$; B) $y=-x^4$; C) $y=|x|$;
D) $y=\sin^3 x$; E) $y=\sin x^2$.

13. Toq funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?

A. Y=f(x) funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik $\forall x\in[a;b]$ da bajarilsa, unga toq funksiya deyiladi;

B. Y=f(x) funksiyaning aniqlanish sohasi D(f) nol nuqtaga nisbatan simmetrik soha bo'lib, $\forall x\in D(f)$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, unda bu funksiya toq funksiya deyiladi;

C. Agar biror $x \in D(f)$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, unda $y=f(x)$ toq funksiya deyiladi;

D. $y=f(x)$ funksiya uchun $f(-x) = \pm f(x)$ tenglik bajarilsa, unga toq funksiya deyiladi;

E. $Y=f(x)$ funksiya uchun $f(x-T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, unga toq funksiya deyiladi.

14. Qaysi shartda $y = f(x)$ funksiya albatta toq bo'ladi?

A) $f(x) \cdot f(-x) > 0$; B) $f(x) -- f--x) = 0$; C) $f(x) + f(-x) = 0$;

D) $f(x) \cdot f(-x) \leq -1$; E) $|f(x)| = |f(-x)|$.

15. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri toq?

A) $y=\sin^3 x$; B) $y=\cos^3 x$; C) $y=|x|^3$; D) $y=(x-1)^4$;

E) $y=(x+1)^4$.

16. Ushbu $f(x)=1+\sin x$, $g(x)=1-\cos x$, $\varphi(x)=x+x^2$ funksiyalardan qaysi birlari toq funksiya emas?

A. $f(x)$; B. $G(x)$; C. $\varphi(x)$; D. $F(x), g(x)$; E. $f(x), g(x), \varphi(x)$.

17.Funksiya limiti ta'rifini to'ldiring:

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiya $x \to a$ bo'lganda A soniga teng limitga ega deyiladi va $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ kabi belgilanadi, agarda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki ....

A) $|x-a| < \delta$ bo'lganda $|f(x)+ A| < \varepsilon$ bo'lsa;

B) $|x-a| < \varepsilon$ bo'lganda $|f(x) - A| < \delta$ bo'lsa;

C) $|x+a| < \delta$ bo'lganda $|f(x)+A| < \varepsilon$ bo'lsa;

D) $|x+a| < \delta$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa;

E) $|x-a| < \delta$ bo'lganda $|f(x)-A| < \varepsilon$ bo'lsa.

18. Agarda $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A_1$ va $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A_2$ bo'lsa, quyidagi tengliklardan qaysi biri har doim ham o'rinli emas?

A) $\lim\limits_{x \to a}(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1 A_1 + c_2 A_2$;

B) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2$;

C) $\lim\limits_{x \to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2$;

D) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$;

E) Barcha tengliklar har doim o'rinli bo'ladi.

19.Qaysi shartda $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi?

A) Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lsa;

B) Agarda $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ mavjud bo'lsa;

C) Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ limitlardan kamida bittasi mavjud bo'lsa;

D) Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ limitlardan faqat bittasi mavjud bo'lsa;

E) Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ limitlarning ikkalasi ham mavjud bo'lsa.

20. I-ajoyib limitni ko'rsating.

A) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$;

D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x} = a$; E) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o'zgarmas deyiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday miqdorlar o'zgaruvchi deyiladi? Misollar keltiring.
3. Funksiya qanday ta'riflanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning o'zgarish (qiymatlar) sohasi qanday ta'riflanadi?
6. Funksiya grafigi deb nimaga aytiladi?
7. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
8. Qaysi shartda funksiya o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi?
9. Qaysi shartda funksiya juft (toq) deb ataladi?
10. Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
11. Murakkab funksiya qanday ta'riflanadi?
12. Teskari funksiya qanday aniqlanadi?
13. Qaysi funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi?
14. Elementar funksiyalar deb qanday funksiyalarga aytiladi?

VII bob. DIFFERENSIAL HISOB

Matematik analiz haqli ravishda matematik fanlar ichida birinchisi hisoblanadi.

P.E.Apple

Bobning o'quv maqsadi

Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisob usullarini, xossalarini, tatbiqlarini talabalarga yetkazish mazkur bob oldiga maqsad qilib qo'yilgan.

Shvetsariyalik matematik Luivil Simon Antuan Jan limitlar nazariyasi ustida ishlab «Yuqori hisoblash prinsiplarning sodda bayoni» (1786) kitobida birinchi bo'lib, lim $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ belgilashni kiritdi, limitlar nazariyasini kengaytirib, cheksiz kichik miqdorlar ustida amallar bajarishning umumiy teoremalarini isbotladi.

$\frac{dy}{dx}$ belgisi Leybnis G. tomonidan birinchi bo'lib kiritilgan. Uning asosiy tushunchasi hosila emas, balki differensial bo'lgan.

O'zguruvchi miqdorlarning orttirmasini, ya'ni $\Delta y=y_2-y_1$ va $\Delta x=x_2-x_1$ ni birinchi bo'lib, Eyler L. XVIII asrda «Δ« grek harfi bilan belgilagan. Shu belgilar hozirgacha saqlanib kelinmoqda. «Hosila» termini – fransuzcha «derivee» so'zidan olingan bo'lib, L. Arbogastning «Hosilalarni hisoblash» (1800) kitobida birinchi bo'lib foydalanilgan; O.Koshi esa shu terminning birinchi harfidan foydalanib, hosilani quyidagi belgilar, ya'ni *Dy* yoki *D f(x)* ko'rinshida belgilagan.

Differensialning ma'nosi va termini birinchi bo'lib, G.Leybnis tomonidan kiritilgan.

Ingliz matematigi Isaak Nyuton o'zgaruvchilarni- – «flyuenta», flyuentaning harakat tezligini esa «flyuksiya» – (vaqt bo'yicha hosila) deb atagan. Agar flyuentani «y» deb belgilasak, uning birinchi flyuksiyasi - $\dot{y}$, ikkinchisi esa $\ddot{y}$ va hokazo bo'ladi. Hosilaning asosiy tushuncha sifatida bayon qilinishi I.Nyuton va G.Leybnisda har xil berilgan.

I.Nyutonda flyuksiya – bu flyuentaning o'zgarish tezligi bo'lsa, G.Leybnitsda esa differensiallar nisbati ko'rinishda berilgan.

Lekin matematiklar differensial va integral hisobida G.Leybnis tomonidan qo'llangan terminologiya va belgilash, ya'ni flyuksiya va flyuenta o'rniga hosila va integral, oniy hisob o'rniga – differensial hisob deb foydalanib kelinmoqdalar.

7.1-§. FUNKSIYA HOSILASI VA UNING GEOMETRIK, MEXANIK MA'NOSI

$y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan bo'lib, x va $x+\Delta x$ shu oraliqdagi nuqtalar bo'lsin. Bu holda argumentning Δx orttirmasiga funksiyaning $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirmasi mos keladi.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiya Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(x)$ yoki $y'(x)$ kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (7.1)$$

Misol sifatida $f(x)=x^2$ funksiya hosilasini ta'rifga asosan topamiz:

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Demak, $(x^2)'=2x$ bo'lar ekan.

$y=f(x)$ funksiya hosilasining geometrik ma'nosini aniqlash uchun bu funksiyaning grafigida abssissasi x va $x+\Delta x$, ordinatalari esa $f(x)$ va $f(x+\Delta x)$ bo'lgan M va N nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardan o'tuvchi MN kesuvchining OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini β kabi belgilaymiz. Bu holda tegishli chizmani chizib, $\mathrm{tg}\beta=\frac{\Delta f}{\Delta x}$ natijani olish mumkin. Endi $\Delta x\to 0$ bo'lsin. Bu holda N nuqta M nuqtaga yaqinlashib boradi, MN kesuvchi esa funksiya grafigining M nuqtasiga o'tkazilgan urinmaga yaqinlashib boradi. Bu urinmaning OX o'qi musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini α deb belgilasak, yuqorida aytilganlarga ko'ra $\Delta x\to 0$ bo'lganda $\beta\to\alpha$ yoki $\mathrm{tg}\,\beta\to\mathrm{tg}\alpha$ munosobat o'rinli bo'ladi. Demak,

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Shunday qilib, f(x) hosila qiymati funksiya grafigining M(x,f(x)) nuqtadagi urinmasining k=tgα burchak koeffitsiyentiga teng ekan.

Hosilaning mexanik ma'nosini ko'rsatish uchun x argumentni vaqt momenti, y=f(x) funksiyani esa to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning x vaqt momentigacha bosib o'tgan masofasi deb qaraymiz. Bu holda Δf orttirma Δx vaqt ichida moddiy nuqtaning bosib o'tgan yo'lini, Δf/Δx nisbat esa uning v (o'rtacha) tezligini ifodalaydi. $\Delta x\to 0$ bo'lganda v (o'rtacha) tezlik moddiy nuqtaning x vaqt momentidagi v (oniy) tezligiga yaqinlashib boradi, ya'ni

$$v(oniy) = \lim_{\Delta x\to 0} v(o'rtacha) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Demak, $f'(x)$ hosila f(x) funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalaydi.

Agar y=f(x) funksiya x nuqtada chekli f(x) hosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Funksiyaning differensiallanuvchanligi va uzluksizligi orasidagi bog'lanish quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

Teorema: Agarda y=f(x) funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot : Funksiya uzluksizligi ta'rifiga asosan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0 \qquad (7.2)$$

munosabatni ko'rsatish kifoya. Hosila ta'rifini ifodalovchi (7.1) tenglik va limitni mavjudligi haqidagi oldin ko'rib o'tilgan lemmaga asosan:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)+\alpha(\Delta x)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $\Delta x\to 0$ bo'lganda $\alpha(\Delta x)$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Bu holda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}(\, f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x) = f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\,\Delta x = 0.$$

Demak, (7.2) munosabat o'rinli va shu sababli f(x) funksiya x nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Izoh : Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o'rinli emas.

Masalan, f(x)=$|x|$ funksiya x=0 nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differensiallanuvchi emas. Haqiqatan ham, x=0 nuqtaga Δx

orttirma berganimizda $\Delta f=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x$ tengik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1, \qquad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Demak, $\Delta x\to 0$ bo'lganda $\Delta f/\Delta x$ nisbat limitga ega emas, ya'ni $f'(0)$ hosila mavjud emas.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu oraliqda differensiallanuvchi deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya har qanday oraliqda differensiallanuvchi. $y=|x|$ funksiya esa $x=0$ nuqtani o'z ichiga olmaydigan oraliqlarda (masalan, (-1,0), (0,1), (2,4) oraliqlarda) differensiallanuvchi, $x=0$ nuqtani o'z ichiga oluvchi oraliqlarda (masalan, (-1,1), (-5,3) oraliqlarda) differensiallanuvchi bo'lmaydi.

7.2-§. FUNKSIYANI DIFFERENSIALLASH QOIDALARI. HOSILALAR JADVALI

Umumiy holda $y=f(x)$ funksiyaning hosilasini topish, ya'ni uni differensiallash, quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshiriladi:

1) x argumentga $\Delta x\neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;

2) Funksiya orttirmasini $\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)$ tenglik bo'yicha hisoblaymiz;

3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni topamiz va uning $\Delta x\to 0$ bo'lgandagi limitini hisoblaymiz.

Bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati $f'(x)$ hosilani aniqlaydi.

Misol sifatida $f(x)=\sin x$ funksiya hosilasini yuqoridagi algoritm bo'yicha topamiz:

1) x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funksiyani hisoblaymiz;

2) trigonometrik formuladan foydalanib, funksiya orttirmasini quyidagicha yozamiz;

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)$$

3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni tuzamiz va uning limitini hisoblaymiz;

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta f/\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)/\Delta x=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Bu yerda ko'paytmaning limiti, $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ ajoyib limitdan va $y=\cos x$ funksiya uzluksizligidan foydalanildi. Demak, $(\sin x)'=\cos x$ bo'ladi. Xuddi shunday usulda

$$(\cos x)'= -\sin x\ ,\ (a^x)'= a^x\ln a\ ,\ (\log_a x)'= \frac{1}{x}\log_a e$$

ekanligini isbotlash mumkin.

Ammo, har qanday funksiya hosilasini bu algoritm bo'yicha hisoblash oson emas va muhimi shart ham emas. Umumiy holda funksiya hosilasini hisoblash quyidagi differensiallash qoidalari bo'yicha amalga oshirish mumkin.

1-qoida: O'zgarmas C sonning hosilasi nolga teng, ya'ni $(C)'=0$.

Isbot: O'zgarmas C sonni x argumentning har qanday qiymatida bir xil qiymat qabul qiluvchi $f(x)=C$ funksiya deb qarash mumkin. Bu holda,

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0, \qquad \Delta f/\Delta x=0,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0 \text{ bo'ladi.}$$

2-qoida: $u=u(x)$, $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $u\pm v$, $u\cdot v$ *va* $v(x)\neq 0$ shartda u/v funksiyalar ham differensiallanuvchi bo'lib, ularni hisoblash uchun

$$(u\pm v)'= u'\pm v',\quad (u\cdot v)'= u'\cdot v + u\cdot v',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Isbot: Funksiya orttirmasi ta'rifidan foydalanib, har qanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu holda limit xossasi va hosila ta'rifiga asosan,

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Xuddi shunday,

$$\Delta(u\cdot v) = u\cdot\Delta v + v\cdot\Delta u + \Delta u\cdot\Delta v,\quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u\Delta v-u\Delta v}{v^2}$$

munosobatlardan foydalanib, 2-qoidadagi qolgan formulalarni ham isbotlash mumkin.

Natija 1: Funksiyaga ixtiyoriy C o'zgarmas sonni qo'shsak, uning hosilasi o'zgarmaydi.

Haqiqatan ham $(f(x)+C)'=f'(x)+C'= f'(x)+0= f'(x)$.

Natija 2: O'zgarmas C ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.

Haqiqatan ham, ko'paytmaning hosilasi formulasi va 1-qoidaga asosan,

$$(C\cdot f(x))'=C'\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+C\cdot f'(x)=C\cdot f'(x).$$

Natija 3: $(\mathrm{tg}x)'=1/\cos^2 x$, $(\mathrm{ctg}x)'=-1/\sin^2 x$.

Haqiqatan ham, bo'linmaning hosilasi formulasiga ko'ra

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday, ravishda $(\mathrm{ctg}x)'$ hosila topiladi.

3-qoida: $y=f(u)$ murakkab funksiyada $f(u)$ va $u(x)$ funksiyalar argumentlari bo'yicha differensiallanuvchi bo'lsin. Bu holda $y=f(u)$ murakkab funksiya x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi

$$f'_x=f'_u(u)\cdot u'(x)$$

formula bilan topiladi.

Isbot : $u(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lganligidan uning uzluksizligi kelib chiqadi va shu sababli $\Delta x\to 0$ bo'lganda $\Delta u\to 0$ bo'ladi. Hosila ta'rifiga asosan,

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'_u(u)\cdot u'(x).$$

Masalan, $(\sin x^2)'=$ [bunda $i=x^2$ desak] $=(\sin i)'_x=\cos i\cdot i'=2x\cos x^2$.

Bu qoidaning tatbiqi sifatida $y=x^\alpha$ darajali funksiyaning y' hosilasini topamiz. Bu holda

$$\ln y=\ln x^\alpha=\alpha\ln x\Rightarrow(\ln y)'_x=(\alpha\ln x)'\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow y'=\frac{\alpha}{x}y=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

bo'ladi.

4-qoida: $y=f(x)$ differensiallanuvchi va $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ formula bo'yicha topiladi.

Isbot: $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiyaning argument orttirmasi $\Delta y\neq 0$ bo'lgandagi orttirmasi Δx bo'lsin. Berilgan $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lgani uchun uzluksizdir va shu sababli, unga teskari $f^{-1}(y)$ funksiya ham uzluksiz bo'ladi. Demak, $\Delta y\to 0$ bo'lganda $\Delta x\to 0$ bo'ladi. Bu holda, hosila ta'rifiga asosan,

$$x_y'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1}=\frac{1}{y'_x}.$$

Misol sifatida y=arcsin$x$ funksiya hosilasini topamiz.

Bu yerda D{f}=[-1;1], E{f}=[-π/2, π/2] bo'lgani uchun, x=sin$y$ teskari funksiyaning hosilasi $x'_y = \cos y \neq 0$, y ∈(-π/2 π/2), shartni qanoatlantiradi. Bu holda

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

ammo $y\in(-\pi/2\ \pi/2)$ bo'lganda cos$y > 0$ va

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2},\ x\in(-1,1)$$

tenglik o'rinli. Bu natijani oldingi tenglikka qo'yib,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

formulani hosil qilamiz. Xuddi shunday, usulda

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

formulalarni hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, barcha asosiy elementar funksiyalar aniqlanish sohasida differensiallanuvchi va ularning hosilalari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, α ixtiyoriy haqiqiy son;

2) $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$, $(e^x)' = e^x$; 3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\, x)' = -(\mathrm{arcctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Bu hosilalar jadvalidan va ko'rib o'tilgan

I. $(C)' = 0$ II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, III. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$,

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ V. $[f(u)]' = f'_u\cdot u'_x$ VI. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

hosila olish qoidalaridan foydalanib, har qanday elementar funksiyaning hosilasini hisoblash mumkin.

Masalan,

$$(e^x\cdot\sin 2x)' = (e^x)'\sin 2x + e^x(\sin 2x)' = e^x\cdot\sin 2x + e^x\cdot\cos 2x\cdot(2x)' =$$
$$= (\sin 2x + 2\cdot\cos 2x)\, e^x,$$

$$(\ln\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx\cdot$$

7.3-§. KESMADA DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR HAQIDAGI TEOREMALAR

Biz quyida differensial hisobning asosiy teoremalaridan bo'lib hisoblanadigan teoremalarni keltiramiz.

1-teorema (Roll teoremasi): f(x) funksiya [a, b] kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lib, chegaralarida teng qiymatlar qabul qilsin, ya'ni f(a)=f(b) bo'lsin. U holda shu kesma ichida kamida bitta shunday «c» nuqta topiladiki, unda funksiya hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot: Kesmada uzluksiz funksiya shu kesmada o'zining eng kichik (m) va eng katta (M) qiymatlariga erishishi bizga ma'lum.

Agar m=M bo'lsa, u holda albatta f(x)=const bo'ladi va teorema tasdig'i kesmaning har bir nuqtasida bajariladi.

Aytaylik, m<M bo'lsin. Kesma chegaralarida funksiya qiymatlari o'zaro teng bo'lgani uchun funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari kesmaning faqat ichki nuqtalarida erishiladi.

Agar biror a<c<b nuqtada f(c) = M bo'lsa, u holda $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ bo'ladi. Bu yerdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0, \text{ agar } \Delta x>0 \text{ bo'lsa,}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0, \text{ agar } \Delta x< 0 \text{ bo'lsa.}$$

Kesmaning ichki nuqtalarida funksiyaning differensiallanuvchanligidan foydalanib, yuqoridagi munosabatlarda limitga o'tsak, u holda quyidagi xulosalarga kelamiz:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{va} \quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$$

Ammo $f'(c)\ge 0$ va $f'(c)\le 0$ tengsizliklar faqat $f'(c)=0$ bo'lgandagina birgalikda bo'ladi. f(c)=m hol ham xuddi shunday ko'riladi. Teorema isbot qilindi.

Shunday qilib, differensiallanuvchi funksiyaning teng qiymatlari orasida funksiya hosilasining hech bo'lmaganda bitta noli mavjud ekan.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: uzluksiz funksiya (a, b) oraliqdagi har bir nuqtada yagona urinmaga ega bo'lsa va kesmaning chegaralarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, u holda shu urinmalar orasida kamida bittasi OX o'qiga parallel bo'ladi.

2-teorema: (Lagranj teoremasi): f(x) funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning ichki nuqtalarida hosilaga ega bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday «c» nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{yoki} \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartini qanoatlantiruvchi f(x) funksiya orqali ushbu yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Bu funksiyaning (a,b) oraliqdagi hosilasini topamiz:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Kiritilgan $\varphi(x)$ funksiya $\varphi(a)=0$ va $\varphi(b)=0$ shartlarni qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga asosan kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, $c\in(a,b)$ va $\varphi'(c)=0$ bo‘ladi. Bundan

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

natija kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi shundan iboratki, f(x) funksiya grafigining A(a, f(a)) va B(b, f(b)) nuqtalarini tutashtiruvchi AB vatarga parallel va qandaydir C(c, f(c)) nuqtadan o‘tuvchi urinma mavjud.

3-teorema (Koshi teoremasi): f(x) va g(x) funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar $\forall x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, unda ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Isbot: Teorema shartiga ko‘ra $\forall x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ ekanligidan $g(b)\neq g(a)$ kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $g(b)=g(a)$ bo‘lsa, unda Roll teoremasiga asosan, kamida bitta «c» nuqtada $g'(c)=0$ bo‘lar edi. Bu esa teorema shartiga zid. Shu sababli quyidagi yordamchi funksiyani kiritish mumkin:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Bu funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib,

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

hosilaga ega. Kiritilgan yordamchi F(x) funksiya F(a)=F(b)=0 shartni qanoatlantirishini tekshirib ko‘rishimiz mumkin. Demak, F(x) funksiya [a,b] kesmada Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun [a,b] kesma ichida kamida bitta shunday c nuqta (a<c<b) topiladiki, unda F′(c)=0 bo‘ladi, ya’ni

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Bundan esa teorema tasdig‘i to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi, ya’ni

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Izoh: Koshi teoremasidan xususiy g(x)=x holda Lagranj teoremasi kelib chiqadi. Ko‘rib o‘tilgan bu uchta teoremaning ahamiyati funksiyani hosila yordamida to‘la tekshirish va aniqmasliklarni ochishda ko‘rinadi.

7.4-§. FUNKSIYA DIFFERENSIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIALLAR

Berilgan y=f(x) funksiyada x argument orttirmasi Δx bo‘lganda funksiya orttirmasi $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ kabi aniqlanishini eslatib o‘tamiz.

Ta’rif: Agarda $\Delta x\to 0$ bo‘lganda funksiya orttirmasini

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x \qquad (7.3)$$

ko‘rinishda ifodalab bo‘lsa, unda $A\cdot\Delta x$ ifoda shu funksiyaning **differensiali** deyiladi va df kabi belgilanadi. Bunda A Δx ga bog‘liq emas, $\alpha(\Delta x)$ esa cheksiz kichik miqdordir.

Demak, funksiya differensiali uning orttirmasini Δx ga nisbatan chiziqli qismini ifodalaydi.

Ta’rif bo‘yicha, ya’ni (7.3) tenglik orqali funksiya differensialini topish ancha murakkab masaladir. Shu sababli uni osonroq usulda topish masalasi paydo bo‘ladi. Bu masala quyidagi teoremada o‘z yechmini topadi.

Teorema: Agar y=f(x) funksiya biror (a,в) oraliqda differensiallanuvchi, ya’ni $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning differensiali

$$df=f'(x)\cdot\Delta x \qquad (7.4)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Hosila ta’rifi va limitning mavjudligi haqidagi lemmaga asosan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow\Delta f=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

Oxirgi tenglikni (7.3) bilan solishtirib va differensial ta'rifidan foydalanib, (7.4) formulaga ega bo'lamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Endi f(x)=x xususiy holni ko'ramiz. Bu holda df =dx bo'ladi va (7.4) formulaga asosan dx=(x)'·Δx=Δx. Demak, x erkli o'zgaruvchi (argument) uchun Δx=dx, ya'ni orttirma va differensial tushunchalari bir narsani ifodalaydi. Shu sababli differensialni hisoblashning (7.4) formulasini

$$df=f'(x)dx \tag{7.5}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, funksiya differensialini topish uchun uning hosilasini dx ga ko'paytirish kifoya.

Masalan, $dx^2=(x^2)'dx=2x\,dx$, $d\sin x=(\sin x)'dx=\cos x\,dx$ bo'ladi.

(7.5) formuladan hosilani $f'(x)=\frac{df}{dx}$ kabi belgilash ma'nosi kelib chiqadi.

(7.3) tenglik va differensial ta'rifidan

$$\Delta f=df+\alpha(\Delta x)\Delta x \tag{7.6}$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik bo'lganda funksiya orttirmasi Δf va differensiali df qiymatlari bir-biriga yaqin bo'lishini, ya'ni Δf ≈df bo'lishini ko'ramiz.

1-misol. f(x)=x^2 funksiyaning x=40 va Δx=0,01 bo'lgandagi orttirmasi va differensiali topilsin.

Yechish. $df=2xdx=2\cdot40\cdot0{,}01=0{,}8$

$$\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot40\cdot0{,}01+0{,}0001=0{,}8+0{,}0001=0{,}8001.$$

Bu natijalardan ko'rinib turibdiki, (Δf va df qiymatlari qanchalik yaqin ekan. Shu sababli (7.6) formuladan ushbu taqribiy hisoblash formulasini keltirib chiqarish mumkin:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta dx\,. \tag{7.7}$$

(7.7) formula taqribiy hisoblashlarda keng foydalaniladi.

2-misol. sin31° hisoblansin.

Yechish. f(x)=sin$x$ funksiyani kiritamiz. Unda f '(x)=cos$x$. va x=30°, Δx=1° holda (7.7) formuladan quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0=$$

$$\sin(30°+1°)\approx\sin30°+\cos30°\cdot1°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{1{,}73}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180}=0{,}52.$$

Bunda 1°=π/180 ekanligidan foydalandik. Demak, sin31°≈0,52.

3-misol. $\sqrt{25{,}002}$ ifoda hisoblansin.

Yechish. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyani kiritsak $f'(x)=1/2\sqrt{x}$ ekanligini hisobga olib va $x=25$, $\Delta x=0{,}002$ desak, u holda (7.7) taqribiy hisoblash formuladan,

$$\sqrt{25{,}002} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 0{,}002 = 5 + \frac{0{,}002}{10} = 5{,}0002$$

taqribiy qiymatni olamiz.

Shunday qilib, differensialni hisoblash funksiya hosilasini argument differensialiga ko'paytirish bilan aniqlanadi. Shuning uchun ham hosila hisoblash qoidalari osongina differensial hisoblash uchun ko'chiriladi:

1. $dC=0$, $C=const$ 2. $dCf(x) = Cdf(x)$ 3. $d[f(x)\pm g(x)]= df(x)\pm dg(x)$

4. $df(x)g(x)=f(x)dg(x)+g(x)\,df(x)$

5. $d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{\varphi(x)df(x)-f(x)d\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2}$

Endi $y=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funksiyaning differensialini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bunda tashqi $f(u)$ va ichki $u(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi deb qaraladi. Differensialni hisoblash (7.5) formulasi va murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni yozish mumkin:

$$df(u) = (f(u))'dx = f'(u)\cdot u'dx = f'(u)\cdot du\,. \qquad (7.8)$$

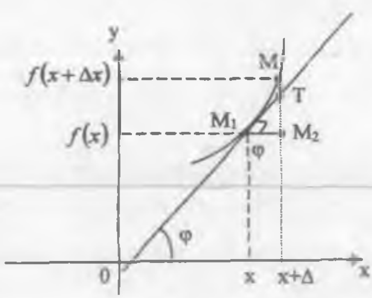
Bu yerdan, (7.5) va (7.8) formulalarni taqqoslab, oddiy va murakkab funksiya differensiali bir xil usulda hisoblanishini ko'ramiz. Bu **differensialning invariantlik xossasi** deyiladi. Demak, $y=f(x)$ funksiyada x o'rniga biror $u=u(x)$ funksiya qo'yib, $f(u)$ murakkab funksiya hosil qilinsa, uning differensiali ko'rinishi o'zgarmay qoladi.

Masalan, $y=\cos\sqrt{x}$ funksiya uchun $dy=-\sin\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})$.

Endi differensialning geometrik ma'nosini ko'ramiz.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya grafigi quyidagi ko'rinishda bo'lsin va uning $M(x;f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma OX o'qining musbat yo'nalishi bilan φ burchak hosil qilsin (7.1 - chizma).

Agar x argumentga Δx orttirma bersak, u holda funksiya Δf orttirma oladi. Chizmada $M_1(x;\ f(x))$, $M_2(x+\Delta x;\ f(x))$ nuqtalarni qaraymiz. Grafikning $M_1(x;f(x))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning T nuqtasini olamiz. Ma'lumki, $\Delta f=MM_2$, $\Delta x=M_1M_2$ bo'ladi.



7.1 - chizma.

Endi M_1TM_2 to'g'ri burchakli uchburchakdan va hosilaning geometrik ma'nosidan ushbu tenglikni olamiz:

$$tg\varphi = \frac{M_2T}{M_1M_2} \Rightarrow M_2T = tg\varphi \cdot M_1M_2 = f'(x)\Delta x$$

Bu yerdan va differensial ta'rifidan $M_2T=df$ tenglikni olamiz.

Endi funksiyaning yuqori tartibli hosilasi va differensiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma'lumki, y=f(x) funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $f'(x)$, umuman olganda, x o'zgaruvchining yangi funksiyasi bo'ladi. Shu sababli $f'(x)$ funksiyaning hosilasi to'g'risida so'z yuritish mumkin.

Ta'rif: Agar $f'(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, uning hosilasi y=f(x) **funksiyaning II tartibli hosilasi** deyiladi va $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, II tartibli hosila $f''(x) = (f'(x))'$ kabi hisoblanadi. Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$.

Birinchi tartibli hosila $f'(x)$ tezlikni ifodalasa, ikkinchi tartibli hosila tezlanishni ifodalaydi.

Hosila tartibi tushunchasi kiritilgach, $f'(x)$ hosila I tartibli, f(x) funksiyaning o'zi esa 0 – tartibli hosila, ya'ni $f(x)= f^{(0)}(x)$ deb qaraladi.

Xuddi shunday tarzda uchinchi tartibli $f'''(x)$, to'rtinchi tartibli $f^{(IV)}(x)$ va hokazo n- tartibli hosilalar tushunchasi kiritiladi. Umuman olganda n–tartibli hosila quyidagi rekurent formula orqali topiladi:

$$f^{(n)}(x)= [f^{(n-1)}(x)]', \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (7.9)$$

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq4$ bo'lganda $f^{(n)}(x)=0$ bo'ladi. Ba'zi funksiyalar uchun yuqori tartibli hosilalar ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan, $f(x)=a^x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$, $f(x)=\sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\sin(x+\pi n/2)$ bo'ladi.

$df=f'(x)dx$ ifodada birinchi ko'paytuvchi x argumentning funksiyasi, ikkinchi ko'paytuvchi $dx = \Delta x$ esa x ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son bo'ladi.

Demak, *df differensial ham x o'zgaruvchining funksiyasi* ekan. Undan (7.5) formula bo'yicha differensial olamiz va natijada hosil bo'lgan ifodani **ikkinchi tartibli differensial** deb ataymiz va d^2f kabi belgilaymiz:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=dx\, d(f'(x))=dx\, f''(x)dx= f''(x)(dx)^2= f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunday tarzda n – tartibli differensial

$$d^nf=d(d^{n-1}f)= f^{(n)}(x)(dx)^n= f^{(n)}(x)dx^n$$

kabi aniqlanadi. Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $df=6x^2\,dx$, $d^2f=12xdx^2$. Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \dots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

Ta'rif: Agar x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish uchinchi bir t o'zgaruvchi (parametr) orqali $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, funksiyalar ko'rinishda berilgan bo'lsa, x va y orasidagi $y=f(x)$ funksiya **parametrik** ko'rinishda berilgan deyiladi.

Masalan, $x=t^2$, $y=t^6$ parametrik ko'rinishda berilgan funksiya $y=f(x)=x^3$ funksiyani ifodalaydi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyani har doim ham dastlab $y=f(x)$ ko'rinishda yozib, so'ngra uning hosilasini hisoblab bo'lmaydi. Shu sababli parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasini ko'ramiz. Aytaylik $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar φ va ψ funksiyalar keraklicha differensiallanuvchi bo'lsa, u holda quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdot\frac{dx}{dt}}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

4-misol: y=f(x) funksiya x=2cost va y=3sint funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. y′(x) va y″(x) hosilalar topilsin.
Yechish: Yuqoridagi formulalarga asosan

$$y' = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}ctgt; \qquad y'' = \frac{(3\cos t)'(-2\sin t) - 3\cos t(-2\sin t)'}{(-2\sin t)^3} = \frac{-3}{4\sin^3 t}.$$

7.5-§. FUNKSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH

y=f(x) funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, uning juda ko‘p xususiyatlarini hosila yordamida aniqlash mumkin. Shu sababli hosila funksiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli qurol bo‘lib hisoblanadi.

I. Funksiyaning monotonlik oraliqlari

1-ta’rif : Agarda y=f(x) funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va bu oraliqdagi $x_1<x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, u shu oraliqda **o‘suvchi (kamayuvchi)** deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya $(-\infty,0)$ oraliqda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oraliqda esa o‘suvchi bo‘ladi.

Funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari birgalikda uning **monotonlik oraliqlari** deyiladi. Bu oraliqlarni hosila orqali qanday topish mumkinligi ushbu teoremadan kelib chiqadi.

1-teorema : *a*) Agarda differensiallanuvchi f(x) funksiya biror kesmada o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, uning hosilasi bu kesmada $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ shartni qanoatlantiradi.

b) Agarda biror oraliqda funksiyaning hosilasi $f'(x)>0$, $(f'(x)<0)$ shartni qanoatlantirsa, u holda shu oraliqda funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

Izoh: Teoremaning a) va b) qismlari funksiya monotonligining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalaydi.

Isbot: *a*) y=f(x) funksiya [a,b] kesmada o‘suvchi va x, $x+\Delta x$ nuqtalar shu oraliqqa tegishli bo‘lsin. Agarda $\Delta x>0$ bo‘lsa,

$$x+\Delta x>x \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Xuddi shunday $\Delta x<0$ bo‘lganda ham $\Delta f/\Delta x>0$ bo‘ladi. Bu yerdan, hosila ta’rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda kamayuvchi y=f(x) funksiya uchun $f'(x)\leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

b) Funksiyaning hosilasi (a,b) oraliqdagi har bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu holda, chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga asosan, bu oraliqdagi har qanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi),\; x_1<\xi<x_2$$

tenglik bajariladi. Bu tenglikda $x_2-x_1>0$ va $f'(\xi)>0$ bo‘lgani uchun undan

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

ekanligi, ya’ni funksiya o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday usulda $f'(x)<0$ bo‘lsa, funksiya kamayuvchi ekanligi isbotlanadi.

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiyaning o‘sish (kamayish) oraliqlarini topish uchun $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) tengsizlikni yechish kerak.

Masalan, $f(x)=x+1/x$ funksiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ sohadan iborat va bu sohada berilgan funksiya o‘suvchi bo‘ladi. $x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, u $(-1, 0)\cup(0, 1)$ sohada kamayuvchi ekanligini ko‘ramiz.

II. Funksiya ekstremumlari

2-ta’rif : $y=f(x)$ funksiya biror x_0 nuqta va uning atrofidagi ixtiyoriy x nuqtalar uchun aniqlangan bo‘lib, $f(x_0)>f(x)$ ($f(x_0)<f(x)$) shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada **maksimumga (minimumga)** erishadi deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada $\sin(\pi/2)=1$ maksimumga, $x=3\pi/2$ nuqtada esa $\sin(3\pi/2)=-1$ minimumga erishadi.

Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari birgalikda uning **ekstremumlari** deyiladi.

2-teorema: (Ekstremumning zaruriy sharti): Agarda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda uning hosilasi bu nuqtada $f'(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Aniqlik uchun funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo‘lsin. Bu holda $|\Delta x|$ yetarli kichik bo‘lsa, $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0) \Rightarrow \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$) bo‘lganda, $\Delta f/\Delta x\le 0$ ($\Delta f/\Delta x\ge 0$) ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli bir tomondan

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\le 0\;,$$

ikkinchi tomondan esa

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0\,.$$

Teorema shartiga ko'ra $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Funksiya x_0 da minimumga ega bo'lgan hol ham xuddi shunday qaraladi.

Masalan. $f(x)=\sin x$ funksiya $x=\pi/2$ nuqtada maksimumga ega va bu nuqtada uning hosilasi $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ tenglikni qanoatlantiradi.

$f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega, ammo uning hosilasi bu nuqtada mavjud emas.

Xulosa: Uzluksiz funksiya ekstremumga hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalardagina ega bo'lishi mumkin.

3-ta'rif: Funksiya hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar shu funksiyaning **kritik yoki statsionar nuqtalari** deyiladi.

Demak, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi bo'ladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi har doim ham o'rinli bo'lmaydi, ya'ni ekstremumning yuqorida ko'rsatilgan zaruriy sharti doimo ham yetarli emas.

Masalan, $y=x^3$ funksiya uchun $x=0$ kritik nuqta bo'ladi, lekin bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas.

3-teorema: (Ekstremumning yetarlilik sharti). Agarda x_0 kritik nuqtani chapdan o'ngga qarab bosib o'tishda $f'(x)$ hosila o'z ishorasini o'zgartirsa (ya'ni x_0 kritik nuqtaning biror atrofidagi har qanday $x_1<x_0$, $x_2>x_0$ nuqtalar uchun $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$ shart bajarilsa), u holda x_0 kritik nuqtada $f(x)$ funksiya ekstremumga erishadi. Jumladan, $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)<0$ ($f'(x_1)<0$, $f'(x_2)>0$) bo'lsa, x_0 kritik nuqtada funksiya o'zining maksimumiga (minimumiga) erishadi.

Isbot: Dastlab $f'(x)<0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)>0$ $(x>x_0)$ holni ko'ramiz. Bu holda, 1-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap atrofida funksiya kamayuvchi, o'ng atrofida esa o'suvchi bo'ladi. Demak, x_0 nuqtada funksiya minimumga erishadi. Xuddi shunday tarzda $f'(x)>0$ $(x<x_0)$ va $f'(x)<0$ $(x>x_0)$ shartlarda funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lishi isbotlanadi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ funksiya hosilasi $f'(x)=2x$ bo'lib, $x_0=0$ kritik nuqta bo'ladi. Bu funksiya hosilasi $x<0$ bo'lganda manfiy va $x>0$ bo'lganda musbat qiymat qabul qiladi. Demak, funksiya $x_0=0$ kritik nuqtada minimumga ega va uning minimum qiymati $f(0)=1$ bo'ladi.

Izoh: Agarda funksiya hosilasi x_0 kritik nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Haqiqatan ham, $x<x_0$ yoki $x>x_0$ bo'lganda $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bo'lsin. Bu holda x_0 nuqtaning chap atrofida ham, o'ng atrofida ham f(x) funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi va shu sababli x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Masalan, $f(x)=x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ kritik $x=0$ nuqta atrofida faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi va shu sababli, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas.

Agarda funksiya o'zining x_0 kritik nuqtasida ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, uning ekstremumini quyidagi teorema orqali aniqlash qulayroqdir.

4-teorema : Agarda x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtada f(x) funksiya ekstremumga ega. Jumladan, $f''(x_0)<0$ bo'lsa, f(x_0) funksiyaning maksimumi, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, f(x_0) funksiyaning minimumi bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Masalan, $f(x)=x^4$-4x funksiya uchun $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan $x_0=1$ kritik nuqta ekanligini aniqlaymiz. Funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ qiymatni qabul qiladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=1$ kritik nuqtada minimumga ega va bu minimum f(1)=1-4=-3 bo'ladi.

Izoh: Agarda x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)=0$ bo'lsa, unda funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi yoki bo'lmasligi, birinchi tartibli hosila orqali, 3-teorema yordamida aniqlanadi.

III Funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari

4-ta'rif: $y=$ f(x) funksiya grafigi (a,b) oraliqda **qavariq (botiq)** deyiladi, agarda u o'zining har qanday M(x, f(x)), nuqtasiga o'tkazilgan urinmasidan pastda (yuqorida) joylashgan bo'lsa.

Masalan, y=sinx funksiyaning grafigi (0,π) oraliqda qavariq, (π,2π) oraliqda esa botiq bo'ladi.

5-teorema: Agarda f(x) funksiya (a,b) oraliqning har bir nuqtasida ikki marta differensiallanuvchi va ixtiyoriy $x\in(a,b)$ nuqtada $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) shart bajarilsa, funksiya grafigi bu oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini adabiyotlar ro'yxatida ko'rsatilgan darsliklardan ko'rish mumkin.

Misol: f(x)=x^3 funksiya uchun f ″(x)=6x>0 tengsizlik yechish (0,∞) sohadan iborat va bu sohada uning grafigi botiq bo'ladi. Xuddi shunday f ″(x)=6x<0 tengsizlik yechimi bo'lmish (-∞;0) sohada funksiya grafigi qavariq bo'ladi.

5-ta'rif: Funksiya grafigi biror M(x_0, f(x_0)) nuqtadan o'tayotganda botiqligini qavariqlikka yoki aksincha qavariqligini botiqlikka o'zgartirsa, bu nuqta uning **burilish (egar) nuqtasi** deyiladi.

Masalan, ko'rib o'tilgan f(x)=x^3 funksiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi bo'ladi.

6-teorema: Agarda biror x_0 nuqtada ikkinchi tartibli hosila f ″(x_0)=0 bo'lib, bu nuqtadan o'tishda f ″(x) o'z ishorasini o'zgartirsa, M(x_0, f(x_0)) nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

Isbot: f ″(x)<0, x<x_0 va f ″(x)>0, x>x_0 holni ko'ramiz. Oldingi teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funksiya grafigi qavariq, o'ng tomonida esa botiq bo'ladi. Demak, M(x_0, f(x_0)) nuqta atrofida funksiya grafigi botiqlikni qavariqlikka o'zgartiradi, ya'ni bu nuqta grafikning burilish nuqtasi bo'ladi.

Misol sifatida f(x)=x^3-3x^2 funksiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu yerda f ″(x)=6x-6=0 tenglamadan x_0=1 natijani olamiz. Bu yerda x<1 bo'lganda
f ″(x)<0 (grafik qavariq) va x>1 bo'lganda f ″(x)>0 (grafik botiq) bo'lgani uchun M(1,-2) nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

IV. Funksiya grafiginig asimptotalari

6-ta'rif: $y= kx+b$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq f(x) funksiya grafigining **og'ma asimptotasi** deyiladi, agarda

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$$

shart bajarilsa.

7-ta'rif: $x=a$ tenglamali vertikal to'g'ri chiziq y= f(x) funksiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi, agarda x argument a nuqtaga yaqinlashib borganda, funksiyaning chap va o'ng

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo'lsa.

Odatda vertikal asimptotalar funksiyaning aniqlanish sohasi bo'yicha uning uzilish nuqtalari orqali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funksiya grafigi uchun $x=1$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Funksiyaning og'ma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema bo'yicha aniqlanadi.

7-teorema: $y=f(x)$ funksiya grafigi og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

limitlar mavjud hamda chekli bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu holda og'ma asimptota $y=kx+b$ tenglama bilan topiladi.

Zaruriylik sharti. $y=kx+b$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'lsin. Unda 6-ta'rif va limit xossalariga asosan quyidagilarni yozish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

Bu yerdan eng so'nggi limit qiymati nol bo'lgani uchun,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

ekanligi kelib chiqadi. Og'ma asimptota ta'rifidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

natijani olamiz.

Yetarlilik sharti. Teorema shartidagi ikkinchi limitga asosan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

tenglikni yoza olamiz. Bu yerdan, 6-ta'rifga asosan, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiyaning grafigi uchun og'ma asimptota bo'lishi kelib chiqadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty}f(x)/x=2, \quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funksiyaning grafigi uchun $y=2x+3$ to'g'ri chiziq og'ma asimptota bo'ladi.

Yuqorida olingan natijalar bo'yicha $y=f(x)$ funksiya xususiyatlarini quyidagi tartibda to'liq tadqiqot qilish mumkin:

1. Funksiyaning D{f} aniqlanish sohasini topamiz.
2. Funksiyani juft yoki toqlikka tekshiramiz.

3. Funksiyani davriylikka tekshiramiz, davriy bo'lsa, uning davrini aniqlaymiz.

4. Funksiyaning uzilish nuqtalarini topamiz va ularning turini aniqlaymiz.

5. f(x)=0 tenglamadan funksiya nollarini topamiz va ular orqali funksiya o'z ishorasini saqlaydigan oraliqlarni va OX o'qi bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz.

6. $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechib, funksiyaning o'sish va kamayish, ya'ni monotonlik sohalarini aniqlaymiz. Bu yerda quyidagi qoidadan ham foydalanish mumkin: kritik nuqtalar aniqlanish sohani o'sish ($f'(x)\geq 0$) va kamayish ($f'(x)\leq 0$) oraliqlariga ajratadi.

7. $f'(x)=0$ yoki $f'(x)=\pm\infty$ shartlardan kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funksiyani I yoki II tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiramiz.

8. $f''(x)\geq 0$ va $f''(x)\leq 0$ tengsizliklarni yechib, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik sohalarini topamiz. Bu yerda quyidagi qoidadan foydalanish mumkin: ikkinchi tartibli hosilaning ildizlari aniqlanish sohani qavariqlik va botiqlik intervallariga ajratadi.

9. $f''(x)=0$ yoki $f''(x)=\pm\infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni topib, ularning orasidan funksiya grafigining burilish nuqtalarini aniqlaymiz.

10. Funksiya grafigining asimptotalarini, agarda ular mavjud bo'lsa, topamiz.

11. 1-10 qadamlarda olingan natijalar asosida funksiya grafigini chizamiz.

Misol. Quyidagi munosabatni hosila yordamida tekshirib grafigini chizing:

$$y=\frac{x^2}{4-x^2}.$$

Yechish. Yuqorida ko'rsatilgan tartibda berilgan munosabatni tekshiramiz.

1. Funksiya $4-x^2\neq 0,\quad x\neq\pm 2,\quad x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$ da aniqlangan.

2. Funksiya juft, chunki $\frac{(-x)^2}{4-(-x)^2}=\frac{x^2}{4-x^2}$. Demak, uning grafigi OY o'qida nisbatan simmetrik joylashgan ekan.

3. Funksiya davriy emas

4. $x=\pm 2$ nuqtalar berilgan munosabatning uzilish nuqtalari.

5. $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{4-x^2}=0 \Rightarrow x=0$. Demak, $x=0$ tenglikning ildizi ekan va u yaqinlanish sohani bir xil ishorali intervallarga ajratadi: $(-\infty;-2), (-2;0], [0;2), (2;\infty)$.

Funksiyaning berilishiga qarab, quyidagilarga ishonch hosil qilish mumkin:

$(-\infty;-2)$ da funksiya manfiy, $(-2;0]$ da funksiya musbat, $(2;0]$da funksiya musbat, $(2;\infty)$ da funksiya manfiy.

6. Kritik nuqtani aniqlash uchun $f'(x)=0$ tenglamaning ildizlarini topamiz.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{8x}{(4-x^2)^2};\quad f'(x)=0 \Rightarrow \frac{8x}{(4-x^2)^2}=0 \Rightarrow x=0.$$

Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi monotonlik oraliqlariga ajraladi: $(-\infty;-2), (-2;0], [0;2), (2;\infty)$. Funksiyaning $f'(x)=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$ hosilasiga qarab, quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin: $(-\infty;-2)$ da $f'(x)\le 0$, shu sabab bu yerda funksiya kamayuvchi, $(-2;0]$ da $f'(x)\le 0$, shu sababli bu yerda funksiya kamayuvchi, $[0;2)$da $f'(x)\ge 0$, shu sababli bu yerda funksiya o‘suvchi, $(2;\infty)$ da $f'(x)\ge 0$, shu sababli bu yerda funksiya o‘suvchi.

7. Funksiya hosilasi $x=0$ kritik nuqtaning chap tomonida manfiy, o‘ng tomonida esa musbat ishoralarga erishadi. Demak, $x=0$ nuqta maksimum nuqtasi ekan $\max f(x)=f(0)=0$ ga teng bo‘lar ekan.

8. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining ildizlarini topamiz.

$$f''(x)=\left(\frac{8x}{(4-x^2)^2}\right)'=\frac{24x^2+32}{(4-x^2)^3}\neq 0$$

Funksiya juft ekanligi uchun ikkinchi tartibli hosilaning ishoralarini $(0;2)$ va $(2;\infty)$ oraliqlarida tekshiramiz. $(0;2)$ da $f'(x)\ge 0$ va shu sababli bu yerda funksiya botiq. $(2;\infty)$ da $f'(x)\le 0$ va shu sababli bu yerda funksiya qavariq.

9.Berilgan funksiya burilish nuqtalarga ega emas, chunki aniqlanish sohasida $f''(x)\neq 0$.

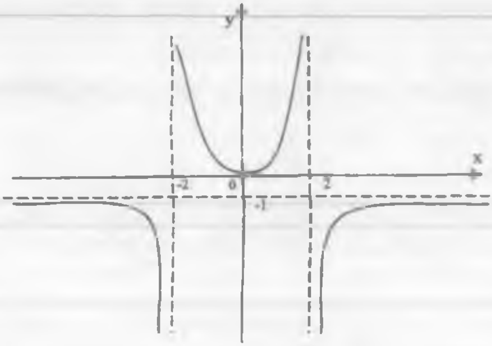
10. a) Og‘ma assimptotani aniqlaymiz.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{4}{x^2}-1}=0,\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{4-x^2}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1.$$

Demak, $y=kx+b \Rightarrow y=-1$ to‘g‘ri chiziq assimptota ekan.

b) Vertikal assimptotalarni aniqlaymiz. $\lim_{x\to\pm2} f(x) = \lim_{x\to\pm2} \frac{x^2}{4-x^2} = \pm\infty$ bo'lgani uchun $x=\pm2$ to'g'ri chiziqlar vertikal assimptotalar bo'lar ekan.

11. Olingan natijalar asosida funksiya grafigini chizamiz.



V. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

6.3-§da $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $y=f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishishi mumkin ekanligi aytilib o'tilgan edi. Shu qiymatlarni topish masalasini qaraylik.

Kesmada uzluksiz funksiyalar xossalarini kuzatsak, ular o'zining eng katta qiymati M va eng kichik qiymati m ga yoki kritik nuqtalarida yoki kesmaning chegaraviy nuqtralarida erishishini hamda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning ekstremumlari bilan ustma-ust tushishi mumkinligini ko'rish oson.

Undan chiqadi, $y=f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash uchun quyidagilarni bajarish kerak:

1) Funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash.

2) Funksiyaning kritik nuqtalaridagi va [a,b] kesmaning boshlanish va tugash nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblash.

3) Topilgan qiymatlardan eng katta va eng kichik qiymatlarini tanlash.

4) Tanlangan qiymatlarning eng kattasi kuzatilayotgan funksiyaning eng katta qiymati M va eng kichik qiymati m bo'lishiga xulosa chiqarish.

M va m qiymatlar ba'zan $M=\sup f(x)$, $m=\inf f(x)$ kabi ham belgilanadi.

Misol: $y=x-\sin 2x$ ning $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Yechish: 1) Funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y'=(x-\sin 2x)'=1-2\cos 2x .$$

$$y'=0\Rightarrow 1-2\cos x=0,\quad \cos 2x=\frac{1}{2},\quad 2x=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

Berilgan kesmaga $x=\pm\frac{\pi}{6}$ kritik nuqtalar tegishli.

2) Kritik nuqtalarda va kesmaning chegaraviy nuqtalarida funksiyaning qiymatini topamiz.

a) $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{6}+\sin\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\frac{\pi}{6}+\sin-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\sin\left[2-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-\sin\left[-2\cdot\frac{\pi}{2}\right]=-\frac{\pi}{2}+\sin\pi=-\frac{\pi}{2}$

e) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin\left[2\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{\pi}{62}+\sin\pi=-\frac{\pi}{2}$

3) Funksiyaning aniqlangan $-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ qiymatlar orasida eng kattasi $\frac{\pi}{2}$, eng kichigi $-\frac{\pi}{2}$ ekan.

4) Xulosa: Berilgan funksiyaning eng katta qiymati $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada erishiladi va $M=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ bo'ladi, eng kichik qiymati esa $x=-\frac{\pi}{2}$ nuqtada erishiladi va $m=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

7.6-§. ANIQMASLIKLAR VA ULARNI LOPITAL QOIDALARI YORDAMIDA OCHISH

1-ta'rif : Agar f (x) va g (x) funksiyalar $x\to a$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ munosabat $x\to a$ da $\frac{0}{0}$ **ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Masalan, $\frac{\sin x}{x}$ munosabat $x\to 0$ da, $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ munosabat $x\to 1$ da, $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ funksiya esa $x\to\infty$ da $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklardan iborat.

2-ta’rif : Agar f (x) va g (x) munosabatlar $x\to a$ da cheksiz katta miqdorlar bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ munosabat $x\to a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ **ko‘rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Masalan, $\frac{\ln|\sin x|}{\ln|x|}$ munosabat $x\to 0$ da, $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ munosabat $x\to\infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikdir.

3-ta’rif : $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikning $x\to a$ dagi limitini topish shu **aniqmaslikni ochish** deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, aniqmaslikni ochish, ya’ni $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash uchun bo‘linmaning limiti formulasidan foydalanib bo‘lmaydi, chunki, $\lim_{x\to a} g(x)=0$ (maxraj nolga teng)yoki surat va maxraj limitlari chekli emas.

Limitlar mavzusi bo‘yicha misollar yechganimizda aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shug‘ullangan edik. Ammo unda har bir aniqmaslikni ochish uchun ko‘paytuvchilarga ajratish, qo‘shilmasiga ko‘paytirish, eng katta darajasiga bo‘lish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun'iy usullardan foydalanilgan edi. Shunday qilib, har bir aniqmaslikni ochish uchun o‘ziga xos xususiy usuldan foydalangan edik. Endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini ko‘rib chiqamiz. Bu qoidani fransuz matematigi Fransua Lopital (1661–1704y.) o‘zining 1696-yilda bosmadan chiqqan «Cheksiz kichik miqdorlar tahlili» degan kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun u Lopital qoidasi nomi bilan tarixga kirgan. Aslida bu qoidani Lopitalning ustozi va do‘sti, shvetsariyalik matematik Iogann Bernulli (1667–1748) topgan. I. Bernulli Parijga kelgan paytida boy oiladan chiqqan va matematika bilan qiziquvchi Lopital bilan tanishadi. Lopitalning iltimosiga ko‘ra u o‘sha paytlarda Leybnits va Nyuton tomonidan yangi yaratilgan differensial hisob bo‘yicha Lopitalga ma’ruzalar o‘qiydi. Lopitalning xizmati shundan iboratki, u bu ma’ruzalar asosida differensial hisob bo‘yicha birinchi bo‘lib darslikni yozdi.

1-teorema: f(x) va g(x) funksiyalar a nuqta atrofida aniqlangan va differensillanuvchi bo‘lib, $g'(x) \neq 0$ va

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0\ , \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{7.10}$$

tengliklar bajarilsin. Bu holda, agarda $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo‘ladi va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.11}$$

Isbot: Avval $a < \infty$ holni ko‘ramiz. Teorema shartiga ko‘ra a nuqta atrofida f (x) va g(x) funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lgani uchun, ular bu yerda uzluksiz bo‘ladi va shuning uchun ham, (7.10) shartga ko‘ra,

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{7.12}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. a nuqta atrofidagi ixtiyoriy (a,x) oraliqni qaraymiz. Teorema shartlariga asosan bu oraliqda f(x) va g(x) funksiyalar uzluksiz, differensiallanuvchi va g‘(x)≠0, ya’ni ular Koshi teoremasi shartlariga bo‘ysunadi. Shuning uchun, Koshi teoremasiga asosan, shunday $c\in(a, x)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7.13}$$

Bu yerda (7.12) tengliklardan ham foydalanildi. (7.13) tenglikda $x \to a$ da limit olamiz va bunda $c\to a$ bo‘lishidan, chunki $c\in(a, x)$, foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{7.14}$$

Limitning qiymati undagi o‘zgaruvchi miqdorni qanday belgilanishiga bog‘liq emas va shuning uchun (7.14) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.15}$$

(7.14) va (7.15) tengliklardan isbotlanishi kerak bo‘lgan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.16}$$

natijani olamiz.

Endi $a=\infty$ holni ko'ramiz, ya'ni $x \to \infty$. Bu holda $z=\frac{1}{x}$ yangi o'zgaruvchini kiritsak, unda $x\to\infty$ bo'lganda $z\to 0$ bo'ladi. Bu yerda $x=\frac{1}{z}$ bo'lgani uchun va (7.16) tenglikka asosan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f(\frac{1}{z})\right]'}{\left[g(\frac{1}{z})\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

natijani olamiz. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

2-teorema: f (x) va g (x) funksiyalar 1-teorema shartlarini qanoatlantirsin, ammo

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \tag{7.17}$$

munosabat o'rinli bo'lsin. Bu holda ham (7.11) tenglik o'z kuchini saqlab qoladi.

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Shunday qilib $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikni Lopital qoidasi yordamida ochish uchun f (x) surat va g (x) maxrajdan alohida-alohida hosila olib, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ hosilalar nisbatining limitini topish kerak.

Lopital qoidasining tatbiqlari sifatida oldin ko'rib o'tilgan va matematikada ajoyib limitlar deb ataluvchi bir nechta limitni hisoblaymiz.

1. f (x) $=\sin x$, g $(x) = x$ funksiyalar $x\to 0$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi va shuning uchun $\frac{\sin x}{x}$ ifoda $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Lopital qoidasiga asosan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1\cdot$$

Bu natija I ajoyib limitni ifodalaydi.

2. f $(x)=\ln(1+x)$, g $(x)=x$ funksiyalar uchun f $(0)=\ln 1=0$, g $(0)=0$. Demak, $x\to 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

Bu aniqmaslikni ochish uchun Lopitalning qoidasiga murojaat qilamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Bu limit matematikada III ajoyib limit deb ataladi.

Xuddi shunday ravishda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a e}{1+x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

3. $f(x)=e^x-1$, $g(x)=x$ differensiallanuvchi funksiyalar uchun $f(0)=0$, $g(0)=0$ bo'ladi. Unda

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1.$$

Bu natija IV-ajoyib limit deyiladi.

Talabalarga mustaqil ish sifatida

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

ekanligini ko'rsatish tavsiya etiladi.

4. $f(x)=(1+x)^\alpha-1$ (α -$\forall$ haqiqiy son) va $g(x)=x$ funksiyalar $x=0$ nuqta atrofida differensiallanuvchi va $f(0)=0$, $g(0)=0$. Bu holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^\alpha-1]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha.$$

Bu natija V- ajoyib limit deyiladi.

Izohlar: 1. (7.11) formulada $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifoda $x\to a$ bo'lganda yana 0/0 yoki ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo'lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu holda $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ mavjud bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \qquad (7.18)$$

Shunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash mumkin. Buning uchun har gal teorema shartlarini tekshirib ko'rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, unda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud. Ammo teskari tasdiq doimo ham o‘rinli bo‘lavermaydi, ya’ni $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Misol: $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x$, $x\to\infty$. Bu holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=$$
$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

Ammo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}cosx$$

bo‘lgani uchun bu limit mavjud emas.

Shartli ravishda $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ kabi belgilangan aniqmasliklardan tashqari shartli ravishda $\infty\cdot 0$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

4-ta’rif: Agarda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ bo‘lsa, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $x\to a$ bo‘lganda $0\cdot\infty$ **ko‘rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun uni $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ ko‘rinishda yozib, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikka yoki $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ko‘rinishda yozib, $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikka keltiriladi va so‘ngra Lopital qoidasi qo‘llaniladi.

Misol:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to 0} x = 0\cdot$$

5-ta'rif: Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo'lsa, $[f(x)]^{g(x)}$ ifoda $x\to a$ bo'lganda 1^{∞} **ko'rinishdagi aniqmaslik** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun $y=[f(x)]^{g(x)}$ deb belgilaymiz. Bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olamiz:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\ln f(x)=[\ln f(x)]g(x) \ ,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln[\lim_{x\to a} f(x)]=\ln 1=0\ .$$

Demak, $[\ln f(x)]g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik va uni Lopital qoidasi yordamida ochish mumkin. Faraz qilamiz

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\} = b$$

bo'lsin. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln[\lim_{x\to a} y]=b \Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^{b} \Rightarrow \lim_{x\to a}\ [f(x)]^{g(x)}=e^{b}.$$

Misol sifatida $f(x) = 1+\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $x\to\infty$ deb olib,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e,$$

ya'ni ikkinchi ajoyib limitni isbotlaymiz.

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \Rightarrow \ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1\cdot$$

Shunday qilib, bizning misolda b=1 chiqdi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{1} = e$$

bo'lib chiqadi.

7.7-§. TEYLOR VA MAKLOREN FORMULALARI

1. **Teylor formulasi**. $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida $(n+1)$-tartibgacha hosilaga ega bo'lsin. $x=a$ nuqtadagi qiymati va n-tartibgacha bo'lgan hosilalarining $x=a$ nuqtadagi qiymatlari $f(x)$ funksiyadan shu nuqtada olingan mos hosilalari qiymatlariga teng bo'lgan $y=P_n(x)$ ko'phadni, ya'ni

$$P_n(a)=f(a),\quad P_n'(a)=f'(a), P_n''(a)=f''(a),...,P_n'^{(n)}(a)=f^{(n)}(a) \qquad (7.19)$$

shartni qanoatlantiradigan ko'phadni topamiz.Bu ko'phadni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+...+C_n(x-a)^n, \qquad (7.20)$$

$C_0,C_2,C_1,...C_n$ koeffitsiyentlarni (7.19) shartlar bajariladigan qilib aniqlaymiz.

$P_n(x)$ ning hosilalarini topamiz:

$$\begin{aligned}&P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+...+n\cdot C_n(x-a)^{n-1},\\&P_n''(x)=2C_2+3\cdot 2C_3(x-a)+...+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.\end{aligned} \qquad (7.21)$$

(7.20) va (7.21) tengliklarga $x=a$ qiymatni qo'yamiz, natijada ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}&P_n(a)=C_0,\quad P_n'(a)=C_1,\quad P_n''(a)=2\cdot 1\cdot C_2,...,\\&P_n^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.\end{aligned} \qquad (7.22)$$

(7.22) tengliklarning chap tomonlarini (7.19) tengliklar asosida almashtiramiz, natijada ushbuga ega bo'lamiz:

$$f(a)=C_0,\quad f'(a)=C_1,\quad f''(a)=2\cdot 1\cdot C_2,...,$$
$$f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n,$$

bundan koeffitsiyentlarning qiymatlarini topamiz:

$$C_0=f(a),\quad C_1=f'(a),\quad C_2=\frac{1}{2!}f''(a),...,$$

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Bu $C_0,C_2,C_1,...C_n$ qiymatlarni (7.20) formulaga qo'yamiz va izlanayotgan ko'phadga ega bo'lamiz:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (7.23)$$

Bu ko'phad $f(x)$ funksiyaning $x=a$ ning darajali bo'yicha **Teylor ko'phadi** deyiladi.

Berilgan $f(x)$ funksiya bilan tuzilgan $P_n(x)$ ko‘phad ayirmasini $R_n(x)$ bilan belgilaymiz:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x), \tag{7.24}$$

bundan $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ yoki yoyib yozilganda:

$$f_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \tag{7.25}$$

(7.25) formula $f(x)$ funksiya uchun Teylor formulasi deb aytiladi.

$R_n(x)$ ni Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi. U quyidagi

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

formula orqali hisoblanadi (Lagranj shakli), bunda $\xi\in(a,x)$. Natijada (7.25) formula

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ko‘rinishni oladi.

2. **Makloren formulasi.** Teylor formulasining $a=0$ dagi xususiy ko‘rinishi Makloren formulasi deyiladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \tag{7.26}$$

bunda $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, a<\xi<x$. Bu formula funksiyaning erkli o‘zgaruvchi x ning darajalari yoyilmasini beradi.

1. $f(x)=e^x$ funksiyani Makloren formulasi bo‘yicha yoyish. e^x funksiya barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun har qanday tartibli hosilalarga ega. Shu hosilalarning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x)=e^x \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=e^x \quad f''(0)=1$$
$$..............................$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \quad f^{(n)}(0)=1$$
$$f^{(n+1)}(x)=e^x \quad f^{(n+1)}(\xi)=e^{\xi}, \ \ bunda \ \ 0<\xi<x.$$

Hosilalarga topilgan qiymatlarini (7.26) Makloren formulasiga qo‘yib, e^x ning ushbu yoyilmasini hosil qilamiz:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}. \tag{7.27}$$

2. $f(x)=\sin x$ funksiyani Makloren formulasi bo‘yicha yoyish. Funksiya barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun har qanday tartibli hosilalarga ega. Shu hosilalarning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x)=\sin x$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$
....
$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$f''(0)=0$$
$$f'''(0)=-1$$
....
$$f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2},\quad f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),\quad 0<\xi<x.$$

Tartibi juft bo'lgan hosilalarning hammasi $x=0$ nuqtada nolga teng. Topilgan qiymatlarni (7.26) Makloren formulasiga qo'yib, $\sin x$ uchun ushbu yoyilmani hosil qilamiz:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right). \qquad (7.28)$$

3. $f(x)=\cos x$ funksiyani Marloren formulasi bo'yicha yoyish. Funksiya barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ lar uchun har qanday tartibli hosilalarga ega. Shu hosilalarning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1$$
$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right) \qquad f''(0)=-1$$
....
$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{(n+1)}(\xi)=\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$R^{(n+1)}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right),\quad 0<\xi<x.$$

Bunda toq tartibli hosilalarning hammasi $x=0$ da nolga teng. $f(x)=\cos x$ funksiya uchun Makloren formulasi ushbu ko'rinishni oladi:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\xi+\frac{(2n+2)}{2}\pi\right). \qquad (7.29)$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish. Funksiya barcha $x>-1$ lar uchun har qanday tartibli hosilalarga ega. $f(x)$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilalarini hisoblaymiz:

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-1(1+x)^{-2} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0)=2!$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0)^{n+1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}n!(1+x)^{-n-1}, \qquad R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Hosilalarning topilgan qiymatlarini (7.26) Makloren formulasiga qo'yamiz:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3 2!}{3!}+\frac{x^4 3!}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}(n-1)!+R_n(x).$$

Qisqartirishlardan keyin:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_n(x). \qquad (7.30)$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilalarini hisoblaymiz:

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0)=\alpha$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1)$$

....

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \qquad R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\alpha(\alpha-1)\ldots(1+\xi)^{\alpha-1-n}.$$

Hosilalarning topilgan qiymatlarini (7.26) Makloren formulasiga qo'yamiz:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x). \qquad (7.31)$$

α ko'rsatkich n dan katta bo'lmagan butun musbat son bo'lgan xususiy holda $R_n(x)$ nolga teng bo'ladi, (7.31) tenglik esa Nyuton binomi formulasiga aylanadi.

XULOSA

Differensial hisob matematikaning bo'limi bo'lib, funksiyalarni hosila va differensiallar yordami bilan tekshiriladi. Differensial hisobning asosiy tushunchalari hosila va differensial bo'lib, bular o'z navbatida ketma-ketlik yoki funksiyaning limiti bilan bog'langan.

Funksiya hosilasini bilish funksiyaning kasrda o'sishi yoki kamayishi, kasrda maksimumga, minimumga va burilish nuqtaga ega ekanligi haqida mulohaza yuritishga imkon beradi. Bu tushunchalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalarini o'rganishga ham tatbiq etiladi.

Egri chiziqlarga urinma o'tkazish masalalarini o'rganish yo'lida XVII asr matematiklaridan Dekart va Ferma differensial hisob yaratish sohasida birinchi qadam qo'ygan edilar. Differensial hisobning uzil-kesil yaratilishi I.Nyuton va G.Leybnisning ilmiy ishlari bilan bog'liqdir.

Biologiyada hosila yordamida mikroorganizmlarning ko'payish tezligini topish mumkin va bu orqali muhim ishlab chiqarish masalalarini yechish mumkin. Xuddi shunday iqtisodiyotda ham mahsulot sarfini ifodalovchi mahsuldorlik funksiyasini hosilasi iqtisodiy masalalarni yechish mumkin bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan tayin $x = x_0$ nuqtada olingan hosilasi deb chekli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitga aytiladi, bu yerda $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$– funksiyaning ortirmasi, Δx– argument orttirmasidir. Agar shu nuqtada $f(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ bu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Hosila quyidagi simvollar bilan belgilanadi, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ (Leybnis kiritgan), y', $f'(x)$ (Nyuton kiritgan), $Dy, Df(x)$ (Koshi kiritgan). Koshi kiritgan simvollar kam qo'llaniladi. Matematika, fizika, texnika va boshqa fanlarning ko'p masalalari hosila tushunchasiga olib keladi. Ulardan eng muhim bo'lganlaridan biri to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qiluvchi nuqtaning tezligini aniqlash. Nuqtaning harakati $S = f(t)$ funksiya bilan ifodalanadi, bu yerda S – nuqtaning t paytdagi vaziyati (bosib o'tgan yo'l). Nuqtaning t paytdagi haqiqiy (oniy) tezligi limitga o'tib topamiz

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Shunday qilib, nuqtaning haqiqiy ϑ tezligi $S = f(t)$ funksiyadan olingan hosila.

Demak, umumiy holda hosila funksiyaning (argumentga nisbatan) o'zgarish tezligidir. $y = f(t)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda nuqtada funksiyaning grafigiga o'tkazilgan urinma mavjud bo'ladi va $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = k$ bo'ladi (bu yerda k – urinmaning burchak koeffitsiyenti).

7-BOBGA DOIR TESTLAR

1. y=f(x) funksiya hosilasining ta'rifi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta f}{\Delta x}$; B) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta f}$; C) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$;

D) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta x}{\Delta f}$; E) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta f}$.

2. $y=x^3$ funksiyaning Δy orttirmasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $3x^2\Delta x$; B) $3x(\Delta x)^2$; C) $(\Delta x)^3$;

D) $3x\Delta x(x+\Delta x)$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

3. $y=x^3$ funksiya uchun orttirmalar nisbati $\Delta y/\Delta x$ qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $3x^2+(\Delta x)^2$; B) $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$; C) $3x^2+3x\Delta x$;

D) $3x(x+3\Delta x)$; E) $3x\Delta x(x+\Delta x)+(\Delta x)^3$.

4. Qachon y=f(x) funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi?

A) y=f(x) funksiya x_0 nuqtada musbat qiymat qabul qilsa;
B) y=f(x) funksiya x_0 nuqtada manfiy qiymat qabul qilsa;
C) y=f(x) funksiya x_0 nuqtada noldan farqli qiymat qabul qilsa;
D) y=f(x) funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa;
E) y=f(x) funksiya $x \to x_0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa.

5.Hosilaning mexanik ma'nosi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) Harakatda bosib o'tilgan masofa;
B) Harakatda sarflangan vaqt;
C) Harakatda oniy tezlik;
D) Harakatda to'xtash holati;
E) To'g'ri javob keltirilmagan.

6. Hosilaning geometrik ma'nosi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) Chiziqqa o'tkazilgan kesuvchining burchak koeffitsiyenti;
B) Chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti;
C) Chiziqqa o'tkazilgan normalning burchak koeffitsiyenti;
D) Ikkita chiziqlar orasidagi burchakning kosinusi;
E) To'g'ri javob keltirilmagan.

7. Quyidagilardan qaysi biri y=f(x) funksiya grafigiga (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini ifodalaydi?

A) $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$; B) $y-y_0=f'(x_0)x$;

C) $y-y_0=f'(x_0)x_0$; D) $x-x_0=f'(x_0)(y-y_0)$;

E) $y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

8. Quyidagilardan qaysi biri y=f(x) funksiya grafigiga (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan normal tenglamasini ifodalaydi?

A) $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$; B) $y-y_0=f'(x_0)x$;

C) $y-y_0=f'(x_0)x_0$; D) $x-x_0=f'(x_0)(y-y_0)$;

E) $y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

9. y=f(x) funksiya hosilasini ta'rif bo'yicha hisoblashda quyidagilardan qaysi biri qo'llaniladi?

A) Argument orttirmasi Δx hisoblanadi;

B) Funksiya orttirmasi Δf hisoblanadi;

C) $\Delta f/\Delta x$ nisbat hisoblanadi;

D) $\Delta f/\Delta x$ nisbarning $\Delta x \to 0$ bo'lgandagi limiti hisoblanadi;

E) Ko'rsatilganlarning barchasi qo'llaniladi.

10. Teoremani yakunlang.

Teorema: Agar y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, unda ....

A) y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada uzlukli bo'ladi;

B) y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo'ladi;

C) y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi;

D) y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada musbat qiymat qabul etadi;

E) y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada manfiy qiymat qabul etadi.

11.$y=x^3$ funksiya grafigining x=2 abssissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini toping?

A) y=16x+12; B) y=16x−12; C) y=12x+16; D) y=12x−16;

E) y=8x+12.

12. $y=x^3$ funksiya grafigining x=2 abssissali nuqtasiga o'tkazilgan normal tenglamasini toping.

A) $y=\frac{-1}{12}x+8\frac{1}{6}$; B) $y=\frac{1}{12}x-7\frac{5}{6}$; C) $y=7\frac{5}{6}x+\frac{1}{12}$;

D) $y=7\frac{5}{6}x-\frac{1}{12}$; E) $y=-\frac{5}{6}x+\frac{11}{12}$.

13. Nuqta $S(t)=2t^3-3t$ qonuni bo'yicha to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilmoqda. Nuqtaning $t=2$ vaqtdagi tezligini hisoblang.

A) 19; B) 21; C) 18; D) 0.2; E) 40.

14. $y=x^3$ funksiya y' hosilaning $x=-2$ nuqtadagi $y'(-2)$ qiymatini hisoblang.

A) $y'(-2)=-12$; B) $y'(-2)=-8$; C) $y'(-2)=12$; D) $y'(-2)=8$; E) $y'(-2)=0$.

15. Differensiallash qoidalari qayerda xato ko'rsatilgan?

A) $(cu)'=cu'$; B) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; C) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

D) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$; E) $(f(u))'=f'(u)\,u'$.

16. $y=x^\alpha$ darajali funksiya hosilasi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan?

A) $y'=\alpha x^{\alpha-1}$; B) $y'=\alpha x^\alpha$; C) $y'=\alpha x^{\alpha+1}$; D) $y'=x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$; E) $y'=x^\alpha$.

17. $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiya hosilasini toping.

A) $y'=a^x$; B) $y'=xa^{x-1}$; C) $y'=a^x\ln a$; D) $y'=a^x\log_a e$;

E) To'g'ri javob ko'rsatilmagan.

18. $y=\log_a x$ funksiya hosilasini toping.

A) $y'=\frac{1}{x}$; B) $y'=\frac{1}{x}\ln a$; C) $y'=\frac{1}{x}a$; D) $y'=\frac{1}{x\ln a}$;

E) To'g'ri javob ko'rsatilmagan.

19. Qaysi trigonometrik funksiya hosilasi xato ko'rsatilgan?

A) $(\sin x)'=\cos x$; B) $(\cos x)'=\sin x$; C) $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

D) $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

E) Barcha javoblar to'g'ri.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ta'rif bo'yicha funksiya hosilasini topish algoritmi qanday qadamlardan iborat?
2. O'zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
3. Funksiyalar algebraik yig'indisini hosilasi qanday hisoblanadi?
4. Funksiyalar ko'paytmasining hosilasi qanday topiladi?
5. Funksiyalar nisbatining hosilasi qanday hisoblanadi?
6. Hosila olishda o'zgarmas ko'paytuvchini nima qilish mumkin?
7. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
8. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

9. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini yozing.

10. Funksiya differensiali qanday ta'riflanadi?

11. Funksiya differensiali hosila orqali qanday topiladi?

12. Funksiya orttirmasi va differensiali orasida qanday bog'lanish mavjud?

13. Differensialning geometrik ma'nosini ko'rsating.

14. Differensiallash qoidalari nimalardan iborat?

15. Differensialning invariantlik xossasi nimadan iborat?

16. Yuqori tartibli hosilalar qanday aniqlanadi?

17. Yuqori tartibli differensiallar qanday ifodalanadi?

18. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

VIII bob. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

Funksiya – bu o'zgaruvchi va o'zgarmasdan tuzilgan miqdordir.

I.Bernulli

Bobning o'quv maqsadi

Bir o'zgaruvchili funksiyaning rivoji sifatida ko'p o'zgaruvchili funksiyaning kiritilishini, bir o'zgaruvchili funksiya ustida qanday amallar bajarilsa, ko'p o'zgaruvchi funksiyalarda ham o'xshash amallar mavjudligini, qolaversa, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning o'ziga xos xossalari, qonuniyatlari borligini talabalarga yetkazish mazkur bob oldiga maqsad qilib qo'yilgan.

8.1-§. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYA LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar

Agar $x, y, z, \ldots u, t,$ o'zgaruvchilarning har bir qiymatlar to'plamiga o'zgaruvchi w ning aniq qiymati mos kelsa, w ni $x, y, z, \ldots u, t,$ erkli o'zgaruvchilarning funksiyasi deb aytiladi va $w = f(x, y, z, \ldots u, t)$ ko'rinishida yoziladi. Bu yerda $x, y, z, \ldots u, t,$ erkli o'zgaruvchilar.

O'zgaruvchilar $x, y, z, \ldots u, t$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning argumentlari deyiladi. Agar argumentlarning har bir sonli qiymatlar guruhiga bitta w mos kelsa, u holda ko'p o'zgaruvchili funksiyaga bir qiymatli deyiladi. Aksincha, argumentlarning qiymatlar guruhiga w ning bir necha qiymati mos kelsa, u holda ko'p o'zgaruvchili funksiyaga ko'p qiymati deyiladi.

Misol:

$$\omega = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$$

erkli o'zgaruvchilar soni to'rtta, ya'ni $x, y, z, u,$ shuning uchun u to'rt o'zgaruvchili funksiya deb aytiladi.

$1-x^2-y^2-z^2-u^2 \geq 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi qiymatlarda aniqlangan.

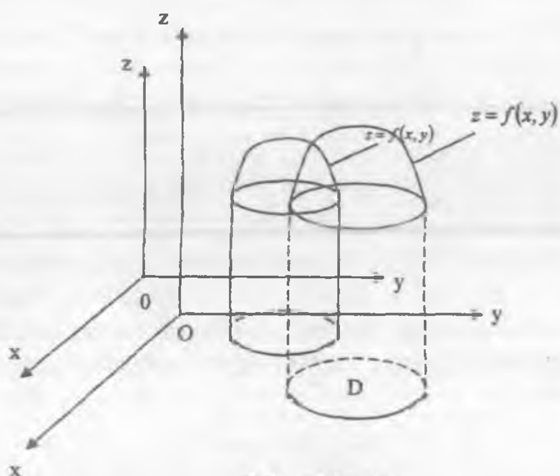
2. Ikki o'zgaruvchili funksiya

Ta'rif: Agar bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikki o'zgaruvchi x va y biror D o'zgarish sohasidagi har bir qo'sh (x, y) qiymatiga z miqdorning aniq bir qiymati mos kelsa, z ikki erkli o'zgaruvchi x va y ning D sohada aniqlangan funksiyasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$z=f(x,y) \quad z=\Phi(x, y) \quad \text{va h.k.}$$

Ta'rif: $Z=f(x,y)$ funksiya aniqlangan x va y qo'sh (x,y) qiymatlarning to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi yoki mavjudlik sohasi deb aytiladi va D orqali belgilanadi.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning aniqlanish sohasi geometrik tarzda ko'rgazmali tasvirlanadi (8.1-chizma). Funksiyaning aniqlanish sohasi tekislikdagi nuqtalarning biror to'plami ko'rinishida tasvirlanadi. Funksiyaning aniqlanish sohasi, jumladan, butun tekislik bo'lishi ham mumkin. Bundan buyon asosan tekislikning chiziqlar chegaralangan qismidan iborat bo'lgan sohalar bilan ish ko'ramiz. Berilgan sohani chegaralovchi chiziqni sohaning chegarasi deb aytamiz. Sohaning chegarada yotmagan nuqtalarini sohaning ichki nuqtalari deb aytamiz. Faqat ichki nuqtalardan iborat bo'lgan soha ochiq soha deyiladi. Agar sohaga chegaraning nuqtalari ham kirsa, soha yopiq soha deb aytiladi.



8.1 - chizma.

Misol: Ushbu $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechimi: Funksiyaning aniqlanish sohasi $\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$ ifoda aniqlangan nuqtalar to'plami, ya'ni $R^2-x^2-y^2 \neq 0$ yoki $x^2+y^2 \neq R^2$ bajariladigan nuqtalar to'plami bo'ladi. Bu to'plamga tekislikning radiusi R bo'lgan aylana nuqtalaridan tashqari hamma nuqtalari tegishli bo'ladi.

Misol : Ushbu $z=\ln(y^2-4x+8)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

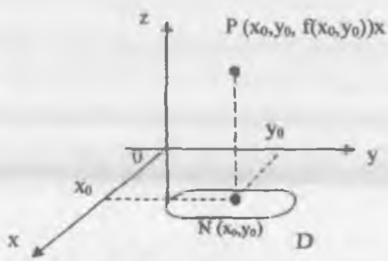
Yechimi: Funksiya $y^2-4x+8>0$ da aniqlangan.Tengsizlikni $y^2>4(x-2)$ ko'rinishda yozamiz. Aniqlanish sohasi parabola va uning ichki qismida yotmagan barcha nuqtalari to'plami bo'ladi.

Misol: $z=\sqrt{x+y}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechimi: Kvadratik ildiz nol va musbat sonlar uchun aniqlangan bo'ladi, shuning uchun ushbu tengsizlik qanoatlanishi kerak: $x+y \geq 0$, $y \geq -x$.

Demak, aniqlanish sohasi $y=-x$ to'g'ri chiziqda va undan yuqoridagi yarim tekislikda yotgan nuqtalar to'plamidan iborat.

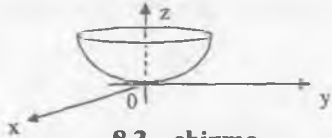
Ikki o'zgaruvchili funksiyaning geometrik tasvirlash quyidagicha bo'ladi: OXY tekislikdagi D sohada aniqlangan $z=f(x,y)$



8.2- chizma.

funksiyani va XOYZ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini qaraymiz. D sohasining har bir (x_0, y_0) nuqtasidan OXY tekislikka perpendikular o'tkazamiz va unda $f(x_0,y_0)$ ga teng kesma ajratamiz (8.2-chizma).

U holda fazoda koordinatalari x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$ bo'lgan P nuqtani hosil qilamiz. P nuqtalarning geometrik o'rni ikki o'zgaruvchi funksiyaning grafigi deb ataladi.



8.3 - chizma.

Misol : $Z=x^2+y^2$ funksiyaning grafigini chizing.

Yechimi: Analitik geometriyadan ma'lumki, $z=x^2+y^2$ funksiyaning grafigi aylanish paraboloiddan iborat (8.3-chizma).

3. Bir necha o'zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi .

Berilgan nuqta atrofi tushunchasini kiritamiz. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi deb $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$ tengsizlikni qanoatlantiradigan (x,y) nuqtalar to'plamiga aytiladi.

Ta'rif: Agar har qanday musbat ε son uchun shunday r>0 son topilsaki, $\overline{MM}_0<r$ tengsizlik qanoatlanadigan barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \qquad (8.1)$$

tengsizlik qanoatlansa, o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga intilganda $f(x,y)$ funksiya A limitga intiladi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A\cdot$$

Ta'rif: $M_0(x_0,y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi nuqta bo'lsin. Agar $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ushbu tenglik

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (8.2)$$

o'rinli bo'lsa, $z=f(x\,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funksiya shu sohada uzluksiz deyiladi. Quyidagicha belgilash kiritamiz.

$$x=x_0+\Delta x, \quad y=y_0+\Delta y,$$

U holda (8.2) formuladan

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x_0+\Delta x, \quad y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$$

yoki

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x_0+\Delta x, \quad y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

bo'ladi. Agar $x - x_0 = \Delta x, y - y_0 = \Delta y$ argument orttirmalari va $f(x_0 + \Delta x, \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta z$ funksiya orttirmasi kabi belgilashni kiritsak, u holda (8.2) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Agar biror N(x, y) nuqtada yoki nuqtalar to'plamida (8.2) tenglik bajarilmasa, N(x, y) nuqta (yoki nuqtalar to'plami) $z = f(x, y)$ funksiyaning uzilish nuqtasi (yoki uzilish nuqtalari to'plami) deyiladi.

Misol: $z = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini aniqlang.

Yechimi: Berilgan funksiya $y = \pm x$ to'g'ri chiziqda yotgan nuqtalarda uzilishga ega, chunki bu nuqtalar uchun (8.2) tenglik bajarilmaydi.

Misol: $z^2 = x^2 + y^2$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechimi: Berilgan funksiya uchun x va y ning har qanday qiymatlarida (8.2) tenglik bajariladi. Funksiya OXY tekislikda uzluksizdir.

Yopiq va chegaralangan sohada uzluksiz bo'lgan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning bir necha muhim xossalarini isbotsiz aytib o'tamiz.

1-xossa: Agar $f(x,y,...)$ funksiya yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, shu D sohadan kamida bitta shunday N (x_0, y_0, ...) nuqta topiladiki, sohaning boshqa hamma nuqtalari uchun ushbu

$$f(x_0, y_0 ...) \geq f(x, y, ...)$$

munosabat bajariladi va kamida bitta shunday $M(\overline{x_0}, \overline{y_0}, ...)$ nuqta topiladiki, sohaning boshqa hamma nuqtalari uchun $f(\overline{x_0}, \overline{y_0}, ...) \leq f(x, y, ...)$ munosabat bajariladi. Funksiyaning $f(x_0, y_0, ...) = A$ qiymati $f(x, y, ...)$ funksiyaning D sohadagi eng katta qiymati deb, $f(\overline{x_0}, \overline{y_0}, ...) = a$ qiymatini esa eng kichik qiymati deb aytiladi.

2- xossa: Agar $f(x, y ...)$ funksiya yopiq va chegaralangan sohada uzluksiz bo'lib, musbat va manfiy qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shu soha ichida berilgan $f(x,y...)$ funksiya nolga aylanadigan nuqtalar topiladi.

8.2-§ IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILALARI

1.Funksiyaning xususiy va to'la orttirmasi

Ushbu $z=f(x,y)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lsin.

Erkli o'zgaruvchi x ga Δx orttirma beramiz, unda z orttirma oladi, bu orttirma z ning x bo'yicha xususiy orttirmasi deb ataladi va $\Delta_x z$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Shunga o'xshash agar x qiymatni saqlab, y ga Δy orttirma bersak, z ham orttirma oladi, bu orttirma z ning y bo'yichi xususiy orttirmasi deb aytiladi va $\Delta_y z$ bilan belgilanadi:

$$\Delta_y z = f(x,y+\Delta y) - f(x,y).$$

Nihoyat argument x ga Δx orttirma va argument y ga Δy orttirma berib, z uchun yangi orttirma qilsak, bu orttirma z ning to'la orttirmasi deb aytiladi:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Ikkitadan ortiq o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy va to'la orttirmalari shu kabi ta'riflanadi. Chunonchi, $u=f(x,y,z)$ uchun :

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z),$$
$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z),$$
$$\Delta_z u = f(x,y, z+\Delta z) - f(x,y,z),$$
$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z).$$

Misol: $z = xy$ funksiyaning xususiy va to'la orttirmalarini toping.

Yechimi:

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)y - xy = y\Delta x$$
$$\Delta_y z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$$
$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

2.Bir necha o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi

Ta'rif: $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi deb, xususiy orttirma $\Delta_x z$ ning Δx orttirmaga nisbati Δx nolga intilishidagi limitiga aytiladi.

$z = f(x,y)$ funksiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi quyidagi simvollar bilan belgilanadi:

$$z'_x, f'_x(x,y), \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ta'rifga ko'ra

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Shunga o'xshash z = f (x,y) funksiyaning y bo'yicha xususiy hosilasi ta'riflanadi:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Misol: $z=x^3 \sin y$ funksiyaning xususiy hosilalarini hisoblang.

Yechimi: y o'zgaruvchini o'zgarmas deb x ga nisbatan xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=(x^3\sin y)'_x=3x^2\sin y.$$

x o'zgaruvchini o'zgarmas deb turib y ga nisbatan xususiy hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=(x^3\sin y)'_y=x^3\cos y.$$

Har qancha o'zgaruvchili funksiyalarning xususiy hosilalari ham shunga o'xshash topiladi:

$$u=f(x,y,z,t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z}=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z,t)-f(x,y,z,t)}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_t u}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x,y,z,t+\Delta t)-f(x,y,z,t)}{\Delta t}.$$

Misol: $u=x^3+y^3+x\cdot t\cdot z$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}=?$

Yechish:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+t\cdot z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial z}=xt,\ \frac{\partial u}{\partial t}=xz.$$

Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasining geometrik mazmuniga o'xshash ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalarining geometrik mazmuni mavjud: $\frac{\partial z}{\partial y}$ hosilaning son qiymati $z=f(x, y)$ sirtni $x=const$ tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan egri chiziqqa urinma og'ish burchagining tangensiga teng.

Shuningdek, $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilaning son qiymati $z=f(x, y)$ sirtning y=const tekislik bilan kesimiga urinmaning og'ish burchagi tangensiga teng.

3. Murakkab funksiyaning hosilasi. To‘la hosila

Ushbu $z=f(u \quad v)$ tenglamada u va v miqdorlar x,y erkli o‘zgaruvchilarning funksiyalari $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ bo‘lsin. Bu holda z funksiya x va y ning murakkab funksiyasi deyiladi.

Misol: $z=u^2 \cdot v^2+u+v+4, \quad u=x+y, \, v=e^{x \cdot y}$.

Murakkab funksiyaning x va y bo‘yicha xususiy hosilalari quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Murakkab funksiya quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$z=f(u;v), u=\varphi(x), v=\psi(x).$$

Bunday holda z dan x bo‘yicha hosila to‘la hosila deyiladi va quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}. \tag{8.3}$$

Misol : Quyidagi funksiyaning to‘liq hosilasini toping.

$$z=x^2+y^2, \quad x=\sqrt{t}, \quad y=e^{2t}.$$

Yechish: Xususiy hosilalarni hisoblaymiz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y, \quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt}=2e^{2t}.$$

Yuqorida keltirilgan (8.3) formuladan foydalanib, to‘la hosilani topamiz:

$$\frac{dz}{dt}=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}+2y\cdot 2e^{2t} \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{dt}=1+4e^{4t}.$$

4. Har xil tartibdagi xususiy hosilalar

1) n - tartibli xususiy hosila (n-1) tartibli xususiy hosilaning birinchi tartibli xususiy hosilasidir. $z=f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Unda $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar x va y o‘zgaruvchilarning funksiyalaridir. Shuning uchun ulardan yana hosila topish mumkin. Ikkinchi tartibli hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Uchinchi tartibli xususiy hosilalar bunday belgilanadi:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Teorema: Agar $z=f(x,y)$ funksiya va uning z'_x, z'_y, z'_{xy}, z'_{yx} hosilalari $M(x,y)$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, bu nuqtada $f_{xy}=f_{yx}$ bo'ladi. Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Misol: Agar $z=arctg\frac{x}{y}$ funksiya uchun teorema shartlari bajarilgan bo'lsa, $f_{xy}=f_{yx}$ ekanligini ko'rsating.

Yechish: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ va $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ larni topib ular teng ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{y^2+x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x y}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{y'(x^2+y^2)-y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{x'(x^2+y^2)-x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

5. To'la orttirma va to'la differensial

$z=f(x,y)$ funksiya to'la orttirmasi ta'rifiga ko'ra

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,\quad y+\Delta y)-f(x,y)=\\&=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\end{aligned}\qquad(8.4)$$

$f(x,y)$ funksiya qaralayotgan (x,y) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. (8.4) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,\quad y+\Delta y)-f(x,\quad y+\Delta y)-f(x,y)]\,.\qquad(8.5)$$

Qavslardagi ayirmasiga Lagranj teoremasini qo'llab,

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}\Delta y\,.\qquad(8.6)$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x\qquad(8.7)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bunda $x<\bar{x}<x+\Delta x,\quad y<\bar{y}<y+\Delta y$ bo'ladi. Farazimizga ko'ra xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\qquad(8.8)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},\quad \Delta x\to 0,\quad \Delta y\to 0\Rightarrow \bar{x}\to x,\bar{y}\to y\qquad(8.9)$$

o'rinli bo'ladi.

(8.8), (8.9) larni limitlar xossasidan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1, \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2 . \tag{8.11}$$

Bu yerda γ_1 va γ_2 lar $\Delta x, \Delta y$ larga nisbatan cheksiz kichik miqdorlardir. Ketma-ket (8.10), (8.11) larni (8.6) va (8.7) larga va (8.6) va (8.7) larni (8.5) tenglikka qo'ysak, funksiyaning orttirmasi ushbu ko'rinishga keladi:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \tag{8.12}$$

(8.12) dagi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$ ifoda funksiya orttirmasining bosh bo'lagini tashkil etadi, dz yoki df bilan belgilanadi va $z = f(x;y)$ funksiyaning berilgan (x,y) nuqtadagi differensiali deb aytiladi. Agar $\Delta x = dx$ va $\Delta y = dy$ deb olinsa, funksiyaning differensiali quyidagi ko'rinishga keladi:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy . \tag{8.13}$$

Natijada (8.12) tenglik $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ ko'rinishga keladi. $\Delta x, \Delta y$ nolga intilganda $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ nolga intiladi. Bu yig'indini e'tiborga olmasak katta xato qilmaymiz, ya'ni oxirgi tenglikdan $\Delta z \approx dz$ va

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \tag{8.14}$$

formulani olamiz. (8.14)dan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkin.

Misol. Quyidagi $(1{,}02)^{3{,}01}$ miqdorning taqribiy qiymatini toping.

Yechish. $f(x,y) = x^y$ funksiyani kiritamiz. Bu funksiya (1;3) nuqtada differensiallanuvchi. $x = 1,\ y = 3,\ \Delta x = 0{,}02,\ \Delta y = 0{,}01$ deb olsak, (8.14) formulaga asosan quyidagini aniqlaymiz:

$$(1{,}02)^{3{,}01} = f(x+\Delta x,\quad y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(1,3)}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial f(1,3)}{\partial y}\cdot \Delta y =$$

$$= 1 + y \cdot x^{y-1}\Delta x + x^y \ln x = 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$$

8.3-§. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING EKSTREMUMI

1. Esktremumning zaruriylik va yetarlilik shartlari

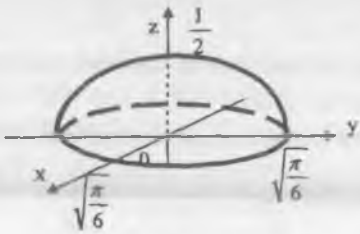
Ta'rif: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga yetarli darajada yaqin bo'lib, undan farqli hamma (x,y) nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ bo'lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deymiz.

Xuddi shunga o'xshash, agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan boshqa va unga yetarli yaqin turgan hamma (x,y) nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ bo'lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada minimumga ega deymiz. Funksiyaning maksimumi va minimumi funksiyaning ekstremumlari deyiladi.

Misol: 8.4-chizmadan ma'lumki, $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ funksiya $x=0$, $y=0$ nuqtada maksimumga erishadi,

$$\max f(x,y) = f(0;0) = \frac{1}{2}.$$

Funksiya ekstrimumining zaruriy shartini beruvchi quyidagi teoremani isbotsiz qabul qilamiz.



8.4 – chizma.

8.5-chizma.

Teorema: Agar $z=f(x,y)$ funksiya (x,y) nuqtada ekstremumga erishsa, u holda bu funksiyaning har bir birinchi tartibli xususiy hosilasi argumentlarining shu qiymatlarida yo nolga teng bo'ladi, yo mavjud bo'lmaydi.

Bu teorema funksiyaning ekstremal qiymatlari haqidagi masalani tekshirish uchun yetarli bo'lmasa ham, lekin maksimum yoki minimumning mavjudligiga oldindan ishonchimiz bo'lgan hollarda bu qiymatlarni topishga imkon beradi. Aks holda qo'shimcha tekshirish zarur bo'ladi.

Misol : $z=x^2-y^2$ funksiyaning hosilalari $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ bo'lib, ular (0:0) nuqtada nolga aylanadi. Lekin bu funksiya shu qiymatlarda (8.5-chizmaga qarang) maksimumga ham, minimumga ham erishmaydi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (yoki mavjud bo'lmagan) va $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (yoki mavjud bo'lmagan) nuqtalari uning kritik nuqtalari deb ataladi.

Agar funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, bu hol faqat kritik nuqtalardagina yuz berishi mumkin.

Teorema: (Ekstremumning yetarlilik shartlari). $Z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtani o'z ichiga olgan biror sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin, undan tashqari $M_0(x_0, y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funksiyaning kritik nuqtasi, ya'ni $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=0$ bo'lsin.U vaqtda (x_0, y_0) nuqtada:

a) agar $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$

va $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}<0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya M_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi;

b) agar $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$

va $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}>0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya M_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi;

d) agar $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y}\right)^2<0$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi;

e) agar $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2=0$

bo'lsa, $f(x,y)$ funksiya ekstrimumga ega bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda tekshirishni davom ettirish kerak.
Teoremani isbotsiz qabul qilamiz va uning qo'llanilishiga misol qaraymiz.

Misol: $f(x,y)=x^3+y^3-3\,xy$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechish:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=3x^2-3y,\ \frac{\partial Z}{\partial y}=3y^2-3x,$$

$$\begin{cases}\frac{\partial Z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial Z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_0(0;0)\\ P_1(1;1).\end{cases}$$

1) P_0 (0,0) kritik nuqtani tekshiramiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3,$$

x=0 va y=0 qiymatida $\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}=0$. Demak,

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial y})^2=-9<0,$$

funksiya P_0 (0,0) nuqtada ekstrimumga ega emas, ya'ni teoremadagi d) holi.

2) P_1 (1, 1) kritik nuqtani tekshiramiz:

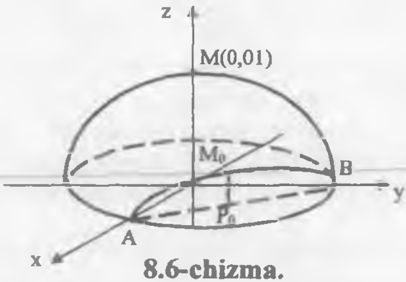
$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}=6,\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}=6,\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y}=-3.$$

Demak, $\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y})^2=27>0$.

$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}>0$, teoremaning b) holiga asosan funksiya P1(1,1) nuqtada minimumga erishadi, $\min f(x,y)=f(1;1)=-1$.

2. Shartli ekstremum

Ta'rif: $z=f\ (x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumi deb, bu funksiyaning x va y o'zgaruvchilarini bog'lash deb ataluvchi $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan bog'langanlik shartida erishadigan ekstremumga aytiladi.



8.6-chizma.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya va OXY tekislikda $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan L chiziq berilgan bo'lsa, y holda $z=f(x,y)$ funksiyaning qiymati bu funksiyaning L chiziqning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi qiymatlariga nisbatan eng katta yoki eng kichik bo'ladigan L chiziqqa tegishli $P_0(x_0,y_0)$ nuqta shartli ekstremum nuqtasi deyiladi. Ravshanki, shartli ekstremum nuqtasi shartsiz ekstremum nuqtasi bo'lmasligi mumkin.

Misol: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiya grafigi yuqori yarim sfera bo'ladi va bu funksiya koordinata boshida maksimumga ega va unga yarim sferada M(0,0,1) nuqta mos keladi. L chiziq A(1;0) va B(0;1) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lsin, uning tenglamasi $x + y-1=0$ bo'ladi. Geometrik nuqtayi nazardan, bu chiziqning nuqtalari uchun z ning eng katta qiymati A va B orasidagi $P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ nuqtada erishadi. Bu nuqtaga esa sirtda M_0 nuqta mos keladi.

Amalda shartli ekstremum nuqtalarini topish uchun oldin bog'lash tenglamasida y ni x orqali oshkor ifodalash kerak: $y=y(x)$, keyin $z=f(x,y)$ funksiyaning ifodasida $y(x)$ funksiyani qo'yib bir o'zgaruvchili funksiya hosil qilinadi: $z=f(x,y(x))$, undan keyin funksiya ekstremumga tekshiriladi.

Qaralayotgan misolda $y=1-x$, $z=\sqrt{2x-2x^2}$. Bu funksiya $x=\frac{1}{2}$ da maksimumga erishadi. Bog'lash tenglamasidan $y=\frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi. $P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ shartli ekstremum nuqtasi aniqlandi.

3. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

Yopiq D sohada uzluksiz bo'lgan $z=f(x,y)$ funksiyaning xossalaridan biri o'zining eng katta qiymati M va eng kichik qiymati m ga erishishi xossasidir. Bu qiymatlarga $z=f(x,y)$ funksiya kritik nuqtalarida yoki D soha chegarasida erishishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Yuqorida aytilganga ko'ra D yopiq sohada uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiyaning eng katta qiymati M va eng kichik qiymatini m ni aniqlash uchun quyidagi amallarni bajarish kerak:

1) Soha ichida joylashgan kritik nuqtalarni topish va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarni hisoblash.

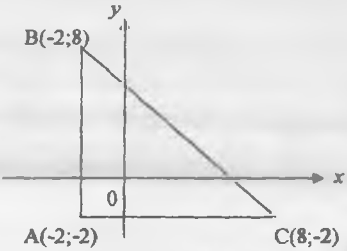
2) Soha chegarasida joylashgan kritik nuqtalarni topish va funksiyaning bu nuqtadagi qiymatlarni hisoblash.

3) Funksiyaning soha chegarasining turli qismlari tutashgan nuqtalaridagi qiymatlarni hisoblash.

4) Topilgan barcha qiymatlar ichidan eng kattasini M va eng kichigini m izlanayotgan qiymatlar deb xulosa chiqarish.

Misol: $f(x,y)=x^2+2xy-y^2+4x$ funksiyaning $D:\{x\ge -2;\ \ y\ge -2;\ \ x+y\le 6\}$ yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Yechish: 1) Funksiyaning D sohadagi kritik nuqtalarini va ulardagi funksiyaning qiymatlarini aniqlaymiz.



$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+2y+4\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x-2y\end{cases};$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y+4=0\\2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$$

$$\boxed{f(-1;-1)=-2}$$

2) Berilgan funksiyani D sohaning chegarasida tekshiramiz.

a) D sohaning AB chegarasini qaraymiz. Bunda $x=-2,\ \ y\in[-2;8]$,

$$f(-2;y)=-y^2-4y-4,\ \ f'(-2;y)=0\Rightarrow -2y-4=0\Rightarrow y=-2.$$

$$\boxed{f(-2;-2)=0}.$$

b) D sohaning BC chegarasini qaraymiz. Bunda $y=6-x,\ \ x\in[-2;8]$.

$$f(x;6-x)=-2x^2+28x-36,\ \ f'(x;6-x)=0\Rightarrow -4x=28\Rightarrow x=7,\ \ y=-1,$$

$$\boxed{f(7;-1)=62}.$$

d) D sohaning AC chegarasini qaraymiz. Bunda $y=-2,\ \ x\in[-2;8]$.

$$f'(x;-2)=2x,\ \ f'(x;-2)=0\ \ f(x;-2)=x^2-4\Rightarrow x=0, y=-2,$$

$$\boxed{f(0;-2)=-4}.$$

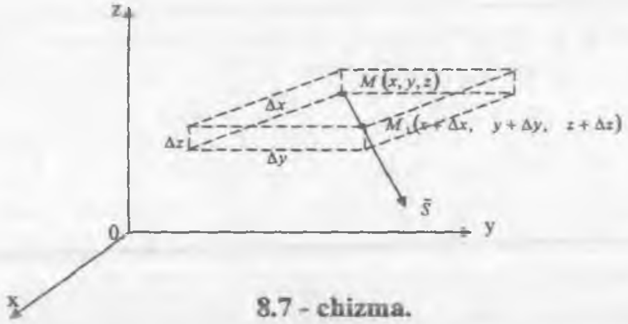
3) Endi funksiya soha chegarasining tutashgan qiymatini $A(-2;2)$, $B(-2;8)$, $C(8;-2)$ nuqtalarda hisoblaymiz:

$$\boxed{f(-2;2)=0,\quad f(-2;8)=-100,\quad f(8;-2)=60}$$

4) To'g'ri burchakli to'rtburchaklar bilan chegaralangan funksiyaning yettita nuqtalardagi qiymatlari aniqlandi. Bulardan eng kattasi 62. Demak, berilgan funksiyaning D sohadagi eng katta qiymati $M=f(7;-1)=62$, eng kichigi -100. Demak, berilgan funksiyaning D sohadagi kichik qiymati $m=f(-2;8)=-100$ bo'lar ekan.

8.4-§. YO'NALISH BO'YICHA HOSILA. GRADIYENT

D sohada $u=f(x,y,z)$ va $M(x,y,z)$ nuqtani, M nuqtadan yo'naltiruvchi kosinuslari $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ bo'lgan $\bar{S}$ vektorni qaraymiz. $\bar{S}$ vektor $M(x+\Delta x,\ \ y+\Delta y,\ \ z+\Delta z)$ nuqtadan o'tadi (8.7- chizma).



8.7 - chizma.

$f(x,y,z)$ funksiya D sohada uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilamiz. (8.12) formulaga o'xshash bu funksiya uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y+\gamma_3\Delta z \tag{8.15}$$

Tabiiyki, $|MM_1|=\Delta S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$ nolga intilganda $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ lar nolga intiladi.

(8.15) tenglikning ikkalla tomonini ΔS ga bo'lib $\Delta S\to 0$ intilgandagi limitini qaraymiz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial f(x;y)}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S}+\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta S}+\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta S}+\gamma_3\frac{\Delta z}{\Delta S}. \tag{8.16}$$

Bu yerda

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}=\frac{\partial u}{\partial S};\quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\alpha;\quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta S}=\cos\beta;\quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S}=\cos\gamma;$$

$$\lim_{\Delta S\to 0}\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\gamma_3\frac{\Delta z}{\Delta S}=0$$

bo'lib, α, β, γ burchaklar, mos ravishda, $\bar{S}$ vektor va OX, OY, OZ o'qlari orasidagi burchaklar bo'lsa, (8.16) tenglik quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial f(x;y)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f(x;y)}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

Bu yerdagi $\frac{\partial u}{\partial \bar{S}}$ hosila $u=f(x,y,z)$ funksiyaning $\bar{S}$ yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb aytiladi.

Xususiy hosilalar yo'nalish bo'yicha hosilalarning xususiy holidir. Masalan, $\alpha=0$; $\beta=\frac{\pi}{2}$; $\gamma=\frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos 0+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\partial u}{\partial x}\text{ bo'ladi.}$$

Misol: $u=x^3+y^3+z^3$ funksiyaning M(1;1;1) nuqtadagi $\bar{S}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi topilsin.

Yechish:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{2}{\sqrt{14}};\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}};\quad \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial x}=3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial y}=3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial z}=3.$$

Demak,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{S}}=3\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{18}{\sqrt{14}}.$$

Ta'rif: $u=f(x,y,z)$ funksiya D sohada aniqlangan bo'lib, D sohaning har bir $M(x,y,z)$ nuqtasiga $\bar{S}$ vektor mos qo'yilgan bo'lsin. Agar $\bar{S}$ vektorning koordinatalari

$$\left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x},\ \frac{\partial u(M)}{\partial y},\ \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}$$

tartib bo'yicha hisoblansa, u holda $\bar{S}$ vektor $u=f(x,y,z)$ funksiyaning gradiyenti deb aytiladi va *grad u* kabi belgilanadi, ya'ni

$$grad\,u=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\bar{k}.$$

Misol: $u=x^3+y^3+z^3$ funksiyaning M(1;1;1) nuqtadagi gradiyentini toping.

Yechish:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial x}=3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial y}=3;\quad \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2;\quad \frac{\partial u(M)}{\partial z}=3.$$

Demak, $grad\,u=3\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$ ekan.

XULOSA

Ko'p o'zgaruvchili funksiya argumentlari deb ataladigan n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ erkli o'zgaruvchilardan iborat. Har bir $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlarga bitta haqiqiy qiymat z mos qo'yiladi. Ikki x va y o'zgaruvchining $z = f(x, y)$ funksiyasi fazoda $Oxyz$ to'g'ri burchakli koordinatalari sistemasida $z = f(x, y)$ munosabat orqali bog'langan nuqtalarning geometrik o'rni sifatida, ya'ni sirt sifatida tasvirlanadi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya n o'lchovli fazodagi $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtaning funksiyasi deb ham ataladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar ham bir o'zgaruvchili funksiyalar singari limitga ega bo'lish va bo'lmasligi mumkin. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki $|x_1 - x_1^0| < \delta,\ |x_2 - x_2^0| < \delta, ..., |x_n - x_n^0| < \delta$ va $P \neq P_0$ bo'lganda $(P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0))$ $|f(x_1, x_2, ... x_n) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b son $U = f(x_1, x_2, ... x_n) = f(P)$ funksiyaning $P \to P_0$ dagi, ya'ni $x_1 \to x_1^0, x_2 \to x_2^0, ..., x_n \to x_n^0$ dagi limiti deyiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyada limit tushunchasi cheksiz limitlar uchun ham umumlashtiriladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyani uch xil hosilasi mavjud bo'ladi. Ular xususiy, to'la va aralash hosilalardir. Birinchi tartibli hosila olinganda faqat xususiy va to'la hosila bo'ladi. Yuqori tartibli hosila uchun esa aralash hosila tushunchasi qo'shiladi.

Masalan, $u = f(x, y)$ funksiyaning xususiy hosilalari $u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y)$ va $u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y)$, to'la hosilasi esa $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ ga teng bo'ladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari ham xususiy hosilalar yordamida topiladi. Funksiya ikki o'zgaruvchili, ya'ni $u = f(x, y)$ bo'lgan holda (x_0, y_0) nuqtadagi $\frac{\partial u}{\partial x}$ xususiy hosilaning geometrik ma'nosi quyidagidan iborat: $y = y_0$ tekislik $u = f(x, y)$ sirtni biror l egri chiziq bo'yicha kesib o'tsa, undan tashqari $\frac{\partial u}{\partial x}$ mavjud bo'lsa, u holda $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nuqtada l egri chiziqqa urinma o'tkazish mumkin bo'lib, u $\frac{\partial u}{\partial x} = tg\alpha$ ga teng bo'ladi.

8- BOBGA DOIR TESTLAR

1. Ikki o'zgaruvchili funksiyani ko'rsating.

A. $f(x)=ax^2+вx+c$; B. $f(x;y)=x+\frac{1}{y}$; C. $f(y)=y+\frac{1}{y}$;

D. $S(t)=t^2+t+1$; E. $f(x)=ax^2+в$.

2. Ikki o'zgaruvchili funksiya $z=\frac{1}{x-y}$ ning aniqlanish sohasini toping.

A. $[-\infty;1)$; B. $x\neq y$; C. $\{1,2,3,\ldots\}$; D. R; E. $(-\infty;+\infty)$.

3. $z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ funksiyaning (0;0) nuqtadagi limitini toping.

A. 0; B. 1; C. $\frac{1}{2}$; D. Mavjud emas; E. 2.

4. z=f (x;y) funksiya D sohada qachon uzluksiz deyiladi?

A. Agar z=f (x;y) funksiya uchun $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$ bo'lsa;

B. Agar z=f (x;y) funksiya uchun $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=A$ bo'lsa;

C. Agar z=f (x;y) funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa;

D. Agar z=f (x;y) funksiya uchun $(x_0;y_0)\to(x;y)$ga yaqinlashganda $f(x_0;y_0)-в$ ayirma cheksiz kichik bo'lsa;

E. Agar z=f (x;y) funksiya uchun $(x;y)\to(x_0;y_0)$ ga chegaralanmagan holda yaqinlashganda, $f(x_0;y_0)-в$ ayirma cheksiz kichik bo'lsa.

5. Quyidagi funksiyalardan qaysi birining aniqlanish sohasi $y\neq x$ bo'ladi ?

A. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; B. $z=\frac{1}{x-y}$; C. $z=\arcsin\frac{x}{y}$;

D. $z=\arccos\frac{1-2x}{y}$; E. $z=\frac{1}{x}+y$.

6. z=tgxy funksiyaning x bo'yicha xususiy orttirmasini ko'rsating.

A. $\Delta_x z=\mathrm{tg}\Delta xy$; B. $\Delta_x z=\mathrm{tg}(x+\Delta x)y-\mathrm{tg}xy$; C. $\Delta_x z=\mathrm{tg}x\Delta y$;

D. $\Delta_x z=\mathrm{ctg}\Delta xy$; E. $\Delta_x z=\mathrm{tg}x(y+\Delta y)-\mathrm{tg}xy$.

7. z=f (x;y) funksiyaning y bo'yicha xususiy orttirmasini ko'rsating.

A. $\Delta_y z=y$; B. $\Delta_y z=f(x;y)-\mathrm{tg}(x)$; C. $\Delta_y z=\frac{\Delta z}{\Delta x}$;

D. $\Delta_y z=f(x;y+\Delta y)-f(x;y)$; E. $\Delta_y z=f(x+\Delta x,y)-f(x;y)$.

8. $z=x^2+y^2+2xy$ funksiyaning to'la orttirmasini toping.

A. $\Delta z=2\Delta x+2\Delta y$; B. $\Delta z=2(\Delta x)^2+2(\Delta y)^2+2\cdot(\Delta x)\cdot\Delta y$;

C. $\Delta z=2x\Delta x+2y\Delta y+2(x\Delta y+y\Delta x)+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+2\Delta x\Delta y$;

D. $\Delta z=2x\Delta x+2y\Delta y$; E. $\Delta z=2x+2y+2(\Delta x+\Delta y)$.

9. To'liq differensial formulasini ko'rsating.

A. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$; B. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$; C. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}$;

D. $dz=\frac{\partial z}{\partial y}$; E. $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

10. Agar $z=x\sin y$ bo'lib, $x=2t-v$, $y=3t-2v$ bo'lsa, $\frac{\partial z}{\partial t}$ ni ko'rsating.

A. $\frac{\partial z}{\partial t}=2\sin(3t-2v)+3(2t-v)\cos(3t-2v)$;

B. $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$; C. $\frac{\partial z}{\partial t}=(2t-v)\cos(3t-2v)$;

D. $\frac{\partial z}{\partial t}=x\cos y-\sin y$; E. $\frac{\partial z}{\partial t}=-\sin(3t-2v)+(2t-v)\cos y$.

11. Agar $y=f(x)$ funksiya $F(x;y)=0$ oshkormas ko'rinishda berilgan bo'lsa, y_x qanday topiladi?

A. $y_x=-\frac{F_x^{\prime}(x;y)}{F_y^{\prime}(x;y)}$; B. $y_x=-\frac{F_y^{\prime}(x;y)}{F_x^{\prime}(x;y)}$; C. $y_x=\frac{\Delta F(x;y)}{\Delta x}$;

D. $y_x=\frac{\Delta F(x;y)}{\Delta y}$; E. $y_x=\frac{\Delta_x F(x;y)}{\Delta x}$.

12. $z=f(x;y)$ funksiyadan $P(x_0;y_0)$ nuqtadagi $\bar{a}=\{a_1, a_2\}$ vektor yo'nalishi bo'yicha olingan hosilani ko'rsating.

A. $\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial \bar{a}}=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cos\alpha$; B. $\frac{\partial z(p)}{\partial \bar{a}}=\frac{\partial z(p)}{\partial y}\cos\beta$;

C. $\frac{\partial z(p)}{\partial \bar{a}}=\frac{\partial z(p)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z(p)}{\partial y}\cos\beta$; D. $\frac{\partial z(p)}{\partial \bar{a}}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$;

E. $\frac{\partial z(p)}{\partial a}=\frac{\partial z(p)}{\partial x}+\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$.

13. $z=x^2+y^2+2xy$ funksiyaning $P(1;2)$ nuqtadagi gradiyentini toping.

A. $gradz(p)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$; B. $gradz(p)=6\vec{i}+6\vec{j}$; C. $gradz(p)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}$;

D. $gradz(p)=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$; E. $gradz(p)=6\vec{i}$.

14. Qachon P_0 nuqta f (x;y) funksiyaning D sohadagi maksimum nuqtasi bo‘ladi?

A. Agar $\forall(x;y)\in D$ uchun $f(x;y) < f(P_0)$ bo‘lsa;

B. Agar $\forall(x;y)\in D$ uchun $f(x;y) > f(P_0)$ bo‘lsa;

C. Agar $\forall(x;y)\in D$ uchun $f(x;y) = f(P_0)$ bo‘lsa;

D. Agar $\forall(x;y)\in D$ uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ bo‘lsa;

E. Agar $\forall(x;y)\in D$ uchun $(x;y)\neq(x_0;y_0)\in D$ $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ bo‘lsa.

15. $z=(x-1)^2+(y+2)^2+1$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini ko‘rsating.

A. $x=2$, $y=1$; B. $x=1$, $y=-2$; C. $x=1$, $y=-2$; D. $x=-1$, $y=2$;

E. $x=0, y=0$.

16. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartini ko‘rsating.

A. $\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$; B. $\Delta_x z = 0$; C. $dz=0$; D. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$; E. $f_x(x;y)=0$.

17. Ekstremum mavjudligining yetarli shartini ko‘rsating.

A. $\Delta = AC - B^2 < 0$; B. $\Delta = z''_x \cdot z''_y > 0$; C. $\Delta = z''_x - z'_{xy} > 0$;

D. $\Delta = z''_x(p_0)\cdot z''_y(p_0) - \left(z''_{xy}(p_0)\right)^2 > 0$; E. $\Delta = z''_{xy}(p_0) > 0$.

18. $z=x^2-y^2$ funksiyaning $x^2+y^2\le 4$ doiradagi eng kichik qiymatlarini toping.

A. $Z_{e.kich.} = 0$; B. $Z_{e.kich.} = 4$; C. $Z_{e.kich.} = -4$; D. $Z_{e.kich.} = -8$;

E. $Z_{e.kich.} = -2$.

O‘z- o‘zini tekshirish savollari

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni ta’riflang.
2. Aniqlanish sohasi nima ?
3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning grafigiga misol keltiring.
4. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti va uzluksizligi nima ?
5. Xususiy va to‘la orttirmalarni ta’riflang.
6. Xususiy hosilalarni ta’riflang.
7. Murakkab funksiyaning hosilasini ta’riflang.
8. To‘la hosila nima ?
9. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning maksimumi va minimumiga ta’rif bering.
10. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlarini keltiring.
11. Shartli ekstremum nima ?

IX bob. INTEGRAL HISOB

Inson taffakkuri integral hisobda
o'z faoliyatining tuganmas sohasini topdi.
O.Kant

Bobning o'quv maqsadi

Bir o'zgaruvchili funksiyani differensiallash amalidan keyin integrallash amali muhim o'rin tutadi.

Hayotda matematika, fizika, mexanika va boshqa fanlarda uchraydigan masalalarni yechishda integral hisob kuchli qurol sifatida ishlatiladi.

Integrallashning asosiy usullari bilan tanishtirish, aniqmas integral va aniq integrallar orasidagi bog'lanish va farqlarni, aniq integralning tatbiqlarini talabalarga yetkazish mazkur bob oldiga maqsad qilib qo'yilgan.

Nemis matematigi G.Leybnis 1816-yilda birinchi bo'lb, $\int$ integral belgisini fanga kiritdi. Keyinchalik uning o'quvchisi I.Bernulli. «integral»-lotincha «integer»-(qayta tiklangan) termindan foydalandi. I.Kepler – nemis matematigi va astronomi tekis figuralar yuzini hisoblashda, oldin uni kichik yuzalarga (kichik miqdor tushunchasi) ajratib, so'ngra ularning yuzlari yig'indisini hisoblagan. Natijada integral tushunchasiga kelgan. G.Leybnis uchun integral, bu cheksiz ko'p qo'shiluvchilar yig'indisi, ya'ni hozirgi paytda, bu aniq integral tushunchasidir. Integral G.Leybnis uchun «yig'indi» ma'nosini bildirgan.

B.Riman birinchi bo'lib, aniq integralning ta'rifini berdi va integrallni yig'indi bilan belgiladi. U hozirgi paytda «Riman yig'indisi» deb yuritiladi. Fransuz matematigi O.Koshi aniq integralni integral yig'indisining limiti sifatida qaradi, f(x)dx belgi esa J.Fur'e tomonidan taklif qilingan.

Fransuz matematigi B.Paskal yuza va hajmlarni hisoblashda qo'llangan usullari differensial va integral hisobning yaratilishiga asos bo'lgan.

9.1-§. BOSHLANG'ICH FUNKSIYA VA ANIQMAS INTEGRAL

a) Boshlang'ich funksiya va uning xossalari

Ta'rif: Biror oraliqda aniqlangan $F(x)$, $f(x)$ funksiyalar uchun bu oraliqning hamma nuqtalarida

$$F'(x)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda F(x) funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Misol: 1) $F(x)=\frac{a^x}{ln\,a}$, $(a\neq 1, a>0)$ funksiya sonlar o'qida $f(x)=a^x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki x ning istalgan qiymatida

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{ln\,a}\right)'=a^x=f(x)$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

2) $F(x)=\frac{x^5}{5}$ funksiya sonlar o'qining hamma nuqtalarida $f(x)=x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki x ning istalgan qiymatida

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi bir qiymatli hal qilinmaydi. Haqiqatan, agar F(x) funksiya f(x) ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda F(x)+C funksiya ham (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son) f (x) ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki C ning istalgan qiymati uchun $(F(x)+C)'=f(x)$ bo'ladi.

Misol : $F(x)=\frac{a^x}{ln\,a}$ funksiya $f(x)=a^x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanligi yuqorida ko'rildi.

$$(F(x)+C)'=\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)'=a^x=f(x)$$

tenglikdan esa $\frac{a^x}{\ln a}+C$ funksiya ham a^x funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi mulohazalardan boshlang'ich funksiyalarning quyidagi xossasi kelib chiqadi.

Lemma: Agar F(x) va $\Phi(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ = F(x)+C tenglik o'rinli bo'ladi, bunda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

Isbot: F(x) va $\Phi(x)$ funksiyalar f(x) ning boshlang'ich funksiyalari bo'lgani uchun

$$F'(x)=f(x) \quad \text{va} \quad \Phi'(x)=f(x)$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Yordamchi Q(x) funksiyani kiritamiz :

$$\Phi(x) - F(x) = Q(x).$$

Uning hosilasi x ning hamma qiymatlarida nolga teng, haqiqatan

$$Q'(x) = [\Phi(x)- F(x)]'= \Phi'(x) - F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Endi $Q'(x)=0$ tenglikdan Q(x) funksiyaning o'zgarmas son ekani kelib chiqishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, x_0 argumentning tayinlangan qiymati, x esa uning istalgan qiymati bo'lsin. $[x_0, x]$ oraliqda Lagranj formulasini tuzamiz:

$$Q(x)- Q(x_0)= Q'(\xi)(x- x_0) \ ,$$

bunda $x_0<\xi<x$ bo'ladi.

Bu yerdan $Q'(x)=0$ tenglik x ning hamma qiymatida, shu jumladan ξ da ham $Q'(\xi)=0$ bo'lgani uchun $Q(x)- Q(x_0)=0$ ya'ni $Q(x)=Q(x_0)$ ni hosil qilamiz. Bu holda Q(x) funksiyaning qiymati x ning hamma qiymatida bir xil bo'lishini bildiradi. Shunday qilib, $Q(x)=C$ yoki

$$\Phi(x)- F(x) =C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Lemma isbotlandi.

Isbotlangan lemmadan, berilgan funksiyaning ikkita boshlang'ich funksiyasi bir-biridan faqat o'zgarmas songa farq qilishi kelib chiqadi.

b) Aniqmas integral va uning xossalari

Ta'rif: Agar F(x) funksiya biror oraliqda f (x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda F(x)+C (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyalar to'plami shu kesmada f (x) funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

kabi belgilanadi. Bu yerda $\int$ - integral belgisi, f(x) integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni integrallash deyiladi. Kesmada uzluksiz bo'lgan istalgan funksiya shu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega, demak, aniqmas integralga ham ega ekanini isbotsiz aytib o'tamiz.

Misol : 1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, 2) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega :

I. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

Chunki $(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

II. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

III. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

IV. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmas yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

V. O'zgarmas k ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

VI. Chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

I va VI xossalar to'g'riligi aniqmas integral ta'rifidan kelib chiqadi. Asosiy elementar funksiyalar hosilalaridan foydalanib quyidagi integrallar jadvalini keltirish mumkin:

d) Asosiy integrallar jadvali

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

9. $\int \cos x dx = \sin x + c$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$

14. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$

15. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

9.2-§. INTEGRALLASH USULLARI

a) Bevosita integrallash usuli deb V va VI xossalarni qo'llash va asosiy integrallar jadvalidan foydalanib integrallashga aytiladi.

Misol : Integralni toping:

$$\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx$$

Yechish: Suratni maxrajga bo'lib, keyin V va VI xossalarni qo'llab, integral ostidagi ifodani shakl almashtiramiz va integrallar jadvalidan foydalanamiz:

$$\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx = \int (\frac{7}{x} - 5 + \frac{1}{x^2}) dx = 7\int \frac{dx}{x} - 5\int dx + \int \frac{dx}{x^2} = 7\ln|x| - 5x - \frac{1}{x} + c.$$

b) Differensial belgisi ostiga kiritish usuli aniqmas integralning ushbu invariantlik xossasiga asoslangan:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + c.$$

Bu yerda *u=u(x)* tegishli differensiallanuvchi funksiyani ifodalaydi.

Misol : 1) $\int (x+4)^5 dx = \int (x+4)^5 d(x+4) = \frac{(x+4)^6}{6} + c.$

Bu yerda dx=d(x+4) ligidan foydalandik.

$$2)\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{2}{2}\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

Bu yerda oldin integralni 2 songa ko'paytirdik va ayni shu paytda uni 2 songa bo'ldik. Undan keyin $2xdx=dx^2=d(1+x^2)$ ekanligidan foydalandik.

$$3)\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{4}{4}\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x-11)}{4x-11}=\ln|4x-11|+c.$$

d) Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli. Integrallar jadvaliga kirmagan integralni hisoblash kerak bo'lsin. x ni t erkli o'zgaruvchining biror differensiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalab, integrallashning yangi t o'zgaruvchisini kiritamiz: $x=\varphi(t)$, bunga teskari $t=\psi(x)$ funksiya mavjud bo'lsin, u holda

$$dx=\varphi'(t)dt$$

bo'lib,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

ekanini isbotlaymiz. Tenglikning har ikkala tomonining hosilalari teng ekanligini ko'rsatamiz va uning to'g'riligiga ishonch hosil qilamiz:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\ ,$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=f(\varphi(t))=f(x).$$

Misol : 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ integralni toping.

Yechish: $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4}=t,x+4=t^2\\ x=t^2-4\\ dx=2tdt\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t}=2\int\frac{dt}{t^2-2^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C\cdot$$

Misol : 2) $\int\sqrt{1-x^2}dx$ integralni toping.

Yechish: $$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{l}x=\cos t\quad dx=-\sin tdt\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t\end{array}\right]=$$

$$=-\int\sin^2 tdt=-\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int\cos 2tdt-\frac{1}{2}\int dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int cos2td2t-\frac{1}{2}t=\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t+c=\frac{1}{4}\sin 2\arccos x-\frac{1}{2}\arccos x+c=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\arccos x\cdot\cos\arccos x-\frac{1}{2}\arccos x+c=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{1}{2}\arccos x+c.$$

e) Bo‘laklab integrallash usuli. Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x ning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differensialini topamiz:

$$d(u\cdot v)=vdu+udv\ .$$

Bundan

$$udv=d(uv)-vdu.$$

Oxirgi tenglikning ikkala qismini integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int udv=\int d(uv)-\int vdu,$$

yoki

$$\int udv=uv-\int vdu$$

o‘rinli bo‘ladi.

Bu formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

Odatda, $\int x^n\cos xdx, \int x^n\sin xdx, \int\sqrt{a\pm x^2}dx, \int x^n a^x dx, \int x^n\ln xdx$ va shularga o‘xshash integrallar bo‘laklab integrallash formulasi orqali hisoblanadi.

Misol : 1) $\int\sqrt{1-x^2}dx$ integralni toping.

Yechish: $$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=u, dx=dv\\ \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}=du, x=v\end{array}\right]=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx-\arccos x+C$$

Quyidagi tenglik hosil bo‘ldi:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=x\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}dx-\arccos x+C$$

Demak,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}-\frac{arc\cos x}{2}+C.$$

Misol : 2) $\int x\cdot 5^x dx$ integralni toping.

Yechish: $$\int x\cdot 5^x dx=\left[\begin{array}{l}x=u,5^x dx=dv\\ dx=du,\dfrac{5^x}{ln5}=v\end{array}\right]=\frac{x\cdot 5^x}{ln5}-\frac{1}{ln5}\int 5^x dx=\frac{x\cdot 5^x}{ln5}-\frac{1}{ln^2 5}\cdot 5^x+C.$$

9.3-§. KVADRATIK UCHHAD QATNASHGAN BA'ZI FUNKSIYALARNI, ENG SODDA RATSIONAL KASRLARNI VA TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR QATNASHGAN BA'ZI IFODALARNI INTEGRALLASH

a) Kvadratik uchhad qatnashgan ba'zi funksiyalarni integrallash. Ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\quad \bar{I}_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Maxrajdagi kvadratik uchhadni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$ax^2+вx+c=a\left[x^2+\frac{в}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{в}{2a}x+(\frac{в}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{в}{2a})^2\right]=$$

$$=a\left[(x+\frac{в}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{в^2}{4a^2})\right]=a\left[(x+\frac{в}{2a})^2\pm\kappa^2\right],$$

bu yerda

$$\frac{c}{a}-\frac{в^2}{4a^2}=\pm\kappa^2$$

belgilash kiritildi. Shunday qilib,

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+вx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{в}{2a})^2\pm\kappa^2}=\left[\begin{matrix}x+\frac{в}{2a}=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right]=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\kappa^2}.$$

Bu esa jadvaldagi integraldir. Shu kabi,

$$\bar{I}_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{в}{2a})^2+\kappa^2}}=\left[\begin{matrix}x+\frac{в}{2a}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm\kappa^2}}.$$

Misol : Ushbu integralni hisoblang :

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Yechish:

$$\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=$$

$$=\left[\begin{matrix}x+2=t\\ dx=dt\end{matrix}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

b) Umumiyroq ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+вx+c}dx,\quad \bar{I}_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx$$

I_2 integralni qaraylik. Integral ostidagi funksiya suratida maxrajidagi kvadratik uchhadning hosilasini tashkil etamiz:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+\textit{в}x+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+\textit{в})+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})}{ax^2+\textit{в}x+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+\textit{в})dx}{ax^2+\textit{в}x+c}+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+\textit{в}x+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+\textit{в})dx}{ax^2+\textit{в}x+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot I_1$$

$$I_2=\begin{bmatrix}ax^2+\textit{в}x+c=t\\(2ax+\textit{в})dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\cdot I_1$$

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|t|+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})I_1=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+\textit{в}x+c|+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})I_1+C.$$

Bu yerdagi I_1 integralni hisoblash tartibi yuqorida ko‘rsatilgan. Shu kabi $\bar{I}_2$ integral ham hisoblanadi.

$$\bar{I}_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}}dx=\int\frac{A\cdot\frac{(2ax+\textit{в})}{2a}+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})}{\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+\textit{в}}{\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}}dx+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}}=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+\textit{в}}{\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}}dx+$$

$$+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\bar{I}_1=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\bar{I}_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{t}+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\bar{I}_1=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+\textit{в}x+c}+(B-\frac{A\textit{в}}{2a})\bar{I}_1+C.$$

$\bar{I}_1$ integralni yechilishi tartibi yuqorida ko‘rsatilgan.

Misol : Quyidagi integralni hisoblang :

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$$

Yechish: $$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-\int\frac{7\cdot dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

d) Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash

Quyidagi ratsional kasrlarga eng sodda ratsional kasrlar deb aytiladi:

I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^n}$, III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{(Ax+B)}{(x^2+px+q)^n}$.

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

$$\text{I. } \int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{Adx}{(x-a)^{\kappa}} = A\int (x-a)^{-\kappa} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} + C = \frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}} + C.$$

III turdagi oddiy kasrning integralini qaraymiz: $\frac{p^2}{4} - q < 0$ bo'lsin, unda

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2+px+q = t \\ (2x+p)dx = dt \end{bmatrix} = \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| - (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Endi IV turdagi oddiy kasrning integralini hisoblaymiz.

$$\text{IV. } \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} +$$

$$+ (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} = \frac{A}{2} I + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \bar{I}.$$

Bu yerda

$$I = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}, \qquad \bar{I} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n}$$

bo'ladi.

$$1)\ I = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} = \begin{bmatrix} x^2+px+q = t \\ (2x+p)dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + C.$$

$$2)\bar{I}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n}=\begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}. \qquad (9.1)$$

Oxirgi integralga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}=\begin{bmatrix} u=t, dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} \\ du=dt, v=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Agar $\bar{I}=I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ belgilash kiritsak, u holda (9.1) dagi formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$I_n=\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}. \qquad (9.2)$$

Bu formula bo'yicha I_{n-1} integralni I_{n-2} orqali ifodalaymiz, so'ngra I_{n-2} ni I_{n-3} orqali ifodalaymiz va hokazo. Bu jarayon quyidagi integralni hosil qilgunimizcha davom etadi:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

(9.2) formula keltirish yoki rekurrent formula deyiladi.

Misol: $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$ integralni hisoblang.

Yechish: $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+3)^2}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)}-2\bar{\bar{I}}_2 \qquad (9.3)$$

$\bar{\bar{I}}_2$ integralni hisoblaymiz:

$$\bar{\bar{I}}_2=\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{((x+1)^2+2)^2}=\begin{bmatrix}x+1=t\\ dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}.$$

Oxirgi integralni qaraymiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2}=-\frac{1}{2}\int td(\frac{1}{t^2+2})=$$

$$=\begin{bmatrix}u=t, dv=d(\frac{1}{t^2+2})\\ du=dt, v=\frac{1}{t^2+2}\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{-(x+1)}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Demak,

$$\bar{\bar{I}}_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]+C$$

bo‘ladi.

$\bar{\bar{I}}_2$ integral qiymatini (9.3) tenglikka qo‘ysak, berilgan integralning qiymati kelib chiqadi:

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}=-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

e) Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.

1. $\int R(\sin x,\cos x)$ ko‘rinishdagi integral har doim $t=tg\frac{x}{2}$ almashtirirsh yordamida ratsional kasrlarni integrallashga olib keladi. Tabiiyki,

$$x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Bularni berilgan integralga qo‘yib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Misol: $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ integralni toping.

Yechish: Berilgan integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishni bajaramiz:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \begin{bmatrix} t = tg\frac{x}{2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{1+2t-t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - (t-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+t-1}{\sqrt{2}-t+1}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-tg\frac{x}{2}}\right| + C.$$

2. Agar $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integral ostidagi funksiya uchun

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda berilgan integralni topish uchun $t = \cos x$ almashtirishni bajarish maqsadga muvofiqdir. $\int_a^b R(\cos x)\sin x dx$ ko‘rinishdagi integrallarda ham bunday almashtirishni bajarish mumkin.

Misol: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ integralni toping.

Yechish: $t = \cos x$ almashtirish bajaramiz:

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x} = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

3. Agar $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integral ostidagi funksiya uchun

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda berilgan integralni topish uchun $t = \sin x$ almashtirishni bajarish maqsadga muvofiqdir. $\int_a^b R(\sin x)\cos x dx$ ko‘rinishdagi integrallarda ham bunday almashtirishni bajarish mumkin.

Misol: $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ integralni toping.

Yechish: $t = \sin x$ almashtirish bajaramiz.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^2(1-t^2)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

4. Agar $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integral ostidagi funksiya uchun

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda berilgan integralni topish uchun $t = tgx$ almashtirish bajarish maqsadga muvofiqdir.

Misol:

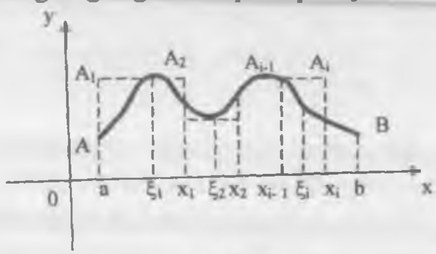
$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^6 x}}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}=\int\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{1}{tg^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\left[\begin{array}{c} t=tgx \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ \dfrac{1}{\cos^4 x}=\left(1+tg^2x\right)^2=\left(1+t^2\right)^2 \end{array}\right]=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3}dt=$$

$$\int\frac{dt}{t^3}+2\int\frac{dt}{t}+\int tdt=-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{2tg^2x}+2\ln|tgx|+\frac{tg^2x}{2}+C.$$

9.4-§. ANIQ INTEGRAL TUSHUNCHASIGA OLIB KELUVCHI MASALALAR. ANIQ INTEGRALNING TA'RIFI VA XOSSALARI

1. Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasi

$y=f(x)$ yzluksiz funksiya grafigi, $x=a$, $x=b$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraga egri chiziqli trapetsiya deb aytamiz.



9.1-chizma.

Shu figura yuzini hisoblash masalasini ko'raylik.

[a; b] kesmani $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ bo'lgan n-1 ta nuqta yordamida bo'laklarga bo'lamiz. Bunda $a=x_0$ va $b=x_n$ deymiz. Bo'lish nuqtalari [a; b] kesmani n ta kichik kesmalarga ajratadi:

$$[x_0;x_1],\ [x_1;x_2],\ldots\ [x_{i-1};x_i],\ldots.\ [x_{n-1};x_n].$$

Bo'linish nuqtalaridan OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tqazib, egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratamiz, (9.1-chizma). Ravshanki, egri chiziqli trapetsiya ABba ning yuzi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yig'indisiga teng. Agar ABba egri chiziqli trapetsiyaning yuzi S, asosi $[x_{i-1}; x_i]$, $(i=1,2,3,\ldots,n)$ bo'lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalari ΔS_i bilan belgilansa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_i+\ldots+\Delta S_n, \quad \text{yoki} \quad S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i . \qquad (9.4)$$

ΔS_i larning aniq qiymatini topib bo'lmaydi, takribiy qiymatlarni aniqlash uchun esa $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalarning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqtadan tanlab olamiz va bu nuqtalarda $f(\xi_i)$ ordinatalarni yasaymiz. 9.1-chizmadan quyidagilar ko'rinadi:

$$\Delta S_1\approx f(\xi_1)(x_1-x_0),\ \Delta S_2\approx f(\xi_2)(x_2-x_1),,\ \Delta S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\ ,\ldots,\ \Delta S_n\approx f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}). \qquad (9.5)$$

Agar $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ belgini kiritib (9.5)-larni (9.4)-ga qo'ysak, ABba egri chiziqli trapetsiya yuzining taqribiy qiymatini topgan bo'lamiz:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (9.6)$$

(9.6) ifodaga $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi integral yig'indisi deb aytiladi.

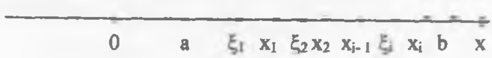
2.O'zgaruvchi kuch bajargan ish haqidagi masala

Mexanikadan ma'lumki, agar F kuch ta'sirida moddiy nuqta ℓ masofaga siljigan bo'lsa, bajarilgan ish A quyidagiga teng:

$$A=F\cdot\ell . \qquad (9.7)$$

Bu yerda F kuch kattaligi bilan ham, yo'nalishi bilan ham o'zgarmas. Endi F kuch o'zgarmas yo'nalishni saqlasa ham, sonli kattaligi bo'yicha o'zgargan holni qaraymiz. Aytaylik, bu kuch ta'sirida moddiy nuqta kuchning ta'sir chizig'i yo'nalishi bo'ylab yo'nalgan to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilsin. Bunda F kuch bajargan ishni hisoblash masalasini qaraymiz.

Moddiy nuqta harakat qilayotgan chiziqni OX o'qi deb qabul qilamiz:



9.2- chizma.

Yo'lning boshlanish va tugash nuqtalari mos ravishda a va b, $(a<b)$ abssissalarga ega bo'lsin.$[a;b]$ kesmaning har bir nuqtasida kuchning kattaligi ma'lum qiymatga, ya'ni $F=f(x)$ funksiya kabi berilgan bo'lsin. Bu funksiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. $[a; b]$ kesmani n ta kichik kesmalarga bo'lamiz (9.2- chizma).

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots [x_{i-1}; x_i]\dots [x_{n-1}; x_n].$$
$$(a=x_0,\ b=x_n)$$

Ularning uzunligi mos ravishda

$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ bo‘ladi.

$[x_{i-1}; x_i]$ kesmada F kuchning bajargan ishi ΔA_i bo‘lsin, u holda $[a; b]$ kesmada bajarilgan ish quyidagiga teng:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i\ . \qquad (9.8)$$

ΔA_i larning aniq qiymatini hisoblab bo‘lmaydi. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun $[x_{i-1}; x_i]$ larning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va shu nuqtalardagi $F=f(x)$ funksiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. (9.7) formulaga ko‘ra

$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\,\Delta x_2, \dots, \Delta A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i, \dots, \Delta A_n \approx f(\xi_n)\,\Delta x_n.$

Bularni (9.8) tenglikka qo‘yib izlanayotgan ishning taqribiy qiymatini integral yig‘indi ko‘rinishida topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

3. Aniq integralning ta’rifi

$y=f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_i<\dots<b=x_n$ bo‘lish nuqtalari yordamida $[a;b]$ kesmani n ta kichik kesmalarga ajratamiz (9.1-chizma).

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots [x_{i-1}; x_i]\dots [x_{n-1}; x_n].$$

$[x_{i-1}; x_i]$, $i=1,2,3,\dots,n$ kichik kesmalarning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqtani tanlaymiz. $f(x)$ funksiyaning ξ_i nuqtadagi qiymatini mos kesmaning $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ uzunligiga ko‘paytirib (9.6) kabi integral yig‘indi tuzamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (9.9)$$

Ta’rif: Agar S integral yig‘indi $[a; b]$ kesmani $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalarga ajratish usuliga va ularning har birida ξ_i nuqta tanlashga bog‘liq bo‘lmaydigan I limitga ega bo‘lsa, u holda bu I son $[a; b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx\,.$$

Bu yerda a–quyi chegara, b–yuqori chegara, $f(x)$ –integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ –integral ostidagi ifoda deyiladi.

$[a;\ b]$ kesmada $\int_a^b f(x)dx$ integrali mavjud bo'lgan f (x) funksiya bu kesmada integrallanuvchi funksiya deb aytiladi.

Oldin ko'rilganlarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning aniq yuzasi S va o'zgaruvchi kuch bajargan ishning aniq miqdori A

$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad A = \int_a^b f(x)dx$$

kabi topilishi kelib chiqadi. Bu aniq integralning geometrik va mexanik ma'nolarini ifodalaydi.

Funksiya integralining iqtisodiy ma'nosi. $z=f(t)$ funksiya vaqt o'tishi bilan qaysidir ishlab chiqarishning unumdorligini ifodalasin. $[0,T]$ vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori u ning qiymatini topamiz. U holda, Δt vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $\Delta u=f(t)\cdot\Delta t$ bilan aniqlanadi yoki $\Delta u\approx f(\xi)\cdot\Delta t$, $\xi\in[t,\ t+\Delta t]$. $[0,T]$ kesmani $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ nuqtalar yordamida $[t_{i-1},t_i]$ $i=1,2,\ldots n$ kichik kesmalarga ajratamiz va ularning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlaymiz, u holda $\Delta u_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $\xi_i\in[t_i,\ t_i+\Delta t_i]$ ва $u=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $u=\lim\limits_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i=\int_0^T f(t)dt$ hosil bo'ladi.

Demak, agar f(t) mehnat unumdorligi bo'lsa, u holda $\int_0^T f(t)dt$ integral $[0,T]$ davr oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

4.Aniq integral xossalari

a) $\int_a^a f(x)dx=0.$

b) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

d) $\int_a^b (f+\varphi)dx = \int_a^b fdx + \int_a^b \varphi dx.$

e) $a<c<b$ uchun $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

f) Agar $[a;\ b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo'lsa $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

f) Agar $[a; b]$ kesmada $f(x) \geq \varphi(x)$ bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$ bo'ladi.

j) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda shu kesmada $x = c, \quad a < c < b$ nuqta topish mumkinki

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

9.5-§. NYUTON -LEYBNITS FORMULASI VA ANIQ INTEGRALNI HISOBLASH USULLARI

1.Integralning o'zgaruvchi yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi

$y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ integralni qaraymiz. Agar b yuqori chegara o'zgaruvchan x bo'lsa, unda yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lgan integral hosil bo'ladi:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

1-teorema: Agar $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot : x argumentga Δx orttirma beramiz. U holda aniq integralning xossasiga asosan

$$I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

bo'ladi.

I(x) funksiyaning ortirmasini yozamiz:

$$\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt,$$

ya'ni

$$\Delta I(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (9.10)$$

ga teng.

Aniq integral ning j) xossasiga asosan (9.10) integral

$$\Delta I = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

ko'rinishga keladi, bunda ξ ning qiymati x bilan $x+\Delta x$ orasida yotadi. Hosilaning ta'rifiga asosan

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(x)$$

ga teng ($\Delta x\to 0$ intilganda $\xi\to x$ intilishi nazarda tutiladi).

Teorema isbotlandi.

2. Nyuton - Leybnits formulasi

Teorema: Nyuton - Leybnits teoremasi. Agar F(x) uzluksiz f(x) funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik **Nyuton-Leybnits formulasi** deyiladi.

Isbot: F(x) funksiya uzluksiz f(x) funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. I-teoremaga asosan $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Ammo, har qanday ikkita boshlang'ich funksiya bir-biridan o'zgarmas C qo'shiluvchi bilan farq qiladi:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)+C. \qquad (9.11)$$

Bu tenglamada $x=a$ deb olsak, aniq integralning a) xossasiga asosan

$$0=F(a)+C$$

va bundan

$$C=-F(a)$$

ga teng bo'ladi. C ning qiymatini (9.11) ga qo'yamiz.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a).$$

Endi bu tenglikda $x=b$ desak, Nyuton-Leybnits formulasi hosil bo'ladi.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (9.12)$$

Teorema isbotlandi.

Aniq integralni bevosita integrallash, differensial ostiga kiritish usullari xuddi aniqmas integraldagi singari bo'ladi va shu sababli ularning qo'llanilishini (9.12) formulani nazarga olib, misollar orqali ko'rsatamiz:

1-misol : $$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2-misol : $$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}, \quad n\neq -1.$$

3-misol : $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2}.$$

4-misol : $$\int_a^a e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b = \frac{e^{4a}-e^{4a}}{4}.$$

5-misol : $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

6-misol : $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

7-misol: $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2-1=1.$$

8-misol: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xd2x = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = 1.$$

3. Bo'laklab integrallash usuli

u va v funksiyalar x ning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsin. U holda

$$d(u\,v)=vdu+udv$$

bo'ladi.

Bu tenglamaning ikkala tomonini a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b d(u,v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv, \qquad uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

Chap tomoniga Nyuton-Leybnits formulasini qo'llagandan keyin oxirgi tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (9.13)$$

(9.13) tenglik aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

1-misol : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \begin{bmatrix} x = u, & \cos x dx = dv \\ dx = du, & \sin x = v \end{bmatrix} = x \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

2- misol :

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} \ln x = u, & \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ \frac{dx}{x} = du, & 2\sqrt{x} = v \end{bmatrix} = (2\sqrt{x} \ln x)\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \sqrt{x} \frac{dx}{x} = 4e - (4\sqrt{x})\Big|_1^{e^2} =$$

$$= 4e - 4e + 4 = 4$$

3-misol:

$$\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx = \begin{bmatrix} arctgx = u, & dx = dv \\ \frac{dx}{1+x^2} = du, & x = v \end{bmatrix} = x \cdot arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right|\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2.$$

4. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish

3-teorema: $\int_a^b f(x)dx$ integralda $x=\varphi(t)$ tenglik orqali yangi t o'zgaruvchi kiritilgan bo'lsin.

Agar 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 2) $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$lar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz funksiyalar bo'lsa, 3) $f[\varphi(t)]$ funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (9.14)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglik aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi deb ataladi.

Isbot: F(x) funksiya f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin.

Unda quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F((\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Natijada (9.14) tenglamaning chap tomoni o'ng tomoniga teng ekanligi kelib chiqdi.Teorema isbotlandi.

1-misol :

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left[\begin{matrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1 \\ & x = 0\ da\ \alpha = 1 \\ dx = 2tdt, & x = 3\ da\ \beta = 2 \end{matrix}\right] = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$=2\int_1^2 (t^2-1)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

2-misol :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\begin{matrix} x = \sin t; dx = \cos tdt, 1 - x^2 = \cos^2 t \\ x = 0\ da\ \alpha = 0, \\ x = 1\ da\ \beta = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

9.6-§. XOSMAS INTEGRALLAR HAQIDA TUSHUNCHALAR

1. Chegarasi cheksiz xosmas integrallar. Ta'rif: $[a;\infty)$ intervalda uzluksiz bo'lgan *f(x)* funksiyaning xosmas integrali deb

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

limitga aytiladi va $\int_a^\infty f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (9.15)$$

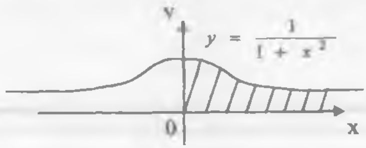
Agar (9.15)-limit mavjud va chegaralangan bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, agarda ko'rsatilgan limit chegaralanmagan yoki mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

$(-\infty;b]$, $(-\infty;\infty)$ intervallarda xosmas integral shunga o'xshash aniqlanadi.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Misol : $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblang.



9.3 - chizma.

Yechish: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} arctg\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}.$

Qaralgan integral 9.3-chizmada shtrixlangan cheksiz egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi.

Ba'zi bir hollarda berilgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini bilish va uning qiymatini baholash yetarli bo'ladi. Quyidagi teoremalar isbotsiz keltiriladi.

1-teorema: Agar barcha $x(x\geq a)$ lar uchun $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ tengsizliklar bajarilsa va $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi va $\int_{a}^{\infty} f(x)dx \leq \int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Misol: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ integral yaqinlashuvchi ekanligi tekshirilsin.

Yechish: $x\geq 1$ bo'lganda

$$\frac{1}{x^2(1+e^2)} < \frac{1}{x^2}$$

tenglik bajariladi. Lekin

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1 \;.$$

Demak, $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ xosmas integral 1-teoremaga asosan, yaqinlashuvchi ekan.

2-teorema: Agar barcha $x(x\geq a)$ lar uchun $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ tengsizliklar bajarilsa va shu bilan birga $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{\infty}f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol: $\int_1^{\infty}\frac{x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ tekshirilsin.

Yechish: $\frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ammo

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}-2) = \infty$$

2-teoremaga asosan berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-teorema: Agar $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{\infty}f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda $\int_a^{\infty}f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi integral deyiladi.

Misol: $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$ bo'lishi ma'lum.

Ammo $\int_1^{\infty}\left|\frac{1}{x^3}\right|dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

Demak, 3-teoremaga asosan $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ integral yaqinlashuvchi va u bilan birga $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ integral absolyut yaqinlashuvchidir.

2. Cheksiz funksiyalarning xosmas integrallari. Ta'rif: $(a;b]$ intervalda uzluksiz va $x=a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan f(x) funksiyaning xosmas integrali deb

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (9.16)$$

limitga aytiladi. Agar (9.16)- limit mavjud va chekli qiymatga ega bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Aks holda xosmas integral uzoqlashuvchi deb aytiladi.

$[a;\text{b})$ intervalda uzluksiz va $x=b$ da aniqlanmagan f(x) funksiyaning xosmas integrali ham shunga o'xshash ta'riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Misol: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ integralni tekshiring.

Yechish: $x=0$ da funksiya aniqlanmagan.Quyidagilar o'rinli bo'ladi:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}.$$

a) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}=-\infty,$

b) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{x})\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=\infty.$

Demak, ko'rsatilgan xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

9.7-§. ANIQ INTEGRALNING BA'ZI TATBIQLARI

1.Yassi figuralar yuzalarini hisoblash. *a*) Aniq integralning ta'rifidan, agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq, OX o'qi va $x=a$ hamda $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

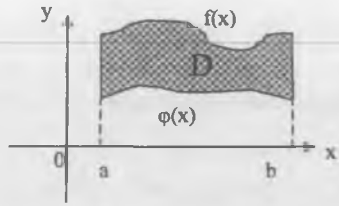
$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (9.17)$$

ga teng. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo'lsa, tegishli trapetsiyaning yuzi

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \qquad (9.18)$$

ga teng bo'ladi.

$y_1=f(x)$ va $y_2=\varphi(x)$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan D figuraning yuzini hisoblash kerak bo'lsin (9.4-chizma).



9.4-chizma.

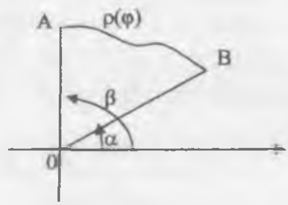
U holda (9.17) formuladan ikki marta foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx.$$

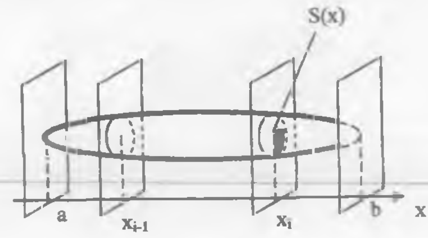
b) Qutb koordinatalar sistemasida yassi figura $\rho=\rho(\varphi)$ egri chiziq va qutb markazidan chiquvch $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralangan bo'lsin (9.5- chizma). U holda ABO egri chiziqli uchburchak yuzi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

2. Aniq integralning jismlar hajmini hisoblashga tatbiqi. a) Jismning hajmini ko'ndalang kesimning yuzi bo'yicha hisoblash. Biror bir jismning V hajmini hisoblash talab etilsin. Bu jismning OX o'qiga perpendikular tekislik bilan kesimining yuzi S(x) ma'lum bo'lsin. (9.6-chizma).



9.5 - chizma.



9.6 - chizma.

$[a;b]$ kesmani $a_0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,x_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n ta bo'laklarga bo'lamiz va bu nuqtalar orqali OX o'qiga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz (9.6-chizma). Bu tekisliklar jismni n ta qatlamga ajratadi, ularning hajmlarini $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ bilan belgilaymiz. U holda

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

bo'ladi.

i- chi qatlamning hajmi $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ ekanligini nazarga olsak,

$$V=\lim_{\max \Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i=\int_b^a S(x)dx$$

va hajmni hisoblash uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

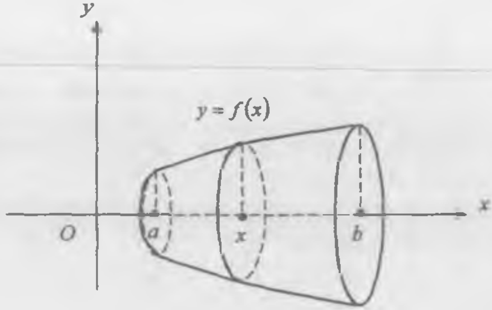
$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

b) Aylanma jismlarning hajmini hisoblash. Agar jism $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning OX o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lsa, OX o'qiga perpendikular kesim doiradan iborat bo'lib $S(x)=\pi y^2$ yuzaga teng bo'ladi (9.7-chizma).

Demak, bu holda

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

bo'ladi.



9.7 - chizma.

3. Yassi egri chiziq yoyi uzunligini aniq integral yordamida hisoblash.

a) $y=f(x)$ chiziqning $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan qismi l uzunligini quyidagi formula orqali hisoblaymiz:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

b) Agar egri chiziq parametrik tenglamalar orqali berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad \theta_1 \le t \le \theta_2$$

u holda chiziqning θ_1 va θ_2 orasida joylashgan qismi uzunligi

$$l=\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

formula orqali hisoblanadi.

d) Agar egri chiziq qutb koordinatalarda berilgan bo'lsa, ya'ni

$$\rho=\rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

u holda, egri chiziqning $\varphi=\alpha$ va $\varphi=\beta$ nuqtalar orasida joylashgan qismi uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$$

formula orqali hisoblanadi.

9.8-§. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASH

To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi. $\int_a^в f(x)dx$ aniq integralni taqribiy hisoblash talab qilinsin. Bunda f(x) berilgan [a;b] kesmada uzluksiz funksiyasidir.

$[a;\, b]$ kesmani $a=x_0,\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n=в$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo‘lgan n ta teng bo‘laklarga ajratamiz:

$$\Delta x=\frac{в-\alpha}{n}.$$

So‘ngra $f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$, orqali belgilaymiz, ya'ni

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1), \ldots,\ y_n=f(x_n).$$

Ushbu yig‘indilarni tuzamiz (9.8 a-chizma):

$$y_0\cdot \Delta x+y_1\cdot \Delta x+\ldots+y_{n-1}\cdot \Delta x$$

$$y_1\cdot \Delta x+y_2\cdot \Delta x+\ldots+\ y_n\cdot \Delta x.$$

Bu yig‘indilarning har biri $f(x)$ uchun $[a;\, b]$ kesmada integral yig‘indilari $\sum_0^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$, $\sum_1^{n} f(x_i)\Delta x_i$ bo‘ladi va shuning uchun $\int_a^в f(x)dx$ integralning taqribiy ifoda etadi, chunki bunda integral yig‘indilardan limit hisoblanmagan:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}),$$

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n).$$

Bular taqribiy hisoblashning to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi deb aytiladilar. (9.8.a-chizma).

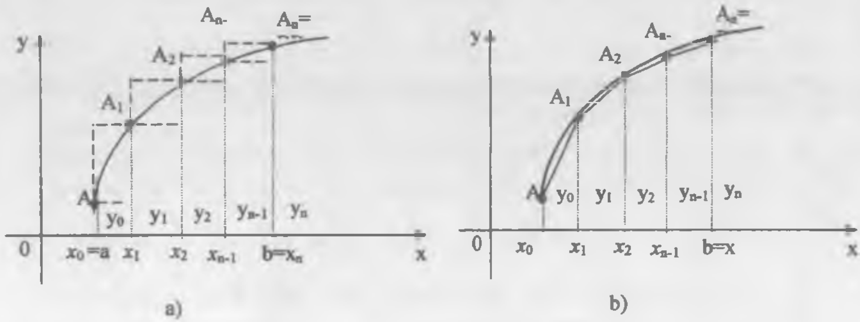
To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_1\frac{(b-a)^2}{4n}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_1 integral ostidagi funksiya hosilasi absolyut qiymatining integrallash oralig‘idagi eng katta qiymatini ifodalaydi. Bu tengsizlikdan, qanchalik n katta bo‘lsa, shunchalik integral aniqroq hisoblanishi ko‘rinib turibdi.

2. Trapetsiyalar formulasi

Agar berilgan $y=f(x)$ egri chiziqni to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasida bo‘lgandagidek zinapoyasimon chiziq bilan almashtirmasdan, balki ichki chizilgan siniq chiziq (vatar) bilan almashtirsak, u holda aniq integralning ancha aniqroq taqribiy qiymati hosil bo‘lishini kutish tabiiydir (9.8.b-chizma).



9.8 - chizma.

Bu holda egri chiziqli $a\text{AB}в$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi yuqoridan

$$A\,A_1,\ A_1A_2,\ \ldots,\ A_{n-1}B$$

vatarlar bilan chegaralangan to‘g‘ri burchakli trapetsiyalar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Ammo bu trapetsiyalardan birinchisining yuzi $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$,

ikkinchining yuzi $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ va hokazo bo‘lgani sababli

$$\int_a^в f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

yoki

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Bu esa trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_2\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_2 integral ostidagi funksiyaning II tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oralig‘idagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

3. Simpson formulasi

Bu yerda, $[a; b]$ kesmani $a=x_0$, x_1, x_2,..., $x_n=b$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo'lgan n ta teng bo'laklarga ajratamiz:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

So'ngra funksiyaning bu nuqtalardagi $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$,..., $y_n=f(x_n)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Bunda bo'linish nuqtalarning soni n juft bo'lsin deb talab qilamiz. $y=f(x)$ egri chiziqning x_{i-1}, x_i, x_{i+1} abssissali A_{i-1}, A_i, A_{i+1} nuqtalari orasidagi yoyini shu nuqtalardan o'tuvchi parabola bilan almashtiramiz. Unda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0+y_n+2(y_2+y_4+...+y_{n-2})+4(y_1+y_3+...+y_{n-1})).$$

Bu formula Simpson formulasi bo'lib, uni isbotsiz qabul qilamiz.

Simpson formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_4\frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_4 integral ostidagi funksiyaning IV tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oralig'idagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

Ko'rib o'tilgan formulalar matematikada kvadratur formulalar deb ataladigan va umumiy formulalarning xususiy hollari bo'lib hisoblanadi. Kvadratur formulalar sohasida matematika bo'yicha buxorolik birinchi fan doktori G.N.Salixov katta ilmiy natijalarga erishgan.

Misol: Ushbu

$$\ln 2=\int_1^2\frac{dx}{x}$$

integralni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari orqali hisoblang.

Yechish: [1; 2] kesmani 10 ta teng bo'lakka ajratamiz.

$$\Delta x=\frac{2-1}{10}=0,1$$

deb olib, integral ostidagi funksiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

$x_0=1$,	$y_0=1,00000$,	$x_1=1,1$,	$y_1=0,90909$
$x_2=1,2$,	$y_2=0,83333$,	$x_3=1,3$,	$y_3=0,76923$
$x_4=1,4$,	$y_4=0,71429$,	$x_5=1,5$,	$y_5=0,66667$
$x_6=1,6$,	$y_6=0,62500$,	$x_7=1,7$,	$y_7=0,58824$
$x_8=1,8$,	$y_8=0,55556$,	$x_9=1,9$,	$y_9=0,52632$
	$x_{10}=2$,	$y_{10}=0,50000$.	

1) To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasini tatbiq etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(1+0{,}90909+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+0{,}625+$$

$$+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632)=0{,}1\cdot 7{,}18773=0{,}71877$$

2) Trapetsiyalar formulasini tatbiq etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+0{,}625+\right.$$

$$\left.+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632\right) \approx 0{,}69377.$$

3) Simpson formulasini tatbiq etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}(1+0{,}5+2\cdot 2{,}72818+4\cdot 3{,}45955)=0{,}69315.$$

Haqiqatda,

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472 \quad ,$$

yettinchi kasr xona birligigacha aniqlikda bo‘ladi.

XULOSA

Integral hisob matematikaning bir bo'limi bo'lib, unda integrallarni hisoblash usullari va ularning xossalari o'rganiladi. Integrallarni taqribiy hisoblash usullari ham bunga qarashli. Integral hisobning boshlang'ich tushunchalari aniq davrda yuza va hajmlarni topishga doir masalalardan kelib chiqqan bo'lib, keyinchalik XVII–XVIII asrlarda I.Nyuton va G.Leybnis asarlarida nihoyasiga yetkazilgan.

Integrallar ikki xil, aniqmas va aniq integrallar bo'ladi. Aniqmas integral boshqacha aytganda, boshlang'ich funksiyalardir.

Boshlang'ich funksiyalarni umumiy holda

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

yoziladi. Shunday qilib, aniqmas integral tushunchasi hosil bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $x \in [a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, [a,b] oraliqni n ta bo'laklarga bo'lish usuli bilan $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi tuziladi.

Natijada, aniq integral tushunchasiga kelinadi:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

Aniq integral $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ Nyuton-Leybnis formulasi bilan hisoblanadi.

Aniq interalning ba'zi tatbiqlarini aytib o'tish mumkin:

1) Yassi figuralarning yuzasi

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ yoki } S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$$

formula bilan hisoblanadi.

2) O'zgaruvchi kuch $F(x)$ ta'sirida [a,b] vaqt oraliqda bajarilgan ish

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

3) Notekis harakatda $[t_0,T]$ vaqt oraliqda bosib o'tilgan yo'l

$$S = \int_{t_0}^{T} \vartheta(t)dt -$$

formula bilan hisoblanadi.

4) Aylanma jism hajmi

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

formula bilan hisoblanadi.

5) Mikroorganizmlarni $[t_0,T]$ vaqt oraliqda o'sish tezligi

$$N(t)=\int_{t_0}^{T}\vartheta(t)dt,$$

formula bilan hisoblanadi.

9-BOBGA DOIR TESTLAR

1. Trigonometrik funksiyali ifodalarni ratsional funksiyaga keltiruvchi universal almashtirmani ko'rsating.

A) $\sin x=t$; B) $\cos x=t$; C) $\mathrm{tg}x=t$; D) $\mathrm{ctg}x=t$; E) $\mathrm{tg}(x/2)=t$.

2. $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ universal almashtirishda qatnashgan quyidagi tengliklardan qaysi biri noto'g'ri ?

A) $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; B) $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; C) $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$; D) $x=2\mathrm{arctg}t$;

E) keltirilgan barcha tengliklar noto'g'ri.

3. $\int R(\cos x)\sin x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalaniladi?

A) $\cos x=t$; B) $\sin x=t$; C) $\mathrm{tg}x=t$; D) $\mathrm{ctg}x=t$;
E) $\mathrm{tg}2x=t$.

4. Trigonometrik ifodali $\int(1-\cos^4 x)\sin x dx$ integralni hisoblang.

A) $\cos x-\sin^4 x+C$; B) $\sin x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$; C) $-\cos x+\frac{\cos^5 x}{5}+C$;

D) $\sin x-\frac{\sin^5 x}{5}+C$; E) $-\cos x+\frac{\sin^5 x}{5}+C$.

5. $\int R(\sin x)\cos x dx$ ko'rinishdagi integral qanday almashtirish yordamida hisoblanishi mumkin ?

A) $\cos x=t$; B) $\sin x=t$; C) $\mathrm{tg}x=t$; D) $\mathrm{ctg}x=t$; E) $\mathrm{tg}2x=t$.

6. $\int\frac{\cos x}{1-\sin x}dx$ integral javobi qayerda to'g'ri ko'rsatilgan ?

A) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+C$; B) $\frac{\sin x}{1-\sin x}+C$; C) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$;

D) $-\ln|1-\sin x|+C$; E) $\ln|1-\cos x|+C$.

7. Quyidagi almashtirmalarning qaysi biridan $\int R(\mathrm{tg}x)dx$ ko'rinishdagi integralni ratsional funksiyali integralga keltirishda foydalanib bo'ladi?

A) t=tg$x$; B) t=sin$x$; C) t=ctg$x$; D) $t=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;

E) Ko'rsatilgan barcha almashtirmalardan foydalanib bo'ladi.

8. $\int \sin^{2m+1} x\cos^n x dx$ integralni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalanish qulay ?

A) sin$x$=t; B) cos$x$=t; C) tg$x$=t; D) ctg$x$=t; E) $\sin^2 x=t$.

9. $\int \sin^3 x\cos^5 x dx$ integralni hisoblang.

A) $\dfrac{\cos^8 x}{8}-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$; B) $\dfrac{\sin^8 x}{8}-\dfrac{\cos^6 x}{6}+C$; C) $\dfrac{\cos^8 x}{8}-\dfrac{\sin^6 x}{6}+C$;

D) $\dfrac{\sin^8 x}{8}-\dfrac{\sin^6 x}{3}+\dfrac{\sin^4 x}{4}+C$; E) $\dfrac{\sin^8 x}{8}+\dfrac{\sin^6 x}{6}+C$.

10. $\int \sin^m x\cos^{2n+1} x dx$ integralni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalanish qulay ?

A) sin$x$=t; B) cos$x$=t; C) tg$x$=t; D) ctg$x$=t; E) $\cos^2 x=t$.

11. $\int \sin^5 x\cos^3 x dx$ integralni hisoblang.

A) $\dfrac{\cos^6 x}{6}-\dfrac{\cos^8 x}{8}+C$; B) $\dfrac{\sin^6 x}{6}-\dfrac{\cos^8 x}{8}+C$; C) $\dfrac{\cos^6 x}{6}-\dfrac{\sin^8 x}{8}+C$;

D) $\dfrac{\sin^6 x}{6}-\dfrac{\sin^8 x}{8}+C$; E) $\dfrac{\cos^6 x}{6}+\dfrac{\cos^8 x}{8}+C$.

12. $\int \sin^{-2m} x\cos^{2n} x dx$ integralni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalanish qulay ?

A) sin$x$=t; B) cos$x$=t; C) tg$x$=t; D) $\cos^2 x=t$; E) $\sin^2 x=t$.

13. $\int \dfrac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}$ integralni hisoblang.

A) $-\dfrac{\sin^3 x}{3}+C$; B) $-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$; C) $-\dfrac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}+C$;

D) $-\dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+C$; E) $-\dfrac{5\cos^3 x}{3\sin^5 x}+C$.

14. $\int \sin^{2m} x\cos^{-2n} x dx$ integralni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalanish qulay ?

A) sin$x$=t; B) cos$x$=t; C) tg$x$=t; D) $\cos^2 x=t$; E) $\sin^2 x=t$.

15. $\int \dfrac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$ integralni hisoblang.

A) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$; B) $\frac{\cos^3 x}{3}+C$; C) $\frac{ctg^3 x}{3}+C$;

D) $\frac{tg^3 x}{3}+C$; E) $\frac{5\sin^3 x}{3\cos^3 x}+C$.

16. $\int \sin^{-2m} x \cos^{-2n} x dx$ integralni hisoblash uchun qaysi almashtirmadan foydalanish qulay ?

A) $\sin x=t$; B) $\cos x=t$; C) $tg x=t$; D) $\cos^2 x=t$; E) $\sin^2 x=t$.

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

A) $\frac{1}{\sin x \cos x}+C$; B) $-\frac{1}{\sin x \cos x}+C$; C) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+C$;

D) $tg x+ctg x+C$; E) $tg x-ctg x+C$.

18. $\int \sin mx \cos nx dx,\ m \neq n$, integral qaysi usulda hisoblanadi ?

A) O'zgaruvchilarni almashtirish; B) Bo'laklab integrallash;

C) Yoyish; D) Universal almashtirmadan foydalanish;

E) Aniq bir usulni ko'rsatib bo'lmaydi.

19. $-10\int \sin 3x \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

A) $\cos 5x+5\cos x+C$; B) $\sin 5x+5\cos x+C$; C) $\cos 5x+5\sin x+C$;

D) $\sin 5x+5\sin x+C$; E) $-\cos 3x \cdot \sin 2x+C$.

20. $\int \cos mx \cos nx dx,\ m \neq n$, integral qaysi usulda hisoblanadi ?

A) O'zgaruvchilarni almashtirish; B) Bo'laklab integrallash;

C) Yoyish; D) Universal almashtirmadan foydalanish;

E) Aniq bir usulni ko'rsatib bo'lmaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari

1. Berilgan funksiyalarning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Boshlang'ich funksiya qanday xossalarga ega?
3. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
4. Aniqmas integralning eng oddiy xossalarini keltiring.
5. Integrallar jadvalini yozing.
6. Bevosita integrallash usuli ta'rifini keltiring.
7. Differensial ostiga kiritish usuli nimadan iborat ?
8. Bo'laklab integrallash formulasini chiqaring.
9. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?
10. Eng sodda ratsional kasr deb nimaga aytiladi ?

11. Integralda universal almashtirish nima ?

12. Aniq integralga ta'rif bering.

13. Aniq integralning xossalarini keltiring.

14. Xosmas integrallarga ta'rif bering.

15. To'g'ri burchakli to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simson formulalarni keltiring.

16. Aniq integralning qanday tatbiqlarini bilasiz?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Soatov Yo.U. «Oliy matematika», I jild. – T.: «O‘qituvchi», 1992, II jild, 1994-y.
2. Rahimov D.G. «Oliy matematika», I jild. – T.: «TKTI», 2003y.
3. Piskunov N.S. «Differensial va integral hisob», 1-tom. – T.: «O‘qituvchi», 1972-y.
4. Piskunov N.S. «Differensial va integral hisob», 2-tom. – T.: «O‘qituvchi», 1974-y.
5. Azlarov T., Mansurov X. «Matematik analiz», I qism. – T.: «O‘qituvchi», 1994-y.
6. To‘laganov T., Normatov A. «Matematikadan praktikum». – T.: «O‘qituvchi», 1983-y.
7. Tojiyev Sh. «Oliy matematikadan masalalar yecish», – T.: «O‘qituvchi», 2003-y.
8. Madrahimov X.S., Ganiyev A.G., Mo‘minov N.S. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», T.: «O‘qituvchi», 1988-y
9. Sarimsokov T.A. «Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi» – T.: «O‘qituvchi», 1968-y.
10. Rajabov F., Nurmetov A. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», – T.: «O‘qituvchi», 1990-y.
11. Shneyder V.E., Slutskiy A.I., Shumov A.S. «Oliy matematika qisqa kursi», I tom. – T.: «O‘qituvchi», 1983-y.
12. Nazarov R.N., Toshpulatov B.T., Dusumbetov A.D. «Algebra va sonlar nazariyasi», I qism. – T.: «O‘qituvchi», 1993-y.
13. Nazarov X., Ostonov K. «Matematika tarixi». – T.: «O‘qituvchi», 1996-y.
14. Ibrohimov R., «Matematikadan masalalar to‘plami». – T.: «O‘qituvchi», 1990-y.

ILOVA
(LUG‘AVIY MA’NOSI)

Aksioma – biror matematik nazariya yaratishda boshlang‘ich fakt (asos) deb qaraladigan va isbotsiz qabul qilinadigan jumla. Matematik nazariyani asoslashning mantiqiy poydevori hisoblangan aksoimalar sistemasi hamma vaqt ham tugallangan va takomillashgan bo‘lmaydi, balki aksiomalarning o‘zi kabi o‘zgarib va takomillashib turadi. Grek.αξίωμα–hurmatga sazovor bo‘lgan shubhasiz jumla; hurmat, ehtirom, obro‘.

Algebra – (aljabr) matematik fan bo‘lib, unda gruppa, halqa, struktura va shu obyektlar o‘rganiladi. Algebraning alohida shoxobchasi algebradir. Qisqaroq ma’noda algebra tenglamalar yechish haqidagi ta’lim deb qaraladi. Ancha keng ma’noda algebra deganda ixtiyoriy tabiatli to‘plamning elementlari ustida sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish kabi odatdagi amallarni umumlashtiruvchi va amallarni o‘rganuvchi fan tushuniladi.

Algoritm – biror operatsiyalar (amallar) sistemasini ma’lum tartibda bajarish haqida aniq qoida bo‘lib, ma’lum sinfga oid masalalarni yechishga imkon beradi.

Tahlil –noma’lumdan ma’lumga, izlanayotgan berilganga o‘tish yo‘li bilan fikr yuritish yoki isbotlash metodi (usuli).

Matematik analiz – funksiya va limitga o‘tish tushunchalariga asoslangan bir qator matematik fanlarning umumiy nomi matematik analizga odatda differensial va integral hisoblari, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, variatsion hisob, integral tenglamalar nazariyasi, funksional analiz kiritiladi.

Analitik geometriya – matematikaning bo‘limi bo‘lib, unda obrazlar koordinatalar usulida asoslanib algebra vositalari bilan tekshiriladi.

Arab raqamlari – quyidagi o‘nta matematik ishoraning nomi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. O‘nli sanoq sistemasida istalgan kichik va istagancha katta bo‘lgan har qanday sonni arab raqamlari bilan yozish mumkin.

Arifmetika – (hisob) sonlar va ular ustida bajariladigan amallar haqidagi fan. Arifmetikada birinchi navbatda natural va kasr sonlar o‘rganiladi. Arifmetika inson bilimining eng qadimgi tarmoqlaridan biridir. Arifmetika o‘quv predmeti sifatida maktabda I-VI sinflarda o‘qitiladi va tasviriy ta’riflarga asosan quriladi. Pedagogika institutlari fizika-matematika fakultetlarining uchta nazariy kursida: ratsional sonlar arifmetikasi, sonlar nazariyasi va arifmetika asoslarida arifmetika ancha chuqur o'rganiladi.

Arifmetik son – dastlabki tushunchaga ko'ra, har qanday manfiy bo'lmagan son. Birmuncha keng ma'noda har qanday son arifmetika son deb qaraladi.

Oliy matematika – oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan matematik fanlar turkumi bo'lib, unga analitik geometriya, differensial va integral hisoblari, differensial tenglamalr, differensial geometriya va boshqalar kiradi. Lekin bu termin ancha shartli termindir. Elementar matematika asosan o'zgarmas miqdorlar tekshirilgani va matematik masalalarni tekshirishda xususiy metodlar qo'llanilgani holda oliy matematikada o'zgaruvchi miqdorlar tekshiriladi va tekshirishning umumiy metodlari qo'llaniladi. Bular orasida keskin farq yo'q, ular bir-biridan faqat mamlakatimizda ta'lim berish sistemasining tuzilishi va maktabda matematika o'qitish metodikasiga bog'liq ravishda shunday ajratilgan.

Geometriya – dastlab geometriya shakllar haqidagi, ularning turli qismlarining o'zaro joylanishi va o'lchamlari haqida, shakllarning almashtirilishi haqidagi fan..

Gradus – tekis burchaklarining o'lchov birligi, ya'ni u to'g'ri burchakning $\frac{1}{90}$ qismiga teng bo'lgan tekis burchak. Grek.gradus– qadam, bosqich.

Differensial hisob – matematikaning bo'limi bo'lib, funksiyalarni hosila va differensiallar yordami bilan tekshiradi. Differensial hisobning asosiy tushunchalari hosila va differensial bo'lib, bular o'z navbatida ketma-ketlik yoki funksiyaning limiti va cheksiz kichik miqdorlar tushuchalari bilan bog'langan. Funksiya hosilasini bilish funksiyaning qayerda o'sishi yoki kamayishi, qayerda maksimumga, munimumga va burilish nuqtasiga ega ekanligi haqida mulohaza yuritishga imkon beradi. Bu tushunchalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda ham tatbiq etiladi. Egri chiziqlarga urinma o'tkazish haqidagi masalalarni yechish munosabati bilan XVII asr matematikalaridan Dekart, Ferma va boshqalar differensial hisob yaratish sohasida birinchi qadam qo'ygan edilar. Differensial hisobning uzil-kesil yaratilishi I.Nyuton va G.Leybnisning ilmiy ishlari bilan bog'liqdir.

Differensial tenglamalar – noma'lum funksiyalar ularning har qanday tartibli hosilalari va erkli o'zgaruvchilarni o'z ishiga olgan tenglamadir.

Differensiallash – differensial yoki hosila, xususiy hosila, to'la differensiallarning hisoblash. Differensiallash differensial hisobning asosiy amali bo'lib, bunda differensiallash qoidalari va differensiallash formulalari keltirilib chuqariladi.

Isbot – biror tasdiq (mulohaza, fikr, teorema) ning haqiqatan yoki noto'g'ri ekanligini aniqlashga imkon beradigan fikr yuritish. Teoremani isbot qilishda biz tushunchalarga berilgan ta'riflardan foydalanib, aksiomalarga yoki oldin isbot etilgan teoremalarga tayanamiz. Isbotlash usulida qarab ular quyidagilarga bo'linadi: analitik; sintetik; induktiv; deduktiv usullari, teskaridan isbotlash yoki bema'nilikka (ziddiyatlikka) keltirish yo'li bilan isbotlash usullari.

Kommutatiblik qonuni – binary operatsiyasi bo'ysunishi mumkin bo'lgan qonun. Agar binary operatsiyasini ko'paytirish deb tushunilsa, u holda kommutatiblik qonuni bunday ko'rinishda bo'ladi: $ab = bc$. Kommutatiblik qonuni ko'pincha o'rin almashtirish qonuni deb kommutatiblik qonuniga bo'ysunuvchi operatsiyalarga misol qilib sonlari qo'shish va ko'paytirish, to'plamlarning kesishmasi hamda to'plamlar birlashmasini ko'rsatish mumkin.

Kibernetika – mashina, tirik organizm va ularning birikmalari kabi tashkil qilingan sistemalarda boshqarish va aloqa protsesslarining umumiy qonuniyatlari birikmalarida informatsiya idrok etish, yetkazish, saqlash, foydalanish va qayta ishlash haqidagi fan sifatida ham ta'riflasa bo'ladi.

Koordinatalar – ma'lum tartibda olingan va nuqtaning chiziqdagi, tekislikdagi sirtdagi yoki fazodagi vaziyatini xarakterlaydigan sonlar. Biror obyektni tekshirish xarakteri va maqsadiga qarab har xil koordinata sistemalari tanlanadi, bular yordamida fazoning har bir nuqtasiga aniq sonlar to'plami – nuqta koordinatalari mos keltiriladi.

Kontangens – trigonometrik funksiyalardan biri bo'lib, $ctgx$ (x-argument) orqali belgilanadi. Lotincha co (complementum – to'ldirish so'zining qisqartirilgani) va tangens so'zlaridan yasalgan.

Koeffitsiyent – algebraik ifodadagi koeffitsiyent – bu ifodadagi ko'paytuvchidir. Undosh harf bilan boshlanuvchi lotincha so'z orqali birikkanda «co» ga aylanadigan «cum» va efficiens (qaratqich kelishigi - efficientis) – tayyorlovchi, biror narsaga sabab bo'luvchi so'zlaridan yasalgan (kofunksiya, kologarifm bilan solishtiring); so'zma-so'ziga; koeffitsiyent-ko'maklashuvchi.

Chiziqli algebra – algebraning bo'limi bo'lib, unda chekli o'lchovli chiziqli fazolardagi chiziqli almashtirishlar o'rganiladi.

Chiziqli algebra chiziqli tenglamalar sistemasini, ya'ni o'zgaruvchiga (noma'lumga) nisbatan birinchi darajali bo'lgan tenglamalarni yechish munosabati bilan paydo bo'lgan. Chiziqli algebraning yaxshi rivojlangan bo'limlari matrisalar nazariyasi, formalar (xususan, kvadrat formalar) nazariyasi, invariantlar nazariyasidir.

Logarifm – N sonining a asosga ko'ra logarifm deb shunday n soniga aytiladiki, a asosni $(a>0,\quad a\neq 1)$ n – darajaga ko'targanda N soni hosil bo'ladi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyada kompleks sonlarining logarifm (natural logarifm) lari qaraladi. Ta'rifiga ko'ra, z kompleks sonning logarifm (Ln z bilan belgilanadi) quyidagiga teng:

$$Lnz = \ln|z| + iArgz.$$

Logarim XV–XVI asrlarda astronomiya va dengizda suzishning barq urib rivojlanganda kishilik jamiyatining hisoblashga bo'lgan ehtiyojiga javob sifatida paydo bo'ladi.

Matematik logika – matematik isbotlarni o'rganadigan fan. Matematik logikaning tekshirish obyektlari fikr (mulohazalar) bo'lib, ular ustida ham algebradagi sonlar ustida bajariladigan amallarga o'xshash amallar bajariladi. Matematik logika ba'zan matematika deb ham ataladi. Matematik logika elektron hisob mashinalari nazariyasida qo'llanadi.

Matematik statistika – eksperiment natijalarini ishlab chiqishning umumiy usullari haqidagi fan. Fizika, kimyo, biologiya, meditsina va boshqa fanlarda ekspermentlar natijasiga faqatgina eksperimentator boshqaradigan faktorlargina emas, balki juda ko'p boshqa tasodifiy faktorlar ham ta'sir etadi. Demak, ekspremеnt natijasi odatda tasodifiy miqdor bo'ladi. Olimning vazifasi tasodifiy tebranishlarga suyanib turib bunga sabab bo'lgan qonun ta'sirini ko'ra bilishdan iborat. Bunda qo'llaniladigan usullar har xil fanlar uchun umumiy bo'lishi mumkin. Xuddi ana shu usullar matematik statistikada o'rganiladi.

Natural logarifm – asosi $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71828...$ transcendent son bo'lgan logarifm (lnN bilan belgilanadi). Natural logarifm Neper nomi bilan bog'lanadi, biroq logarifm jadvallarini Neper, Brigg, Byurgi va boshqa matematiklar bir-birlaridan mustaqil ravishda deyarli bir vaqtda tuzdilar.

Teskari trigonometrik funksiyalar – $\sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ \sec x,\ \cos ecx$ trigonometrik funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalardir. Teskari trigonometrik funksiya ko'pgina ratsional kasrlar va kvadratik irratsionalliklarni integrallashda hosil bo‘ladi. Teskari trigonometrik funksiya arkfunksiyalar, ba’zan esa arkukslar deb ham ataladi. Teskari trigonometrik funksiya trigonometrik funksiyalar bo‘la olmaydi, shuning uchun ularni trigonometrik funksiyalarga teskari bo‘lgan funksiyalar yoki akrfunksiyalar deb atash to‘g‘ri bo‘lar edi. Lotincha arcus – yoy (burchak).

Potensirlash – logarifmlashga teskari amal potensiallash – berilgan logarifmga qarab sonning o‘zini toping. Potensillash tushunchasi logarifmik tenglamalarni yechishga qo‘llaniladi. Nemischa potenzieren, Potenz – daraja so‘zidan olingan.

Tadbiqiy matematika – bu termin matematikani fan va texnikaning boshqa sohalariga (fizika, kimyo, astronomiya, iqtisod, geodeziya, harbiy ish va injenerlik ishlari va boshqalari) tatbiq etish to‘g‘risida gapirilganda qo‘llaniladi. Tatbiqiy matematika bilan tatbiqiy bo‘lmagan matematika orasida aniq chegara yo‘q.

Radikal – (yoki ildiz) biror a sondan n – darajali ildiz chiqarish amalini ifodalovchi $\sqrt{\ }$ matematik ishora, bu bunday yoziladi; $\sqrt{a}$. Lotincha radix – ildiz.

Radius – aylananing har qanday nuqtasini markazi bilan tutashtiruvchi kesma. Bu kesmaning uzunligi ham radius deb ataladi. Aylananing radiusi aylana bilan chegaralangan doiraning (sharning) radius deb ham ataladi. Lotincha radius – g‘ildirakning kegayi, nur.

Signum ot x – x ning signumi – haqiqiy x sonning funksiyasi bo‘lib, x musbat bo‘lganda funksiya 1 ga teng, x nol bo‘lganda nolga teng, x manfiy bo‘lganda – 1 ga teng. Bu funksiya $signx$ yoki $\operatorname{sgn} x$ simvol bilan belgilanadi. Lotincha singnum – ishora.

Sofizm – ataylik chiqarilgan noto‘g‘ri xulosa, biror jumlaning noto‘g‘ri isboti. Bunda isbotdagi xato isbotning biror bosqichida ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Steradian – fazoviy burchakning o‘lchov birligi. Bir steradian uchi O(R) sfera markazida bo‘lgan va shu sfera sirtida yuzi R^2 gat eng bo‘lgan figura ajratuvchi fazoviy burchakdir. Butun sferada 4π steradian burchak bo‘ladi. Grekcha στερεοζ – fazoviy, radian lotincha radius – nur, kegay so‘zlaridan olingan.

Tangens – trigonometrik funksiyalardan biri. Lotincha tangens – urinma (tango - urinaman).

MUNDARIJA

ҚАЙДЛАР УЧУН

I.SAFAROV, M.PO'LATOVA, M.TESHAYEV, Z.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA QISQA KURSI

(I qism)

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2012

Muharrir:	M.Hayitova
Tex. muharrir:	A.Moydinov
Musavvir:	H.G'ulomov
Musahhih:	F.Ismoilova
Kompyuter sahifalovchi:	N.Hasanova

Nasr.lits. AI№149, 14.08.09. Bosishga ruxsat etildi 07.12.2011.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 18,0. Nashriyot bosma tabog'i 17,75.
Tiraji 500. Buyurtma № 14.

«Fan va texnologiyalar Markazining
bosmaxonasi» da chop etildi.
100066, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-yu.