Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ҲИСОБ

ОЛИЙ ТЕХНИКА ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

Иккинчи том

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги томонидан олий техника ўқув юртларининг студентлари учун дарслик сифатида рухсат этилган

РУСЧА ТЎҚҚИЗИНЧИ НАШРИГА МУВОФИҚ БИРИНЧИ НАШРИ

„ЎҚИТУВЧИ“ НАШРИЁТИ
Тошкент — 1974

П — $\frac{\text{20203—№ 259}}{\text{М. 353 06 74}}$ 131 — 78

РУСЧА ТЎҚҚИЗИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Ушбу дарсликнинг русча тўққизинчи нашри саккизинчи нашридан фарқ қилади. Дарсликнинг бу нашри олий техника ўқув юртлари учун математикадан 400—450 соатга мўлжалланган программага бутунлай мос келади.

Дарсликка XX ва XXI боб янги киритилди.

XX боб „Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементлари“ СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлигининг математика бўйича мажбурий программасининг тегишли қисмида кўзда тутилган материални ўз ичига олади.

XXI боб „Матрицалар. Чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини ва уларнинг ечимларини матрицалар орқали ёзиш“ ҳам мажбурий программада кўзда тутилган материални ўз ичига олади. Аммо бундан ташқари, бу бобда чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини ва бундай системаларнинг ечимларини матрица орқали ёзишга катта эътибор берилди. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини кетма-кет тақрибий ечимларини матрица орқали ёзишдан фойдаланилди. Бу материални олий техника ўқув юртлари учун дифференциал ва интеграл ҳисоб курсига киритиш шунинг учун зарурки, ҳозирги вақтда электротехника, радиотехника, автоматикага доир кўпгина китобларда дифференциал тенгламалар системаларининг ечимлари матрицалар назарияси аппаратидан фойдаланиб текширилади.

XVI бобда 26, 27, 28-параграфлар янгидан ёзилди. Буларда дифференциал тенгламаларнинг ечимларини кетма-кет яқинлашиш методи қараб чиқилади, дифференциал тенгламанинг ечими мавжудлиги ҳақидаги теорема ва ягоналик теоремаси исботланади. Дифференциал тенгламалар ҳақидаги бутун бобни жиддий баён қилишга эътибор берилди.

XIII бобнинг 31-параграфи „Ляпуновнинг турғунлик назарияси ҳақида тушунча“ анчагина кенгайтирилди. Бу нашрда у „Ляпуновнинг турғунлик назарияси ҳақида тушунча. Махсус нуқта атрофида дифференциал тенглама траекториясининг ўзгариш ҳолати“ деб номланган. Бу ерда дифференциал тенгламалар системалари ечимларининг турғунлиги билан бир қаторда фазавий текисликдаги махсус нуқта яқинида траекторияларнинг ўзгариш ҳолати қараб чиқилди. Бу шунинг учун ҳам қилиниши зарур эдики, электротехника, радиотехника, автоматика курсларида тегишли масалаларни ўрганишда бу тушунчалардан эркин равишда фойдаланиш керак бўлади. Комплекс сонлар назарияси баён қилиниши туфайли баъзи параграфлар янгидан ёзилди. XI бобнинг 2-параграфи асосли равишда кенгайтирилди, унда узлуксиз функциянинг аниқ интеграли мавжудлигининг исботи берилди. XI бобга 11-§ „Ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функциясини интеграллаш“ қўшимча ёзилди. XVI бобга комплекс ҳадли қаторларга ва комплекс ўзгарувчили даражали қаторларга бағишланган янги 24 ва 25-параграфлар ёзилди. XVII бобга комплекс формадаги Фурье қаторларига атаб янги 12-параграф ёзилди. Фурье интеграли ҳақидаги масаланинг баёни кенгайтирилди. Махсус амалий адабиётда фойдаланиладиган спектр, спектрал функция тушунчалари ёритилди. XVII бобда янги 15-§ „Функцияларнинг ортогонал системаси бўйича Фурье қатори“ ва 16-§ „Чизиқли функционал фазо ҳақида тушунча. Функцияни Фурье қаторига ёйиш билан векторларни ёйиш орасидаги ўхшашлик“ ёзилди. Бу материал шу математик аппаратга таянган бошқа фанлардаги материалларни студентлар ва инженерлар тушуна оладиган тарзда баён қилинди.

XIX бобда янги 20-§ „Дельта-функция ва унинг тасвири“ ёзилди.

VIII бобга 19-§ „Функцияни экспериментал маълумотларга асосан энг кичик квадратлар методи билан ҳосил қилиш“ киритилди. Бу параграфнинг мазмуни илгари бу дарсликнинг биринчи томи охирида берилган „I илова“ дан иборат.

VII бобда 10-§ „Ньютоннинг интерполяцион формуласи“ ва 11-§ „Сонли дифференциаллаш“ берилди. Бу параграфларнинг мазмуни илгари „II илова“ дан иборат эди.

V, VII, IX, XII, XIII бобларга баъзи қўшимчалар киритилди.

XIII боб „Дифференциал тенгламалар“ бутунлай иккинчи томга кўчирилди.

Автор

РУСЧА БЕШИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Русча тўртинчи нашрнинг ҳамма тексти бешинчи нашрда ўзгаришсиз тўла сақланди, аммо бу материал икки томга бўлинди. (Дарсликнинг ушбу ва олдинги нашрларидан фойдаланишни қулайлаштириш учун бобларнинг тартиб номерлари ҳам ўзгаришсиз қолдирилди.)

Бутун дарсликнинг мундарижаси олий техника ўқув юртлари учун математика курсининг 300—450 соатга мўлжалланган программалари билан аниқланади. Дарслик, стационар олий ўқув юртларида ҳам, сиртқи олий ўқув юртларида ҳам математика курсини ўрганиш учун мўлжалланган. Бу ҳол материални баён этишда эътиборга олинди; жумладан, шу мақсад билан дарсликда баён этилган назарий материални тушунтирувчи ва масалалар ечиш намуналарини берувчи кўпгина мисоллар қараб чиқилди.

Биринчи том, олий техника ўқув юртларининг одатда 2-курсида ўтиладиган XIII „Дифференциал тенгламалар“ бобидан бошқа, биринчи курс программасига тегишли материални ўз ичига олади. Аммо баъзи бир олий ўқув юртларида дифференциал тенгламалардан, кейинги фанларни ўқитиш учун зарур бўладиган бошланғич маълумотлар 1-курсда берилади. Шу сабабли бу бобнинг бир қисми (1—28-§) биринчи томда берилди.

Математика ўқитиш 300 соатга мўлжалланган олий техника ўқув юртларининг программасидаги материалнинг ҳаммасини деярли биринчи том ўз ичига олишини қайд этиб ўтамиз (аммо, бу том программа доирасидан ташқарига чиқувчи материални ҳам ўз ичига олади).

Иккинчи том—XIII бобнинг охири (29—34-§), XIV—XIX боблар—олий техника ўқув юртларининг 2-курси программасига тегишли материални ўз ичига олади.

Биринчи томнинг дастлабки икки боби—„Сон. Ўзгарувчи миқдор. Функция“ ва „Лимит“, „Функциянинг узлуксизлиги“ мумкин қадар қисқа ёзилди. Одатда бу бобларда баён этиладиган баъзи масалалар ишга халал бермагани ҳолда учинчи ва ундан кейинги бобларга кўчирилди. Бундай қилиш олий техника ўқув юрти курсида бошқа фанлар талаб қиладиган, дифференциал ҳисобининг асосий тушунчаси бўлмиш ҳосилани олдинроқ ўтиш имконини берди (материални бундай жойлаштиришнинг мақсадга мувофиқлиги иш тажрибасида тасдиқланади).

Олий техника ўқув юртларининг автоматика ва ҳисоблаш техникаси билан алоқадор фанларини математика курси билан таъминлаш учун зарур масалаларнинг олий математика бўйича олий ўқув юрти программасига киритилиши муносабати билан дарсликда: „Дифференциал тенгламаларни ва дифференциал тенгламаларнинг системаларини сонли интеграллаш“[*], „Чизиқли дифференциал тенгламалар системаларини интеграллаш“, „Ляпунов турғунлиги назарияси ҳақида тушунча“, „Гамильтон оператори“, „Фурье интеграли“ ва бошқа бўлимлар батафсил баён этилди.

XVIII бобда математик физиканинг асосий тенгламалари кўриб чиқилган.

Турли типдаги тенгламаларга ва тегишли чегаравий масалаларга келтирувчи физик ҳодисаларнинг характерини аниқлашга катта аҳамият берилди. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли методларига ҳам кўпроқ эътибор берилди.

XIX бобда операцион ҳисобнинг асосий тушунчалари билан бирга дифференциал тенгламаларни ечиш учун операцион метод баён этилди. Бундай қилиш ўрганиладиган кейинги, ва айниқса электротехника фанлари учун керак бўлади.

Дарсликка машқ учун кўпгина масала ва мисоллар киритилди, уларнинг аксарияти математиканинг бошқа фанлар билан боғланишини кўрсатиб беради.

Масала ва мисоллар курснинг ҳар қайси бўлими бўйича махсус танланган, бу эса баён этиладиган материални ўзгартиришга ёрдам беради. Бу ҳол математика курсини мустақил ўрганиш учун ҳам, жумладан, сиртдан ўқийдиган студентлар учун китобдан фойдаланишини осонлаштиради.

Автор.

Русча олтинчи нашри бешинчисидан I том охирида берилган қўшимча билан фарқ қиладики, бунда инженерлар учун муҳим масала, „Функцияни энг кичик квадратлар методи бўйича экспериментал натижаларга асосан олиш“ баён этилган.

Русча еттинчи нашри олтинчисидан I том охирида берилган „Ньютоннинг интерполяцион формуласи. Сонли дифференциаллаш“ қўшимчаси билан фарқ қилади.

---

[*] Анализнинг одатда баён этиладиган сонли методлари ҳам ушбу дарсликда баён этилган.

XIII БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Масаланинг қўйилиши

Тезликка пропорционал бўлган муҳит қаршилигида жисм ҳаракатининг тенгламаси. Занжир чизиғининг тенгламаси

$y = f(x)$ функция бирор ҳодисанинг миқдорий томонини акс эттирсин. Кўпинча, биз бу ҳодисани текширишда y билан x орасидаги боғланиш характерини бевосита аниқлай олмаймиз, аммо x ва y миқдорлар ҳамда y дан x бўйича олинган $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ҳосилалар орасидаги муносабатни аниқлай олишимиз, яъни **дифференциал тенглама** ёзишимиз мумкин.

x ва y ўзгарувчилар ҳамда ҳосилалар орасида топилган бу муносабатдан y билан x орасидаги боғланишни бевосита белгилаш, яъни $y = f(x)$ ни топиш ёки бошқача айтганда, **дифференциал тенгламани интеграллаш** талаб этилади.

Иккита мисол кўрамиз:

1-мисол. Массаси m бўлган жисм бирор баландликдан ташлаб юборилган. Агар жисмга оғирлик кучидан ташқари, ҳавонинг тезликка пропорционал бўлган (пропорционаллик коэффициенти k) қаршилик кучи таъсир этса, бу жисмнинг тушиш тезлиги v қандай қонун билан ўзгаришини билиш яъни $v = f(t)$ муносабатни топиш талаб этилади.

Ечиш: Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ,

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

бунда $\frac{dv}{dt}$ ҳаракатдаги жисмнинг тезланиши (тезликдан вақт бўйича олинган ҳосила), F эса жисмга ҳаракат йуналишида таъсир этувчи куч бўлиб, у оғирлик кучи mg дан ва ҳавонинг қаршилик кучи $(-kv)$ дан ташкил топади. Ҳавонинг қаршилик кучи тезликнинг йуналишига тескари йўналгани учун уни манфий ишора билан оламиз. Демак,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{1}$$

Биз номаълум v функция билан унинг $\frac{dv}{dt}$ ҳосиласи орасидаги боғланишни ифодаловчи муносабатни топдик, яъни **номаълум v функцияга нисбатан дифференциал тенглама** ҳосил қилдик. (Бу баъзи бир типдаги парашютларнинг ҳаракат тенгламаси). Дифференциал тенгламани ечиш берилган дифференциал тенгламани айнан қаноатлантирувчи $v = f(t)$ функцияни топиш демакдир. Дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи бундай функциялар чексиз кўп. Ҳар қандай

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{2}$$

кўринишдаги функция C ўзгармас миқдор ҳар қандай бўлганда ҳам (1) тенгламани қаноатлантиришини ўқувчи осонгина текшириши мумкин. Бу функциялардан қайси бири v нинг t орқали изланаётган муносабатини беради. Буни топиш учун қўшимча шартдан фойдаланамиз: жисмни ташлаб юборишда унга бошланғич v_0 тезлик берилган эди (у хусусий ҳолда нолга тенг бўлиши ҳам мумкин); биз бу бошланғич тезликни маълум деб фараз қиламиз. Аммо бу ҳолда изланаётган $v = f(t)$ функция шундай бўлиши керакки, унинг учун $t = 0$ бўлганда (ҳаракат бошланишида) $v = v_0$ шарт бажарилсин. (2) формулага $t = 0$, $v = v_0$ ни қўямиз:

$$v_0 = C + \frac{mg}{k},$$

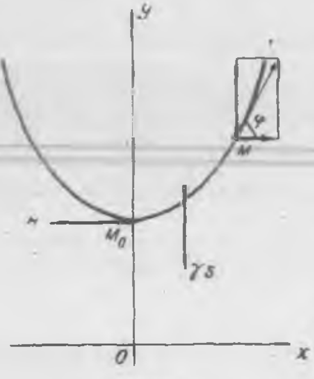
бундан

$$C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Шундай қилиб, C ўзгармас миқдор топилди. Демак, v билан t орасидаги изланган боғланиш:

$$v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}. \tag{2'}$$

Бу формуладан t нинг етарли катта қийматларида v тезлик v_0 га унча боғлиқ эмаслиги чиқади.



250-расм.

Агар $k = 0$ бўлса (яъни ҳавонинг қаршилиги йўқ ёки эътиборга олмайдиган даражада кичик бўлса), у ҳолда биз физикадан маълум

$$v = v_0 + gt \tag{2''}$$

формулани ҳосил қиламиз*). Топилган v функция (1) дифференциал тенгламани ва $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ бошланғич шартни қаноатлантиради.

2-мисол. Бир жинсли эластик ип икки учидан осиб қўйилган. Ип ўз оғирлиги таъсирида бирор эгри чизиқ бўйича жойлашади (осилган арқон, сим, занжир шундай жойлашган). Бу эгри чизиқнинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. M_0 $(0, b)$ ипнинг энг пастки нуқтаси, M эса унинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (250-расм). Ипнинг M_0M қисмини қараймиз. Бу қисм учта куч таъсири остида мувозанатда бўлади:

---

*) (2'') формулани (2') формуладан лимитга ўтиш ёрдамида ҳосил қилиш мумкин:

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt.$$

1) M нуқтада уринма бўйича таъсир этувчи ва OX ўқ билан φ бурчак ташкил қилувчи таранглик кучи T;

2) M_0 нуқтадаги горизонтал таъсир этувчи таранглик кучи H;

3) ипнинг пастга вертикал йўналган оғирлиги γs, бунда $s - M_0M$ ёйнинг узунлиги, γ эса ипнинг чизиқли солиштирма оғирлиги.

T таранглик кучини горизонтал ва вертикал ташкил этувчиларга ажратиб, мувозанат тенгламаларини ёзамиз:

$$T\cos\varphi = H, \qquad T\sin\varphi = \gamma s$$

Иккинчи тенгламанинг ҳадларини биринчи тенгламанинг мос ҳадларига бўлиб,

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\gamma}{H} s \qquad (3)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди изланган эгри чизиқнинг тенгламасини $y = f(x)$ кўринишда ёзиш мумкин, деб фараз қилайлик. Бу ерда $f(x)$ топиш керак бўлган номаълум функция, уни

$$\mathrm{tg}\varphi = f'(x) = \frac{dy}{dx} .$$

эканига эътибор берамиз. Демак,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s, \qquad (4$$

бунда $a = \frac{H}{\gamma}$.

(4) тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx}. \qquad (5)$$

Аммо

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

эканлиги маълум (VI боб, 1-параграфга қаранг).

Бу ифодани (5) тенгламага қўйиб, изланган эгри чизиқнинг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (6)$$

Бу тенглама номаълум y функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари орасидаги боғланишни ифодалайди.

Тенгламаларни ечиш усуллари устида тўхтамасдан,

$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2 \qquad (7)$$

кўринишдаги ҳар қандай функция C_1 ва C_2 ўзгармас миқдорларнинг исталган қийматларида (6) тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиб ўтамиз. Бунинг тўғрилигига кўрсатилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини (6) тенгламага қўйиш билан ишониш осон. Энди бу функциялар (C_1 ва C_2 нинг турли қийматларида) (6) тенгламанинг мумкин бўлган барча ечимларини беришини исботсиз айтиб ўтамиз. Буни 18- § да кўрсатамиз.

Шу йўл билан олинган барча функцияларнинг графиклари *занжир чизиқлар* деб аталади.

Энди энг пастки M нуқтасининг координаталари (0, b) бўлган занжир чизиқни ҳосил қилиш учун C_1 ва C_2 ўзгармас миқдорларнинг қиймати нимага тенг бўлишини аниқлаймиз $x=0$ бўлганда занжир чизиқнинг нуқтаси энг паст ҳолатни олгани учун, бу нуқтада уринма горизонтал бўлади, яъни $\frac{dy}{dx}=0$. Ундан ташқари, бу нуқтада, шартга кура, ордината b га тенг, яъни $y=b$.

(7) тенгламадан:

$$y' = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a}+C_1\right).$$

Бунга $x=0$ ни қўйсак, $0=\operatorname{sh}C_1$ бўлади. Демак, $C_1=0$.

Агар M_0 нуқтанинг ординатаси b бўлса, у ҳолда, $x=0$ бўлганда $y=b$.

$x=0$ ва $C_1=0$ деб олсак, (7) тенгламадан $b=\frac{a}{2}(1+1)+C_2$ бўлади. Бундан $C_2=b-a$. Натижада

$$y=a\operatorname{ch}(x/a)+b-a$$

эканини топамиз. Агар M_0 нуқтанинг ординатасини a деб олинса, (7) тенглама жуда содда кўринишга келади. У ҳолда занжир чизиқнинг тенгламаси

$$y=a\operatorname{ch}(x/a)$$

кўринишда бўлади.

2-§. Таърифлар

1-таъриф. *Дифференциал тенглама* деб эркли ўзгарувчи x, номаълум $y=f(x)$ функция ва унинг $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ҳосилалари орасидаги боғланишни ифодалайдиган тенгламага айтилади. Дифференциал тенгламани символик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$$

ёки

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Агар изланган функция $y=f(x)$ битта эркли ўзгарувчининг функцияси бўлса, у ҳолда дифференциал тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади. Бу бобда биз фақат оддий дифференциал тенгламалар билан шуғулланамиз*).

---

*) Математик анализда оддий дифференциал тенгламалар билан бир қаторда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳам ўрганилади. *Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама* деб икки ёки бир неча x, y, .. ўзгарувчилик номаълум z функция, x, y, ... ўзгарувчилар ҳамда z нинг $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ва ҳоказо хусусий ҳосилалари орасидаги муносабатни ифодалайдиган тенгламага айтилади.

Номаълум функцияси $z(x, y)$ бўлган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$$

тенглама мисол бўла олади. Бу тенгламани $z=x^2y^2$ функция (ва бундан ташқари яна бошқа кўпгина функциялар) қаноатлантиришини текшириш осон.

Бу курсда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга XVIII боб бағишланади.

2-таъриф. *Дифференциал* тенгламанинг тартиби деб тенгламага кирган ҳосиланинг энг юқори тартибига айтилади.

Масалан,

$$y' - 2xy^2 + 5 = 0$$

тенглама биринчи тартибли дифференциал тенгламадир. Мана бу

$$y'' + ky' - by - \sin x = 0$$

тенглама эса иккинчи тартибли дифференциал тенглама ва ҳоказо.

Ўтган параграфдаги 1-мисолда қаралган тенглама биринчи тартибли дифференциал тенглама, 2-мисолдаги тенглама эса иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир.

3-таъриф. Дифференциал тенгламанинг *ечими* ёки *интеграли* деб дифференциал тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай $y=f(x)$ функцияга айтилади

1-мисол. Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

$y = \sin x$, $y = 2\cos x$, $y = 3\sin x - \cos x$ функциялар умуман

$$y = C_1 \sin x, \quad y = C_2 \cos x$$

ёки

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

кўринишдаги функциялар C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлади, бунинг тўғрилигига кўрсатилган функцияларни берилган тенгламага қўйиб кўриб, ишониш мумкин.

2-мисол. Ушбу

$$y'x - x^2 - y = 0$$

тенгламани қараймиз. Бунинг ечимлари

$$y = x^2 + Cx$$

кўринишдаги барча функциялар бўлади, бунда C—ихтиёрий ўзгармас миқдор. Ҳақиқатан ҳам, $y = x^2 + Cx$ функцияни дифференциаллаймиз:

$$y' = 2x + C$$

ни топамиз. y ва y' нинг ифодаларини дастлабки тенгламага қўйиб,

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0$$

айниятни ҳосил қиламиз. 1 ва 2-мисолларда кўрилган тенгламалардан ҳар бирининг чексиз кўп ечимлари бор.

3-§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар (умумий тушунчалар)

1. Биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{1}$$

кўринишда бўлади. Агар бу тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса, уни

$$y'=f(x,\ y) \tag{1'}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу ҳолда биз дифференциал тенглама ҳосилага нисбатан ечилган деймиз. Бунда тенглама учун қуйидаги теорема ўринли бўлиб, бу теорема дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема дейилади.

Теорема. *Агар*

$$y'=f(x,\ y)$$

тенгламада $f(x,\ y)$ *функция ва ундан* y *бўйича олинган* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *хусусий ҳосила* xOy *текисликдаги* $(x_0,\ y_0)$ *нуқтани ўз ичига олувчи бирор соҳада узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда берилган тенгламанинг* $x=x_0$ *бўлганда* $y=y_0$ *шартни қаноатлантирувчи биргина* $y=\varphi(x)$ *ечими мавжуддир.*

Бу теорема XVI боб, 27-§ да исботланади.

Бу теорема геометрик нуқтаи назардан графиги $(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтадиган биргина $y=\varphi(x)$ функциянинг мавжуд эканини билдиради.

Ҳозиргина баён қилинган теоремадан (1′) тенглама чексиз кўп турли ечимларга эга эканлиги келиб чиқади (масалан, агар $(x_0,\ y_0)$, $(x_0,\ y_1)$, $(x_0,\ y_2)$ ва ҳоказо нуқталар фақат D соҳада ётса, графиги $(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтадиган ечим, графиги $(x_0,\ y_1)$ нуқтадан ўтадиган бошқа ечим, графиги $(x_0,\ y_2)$ нуқтадан ўтадиган ечим ва ҳоказо).

$x=x_0$ бўлганда y функция берилган y_0 сонга тенг бўлиши керак деган шарт *бошланғич шарт* дейилади. Бу шарт кўпинча

$$y\big|_{x=x_0}=y_0$$

кўринишда ёзилади.

1-таъриф. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб битта ихтиёрий C ўзгармас миқдорга боғлиқ бўлган ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи

$$y=\varphi(x,\ C) \tag{2}$$

функцияга айтилади:

а) бу функция дифференциал тенгламани C ўзгармас миқдорнинг ҳар қандай конкрет қийматида ҳам қаноатлантиради;

б) $x=x_0$ бўлганда $y=y_0$, яъни $y|_{x=x_0}=y_0$ бошланғич шарт ҳар қандай бўлганда ҳам C миқдорнинг шундай $C=C_0$ қийматини топиш мумкинки, $y=\varphi(x, C_0)$ функция берилган бошланғич шартни қаноатлантиради. Бунда x_0 ва y_0 қийматлар x, ва y ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳасининг ечим мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартлари бажариладиган қисмига тегишли деб фараз этилади.

2. Биз дифференциал тенгламанинг умумий ечимини излашда кўпинча y га нисбатан ечилмаган

$$\Phi(x, y, C)=0 \tag{2'}$$

кўринишдаги муносабатга келиб қоламиз. Бу муносабатни y га нисбатан ечсак, умумий ечимни ҳосил қиламиз. Аммо y ни (2′) муносабатдан фойдаланиб элементар функциялар билан ифода этиш ҳамма вақт ҳам мумкин бўлавермайди; бундай ҳолларда умумий ечим ошкормас кўринишда қолдирилади.

Умумий ечимни ошкормас ҳолда ифодаловчи $\Phi(x, y, C)=0$ кўринишдаги тенглик дифференциал тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади.

2-таъриф. Ихтиёрий C ўзгармас миқдорга маълум $C=C_0$ қиймат бериш натижасида $y=\varphi(x, C)$ умумий ечимдан ҳосил бўладиган ҳар қандай $y=\varphi(x, C_0)$ функция *хусусий ечим* деб аталади. Бу ҳолда $\Phi(x, y, C_0)=0$ муносабат тенгламанинг *хусусий интеграли* дейилади.

1-мисол. Биринчи тартибли

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

тенглама учун $y=\frac{C}{x}$ функциялар оиласи умумий ечим бўлади; бунинг тўғрилигини y функцияни тенгламага қўйиб текшириш мумкин.

$x_0=2$ бўлганда $y_0=1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топамиз. Бу қийматларни $y=\frac{C}{x}$ формулага қўйиб, $1=\frac{C}{2}$ ёки $C=2$ эканини топамиз. Демак, изланган хусусий ечим $y=\frac{2}{x}$ функция бўлади.

Геометрик нуқтаи назардан умумий интеграл координаталар текислигида бир ихтиёрий ўзгармас C миқдорга (бошқача айтганда бир параметрга) боғлиқ бўлган эгри чизиқлар оиласини ифодалайди. Бу эгри чизиқлар берилган дифференциал тенгламанинг *интеграл эгри чизиқлари* дейилади. *Хусусий* интегралга бу оиланинг текисликда берилган бирор нуқта орқали ўтувчи битта эгри чизиғи мос келади.

Чунончи охирги мисолда умумий интеграл геометрик жиҳатдан $y=\frac{C}{x}$ гиперболалар оиласи билан тасвир этилади, кўрсатилган бошланғич шартлар билан аниқланган хусусий интеграл эса бу гиперболаларнинг $M_0(2, 1)$ нуқта орқали ўтувчи битта гиперболаси билан тасвирланади. 251-расмда оила параметрининг баъзи қийматларига, масалан, $C=\frac{1}{2}$, $C=1$, $C=2$, $C=-1$ ва ҳоказо қийматларига мос эгри чизиқлар тасвирланган.

Мулоҳазаларимизнинг анча кўргазмали бўлиши учун биз бундан кейин тенгламанинг ечими деб, фақат тенгламани қаноатлантирувчи $y=\varphi(x, C_0)$ функциянигина тушунмасдан, балки унга мос интеграл эгри чизиқни ҳам тушунамиз. Шунинг учун ҳам биз (x_0, y_0) нуқта орқали ўтувчи ечим ҳақида сўзлашимиз мумкин.

Изоҳ. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ тенглама Оу ўқда ётган нуқта орқали ўтувчи ечимга эга эмас (251-расмга қаранг). Бунинг сабаби шундаки, тенгламанинг ўнг томони $x=0$ бўлганда аниқ эмас, демак, узлуксиз бўла олмайди.

Дифференциал тенгламани ечиш ёки бошқача айтганда, интеграллаш деганда:

а) унинг умумий ечимини ёки умумий интегралини (агар бошланғич шартлар берилган бўлмаса) топиш ёки

б) берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (агар бундай шартлар мавжуд бўлса) хусусий ечимни топишни тушуниш керак.

3. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг геометрик мазмунини аниқлаймиз.

Ҳосилага нисбатан ечилган

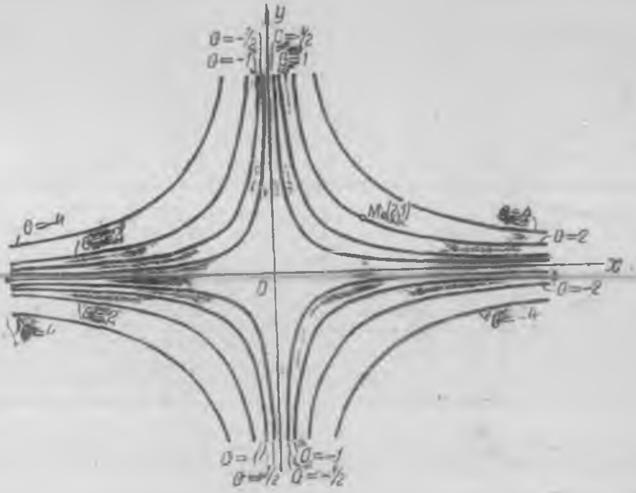
$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1'}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин ва бу тенгламанинг умумий ечими $y=\varphi(x, C)$ бўлсин. Бу умумий ечим Oxy текисликда интеграл эгри чизиқлар оиласини аниқлайди.

(1′) тенглама $\frac{dy}{dx}$ ҳосиланинг координаталари x ва y бўлган ҳар бир M нуқтадаги қийматини, яъни шу M нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиққа шу нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини аниқлайди. Шундай қилиб, (1′) дифференциал тенглама йўналишлар тўпламини беради ёки бошқача айтганда, Oxy текисликда *йўналишлар майдонини* аниқлайди.

Демак, дифференциал тенгламани интеграллаш масаласининг геометрик маъноси уринмаларнинг йўналиши мос нуқталардаги майдоннинг йўналиши билан бир хил бўлган эгри чизиқларни топиш экан.

(1) дифференциал тенглама учун $\frac{dy}{dx} = C = \text{const}$ муносабат бажариладиган нуқталарнинг геометрик ўрни берилган дифференциал тенгламанинг *изоклинаси* дейилади.



251- расм.

C нинг турли қийматларида турли изоклиналар ҳосил қиламиз. *C* нинг қийматига мос изоклиналар тенгламаси $f(x, y) = C$ бўлади. Изоклиналар оиласини ясаб, интеграл эгри чизиқлар оиласини тахминан ясаш мумкин. Изоклиналарни билган ҳолда текисликда интеграл эгри чизиқларнинг ёйилишини сифат жиҳатдан аниқлаш мумкин дейилади.

252- расмда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

дифференциал тенглама билан аниқланадиган йўналишлар майдони тасвирланган.

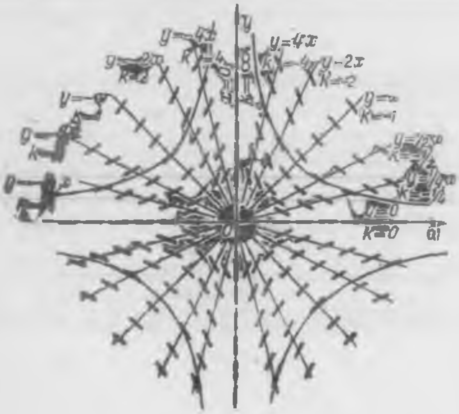
Берилган дифференциал тенгламанинг изоклиналари $-\frac{y}{x} = C$ ёки $y = -Cx$ дан иборат. Бу тўғри чизиқлар оиласи. Булар 252- расмда ясалган.

4. Бундай масалани қараймиз.

Битта C параметрга боғлиқ бўлган функциялар оиласи берилган бўлсин:

$$y = \varphi(x, C); \qquad (2)$$

бунда текисликнинг ҳар бир нуқтасидан (ёки текисликнинг бирор соҳасидан) бу оиланинг фақат битта эгри чизиғи ўтади.



252- расм.

Бу функциялар оиласи қандай дифференциал тенгламанинг умумий интеграли бўлади?

(2) муносабатдан, x бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, C) \qquad (3)$$

ифодани топамиз.

Текисликнинг ҳар бир нуқтасидан оиланинг фақат битта эгри чизиғи ўтгани учун x ва y сонларнинг ҳар бир жуфти учун (2) тенгламадан C нинг биттагина қиймати аниқланади. C нинг бу қийматини (3) муносабатга қўйсак, $\frac{dy}{dx}$ ни x ва y нинг функцияси каби аниқлаймиз. Бу эса бизга (2) оиланинг ҳар қандай функцияси қаноатлантирадиган дифференциал тенгламани беради.

Демак, x, y ва $\frac{dy}{dx}$ орасидаги боғланишни белгилаш учун, яъни умумий интеграли (2) формула билан аниқланадиган дифференциал тенгламани ёзиш учун (2) ва (3) муносабатлардан C ни йўқотиш керак.

2- мисол. $y = Cx^2$ параболалар оиласининг дифференциал тенгламаси топилсин (253- расм).

Оиланинг тенгламасини x бўйича дифференциаллаймиз:

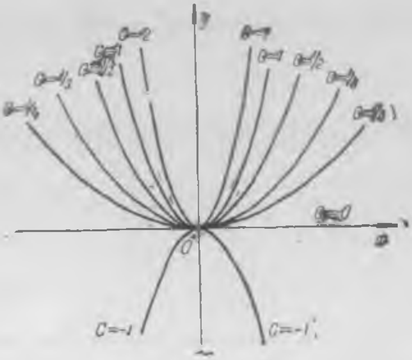
$$\frac{dy}{dx} = 2Cx.$$

Бунга оила тенгламасидан топилган $C = \frac{y}{x^2}$ қийматни қўйиб, берилган оиланинг

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

Бу дифференциал тенглама $x \neq 0$ бўлганда, яъни Oy ўқдаги нуқталарга эга бўлмаган ҳар қандай соҳада маънога эга.



253- расм.

4- §. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган тенгламалар. Радийнинг емирилиши ҳақидаги масала

Ўнг томони фақат x га боғлиқ бўлган функция билан фақат y га боғлиқ бўлган функциянинг кўпайтмасидан иборат бўлган

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y) \tag{1}$$

кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламани қуйидагича алмаштириб ($f_2(y) \neq 0$ деб фараз этиб) ёзамиз:

$$\frac{1}{f_2(y)}\, dy = f_1(x)\, dx. \tag{1'}$$

y ни x нинг маълум функцияси деб ҳисоблаб, (1′) тенгликни иккита дифференциалнинг тенглиги деб қараш мумкин; улардан олинган аниқмас интеграллар бир-биридан ўзгармас қўшилувчи билан фарқ қилади. (1′) тенгликнинг чап томонини y бўйича, ўнг томонини x бўйича интегралласак,

$$\int \frac{1}{f_2(y)}\, dy = \int f_1(x)\, dx + C$$

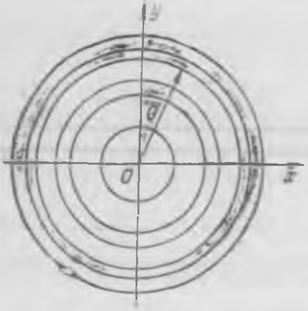
ҳосил бўлади. Биз y ечимни x эркли ўзгарувчи ва ихтиёрий C ўзгармас миқдорни боғловчи муносабатни, яъни (1) тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қилдик.

1. (1′) типдаги дифференциал тенглама

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0 \tag{2}$$

тенглама *ўзгарувчилари ажралган* дифференциал тенглама дейилади. Бу тенгламанинг умумий интеграли юқорида исбот қилганимизга кўра:

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$



254- расм.

1- мисол. Ўзгарувчилари ажралган

$$xdx + ydy = 0$$

тенглама берилган.

Буни интегралласак,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

умумий интегрални ҳосил қиламиз. Кейинги тенгликнинг чап томони манфий бўлмагани учун, ўнг томони ҳам манфий эмас. $2C_1$ ни C^2 билан белгиласак,

$$x^2 + y^2 = C^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу маркази координаталар бошида ва радиуси C бўлган концентрик айланалар оиласининг тенгламасидир (254- расм).

2. Ушбу

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

кўринишдаги тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган* тенглама дейилади. Бу тенгламанинг иккала томонини $N_1(y)\,M_2(x)$ ифодага бўлиш йўли билан уни ўзгарувчилари ажралган тенгламага келтириш мумкин:*)

$$\frac{M_1(x)\,N_1(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)\,N_2(y)}{N_1(y)\,M_2(x)}dy = 0$$

ёки

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

яъни биз (2) кўринишдаги тенглама ҳосил қилдик.

2- мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

---

*) Бундай алмаштиришларни $M_1(y)$ ва $M_2(x)$ нинг биронтаси ҳам нолга айланмайдиган соҳадагина бажариш қонуний бўлади.

Интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

яъни

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|\,^{*)} \text{ ёки } \ln|y| = \ln|C/x|$$

тенглик ҳосил бўлади; бундан $y = \frac{C}{x}$ умумий интегрални топамиз.

3-мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$(1 + x)\,y\,dx + (1 - y)\,x dy = 0.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0, \qquad \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0.$$

Топилган натижани интеграллаб,

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C \text{ ёки } \ln|xy| + x - y = C$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Кейинги муносабат берилган тенгламанинг умумий интегралидир.

4-мисол. Маълум бўлишича ҳар бир берилган моментда радийнинг емирилиш тезлиги унинг миқдорига тўғри пропорционалдир. Агар $t = 0$ бўлганда радийнинг массаси m_0 бўлса, радий массасининг вақтга қараб ўзгариш қонуни аниқлансин.

Емирилиш тезлиги қуйидагича аниқланади. t вақтда радийнинг массаси m, $t + \Delta t$ вақтда эса $m + \Delta m$ бўлсин. Δt вақтда радийнинг Δm массаси емирилган бўлади. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ нисбат емирилишнинг ўртача тезлигини билдиради. $\Delta t \to 0$ да бу нисбатнинг лимити

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

t пайтда радийнинг *емирилиш тезлиги* дейилади.

Масаланинг шартига кўра

$$\frac{dm}{dt} = -km, \tag{4}$$

бунда k — пропорционаллик коэффициенти ($k > 0$). Минус ишора қўямиз, чунки вақт ортганда радий массаси камаяди, демак $\frac{dm}{dt} < 0$.

(4) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dm}{m} = -kdt.$$

---

*) Бундан кейинги алмаштиришларни эътиборга олиб, ихтиёрий ўзгармас миқдорни $\ln|C|$ билан белгиладик. Бундай белгилаш мумкин, чунки $\ln|C|$ ($C \neq 0$ бўлганда) $-\infty$ дан $+\infty$ гача ҳар қандай қийматни қабул қилиши мумкин.

Тенгламани ечамиз:

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

бундан

$$\ln\frac{m}{C} = -kt, \qquad m = Ce^{-kt}\,. \qquad (5)$$

$t = 0$ бўлганда радийнинг массаси m_0 бўлгани учун C

$$m_0 = Ce^{-k\cdot 0} = C$$

255- расм.

муносабатни қаноатлантириши керак. C нинг қийматини (5) тенгликка қўйиб, радий массасини вақтнинг функцияси каби ифодаловчи изланган муносабатни топамиз (255- расм):

$$m = m_0e^{-kt} \qquad (6)$$

k коэффициент кузатишлардан қуйидагича аниқланади. t_0 вақтда радий дастлабки массасининг α проценти емирилган бўлсин. Демак,

$$\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)m_0 = m_0e^{-kt_0}$$

муносабат бажарилади. Бундан

$$-kt_0 = \ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$$

ёки

$$k = -\frac{1}{t_0}\ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right).$$

Шундай қилиб, радий учун $k = 0{,}000436$ экани аниқланган (вақтнинг ўлчов бирлиги йил).

k нинг бу қийматини (6) формулага қўйсак,

$$m = m_0e^{-0{,}000436t}.$$

Радийнинг ярим емирилиш даврини, яъни радийнинг дастлабки массаси ярмининг емирилиши учун кетадиган вақтни топамиз. Кейинги формулада m нинг ўрнига $\frac{m_0}{2}$ ни қўйиб, ярим парчаланиш даври T ни топиш учун тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{m_0}{2} = m_0e^{-0{,}000436\,T},$$

бундан

$$-0{,}000436\,T = -\ln 2$$

ёки

$$T = \frac{\ln 2}{0{,}000436} = 1590 \text{ йил.}$$

Физика ва химиянинг бошқа масалаларини ҳам (4) кўринишдаги тенгламага келтириш мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Изоҳ. Ушбу тенглама

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ ёки } dy = f(x)\,dx$$

ўзгарувчилари ажралган энг содда кўринишдаги дифференциал тенгламадир. Бунинг умумий интеграли

$$y=\int f(x)\,dx+C$$

кўринишда бўлади. Бу кўринишдаги тенгламаларни ечишни биз X бобда кўрган эдик.

5- §. Биринчи тартибли бир жинсли тенгламалар

1- таъриф. Агар λ нинг ҳар қандай қийматида

$$f(\lambda x,\ \lambda y)=\lambda^n f(x,\ y)$$

айният тўғри бўлса, $f(x,\ y)$ функция x ва y ўзгарувчиларга нисбатан *n-ўлчовли бир жинсли функция* деб аталади.

1- мисол. $f(x,\ y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ функция бир ўлчовли бир жинсли функция, чунки

$$f(\lambda x,\ \lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y).$$

2- мисол. $f(xy)=xy-y^2$ функция икки ўлчовли бир жинсли функция, чунки

$$(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda y)^2=\lambda^2(xy-y^2).$$

3- мисол. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$ функция ноль ўлчовли бир жинсли функция, чунки $\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{x^2-y^2}{xy}$, яъни $f(\lambda x,\ \lambda y)=f(x,y)$ ёки $f(\lambda x,\lambda y)=$ $=\lambda^\circ f(x,y)$.

2- таъриф. Агар биринчи тартибли

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{1}$$

тенгламада $f(x,\ y)$ функция x ва y га нисбатан ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлса, (1) тенглама x ва y ўзгарувчиларга нисбатан *бир жинсли* тенглама дейилади.

Бир жинсли тенгламани ечиш. Функция бир жинсли бўлишининг шартига кўра $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,\ y)$. Бу айниятда $\lambda=\frac{1}{x}$ деб олсак, $f(x,\ y)=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$, яъни ноль ўлчовли бир жинсли функция фақат аргументлар нисбатигагина боғлиқ.

Бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right) \tag{1'}$$

кўринишини олади. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$u=\frac{y}{x}\ \text{ёки}\ y=ux.$$

У ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x.$$

Ҳосиланинг ифодасини (1′) тенгламага қўйсак, ўзгарувчилари ажраладиган

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,\ u)$$

тенглама ҳосил бўлади. Ўзгарувчиларни ажратиб ёзамиз:

$$x\frac{du}{dx} = f(1,\ u) - u \quad \text{ёки} \quad \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Буни интеграллаймиз:

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u} = \int\frac{dx}{x} + C.$$

Интеграллагандан кейин u ўрнига $\frac{y}{x}$ нисбатни қўйсак, (1′) тенгламанинг умумий интеграли ҳосил бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

тенглама берилган. Ўнг томонда ноль ўлчовли бир жинсли функция турибди; демак, берилган тенглама бир жинсли. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз: $y/x = u$; бу ҳолда:

$$y = ux, \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}, \qquad x\frac{du}{dx} - \frac{u^3}{1-u^2}.$$

Ўзгарувчиларни ажратиб,

$$\frac{(1-u^2)\,du}{u^3} = \frac{dx}{x}, \qquad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$$

ни ҳосил қиламиз; буни интеграллаймиз:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{ёки} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln|uxC|.$$

u нинг ўрнига $\frac{y}{x}$ ни қўйсак, дастлабки тенгламанинг умумий интеграли ҳосил бўлади:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|.$$

y ни элементар функциялар ёрдами билан ёзилган x нинг ошкор функцияси каби ҳосил қилиш мумкин эмас. Лекин, бу ерда x ни y орқали ифодалаш осон:

$$x = y\sqrt{-2\ln|Cy|}.$$

Изоҳ. $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ кўринишдаги тенглама $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар бир хил ўлчовли бир жинсли функциялар бўлгандагина бир жинсли тенглама бўлади. Бу эса бир хил ўлчовли икки функцияларнинг нисбати ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлишидан келиб чиқади.

5- мисол. $(2x + 3y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0,$

$(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

тенгламалар бир жинсли тенгламалардир.

6- §. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламалар

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} \tag{1}$$

кўринишдаги тенгламалар бир жинсли тенгламаларга келтирилади. Агар $c_1 = c = 0$ бўлса, (1) тенгламанинг бир жинсли экани равшан. Энди c ва c_1 (ёки булардан биттаси) нолдан фарқли бўлсин. Ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$x = x_1 + h, \qquad y = y_1 + k.$$

У ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}. \tag{2}$$

x, y ва $\frac{dy}{dx}$ ларнинг ифодаларини (2) тенгламага қўйсак,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1} \tag{3}$$

ҳосил бўлади. h ва k ни

$$\left.\begin{aligned} ah + bk + c &= 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

тенгликлар ўринли бўладиган қилиб танлаймиз, яъни h ва k ни (4) тенгламалар системасининг ечими каби аниқлаймиз. Бу шартда (3) тенглама

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}$$

бир жинсли тенгламага айланади.

Бу тенгламани ечиб, сўнгра (2) формулага мувофиқ яна x ва y ларга ўтсак, (1) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз.

Агар

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

бўлса, яъни $ab_1 = a_1b$ бўлса, (4)системанинг ечими йўқ. Аммо бу ҳолда $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, яъни $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ ва, демак, (1) тенгламани

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax + by) + c}{\lambda\,(ax + by) + c_1} \tag{5}$$

кўринишга келтириш мумкин. Бу ҳолда

$$z = ax + by \tag{6}$$

алмаштириш ёрдамида тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx},$$

бундан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\,\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}. \tag{7}$$

(5) тенгламага (6) ва (7) ифодаларни қўйиб,

$$\frac{1}{b}\,\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z + c}{\lambda z + c_1}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу эса ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир.

(1) тенгламани интеграллашда фойдаланилган усул

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

тенгламани интеграллашга ҳам татбиқ этилади, бунда f ҳар қандай узлуксиз функция бўла олади.

1 мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Буни бир жинсли тенгламага келтириш учун узгарувчиларни алмаштирамиз: $x = x_1 + h$; $y = y_1 + k$ Бу ҳолда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

$h + k - 3 = 0$; $h - k - 1 = 0$ тенгламалар системасини ечиб,

$$h = 2, \; k = 1$$

эканини топамиз. Натижада бир жинсли

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}$$

тенгламани ҳосил қиламиз; буни

$$\frac{y_1}{x_1} = u$$

алмаштириш ёрдамида ечиб, ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз:

$$y_1 = ux_1, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}, \quad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Ҳосил бўлган тенгламада ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Бу тенгламани интеграллаб,

$$\operatorname{arc\,tg} u - \frac{1}{2} \ln (1 + u^2) = \ln | x_1 | + \ln | C |,$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \ln | Cx_1 \sqrt{1 + u^2} |$$

ёки

$$Cx_1 \sqrt{1 + u^2} = e^{\operatorname{arc\,tg} u}$$

ни топамиз.

Бу ерда u ўрнига $\frac{y_1}{x_1}$ ни қўйиб,

$$C \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y_1}{x_1}}$$

ни ҳосил қиламиз. Ниҳоят, x ва y ўзгарувчиларга ўтиб, натижада

$$C \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y-1}{x-2}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Ушбу

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

тенгламани $x = x_1 + h$, $y = y_1 + k$ алмаштириш ёрдамида ечиб бўлмайди, чунки бу ҳолда h ва k ни аниқлашда фойдаланилган тенгламалар системаси ечиб бўлмайдиган системадир (бунда ўзгарувчиларнинг коэффициентларидан тузилган $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ детерминант нолга тенг).

Бу тенгламани

$$2x + y = z$$

алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин. Бу ҳолда $y' = z' - 2$ ва тенглама

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

ёки

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

кўринишга келади. Буни ечиб,

$$\frac{2}{5} z + \frac{7}{25} \ln | 5z + 9 | = x + C.$$

эканини топамиз. Аммо $z = 2x + y$ бўлгани учун биз дастлабки тенгламанинг ечимини

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25}\ln|10x + 2y + 9| = x + C$$

ёки

$$10y - 5x + 7\ln|10x + 5y + 9| = C_1$$

кўринишда ҳосил қиламиз, яъни y функция x нинг ошкормас функцияси шаклида ҳосил бўлди.

7- §. Биринчи тартибли чизиқли тенгламалар

Таъриф. *Биринчи тартибли чизиқли тенглама* деб номаълум функцияга ва унинг ҳосиласига нисбатан чизиқли бўлган тенгламага айтилади. У

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \tag{1}$$

кўринишда бўлади, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг берилган узлуксиз функциялари (ёки ўзгармас сонлар).

(1) чизиқли тенгламани ечиш. (1) тенгламанинг ечимини x нинг иккита функцияси кўпайтмаси шаклида излаймиз:

$$y = u(x)\,v(x). \tag{2}$$

Бу функциялардан бирини ихтиёрий олиш мумкин, иккинчиси эса (1) тенгламага асосан аниқланади.

(2) тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ ҳосиланинг топилган ифодасини (1) тенгламага қўямиз:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v + Puv = Q$$

ёки

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q. \tag{3}$$

v функцияни

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0 \tag{4}$$

тенглама ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. Бу дифференциал тенгламада ўзгарувчиларни v га нисбатан ажратамиз:

$$\frac{dv}{v} = -P\,dx.$$

Буни интеграллаймиз:

$$-\ln|C_1| + \ln|v| = -\int P dx$$

$\ln\frac{v}{C_1} = -\int Pdx \quad \frac{v}{C_1} =$

ёки

$$v = C_1 e^{-\int P dx}.$$

(4) тенгламанинг нолдан фарқли бирор ечимини топиш етарли бўлгани учун $v(x)$ функция деб

$$v(x) = e^{-\int P dx} \tag{5}$$

ни олишимиз мумкин, бунда $\int P\,dx$ бирор бошланғич функция, $v(x) \neq 0$ бўлиши ўз-ўзидан равшан.

$v(x)$ нинг топилган қийматини (3) тенгламага қўйиб ($\frac{dv}{dx} + Pv = 0$ эканини эътиборга олиб),

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x)$$

ёки

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C$$

экани келиб чиқади. u ва v нинг бу қийматини (2) формулага қўйсак, натижада

$$y = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\right]$$

ёки

$$y = v(x)\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + Cv(x) \tag{6}$$

ҳосил бўлади.

Изоҳ. Агар (5) тенглик ёрдамида аниқланган $v(x)$ функция ўрнига бирор $v_1(x) = \bar{C}\,v(x)$ функцияни олсак, (6) ифоданинг ўзгармаслиги равшан. Ҳақиқатан ҳам, (6) тенгликдаги $v(x)$ ўрнига $v_1(x)$ ни қўйсак,

$$y = \bar{C}v(x)\int \frac{Q(x)}{\bar{C}v(x)}dx + C\bar{C}v(x)$$

тенглик ҳосил бўлади. Биринчи қўшилувчидаги $\bar{C}$ қисқариб кетади; иккинчи қўшилувчидаги $C\bar{C}$ кўпайтма ихтиёрий ўзгармас сондир, уни битта C ҳарфи билан белгиласак, яна (6) ифодага келамиз. Агар $\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx = \varphi(x)$ деб белгиласак, (6) ифода

$$y = v(x)\varphi(x) + Cv(x) \tag{6'}$$

кўринишни олади. Бу умумий интеграл бўлади, чунки C нинг $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи қийматини танлаб олиш мумкин. C нинг бундай қиймати

$$y_0 = v(x_0)\varphi(x_0) + Cv(x_0)$$

тенгликдан аниқланади.

Мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Ечиш. $y = uv$ деб фараз қилсак, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$$

бўлади, $\frac{dy}{dx}$ ҳосиланинг ифодасини дастлабки тенгламага қўйсак, у

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3,$$

$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v\right) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \qquad (7)$$

кўринишни олади. v ни аниқлаш учун

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0,$$

яъни

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|$$

ёки

$$v = (x+1)^2.$$

v функциянинг топилган ифодасини (7) тенгламага қуйсак, u ни топиш учун

$$(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

ёки

$$\frac{du}{dx} = (x+1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

эканини топамиз.

Демак, берилган тенгламанинг умумий интеграли

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

кўринишда бўлади.

Топилган бу оила берилган тенгламанинг умумий ечимидир. $(x_0\;\;y_0)$ бошланғич шарт ҳар қандай бўлганда ҳам (бунда $x_0 \neq -1$) ҳамма вақт C ни унга мос хусусий ечим бошланғич шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш мумкин. Масалан, $x_0 = 0$ бўлганда, $y_0 = 3$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечим қуйидагича топилади:

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + C(0+1)^2, \quad C = \frac{5}{2}.$$

Демак, изланган хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2}(x+1)^2.$$

Агар (x_0, y_0) бошланғич шартни $x_0 = -1$ бўладиган қилиб олсак, бу шартни қаноатлантирувчи ечимни тополмаймиз Бунинг сабаби шуки, $x = -1$ бўлганда $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ функция узилишли, демак, ечим мавжудлик теоремаларининг шартлари бажарилмаган.

Изоҳ. Татбиқларда кўпинча ўзгармас коэффициентли чизиқли

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \tag{8}$$

тенглама учраб туради, бунда a ва b — ўзгармас сонлар.

Бу тенгламани (2) ўрнига қўйиш ёрдами билан ёки ўзгарувчиларни ажратиш йўли билан ечиш мумкин:

$$dy = (-ay + b)dx, \qquad \frac{dy}{-ay+b} = dx,$$

$$-\frac{1}{a}\ln|-ay+b| = x + C_1$$

$$\ln|-ay+b| = -(ax + C^*),$$

бунда

$$C^* = aC_1, \qquad -ay + b = e^{-(ax+C^*)},$$

$$y = -\frac{1}{a}\,e^{-(ax+C^*)} + \frac{b}{a}$$

ёки натижада

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

(бунда $-\frac{1}{a}\,e^{-C^*} = C$ деб белгиланган). Ана шунинг ўзи (8) тенгламанинг умумий ечимидир.

8- §. Бернулли тенгламаси

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламани*) қараймиз, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ — x нинг узлуксиз функциялари (ёки ўзгармас миқдорлар) ҳамда $n \neq 0$ ва $n \neq 1$ (акс ҳолда чизиқли тенглама ҳосил бўлар эди). *Бернулли тенгламаси* деб аталган бу тенглама қуйидаги алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келтирилади.

Тенгламанинг барча ҳадларини y^n га бўламиз:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q. \qquad (2)$$

Энди

$$z=y^{-n+1}$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Бу қийматларни (2) тенгламага қўйсак, чизиқли тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)Pz=(-n+1)Q.$$

Бунинг умумий интегралини топиб ҳамда z ўрнига y^{-n+1} ифодани қўйиб, Бернулли тенгламасининг умумий интегралини топамиз.

Мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3. \qquad (3)$$

Ечиш. Тенгламанинг ҳамма ҳадларини y^3 га бўлсак,

$$y^{-3}y+xy^{-2}=x^3. \qquad (4)$$

тенглама ҳосил бўлади.

$$z=y^{-2}$$

деб олсак,

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

бўлади. Бу қийматларни (4) тенгламага қўйсак: $\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$ (5)

---

*) Агар муҳитнинг қаршилиги F; тезлик v билан $F=\lambda_1 v+\lambda_2 v^n$ тенглик орқали боғлиқ бўлса, жисмнинг ҳаракати ҳақидаги масала ҳам шу тенгламага келтирилади. Бу ҳолда ҳаракат тенгламаси:

$$m\frac{\partial v}{\partial t}=-\lambda_1 v-\lambda_2 v^n \text{ ёки } \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\lambda_1}{m}v=-\frac{\lambda_2}{m}v^n.$$

Бунинг умумий интегралини топамиз:

$$z = uv, \qquad \frac{dz}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

z ва $\frac{dz}{dx}$ нинг ифодаларини (5) тенгламага қўямиз:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - 2xuv = -2x^3,$$

ёки

$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Қавс ичидаги ифодани нолга тенглаймиз:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0, \qquad \frac{dv}{v} = 2xdx, \qquad \ln|v| = x^2, \qquad v = e^{x^2}.$$

u ни аниқлаш учун

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = -2x^3$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$du = -2e^{-x^2}x^3dx, \qquad u = -2\int e^{-x^2}x^3dx + C.$$

Бўлаклаб интеграллаб,

$$u = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C, \qquad z = uv = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

эканини топамиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий интеграли:

$$y^{-2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2} \text{ ёки } y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}.$$

Изоҳ. Чизиқли тенгламаларни ечгандагидек, Бернулли тенгламасининг ечимини ҳам иккита функция кўпайтмаси, яъни

$$y = u(x)v(x)$$

кўринишда излаш мумкинлигини кўрсатса бўлади, бунда $v(x)$ функция $v' + Pv = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи, нолдан фарқли бирор функция.

9-§. Тўла дифференциалли тенглама

Таъриф. Агар

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

тенгламада $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар узлуксиз, дифференциалланувчи бўлиб, булар учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

муносабат бажарилса, (1) тенглама *тўла дифференциалли* *тенглама* дейилади, бунда $\frac{\partial M}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N}{\partial x}$ функциялар бирор соҳада узлуксиз функциялардир.

Тўла дифференциалли тенгламаларни интеграллаш. Агар (1) тенгламанинг чап томони тўла дифференциал бўлса, у ҳолда (2) шартнинг бажарилишини ва аксинча, (2) шарт бажарилса, (1) тенгламанинг чап томони бирор $u(x,y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлишини исботлаймиз, яъни (1) тенгламанинг кўриниши

$$du(x, y) = 0 \tag{3}$$

бўлади, демак, унинг умумий интеграли $u(x\ y) = C$.

Дастлаб, (1) тенгламанинг чап томонини бирор $u(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали деб фараз қиламиз, яъни

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

бу ҳолда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

Биринчи муносабатни y бўйича, иккинчи муносабатни эса x бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Иккинчи тартибли ҳосилалар узлуксиз деб фараз қилсак,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

бўлади, яъни (2) тенглик (1) тенгламанинг чап томони бирор $u(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлишининг зарурий шартидан иборатдир. Бу шартнинг етарли шарт бўлишини, яъни (2) тенглик бажарилганда (1) тенгламанинг чап томони бирор $u(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлишини кўрсатамиз.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

муносабатдан

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y)$$

ни топамиз, бунда x_0—ечим мавжуд бўлган соҳадаги ихтиёрий нуқтанинг абсциссаси.

x бўйича интеграллашда y ни ўзгармас миқдор деб ҳисоблаймиз ва шунинг учун интеграллашда ҳосил бўлган ихтиёрий ўзгармас миқдор y га боғлиқ бўлиши мумкин. $\varphi(y)$ ни (4) муносабатлардан иккинчиси бажариладиган қилиб танлаб оламиз. Бунинг учун кейинги тенгликнинг иккала томонини y бўйича дифференциаллаймиз*) ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

аммо $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ бўлгани учун қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) = N, \quad \text{яъни} \quad N(x, y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ёки

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Демак,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

ёки

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C_1.$$

Шундай қилиб, $u(x, y)$ функция

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy + C_1$$

кўринишда бўлади. Бунда $P(x_0, y_0)$ шундай нуқтаки, унинг атрофида (1) дифференциал тенгламанинг ечими мавжуд.

Бу ифодани ихтиёрий C ўзгармас миқдорга тенглаб, (1) тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy = C. \tag{5}$$

Мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$\frac{2x}{y^3}\, dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0.$$

---

*) $\int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx$ интеграл y га боғлиқ. Бу интегралдан y бўйича ҳосила топиш учун интеграл остидаги функцияни y бўйича дифференциаллаш керак: $\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\, dx$. Бу Лейбництнинг аниқ интегрални параметр бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремасидан келиб чиқади (XI боб, 10- параграфга қаранг).

Бу тенглама тўла дифференциалли тенглама бўлиш ёки бўлмаслигини текширамиз.

Бу ерда

$$M = \frac{2x}{y^3} \qquad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

деб оламиз, бу ҳолда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

$y \neq 0$ бўлганда (2) шарт бажарилади. Демак, берилган тенгламанинг чап томони бирор номаълум $u(x, y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлади. Бу функцияни топамиз. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ бўлгани сабабли

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

бунда $\varphi(y)$ функция y нинг ҳозирча номаълум функцияси. Бу муносабатни y бўйича дифференциаллаб ва

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

эканини эътиборга олиб,

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \qquad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Шундай қилиб, дастлабки тенгламанинг умумий интеграли

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

10-§. Интегралловчи кўпайтувчи

Ушбу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлмасин. Баъзан шундай $\mu(x, y)$ функцияни танлаб олиш мумкин бўладики, тенгламанинг барча ҳадларини ана шунга кўпайтирилганда тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлиб қолади. Шу усул билан ҳосил қилинган тенгламанинг умумий ечими дастлабки тенгламанинг умумий ечими билан бир хил бўлади: $\mu(x, y)$ функция (1) тенгламанинг *интегралловчи кўпайтувчиси* дейилади.

Интеграллочи кўпайтувчи μ ни топишга қуйидагича киришамиз: берилган тенгламанинг иккала томони ҳозирча номаълум. Интеграллочи кўпайтувчи μ га кўпайтирамиз:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0.$$

Кейинги тенглама тўла дифференциалли тенглама бўлиши учун қуйидаги муносабат бажарилиши зарур ва етарлидир;

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

яъни

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

ёки

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Кейинги тенгламанинг иккала томонини μ га бўлиб,

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Охирги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай $\mu(x, y)$ функция (1) тенгламанинг интеграллочи кўпайтувчиси бўлиши ўз-ўзидан равшан. (2) тенглама иккита x ва y ўзгарувчига боғлиқ бўлган μ номаълумли функцияга нисбатан хусусий ҳосилали тенгламадир. Маълум шартлар бажарилганда бу тенглама ечимлари чексиз кўп эканини ва, демак, (1) тенгламанинг интеграллочи кўпайтувчиси борлигини исботлаш мумкин. Лекин умумий ҳолда (2) тенгламадан интеграллочи кўпайтувчи $\mu(x, y)$ ни топиш (1) тенгламани интеграллашга қараганда қийинроқ. Фақат баъзи бир хусусий ҳоллардагина $\mu(x, y)$ функцияни топиш мумкин.

Масалан, (1) тенгламанинг интеграллочи кўпайтувчиси фақат y га боғлиқ бўлсин. Бу ҳолда

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x} = 0$$

ва μ ни топиш учун

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

оддий дифференциал тенглама ҳосил бўлади; бундан (битта квадратура билан) $\ln\mu$ ва, демак, μ ҳам аниқланади. Бундай иш кўриш $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ ифода x га боғлиқ бўлмаган ҳолдагина мумкин эканлиги тушунарли.

Шунга ўхшаш агар $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$ ифода y га боғлиқ бўлмасдан, фақат x га боғлиқ бўлса, у ҳолда фақат x га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи осон топилади.

Мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$(y+xy^2)\,dx-x\,dy=0.$$

Ечиш. Бу ерда $M=y+xy^2$, $N=-x$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-1,\qquad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Демак, тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали эмас. Бу тенгламанинг фақат y га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчиси борми деган масалани қараймиз.

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=-\frac{2}{y}$$

бўлишига эътибор бериб, бу тенгламанинг фақат y га боғлиқ интегралловчи кўпайтувчиси бор деган натижага келамиз ва уни топамиз:

$$\frac{d\ln\mu}{\partial y}=-\frac{2}{y};$$

бундан

$$\ln\mu=-2\ln y,\ \text{яъни}\ \mu=\frac{1}{y^2}.$$

Берилган тенгламанинг ҳамма ҳадларини топилган интегралловчи кўпайтувчи μ га кўпайтиргандан кейин

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тўла дифференциалли тенгламадир, чунки

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}\right).$$

Бу тенгламани ечиб,

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}+C=0$$

ёки

$$y=-\frac{2x}{x^2+2C}$$

умумий интегралини топамиз

11-§. Эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси

$$\Phi(x,y,C)=0\qquad(1)$$

кўринишдаги тенглама берилган бўлсин, бунда x ва y ўзгарувчилар. Декарт координаталари, C эса тайинланган турли қийматлар қабул қилувчи параметрдир.

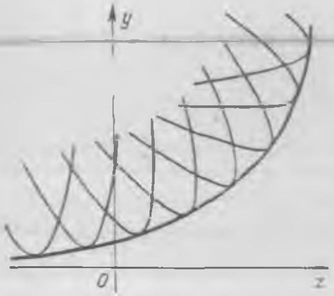
C параметрнинг берилган ҳар бир қийматида (1) тенглама Oxy текисликда бирор эгри чизиқни аниқлайди. C га мумкин бўлган барча қийматларни берсак, бир параметрга боғлиқ бўлган **эгри чизиқлар оиласини** ёки бошқача айтганда, **бир параметрли эгри чизиқлар оиласини** ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1) тенглама бир параметрли эгри чизиқлар оиласининг тенгламасидир (чунки, у фақат битта ихтиёрий ўзгармас миқдорни ўз ичига олади).

Таъриф. Агар L чизиқ ўзининг ҳар бир нуқтаси билан бир параметрли чизиқлар оиласининг у ёки бу чизиғига уринса (бунда L чизиқнинг турли нуқталарида берилган оиланинг турли чизиқлари уринади), L чизиқ бир параметрли чизиқлар оиласининг *ўрамаси* дейилади (256-расм).

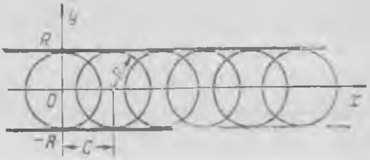
1-мисол. Ушбу

$$(x-C)^2+y^2=R^2$$

чизиқлар оиласини қараймиз, бунда R ўзгармас миқдор. C эса параметр. Бу тенглама радиуси R ва маркази Ox ўқда ётувчи айланалар оиласининг тенгламасидир. Бу оиланинг ўрамаси $y=R$, $y=-R$ тўғри чизиқлар бўлиши равшан (257-расм):



256-расм.



257-расм.

Берилган оила ўрамасининг тенгламасини топиш. Бир параметрга боғлиқ бўлган

$$\Phi(x, y, C)=0 \qquad (1)$$

эгри чизиқлар оиласи берилган бўлсин, бунда C параметр.

Бу оиланинг ўрамаси мавжуд ва унинг тенгламасини $y=\varphi(x)$ кўринишда ёзиш мумкин деб фараз қиламиз, бунда $\varphi(x)$ x нинг дифференциалланувчи ва узлуксиз функциясидир. Ўрамада ётган бирор $M(x, y)$ нуқтани қарайлик. Бу нуқта (1) оиланинг бирор эгри чизиғида ҳам ётади. Шу эгри чизиққа C параметрнинг маълум қиймати тўғри келади, берилган (x, y) да бу қиймат (1) тенгламадан аниқланади: $C=C(x, y)$. Демак, ўраманинг барча нуқталари учун

$$\Phi(x, y, C(x, y))=0 \qquad (2)$$

тенглик қаноатлантирилади. $C(x, y)$ дифференциалланувчи функция бўлиши билан бирга x, y ўзгарувчилар қаралаётган қийматларнинг ҳеч бир интегралида ўзгармас сонга тенг бўлмасин. Ўраманинг (2) тенгламасидан унинг $M(x, y)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз. y ни x нинг функцияси деб олиб (2) тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right)y'=0$$

ёки

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'+\Phi'_C\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0. \qquad (3)$$

Энди (1) эгри чизиқлар оиласининг $M(x, y)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти

$$\Phi'_x+\Phi'_y y'=0 \qquad (4)$$

тенгламадан топилади (қаралаётган эгри чизиқда C ўзгармас сон). Биз $\Phi'_y \neq 0$ деб фараз қиламиз, акс ҳолда x ни функция, y ни эса аргумент деб ҳисоблаган бўлар эдик. Лекин ўраманинг k бурчак коэффициенти оиланинг k бурчак коэффициентига тенг бўлгани сабабли (3) ва (4) тенгликлардан:

$$\Phi'_C\left|\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right|=0.$$

Аммо ўрамада $C(x, y) \neq \text{const}$ бўлгани учун,

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\neq 0,$$

шунинг учун унинг нуқталарида

$$\Phi'_C(x, y, C)=0 \qquad (5)$$

тенглик ўринли бўлади. Шундай қилиб, ўрамани ушбу

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(x, y, C)=0,\\&\Phi_C\ (x, y, C)=0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

тенгламалардан фойдаланиб аниқлаш мумкин. Аксинча, агар бу тенгламалардан C ни йўқотсак $y=\varphi(x)$ тенглама ҳосил бўлади, бунда $\varphi(x)$ дифференциалланувчи функция, бу эгри чизиқда $C \neq \text{const}$ бўлса, $y=\varphi(x)$ ўраманинг тенгламаси бўлади.

1-изоҳ: Агар (1) оила учун бирор $y=\varphi(x)$ функция махсус нуқталар геометрик ўрнининг тенгламаси бўлса, яъни $\Phi'_x=0$ ва $\Phi'_y=0$ ўринли бўладиган нуқталар бўлса, бу нуқталарнинг координаталари ҳам (6) тенгламаларни қаноатлантиради.

Ҳақиқатан ҳам, махсус нуқталарнинг координаталарини (1) тенгламада қатнашган C параметр орқали ифодалаш мумкин:

$$x = \lambda(C), \qquad y = \mu(C). \tag{7}$$

Агар бу ифодаларни (1) тенгламага қўйсак, у ҳолда C га нисбатан

$$\Phi(\lambda(C), \mu(C), C) = 0$$

айният ҳосил бўлади. Бу айниятни C га нисбатан дифференциаллаймиз:

$$\Phi'_x \frac{d\lambda}{dC} + \Phi'_y \frac{d\mu}{dC} + \Phi'_C = 0;$$

ҳар қандай нуқталар учун $\Phi'_x = 0$, $\Phi'_y = 0$ тенгликлар бажарилади, шунга кўра, бундай нуқталар учун ҳам $\Phi_C = 0$ тенглик бажарилади.

Биз бу билан махсус нуқталар координаталари (6) тенгламаларни қаноатлантиришини исбот этдик.

Шундай қилиб, (6) тенгламалар ё ўрамани, ёки (1) эгри чизиқлар оиласининг махсус нуқталари геометрик ўрнини ёки иккаласининг комбинациясини аниқлайди. Демак, (6) тенгламаларни қаноатлантирувчи эгри чизиқни ҳосил қилгандан кейин, у ўрамами ёки махсус нуқталарнинг геометрик ўрними эканини қўшимча текшириш зарур.

2-мисол. Битта C параметрга боғлиқ бўлган

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Оила тенгламасини C бўйича дифференциаллаймиз:

$$2(x - C) = 0.$$

Бу икки тенгламадан C ни йўқотамиз:

$$y^2 - R^2 = 0 \text{ ёки } y = \pm R.$$

Ҳосил бўлган иккита тўғри чизиқ, геометрик мулоҳазаларга асосан, оилага кирган айланалар махсус нуқталарга эга бўлмагани учун махсус нуқталарнинг геометрик ўрни бўла олмайди. Шунинг учун бу тўғри чизиқлар оиланинг ўрамасини ифодалайди.

3-мисол.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{а}$$

тўғри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин, бунда α — параметр.

Ечиш. Оиланинг берилган тенгламасини α бўйича дифференциаллаймиз:

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0. \tag{в}$$

(а) ва (b) тенгламалардан α параметрни чиқариб юбориш учун биринчи тенгламанинг барча ҳадларини $\cos\alpha$ га, иккинчиникини эса $\sin\alpha$ га кўпайтириб, биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айирамиз; у ҳолда

$$x = p\cos\alpha$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ифодани (b) тенгламага қўйсак,

$$y = p \sin \alpha$$

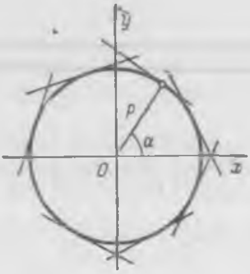
тенглама ҳосил бўлади.

Кейинги икки тенгламани квадратга кўтариб, ҳадлаб қўшсак,

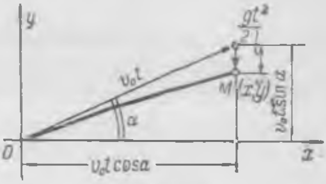
$$x^2 + y^2 = p^2$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу айлана бўлиб, оиланинг ўрамасидир (аммо махсус нуқталарнинг геометрик ўрни бўла олмайди, чунки тўғри чизиқнинг махсус нуқталари бўлмайди) (258- расм).

4- мисол. Тўп координаталар бошига жойлашган, отилган снарядларнинг траекториялари Oxy текисликда ётади деб ҳисоблаб (ҳавонинг қаршилигини эътиборга олмаймиз), тўп стволининг горизонтга оғиш бурчаги турлича бўлганда тўпдан v_0 тезлик билан отилган снарядлар траекторияларининг ўрамаси топилсин.



258- расм.



259- расм.

Ечиш. Дастлаб тўп стволи Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил қилган ҳол учун снаряд траекторияси тенгламасини топамиз. Учиш пайтида снаряд бирданига икки хил ҳаракат қилади: v_0 тезлик билан тўп стволи йўналишидаги текис ҳаракат ва оғирлик кучи таъсири остида пастга тушиш. Шунинг учун ҳар бир t пайтда M снаряднинг вазияти қуйидаги тенгликлар билан аниқланади (259- расм).

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Бу — тенгликлар траекториянинг параметрик тенгламаларидир (бунда t параметрдир). Бу тенгламалардан t ни йўқотсак, траекториянинг тенгламаси

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

кўринишда бўлади; ниҳоят, $\operatorname{tg} \alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$ деб олсак,

$$y = kx - ax^2 (1 + k^2) \tag{8}$$

тенгламани ҳосил қиламиз Бу тенглама вертикал ўқли координаталар бошидан ўтадиган ва тармоғи пастга қараган параболани аниқлайди. k нинг турли қийматлари учун ҳар хил траекториялар ҳосил бўлади. Демак, (8) тенглама тўпдан турли α бурчак остида отилган ва берилган бошланғич тезлиги v_0 бўлган снарядларнинг траекторияларидан иборат бўлган (260-расм) бир параметрли параболалар оиласининг тенгламасидир.

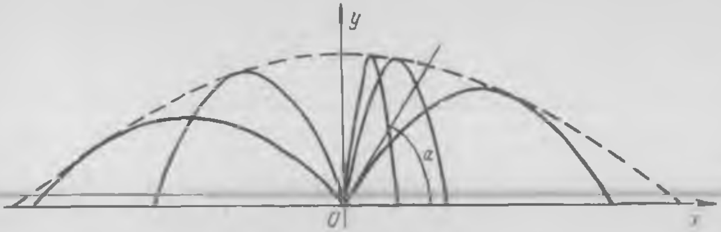
Бу параболалар оиласининг ўрамасини топамиз. (8) тенгламанинг иккала томонини k бўйича дифференциаллаймиз:

$$x - 2akx^2 = 0. \tag{9}$$

(8) ва (9) тенгламалардан k ни йўқотиб,

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

тенгламани ҳосил қиламиз.



260- расм

Бу тенглама учи $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ нуқтада бўлиб, ўқи Oy ўқ билан бир хил бўлган парабола тенгламасидир Бу парабола махсус нуқталарнинг геометрик ўрни бўла олмайди (чунки тенгламалари (8) бўлган параболаларнинг махсус нуқталари бўлмайди). Шундай қилиб,

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2$$

парабола траекториялар оиласининг ўрамаси бўлади. Бу параболадан ташқарида ётган нуқтанинг ҳеч бирига берилган тўпдан берилган v_0 тезлик билан отилган снаряд ета олмагани учун уни *хавфсизлик параболаси* дейилади.

5- мисол. $y^3 - (x - C)^2 = 0$ ярим кубик параболалар оиласининг ўрамаси топилсин.

Ечиш. Оиланинг берилган тенгламасини C параметр бўйича дифференциаллаймиз:

$$2(x - C) = 0.$$

$y^3 - (x - C)^2 = 0$ ва $2(x - C) = 0$ тенгламалардан C параметрни йўқотиб,

$$y = 0$$

эканини топамиз.

Ox ўқ махсус нуқталарнинг — биринчи хил қайтиш нуқталарнинг геометрик ўрнидир (261-расм). Ҳақиқатан ҳам, Cнинг қийматини тайинлаб,

$$y^3 - (x - C)^2 = 0$$

261- расм.

эгри чизиқнинг махсус нуқталарини топамиз. x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$F'_x = -2(x - C) = 0; \qquad F_y = 3y^2 = 0.$$

Юқоридаги учала тенгламани биргаликда ечиб, махсус нуқтанинг координаталарини топамиз: $x = C$, $y = 0$, шундай қилиб, берилган оиланинг ҳар бир эгри чизиғи Ox ўқда махсус нуқтага эга.

C параметр узлуксиз ўзгарганда махсус нуқталар бутун Ox ўқни тўлдиради.

6-мисол. Ушбу

$$(y - C)^2 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0 \tag{10}$$

оиланинг ўрамаси ва махсус нуқталарининг геометрик ўрни топилсин.

Ечиш. (10) тенгламанинг иккала томонини C бўйича дифференциаллаб,

$$-2(y - C) + \frac{2}{3}3(x - C)^2 = 0$$

ёки

$$y - C - (x - C)^2 = 0 \tag{11}$$

тенгликни топамиз. Энди (10) ва (11) тенгламалардан C параметрни йўқотамиз:

$$y - C = (x - C)^2.$$

$(y-C)$ нинг ифодасини оила тенгламасига қўйиб,

$$(x - C)^4 - \frac{2}{3}(x - C)^3 = 0$$

ёки

$$(x - C)^3\left[(x - C) - \frac{2}{3}\right] = 0$$

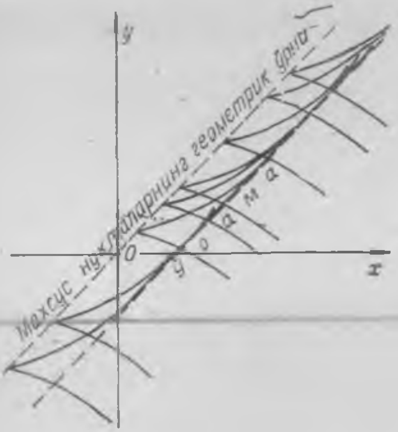
тенгликни ҳосил қиламиз; бундан C нинг мумкин бўлган иккита қийматини ва масаланинг буларга мос иккита ечимини ҳосил қиламиз.

Биринчи ечим:	Иккинчи ечим:
$C = x;$	$C = x - \frac{2}{3};$
шунинг учун (11) тенгликдан:	шунинг учун (11) тенгликдан:
$y - x - (x - x)^2 = 0$	$y - x + \frac{2}{3} - \left[x - x + \frac{2}{3}\right]^2 = 0$
ёки	ёки
$y = x.$	$y = x - \frac{2}{9}.$

Биз $y = x$ ва $y = x - \frac{2}{9}$ тўғри чизиқларни топдик. Булардан биринчиси махсус нуқталарнинг геометрик ўрни, иккинчиси эса ўрамадир (262-расм).

2-изоҳ. VI бобнинг 7-параграфида эгри чизиққа ўтказилган нормаль унинг эволютасига уринма бўлиши исбот қилинган эди. Демак, берилган эгри чизиққа ўтказилган нормаллар оиласи бир вақтнинг ўзида унинг эволютасига ўтказилган уринмалар оиласи ҳам бўлади.

Шундай қилиб, эгри чизиқнинг эволютаси бу эгри чизиқ нормаллари **оиласининг ўрамаси бўлади** (263- расм).



262- расм.

263- расм.

Бу эслатма эволюта топишнинг яна бир усулини кўрсатишга имконият беради: эволюта тенгламасини топиш учун дастлаб берилган эгри чизиқнинг барча нормаллари оиласини топиш ва ундан кейин бу оила ўрамасини топиш керак.

12- §. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг махсус ечимлари

Фараз қилайлик,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг умумий интеграли

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

бўлсин: (2) тенгламага мос интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси мавжуд деб фараз қиламиз. Бу ўрама ҳам (1) дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиғи бўлишини исбот қиламиз.

Ҳақиқатан ҳам, ўрама ўзининг ҳар бир нуқтаси билан оиланинг бирор эгри чизиғига уринади, яъни у билан умумий уринмага эга. Демак, ҳар бир умумий нуқтада ўрама билан оиланинг эгри чизиғи x, y, y' миқдорларнинг бир хил қийматига эга.

Лекин, оиланинг эгри чизиғи учун x, y, y' сонлар (1) тенгламани қаноатлантиради. Демак, шу тенгламанинг ўзини ўраманинг ҳар бир нуқтаси абсциссаси, ординатаси ва бурчак коэффициенти қаноатлантиради. Бу эса ўрама интеграл эгри чизиқ, унинг тенгламаси берилган дифференциал тенгламанинг ечими эканини билдиради.

Умуман айтганда, ўрама оилага тегишли эгри чизиқ бўлмагани учун унинг тенгламасини (2) умумий интегралдан C нинг ҳеч бир хусусий қийматида ҳосил қилиб бўлмайди. Дифференциал тенгламанинг умумий интегралидан C нинг ҳеч бир қийматида ҳам ҳосил бўлмайдиган ва графиги умумий ечимга кирган интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамасидан иборат бўлган ечим *дифференциал тенгламанинг махсус ечими* дейилади.

Ушбу умумий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

маълум бўлсин; бундан ва $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ тенгламадан C ни йўқотиб, $\psi(x, y) = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Агар бу функция дифференциал тенгламани қаноатлантирса (ва y (2) оилага тегишли бўлмаса), бу ҳолда y *махсус интеграл* бўлади.

Махсус ечимни тасвирловчи эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ҳеч бўлмаганда иккитадан интеграл эгри чизиқ ўтади, бошқача айтганда, махсус ечимнинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги бузилади.

Дифференциал тенглама ечимининг ягоналиги бузиладиган нуқта, яъни ўзидан энг камида иккита интеграл эгри чизиғи ўтадиган нуқта *махсус нуқта* деб аталади*). Демак, махсус ечим махсус нуқталардан иборат.

Мисол. Ушбу

$$y^2(1 + y'^2) = R^2 \tag{*}$$

тенгламанинг махсус ечими топилсин.

Ечиш. Тенгламанинг умумий интегралини топамиз. Тенгламани y' га нисбатан ечамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Бундан, интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

---

*) Ечим мавжудлик соҳасининг чегаравий нуқталари ҳам *махсус нуқталар* дейилади. Соҳанинг дифференциал тенгламанинг ягона интеграл эгри чизиги ўтадиган ички нуқтаси *оддий нуқта* дейилади.

Интеграл чизиқлар оиласи маркази абсциссалар ўқида бўлиб, радиуси R га тенг бўлган айланалар оиласи эканини кўриш осон. Эгри чизиқлар оиласининг ўрамалари $y = \pm R$ тўғри чизиқлар бўлади.

$y = \pm R$ функциялар (*) дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Демак, бу функция махсус интегралдир.

13- §. Клеро тенгламаси

Клеро тенгламаси деб аталган

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

тенгламани қараймиз. Бу тенглама ёрдамчи параметр киритиш билан осон интегралланади. Чунончи, $\frac{dy}{dx} = p$ деб олсак, (1) тенглама

$$y = xp + \psi(p) \tag{1'}$$

кўринишга келади,

$p = \frac{dy}{dx}$ x нинг функцияси эканини эътиборга олиб, кейинги тенгламанинг барча ҳадларини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{2}$$

ва

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{3}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

1) (2) тенгликни интеграллсак, $p = C(C = \text{const})$ бўлади. p нинг бу қийматини (1') тенгламага қўйиб, унинг

$$y = xC + \psi(C) \tag{4}$$

умумий интегралини топамиз; бу геометрик нуқтаи назардан тўғри чизиқлар оиласини тасвирлайди.

2) Агар (3) тенгламадан p ни x нинг функцияси каби топсак ва уни (1') тенгликка қўйсак, у ҳолда

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \tag{1''}$$

функция ҳосил бўлади; бу функция (1) тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатиш осон.

Интеграл чизиқлар оиласи маркази абсциссалар ўқида бўлиб, радиуси R га тенг бўлган айланалар оиласи эканини кўриш осон. Эгри чизиқлар оиласининг ўрамалари $y = \pm R$ тўғри чизиқлар бўлади.

$y = \pm R$ функциялар (*) дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Демак, бу функция махсус интегралдир.

13- §. Клеро тенгламаси

Клеро тенгламаси деб аталган

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

тенгламани қараймиз. Бу тенглама ёрдамчи параметр киритиш билан осон интегралланади. Чунончи, $\frac{dy}{dx} = p$ деб олсак, (1) тенглама

$$y = xp + \psi(p) \tag{1'}$$

кўринишга келади,

$p = \frac{dy}{dx}$ x нинг функцияси эканини эътиборга олиб, кейинги тенгламанинг барча ҳадларини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб,

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{2}$$

ва

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{3}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

1) (2) тенгликни интегралласак, $p = C(C = \text{const})$ бўлади. p нинг бу қийматини (1′) тенгламага қўйиб, унинг

$$y = xC + \psi(C) \tag{4}$$

умумий интегралини топамиз; бу геометрик нуқтаи назардан тўғри чизиқлар оиласини тасвирлайди.

2) Агар (3) тенгламадан p ни x нинг функцияси каби топсак ва уни (1′) тенгликка қўйсак, у ҳолда

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \tag{1''}$$

функция ҳосил бўлади; бу функция (1) тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатиш осон.

Ҳақиқатан ҳам, (3) тенгликка мувофиқ:

$$\frac{dy}{dx}=p+[x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=p.$$

Шунинг учун, (1″) функцияни (1) тенгламага қўйиб,

$$xp+\psi(p)=xp+\psi(p)$$

айниятни ҳосил қиламиз.

(1″) ечим (4) умумий интегралдан C нинг ҳеч бир қийматида ҳосил бўлмайди. Бу махсус ечимдир. Бу ечим

$$\left.\begin{aligned} y&=xp+\psi(p),\\ x+\psi'(p)&=0\end{aligned}\right\}$$

тенгламалардан C параметрни йўқотиш натижасида ёки

$$y=xC+\psi(C),$$
$$x+\psi_C'(C)=0$$

тенгламалардан C параметрни йўқотиш натижасида ҳосил бўлади. Демак, Клеро тенгламасининг махсус ечими (4) умумий интеграл билан берилган тўғри чизиқлар оиласининг ўрамасини аниқлайди.

Мисол.

$$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{a\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$$

тенгламанинг умумий ва махсус интеграллари топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламада $\frac{dy}{dx}$ нинг ўрнига C ни қўйсак,

$$y=xC+\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$$

умумий интеграл ҳосил бўлади. Махсус ечимни ҳосил қилиш учун кейинги тенгламани C бўйича дифференциаллаймиз:

$$x+\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}=0.$$

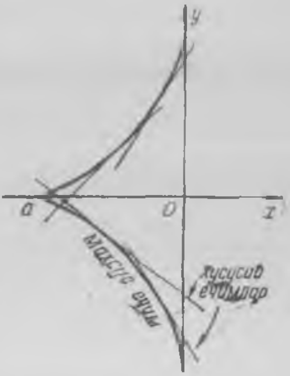
Махсус ечим (ўрама тенгламаси)

$$\left\{\begin{aligned} x&=-\frac{a}{(1+C^2)^{3/2}},\\ y&=\frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}\end{aligned}\right.$$

параметрик кўринишда ҳосил бўлади (бунда C параметр). C параметрни йўқотсак x ва y орасидаги муносабатни бевосита ҳосил қилишимиз мумкин. Ҳар бир тенгламанинг иккала томонини $\frac{2}{3}$-даражага кўтариб ва ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадма-ҳад қўшсак,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

махсус ечимни ҳосил қиламиз. Бу астроиданинг тенгламасидир. Аммо оиланинг ўрамаси (демак, махсус ечим ҳам) бутун астроида бўлмай, балки унинг чап ярмидан иборат (чунки, ўраманинг параметрик тенгламаларидан $x \leqslant 0$ экани кўриниб турибди) (264-расм).



264- расм.

14- §. Лагранж тенгламаси

Лагранж тенгламаси деб

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{1}$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда φ ва ψ лар $\frac{dy}{dx}$ нинг маълум функциялари.

Бу тенглама y ва x га нисбатан чизиқли тенглама. Ўтган параграфда кўрилган Клеро тенгламаси Лагранж тенгламасининг $\varphi(y') \equiv y'$ бўлгандаги хусусий ҳолидир. Лагранж тенгламасини интеграллаш Клеро тенгламасини интеграллаш каби ёрдамчи p параметр киритиш усули билан бажарилади.

$$y' = p$$

деб олсак, дастлабки тенглама бундай

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{1'}$$

кўринишда ёзилади.

x га нисбатан дифференциаллаб,

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \tag{1''}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламадан баъзи ечимларни бирданига топиш мумкин:

бу тенглама p нинг

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай ўзгармас $p = p_0$ қийматида айниятга айланади.

Ҳақиқатан ҳам, p нинг ўзгармас қийматида ҳосила $\frac{dp}{dx} \equiv 0$, ва $(1'')$ тенгламанинг иккала томони нолга айланади.

Ҳар бир $p = p_0$, яъни $\frac{dy}{dx} = p_0$ қийматга мос бўлган ечим x нинг чизиқли функцияси бўлади (чунки $\frac{dy}{dx}$ ҳосила фақат *чизиқли* функциялар учун ўзгармас миқдор бўлади). Бу функцияни топиш учун $(1')$ тенгликка $p = p_0$ қийматни қўйиш етарли:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0).$$

Агар бу ечим умумий интегралдан ихтиёрий ўзгармас миқдорнинг ҳеч бир қийматида ҳосил бўлмаса, у ҳолда бу *махсус ечим* бўлади.

Энди *умумий ечимни* топамиз. Бунинг учун $(1'')$ тенгламани

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

кўринишда ёзамиз ва x ни p нинг функцияси деб қараймиз. Бу ҳолда ҳосил қилинган тенглама p нинг x функциясига нисбатан чизиқли дифференциал тенглама бўлади.

Уни ечиб

$$x = \omega(p, C) \tag{2}$$

эканини топамиз. $(1')$ ва (2) тенгламалардан p параметрни йўқотсак, (1) тенгламанинг умумий интеграли

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

кўринишда ҳосил бўлади.

Мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$y = xy'^2 + y'^2 \tag{1}$$

$y' = p$ деб олсак,

$$y = xp^2 + p^2 \tag{1'}$$

бўлади x га нисбатан дифференциаллаб,

$$p = p^2 + [2xp + 2p]\frac{dp}{dx} \tag{1''}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Махсус ечимларни топамиз. $p_0 = 0$ ва $p_1 = 1$ бўлганда $p = p^2$ бўлгани учун ечимлар чизиқли функциялардан иборат бўлади [$(1')$ га қаранг]:

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ яъни } y = 0$$

ва

$$y = x + 1.$$

Бу функциялар хусусий ёки махсус ечим бўлишини умумий интегрални топганимиздан кейингина биламиз. Умумий интегрални топиш учун (I″) тенгламани

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{2}{1-p}=\frac{2}{1-p}$$

кўринишда ёзамиз ва x ни эркли ўзгарувчи p нинг функцияси деб қараймиз. Ҳосил қилинган (x га нисбатан) чизиқли тенгламани интеграллаймиз:

$$x=-1+\frac{c^2}{(p-1)^2}. \qquad \text{(II)}$$

(I′) ва (II) тенгламалардан p ни йўқотсак,

$$y=(C+\sqrt{x+1})^2$$

умумий интеграл ҳосил бўлади.

$$y=0$$

дастлабки тенгламанинг махсус интеграли бўлади, чунки бу ечим умумий интегралдан C нинг ҳеч бир қийматида ҳосил бўлмайди.

$y=x+1$ функция эса махсус ечим бўлмай, балки хусусий ечим булади, чунки бу ечим умумий ечимдан $C=0$ бўлганда ҳосил бўлади.

15-§. Ортогонал ва изогонал траекториялар

Бир параметрли эгри чизиқлар оиласи

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0 \qquad \text{(I)}$$

берилган бўлсин.

Берилган (I) оиланинг барча эгри чизиқларини ўзгармас бурчак остида кесиб ўтувчи чизиқлар *изогонал траекториялар* деб аталади. Агар бу бурчак тўғри бўлса, у ҳолда траекториялар *ортогонал траекториялар* деб аталади.

Ортогонал траекториялар. Ортогонал траекторияларнинг тенгламаларини топамиз. Ушбу

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0$$

ва

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

тенгламалардан C параметрни йўқотиб, берилган эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасини ёзамиз.

Бу дифференциал тенглама

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad \text{(I′)}$$

кўринишда бўлсин.

Бунда $\frac{dy}{dx}$ оила эгри чизиғининг $M(x,\ y)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти. $M(x,\ y)$ нуқта орқали ўтувчи ортогонал траектория оиланинг мос эгри чизиғига перпендикуляр бўлгани сабабли ортогонал траекторияга ўтказилган уринманинг $\frac{dy_T}{dx}$ бурчак коэффициенти $\frac{dy}{dx}$ билан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_T}{dx}} \tag{2}$$

муносабат орқали боғланган (265- расм).

Бу ифодани (1′) тенгламага қўйиб ва T индексни ёзмасдан ихтиёрий (x, y) нуқта координаталари билан бу нуқтадаги ортогонал траекториянинг бурчак коэффициенти орасидаги муносабатни, яъни ортогонал траекторияларнинг

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0 \tag{3}$$

дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг умумий интеграли

$$\Phi_1(x, y, C) = 0$$

ортогонал траекториялар оиласини беради.

265- расм.

Ортогонал траекториялар билан, масалан, суюқликнинг текисликда оқиши масаласини қараш вақтида иш кўришга тўғри келади.

Суюқлик текисликда шундай оқадики, Oxy текисликнинг ҳар бир нуқтасида ҳаракатнинг $v(x, y)$ тезлик вектори маълум бўлади деб фараз қиламиз. Агар бу вектор нуқтанинг текисликда олган вазиятигагина боғлиқ бўлиб, вақтга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ҳаракат *стационар* ёки турғунлашган ҳаракат дейилади. Биз ана шундай ҳаракатни қараймиз. Бундан ташқари тезликлар потенциали мавжуд деб, яъни шундай $u(x, y)$ функция мавжудки, $v(x, y)$ векторнинг координата ўқларидаги $v_x(x, y)$ ва $v_y(x, y)$ проекциялари $u(x, y)$ функциядан x ва y бўйича олинган хусусий ҳосилаларига тенг деб фараз қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = v_y. \tag{4}$$

$$u(x, y) = C \tag{5}$$

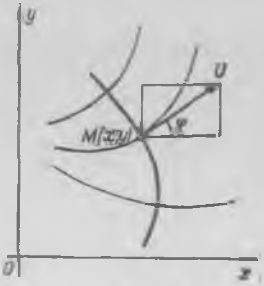
оиланинг чизиқлари *эквипотенциал чизиқлар* (яъни тенг потенциалли чизиқлар) деб аталади.

Барча нуқталаридаги уринмалари $v(x, y)$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлган чизиқлар *оқим чизиқлари* дейилади ва ҳаракатдаги нуқталар траекториясини беради.

Оқим чизиғи эквипотенциал чизиқлар (266- расм) оиласининг ортогонал траекторияси эканини кўрсатамиз. φ бурчак v тезлик векторнинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчаги бўлсин. Бу ҳолда (4) муносабатларга асосан:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = |v| \cos \varphi;$$

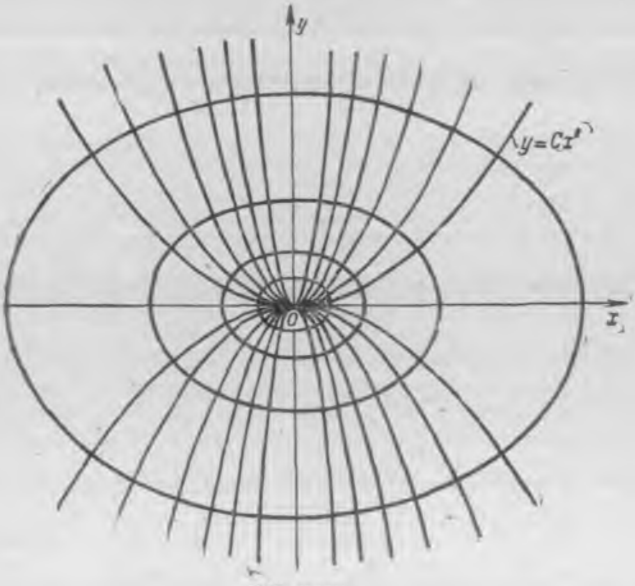
$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = |v| \sin \varphi.$$



266- расм.

Бундан оқим чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}}. \qquad (6)$$



267- расм.

Эквипотенциал чизиққа ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини (5) муносабатни x га нисбатан дифференциаллаш билан топилади:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

бундан

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}. \tag{7}$$

Шундай қилиб, эквипотенциал чизиққа ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти миқдори ва ишораси оқим чизиғига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентига тескаридир. Бундан эквипотенциал чизиқлар билан оқим чизиқларининг ўзаро ортогоналлиги келиб чиқади.

Электр ёки магнит майдонини олсак, бу майдонларнинг куч чизиқлари эквипотенциал чизиқлар оиласининг ортогонал траекториялари бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$y=Cx^2$$

параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин.

Ечиш. Оиланинг дифференциал тенгламасини ёзамиз:

$$y'=2Cx.$$

Бундан ва оиланинг берилган тенгламасидан C ни йўқотсак,

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ерда y' ни $-\frac{1}{y'}$ билан алмаштириб, ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$-\frac{1}{yy'}=\frac{2}{x}$$

ёки

$$ydy=-\frac{xdx}{2}.$$

Бунинг умумий интеграли

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=C^2$$

бўлади. Демак, берилган параболалар оиласининг ортогонал траекториялари ярим ўқлари $a=2C$, $b=C\sqrt{2}$ бўлган эллипслар оиласи бўлади (267-расм).

Изогонал траекториялар. Траекториялар берилган оила эгри чизиқларини α бурчак остида кесиб ўтсин, бунда $\operatorname{tg}\alpha=k$.

Оила эгри чизиғига ўтказилган уринманинг $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ бурчак коэффициенти (268- расм) ва изогонал траекторияга ўтказилган уринманинг $\frac{dy_T}{dx} = \operatorname{tg}\psi$ бурчак коэффициенти ўзаро

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\psi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k\frac{dy_T}{dx} + 1} \qquad (2')$$

муносабати билан боғланган.

Бу ифодани (1′) тенгламага қўйиб ва T индексни ёзмасдан изогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

2- мисол. Берилган оила чизиқларини тангенси k га тенг бўлган α бурчак остида кесиб ўтувчи

$$y = Cx \qquad (8)$$

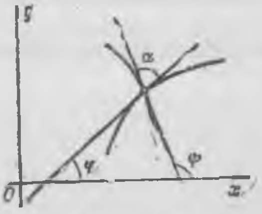
тўғри чизиқлар оиласининг изогонал траекториялари топилсин.

Ечиш. Берилган оиланинг дифференциал тенгламасини ёзамиз (8) тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dy}{dx} = C.$$

Иккинчи томондан уша тенгламанинг ўзидан

$$C = \frac{y}{x}.$$



268- расм.

Демак, берилган оиланинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

кўринишда бўлади. (2′) муносабатдан фойдаланиб, изогонал траекторияларнинг

$$\frac{\frac{dy_T}{dx} - k}{k\frac{dy_T}{dx} + 1} = \frac{y}{x}$$

дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз.

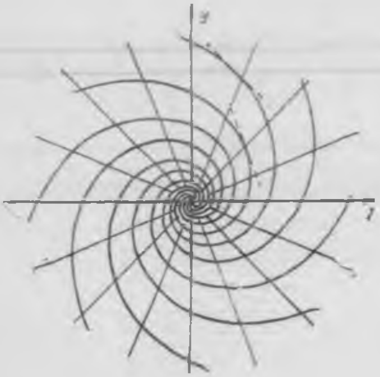
Бунда T индексни ёзмасак:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k + \frac{y}{x}}{1 - k\frac{y}{x}}$$

бўлади.

Бу бир жинсли тенгламани интеграллсак,

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \ln C \tag{9}$$



269- расм.

умумий интеграл ҳосил бўлади; бу эса изогонал траекториялар оиласини аниқлайди. Бу оилага қандай эгри чизиқлар киришини аниқлаш учун қутб координаталар системасига ўтамиз:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$$

Бу ифодаларни (9) тенгликка қўйиб,

$$\ln\rho = \frac{1}{k}\varphi + \ln C$$

ёки

$$\rho = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, изогонал траекториялар оиласи логарифмик спираллар оиласидан иборатдир (269- расм).

16-§. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар (умумий тушунчалар)

n- тартибли дифференциал тенгламани символик равишда

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

кўринишда ёзиш ёки агар буни n- тартибли ҳосилага нисбатан ечиб бўлса,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1'}$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини юқорида (2- § га қаранг) кўрсатиб ўтган эдик. Бу бобда фақат юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечиш мумкин бўлган юқори тартибли тенгламаларни қараймиз. Бундай тенгламалар учун биринчи тартибли тенгламанинг ечими ҳақидаги теоремага ўхшаш ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

тенгламада $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *функция ва унинг* y, $y', \dots, y^{(n-1)}$ *аргументлари бўйича олинган хусусий ҳосилалари* $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0$, $\dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ *қийматларни ўз ичига олган бирор соҳадаги узлуксиз функциялардан иборат бўлса, бу ҳолда тенгламанинг*

$$\left.\begin{aligned} & y_{x=x_0} = y_0, \\ & y_{x=x_0} = y_0, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ *ечим мавжуд ва биргинадир.* Бу шартлар *бошланғич шартлар* деб аталади. Теореманинг исботини бу китобда бермаймиз.

Агар иккинчи тартибли $y'' = f(x_1, y, y')$ тенгламани олсак, $x = x_0$ бўлганда

$$y = y_0, \quad y' = y_0'$$

шартлар бошланғич шарт бўлади, бунда x_0, y_0, y_0' — маълум сонлардир. Бу шартларнинг геометрик маъноси қуйидагича: текисликнинг маълум (x_0, y_0) нуқтасидан биргина эгри чизиқ ўтади, бу чизиққа шу нуқтадан ўтказилган уринма оғмалик бурчагининг тангенси берилган y_0' га тенг бўлади. Бундан x_0 ва y_0 ўзгармас бўлганда, y_0' га турли қийматлар бериб, шу нуқтадан ўтадиган оғмалик бурчаклари турлича бўлган чексиз кўп интеграл эгри чизиқлар тўпламини ҳосил қиламиз, деган натижа келиб чиқади.

Энди n-тартибли тенгламанинг умумий ечими ҳақида тушунча киритамиз.

Таъриф. n-тартибли дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб n та $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармас миқдорга боғлиқ бўлган

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

функцияга айтамизки, бу функция:

а) $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармас миқдорларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам тенгламани қаноатлантиради;

б) берилган

$$\begin{aligned} & y_{x=x_0} = y_0, \\ & y'_{x=x_0} = y_0', \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

бошланғич шартларда $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармас миқдорларни шундай танлаб олиш мумкинки, $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ функция бу бошланғич шартларни қаноатлантирадиган бўлади (бунда x_0, y_0, y_0', . . ., $y_0^{(n-1)}$ бошланғич қийматлар ечимнинг мавжудлиги ҳақидаги теореманинг шартлари бажариладиган соҳага тегишли, деб фараз қилинади).

Умумий ечимни ошкормас ҳолда аниқловчи $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ кўринишдаги муносабат дифференциал тенгламанинг *умумий интеграли* дейилади.

Умумий ечимдан C_1, C_2, . . ., C_n ўзгармас миқдорларнинг тайин қийматларида ҳосил бўладиган ҳар қандай функция *хусусий ечим* деб аталади. Хусусий ечимнинг графиги берилган дифференциал тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* дейилади.

n- тартибли дифференциал тенгламани ечиш (интеграллаш):

1) унинг умумий ечимини (агар бошланғич шартлар берилмаган бўлса) топишни ёки

2) берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (агар бундай шартлар берилган бўлса) хусусий ечимни топишни билдиради.

Бундан кейинги параграфларда n- тартибли турли дифференциал тенгламаларни ечиш методлари баён этилади.

17-§. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама

Энг содда n- тартибли тенглама

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама бўлади.

Бу тенгламанинг умумий интегралини топамиз.

Тенгламанинг ўнг ва чап томонини x бўйича интеграллаб ва $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ эканини эътиборга олиб,

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

ифодани ҳосил қиламиз, бунда x_0 x нинг тайинланган ҳар қандай қиймати, C_1 эса интеграллаш ўзгармаси.

Яна бир марта интеграллаймиз:

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx \right) dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Интеграллашни шундай давом эттириб, ниҳоят (n марта интеграллашдан кейин) умумий интегралнинг

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \ldots dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n$$

ифодасини ҳосил қиламиз.

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad y'_{x=x_0} = y'_0, \; \ldots, \quad y^{(n-1)}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш учун

$$C_n = y_0, \quad C_{n-1} = y'_0, \; \ldots, \quad C_1 - y_0^{n-1}$$

деб олиш етарлидир.

1-мисол. Ушбу

$$y'' = \sin(kx)$$

тенгламанинг умумий интеграли ва унинг

$$y_{x=0} = 0, \qquad y'_{x=0} = 1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечими топилсин.

Ечиш.

$$y' = \int_0^x \sin kx\,dx + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1.$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k}\right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2,$$

яъни

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Бу тенгламанинг умумий интегралидир. Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш учун C_1 ва C_2 нинг мос қийматларини топиш кифоя

$y'_{x=0} = 0$ шартдан $C_2 = 0$ эканини топамиз.

$y'_{x=0} = 1$ шартдан $C_1 = 1$ эканини топамиз.

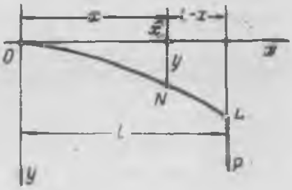
Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x\left(\frac{1}{k} + 1\right)$$

кўринишда бўлади.

Бундай дифференциал тенгламалар балкаларнинг эгилиши назариясида учраб туради.

2-мисол. Текис тақсимланган ва тўпланган ташқи кучлар (юк, нагрузка) таъсири остида эгилувчи эластик призматик балкани қараймиз. Ox ўқни балканинг деформацияланмаган ҳолатидаги ўқи бўйлаб горизонтал, Oy ўқни эса пастга вертикал йўналтирамиз (270-расм).



270-расм.

Балкага таъсир этувчи ҳар бир куч (масалан, балканинг оғирлиги, таянчлар реакцияси) балканинг бирор кундаланг кесимига нисбатан берилган кесимдан куч қўйилган нуқтагача масофа билан шу кучнинг кўпайтмасига тенг моментга эгадир. Берилган кесимнинг бир томонига жойлашган балканинг x абсциссали қисмига таъсир этувчи барча кучларнинг $M(x)$ моментлари йиғиндиси балканинг берилган кесимга нисбатан *эгувчи моменти* дейилади. Материаллар қаршилиги курсида балканинг эгувчи моменти $\frac{EI}{R}$ га тенг экани исбот этилади, бунда E — балканинг материалига боғлиқ бўлган эластиклик модули; I — кўндаланг кесим юзининг оғирлик марказидан олинган ўтувчи горизонтал чизиққа нисбатан балка кўндаланг кесими юзининг инерция моменти. R — эгилган балка ўқининг эгрилик радиуси бўлиб, у

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

формула билан ифодаланади (VI боб, 6-§).

Шундай қилиб, балка эгилган ўқнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI} \tag{2}$$

кўринишда бўлади.

Агар деформацияни кичик деб ва эгилиш вақтида балка ўқига ўтказилган уринмалар Ox ўқ билан жуда кичик бурчак ташкил қилади десак, бу ҳолда кичик миқдорнинг y'^2 квадратини эътиборга олмасдан

$$R = \frac{1}{y''}$$

деб ёзишимиз мумкин.

Бу ҳолда эгилган балканинг дифференциал тенгламаси

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \tag{2'}$$

кўринишда бўлади. Бу эса (1) кўринишдаги тенгламадир.

3-мисол Балканинг O учи қўзғалмайдиган қилиб маҳкамланган. Балканинг маҳкамланган учидан l масофада иккинчи учи L га тўпланган вертикал P куч таъсир қилади (270-расм). Балка оғирлигини эътиборга олмаймиз.

$N(x)$ нуқтадаги кесимни қараймиз. Бу масалада N кесимга нисбатан эгилувчи момент

$$M(x) = (l-x)P$$

бўлади. (2′) дифференциал тенглама

$$y'' = \frac{P}{EI}(l-x)$$

кўринишни олади. Бошланғич шартлар: $x=0$ бўлганда y эгилиш оралиғи нолга тенг ва балканинг эгилган ўқига ўтказилган уринма Ox ўқ билан бир хил, яъни $y_{x=0}=0$, $y'_{x=0}=0$. Тенгламани интеграллаб,

$$y' = \frac{P}{EI}\int_0^x (l-x)dx = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right);$$

$$y = \frac{P}{2EI}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{3}$$

эканини топамиз. Хусусий ҳолда (3) формуладан балканинг учидаги эгилиш оралиғи аниқланади:

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

18-§. Биринчи тартибли тенгламаларга келтириладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи типлари. Иккинчи космик тезлик ҳақида масала

I. Ушбу

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама номаълум y функцияни ошкор ҳолда ўз ичига олмайди.

Ечиш. $\frac{dy}{dx}$ ҳосилани p билан белгилаймиз, $\frac{dy}{dx} = p$. Бу ҳолда $\frac{d^2y}{ax^2} = \frac{dp}{dx}$.

Ҳосилаларнинг бу ифодаларини (1) тенгламага қўйиб, x нинг номаълум p функцияга нисбатан биринчи тартибли

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, унинг

$$p = p(x, C_1)$$

умумий ечимини топамиз, ундан кейин $\frac{dy}{dx} = p$ муносабатдан (1) тенгламанинг

$$y = \int p(x, C_1)\,dx + C_2$$

умумий интегралини топамиз.

1-мисол. Занжир чизиқнинг

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

дифференциал тенгламасини қараймиз (1-параграфга қаранг).

$$\frac{dy}{dx} = p$$

деб оламиз; у ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

демак, x нинг ёрдамчи p функциясига нисбатан биринчи тартибли

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + p^2}$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

бундан

$$ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$p = sh\left(\frac{x}{a} + C_1\right).$$

Аммо $p = \frac{dy}{dx}$ бўлгани учун, кейинги муносабат изланаётган y функцияга нисбатан дифференциал тенгламани ифодалайди. Уни интегралласак, занжир чизиқнинг тенгламаси ҳосил бўлади (1-параграфга қаранг):

$$y = sh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2.$$

Ушбу

$$y_{x=0} = a, \qquad y'_{x=0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топамиз.

Иккинчи шарт $C_1 = 0$ биринчи шарт $C_2 = 0$ ни беради.

Натижада

$$y = a\ ch(x/a)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Шундай усул билан

$$y^{(n)} = f(x,\ y^{(n-1)})$$

тенгламани ҳам интеграллаш мумкин.

$y^{(n-1)} = p$ деб олиб, p ни аниқлаш учун биринчи тартибли

$$\frac{dp}{dx} = f(x,\ p)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бундан p ни x нинг функцияси каби аниқлаб, $y^{(n-1)} = p$ муносабатдан y ни топамиз (17-§ га қаранг).

II. x эркли ўзгарувчини ошкор ҳолда ўз ичига олмаган

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \tag{2}$$

кўринишдаги тенглама. Бу тенгламани ечиш учун яна

$$\frac{dy}{dx} = p \tag{3}$$

деб оламиз. Аммо энди p ни олдингидек x нинг функцияси эмас, балки y нинг функцияси деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

$\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{d^2y}{dx^2}$ ҳосилаларнинг ифодаларини (2) тенгламага қўйиб, ёрдамчи p функцияга нисбатан биринчи тартибли

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,\ p) \tag{4}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Буни интеграллаб p ни y ва ихтиёрий C_1 ўзгармас миқдорнинг функцияси каби аниқлаймиз:

$$p=p(y,\ C_1).$$

Бу қийматни (3) муносабатга қўйсак, x нинг y функцияси учун биринчи тартибли

$$\frac{dy}{dx}=p(y,\ C_1)$$

дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Ўзгарувчиларни ажратиб,

$$\frac{dy}{p(y,\ C_1)}=dx$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламани интеграллаб, дастлабки тенгламанинг

$$\Phi(x,\ y, C_1,\ C_2)=0$$

умумий интегралини топамиз.

2-мисол. Ушбу

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}$$

тенгламанинг умумий интеграли топилсин.

Ечиш. p ни y нинг функцияси эканини билган ҳолда $p=\frac{dy}{dx}$ деб оламиз. Бу ҳолда $y''=p\frac{dp}{dy}$ бўлади ва биз ёрдамчи p функция учун биринчи тартибли тенглама ҳосил қиламиз:

$$3p\frac{dp}{dy}=y^{-\frac{5}{3}}.$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$p^2=C_1-y^{-\frac{2}{3}},\quad \text{ёки}\quad p=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}.$$

Аммо $p=\frac{dy}{dx}$, демак, y ни аниқлаш учун

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}}=dx\quad \text{ёки}\quad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}=dx$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан:

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}}.$$

Кейинги интегрални ҳисоблаш учун

$$C_1 y^{2/3} - 1 = t^2$$

алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{1/2}}; \qquad dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}}\, dt.$$

Демак,

$$\int \frac{y^{1/3}\,dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t}\, dt = \frac{3}{C_1^2}\left(\frac{t^3}{3} + t\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}\, (C_1 y^{2/3} + 2).$$

Охирги натижа

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}\, (C_1 y^{2/3} + 2)$$

эканини топамиз.

3-мисол. Нуқта Ox ўқ бўйлаб фақат нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлган куч таъсири остида ҳаракат қилади деб фараз қиламиз. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

$t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = v_0$ бўлсин.

Тенгламанинг иккала томонини $\frac{dx}{dt}dt$ га кўпайтирамиз ва 0 дан t гача чегарада интеграллаймиз:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\, dx$$

ёки

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left[- \int_{x_0}^{x} F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = \text{const}.$$

Кейинги тенгликнинг биринчи қўшилувчиси ҳаракатдаги нуқтанинг кинетик энергияси, иккинчи қўшилувчи потенциал энергиясидир. Ҳосил қилинган тенгликдан кинетик ва потенциал энергиялар йиғиндиси бутун ҳаракат давомида ўзгармас миқдордир деган натижа келиб чиқади.

Математик маятник ҳақида масала. Массаси m бўлган моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида вертикал текисликда ётувчи L айлана бўйлаб ҳаракат қилсин. Қаршилик кучларини (яъни ишқаланиш кучи, ҳавонинг қаршилик кучи ва ҳоказоларни) эътиборга олмасдан нуқта ҳаракатининг тенгламасини топамиз. Координаталар бошини айлананинг энг пастки нуқтасига жойлаштирамиз, Ox ўқни айланага ўтказилган уринма бўйича йўналтирамиз (271- расм).

Айлана радиусини l билан, координаталар бошидан m масса жойлашган ўзгарувчи M нуқтагача бўлган ёй узунлигини s билан белгилаймиз, аммо бу узунликни тегишли ишора билан оламиз (агар M нуқта O нуқтадан ўнгда бўлса, $s > 0$, агар M нуқта O дан чапда бўлса $s < 0$).

Бизнинг вазифамиз s билан t орасидаги муносабатни топишдан иборат. mg оғирлик кучини тангенциал ва нормал ташкил этувчиларга ажратамиз. Булардан биринчиси — $mg \sin\varphi$ бўлиб, ҳаракатни вужудга келтиради, иккинчиси эса m масса ҳаракат қиладиган эгри чизиқнинг реакцияси таъсирида йўқолади.

Шундай қилиб, ҳаракат тенгламаси

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi$$

кўринишда бўлади. Аммо айлана учун бурчак $\varphi = \frac{s}{l}$ бўлгани сабабли

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\frac{s}{l}$$

271- расм.

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу II тип дифференциал тенгламадир (чунки эркли t ўзгарувчини ўз ичига ошкор ҳолда олмайди).

Тенгламани тегишли усул билан интеграллаймиз:

$$\frac{ds}{dt} = P; \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{ds}P.$$

Демак,

$$p\frac{dp}{ds} = -\ g\sin\frac{s}{l}$$

ёки

$$pdp = -g\sin\frac{s}{l}ds$$

бундан

$$p^2 = 2gl\cos\frac{s}{l} + C_1,$$

M нуқта оғадиган энг катта ёй узунлигини s_0 билан белгилаймиз. $s = s_0$ бўлганда нуқта ҳаракатининг тезлиги нолга тенг:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0} = P\Big|_{s=s_0} = 0.$$

Бу C_1 ни аниқлаш учун имкон беради:

$$0 = 2gl\cos\frac{s_0}{l} + C_1 \qquad \text{бундан} \quad C_1 = -2gl\cos\frac{s_0}{l}.$$

Шунинг учун

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + 2gl\left(\cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}\right).$$

Кейинги ифодага косинуслар айирмаси формуласини татбиқ этамиз:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gl\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l} \tag{5}$$

ёки*)

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}. \tag{6}$$

Бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl}dt. \tag{7}$$

Ҳозирча $s \neq s_0$ деб фараз қилсак, касрнинг махражи нолдан фарқли бўлади˙ Агар $t = 0$ бўлганда $s = 0$ десак, (7) тенгликдан

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl}t \tag{8}$$

муносабат ҳосил бўлади. Бу тенглик s билан t орасидаги боғланишни беради. Чап томондаги интеграл элементар функциялар билан ифодаланмайди, t нинг s функцияси ҳам элементар функциялар билан ифодаланмайди. Қўйилган масалани тақрибий кўриб чиқамиз: $\frac{s_0}{l}$ ва $\frac{s}{l}$ бурчакларни кичик бурчаклар дейлик. $\frac{s+s_0}{2l}$ ва $\frac{s_0-s}{2l}$ бурчаклар $\frac{s_0}{l}$ бурчакдан катта бўла олмайди. (6) тенгламада бурчаклар синусларини ўша бурчакларнинг ўзи билан алмаштирамиз:

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\frac{s+s_0}{2l}\,\frac{s_0-s}{2l}}$$

ёки

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{(s_0^2-s^2)}. \tag{6'}$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз (ҳозирча $s \neq s_0$ деб фараз қиламиз):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}dt. \tag{7'}$$

---

*) Биз илдиз олдида плюс ишора оламиз. Масалани ечгандан кейин берилган эслатмадан минус ишора олинадиган ҳолни қараб чиқиш учун эҳтиёж йўқ экани келиб чиқади.

Яна $t=0$ бўлганда $s=0$ деб ҳисоблаймиз. Кейинги тенгламани интеграллаймиз:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{8'}$$

ёки

$$\arcsin\frac{s}{s_0}=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

бундан

$$s=s_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{9}$$

Изоҳ. Масалани ечишда биз $s\neq s_0$ деб олган эдик. Лекин бевосита ўрнига қўйиш йўли билан /9/ функция t нинг ҳар қандай қийматида ҳам (6) тенгламанинг ечими бўлишига ишонч ҳосил қила оламиз.

(9) ечим (5) тенгламанинг тақрибий ечими эканини эслатиб ўтамиз, чунки биз (6) тенгламани тақрибий (6′) тенглама билан алмаштирган эдик.

(9) тенглик M нуқта (бу нуқтани маятникнинг учи деб қараш мумкин) тебраниш даври $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ бўлган гармоник тебранишни бажаришини кўрсатади. Бу давр тебранишнинг s_0 амплитудасига боғлиқ эмас.

4-мисол. Иккинчи космик тезлик ҳақида масала.

Жисм Ерга қайтиб тушмаслиги учун уни қандай энг кичик тезлик билан юқорига вертикал ҳолатда отиш керак? Ҳавонинг қаршилиги ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Ернинг массасини M билан, отилган жисм массасини m билан белгилаймиз. Ньютоннинг тортишиш қонунига мувофиқ m жисмга таъсир этувчи (f) тортишиш кучи:

$$f=k\,\frac{M\cdot m}{r^2},$$

бундаги r — Ернинг маркази билан отилган жисмнинг оғирлик маркази орасидаги масофа, k — гравитацион доимий.

Юқорида айтилган массаси m бўлган жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2}=-k\,\frac{M\cdot m}{r^2}$$

ёки

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M}{r^2} \tag{10}$$

бўлади.

Биз бунда минус ишора олганимизнинг сабаби масалада тезланишнинг манфийлигидир. (10) дифференциал тенглама (2) кўринишдаги тенгламадан иборат. Бу тенгламани қуйидаги бошланғич шартларга асосан ечамиз:

$$t=0 \text{ бўлганда } r=R,\ \frac{dr}{dt}=v_0.$$

Бунда R—Ернинг радиуси, v_0— отилиш тезлиги.

$$\frac{dr}{dt}=v,\qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}=\frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt}=v\,\frac{dv}{dr}$$

деб белгилаймиз, бунда v_0 —ҳаракат тезлиги. (10) тенгламага бу ифодаларни қўямиз:

$$v\frac{dv}{dr}=-k\frac{M}{r^2}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз

$$vdv=-kM\frac{dr}{r^2}.$$

Бу тенгламани интеграллаб,

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+C_1 \tag{11}$$

эканини топамиз. Ер сиртида ($r=R$) да $v=v_0$ бўлишидан фойдаланиб, C_1 ни топамиз:

$$\frac{v_0^2}{2}=kM\frac{1}{R}+C_1,$$

ёки

$$C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

C_1 нинг топилган бу қийматини (11) тенгликка қўямиз:

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}$$

ёки

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{12}$$

Шартга кўра жисм ҳаракатининг тезлиги ҳамма вақт мусбат, яъни $\frac{v^2}{2}>0$ бўлиши керак. Аммо $\frac{kM}{r}$ миқдор r чексиз ўсиб борганда ҳар қанча кичик бўлиб қоладиган миқдор бўлгани учун $\frac{v^2}{2}>0$ шарт k нинг ҳар қандай қийматида ҳам фақат

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}>0 \tag{13}$$

ёки

$$v_0>\sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

тенгсизлик ўринли бўлгандагина бажарилади. Демак, энг кичик тезлик

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}} \tag{14}$$

тенглик билан аниқланади, бунда

$$k=6{,}66\cdot10^{-8}\frac{см^3}{г\cdot сек^2},\qquad R=63\cdot10^7 см.$$

Ер сиртида ($r = R$ да) оғирлик кучининг тезланиши $g(g = 981 \frac{см}{сек^2})$ га тенг бўлади. Бунга асосан (10) тенгликдан

$$g = k\frac{M}{R^2} \qquad \text{ёки} \qquad M = \frac{gR^2}{k}.$$

M нинг бу қийматини (14) формулага қўйиб, ушбу қийматни топамиз:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11{,}2 \cdot 10^5 \frac{см}{сек} = 11{,}2 \frac{км}{сек}.$$

19- §. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламани интеграллашнинг график усули

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг геометрик маъносини аниқлаймиз. Ушбу

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

тенглама берилган бўлсин.

Эгри чизиққа уринма Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчакни φ билан белгилаймиз; бу ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{2}$$

Иккинчи тартибли ҳосиланинг геометрик маъносини билиш учун эгри чизиқнинг маълум нуқтасидаги*) эгрилик радиусини аниқловчи формулани эсга туширамиз:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Бундан

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{R}.$$

Аммо

$y' = \operatorname{tg}\varphi,\ 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \sec^2\varphi, (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = |\sec^3\varphi| = \frac{1}{|\cos^3\varphi|}$

бўлгани учун

$$y'' = \frac{1}{R|\cos^3\varphi|}. \tag{3}$$

Энди (1) тенгламага y ва y'' нинг топилган ифодаларини қўйсак:

$$\frac{1}{R|\cos^2\varphi|} = f(x, y, tg\varphi)$$

---

*) Биз ҳозиргача ҳамма вақт эгрилик радиусини мусбат сон деб келдик, лекин бу параграфда эгрилик радиуси мусбат ҳам, манфий ҳам бўлади, яъни эгри чизиқ қавариқ бўлса ($y'' < 0$), эгрилик радиуси манфий $R < 0$, агар эгри чизиқ ботиқ бўлса ($y'' > 0$) радиусини мусбат ($R > 0$) деб ҳисоблаймиз.

ёки

$$R = \frac{1}{|\cos^3\varphi| \cdot f(x, y, \mathrm{tg}\varphi)}. \qquad (4)$$

Бундан кўринадики, агар интеграл чизиқда нуқтанинг координаталари ва бу нуқтада уринманинг йўналиши берилган бўлса, у ҳолда иккинчи тартибли дифференциал тенглама интеграл чизиқнинг эгрилик радиуси катталигини аниқлайди.

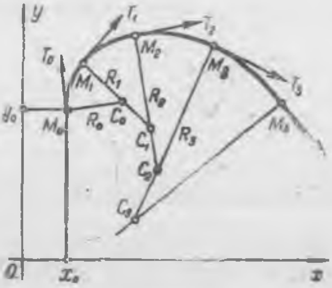
Юқорида баён этилганлардан айлана ёйларидан ташкил топган силлиқ эгри чизиқ[*] ёрдамида интеграл эгри чизиқни тақрибий ясаш усули келиб чиқади.

Масалан, (1) тенгламанинг ушбу

$$y_{x=x_0} = y_0, \qquad y'_{x=x_0} = y'_0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилган бўлсин.

$M_0(x_0, y_0)$ нуқтадан бурчак коэффициенти $y' = \mathrm{tg}\varphi_0 = y'_0$ бўлган $M_0 T_0$ нурни ўтказамиз (272-расм). (4) тенгламадан $R = R_0$ миқдорни топамиз. $M_0 T_0$ йўналишига перпендикулярда R_0 га тенг $M_0 C_0$ кесма ясаймиз ва C_0 нуқтани марказ ҳисоблаб, R_0 радиус билан кичикроқ $\smile{M_0 M_1}$ ёй чизамиз. Бундан $M_0 C_0$ кесмани $R_0 < 0$ бўлганда айлана ёйи қавариқ бўладиган, $R_0 > 0$ бўлганда эса ботиқ бўладиган қилиб йўналтириш кераклигини эслатиб ўтамиз (бундан олдинги бетдаги сноскага қаранг).



272-расм.

Энди x_1, y_1 — ясалган ёйда ётувчи ҳамда M_0 нуқтага етарли яқин бўлган M_1 нуқтанинг координаталари, $\mathrm{tg}_1\varphi$ эса ўтказилган айлананинг M_1 нуқтасидан ўтган $M_1 T_1$ уринманинг бурчак коэффициенти бўлсин. (4) тенгламадан M_1 нуқтага мос $R = R_1$ қийматни топамиз. $M_1 T_1$ га перпендикуляр қилиб R_1 га тенг $M_1 C_1$ кесмани ўтказамиз ва C_1 нуқтани марказ қилиб R_1 радиус билан $M_1 M_2$ ёйни чизамиз. Сўнгра бу ёйда M_1 га яқин бўлган M_2 (x_2, y_2) нуқтани оламиз ва айлана ёйларидан иборат бўлган эгри чизиқнинг етарли катта бўлаги ҳосил бўлгунча бу усул билан ясашни давом эттирамиз. Бу эгри чизиқ M_0

---

[*] Агар эгри чизиқ ўзининг барча нуқталарида уринмага эга бўлса ва бунда ана шу уринманинг оғмалик бурчаги ёй узунлиги (s) нинг узлуксиз функцияси бўлса, бундай эгри чизиқ *силлиқ* эгри чизиқ дейилади.

нуқтадан ўтадиган тақрибий интеграл чизиқ экани юқорида баён этилганлардан равшан. Ясалган эгри чизиқда $\overset{\frown}{M_0M_1},\ldots\overset{\frown}{M_1M_2}$ ёйлар қанча кичик бўлса, интеграл эгри чизиққа шунча яқин бўлиши равшан.

20- §. Бир жинсли чизиқли тенгламалар. Таърифлар ва умумий хоссалар

1-таъриф. Агар n- тартибли дифференциал тенглама номаълум y функция ва унинг $y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ ҳосилаларига нисбатан биринчи даражали бўлса, бундай тенглама *чизиқли* дифференциал тенглама дейилади, яъни

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \qquad (1$$

кўринишда бўлади, бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ва $f(x)$ лар x нинг маълум функциялари ёки ўзгармас сонлар, бунда (1) тенгламани қайси соҳада қараётган бўлсак, x нинг ўша соҳадаги барча қийматлари учун $a_0 \neq 0$. Бундан кейин $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ва $f(x)$ функцияларни x нинг барча қийматларида узлуксиз функция ва a_0 коэффициент бирга тенг (агар у бирга тенг бўлмаса, тенгламанинг барча ҳадларини a_0 коэффициентга бўлишимиз мумкин) деб фараз қиламиз. Тенгламанинг ўнг томонида турган $f(x)$ функция *тенгламанинг ўнг томони* деб аталади.

Агар $f(x) \not\equiv 0$ бўлса, бу ҳолда тенглама *бир жинслимас* чизиқли тенглама ёки *ўнг томонли* тенглама дейилади. Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда тенглама

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n\, y = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлади ва *бир жинсли чизиқли* ёки *ўнг томонсиз* тенглама дейилади (бу тенгламанинг чап томони $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ларга нисбатан биринчи даражали бир жинсли функциядир).

Бир жинсли чизиқли тенгламаларнинг баъзи асосий хоссаларини белгилаб ўтамиз, исботларни 2- тартибли тенгламалар учунгина бериш билан чегараланамиз.

1-теорема. *Агар* y_1 ва y_2 *2- тартибли бир жинсли чизиқли*

$$y'' + a_1\, y' + a_2y = 0 \qquad (3)$$

тенгламанинг иккита хусусий ечими бўлса, у ҳолда $y_1 + y_2$ *ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. y_1 ва y_2 тенгламанинг ечими бўлгани учун,

$$\left.\begin{aligned} &y_1'' + a_1y'_1 + a_2y_1 = 0\\ \text{ва}\qquad &y_2'' + a_1y'_2 + a_2y_2 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(3) тенгламага y_1+y_2 йиғиндини қўйиб, (4) айниятни эътиборга олсак,

$$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=$$
$$=(y''_1+a_1y'_1+a_2y_1)+(y''_2+a_1y'_2+a_2y_2)=0+0=0,$$

яъни y_1+y_2 тенгламанинг ечими.

2-теорема. *Агар y (3) тенгламанинг ечими бўлиб, C ихтиёрий ўзгармас миқдор бўлса, у ҳолда Cy_1 ҳам* (3) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. (3) тенгламага Cy_1 ифодани қўямиз:

$$(Cy_1)''+a_1(Cy_1)'+a_2(Cy_1)=C(y''_1+a_1y'_1+a_2y_1)=C\cdot 0=0;$$

шу билан теорема исботланди.

2-таъриф. Агар $[a, b]$ кесмада (3) тенглама иккита y_1 ва y_2 ечимининг нисбати ўзгармас миқдорга тенг бўлмаса, яъни

$$\frac{y_1}{y_2}\neq \text{const}$$

бўлса, y_1 ва y_2 ечимлар $[a,b]$ *кесмада чизиқли боғлиқ бўлмаган* ечимлар дейилади. Акс ҳолда ечимлар *чизиқли боғлиқ* ечимлар дейилади. Бошқача айтганда, агар $[a,b]$ кесмада шундай ўзгармас λ сон мавжуд бўлиб, $\frac{y_1}{y_2}=\lambda$ бўлса, иккита y_1 ва y_2 ечим $a\leqslant x\leqslant b$ да *чизиқли боғлиқ* ечим дейилади. Бу ҳолда $y_1=\lambda y_2$ бўлади.

1-мисол. $y''-y=0$ тенглама берилган бўлсин. e^x, e^{-x}, $3e^x$, $5e^{-x}$ функциялар бу тенгламанинг ечимлари бўлишини текшириш осон. Бунда e^x ва e^{-x} функциялар ҳар қандай кесмада ҳам чизиқли боғлиқмас (эркли), чунки $\frac{e^x}{e^{-x}}=e^{2x}$ нисбат x ўзгарганда ўзгариб боради. e^x ҳамда $3e^x$ функциялар эса чизиқли боғлиқ, чунки $\frac{3e^x}{e^x}=3=\text{const}$.

3-таъриф. Агар y_1 ва y_2 x нинг функцияси бўлса, у ҳолда

$$W(y_1y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1y'_2-y'_1y_2$$

детерминант Вронский детерминанти ёки берилган функцияларнинг *вронскиани* дейилади.

3-теорема. *Агар y_1 ва y_2 функциялар $[a, b]$ кесмада чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бу кесмада Вронский детерминанти айнан нолга тенг бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, агар $y_2=\lambda y_1$ бўлса (бунда $\lambda=\text{const}$), у ҳолда $y'_2=\lambda y'_1$ ва

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y'_1 & \lambda y'_1 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y'_1 & y'_1 \end{vmatrix}=0.$$

4-теорема. *Агар бир жинсли чизиқли* (3) *тенгламанинг* y_1 *ва* y_2 *ечимлари учун тузилган* $W(y_1, y_2)$ *Вронский детерминанти тенгламанинг коэффициентлари узлуксиз бўлган* $[a, b]$ *кесмадаги бирор* $x=x_0$ *қийматида нолга тенг бўлмаса, у ҳолда у бу кесмадаги* x *нинг ҳеч бир қийматида нолга айланмайди.*

Исбот. y_1 ва y_2 (3) тенгламанинг иккита ечими бўлгани сабабли:

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0, \qquad y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0.$$

Биринчи тенгликнинг ҳадларини y_1 га, иккинчи тенгликнинг ҳадларини эса y_2 га кўпайтириб ва биринчидан иккинчини айириб,

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0 \tag{5}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Иккинчи қавсдаги айирма Вронскийнинг $W(y_1, y_2)$ детерминантидир, яъни $W(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)$. Биринчи қавсдаги айирма Вронский детерминантининг ҳосиласидир:

$$W_x'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2.$$

Демак, (5) тенглама

$$W' + a_1 W = 0 \tag{6}$$

кўринишни олади. (6) тенгламанинг $W|_{x=x_0} = W_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топамиз. Дастлаб $W \neq 0$ фараз қилиб, (6) тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратсак:

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$$

Буни интегралласак:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C$$

ёки

$$\ln \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx,$$

бундан

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \tag{7}$$

(7) функцияни ёзиш ва бу функция (6) тенгламани қаноатлантиришини айтиш мумкин эди. Бунинг учун бу функцияни (6) тенгламага бевосита қўйиш билан унинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш осон. $W \neq 0$ деб фараз қилиш керак бўлмайди.

(7) формула *Лиувилл формуласи* дейилади.

Энди C ни бошланғич шарт қаноатлантирадиган қилиб аниқлаймиз. (7) тенгламанинг ўнг ва чап томонига $x=x_0$ ни қўйиб,

$$W_0 = C$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечим бундай кўринишни олади:

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (7')$$

Шартга кўра $W_0 \neq 0$. Аммо бу ҳолда (7′) тенгликдан x нинг ҳеч бир қийматида $W \neq 0$ экани келиб чиқади, чунки кўрсаткичли функция аргументнинг ҳеч бир чекли қийматида нолга айланмайди.

Теорема исбот бўлди.

1-изоҳ. Агар Вронский детерминанти аргументнинг бирор $x=x_0$ қийматида нолга тенг бўлса, бу ҳолда у қаралаётган кесмада x нинг ҳар қандай қийматида ҳам нолга тенг бўлади. Бу (7) формуладан бевосита келиб чиқади: агар $x=x_0$ бўлганда $W=0$ бўлса, у ҳолда

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

демак, (7) формулада x қийматларининг юқори чегараси ҳар қандай бўлганда ҳам

$$W \equiv 0.$$

5-теорема. *Агар* (3) *тенгламанинг* y_1 ва y_2 *ечимлари* $[a, b]$ *кесмада чизиқли эркли бўлса, бу ечимлардан тузилган* W *Вронский детерминанти кўрсатилган кесманинг ҳеч бир нуқтасида нолга айланмайди.*

Исбот. Дастлаб қуйидагига эътибор бериб ўтайлик.

$y \equiv 0$ функция (3) тенгламанинг $[a, b]$ кесмада

$$y_{x=x_0} = 0, \qquad y'_{x=x_0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимидир, бунда x_0 $[a, b]$ кесмадаги ҳар қандай нуқта. (3) тенгламанинг

$$y_{x=x_0} = 0, \qquad y'_{x=x_0} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган бошқа ечими мавжуд эмаслиги (3) тенгламага татбиқ қилинадиган мавжудлик ва ёлғизлик теоремасидан келиб чиқади (16-§ га қ.). Агар (3) тенгламанинг ечими бирор кесмага ёки $[a, b]$ кесмага тегишли $[\alpha, \beta]$ интегралда айнан нолга тенг бўлса, у ҳолда бу ечим бутун $[a, b]$ кесмада айнан нолга тенг эканлиги ҳам ўша теоремадан келиб чиқади. Ҳақиқатан, $x=\beta$ нуқтада (ҳамда $x=\alpha$ нуқтада) ечим

$$y_{x=\beta}=0, \qquad y'_{x=\beta}=0$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. Демак, ёлғизлик теоремасига кўра y бирор $\beta-d<x<\beta+d$ интервалда нолга тенг, бунда d (3) тенглама коэффициентлари миқдори билан аниқланади. Шундай қилиб, ҳар сафар $y\equiv0$ бўлган интервални d миқдорга кенгайтириб, бутун $[a, b]$ кесмада $y\equiv0$ эканини исбот қиламиз.

Энди 5- теореманинг исботига киришамиз. $[a, b]$ кесманинг бирор нуқтасида $W(y_1, y_2)=0$ деб фараз қилайлик. Бу ҳолда (3) теоремага асосан, Вронский $W(y_1, y_2)$ детерминанти $[a, b]$ кесманинг барча нуқталарида нолга тенг бўлади.

$$W=0 \text{ ёки } y_1y'_2-y'_1y_2=0.$$

$[a, b]$ кесмада $y_1\neq0$ бўлсин. У ҳолда кейинги тенгликка асосан ушбуни ёзиш мумкин:

$$\frac{y_1y'_2-y'_1y_2}{y_1^2}=0 \qquad \text{ёки} \qquad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=0.$$

Бу тенгликдан

$$\frac{y_2}{y_1}=\lambda=\text{const},$$

яъни y_1 ва y_2 ечимлар чизиқли боғлангандир, бу эса уларнинг чизиқли эрклилиги ҳақидаги фаразга зидлик қилади.

Энди $[a, b]$ кесмага тегишли $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталарда $y_1=0$ деб фараз қиламиз. (a, x_1) оралиқни қараймиз. Бу оралиқда $y_1\neq0$. Демак, ҳозиргина исбот қилинганга асосан (a,x_1) оралиқда

$$\frac{y_2}{y_1}=\lambda=\text{const} \qquad \text{ёки} \qquad y_2=\lambda y_1.$$

$y=y_2-\lambda y_1$ функцияни қараймиз. y_2 ва y_1 (3) тенгламанинг ечимлари бўлгани учун, бу ҳолда $y=y_2-\lambda y_1$ (3) тенгламанинг ечимидир ва (a, x_1) интервалда $y_1\equiv0$. Демак, исботнинг бошида берилган изоҳга асосан $[a, b]$ кесмада $y=y_2-\lambda y_1\equiv0$ экани келиб чиқади ёки $[a, b]$ кесмада

$$\frac{y_2}{y_1}=\lambda,$$

яъни y_2 ва y_1 чизиқли боғлиқдир.

Аммо бу y_2 ва y_1 ечимларнинг чизиқли эрклилиги ҳақидаги фаразга зидлик қилади. Шундай қилиб, биз Вронский детерминанти $[a, b]$ кесманинг ҳеч бир нуқтасида нолга айланмаслигини исбот қилдик.

6-теорема. *Агар* y_1 ва y_2 (3) *тенгламанинг иккита чизиқли эркли ечими бўлса, у ҳолда,*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{8}$$

(*бунда* C_1 ва C_2 — *ихтиёрий ўзгармас миқдорлар*), *(3) тенгламанинг умумий ечими бўлади.*

Исбот. 1 ва 2-теоремадан

$$C_1 y_1 + C_2 y_2$$

функция C_1 ва C_2 нинг ҳар қандай қийматларида ҳам (3) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

Энди $y_{x=x_0} = y_0, \qquad y'_{x=x_0} = y'_0$

бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорлар қийматини, бу қийматларга мос бўлган $C_1 y_1 + C_2 y_2$ хусусий ечим берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкинлигини исботлаймиз. Бошланғич шартларни (8) тенгликка қўйиб,

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y'_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y'_{20}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

системага эга бўламиз, бунда:

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \quad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \quad (y'_1)_{x=x_0} = y'_{10} \quad (y'_2)_{x=x_0} = y'_{20}$$

деб белгиланган. (9) системадан, бу системанинг

$$\begin{vmatrix} y'_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = y_{10} y'_{20} - y'_{10} y_{20}$$

детерминанти $x = x_0$ бўлганда Вронский детерминанти бўлгани учун ва, демак, у нолга тенг бўлмагани учун (y_1 ва y_2 ечимлар чизиқли эркли бўлганидан), C_1 ва C_2 ларни аниқлаш мумкин. C_1 ва C_2 нинг топилган қийматларида (8) оиладан ҳосил бўладиган хусусий ечим берилган бошланғич шартларни қаноатлантиради. Шундай қилиб, теорема исботланди.

2-мисол. $a_1 = \frac{1}{x}$ ва $a_2 = -\frac{1}{x^2}$ **коэффициентлари** $x=0$ **нуқтани** ўз ичига **олмаган ҳар қандай кесмада** узлуксиз бўлган

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$$

тенглама

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

хусусий ечимларга эга (буни тенгламада ўрнига қўйиб текшириш осон). Демак, унинг умумий ечими

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

кўринишда бўлади,

2-изоҳ. Ўзгарувчи коэффициентли тенгламанинг умумий ечимини чекли шаклда топиш учун умумий методлар мавжуд эмас. Лекин ўзгармас коэффициентли тенглама учун бундай метод мавжуд. Бу метод, кейинги параграфда баён этилади. „Қаторлар“ га бағишланган XVI бобда ўзгарувчи коэффициентли тенгламаларнинг маълум бошланғич шартларни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини топиш имкониятини берадиган баъзи усуллар кўрсатилади.

Бу ерда биз ўзгарувчи коэффициентли иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечимини топиш имкониятини берадиган теоремани исбот қиламиз. Баъзан битта хусусий ечимни бевосита топиш ёки ўйлаб топиш мумкин бўлиб қолади, бундай ҳолда бу теорема кўп вақтда фойдали бўлиши мумкин.

7-теорема. *Агар иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламанинг битта хусусий ечими маълум бўлса, у ҳолда умумий ечимни топиш функцияларни интеграллашга келтирилади.*

Исбот. $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ тенгламанинг y_1 хусусий ечими маълум бўлсин. Берилган тенгламанинг бошқа хусусий ечимини шундай топайликки, y_1 билан y_2 чизиқли эркли бўлсин. Бу ҳолда умумий ечим $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ формула билан ифода этилади, бунда C_1 ва C_2 —ихтиёрий ўзгармас миқдорлар. (7) формулага мувофиқ (4-теореманинг исботига қаранг):

$$y_2' y_1 - y_2 y_1' = Ce^{-\int a_1 dx}$$

тенгламани ёзиш мумкин. Шундай қилиб, y_2 ни топиш учун биз биринчи тартибли чизиқли тенглама ҳосил қилдик. Буни қуйидагича интеграллаймиз. Барча ҳадларини y_1^2 га бўламиз:

$$\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{1}{y} Ce^{-\int a_1 dx}$$

ёки

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y}\, Ce^{-\int a_1 dx;}$$

бундан

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{Ce^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx+C'.$$

Хусусий ечимни излаганимиз учун $C_2=0$, $C=1$ деб олсак,

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1^2}dx. \tag{10}$$

$\frac{y_2}{y_1}\neq\text{const}$ бўлгани учун y_1 ва y_2 ечимлар чизиқли эркли бўлади.

Шундай қилиб, дастлабки тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{e^{-\int a_1dx}}{y_1}dx \tag{11}$$

кўринишда бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Бевосита текшириш йўли билан $y_1=x$ бу тенгламанинг хусусий ечими бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. Иккинчи y_2 хусусий ечимни шундай топамизки, y_1 ва y_2 чизиқли эркли бўлади.

Биз қараётган мисолда $a_1=\frac{-2x}{1-x^2}$ эканини эътиборга олиб, (10) формулага мувофиқ қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y=x\int\frac{e^{\int\frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{-ln|1-x^2|}}{x^2}dx=x\int\frac{dx}{x^2|1-x^2|}=$$

$$=x\int\left(\pm\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}\right)dx=x\left[\mp\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right].$$

Демак, умумий ечим

$$y=C_1x+C_2\left(\frac{1}{2}x\ ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\mp1\right)$$

кўринишда бўлади.

21-§. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенгламалар

Иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли тенглама

$$y''+py'+qy=0 \tag{1}$$

берилган бўлсин, бунда p ва q —ўзгармас ҳақиқий сонлар. Юқорида исбот қилинганига асосан бу тенгламанинг умумий интегралини топиш учун унинг иккита чизиқли эркли хусусий ечимини топиш етарлидир.

Хусусий ечимларни

$$y = e^{kx} \quad (\text{бунда } k = \text{const}) \tag{2}$$

кўринишда излаймиз; бу ҳолда

$$y' = ke^{kx}, \qquad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Ҳосилаларнинг бу ифодаларини (1) тенгламага қўйсак, у

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

кўринишни олади. Аммо $e^{kx} \neq 0$ бўлгани учун,

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3}$$

Демак, k (3) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда e^{kx} (1) тенгламанинг ечими бўлади. (3) тенглама (1) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Характеристик тенглама — иккита илдизи бўлган квадрат тенгламадир; бу илдизларни k_1 ва k_2 билан белгилаймиз. Бунда:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

I. k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва бир-бирига тенг бўлмаган сонлар ($k_1 \neq k_2$).
II. k_1 ва k_2 — комплекс сонлар.
III. k_1 ва k_2 — ҳақиқий ва бир-бирига тенг сонлар ($k_1 = k_2$).

Бу ҳолларни айрим-айрим қараймиз:

I. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил ($k_1 \neq k_2$) бўлган ҳол. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1x}; \qquad y_2 = e^{k_2x}$$

функциялар хусусий ечимлар бўлади. Бу ечимлар

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}} = e^{(k_2-k_1)x} \neq \text{const}.$$

бўлгани учун чизиқли эркли бўлади.

Демак, умумий интеграл

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

кўринишда бўлади.

1-мисол. Ушбу тенглама

$$y'' + y' - 2y = 0$$

берилган бўлсин.

Характеристик тенглама

$$k^2 + k - 2 = 0$$

кўринишда бўлади. Характеристик тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \qquad k_1 = 1, \qquad k_2 = -2.$$

Умумий интеграл

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

бўлади.

II. Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлган ҳол. Комплекс илдизлар жуфт-жуфт қўшма комплекс сонлар бўлгани учун уларни

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta$$

деб белгилаймиз, бунда

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Хусусий ечимларни

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{4}$$

шаклида ёзиш мумкин. Булар ҳақиқий аргументнинг комплекс функциялари бўлиб, (1) дифференциал тенгламани қаноатлантиради (VII боб, 4-параграфга қаранг). Агар ҳақиқий аргументнинг бирор комплекс функцияси

$$y = u(x) + iv(x) \tag{5}$$

(1) тенгламани қаноатлантирса, бу тенгламани $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар ҳам қаноатлантиради.

Ҳақиқатан, (5) ифодани (1) тенгламага қўйсак,

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

ёки

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Аммо комплекс функциянинг ҳақиқий қисми ҳам, мавҳум қисми ҳам нолга тенг бўлган ҳолдагина у нолга тенг бўлади, яъни

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

Шундай қилиб, биз $u(x)$, ва $v(x)$ функциялар тенгламанинг ечими эканини исбот этдик.

(4) комплекс ечимларни ҳақиқий ва мавҳум қисмлар йиғиндиси шаклида қайтадан ёзамиз:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Исбот қилинганига кўра

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \tag{6'}$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{6''}$$

ҳақиқий функциялар ҳам (1) тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади.

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \operatorname{ctg}\beta x \neq \text{const}$$

бўлгани учун $\tilde{y}_1$ ва $\tilde{y}_2$ функциялар чизиқли эрклидир. Демак, характеристик тенглама комплекс илдизларга эга бўлганда (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ёки

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{7}$$

кўринишда бўлади, бунда C_1 ва C_2—ихтиёрий ўзгармас миқдорлар.

(7) ечимнинг муҳим хусусий ҳоли характеристик тенглама илдизларининг соф мавҳум сонлардан иборат бўлган ҳолидир.

Бу ҳол (1) тенгламада $p=0$ бўлган ҳолда ўринли бўлиб, тенглама

$$y'' + qy = 0$$

кўринишга эга бўлади. (3) характеристик тенглама бундай кўринишни олади:

$$k^2 + q = 0, \qquad q > 0.$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$k_{1,2} = \pm i\sqrt{q} = \pm i\beta, \qquad \alpha = 0.$$

(7) ечим бундай кўринишда бўлади:

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x.$$

2- мисол. Ушбу тенглама

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

берилган. Бунинг $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи умумий интеграли ва хусусий ечими топилсин. Графиги ясалсин.

Ечиш. 1) Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

унинг илдизларини топамиз;

$$k_1 = -1 + 2i, \qquad k_2 = -1 - 2i.$$

Демак,

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2\,x)$$

умумий интеграл бўлади.

2) Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топамиз ҳамда C_1 ва C_2 қийматларини аниқлаймиз. Биринчи шартга асосан:

$$0 = e^{-0}(C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0),$$

бундан $C_1 = 0$.

$$y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x$$

эканини эътиборга олиб, иккинчи шартдан

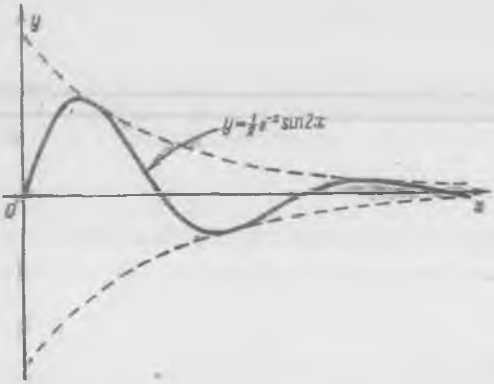
$$1 = 2C_2, \text{ яъни } C_2 = \frac{1}{2}$$

эканини топамиз.

Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$$

бўлади. Бунинг графиги 273-расмда кўрсатилган.



273- расм.

3-мисол. Ушбу тенглама берилган:

$$y'' + 9y = 0.$$

Умумий интегрални ҳамда $y_{x=0} = 0$, $y'_{x-0} = 3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k^2 + 9 = 0.$$

Унинг илдизларини топамиз:

$$k_1 = 3i, \; k_2 = -3i.$$

Умумий интеграл

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Хусусий ечимни топамиз. Дастлаб ҳосилани топамиз:

$$y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x.$$

C_1 ва C_2 ўзгармаслар бошланғич

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0,$$
$$3 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0$$

шартлардан топилади. Улар

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

Хусусий ечим бундай:

$$y = \sin 3x.$$

III. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва тенг бўлган ҳол. Бу ҳолда $k_1 = k_2$.

Юқоридаги мулоҳазаларга асосан битта, $y_1 = e^{k_1x}$ хусусий ечим топилади. Биринчи хусусий ечим билан чизиқли эркли бўлган иккинчи хусусий ечимни топиш керак (e^{k_2x} функция e^{k_1x} га айнан тенг бўлгани учун уни иккинчи хусусий ечим сифатида олиш мумкин эмас). Иккинчи хусусий ечимни

$$y_2 = u(x)e^{k_1x}$$

кўринишда излаймиз, бунда $u(x)$ – аниқланиши керак бўлган номаълум функция.

Дифференциаллаб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_2' = u'e^{k_1x} + k_1ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u' + k_1u).$$

$$y_2'' = u''e^{k_1x} + 2k_1u'e^{k_1x} + k_1^2ue^{k_1x} = e^{k_1x}(u'' + 2k_1u' + k_1^2u).$$

Ҳосилаларнинг бу ифодаларини (1) тенгламага қўйиб,

$$e^{k_1x}[u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u] = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Лекин k_1 характеристик тенгламанинг каррали илдизи бўлгани учун бу ҳолда

$$k_1^2 + pk_1 + q = 0.$$

Бундан ташқари $k_1 = k_2 = -p/2$ ёки $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0$.

Демак. $u(x)$ ни топиш учун $e^{k_1x}u'' = 0$ ёки $u'' = 0$ тенгламани ечиш керак. Интеграллаб $u = Ax + B$ эканини топамиз. Хусусий ҳолда $A = 1$ ва $B = 0$ деб олиш мумкин; бу ҳолда $u = x$ бўлади. Шундай қилиб, иккинчи хусусий ечим сифатида

$$y_2 = xe^{k_1x}$$

функцияни олиш мумкин. $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$ бўлгани учун бу ечим билан биринчи хусусий ечим чизиқли эрклидир. Шунинг учун

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

функция умумий интеграл бўлади.

4-мисол Ушбу тенглама берилган:

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Бу тенгламанинг умумий интеграли топилсин.

Характеристик тенгламани ёзамиз: $k^2 + 4k + 4 = 0$. Унинг илдизларини топамиз: $k_1 = k_2 = 2$. Умумий интеграл

$$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

бўлади.

22-§. Ўзгармас коэффициентли *n*-тартибли бир жинсли чизиқли тенгламалар

n-тартибли бир жинсли чизиқли

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0 \tag{1}$$

тенгламани қараймиз. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ларни ўзгармас сонлар деб фараз қиламиз. (1) тенгламани ечиш усулини кўрсатишдан аввал келгусида керак бўладиган таърифларни берамиз.

1-таъриф. Агар $[a, b]$ кесмадаги x нинг барча қийматлари учун

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\ldots+A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

тенглик ўринли бўлса, бунда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмайдиган ўзгармас сонлар, *у ҳолда* $\varphi_n(x)$ *функция* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ *функциялар орқали чизиқли ифода этилади* дейилади.

2-таъриф. Агар *n* та $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ функцияларнинг ҳеч бири қолганлари орқали чизиқли ифода этилмаса, у функциялар *чизиқли эркли функциялар* деб аталади.

1-изоҳ. Таърифлардан келиб чиқадики, агар $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлмаган шундай $C_1, C_2, \ldots, C_n$ сонлар топиладики, $[a_1\ b]$ кесмада x нинг ҳамма қийматлари учун

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)\equiv 0$$

айният бажарилади.

1-мисол. $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=3e^x$ функциялар чизиқли боғлиқ, чунки $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=-\frac{1}{3}$ бўлганда:

$$C_1e^x+C_2e^{2x}+C_33e^x\equiv 0.$$

2-мисол, $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$ функциялар чизиқли эркли функциялардир, чунки бир вақтда нолга тенг бўлмаган C_1, C_2, C_3 нинг ҳеч бир қийматида

$$C_1\cdot 1+C_2x+C_3x^2$$

ифода айнан нолга тенг бўла олмайди.

3-мисол. $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, $\ldots$, $y_n=e^{k_nx}$, $\ldots$, функциялар, бунда $k_1, k_2, \ldots, k_n\ldots$ —турлича сонлар, чизиқли эркли. (Бу тасдиқни исботсиз келтирамиз.)

Энди *n*-тартибли (1) тенгламани ечишга киришамиз. Бу тенглама учун қуйидаги теорема тўғри.

Теорема. *Агар y_1, y_2, ... , y_n функциялар* (1) *тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлса, у ҳолда*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \tag{2}$$

унинг умумий ечими бўлади, бунда C_1, C_2, ... , C_n—ихтиёрий ўзгармас сонлардир.

Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари ўзгармас сонлар бўлса, бу ҳолда умумий ечими иккинчи тартибли тенгламанинг умумий ечимини топгандек топилади.

1) Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

2) Характеристик тенгламанинг

$$k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n$$

илдизларини топамиз.

3) Қуйидагиларга асосланиб илдизларнинг характерига кўра чизиқли эркли хусусий ечимларни топамиз:

а) ҳар бир бир каррали k илдизга e^{kx} хусусий ечим мос келади;

б) ҳар бир жуфт $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ ва $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ қўшма комплекс бир каррали илдизларга иккита $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $e^{\alpha x}\sin\beta x$ хусусий ечимлар тўғри келади;

в) ҳар бир r каррали ҳақиқий k илдизга r та чизиқли эркли

$$e^{kx},\ xe^{kx},\ \dots,\ x^{r-1}\ e^{kx}$$

хусусий ечимлар тўғри келади;

г) ҳар бир μ каррали жуфт $k^{(1)} = \alpha + i\beta$, $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ қўшма комплекс илдизга 2μ та

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

хусусий ечимлар тўғри келади.

Бу хусусий ечимлар сони характеристик тенгламанинг даражасига тенг бўлади (яъни берилган чизиқли дифференциал тенгламанинг тартибига тенг бўлади). Бу ечимлар чизиқли эркли бўлишини исбот қилиш мумкин.

4) n та чизиқли эркли y_1, y_2, ..., y_n хусусий ечимларни топгандан кейин берилган чизиқли тенгламанинг умумий ечимини тузамиз:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

бунда C_1, C_2, ... , C_n—ихтиёрий ўзгармас сонлардир.

4-мисол. Ушбу

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^4 - 1 = 0.$$

Характеристик тенглама илдизларини топамиз:

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = -1, \qquad k_3 = i, \qquad k_4 = -i.$$

Умумий интегрални ёзамиз:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,$$

бунда C_1, C_2, C_3, C_4 — ихтиёрий ўзгармас сонлардир.

2-изоҳ. Юқорида баён этилганлардан ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечишдаги қийинчиликларнинг ҳаммаси характеристик тенгламани ечишда экани келиб чиқади.

23-§. Бир жинслимас иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар

Бир жинслимас иккинчи тартибли чизиқли тенглама

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x) \tag{1}$$

берилган бўлсин.

Бундай (1) тенглама умумий ечимининг тузилиши қуйидаги теорема билан аниқланади:

1-теорема. *Бир жинслимас (1) тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг бирор y^* хусусий ечими билан мос бир жинсли*

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{2}$$

тенгламанинг $\bar{y}$ умумий ечими йиғиндиси каби ифодаланади.

Исбот. Ушбу

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

йиғинди (1) тенгламанинг умумий ечими эканини исбот қилиш керак. Дастлаб (3) функция (1) тенгламанинг ечими эканини исботлаймиз. $\bar{y}' + \bar{y}^*$ йиғиндини (1) тенгламада y урнига қўйсак:

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1(\bar{y} + y^*)' + a_2(\bar{y} + y^*) = f(x)$$

ёки

$$(\bar{y}'' + a_1\bar{y}' + a_2\bar{y}) + (y^{*''} + a_1y^{*'} + a_2y^*) = f(x) \tag{4}$$

тенгликка эга бўламиз.

$\bar{y}$ (2) тенгламанинг ечими бўлгани учун биринчи қавс ичида турган ифода айнан нолга тенг. y^* (1) тенгламанинг ечими бўлгани учун иккинчи қавс ичидаги ифода $f(x)$ га тенг. Демак, (4) тенглик айниятдан иборат. Шундай қилиб, теореманинг биринчи қисми исбот қилинди.

Энди (3) ифода (1) тенгламанинг умумий ечими бўлишини исбот қиламиз, яъни унга кирган ихтиёрий ўзгармас миқдорлар:

$$y_{x=x_0} = y_0, \qquad y'_{x=x_0} = y'_0, \tag{5}$$

бошланғич шартларни x_0, y_0 ва v'_0 сонлар ҳар қандай бўлганда ҳам (фақат x_0 ни a_1, a_2 ва $f(x)$ функциялар узлуксиз бўладиган соҳадан олинган бўлиши керак) қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш мумкинлигини исботлаймиз.

$\bar{y}$ ни

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини эътиборга олиб (бунда y_1 ва y_2 (2) тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари, C_1 ва C_2 эса ихтиёрий ўзгармас миқдорлардир), (3) тенгликни

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^* \tag{3'}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. Бу ҳолда (5) шартларга мувофиқ*):

$$C_1y_{10} + C_2y_{20} + y_0{}^* = y_0,$$
$$C_1y'_{10} + C_2y'_{20} + y_0^{*'} = y'_0$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламалар системасидан C_1 ва C_2 ни аниқлаш керак. Системани

$$\left.\begin{aligned} C_1y_{10} + C_2y_{20} &= y_0 - y_0{}^*, \\ C_1y'_{10} + C_2y'_{20} &= y'_0 - y_0^{*'} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

кўринишда ёзиб олиб, бу системанинг детерминанти $x = x_0$ нуқтада y_1 ва y_2 функциялар учун Вронский детерминанти эканини кўрамиз. Бу функциялар шартга кўра чизиқли эркли, шунинг учун, бу ҳолда Вронский детерминанти нолга тенг бўлмайди; демак, (6) система аниқ C_1 ва C_2 ечимга эга, яъни C_1 ва C_2 нинг шундай қийматлари мавжудки, бу қийматларда (3) формула (1) тенгламанинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини аниқлайди. Теорема тўла исботланди.

Шундай қилиб, агар бир жинсли (2) тенгламанинг умумий $\bar{y}$ ечими маълум бўлса, у ҳолда бир жинслимас (1) тенгламани интеграллашда асосий масала унинг бирор y^* хусусий ечимини топишдан иборатдир.

---

*) Бу ерда y_{10}, y_{20}, y_0^*, y'_{10}, y'_{20}, $y_0^{*'}$ билан y_1, y_2, y^*, y'_1, y'_2, $y^{*'}$ функцияларнинг $x = x_0$ бўлгандаги сон қийматлари белгиланади.

Бир жинслимас тенглама хусусий ечимини топишнинг умумий усулини кўрсатамиз.

Ихтиёрий ўзгармас миқдорларни вариациялаш усули. Бир жинсли (2) тенгламанинг умумий ечимини ёзамиз:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2. \tag{7}$$

C_1 ва C_2 ни x нинг ҳозирча номаълум функциялари деб ҳисоблаб, (1) бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини (7) кўринишда излаймиз.

(7) тенгликни дифференциаллаймиз:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_1'y_1 + C_2'y_2.$$

C_1 ва C_2 функцияларни

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \tag{8}$$

тенглик бажариладиган қилиб танлаб оламиз. Агар бу қўшимча шартни эътиборга олсак, у ҳолда биринчи тартибли y' ҳосила

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

кўринишда бўлади. Энди бу ифодани дифференциаллаб, y'' ни топамиз:

$$y'' = C_1y'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'.$$

y, y' ва y'' ларни (1) тенгламага қўйиб,

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + a_1(C_1y_1' + C_2y_2') +$$
$$+ a_2(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

ёки

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Биринчи иккита қавс ичида турган ифодалар нолга айланади, чунки y_1 ва y_2 бир жинсли тенгламанинг ечимлари. Демак, кейинги тенглик

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \tag{9}$$

кўринишни олади.

Шундай қилиб, C_1 ва C_2 функциялар (8) ва (9) тенгламалар системасини қаноатлантирса, яъни

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \qquad C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

бўлса, (7) функция (1) бир жинслимас тенгламанинг ечими бўлади. Аммо бу системанинг детерминанти чизиқли эркли y_1 ва y_2 функцияларнинг Вронский детерминанти бўлгани учун нолга тенг бўлмайди, демак, системани ечиб, C_1' ва C_2' ни x нинг маълум функциялари сифатида аниқлаймиз:

$$C_1' = \varphi_1(x), \qquad C_2' = \varphi_2(x).$$

Интеграллаб,

$$C_1 = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C}_1, \qquad C_2 = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C}_2$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бунда $\overline{C}_1$ ва $\overline{C}_2$ интеграллаш ўзгармасларидир.

C_1 ва C_2 нинг ҳосил қилинган ифодаларини (7) тенгликка қўйиб, иккита ихтиёрий ўзгармас $\overline{C}_1$ ва $\overline{C}_2$ миқдорларга боғлиқ бўлган интегрални, яъни бир жинслимас тенгламанинг умумий ечимини топамиз*).

Мисол. Ушбу

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Бир жинсли

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \text{ бўлгани учун,}$$

$$\ln y' = \ln x + \ln c; \qquad y' = cx,$$

демак,

$$y = C_1x^2 + C_2.$$

Кейинги ифода берилган тенгламанинг ечими бўлиши учун C_1 ва C_2 ни x нинг функцияси сифатида

$$C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \qquad 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x$$

системадан аниқлаш керак.

Бу системани ечиб,

$$C_1' = \frac{1}{2}, \qquad C_2' = -\frac{1}{2}x^2$$

эканини топамиз, бундан интеграллаш натижасида

$$C_1 = \frac{x}{2} + \overline{C}_1, \qquad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \overline{C}_2$$

функцияларни топамиз.

Топилган функцияларни $y_1 = C_1x^2 + C_2$ формулага қўйиб, бир жинслимас тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

---

*) Агар $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$ деб фараз қилсак, (1) тенгламанинг хусусий ечимини ҳосил қиламиз.

ёки $y = \overline{C}_1x^2 + \overline{C}_2 + \frac{x^3}{3}$, бунда $\overline{C}_1$ ва $\overline{C}_2$ — ихтиёрий ўзгармас миқдорлардир.

Хусусий ечимларни топишда қуйидаги теореманинг натижаларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

2-теорема.

$$y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x) \tag{10}$$

тенгламанинг y^* *ечимини (бунда ўнг томон иккита* $f_1(x)$ *ва* $f_2(x)$ *функцияларнинг йиғиндисидан иборат*[*]) $y^* = y_1^* + y_2^*$ *йиғинди шаклида тасвирлаш мумкин, бунда* y_1^* ва y_2^* *мос равишда*

$$y_1^{*''} + a_1y_1^{*'} + a_2y_1^* = f_1(x), \tag{11}$$

$$y_2^{*''} + a_1y_2^{*'} + a_2y_2^* = f_2(x) \tag{12}$$

тенгламаларнинг ечимлари.

Исбот. (11) ва (12) тенгликларнинг ўнг ва чап томонларини қўшиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(y_1^* + y_2^*)'' + a_1(y_1^* + y_2^*)' + a_2(y_1^* + y_2^*) = f_1(x) + f_2(x). \tag{13}$$

Кейинги тенгликдан ушбу

$$y_1^* + y_2^* = y^*$$

йиғинди (10) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - 4y = x + 3e^x$$

тенгламанинг y^* хусусий ечими топилсин.

Ечиш.

$$y_1^{*''} + 4y_1^* = x$$

тенгламанинг хусусий ечими

$$y_1^* = \frac{1}{4}\,x$$

бўлади.

$$y_2^{*''} + 4y_2^* = 3e^x$$

тенгламанинг хусусий ечими

$$y_2^* = \frac{3}{5}\,e^x$$

бўлади.

Берилган тенгламанинг хусусий y^* ечими

$$y^* = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{5}\,e^x$$

бўлади.

---

[*] Ўнг томондаги қўшилувчилар сони ҳар қанча бўлганда ҳам теорема ўз кучини сақлаши равшан.

24- §. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинслимас чизиқли тенгламалар

Ушбу

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

тенглама берилган бўлсин, бунда p ва q—ҳақиқий сонлар.

Олдинги параграфда бир жинслимас тенглама ечимини топишнинг умумий усули кўрсатилган эди. Баъзан ўзгармас коэффициентли тенгламани ечишда хусусий ечимни, интеграллашни татбиқ қилмасдан, осонроқ топиш имкони бўлади. (1) тенглама учун бундай имкониятларнинг бир нечасини кўриб чиқамиз.

I. (1) тengламанинг ўнг томони *кўрсаткичли функция* билан кўпҳад кўпайтмасидан иборат, яъни

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \tag{2}$$

кўринишда бўлсин, бунда $P_n(x)$ — n- даражали кўпҳад. У вақтда қуйидаги хусусий ҳоллар бўлиши мумкин:

а) α сони

$$k^2 + pk + q = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаган ҳол.

Бу ҳолда хусусий ечимни

$$y^* = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x} = Q_n(x)e^{\alpha x} \tag{3}$$

кўринишда излаш керак. Ҳақиқатан, y^* ни тенгламага қўйиб ва барча ҳадларини $e^{\alpha x}$ кўпайтувчига қисқартириб,

$$Q''_n(x) + (2\alpha + p)Q'_n(x) + \alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \tag{4}$$

тенгликка эга бўламиз, бунда $Q_n(x)n$- даражали кўпҳад, $Q'_n(x)$ $n-1$-даражали кўпҳад, $Q''_n(x)$ эса $n-2$-даражали кўпҳад. Шундай қилиб, тенглик ишорасининг ўнг ва чап томонларида n-даражали кўпҳадлар турибди. Бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб (номаълум коэффициентлар сони $(n+1)$ га тенг), номаълум A_0, A_1, ..., A_n коэффициентларни топиш учун тенгламаларининг сони $(n+1)$ та бўлган система ҳосил қиламиз.

б) α характеристик тенгламанинг оддий (бир каррали) илдизи бўлган ҳол.

Агар бу ҳолда хусусий ечимни (3) кўринишда изламоқчи бўлсак, (4) тенгликнинг чап томонида $(n$-$1)$-даражали кўпҳад ҳосил қилинган бўлар эди, чунки $Q_n(x)$ нинг коэффициенти, яъни $\alpha^2 + p\alpha + q$ нолга тенг бўлиб, $Q'_n(x)$ ва $Q''_n(x)$ кўпҳадларнинг даражалари n дан кичик бўлар эди. Демак, A_0, A_1, ..., A_n коэффициентларнинг ҳеч қандай қийматларида (4) тенглик айният бўлмас эди. Шунинг учун, қаралаётган ҳолда, хусусий ечимни озод ҳадсиз $(n+1)$ даражали кўпҳад шаклида олиш керак (чунки бу кўпҳаднинг озод ҳади дифференциаллаганда йўқолиб кетади)*)

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

в) α сон характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлган ҳол. Бу ҳолда $Q_n(x)e^{\alpha x}$ функцияни дифференциал тенгламага қўйиш натижасида кўпҳаднинг даражаси икки бирлик пасаяди. Ҳақиқатан ҳам, агар α — характеристик тенгламанинг илдизи булса, у ҳолда $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, бундан ташқари, α икки каррали илдиз бўлгани учун $2\alpha = -p$ (чунки элементар алгебранинг маълум теоремасига мувофиқ, келтирилган квадрат тенглама илдизларининг йиғиндиси биринчи даражали номаълумнинг тескари ишора билан олинган коэффициентига тенг). Демак, $2\alpha + p = 0$.

Демак, (4) тенгликнинг чап томонида $Q_n'(x)$, яъни $(n-2)$-даражали кўпҳад қолади. Ўрнига қўйиш натижасида n-даражали кўпҳад ҳосил қилиш учун хусусий ечимни $e^{\alpha x}$ билан $(n+2)$-даражали кўпҳаднинг кўпайтмаси шаклида излаш керак. Бунда кўпҳаднинг озод ҳади ҳамда унинг биринчи даражали ҳади дифференциаллаганда йўқолиб кетади; шунинг учун уларни хусусий ечим таркибига киритмаса ҳам бўлади.

Шундай қилиб, α характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлган ҳолда хусусий ечимни

$$y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$$

кўринишда олиш мумкин.

1-мисол. *Ушбу*

$$y'' + 4y' + 3y = x$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими қуйидаги бўлади:

$$\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

Берилган бир жинслимас тенгламанинг ўнг томони xe^{0x} кўринишда (яъни $P_1(x)e^{0x}$ кўринишда) бўлиб, $k^2 + 4k + 3 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизи 0 бўлмагани сабабли, хусусий ечимни $y^* = Q_1(x)e^{0x}$ шаклда излаймиз, яъни

$$y^* = A_0x + A_1$$

деб оламиз. Бу ифодани берилган тенгламага қўйсак

$$4A_0 + 3(A_0x + A_1) = x$$

---

*) α — комплекс сон бўлганда ҳам юқорида келтирилган натижаларнинг ҳаммаси ўз кучида қолишини эслатиб ўтамиз (бу e^{mx} функцияни дифференциаллаш қоидасидан келиб чиқади, m — ихтиёрий комплекс сон. VII боб, 4- § га қаранг).

тенглама ҳосил бўлади. Бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни тенглаб,

$$3A_0 = 1 \qquad 4A_0 + 3A_1 = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз; бундан

$$A_0 = \frac{1}{3}, \qquad A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Демак,

$$y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

Умумий ечим $y = \bar{y} + y^*$, яъни

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини осонгина топамиз

$$\bar{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

Берилган тенгламанинг $(x^2 + 1)e^{3x}$ ўнг томони

$$P_2(x)e^{3x}$$

кўринишдадир. Даража кўрсаткичдаги коэффициент 3 характеристик тенгламанинг илдизи булмагани учун хусусий ечимни

$$y^* = Q_2(x)e^{3x} \quad \text{ёки} \quad y^* = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

кўринишда излаймиз. Бу ифодаларни дифференциал тенгламага қўйсак

$$[9(Ax^2 + Bx + C) + 6(2Ax + B) + 2A + 9(Ax^2 + Bx + C)]e^{3x} = (x^2 + 1)e^{3x}$$

тенглик ҳосил бўлади. e^{3x} га қисқартириб ва x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$18A = 1, \qquad 12A + 18B = 0, \qquad 2A + 6B + 18C = 1,$$

булардан $A = \frac{1}{18}$, $B = -\frac{1}{27}$, $C = \frac{5}{81}$. Демак, хусусий ечим

$$y^* = \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

ва умумий ечим

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}\right)e^{3x}$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Ечиш. Бу ерда ўнг томон $P_1(x)e^{1\cdot x}$ кўринишда бўлиб, даража кўрсаткичдаги 1 коэффициент характеристик кўпҳаднинг оддий илдизи. Демак, хусусий ечимни $y^* = xQ_1(x)e^x$ ёки

$$y^* = x(Ax + B)e^x$$

кўринишда излаймиз; бу ифодани тенгламага қўйсак:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + \\ + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x$$

ёки

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x - 2)e^x.$$

Бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенгласак:

$$-10A=1, \qquad -5B + 2A = -2,$$

бундан

$A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$ эканини топамиз. Демак, хусусий ечим

$$y^* = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x,$$

умумий ечим

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x.$$

II. Ўнг томон

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{5}$$

кўринишда бўлсин, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$—кўпҳадлар.

Агар тригонометрик функциялардан кўрсаткичли функцияларга ўтилса, бу ҳолни бундан олдинги ҳолда татбиқ этилган усул билан қаралиши мумкин. $\cos\beta x$ ҳамда $\sin\beta x$ функцияларни Эйлер формулаларига кўра (VII боб 5-параграфга қаранг) кўрсаткичли функциялар билан алмаштирсак,

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + Q(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

ёки

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}P(x) + \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x} + \left[\frac{1}{2}P(x) - \frac{1}{2i}Q(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{6}$$

бўлади. Бунда ўрта қавслар ичида кўпҳадлар турган бўлиб, уларнинг даражалари $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларнинг даражаларидан энг каттасига тенг. Шундай қилиб, ўнг томондаги кўриниш 1 ҳолда кўрилган ҳолга келди.

Комплекс сонларни ўз ичига олмайдиган хусусий ечимларни топиш мумкинлигини исботлаб бўлади (биз исботини келтирмаймиз).

Шундай қилиб, (1) тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{7}$$

кўринишда бўлса, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг кўпҳадлари, у ҳолда хусусий ечимнинг кўриниши қуйидагича аниқланади:

а) агар $\alpha + i\beta$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{8}$$

кўринишда излаш керак, бунда $U(x)$ ва $V(x)$—даражаси $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг бўлган кўпҳадлардир;

б) агар $\alpha+i\beta$ сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда хусусий ечимни

$$y^*=x[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x] \qquad (9)$$

кўринишда ёзамиз.

Шу билан бир қаторда юз бериши мумкин бўлган хатодан сақланиш учун (8) ва (9) хусусий ечимларнинг шакли (1) тенгламанинг ўнг томонидаги $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадлардан бирортаси айнан нолга тенг бўлган ҳолда, яъни ўнг томон

$$P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ ёки } Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

кўринишда бўлган вақтда ҳам сақланишини эътиборга олиш зарур.

Энди муҳим бир хусусий ҳолни қараймиз. Иккинчи тартибли чизиқли тенгламанинг ўнг томони

$$f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x, \qquad (7')$$

кўринишда бўлсин, бунда M ва N—ўзгармас сонлар.

а) агар βi характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, хусусий ечимни

$$y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x \qquad (8')$$

кўринишда излаш керак,

б) агар βi сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$y^*=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x) \qquad (9')$$

кўринишда излаш керак.

(7′) функция (7) функциянинг хусусий ҳоли ($P(x)=M$, $Q(x)=N$, $\alpha=0$) эканини, (8′) ва (9′) функциялар эса (8) ва (9) функцияларнинг хусусий ҳоли эканини қайд қилиб ўтамиз.

4-мисол. Бир жинслимас чизиқли

$$y''+2y'+5y=2\cos x$$

тенгламанинг умумий интеграли топилсин.

Ечиш. $k^2+2k+5=0$ характеристик тенглама $k_1=-1+2i$; $k_2=-1-2i$ илдизларга эга. Шунинг учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий интеграли

$$\overline{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

бўлади. Бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

кўринишда излаймиз, бунда A ва B аниқланиши керак бўлган ўзгармас коэффициентлар.

y^* ни берилган тенгламага қўйсак, у қуйидаги кўринишни олади:

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x$$

$\cos x$ ва $\sin x$ олдидаги коэффициентларни тенглаб, A ва B коэффициентларни аниқлаш учун иккита тенглама ҳосил қиламиз:

$$-A + 2B + 5A = 2, \qquad -B - 2A + 5B = 0,$$

бундан $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$. Берилган тенгламанинг умумий ечими $\overline{y} = y + y^*$, яъни

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Ечиш. Характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ бўлади, шунинг учун бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

кўринишда бўлади. Бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

кўринишда излаймиз. Бу ҳолда

$$y^{*\prime} = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$y^{*\prime\prime} = -4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(-A\sin 2x + B\cos 2x).$$

Ҳосилаларнинг бу ифодаларини берилган тенгламага қўйиб ва $\cos 2x$ ҳамда $\sin 2x$ олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб, A ва B ни аниқлаш учун $4B = 1$; $-4A = 0$ тенгламалар системасини ҳосил қиламиз, бундан $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$. Демак, берилган тенгламанинг умумий интеграли:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x.$$

6-мисол. Ушбу тенглама ечилсин:

$$y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$$

Ечиш. Тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = e^{2x}(M\cos x + N\sin x)$$

кўринишда бўлиб, бунда $M = 3$, $N = 0$. $k^2 - 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ илдизларга эга. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$$

бўлади. $\alpha + i\beta = 2 + i\cdot 1$ комплекс сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун, хусусий ечимни

$$y^* = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$$

кўринишда излаймиз. Бу ифодани тенгламага қўйиб, ўхшаш ҳадларини ихчамлагандан кейин

$$(2A + 4B)e^{2x}\cos x + (-4A + 2B)e^{2x}\sin x = 3e^{2x}\cos x$$

тенглик ҳосил бўлади. $\cos x$ ва $\sin x$ олдидаги коэффициентларни тенглаб

$$2A + 4B = 3, \qquad -4A + 2B = 0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бундан $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{3}{5}$. Демак, хусусий ечим

$$y^* = e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$$

бўлиб, умумий ечим эса

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{3}{5}\sin x\right)$$

бўлади.

Изоҳ. Бу параграфдаги мулоҳазаларнинг барчаси биринчи тартибли чизиқли тенглама учун ҳам ўринли эканини қайд қилиб ўтамиз. Масалан, ўзгармас коэффициентли биринчи тартибли тенгламани қарайлик (бу тенглама кўпинча техник тадқиқотларда учраб туради):

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \tag{10}$$

бунда a ва b — ўзгармас сонлар. Бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k + a = 0, \qquad k = -a.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = Ce^{-ax}$$

бўлади. Бир жинслимас тенгламанинг хусусий y^* ечимини

$$y^* = B$$

шаклда излаймиз. Буни (10) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$ab = b, \qquad B = b/a.$$

Демак,

$$y^* = b/a.$$

(10) тенгламанинг умумий ечими:

$$y = \overline{y} + y^* \text{ ёки } y = Ce^{-ax} + b/a \tag{11}$$

бўлади.

25-§. Юқори тартибли бир жинслимас чизиқли тенгламалар

Ушбу тенгламани қараймиз:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{1}$$

бунда a_1, $a_2, \ldots, a_n$ $f(x)$ лар x нинг узлуксиз функциялари (ёки ўзгармас сонлар).

Бу тенгламага мос бир жинсли

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0 \tag{2}$$

тенгламанинг

$$\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\ \ldots\ +C_ny_n \tag{3}$$

умумий ечими маълум бўлсин.

Иккинчи тартибли тенгламадаги каби (1) тенглама учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Агар* $\bar{y}$ *бир жинсли* (2) *тенгламанинг умумий ечими,* y^* *эса бир жинслимас* (1) *тенгламанинг хусусий ечими бўлса, у ҳолда*

$$Y=\bar{y}+y^*$$

бир жинслимас тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Шундай қилиб, (1) тенгламани интеграллаш масаласи, иккинчи тартибли тенгламани интеграллаш каби бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини топишга келтирилади.

Иккинчи тартибли тенгламадаги каби (1) тенгламанинг хусусий ечимини (3) ифодадаги C_1, C_2, $\ldots$, C_n ларни x нинг функцияси деб ҳисоблаб, ихтиёрий ўзгармас миқдорларни вариациялаш методи билан топиш мумкин.

Тенгламалар системасини тузамиз (23·§ билан таққосланг):

$$\left.\begin{array}{l}
C_1'\,y_1+C_2'\,y_2+\ldots+C_n'y_n=0,\\
C_1'\,y_1'+C_2'\,y_2'+\ldots+C_n'\,y_n'=0,\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
C_1'\,y_1^{(n-2)}+C_2'\,y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'\,y_n^{(n-2)}=0,\\
C_1'\,y_1^{(n-1)}+C_2'\,y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'\,y_n^{(n-1)}=f(x).
\end{array}\right| \tag{4}$$

C_1', C_2', $\ldots$, C_n' номаълум функцияларни ўз ичига олган бу тенгламалар системаси аниқ ечимга эга. (C_1', C_2', $\ldots$, C_n' лар олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминант бир жинсли тенгламанинг y_1, y_2, $\ldots$, y_n хусусий ечимларидан тузилган Вронский детерминанти бўлиб, шартга кўра, бу хусусий ечимлар чизиқли эркли бўлгани сабабли детерминант нолдан фарқлидир.)

Шундай қилиб, (4) системани C_1', C_2', ..., C_n' функцияларга нисбатан ечиш мумкин. Уларни топиб ва интеграллаб,

$$C_1 = \int C_1' \, dx + \overline{C}_1, \; C_2 = \int C_2' \, dx + \overline{C}_2, \; \ldots, \; C_n = \int C_n' \, dx + \overline{C}_n$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, бунда $\overline{C}_1$ $\overline{C}_2$ ... $\overline{C}_n$ — интеграллаш ўзгармасларидир.

Бундай ҳолда

$$y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{5}$$

ифода бир жинслимас (1) тенгламанинг умумий ечими бўлишини исбот қиламиз.

(5) ифодани n марта дифференциаллаймиз, бунда ҳар сафар (4) тенгликни эътиборга оламиз:

$$\begin{gathered}
y^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \\
y^{*\prime} = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n', \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
y^{*(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}, \\
y^{*(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + f(x).
\end{gathered}$$

Биринчи, иккинчи, ..., ва ниҳоят, энг кейингидан олдинги тенглама ҳадларини мос тартибда a_n, a_{n-1}, ..., a_1 га кўпайтириб ва натижаларни қўшиб,

$$y^{*(n)} + a_1 y^{*(n-1)} + \ldots + a_n y^* = f(x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, y_1, y_2, ..., y_n функциялар бир жинсли тенгламанинг хусусий ечимлари бўлгани учун вертикал устунлар бўйича қўшганда ҳосил бўлган ҳадлар йиғиндиси нолга тенг.

Демак, $y^* = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ функция (бунда C_1, ..., C_n лар x нинг функциялари бўлиб, улар (4) тенгламалар системасидан аниқланади) бир жинслимас (1) тенгламанинг ечими бўлади, аммо бу ечим n та $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ ..., $\overline{C}_n$ ихтиёрий ўзгармас миқдорларга боғлиқ бўлгани учун, у умумий ечимдан иборатдир.

Шундай қилиб, теорема исботланди.

Ўзгармас коэффициентли юқори тартибли бир жинслимас тенгламанинг (24- параграфга қаранг) хусусий ечимлари баъзи ҳолларда анча содда топилади, чунончи:

I. Дифференциал тенгламанинг ўнг томонида $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ функция турган бўлсин, бунда $P(x)$ ифода x га нисбатан кўпҳад, бу ерда икки ҳолни ажратиш керак:

а) агар α характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, у ҳолда хусусий ечимни

$$y^* = Q(x)e^{\alpha x}$$

кўринишда излаш мумкин, бунда $Q(x)$ — коэффициентлари номаълум бўлган ва даражаси $P(x)$ нинг даражаси билан бир хил бўлган кўпҳад;

б) агар α характеристик тенгламанинг μ каррали илдизи бўлса, бу ҳолда бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = x^{\mu}\ Q(x)e^{\alpha x}$$

кўринишда излаш мумкин бўлиб, бунда $Q(x)$ — даражаси $P(x)$ нинг даражаси билан бир хил бўлган кўпҳад.

II. Тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = M\cos\beta\, x + N\sin\beta\, x$$

кўринишда бўлиб, бунда M ва N — ўзгармас сонлардир. Бу ҳолда хусусий ечимнинг кўриниши қуйидагича аниқланади:

а) агар βi характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, бу ҳолда хусусий ечим

$$y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta\, x$$

кўринишда бўлади, бунда A ва B ноаниқ ўзгармас коэффициентлар;

б) агар βi характеристик тенгламанинг μ каррали илдизи бўлса, у ҳолда хусусий ечим

$$y^* = x^{\mu}\ (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

кўринишда бўлади.

III. Тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

кўринишида бўлсин, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ ифодалар x га нисбатан кўпҳадлар. Бу ҳолда:

а) агар $\alpha + \beta i$ характеристик кўпҳаднинг илдизи бўлмаса, хусусий ечимни

$$y^* = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

кўринишда излаймиз, бунда $U(x)$ ва $V(x)$ — даражаси $P(x)$ ва $Q\ (x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг бўлган кўпҳадлардир;

б) агар $\alpha + \beta i$ характеристик кўпҳаднинг μ каррали илдизи бўлса, хусусий ечимни

$$y^* = x^{\mu}\ [U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$$

кўринишда излаймиз, бунда $U(x)$ ва $V(x)$ — даражаси $P(x)$ ва $Q(x)$ кўпҳадларнинг энг юқори даражасига тенг бўлган кўпҳадлардир.

II ва III ҳолларга тегишли умумий эслатма. Ҳатто тенгламанинг ўнг томонида фақат $\cos\beta x$ ёки фақат $\sin\beta x$ ни ўз ичига олган ифода турган ҳолда ҳам, биз ечимни юқорида кўрсатилган кўринишда, яъни синус ҳамда косинус билан излашимиз керак. Бошқача айтганда, тенгламанинг ўнг томони $\cos\beta x$ ёки $\sin\beta x$ ни ўз ичига олмаслигидан ҳеч вақт унинг хусусий ечими бу функцияларни ўз ичига олмайди, деган натижа келиб чиқмайди. Бу ҳақда ўтган параграфдаги 4, 5, 6-мисолларни ҳамда бу параграфда келтирилган 2- мисолни кўриб чиқиш билан ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

1- мисол. Ушбу

$$y^{IV} - y = x^3 + 1$$

тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. $k^4 - 1 = 0$ характеристик тенглама

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = -1, \qquad k_3 = i, \qquad k_4 = -i$$

илдизларга эга. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз (22-параграфдаги 4- мисолга қаранг):

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$$

кўринишда излаймиз.

y^* ни тўрт марта дифференциаллаб ва ҳосил қилинган ифодаларни берилган тенгламага қўйиб,

$$-A_0x^3 - A_1x^2 - A_2x - A_3 = x^3 + 1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Даражалари бир хил бўлган x лар олдидаги коэффициентларни тенглаймиз:

$$-A_0 = 1, \qquad -A_1 = 0 \qquad -A_2 = 0, \qquad -A_3 = 1.$$

Демак,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Бир жинслимас тенгламанинг умумий интеграли $y = \overline{y} + y^*$ формула бўйича топилади, яъни

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x - x^3 - 1.$$

2- мисол. Ушбу

$$y^{IV} - y = 5\cos x$$

тенглама ечилсин.

Ечиш. $k^4 - 1 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k_3 = i$. $k_4 = -i$ илдизларга эга. Демак, берилган тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

бўлади. Энди берилган бир жинслимас тенгламанинг ўнг томони

$$f(x) = M\cos x + N\sin x$$

кўринишда бўлиб, бунда $M = 5$, $N = 0$.

i характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун хусусий ечимни

$$y^* = x(A\cos x + B\sin x)$$

кўринишда излаймиз. Бу ифодани тенгламага қўйиб,

$$4A\sin x - 4B\cos x = 5\cos x$$

тенгликни топамиз, бундан

$$4A = 0, \qquad -4B = 5,$$

яъни $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. Демак, дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$y^* = -\frac{5}{4}x\sin x,$$

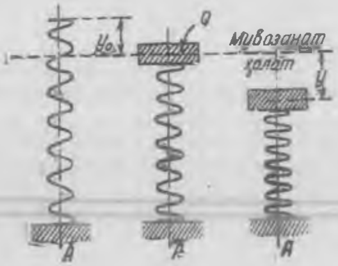
умумий ечими эса,

$$y = C_1e^x + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x - \frac{5}{4}x\sin x$$

бўлади.

26-§. Механик тебранишларнинг дифференциал тенгламаси

Бу ва бундан кейинги параграфларда биз татбиқий механиканинг бир масаласини қараймиз ва бу масалани чизиқли дифференциал тенгламалар ёрдамида текширамиз ва ечамиз.



274- расм.

Массаси Q бўлган юк эластик рессорда турган бўлсин (274- расм). Юкнинг мувозанат ҳолатидан оғишини y билан белгилаймиз. Пастга оғишини мусбат, юқорига оғишини манфий деб фараз қиламиз. Юк мувозанатда турганда оғирлик кучи пружинанинг эластиклиги билан тенглашади. Юкни мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи куч (тикловчи куч деб аталадиган куч) оғиш миқдорига пропорционал бўлсин, яъни $-ky$ бўлсин деб фараз қилайлик, бунда k — берилган рессор учун бирор ўзгармас миқдор (бу рессорнинг*) бикирлиги деб аталади.

Q юкнинг ҳаракатига, ҳаракат йўналишига қарши томонга йўналган қаршилик кучи тўсқинлик қилсин ва рессорнинг пастки нуқтасига нисбатан юк ҳаракатининг тезлигига пропорционал бўлсин деб, яъни куч $-\lambda v = -\lambda\frac{dy}{dt}$ деб фараз қилайлик, бунда $\lambda = \text{const} > 0$ (амортизатор). Юкнинг рессордаги ҳаракатининг

---

*) Тикловчи куч оғишга пропорционал бўлган рессорлар „чизиқли характеристикали“ рессорлар деб аталади.

дифференциал тенгламасини ёзамиз. Ньютоннинг иккинчи қонунига мувофиқ:

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

(бунда k ва λ — мусбат сонлар). Биз иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама ҳосил қилдик.

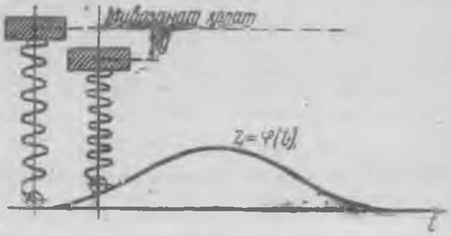
Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0 \tag{1'}$$

бунда

$p = \frac{\lambda}{Q}$, $q = \frac{k}{Q}$ деб белгиланган.

Энди рессорнинг пастдаги A нуқтаси $z = \varphi(t)$ қонун бўйича вертикал ҳаракат қилади, деб фараз қилайлик. Бу ҳол, масалан, рессорнинг пастдаги учи ғилдиракчага бириктирилган бўлиб, бу ғилдиракча рессор ҳамда юк билан биргаликда текисмас жойда ҳаракат қилганда юз беради (275-расм).



275- расм.

Бу ҳолда тикловчи куч $-ky$ га тенг бўлмай, балки $-k[y+\varphi(t)]$ қаршилик кучи $-\lambda[y'+\varphi'(t)]$ га тенг бўлади ва биз (1) тенглама ўрнига

$$Q\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dy}{dt} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \tag{2}$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(t) \tag{2'}$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда

$$f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{Q}.$$

Биз иккинчи тартибли бир жинслимас дифференциал тенглама ҳосил қилдик.

(1′) тенглама *эркин* тебранишлар тенгламаси дейилади, (2′) тенглама эса *мажбурий* тебранишлар тенгламаси дейилади.

27-§. Эркин тебранишлар. Гармоник тебранишларнинг вектор ва комплекс тасвирлари

Дастлаб эркин тебранишлар тенгламасини қараймиз:

$$y'' + py' + qy = 0 \ (p > 0, \ q > 0, \ 26\text{-}\S \text{ га қаранг}). \qquad (1)$$

Мос характеристик тенгламани ёзамиз:

$$k^2 + pk + q = 0$$

ва бу тенглама илдизларини топамиз:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) $\frac{p^2}{4} > q$ бўлсин. Бу ҳолда k_1 ва k_2 ҳақиқий ва манфий сонлар бўлади. Умумий ечим кўрсаткичли функциялар орқали ифода этилади:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \qquad (k_1 < 0, \quad k_2 < 0). \qquad (2)$$

Бу формуладан кўринадики, агар $t \to \infty$ бўлса, y оғиш бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам асимптотик равишда нолга интилади. Қаралаётган ҳолда, қаршилик кучи рессорнинг k бикирлик коэффициентидан катта бўлгани учун тебраниш бўлмайди.

2) $\frac{p^2}{4} = q$ бўлсин; бу ҳолда k_1 ва k_2 илдизлар бир-бирига тенг (ва $-\frac{p}{2}$ манфий сонга тенг). Шунинг учун умумий ечим

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{pt}{2}} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{pt}{2}} \qquad (3)$$

бўлади. Бу ерда $t \to \infty$ да оғиш ҳам нолга интилади, аммо $C_1 + C_2 t$ кўпайтувчининг борлиги сабабли олдинги ҳолдаги каби тез нолга интилмайди ($C_1 + C_2 t$ кўпайтувчи 0 га яқинлашишга таъсир қилади).

3) $p = 0$ бўлсин, яъни қаршилик кучи қатнашмасин. (1) тенглама

$$y'' + qy = 0 \qquad (4)$$

кўринишни олади. Бу ҳолда характеристик тенглама

$$k^2 + q = 0$$

кўринишда бўлади, унинг илдизлари $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$ бўлиб, бунда $\beta = \sqrt{q}$. Умумий ечим

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \qquad (5)$$

Охирги формулада C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармас миқдорларни бошқа миқдорлар билан алмаштирамиз. Чунончи C_1 ва C_2 билан

$$C_1 = A \sin \varphi_0, \qquad C_2 = A \cos \varphi_0$$

муносабатлар орқали боғланган A ва φ_0 ўзгармас миқдорларни киритамиз. A ҳамда φ_0 лар C_1 ва C_2 орқали қуйидагича аниқланади:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc} tg \frac{C_1}{C_2}.$$

C_1 ва C_2 қийматларини (5) формулага қўйсак,

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos\varphi_0 \sin \beta t$$

ёки

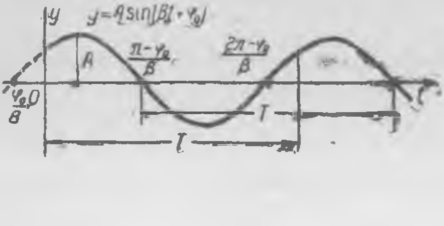
$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) \tag{6}$$

ҳосил бўлади.

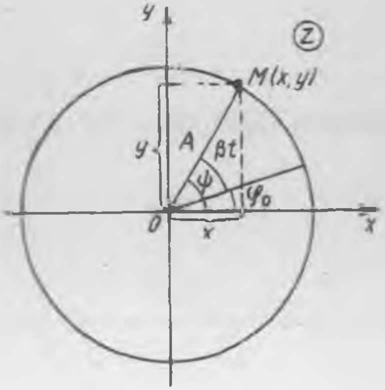
Бу ҳолда тебранишлар *гармоник* тебранишлар деб аталади. Интеграл эгри чизиқлар эса синусоидалардан иборатдир. Синуснинг аргументи 2π га ўзгарадиган T вақт оралиги тебраниш *даври* дейилади; қаралаётган ҳолда $T = \frac{2\pi}{\beta}$; 2π вақт ичидаги тебранишлар сони тебраниш *частотаси* дейилади. Ҳозирги ҳолда частота β га тенг; мувозанат ҳолатдан энг катта оғиш миқдори A — тезланиш *амплитудаси* дейилади; φ_0 — *бошланғич фаза* дейилади. (6) функциянинг графиги 276- расмда тасвир этилган.

Электротехника ҳамда бошқа фанларда гармоник тебранишларнинг комплекс ва вектор тасвирларидан кенг фойдаланилади.

xOy комплекс текисликда ўзгармас $|\boldsymbol{A}| = A = \text{const}$ узунликдаги $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$ радиус-векторни қараймиз.



276- расм.



277- расм.

A векторнинг учи t параметр ўзгариб борганда (берилган ҳолда t — вақт) маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси A бўлган айлана чизади (277-расм). A вектор билан Ox ўқ орасида ҳосил бўлган ψ бурчак бундай ифодалансин: $\psi = \beta t + \varphi_0$. β миқдор **A** векторнинг *айланма бурчак тезлиги* дейилади, **A** векторнинг Oy ва Ox ўқлардаги проекциялари бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y &= A\sin(\beta t + \varphi_0), \\ x &= A\cos(\beta t + \varphi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(7) ифода (4) тенгламанинг ечимидир.

Ушбу

$$z = x + iy = A\cos(\beta t + \varphi_0) + iA\sin(\beta t + \varphi_0)$$

ёки

$$z = A\left[\cos(\beta t + \varphi_0) + i\sin(\beta t + \varphi_0)\right] \qquad (8)$$

комплекс миқдорни қараймиз.

(8) даги комплекс z миқдор 1-§ да кўрсатилганидек, **A** вектор билан тасвирланади.

Шундай қилиб, (4) гармоник тебранишлар тенгламасининг ечимини *бошланғич φ_0 фазада β бурчак тезлик билан айланувчи A векторнинг Oy ва Ox ўқларидаги проекциялари* деб қараш мумкин.

Эйлер формуласидан фойдаланиб (VII боб, 5-§ (4) га қаранг) (8) ифодани бундай ёзиш мумкин:

$$z = Ae^{i(\beta t + \varphi_0)}. \qquad (9)$$

(9) ифоданинг мавҳум ва ҳақиқий қисмлари (4) тенгламанинг ечимларидир, (9) ифода (4) тенгламанинг комплекс ечими деб аталади. (9) ифодани бундай кўчириб ёзамиз:

$$z = Ae^{i\varphi_0}e^{i\beta t}. \qquad (10)$$

$Ae^{i\varphi_0}$ *комплекс амплитуда* дейилади. Уни A^* билан белгилаймиз. Бу ҳолда (10) ечим бундай ёзилади:

$$z = A^* e^{i\beta t}. \qquad (11)$$

4) $p \neq 0$ ва $\frac{p^2}{4} < q$ бўлсин.

Бу ҳолда характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлардир:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta,$$

бунда

$$\alpha = -\frac{p}{2} < 0, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{2}}.$$

Умумий интеграл

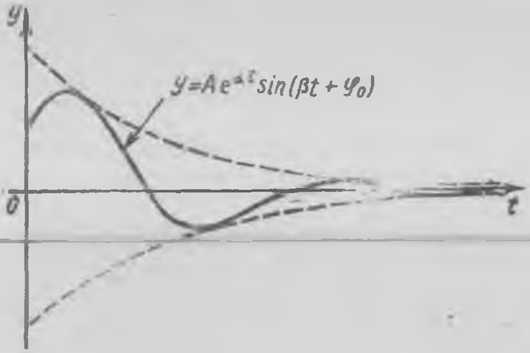
$$y = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) \qquad (12)$$

ёки

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \tag{13}$$

кўринишда бўлади.

Бу ерда вақтга боғлиқ бўлган $Ae^{\alpha t}$ миқдорни амплитуда деб қарашга тўғри келади. $\alpha < 0$ бўлганидан, бу миқдор $t \to \infty$ да нолга интилади, яъни бу ерда биз *сўнувчи тебранишлар* билан иш кўрамиз. Сўнувчи тебранишларнинг графиги 278-расмда тасвирланган.



278- расм.

28- §. Мажбурий тебранишлар

Мажбурий тебранишлар тенгламаси

$$y'' + py' + qy = f(t) \qquad (p > 0,\ q > 0,\ 26\text{-§ га қ.}) \tag{1}$$

кўринишда бўлади.

Қўзғатувчи ташқи куч даврий бўлиб,

$$f(t) = a \sin \omega t$$

қонун бўйича ўзгарадиган ва амалий жиҳатдан муҳим бўлган ҳолни қараймиз; бу ҳолда (1) тенглама

$$y'' + py' + qy = a \sin \omega t \tag{1'}$$

кўринишни олади.

1) Дастлаб, $p \neq 0$ ва $\frac{p^2}{4} < q$ деб, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари $\alpha \pm i\beta$ кўринишдаги комплекс сонлар деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (27- параграфдаги (12) ва (13) формулаларга қаранг) бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \tag{2}$$

кўринишда бўлади. Бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = M\cos\omega t + N\sin\omega t \tag{3}$$

кўринишда излаймиз.

y^* нинг бу ифодасини дастлабки дифференциал тенгламага қўйиб, M ва N нинг қийматларини топамиз:

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega)^2 + p^2\omega^2}, \qquad N = \frac{(q-\omega^2)a}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

M ва N нинг топилган қийматларини (3) тенгликка қўйишдан илгари

$$M = A^*\sin\varphi^*, \qquad N = A^*\cos\varphi^*,$$

яъни

$$A^* = \sqrt{M^2+N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi^* = \frac{M}{N}$$

деб олиб, янги A^* ва φ^* ўзгармас миқдорларни киритамиз.

Бу ҳолда бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечимини

$$y^* = A^*\sin\varphi^*\cos\omega t + A^*\cos\varphi^*\sin\omega t = A^*\sin(\omega t + \varphi^*)$$

ёки

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi^*)$$

кўринишда ёзиш мумкин, (1) тенгламанинг умумий интеграли $y = \bar{y} + y^*$, яъни

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi^*).$$

Бир жинслимас тенглама ечимининг ўнг томонида турган йиғиндининг биринчи ҳади (бир жинсли тенгламанинг ечими) сўнувчи тебранишларни билдиради; t ўсиб борганда y камайиб боради ва демак, маълум вақт ўтгандан кейин мажбурий тебранишларни аниқловчи иккинчи ҳад ҳал қилувчи аҳамиятга эга бўлади. Бу тебранишларнинг ω частотаси ташқи куч $f(t)$ нинг частотасига тенг; p қанча кичик бўлса ва ω^2 частота q га қанча яқин бўлса, мажбурий тебранишлар амплитудаси шунча катта бўлади.

p нинг турли қийматларида мажбурий тебранишлар амплитудаси билан ω частотанинг боғланишини тўлароқ текширамиз. Бунинг учун мажбурий тебраниш амплитудасини $D(\omega)$ билан белгилаймиз:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}.$$

$q = \beta_1^2$ деб фараз қиламиз ($p = 0$ бўлганда β_1 хос тебранишлар частотасига тенг бўларди). Бу ҳолда

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2}\right)^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2}\,\frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\omega/\beta_1 = \lambda, \qquad p/\beta_1 = \gamma,$$

бунда λ қўзғатувчи куч частотасининг система эркин тебранишлари частотасига нисбати, γ эса қўзғатувчи кучга боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдордир. Бу ҳолда амплитуда миқдори ушбу

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2}} \tag{4}$$

формула билан ифода этилади. Бу функциянинг максимумини топамиз. Бу максимум λ нинг махраж квадратини минимумга айлантирадиган қийматида бўлиши равшан. Лекин

$$\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + \gamma^2\lambda^2} \tag{5}$$

функция

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

бўлганда минимумга эришади ва бу минимум

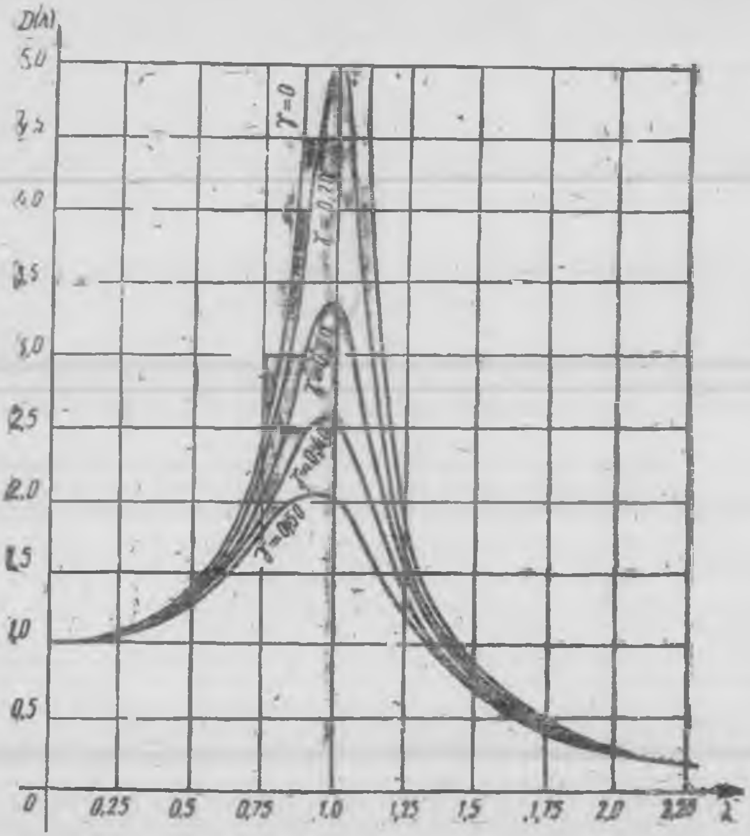
$$\gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

ифодага тенг бўлади. Демак,

$$\bar{D}_{max} = \frac{a}{\beta_1^2 \gamma \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

амплитуданинг максимал миқдори бўлади. γ нинг турли қийматларидаги $\bar{D}(\lambda)$ функциянинг графиклари 279-расмда кўрсатилган (графикларни ясашда аниқлик учун $a = 1$, $\beta_1 = 1$ деб олинган). Бу эгри чизиқлар *резонанс эгри чизиқлари* деб аталади.

(5) формуладан γ кичик қийматлар олганда λ нинг 1 га яқин қийматларида, яъни ташқи куч частотаси эркин тебранишлар частотасига яқин бўлганда амплитуданинг максимумга эга бўлиши кўринади. Агар $\gamma = 0$ бўлса (демак, $p = 0$), яъни ҳаракатга қаршилик кўрсатилмаса, у ҳолда $\lambda \to 1$ да мажбурий



279- расм.

тебранишлар амплитудаси чексиз ўсиб боради, яъни $\omega \to \beta_1 = \sqrt{q}$ да:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ (\gamma = 0)}} \bar{D}(\lambda) = \infty.$$

$\omega^2 = q$ бўлганда резонанс ҳодисаси юз беради.

2) Энди $p = 0$ деб фараз қиламиз, яъни даврий ташқи куч мавжуд бўлганда қаршиликсиз эластик тебранишлар тенгламасини қараймиз:

$$y'' + qy = a \sin \omega t. \tag{6}$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий интеграли

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t \qquad (\beta^2 = q)$$

кўринишда бўлади.

Агар $\beta \neq \omega$ бўлса, яъни ташқи куч частотаси хос тебранишлар частотасига тенг бўлмаса, у ҳолда бир жинслимас тенгламанинг хусусий ечими

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t$$

кўринишда бўлади.

Бу ифодани дастлабки тенгламага қўйиб,

$$M = 0, \qquad N = \frac{a}{q - \omega^2}$$

эканини топамиз. Умумий ечим

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t$$

бўлади. Шундай қилиб, частотаси β бўлган хос тебраниш билан частотаси ω бўлган мажбурий тебраниш қўшилиши натижасида ҳаракат вужудга келади.

Агар $\beta = \omega$ бўлса, яъни хос тебранишлар частотаси билан ташқи куч частотаси бир хил бўлса, бу ҳолда (3) функция (6) тенгламанинг ечими бўлмайди. Бу ҳолда 24-параграфдаги натижаларга мувофиқ, хусусий ечимни

$$y^* = t(M \cos \omega t + N \sin \omega t) \quad (7)$$

кўринишда излаш керак. Бу ифодани тенгламага қўйиб, M ва N қийматларини топамиз:

$$M = -\frac{a}{2\beta}, \qquad N = 0.$$

Демак,

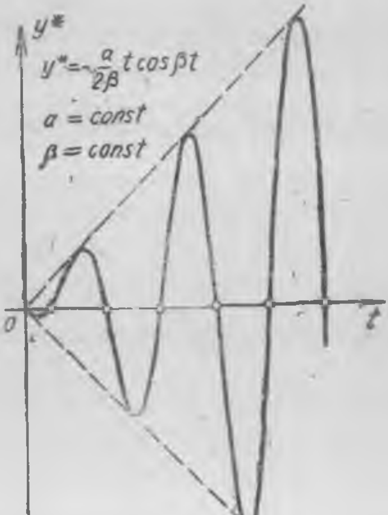
$$y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \beta t.$$

Умумий ечим

$$y = A \sin (\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} t \cos \beta t$$

кўринишда бўлади.

Бу ҳолда ўнг томонда турган иккинчи ҳад t вақт ўсганда тебраниш амплитудасининг чексиз ўсиб боришини кўрсатади. Системанинг хос тебранишлари частотаси ташқи



280- расм.

куч частотаси билан бир хил бўлганда юз берадиган бу ҳодиса *резонанс* деб аталади. 280-расмда y^* функциянинг графиги тасвирланган.

29-§. Оддий дифференциал тенгламалар системаси

Кўп масалаларни ечишда x аргумент, номаълум y_1, y_2, ..., y_n функциялар ва уларнинг ҳосилаларини ўз ичига олган дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантирувчи $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, . . . , $y_n=y_n(x)$ функцияларни топиш талаб этилади.

Биринчи тартибли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

бунда y_1, y_2, . . . , y_n — изланаётган функциялар, x эса аргумент.

Чап томонида биринчи тартибли ҳосилалар турган, ўнг томони ҳосилаларни ўз ичига *олмаган* бундай тенгламалар системаси *нормал* система дейилади.

Системани интеграллаш (1) тенгламалар системасини ва

$$(y_1)_{x=x_0} = y_{10}, \qquad (y_2)_{x=x_0} = y_{20}, \ \ldots, \qquad (y_n)_{x=x_0} = y_{n0} \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи y_1, y_2, . . . , y_n функцияларни топиш демакдир.

(1) кўринишдаги системани интеграллаш қуйидагича бажарилади:

(1) тенгламалардан биринчисини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial c} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

$\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, . . . , $\frac{dy_n}{dx}$ ҳосилаларни уларнинг тенгламалардаги f_1, f_2, . . . , f_n ифодалари билан алмаштириб,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Ҳосил бўлган тенгламани дифференциаллаб ҳамда юқоридагидек иш кўрсак,

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

тенгламани топамиз. Бундан кейин ҳам худди юқоридагидек давом этиб, ниҳоят,

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, биз ушбу системани ҳосил қилдик:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1 \ldots, y_n), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{array}\right| \quad (3)$$

Олдинги $n-1$ та тенгламадан $y_2, y_3, \ldots, y_n$ нинг x, y_1 ва

$$\frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$$

ҳосилалар орқали ифодасини (агар бу мумкин бўлса) аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{array}\right| \quad (4)$$

Бу ифодаларни (3) тенгламаларнинг энг охиргисига қўйиб, y_1 ни аниқлаш учун n-тартибли тенглама ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \quad (5)$$

Бу тенгламани ечиб, y_1 ни аниқлаймиз:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \quad (6)$$

(6) ифодани $n-1$ марта дифференциаллаб, $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots$ $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ ҳосилаларни $x, C_1, C_2, \ldots C_n$ ларнинг функцияси каби аниқлаймиз.

Бу функцияларни (4) тенгламаларга қўйиб, $y_2, y_3, \dots y_n$ ларни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Ҳосил қилинган ечимлар берилган (2) бошланғич шартларни қаноатлантириши учун (6) ва (7) тенгламалардан (*битта* дифференциал тенгламада қилганимиздек) $C_1, C_2, \dots, C_n$ ўзгармас миқдорларнинг мос қийматларини топишгина қолади.

1-изоҳ. Агар (1) система номаълум функцияларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси бўлса, (5) тенглама ҳам чизиқли тенглама бўлади.

1-мисол.

$$\frac{dy}{dx} = y + z + x, \qquad \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \qquad (а)$$

система

$$(y)_{x=0} = 1, \qquad (z)_{x=0} = 0 \qquad (б)$$

бошланғич шартларда интеграллансин.

Ечиш.

1) Биринчи тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.$$

Бунга $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dz}{dx}$ ҳосилаларнинг (а) тенгламалардаги ифодаларини қўйиб,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1 \qquad (в)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

2) (а) системанинг биринчи тенгламасидан

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x, \qquad (г)$$

буни (в) тенгламага қўямиз, у ҳолда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1$$

ёки

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1 \qquad (д)$$

тенглама ҳосил бўлади.

Кейинги тенгламанинг умумий ечими

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{-x} + 5x - 9 \qquad (е)$$

бўлади; (г) тенгламага асосан

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14. \qquad (ж)$$

Ўзгармас C_1 ва C_2 миқдорларни

$$(y)_{x=0} = 1, \qquad (z)_{x=0} = 0$$

(б) бошланғич шартлар қаноатланадиган қилиб танлаймиз. Бу ҳолда (е) ва (ж) тенгликлардан:

$$1 = C_1 - 9, \qquad 0 = C_2 - 2C_1 + 14$$

тенгликларни ҳосил қиламиз, бундан $C_1 = 10$; $C_2, = 6$. Шундай қилиб, берилган (б) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \qquad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14$$

кўринишда бўлади.

2-изоҳ. Юқоридаги мулоҳазаларда биз (3) системанинг олдинги $(n-1)$ та тенгламаларидан $y_2, y_3, \ldots, y_n$ функцияларни аниқлаш мумкин деб фараз қилган эдик. $y_2, y_3, \ldots y_n$ ўзгарувчиларни n та тенгламадан эмас, балки ундан кам сондаги тенгламалардан йўқотиш мумкин бўлган ҳолни ҳам кўп учратиш мумкин. Бу ҳолда бизда y ни аниқлаш учун тартиби n дан кичик бўлган тенглама ҳосил бўлади.

2-мисол.

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \qquad \frac{dy}{dt} = x + z, \qquad \frac{dz}{dt} = x + y$$

система интеграллансин.

Ечиш. Биринчи тенгламани t бўйича дифференциалласак,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = (x + z) + (x + y)$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

тенглама ҳосил бўлади.

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z$$

тенгламалардан y ва z ўзгарувчиларни йўқотсак, x га нисбатан иккинчи тартибли

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани интеграллаб, унинг умумий ечимини топамиз:

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}. \tag{α}$$

Бундан

$$\frac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} \text{ ва } y = \frac{dx}{dt} - z = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - z. \tag{β}$$

Берилган тенгламаларнинг учинчисига x ва y нинг топилган ифодаларини қўйиб, z ни аниқлаш учун

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2e^{2t}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб,

$$z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t} \tag{γ}$$

эканини топамиз. Аммо бу ҳолда (β) тенгламага асосан,

$$y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t} \tag{δ}$$

(α), (δ) ва (γ) тенгламалар берилган системанинг умумий ечимини беради.

Дифференциал тенгламалар системасига юқори тартибли ҳосилалар ҳам кириши мумкин. Бу ҳолда юқори тартибли дифференциал тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Масалан, моддий нуқтанинг F куч таъсири остида қиладиган ҳаракати ҳақидаги масала иккинчи тартибли учта дифференциал тенгламалар системасига келади. F_x, F_y, F_z — F кучнинг координата ўқларидаги проекциялари бўлсин. Нуқтанинг ҳар қандай t пайтдаги ўрни унинг x, y, z координаталари билан аниқланади. Демак, x, y, z координаталар t нинг функцияси бўлади. Нуқта тезлиги векторининг координата ўқларидаги проекциялари $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ бўлади.

F куч ва, демак, унинг F_x, F_y, F_z проекциялари ҳам t вақтга, нуқтанинг x, y, z вазиятига ва нуқта ҳаракатининг тезлигига, яъни $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ҳосилаларга боғлиқ деб, фараз қилайлик.

Бу масалада учта функция:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

изланаётган функциялардир. Бу функциялар динамика тенгламаларидан (Ньютон қонуни) аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Биз иккинчи тартибли учта дифференциал тенглама системасини ҳосил қилдик. Текисликдаги ҳаракатни, яъни траекторияси текисликдаги эгри чизиқдан иборат бўлган (масалан, траекторияси xOy текисликда ётган) ҳаракатни текширганимизда $x(t)$ ва $y(t)$ функцияларни аниқлаш учун тенгламаларининг сони иккита бўлган система ҳосил қиламиз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \tag{9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right). \tag{10}$$

Юқори тартибли дифференциал тенгламалар системасини биринчи тартибли тенгламалар системасига келтириш йўли билан ечиш мумкин. Буни (9) ва (10) тенгламаларни ечиб кўрсатамиз.

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v$$

деб белгилаймиз. Бу ҳолда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Иккита $x(t)$ ва $y(t)$ номаълум функцияли иккинчи тартибли (9) ва (10) тенгламалар системаси тўртта x, y, u, v номаълум функцияли биринчи тартибли тўртта тенгламалар системаси билан алмашинади:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v,$$

$$m\frac{du}{dt} = F_x(t,\ x,\ y,\ u,\ v),$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_y(t,\ x,\ y,\ u,\ v).$$

Охирида, системаларни ечишнинг кўрсатилган умумий усули айрим аниқ ҳолларда мақсадга тез келтирадиган сунъий усуллар билан алмаштирилиши мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

3-мисол.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = y$$

дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Биринчи тенгламанинг иккала томонини x бўйича икки марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Аммо $\frac{d^2z}{dx^2} = y$, шу сабабли $\frac{d^4y}{dx^4} = y$ тўртинчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, унинг умумий интегралини ҳосил қиламиз (22-параграфдаги 4-мисолга қаранг):

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Бундан $\frac{d^2y}{dx^2}$ ни топиб ва уни биринчи тенгламага қўйиб, z ни топамиз:

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

30-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси

Бизга ушбу дифференциал тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

берилган бўлсин, бунда a_{ij} коэффициентлар ўзгармас сонлар. Бу ерда t аргумент, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ изланаётган функциялар, (1) **система ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар системаси** дейилади.

Ўтган параграфда кўрсатиб ўтилгандек, бу системани битта n-тартибли тенгламага келтириш йўли билан ечиш мумкин бўлиб, у тенглама берилган ҳолда чизиқли тенглама бўлади (бу ўтган параграфдаги 1- изоҳда кўрсатиб ўтилган эди). Аммо (1) системани n-тартибли тенгламага келтирмасдан бошқа усул билан ечиш ҳам мумкин. Бу метод ечилишлар характерини бирмунча кўргазмали анализ қилиш имконини беради.

Системанинг хусусий ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \qquad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \qquad x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

$\alpha_1 e^{kt}$, $\alpha_2 e^{kt}$, ..., $\alpha_n e^{kt}$ функциялар (1) тенгламалар системасини қаноатлантирадиган ўзгармас α_1, α_2, α_3, ..., α_n ва k сонларни аниқлаш талаб қилинади. Уларни (1) системага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l}
k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\
k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\, e^{kt}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k\alpha_n e^{kt} = (a_{n21}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\, e^{kt}.
\end{array}\right|$$

e^{kt} га қисқартирамиз. Барча ҳадларни бир томонга ўтказиб ва α_1, α_2, ..., α_n олдидаги коэффициентларни тўплаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11}-k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\
a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\,\alpha_n = 0.
\end{array}\right| \tag{3}$$

α_1, α_2, ..., α_n ва k_n ларни (3) системани қаноатлантирадиган қилиб танлаб оламиз. Бу система α_1, α_2, ..., α_n га нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системасидир. (3) системанинг детерминантини тузамиз:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix}
a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-k)
\end{vmatrix}. \tag{4}$$

Агар k шундай бўлсаки, Δ детерминант нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (3) система фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ *ноль ечимга* эга бўлади, демак, (2) формула фақат *тривиал ечимни* беради:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Шундай қилиб, (2) тривиал бўлмаган ечимларни биз k нинг шундай қийматларида ҳосил қиламизки, бу қийматларда (4) детерминант нолга айланади. Биз k ни аниқлаш учун ушбу n-тартибли тенгламага келамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Бу тенглама (1) системанинг *характеристик тенгламаси* дейилади, унинг илдизлари *характеристик тенгламанинг илдизлари* дейилади.

Бир неча ҳолни кўриб чиқамиз.

I. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ билан характеристик тенгламанинг илдизларини белгилаймиз. Ҳар бир k_i илдиз учун (3) системани ёзамиз ва

$$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$$

коэффициентларни аниқлаймиз. Булардан биттасининг ихтиёрий бўлишини ва уни бирга тенг деб ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

k_1 илдиз учун (1) системанинг ечими

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \qquad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, \ldots, x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

k_2 илдиз учун (1) системанинг ечими

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \qquad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t}, \ldots, x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

k_n илдиз учун (1) системанинг ечими:

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \qquad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \ldots, \qquad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Бевосита тенгламага қўйиш йўли билан

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1\alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \\ x_2 &= C_1\alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \\ x_n &= C_1\alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)} e^{k_n t} \end{aligned}\right| \tag{6}$$

функциялар системаси ҳам, бунда $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ихтиёрий ўзгармас миқдорлар, (1) дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу (1) системанинг умумий ечимидир. Ўзгармас миқдорларнинг шундай қийматларини топиш мумкинки, бу қийматларда ечимнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўрсатиш мумкин.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$$

тенгламалар системасининг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

ёки $k^2 - 5k + 4 = 0$. Бунинг илдизларини топамиз.

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 4.$$

Системанинг ечцмини бундай кўринишда излаймиз:

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t \qquad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t$$

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \qquad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t},$$

$k_1 = 1$ илдиз учун (3) системани тузамиз ва $\alpha_1^{(1)}$ ва $\alpha_2^{(1)}$ ни аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} (2-1)\,\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} &= 0, \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0,$$
$$\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0,$$

бу тенгламалардан $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$ни топамиз. $\alpha_1^{(1)} = 1$ десак, $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз, Шундай қилиб, биз системанинг ечимини ҳосил қилдик:

$$x_1^{(1)} = e^t, \qquad x_2^{(1)} = -e^t/2.$$

Энди $k_2 = 4$ илдиз учун (3) системани тузамиз ва $\alpha_1^{(2)}$ ҳамда $\alpha_2^{(2)}$ни аниқлаймиз:

$$-2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0,$$
$$\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0,$$

бу тенгламалардан $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ ва $\alpha_1^{(2)} = 1$, $\alpha_2^{(2)} = 1$. Системанинг иккинчи ечимини ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(2)} = e^{4t}, \qquad x_2^{(2)} = e^{4t}.$$

Системанинг умумий ечими бундай бўлади ((6) га қаранг):

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t},$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

II. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳар хил, аммо улар орасида комплекс илдизлар ҳам бор. Характеристик тенгламанинг илдизлари орасида иккита қўшма комплекс илдиз бўлсин:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \qquad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Бу илдизларга ушбу ечимлар мос бўлади:

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$
$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

$\alpha_j^{(1)}$ ва $\alpha_j^{(2)}$ коэффициентлар (3) тенгламалар системасидан аниқланади.

21-§ даги каби комплекс ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари яна ечим бўлишини кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, биз иккита хусусий ечим ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_j^{(1)} &= e^{\alpha t}(\lambda_j^{(1)} \cos\beta x + \lambda_j^{(2)} \sin\beta x), \\ \bar{x}_j^{(2)} &= e^{\alpha t}(\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin\beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos\beta x), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

бунда $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \bar{\lambda}_j^{(1)}, \bar{\lambda}_j^{(2)}$ лар $\alpha_j^{(1)}$ ва $\alpha_j^{(2)}$ орқали аниқланадиган ҳақиқий сонлар.

(9) функцияларнинг мос комбинациялари системанинг умумий ечимига киради.

2-мисол. Ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$$

системанинг умумий ечими топилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$$

ёки $k^2 + 12k + 37 = 0$ ва унинг илдизларини топамиз:

$$k_1 = -6 + i, \qquad k_2 = -6 - i.$$

$k_1 = -6 + i$ ни (3) системага қўйиб, ушбуни топамиз:

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \qquad \alpha_2^{(1)} = 1 + i.$$

(7) ечимни ёзамиз:

$$x_1^{(1)} = 1e^{(-6+i)t}, \qquad x_2^{(1)} = (1 + i)\, e^{(-6+i)t}. \tag{7'}$$

$k_2 = -6 - i$ ни (3) системага қўйиб, ушбуни топамиз:

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \qquad \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$$

Иккинчи ечимлар системаси (8) ни ҳосил қиламиз:

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \qquad x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t}. \tag{8′}$$

(7′) ечимни бундай ёзамиз:

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} (\cos t + i \sin t), \qquad x_2^{(1)} = (1 + i) e^{\ 6t}(\cos t + i \sin t)$$

ёки

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} \cos t + ie^{-6t} \sin t,$$
$$x_2^{(1)} = e^{-6t} (\cos t - \sin t) + ie^{-6t} (\cos t + \sin t).$$

(8′) ечимни бундай ёзамиз:

$$x_1^{(2)} = e^{-6t} \cos t - ie^{-6x} \sin t,$$
$$x_2^{(2)} = e^{-6t} (\cos t - \sin t) - ie^{-6t} (\cos t + \sin t).$$

Хусусий ечимлар системаси учун ҳақиқий қисмларни айрим, мавҳум қисмларни айрим олиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \overline{x}_1^{(1)} &= e^{-6t}\cos t, & \overline{x}_2^{(1)} &= e^{-6t}(\cos t - \sin t), \\ \overline{x}_1^{(2)} &= e^{-(t} \sin t. & \overline{x}_2^{(2)} &= e^{-6t}(\cos t + \sin t). \end{aligned}\right\} \tag{9′}$$

Системанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$x_1 = C_1 e^{-6t} \cos t + C_2 e^{-6t} \sin t,$$
$$x_2 = C_1 e^{-6t} (\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t} (\cos t + \sin t).$$

Ўзгармас коэффициентли юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар системасининг ечимини шунга ўхшаш метод билан топиш мумкин.

Механикада ва электрик занжирлар назариясида, масалан, иккинчи тартибли

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

дифференциал тенгламалар системасининг ечими текширилади. Ечимни яна

$$x = \alpha e^{kt}, \qquad y = \beta e^{kt}$$

шаклда излаймиз. Бу ифодаларни (10) системага қўйиб ва e^{kt} га қисқартириб, α, β ва k ни аниқлаш учун ушбу

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - k^2)\,\alpha + a_{12}\beta = 0, \\ a_{21}\,\alpha + (a_{22} - k^2)\,\beta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Нолдан фарқли α ва β фақат системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлган ҳолдагина аниқланади:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Бу (10) система учун характеристик тенгламадир; у k га нисбатан 4-тартибли тенглама. k_1, k_2, k_3 ва k_4 унинг илдизлари бўлсин (илдизлар турлича деб фараз қиламиз). (11) системанинг ҳар бир k_i илдизи учун α ва β қийматларини аниқлаймиз. Умумий ечим, (6) га ўхшаш, бундай кўринишда бўлади:

$$x = C_1\alpha^{(1)}e^{k_1t}+C_2\alpha^{(2)}e^{k_2t}+C_3\alpha^{(3)}e^{k_3t}+C_4\alpha^{(4)}e^{k_4t},$$

$$y = C_1\beta^{(1)}e^{k_1t}+C_2\beta^{(2)}e^{k_2t}+C_3\beta^{(3)}e^{k_3t}+C_4\beta^{(4)}e^{k_4t}.$$

Агар илдизлар орасида комплекс илдизлар бўлса, у ҳолда ҳар бир жуфт комплекс илдизга умумий ечимда (9) кўринишдаги ифода мос бўлиб келади.

3-мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -x + y$$

дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими топилсин.

Ечиш. (12) характеристик тенгламани ёзамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$\begin{vmatrix} 1-k^2 & -4 \\ -1 & 1-k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad k_3 = \sqrt{3}, \quad k_4 = -\sqrt{3}.$$

Ечимни қуйидаги шаклда излаймиз:

$$x^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{it}, \qquad y^{(1)}=\beta^{(1)}e^{it},$$

$$x^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{-it}, \qquad y^{(2)}=\beta^{(2)}e^{-it},$$

$$x^{(3)}=\alpha^{(3)}e^{\sqrt{3}t}, \qquad y^{(3)}=\beta^{(3)}e^{\sqrt{3}t},$$

$$x^{(4)}=\alpha^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}, \qquad y^{(4)}=\beta^{(4)}e^{-\sqrt{3}t}.$$

(11) системадан $\alpha^{(j)}$ ва $\beta^{(j)}$ни топамиз:

$$\alpha^{(1)} = 1, \qquad \beta^{(1)}=1/2,$$

$$\alpha^{(2)} = 1, \qquad \beta^{(2)}=1/2,$$

$$\alpha^{(3)} = 1, \qquad \beta^{(3)}=-1/2,$$

$$\alpha^{(4)} = 1, \qquad \beta^{(4)}=-1/2.$$

Комплекс ечимларни ёзиб оламиз:

$$x^{(1)} = e^{it} = \cos t + i \sin t, \qquad y^{(1)} = 0,5 (\cos t + i \sin t),$$
$$x^{(2)} = e^{-it} = \cos t - i \sin t, \qquad y^{(2)} = 0,5 (\cos t - i \sin t).$$

Ҳақиқий ва мавҳум қисмларнинг ҳар бири алоҳида ечим бўлади:

$$\overline{x}^{(1)} = \cos t, \qquad \overline{y}^{(1)} = 0,5 \cos t,$$
$$\overline{x}^{(2)} = \sin t \qquad \overline{y}^{(2)} = 0,5 \sin t.$$

Энди умумий ечимни ёзиш мумкин:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{\sqrt{3}\, t} + C_4 e^{-\sqrt{3}\, t}$$
$$y = \frac{1}{2} C_1 \cos t + \frac{1}{2} C_2 \sin t - \frac{1}{2} C_3 e^{\sqrt{3}\, t} - \frac{1}{2} C_4 e^{-\sqrt{3}\, t}.$$

Изоҳ. Биз бу параграфда характеристик тенгламанинг каррали илдизларга эга бўлган ҳолини қарамадик. Бу масала, масалан, И. Г. Петровскийнинг „Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений“ китобида муфассал баён этилган.

31- §. Ляпуновнинг турғунлик назарияси ҳақида тушунча. Дифференциал тенглама траекториясининг махсус нуқта атрофидаги ҳолати

Кўпчилик дифференциал тенгламалар ва тенгламалар системасининг ечимларини элементар функциялар ёки квадратуралар билан ифодалаб бўлмайди, шунинг учун бундай ҳолларда тайин дифференциал тенгламаларни ечишда интеграллашнинг тақрибий методлари татбиқ этилади. Бу методлар ҳақидаги тушунча 3- параграфда берилган эди; бундан ташқари бу методларнинг баъзилари 32—34- § да, шунингдек XVI бобда қаралади.

Бу методларнинг камчилиги шундаки, улар фақат биттагина хусусий ечимни беради; бошқа хусусий ечимларни топиш учун барча ҳисоблашларни яна қайтадан бажариш керак бўлади. Битта хусусий ечимни билган ҳолда бошқа хусусий ечимларнинг характери ҳақида бирор ҳукм чиқариш мумкин бўлмайди.

Механика ва техниканинг жуда кўп масалаларида аргументнинг берилган тайин қийматида ечимнинг аниқ қийматини билиш муҳим бўлмай, балки аргумент ўзгариб борганда ва хусусан, аргументнинг чексиз ўсиб боришида ечимнинг ҳолатининг характери муҳим аҳамиятга эга бўлади. Масалан, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларнинг даврий бўлишини, уларнинг бирор маълум функцияга асимптотик яқинлашишини ва ҳоказоларни билиш муҳим бўлади. Бу масалалар билан дифференциал тенгламаларнинг сифат назарияси шуғулланади.

Сифат назариясининг асосий масалаларидан бири ечимнинг турғунлиги ҳақидаги ёки ҳаракатнинг турғунлиги ҳақидаги масаладир; бу масалани машҳур рус математиги А. М. Ляпунов (1857—1918) муфассал текширган.

Ушбу дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар бу системанинг

$$\left.\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0, \\ y_{t=0} &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлсин. Бундан ташқари, $\bar{x} = \bar{x}(t)$ ва $\bar{y} = \bar{y}(t)$ функциялар ҳам (1) тенгламанинг

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_{t=0} &= \bar{x}_0, \\ \bar{y}_{t=0} &= \bar{y}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1'')$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлсин.

Таъриф. Агар ҳар бир исталган кичик $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ ни кўрсатиш мумкин бўлсаки, t нинг нолдан катта барча қийматларида

$$\left.\begin{aligned} |\bar{x}(t) - x(t)| &< \varepsilon, \\ |\bar{y}(t) - y(t)| &< \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

тенгсизликлар бажарилса ва агар бошланғич шартлар

$$\left.\begin{aligned} |\bar{x}_0 - x_0| &< \delta, \\ |\bar{y}_0 - y_0| &< \delta \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, (1) тенглама ва (1′) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ ечимлар Ляпунов таъбири бўйича $t \to \infty$ да *турғун ечимлар* дейилади.

Бу таърифнинг мазмунини тушунтирамиз. (2) ва (3) тенгсизликлардан бошланғич шартларнинг кичик ўзгариши билан t нинг барча мусбат қийматларида мос ечимлар ҳам бир-биридан кам фарқ қилади деган натижа келиб чиқади. Агар дифференциал тенгламалар системаси бирор ҳаракатни ифодаласа, ечимлар турғун бўлган ҳолда ҳаракатнинг характери бошланғич маълумотлар кам ўзгарганда бир оз ўзгаради.

Буни биринчи тартибли битта тенглама мисолида текширамиз. Ушбу дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1 \tag{а}$$

берилган бўлсин. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = Ce^{-t} + 1 \tag{б}$$

бўлади. Бошлангич

$$y_{t=0} = 1 \tag{в}$$

шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топамиз. Бу ечим $C = 0$ бўлганда ҳосил бўлиши равшан (281-расм). Сўнгра

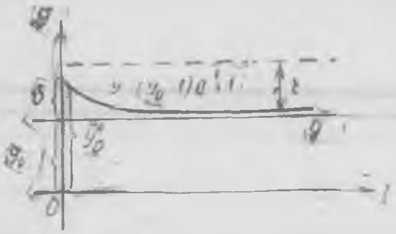
$$\overline{y}_{t=0} = \overline{y_0}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимни топамиз. (б) тенгламадан C ни топамиз:

$$\overline{y}_0 = C + 1,$$

бундан

$$C = \overline{y}_0 - 1.$$



281-расм.

C нинг бу қийматини (б) тенгликка қўйсак,

$$\overline{y} = (\overline{y}_0 - 1)\, e^{-t} + 1.$$

$y = 1$ ечим турғун ечим экани равшан. Ҳақиқатан ҳам, $t \to \infty$ да

$$\overline{y} - y = \left[\, (\overline{y}_0 - 1)e^{-t} + 1 \right] - 1 = (\overline{y}_0 - 1)\, e^{-t} \to 0.$$

Демак, агар

$$(y_0 - 1) = \delta < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, ε ҳар қандай бўлганда ҳам (3) тенгсизлик бажарилади.

Агар (1) тенгламалар ҳаракатни тавсифласа, унда t вақт бўлса ва тенгламалар t вақтни ошкор ҳолда ўзига олмаса, яъни улар

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$$

кўринишда бўлса, у ҳолда бу система *автоном система* дейилади.

Энди ушбу чизиқли дифференциал тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

a, b, c, g ни ўзгармас коэффициентлар ва $g \neq 0$ деб фараз қиламиз, бунда $x = 0$, $y = 0$ (4) системанинг ечими экани равшан, бунга бевосита ўрнига қўйиш билан ишонч ҳосил қиламиз. (4) системанинг $x = 0$, $y = 0$ ечими турғун ечим бўлиши учун коэффициентлар қандай шартларни қаноатлантириши кераклигини текширамиз. Бу текшириш бундай ўтказилади.

Биринчи тенгламани дифференциаллаб ҳамда y ва $\frac{dy}{dt}$ ни йўқотиб, биринчи тартибли

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c\frac{dx}{dt} + g\frac{dy}{dt} = c\frac{dx}{dt} + g(ax + by) = c\frac{dx}{dt} + gax + b\left(\frac{dx}{dt} - cx\right)$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c)\frac{dx}{dt} - (ag - bc)x = 0 \tag{5}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (5) дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ag - bc) = 0 \tag{6}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламани детерминант шаклида ёзиш қабул қилинган:

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & g \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

(30- § (4) тенгламага қаранг).

(7) характеристик тенгламанинг илдизларини λ_1 ва λ_2 билан белгилаймиз. (4) система ечимларининг турғунлик ёки турғунмаслиги λ_1 ва λ_2 илдизларнинг характери билан аниқланади, буни биз қуйида кўрамиз.

Мумкин бўлган барча ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. *Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий, манфий ва ҳар хил:* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (5) тенгламадан ушбуни топамиз:

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}.$$

x ни топгандан кейин (4) тенгламаларнинг биринчисидан y ни аниқлаймиз. Шундай қилиб, (4) системанинг ечими бундай кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \left[C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}\right]\frac{1}{g}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Изоҳ. Агар $g = 0$ ва $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда биз y функция учун (5) тенгламани тузамиз. y ни топгандан кейин (4) системанинг иккинчи тенгламасидан x ни топамиз. (8) ечимларнинг тузилиши сақланади. Агарда $g = 0$, $a = 0$ бўлса, у ҳолда тенгламалар системасининг ечими бундай кўринишни олади:

$$x = C_1 e^{ct}, \qquad y = C_2 e^{bt}. \tag{8'}$$

Бу ҳолда ечимлар характерининг анализи анча содда бажарилади. C_1 ва C_2 ни (8) ечимлар бошланғич

$$x\Big|_{t=0} = x_0, \qquad y\Big|_{t=0} = y_0$$

шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаб оламиз. Бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}\left|\frac{cx_0 + gy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - cx_0 - gy_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)\,e^{\lambda_2 t}\right|. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Кейинги тенгликлардан кўринишича, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам $|\,x_0\,|$ ва $|\,y_0\,|$ ни шундай кичик қилиб танлаб олиш мумкинки, унда барча $t > 0$ учун $|\,x(t)\,| < \varepsilon$, $|\,y(t)\,| < \varepsilon$ тенгсизликлар ўринли бўлади, чунки $e^{\lambda_1 t} < 1$ ва $e^{\lambda_2 t} < 1$.

Берилган ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} x(t) &= 0, \\ \lim_{t \to +\infty} y(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

бўлишини қайд қилиб ўтамиз. xOy текислигини қарайлик. (4) дифференциал тенгламалар системаси учун ҳамда (5) дифференциал тенглама учун бу текислик *фаза текислиги* дейилади. (4) системанинг (8) ва (9) ечимини xOy фаза текислигида бирор эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси деб қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{\varphi}(t,\ C_1,\ C_2), \\ y &= \bar{\psi}(t,\ C_1,\ C_2), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t,\ x_0,\ y_0), \\ y &= \psi(t,\ x_0,\ y_0). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Бу эгри чизиқлар

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + gy} \tag{13}$$

дифференциал тенгламанинг *интеграл эгри чизиқлари ёки траекториялари*дир, (3) тенглама эса (4) тенгламадан унинг ўнг ва чап томонларини бир-бирига бўлиш йўли билан ҳосил қилинади.

Координаталар боши $O(0, 0)$ (13) дифференциал тенглама учун *махсус нуқтадир*, чунки бу нуқта ечимнинг мавжудлик ва ягоналик соҳасига тегишли эмас.

(9) ечимларнинг ва умуман (4) система ечимларининг характери (13) дифференциал тенглама умумий интегралини ҳосил қилувчи

$$\overline{F}(x, y, C) = 0$$

интеграл эгри чизиғининг жойланиши билан кўргазмали тасвирланади. Ўзгармас C сон $y_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шарт билан аниқланади. C нинг қийматини ўрнига қўйгандан кейин оила тенгламасини

$$F(x, y, x_0, y_0) \tag{14}$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Ечимлар (9) билан тасвирланганда махсус нуқта *турғун тугун* дейилади. Нуқта траектория бўйича ҳаракат қилиб, $t \to +\infty$ да махсус нуқтага чексиз яқинлашади дейилади.

(12) системадан t параметрни чиқариш йўли билан (14) муносабатни ҳосил қилиш мумкин экани равшан. Бундан кейин интеграл эгри чизиқларнинг характеристик тенглама илдизларининг барча мумкин бўлган ҳоллари учун фаза текислигидаги махсус нуқта яқинида жойланиш характерини тўла анализ қилиб ўтирмасдан, унинг кўргазмали тасвирини узундан-узоқ ҳисоблашларни талаб қилмайдиган энг содда мисолларда кўрсатамиз. (13) тенглама траекторияларини коэффициентлар ихтиёрий бўлганида координаталар боши яқинида ўзгариш характери сифат жиҳатдан қуйида кўриладиган мисоллардаги каби бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

1-мисол. *Ушбу*

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = -2y$$

дифференциал тенгламалар системасининг $x = 0$, $y = 0$ ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама бундай бўлади:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Берилган ҳолда (8') ечимлар:

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-2t}.$$

(9) ечимлар

$$x = x_0 e^{-t}, \qquad y = y_0 e^{-2t}. \tag{a}$$

$t \to +\infty$ да $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ бўлиши равшан. $x = 0$, $y = 0$ ечим турғун ечимдир. Энди фаза текислигига мурожаат қиламиз. (а) тенгламалардан t параметрни чиқариб, (14) кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}. \qquad (б)$$

Бу параболалар оиласидир (282-расм).

(13) кўринишдаги тенглама бу мисол учун бундай бўлади:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

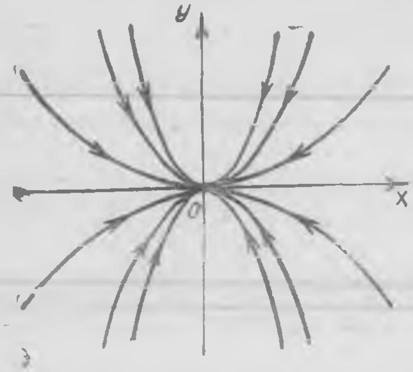
Буни интеграллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$y = Cx^2. \qquad (в)$$

C ни

$$y_{x=x_0} = y_0, \qquad C = \frac{y_0}{x_0^2}$$



282- расм.

шартлардан аниқлаймиз. C нинг топилган қийматини (в) га қўйиб, (б) ечимни ҳосил қиламиз. Махсус $O(0, 0)$ нуқта *турғун тугундир*.

II. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий, мусбат, ҳар хил: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Бу ҳолда ечимлар яна (8) формулалар билан ва мос тартибда (9) формулалар билан ифода этилади. Аммо берилган ҳолда $|x_0|$ ва $|y_0|$ нинг ҳар қандай кичик қийматларида $t \to +\infty$ да $|x(t)| \to \infty$ ва $|y(t)| \to \infty$, чунки $t \to +\infty$ да $e^{\lambda_1 t} \to \infty$ ва $e^{\lambda_2 t} \to \infty$.

Фаза текислигида махсус нуқта—*нотурғун тугундир*: $t \to +\infty$ да траекториядаги нуқта $x = 0$, $y = 0$ тинчланиш нуқтасидан узоқлашади.

2- мисол. Ушбу система

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама бундай бўлади:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

бунинг илдизлари

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Ечим бундай бўлади:

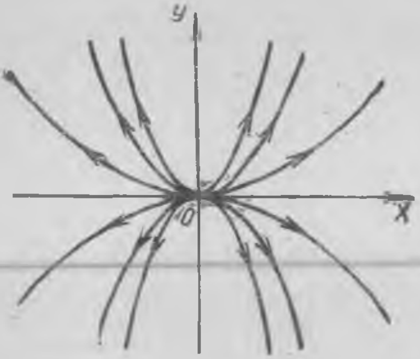
$$x = x_0 e^t, \qquad y = y_0 e^{2t}.$$

Ечим турғун эмас, чунки $t \to +\infty$ да $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$. t ни чиқарсак,

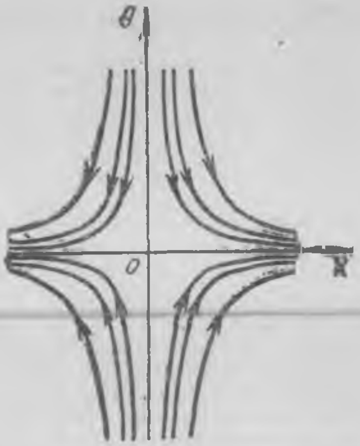
$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

ни ҳосил қиламиз (283- расм). Махсус нуқта O (0, 0) — *нотурғун тугун*.

III. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий, турли ишорали, масалан: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. (9) формуладан кўринишича $|x_0|$ ва $|y_0|$ нинг ҳар қанча кичик қийматларида, агар $cx_0+gy_0-x\lambda_2\neq 0$ бўлса, $t\to+\infty$ да $|x(t)|\to\infty$, $|y(t)|\to\infty$ бўлади. Ечим *нотурғун*. Фаза текислигида махсус нуқта *эгар* дейилади.



283- расм.



284- расм.

8-мисол. Ушбу система

$$\frac{dx}{dt}=x,\qquad \frac{dy}{dt}=-2y$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

бўлади, демак, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$. Ечим бундай бўлади:

$$x=x_0e^{+t},\qquad y=y_0e^{-2t}.$$

Ечим *турғун эмас*. t параметрни чиқариб, фаза текислигида эгри чизиқлар оиласини ҳосил қиламиз:

$$yx^2=y_0x_0^2.$$

$O(0,\ 0)$ махсус нуқта *эгардир* (284- расм),

IV. Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий қисми манфий бўлган комплекс сонлар: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha < 0)$. (4) системанинг ечими бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{\alpha t}\,[C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t, \\ y &= \frac{1}{g} e^{\alpha t}\,[(\alpha C_1 + \beta C_2 - cC_1)\cos\beta t + (\alpha C_2 - \beta C_1 - cC_2)\sin\beta t].\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Агар бундай белгилашларни киритсак:

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \qquad \sin\delta = \frac{C_1}{C}, \qquad \cos\delta = \frac{C_2}{C},$$

у ҳолда (15) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ce^{\alpha t}\sin(\beta t + \delta), \\ y &= \frac{Ce^{\alpha t}}{g}\,[(\alpha - c)\sin(\beta t + \delta) + \beta\cos(\beta t + \delta), \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

бунда C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлиб, улар $t=0$ бўлганда $x = x_0$, $y = y_0$ бошланғич шартлар билан аниқланади, шунинг билан бирга

$$x_0 = C\sin\delta, \qquad y_0 = \frac{C}{g}[(\alpha - c)\sin\delta + \beta\cos\delta],$$

бу тенгликлардан:

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{gy_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta}. \quad (17)$$

Агар $g = 0$ бўлса, у ҳолда ечимнинг кўриниши бирмунча бошқачароқ бўлади, аммо анализ характери ўзгармаслигини кўрамиз.

Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ да $|x_0|$ ва $|y_0|$ нинг етарлича кичик қийматларида

$$|x(t)| < \varepsilon, \qquad |y(t)| < \varepsilon$$

муносабатларнинг бажарилиши равшан. Ечим *турғун*. Берилган ҳолда $t \to +\infty$ да $x(t)$ ва $y(t)$ ишораларини чексиз кўп марта ўзгартириб нолга интилади, яъни $t \to +\infty$ да

$$x(t) \to 0 \text{ ва } y(t) \to 0.$$

Фаза текислигидаги махсус нуқта *турғун фокус* дейилади.

4-мисол. Ушбу тенгламалар системаси

$$\frac{dx}{dt} = -x + y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз ва унинг илдизларини топамиз.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i, \qquad \alpha = -1,\ \beta = 1.$$

(17) формулаларга кўра C_1 ва C_2 ларни топамиз: $C_1 = x_0$, $C_2 = y_0$. Буларни (15) га қўйиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ x &= e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

t нинг ҳар қандай қийматида

$$|x| \leqslant |x_0| + |y_0|, \quad |y| \leqslant |x_0| + |y_0|$$

бўлиши равшан. $t \to +\infty$ да $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$. *Ечим турғун.*

Бу ҳолда фаза текислигида эгри чизиқларнинг жойланиш характерини ойдинлаштирамиз. (A) ифодаларни алмаштирамиз:

$$x_0 = M \cos \delta, \qquad y_0 = M \sin \delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{y_0}{x_0}$$

деб фараз қиламиз. Бу ҳолда (A) тенгликлар бундай кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x &= Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ y &= Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{aligned}\right| \qquad \text{(B)}$$

Фаза текислигида қутб координаталари ρ ва θ га ўтамиз ҳамда $\rho = f(\theta)$ муносабатни аниқлаймиз. (B) тенгликлар бундай кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cos \theta &= Me^{-t} \cos(\beta t - \delta), \\ \rho \sin \theta &= Me^{-t} \sin(\beta t - \delta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C')}$$

Ўнг ва чап қисмларни квадратларга кўтариб ҳамда қўшиб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз.

$$\rho^2 = M^2 e^{-2t}$$

ёки

$$\rho = Me^{-t}. \qquad (D)$$

t билан θ орасидаги боғланишни аниқлаймиз. (C) тенгликлар остидаги ҳадларини мос тартибда устдаги тенглик ҳадларига бўлиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\beta t - \delta),$$

$$t = \frac{\theta + \delta}{\beta},$$

бундан

Буни (D) га қўйсак:

$$\rho = Me^{-\frac{\theta+\delta}{\beta}}$$

ёки

$$\rho = Me^{-\frac{\delta}{\beta} - \frac{\theta}{\beta}}$$

ҳосил бўлади. $Me^{-\delta/\beta} = M_1$ билан белгилаб қуйидаги натижани ҳосил қиламиз:

$$\rho = M_1 e^{-\frac{\theta}{\beta}}. \qquad \text{(E)}$$

Бу *логарифмик спираллар оиласи.* Бу ҳолда $t \to \infty$ да нуқта траектория бўйича координаталар бошига яқинлашади. Махсус нуқта $O(0, 0)$ *турғун фокусдир.*

V. **Характеристик тенгламанинг илдизлари мусбат ҳақиқий қисмга эга бўлган комплекс сонлар:** $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha > 0)$. Бу ҳолда ечим (15) формулалар билан ифода этилади, бунда $\alpha > 0$. Ҳар қандай бошланғич шартларда x_0 ва y_0 лар $(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0)$ ҳамда $t \to +\infty$ да $|x(t)|$ ва $|y(t)|$ ҳар қандай катта қийматлар қабул қилишлари мумкин. Ечим *нотурғун*. Фаза текислигидаги махсус нуқта *нотурғун фокус* дейилади. Нуқта траектория бўйича координаталар бошидан чексиз узоқлашади.

5-мисол. Ушбу

$$\frac{dx}{dt} = x + y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

тенгламалар системаси ечимларининг турғунлиги текширилсин.

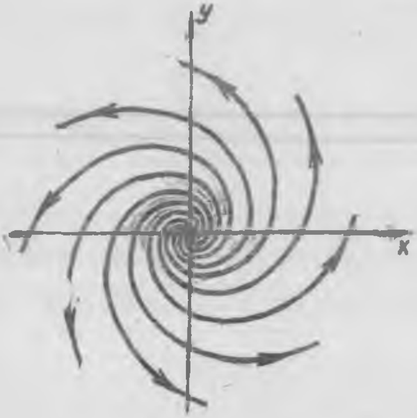
Ечиш. Характеристик тенглама тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

(17) ни ҳисобга олганда (15) ечим берилган ҳолда бундай бўлади.



285- расм.

$$x = e^t(x_0 \cos t + y_0 \sin t),$$

$$y = e^t(y_0 \cos t - x_0 \sin t).$$

Фаза текислигида эгри чизиқни қутб координаталарда ҳосил қиламиз:

$$\rho = \overline{M}_1 e^{\theta/\beta}.$$

Махсус нуқта — *нотурғун фокусдир* (285- расм).

VI. **Характеристик тенгламанинг илдизлари соф мавҳум сонлар:** $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$. Бу ҳолда (15) ечим ушбу кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t, \\ y &= \frac{1}{g}[(\beta C_2 - cC_1)\cos\beta t + (-\beta C_1 - cC_2)\sin\beta t]. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

C_1 ва C_2 ўзгармаслар (17) формулалардан аниқланади:

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{gy_0 + cx_0}{g}. \quad (19)$$

Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ да барча етарли кичик $|x_0|$ ва $|y_0|$ да, истаган t да $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ бўлиши равшан. *Ечим турғун.* Бу ерда x ва y лар t нинг даврий функциялари.

Фаза текислигида интеграл эгри чизиқларни анализ қилиш учун (18) ечимлардан биринчисини қуйидаги кўринишда ёзиш мақсадга мувофиқдир ((16) га қаранг):

$$\left.\begin{aligned} x &= C\sin(\beta t+\delta),\\ y &= \frac{C\beta}{g}\cos(\beta t+\delta)-\frac{Cc}{g}(\beta t+\delta), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

бунда C, δ ихтиёрий ўзгармас миқдорлар. (20) ифодалардан x ва y лар t нинг даврий функциялари экани келиб чиқади.(20) тенгламалардан t параметрни чиқарамиз:

$$y = \frac{C\beta}{g}\sqrt{1-\frac{x^2}{C^2}}-\frac{C}{g}x.$$

Радикалдан қутқариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(y-\frac{c}{g}\,x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{g}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right). \tag{21}$$

Бу ихтиёрий C ўзгармас сонга боғлиқ бўлган 2- тартибли эгри чизиқлар оиласи (ҳақиқий эгри чизиқлар). Уларнинг ҳар бири чексиз узоқ нуқталарга эга эмас. Демак, булар координаталар бошини ўраб олган эллипслар оиласидир. ($c = 0$ бўлганда эллипснинг ўқлари координата ўқларига параллелдир). Махсус нуқта *марказ* деб аталади (286-расм).

286- расм.

6-мисол, Ушбу тенгламалар системаси

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -4x$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda^2+4=0, \qquad \lambda = \pm 2i.$$

(20) ечим бундай бўлади:

$$x = C\sin(2t+\delta),$$
$$y = 2C\cos(2t+\delta).$$

(21) тенглама бундай кўринишда бўлади.

$$y^2 = 4C^2\left(1-\frac{x^2}{C^2}\right), \qquad \frac{y^2}{4C^2}+\frac{x^2}{C^2}=1.$$

Фаза текислигида эллипслар системасига эгамиз. Махсус нуқта — *марказ.*

VII. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ бўлсин. Бу ҳолда (8) ечим бундай кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y &= \frac{1}{g}[-C_1 c + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ҳар қандай $\varepsilon > 0$ да ва $|x_0|$ ҳамда $|y_0|$ етарли кичик бўлганда, $t > 0$ да $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ бўлади. Демак, ечим *турғун.*

7-мисол. Ушбу система

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = -y \tag{α}$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

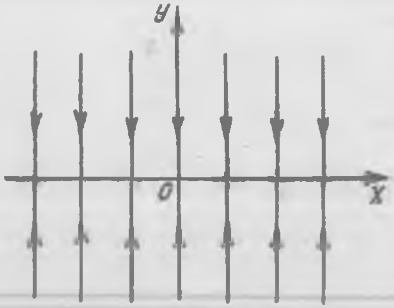
Бу ерда $g = 0$. Системани (22) формулалардан фойдаланмай бевосита ечиб

$$x = C_1, \qquad y = C_2 e^{-t} \tag{β}$$

ечимларни топамиз. $t = 0$ бўлганда $x = x_0$, $y = y_0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим бундай бўлади:

$$x = x_0, \qquad y = y_0 e^{-t}. \tag{γ}$$

Ечимнинг *турғунлиги* равшан. Фаза текислигида дифференциал тенглама $\frac{dx}{dt} = 0$ бўлади. Умумий интеграл $x = C$ бўлади. Траекториялар Oy ўқига параллел бўлган тўғри чизиқлар. γ тенгламалардан нуқталар траекториялар бўйлаб $y = 0$ тўғри чизиққа яқинлашиши келиб чиқади (287-расм).



287-расм.

VIII. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ бўлсин. (22) ёки (8′) формулалардан ечим турғун эмаслиги келиб чиқади, чунки $t \to +\infty$ да $|x(t)| + y(t)| \to \infty$.

IX. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ бўлсин. Ечим бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda_1 t}, \\ y &= \frac{1}{g} e^{\lambda_1 t}[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 + \lambda_1 t - ct). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$t \to +\infty$ да $e^{\lambda_1 t} \to 0$ ва $te^{\lambda_1 t} \to 0$ бўлганидан, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай C_1 ва C_2 ни танлаб олиш мумкинки (x_0 ва y_0 ни танлаб олиш йўли билан), ҳар қандай $t > 0$ да $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$ бўлади. Демак, ечим *турғун.* Бунда $t \to +\infty$ да $x(t) \to 0$ ва $y(t) \to 0$.

8-мисол. Ушбу система

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама илдизларини топамиз:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0, & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

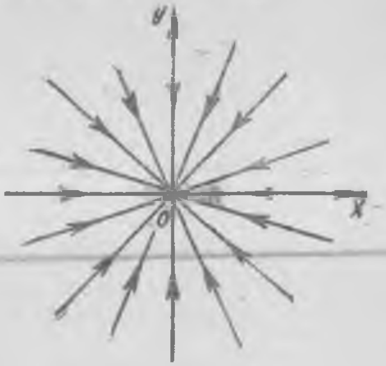
Бу ерда $g = 0$. Системанинг ечими (8′) шаклда бўлади:

$$x = C_1 e^{-t}, \qquad y = C_2 e^{-t}.$$

Шу билан бирга $t \to +\infty$ да $x \to 0$, $y \to 0$. Ечим *турғун*. Фаза текислигидаги эгри чизиқлар оиласи бундай бўлади:

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k, \text{ яъни } y = kx.$$

Бу координаталар бошидан ўтадиган эгри чизиқлар оиласидир. Нуқталар траекториялар бўйлаб координаталар бошига яқинлашади. O (0, 0) махсус нуқта *тугундир* (288-расм).



288-расм.

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ бўлган ҳолда (22) ечимларнинг шакли сақланади, аммо $t \to +\infty$ да $|x(t)| \to +\infty$, $|y(t)| \to \infty$. Ечим *турғун* эмас.

X. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 t, \\ y &= \frac{1}{g}\left[-cC_1 + C_2 - cC_2 t\right]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Бу тенгламалардан кўринадики, $t \to +\infty$ да $x \to \infty$, $y \to \infty$ ечим *турғун* эмас.

9-мисол. Ушбу тенгламалар системаси

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

ечимларининг турғунлиги текширилсин.

Ечиш. Характеристик тенглама илдизларини топамиз:

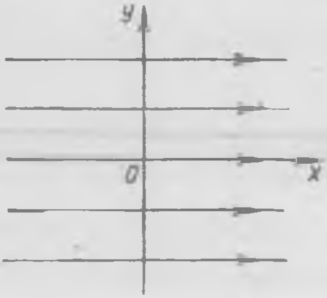
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda_1^2 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Ечимини топамиз.

$$y = C_2, \qquad x = C_2 t + C_1.$$

$t \to +\infty$ да $x \to \infty$ бўлиши равшан. Ечим *турғун эмас*. Фаза текислигидаги тенглама $\frac{dy}{ax} = 0$ бўлади. Траекториялар $y = C$ — ўққа параллел бўлган чизиқлар (289- расм). Махсус нуқта *айнаган эгар* дейилади.

(4) система ечимининг турғун бўлиши умумий критерийсини бериш учун қуйидагича киришамиз.



289- расм.

Характеристик тенглама илдизларини комплекс сонлар шаклида ёзиб оламиз:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + i\lambda_1^{**}, \qquad \lambda_2 = \lambda_2^* + i\lambda_2^{**}$$

(илдизлар ҳақиқий бўлган ҳолда $\lambda_1^{**} = 0$ ва $\lambda_2^{**} = 0$ бўлади).

$\lambda^*\lambda^{**}$ комплекс ўзгарувчи текислигини оламиз ва характеристик тенглама илдизларини бу текисликда нукталар билан тасвирлаймиз. У вақтда кўрилган ҳолларга асосланиб (4) система ечимининг турғунлик шартини қуйидагича ифодалаш мумкин.

Агар (6) *характеристик тенглама* λ_1 ва λ_2 *илдизларнинг ҳеч бири мавҳум ўқнинг ўнг томонида ётмаса, шунингдек камида битта илдиз нолдан фарқли бўлса, у ҳолда ечим турғун бўлади; агар илдизларнинг камида биттаси мавҳум ўқнинг ўнг томонида ётса ёки иккала илдиз нолга тенг бўлса, у ҳолда ечим турғун бўлмайди* (290- расм).

290- расм.

Энди бирмунча умумийроқ тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + gy + P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by + Q(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Баъзи бир айрим ҳоллардан ташқари ҳолларда бундай системанинг ечими элементар функциялар билан ва квадратуралар билан ифодаланмайди.

Бу система ечимларининг турғун ёки турғун эмаслигини аниқлаш учун уни чизиқли система ечимлари билан таққослаб кўрилади. $x \to 0$ ва $y \to 0$ да $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар ҳам нолга интилсин ва шу билан бирга ρ га қараганда нолга тезроқ интилсин деб фараз қилайлик, бунда $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; бошқача айтганда

$$\lim_{\rho\to0}\frac{P(x,\ y)}{\rho}=0,\quad \lim_{\rho\to0}\frac{Q(x,\ y)}{\rho}=0.$$

Бу ҳолда, махсус ҳолни эътиборга олмасак,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=cx+gy,\\ \frac{dy}{dx}&=ax+by\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

системанинг ечими турғун бўлса, (4) системанинг ечими ҳам турғун бўлишини, (4) системанинг ечими нотурғун бўлса, (25) системанинг ечими ҳам нотурғун бўлишини исбот қилиш мумкин. Характеристик тенгламанинг икки илдизи мавҳум ўқда ётган ҳол алоҳида ҳолни ташкил қилади; бу ҳолда (25) система ечимининг турғун ёки турғун эмаслик масаласи анча мураккаб ҳал қилинади.

А. М. Ляпунов тенгламалар кўринишларига нисбатан анча умумий фаразлар билан бу тенгламалар системалари ечимларининг турғунлиги ҳақидаги масалани текширган*).

Тебранишлар назариясида кўпинча бундай тенглама қаралади:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right).\tag{26}$$

Бундай белгилаймиз:

$$\frac{dx}{dt}=v.\tag{27}$$

У ҳолда ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=v,\\ \frac{dv}{dt}&=f(x,\ v).\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Бу система учун фаза текислиги $(x,\ v)$ текислиги бўлади. Фаза текислигидаги траекториялар v тезликнинг координата билан боғланишининг геометрик тасвирини беради ҳамда x ва v нинг ўзгаришини сифат нуқтаи назаридан очиқ характерлайди. Агар $x=0$, $v=0$ нуқта махсус нуқта бўлса, бу ҳолда у мувозанат ҳолатни аниқлайди.

Масалан, тенгламалар системасининг махсус нуқтаси марказ бўлса, яъни фаза текислигидаги траекториялар координаталар бошини ўраб олган ёпиқ чизиқлар бўлса, у ҳолда (26) тенглама билан аниқланадиган ҳаракат сўнмовчи тебранма ҳа-

---

*) А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, М-Л., ОНТИ, 1935.

ракатларни тасвирлайди. Агар фаза текислигидаги махсус нуқта фокус бўлса (бунда $t \to \infty$ да $|x| \to 0$, $|v| \to 0$), у ҳолда (26) тенглама билан аниқланадиган ҳаракатлар сўнувчи тебранма ҳаракатлар бўлади. Агар махсус нуқта тугун ёки эгар бўлса (бу ҳам ягона махсус нуқта), бу ҳолда $t \to \infty$ да $x \to \pm \infty$. Бу ҳолда ҳаракат қилувчи моддий нуқта чексизликка кетади.

Агар (26) тенглама $\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b\frac{dx}{dt}$ кўринишдаги чизиқли тенглама бўлса, у ҳолда (28) система ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = ax + bv.$$

Бу (4) кўринишдаги система. $x = 0$, $v = 0$ нуқта махсус нуқта бўлиб, у мувозанат ҳолатни аниқлайди. Ўзгарувчи x нуқтанинг механик силжиши бўлиши шарт эмаслигини қайд қилиб ўтамиз. У турли физик маънога эга бўлиши мумкин, масалан, электрик тебранишларни характерловчи миқдорни белгилаши мумкин.

32-§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни Эйлер методи билан тақрибий ечиш

Биз биринчи тартибли дифференциал тенглама сонли ечилишининг икки усулини кўриб чиқамиз. Бу параграфда **Эйлер методини** қараймиз: Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

тенгламанинг $[x_0, b]$ кесмада $x = x_0$ да $y = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини топамиз. $[x_0, b]$ кесмани $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ нуқталар билан n та тенг бўлакка бўламиз (бу ерда $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = b - x_{n-1} = \Delta x = h$ деб белгилаймиз. Демак,

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

$y = \varphi(x)$ (1) тенгламанинг бирор тақрибий ечими ва

$$y_0 = \varphi(x_0), \qquad y_1 = \varphi(x_1), \ \ldots, \ y_n = \varphi(x_n)$$

бўлсин.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ \ldots, \ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

деб белгилаймиз. (1) тенгламада ҳар бир $x_0, x, \ldots, x_n$ нуқтадаги ҳосилани чекли айирмалар нисбати билан алмаштирамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \tag{2}$$

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x. \tag{2'}$$

$x = x_0$ бўлган ҳолда

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \qquad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x$$

ёки

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\,h$$

бўлади. Бу тенгликда x_0, y_0, h маълум, демак,

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\,h$$

ни топамиз. $x = x_1$ да (2′) тенглама

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,h$$

ёки

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)\,h, \qquad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,h$$

кўринишни олади. Бу ерда x_1, y_1, h маълум сонлар, y_2 эса аниқланадиган сон.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,h,$$

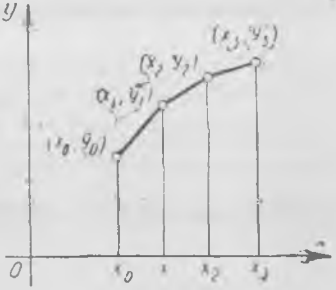
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\,h,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,h.$$

Шундай қилиб, x_0, x_1, ..., x_n нуқталарда ечимнинг тақрибий қийматлари топилди. Координаталар текислигида (x_0, y_0) (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) нуқталарни тўғри чизиқ кесмалари билан туташтириб, синиқ чизиқни — интеграл эгри чизиқнинг тақрибий тасвирини ҳосил қиламиз (291-расм). Бу синиқ чизиқ *Эйлер синиқ чизиғи* дейилади.



291- расм.

Изоҳ. $y = \varphi_h(x)$ билан (1) тенгламанинг $\Delta x = h$ даги Эйлер синиқ чизиғига мос тақрибий ечимини белгилаймиз. Агар (1) тенгламанинг бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ҳамда $[x_0, b]$ кесмада аниқланган биргина $y = \varphi^*(x)$ ечими мавжуд бўлса, у ҳолда $[x_0, b]$ кесмадаги ҳар қандай x учун $\lim\limits_{h\to 0} |\varphi_h(x) - \varphi^*(x)| = 0$ бўлишини исбот қилиш*) мумкин.

---

*) Исботни, масалан, И. Г. Петровскийнинг „Лекции по теории обыкновенных дефференциальных уравнений" деган китобидан қаранг,

Мисол. Ушбу

$$y' = y + x$$

тенгламанинг $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимининг $x = 1$ даги тақрибий қиймати топилсин.

Ечиш. $[0, 1]$ кесмани $x_0 = 0$; 0,1; 0,2. . .; 1,0 нуқталар билан 10 та бўлакка бўламиз. Демак, $h = 0{,}1$. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ қийматларни (2′) формула бўйича излаймиз:

$$\Delta y_k = (y_k + x_k)\,h$$

ёки

$$y_{k+1} = y_k + (y_k + x_k)\,h.$$

Шундай қилиб,

$$y_1 = 1 + (1 + 0)\cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,$$

$$y_2 = 1{,}1 + (1{,}1 + 0{,}1)\cdot 0{,}1 = 1{,}22,$$

. . . .

Тенгламани ечиш жараёнида ушбу жадвални тузамиз:

x_k	y_k	$y_k + x_k$	$\Delta y_k = (y_k + x_k)\,h$
$x_0 = 0$	1,000	1,000	0,100
$x_1 = 0{,}1$	1,100	1,200	0,120
$x_2 = 0{,}2$	1,220	1,420	0,142
$x_3 = 0{,}3$	1,362	1,620	0,162
$x_4 = 0{,}4$	1,524	1,924	0,1924
$x_5 = 0{,}5$	1,7164	2,2164	0,2216
$x_6 = 0{,}6$	1,9380	2,5380	0,2538
$x_7 = 0{,}7$	2,1918	2,8918	0,2892
$x_8 = 0{,}8$	2,4810	3,2810	0,3281
$x_9 = 0{,}9$	2,8091	3,7091	0,3709
$x_{10} = 1{,}0$	3,1800		

Биз $y|_{x=1} = 3{,}1800$ тақрибий қийматни топдик. Берилган тенгламанинг кўрсатилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи аниқ ечими

$$y = 2e^x - x - 1$$

бўлади. Демак,

$$y|_{x=1} = 2(e - 1) = 3{,}4366.$$

Абсолют хато: 0,2566, нисбий хато $\dfrac{0{,}2566}{3{,}4366} = 0{,}075 \approx 8\%$.

33-§. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишда Тейлор формуласи татбиқига асосланган айирмалар методи. Адамс методи

Яна ушбу

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

тенгламанинг $[x_0, b]$ кесмада $x = x_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. Бундан буён керак бўладиган белгилашларни киритамиз. Ечимнинг

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

нуқталаридаги тақрибий қийматлари

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

бўлади. Биринчи айирмалар ёки биринчи тартибли айирмалар:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots, \qquad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Иккинчи айирмалар ёки иккинчи тартибли айирмалар:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Иккинчи айирмаларнинг айирмалари учинчи тартибли айирмалар дейилади ва ҳ. к. $y'_0,\ y'_1,\ \ldots,\ y'_n$ билан ҳосилаларнинг тақрибий қийматларини, $y''_0,\ y''_1,\ \ldots,\ y''_n$ билан иккинчи ҳосилаларнинг тақрибий қийматларини белгилаймиз ва ҳ. к. шунга ўхшаш ҳосилаларнинг биринчи айирмалари

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \qquad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1,\ \ldots, \qquad \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1}$$

ҳосилаларнинг иккинчи айирмалари:

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \qquad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1,\ \ldots, \qquad \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

аниқланади ва ҳ. к.

Энди тенгламани $x = x_0$ нуқта атрофида ечиш учун Тейлор формуласини ёзамиз (1-т., IV боб, 6-§, (6) формула):

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} y'' + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} y_0^{(m)} + R_m. \qquad (2)$$

Бу формулада y_0 маълум, $y'_0,\ y''_0,\ \ldots$ ҳосилаларнинг қийматлари эса (1) тенгламадан қуйидагича топилади. (1) тенгламанинг ўнг томонига бошланғич x_0 ва y_0 қийматларни қўйиб, y'_0 ни топамиз:

$$y'_0 = f(x_0,\ y_0).$$

(1) тенглама ҳадларини x бўйича дифференциаллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{3}$$

Ўнг томонга x_0, y_0, y_0' қийматларни қўйиб,

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)_{x=x_0,\ y=y_0,\ y'=y_0'}$$

ни топамиз. (3) тенгликни яна бир марта x бўйича дифференциаллаб ҳамда x_0, y_0, y_0', y_0'' қийматларни қўйиб, y_0''' ни топамиз. Шундай давом этиб, биз исталган тартибли ҳосиланинг $x = x_0$ даги қийматларини топишимиз мумкин. (2) формуланинг*) ўнг томонидаги R_m қолдиқ ҳадлардан ташқари барча ҳадлар маълум ҳадлардир. Шундай қилиб, қолдиқ ҳадни эътиборга олмаганда, x нинг ҳар қандай қийматида ечимнинг тақрибий қийматларини ҳосил қилишимиз мумкин. Уларнинг аниқлиги $|x - x_0|$ нинг миқдорига ва ёйилманинг ҳадлари сонига боғлиқдир.

Қуйида кўриладиган усулда $|x - x_0|$ кичик бўлган ҳолда (2) формулага кўра y нинг фақат бир неча қийматлари аниқланади. Биз $x_1 = x_0 + h$ ҳамда $x_2 = x_0 + 2h$ да ёйилманинг тўртта ҳадини олиб, y_1 ва y_2 нинг қийматларини аниқлаймиз (y_0—бошланғич берилганларга асосан маълум):

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{1\cdot 2} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''', \tag{4}$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y_0' + \frac{(2h)^2}{1\cdot 2} y_0'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_0''', \tag{4'}$$

Шундай қилиб, функциянинг учта y_0, y_1, y_2 қиймати маълум**) деб ҳисоблаймиз. Бу қийматларга асосан (1) тенгламадан фойдаланиб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$y_0' = f(x_0,\ y_0), \qquad y_1' = f(x_1,\ y_1), \qquad y_2' = f(x_2,\ y_2).$$

y_0', y_1', y_2' ни билгандан кейин $\Delta y_0'$, $\Delta y_1'$, $\Delta^2 y_0'$ ни аниқлаш мумкин. Ҳисоблаш натижаларидан жадвал тузамиз.

---

*) Биз бундан буён $f(x, y)$ функцияни мулоҳазанинг боришига кўра x ва y бўйича неча марта талаб қилинса шунча марта дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

**) Агар биз ечимни катта аниқлик билан топмоқчи бўлсак, у ҳолда y нинг биринчи учта қийматидан кўра кўп қийматларини ҳисоблаш талаб қилинар эди. Бу ҳақда тафсилотни масалан, Я. С. Безиковичнинг „Приближенные вычисления“ Гостехиздат, 1949 китобидан қаранг.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
x_0	y_0	y'_0	y	[illegible]
			$\Delta y'_0$	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	y'_1		$\Delta^2 y'_0$
$Y_1 = X_0 + h_0$	Б'	С'	$\Delta y'_1$	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	y'_2		
$Y_0 = X_1 - h_0$	С...'	Б°	Ф°	Б°
$x_{k-2} = x_0 + (k-2)h$	y_{k-2}	y'_{k-2}		
$K^0 = C' - Б^0$	Y_k	C_{k+1}	$\Delta y'_{k-2}$	ΔC_k+
$x_{k-1} = x_0 + (k-1)h$	y_{k-1}	y'_{k-1}		$\Delta^2 y'_{k-2}$
$Ф^0 = C^0 + K^c$	$Б_k$	Ф°	$\Delta y'_{k-1}$	ΔD_{k+1}
$x_k = x_0 + kh$	y_k	y'_k		

Энди бизга ечимнинг

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k$$

қийматлари маълум деб фараз қиламиз. Бу қийматларга асосан (1) тенгламадан фойдаланиб,

$$y'_0,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_k$$

ҳосилалар қийматларини, демак,

$$\Delta y'_0,\ \Delta y'_1,\ \ldots,\ \Delta y'_{k-1}$$

ҳамда

$$\Delta^2 y'_0,\ \Delta^2 y'_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y'_{k-2}$$

ларни ҳисоблашимиз мумкин. $a = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k + h$ деб фараз қилиб, y_{k+1} нинг қийматини Тейлор формуласига кўра ҳисоблаймиз:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{m}_k + R_m.$$

Бу ҳолда ёйилманинг тўртта ҳади билан чегараланамиз:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h^2}{1\cdot 2} y''_k + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} y'''_k. \tag{5}$$

Бу формулада y''_k ва y'''_k номаълум бўлиб, уларни биз маълум биринчи ҳамда иккинчи айирмалар орқали аниқлашга ҳаракат қиламиз.

Дастлаб $a = x_k$, $x - a = -h$ деб фараз қилиб, y'_{k-1} ни Тейлор формуласига кўра тасвирлаймиз:

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1} y''_k + \frac{(-h)^2}{1\cdot 2} y'''_k \tag{6}$$

ва $a = x_k$, $x-a = -2h$ деб фараз қилиб, y'_{k-2} ни ҳам ўша формула бўйича тасвир этамиз:

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1} y''_k + \frac{(-2h)^2}{1\cdot 2} y'''_k. \tag{7}$$

(6) тенгликдан

$$y'_k - y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{1\cdot 2} y'''_k \tag{8}$$

ни топамиз. (6) тенглик ҳадларидан (7) тенглик ҳадларини айириб, мана буни ҳосил қиламиз:

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k. \tag{9}$$

(8) ва (9) тенгликлардан

$$\Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k$$

ни ёки

$$y'''_k = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2} \tag{10}$$

ни топамиз.

y'''_k нинг ифодасини (8) тенгликка қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз.

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h}. \tag{11}$$

Шундай қилиб, y''_k ва y'''_k топилди. (10) ва (11) ифодаларни (5) ёйилмага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2}. \tag{12}$$

Ана шу тўрт ҳадли *Адамс формуласи* деб аталган формуладир. (12) формула y_k, y_{k-1}, y_{k-2} ни билган ҳолда y_{k+1} ни аниқлаш имконини беради. Шундай қилиб, биз y_0, y_1, y_2 ни билган ҳолда y_3 ни топишимиз ҳамда бундан кейин y_4, y_5, ... ларни аниқлашимиз мумкин.

1-изоҳ. Агар (1) тенгламанинг $[x_0, b]$ кесмада бошланғич шартларни қаноатлантирувчи биттагина ечими мавжуд бўлса, у ҳолда (12) формулага кўра аниқланган тақрибий қийматларнинг хатоси абсолют қиймат бўйича Mh^4 дан ошмаслигини исботсиз кўрсатамиз, бунда M — интервал узунлигига ҳамда $f(x, y)$ функциянинг кўринишига боғлиқ бўлган ва h га боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдор.

2-изоҳ. Агар биз ҳисоблашда катта аниқлик ҳосил қилишни истасак, у ҳолда (5) ёйилмадагидан кўпроқ ҳадлар олишимиз лозим бўлади ва (12) формула мос ҳолда ўзгаради. Масалан, агар (5) формула ўрнига биз ўнг томонда бешта ҳадни ўз ичига олган формула олсак, яъни h^4 тартибли ҳад билан уни тўлдирсак, у ҳолда (12) формула ўрнига ўхшаш усул билан ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y_{k-1}' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}' + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-3}'.$$

Бу ерда y_{k+1} нинг қиймати y_k, y_{k-1}, y_{k-2} ва y_{k-3} ларнинг қийматлари орқали аниқланади. Шундай қилиб, бу формула билан ҳисоблашни бошлаш учун ечимнинг биринчи тўртта y_0, y_1, y_2, y_3 қийматларини билиш керак бўлади. Бу қийматларни (4) кўринишдаги формулалар билан ҳисоблашда ёйилманинг бешта ҳадини олиш керак.

1-мисол. Ушбу

$$y' = y + x$$

тенгламанинг $x_0 = 0$ да $y_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимининг тақрибий қийматлари топилсин.

$x = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$ бўлганда ечимнинг қийматлари аниқлансин.

Ечиш. Дастлаб (4) ва (4′) формулалардан y_1 ва y_2 ни топамиз. Тенгламадан ва бошланғич берилганлардан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y_0' = (y + x)_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Берилган тенгламани дифференциаллаб

$$y'' = y' + 1$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$y_0'' = (y' + 1)_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$y''' = y''.$$

Демак,

$$y_0''' = y_0'' = 2.$$

(4) тенгликка y_0, y_0', y_0'' ва $h = 0{,}1$ қийматларни қўйиб, y_1 ни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1 + \frac{(0{,}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0{,}1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1{,}1103.$$

Шунга ўхшаш $h = 0,2$ да ушбуни ҳосил қиламиз:

$$y_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(0,2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2 = 1,2427.$$

y_0, y_1, y_2 ни билганимиздан кейин тенгламаларга асосан қуйидагиларни топамиз:

$$y_0' = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y_1' = y_1 + x_1 = 1,1103 + 0,1 = 1,2103,$$

$$y_2' = y_2 + x_2 = 1,2427 + 0,2 = 1,4427,$$

$$\Delta y_0' = 0,2103,$$

$$\Delta y_1' = 0,2324,$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0221.$$

Ҳосил қилинган қийматлардан жадвал тузамиз:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1,0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0 = 0,2103$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 1,1103$	$y_1' = 1,2103$		$\Delta^2 y_0' = 0,0221$
			$\Delta y_1' = 0,2324$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 1,2427$	$y_2' = 1,4427$		$\Delta^2 y_1' = 0,0244$
			$\Delta y_2 = 0,2568$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 1,3995$	$y_3' = 1,6995$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 1,5833$			

(12) формулага кўра y_3 ни топамиз:

$$y_3 = 1,2427 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,4427 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2324 + \frac{5 \cdot (0,1)}{12} \cdot 0,0221 = 1,3995.$$

Бундан кейин y_3', $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$ ларнинг қийматларини топамиз: Яна (12) формулага кўра y_4 ни топамиз:

$$y_4 = 1,3995 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,6995 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,2568 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0244 = 1,5833.$$

Берилган тенглама ечимининг аниқ ифодаси:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Демак, $y_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0,4 - 1 = 1,58364$. Абсолют хато 0,0003; нисбий хато: $\frac{0,0003}{1,5836} \approx 0,0002 = 0,02\%$ (Эйлер усули билан ҳисоблангaнда y_4 қийматининг абсолют хатоси 0,06; нисбий хатоси: $0,038 = 3,8\%$).

2-мисол. Ушбу

$$y' = y^2 + x^2$$

тенглама ечимининг $x_0 = 0$ да $y_0 = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи тақрибий қийматлари топилсин. $x = 0,1;\ 0,2;\ 0,3;\ 0,4$ да ечимнинг қийматлари аниқлансин.

Ечиш. Қуйидагиларни топамиз:

$$y'_0 = 0^2 + 0^2 = 0,$$

$$y''_{x=0} = (2yy' + 2x)_{x=0} = 0,$$

$$y'''_{x=0} = (2y'^2 + 2yy'' + 2)_{x=0} = 2.$$

(4) ва (4′) формулаларга кўра ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0003, \qquad y_2 = \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 2 = 0,0027.$$

Тенгламадан мана буларни топамиз:

$$y'_0 = 0, \qquad y'_1 = 0,0100, \qquad y'_2 = 0,0400.$$

Бу маълумотларга асосан жадвалнинг биринчи сатрларини тузамиз, ундан кейин y_3 ва y_4 қийматларни (12) формулага кўра аниқлаймиз

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y'_0 = 0$		
			$\Delta y'_0 = 0,0100$	
$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,0003$	$y'_1 = 0,0100$		$\Delta^2 y'_0 = 0,0200$
			$\Delta y'_1 = 0,0300$	
$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,0027$	$y'_2 = 0,0400$		$\Delta^2 y'_1 = 0,0201$
			$\Delta y'_2 = 0,0501$	
$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,0090$	$y'_3 = 0,0901$		
$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,0204$			

Шундай қилиб,

$$y_3 = 0{,}0027 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0400 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0300 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0200 = 0{,}0090,$$

$$y_4 = 0{,}0090 + \frac{0{,}1}{1}\cdot 0{,}0901 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}0501 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}0201 = 0{,}0214.$$

y_4 да биринчи тўртта тўғри рақам бундай эканини қайд қилиб ўтамиз: $y_4 = 0{,}0213$ (буни бошқача анча аниқроқ усуллар билан, хатони баҳолаб ҳосил қилиш мумкин).

34- §. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаларини тақрибий интеграллаш методи

32 ва 33- § ларда кўрилган дифференциал тенгламаларни тақрибий интеграллаш усуллари биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаларини ечиш учун ҳам татбиқ этилади. Бу ерда тенгламалар системаларини ечиш учун айирмалар методини қараймиз. Мулоҳазаларни иккита изланган номаълум функцияли иккита тенгламалар системаси учун олиб борамиз.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,\ y,\ z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = f_2(x,\ y,\ z), \tag{2}$$

тенгламалар системасининг $x = x_0$ бўлганда $y = y_0$, $z = z_0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топиш талаб қилинади.

y ва z функцияларнинг қийматларини аргументнинг x_0, x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n қийматларида аниқлаймиз. Яна

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x = h \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \tag{3}$$

бўлсин. Функцияларнинг тақрибий қийматларини

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_k,\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_n$$

ва мос равишда

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_k,\ z_{k+1},\ \ldots,\ z_n$$

билан белгилаймиз. 33- § даги (12) типдаги реккурент формулаларни ёзамиз:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2}\Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} h\Delta^2 y'_{k-2}, \qquad (4)$$

$$z_{k+1} = z_k + \frac{h}{1} z'_k + \frac{h}{2}\Delta z'_{k-1} + \frac{5}{12} h\Delta^2 z'_{k-2}. \qquad (5)$$

Бу формулалар билан ҳисоблашни бошлаш учун берилган y_0 ва z_0 дан ташқари y_1, y_2; z_1, z_2 ни билиш керак. Бу қийматларни 32- § даги (4) ва (4′) кўринишдаги формулалардан топамиз:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1} y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0,$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1} y'_0 + \frac{(2h)^2}{2} y''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} y'''_0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{1} z'_0 + \frac{h^2}{2} z''_0 + \frac{h^3}{3!} z'''_0,$$

$$z_2 = z_0 + \frac{2h}{1} z'_0 + \frac{(2h)^2}{2} z''_0 + \frac{(2h)^3}{3!} z'''_0,$$

Бу формулаларни татбиқ қилиш учун y'_0, y''_0, y'''_0, z'_0, z''_0, z'''_0 ни билиш керак, уларни аниқлашга биз ҳозир киришамиз. (1) ва (2) тенгламалардан ушбуларни топамиз:

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0, z_0),$$
$$z'_0 = f_2(x_0, y_0, z_0).$$

(1) ва (2) тенгламаларни дифференциаллаб ҳамда x_0 y_0, z_0, y'_0 ва z'_0 лар қийматларини қўйиб, ушбуни топамиз:

$$y''_0 = (y'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'\right)_{x=x_0},$$

$$z''_0 = (z'')_{x=x_0} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'\right)_{x=x_0}.$$

Яна бир марта дифференциаллаб, y'''_0 ва z'''_0 ни топамиз y_1, y_2, z_1, z_2 ни билганимиз ҳолда берилган (1) ва (2) тенгламалардан қуйидагиларни топамиз:

$$y'_1,\ y'_2,\ z'_1,\ z'_2,\ \Delta y'_0,\ \Delta y'_1,\ \Delta^2 y'_0,\ \Delta z'_0,\ \Delta z'_1,\ \Delta^2 z'_0,$$

бундан кейин биз жадвалнинг биринчи бешта сатрини тўлдиришимиз мумкин:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^2 z'$
x_0	y_0	y_0'			z_0	z_0'		
			$\Delta y_0'$				$\Delta z_0'$	
x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_0'$	z_1	z_1'		$\Delta^2 z_0'$
			$\Delta y_1'$				$\Delta z_1'$	
x_2	y_2	y_2'		$\Delta^2 y_1'$	z_2	z_2'		$\Delta^2 z_1'$
			$\Delta y_2'$				$\Delta z_2'$	
x_3	y_3	y_3'			z_1	z_3'		

(4) ва (5) формулалардан y_3 ва z_3 ни, (1) ва (2) тенгламалардан y_3' ва z_3' ни топамиз. $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$ $\Delta z_2'$, $\Delta^2 z_1'$ ларни яна (4) ва (5) формулаларга мувофиқ ҳисоблаб y_4 ва z_4 ни топамиз ва ҳ. к.

1- мисол. Ушбу

$$y' = z, \qquad z' = y$$

системанинг $x = 0$ да $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларининг тақрибий қийматлари топилсин $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$ бўлганда ечимларнинг қийматлари топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламалардан ушбуларни топамиз:

$$y_0' = z_{x=0} = 1,$$

$$z_0' = y_{x=0} = 0.$$

Берилган тенгламаларни дифференциаллаб, қуйидагиларни топамиз:

$$y_0'' = (y'')_{x=0} = (z')_{x=0} = 0,$$
$$z_0'' = (z'')_{x=0} = (y')_{x=0} = 1,$$
$$y_0''' = (y''')_{x=0} = (z'')_{x=0} = 1,$$
$$z_0''' = (z''')_{x=0} = (y'')_{x=0} = 0.$$

(4) ва (5) типдаги формулалардан қуйидагиларни топамиз:

$$y_1 = 0 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1 + \frac{(0{,}1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0{,}1)^3}{3!} \cdot 1 = 0{,}1002,$$

$$y_2 = 0 + \frac{0,2}{1} \cdot 1 + \frac{(0,2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 0 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 1 = 0,2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{0,1}{1} \cdot 0 + \frac{(0,1)^2}{1 \cdot 2} \cdot 1 + \frac{(0,1)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{0,2}{1} \cdot 0 + \frac{(0,2)^2}{2!} \cdot 1 + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot 0 = 1,0200.$$

Берилган тенгламаларга асосан шуларни топамиз:

$$y_1' = 1,0050, \qquad z_1' = 0,1002,$$

$$y_2' = 1,0200, \qquad z_2' = 0,2013,$$

$$\Delta y_0' = 0,0050, \qquad \Delta z_0' = 0,1002,$$

$$\Delta y_1' = 0,0150, \qquad \Delta z_1' = 0,1011,$$

$$\Delta^2 y_0' = 0,0100, \qquad \Delta^2 z_0' = 0,0009$$

ва жадвалнинг олдинги бешта сатрини тўлдирамиз.

Бундан кейин (4) ва (5) формулаларга кўра қуйидагиларни топамиз:

$$y_3 = 0,2013 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0200 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0150 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0100 = 0,3045,$$

$$z_3 = 1,0200 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,2013 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1011 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0009 = 1,0452.$$

Шунга ўхшаш

$$y_4 = 0,3045 + \frac{0,1}{1} \cdot 1,0452 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,0252 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0102 = 0,4107,$$

$$z_4 = 1,0452 + \frac{0,1}{1} \cdot 0,3045 + \frac{0,1}{2} \cdot 0,1032 + \frac{5}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,0021 = 1,0809.$$

Берилган тенгламалар системасининг кўрсатилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи аниқ ечимлари

$$y = \operatorname{sh} x, \qquad z = \operatorname{ch} x$$

бўлиши равшан. Шунинг учун вергулдан кейин бешта тўғри рақамли ечимлар бундай бўлади:

$$y_4 = \operatorname{sh} 0,4 = 0,41075, \qquad z_4 = \operatorname{ch} 0,4 = 1,08107.$$

Изоҳ. Юқори тартибли тенгламалар ва юқори тартибли тенгламалар системаси кўп ҳолларда биринчи тартибли тенгламалар системасига келтирилгани учун, юқорида баён қилинган усуллар бу масалаларни ечиш учун қўлланилади.

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	z	z'	$\Delta z'$	$\Delta^3 z'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$y_0' = 1$			$z_0 = 1$	$z_0' = 0$		
			$\Delta y_0' = 0{,}0050$				$\Delta z_0' = 0{,}1002$	
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}1002$	$y_1' = 1{,}0050$		$\Delta^2 y_0' = 0{,}0100$	$z_1 = 1{,}0050$	$z_1' = 0{,}1002$		$\Delta^2 z_0' = 0{,}0009$
			$\Delta y_1' = 0{,}0150$				$\Delta z_1' = 0{,}1014$	
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}2013$	$y_2' = 1{,}0200$		$\Delta^2 y_1' = 0{,}0102$	$z_2 = 1{,}0200$	$z_2' = 0{,}2013$		$\Delta^2 z_1' = 0{,}0021$
			$\Delta y_2' = 0{,}0252$				$\Delta z_2' = 0{,}1032$	
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}3045$	$y_3' = 1{,}0452$			$z_3 = 1{,}0452$	$z_3' = 0{,}3045$		
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}4107$				$z_4 = 1{,}0809$			

XIII бобга доир машқлар

Ихтиёрий ўзгармас миқдорларга боғлиқ бўлган функциялар мос дифференциал тенгламаларни қаноатлантириши кўрсатилсин:

Функциялар	Дифференциал тенгламалар
1. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$.	$\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$
2. $y=Cx+C-C^2$.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}+y=0.$
3. $y^2=2Cx+C^2$.	$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0.$
4. $y^2=Cx^2-\frac{a^2C}{1+C}$.	$xy\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=(x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{ax}.$
5. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3$.	$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}=0.$
6. $y=(C_1+C_2x)e^{kx}+\frac{e^x}{(k-1)^2}$.	$\frac{d^2y}{dx^2}-2k\frac{dy}{dx}+k^2y=e^x.$
7. $y=C_1e^{a\,\mathrm{arc}\sin x}+C_2e^{-a\,\mathrm{arc}\sin x}$.	$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0.$
8. $y=\frac{C_1}{x}+C_2$.	$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}=0.$

Ўзгарувчилари ажраладиган ушбу дифференциал тенгламалар интеграллансин. 9. $y\,dx-x\,dy=0$. *Жав.* $y=Cx$. 10. $(1+u)v\,du+(1-v)\,u\,dv=0$. *Жав.* $\ln uv+u-v=C$. 11. $(1+y)dx-(1-x)\,dy=0$. *Жав.* $(1+y)(1-x)=C$. 12. $(t^2-xt^2)\frac{dx}{dt}+x^2+tx^2=0$. *Жав.* $\frac{t+x}{tx}+\ln\frac{x}{t}=C$. 13. $(y-a)dx+x^2dy=0$. *Жав.* $(y-a)=Ce^{\frac{1}{x}}$. 14. $z\,dt-(t^2-a^2)\,dz=0$. *Жав.* $z^{2a}=C\frac{t-a}{t+a}$. 15. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$. *Жав.* $x=\frac{y+C}{1-Cy}$. 16. $(1+s^2)\,dt-\sqrt{t}\,ds=0$. *Жав.* $2\sqrt{t}-\mathrm{arc\,tg}\,s=C$. 17. $d\rho+\rho\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=0$. *Жав.* $\rho=C\cos\theta$. 18. $\sin\theta\cos\varphi\,d\theta-\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi=0$. *Жав.* $\cos\varphi=C\cos\theta$. 19. $\sec^2\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi d\theta+\sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\varphi=0$. *Жав.* $\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi=C$. 20. $\sec^2\theta\,\mathrm{tg}\varphi\,d\varphi+\sec^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=0$. *Жав.* $\sin^2\theta+\sin^2\varphi=C$. 21. $(1+x^2)\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Жав.* $\arcsin y-\mathrm{arctg}\,x=C$. 22. $\sqrt{1-x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$. *Жав.* $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=C$. 23. $3e^x\,\mathrm{tg}\,y dx+(1-e^x)\sec^2 y dy=0$. *Жав.* $\mathrm{tg}\,v=C(1-e^x)^3$. 24. $(x-y^2x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$. *Жав.* $x^2+y^2=x^2y^2+C$.

Дифференциал тенгламалар тузишга доир масалалар

25. Эгри чизиқнинг исталган нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти уриниш нуқтасининг абсциссасига пропорционал бўлган эгри чизиқ парабола экани исботлансин. *Жав.* $y=ax^2+C$.

26. (0, — 2) нуқтадан ўтадиган эгри чизиқнинг исталган нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасини уч бирлик орттирилганига тенг бўлган эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = e^x - 3$.

27. (1,1) нуқтадан ўтадиган эгри чизиқнинг исталган нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шу нуқта ординатасининг квадратига пропорционал. Шу эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $k(x-1)y - y + 1 = 0$.

28. Эгри чизиқнинг исталган нуқтасига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти бу нуқта билан координаталар бошини туташтирувчи тўғри чизиқ бурчак коэффициентидан n марта катта бўлган эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = Cx^n$.

29 (2,1) нуқтадан эгри чизиқнинг исталган нуқтасига ўтказилган уринманинг йўналиши координаталар бошидан шу нуқтага ўтказилган радиус-вектор йўналиши билан бир хил. Бу эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = \frac{1}{2}x$.

30. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида радиус-вектор билан уринма орасидаги бурчакнинг тангенси тескари ишора билан олинган радиус-векторнинг тескари миқдорига тенг. Қутб координаталар системасида бу эгри чизиқ тенгламаси тузилсин. *Жав.* $r(\theta + C) = 1$.

31. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида радиус-вектор билан уринма ташкил қилган бурчак тангенси радиус-векторнинг квадратига тенг. Бу эгри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси топилсин. *Жав.* $r^2 = (\theta + C)\,2$.

32. Эгри чизиқнинг барча нормаллари ўзгармас бир нуқта орқали ўтиш хоссасига эга бўлса, бу эгри чизиқ айлана бўлиши исботлансин.

33. Ҳар бир нуқтасида уринма ости узунлиги иккиланган абсциссага тенг бўлган эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = C\sqrt{x}$.

34. Шундай эгри чизиқ топилсинки, унинг радиус-вектори уринманинг уриниш нуқтаси билан x лар ўқи орасидаги кесмасига тенг бўлсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра, $\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, бундан $\frac{dy}{y} = \pm\frac{dx}{x}$. Буларни интеграллаб, эгри чизиқларнинг иккита оиласини ҳосил қиламиз: $y = Cx$ ва $y = \frac{C}{x}$.

35. Ньютон қонунига кўра бирор жисмнинг ҳавода совиш тезлиги жисм температураси билан ҳаво температураси орасидаги айирмага пропорционал. Агар ҳавонинг температураси 20°C бўлиб, жисм 20 минут ичида 100° дан 60°C гача совиса, қанча вақтдан кейин унинг температураси 30°C гача пасаяди?

Ечиш. Масаланинг дифференциал тенгламаси $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$. Бу тенгламани интеграллаймиз: $T - 20 = Ce^{kt}$, $t = 0$ бўлганда $T = 100$; $t = 20$ бўлганда $T = 60$. Шунинг учун $C = 80$; $40 = Ce^{20k}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$. Демак, $T = 20 + 80 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. $T = 30$ деб олиб, $t = 60$ *мин* эканини топамиз.

36. Баландлиги 10 *см*, учидаги бурчаги $\alpha = 60°$ бўлган воронкага сув тўлдирилган. Шу сув воронка остидаги 0,5 *см*^{2} ли тешикдан қанча (T) вақт ичида оқиб чиқиб кетади?

Ечиш. t ва $t+\Delta t$ вақтлар орасида оқиб чиққан сув ҳажмини икки усул билан ҳисоблаймиз. v тезлик ўзгармас бўлганда бир секундда тешикдан асоси $0{,}5\ \text{см}^2$ ва баландлиги v бўлган сув цилиндри оқиб чиқади, Δt вақт ичида эса ҳажми dv бўлган сув оқиб чиқади: $-dv = -0{,}5\, v\, dt = -0{,}3\sqrt{2gh}\, dt$ *).

Иккинчи томондан, оқиб чиқиши натижасида сувнинг баландлиги манфий dh „орттирма" олади ва оқиб чиққан сув ҳажмининг дифференциали:

$$-dv = \pi r^2 dh = \frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\, dh$$

бўлади.

Шундай қилиб,

$$\frac{\pi}{3}(h+0{,}7)^2\, dh = -0{,}3\sqrt{2gh}\, dt,$$

бундан

$$t = 0{,}0315\left(10^{5/2} - h^{5/2}\right) + 0{,}0732\left(10^{3/2} - h^{3/2}\right) + 0{,}078\left(\sqrt{10} - \sqrt{h}\right).$$

$h = 0$ фараз этиб, сувнинг оқиб чиқиш вақти $T = 12{,}5$ *сек* эканини топамиз.

37. Суюқликда айланувчи дискка ишқалишнинг кўрсатган секинлаштирувчи таъсири айланишнинг ω бурчак тезлигига пропорционал. Агар диск 100 *айл/мин* тезлик билан айлана бошлаб, орадан 1 *мин* ўтгандан кейин 60 *айл/мин* тезлик билан айланиши маълум бўлса, бурчак тезлик билан вақт орасидаги боғланиш қандай бўлади? *Жав.* $\omega = 100(3/5)^t$ *айл/мин*

38. Вертикал ҳаво устунининг ҳар бир сатҳидаги босим юқори қатламларнинг босими натижасида ҳосил бўлади деб фараз қиламиз. Агар денгиз сатҳида бу босим $1\ \text{см}^2$ га 1 *кг* бўлиб, 500 *м* баландликда $1\ \text{см}^2$ га 0,92 *кг* бўлиши маълум бўлса, босим билан баландлик орасидаги боғланишни топинг.

Кўрсатма. Бойль — Мариотт қонунидан фойдаланилади, бу қонунга мувофиқ газнинг зичлиги босимга пропорционалдир. Масаланинг дифференциал тенгламаси: $dp = -kp\, dh$, бундан $p = e^{-0{,}00017h}$. *Жав.* $p = e^{-0{,}00017h}$.

Қуйидаги бир жинсли дифференциал тенгламаларни интегралланг:
89. $(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$. *Жав.* $y^2 + 2xy - x^2 = C$. 40. $(x+y)\,dx + x\,dy = 0$. *Жав.* $x^2 + 2xy = C$. 41. $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$. *Жав* $\ln(x^2+y^2)^{1/2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$. 42. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$. *Жав.* $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0$. 43 $(8y+10x)\,dx + (5y+7x)\,dy = 0$. *Жав.* $(x+y)^2(2x+y)^3 = C$. 44. $2\sqrt{st} - s)\,dt + t\,ds = 0$. *Жав.* $te^{\sqrt{\frac{s}{t}}} = C$ ёки $s = t\ln^2\frac{C}{t}$. 45. $(t-s)\,dt + t\,ds = 0$. *Жав.* $te^{\frac{s}{t}} = C$ ёки $s = t\ln\frac{C}{t}$. 46. $xy^2dy = (x^3+y^3)\,dx$. *Жав.* $y = x\sqrt[3]{3\ln Cx}$.

47. $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx + x\,dy) = y\sin\frac{y}{x}(x\,dy - y\,dx)$. *Жав.* $xy\cos\frac{y}{x} = C$.

Бир жинсли тенгламага келтириладиган қуйидаги дифференциал тенгламаларни интегралланг:
48. $(3y-7x+7)\,dx - (3x-7y-3)\,dv = 0$. *Жав.* $(x+y-1)^5(x-y-1)^2 = C$.
49. $(x+2y+1)\,dx - (2x+4y+3)\,dy = 0$. *Жав.* $\ln(4x+8y+5) + 8y - 4x = C$.
50. $(x+2y+1)\,dx - (2x-3)\,dy = 0$. *Жав.* $\ln(2x-3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$.

---

*) Бўш сиртдан h масофадаги тешикдан оқиб чиқувчи сувнинг v тезлиги $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$ билан берилади, бунда g—оғирлик кучининг тезланиши.

51. Эгри чизиқнинг нормал ости узунлиги абсцисса билан ординатанинг ўрта арифметик қийматига тенг. Бу эгри чизиқ аниқлансин. *Жав.* $(x-y)^2 \times \times (x+2y) = C$.

52. Эгри чизиққа ўтказилган уринма Oy ўқдан ажратган кесманинг радиус-векторга нисбати ўзгармас миқдорга тенг. Бу эгри чизиқ аниқлансин.

Ечиш. Масаланинг шартларига кўра: $\dfrac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, бундан

$$\left(\frac{x}{C}\right)^m-\left(\frac{C}{x}\right)^m=\frac{2y}{x}.$$

53. Эгри чизиққа ўтказилган нормал Ox ўқдан ажратган кесманинг радиус-векторга нисбати ўзгармас миқдорга тенг. Бу эгри чизиқ аниқлансин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $\dfrac{x+y\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}=m$, бундан $x^2+y^2= = m^2(x-C)^2$.

54. Эгри чизиққа ўтказилган уринма Oy ўқдан ажратган кесма $a\sec\theta$ га тенг, бунда θ — радиус-вектор билан Ox ўқ орасидаги бурчак. Бу эгри чизиқ аниқлансин.

Ечиш. $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$ бўлгани учун ва масаланинг шартига кўра қуйидагиларни ҳосил қиламиз: $y-x\dfrac{dy}{dx}=a\sec\theta$, шунинг учун

$$y-x\frac{dy}{dx}=a\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},$$

бундан

$$y=\frac{x}{2}\left[e^{\frac{a}{x}+b}-e^{-\left(\frac{a}{x}+b\right)}\right].$$

55. Эгри чизиқнинг бирор нуқтасига ўтказилган нормалнинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси координаталар бошидан бу нуқтагача бўлган масофага тенг. Бу эгри чизиқ аниқлансин.

Ечиш. Нормалнинг Oy ўқдан ажратган кесмаси $y+\dfrac{x}{y'}$ га тенг; шунинг учун масаланинг шартига кўра

$$y+\frac{x}{y'}=\sqrt{x^2+y^2},$$

бундан

$$x^2=C(2y+C).$$

56. Битта O нуқтадан чиқадиган барча нурни берилган йўналишга параллел акслантирувчи кўзгунинг шакли топилсин.

Ечиш. x ўқи деб берилган йўналишни, координаталар боши деб O нуқтани оламиз. OM—тушувчи нур, MP—аксланган нур, MQ— изланаётган эгри чизиққа ўтказилган нормал бўлсин.

$$\alpha=\beta,\quad OM=OQ,\quad NM=y,$$

$$NQ=NO+OQ=-x+\sqrt{x^2+y^2}=y\operatorname{ctg}\beta=y\frac{dy}{dx},$$

бундан

$$ydy = (-x + \sqrt{x^2+y^2})\,dx;$$

бу тенгламани интеграллаб $y^2 = C^2 + 2Cx$ эканини топамиз.

Қуйидаги чизиқли дифференциал тенгламалар интеграллансин:

57. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. *Жав.* $2y = (x+1)^4 + C(x+1)^2$. 58. $y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$. *Жав.* $y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$. 59. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - ax^3 = 0$. *Жав.* $y = ax + Cx\sqrt{1-x^2}$. 60. $\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$. *Жав.* $s = \sin t + C\cos t$. 61. $\frac{ds}{dt} + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$. *Жав.* $s = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$. 62. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$. *Жав.* $y = x^n(e^x + C)$. 63. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$. *Жав.* $x^n y = ax + C$. 64. $y' + y = e^{-x}$. *Жав.* $e^x y = x + C$. 65. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$. *Жав.* $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$.

Қуйидаги Бернулли тенгламалари интеграллансин:

66. $y' + xy = x^3y^3$. *Жав.* $y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$. 67. $(1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$. *Жав.* $(C\sqrt{1-x^2} - a)y = 1$. 68. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$. *Жав.* $a^2y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1$. 69. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$. *Жав.* $x\left[(2-y^2)e^{\frac{1}{2}y^2} + C\right] = e^{\frac{1}{2}y^2}$. 70. $(y\ln x - 2)\,y\,dx = x\,dy$. *Жав.* $y(Cx^2 + \ln x^2 + 1) = 4$. 71. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$. *Жав.* $y = \frac{\mathrm{tg}\,x + \sec x}{\sin x + C}$.

Қуйидаги тўла дифференциалли тенгламалар интеграллансин:

72. $(x^2 + y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0$. *Жав.* $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$. 73. $(y - 3x^2)\,dx - (4y - x)dy = 0$. *Жав.* $2y^2 - xy + x^3 = C$. 74. $(y^3 - x)y' = y$. *Жав.* $y^4 = 4xy + C$. 75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0$. *Жав.* $\ln\frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$. 76. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$. *Жав.* $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$. 77. $\frac{x\,dx + (2x+y)\,dy}{(x+y)^2} = 0$. *Жав.* $\ln(x+y) - \frac{x}{x+y} = C$. 78. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2ydy}{x^3}$. *Жав.* $x^2 + y^2 = Cx^3$. 79. $\frac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$. *Жав.* $\frac{xy}{x-y} = C$. 80. $x\,dx + y\,dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$. *Жав.* $x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} = C$.

81. Қуйидаги хоссага эга бўлган эгри чизиқ аниқлансин: координаталар бошидан эгри чизиқнинг исталган нуқтасигача бўлган масофанинг квадрати билан бу нуқтадан ўтган нормалнинг абсциссалар ўқидан ажратган кесманинг кўпайтмаси шу нуқта абсциссасининг кубига тенг. *Жав.* $y^2(2x^2 + y^2) = C$.

82. Қуйидаги эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин: a) $y = Cx + C^2$. *Жав.* $x^2 + 4y = 0$. b) $y = \frac{x}{C} + C^2$. *Жав.* $27x^2 = 4y^3$. c) $\frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2$.

Жав. $27y = x^3$. d) $C^2x + Cy - 1 = 0$. *Жав.* $y^2 + 4x = 0$. e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. *Жав.* $x = 0$; $y = 0$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. *Жав.* $y^2 = 4x + 4$. g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$. *Жав.* $(x - y)^2 = 8$. h) $Cx^4 + C^2y = 1$. *Жав.* $x^4 + 4y = 0$.

83. Тўғри чизиқ шундай суриладики, унинг координата ўқларидан ажратган кесмаларининг йиғиндиси ўзгармас a миқдорга тенглигича қолаверади. Тўғри чизиқнинг барча вазиятлари ўрамасининг тенгламаси тузилсин. *Жав.* $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ (парабола).

84. Координата ўқлари тўғри чизиқлар оиласидаги ҳар бир тўғри чизиқдан ўзгармас a узунликда кесма ажратади. Тўғри чизиқлар оиласининг ўрамаси топилсин. *Жав.* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

85. Диаметрлари $y^2 = 2px$ параболанинг иккиланган ординаталаридан иборат бўлган айланалар оиласининг ўрамаси топилсин.

$$\text{Жав. } y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

86. Марказлари $y^2 = 2px$ параболада ётувчи айланалар оиласининг ҳамма айланалари бу параболанинг учидан ўтади. Шу айланалар оиласининг ўрамаси топилсин. *Жав.* $x^3 + y^2(x + p) = 0$ циссоида.

87. Диаметрлари вазифасини $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ эллипснинг x лар ўқига перпендикуляр бўлган ватарлари бажарувчи айланалар оиласининг ўрамаси топилсин. *Жав.* $\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

88. $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ эллипснинг эволютасини унинг нормаллари ўрамаси каби топилсин. *Жав.* $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

Қуйидаги тенгламалар (Лагранж тегламалари) интеграллансин:

89. $y = 2xy' + y'^2$. *Жав.* $x = \frac{C}{3p^2} - \frac{2}{3}p$; $y = \frac{2C - p^3}{3p}$. 90. $y = xy'^2 + y'^2$. *Жав.* $y = (\sqrt{x+1} + C)^2$. Махсус ечим: $y = 0$. 91. $y = x(1 + y') + (y')^2$. *Жав.* $x = Ce^{-p} - 2p + 2$; $y = C(p + 1)e^{-p} - p^2 + 2$. 92. $y = yy'^2 + 2xy'$. *Жав.* $4Cx = 4C^2 - y^2$.

93. Ўзгармас нормалга эга бўлган эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $(x - C)^2 + y^2 = a^2$. Махсус ечим: $y = \pm a$.

Қуйида берилган Клеро тенгламалари интеграллансин:

94. $y = xy' + y' - y'^2$. *Жав.* $y = Cx + C - C^2$. Махсус ечим: $4y = (x + 1)^2$.
95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. *Жав.* $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$. Махсус ечим: $y^2 - x^2 = 1$.
96. $y = xy' + y'$. *Жав.* $y = Cx + C$. 97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$ *Жав.* $y = Cx + \frac{1}{C}$. Махсус ечим: $y^2 = 4x$. 98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$. *Жав.* $y = Cx - \frac{1}{C^2}$. Махсус ечим: $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

99. Изланаётган эгри чизиққа ўтказилган уринма билан координата ўқлари орасида ҳосил бўлган учбурчакнинг юзи ўзгармас миқдорга тенг. Эгри чизиқ топилсин. *Жав.* Тенг ёнли гипербола: $4xy = \pm a^2$. Бундан ташқари, $y = Cx \pm a\sqrt{C}$ — оиланинг исталган тўғри чизиғи.

100. Эгри чизиққа ўтказилган уринманинг координата ўқлари орасида қолган кесмасининг узунлиги ўзгармас бўлиб, a га тенг. Бу эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = Cx \pm \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}$. Махсус ечим: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

101. Эгри чизиққа ўтказилган уринмалар координата ўқларида йиғиндиси $2a$ га тенг бўлган кесмалар ҳосил қилади. Бу эгри чизиқ топилсин. *Жав.* $y = Cx - \frac{2aC}{1-C}$. Махсус ечим: $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

102. Эгри чизиқларга ўтказилган ҳар қандай уринмадан берилган икки нуқтагача бўлган масофалар кўпайтмаси ўзгармас сонга тенг. Бу эгри чизиқлар топилсин. *Жав.* Эллипслар ва гиперболалар (ортогонал ва изогонал траекториялар).

103. $y = ax^n$ эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $x^2 + ny^2 = C$.

104. $y^2 = 2p(x - \alpha)$(α-оила параметри), параболалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.

105. $x^2 - y^2 = \alpha$ (α — параметр) эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $y = \frac{C}{x}$.

106. $x^2 + y^2 = 2ax$ айланалар оиласининг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* Айланалар: $y = C(x^2 + y^2)$.

107. Берилган тўғри чизиққа учлари билан уринадиган тенг параболаларнинг ортогонал траекторияларини топинг. *Жав.* Агар $2p$ — параболалар параметри ва берилган тўғри чизиқ Oy ўқда олинган бўлса, у ҳолда траектория тенгламаси: $y + C = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{3/2}$.

108. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ циссоидаларнинг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $(x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2)$.

109. $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2$ лемнискаталарнинг ортогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $(x^2 + y^2) = Cxy$.

110. Агар траекториялар билан $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ (бунда a — ўзгарувчи параметр) эгри чизиқлар оиласининг чизиқлари $\omega = 60°$ га тенг бўлган ўзгармас бурчак ҳосил қилса, эгри чизиқлар оиласининг изогонал траекториялари топилсин.

Ечиш. Оиланинг $y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ дифференциал тенгламасини топамиз: ва y' ни $q = \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y'\operatorname{tg}\omega}$ ифода билан алмаштирамиз. Агар $\omega = 60°$ бўлса, $q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'}$ ва биз $\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$ дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Умумий интеграл $y^2 = C(x - y\sqrt{3})$ изланаётган траекториялар оиласини беради.

111. $y^2 = 4Cx$ параболалар оиласининг $\omega = 45°$ бўлгандаги изогонал траекториялари топилсин. *Жав.* $y^2 - xy + 2x^2 = Ce^{\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-x}{x\sqrt{7}}}$.

112. $y = Cx$ тўғри чизиқлар оиласининг $\omega = 30°$, $45°$ бўлган ҳоллар учун изогонал траекториялари топилсин.

Жав.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^{2\sqrt{8}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}; \\ x^2 + y^2 &= e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \end{aligned}\right| \text{ логарифмик спираллар.}$$

113. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ дан C_1 ва C_2 йўқотилсин. *Жав.* $y''-y=0$.

114. Бир текисликда ётувчи барча айланаларнинг дифференциал тенгламаси ёзилсин. *Жав.* $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.

115. Бош ўқлари Ox ва Oy ўқлар билан бир хил бўлган иккинчи тартибли ҳамма марказий эгри чизиқларнинг дифференциал тенгламаси ёзилсин. *Жав.* $x(yy''+y'^2)-y'y=0$.

116. $y'''-2y''-y'+2y=0$ дифференциал тенглама ва унинг $y=C_1e^x+ +C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$ умумий интеграли берилган.

1) Берилган эгри чизиқлар оиласи ҳақиқатан ҳам умумий ечим эканини текшириш; 2) агар $x=0$ бўлганда $y=1$, $y'=0$, $y''=-1$ бўлса, хусусий ечимни топиш талаб қилинади. *Жав.* $y=\frac{1}{6}(9e^x+e^{-x}-4e^{2x})$.

117. $y''=\frac{1}{2y'}$ дифференциал тенглама ва унинг $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$ умумий ечими берилган.

1) Берилган эгри чизиқлар оиласи ҳақиқатан ҳам умумий ечим бўлиши текширилсин.

2) агар (1, 2) нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиққа шу нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан 45° ли бурчак ташкил қилиши маълум бўлса, бу интеграл эгри чизиқ топилсин.

Жав. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}$.

Биринчи тартибли тенгламаларга келтириладиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг баъзи бир энг содда типларини интеграллаш.

118 $xy'''=2$. *Жав.* $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$, $x=1$, $y=1$, $y'=1$, $y''=3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим чиқарилсин. *Жав.* $y=x^2\ln x+1$.

119. $y^{(n)}=x^m$. *Жав.* $y=\frac{m!\,x^{m+n}}{(m+n)!}+C_1x^{n-1}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.

120. $y''=a^2y$. *Жав.* $ax=\ln\left(ay+\sqrt{a^2y^2+C_1}\right)+C_2$ ёки $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$.

121. $y''=\frac{a}{y^3}$. *Жав.* $(C_1x+C_2)^2=C_1y^2-a$.

122—125- мисолларда қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим топилсин. $x=0$, $y=-1$; $y'=0$. 122 $xy''-y'=x^2e^x$. *Жав.* $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$. Хусусий ечим: $y=e^x(x-1)$. 123. $yy''-(y')^2+(y')^3=0$. *Жав.* $y+C_1\ln y=x+C_2$. Хусусий ечим: $y=-1$. 124. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$. *Жав.* $y=C_2+C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x$. Хусусий ечим: $y=2\sin x-\sin x\cos x-x-1$. 125. $(y'')^2+(y')^2=a^2$. *Жав.* $y=C_2-a\cos(x+C_1)$. Хусусий ечимлар: $y=a-1-a\cos x$, $y=a\cos x-(a+1)$. (Кўрсатма. Параметрик шакл: $y''=a\cos t$, $y'=a\sin t$.) 126. $y''=\frac{1}{2y'}$. *Жав.* $y=\pm\frac{2}{3}(x+C_1)^{3/2}+C_2$. 127. $y'''=y''^2$. *Жав.* $y=(C_1-x)[\ln(C_1-x)-1]+C_2x+C_3$. 128. $y'y'''-3y''^2=0$. *Жав.* $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

Қуйидаги ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар интеграллансин: 129. $y''=9y$. *Жав.* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. 130. $y''+y=0$. *Жав.* $y=A\cos x+B\sin x$. 131. $y''-y'=0$. *Жав.* $y=C_1+C_2e^x$. 132. $y''+12y=7y'$. *Жав* $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. 133. $y''-4y'+4y=0$. *Жав.* $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. 134. $y''+2y'+10y=0$. *Жав.* $y=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$.

135. $y'' + 3y' - 2y = 0$. *Жав.* $y = C_1 e^{\frac{-3+\sqrt{17}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}x}$. 136. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. *Жав.* $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{\frac{3}{2}x}$. 137. $y'' + y' + y = 0$. *Жав.* $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$.

138. Пружина учига иккита бир хил юк осилган. Агар битта юк узилиб тушса, иккинчи юк оладиган ҳаракатнинг тенгламаси топилсин. *Жав.* $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$, бунда a — тинч ҳолатдаги пружина узунлигининг битта юк таъсири остида ортиши.

139. Массаси m бўлган моддий нуқтани икки марказнинг ҳар бири ҳам масофага пропорционал куч билан ўзига тортади. Пропорционаллик кўпайтувчиси k. Марказлар орасидаги масофа $2c$. Дастлабки пайтда нуқта марказларни туташтирувчи чизиқда, бу чизиқнинг ўртасидан a масофада туради. Бошланғич тезлик нолга тенг. Нуқта ҳаракатининг тенгламаси тузилсин. *Жав.* $x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$.

140. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. *Жав.* $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$. 141. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. *Жав.* $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$. 142. $y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0$. *Жав.* $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{ax}$. 143. $y^{V} - 4y''' = 0$. *Жав.* $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-2x}$. 144. $y^{IV} + 2y'' + 9y = 0$. *Жав.* $y = (C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)\, e^{-x} + (C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x) e^{x}$. 145. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. *Жав.* $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{2x} + C_4 x e^{-2x}$. 146 $y^{IV} + y = 0$. *Жав.* $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. 147. $y^{IV} - a^4 y = 0$. Умумий ечим ва $x_0 = 0$ да $y = 1$, $y' = 0$, $y'' = -a^2$, $y''' = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим топилсин. *Жав.* Умумий ечим: $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Хусусий ечим: $y_0 = \cos ax$.

Қуйидаги бир жинслимас чизиқли дифференциал тенгламалар интеграллансин (умумий ечим топилсин): 148. $y'' - 7y' + 12y = x$. *Жав* $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{12x + 7}{144}$. 149. $s'' - a^2 s = t + 1$. *Жав* $s = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at} - \frac{t + 1}{a^2}$.

150. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$. *Жав.* $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{5}(6\sin 2x + 2\cos 2x)$.

151. $y'' - y = 5x + 2$. *Жав.* $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 5x - 2$. 152. $s'' - 2as' + a^2 s = e^{t}\ (a \neq 1)$. *Жав.* $s = C_1 e^{at} + C_2 t e^{at} + \frac{e^{t}}{(a - 1)^2}$. 153. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$. *Жав.* $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{21} e^{2x}$. 154. $y'' + 9y = 6e^{3x}$. *Жав.* $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{3} e^{3x}$. 155. $y'' - 3y' = 2 - 6x$. *Жав.* $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2$.

156. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$. *Жав.* $y = e^{x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + \frac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$. 157. $y'' + 4y = 2\sin 2x$. *Жав.* $y = C_1 \sin 2x +$

$+ C_2 \cos 2x - \frac{x}{2} \cos 2x$. 158. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$. *Жав.* $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x} - x - 4$. 159 $y^{IV} - a^4 y = 5a^4 e^{ax} \sin ax$. *Жав.* $y = (C_1 - \sin ax)e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. 160. $y^{IV} + 2a^2 y'' + a^4 y = 8 \cos ax$. *Жав.* $y = (C_1 + C_2 x) \cos ax + (C_3 + C_4 x) \sin ax - \frac{x^2}{a^2} \cos ax$.

161. $y'' + k^2 y = 0$ тенгламанинг $M(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтадиган ва бу нуқтада $y = ax$ тўғри чизиққа уринадиган интеграл эгри чизиғи топилсин. *Жав* $y = y_0 \cos k(x - x_0) + \frac{a}{k} \sin k(x - x_0)$.

162. $y'' + 2hy' + n^2 y = 0$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = a$, $y' = C$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $h < n$ бўлганда $y = e^{-hx}\left(a \cos \sqrt{n^2 - h^2}\, x + \frac{C + ah}{\sqrt{n^2 - h^2}} \sin \sqrt{n^2 - h^2}\, x\right)$; $h = n$ бўлганда $y = e^{-hx} [(C + ah)\, x + a]$; $h > n$ бўлганда

$$y = \frac{C + a\left(h + \sqrt{h^2 - n^2}\right)}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h - \sqrt{h^2 - n^2})x} - \\ - \frac{C + a\left(h - \sqrt{h^2 - n^2}\right)}{2\sqrt{h^2 - n^2}} e^{-(h + \sqrt{h^2 - n^2})x}.$$

163. $y'' + n^2 y = h \sin px\ (p \neq n)$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = a$, $y' = C$ бошлангич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $y = a\cos nx + \frac{C(n^2 - p^2) - hp}{n(n^2 - p^2)} \sin nx + \frac{h}{n^2 - p^2} \sin px$.

164. Оғирлиги 4 *кг* бўлган юк пружинага осилган бўлиб, пружина узунлигини 1 *см* чўзади. Пружинанинг юқори учи $y = \sin \sqrt{100g}\, t$ қонун бўйича гармоник тебранади деб фараз этиб (бунда y вертикал бўйича ўзгаради), бу юк ҳаракатининг қонуни топилсин.

Ечиш. x билан юкнинг тинч турганда ҳисобланган вертикал координатасини белгилаймиз, бу ҳолда

$$\frac{4}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y - l)$$

бўлади, бунда l — пружинанинг эркин ҳолатидаги узунлиги ва бошланғич шартлардан $k = 400$ бўлишини кўриш осон. Бундан $\frac{d^2x}{dt^2} + 100\, gx = 100\, g \sin \sqrt{100\, g} t + 100\, lg$.

Ву тенгламанинг хусусий интегралини

$$t(C_1 \cos \sqrt{100\, g} t + C_2 \sin \sqrt{100\, g} t) + l$$

кўринишда излашимиз керак, чунки тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи ҳад бир жинсли тенглама ечими таркибига киради.

165. 139- масала шартларида бошланғич тезлик v_0 га тенг ва йўналиш марказларни туташтирувчи тўғри чизиққа перпендикуляр деб олиб, траектория тенгламаси топилсин.

Ечиш. Агар координаталар бошини марказлар орасидаги масофанинг ўртасида олинса, ҳаракатнинг дифференциал тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = 2ky.$$

Бошланғич шартлар $t=0$ бўлганда:

$$x=a;\quad \frac{dx}{dt}=0,\qquad y=0,\qquad \frac{dy}{dt}=v_0$$

бўлади. Интеграллаб,

$$x=a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right),\qquad y=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

ифодаларни топамиз. Бундан $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2 2k}{mv_0^2}=1$ (эллипс).

166. Горизонтал трубка вертикал ўқ атрофида ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади. Трубка ичига жойланган шар унда ишқалмай сирпаниб боради. Агар, дастлабки пайтда шар айланиш ўқида бўлиб, трубка бўйлаб v_0 тезликка эга бўлса, унинг ҳаракат қонуни қандай бўлади?

Кўрсатма. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2 r$. Берилган бошланғич шартлар: $t=0$ бўлганда $r=0$, $\frac{dr}{dt}=v_0$. Интеграллаб, $r=\frac{v_0}{2\omega}\left[e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right]$ эканини топамиз.

Ихтиёрий ўзгармас миқдорларни вариациялаш методини татбиқ этиб, қуйидаги дифференциал тенгламалар интеграллансин:

167. $y''-7y'+6y=\sin x$, *Жав.* $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

168. $y''+y=\sec x$. *Жав.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$.

169 $y''+y=\frac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. *Жав.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\sqrt{\cos 2x}$.

Қуйидаги турли типдаги тенгламалар интеграллансин:

170. $yy''=y'^2+1$. *Жав.* $y=\frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1(x-C_2)}+e^{-C_1(x-C_2)}\right]$.

171. $\frac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}=0$. *Жав.* $\frac{xy}{x-y}=C$. 172. $y=xy'^2+y'^2$. *Жав.* $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$. Махсус ечимлар: $y=0$, $x+1=0$. 173. $y''+y=\sec x$. *Жав.* $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln\cos x$. 174. $(1+x^2)y'-xy-a=0$. *Жав.* $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$. 175. $x\cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=y\cos\frac{y}{x}-x$. *Жав.* $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$. 176. $y''-4y=e^{2x}\sin 2x$. *Жав.* $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x+2\cos 2x)$. 177. $xy'+y-y^2\ln x=0$. *Жав.* $(\ln x+1+Cx)y=1$. 178. $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$. *Жав.* $2x+y-3\ln(x+y+1)=C$. 179. $3e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1-e^x)\sec^2y\,dy=0$. *Жав*, $\operatorname{tg}y=C(1-e^x)^3$,

Қуйидаги тенгламалар системаси интеграллансин:

180. $\frac{dx}{dt}=y+1$, $\frac{dy}{dt}=x+1$. $t=0$ бўлганда $x=-2$, $y=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимлар ажратилсин. *Жав.* $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$, $x=C_1e^t+C_2e^{-t}-1$. Хусусий ечим: $x^*=-e^{-t}-1$, $y^*=e^{-t}-1$.

181. $\frac{dx}{dt} = x - 2y,\ \frac{dy}{dt} = x - y$. $t = 0$ бўлганда $x = 1,\ y = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимлар ажратилсин. *Жав.* $y = C_1\cos t + C_2\sin t,\ x = (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t$. Хусусий ечим: $x^* = \cos t - \sin t,\ y^* = \cos t$.

182. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$ *Жав.* $x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t},$
$y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t.$

183. $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$ *Жав.* $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t,$
$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t.$

184. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$ *Жав.* $x = C_1 + C_2t + C_3t^2 - \frac{1}{6}t^3 + e^t,$
$y = C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2}(C_2 - 1)t^2 - \frac{1}{3}C_3t^3 + \frac{1}{24}t^4 - e^t.$

185. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - y, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$ *Жав.* $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x},$
$z = (C_2 - C_1 - C_2x)e^{-2x}.$

186 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + z = 0, \\ \frac{dz}{dx} + 4y = 0. \end{cases}$ *Жав.* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x},$
$z = -2(C_1e^{2x} - C_2e^{-2x}).$

187. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \frac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$ *Жав.* $y = C_1 + C_2x + 2\sin x,$
$z = -2C_1 - C_2(2x + 1) - 3\sin x - 2\cos x.$

188. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$ *Жав.* $x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t},$
$y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t},$
$z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$

189. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}. \end{cases}$ *Жав.* $z = C_2e^{C_1x},$
$y = x + \frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}.$

190. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{yz}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{x}{y^2}. \end{cases}$ *Жав.* $\dfrac{z}{y} = C_1,$

$zy^2 - \dfrac{3}{2} x^2 = C_2.$

Қуйидаги дифференциал тенгламалар системалари учун $x = 0$, $y = 0$ ечимнинг турғун бўлиши текширилсин:

191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \quad 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 6y. \end{cases}$ *Жав.* Нотурғун.

192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 10y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$ *Жав.* Турғун.

193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{at} = 12x + 18y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 12y. \end{cases}$ *Жав.* Нотурғун.

194. $y' = y^2 + x$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимининг тақрибий қийматлари топилсин. нинг $x = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 қийматларида ечимнинг қийматлари топилсин. *Жав*, $y(0{,}5) = 2{,}235$.

195. Ушбу $y' + \dfrac{1}{x} y = e^x$

тенгламанинг $x = 1$ да $y = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг $y_{x=1,4}$ тақрибий қиймати топилсин. Ҳосил бўлган натижа аниқ ечим билан таққослансин.

196. Ушбу

$$\frac{dx}{dt} = y - x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y$$

тенгламалар системасининг $t = 1$ да $x = 0$, $y = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларининг $x_t = 1{,}4$ ва $y_{t=1,4}$ тақрибий қийматлари топилсин. Ҳосил қилинган қийматлар аниқ қийматлар билан таққослансин.

XIV БОБ

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Икки ўлчовли интеграл

Oxy текисликда L чизиқ билан чегараланган, D ёпиқ*) соҳани қараймиз.

D соҳада узлуксиз функция

$$z = f(x,\ y)$$

берилган бўлсин.

D соҳани ихтиёрий чизиқлар билан n та бўлакка бўламиз:

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \Delta s_3,\ \ldots,\ \Delta s_n$$

(292- расм), уларни *юзчалар* деб атаймиз. Янги символлар киритмаслик мақсадида $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ орқали буларнинг номларинигина эмас, юзларини ҳам белгилаймиз. Δs_i юзларнинг ҳар бирида P_i нуқта оламиз (бу нуқта юзнинг ичида ёки чегарасида ётишининг фарқи йўқ), у ҳолда n та нуқта ҳосил бўлади: $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Функциянинг танланган нуқталардаги қийматларини $f(P_1)$, $f(P_2)$, $\ldots$, $f(P_n)$ билан белгилаймиз ва $f(P_i)\,\Delta s_i$ кўринишдаги кўпайтмаларнинг йиғиндисини тузамиз:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i. \qquad (1)$$

292- расм.

Бу йиғинди D соҳада $f(x,\ y)$ функция учун *интеграл йиғинди* деб аталади.

Агар D соҳада $f \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда ҳар бир $f(P_i)\Delta s_i$ қўшилувчини, геометрик жиҳатдан асоси Δs_i га, баландлиги эса $f(P_i)$ га тенг бўлган цилиндрчанинг ҳажми деб қараш мумкин.

---

*) D соҳа ёпиқ чизиқ билан чегараланган бўлса, *ёпиқ* соҳа дейилади ва унинг чегара чизиғида ётган нуқталар шу D соҳага тегишли деб ҳисобланади

Бу тенгликлардан биринчиси аниқ интегралнинг маълум хоссасига, иккинчиси эса $[a, c]$ участкада $\varphi_1(x) \equiv \psi(x)$, $[c, b]$ участкада $\varphi_1(x) \equiv \chi(x)$ эканлигига асосан ёзилган.

Агар $\varphi_2(x)$ функция $[a, b]$ кесманинг турли участкаларида турлича аналитик ифодалар билан берилганида ҳам икки каррали интегрални юқоридаги каби ёзиш ўринли бўлар эди.

Икки каррали интегралнинг баъзи бир хоссаларини аниқлаб олайлик:

1-хосса. *Агар Оу ўқ йўналишида тўғри бўлган D соҳани Оу ёки Ох ўққа параллел тўғри чизиқ билан икки D_1 D_2 соҳага бўлинса, D соҳа бўйича олинган икки каррали I_D интеграл D_1 ва D_2 соҳалар бўйича олинган икки каррали интегралларнинг йиғиндисига тенг бўлади, яъни:*

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} \tag{1}$$

Исбот. а) $x = c$ $(a < c < b)$ тўғри чизиқ D соҳани Oy ўқ йўналишида тўғри бўлган икки D_1 ва D_2*) соҳага бўлсин. У ҳолда:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \Phi(x) dx =$$

$$= \int_a^c \Phi(x) dx + \int_c^b \Phi(x) dx = \int_a^c \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx +$$

$$+ \int_c^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

б) Фараз қилайлик, $y = h$ тўғри чизиқ D соҳани 299-расмда кўрсатилганидек Oy ўқ йўналишида тўғри бўлган икки D_1 ва D_2 соҳага бўлсин. $y = h$ тўғри чизиқ билан D соҳа L чегарасининг кесишиш нуқталарини M_1 ва M_2 билан, бу нуқталарнинг абсциссаларини эса a_1 ва b_1 билан белгилаймиз.

299- расм.

D_1 соҳа қуйидаги узлуксиз чизиқлар билан чегараланган:

---

*) D_1 соҳа чегарасининг (D_2 соҳа чегарасининг ҳам) бир қисми *вертикал* тўғри чизиқнинг бўлагидан иборат бўлиши бу соҳанинг Oy ўқ йўналишида *тўғри* соҳа бўлишига ҳеч қандай зарар етказмайди; чунки соҳанинг тўғри бўлиши учун, фақат ҳар қандай вертикал тўғри чизиқ соҳанинг *ички* нуқтасидан ўтиб, чегара билан кўп деганда икки умумий нуқтага эга бўлиши керак.

1) $y=\varphi_1(x)$;

2) $A_1M_1M_2B$ эгри чизиқ; бу эгри чизиқнинг тенгламасини шартли равишда

$$y=\varphi_1^*(x)$$

шаклда ёзамиз ва бунда $a \leqslant x \leqslant a_1$ ҳамда $b_1 \leqslant x \leqslant b$ бўлганда

$$\varphi_1^*(x)=\varphi_2(x)$$

ва $a_1 \leqslant x < b_1$ бўлганда

$$\varphi_1^*(x)=h$$

эканлигини назарда тутамиз;

3) $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар.

D_2 соҳа ушбу чизиқлар билан чегараланган:

$$y=\varphi_1^*(x),\quad y=\varphi_2(x),\quad \text{бунда } a_1 \leqslant x \leqslant b_1.$$

Ички интегралга интеграллаш оралиғини бўлиш ҳақидаги теоремани татбиқ этиб, ушбу айниятни ёзамиз:

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy\right)dx=$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)dy+\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy\right)dx=$$

$$=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx+\int_a^b\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Ташқи интегралга интеграллаш оралиғини бўлиш ҳақидаги теоремани татбиқ этиб, охирги интегрални учта интегралга ажратамиз:

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y,)\,dy\right)dx=\int_a^{a_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx+$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx+\int_{b_1}^{b}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx;$$

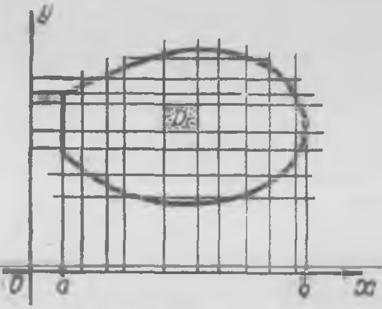
$[a,\ a_1]$ ва $[b_1,\ b]$ кесмаларда $\varphi_1^*(x)=\varphi_2(x)$ бўлганлигидан, биринчи ва учинчи интеграллар айнан нолга тенг. Шунинг учун

$$I_D=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1^*(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx+\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{\varphi_1^*(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx.$$

Бу ердаги биринчи интеграл D_1 соҳа бўйича, иккинчиси D_2 соҳа бўйича олинган икки каррали интегралдир. Демак,

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2}.$$

$M_1 M_2$ кесувчи тўғри чизиқнинг вазияти ҳар қандай бўлганда ҳам исбот юқоридаги сингари қилинади. Агар $M_1 M_2$ тўғри чизиқ D соҳани учта ёки ундан ортиқ соҳага бўлса, ўнг томонида мос сондаги қўшилувчилар турган (1) муносабатга ўхшаш тенглик ҳосил бўлади.



300- расм.

Натижа. Ҳосил қилинган ҳар бир соҳани яна Oy ўққа ёки Ox ўққа параллел тўғри чизиқлар билан Oy ўқ йўналишида тўғри бўлган соҳаларга бўлишимиз ва унга (2) тенгликни татбиқ этишимиз мумкин. Шундай қилиб, D соҳани координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар билан истаганча $D_1, D_2, \ldots, D_l$ тўғри соҳаларга бўлиш мумкин ва *бунда D соҳа бўйича олинган икки каррали интеграл бу соҳани майдалашдан ҳосил бўлган соҳалар бўйича олинган икки каррали интегралларнинг йиғиндисига тенг,* яъни (300- расм):

$$I_D = I_{D_1} + I_{D_2} + I_{D_3} + \ldots + I_{D_l}. \tag{2}$$

2-хосса (икки каррали интегрални баҳолаш). *$f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматлари мос ҳолда m ва M бўлсин, D соҳанинг юзини S билан белгиласак, у ҳолда қуйидаги муносабат ўринли бўлади:*

$$mS \leqslant \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant MS. \tag{3}$$

Исбот. Ички интегрални $\Phi(x)$ билан белгилаб, уни баҳолаймиз:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \leqslant \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} M dy = M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)].$$

У ҳолда:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant \int_a^b M[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx = MS,$$

яъни:

$$I_D \leqslant MS. \tag{3'}$$

Шунга ўхшаш,

$$\Phi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \geqslant \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} m\,dy = m\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)],$$

$$I_D = \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b m\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx = mS,$$

яъни

$$I_D \geqslant mS. \qquad (3'')$$

(3′) ва (3″) тенгсизликлардан ҳам (3) муносабат келиб чиқади:

$$mS \leqslant I_D \leqslant MS.$$

Бу теореманинг геометрик маъносини кейинги параграфда тушунтирамиз.

3-хосса (ўрта қиймат ҳақидаги теорема). *$f(x, y)$ узлуксиз функциянинг D соҳа бўйича олинган I_D икки каррали интеграли, D соҳанинг S юзини функциянинг D соҳада олинган бирор P нуқтадаги қийматига кўпайтирилганига тенг, яъни*

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = f(P)S. \qquad (4)$$

Исбот. (3) муносабатдан

$$m \leqslant \frac{1}{S} I_D \leqslant M$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$\frac{1}{S} I_D$ сон $f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари орасида жойлашган. $f(x, y)$ функциянинг узлуксизлигига асосан икки каррали интеграл D соҳанинг бирор P нуқтасида $\frac{1}{S} I_D$ сонга тенг қиймат қабул қилади, яъни:

$$\frac{1}{S} I_D = f(P),$$

бундан

$$I_D = f(P)S. \qquad (5)$$

3-§. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш (давоми)

Теорема. *$f(x, y)$ узлуксиз функциянинг D тўғри соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграли функциянинг ўша D соҳа бўйича олинган икки каррали интегралига тенг, яъни*[*]:

---

[*] Биз бу ерда яна D соҳани Oy ўқ йўналишида тўғри ва $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиқлар билан чегараланган деб фараз этамиз.

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Исбот. D соҳани координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар билан n та тўғри (тўғри тўрт бурчакли)

$$\Delta s_1,\ \Delta s_2,\ \ldots,\ \Delta s_n$$

соҳаларга бўламиз.

Олдинги параграфдаги 1- хоссанинг (2) формуласига асосан:

$$I_D = I_{\Delta s_1} + I_{\Delta s_2} + \ldots + I_{\Delta s_n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\Delta s_i}. \qquad (1)$$

Ўнг томондаги қўшилувчиларнинг ҳар бирини икки каррали интегралнинг ўрта қиймати ҳақидаги теоремага асосан алмаштирамиз:

$$I_{\Delta s_i} = f(P_i)\,\Delta s_i.$$

У ҳолда (1) тенглик қуйидаги кўринишда бўлади:

$$I_D = f(P_1)\,\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i \qquad (2)$$

бунда P_i нуқта Δs_i соҳанинг бирор нуқтаси. Ўнг томонда $f(x, y)$ функция учун D соҳа бўйича олинган интеграл йиғинди турибди. Икки ўлчовли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага асосан $n \to \infty$ да ва Δs_i юзнинг энг катта диаметри нолга интилганда бу йиғиндининг лимити мавжуд ва у $f(x, y)$ функциянинг D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралига тенг эканлиги келиб чиқади. (2) тенгликнинг чап томонида турган икки каррали I_D илтегралнинг қиймати n га боғлиқ эмас. Шундай қилиб, (2) тенгликда лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_D = \lim_{\operatorname{diam} \Delta s_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta s_i = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

ёки

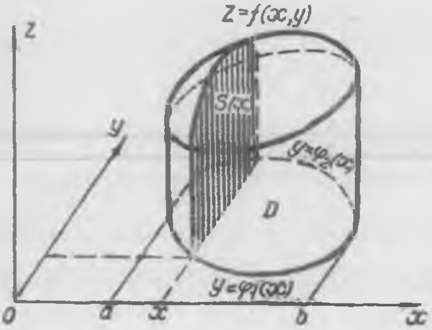
$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = I_D. \qquad (3)$$

Энди I_D икки каррали интегралнинг аниқ ифодасини ёзиб олиб, охирги натижани чиқарамиз:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \qquad (4)$$

1- изоҳ. $f(x, y) \geqslant 0$ бўлганда, (4) формуланинг геометрик маъноси яққол кўринади. $z = f(x, y)$ сирт, $z = 0$ текислик ва ясовчиси Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси эса D соҳанинг чегарасидан иборат бўлган цилиндрик сирт билан чегараланган жисмни қараймиз (301-расм). Бу жисмнинг V ҳажмини ҳисоблаймиз. Бу жисмнинг ҳажми $f(x, y)$ функциянинг D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралига тенг эканлиги юқорида кўрсатилган эди:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \tag{5}$$



301-расм.

Энди бу жисмнинг ҳажмини I т. XII бобининг 4-параграфидаги параллел кесимларнинг юзлари бўйича жисмнинг ҳажмини ҳисоблашга доир натижадан фойдаланиб ҳисоблаймиз. Қаралаётган жисмни кесувчи $x = \text{const}$ $(a < x < b)$ текислик ўтказамиз. $x = \text{const}$ кесимда ҳосил бўладиган фигуранинг $S(x)$ юзини ҳисоблаймиз. Бу фигура $z = f(x, y)$ $(x = \text{const})$, $z = 0$, $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециядир. Демак, бу юз:

$$S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \tag{6}$$

интеграл билан ифодаланади. Параллел кесимларнинг юзларини билган ҳолда, жисмнинг ҳажмини топиш осон:

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$$

ёки $S(x)$ юз ўрнига унинг (6) ифодадаги қийматини қўйсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$V = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx. \tag{7}$$

(5) ва (7) формулаларнинг чап томонлари тенг, шунинг учун ўнг томонлари ҳам тенгдир:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Энди икки каррали интегрални баҳолаш ҳақидаги теореманинг геометрик маъносини тушунтириш қийин эмас (олдинги параграфдаги 2-хосса): $z = f(x, y)$ сирт, $z = 0$ текислик ва йўналтирувчиси D соҳанинг чегарасидан иборат бўлган цилиндрик сирт билан чегараланган жисмнинг V ҳажми, асоси S, баландлиги m бўлган цилиндрнинг ҳажмидан катта, лекин асоси S, баландлиги M бўлган цилиндрнинг ҳажмидан кичик [бунда m ва M лар $z=f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматларидир (302- расм)]. Бу эса I_D икки каррали интеграл ўша жисмнинг V ҳажмига тенг эканлигидан келиб чиқади.

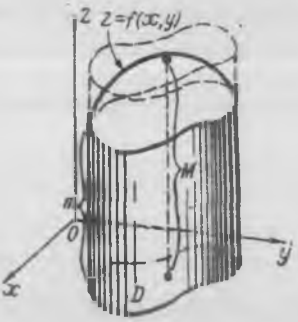
1-мисол. Агар D соҳа $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=\frac{3}{2}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлса, $\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$ икки ўлчовли интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу интеграл (7) формулага асосан ҳисобланади:

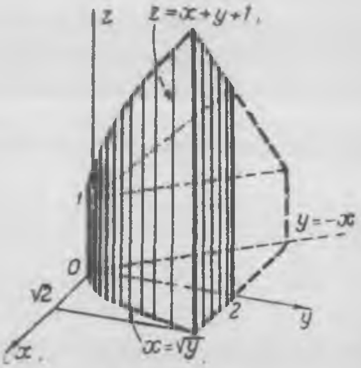
$$V=\int\limits_0^{3/2}\left[\int\limits_0^1 (4-x^2-y^2)\,dx\right]dy=\int\limits_0^{3/2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_0^1 dx=$$

$$=\int\limits_0^{3/2}\left(4-\frac{1}{3}-y^2\right)dy=\left(4y-\frac{1}{3}\,y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{3/2}=\frac{35}{8}.$$

2-мисол. $f(x, y)=1+x+y$ функциянинг $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$, $z=0$ (303- расм) чизиқлар билан чегараланган соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграли ҳисоблансин.



302- расм.



303- расм.

Ечиш.

$$V=\int\limits_0^2\left[\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}(1+x+y)\,dx\right]dy=\int\limits_0^2\left[x+\frac{x^2}{2}+xy\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)-\left(-y+\frac{y^2}{2}-y^2\right)\Big]dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}\left[\sqrt{y}+\frac{3y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^{2}}{2}\right]dy=\left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3y^{2}}{4}+\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{y^{3}}{6}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\frac{44}{15}\sqrt{2}+\frac{13}{3}.$$

2-изоҳ. *Ox* ўқ йўналишида тўғри бўлган D соҳа

$$x=\psi_{1}(y),\ x=\psi_{2}(y),\ y=c,\ y=d$$

чизиқлар билан чегараланган ва бунда $\psi_1(y)<\psi_2(y)$ бўлсин (304- расм).

Маълумки, бу ҳолда

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{c}^{d}\left(\int\limits_{\psi_{1}(y)}^{\psi_{2}(y)}f(x,y)\,dx\right)dy. \tag{8}$$

Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун уни икки каррали интеграл шаклида тасвирлаб олиш керак. Буни юқорида кўриб ўтганимиз каби икки хил усул билан: ё (4) формула бўйича, ёки (8) формула бўйича бажариш мумкин. Ҳар қайси конкрет ҳол учун D соҳанинг ёки интеграл остидаги функциянинг шаклига қараб тегишли формулани танлаб оламиз.

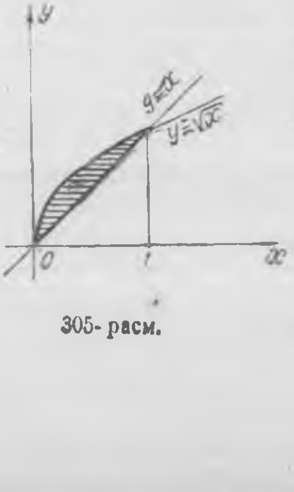
3-мисол. Ушбу

$$I=\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,dy\right)dx$$

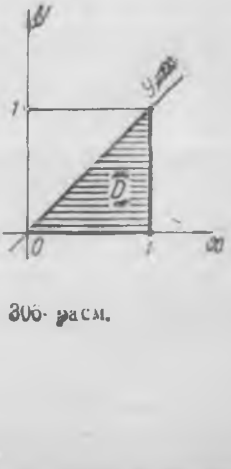
интегралнинг интеграллаш тартиби ўзгартирилсин.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси $y=x$ тўғри чизиқ ва $y=\sqrt{x}$ парабола билан чегараланган (305- расм).

304- расм.



305- расм.



306- расм.

Ox ўққа параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ соҳа чегарасини иккитадан ортиқ нуқтада кеса олмайди; демак, интегрални

$$\psi_1(y) = y^2, \qquad \psi_2(y) = y, \qquad 0 < y < 1$$

деб олиб, (8) формула бўйича ҳисоблаш мумкин, у ҳолда

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

4-мисол. Агар *D* соҳа $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчак шаклида (306-расм) бўлса,

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\, ds$$

интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Берилган икки ўлчовли интегрални икки каррали интеграл билан алмаштирамиз. Бунда (4) формуладан фойдаланамиз. (Агар (8) формулани татбиқ этсак, у ҳолда $e^{\frac{y}{x}}$ функцияни x бўйича интеграллашга тўғри келар эди, бироқ бу интегрални элементар функцияларда ҳисоблаб бўлмайди).

$$\iint_D e^{\frac{y}{x}}\, ds = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\, dy \right) dx = \int_0^1 xe^{\frac{y}{x}} \Big|_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 x(e-1)\, dx = (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2} = 0{,}859\ \ldots$$

3-изоҳ. Агар *D* соҳа *Ox* ўқ йўналишида ҳам, *Oy* ўқ йўналишида ҳам тўғри бўлмаса (яъни соҳанинг ички нуқтасидан ўтиб, унинг чегарасини иккитадан ортиқ нуқтада кесиб ўтувчи вертикал ва горизонтал тўғри чизиқлар мавжуд бўлса), у ҳолда бу соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегрални икки каррали интеграл шаклида тасвирлай олмаймиз. Лекин, кўпинча *D* нотўғри соҳани *Ox* ўқ йўналишида ёки *Oy* ўқ йўналишида чекли сондаги D_1, D_2, . . . , D_n тўғри соҳаларга бўлиш мумкин бўлади. Икки ўлчовли интегрални бу соҳаларнинг ҳар бири бўйича олинган икки каррали интеграллар ёрдами билан ҳисоблаб ва олинган натижаларни қўшиб, *D* соҳа бўйича изланган интегрални топамиз.

307-расмда *D* нотўғри соҳани учта D_1, D_2 ва D_3 тўғри соҳаларга қандай қилиб ажратиш мумкинлиги кўрсатилган.

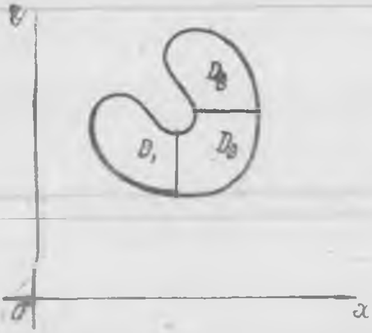
5-мисол. Агар ички квадратнинг ҳар бир томони 2 га, ташқи квадратнинг томони 4 га тенг бўлса, ушбу

$$\iint_D e^{x+y}\, ds$$

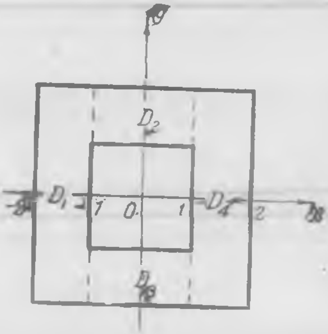
икки ўлчовли интеграл марказлари координаталар бошида бўлиб, томонлари координата ўқларига параллел ҳолда жойлашган икки квадрат орасидаги *D* соҳа бўйича ҳисоблансин (308-расм).

Ечиш, D нотўғри соҳа. Бироқ $x=-1$ ва $x=1$ тўғри чизиқлар уни тўртта D_1, D_2, D_3 ва D_4 тўғри соҳага бўлади. Шунинг учун

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,ds=\iint\limits_{D_1} e^{x+y}\,ds+\iint\limits_{D_2} e^{x+y}\,ds+\iint\limits_{D_3} e^{x+y}\,ds+\iint\limits_{D_4} e^{x+y}\,ds.$$



307- расм.



308- расм.

Бу интегралларнинг ҳар бирини икки каррали интеграл шаклига келтириб, қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,ds=\int\limits_{-2}^{-1}\left(\int\limits_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx+\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{1}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-2}^{-1} e^{x+y}\,dy\right)dx+\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{-2}^{2} e^{x+y}\,dy\right)dx=$$

$$=(e^2-e^{-2})(e^{-1}-e^{-2})+(e^2-e)(e-e^{-1})+(e^{-1}-e^{-2})(e-e^{-1})+$$

$$+(e^2-e^{-2})(e^2-e)=(e^3-e^{-3})(e-e^{-1})=4sh\,3sh1.$$

4-изоҳ. Бундан буён;

$$I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\right)dx$$

икки каррали интегралдаги ички интегрални ўз ичига олувчи ўрта қавсни ташлаб юбориб, яъни:

$$I_D=\int\limits_a^b\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy\,dx$$

кўринишда ёзамиз. Бунда, худди қавс борлигидагидек аввал дифференциали олдин ёзилган ўзгарувчи бўйича биринчи интеграл, сўнгра дифференциали кейин ёзилган ўзгарувчи бўйича иккинчи интеграл топилади. (Бироқ, буни кўпчилик томондан қабул қилинган қоида деб ҳисоблаб бўлмайди; бунинг аксича баъзи китобларда интеграллаш аввал, дифференциали кейин*) ёзилган ўзгарувчи бўйича бажарилади.)

4-§. Икки ўлчовли интеграллар ёрдами билан юзлар ва ҳажмларни ҳисоблаш

1. Ҳажм. Биз $z=f(x, y)$ сирт, $z=0$ текислик ва йўналтирувчи D соҳанинг чегарасидан иборат бўлган тўғри чизиқ, ясовчиси эса Oz ўққа параллел цилиндрик сирт билан чегараланган жисмнинг V ҳажми, D соҳа бўйича $f(x, y)$ функциядан (функция манфий эмас) олинган икки ўлчовли интегралга тенг эканлигини 1-параграфда кўрган эдик:

$$V=\iint\limits_{D} f(x, y)\, ds.$$

1-мисол. $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$, $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин (309-расм).

Ечиш.

$$V=\iint\limits_{D}(1-x-y)\, dy\, dx,$$

бундаги D соҳа 309-расмда штрихлаб қўйилган ва $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган Oxy текисликдаги учбурчак шаклдаги соҳадир. Чегараларни икки ўлчовли интегралга қўйиб, ҳажмни ҳисоблаймиз:

$$V=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(1-x-y)\, dy\, dx=\int\limits_0^1\left|(1-x)\, y-\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} dx=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx=\frac{1}{6}.$$

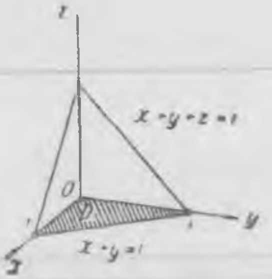
Демак, $V=\frac{1}{6}$ куб бирлик.

1-изоҳ. Агар ҳажми изланаётган жисм, юқоридан $z=\Phi_2(x, y)\geqslant 0$ сирт, пастдан $z=\Phi_1(x, y)\geqslant 0$ сирт билан чегараланган ва иккала сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси D соҳадан иборат бўлса, у ҳолда бу жисмнинг V ҳажми иккита „цилиндрик" жисм ҳажмларининг айирмасига тенг бўлади; бу цилиндрик жисмлардан биринчисининг пастки асоси D соҳадан, устки асоси $z=\Phi_2(x, y)$ сиртдан иборатдир, шунингдек, иккинчи жисмнинг пастки асоси D соҳадан, устки асоси $z=\Phi_1(x, y)$ сиртдан иборатдир (310-расм).

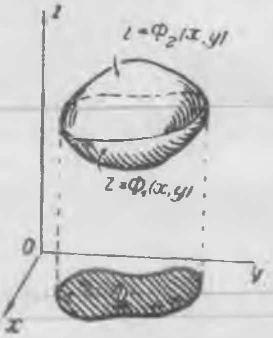
---

*) Баъзан қуйидаги шаклда ёзиш ҳам ишлатилали:

$$I_D=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} f(x, y)\, dy\right) dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x, y)\, dy,$$



309- расм.



310- расм.

Шунинг учун V ҳажм иккита икки ўлчовли интегралларнинг айирмасига тенг:

$$V=\iint\limits_D \Phi_2(x, y)\,ds-\iint\limits_D \Phi_1(x, y)\,ds,$$

ёки

$$V=\iint\limits_D [\Phi_2(x, y)-\Phi_1(x, y)]\,ds. \qquad (1)$$

(1) формула фақат $\Phi_1(x, y)$ ва $\Phi_2(x, y)$ функциялар манфий бўлмагандагина эмас, балки бу функциялар $\Phi_2(x, y) \geqslant \Phi_1(x, y)$ муносабатни қаноатлантирувчи ҳар қандай узлуксиз функциялар бўлганда ҳам тўғри эканини осонгина исбот қилиш мумкин.

2-изоҳ. Агар D соҳада $f(x, y)$ функция ўз ишорасини ўзгартирса, соҳани икки қисмга ажратамиз: 1) $f(x, y) \geqslant 0$ бўлган D_1 соҳа; 2) $f(x, y) < 0$ бўлган D_2 соҳа. D_1 ва D_2 соҳаларни, бу соҳалар бўйича олинган икки ўлчовли интеграллар мавжуд деб фараз этамиз. У вақтда D_1 соҳа бўйича олинган интеграл мусбат бўлиб, Oxy текисликдан юқорида жойлашган жисмнинг ҳажмига тенг. D_2 соҳа бўйича олинган интеграл манфий ва абсолют қиймат жиҳатдан Oxy текисликдан пастда жойлашган жисмнинг ҳажмига тенгдир. Демак, D бўйича олинган интеграл мос ҳажмларнинг айирмасини ифодалайди.

2. Текис соҳанинг юзини ҳисоблаш. Агар биз D соҳа бўйича $f(x, y) = 1$ функция учун интеграл йиғинди тузсак, у ҳолда бу йиғинди, бўлиш усули ҳар қандай бўлганда ҳам шу соҳанинг S юзига тенг бўлади.

$$S=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta s_i.$$

Тенгликнинг ўнг томонида лимитга ўтиб, қуйидаги интегрални ҳосил қиламиз:

$$S = \iint_D dx\, dy.$$

Агар D соҳа тўғри бўлса (масалан, 296-расмга қаранг), у ҳолда юз ушбу

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx$$

икки каррали интеграл билан ифодаланади. Қавс ичидаги интегрални ҳисоблаб, ушбу тенгликни топамиз:

$$S = \int_a^b \left[\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \right] dx$$

(I т. XII бобнинг 1-параграфи билан солиштиринг).

2-мисол. $y = 2 - x^2$, $y = x$ эгри чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзи ҳисоблансин.

Ечиш. Берилган эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топамиз (311-расм). Кесишиш нуқтада ординаталар тенг, яъни

$$x = 2 - x^2,$$

бундан

$$x^2 + x - 2 = 0, \qquad x_1 = -2, \qquad x_2 = 1.$$

Биз эгри чизиқлар кесишган икки нуқтани топдик: $M_1(-2, -2)$, $M_2(1, 1)$. Демак, изланаётган юз:

$$S = \int_{-2}^{1} \left(\int_{x}^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left| 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

5-§. Қутб координаталаридаги икки ўлчовли интеграл

θ, ρ қутб координаталар системасида шундай D соҳа берилган бўлсинки, унинг ички нуқтасидан ўтувчи ҳар бир нур[*] бу соҳанинг чегарасини иккитадан ортиқ нуқтада кесмасин. D соҳа $\rho = \Phi_1(\theta)$, $\rho = \Phi_2(\theta)$ эгри чизиқлар ҳамда $\theta = \alpha$ ва $\theta = \beta$ нурлар билан чегараланган, бунда $\Phi_1(\theta) < \Phi_2(\theta)$ ва $\alpha < \beta$ деб фараз қиламиз (312-расм). Бундай соҳани яна тўғри деб атаймиз.

D соҳада θ ва ρ координаталарнинг узлуксиз функцияси берилган бўлсин: $z = F(\theta, \rho)$.

---

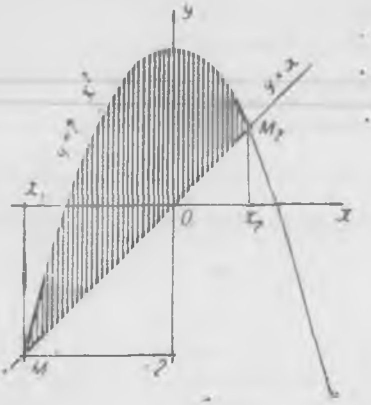
[*] Координаталар бошидан, яъни P қутбдан чиқувчи ҳар бир ярим тўғри чизиқни нур деб атаймиз.

D соҳани бирор усул билан Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n юзларга бўламиз. Интеграл йиғиндини тузамиз:

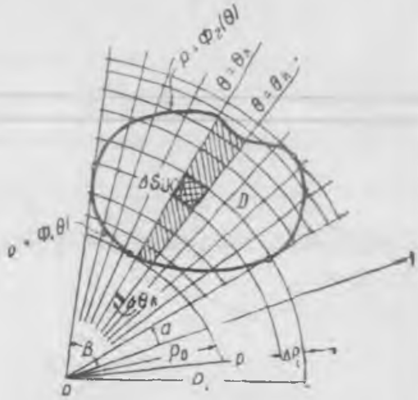
$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta s_k, \tag{1}$$

бунда P_k нуқта Δs_k юзнинг ихтиёрий нуқтаси.

Икки ўлчовли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан Δs_k юзларнинг энг катта диаметри нолга интилганда (1)



311- расм.



312- расм.

интеграл йиғиндининг лимити V мавжуд эканлиги келиб чиқади. Бу V лимит, таърифга асосан, $F(\theta, \rho)$ функциядан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралга тенг:

$$V = \iint_D F(\theta, \rho)\,ds. \tag{2}$$

Бу ҳол учун икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

Интеграл йиғиндининг лимити D соҳани Δs_k юзларга қандай бўлиш усулига боғлиқ бўлмаганлигидан, биз бу соҳани ўзимизга қулай усул билан бўлишимиз мумкин. Ҳисоблаш учун бундай қулай усул, D соҳани $\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_1$, $\theta=\theta_2$, ..., $\theta=\theta_n$ бунда $\theta_0=\alpha$, $\theta_n=\beta$, $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\ldots<\theta_n$, нурлар ва $\rho=\rho_0$, $\rho=\rho_1$, ..., $\rho=\rho_m$ концентрик айланалар ёрдами билан бўлишдир (бунда ρ_0 $\Phi_1(\theta)$ функциянинг $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ оралиқдаги энг кичик қийматига тенг, ρ_m эса $\Phi_2(\theta)$ функциянинг шу оралиқдаги энг катта қийматига тенг; $\rho_0<\rho_1<\ldots<\rho_m$).

Энди $\rho=\rho_{i-1}$, $\rho=\rho_i$, $\theta=\theta_{k-1}$, $\theta=\theta_k$ чизиқлар билан чегараланган юзни Δs_{ik} орқали белгилаймиз.

Δs_{ik} юзлар уч хил кўринишда бўлади: 1) D соҳада ётувчи чегаравий чизиқ билан кесилмаган; 2) D соҳадан ташқарида ётувчи чегаравий чизиқ билан кесилмаган; 3) D соҳанинг чегараси билан кесилган.

$\Delta\theta_k \to 0$ ва $\Delta\rho_i \to 0$ да чегара билан кесилувчи юзларга мос қўшилувчилар йиғиндисининг лимити нолга тенг, шунга кўра бу қўшилувчиларни ҳисобга олмаймиз. D соҳадан ташқарида ётган Δs_{ik} юзлар, умуман интеграл йиғиндига кирмайди, шунинг учун ҳам улар бизни қизиқтирмайди. Демак, интеграл йиғиндини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(P_{ik})\,\Delta s_{ik}\right],$$

бунда P_{ik} нуқта Δs_{ik} юзнинг ихтиёрий нуқтаси.

Биз бу ерда ҳисоблашни аввал k индексни ўзгармас деб, i индекс бўйича бажарганлигимиз учун йиғиш белгиси $\left(\sum\right)$ ни икки марта ишлатдик (яъни икки қўшни нурлар орасидаги барча мос юзларни танлаб оламиз*). Қавсдан ташқаридаги йиғинди белгиси биз биринчи йиғиндидан ҳосил бўлган барча йиғиндиларни тўплаётганлигимизни (яъни k индекс бўйича йиғаётганлигимизни) кўрсатади.

Соҳа чегараси билан кесилмаган Δs_{ik} юзлар йиғиндисининг ифодасини топамиз. У икки сектор юзларининг айирмасига тенг бўлади:

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2\Delta\theta_k - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i\,\Delta\theta_k$$

ёки

$$\Delta s_{ik} = \overset{*}{\rho_i}\,\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_k,$$

бунда

$$\rho_i < \overset{*}{\rho_i} < \rho_i + \Delta\rho_i.$$

Шундай қилиб, интеграл йиғинди қуйидаги кўринишда бўлади**):

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_i F(\theta_k^*, \rho_i^*)\,\overset{*}{\rho_i} \cdot \Delta\rho_i\,\Delta\theta_k\right],$$

бунда $P(\theta_k^*, \rho_k^*)$ нуқта Δs_{ik} юзнинг нуқтасидир.

---

*) $\theta = \theta_k$ ва $\theta = \theta_{k+1}$ нурлар орасидаги юзларнинг ҳаммаси ҳам D соҳага тегишли бўлавермаганлиги учун, йиғиш i индекс бўйича бажарилганда, бу индекс 1 дан m гача бўлган барча қийматларни ўз ичига олмайди.

*) Йиғиндининг лимити юз ичида олинган нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлмагани учун интеграл йиғиндини шу кўринишда қарашимиз мумкин.

Энди $\Delta\theta_k$ кўпайтувчини қавс ичидаги йиғиш белгисидан ташқарига чиқарамиз (бу кўпайтувчи ҳамма қўшилувчилар учун умумий бўлганлигидан шундай қилиш мумкин):

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{l} F(\theta_k^*, \rho_l^*)\, \rho_l^*\, \Delta\rho_l \right] \Delta\theta_k.$$

$\Delta\rho_l \to 0$, $\Delta\theta_k$ эса ўзгармаслигича қолади деб фараз қиламиз. У вақтда қавс ичидаги ифода ушбу

$$\int\limits_{\Phi_1(\theta_k^*)}^{\Phi_2(\theta_k^*)} F(\theta_k^*, \rho)\, \rho d\rho$$

интегралга интилади.

Энди $\Delta\theta_k \to 0$ деб олиб, охирги натижани ҳосил қиламиз[*].

$$V = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\, \rho d\rho \right) d\theta. \tag{3}$$

(3) формула икки ўлчовли интегрални қутб координаталар системасида ҳисоблаш формуласидир.

Биринчи интеграллашни θ бўйича, иккинчисини ρ бўйича бажарсак, ушбу формула

$$V = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int\limits_{\omega_1(\rho)}^{\omega_2(\rho)} F(\theta, \rho) d\theta \right) \rho d\rho \tag{3'}$$

ҳосил бўлади (313-расм).

Тўғри бурчакли координаталар системасида берилган $f(x, y)$ функциянинг D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш талаб этилсин:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy,$$

---

[*] (3) формулани келтириб чиқаришда фойдаланган усулимиз қатъий усул ҳисобланмайди, чунки бу формулани келтириб чиқариш учун аввал $\Delta\rho_l$ ни нолга интилтириб, $\Delta\theta_k$ ни эса ўзгаришсиз қолдирдик ва сўнгра $\Delta\theta_k$ ни нолга интилтирдик. Бу эса икки ўлчовли интегралнинг таърифига унча тўғри келмайди, чунки биз уни юзларнинг диаметрлари нолга интилиб боргандаги (яъни $\Delta\theta_k$ ва $\Delta\rho_l$ бир вақтда нолга интилгандаги) интеграл йиғиндининг лимити деб қараган эдик. Бироқ исбот қатъий бўлмаса ҳам, натижа (яъни (3) формула) тўғри. Бу формуланинг қатъий исботини, икки ўлчовли интеграл учун тўғри бурчакли координаталарда қаралган метод ёрдами билан ҳам ҳосил қилиш мумкин эди. Шу билан бирга бу формулани 6-параграфда бошқа баъзи мулоҳазаларга кўра (икки ўлчовли интегралда қўлланиладиган координаталарни алмаштиришнинг умумийроқ формуласининг хусусий ҳоли сифатида) яна бир марта келтириб чиқарамиз.

Агар D соҳа θ, ρ қутб координаталаридаги тўғри соҳа бўлса, у ҳолда берилган икки ўлчовли интегрални қутб координаталарда берилган икки каррали интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин.

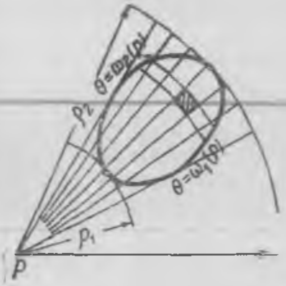
Ҳақиқатан,

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta,$$

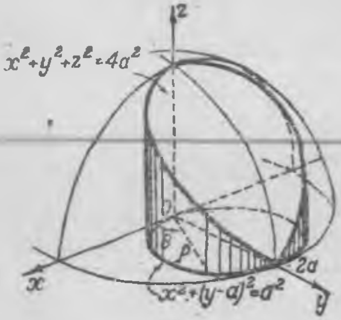
$$f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \ \rho \sin \theta) = F(\theta, \rho)$$

бўлгани учун қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \ \rho \sin \theta) \rho d\rho \right) d\theta. \qquad (4)$$



313-расм.



314-расм.

1-мисол. Сферик

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\, a^2$$

ва цилиндрик

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

сиртлар билан чегараланган жисмнинг v ҳажми ҳисоблансин.

Ечиш. Бу ерда интеграллаш соҳаси учун $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ цилиндрнинг асосини, яъни маркази $(0, a)$ нуқтада бўлган, a радиусли доирани олиш ва бу доиранинг тенгламасини $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ кўринишда ёзиш мумкин (314-расм). Изланаётган V ҳажмининг $\frac{1}{4}$ қисмини, яъни унинг биринчи октантда жойлашган бўлагининг ҳажмини ҳисоблаймиз. У вақтда интеграллаш соҳаси сифатида чегараси

$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2}, \quad y = 0, \quad y = 2a$$

тенгламалар билан аниқланувчи ярим доирани олишга тўғри келади.

Интеграл остидаги функция

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$$

ифодага тенг бўлади. Демак,

$$\frac{1}{4}V=\int\limits_{0}^{2a}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx\right)dy.$$

Ҳосил қилинган бу интегрални θ, ρ қутб координаталарга алмаштирамиз:

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta.$$

Интеграллаш чегарасини аниқлаймиз. Бунинг учун берилган айлананинг тенгламасини қутб координаталарда ёзамиз:

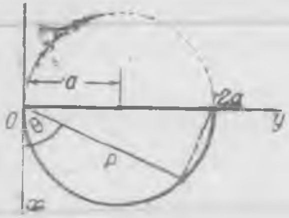
$$x^2+y^2=\rho^2,\qquad y=\rho\sin\theta,$$

у вақтда

$$\rho^2-2a\rho\sin\theta=0$$

ёки

$$\rho=2a\sin\theta.$$



315- расм.

Демак, берилган соҳанинг қутб координаталардаги (315- расм) чегараси

$$\rho=\Phi_1(\theta)=0,\qquad \rho=\Phi_2(\theta)=2a\sin\theta,\ \alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}$$

тенгламалар билан аниқланади. Интеграл остидаги функция эса

$$F(\theta,\ \rho)=\sqrt{4a^2-\rho^2}$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{V}{4}=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\int\limits_{0}^{2a\sin\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\theta=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left|-\frac{(4a^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\right|_{0}^{2a\sin\theta}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}[(4a^2-4a^2\sin\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}]d\theta=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)d\theta=\frac{4}{9}\ a^3(3\pi-4).$$

2- мисол. Пуассон интеграли ҳисоблансин:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

Ечиш. Аввал D интеграллаш соҳаси $x^2+y^2=R^2$ доирадан иборат бўлган

$$I_R=\iint\limits_{D}e^{-x^2-y^2}dxdy$$

интегрални ҳисоблаймиз (316- расм).

θ, ρ қутб координаталарга ўтиб,

$$I_R=\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{R}e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-\rho^2}\Big|_{0}^{R}d\theta=\pi(1-e^{-R^2})$$

R интегрални ҳосил қиламиз.

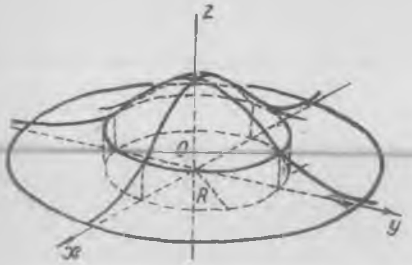
Энди, R радиусни чексиз узайтирсак, яъни интеграллаш соҳасини чексиз кенгайтириб борсак, у ҳолда *хосмас каррали интеграл* деб аталган қуйидаги интеграл ҳосил бўлади:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R} e^{-\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta = \lim_{R\to\infty}\pi(1-e^{-R^2}) = \pi.$$

Агар ихтиёрий шаклдаги D' соҳа шундай кенгайиб борсаки, текисликнинг ҳар қандай нуқтаси унга тегишли бўлса ва бу нуқта шу D' соҳада қолса (D' соҳанинг бундай кенгайишини $D'\to\infty$ муносабат билан белгилаймиз), $\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy$

интегралнинг π лимитга интилишини кўрсатамиз.

R_1, ва R_2 лар D' соҳа чегарасидан координаталар бошигача бўлган энг кичик ва энг катта масофалар бўлсин (317- расм).



316- расм.

317- расм.

Соҳанинг ҳамма нуқталарида функция $e^{-x^2-y^2}>0$ бўлгани учун ушбу тенгсизликлар ўринлидир:

$$I_{R_1} < \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy < I_{R_2}$$

ёки

$$\pi(1-e^{-R_1^2}) < \iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy < \pi(1-e^{-R_2^2}).$$

$D'\to\infty$ бўлганда $R_1\to\infty$ ва $R_2\to\infty$ бўлиши ўз-ўзидан маълум, шунинг учун тенгсизликнинг четки қисмлари биргина π лимитга интилади. Демак, ўрта ҳад ҳам шу лимитга интилади, яъни

$$\lim_{D'\to\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi. \tag{5}$$

Жумладан D' соҳа—томонлари $2a$ га тенг ва маркази координаталар бошида бўлган квадратдан иборат бўлсин; у ҳолда:

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right)dy.$$

Энди e^{-y^2} кўпайтувчини ички интегралнинг ташқарисига чиқарамиз (e^{-y^2} интеграллаш ўзгарувчиси x га боғлиқ бўлмагани учун шундай қилиш мумкин). У ҳолда

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)dy.$$

Фараз қилайлик, $\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = B_a$ бўлсин. Бу эса (фақат a га боғлиқ бўлган) ўзгармас сон; шунинг учун

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}B_a\, dy = B_a \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}dy;$$

Бироқ, сўнгги интеграл ҳам B_a га тенг $\left(\text{чунки, } \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}dy\right)$; демак,

$$\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy = B_aB_a = B_a^2.$$

Бу тенгликдаги a ни чексизликка интилтириб, лимитга ўтамиз (у ҳолда D' соҳа чексиз кенгайиб боради):

$$\lim_{D'\to\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{a\to\infty} B_a^2 = \lim_{a\to\infty}\left|\int\limits_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\right]^2 = \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right]^2.$$

Лекин, исбот қилинганга кўра [(5) га қаранг],

$$\lim_{D'\to\infty}\iint\limits_{D'} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi.$$

Демак,

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \pi.$$

ёки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Бу интеграл кўпинча эҳтимоллар назариясида ва статистикада учрайди. e^{-x^2} нинг бошланғич функциясини элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмаганлигидан бу интегрални (аниқмас интеграл ёрдами билан) тўғридан-тўғри ҳисоблай олмаслигимизни кўрамиз.

6-§. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш (умумий ҳол)

Oxy текисликда L чизиқ билан чегараланган D соҳа берилган бўлсин. Фараз қилайлик, x ва y координаталар янги u ва v ўзгарувчиларнинг функциялари бўлсин:

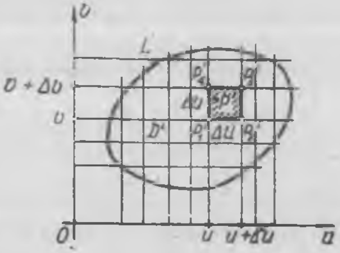
$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \tag{1}$$

бунда $\varphi(u, v)$ ва $\psi(u, v)$ функцияларнинг бирор D' соҳада бир қийматли, узлуксиз ва узлуксиз ҳосилага эга эканлиги қуйида исботланади. У ҳолда (1) формулаларга асосан u ва v нинг ҳар бир жуфт қийматига x ва y нинг ёлғиз бир жуфт қиймати мос келади. Сўнгра φ ва ψ шундай функцияларки, агар биз x ва y ларга D соҳанинг аниқ бир қийматини берсак, (1) формула бўйича u ва v учун аниқ қийматлар топа оламиз деб фараз қиламиз.

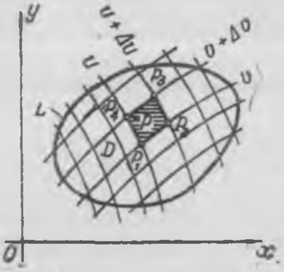
Ouv тўғри бурчакли координаталар системасини қараймиз (318-расм). Юқорида айтилганларга асосан Oxy (319-расм) текисликдаги ҳар бир $P(x, y)$ нуқтага Ouv текисликда u, v координаталар (1) формула билан аниқланадиган $P'(u, v)$ нуқта бир қийматли мос келади. u ва v сонлар P нуқтанинг ***эгри чизиқли*** координаталари деб аталади.

Агар Oxy текисликдаги бирор нуқта ҳаракатланиб, D соҳани чегараловчи L ёпиқ чизиқни чизса, Ouv текисликдаги шу нуқтага мос нуқта ҳаракатланиб, ўз навбатида бирор D' соҳани чегараловчи L' ёпиқ чизиқни чизади; бу ҳолда D' соҳанинг ҳар бир нуқтасига D соҳанинг маълум бир нуқтаси мос келади.

Шундай қилиб, (1) формула D ва D' соҳаларнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади ёки одатда, D соҳани D' соҳага ўзаро бир қийматли қилиб акслантирган дейилади



318-расм.



319-расм.

D' соҳада $u=\text{const}$ чизиқни қараймиз. (1) формулаларга мувофиқ Oxy текисликда бу чизиққа, умуман айтганда, қандайдир эгри чизиқ мос келишини топамиз. Худди шунингдек, Ouv текисликнинг ҳар бир $v=\text{const}$ тўғри чизиғига Oxy текисликда бирор чизиқ мос келади.

D' соҳани $v=\text{const}$ ва $u=\text{const}$ тўғри чизиқлар билан тўғри бурчакли юзларга бўламиз (бунда D' соҳанинг чегарасига тегиб турувчи юзларни ҳисобга олмаймиз). D соҳа мос эгри чизиқлар билан бир неча эгри чизиқли тўртбурчакларга бўлинади (319-расм).

Ouv текисликда $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $\Delta s'$ юзни ва Oxy текисликда эса унга мос келувчи эгри чизиқли Δs юзни қараймиз. Бу майдончаларнинг юзларини ўз навбатида мос равишда $\Delta s'$ ва Δs орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$\Delta s' = \Delta u \Delta v$$

бўлиши маълум. Умуман айтганда Δs ва $\Delta s'$ юзлар турличадир.

D соҳада

$$z = f(x, y)$$

узлуксиз функция берилган бўлсин.

$z = f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги ҳар бир қийматига $z = F(u, v)$ функциянинг D' соҳадаги худди шундай қиймати тўғри келади. Бунда

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

D соҳа бўйича олинган z функциянинг интеграл йиғиндиларини қараймиз. Ушбу:

$$\sum f(x, y)\,\Delta s = \sum F(u, v)\Delta s \tag{2}$$

тенгликнинг ўринли эканлиги ўз-ўзидан маълум.

Δs ни, яъни Oxy текисликдаги эгри чизиқли $P_1P_2P_3P_4$ тўртбурчакнинг юзини ҳисоблаймиз (319- расмга қаранг).

Бу тўртбурчак учларининг координаталарини аниқлаймиз:

$$\left.\begin{array}{lll} P_1(x_1, y_1), & x_1 = \varphi(u, v), & y_1 = \psi(u, v) \\ P_2(x_2, y_2), & x_2 = \varphi(u+\Delta u, v), & y_2 = \psi(u+\Delta u, v), \\ P_3(x_3, y_3), & x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), & y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v). \\ P_4(x_4, y_4), & x_4 = \varphi(u, v+\Delta v), & y_4 = \psi(u, v+\Delta v). \end{array}\right| \tag{3}$$

Эгри чизиқли $P_1P_2P_3P_4$ тўртбурчакнинг юзини ҳисоблашда P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 чизиқларни жуфт-жуфти билан параллел бўлган тўғри чизиқлар деб ҳисоблаймиз; бундан ташқари, бу функцияларнинг орттирмаларини мос дифференциаллар билан алмаштирамиз. Шундай қилиб, бир Δu, Δv чексиз кичик миқдорларга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорларни ҳисобга олмаган бўламиз. У вақтда (3) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=\varphi(u,\ v), & y_1=\psi(u,\ v), \\ x_2=\varphi(u,\ v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\Delta u, & y_2=\psi(u,v)+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u, \\ x_3=\varphi(u,v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\Delta u+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\,\Delta v, & y_3=\psi(u,v)+\dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta v, \\ x_4=\varphi(u,\ v)+\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\,\Delta v, & y_4=\psi(u,\ v)+\dfrac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta v. \end{array}\right\} \quad (3')$$

Қилинган фаразларга асосан эгри чизиқли, $P_1P_2P_3P_4$ тўртбурчакни параллелограмм деб қарашимиз мумкин. Унинг Δs юзи тақрибан $P_1P_2P_3$ учбурчак юзининг икки ҳиссасига тенг ва у аналитик геометриянинг тубандаги формуласи билан топилади:

$$\Delta s \approx |(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)| =$$

$$=\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\Delta v\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\Delta v\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta v\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\,\Delta u\Delta v-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\,\Delta u\Delta v\right|=\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{matrix}\right\|\,\Delta u\Delta v;$$

бу детерминантдаги иккинчи (ташқи) тўғри қавслар детерминант абсолют миқдор бўйича олинишини билдиради.
Ушбу белгилашни киритамиз:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=I.$$

Шундай қилиб

$$\Delta s \approx |I|\Delta s'. \qquad (4)$$

I детерминант $\varphi(u,\ v)$ ва $\psi(u,\ v)$ функцияларнинг *функционал детерминанти* деб аталади. Бу детерминант немис математиги Якоби номи билан *якобиан* деб ҳам юритилади.

(4) тенглик фақат тақрибий, чунки Δs юзни ҳисоблашда биз юқори тартибли чексиз кичик миқдорларни ҳисобга олмадик. Лекин Δs ва $\Delta s'$ юзларнинг ўлчовлари қанчалик кичик бўлса, бу тенглик шунчалик аниқроқ бўлади. Δs ва $\Delta s'$ юзларнинг диаметрлари нолга интилиб боргандаги лимити эса мутлақо аниқ бўлади:

$$|I|=\lim_{\operatorname{diam}\Delta s'\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s'}.$$

Энди ҳосил қилинган тенгликни икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга татбиқ этамиз. (2) тенгликка асосан:

$$\sum f(x, y)\Delta s \approx \sum F(u, v)|I|\Delta s'$$

деб ёзишимиз мумкин (ўнг томондаги интеграл йиғинди D соҳага тарқатилган). $\mathrm{diam}\Delta s' \to 0$ да лимитга ўтиб,

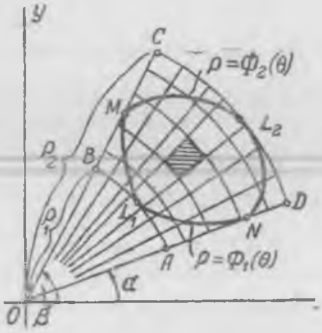
$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} F(u, v)|I|\,dudv \tag{5}$$

аниқ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса *икки ўлчовли интегралда координаталарни алмаштириш формуласидир.* Бу формула D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегрални ҳисоблашни, масалани ҳал этишни енгиллатадиган, D' соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга олиб келишга имкон беради. Бу формуланинг қатъий исботини биринчи марта машҳур рус математиги М. В. Остроградский берган.

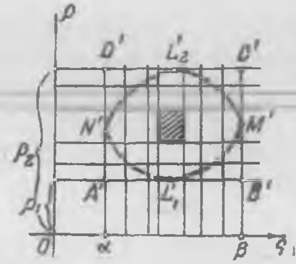
Изоҳ. Олдинги параграфда қаралган тўғри бурчакли координаталардан қутб координаталарига ўтиш, икки ўлчовли интегралдаги ўзгарувчиларни алмаштиришнинг хусусий ҳолидир. Бу ҳолда

$$u = \theta, \qquad v = \rho; \qquad x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Oxy текисликдаги AB ($\rho = \rho_1$) эгри чизиқ (320-расм) $O\theta\rho$ текисликлаги $A'B'$ тўғри чизиққа (321-расм) ўтади. Oxy текисликдаги DC ($\rho = \rho_2$) эгри чизиқ $O\theta\rho$ текисликдаги $D'C'$ тўғри чизиққа алмашади.



320-расм.



321-расм.

Oxy текисликдаги AD ва BC тўғри чизиқлар $O\theta\rho$ текисликнинг $A'D'$ ва $B'C'$ тўғри чизиқларига, L_1 ва L_2 эгри чизиқлар L_1' ва L_2' эгри чизиқларга алмашади.

x ва y Декарт координаталарини θ ва ρ қутб координаталарга алмаштириш якобианини ҳисоблаймиз:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \theta & \cos \theta \\ \rho \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \theta - \rho \cos^2 \theta = -\rho.$$

Демак, $|I| = \rho$, шунинг учун:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\int\limits_{\Phi_1(\theta)}^{\Phi_2(\theta)} F(\theta, \rho)\rho\,d\rho\Big)d\theta.$$

Бу формула олдинги параграфда ҳам топилган эди.

Мисол. Oxy текисликда D соҳа бўйича олинган ва

$$y = x + 1, \qquad y = x - 3 \qquad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \qquad y = -\frac{1}{3}x + 5$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган

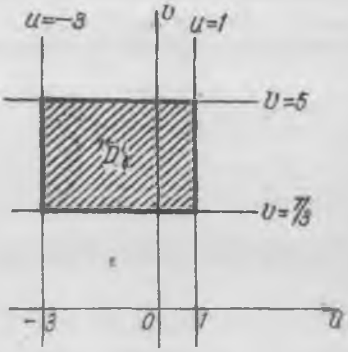
$$\iint\limits_{D} (y - x)\,dx\,dy$$

икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин.

Бу икки ўлчовли интегрални тўғридан-тўғри ҳисоблаш бирмунча қийинлик туғдиради. Лекин ўзгарувчиларни оддийгина алмаштириш билан бу интегрални томонлари координата ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчак бўйича олинган интегралга келтириш мумкин.

$$u = y - x, \qquad v = y + \frac{1}{3}x \qquad (6)$$

деб оламиз. У вақтда $y = x + 1$, $y = x - 3$ тўғри чизиқлар мос равишда Ouv текисликдаги $u = 1$, $u = -3$ тўғри чизиқларга; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x + 5$ тўғри чизиқлар эса $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$ тўғри чизиқларга алмашади.



322-расм.

Демак, берилган D соҳа 322-расмда тасвирланган тўғри тўртбурчакли D' соҳага алмашади. Энди алмаштириш якобианини ҳисоблаш қолди. Бунинг учун x ва y ни u ва v орқали ифодалаймиз (6) системани ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v, \quad y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v,$$

Демак,

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4},$$

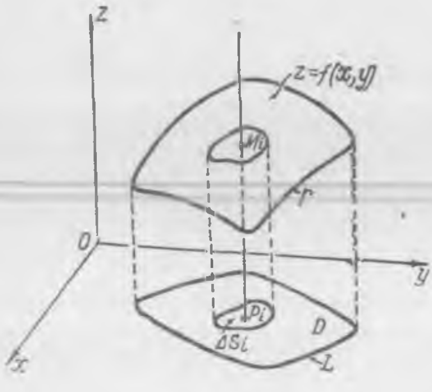
ва якобианнинг абсолют қиймати $|I| = \frac{3}{4}$. Шунинг учун:

$$\iint\limits_{D} (y - x)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} \left[\left(+\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v\right)\right]\frac{3}{4}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{D'} \frac{3}{4} u\, du\, dv = \int\limits_{\frac{7}{3}}^{5} \int\limits_{-3}^{1} \frac{3}{4}\, u\, du\, dv = -8.$$

7-§. Сиртнинг юзини ҳисоблаш

Г чизиқ билан чегараланган сиртнинг юзини ҳисоблаш талаб қилинсин (323-расм); сирт ўзининг $z = f(x, y)$ тенгламаси билан берилган, бундаги $f(x, y)$ функция узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган функциядир.



323- расм.

Г чизиқнинг Oxy текисликдаги проекциясини L билан белгилаймиз. Oxy текисликдаги L чизиқ билан чегараланган соҳани D билан белгилаймиз.

D соҳани ихтиёрий йўл билан n та элементар Δs_1, Δs_2, . . . , Δs_n юзларга бўламиз. Ҳар қайси Δs_i юзнинг ичида $P_i(\xi_i \eta_i)$ нуқта оламиз. P_i нуқтага сирт устида

$$M_i[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

нуқта мос келади. M_i нуқта орқали шу сиртга уринма текислик ўтказамиз. Унинг тенгламаси қуйидаги шаклда бўлади:

$$z - z_i = f'_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f'_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \qquad (1)$$

(т. IX бобининг 6-параграфига қаранг.) Бу текисликда, Oxy

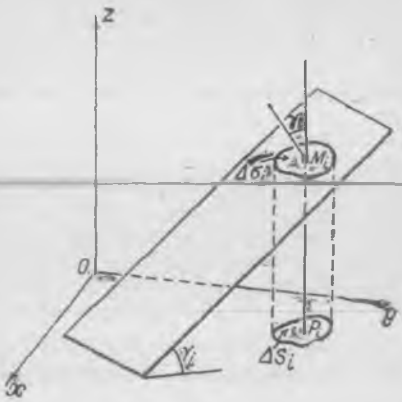
текисликка Δs_l юз шаклида проекцияланадиган, $\Delta\sigma_l$ юзни ажратамиз. Ҳамма $\Delta\sigma_l$ юзларнинг

$$\sum_{l=1}^{n}\Delta\sigma_l$$

йиғиндисини қараймиз.

$\Delta\sigma_l$ юзларнинг диаметрларидан энг каттаси нолга интилганда бу йиғиндининг σ лимитини *сиртнинг юзи* деб атаймиз, яъни таърифга кўра:

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta\sigma_l\to 0}\sum_{l=1}^{n}\Delta\sigma_l. \qquad (2$$



324-расм.

Энди сиртнинг юзини ҳисоблашга киришамиз. Уринма текислик билан Oxy текислик орасидаги бурчакни γ_l билан белгилаймиз. Сиртнинг юзини аналитик геометриянинг маълум формуласига асосан қуйидаги кўринишда езиш мумкин (324- расм):

$$\Delta s_l = \Delta\sigma_l \cos\gamma_l$$

ёки

$$\Delta\sigma_l = \frac{\Delta s_l}{\cos\gamma_l}. \qquad (3)$$

γ_l бурчак бир вақтда Oz ўқ билан (1) текисликка туширилган перпендикуляр орасидаги бурчак ҳамдир. Шунинг учун (1) тенгламага ва аналитик геометриянинг формуласига асосан

$$\cos\gamma_l = \sqrt{\frac{1}{1+f'^2_x(\xi_l,\ \eta_l)+f'^2_y(\xi_l,\ \eta_l)}}.$$

Демак,

$$\Delta\sigma_l = \sqrt{1+f'^2_x(\xi_l,\eta_l)+f'^2_y(\xi_l,\ \eta_l)}\,\Delta s_l.$$

Бу ифодани (2) формулага қўйсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\sigma = \lim_{\operatorname{diam}\Delta s_l\to 0}\sum_{l=1}^{n}\sqrt{1+f'^2_x(\xi_l,\ \eta_l)+f'^2_y(\xi_l,\ \eta_l)}\Delta s_l,$$

Таърифга кўра охирги тенгликнинг ўнг томонида турган интеграл йиғиндининг лимити

$$\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

икки ўлчовли интеграл кўринишда бўлганлиги сабабли охирги натижа қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \qquad (4)$$

Бу эса $z = f(x, y)$ сиртнинг юзини ҳисоблаш учун қўлланиладиган формуладир.

Агар сиртнинг тенгламаси

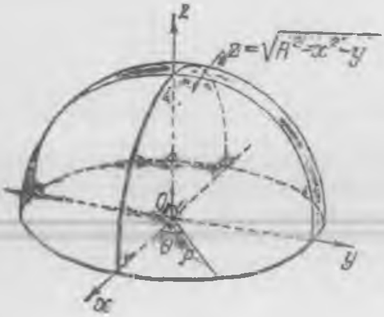
$$x = \mu(y, z) \text{ ёки } y = \chi(x, z)$$

кўринишда берилган бўлса, у ҳолда сиртнинг юзини ҳисоблаш формулалари мос равишда кўринишда берилган бўлса, у ҳолда сиртнинг юзини ҳисоблаш формулалари мос равишда

$$\sigma = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \qquad (3')$$

$$\sigma = \iint\limits_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz \qquad (3'')$$

кўринишда бўлади, бундаги D' ва D'' соҳалар берилган сирт проекцияланадиган Oyz ва Oxz текисликда ётувчи соҳалардир.



325- расм.

1- мисол. Ушбу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

сферанинг σ сирти ҳисоблансин.

Ечиш. Сфера устки ярмининг сиртини ҳисоблаймиз:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(325- расм). Бу ҳолда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Демак,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Интеграллаш соҳаси ушбу

$$x^2 + y^2 < R^2$$

шарт билан аниқланади. Шундай қилиб, (4) формулага асосан:

$$\frac{1}{2}\sigma = \int\limits_{-R}^{R}\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dy\right)dx.$$

Ҳосил қилинган икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталарга ўтамиз. Қутб координаталарда интеграллаш соҳасининг чегараси $\rho=R$ — тенглама билан аниқланади. Демак,

$$\sigma=2\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{R}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,\rho\, d\rho\right)d\theta=2R\int\limits_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\,\right]_0^R d\theta=2R\int\limits_0^{2\pi}R\, d\theta=4\pi R^2$$

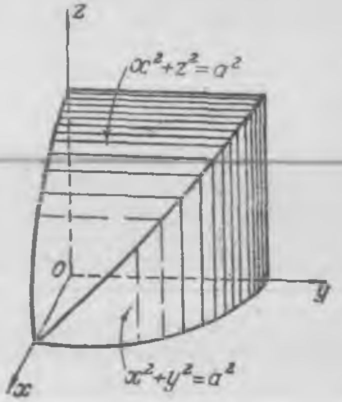
2-мисол. Ушбу

$$x^2+y^2=a^2$$

цилиндрнинг

$$x^2+z^2=a^2$$

цилиндр билан кесишганидан ҳосил бўлган қисмининг сирти ҳисоблансин.



326- расм.

Ечиш. 326- расмда изланган сиртнинг 1/8 қисми тасвирланган. Сиртнинг тенгламаси қуйидаги шаклда бўлади:

$$y=\sqrt{a^2-x^2};$$

шунинг учун

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0;$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Интеграллаш соҳаси доира чораги кўринишида бўлади, яъни:

$$x^2+z^2<a^2,\qquad x>0;\qquad z>0.$$

шартлар билан аниқланади.

Демак,

$$\frac{1}{8}\sigma=\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dz\right)dx=a\int\limits_0^a\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a\int\limits_0^a dx=a^2,$$

$$\sigma=8a^2.$$

8-§. Модда тақсимланишининг зичлиги ва икки ўлчовли интеграл

D соҳада бирор модда тақсимланган ва D соҳанинг ҳар қайси бирлиги юзига бу модданинг аниқ миқдори тўғри келадиган бўлсин. Гарчи муҳокамамиз электр зарядлари, иссиқлик, миқдори ва ҳоказоларнинг тақсимоти ҳақида сўз борганда ҳам тўғри бўлса-да, бундан буён биз масса тақсимоти ҳақида сўзлаймиз.

D соҳанинг ихтиёрий Δs юзини қараймиз. Шу юзга тўғри келадиган модданинг массаси Δm бўлсин. У ҳолда $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ нисбат модданинг Δs соҳадаги ўртача сирт зичлиги деб аталади.

Энди Δs юз кичрая бориб, P (x,y) нуқтага айланиб қолади деб фараз қиламиз ва ушбу $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s}$ лимитни қараймиз. Агар бу лимит мавжуд бўлса, умуман айтганда, у P нуқтанинг вазиятига, яъни бу нуқтанинг x ва y координаталарига боғлиқ бўлади ҳамда P нуқтанинг қандайдир f (P) функциясидан иборат бўлади. Биз бу лимитни модданинг P нуқтадаги *сирт зичлиги* деб атаймиз:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s}=f\,(P)=f\,(x,y). \tag{1}$$

Шундай қилиб, сирт зичлиги соҳа нуқтаси координаталарининг f $(x,\ y)$ функциясидан иборат.

Энди, аксинча, D соҳада бирор модданинг сирт зичлиги қандайдир $f(P)=f(x,y)$ узлуксиз функция билан берилган бўлсин ва шу модданинг D соҳадаги умумий миқдорини аниқлаш талаб қилинсин.

D соҳани $\Delta\ s_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ юзларга бўламиз ва ҳар қайси юзда P_i нуқтани оламиз; у ҳолда f (P_i) функция P_i нуқтадаги сирт зичлиги бўлади.

$f(P_i)$ Δs_i кўпайтма бизга юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан Δs_i юздаги модданинг миқдорини беради.

$$\sum_{i=1}^{n} f\ (P_i)\ \Delta s_i$$

йиғинди эса D соҳага ёйилган модданинг тақрибий умумий миқдорини ифодалайди. Бироқ, бу D соҳадаги f (P) функциянинг интеграл йиғиндисидир. Унинг аниқ қийматини эса биз $\Delta s_i\to 0$ да лимитга ўтиш билан топамиз.

Шундай қилиб*),

$$M = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(P)\,ds = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (2)$$

яъни D соҳадаги модданинг умумий миқдори шу модданинг $f(P) = f(x,y)$ зичлигидан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интегралига тенгдир.

Мисол. R радиусли доиравий пластинканинг ҳар бир P (x, y) нуқтасидаги пластинка материалининг f (x, y) сирт зичлиги доира марказидан (x, y) нуқтагача бўлган масофага пропорционал, яъни

$$f(x.y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

бўлса, бу пластинканинг массаси аниқлансин.

Ечиш. (2) формула бўйича:

$$M = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

булади. бунда интеграллаш соҳаси D $x^2 + y^2 < R^2$ доирадир. Қутб координаталарига ўтиб, мана буни ҳосил қиламиз:

$$M = k\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \rho\rho\,d\rho\right)d\theta = k\,2\pi\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^R = \frac{2}{3}\,k\,\pi R^2.$$

9-§. Ясси (текис) шакл юзининг инерция моменти

Массаси m бўлган моддий M нуқтанинг бирор O нуқтага нисбатан I инерция моменти деб, m массанинг M дан O нуқтагача бўлган r масофанинг квадрати билан кўпайтмасига айтилади:

$$I = mr^2.$$

$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ моддий нуқталар системасининг O нуқтага нисбатан инерция моменти шу система нуқталари инерция моментларининг йиғиндисидан иборат бўлади:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Энди D моддий ясси шаклнинг инерция моментини аниқлаймиз. D шакл Oxy координата текислигига жойлашган бўлсин. Бу шаклнинг сирт зичлиги ҳамма ерида бирга тенг деб фараз қилиб, унинг инерция моментини координаталар бошига нисбатан аниқлаймиз. D соҳани ΔS_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ элементар юз-

---

*) $\Delta s_i 0 \to$ муносабатни биз Δs_i соҳанинг диаметри нолга интилади деган маънода тушунамиз.

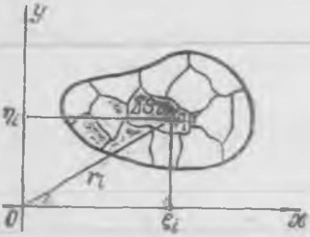
ларга ажратамиз (327- расм). Ҳар бир юзда координаталари ξ_i, η_i бўлган P_i нуқта оламиз. ΔS_i юзнинг элементар ΔI_i инерция моменти деб, Δs_i юзнинг массаси билан масофа квадрати $(r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2)$ нинг кўпайтмасига айтамиз:

$$\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i$$

ва шундай инерция моментларининг йиғиндисини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i$$

Бу эса $f(x, y) = x^2 + y^2$ функциянинг D соҳа бўйича олинган интеграл йиғиндисидир.



327- расм.

D шаклнинг инерция моментини ҳар бир ΔS_i элементар юзнинг диаметри нолга интилгандаги шу интеграл йиғиндининг лимити сифатида аниқлаймиз:

$$I_0 = \lim_{\operatorname{diam}\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i.$$

Аммо бу йиғиндининг лимити $\iint\limits_D (x^2 + y^2)$ икки ўлчовли интегралдан иборат. Демак, D шаклнинг координаталар бошига нисбатан инерция моменти

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{1}$$

интегралга тенг, бунда D соҳа берилган текис шакл билан устма-уст тушади. Ушбу интеграллар

$$I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\;dy. \tag{2}$$

$$I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy \tag{3}$$

мос равишда *D шаклнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари* деб аталади.

1- мисол. Радиуси R бўлган D доира юзининг O марказга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин.

Ечиш (1) формулага асосан:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\;dy.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун θ, ρ қутб координаталарга ўтамиз. Айлананинг қутб координаталаридаги тенгламаси

$$\rho = R$$

Шунинг учун

$$I_0=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{R}\rho^2\rho\,d\rho\right)d\theta=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Изоҳ. Агар сирт зичлиги γ бирга тенг бўлмай, x ва y нинг бирор функцияси, яъни $\gamma=\gamma(x,y)$ бўлса, ΔS_i юзнинг массаси юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан $\gamma(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$ га тенг бўлади, шунинг учун ясси шаклнинг координаталар бошига нисбатан инерция моменти қуйидагича бўлади:

$$I_0=\iint\limits_D\gamma(x,y)\,(x^2+y^2)\,dx\,dy. \qquad (1')$$

2-мисол. Агар

$$y^2=1-x; \qquad x=0, \qquad y=0$$

чизиқлар билан чегараланган D моддий ясси шаклнинг ҳар бир нуқтасидаги сирт зичлиги y га тенг бўлса, унинг Оу ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблансин (328-расм).

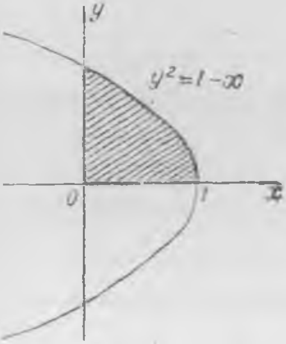
Ечиш.

$$I_{yy}=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x}}yx^2\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1x^2(1-x)\,dx=\frac{1}{24}.$$

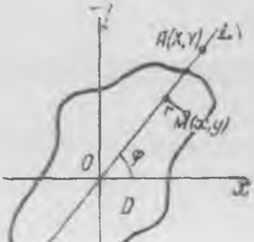
Инерция эллипси. Координаталар боши деб олинган O нуқтадан ўтувчи бирор OL ўққа нисбатан D ясси шакл юзининг инерция моментини топайлик. OL тўғри чизиқ билан Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчакни φ билан белгилаймиз (329-расм).

OL тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=0.$$



328-расм.



329-расм.

Бирор M (x, y) нуқтанинг бу тўғри чизиқдан масофаси қуйидагига тенг:

$$r = |x\sin\varphi - y\cos\varphi|.$$

D соҳа юзининг OL тўғри чизиққа нисбатан I инерция моменти таърифга мувофиқ ушбу интеграл билан ифодаланади:

$$I = \iint\limits_D r^2\,dx\,dy = \iint\limits_D (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2\,dx\,dy = \sin^2\varphi \iint\limits_D x^2\,dx\,dy -$$

$$-2\sin\varphi\cos\varphi \iint\limits_D xy\,dx\,dy + \cos^2\varphi \iint\limits_D y^2\,dx\,dy.$$

Демак,

$$I = I_{yy}\sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi + I_{xx}\cos^2\varphi, \qquad (4)$$

бунда $I_{yy} = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy$ шаклнинг y ўққа нисбатан инерция моменти, $I_{xx} = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy$ — x ўққа нисбатан инерция моменти ва $I_{xy} = \iint\limits_D xy\,dx\,dy$. Охирги тенгликнинг ҳамма ҳадларини I га бўлсак:

$$1 = I_{xx}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 - 2I_{xy}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{I}}\right) + I_{yy}\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{I}}\right)^2 \qquad (5)$$

OL тўғри чизиқда A (X, Y) нуқтани $OA = \frac{1}{\sqrt{I}}$ бўладиган қилиб оламиз. OL ўқнинг турлича йўналишларига, яъни φ бурчакнинг ҳар хил қийматларига I нинг турли қийматлари ва турлича A нуқталар мос келади. A нуқталарнинг геометрик ўринларини топамиз. Равшанки,

$$X = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\varphi, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I}}\sin\varphi.$$

(5) тенгликка кўра X ва Y миқдорлар ўзаро

$$1 = I_{xx}X^2 - 2I_{xy}XY + I_{yy}Y^2 \qquad (6)$$

муносабат билан боғланган. Шундай қилиб, A (X, Y) нуқталарнинг геометрик ўрни иккинчи тартибли (6) эгри чизиқдан иборатдир. Бу эгри чизиқнинг эллипс эканлигини исбот қиламиз.

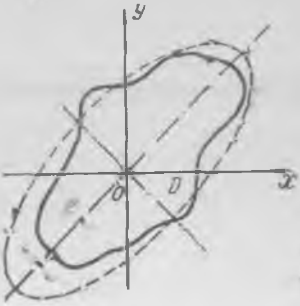
Рус математиги В. Я. Буняковский*) томонидан топилган ушбу тенгсизлик тўғридир:

$$\left(\iint_D xy\,dx\,dy\right)^2<\left(\iint_D x^2\,dxdy\right)\left(\iint_D y^2\,dx\,dy\right)$$

ёки

$$I_{xx}I_{yy}-I_{xy}^2>0.$$

Шундай қилиб, (6) эгри чизиқнинг дискриминанти мусбат экан, демак, бу эгри чизиқ эллипсдир (330-расм). Бу эллипс инерция эллипси деб аталади. Инерция эллипси тушунчаси механикада катта аҳамиятга эга



330- расм.

---

*) Буняковский тенгсизлигини исбот қилиш учун қуйидаги тенгсизликни қараймиз:

$$\iint_D [f(x,\ y)-\lambda\varphi(x,\ y)]^2\,dxdy\geqslant 0,$$

бунда λ ўзгармас миқдор. Бу тенгсизликка $f(x,\ y)-\lambda\varphi(x,\ y)\equiv 0$, яъни агар $f_1(x,\ y)=\lambda\varphi(x,\ y)$ бўлгандагина тенглик белгиси қўйиш мумкин. Агар $f\frac{(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)}\neq\text{const}=\lambda$ деб фараз этилса, бу ҳолда тенгсизлик белгиси доимо ўринли бўлади. Шундай қилиб, интеграл остидаги қавсни очиб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\iint_D f^2(x,\ y)\,dxdy-2\lambda\iint_D f(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)\,dx\,dy+\lambda^2\iint_D\varphi^2(x,\ y)\,dx\,dy>0.$$

Чапда турган ифодани λ нинг функцияси деб қараймиз. Бу ҳеч қачон нолга айланмайдиган иккинчи даражали кўпҳаддир; демак, унинг илдизлари комплекс сонлардан иборат, бу эса квадрат кўпҳаднинг коэффициентларидан тузилган дискриминантнинг ишораси манфий бўлгандагина бўлиши мумкин, яъни

$$\left(\iint_D f\varphi\,dx\,dy\right)^2-\iint_D f^2\,dx\,dy\iint_D\varphi^2\,dx\,dy<0$$

ёки

$$\left(\iint_D f\varphi(dx\,dy\right)^2<\iint_D f^2\,dx\,dy\iint_D\varphi^2\,dx\,dy.$$

Бу эса *Буняковский тенгсизлигидир.*

Биз қараётган ҳолда

$$f(x,y)=x,\ \varphi(x,y)=y,\ \frac{x}{y}\neq\text{const}.$$

Буняковскийнинг бу ажойиб тенгсизлиги математиканинг турли соҳаларида доимо қўлланилиб келади. Бу тенгсизликни кўпгина дарсликларда Шварц тенгсизлиги деб нотўғри айтиб келадилар. Уни Буняковский 1859 йили (бошқа муҳим тенгсизликлар қаторида) босиб чиқарган эди. Шварц эса бу тенгсизликни 1875 йили, яъни Буняковскийдан 16 йил кейин эълон қилди.

Инерция эллипси ўқларининг узунликлари ва текисликдаги вазияти берилган ясси шаклнинг формасига боғлиқдир.

Эллипснинг ихтиёрий A нуқтасидан координаталар бошигача бўлган масофа $\frac{1}{\sqrt{I}}$ га тенг бўлгани учун (бунда I шаклнинг OA ўққа нисбатан олинган инерция моментидир) эллипсни ясаб, координаталар бошидан ўтувчи бирор тўғри чизиққа нисбатан D шаклнинг инерция моментини осонгина ҳисоблаб чиқаришимиз мумкин. Жумладан, шаклнинг инерция моменти инерция эллипсининг катта ўқига нисбатан энг кичик ва шу эллипснинг кичик ўқига нисбатан энг катта эканлигини кўриш осон.

10-§. Ясси (текис) шакл юзи оғирлик марказининг координаталари

I т. XII бобининг 8- параграфида массалари $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ бўлган $P_1, P_2, \ldots, P_n$ моддий нуқталар системаси оғирлик марказининг координаталари

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \tag{1}$$

формулалар билан аниқланиши кўрсатилган эди.

Энди D ясси шакл оғирлик марказининг координаталарини топамиз. Бу шаклни жуда кичик ΔS_i элементар юзларга бўлиб чиқамиз. Агар сирт зичлигини бирга тенг деб қабул қилсак, юзнинг массаси унинг юзига тенг бўлади. Агар тақрибан ΔS_i элементар юзнинг барча массаси унинг бирор $P_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқтасига тўпланган деб ҳисобланса, D шаклни моддий нуқталарнинг системаси деб қараш мумкин. У пайтда (1) формулага мувофиқ бу шакл оғирлик марказининг координаталари тахминан

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i} \tag{2}$$

тенгликлар билан аниқланади.

$\Delta S_i \to 0$ да лимитга ўтсак, касрларнинг суратида ва махражида турган интеграл йиғиндилар икки ўлчовли интегралга айланади ва биз ясси шакл оғирлик марказининг координаталарини ҳисоблаш учун аниқ формулалар ҳосил қиламиз:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}; \qquad y_c=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}; \qquad (2)$$

Сирт зичлиги 1 га тенг бўлган ясси шакл учун чиқарилган бу формулалар ҳамма нуқталарида ўзгармас γ зичликка эга бўлган ҳар қандай шакллар учун ҳам ўз кучида қолиши равшан.

Агар сирт зичлиги ўзгарувчан бўлса,

$$\gamma=\gamma(x,\ y),$$

у ҳолда бу формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,x\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,dx\,dy}; \qquad y_c=\frac{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,y\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,dx\,dy}.$$

Мана бу

$$M_y=\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,x\,dx\,dy \text{ ва } M_x=\iint\limits_D \gamma(x,\ y)\,y\,dx\,dy$$

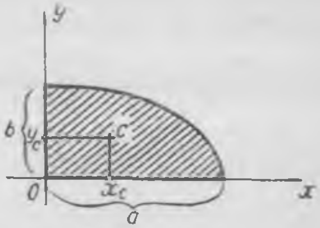
ифодалар Oy ва Ox ўқларга нисбатан D ясси шаклнинг *статик моментлари* деб аталади.

$\iint \gamma(x,\ y)\,dx\,dy$ интеграл қаралаётган шаклнинг массасини ифодалайди.

Мисол. Сирт зичлиги ҳамма нуқталарида 1 га тенг деб олиб,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс чораги оғирлик марказининг координаталари топилсин (331-расм).



331-расм.

Ечиш. (2) формулага асосан:

$$x_c=\frac{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\right)dx}{\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=$$

$$=\frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}\Big|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{\int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy \right) dx}{\frac{1}{4}\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

11- §. Уч ўлчовли интеграл

Фазода S ёпиқ сирт билан чегараланган бирор V соҳа берилган бўлсин. V соҳа ва унинг чегарасида бирор $f(x, y, z)$ узлуксиз функция аниқланган бўлсин, бунда x, y, z соҳа нуқтасининг тўғри бурчакли координаталари. Аниқлик учун $f(x, y, z) \geqslant 0$ бўлган ҳолда биз бу функцияни қандайдир бир модданинг V соҳага тақсимланиш зичлиги деб ҳисоблашимиз мумкин. Δv_i символ билан соҳанинг ўзинигина эмас, балки унинг ҳажмини ҳам белгилаб, V соҳани ихтиёрий равишда Δv_i соҳаларга бўламиз. Ҳар бир Δv_i соҳада ихтиёрий P_i нуқтани танлаб оламиз ва f функциянинг бу нуқтадаги қийматини $f(P_i)$ билан белгилаймиз. Интеграл йиғиндини

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i \tag{1}$$

кўринишда тузамиз ва бунда Δv_i нинг энг катта диаметрини нолга интиладиган қилиб, Δv_i соҳаларнинг сонини чексиз орттириб борамиз*). Агар $f((x, y, z)$ функция узлуксиз бўлса, (1) шаклдаги интеграл йиғиндининг лимити мавжуд бўлади, бунда интеграл йиғиндининг лимити икки ўлчовли интегрални**) таърифлагандаги маънода тушунилади. V соҳани бўлиш усулига ҳам, P_i нуқтани танлаб олиш усулига ҳам боғлиқ бўлмаган бу лимит $\iiint\limits_V f(P)\,dv$ символ билан белгиланади ва *уч ўлчовли интеграл* деб аталади. Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta v_i \to 0} \sum f(P_i)\,\Delta v_i = \iiint\limits_V f(P)\,dv$$

ёки

$$\iiint\limits_V f(P)\,\Delta v = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{2}$$

Агар $f(x, y, z)$ функция V соҳадаги модда тақсимланишининг ҳажм зичлиги деб ҳисобланса, (2) интеграл V ҳажмга кирган барча модданинг массасини беради.

---

*) Δv_i соҳанинг диаметри деб, соҳа чегарасида ётган нуқталар орасидаги максимал масофага айтилади.

**) V — ёпиқ соҳада (чегарани ҳам ҳисобга олган ҳолда) узлуксиз бўлган ҳар қандай функция учун интеграл йиғинди лимитининг мавжудлиги ҳақидаги (яъни уч ўлчовли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги) бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

12- §. Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш

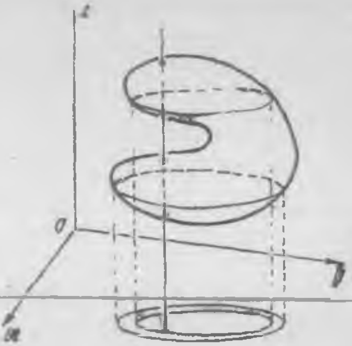
Ёпиқ S сирт билан чегараланган фазовий (уч ўлчовли) V соҳа қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:

1) V соҳанинг ички (яъни S нинг чегарасида ётмаган) нуқтаси орқали Oz ўққа параллел қилиб ўтказилган ҳар қандай тўғри чизиқ S сиртни икки нуқтада кесади;

2) V соҳа бутунича Oxy текисликка D тўғри (икки ўлчовли) соҳа кўринишида проекцияланади;

3) V соҳанинг координата текисликларидан (Oxy, Oxz, Oyz) исталган бирига параллел текислик билан кесилган қисми ҳам 1) ва 2) хоссаларга эга бўлади.

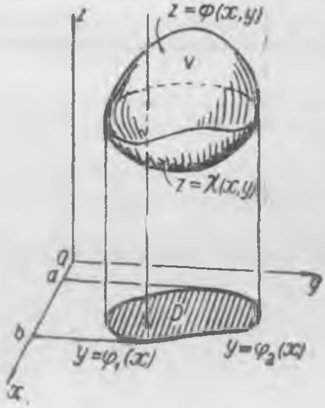
Юқорида кўрсатилган хоссаларга эга бўлган V соҳани биз *тўғри* уч ўлчовли соҳа деб атаймиз.



332- расм.

Тўғри уч ўлчовли соҳаларга эллипсоид, тўғри бурчакли параллелепипед, тетраэдр ва ҳоказолар мисол бўла олади. 332- расмда нотўғри уч ўлчовли соҳага мисол берилган. Бу параграфда биз фақат тўғри соҳалар билан иш кўрамиз.

V соҳани пастдан чегараловчи сиртнинг тенгламаси $z = \chi(x, y)$, бу соҳани юқоридан чегараловчи сиртнинг тенгламаси эса $z = \psi(x, y)$ бўлсин (333- расм).



333- расм.

Энди V соҳада аниқланган уч аргументли $f(x, y, z)$ узлуксиз функциянинг V соҳа бўйича олинган уч каррали I_V интеграли тушунчасини киритамиз. D соҳа V соҳанинг xOy текисликдаги проекцияси бўлиб,

$$y = \varphi_1(x),$$
$$y = \varphi_2(x), \quad x = a, \qquad x = b$$

чизиқлар билан чегараланган деб фараз қиламиз. У вақтда $f(x, y, z)$ функциядан V соҳа бўйича олинган *уч каррали интеграл* қуйидагича аниқланади:

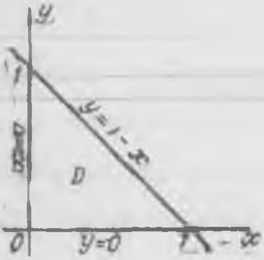
$$I_V=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)\,dz\right]dy\right\}dx. \qquad (1)$$

Z бўйича интеграллаш ва катта қавс ичидаги ифодаларнинг чегараларини қўйиш натижасида x ва y нинг функцияси ҳосил бўлишини кўрамиз. Сўнгра бу функциянинг D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграли юқорида ҳисобланган каби топилади.

Уч каррали интегрални ҳисоблашга доир мисол келтирамиз.

1-мисол. $f(x, y, z) = xyz$ функциядан $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z=1$ текисликлар билан чегараланган V соҳа бўйича олинган уч киррали интеграл ҳисоблансин.

Ечиш. Бу соҳа тўғри бўлиб, устдан ва остдан $z = 0$ ва $z = 1 - x - y$ текисликлар билан чегараланган ҳамда Oxy текисликдаги $x=0$, $y=0$, $y=1-x$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчак шаклидаги ясси D тўғри соҳага проекцияланади (334-расм). Шунинг учун I_V уч каррали интеграл қуйидагича ҳисобланади:



334- расм.

$$I_V=\iint_D\left[\int_0^{1-x-y}xyz\,dz\right]d\sigma.$$

D соҳа бўйича олинган икки каррали интегралга унинг чегараларини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_V=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\left|\int_0^{1-x-y}xyz\,dz\right|dy\right\}dx=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\frac{xyz^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y}dy\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}\frac{1}{2}xy(1-x-y)^2\,dy\right\}dx=\int_0^1\frac{x}{24}(1-x)^4\,dx=\frac{1}{720}.$$

Энди уч каррали интегралнинг баъзи бир хоссаларини кўриб чиқамиз:

1-хосса. *Агар V соҳа координата текисликларидан бирига параллел бўлган текислик билан икки V_1 ва V_2 соҳага бўлинган бўлса, V соҳа бўйича олинган уч каррали интеграл V_1 ва V_2 соҳалар бўйича олинган уч каррали интегралларнинг йиғиндисига тенг.*

Бу хосса ҳам икки каррали интеграллар учун исбот этилган шунга ўхшаш хоссанинг исботи каби исботланади. Шунинг учун уни яна такрорлаб ўтиришнинг ҳожати йўқ.

Натижа. V соҳани координата текисликларига параллел текисликлар билан чекли сондаги $V_1, \ldots, V_n$ соҳаларга бўлинса, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$I_V=I_{V_1}+I_{V_2}+\ldots+I_{V_n}.$$

2-хосса (*Уч каррали интегрални баҳолаш ҳақидаги теорема). Агар* m *ва* M $f(x, y, z)$ *функциянинг* V *соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматлари бўлса, у ҳолда:*

$$mV \leqslant I_V \leqslant MV$$

тенгсизлик ўринлидир, бунда V *берилган соҳанинг ҳажми,* I_V *эса* $f(x, y, z)$ *функциянинг* V *соҳа бўйича олинган уч каррали интегралидир.*

Исбот. Аввал уч каррали $I_V = \iint\limits_D \left| \int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right| d\sigma$ интегралнинг ички интегралини баҳолаймиз:

$$\int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \leqslant \int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} M dz \quad M \int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} dz = Mz \Big|_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} =$$

$$= M[\psi(x, y) - \varkappa(x, y)].$$

Демак, ички интеграл $M[\psi(x, y) - \chi(x, y)]$ ифодадан катта бўла олмайди. Шунинг учун 1-параграфдаги икки ўлчовли интеграллар ҳақидаги теоремага асосан (V соҳанинг Oxy текисликдаги проекциясини D билан белгилаб) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_V = \iint\limits_D \left| \int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right| d\sigma \leqslant \iint\limits_D M[\psi(x, y) - \varkappa(x, y)] d\sigma =$$

$$= M \iint\limits_D [\psi(x, y) - \varkappa(x, y)]\, d\sigma.$$

Бироқ охирги икки каррали интеграл $\psi(x, y) - \varkappa(x, y)$ функция бўйича олинган икки ўлчовли интегралга тенг. Демак, у $z = \varkappa(x, y)$ ва $z = \psi(x, y)$ сиртлар орасидаги соҳанинг ҳажмига, яъни V соҳанинг ҳажмига тенг. Шунинг учун

$$I_V \leqslant MV.$$

$I_V \geqslant mV$ эканлиги ҳам худди юқоридаги каби исбот қилинади. Шундай қилиб, 2-хосса исбот қилинди.

3-хосса (Ўрта қиймат ҳақидаги теорема.) *$f(x, y, z)$ узлуксиз функциянинг V соҳа бўйича олинган I_V уч каррали интеграли, унинг V ҳажмини V соҳанинг бирор P нуқтасидаги қийматига кўпайтирилганига тенг, яъни*

$$I_V = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left| \int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right| dy \right\} dx = f(P)V. \qquad (2)$$

Бу хоссанинг исботи ҳам икки каррали интегралнинг шу хоссага ухшаш хоссасини (2-параграфдаги 3-хоссанинг (4) формуласига қаранг) исбот қилингани каби исботланади. Энди уч ўлчовли интегрални ҳисоблашга доир теоремани исбот қилишимиз мумкин.

Теорема. *$f(x, y, z)$ функциядан тўғри V соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл шу соҳа бўйича олинган уч каррали интегралга тенг, яъни:*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy. \right\} dx.$$

Исбот. V соҳани координат текисликларига параллел текисликлар билан n та тўғри соҳага бўламиз:

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \ldots,\ \Delta v_n.$$

$f(x, y, z)$ функциядан V соҳа бўйича олинган уч каррали интегрални, юқоридаги сингари I_V билан, шу функциядан Δv_i соҳа бўйича олинган уч каррали интегрални $I_{\Delta v_i}$ билан белгилаймиз. У ҳолда 1-хоссадан чиқарилган натижага асосан

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + \ldots + I_{\Delta v_n} \tag{3}$$

тенгликни ёза оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчини (2) формулага асосан алмаштирамиз:

$$I_V = f(P_1)\, \Delta v_1 + f(P_2)\, \Delta v_2 + \ldots + f(P_n)\, \Delta v_n, \tag{4}$$

бунда P_i нуқта Δv_i соҳанинг бирор нуқтаси.

Бу тенгликнинг ўнг томони интеграл йиғиндидан иборат. Фаразимизга асосан $f(x, y, z)$ функция V соҳада узлуксиз, шунга кўра Δv_i нинг энг катта диаметри нолга интилганда бу йиғиндининг лимити мавжуд ва у $f(x, y, z)$ функциянинг V соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интегралига тенг. Шундай қилиб, (4) тенгликда $\operatorname{diam} \Delta v_i \to 0$ да лимитга ўтсак:

$$I_V = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv$$

ёки ўнг ва чапда турган ифодаларнинг ўринларини алмаштириб,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dv = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\varkappa(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Бу ерда $z = \varkappa(x, y)$ ва $z = \psi(x, y)$ — тўғри V соҳани остдан ва устдан чегараловчи сиртларнинг тенгламаларидир. $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиқлар V соҳанинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлган D соҳани чегараловчи чизиқлардир.

Изоҳ. Икки каррали интегралдаги сингари, уч каррали интегрални ҳам, албатта V соҳанинг шакли имкон берса, ўзгарувчилари ва чегаралари бўйича бошқача тартибда интегралланадиган қилиб тузиш мумкин.

Жисмнинг ҳажмини уч каррали интеграл ёрдами билан ҳисоблаш. Агар интеграл остидаги функция $f(x, y, z) = 1$ бўлса, V соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл V соҳанинг ҳажмини ифодалайди:

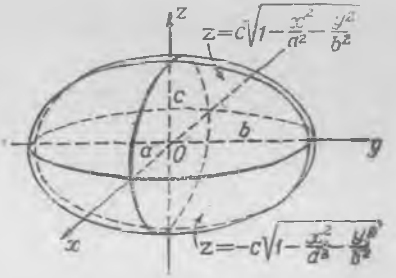
$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz. \qquad (5)$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоиднинг ҳажми ҳисоблансин.

Ечиш. Эллипсоид (335-расм) остдан $z = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ сирт билан, устдан эса $z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ сирт билан чегараланган. Бу эллипсоиднинг Oxy текисликдаги (соҳадаги) проекцияси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдир. Демак, ҳажмни ҳисоблашни уч каррали интегрални ҳисоблашга келтирсак:



335- расм.

$$V=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dy\right]dx =$$

$$=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx.$$

Ички интегрални ҳисоблаш пайтида x ўзгармас деб қаралади. Қуйидаги алмаштиришни қиламиз:

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t, \qquad dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt.$$

y ўзгарувчи $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ дан $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ гача ўзгаради. Шунинг учун t ўзгарувчи $-\frac{\pi}{2}$ дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради. Янги чегараларни интегралга қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз.

$$V = 2c\int\limits_{-a}^{a}\left[\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\; b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt\right]dx =$$

$$= 2cb\int\limits_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt\right]dx = \frac{cb\pi}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{4\pi a\,bc}{3}$$

Демак,

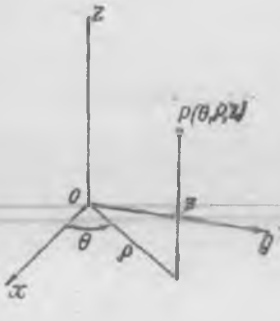
$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Агар $a = b = c$ бўлса, у ҳолда шар ҳажмининг формуласини ҳосил қиламиз:

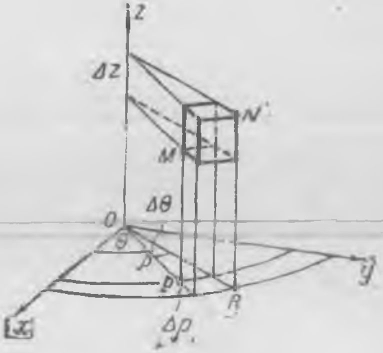
$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

13- §. Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш

1. **Уч ўлчовли интегралнинг цилиндрик координаталарда тасвирланиши.** Цилиндрик координаталар системасида P нуқтанинг фазодаги вазияти учта θ, ρ, z сон



336- расм.



337-расм.

билан аниқланади, бунда θ ва ρ лар P нуқтанинг Oxy текисликдаги проекциясининг қутб координаталаридир, z эса P нуқтанинг аппликатаси, яъни нуқтадан Oxy текисликкача бўлган масофа, агар нуқта Oxy текисликдан юқорида жойлашган бўлса, мусбат ишора билан ва пастда жойлашган бўлса, манфий ишора билан олинади (336- расм).

Бу ҳолда берилган фазовий V соҳани $\theta = \theta_i$, $\rho = \rho_l$, $z = z_k$ координата сиртлари билан элементар ҳажмларга бўламиз (Oz

ўққа ёпишган ярим текисликлар, текислиги Oz ўққа перпендикуляр, ўқи Oz ўқ билан устма-уст тушадиган доиравий цилиндрлардир). Элементар ҳажм эса 337-расмда тасвирланган эгри чизиқли „призма“ дан иборатдир. Бу призма асосининг юзи юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан $\rho\Delta\theta\Delta\rho$ га, баландлиги Δz га тенг. Ёзишни осонлаштириш мақсадида i, j, k индексларни тушириб қолдирдик. Демак, $\Delta v=\rho\Delta\theta\Delta\rho\Delta z$. Шунинг учун $F(\theta,\ \rho,\ z)$ функциядан V соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл қуйидаги шаклда бўлади:

$$I=\iiint\limits_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\, d\theta\, d\rho\, dz. \qquad (1)$$

Интеграллаш чегаралари V соҳанинг шакли билан аниқланади.

Агар тўғри бурчакли координаталар системасида $f(x,\ y,\ z)$ функциянинг уч ўлчовли интеграли берилган бўлса, бу интегрални цилиндрик координаталардаги уч ўлчовли интеграл билан алмаштириш осон. Ҳақиқатан, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$ эканлигини назарда тутсак:

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_V F(\theta,\ \rho,\ z)\,\rho\,d\theta\,d\rho\,dz,$$

бунда

$$f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)=F(\theta,\ \rho,\ z).$$

Мисол. Агар маркази координаталар бошида бўлган R радиусли ярим шарнинг ҳар бир $(x,\ y,\ z)$ нуқтасидаги модда зичлиги F шу нуқтадан асосгача бўлган масофага пропорционал, яъни $F=kz$ бўлса, бу ярим шарнинг M массаси топилсин.

Ечиш. Ярим сфера юқори қисмининг тенгламаси:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

цилиндрик координаталарда:

$$z=\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

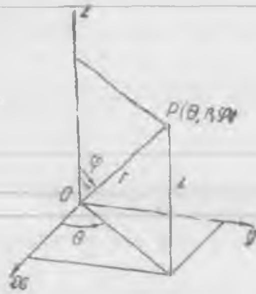
Демак,

$$M=\iiint\limits_V kz\rho\,d\theta\,d\rho\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}kz\,dz\right)\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

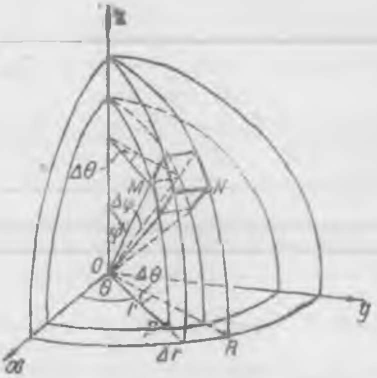
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\frac{kz^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\right]d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\frac{k}{2}(R^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\right]d\theta=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]d\theta=\frac{k}{2}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi=\frac{k\pi R^4}{4}.$$

2. Уч ўлчовли интегралнинг сферик координаталарда тасвирланиши. Сферик координаталарда фазодаги P нуқтанинг вазияти учта θ, r, φ сон билан аниқланади, бунда r — координаталар бошидан нуқтагача бўлган масофа бўлиб, нуқтанинг радиус-вектори деб аталади, φ — радиус-вектор билан Oz ўқ орасидаги бурчак, θ — Ox ўқ билан радиус-векторнинг Oxy текисликдаги проекцияси орасидаги бурчак бўлиб, Ox дан бошлаб мусбат йўналишда, яъни соат



338- расм.



339- расм.

стрелкасига тескари йўналишда ҳисобланади (338- расм). Фазонинг исталган нуқтаси учун:

$$0 \leqslant r < \infty, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

Берилган V соҳани $r=\mathrm{const}$ (сфера), $\varphi=\mathrm{const}$ (учлари координаталар бошида бўлган конус сиртлар), $\theta=\mathrm{const}$ (Oz ўқ орқали ўтувчи ярим текисликлар) координата сиртлари ёрдами билан Δv элементар бўлакларга бўламиз. Юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан олинган Δv элементар ҳажмни, қирраларининг узунликлари Δr, $r\Delta\varphi$, $r\sin\varphi\Delta\theta$ бўлган параллелепипед деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда элементар ҳажм (339- расмга қаранг):

$$\Delta v = r^2 \sin\varphi \, \Delta r \, \Delta\theta \, \theta\varphi.$$

$F(\theta, r, \varphi)$ функциянинг V соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграли қуйидаги кўринишда бўлади:

$$I = \iiint\limits_V F(\theta, r, \varphi) \, r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi. \qquad (1)$$

Интеграллаш чегаралари V соҳанинг шакли билан аниқланади. 338- расмдан Декарт координаталарини сферик координаталар билан осонгина ифодалашни аниқлаш мумкин:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\varphi.$$

Шунинг учун Декарт координаталарида берилган уч ўлчовли интегрални сферик координаталардаги уч ўлчовли интегралга алмаштириш формуласи

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\ dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f\ (r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

кўринишда бўлади.

3. **Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни умумий алмаштириш.** Уч ўлчовли интегралда Декарт координаталаридан цилиндрик ва сферик координаталарга ўтиш фазода умумий координаталар алмаштиришнинг хусусий ҳолидир.

Ушбу

$$x = \varphi(u,\ t,\ w),$$
$$y = \psi(u,\ t,\ w),$$
$$z = \varkappa(u,\ t,\ w)$$

функциялар x, y, z Декарт координаталарида берилган V соҳани u, t, w эгри чизиқли координаталардаги V' соҳага ўзаро бир қийматли акслантиради деб фараз этайлик. V соҳанинг Δv ҳажм элементи V' соҳанинг $\Delta v'$ элементига ўтган бўлсин ва

$$\lim_{\Delta v' \to 0} = \frac{\Delta v}{\Delta v'} = |I|$$

деб олайлик. У ҳолда

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f\,[\varphi(u,\ t,\ w),\ \psi(u,\ t,\ w),\ \varkappa(u,\ t,\ w)]\ |I|\, du\,dt\,dw.$$

Икки ўлчовли интегралдагидек, бу ерда ҳам I *якобиан* деб аталади; икки ўлчовли интеграллардаги сингари бу якобиан сон жиҳатдан қуйидаги учинчи тартибли детерминантга тенг эканлигини исбот қилиш мумкин:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Масалан, цилиндрик координаталар бўлган ҳолда:

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\quad z = z,\quad (\rho = u,\quad \theta = t,\quad z = w);$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Сферик координаталар бўлган ҳолда:

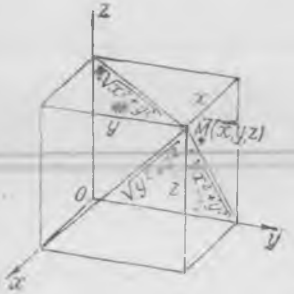
$$x = r\sin\varphi\cos\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\varphi (r = u,\ \varphi = t,\ \theta = w),$$

$$I = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

14-§. Жисмнинг инерция моменти ва оғирлик марказининг координаталари

1. Жисмнинг инерция моменти. Массаси m бўлган $M(x, y, z)$ нуқтанинг Ox, Oy, Oz координата ўқларига (340-расм) нисбатан инерция моменти мос равишда қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)\,m,$$
$$I_{yy} = (x^2 + z^2)\,m,$$
$$I_{zz} = (x^2 + y^2)\,m.$$



340- расм.

341- расм.

Жисмнинг инерция моменти мос интеграллар билан ифодаланади. Масалан, Oz ўққа нисбатан жисмнинг инерция моменти:

$$I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

бунда $\gamma(x, y, z)$ модданинг зичлиги.

1-мисол. Тўғри доиравий цилиндрнинг баландлиги $2h$ ва радиуси R, зичлиги эса ўзгармас ва γ_0 га тенг. Ўрта кесимининг диаметрига нисбатан цилиндрнинг инерция моменти топилсин.

Ечиш. Координаталар системасини қуйидагича танлаб оламиз. Oz ўқни цилиндрнинг ўқи бўйича йўналтирамиз, координаталар бошини унинг симметрия марказига жойлаштирамиз (341-расм).

Бу ҳолда, масала цилиндрнинг инерция моментини Ox ўққа нисбатан ҳисоблашга келтирилади:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\gamma_0\, dx\, dy\, dz.$$

Цилиндрик координаталарга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$I_{xx} = \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^R \left[\int\limits_{-h}^{h} (z^2 + \rho^2 \sin^2\theta)dz \right| \rho\, d\rho \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^R \left| \frac{2h^3}{3} + 2h\rho^2 \sin^2\theta \right| \rho d\rho \right\} d\theta = \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{2h^3}{3} \cdot \frac{R^2}{2} + \frac{2hR^4}{4} \sin^2\theta \right\} d\theta =$$

$$= \gamma_0 \left| \frac{2h^3R^2}{6}\, 2\pi + \frac{2hR^4}{4}\, \pi \right| = \gamma_0\, \pi h\, R^2 \left| \frac{2}{3} h^2 + \frac{R^2}{2} \right|.$$

2. **Жисм оғирлик марказининг координаталари.** I т. XII бобининг 8- параграфида ясси (текис) шакллар учун чиқарилган формулаларга ўхшаш жисм оғирлик марказининг координаталари ушбу формулалар билан ифодаланади:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}; \qquad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz},$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\,\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}$$

бунда $\gamma(x, y, z)$ — зичлик.

2-мисол. Маркази координаталар бошида бўлган R радиусли шарнинг γ зичлигини ўзгармас деб олиб, юқори ярим шар оғирлик марказининг координаталари аниқлансин

Ечиш. Ярим шар $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган. Унинг оғирлик марказининг аппликатаси

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\gamma_0\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_V \gamma_0\, dx\, dy\, dz}$$

формула билан аниқланади. Сферик координаталарга ўтсак:

$$z_c = \frac{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} \left[\int\limits_0^{R} r \cos\varphi r^2 \sin\varphi \, dr \right] d\varphi \right\} d\theta}{\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} \left[\int\limits_0^{R} r^2 \sin\varphi \, dr \right| d\varphi \right\} d\theta} = \frac{2\pi \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Ярим шарлар симметрик бўлганлигидан $x_c = y_c = 0$ бўлиши равшан.

15- §. Параметрга боғлиқ бўлган интегралларни ҳисоблаш

α параметрга боғлиқ бўлган интегрални қараймиз:

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx.$$

(Бундай интегралларни биз I том XI бобининг 10-параграфида курган эдик.) Агар $f(x, \alpha)$ функция $[a, b[$ кесмада x га нисбатан ва $[\alpha_1, \alpha_2]$ кесмада α га нисбатан узлуксиз бўлса,

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

функциянинг (α_1, α_2) кесмада узлуксиз бўлишини исботсиз келтирамиз. Демак, $I(\alpha)$ функцияни (α_1, α_2) кесмада α бўйича интеграллаш мумкин:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} I(\alpha) \, d\alpha = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big(\int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \Big) d\alpha.$$

Ўнг томондаги ифода $f(x, \alpha)$ функциянинг $Ox\alpha$ текисликдаги тўғри тўртбурчак бўйича олинган икки каррали интегралидир. Бу интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкин:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big(\int\limits_a^b f(x, \alpha) \, dx \Big) d\alpha = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) \, d\alpha \Big) dx.$$

Бу формула α параметрга боғлиқ бўлган интегрални ҳисоблаш учун интеграл остидаги ифодани α параметр бўйича интеграллаш етарли эканлигини кўрсатади. Бу формула шунингдек, аниқ интегралларни ҳисоблашда ҳам фойдалидир.

Мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \qquad (a > 0, \ b > 0)$$

интеграл ҳисоблансин.

Интеграл остидаги функциянинг аниқмас интеграли элементар функция бўлмайди. Уни ҳисоблаш учун осонгина ҳисоблаш мумкин бўлган бошқа бир интегрални қараймиз:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} \qquad (\alpha > 0).$$

Бу тенгликни $\alpha = a$ дан $\alpha = b$ гача чегараларда интеграллассак:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx\right) d\alpha = \int\limits_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln\frac{b}{a}.$$

Биринчи интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_a^b e^{-\alpha x}\,d\alpha\right] dx = \ln\frac{b}{a},$$

бу тенгликнинг ички интегралини ҳисоблаймиз·

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}.$$

XIV БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин*): **1.** $\int\limits_0^1\int\limits_1^2 (x^2 + y^2)\;dx\,dy$. *Жав.* $\frac{8}{3}$.

2. $\int\limits_3^4\int\limits_y^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$. *Жав.* $\ln\frac{25}{24}$. **3.** $\int\limits_1^2\int\limits_x^{x\sqrt{3}} xy\,dx\,dy$. *Жав.* $\frac{15}{4}$. **4.** $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{a\sin\theta}^{a} r\,dr\,d\theta$.

Жав. $\frac{1}{2}\pi a^2$. **5.** $\int\limits_0^a\int\limits_{x/a}^{x} \frac{x\,dy\,dx}{x^2+y^2}$. *Жав.* $\frac{\pi a}{4} - a\,\mathrm{arctg}\frac{1}{a}$. **6.** $\int\limits_0^{a^2}\int\limits_{y-a}^{y} xy\,dx\,dy$.

Жав. $\frac{11a^4}{24}$. **7.** $\int\limits_{b/2}^{b}\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \rho\,d\theta\,d\rho$. *Жав.* $\frac{3}{16}\pi b^2$.

---

*) Агар интеграл $\int\limits_M^N\int\limits_K^L f(x, y)\,dx\,dy$ кўринишда ёзилган бўлса, у ҳолда биз юқорида кўрсатилганидек, интеграллаш дифференциали биринчи ўринда ёзилган ўзгарувчи бўйича бажарилади деб ҳисоблаймиз, яъни:

$$\int\limits_M^N\int\limits_K^L f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_M^N \left(\int\limits_K^L f(x, y)\,dx\right) dy.$$

Интеграллаш соҳаси қуйидаги чазиқлар билан чегараланган $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ интегралнинг интеграллаш чегаралари топилсин. 8. $x=2$, $x=3$, $y=-1$, $y=5$. *Жав.* $\int\limits_2^3 \int\limits_{-1}^5 f(x, y)\,dy\,dx$. 9. $y=0$ $y=1-x^2$. *Жав.* $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^{1-x^2} f(x, y)\,dx\,dy$.

10. $x^2+y^2=a^2$. *Жав.* $\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$. 11. $y=\frac{2}{1+x^2}$ $y=x^2$.

Жав. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$. 12. $y=0$, $y=a$, $y=x$, $y=x-2a$.

Жав. $\int\limits_0^a \int\limits_y^{y+2a} f(x, y)\,dx\,dy$.

Қуйидаги интегралларнинг интеграллаш тартиби ўзгартирилсин

13. $\int\limits_1^2 \int\limits_3^4 f(x, y)\,dy\,dx$. *Жав.* $\int\limits_3^4 \int\limits_1^2 f(x, y)\,dx\,dy$.

14. $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$. *Жав.* $\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$.

15. $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$. *Жав.* $\int\limits_0^a \int\limits_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x, y)dy\,dx$.

16. $\int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$. *Жав.* $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$.

17. $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy$. *Жав.* $\int\limits_{-1}^0 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx +$ $+\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} f(x, y)\,dy\,dx$.

Қуйидаги интеграллар қутб координаталарига ўтиш йўли билан ҳисоблансин:

18. $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$. *Жав.* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^a \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{6}\,a^3$.

19. $\int\limits_0^a \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$. *Жав.* $\int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^a \rho^3\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$.

20 $\int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$. *Жав.* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}$.

21. $\int\limits_{0}^{2a}\int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\, dx.$ *Жав.* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{2a\cos\theta} \rho d\rho\, d\theta = \frac{\pi a^2}{2}.$

x ва y билан $x = u - uv$, $y = uv$ формулалар бўйича боғланувчи u ва v ўзгарувчиларни киритиб, қуйидаги икки ўлчовли интегралларнинг шакли алмаштирилсин:

22. $\int\limits_{0}^{e}\int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy\, dx.$ *Жав.* $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}}\int\limits_{0}^{\frac{e}{1-v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv.$

23. $\int\limits_{0}^{c}\int\limits_{0}^{b} f(x, y)\, dy\, dx.$ *Жав.* $\int\limits_{0}^{\frac{b}{b+c}}\int\limits_{0}^{\frac{c}{1-v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv +$

$$+ \int\limits_{\frac{b}{b+c}}^{b}\int\limits_{0}^{\frac{b}{v}} f(u - uv, uv)\, u\, du\, dv.$$

Икки ўлчовли интеграл ёрдами билан юзларни ҳисоблаш

24. $y^2 = 2x$ парабола ва $y = x$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{2}{3}$.

25. $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a$, $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{10a^2}{3}$.

26. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x + y = a$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{a^2}{3}$.

27. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\sqrt{2} - 1$.

28. $\rho = a\sin 2\theta$ эгри чизиқ сиртмоғи билан чегараланган юз ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{\pi a^2}{8}$.

29. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ лемниската билан чегараланган бутун юз ҳисоблансин. *Жав.* a^2.

30. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$ эгри чизиқ сиртмоғи билан чегараланган юз ҳисоблансин.

Кўрсатма. $x = \rho a\cos\theta$ ва $y = \rho b\sin\theta$ янги ўзгарувчиларга ўтилсин. *Жав* $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

Ҳажмларни ҳисоблаш

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг ҳажмлари ҳисоблансин:

31. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$ *Жав.* $\frac{abc}{6}$. **32.** $z=0,\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=3.$ *Жав.* 3π. 33. $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ xy=z,\ z=0,$ *Жав.* π. **34.** $x^2+y^2-2ax=0,\ z=0,\ x^2+y^2=z^2.$ *Жав.* $\frac{32}{9}a^3$. **35.** $y=x^2,\ x=y^2,\ z=0,\ z=12+y-x^2.$ *Жав.* $\frac{569}{140}$.

36. Координата текисликлари, $2x+3y-12=0$ текислик ва $z=\frac{1}{2}y^2$ цилиндр билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин. *Жав.* 16.

37. Ўқи Oz ўқ билан устма-уст тушган a радиусли доиравий цилиндр, координата текисликлари ва $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$ текислик билан чегараланган. *Жав.* $a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$.

38. $x^2+y^2=a^2,\ x^2+z^2=a^2$ цилиндрлар билан чегараланган. *Жав.* $\frac{16}{3}a^3$.

39. $y^2+z^2=x,\ x=y,\ z=0.$ *Жав.* $\frac{\pi}{64}$. **40.** $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=R^2,\ a>R.$ *Жав.* $\frac{4}{3}\pi\left[a^3-(\sqrt{a^2-R^2})^3\right]$. **41.** $az=x^2+y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=2ax.$ *Жав.* $\frac{3}{2}\pi a^3$. 42. $\rho^2=a^2\cos 2\theta,\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=0$ (Цилиндрга нисбатан ички ҳажм ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{1}{9}a^3\,(3\pi+20-16\sqrt{2})$.

Сиртларнинг юзларини ҳисоблаш

43. $x^2+y^2=z^2$ конусни $x^2+y^2=2ax$ цилиндр билан кесишдан ҳосил бўлган қисим сиртнинг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $2\pi a^2\sqrt{2}$.

44. $x+y+z=2a$ текисликнинг биринчи октантда ётган ва $x^2+y^2=a^2$ цилиндр билан чегараланган қисмининг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{\pi a^2}{4}\sqrt{3}$.

45. Сферик сегмент (кичиги) нинг сирти ҳисоблансин. Сферанинг радиуси a, сегмент асосининг радиуси b. *Жав.* $2\pi\,(a^2-a\sqrt{a^2-b^2})$.

46. $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферани $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b)$ цилиндрнинг сирти билан кесишдан ҳосил бўлган бўлакнинг юзи топилсин *Жав.* $4\pi a^2-8a^2\times$ $\times\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

47. Жисмнинг иккита $x^2+y^2=a^2,\ y^2+z^2=a^2$ цилиндрнинг умумий қисми бўладиган сиртининг юзи топилсин. *Жав.* $16a^2$.

48. $x^2+y^2=2ax$ цилиндрнинг $z=0$ текислик ва $x^2+y^2=z^2$ конус орасидаги қисми сиртининг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $8a^2$.

49. $x^2+y^2=a^2$ цилиндрнинг, $z=mx$ ва $z=0$ текисликлар орасидаги қисми сиртини юзи топилсин. *Жав.* $2ma^2$.

50. $y^2+z^2=2ax$ параболанинг $y^2=ax$ параболик цилиндр билан $x=a$ текислик орасида қолган бўлагининг юзи ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$.

Текис шакллар юзларининг массаларини, оғирлик марказларининг координаталарини ва инерция моментларини ҳособлаш.

(51—62 ва 64- масалаларнинг ҳаммасида сирт зичлиги ўзгармас ва бирга тенг деб ҳисоблаймиз.)

51. Радиуси a бўлган доира шаклидаги пластинканинг исталган P нуқтасидаги зичлик, шу P нуқтадан цилиндр ўқигача бўлган масофага тескари пропорционал (k пропорционаллик коэффициенти) бўлса, шу пластинканинг массаси аниқлансин. *Жав.* πak.

52. Тенг томонли учбурчакнинг баландлигини Ox ўқи ва учларидан бирини координаталар боши деб олиб, унинг оғирлик марказанинг координаталари ҳисоблансин. *Жав.* $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $y=0$.

53. Радиуси a бўлган доиравий сектор бурчагининг биссектрисасини Ox ўқи деб олиб, унинг оғирлик марказининг координаталари топилсин Секторни чегараловчи томонлар орасидаги бурчак 2α. *Жав.* $x_c=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$, $y_c=0$.

54. $x^2+y^2=a^2$ доира устки ярми оғирлик марказининг координаталари топилсин. *Жав.* $x_c=0$; $y_c=\frac{4a}{3\pi}$.

55. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоида битта арки юзи оғирлик марказининг координаталари топилсин *Жав.* $x_c=a\pi$, $y_c=\frac{5a}{6}$.

56. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ эгри чизиқ сиртмоғи билан чегараланган юзнинг оғирлик марказининг координаталари топилсин. *Жав.* $x_c=\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c=0$.

57. $\rho=a(1+\cos\theta)$ кардиоида юзи оғирлик марказининг координаталари топилсин. *Жав.* $x_c=\frac{5a}{6}$, $y_c=0$.

58. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак юзининг координаталар бошига нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{ab(a^2+b^2)}{3}$.

59. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг: а) Oy ўққа нисбатан, б) координаталар бошига нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* а) $\frac{\pi a^3 b}{4}$; б) $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.

60. $\rho=2a\cos\theta$ доира юзининг қутбга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{3}{2}\pi a^4$.

61. $\rho=a(1-\cos\theta)$ кардиоида юзининг қутбга нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{35\pi a^4}{16}$.

62. $(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$ доира юзининг Oy ўққа нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $3\pi a^4$.

63. Томони a га тенг бўлган квадрат пластинканинг исталган нуқтасидаги зичлик шу нуқтадан квадратнинг учларидан биригача бўлган масофага пропорционалдир. Пластинканинг бу учидан ўтувчи томонига нисбатан инерция моменти ҳособлансин. *Жав.* $\frac{1}{40}ka^5\left[7\sqrt{2}+3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$, бунда k пропорционаллик кўпайтувчиси.

64. $y^2=ax$ парабола ва $x=a$ тўғри чизиқ билан чегараланган шакл юзининг $y=-a$ тўғри чизиққа нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{8}{5}a^4$.

Уч ўлчовли интеграллар

65. Интеграллаш соҳаси координата текисликлари ва $x+y+z=1$ текислик билан чегараланган ушбу: $\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ интеграл ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{\ln 2}{2}-\frac{5}{16}$.

66. $\int\limits_0^a\left\{\int\limits_0^x\left[\int\limits_0^y xyz\,dz\right]dy\right\}dx$ ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{a^6}{48}$.

67. $x^2+y^2+z^2=4$ сфера билан ва $x^2+y^2=3z$ параболоид сирти билан чегараланган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин *Жав.* $\frac{19}{6}\pi$.

68[*]) . $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ текисликлар билан чегараланган пирамида оғирлик марказининг координаталари ва инерция моментлари ҳисоблансин. *Жав.* $x_c=\frac{a}{4}$, $y_c=\frac{b}{4}$, $z_c=\frac{c}{4}$, $I_x=\frac{a^3bc}{60}$, $I_y=\frac{b^3ac}{60}$, $I_z=\frac{c^3ab}{60}$; $I_0=\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$.

69. Тўғри доиравий конуснинг ўз ўқига нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{1}{10}\pi hr^4$, бунда h баландлик, r конус асосининг радиуси.

70. Тенгламаси $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$ кўринишда бўлган сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{1}{3}\pi a^3$.

71. Доиравий конуснинг ўз асосининг диаметрига нисбатан инерция моменти ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{\pi hr^2}{60}(2h^2+3r^2)$.

72. Учидаги бурчаги 2α бўлган конуснинг учи радиуси a га тенг бўлган сферанинг марказига жойлашган. Сферик ва конус сиртлар орасида жойлашган жисм оғирлик марказининг координаталари топилсин. *Жав.* $x_c=0$, $y_c=0$, $z_c=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha)$ (конус ўқини Oz ўқ деб, учинчи эса координаталар бошида жойлашган деб олинади).

---

[*]) 68—69, 71—73-масалаларда зичлик ўзгармас ва бирга тенг деб ҳисоблаймиз.

73. Радиуси a га тенг бўлган сфера ва сфера марказидан ўтувчи ҳамда ўзаро 60° бурчак ҳосил қилувчи икки текислик билан чегараланган жисм оғирлик марказининг координаталари ҳисоблансин. *Жав.* $\rho = \frac{9}{16}a$, $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (текисликларнинг кесишиш чизиғини Oz ўқ деб, сфера марказини эса координаталар боши, ρ, θ, φ лар сферик координаталар деб олинсин).

74. $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\,d\alpha\,(\alpha > 0)$ тенгликдан фойдаланиб, $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ ва $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}}$ интеграллар ҳисоблансин. *Жав.* $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

XV БОБ

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА СИРТЛАР ВЎЙИЧА ОЛИНГАН ИНТЕГРАЛЛАР

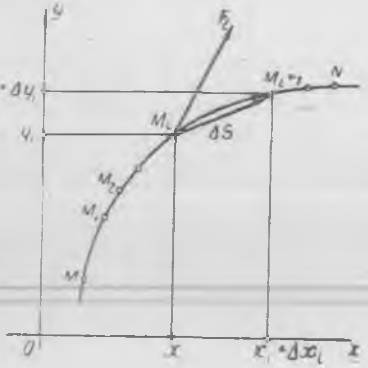
1-§. Эгри чизиқли интеграл

$P\ (x,\ y)$ нуқта бирор L текис чизиқ бўйлаб M нуқтадан N нуқтага ҳаракатланаётган бўлсин. P нуқтага миқдори ва йўналиши ўзгарадиган, яъни P нуқта координаталарининг бирор функцияси бўлган

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P)$$

куч қўйилган бўлсин.

F кучнинг P нуқтани M вазиятдан N вазиятга силжитишда бажарган A ишини ҳисоблаймиз (342- расм). Бунинг учун MN эгри чизиқни $M_0=M,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n=N$ нуқталар ёрдамида M дан N га қараб ихтиёрий n бўлакка бўлиб чиқамиз ва $\overline{M_i M_{i+1}}$ векторни Δs_i билан белгилаймиз. F кучнинг M_i нуқтадаги миқдорини F_i билан белгилаймиз. У вақтда $F_i \Delta s_i$ скаляр кўпайтмани F кучнинг $\overset{\frown}{M_i M_{i+1}}$ ёй бўйича бажарган ишининг тақрибий ифодаси деб қараш мумкин:



342- расм.

$$A_i \approx \boldsymbol{F}_i \Delta \boldsymbol{s}_i.$$

Энди

$$\boldsymbol{F} = X(x,\ y)\,\boldsymbol{i} + Y(x,\ y)\,\boldsymbol{j}$$

бўлсин, бундаги $X(x,\ y)$ ва $Y(x,\ y)$ лар F векторнинг Ox ва Oy ўқлардаги проекциялари, x_i ва y_i координаталарнинг M_i нуқтадан M_{i+1} нуқтага ўтишдаги орттирмаларини Δx_i ва Δy_i билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta \boldsymbol{s}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j}.$$

Демак,

$$\boldsymbol{F}_i\,\Delta \boldsymbol{s}_i = X(x_i,\ y_i)\,\Delta x_i + Y(x_i,\ y_i)\,\Delta y_i.$$

F кучнинг бутун MN эгри чизиқ бўйича бажарган A ишининг тақрибий қиймати қуйидагича бўлади:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i]. \qquad (1)$$

Ҳозирча аниқ таърифни бермасдан агар $\Delta s_i \to 0$ да тенгликнинг ўнг томонидаги ифоданинг лимити мавжуд бўлса (бунда $\Delta x_i \to 0$ ва $\Delta y_i \to 0$ эканлиги равшан), бу лимит F кучнинг L эгри чизиқ бўйича M нуқтадан N нуқтагача бажарган ишини ифодалайди:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [X(x_i, y_i)\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\Delta y_i], \qquad (2)$$

Ўнг томондаги лимит*) $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ функцияларнинг L эгри чизиқ бўйича олинган **эгри чизиқли интеграли** деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$A = \int_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy \qquad (3.$$

ёки

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy. \qquad (3')$$

(2) кўринишдаги йиғиндининг лимитлари кўпинча математика ва механикада учраб туради, бунда $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ иккита ўзгарувчининг бирор D соҳадаги функциялари деб қаралади.

Интеграллаш чегаралари ўрнига қўйилган M ва N ҳарфлари сонни эмас, балки эгри чизиқли интеграл олиниши керак бўлган чизиқнинг бошланғич ва охирги нуқталарини билдирганлиги учун улар қавс ичига олиб ёзилган. L эгри чизиқ бўйича M нуқтадан N нуқтага қараб олинган йўналиш интеграллаш йўналиши деб аталади.

Агар L фазовий эгри чизиқ бўлса, у ҳолда учта $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ функциянинг эгри чизиқли интеграли юқоридаги сингари аниқланади.

$$\int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} X(x_k, y_k, z_k)\Delta x_k + Y(x_k, y_k, z_k)\Delta y_k + Z(x_k, y_k, z_k)\Delta z_k$$

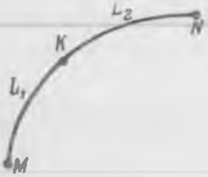
---

*) Бу ерда ҳам интеграл йиғиндининг лимитини I том XI бобининг 2-параграфида аниқ интеграл учун қаралган маънода тушунилади.

Интеграл белгиси остида турган L ҳарфи интеграллашни L эгри чизиқ бўйича бажариш кераклигини кўрсатади.

Эгри чизиқли интегралнинг иккита хоссасини кўриб чиқамиз.

1-хосса. *Эгри чизиқли интеграл остидаги ифода интеграллаш эгри чизиғининг шакли ва кўрсатилган интеграллаш йўналиши билан аниқланади.*



343- расм.

Интеграллашнинг йўналиши ўзгариши билан эгри чизиқли интегралнинг ишораси ҳам ўзгаради, чунки бунда Δs векторнинг ишораси демак, унинг Δx ва Δy проекцияларининг ишоралари ҳам ўзгаради.

2-хосса. *L эгри чизиқни K нуқта билан $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KN}$ бўладиган қилиб, L_1 ва L_2 бўлакларга бўламиз* (343- расм). *Бу ҳолда* (1) *формуладан бевосита*

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int_{(M)}^{(K)} X\,dx + Y\,dy + \int_{(K)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$$

тенглик келиб чиқади.

Бу муносабат қўшилувчилар сони ҳар қанча бўлганда ҳам ўринлидир.

L эгри чизиқ ёпиқ бўлганда ҳам эгри чизиқли интегралнинг таърифи ўз кучини сақлашини кўрамиз.

Бу ҳолда эгри чизиқнинг бошланғич ва охирги нуқталари устма-уст тушади. Шунинг учун биз эгри чизиқ ёпиқ бўлганда $\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ кўринишда ёза олмаймиз, бунда L ёпиқ эгри чизиқ бўйича юриш йўналишини кўрсатиш билан $\int_{L} X\,dx + Y\,dy$ кўринишда ёзишимиз мумкин. L ёпиқ контур бўйича олинган эгри чизиқли интегрални белгилаш учун кўпинча $\oint_{L} X\,dx + Y\,dy$ символи ҳам ишлатилади.

Изоҳ. Биз эгри чизиқли L йўл бўйича F кучнинг бажарадиган иши ҳақидаги масалани қараш билан эгри чизиқли интеграл тушунчасини ҳосил қилдик.

Бу ҳолда F куч L эгри чизиқнинг ҳамма нуқталарида бу куч қўйилган (x, y) нуқта координаталарининг F вектор функцияси сифатида берилган; F ўзгарувчи векторнинг координата ўқларидаги проекциялари $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ скаляр (яъни сонли) функцияларга тенг. Шунинг учун $\int_{L} Xdx + Y\,dy$ кўринишдаги эгри чизиқли интегрални X ва Y проекциялари билан берилган F **вектор** функциянинг интеграли деб қараш мумкин.

L эгри чизиқ бўйича олинган F вектор функциянинг интеграли

$$\int_L F ds$$

символ билан белгиланади. Агар F вектор ўзининг X, Y, Z проекциялари билан аниқланса, у вақтда бу интеграл қуйидаги эгри чизиқли интегралга тенг бўлади:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

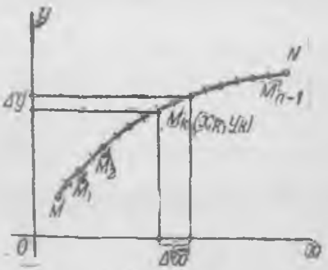
Жумладан, F вектор Oxy текислигида ётган бўлса, бу векторнинг интеграли:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy.$$

F вектор функциянинг эгри чизиқли интеграли L ёпиқ эгри чизиқ бўйича олинган ҳолларда, бу эгри чизиқли интеграл, F векторнинг L ёпиқ контур бўйича олинган ***циркуляцияси*** деб аталади.

2-§. Эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш

Биз бу параграфда 1-параграфдаги (1) йиғиндининг лимити ҳақидаги тушунчани аниқлаймиз, шу муносабат билан эгри чизиқли интеграл ҳақидаги тушунчани ҳам аниқлаймиз ва уни ҳисоблаш усулини кўрсатамиз.



344- расм.

L эгри чизиқ ўзининг параметрик шаклдаги тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Бу эгри чизиқнинг $\overset{\frown}{MN}$ ёйини қараб чиқамиз (344). M ва N нуқталарга параметрларнинг α ва β қийматлари мос келсин. MN ёйни $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ., $M_n(x_n, y_n)$ нуқталар билан Δs_i бўлакларга бўламиз, бунда $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$ деб оламиз.

Олдинги параграфда аниқланган

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)dy \tag{1}$$

эгри чизиқли интегрални қараймиз. Эгри чизиқли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз. *Агар $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар узлуксиз ва $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга, шунингдек $X[\varphi(t), \psi(t)]$ ва $Y[\varphi(t), \psi(t)]$ функциялар t аргументнинг функцияси сифатида $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i = A, \\ \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta y_i = B. \end{aligned}\right| \tag{2}$$

лимитлар мавжуд бўлади. Бунда, $\bar{x}_i$ ва $\bar{y}_i$ лар Δs_i ёйда ётувчи бирор нуқтанинг координаталари. Бу лимитлар $\Delta s_{i\to 0}$ да L ёйни Δs_i ёйчаларга бўлиш усулига ва Δs_i ёйда $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нуқтанинг танлаб олинишига боғлиқ эмас; улар *эгри чизиқли интеграллар* деб аталади ва бундай белгиланади:

$$A = \int_L X(x, y)dx, \qquad B = \int_L Y(x, y)dy. \tag{2'}$$

Изоҳ. Теоремадан олдинги параграфда аниқланган йиғиндини ҳам ўша лимитга, яъни эгри чизиқли интегралга интилиши келиб чиқади, бунда $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нуқталар Δs_i ёйнинг охирги учлари, L ёйни Δs_i бўлакларга бўлиш системаси эса ихтиёрийдир.

Ифодаланган теорема эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш усулини ҳосил қилишга имкон беради.

Демак. таърифга асосан:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta x_i, \tag{3}$$

бунда

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}).$$

Сўнгги айирмани Лагранж формуласи бўйича алмаштирамиз:

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

бунда τ_i миқдор t нинг t_{i-1} ва t_i қийматлари орасидаги бирор қиймати. $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ нуқтани Δs_i ёйда ихтиёрий равишда танлаб олиш мумкин бўлганидан, уни шундай танлаб олиш мумкинки, унинг координаталари τ_i параметрнинг:

$$\bar{x}_i = \varphi(\tau_i) \qquad \bar{y}_i = \psi(\tau_i)$$

қийматларига мос келсин. $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ ва Δx_i нинг топилган қийматларини (3) формулага қўйсак:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\ \ \psi(\tau_i)]\ \varphi'(\tau_i)\ \Delta t_i.$$

Ўнг томондаги ифода $[\alpha,\ \beta]$ кесмада олинган битта ўзгарувчининг $X[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)$ узлуксиз функцияси интеграл йиғиндисининг лимитидир.

Демак, бу лимит шу функциянинг аниқ интегралига тенг:

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \varphi'(t)\,dt.$$

Худди шунингдек,

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x,\ y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \psi'(t)\,dt$$

формула ҳосил қилинади. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшсак:

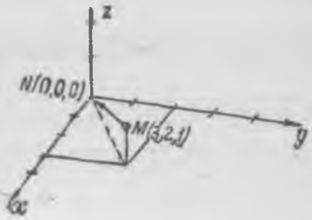
$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{X[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t) + \\ + Y[\varphi(t),\ \psi(t)]\ \psi'(t)\}\,dt. \qquad (4)$$

Бу эса эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш учун изланган формуланинг ўзидир. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ тенгламалар билан берилган фазовий эгри чизиқ бўйича

$$\int X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

эгри чизиқли интеграл ҳам шунинг сингари ҳисобланади.

1-мисол. Қуйидаги учта x^3; $3zy^2$; $-x^2y$. функциянинг (ёки бари бир $x^3 I + 3zy^2 J - x^2 yk$ вектор функциянинг) эгри чизиқли интеграли $M(3,\ 2,\ 1)$ нуқтадан чиқиб, $N(0,\ 0,\ 0)$ нуқтага томон йўналувчи тўғри чизиқ кесмаси бўйича ҳисоблансин (345-расм).



345- расм.

Ечиш. Интеграллаш керак бўлган MN чизиқнинг параметрик тенгламасини топиш учун берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

тенгламасини ёзиб, бу нисбатларнинг ҳаммасини битта t ҳарфи билан белгилаймиз ва тўғри чизиқнинг

$$x = 3t, \qquad y = 2t, \qquad z = t$$

кўринишдаги параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз. Бунда MN кесманинг бош учига параметрнинг $t = 1$ қиймати, охирги учига эса параметрнинг $t = 0$ қиймати мос келади. x, y, z дан t параметр бўйича олинган (эгри чизиқли интегрални ҳисоблашда керак бўладиган) ҳосилалар осонгина топилади:

$$x'_t = 3, \qquad y'_t = 2, \qquad z'_t = 1.$$

Энди изланаётган эгри чизиқли интегрални (4) формула ёрдами билан ҳисоблаш мумкин:

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} x^3\,dx + 3\,zy^2\,dy - x^2y\,dz = \int\limits_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t\,(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2 \cdot 2t \cdot 1]\,dt =$$

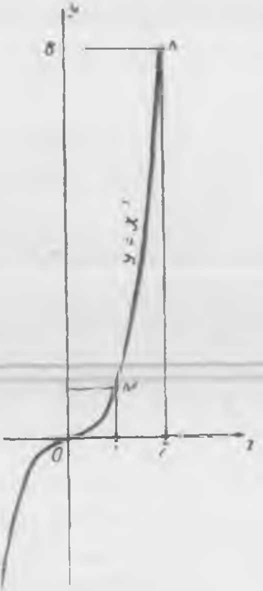
$$= \int\limits_1^0 87t^3\,dt = -\frac{87}{4}.$$

2-мисол. $6x^2y$, $10xy^2$ функциялар жуфтининг эгри чизиқли интеграли $y = x^3$ текис эгри чизиқнинг $M(1, 1)$ нуқтасидан $N(2,8)$ нуқтасигача олинган бўлаги ҳисоблансин (346-расм).

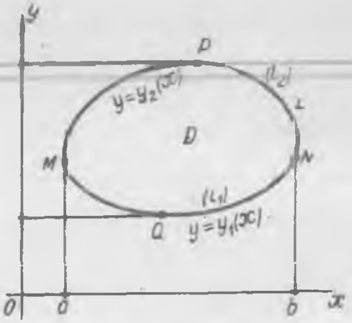
Ечиш. Изланаётган

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2\,ydx + 10xy^2\,dy$$

интегрални ҳисоблаш учун берилган эгри чизиқнинг параметрик тенгламасини топиш керак. Бироқ эгри чизиқнинг $y = x^3$ ошкор тенгламаси параметрик тенгламанинг хусусий ҳолидир: бунда x абсциссаси эгри чизиқ нуқтасининг параметридир, шунинг учун эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.



346-расм.



347-расм.

$$x = x, \qquad y = x^3,$$

x параметр $x_1 = 1$ дан $x_2 = 2$ гача ўзгаради. Параметр бўйича олинган ҳосилаларни осонгина ҳисоблаш мумкин:

$$x_x = 1, \qquad y_x = 3x^2.$$

Демак,

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} 6x^2y\,dx + 10xy^2\,dy = \int\limits_1^2 (6x^2x^3\cdot 1 + 10xx^6\cdot 3x^2)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (6x^5 + 30x^9)dx = [x^6 + 3x^{10}]_1^2 = 3132.$$

Энди эгри чизиқли интегралнинг баъзи бир татбиқларини кўрсатамиз:

1. Эгри чизиқ билан чегараланган соҳанинг юзини эгри чизиқли интеграл орқали ифодалаш. Oxy текисликда L контур билан чегараланган шундай D соҳа берилган бўлсинки, бу соҳанинг ички нуқтаси орқали координата ўқларидан биронтасига параллел ҳолда ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ соҳанинг L чегарасини кўп деганда икки нуқтада кессин (яъни D тўғри соҳа бўлсин) (347-расм.)

D соҳа Ox ўқдаги $[a, b]$ кесмага проекцияланади, бунда соҳа пастдан

$$y = y_1(x)$$

(l_1) эгри чизиқ билан, юқоридан эса

$$y = y_2(x),$$
$$[y_1(x) \leqslant y_2(x)]$$

(l_2) эгри чизиқ билан чегараланади, деб фараз қиламиз. У ҳолда D соҳанинг юзи:

$$S = \int\limits_a^b y_2(x)\,dx - \int\limits_a^b y_1(x)\,dx.$$

Бироқ $y = y_2(x)$ тенглама $l_2(\overset{\smile}{MPN})$ эгри чизиқнинг тенгламаси бўлганидан, биринчи интеграл шу эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегралдир; демак,

$$\int\limits_a^b y_2(x)\,dx = \int\limits_{MPN} y\,dx.$$

Иккинчи интеграл эса $l_1(\overset{\frown}{MQN})$ эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интеграл, яъни:

$$\int\limits_a^b y_1(x)\,dx = \int\limits_{MQN} y\,dx.$$

Эгри чизиқли интегралнинг 1-хоссасига асосан:

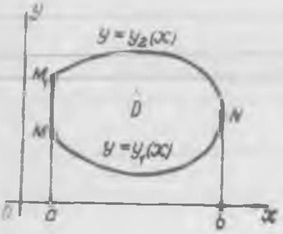
$$\int\limits_{MPN} y\,dx = -\int\limits_{NPM} y\,dx.$$

Демак,

$$S = -\int\limits_{NPM} y\,dx - \int\limits_{MQN} y\,dx = -\int\limits_{L} y\,dx. \qquad (5)$$

Бу ҳолда L эгри чизиқ соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда айланиб чиқилади.

Агар L чегаранинг бир қисми Oy ўққа параллел бўлган M_1M кесмадан иборат бўлса, у ҳолда $\int\limits_{(M_1)}^{(M)} y\,dx = 0$ бўлади ва (5) тенглик бу шартда ҳам ўз кучини сақлайди (348- расм).



348- расм.

Шунга ўхшаш

$$S = \int\limits_{L} x\,dy \qquad (6)$$

эканлигини ҳам кўрсатиш мумкин.

(5) ва (6) тенгликларни ҳадлаб қўшиб ва 2 га бўлиб, S юзни ҳисоблаш учун яна битта:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{L} x\,dy - y\,dx \qquad (7)$$

формулани ҳосил қиламиз.

3-мисол. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипснинг юзи ҳисоблансин.

Ечиш. (7) формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} [a\cos t\, b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]dt = \pi ab.$$

(7) формула, шунингдек, (5) ва (6) формулалар ҳам чегараси координата чизиқлари билан иккитадан ортиқ нуқтада кесишадиган юзлар учун ҳам ўринли эканлигини кўрамиз (349-расм). Буни исбот қилиш учун берилган соҳани (349- расм) l^* чизиқ ёрдами билан иккита тўғри соҳага ажратамиз. Уларнинг ҳар бири учун (7) формула ўринлидир. Сўнгра ҳосил қилинган чап ва ўнг қисмларни қўшиб, чапда берилган соҳанинг юзини, ўнгда — бутун чегара бўйича олинган $\left(\frac{1}{2}\right.$ коэффициентли) эгри чизиқли интегрални ҳосил қиламиз, эгри чизиқли интеграл l^* бўлувчи чизиқ бўйича икки марта — тўғри ва тескари йўналишда олингани учун у нолга тенг.

2. Бирор L эгри чизиқли йўлда ўзгарувчи F кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш ҳақидаги масала. 1-параграфнинг бошида кўрсатилганидек

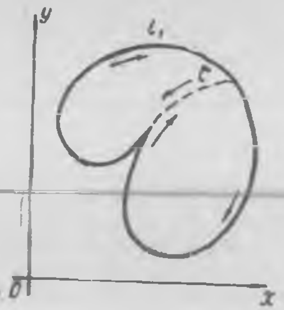
$$\boldsymbol{F} = X(x, y, z)\boldsymbol{i} + Y(x, y, z)\boldsymbol{j} + Z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

кучнинг $L = MN$ чизиқ бўйича бажарган иши ушбу:

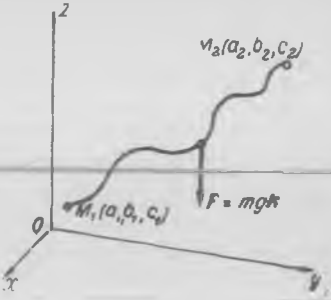
$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$$

эгри чизиқли интегралга тенг.

Конкрет ҳолларда кучнинг бажарган ишини қандай ҳисоблашни кўрсатувчи мисол қараб чиқамиз



349- расм.



350- расм.

4- мисол. m масса $M_1(a_1, b_1, c_1)$ нуқтадан $M_2(a_2, b_2, c_2)$ нуқтага ихтиёрий L йўл бўйича силжишидаги F оғирлик кучи бажарган A иши аниқлансин (350- расм).

Ечиш. F оғирлик кучининг координата ўқларидаги проекциялари:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -mg.$$

Демак, изланаётган иш:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)dz = mg(c_1 - c_2).$$

Демак, бу ҳолда эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмай, фақат бошланғич ва охирги нуқталарга боғлиқ бўлади. Аниқроқ қилиб айтганда, оғирлик кучининг бажарган иши фақат йўлнинг бошланғич ва охирги нуқталарининг баландликлари орасидаги айирмасига боғлиқ бўлади.

3-§. Грин формуласи

Бирор D текис соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл билан шу соҳанинг L чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл орасидаги муносабатни аниқлаймиз.

Oxy текисликда L ёпиқ контур билан чегараланган Ox ўқ йўналишида ҳам, Oy ўқ йўналишида ҳам тўғри бўлган D ёпиқ соҳа берилган бўлсин. Бу соҳа пастдан $y = y_1(x)$ эгри чизиқ билан, юқоридан эса $y = y_2(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган ва $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ бўлсин (347-расм).

Бу иккала эгри чизиқ биргаликда L ёпиқ контурни ташкил этади. D соҳада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ узлуксиз функциялар берилган бўлсин. Энди ушбу

$$\iint\limits_D \frac{\partial X(x, y)}{dy}\, dx\, dy$$

интегрални қараб чиқамиз. Уни икки каррали интеграл шаклида тасвирлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{dy}\, dx\, dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y}\, dy \right) dx = \int\limits_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))]\, dx. \qquad (1)$$

$\int\limits_a^b X(x_1, y_2(x))\, dx$ интеграл сон жиҳатдан тенгламаси параметрик шаклда $x = x$, $y = y_2(x)$ бўлган (x—параметр) MPN эгри чизиқ бўйича олинган $\int\limits_{MPN} X(x, y)\, dx$ эгри чизиқли интегралга тенг эканлигини кўрамиз. Шундай қилиб,

$$\int\limits_a^b X(x, y_2(x))\, dx = \int\limits_{MPN} X(x, y)\, dx. \qquad (2)$$

Шунга ўхшаш

$$\int\limits_a^b X(x, y_1(x))\, dx$$

интеграл сон жиҳатдан MQN ёй бўйича олинган қуйидаги эгри чизиқли интегралга тенг:

$$\int\limits_a^b X(x, y_1(x))\, dx = \int\limits_{(MQN)} X(x, y)\, dx. \qquad (3)$$

(2) ва (3) ифодаларни (1) формулага қўйсак:

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{MPN} X(x, y)\, dx - \int\limits_{MQN} X(x, y)\, dx. \qquad (4)$$

Бироқ,

$$\int\limits_{MQN} X(x, y)\, dx = - \int\limits_{NQM} X(x, y)\, dx$$

(1-параграфдаги 1-хоссага қаранг). Демак, (4) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial \lambda}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{MPN} X(x,\ y)\, dx + \int\limits_{NQM} X(x,\ y)\, dx.$$

Бироқ, ўнг томондаги эгри чизиқли интегралларнинг йиғиндиси соат стрелкаси бўйича йўналган ёпиқ L эгри чизиқнинг барча узунлиги бўйича олинган эгри чизиқли интегралга тенг. Демак, сўнгги тенгликни ушбу шаклга келтириш мумкин:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{L} X(x,\ y)\, dx. \qquad (5)$$

(соат стрелкаси бўйича)

Агар чегаранинг бирор қисми Oy ўққа параллел бўлган l_0 кесмадан иборат бўлса, $\int\limits_{l_0} X(x,\ y)dx = 0$ ва (5) тенглик бу ҳолда ҳам ўз кучида қолади.

Худди шунингдек, қуйидагини топамиз:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx\, dy = -\int\limits_{L} Y(x,\ y)\, dx. \qquad (6)$$

(соат стрелкаси бўйича)

(5) дан (6) ни айирсак:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx\, dy = \int\limits_{L} X\, dx + Y\, dy.$$

(соат стрелкаси бўйича)

Агар L контурни айланиб чиқиш соат стрелкасининг ҳаракатига тескари бўлса, у ҳолда[*].

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{L} X\, dx + Y\, dy.$$

Буни инглиз физиги ва математиги Д. Гриннинг (1793—1841)[**] номи билан *Грин формуласи* деб аталади.

Биз D соҳани тўғри деб фараз этган эдик. Лекин бу формула юзга тегишли масаладаги каби (2-параграфга қаранг) тўғри соҳаларга бўлиш мумкин бўлган исталган соҳа учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин.

---

[*] Агар ёпиқ контур бўйича олинган эгри чизиқли интегралда контурни айланиб чиқиш йўналиши кўрсатилмаса, айланиш соат стрелкасига қарама-қарши йўналиш деб фараз қилинади. Агар айланиш соат стрелкаси бўйича олинган бўлса, бу тўғрида махсус айтиб ўтилиши керак.

[**] Бу формула рус математиги М. В. Остроградский томонидан кашф этилган умумий формуланинг хусусий ҳолидир.

grad =1

4-§. Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шарти

M ва N нуқталарни туташтирувчи бирор L текис эгри чизиқ бўйича олинган:

$$\int_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$$

эгри чизиқли интегрални қараймиз. $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ функциялар қаралаётган D соҳада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз этамиз. Ёзилган эгри чизиқли интегрални қандай шартларда L эгри чизиқнинг шаклига боғлиқ бўлмай, фақат бошланғич ва охирги M, N нуқталарнинг вазиятларигагина боғлиқ бўлишини кўрсатамиз.

351-расм.

Қаралаётган D соҳада ётган M ва N нуқталарни туташтирувчи икки MPN ва MQN ихтиёрий эгри чизиқни қараймиз (351-расм). Фараз этайлик:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy = \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy, \tag{1}$$

яъни

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy - \int_{MQN} X\,dx + Y\,dy = 0$$

бўлсин. Бу ҳолда эгри чизиқли интегралларнинг 1- ва 2-хоссаларига асосан (1-параграф) қуйидаги:

$$\int_{MPN} X\,dx + Y\,dy + \int_{NQM} X\,dx + Y\,dy = 0,$$

яъни L ёпиқ контур бўйича олинган

$$\int_{L} X\,dx + Y\,dy = 0 \tag{2}$$

эгри чизиқли интегрални ҳосил қиламиз.

Сўнгги формуладаги эгри чизиқли интеграл MPN ва NQM эгри чизиқлардан ҳосил бўлган L ёпиқ контур бўйича олинади. Бу L контурни ихтиёрий деб ҳисоблаш мумкинлиги равшан.

Шундай қилиб, исталган икки нуқта M ва N учун олинган эгри чизиқли интеграл уларни туташтирувчи эгри чизиқнинг шаклига боғлиқ бўлмай, балки у нуқталарнинг вазиятларига боғлиқ бўлиши шартидан *ихтиёрий ёпиқ контур бўйича олинган эгри чизиқли интегралнинг нолга тенг бўлиши* келиб чиқади.

Тескари хулоса ҳам ўринлидир: агар ихтиёрий ёпиқ контур бўйича олинган эгри чизиқли интеграл нолга тенг бўлса, бу эгри чизиқли интеграл исталган икки нуқтани туташтирувчи эгри чизиқнинг шаклига боғлиқ бўлмай, фақат у нуқталарнинг вазиятларига боғлиқ бўлади. Ҳақиқатан, (2) тенгликдан (1) тенглик чиқади.

2-параграфдаги 4-мисолда эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмас, 3-мисолда эса эгри чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ, чунки бу мисолда ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлмай, қаралаётган контур билан чегараланган юзни беради; шунингдек, 1 ва 2-мисолларда ҳам эгри чизиқли интеграллар интеграллаш йўлига боғлиқ.

Ихтиёрий ёпиқ контур бўйича олинган $\int X\,dx + Y\,dy$ эгри чизиқли интеграл нолга тенг бўлиши учун $X(x, y)$ ва $Y(x, y)$ функциялар қандай шартларни қаноатлантириши керак, деган савол туғилиши табиий. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *$X(x, y)$, $Y(x, y)$ функциялар бирор D соҳанинг барча нуқталарида ўзининг $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлсин. У вақтда шу соҳада ётган ихтиёрий L ёпиқ контур бўйича олинган эгри чизиқли интеграл нолга тенг, яъни*

$$\int_L X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0 \tag{2'}$$

бўлиши учун D соҳанинг ҳамма нуқталарида

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{3}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. D соҳадаги ихтиёрий ёпиқ L контурни кўриб чиқамиз ва бу контур учун Грин формуласини ёзамиз:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L X\,dx + Y\,dy.$$

Агар (3) шарт бажарилса, чап томондаги икки ўлчовли интеграл айнан нолга тенг бўлади, демак,

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0.$$

Шундай қилиб, (3) шартнинг етарли экани исботланди.

Энди бу шартнинг зарурийлигини, яъни агар D соҳада ётган ихтиёрий L ёпиқ эгри чизиқ учун (2) тенглик бажарилса, шу соҳанинг ҳар бир нуқтасида (3) шартнинг ҳам бажарилишини исбот қиламиз.

(2) тенглик бажарилади, яъни:

$$\int_L X\,dx + Y\,dy = 0,$$

(3) шарт эса ҳеч бўлмаганда битта нуқтада бажарилмайди, яъни

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

деб аксини фараз этамиз. Масалан, бирор $P(x_0, y_0)$ нуқтада ушбу тенгсизлик бажарилсин:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Бу тенгсизликнинг чап томони узлуксиз функциядан иборат, шунинг учун у функция $P(x_0, y_0)$ нуқтани ўз ичига олган ва етарли даражада кичик бўлган бирор D' соҳанинг ҳамма нуқталарида мусбат ҳамда бирор $\delta > 0$ сондан катта бўлади. Шу соҳа бўйича $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ айирмадан икки ўлчовли интеграл оламиз. Унинг қиймати мусбат бўлади. Ҳақиқатан,

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy > \iint_{D'} \delta\,dx\,dy = \delta \iint_{D'} dx\,dy = \delta D' > 0.$$

Бироқ, Грин формуласига мувофиқ, сўнгги тенгсизликнинг чап томони D' соҳанинг L' чегараси бўйича олинган (бизнинг фаразимизга кўра нолга тенг бўлган) эгри чизиқли интегралга тенгдир. Шунинг учун сўнгги тенгсизлик (2) шартга қарама-қаршидир, демак, $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ айирмани ҳеч бўлмаганда битта нуқтада нолдан фарқ қилади деб олиш нотўғридир. Бундан берилган D соҳанинг ҳамма нуқталарида

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, теорема тўла исбот қилинди.

XIII бобнинг 9- параграфида

$$\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$$

шартнинг бажарилиши, $X\,dx + Y\,dy$ ифода бирор $u\,(x, y)$

функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиши билан тенг кучли эканлиги исбот қилинган эди, яъни:

$$X\,dx + Y\,dy = du(x,\ y),$$

бунда

$$X(x,\ y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad Y(x,\ y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Лекин бу ҳолда

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

вектор $u(x,\ y)$ функциянинг градиентидир; градиенти $Xi + Yj$ векторга тенг бўлган $u(x,\ y)$ функция, шу векторнинг *потенциали* деб аталади.

Бу ҳолда M ва N нуқталарни туташтирувчи ҳар қандай L эгри чизиқ бўйича олинган $I = \int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy$ эгри *чизиқли интеграли* функциянинг шу нуқталардаги қийматларининг

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\,dx + Y\,dy = \int\limits_{(M)}^{(N)} du(x,\ y) = u(N) - u(M)$$

айирмасига тенглигини исбот қиламиз.

Исбот. Агар $X\,dx + Y\,dy$ ифода $u(x,\ y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлса, у ҳолда $X = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ва эгри чизиқли интеграл қуйидаги шаклда бўлади:

$$I = \int\limits_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун M ва N нуқталарни туташтирувчи L эгри чизиқнинг параметрик тенгламасини ёзамиз:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Параметрнинг $t = t_0$ қийматига M нуқта, $t = T$ қийматига эса N нуқта мос келади деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда эгри чизиқли интеграл қуйидаги аниқ интегралга келтирилади:

$$I = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right] dt.$$

Қавс ичидаги ифода $u[\varphi(t), \psi(t)]$ функциядан t бўйича олинган тўлиқ ҳосила бўлиб, t нинг функциясидир. Шунинг учун

$$I = \int_{t_0}^{t} \frac{du}{dt} dt = u[\varphi(t), \psi(t)] \Big|_{t_0}^{T} = u[\varphi(t), \psi(t)] - u[\varphi(t_0), \psi(t_0)] =$$

$$= u(N) - u(M).$$

Тўлиқ дифференциалнинг эгри чизиқли интеграли интеграл олинадиган эгри чизиқнинг шаклига боғлиқ эмаслигини кўрамиз.

Бунга ўхшаш муҳокама фазовий эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интеграллар учун ҳам ўринлидир (қуйида 7-параграфга қаранг).

Изоҳ. Баъзан ихтиёрий $X(x, y)$ функциянинг L ёй узунлиги бўйича олинган эгри чизиқли:

$$\int_L X(x, y)\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(x_i, y_i)\, \Delta s_i \tag{4}$$

интегралларини қарашга тўғри келади, бунда ds ёй дифференциали. Бундай интеграллар ҳам юқорида қаралган эгри чизиқли интегралларни ҳисоблаш каби ҳисобланади. L эгри чизиқ ўзининг

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин, бу ерда $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ лар t нинг узлуксиз функциялари.

t параметрнинг α ва β қийматлари L ёйнинг бошланғич ва охирги учларига мос келсин.

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

эканлигини ҳисобга олсак, (4) интегрални ҳисоблаш учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\int_L X(x, y)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t$ фазовий эгри чизиқ ёйи бўйича олинган эгри чизиқли интегрални ҳам қараш мумкин:

$$\int_L X(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt.$$

Ёй бўйича олинган эгри чизиқли интеграллар ёрдами билан, масалан, чизиқлар оғирлик марказининг координаталари аниқланади.

I т. XII бобининг 8-параграфидагидек муҳокама юритиб, фазовий эгри чизиқ оғирлик марказининг координаталарини ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$x_c = \frac{\int\limits_L x ds}{\int\limits_L ds}, \qquad y_c = \frac{\int\limits_L y ds}{\int\limits_L ds}, \qquad z_c = \frac{\int\limits_L z ds}{\int\limits_L ds}. \tag{б}$$

Мисол. Агар $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt\,(0 \leqslant t < 2\pi)$ винт чизиқнинг чизиқли зичлиги ўзгармас бўлса, унинг битта ўрами оғирлик марказининг координаталари топилсин.

Ечиш. (б) формулани татбиқ этиб, ушбуни топамиз:

$$x_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2 + b^2}\,dt}{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2 + b^2}\,dt} = \frac{a\cdot 0}{2\pi} = 0.$$

Шунинг сингари $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt}{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b\cdot 4\pi^2}{2\pi\cdot 2} = \pi b.$$

Шундай қилиб, винт чизиғи битта ўрами оғирлик марказининг координаталари: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \pi b$ га тенг.

5-§. Сирт интеграли

Oxyz тўғри бурчакли координаталар системасида бирор V соҳа берилган бўлсин. Бу V соҳада бирор λ фазовий чизиқ билан чегараланган σ сирт берилган бўлсин.

Биз σ сиртга нисбатан унинг ҳар бир P нуқтасидаги нормалнинг мусбат йўналиши $n\,(P)$ бирлик вектор йўналтирувчи косинуслари сирт нуқталари координаталарининг узлуксиз функциялари деб фараз қиламиз.

Сиртнинг ҳар бир нуқтасида

$$F = X\,(x, y, z)\,i + Y\,(x, y, z)\,j + Z\,(x, y, z)k$$

вектор аниқланган бўлсин, бунда X, Y, Z координаталарнинг узлуксиз функцияларидир.

Сиртни бирор усул билан $\Delta\sigma_i$ элементар юзларга бўламиз. Ҳар бир юзда ихтиёрий P_i нуқтани оламиз ва

$$\sum_i (F\,(P_i)\,n\,(P_i))\,\Delta\sigma_i \tag{1}$$

йиғиндини қараймиз, бунда $F(P_i)$ — F векторнинг $\Delta\sigma_i$ юзнинг P_i нуқтадаги қиймати, $n(P_i)$ — шу нуқтадаги нормалнинг бирлик вектори, Fn — шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Барча бундай юзларнинг диаметрлари нолга интилгандаги ҳамма $\Delta\sigma_i$ юзларга татбиқ этилган (1) йиғиндининг лимити ***сирт интеграли*** деб аталади ва ушбу

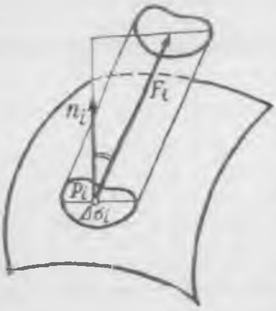
$$\iint\limits_{\sigma} Fnd\sigma$$

символ билан белгиланади. Шундай қилиб, таърифга кўра*).

$$\lim_{\text{diam}\,\Delta\sigma_i \to 0} \sum F_l n_l \Delta\sigma_1 = \iint\limits_{\sigma} Fnd\,\sigma. \quad (2)$$

(1) йиғиндининг ҳар бир

$$F_i n_i \Delta\sigma_i = F_i \Delta\sigma_i \cos(n_l, F_l) \quad (3)$$



352- расм.

қўшилувчисини механик жиҳатдан: асоси $\Delta\sigma_i$ ва баландлиги $F_l \cos(n_i F_l)$ бўлган цилиндрнинг ҳажмига тенг деб тушуниш мумкин. Агар F вектор σ сиртдан оқиб ўтувчи суюқликнинг тезлиги бўлса, (3) кўпайтма $\Delta\sigma_1$ юздан вақт бирлигида n_l вектор йўналишида оқиб ўтувчи суюқликнинг миқдорига тенг (352- расм).

Агар F вектор суюқликнинг берилган нуқтадаги оқиш тезлиги деб тушунилса, $\iint\limits_{\sigma} Fnd\sigma$ ифода вақт бирлигида σ сирт орқали мусбат йўналишда оқиб ўтувчи суюқликнинг умумий миқдорини билдиради. Шунинг учун сирт интеграли (2) *σ сирт орқали ўтувчи F вектор майдонининг оқими деб аталади.*

Сирт интегралининг таърифидан, агар σ сирт $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ қисмларга бўлинса, у вақтда

$$\iint\limits_{\sigma} Fnd\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} Fnd\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} Fnd\sigma + \ldots + \iint\limits_{\sigma k} Fnd\sigma$$

эканлиги чиқади.

n бирлик векторни унинг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$n = \cos(n, x)i + \cos(n, y)j + \cos(n, z)k.$$

---

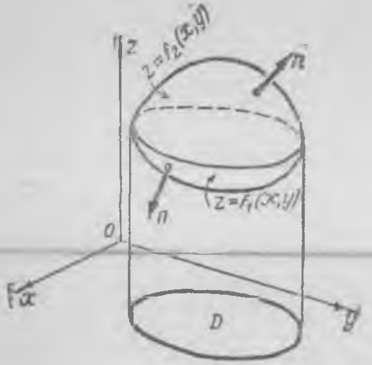
*) Агар σ сирт шундай бўлсаки, F нуқта бу сирт бўйича ҳаракатланиши билан сиртнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз ўзгариб борадиган уринма текислик мавжуд ва F вектор функция бу сиртда узлуксиз бўлса, бу лимит мавжуд бўлади (сирт бўйича олинадиган интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги бу теоремани биз исботсиз қабул қиламиз).

$z = f_1(x, y)$ сирт учун $\cos(n, z)$ манфий бўлганидан бу сирт бўйича олинган сирт интегралидаги $dx\,dy$ кўпайтманинг ишораси манфий бўлади; шунга кўра иккинчи интеграл олдидаги ишора ҳам манфий бўлади.

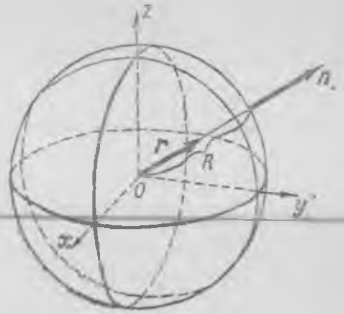
Бироқ, сўнгги формуланинг ўнг томонидаги интегралларнинг айирмаси, σ сирт билан чегараланган ҳажмни беради. Демак, σ ёпиқ сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми, сирт бўйича олинган:

$$V = \iint_{\sigma} z \cos(n, z)\, d\sigma$$

интегралга тенгдир.



351-расм.



355-расм.

2-*мисол*. *Координаталар бошига жойлаштирилган e мусбат электр заряди вектор майдон ҳосил килади, фазонинг ҳар бир нуқтасида вектор F Кулон қонуни бўйича аниқланади:*

$$F = k\frac{e}{r^2}\,\mathbf{r},$$

бунда r—координаталар бошидан қаралаётган нуқтагача бўлган масофа; $\mathbf{r}$—берилган нуқтанинг радиус вектори бўйича йўналган бирлик вектор (355-расм); k—ўзгармас коэффициент. Маркази координаталар бошида бўлган R радиусли сфера орқали ўтувчи вектор майдонининг оқими аниқлансин.

Ечиш. $r = R = \text{const}$ эканлигини эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\iint_{\sigma} k\frac{e}{r^2}\,\mathbf{rn}\, d\sigma = \frac{ke}{R^2}\iint_{\sigma} \mathbf{rn}\, d\sigma.$$

Бироқ, сўнгги интеграл σ сиртнинг юзига тенг. Ҳақиқатан, интегралнинг таърифига асосан ($\mathbf{rn} = 1$ эканлиги ҳисобга олинса):

$$\iint_{\sigma} \mathbf{rn}\, d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \mathbf{r}_k \mathbf{n}_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_k \to 0} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

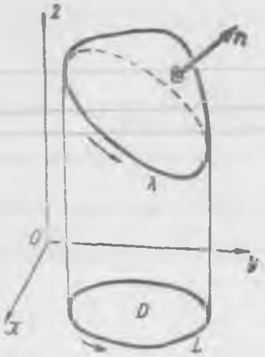
Демак, оқим:

$$\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

7-§. Стокс формуласи

Oz ўққа параллел бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ битта нуқтада кесадиган σ сирт берилган бўлсин. σ сиртнинг чегарасини λ билан белгилаймиз. n нормалнинг мусбат йўналишини *Oz* ўқнинг мусбат йўналиши билан ўткир бурчак ташкил этадиган қилиб оламиз (356-расм).

Сиртнинг тенгламаси $z = f(x, y)$ бўлсин. Нормалнинг йўналтирувчи косинуслари шу формулалар билан ифодаланади (I том IX бобининг 6-параграфига қаранг):



356-расм.

$$\left.\begin{aligned}\cos(n, x) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\ \cos(n, y) &= \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

σ сирт ўзининг ҳамма нуқталари билан бирор V соҳада ётади деб фараз қиламиз. V соҳада узлуксиз функция $X(x, y, z)$ биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан бирга берилган бўлсин. λ эгри чизиқ бўйича олинган

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\,dx$$

эгри чизиқли интегрални текширамиз.

λ чизиқда $z = f(x, y)$, бунда x, y — λ чизиқнинг Oxy текисликдаги L проекцияси нуқталарининг координаталари (356-расм). Демак, қуйидаги тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\,dx = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\,dx. \qquad (2)$$

Сўнгги интеграл L чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегралдир. Бу интегрални,

$$X(x, y, f(x, y)) = \overline{X}(x, y), \qquad 0 = \overline{Y}(x, y)$$

фараз қилиб, Грин формуласи бўйича алмаштирамиз.

Грин формуласида $\overline{X}$ ва $\overline{Y}$ ўрнига уларнинг ифодаларини қўйсак:

$$-\iint\limits_D \frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} dxdy = \int\limits_L X(x, y, f(x, y))\, dx, \tag{3}$$

бунда D соҳа L чизиқ билан чегараланган. $X(x, y, f(x, y))$ мураккаб функция ҳосиласига асосан (бунда y — бевосита ва $z = f(x,y)$ функция орқали киради) қуйидаги тенгликни топамиз:

$$\frac{\partial X(x, y, f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \tag{4}$$

(4) ифодани (3) тенгликнинг чап томонига қўйсак:

$$-\iint\limits_D \left[\frac{\partial X(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] dx\,dy =$$

$$= \int\limits_L X(x, y, f(x, y))\, dx.$$

(2) тенгликни назарга олиб, сўнгги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int\limits_\lambda X(x, y, z)\, dx = -\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dx\,dy - \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy. \tag{5}$$

Охирги икки интеграл сирт бўйича олинган интегралга алмаштирилади. Ҳақиқатан, 5-параграфдаги (2″) формулага асосан бирор $A(x, y, z)$ функция берилган бўлса, қуйидаги тенгликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$\iint\limits_\sigma A(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma = \iint\limits_\Delta A\, dx\, dy.$$

Бу тенгликка асосан, (5) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллар қуйидагича алмашинади:

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dx\,dy &= \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n, z)\, d\sigma, \\ \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy &= \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \cos(n, z)\, d\sigma. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Охирги интегрални шу параграфдаги (1) формула ёрдами билан, формулалардан иккинчисини учинчисига ҳадлаб бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

ёки

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n, z) = -\cos(n, y).$$

Демак,

$$\iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n, y)\,d\sigma. \qquad (7)$$

(6) ва (7) ифодаларни (5) тенгликка қўйсак:

$$\int\limits_\lambda X(x, y, z)\,dx = -\iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n, z)\,d\sigma + \iint\limits_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n, y)\,d\sigma. \qquad (8)$$

λ контур бўйича айланишнинг йўналиши n нормалнинг танланган мусбат йўналиши билан мос бўлиши керак. Яъни, кузатувчи нормалнинг охирги учидан қараса, у вақтда λ эгри чизиқ бўйича айланиш соат стрелкасига тескари йўналишда кўриниши керак.

Тенгламалари $z = f(x, y)$ кўринишида бўладиган қисмларга бўлиш мумкин бўлган ҳар қандай сирт учун (8) формула ўринлидир.

Шунга ўхшаш қуйидаги формулаларни ҳам ёзиш мумкин:

$$\int\limits_\lambda Y(x, y, z)\,dy = \iint\limits_\sigma \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n, x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n, z)\right]d\sigma, \qquad (8')$$

$$\int\limits_\lambda Z(x, y, z)\,dz = \iint\limits_\sigma \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n, y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n, x)\right| d\sigma. \qquad (8'')$$

(8), (8′) ва (8″) тенгликларнинг чап ва ўнг томонларни қўшсак:

$$\int\limits_\lambda X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n, z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n, y)\right]d\sigma. \qquad (9)$$

Бу формула инглиз физиги ва математиги Ж. Стокс (1819—1903) номи билан *Стокс формуласи* деб аталади. Бу формула σ сирт бўйича олинган интеграл билан шу сиртнинг λ чегараси бўйича олинган эгри чизиқли интеграл орасидаги муносабатни аниқлайди, бунда λ эгри чизиқ бўйича айланиб чиқиш йўналиши юқорида кўрсатилган қоидага асосан олинади. Ушбу:

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \qquad B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \qquad B_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

проекциялари билан аниқланадиган $\boldsymbol{B}$ вектор, $\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$ вектор функциясининг *уюрмаси* ёки *ротори* деб аталади ва $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ символ билан белгиланади*).

Демак, (9) формула вектор шаклда

$$\int_{\lambda} \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{s} = \iint_{\sigma} \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}\, d\sigma, \tag{9'}$$

кўринишда бўлади ва *Стокс* теоремаси қуйидагича ифода этилади:

Бирор сиртнинг контури бўйича олинган вектор циркуляцияси шу сирт орқали ўтувчи уюрма оқимига тенг.

Изоҳ. Агар σ сирт Oxy текисликка параллел текисликнинг бир бўлаги бўлса, $\Delta z = 0$ бўлади ва биз Грин формуласини Стокс формуласининг хусусий ҳоли каби ҳосил қиламиз.

Агар

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

бўлса, (9) формуладан ҳар қандай фазовий ёпиқ эгри чизиқ λ бўйича олинган эгри чизиқли интегралнинг нолга тенг бўлиши келиб чиқади, яъни:

$$\int_{\lambda} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = 0. \tag{11}$$

Бундан эгри чизиқли интеграллаш эгри чизиқнинг шаклига боғлиқ эмаслиги кўринади.

Текис эгри чизиқ учун кўрсатилганидек, (11) шартнинг бажарилиши учун (10) шарт *етарлигина эмас, балки зарурий шарт ҳам эканлигини* кўрсатиш мумкин.

Ву шартлар бажарилганда интеграл остидаги ифода бирор $u(x, y, z)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади:

$$X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = du(x, y, z),$$

демак,

$$\int_{(M)}^{(N)} X\, dx + Y\, dy + Z\, dz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

Бу ҳам икки ўзгарувчининг функцияси (4-параграфга қаранг) учун ҳосил қилинган мос формула сингари исбот қилинади.

1-мисол. Моддий нуқта динамикасининг асосий тенгламаларини ёзамиз:

$$m\frac{dv_x}{dt} = X, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = Y, \qquad m\frac{dv_z}{dt} = Z,$$

---

*) rot — французча rotation „айланиш" деган сўзнинг биринчи учта ҳарфи бўлиб, „айланиш" маъносини билдиради.

Бунда m — нуқтанинг массаси; X, Y, Z — нуқтага таъсир этувчи кучнинг координаталар ўқидаги проекциялари; $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ эса v тезликнинг координаталар ўқидаги проекциялари. Юқорида ёзилган тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини

$$v_x dt = dx, \qquad v_y dt = dy, \qquad v_z dt = dz,$$

ифодаларга кўпайтирамиз. Берилган тенгликларни ҳадма-ҳад қўшсак:

$$m\,(v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = Xdx + Ydy + Zdz,$$

$$m\,\frac{1}{2}\,d\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = Xdx + Ydy + Zdz.$$

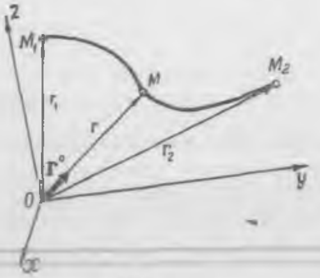
$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ бўлгани учун, бундай ёза оламиз:

$$d\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right) = Xdx + Ydy + Zdz,$$

M_1 ва M_2 нуқталарни туташтирувчи траектория бўйича интеграл оламиз.

$$\frac{1}{2}\,mv_2^2 - \frac{1}{2}\,mv_1^2 = \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} Xdx + Ydy + Zdz.$$

бунда v_1 ва v_2 — M_1 ва M_2 нуқталардаги тезликлар.



357- расм.

Кейинги тенглик тирик кучлар ҳақидаги теоремани ифодалайди: бир нуқтадан иккинчи нуқтага ўтишдаги кинетик энергиянинг орттирмаси m массага таъсир этувчи кучнинг бажарган ишига тенг.

2- мисол. Бирлик массани M_1 (a_1, b_1, c_1), вазиятдан M_2 (a_2, b_2, c_2) вазиятга кўчиргандаги m – массанинг қўзғалмас марказига бўлган ньютон тортиш кучининг бажарган иши аниқлансин.

Ечиш. Координаталар боши тортишнинг қўзғалмас марказига жойлашган бўлсин. Бирлик массанинг ихтиёрий вазиятига мос келувчи M нуқтанинг радиус-векторини r билан (357-расм), r вектор бўйича йўналган бирлик векторни эса r^0 билан белгилаймиз. У ҳолда $F = -\frac{km}{r^2}\,r^0$ бўлади, бунда k — тортишиш доимийси. F кучнинг координаталар ўқидаги проекциялари

$$X = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{x}{r}, \qquad Y = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{y}{r}, \qquad Z = -km\,\frac{1}{r^2}\,\frac{z}{r}.$$

Бу ҳолда F кучнинг M_1M_2 йўлда бажарган иши мана бунга тенг:

$$A = -km \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = -km \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} \frac{rdr}{r^3} = km \int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

(чунки $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $rdr = xdx + ydy + zdz$). Агар M_1 ва M_2 нуқталар радиус-векторларининг узунликларини r_1 ва r_2 билан белгиласак:

$$A = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Шундай қилиб, бу ерда ҳам эгри чизиқли интеграл интеграллаш эгри чизиғининг шаклига боғлиқ бўлмай, фақат бошланғич ва охирги нуқталарининг вазиятларига боғлиқдир. $u = \frac{km}{r}$ функция m масса ҳосил қилган тортиш майдонининг *потенциали* деб аталади. Берилган ҳолда:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad A = u(M_2) - u(M_1),$$

яъни бирлик массани кўчириш натижасида бажарилган иш охирги ва бошланғич нуқталардаги потенциал қийматларнинг айирмасига тенг.

8- §. Остроградский формуласи

Фазода σ ёпиқ сирт билан чегараланган ва Oxy текисликдаги икки ўлчовли D тўғри соҳага проекцияланувчи тўғри уч ўлчовли V соҳа берилган бўлсин. Биз σ сиртни учта σ_1, σ_2, σ_3 қисмга бўлиш мумкин ва улардан олдинги иккитасининг тенгламаси

$$z = f_1(x, y) \text{ ва } z = f_2(x, y)$$

кўринишда бўлади деб фараз этамиз, бунда $f_1(x, y)$ ва $f_2(x, y)$ функциялар D соҳада узлуксиз. Учинчи σ_3 қисм эса ясовчиси Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртдир.

Қуйидаги

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

интегрални қараймиз.

Интеграллашни аввал z бўйича бажарамиз:

$$I = \iint\limits_D \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz\right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy. \quad (1)$$

Сирт нормалида аниқ йўналишни, яъни йўналиши σ сиртнинг ташқи нормали билан бир хил йўналишни танлаб оламиз. У вақтда $\cos(n, z)$ функция σ_2 сиртда мусбат, σ_1 сиртда эса манфий бўлади; σ_3 сиртда у нолга тенг бўлади.

(1) тенгликнинг ўнг томонидаги икки ўлчовли интеграллар сирт бўйича олинган мос интегралларга тенг:

$$\iint\limits_{D} Z(x, y, f_2(x, y))\, ax\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma, \qquad (2')$$

$$\iint\limits_{D} Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z)\, (-\cos(n, z))\, d\sigma.$$

Сўнгги интегралда $(-\cos(n, z))$ ёздик, чунки σ_1 ва σ_2 сиртларнинг элементлари ва D соҳа Δs юзининг элементи, (n, z) ўтмас бурчак бўлгани учун $\Delta s = \Delta\sigma[-\cos(n, z)]$ муносабат билан боғланган.

Шундай қилиб,

$$\iint\limits_{D} Z(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy = -\iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, f_1(x, y)) \cos(n, z)\, d\sigma. \quad (2'')$$

(2′, ва (2″) тенгликларни (1) тенгликка қўйсак:

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Z(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Кейин келадиган формулаларни ёзиш қулайроқ бўлиши учун (σ_3 сиртда $\cos(n, z) = 0$ тенглик бажарилганлиги учун

$$\iint\limits_{\sigma_3} Z(x, y, z) \cos nz\, d\sigma = 0$$

тенгликни қўшиб) охирги тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$\iiint\limits_{V} \frac{dZ(x, y, z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\sigma_2} Z \cos(n, z)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_1} Z \cos(n, z,)\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma_3} Z \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Лекин, сўнгги тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллар йиғиндиси бутун σ ёпиқ сирт бўйича олинган интегралдир: шунинг учун

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\sigma} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Шунинг сингари,

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\sigma} Y(x, y, z) \cos(n, y)\, d\sigma,$$

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\sigma} X(x, y, z) \cos(n, x)\, d\sigma$$

муносабатларни ҳосил қилиш мумкин.

Кейинги учала тенгликни ҳадлаб қўшсак, *Остроградский*[*] *формуласи* ҳосил бўлади:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$=\iint\limits_\sigma (X\cos(n, x)+Y\cos(n, y)+Z\cos(n, z))\,d\sigma. \qquad (2)$$

$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ ифода $F=Xi+Yj+Zk$ векторнинг *дивергенцияси* (ёки вектор функциянинг дивергенцияси) деб аталади ва div F**) символ билан белгиланади:

$$\operatorname{div} F=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Бу формулани шу параграфнинг бошида кўрсатилган шартларни қаноатлантирувчи соҳаларга бўлинадиган ҳар қандай соҳа учун ҳам тўғри эканлигини эслатиб ўтамиз.

Ҳосил қилинган формуланинг гидромеханик маъносини берамиз.

$$E=Xi+Yj+Zk,$$

вектор V соҳадан оқиб ўтувчи суюқликнинг тезлик вектори бўлсин. У ҳолда сирт бўйича олинган (2) формуладаги интеграл, n ташқи нормалдаги F вектор проекциясининг интеграли бўлади; бу V соҳадан σ сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб чиқувчи (бу интеграл манфий бўлса, V соҳага қуюлувчи) суюқликнинг миқдорини беради. Бу миқдор div F нинг уч ўлчовли интеграли билан ифодаланади.

Агар $\operatorname{div} F\equiv 0$ бўлса, у вақтда исталган ёпиқ сирт бўйича олинган икки ўлчовли интеграл нолга тенг, яъни исталган σ ёпиқ сирт орқали оқиб чиқувчи (ёки қуюлувчи) суюқлик миқдори нолга тенг бўлади. Аниқроқ қилиб айтганда, соҳага қуюлувчи суюқлик миқдори шу соҳадан оқиб чиқувчи суюқлик миқдорига тенгдир.

Остроградский формуласи вектор шаклда

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} F\,dv=\iint\limits_\sigma Fn\,ds, \qquad (1)$$

---

[*] Бу (баъзан Остроградский-Гаусс формуласи деб аталади) формула буюк рус математиги М. В. Остроградский (1801—1861) томонидан кашф этилган ва 1828 йили унинг „Заметка по теории теплоты“ номли мақоласида эълон қилинган.

**) div — французча divergence „узоқлашиш“ деган сўзнинг биринчи учта ҳарфи.

кўринишда бўлади ва бундай ўқилади: *бирор ҳажм бўйича ёйилган F вектор майдоннинг дивергенциясидан олинган интеграл берилган ҳажмни чегараловчи сирт орқали ўтадиган вектор оқимига тенг.*

9-§. Гамильтон оператори. Унинг баъзи бир татбиқлари

$u = u(x, y, z)$ функция берилган бўлсин. $u(x, y, z)$ функция аниқланган ва дифференциалланадиган соҳанинг ҳар бир нуқтасида ушбу

$$\operatorname{grad} u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{1}$$

градиент аниқланадиган бўлсин. $u(x, y, z)$ функциянинг градиенти баъзан бундай белгиланади:

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2}$$

бундаги ∇ белги „набла“ деб ўқилади.

1) (2) тенглик қулайлик учун символик равишда бундай ёзилади:

$$\nabla u = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)u \tag{2'}$$

ва бу

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3}$$

символни „символик вектор“ сифатида қаралади. Бу символик вектор *Гамильтон оператори* ёки *набла оператор* (∇ оператор) дейилади. (2) ва (2′) формулалардан чиқадики, символик вектор ∇ ни скаляр функция u га „кўпайтганда“ шу функциянинг градиенти ҳосил қилинади:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u.$$

2) ∇ символик векторни $F = iX + jY + kZ$ векторга скаляр кўпайтмасини тузиш мумкин:

$$\nabla F = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial Z}\right)(iX + jY + kZ) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} F$$

(8-§ га қаранг). Демак,

$$\nabla F = \operatorname{div} F. \tag{5}$$

3) ∇ символик вектор билан $F = iX + jY + kZ$ векторнинг вектор кўпайтмасини тузамиз:

$$\nabla x F = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times (iX + jY + kZ) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - j\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) =$$

$$= i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \operatorname{rot} F,$$

(7- § га қаранг). Демак,

$$\nabla \times F = \operatorname{rot} F. \qquad (6)$$

Юқорида айтилганлардан ∇ символик векторни қўллаш вектор операцияларини қискача ифодалашга имкон бериши келиб чиқади. Яна бир неча формулани кўздан кечирамиз.

4) Агар F вектор бирор $u(x, y, z)$ скаляр функциянинг градиенти бўлса, яъни:

$$F = \operatorname{grad} u$$

ёки

20

35

$$F = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

бўлса, $F(x, y, z) = iX + jY + kZ$ вектор майдон *потенциал вектор майдони* дейилади. Бу ҳолда F векторнинг проекциялари:

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

бўлади. Бу тенгликлардан қуйидагилар келиб чиқади (I том VIII боб 12- параграфга қаранг):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x},$$

ёки

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Демак, қаралаётган F вектор учун

$$\operatorname{rot} F = 0.$$

Шундай қилиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0. \qquad (7)$$

∇ операторни қўллаган ҳолда, (7) тенгликни (4) ва (5) формулаларга асосан бундай ёзиш мумкин:

$$(\nabla \times \nabla u) = 0. \qquad (7')$$

Вектор кўпайтмани скалярга кўпайтириш учун кўпайтувчилардан бирини шу скалярга кўпайтириш етарли экани хоссасидан фойдаланиб, (7′) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$(\nabla \times \nabla) u = 0. \qquad (7'')$$

Бу ерда ∇ оператор яна оддий векторнинг хоссасига эга: векторнинг ўз-ўзи билан вектор кўпайтмаси нолга тенг.

Агар $F(x, y, z)$ вектор майдон учун $\operatorname{rot} F = 0$ бажарилса, уни *уюрмали бўлмаган* (ёки беуюрма) вектор майдон дейилади. (7) тенгликдан ҳар қандай потенциал майдон беуюрма майдон эканлиги келиб чиқади.

Бунинг тескариси ҳам тўғри, яъни агар бирор F вектор майдон беуюрма бўлса, у потенциал майдон бўлади. Бунинг тўғрилиги 7-параграфнинг охирида келтирилган мулоҳазалардан келиб чиқади.

5) $\operatorname{div} F = 0$ бажариладиган $F(x, y, z)$ вектор майдон, яъни манбасиз (8-параграфга қаранг) вектор майдон *соленоидаль**) ёки *трубкасимон* (яъни найсимон) деб айтилади. Энди

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0 \qquad (8)$$

эканини, яъни уюрма майдон манбадан ҳоли эканини исбот қиламиз.

Ҳақиқатан, агар $F = iX + jY + kZ$ бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{rot} E = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

ва шунга кўра

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}(F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0$$

∇ оператор ёрдами билан (8) тенглик бундай ёзилади:

$$\nabla(\nabla \times F) = 0. \qquad (8')$$

Бу тенгликнинг чап томонини учта вектор ∇, ∇, F нинг вектор-скаляр (аралаш) кўпайтмаси деб қараш мумкин, булардан иккитаси бир хил. Бу кўпайтманинг нолга тенг экани равшан.

6) Скаляр майдон $u = u(x, y, z)$ берилган бўлсин. Градиентлар майдонини топамиз:

$$\operatorname{grad} u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

---

*) Бу—спираль шаклида ўралган сим бўлиб, ундан ток ўтказилса, унинг атрофида магнит майдони пайдо бўлади.

Сўнгра:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

ёки

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Бу ифоданинг ўнг томони бундай белгиланади

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{10}$$

ёки символик тарзда

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u.$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ символ *Лаплас оператори* деб аталади.

Демак, (9) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u. \tag{11}$$

∇ оператор ёрдами билан (11) тенгликни ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$(\nabla \nabla u) = \Delta u, \text{ яъни } \Delta = \nabla^2. \tag{11'}$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

ёки

$$\Delta u = 0 \tag{12'}$$

тенглама *Лаплас тенгламаси* дейилади. Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи функция *гармоник функция* дейилади.

XV БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги эгри чизиқли интеграллар ҳисоблансин:

1. $\int y^2 dx + 2xy\,dy$ интеграл $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ айлана бўйича. *Жав.* 0.

2. $\int y\,dx - x\,dy$ интеграл $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ эллипс ёйи бўйича. *Жав.* $-2\pi ab$.

3. $\int\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\right)$ интеграл маркази координаталар бошида бўлган айлана бўйича. *Жав.* 0.

4. $\int \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ интеграл $y = x$ тўғри чизиқнинг $x = 1$ дан $x = 2$ гача кесмаси бўйича. *Жав.* ln 2.

5. $\int yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ интеграл t 0 дан 2π гача ўзгарганида $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$ винт чизиғининг ёйи бўйича. *Жав.* 0.

6. $\int x\,dy - y\,dx$ интеграл $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроиданинг ёйи бўйича. *Жав.* $\frac{3}{4}\pi a^2$ (астроиданинг иккиланган юзи).

7. $\int x\,dy - y\,dx$ интеграл $x = \frac{3at}{1+t^3}$; $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ Декарт япроғининг сиртмоғи бўйича. *Жав.* $3a^2$ (кўрсатилган сиртмоқ билан чегараланган соҳанинг иккиланган юзи).

8. $\int xdy - ydx$ интеграл $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 < t < 2\pi)$ эгри чизиқ бўйича. *Жав* $-6\pi a^2$ (циклоиданинг битта арки ва Ox ўқ билан чегараланган соҳанинг иккиланган юзи).

Исбот қилинсин:

9. $\operatorname{grad}(c\varphi) = c\operatorname{grad}\varphi$, бунда c — ўзгармас.
10. $\operatorname{grad}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\operatorname{grad}\varphi + c_2\operatorname{grad}\psi$, бунда c — ўзгармас.
11. $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$.
12. $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} r^2$, $\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$ топилсин, бунда $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Жав. $\frac{\mathbf{r}}{r}$; $2\mathbf{r}$; $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ $f'(r)$; $\frac{\mathbf{r}}{r}$.

13. Исбот қилинсин: $\operatorname{div}(A + B) = \operatorname{div} A + \operatorname{div} B$.
14. Ҳисоблансин: $\operatorname{div}\mathbf{r}$, бунда $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. *Жав.* 3.
15. Ҳисоблансин: $\operatorname{div}(A\varphi)$, бунда A — вектор функция, φ скаляр функция. *Жав.* $\varphi\operatorname{div} A + (\operatorname{grad}\varphi\, A)$
16. Ҳисоблансин: $\operatorname{div}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})$, бунда $\mathbf{c}$—ўзгармас вектор. *Жав.* $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})/r$.
17. Ҳисоблансин: $\operatorname{div} B(\mathbf{r}A)$. *Жав.* AB.

Исбот қилинсин:

18. $\operatorname{rot}(c_1A_1 + c_2A_2) = c_1\operatorname{rot}A_1 + c_2\operatorname{rot}A_2$, бунда c_1 ва c_2 ўзгармас.
19. $\operatorname{rot}(Ac) = \operatorname{grad} A \times c$, бунда c — ўзгармас вектор.
20. $\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A$.
21. $A \times \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{rot}(\varphi A)$.

Сирт бўйича олинган интеграллар

22. Агар σ ёпиқ сирт, n унинг нормали бўлса, $\iint \cos(nz)\,d\sigma = 0$ экани исбот қилинсин.

23. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферани $z = H$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган сегмент сиртининг Oz ўққа нисбатан инерция моменти топилсин. *Жав.* $\frac{2\pi k}{3}(2R^3 - 3k^2H + H^3)$.

24. $x^2 + y^2 = 2cz$ айланиш параболоидини $z = c$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган сиртнинг Oz ўққа нисбатан инерция моменти топилсин. *Жав.* $4\pi c^4\frac{6\sqrt{3}+1}{15}$.

25. $x^2 + y^2 = R^2z^2/H^2$ конус сиртининг $z = H$ текислик билан кесилган қисми оғирлик марказининг координаталари ҳисоблансин. *Жав.* 0; 0; $\frac{2}{3}H$.

26. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера сиртини $z = H$ текислик билан кесишдан ҳосил бўлган сегмент оғирлик марказининг координаталари топилсин. *Жав.* $\left(0;\ 0;\ \frac{R+H}{2}\right)$.

27. $\iint\limits_{\sigma} [x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz)]\,d\sigma$ топилсин, бунда σ-ёпиқ сирт. *Жав.* $3V$, бунда V — сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми.

28. $\iint\limits_S z\,dx\,dy$ топилсин, бунда S — ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферанинг ташқи томони. *Жав.* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

29. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$ топилсин, бунда S — ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфера сиртининг ташқи томони. *Жав.* 0.

30. $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ топилсин, бунда S—ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, конуснинг ён сирти, $0 < z < b$. *Жав.* $\frac{2\pi a^3\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

31. $\int\limits_L ydx + zdy + xdz$ интеграл Стокс формуласи бўйича алмаштирилсин. *Жав.* $-\iint\limits_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,ds$.

Стокс формуласини қўлланиб ва қўлланмасдан (бевосита) қуйидаги эгри чизиқли интеграллар топилсин.

32. $\int\limits_L (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, бунда L — айлана: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$. *Жав.* 0.

33. $\int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz$, бунда L — айлана $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. *Жав.* $-\frac{\pi R^6}{8}$.

Остроградский формуласини қўлланиб, сирт интеграллари ҳажм бўйича олинган интегралларга алмаштирилсин:

34. $\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds$. *Жав.* $\iiint\limits_V 3dxdydz = 3V$.

35. $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)(dydz + dxdz + dxdy)$. *Жав.* $2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$.

36. $\iint\limits_S xydxdy + yzdydz + zxdzdx$. *Жав.* 0.

37. $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dydz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$. *Жав* $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz$.

Остроградский формуласи ёрдамида қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

38. $\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds$, бунда S—ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг сирти. *Жав.* $4\pi abc$.

39. $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,ds$, бунда S—ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферанинг сирти. *Жав.* $\frac{12}{5}\pi R^5$.

40. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, бунда S — ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 < z < b)$ конуснинг сирти. *Жав.* $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

41. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$, бунда S—ушбу $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрнинг сирти, $-H < z < H$. *Жав.* $3\pi a^2H$.

42. Айният исбот қилинсин: $\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds$, бунда C D соҳани чегараловчи контур, $\frac{\partial u}{\partial n}$ эса ташқи нормаль йўналиши бўйича олинган ҳосила.

Ечиш.

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx dy = \int\limits_C - Ydx + Xdy = \int\limits_C [-Y\cos(s,\ x) + X\sin(s,\ x)]\,ds,$$

бунда $(s,\ x)$ бурчак C контурга ўтказилган уринма билан Ox ўқ орасидаги бурчак. Агар $(n,\ x)$ орқали нормаль билан Ox ўқ орасидаги бурчакни белгиласак, $\sin(s,\ x) = \cos(n,\ x)$, $\cos(s,\ x) = -\sin(n,\ x)$ бўлади. Демак,

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_C [X\cos(n,\ x) + Y\sin(n,\ x)]\,ds.$$

$X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\,dy = \int\limits_C \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,\ x) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(n,\ x)\right] ds$$

ёки

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dx\,dy = \int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

43. *Грин формуласи* деб аталувчи ушбу айният исботлансин:

$$\iiint\limits_V (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma,$$

бундаги u ва v функциялар ' соҳада узлуксиз ҳамда иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга.

Δu ва Δv символлар қуйидагиларни билдиради:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Ечиш.

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma [X\cos(n,\ x) + Y\cos(n,\ y) + Z\cos(n,\ z)]\,d\sigma.$$

Энди

$$X = vu'_x - uv'_x,$$
$$Y = vu'_y - uv'_y,$$
$$Z = vu'_z - uv'_z.$$

деб олсак, у вақтда

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=v\,(u''_{xx}+u''_{yy}+u''_{zz})-u\,(v''_{xx}+v''_{yy}+v''_{zz})=$$

$$=v\Delta u-u\Delta v.$$

$$X\cos(n,\ x)+Y\cos(n,\ y)+Z\cos(n,\ z)=$$

$$=v\,(u'_x\cos(n,\ x)+u'_y\cos(n,\ y)+u'_z\cos(n,\ z))-$$

$$-u\,(v'_x\cos(n,\ x)+v'_y\cos(n,\ y)+v'_z\cos(n,\ z))=v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Демак,

$$\iiint\limits_V(v\Delta u-u\Delta v)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma.$$

44. Айният исбот қилинсин:

$$\iiint\limits_V\Delta u\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma,$$

бунда

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Ечиш. Юқоридаги мисолда чиқарилган Грин формуласидаги v ни 1 га тенг деб оламиз. У ҳолда $\Delta v=0$ ва кўрсатилган айният ҳосил бўлади.

45. Агар $u\,(x,\ y,\ z)$ бирор соҳада гармоник функция бўлса, яъни бу соҳанинг исталган нуқтасида $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ Лаплас тенгламасини қаноатлантирса,

$$\iint\limits_\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma=0$$

бўлади, бунда σ- ёпиқ сирт.

Ечиш. Бу 44- масаланинг формуласидан бевосита келиб чиқади.

46. $u\ (x,\ y,\ z)$ бирор V соҳадаги гармоник функция бўлсин ва V соҳада маркази $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтада ва радиуси R бўлган σ сфера жойлашган бўлсин.

$$u\,(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\underline{\sigma}}u\,d\sigma,$$

эканлиги исбот қилинсин.

Ечиш. R ва $\rho\ (\rho<R)$ радиусли ва маркази $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтада бўлган иккита $\underline{\sigma},\ \sigma$ сфера билан чегараланган Ω соҳани қараймиз. u деб юқорида кўрсатилган функцияни, v деб эса

$$v=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

функцияни қабул қилиб, бу соҳага 43- масалада аниқланган Грин формуласини татбиқ этамиз.

Тўғридан-тўғри дифференциаллаш ва ўрнига қўйиш билан

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак,

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}+\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

ёки

$$\iint\limits_{\underline{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma - \iint\limits_{\bar{\sigma}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

$\bar{\sigma}$ ва $\underline{\sigma}$ сиртларда $\frac{1}{r}$ миқдор ўзгармас $\left(\frac{1}{R}\text{ ва }\frac{1}{\rho}\right)$, шунинг учун $\frac{1}{r}$ ни интеграл ишорасининг олдига чиқариш мумкин. 45- масалада аниқланган натижага асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{R} \iint\limits_{\underline{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0; \qquad \frac{1}{\rho} \iint\limits_{\bar{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Демак,

$$-\iint\limits_{\underline{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma + \iint\limits_{\bar{\sigma}} u \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma = 0,$$

бироқ

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{d \left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}.$$

Шунинг учун

$$+\iint\limits_{\underline{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma - \iint\limits_{\bar{\sigma}} u \frac{1}{r^2} d\sigma = 0$$

ёки

$$\frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{\underline{\sigma}} u\, d\sigma = \frac{1}{R^2} \iint\limits_{\bar{\sigma}} u\, d\sigma. \tag{1}$$

Ўнг томондаги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани татбиқ этамиз:

$$\frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{\underline{\sigma}} u\, d\sigma = \frac{u(\xi, \eta, \zeta)}{\rho^2} \iint\limits_{\bar{\sigma}} d\sigma, \tag{2}$$

бунда $u(\xi, \eta, \zeta)$ маркази $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтада, радиуси ρ бўлган сфера сиртидаги нуқталар.

ρ ни нолга интилишга мажбур этамиз; у вақтда $u(\xi, \eta, \zeta) \to u(x_1, y_1, z_1)$.

$$\frac{1}{\rho^2} \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi.$$

Демак, $\rho \to 0$ да қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{\sigma} u\, d\sigma \to u(x_1, y_1, z_1)\, 4\pi.$$

Сўнгра, (1) тенгликнинг ўнг томони ρ га боғлиқ бўлмаганлигидан $\rho \to 0$ бўлганда охирги натижани ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{\sigma} u\, d\sigma = 4\pi u\,(x_1, y_1, z_1)$$

ёки

$$u\,(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\sigma} u\, d\sigma.$$

XVI БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§. Қатор. Қаторнинг йиғиндиси

1-таъриф.

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

чексиз сонлар кетма-кетлиги*) берилган бўлсин. Ушбу

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

ифода *сонли қатор* дейилади. Бунда $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ сонлар *қаторнинг ҳадлари* деб аталади.

2-таъриф. Қаторнинг олдинги n та чекли ҳадларининг йиғиндиси

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

қаторнинг n-қисмий йиғиндиси дейилади.

Қуйидаги қисмий йиғиндиларни қараймиз:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n. \end{aligned}$$

Агар $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ чекли лимит мавжуд бўлса, уни (1) *қаторнинг йиғиндиси* деб аталади ва *қатор яқинлашади дейилади.*

$S_n = 0$ $S \neq 0$

Агар $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ мавжуд бўлмаса (масалан, $n \to \infty$ да $s_n \to \infty$), (1) *қатор узоқлашади ва унинг йиғиндиси* бўлмайди.

Мисол. Ушбу

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (2)$$

қаторни текширамиз.

---

*) Агар n берилганда кетма-кетликнинг исталган u_n ҳадини топиш мумкин бўладиган қонун маълум бўлса, кетма-кетлик берилган деб ҳисобланади.

Бу қатор биринчи ҳади $a (a \neq 0)$ ва махражи q бўлган геометрик прогрессиядир.

Геометрик прогрессия олдинги n та ҳадининг йиғиндиси ($q \neq 1$ бўлганда):

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

ёки

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

1) Агар $|q| < 1$ бўлса, $n \to \infty$ да $q^n \to 0$, демак,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q} \right) = \frac{a}{1 - q}.$$

Демак, $|q| < 1$ бўлганда (2) қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

2) Агар $|q| > 1$ бўлса, $n \to \infty$ да $|q^n| \to \infty$ ва шунинг учун $n \to \infty$ да $\frac{a - aq^n}{1 - q} \to \pm \infty$, яъни $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ мавжуд эмас. Шундай қилиб, $|q| > 1$ бўлганда (2) қатор узоқлашади.

3) Агар $q = 1$ бўлса. (2) қатор

$$a + a + a + \dots$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда

$$s_n = n a, \qquad \lim_{n \to \infty} s_n = \infty,$$

яъни қатор узоқлашади.

4) Агар $q = -1$ бўлса, (2) қатор

$$a - a + a - a + \dots$$

кўринишда бўлади. Бу ҳолда:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ жуфт бўлганда } s_n = 0 \\ n \text{ тоқ бўлганда } s_n = a \end{array} \right\} \text{ бўлади.}$$

Демак, s_n нинг лимити бўлмайди, қатор узоқлашади.

Шундай қилиб, геометрик прогрессия (биринчи ҳади нолдан фарқ қилган) махражининг абсолют қиймати бирдан кичик бўлгандагина яқинлашади.

1-теорема. *Агар берилган* (1) *қаторнинг бир қанча ҳадларини ташлаш билан ҳосил қилинган қатор яқинлашса, берилган қаторнинг ўзи ҳам яқинлашади. Аксинча, агар берилган қатор яқинлашса, унинг бир қанча ҳадларини ташлаш билан ҳосил қилинган қатор ҳам яқинлашади.*

Бошқача айтганда: *қаторнинг чекли сондаги ҳадларини ташлаб юбориш унинг яқинлашишига таъсир этмайди.*

Исбот. Фараз этайлик, s_n (1) қатор дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси, c_k ташланган k та ҳадининг йиғиндиси (n етарли даражада катта бўлганда ҳамма ташланган ҳадлар s_n йиғиндида бўлишини эслатамиз), σ_{n-k} қаторнинг s_n йиғиндига кирувчи ва c_k га кирмайдиган ҳадларининг йиғиндиси бўлсин. У вақтда қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$s_n = c_k + \sigma_{n-k},$$

бунда c_k ўзгармас сон (n га боғлиқ эмас).

Охирги муносабатдан, агар $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ мавжуд бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ҳам мавжуд бўлиши, агар $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ мавжуд бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ ҳам мавжуд бўлиши келиб чиқади, бу эса теореманинг тўғрилигини исботлайди.

Параграфнинг охирида қаторларнинг иккита оддий хоссасини кўрсатамиз.

2-теорема. *Агар*

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{3}$$

қатор яқинлашса ва йиғиндиси s *га тенг бўлса,*

$$ca_1 + ca_2 + \ldots \tag{4}$$

қатор ҳам яқинлашади ва йиғиндиси cs *га тенг бўлади. бунда* c *бирор белгиланган ўзгармас сон.*

Исбот. (3) қаторнинг n-қисмий йиғиндисини s_n билан, (4) қаторникини эса σ_n билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\sigma_n = ca_1 + \ldots + ca_n = c(a_1 + \ldots + a_n) = cs_n.$$

Бундан

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (cs_n) = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs$$

бўлгани учун (4) қатор n-қисмий йигиндисининг лимити мавжуд эканлиги чиқади.

Демак, (4) қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси cs га тенг.

3-теорема. *Агар*

$$a_1 + a_2 + \ldots . \tag{5}$$

ва

$$b_1 + b_2 + \ldots . \tag{6}$$

қаторлар яқинлашса ва уларнинг йиғиндилари мос равишда $\bar{s}$ *ва* $\bar{\bar{s}}$ *га тенг бўлса, у ҳолда*

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots \tag{7}$$

ва

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots \tag{8}$$

қаторлар ҳам яқинлашади ва йиғиндилари мос равишда $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ *ва* $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$ *га тенг бўлади.*

Исбот. (7) қаторнинг яқинлашишини исботлаймиз. Унинг n-қисмий йиғиндисини σ_n билан (5) ва (6) қаторлар n-қисмий йиғиндиларини мос равишда $\bar{s}_n$ ва $\bar{\bar{s}}_n$ билан белгилаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + \\ + (b_1 + \ldots + b_n) = \bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n.$$

Бу тенгликда $n \to \infty$ да лимитга ўтсак:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (\bar{s}_n + \bar{\bar{s}}_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n + \lim_{n\to\infty} \bar{\bar{s}}_n = \bar{s} + \bar{\bar{s}}_n.$$

Шундай қилиб, (7) қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси $\bar{s} + \bar{\bar{s}}$ га тенг.

(8) қаторнинг яқинлашиши ва унинг йиғиндиси $\bar{s} - \bar{\bar{s}}$ га тенглиги ҳам шунинг сингари исбот қилинади.

(7) ва (8) қаторлар ҳақида, улар (5) ва (6) қаторларни **ҳадлаб** қўшиш ёки мос равишда айириш натижасида ҳосил қилинган дейилади.

2-§. Қатор яқинлашишининг зарурий аломати

Қаторларни текширишдаги асосий масалалардан бири берилган қаторнинг яқинлашиш ёки узоқлашиш масаласидир. Қуйида бу масалани ечиш учун асос бўладиган етарли аломатлар кўрсатилади. Бунда биз қатор яқинлашишининг зарурий аломатини қараймиз, яъни шундай шартни ўрганамизки, у бажарилмаганда қатор узоқлашади.

Теорема. *Агар қатор яқинлашса, n чексиз ўсиб борганда унинг n-ҳади нолга интилади.*

Исбот. Фараз қилайлик,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

қатор яқинлашсин, яъни

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

тенглик ўринли бўлсин, бунда s қаторнинг йиғиндиси (яъни белгиланган чекли сон); лекин у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$$

тенглик ҳам ўринли, чунки $n \to \infty$ да $(n-1) \to \infty$. Биринчи тенгликдан иккинчи тенгликни ҳадлаб айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

ёки

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0.$$

Бироқ

$$s_n - s_{n-1} = u_n.$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

талаб қилинган исбот ана шу.

Натижа. *Агар $n \to \infty$ да қаторнинг n-ҳади нолга интилмаса, қатор узоқлашади.*

Мисол.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$

қатор узоқлашади, чунки

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Қаралган аломат фақат зарурий, лекин етарли эмаслигини, яъни *n-ҳаднинг нолга интилишидан, қаторнинг яқинлашиши келиб чиқмаслигини, қатор узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкинлигини таъкидлаймиз.*

Масалан, *гармоник қатор* деб аталадиган ушбу

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

бўлса ҳам узоқлашади.

Буни исбот қилиш мақсадида гармоник қаторни батафсил ёзиб оламиз:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\ldots \qquad (1)$$

Энди ёрдамчи қатор ёзамиз:

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$

$$+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+$$

$$+\overbrace{\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}}^{16\text{ та қўшилувчи}}+\ldots \tag{2}$$

(2) қатор қуйидагича тузилган: биринчи ҳади 1, иккинчи ҳади $\frac{1}{2}$, учинчи ва тўртинчи ҳади $\frac{1}{4}$, бешинчидан саккизинчигача бўлган ҳадлари $\frac{1}{8}$, тўққизинчидан 16-гача бўлган ҳадлари $\frac{1}{16}$, 17-дан 32-гача бўлган ҳадлари $\frac{1}{32}$ га тенг ва ҳоказо.

(1) гармоник қаторнинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини $s_n^{(1)}$ билан ва (2) қаторнинг дастлабки n ҳадининг йиғиндисини $s_n^{(2)}$ билан белгилаймиз.

(1) қаторнинг ҳар бир ҳади (2) қаторнинг унга мос ҳадидан катта ёки унга тенг бўлгани учун $n > 2$ бўлганда

$$s_n^{(1)} > s_n^{(2)}. \tag{3}$$

n нинг 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 қийматлари учун (2) қаторнинг қисмий йиғиндиларини ҳисоблаймиз:

$$s_2 = 1+\frac{1}{2} = 1+1\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_4 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+2\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_8 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 1+3\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_{16} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ та қўшилувчи}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{ та қўшилувчи}} =$$

$$= 1+4\cdot\frac{1}{2},$$

$$s_{32} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ та қўшилувчи}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\Big)}_{8\text{ та қўшилувчи}}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{32}+\ldots+\left(\frac{1}{32}\right)\right.}_{16\text{ та қўшилувчи}} = 1+5\cdot\frac{1}{2};$$

$s_{2^6} = 1+6\cdot\frac{1}{2}$, $s_{2^7} = 1+7\cdot\frac{1}{2}$ ва умуман $s_{2^k} = 1+k\cdot\frac{1}{2}$ экани ҳам юқоридаги сингари ҳисобланади.

Шундай қилиб, k етарлича катта бўлганда (2) қаторнинг қисмий йиғиндилари ҳар қандай мусбат сондан катта бўлиши мумкин, яъни

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(2)} = \infty,$$

лекин, (3) муносабатдан

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \infty,$$

эканлиги келиб чиқади, яъни (1) гармоник қатор узоқлашади.

3-§. Мусбат ҳадли қаторларни таққослаш

Мусбат ҳадли иккита қатор берилган бўлсин:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots. \tag{2}$$

Бу қаторлар учун қуйидаги теоремалар ўринлидир.

1-теорема. *Агар* (1) *қаторнинг ҳадлари* (2) *қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмаса, яъни*

$$u_n \leqslant v_n \qquad (n = 1, 2. \ldots ,) \tag{3}$$

ва (2) *қатор яқинлашса*, (1) *қатор ҳам яқинлашади.*

Исбот. Биринчи ва иккинчи қаторнинг қисмий йиғиндиларини мос равишда s_n ва σ_n билан белгилаймиз:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

(3) шартдан

$$s_n \leqslant \sigma_n. \tag{4}$$

экани келиб чиқади.

(2) қатор яқинлашувчи бўлгани сабабли унинг қисмий йиғиндисининг σ лимити мавжуд бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

(1) ва (2) қаторлар ҳадларининг мусбатлигидан $\sigma_n < \sigma$ экани чиқади. У ҳолда (4) тенгсизликка асосан

$$s_n < \sigma.$$

Шундай қилиб, биз s_n қисмий йиғиндининг чегараланган эканлигини исбот қилдик. n ортиши билан s_n қисмий йиғиндининг ўсишини кўрамиз, қисмий йиғиндилар кетма-кетлигининг ўсувчи ва чегараланган эканлигидан эса унинг лимитга*) эга эканлиги чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

бунда

$$s \leqslant \sigma,$$

эканлиги равшан.

1-теоремага асосан баъзи бир қаторларнинг яқинлашиши ҳақида фикр юритиш мумкин.

1-мисол. Ушбу қатор

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

яқинлашади, чунки унинг ҳадлари

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қаторнинг мос ҳадларидан кичик.

Аммо кейинги қатор яқинлашади, чунки унинг ҳадлари иккинчисидан бошлаб, махражи $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия тузади. Бу қаторнинг йиғиндиси $1\frac{1}{2}$ га тенг. Демак, 1-теоремага асосан, берилган қатор ҳам яқинлашади ва йиғиндиси $1\frac{1}{2}$ дан ортмайди.

2-теорема. *Агар* (1) *қаторнинг ҳадлари* (2) *қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлмаса, яъни*

$$u_n \geqslant v_n, \tag{5}$$

бўлса ва (2) *қатор узоқлашса,* (1) *қатор ҳам узоқлашади.*

Исбот. (5) шартдан

$$s_n \geqslant \sigma_n, \tag{6}$$

эканлиги келиб чиқади.

(2) қаторнинг ҳадлари мусбат бўлгани учун n ўсганда унинг қисмий йиғиндиси σ_n ҳам ўсади, лекин қатор узоқлашувчидир, шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty.$$

Лекин (6) тенгсизликка мувофиқ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

яъни (1), қатор узоқлашади.

---

*) s_n ўзгарувчи лимитга эга эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлишининг битта белгисини эслаймиз (I т. II бобининг 5-§ даги 7-теоремага қаранг): „агар ўзгарувчи чегараланган ва ўсувчи бўлса, у лимитга эга бўлади" Бу ҳолда s_n йиғиндининг кетма-кетлиги ўсувчи ва чегараланган, демак, лимитга эга, яъни қатор яқинлашади.

2-мисол.

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

қатор узоқлашади, чунки унинг ҳадлари (иккинчидан бошлаб) узоқлашувчи бўлган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

гармоник қаторнинг мос ҳадларидан катта.

1-изоҳ. Юқорида исботланган аломатлар (1-ва 2-теоремалар) фақат мусбат ҳадли қаторлар учун тўғри. 1-ва 2-қаторларнинг баъзи ҳадлари ноллар бўлган ҳол учун ҳам улар ўз кучида қолади. Аммо қаторнинг ҳадлари орасида манфий сонлар бўлса, бу аломатлар тўғри бўлмайди.

2-изоҳ. Агар (3) ёки (6) тенгсизлик ҳамма $n=1, 2, 3, \ldots$ учун эмас, балки фақат $n \geqslant N$ учун бажарила бошласа, шу ҳолдагина 1-ва 2-теоремалар тўғридир.

4-§. Даламбер аломати

Теорема (Даламбер аломати). *Агар мусбат ҳадли*

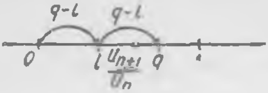
$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

қатор $(n+1)$ ҳадининг n-ҳадига нисбати $n \to \infty$ да l (чекли) лимитга эга бўлса, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l \tag{2}$$

бўлса, у вақтда:

1) $l<1$ *бўлган ҳолда қатор яқинлашади,*
2) $l>1$ *бўлган ҳолда қатор узоқлашади.*



358-расм.

($l=1$ бўлган ҳолда теорема қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақидаги саволга жавоб бера олмайди.)

Исбот. 1) $l<1$ бўлсин. $l<q<1$ муносабатни қаноатлантирувчи q сонни қараймиз (358-расм).

Лимитнинг таърифидан ва (2) муносабатдан бирор N номердан бошлаб, n нинг барча қийматлари учун, яъни $n \leqslant N$ учун

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q, \tag{2'}$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши чиқади.

Ҳақиқатан, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ миқдор l га интилганлиги учун $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ миқдор билан l сон орасидаги айирмани (бирор N номердан бошлаб), абсолют қиймати ҳар қандай мусбат сондан кичик, жумладан, $q - l$ дан кичик бўлади, яъни

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < q - l.$$

Охирги тенгсизликдан (2′) тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликни N номердан бошлаб, n нинг турли қийматлари учун ёзиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} u_{N+1} < qu_N, \\ u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N, \\ u_{N+3} < qu_{N+2} < q^3u_N, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

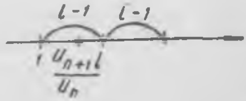
. . . .

Энди қуйидаги икки қаторни текширамиз:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots , \qquad (1)$$

$$u_N + qu_N + q^2u_N + \ldots . \qquad (1')$$

(1′) қатор мусбат $q < 1$ махражли геометрик прогрессиядир. Демак, бу қатор яқинлашади. (1) қаторнинг ҳадлари u_{N+1} дан бошлаб (1′) қаторнинг ҳадларидан кичик. 3-параграфдаги 1-теоремага ва 1-параграфдаги 1-теоремаларга асосан (1) қатор яқинлашади.



359-расм.

2) $l > 1$ бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ (бунда $l > 1$) тенгликдан, бирор N номердан бошлаб, яъни $n \geqslant N$ учун

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

(359-расм) ёки барча $n \geqslant N$ учун $u_{n+1} > u_n$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Лекин бу тенгсизлик қаторнинг ҳадлари $N+1$ номердан бошлаб ўсишини билдиради. Шунинг учун қаторнинг умумий ҳади нолга интилмайди. Демак, қатор узоқлашади.

1-изоҳ. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ бўлган ҳолда ҳам қатор узоқлашади. Бу агар $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ бўлса, бирор $n = N$ номердан бошлаб, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ёки $u_{n+1} > u_n$ тенглик тўғри бўлишидан келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Бунда

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\frac{1}{n!},\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Қатор яқинлашади.

2-мисол. Ушбу

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Бунда

$$u_n=\frac{2^n}{n},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=2\frac{n}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}=2>1.$$

Қатор узоқлашади, унинг умумий ҳади u_n чексизликка интилади.

2-изоҳ. Даламбер аломати фақат $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ мавжуд ва 1 дан фарқли бўлган ҳолда берилган мусбат қатор яқинлашадими деган саволга жавоб беради. Агар бу лимит мавжуд бўлмаса ёки мавжуд бўлса-ю, лекин $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ бўлганда қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин бўлганлигидан Даламбер аломати қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини аниқлаш учун имкон бермайди. Бундай қаторларнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани ҳал қилиш учун бирор бошқа аломатдан фойдаланиш керак.

3-изоҳ. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, лекин $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ нисбат барча n номерлар учун уларнинг бирортасидан бошлаб, бирдан катта бўлса, қатор узоқлашади. Бу эса агар $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ бўлса, $u_{n+1}>u_n$ бўлинишидан ва $n\to\infty$ да умумий ҳад нолга интилмаслигидан келиб чиқади.

Айтилганларни тасвир этадиган мисоллар қараймиз.

3-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Бунда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1.$$

Бу ҳолда қатор узоқлашади, чунки $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ бўлганлиги сабабли барча n учун:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1.$$

4-мисол. Ушбу

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

гармоник қаторга Даламбер аломатини татбиқ этиб, $u_n=\frac{1}{n}$, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ эканлигини, демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

бўлишини топамиз. Демак, берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини Даламбер аломатига асосан аниқлаш мумкин эмас. Лекин, биз илгари гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканлигини бошқа йўл билан кўрсатган эдик.

5-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Бунда

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$$

Даламбер аломатига асосан қаторнинг яқинлашиши ҳақида хулоса чиқариб бўлмайди, лекин бошқа мулоҳазаларга кўра бу қаторнинг яқинлашувчи эканлигини аниқлаш мумкин. Энди

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

эканлигини эътиборга олиб, берилган қаторни

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$

шаклда ёзиш мумкин. Қавсларни очиб, қисқартиргандан сўнг, бу қатор дастлабки n та ҳадининг қисмий йиғиндиси қуйидагича бўлади:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

яъни қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси 1 га тенг.

5-§. Коши аломати

Теорема (Коши аломати) *Агар мусбат ҳадли қатор*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

учун $\sqrt[n]{u_n}$ *миқдор* $n \to \infty$ *да* l *чекли лимитга эга, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

бўлса,

1) $l < 1$ *бўлган ҳолда қатор яқинлашади,*

2) $l > 1$ *бўлган ҳолда қатор узоқлашади.*

Исбот. 1) $l < 1$ бўлсин. $l < q < 1$ муносабатни қаноатлантирувчи сонни қараймиз.

Бирор $n = N$ номердан бошлаб

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < q - l$$

муносабат ўринли бўлади, бундан

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

ёки ҳамма $n > N$ учун $u_n < q^n$ эканлиги келиб чиқади.

Энди ушбу икки қаторни қараб чиқамиз:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots, \qquad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots \qquad (1')$$

(1′) қатор яқинлашади, чунки унинг ҳадлари камаювчи геометрик прогрессия ташкил этади. (1) қаторнинг ҳадлари u_N дан бошлаб (1′) қаторнинг ҳадларидан кичик. Демак, (1) қатор яқинлашади.

2) $l > 1$ бўлсин. У вақтда бирор $n = N$ номердан бошлаб,

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

ёки

$$u_n > 1$$

бўлади. Аммо қаралаётган қаторнинг ҳамма ҳадлари u_N дан бошлаб 1 дан катта бўлса, қатор узоқлашади, чунки унинг умумий ҳади нолга интилмайди.

Мисол. Ушбу

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Коши аломатидан фойдаланамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Қатор яқинлашади

Изоҳ. Даламбер аломатидаги каби,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l=1,$$

бўлган ҳол қўшимча текширишни талаб қилади. Бу шартни қаноатлантирувчи қаторлар орасида яқинлашувчи қатор ҳам, узоқлашувчи қатор ҳам учраши мумкин. Масалан, гармоник қатор (маълумки, у узоқлашади) учун

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=0$ эканини исбот қиламиз. Ҳақиқатан,

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}.$$

Бунда касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади. Лопитал қоидасидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{1}=0.$$

Шундай қилиб, $\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 0$ лекин, у ҳолда $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\to 1$, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1.$$

Ушбу

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қатор учун ҳам

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1,$$

тенглик ўринлидир, лекин бу қатор яқинлашади, чунки қаторнинг биринчи ҳади ташланса, унинг қолган ҳадлари

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

яқинлашувчи қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлади (4-параграфдаги 5-мисолга қаранг).

6-§. Қатор яқинлашишининг интеграл аломати

Теорема. *Ушбу*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

қаторнинг ҳадлари мусбат, лекин ўсувчи бўлмасин, яъни

$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\ldots,$$

ва $f(x)$ шундай ўсмайдиган узлуксиз функция бўлиб,

$$f(1)=u_1;\quad f(2)=u_2,\ldots,\quad f(n)=u_n \tag{2}$$

бўлсин.

Бу ҳолда қуйидаги даъволар ўринлидир:

1) *агар*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx,$$

хосмас интеграл яқинлашса (I-том XI бобининг 7-параграфига қаранг), *(1) қатор ҳам яқинлашади.*

2) *агар бу интеграл узоқлашса (1) қатор ҳам узоқлашади.*

Исбот. Қатор ҳадларининг 1, 2, 3, ..., n, $n+1$ номерларини абсцисса ўқига, u_1, u_2, ..., u_n, ... ҳадларининг мос қийматларини эса ордината ўқига қўйиш билан қаторнинг ҳадларини геометрик усулда тасвирлаймиз (360-расм).

Шу чизманинг ўзида (2) шартни қаноатлантирувчи

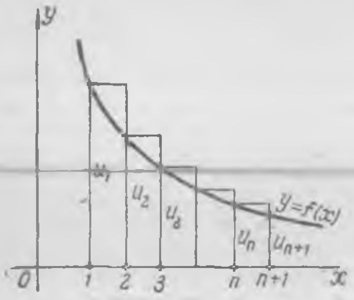
$$y=f(x),$$

узлуксиз ўсмайдиган функциянинг графигини ясаймиз. 360-расмни кўздан кечириб, ясалган тўғри тўртбурчаклардан биринчисининг асоси 1 ва баландлиги $f(1)=u_1$ эканлигини кўрамиз. Демак, бу тўғри тўртбурчакнинг юзи u_1, иккинчи тўғри тўртбурчакнинг юзи u_2 бўлади ва ҳоказо. Ниҳоят, ясалган тўғри тўртбурчаклардан охиргисининг (n-сининг) юзи u_n бўлади. Ясалган тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндиси қаторнинг дастлабки n та ҳадининг s_n йиғиндисига тенг. Иккинчи томондан бу тўғри тўртбурчаклардан ташкил топган зинапоясимон шакл, $y=f(x)$ эгри чизиқ ва $x=1$, $x=n+1$,

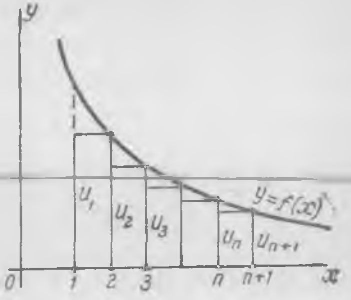
$y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳани ўз ичига олади; бу соҳанинг юзи $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, интегралга тенг. Демак,

$$s_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Энди 361- расмни қараб чиқамиз. Бунда ясалган тўғри тўрт бурчаклардан (чапдан) биринчисининг баландлиги u_2, демак,



360- расм.



361- расм.

унинг юзи ҳам u_2. Иккинчи тўғри тўртбурчакнинг юзи u_3 ва ҳоказо. Ясалган тўғри тўрт бурчаклардан охиргисининг юзи u_{n+1}. Демак, ясалган барча тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндиси, қаторнинг иккинчи ҳадидан бошлаб $(n+1)$-гача бўлган ҳадларнинг йиғиндисига, яъни $s_{n+1}-u_1$ га тенг. Иккинчи томондан, бу тўғри тўртбурчаклар ташкил этган зинасимон шакл $y=f(x)$ эгри чизиқ ва $x=1$, $x=n+1$, $y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли шаклнинг ичида ётишини кўриш осон. Бу эгри чизиқли шаклнинг юзи $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ интегралга тенгдир. Демак,

$$s_{n+1}-u_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

бундан

$$s_{n+1} < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1. \tag{4}$$

Энди иккала ҳолни қараймиз.

1. Фараз қилайлик, $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ интеграл яқинлашсин, яъни чекли қийматга эга бўлсин.

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < \int\limits_1^\infty f(x)\,dx,$$

бўлгани учун, (4) тенгсизликка асосан,

$$s_n < s_{n+1} < \int\limits_1^\infty f(x)\,dx + u_1,$$

яъни n нинг ҳамма қийматларида s_n қисмий йиғинди чегараланганлигича қолади. Бироқ n ўсиши билан s_n ўсади, чунки ҳамма u_n ҳадлар мусбат. Демак, $n \to \infty$ да s_n чекли лимитга эга:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

яъни қатор яқинлашади.

2. Сўнгра $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \infty$ деб фараз қиламиз. Бу эса n ўсганда $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$ чексиз ўсади, демакдир. Аммо у ҳолда (3) тенгсизликка асосан n ўсганда s_n ҳам чексиз ўсади, яъни қатор узоқлашади.

Шундай қилиб, теорема тўла исбот қилинди.

Изоҳ. Агар (1′) тенгсизлик фақат бирор N дан бошлаб бажарилса, исботланган теорема тўғрилигича қолади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. $f(x) = \frac{1}{x^p}$ деб олиб, интеграл аломатини татбиқ этамиз. Бу функция теореманинг ҳамма шартларини қаноатлантиради. Қуйидаги интегрални қараймиз:

$$\int\limits_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p \neq 1 \text{ бўлганда } \dfrac{1}{1-p}\, x^{1-p}\Big|_1^N = \dfrac{1}{1-p}\,(N^{1-p} - 1), \\ p = 1 \qquad \text{бўлганда } \ln x\Big|_1^N = \ln N. \end{cases}$$

N ни чексизликка интилтириб, турли ҳолларда хосмас интегралнинг яқинлашиш ёки яқинлашмаслигини аниқлаймиз.

Шунга кўра p нинг турли қийматларида қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақида фикр юритиш мумкин.

$p > 1$ бўлганда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$, яъни интеграл чекли, шунинг учун қатор яқинлашади;

$p < 1$ бўлганда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty$, яъни интеграл чексиз, қатор узоқлашади.

$p = 1$ бўлганда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty$, яъни интеграл чексиз, қатор узоқлашади,

Бу қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги саволга илгари қараб ўтилган Даламбер аломати ҳам, Коши аломати ҳам жавоб бера олмаслигини кўрамиз, чунки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1.$$

7-§. Ишоралари навбатлашувчи қаторлар. Лейбниц теоремаси

Биз ҳозиргача мусбат ҳадли қаторларни қараб келдик. Бу параграфда ҳадларининг ишоралари навбатлашувчи қаторларни, яъни

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \qquad (1)$$

кўринишдаги қаторларни текширамиз, бунда: $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ мусбат ҳадлар.

Лейбниц теоремаси. *Агар ишоралари навбатлашувчи*

$$u_1 - u_2 + u_3 + u_4 + \dots (u_n > 0) \qquad (1)$$

қаторнинг ҳадлари

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \qquad (2)$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (3)$$

бўлса, (1) *қатор яқинлашади, унинг йиғиндиси мусбат бўлади ва биринчи ҳаддан катта бўлмайди.*

Исбот. (1) қаторнинг биринчи $n = 2m$ та ҳадининг йиғиндисини қараймиз:

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

(2) шартдан қавс ичидаги ҳар бир ифоданинг мусбат эканлиги чиқади. Демак, s_{2m} йиғинди мусбат, яъни

$$s_{2m} > 0,$$

бўлиб, m ўсиши билан ўсади. Энди бу йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$s_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}.$$

(2) шартга асосан қавсларнинг ҳар бири мусбат. Шунинг учун бу қавсларни u_1 дан айирсак, u_1 дан кичик сон ҳосил бўлади, яъни

$$s_{2m}<u_1.$$

Шундай қилиб, биз m ўсганда s_{2m} нинг ўсишини ва юқоридан чегараланганлигини аниқладик. Бундан s_{2m} нинг лимити s эканлиги келиб чиқади:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m}=s, \qquad 0<s<u_1.$$

Лекин қаторнинг яқинлашиши ҳали исбот қилингани йўқ; биз фақат „жуфт“ қисмий йиғиндилар кетма-кетлигининг лимити s эканлигини исбот қилдик. Энди, „тоқ“ қисмий йиғиндилар ҳам шу s лимитга интилишини исбот қиламиз.

Бунинг учун (1) қаторнинг дастлабки $n=2m+1$ ҳадлари йиғиндисини текширамиз:

$$s_{2m+1}=s_{2m}+u_{2m+1}.$$

(8) шартга асосан $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1}=0$, демак,

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} s_{2m}+\lim_{m\to\infty} u_{2m+1}=\lim_{m\to\infty} s_{2m}=s.$$

Бу билан биз, n жуфт бўлганда ҳам, тоқ бўлганда ҳам $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$ эканлигини исбот қилдик. Демак, (1) қатор яқинлашади.

1-изоҳ. Агар (2) тенгсизликлар бирор N дан бошлаб бажарилса, Лейбниц теоремаси тўғридир.

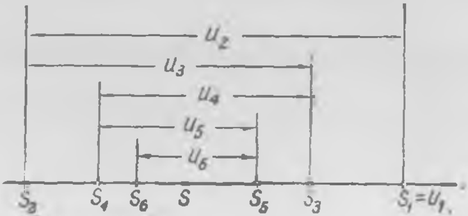
2-изоҳ. Лейбниц теоремасининг геометрик тасвири қуйидагича бўлади: сонлар ўқида

$$s_1=u_1, \quad s_2=u_1-u_2=s_1-u_2, \quad s_3=s_2+u_3, \quad s_4=s_3-u_4, \quad s_5=s_4+u_5 \quad \text{ва ҳоказо}$$

қисмий йиғиндиларни жойлаштирамиз (362- расм).

Қисмий йиғиндиларга мос нуқталар қаторнинг йиғиндисини тасвирловчи бирор s нуқтага яқинлашиб боради. Бу ҳолда жуфт қисмий йиғиндиларга мос нуқталар s дан чап томонда, тоқ қисмий йиғиндиларга мос нуқталар эса s дан ўнг томонда бўлади.

3-изоҳ. Агар ишоралари навбатлашувчи қатор Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантирса, унинг s йиғиндисини s_n қисмий йиғинди билан алмаштирганда ҳосил бўладиган хатони баҳолаш қийин эмас. Бундай алмаштиришда қаторнинг u_{n+1} ҳадидан бошлаб ҳамма ҳадларини ташлаб юборамиз. Лекин бу сонларнинг ўзлари ҳам йиғиндисига абсолют қиймат жиҳатидан шу қаторнинг биринчи ҳадидан кичик (яъни



362- расм.

u_{n+1} дан кичик) бўлган ишоралари навбатлашувчи қатор ҳосил қилади. Демак, s ни s_n га алмаштирганда қилинган хато ташланган ҳадлардан биринчисининг абсолют қийматидан ортмайди.

1-мисол. Ушбу қатор

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

яқинлашади, чунки

$$1)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Бу қатор биринчи n та ҳадининг йиғиндиси:

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

берилган қаторнинг s йиғиндисидан $\frac{1}{n+1}$ дан кичик миқдорга фарқ қилади.

2-мисол. Ушбу қатор

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$$

Лейбниц теоремасига асосан яқинлашади.

8-§. Ўзгарувчан ишорали қаторлар. Абсолют ва шартли яқинлашиш

Агар қаторнинг ҳадлари орасида мусбатлари ҳам, манфийлари ҳам бўлса, қатор *ўзгарувчан ишорали* қатор деб аталади.

Олдинги параграфда кўриб ўтилган ишоралари навбатлашувчи қаторлар ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳолидир.

Биз бу ерда ўзгарувчан ишорали қаторларнинг баъзи хоссаларини ўрганамиз.

Бунда биз олдинги параграфда қабул қилинган келишувдан четлаб, $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, сонларни мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин деб фараз қиламиз.

Энг аввал ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашишининг бир муҳим етарли шартини келтирамиз.

1-теорема. *Ўзгарувчан ишорали қатор*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{2}$$

қатор яқинлашса, берилган ўзгарувчан ишорали қатор ҳам яқинлашади.

Исбот. (1) ва (2) қаторларнинг биринчи n та ҳадларининг йиғиндилари мос ҳолда s_n ва σ_n бўлсин.

Сўнгра, s'_n берилган қаторнинг биринчи n та ҳади орасидаги ҳамма мусбат ҳадларнинг йиғиндиси, s''_n эса ҳамма манфий ҳадлар абсолют қийматларининг йиғиндиси бўлсин; у ҳолда

$$s_n = s'_n - s''_n, \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Шартга асосан σ_n йиғиндининг лимити σ бўлади. s'_n ва s''_n мусбат ўсувчи миқдорлар, лекин σ дан кичик. Демак, улар s' ва s'' лимитларга эга бўлади. $s_n = s'_n - s''_n$ муносабатдан, s_n йиғинди ҳам лимитга эга ва у лимит $s' - s''$ айирмага тенглиги келиб чиқади, яъни (1) ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашади.

Исбот қилинган теорема баъзи бир ўзгарувчан ишорали қаторларнинг яқинлашиши ҳақида фикр юритишгагина имкон беради. Бу ҳолда ўзгарувчан ишорали қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани текшириш мусбат ҳадли қаторларни текширишга келтирилади.

Иккита мисол қараб чиқамиз.

1-мисол. *Ушбу*

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots, \tag{3}$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин, бунда α исталган сон.

Ечиш. Берилган қатор билан бирга

$$\left|\frac{\sin \alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots \tag{4}$$

ва

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{5}$$

қаторларни қараймиз.

(5) қатор яқинлашади (6- параграфга қаранг). (4) қаторнинг ҳадлари (5) қаторнинг мос ҳадларидан катта эмас; демак, (4) қатор ҳам яқинлашади. Лекин, бу ҳолда, исбот қилинган теоремага асосан, берилган (3) ўзгарувчан ишорали қатор ҳам яқинлашади.

2- мисол. Ушбу

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{3^2}+\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{3^3}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}+\ldots \tag{6}$$

қаторнинг яқинлашиши текширилсин.

Ечиш. Берилган қатор билан бирга ушбу

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots \tag{7}$$

қаторни ҳам қараймиз.

Бу қатор яқинлашади, чунки у махражи $\frac{1}{3}$ га тенг бўлган камаювчи геометрик прогрессиядир. У вақтда берилган (6) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади; чунки унинг ҳадларининг абсолют қийматлари (7) қаторнинг мос ҳадларидан кичик.

Юқорида исбот қилинган яқинлашиш аломати ўзгарувчан ишорали қаторнинг яқинлашиши учун етарлигина бўлиб, аммо зарурий эмаслигини кўрамиз. Шундай ўзгарувчан ишорали қаторлар ҳам борки, уларнинг ўзлари яқинлашувчи бўлса ҳам, лекин ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторлар узоқлашувчи бўлади. Шу муносабат билан ўзгарувчан ишорали қаторнинг абсолют ва шартли яқинлашиши ҳақидаги тушунчани киритиш ҳамда бу тушунчалар бўйича ўзгарувчан ишорали қаторларни синфларга ажратиш фойдалидир.

Таъриф. Ушбу ўзгарувчан ишорали қатор

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{2}$$

қатор яқинлашса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи* дейилади.

Агар (1) ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашса, лекин унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган (2) қатор узоқлашса, берилган (1) ўзгарувчан ишорали қатор *шартли* ёки *ноабсолют яқинлашувчи қатор* деб аталади.

3- Мисол. Ушбу ўзгарувчан ишорали қатор $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ шартли яқинлашувчи қатордир, чунки унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган гармоник қатор $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ узоқлашувчидир. Қаторнинг ўзи яқинлашади, буни Лейбниц аломати ёрдами билан текшириб кўриш осон.

4-мисол. Ушбу ўзгарувчан ишорали қатор $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots$ абсолют яқинлашувчидир, чунки унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор: $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$ яқинлашувчи, бу 4-параграфда кўрсатилган.

Абсолют яқинлашиш тушунчаси ёрдами билан 1-теоремани қуйидагича таърифлайдилар: *ҳар қандай абсолют яқинлашувчи қатор яқинлашувчидир.*

Қуйида абсолют яқинлашувчи ва шартли яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларини (исботсиз) келтирамиз.

2-теорема. *Агар қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, унинг ҳадларининг ўринлари ихтиёрий равишда алмаштирилганда ҳам у абсолют яқинлашувчанлигича қолади. Бу ҳолда қаторнинг йиғиндиси қатор ҳадларининг тартибига боғлиқ бўлмайди.*

Бу хосса шартли яқинлашувчи қаторлар учун ўз кучини йўқотади.

3-теорема. *Агар қатор шартли яқинлашса, ихтиёрий равишда олинган A сони қандай бўлишидан қатъи назар, бу қаторнинг ҳадларини қаторнинг йиғиндиси шу A сонининг ўзига тенг бўладиган қилиб алмаштириш мумкин. Шу билан бирга шартли яқинлашувчи қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштириш мумкинки, бу ўрин алмаштиришдан кейин ҳосил бўлган қатор узоқлашувчи бўлиб қолади.*

Бу теоремаларнинг исботлари биз ўрганаётган курс доирасига кирмайди. Уларнинг исботларини анча тўлароқ дарсликлардан топиш мумкин (масалан, Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления", 1962, II том, 319—320-бетга қаранг).

Шартли яқинлашувчи қатор ҳадларининг ўринлари алмаштирилганда, унинг йиғиндиси ўзгариши мумкинлигини кўриш учун қуйидаги мисолни қараймиз.

5-мисол. Ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{8}$$

ўзгарувчан ишорали қатор ноабсолют яқинлашади. Унинг йиғиндисини s билан белгилаймиз. Маълумки, $s>0$ (8) қатор ҳадларининг ўринларини ҳар бир мусбат ҳаддан кейин иккита манфий ҳад келадиган қилиб алмаштирамиз:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\dots \tag{9}$$

Ҳосил қилинган қаторнинг яқинлашишини ва унинг s' йиғиндиси (8) қаторнинг йиғиндисидан икки марта кичиклигини, яъни $\frac{1}{2}$ s га тенглигини исбот қиламиз. (8) ва (9) қаторларнинг қисмий йиғиндиларини s_n ва s_n' билан белгилаймиз. (9) қатор $3k$ ҳадининг йиғиндисини қараймиз:

$$s'_{3k}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k},$$

Демак,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}s_{2k}=\frac{1}{2}s.$$

Сўнгра,

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s,$$

$$\lim_{k\to\infty}s'_{3k+2}=\lim_{k\to\infty}\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty}s'_n=s'=\frac{1}{2}s$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, бу қаралган ҳолда қаторнинг йиғиндиси, унинг ҳадлари ўринларини алмаштиргандан кейин ўзгарди (икки марта камайди).

9- §. Функционал қаторлар

Агар $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ қаторнинг ҳадлари x нинг функциялари бўлса, бу қатор *функционал қатор* дейилади.

Ушбу:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

функционал қаторни қараймиз.

x га аниқ сон қийматлар бериб, турли сонли қаторларни ҳосил қиламиз, булар яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлиши мумкин.

x нинг функционал қатор яқинлашадиган қийматлари тўплами шу қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

Маълумки, қаторнинг яқинлашиш соҳасидаги йиғиндиси x нинг бирор функциясидир. Шунинг учун функционал қаторнинг йиғиндиси $s(x)$ орқали белгиланади.

Мисол.

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$$

функционал қаторни қараймиз.

Бу қатор x нинг $(-1,1)$ интервалдаги ҳамма қийматларида, яъни x нинг $|x|<1$ шартни қаноатлантирувчи ҳамма қийматларида яқинлашади. x нинг $(-1,1)$ интервалдаги ҳамма қийматларида қаторнинг йиғиндиси $\frac{1}{1-x}$ (махражи x га тенг бўлган камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндиси) га тенг. Шундай қилиб, берилган қатор $(-1,1)$ интервалда

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots,$$

қаторнинг йиғиндиси бўлган

$$s(x)=\frac{1}{1-x}$$

функцияни аниқлайди.

(1) қатор биринчи n та ҳадининг йиғиндисини $s_n(x)$ билан белгилаймиз. Агар бу қатор яқинлашса ва унинг йиғиндиси $s(x)$ га тенг бўлса, у ҳолда

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x)$$

бўлади, бунда $r_n(x)$ ушбу $u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots$ қаторнинг йиғиндисидир, яъни

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots .$$

Бу ҳолда $r_n(x)$ миқдор (1) *қаторнинг қолдиғи* дейилади. Қаторнинг яқинлашиш соҳасидаги x нинг барча қийматлари учун $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$ муносабат ўринлидир, шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[s(x)-s_n(x)]=0,$$

яъни яқинлашувчи қаторнинг $r_n(x)$ қолдиғи $n\to\infty$ да нолга интилади.

10-§. Кучайтирилган қаторлар

Таъриф. Агар ҳадлари мусбат бўлган шундай

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n+\dots \tag{1}$$

сонли яқинлашувчи қатор мавжуд бўлиб, x нинг берилган соҳадан барча қийматлари учун:

$$|u_1(x)|\leqslant\alpha_1, \quad |u_2(x)|\leqslant\alpha_2, \dots, \quad |u_n(x)|\leqslant\alpha_n+\dots \tag{2}$$

муносабат бажарилса,

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\dots+u_n(x)+\dots \tag{3}$$

функционал қатор x нинг бирор ўзгариш соҳасида *кучайтирилган қатор* деб аталади. Бошқача айтганда, агар қаторнинг ҳар бир ҳади абсолют қиймати бўйича ҳадлари мусбат бўлган бирор яқинлашувчи сонли қаторнинг мос ҳадидан катта бўлмаса, бундай қатор *кучайтирилган қатор* дейилади.

Масалан,

$$\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$$

қатор бутун Ox ўқда кучайтирилган қатордир. Ҳақиқатан, x нинг ҳамма қийматлари учун ушбу

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

муносабат бажарилади ва маълумки,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қатор яқинлашади.

Бевосита таърифнинг ўзидан бирор соҳада кучайтирилган қатор шу соҳанинг барча нуқталарида абсолют яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади (8- параграфга қаранг). Бундан ташқари кучайтирилган қаторнинг қуйидаги муҳим хоссаси ҳам бор.

Теорема. Ушбу *функционал қатор*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ \ldots\ +u_n(x)+\ \ldots$$

$[a,\ b]$ кесмада кучайтирилган қатор бўлсин. $s(x)$ бу қаторнинг йиғиндиси, $s_n(x)$ бу қатор биринчи n та ҳадининг йиғиндиси бўлсин. Бу ҳолда ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N мусбат сон топиладики, барча $n \geqslant N$ да $[a\ b]$ кесмада олинган ҳар қандай x учун

$$|s(x)-s_n(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. (1) қаторнинг йиғиндисини σ билан белгилаймиз:

$$\sigma=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots,$$

у ҳолда

$$\sigma=\sigma_n+\varepsilon_n,$$

бунда σ_n — (1) қатор биринчи n та ҳадининг йиғиндиси, ε_n эса бу қатор барча қолган ҳадларининг йиғиндиси, яъни

$$\varepsilon_n=\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots$$

Бу қатор яқинлашади шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma,$$

демак,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Энди (3) функционал қаторнинг йиғиндисини

$$s(x) = s_n(x + r_n(x)$$

кўринишда ёзамиз, бунда

$$s_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$
$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

(2) шартдан

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant \alpha_{n+1}, \ |u_{n+2}(x)| \leqslant \alpha_{n+2}, \ \ldots$$

эканлиги чиқади, шунга асосан қаралаётган соҳадаги барча x учун

$$r_n(x) | \leqslant \varepsilon_n.$$

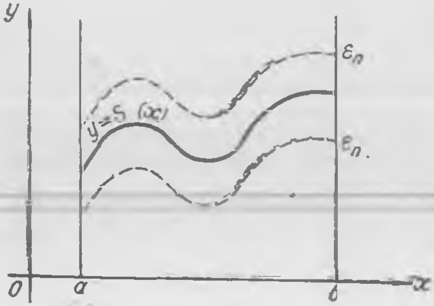
Шундай қилиб, $[a, b]$ кесмада олинган барча x учун

$$s(x) - s_n(x \ | < \varepsilon_n,$$

бунда $n \to \infty$ да $\varepsilon_n \to 0$.

1-изоҳ. Олинган натижани геометрик усулда қуйидагича тасвирлаш мумкин.

$y = s(x)$ функциянинг графигини қараймиз. Бу эгри чизиқнинг икки тарафида $2\varepsilon_n$ кенгликда полосалар, яъни $y = s(x) + \varepsilon_n$ ва $y = s(x) - \varepsilon_n$ (363-расм) эгри чизиқлар ясаймиз. У вақтда ε_n ҳар қандай бўлганда ҳам $s_n(x)$ функциянинг графиги бутунлайича қаралаётган полоса ичида ётади. Кейинги ҳамма қисмий йиғиндиларнинг графиклари ҳам шу полоса ичида ётади.



363-расм.

2-изоҳ. (a, b) кесмада яқинлашувчи бўлган ҳар қандай функционал қатор ҳам исбот этилган теоремадаги хоссага эга бўлавермайди. Лекин кўрилган хоссага эга бўлган кучайтирилмаган қаторлар ҳам мавжуддир. Кўрсатилган хоссага эга бўлган ҳар қандай қатор $[a, b]$ *кесмада текис яқинлашувчи қатор* дейилади.

Шундай қилиб, *агар ихтиёрий ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер топилса ва барча $n \geqslant N$ бажарилганда $[a, b]$ кесмада олинган ихтиёрий x учун*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ *функционал қатор* $[a, b]$ *кесмада текис яқинлашувчи дейилади.*

Исбот қилинган теоремага асосан кучайтирилган қатор текис яқинлашувчи қатор бўлади.

11- §. Қатор йиғиндисининг узлуксизлиги

Бирор $[a, b]$ кесмада яқинлашувчи узлуксиз функциялардан тузилган

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

қатор берилган бўлсин.

Биз II бобда (I том) чекли сондаги узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси узлуксиз функция бўлиши ҳақидаги теоремани исбот қилган эдик. Қаторнинг (чексиз кўп сондаги қўшилувчилардан тузилган) йиғиндиси учун бу хосса ўз кучини йўқотади. Ҳадлари узлуксиз бўлган баъзи бир функционал қаторларнинг йиғиндиси узлуксиз функция бўлади, ҳадлари узлуксиз бўлган бошқа функционал қаторларнинг йиғиндиси узлукли функция бўлади.

Мисол. Ушбу:

$$(x^{\frac{1}{3}}-x)+(x^{\frac{1}{5}}-x^{\frac{1}{3}})+(x^{\frac{1}{7}}-x^{\frac{1}{5}})+\ldots+(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n+1}})+\ldots$$

қаторни қараймиз. Бу қаторнинг ҳадлари (уларнинг ҳар бири қавсга олиб кўрсатилган) x нинг ҳамма қийматларида узлуксиз функциялардир. Бу қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси узлукли функция эканлигини исбот қиламиз. Бу қатор дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топамиз:

$$s_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x.$$

қаторнинг йиғиндисини топамиз:
агар $x>0$ бўлса,

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x)=1-x,$$

агар $x<0$ бўлса,

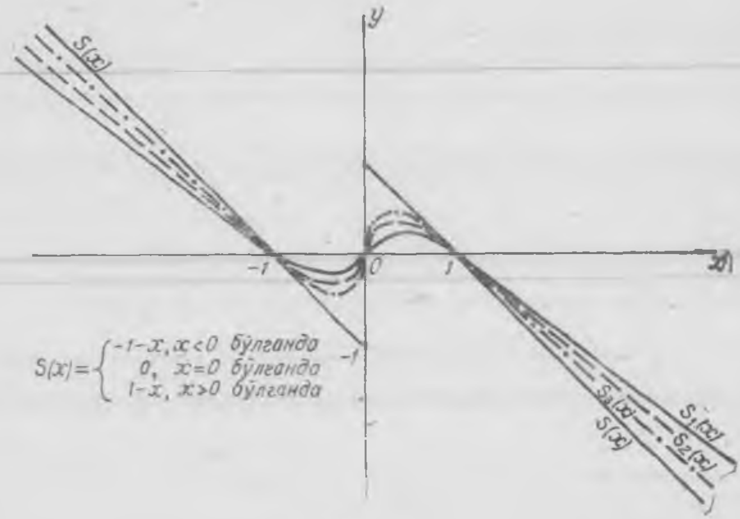
$$s=\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}(-|x|^{\frac{1}{2n+1}}-x)=-1-x,$$

агар $x=0$ бўлса, $s_n=0$, шунинг учун $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0.$

Шундай қилиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x<0 \text{ да } s(x)=-1-x$$
$$x=0 \text{ да } s(x)=0,$$
$$x>0 \text{ да } s(x)=1-x.$$

Демак, келтирилган қаторнинг йиғиндиси узлукли функциядир. Унинг графиги 364-расмда тасвирланган бўлиб, унда $s_1(x)$, $s_2(x)$ ва $s_3(x)$ қисмий йиғиндиларнинг графиклари ҳам кўрсатилган.



364-расм.

Кучайтирилган қаторлар учун қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. *Бирор $[a, b]$ кесмада кучайтирилган бўлган узлуксиз функциялар қаторнинг йиғиндиси шу кесмада узлуксиз функциядир.*

Исбот. Узлуксиз функцияларнинг $[a, b]$ кесмада кучайтирилган бўладиган қатор

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots \qquad (1)$$

берилган бўлсин. Унинг йиғиндисини

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

шаклда тасвирлаймиз, бунда

$$s_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

ва

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots .$$

$[a, b]$ кесмада x аргументнинг ихтиёрий қийматини оламиз ва унга шундай Δx орттирма берамизки, $x + \Delta x$ нуқта ҳам шу $[a, b]$ кесмада ётсин.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta s = s(x + \Delta x) - s(x), \quad \Delta s_n = s_n(x + \Delta x) - s_n(x),$$

бу ҳолда

$$\Delta s = \Delta s_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x),$$

бундан

$$|\Delta s| \leqslant |\Delta s_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|. \qquad (2)$$

Бу тенгсизлик ҳар қандай n номер учун тўғридир.

$s(x)$ нинг узлуксизлигини исбот қилиш учун олдиндан берилган ҳар қандай ва ҳар қанча кичик $\varepsilon > 0$ учун барча $|\Delta x| < \delta$ бўлганда $|\Delta s| < \varepsilon$ бўладиган $\delta > 0$ сонни топиш мумкинлигини кўрсатиш керак.

Берилган (1) қатор кучайтирилган қатор бўлгани учун ҳар қандай олдиндан берилган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N номер топиладики, ҳамма $n \geqslant N$ да, жумладан $n = N$ да $[a, b]$ кесмада олинган ҳар қандай x га нисбатан ушбу тенгсизлик бажарилади:

$$|r_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

$x + \Delta x$ қиймат $[a, b]$ кесмада ётади ва шунинг учун

$$|r_N(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (3')$$

тенгсизлик бажарилади.

Сўнгра, N танлаб олинганда $s_N(x)$ қисмий йиғинди (чекли сондаги узлуксиз функциялар йиғиндиси) узлуксиз функция бўлади, демак, $|\Delta x| < \delta$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай Δx учун

$$|\Delta s_N| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad 4)$$

тенгсизлик ўринли бўладиган δ мусбат сон танлаш мумкин.

(2), (3), (3′) ва (4) тенгсизликларга асосан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$|\Delta s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

яъни

$|\Delta x| < \delta$ бўлганда $|\Delta s| < \varepsilon$ бўлади, бу эса $s(x)$ нинг x нуқтада (демак, $[a, b]$ кесманинг исталган нуқтасида) узлуксиз функция бўлишини билдиради.

Изоҳ. Исбот қилинган теоремадан агар бирор $[a, b]$ кесмада қаторнинг йиғиндиси узлукли бўлса, бу кесмада қаторнинг кучайтирма эмаслиги келиб чиқади. Масалан, мисолда келтирилган қатор ($x = 0$ нуқтани, яъни қатор йиғиндисининг узилиш нуқтасини ўз ичига олувчи исталган кесмада) кучайтирмайдиган қатордир.

Энди бунга тескари даъвонинг нотўғрилигини кўрсатамиз: кесмада кучайтирилмаган, лекин бу кесмада узлуксиз функцияга яқинлашувчи қаторлар мавжуд. Чунончи, $[a, b]$ кесмада текис яқинлашувчи ҳар қандай қатор (ҳатто, агар у кучайтирилмайдиган бўлса ҳам) йиғинди сифатида узлуксиз функцияга (албатта, қаторнинг ҳамма ҳадлари узлуксиз бўлса) эга бўлади.

12- §. Қаторларни интеграллаш ва дифференциаллаш

1-теорема. *$[a, b]$ кесмада кучайтирилган бўлган узлуксиз функцияларнинг қуйидаги*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

қатори берилган ва $s(x)$ бу қаторнинг йиғиндиси бўлсин. Бу ҳолда $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган α дан x гача чегарада $s(x)$ дан олинган интеграл берилган қатор ҳадларидан шундай чегарада олинган интеграллар йиғиндисига тенг, яъни.

$$\int_a^x s(t)\,dt=\int_a^x u_1(t)\,dt+\int_a^x u_2(t)\,dt+\ldots+\int_a^x u_n(t)\,dt+\ldots$$

Исбот. $s(x)$ функцияни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x)$$

ёки

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+r_n(x).$$

Бу ҳолда

$$\int_a^x s(t)\,dt=\int_a^x u_1(t)\,dt+\int_a^x u_2(t)\,dt+\ldots+\int_a^x u_n(t)\,dt+$$

$$+\int_a^x r_n(t)\,dt \tag{2}$$

(чекли сондаги қўшилувчилар йиғиндисидан олинган интеграл шу қўшилувчилардан олинган интеграллар йиғиндисига тенг).

Бошланғич (1) қатор кучайтирилган қатор бўлгани сабабли, исталган x учун $|r_n(x)|<\varepsilon_n$ бунда $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$. Шунинг учун[*]

$$\left|\int_\alpha^x r_n(t)\,dt=\right|\leqslant\pm\int_\alpha^x\left|r_n(t)\right|dt<\pm\int_\alpha^x\varepsilon_n\,dt=\pm$$

$$\pm\,\varepsilon_n(x-\alpha)\leqslant\varepsilon_n(b-a).$$

---

[*] Қуйидаги келтириладиган баҳоларда $\alpha<x$ да + ишора, $\alpha>x$ да — ишора олинади.

$\varepsilon_n \to 0$ бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x r_n(t)\,dt = 0.$$

Аммо (2) тенгликдан:

$$\int_a^x r_n(t)\,dt = \int_a^x s(t)\,dt - \left[\int_a^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)\,dt\right].$$

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\int_a^x s(t)\,dt - \left[\int_a^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)\,dt\right]\right\} = 0$$

ёки

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)\,dt\right) = \int_a^x s(t)\,dt. \tag{3}$$

Ўрта қавс ичидаги йиғинди

$$\int_a^x u_1(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)\,dt + \ldots \tag{4}$$

қаторнинг қисмий йиғиндисидир. Бу қаторнинг қисмий йиғиндилари лимитга эга бўлгани учун, бу қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси (3) тенгликка асосан $\int_a^x s(t)\,dt$ интегралга тенг, яъни

$$\int_a^x s(t)\,dt = \int_a^x u_1(t)\,dt + \int_a^x u_2(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n(t)\,dt + \ldots,$$

бу эса исбот қилиниши керак бўлган тенгликдир.

1- изоҳ. Агар қатор кучайтирилмаган қатор бўлса, қаторни ҳар доим ҳам ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлавермайди. Буни (1) қатор йиғиндисининг $\int_a^x s(t)\,dt$ интеграли ҳар доим унинг ҳадлари интегралларининг йиғиндиси (яъни (4) қатор йиғиндисига) тенг бўлавермайди деган маънода тушунмоқ керак.

2- теорема. Агар (a, b) *кесмада ҳосилалари узлуксиз бўлган функциялардан тузилган*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{5}$$

қатор шу кесмада $s(x)$ *йиғиндига яқинлашса ва унинг ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{6}$$

қатор ўша кесмада кучайтирилган бўлса, ҳосилалар қаторининг йиғиндиси бошланғич қатор йиғиндисининг ҳосиласига тенг, яъни

$$s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots .$$

Исбот. (6) қаторнинг йиғиндисини $F(x)$ билан белгилаймиз:

$$F(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

ва

$$F(x) = s'(x)$$

эканини исбот қиламиз.

(6) қатор кучайтирилган бўлгани учун, олдинги теоремага асосан

$$\int_a^x F(t)\,dt = \int_a^x u_1'(t)\,dt + \int_a^x u_2'(t)\,dt + \ldots + \int_a^x u_n'(t)\,dt + \ldots$$

Интеграллашни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^x F(t)\,dt = [u_1(x) - u_1(\alpha)] + [u_2(x) - u_2(\alpha)] + \ldots +$$

$$+ [u_n(x) - u_n(\alpha)] + \ldots .$$

Лекин шартга мувофиқ x ва α сонлари $[a, b]$ кесмада қандай бўлишидан қатъи назар

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

$$s(\alpha) = u_1(\alpha) + u_2(\alpha) + \ldots + u_n(\alpha) + \ldots$$

Шунинг учун

$$\int_a^x F(t)\,dt = s(x) - s(\alpha).$$

Сўнгги тенгликнинг иккала томонини x бўйича дифференциалласак:

$$F(x) = s'(x).$$

Шундай қилиб, биз теореманинг шартлари бажарилганда қатор йиғиндисидан олинган ҳосила қатор ҳадлари ҳосилаларининг йиғиндисига тенг эканини исбот қилдик.

2-изоҳ. Ҳосилалар қаторининг кучайтирилган бўлишини талаб этиш жуда аҳамиятлидир. Бу шартнинг бажарилмаслиги қаторни ҳадлаб дифференциаллаб бўлмасликка олиб келиши мумкин. Бу фикрни тасдиқлаш мақсадида ҳадлаб дифференциаллаб бўлмайдиган кучайтирилган қаторга мисол келтирамиз.

Ушбу қаторни қараймиз:

$$\frac{\sin 1^4 x}{1^2} + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \frac{\sin 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Бу қатор кучайтирилган бўлгани учун узлуксиз функцияга яқинлашади. Ҳақиқатан, x нинг исталган қийматида бу қатор ҳадларининг абсолют қиймати ҳадлари мусбат бўлган сонли яқинлашувчи

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қаторнинг ҳадларидан кичик. Берилган қатор ҳадларининг ҳосилаларидан тузилган:

$$\cos x+2^2\cos 2^4x+\ldots+n^2\cos n^4x+\ldots$$

қаторни олайлик. Бу қатор узоқлашади. Масалан, $x=0$ бўлса, у

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2+\ldots$$

қаторга айланади (унинг $x=0$ дан бошқа қийматларда ҳам узоқлашишини кўрсатиш мумкин).

13- §. Даражали қаторлар. Яқинлашиш интервали

1- таъриф. Ушбу

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

кўринишдаги функционал қатор *даражали қатор* деб аталади, бунда a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... ўзгармас сонлар бўлиб, улар *қаторнинг коэффициентлари* дейилади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси бирор интервалдан иборат; бу интервал баъзан нуқтага айланиши мумкин. Бунга ишонч ҳосил қилиш мақсадида, аввал даражали қаторлар барча назариялари учун жуда муҳим бўлган қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

1- теорема (Абель теоремаси). 1) *Агар даражали қатор нолдан фарқли бирор* x_0 *қийматда яқинлашса,* x *нинг*

$$|x|<|x_0'|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматларида у абсолют яқинлашади;

2) *агар қатор бирор* x_0' *қийматда узоқлашса,* x *нинг*

$$|x|>|x_0'|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар бир қийматида қатор узоқлашади.

Исбот, 1) Фаразимизга кўра

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n+\ldots \qquad (2)$$

сонли қатор яқинлашади, шунинг учун $n \to \infty$ да унинг умумий ҳади $a_nx_0^n \to 0$. Бу эса қатор ҳадларининг абсолют қийматлари M сондан кичик бўладиган шундай M мусбат сон мавжуд эканлигини кўрсатади.

(1) қаторни қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_{\underset{0}{n}}\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \tag{3}$$

ва бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{4}$$

қаторни қараймиз.

Бу қаторнинг ҳадлари ушбу

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \tag{5}$$

қаторнинг мос ҳадларидан кичик. $|x| < |x_0|$ бўлганда охирги қатор махражи $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ бўлган геометрик прогрессияни тасвирлайди. Демак, қатор яқинлашади. (4) қаторнинг ҳадлари (5) қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлгани учун (4) қатор ҳам яқинлашади, бу эса (3) ёки (1) қаторнинг абсолют яқинлашишини билдиради.

2) Энди теореманинг иккинчи қисмини ҳам исботлаш қийин эмас: бирор x_0' нуқтада (1) қатор узоқлашсин. У вақтда бу қатор $|x| > |x_0'|$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай x нуқтада узоқлашади. Ҳақиқатан, бу шартни қаноатлантирувчи бирор x нуқтада қатор яқинлашса, у ҳолда теореманинг ҳозиргина исбот қилинган биринчи қисмига асосан $|x_0'| < |x|$ бўлгани учун, у x_0' нуқтада ҳам яқинлашиши керак эди. Бироқ, бу x_0' нуқтада қатор узоқлашади деган шартга қаршилик қилади. Демак, қатор x нуқтада ҳам узоқлашади. Шундай қилиб, теорема тўла исбот қилинди.

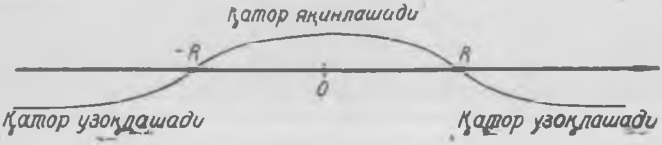
Абель теоремаси даражали қаторнинг яқинлашиш ва узоқлашиш нуқталарининг вазияти ҳақида фикр юритишга имкон беради. Ҳақиқатан, агар x_0 яқинлашиш нуқтаси бўлса, у ҳолда $(-|x_0|, |x_0|)$ интервал бутунлай абсолют яқинлашиш нуқталаридан иборат бўлади. Агар x_0 узоқлашиш нуқтаси, бўлса, у ҳолда $|x_0'|$ нуқтадан ўнгда турган чексиз ярим тўғри чизиқ ва $-|x_0'|$ нуқтадан чапда турган чексиз ярим тўғри чизиқ узоқлашиш нуқталаридан иборат бўлади.

Бундан, шундай R сон мавжудки, $|x| < R$ бўлганда биз абсолют яқинлашиш нуқталарини, $|x| > R$ бўлганда эса узоқлашиш нуқталарини ҳосил қиламиз деган хулосага келишимиз мумкин. Шундай қилиб, даражали қатор яқинлашиш соҳасининг тузилиши ҳақидаги қуйидаги теорема ўринлидир.

2- теорема. *Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси маркази координаталар бошида бўлган интервалдан иборатдир.*

2- таъриф. Даражали *қаторнинг яқинлашиш интервали* деб, $-R$ дан $+R$ гача бўлган шундай интервалга айтиладики, бу интервал ичида ётган ҳар қандай x нуқтада қатор яқинлашади, шу билан бирга абсолют яқинлашади, унинг ташқарисидаги x нуқталарда эса қатор узоқлашади (365- расм). R сони даражали қаторнинг *яқинлашиш радиуси* дейилади.

Интервалнинг икки учида (яъни $x=R$ ва $x=-R$ да) берилган қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши ҳақидаги масала ҳар бир конкрет қатор учун якка-якка ҳал этилади.



365- расм.

Баъзи қаторларнинг яқинлашиш интервали нуқтага айланишини ($R=0$), баъзиларида эса Ox ўқни бутунлай ўз ичига олишини ($R=\infty$) айтиб ўтамиз.

Даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини аниқлаш усулини кўрсатамиз.

Ушбу

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

қатор берилган бўлсин.

Бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторни қараймиз:

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+|a_3||x|^3+\ldots+|a_n||x|^n+\ldots \tag{6}$$

Сўнгги (мусбат ҳадли) қаторнинг яқинлашишини аниқлаш учун Даламбер аломатидан фойдаланамиз. Фараз қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=L|x|$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда Даламбер аломатига асосан, агар $L|x|<1$, яъни $|x|<\frac{1}{L}$ бўлса, (6) қатор яқинлашувчи ва агар $L|x|>1$, яъни $|x|>\frac{1}{L}$ бўлса, узоқлашувчи бўлади.

Демак, (1) қатор $|x|<\frac{1}{L}$ бўлганда абсолют яқинлашади. Агар $|x|>\frac{1}{L}$ бўлса, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=|x|L>1$ бўлади ва (6) қатор узоқлашади, бунда унинг умумий ҳади нолга интилмайди*). Бироқ бу ҳолда (1) даражали қаторнинг умумий ҳади ҳам нолга интилмайди, бу эса яқинлашишнинг зарурий шартига кўра $\left(|x|>\frac{1}{L}\right.$ бўлганда$\left.\right)$ даражали қаторнинг узоқлашишини билдиради.

Юқоридагига асосан $\left(-\frac{1}{L},\ \frac{1}{L}\right)$ интервал (1) даражали қаторнинг яқинлашиш интервали эканлиги чиқади, яъни

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Яқинлашиш интервалини аниқлаш учун шунга ўхшаш Коши аломатидан ҳам фойдаланиш мумкин, у вақтда

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

1-мисол.

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиш интервали аниқлансин.

Ечиш: Тўғридан-тўғри Даламбер аломатини татбиқ этиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|=|x|.$$

Демак, $|x|<1$ бўлганда қатор яқинлашади ва $|x|>1$ бўлганда узоқлашади. $(-1,1)$ интервалнинг чегараларида қаторни Даламбер аломати ёрдами билан текшириш мумкин эмас. Лекин $x=-1$ ва $x=1$ бўлганда қаторнинг узоқлашиши ўз-ўзидан равшан.

2-мисол.

$$\frac{2x}{1}-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots$$

қаторнинг яқинлашиш интервали аниқлансин.

---

*) Даламбер аломатини (4-параграфга қаранг) исбот қилганимизда, агар $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ бўлса, қатор умумий ҳадининг ўсишини, демак, унинг нолга интилмаслигини аниқлаганлигимизни эслатиб ўтамиз.

Ечиш. Даламбер белгисини татбиқ этамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \; |2x| = |2x|.$$

Агар $|2x| < 1$, яъни $|x| < \frac{1}{2}$ бўлса, қатор яқинлашади; $x = \frac{1}{2}$ бўлганда ҳам қатор яқинлашади; $x = -\frac{1}{2}$ бўлганда, қатор узоқлашади.

3-мисол.

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

қаторнинг яқинлашиш интервали топилсин.

Ечиш. Даламбер аломатини татбиқ этсак:

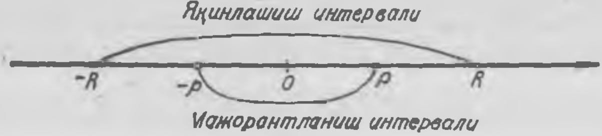
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Лимитнинг x га боғлиқ эмаслиги ва бирдан кичиклиги туфайли қатор x нинг барча қийматларида яқинлашади.

4-мисол.

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$$

қатор x нинг, $x=0$ дан бошқа, ҳамма қийматларида узоқлашади, чунки x нинг нолдан фарқли ҳар қандай қиймати учун $n\to\infty$ да $(nx)^n \to \infty$.



366-расм.

3-теорема.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

даражали қатор бутунлай яқинлашиш интервали ичида ётувчи исталган $[-\rho, \rho]$ *кесмада кучайтирилгандир.*

Исбот. Шартга кўра $\rho < R$ (366-расм), шунинг учун(мусбат ҳадли) сонли қатор

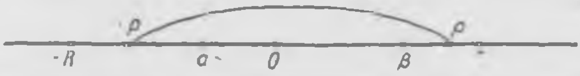
$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n \tag{7}$$

яқинлашади. Аммо $|x| < \rho$ бўлганда (1) қаторнинг ҳадлари абсолют қиймат жиҳатидан (7) қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмайди. Демак, (1) қатор $[-\rho, \rho]$ кесмада кучайтирилгандир.

1-натижа. *Яқинлашиш интервали ичида бутунлай ётувчи ҳар қандай кесмада даражали қаторнинг йиғиндиси уз-*

луксиз функциядир. Ҳақиқатан, бу кесмада қатор кучайтирма ва унинг ҳадлари x нинг узлуксиз функцияларидир. Демак, 11- параграфдаги 1- теоремага асосан бу қаторнинг йиғиндиси узлуксиз функциядир.

2- натижа. *Агар интеграллаш чегаралари* α, β *даражали қаторнинг яқинлашиш интервали ичида ётса, қатор йиғиндисининг интеграли қатор ҳадларидан олинган интеграллар йиғиндисига тенг*, чунки интеграллаш соҳасини қатор кучайтирилган қатор бўладиган (367- расм) $[-\rho, \rho]$ кесма ичига жойлаштириш мумкин (кучайтирилган қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкинлиги ҳақида 12- параграфнинг 1- теоремасига қаранг).



367- расм.

14- §. Даражали қаторларни дифференциаллаш

1- теорема. *Агар*

$$s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (1)$$

даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-R, R)$ *бўлса*, (1) *қаторни ҳадлаб дифференциаллашдан ҳосил қилинган*

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \quad (2)$$

қаторнинг ҳам яқинлашиш интервали $(-R, R)$ *бўлади; бунда* $|x| < R$ *бўлса*, $\varphi(x) = s'(x)$, *яъни яқинлашиш интервалининг ичида* (1) даражали қатор йиғиндисининг ҳосиласи, (1) *қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган қаторнинг йиғиндисига тенг.*

368- расм.

Исбот. Яқинлашиш интервали ичида бутунлай ётувчи ихтиёрий $[-\rho, \rho]$ кесмада (2) қаторнинг кучайтирилган эканлигини исбот қиламиз.

$\rho < \xi < R$ (368- расм) шартни қаноатлантирувчи ξ нуқтани оламиз. Бу нуқтада (1) қатор яқинлашади, демак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$, шунинг учун

$$|a_n\xi^n| < M \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи M ўзгармас сонни топиш мумкин. Агар $|x| \leqslant \rho$ бўлса,

$$\left| na_nx^{n-1} \right| \leqslant \left| na_n\rho^{n-1} \right| = n\left| a_n\xi^{n-1} \right| \left| \frac{\rho}{\xi} \right|^{n-1} < n\frac{M}{\xi}\, q^{n-1},$$

бунда

$$q = \frac{\rho}{\xi} < 1.$$

Шундай қилиб, (2) қаторнинг ҳадлари $|x| \leqslant \rho$ бўлганда абсолют қиймат бўйича ҳадлари ўзгармас бўлган сонли мусбат

$$\frac{M}{\xi}(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots)$$

қаторнинг ҳадларидан кичикдир.

Бироқ охирги қатор яқинлашади, бунинг шундай эканлигига Даламбер аломатини қўлланиш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nq^{n-1}}{(n-1)q^{n-2}} = q < 1.$$

Демак, (2) қатор $[-\rho,\ \rho]$ кесмада кучайтирилган ва 12- параграфдаги 2- теоремага асосан унинг йиғиндиси $[-\rho,\ \rho]$ кесмада берилган қаторнинг йиғиндисидан олинган ҳосиладан иборат, яъни:

$$\varphi(x) = s'(x).$$

$(-R,\ R)$ интервалнинг ҳар қандай ички нуқтасини бирор $[-\rho,\ \rho]$ кесма ичига жойлаштириш мумкин бўлганидан (2) қаторни $(-R,\ R)$ интервалнинг исталган ички нуқтасида яқинлашиши келиб чиқади.

Энди $(-R,\ R)$ интервалнинг ташқарисида (2) қаторнинг узоқлашишини исбот қиламиз. $x_1 > R$ бўлганда (2) қатор яқинлашади дейлик. Уни $(0,\ x_2)$ интервалда, бунда $R < x_2 < x_1$, ҳадлаб интеграллаб (1) қаторнинг x_2 нуқтада яқинлашувчи эканлигини топар эдик, бу эса теорема шартига қаршилик қилади. Шундай қилиб, $(-R,\ R)$ интервал (2) қаторнинг яқинлашиш интервалидир. Теорема тўла исбот қилинди.

(2) қаторни яна ҳадлаб дифференциаллаш ва бундай дифференциаллашни истаганча давом эттириш мумкин. Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз:

2- теорема. *Агар даражали қатор* $(-R,\ R)$ *интервалда яқинлашса, унинг йиғиндиси яқинлашиш интервали ичида истаганча тартибли ҳосилаларга эга бўлган функ-*

цияни ифодалайди, уларнинг ҳар бири берилган қаторни тегишли марта ҳадлаб дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган қаторлар йиғиндисига тенг бўлади: бунда дифференциаллаш натижасида ҳосил қилинган ҳар бир қаторнинг яқинлашиш интервали ҳам $(-R, R)$ интервал бўлади.

15- §. $x-a$ нинг даражалари бўйича қаторлар

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_8(x-a)^8+ \\ +\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \quad (1)$$

кўринишдаги функционал қатор ҳам *даражали қатор* дейилади, бундаги $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ўзгармас сонлар *қаторнинг коэффициентлари* дейилади. Бу $x-a$ икки ҳаднинг даражалари бўйича жойлашган даражали қатордир.

$a=0$ бўлганда (1) қаторнинг хусусий ҳолини, яъни x нинг даражалари бўйича жойлашган даражали қаторни ҳосил қиламиз.

(1) қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқлаш учун $x-a$ ўзгарувчини X билан алмаштирамиз.

Бу алмаштиришдан сўнг (1) қатор

$$a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n+\ldots \quad (2)$$

кўринишга келади, яъни X нинг даражалари бўйича жойлашган даражали қатор ҳосил бўлади.

$-\kappa<X<R$ интервал (2) қаторнинг яқинлашиш интервали бўлсин (369-α, расм). Бундан x нинг $-R<x-a<R$ ёки $a-R<x<a+R$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида (1) қаторнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. $|X|>R$ бўлганда (2) қатор узоқлашганлиги сабабли, $|x-a|>R$ бўлганда (1) қатор ҳам узоқлашади, яъни $a-\kappa<x<a+R$ интервалдан ташқарида узоқлашади (369-β, расм).

Демак, (1) қаторнинг яқинлашиш интервали маркази a нуқтада бўлган $(a-R, a+R)$ интервалдан иборат бўлади. x нинг даражалари бўйича даражали қаторнинг $(-R, +R)$ яқинлашиш интервали ичидаги барча хоссалари $x-a$ нинг даражалари бўйича даражали қатор учун $(a-R, a+R)$ яқинлашиш интервали ичида бутунлай сақланади. Масалан, агар интеграллаш чегаралари $(a-R, a+R)$ яқинлашиш интервали ичида ётса, (1) даражали қаторни ҳадлаб интеграллагандан кейин йиғиндиси берилган (1) қаторнинг йиғиндисидан олинган интегралга тенг бўлган қатор ҳосил бўлади. x нинг $(a-R, a+R)$ яқинлашиш интервали ичида ётувчи ҳамма қийматлари учун (1) даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаганда, йиғиндиси берилган (1) қаторнинг йиғиндисидан олинган ҳосилага тенг бўлган қатор ҳосил бўлади.

Мисол. Ушбу

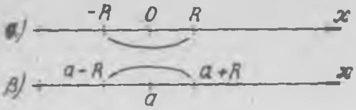
$$(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\ldots+(x-2)^n+\ldots$$

қаторнинг яқинлашиш соҳаси топилсин.

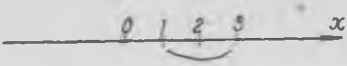
Ечиш. $x-2=x$ деб олиб,

$$X+X^2+X^3+\ldots+X^n+\ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қатор $-1<X<+1$ бўлганда яқинлашади. Демак, берилган қатор x нинг $-1<x-2<1$, яъни $1<x<3$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳамма қийматларида яқинлашади (370- расм).



369- расм.



870- расм.

16-§. Тейлор ва Маклорен қаторлари

I том IV бобининг 6- параграфида $x=a$ нуқта атрофида (яъни $x=a$ нуқтани ўз ичига олган бирор интервалда) $(n+1)$-тартибли ҳамма ҳосилаларга эга бўлган $f(x)$ функция учун Тейлор формуласи

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x) \quad (1)$$

ўринли эканлиги кўрсатилган эди, бунда қолдиқ ҳад деб аталувчи $R_n(x)$ ушбу:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \qquad 0<\theta<1$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар $f(x)$ функция $x=a$ нуқта атрофида барча тартибдаги ҳосилаларга эга бўлса, Тейлор формуласидаги n сонини истаганча катта қилиб олиш мумкин. Қаралаётган атрофда $n\to\infty$ да қолдиқ ҳад R_n нолга интилади дейлик:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Бу ҳолда $n\to\infty$ да (1) формулада лимитга ўтиб, ўнг томонда *Тейлор қатори* деб аталувчи

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \quad (2)$$

чексиз қаторни ҳосил қиламиз. Охирги тенглик $n\to\infty$ да $R_n(x)\to 0$ бўлган ҳолдагина ўринлидир. Бу ҳолда ўнг томонда турган қатор яқинлашади ва унинг йиғиндиси берилган

$f(x)$ функцияга тенг бўлади. Бунинг ҳақиқатан шундай эканлигини исбот қиламиз:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

бунда

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Шартга асосан $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ бўлгани учун

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Лекин $P_n(x)$ (2) қаторнинг n- қисмий йиғиндиси; унинг лимити (2) тенгликнинг ўнг томонида турган қаторнинг йиғиндисига тенг. Демак, (2) тенглик ўринлидир:

T

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots .$$

Олдинги муҳокамадан, Тейлор қатори $\lim R_n(x) = 0$ бўлгандагина берилган $f(x)$ функцияни ифодалаши келиб чиқади. Агар $\lim R_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда қатор (бирор бошқа функцияга) яқинлашса ҳам берилган функцияни ифодаламайди.

Агар Тейлор қаторида $a = 0$ деб олсак, у ҳолда Тейлор қаторининг хусусий ҳоли бўлган *Маклорен қаторини* ҳосил қиламиз:

M

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \quad (3)$$

Агар бирор функция учун формал ҳолда, Тейлор қатори ёзилган бўлса, бу қатор берилган функцияни ифодалашини исбот қилиш учун ё қолдиқ ҳадининг нолга интилишини исботлаш ёки бу қаторнинг берилган функцияга яқинлашишига бошқа бирор усул билан ишонч ҳосил қилиш керак.

I том I бобининг 8- параграфида аниқланган элементар функцияларнинг ҳар бири учун шундай a ва шундай R мавжуд бўлиб, $(a - R,\ a + R)$ интервалда бу функциялар Тейлор қаторига ёки (агар $a = 0$ бўлса) Маклорен қаторига ёйилишини қайд қилиб ўтамиз.

17-§. Функцияларни қаторларга ёйиш мисоллари

1. $f(x) = \sin x$ функцияни Маклорен қаторига ёйиш.

I т. IV бобининг 7- параграфида

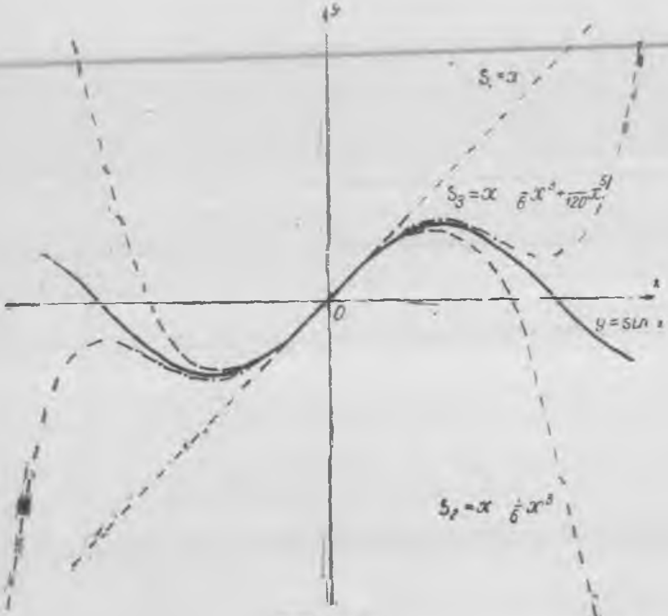
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

формулани келтириб чиқарган ва бунда $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0$ эканлигини исбот қилган эдик. Олдинги параграфда айтилганларга асосан $\sin x$ нинг Маклорен қаторига ёйилмасини ҳосил қиламиз:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (1)$$

x ҳар қандай бўлганда ҳам қолдиқ ҳад нолга интилганлиги учун берилган қатор яқинлашади ва x истаганча бўлганда ҳам функциянинг йиғиндиси $\sin x$ бўлади.

371-расмда $\sin x$ функциянинг ва (1) қатор биринчи учта қисмий йиғиндиларининг графиги кўрсатилган.



371-расм.

Бу қатордан x турли қийматлар олганда $\sin x$ нинг қийматларини ҳисоблаш учун фойдаланилади.

Масалан, $\sin 10°$ ни 10^{-5} гача аниқлик билан ҳисоблайлик. $10°$ ёки, радиан ҳисобида, $\frac{\pi}{18} \approx 0{,}174533$ бўлгани учун,

$$\sin 10° = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots$$

Биринчи иккита ҳад билан чегараланиб, ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\sin\frac{\pi}{18}\approx\frac{\pi}{18}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

бунда биз, абсолют қиймат жиҳатидан ташлаб юборилган ҳадларнинг биринчисидан кичик бўлган δ хатога йўл қўямиз, яъни

$$\delta<\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5<\frac{1}{120}(0,2)^5<4\cdot10^{-6}.$$

Агар $\sin\frac{\pi}{18}$ учун ҳосил қилинган ифодадаги ҳар бир қўшилувчини олтита рақам билан ҳисобласак

$$\sin\frac{\pi}{18}=0,173647$$

ҳосил бўлади.

Биринчи тўртта рақамнинг тўғрилигига ишониш мумкин.

2. $f(x)=e^x$ **функцияни Маклорен қаторига ёйиш.** I том IV бобининг 7-параграфига асосан:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad(2)$$

чунки x ҳар қандай бўлганда ҳам $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ эканлиги исбот қилинган эди. Демак, x нинг ҳар қандай қийматида қатор яқинлашади ва e^x функцияни ифодалайди.

Агар (2) ёйилмада x ўрнига $(-x)$ олинса, у ҳолда:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\qquad(3)$$

ҳосил бўлади.

3. $f(x)=\cos(x)$ **функцияни Маклорен қаторига ёйиш.**

I том IV бобининг 7-параграфига асосан x нинг ҳар қандай қийматларида:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots;\qquad(4)$$

қатор яқинлашади ва $\cos x$ функцияни ифодалайди.

4. Ушбу

$$f(x)=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

$$f(x)=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

функцияларни Маклорен қаторига ёйиш

Бу функцияларни (2) ва (3) қаторларни айириш ва қўшиш ҳамда 2 га бўлиш йўли билан ёйиш осон.

Демак,

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots. \tag{6}$$

18-§. Эйлер формуласи

Биз ҳозиргача ҳақиқий ҳадли қаторларнигина кўрдик, лекин комплекс ҳадли қаторларни қараганимиз йўқ. Комплекс ҳадли қаторлар назариясини бу дарсликда муфассал ўрганмаймиз, шунинг учун бу соҳага тегишли битта муҳим мисолни кўриб чиқамиз.

VII бобда (I том) ушбу e^{x+iy} функция

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

тенглик билан аниқланган эди. Бу тенгликдан $x = 0$ бўлганда *Эйлер формуласини* ҳосил қиламиз:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Агар мавҳум кўрсаткичли e^{iy} кўрсаткичли функцияни e^x функцияни даражали қатор кўринишида тасвирловчи 17-параграфдаги (2) формула ёрдами билан аниқласак, биз яна Эйлернинг ўша тенглигини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан 17-параграфнинг (2) формуласидаги x ўрнига iy ифодани қўйиб, e^{iy} функцияни аниқлаймиз:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots. \tag{1}$$

Бунда

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1$$

ва ҳоказо эканлигини эътиборга олиб, (1) формулани қуйидаги шаклга келтирамиз:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots.$$

Бу қаторнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратсак:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Қавслар ичида йиғиндилари $\cos y$ ва $\sin y$ (олдинги параграфдаги (3) ва (1) формулаларга қаранг) функцияларга тенг бўлган даражали қаторлар турибди. Демак,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Шундай қилиб, биз яна *Эйлер формуласини* ҳосил этдик.

19-§. Биномиал қатор

1. $f(x) = (1+x)^m$ функцияни Маклорен қаторига ёямиз, бунда m—ихтиёрий ўзгармас сон.

Бу ерда қолдиқ ҳадни баҳолаш бирмунча қийин. Шунинг учун берилган функцияни бир оз бошқача усул билан қаторга ёямиз. $f(x) = (1+x)^m$ функциянинг

$$(1+x)\, f'(x) = m\, f(x) \tag{1}$$

дифференциал тенгламани ва

$$f(0) = 1$$

шартни қаноатлантиришини эътиборга олиб, йиғиндиси $s(x)$ дан иборат ва (1) тенгламани ҳамда $s(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи даражали қаторни топамиз:

$$s(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots^{*)}. \tag{2}$$

Буни (1) тенгламага қўйсак:

$$(1+x)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots) =$$
$$= m(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots).$$

Тенгликнинг турли қисмларидаги бир хил даражали x ларнинг коэффциентларини тенглаб, қуйидагиларни топамиз:

$$a_1 = m, \quad a_1 + 2a_2 = ma_1, \; \ldots, \; na_n + (n+1)\,a_{n+1} = ma_n, \ldots$$

Бундан қаторнинг коэффициентлари учун ушбу ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = m, \qquad a_2 = \frac{a_1(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2(m-2)}{3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Булар биномиал коэффициентлардир.

Уларни (2) формулага қўйсак:

$$s(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots n}x^n + \ldots \tag{3}$$

---

*) Биз $s(0) = 1$ бошланғич шартга асосан озод ҳадни бирга тенг деб олдик.

Агар m—бутун мусбат сон бўлса, у ҳолда x^{m+1} ни ўз ичига олган ҳаддан бошлаб, ҳамма коэффициентлар нолга тенг бўлади ва қатор кўпҳадга айланади. Агар m каср ёки m бутун манфий сон бўлса, чексиз қатор ҳосил бўлади. (3) қаторнинг яқинлашиш радиусини аниқлаймиз:

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+1]}{n!} x^n,$$

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots[m-n+2]}{(n-1)!} x^{n-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(n-1)!}{m(m-1)\ldots(m-n+2)\,n!}\,x\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right||x| = |x|.$$

Шундай қилиб, (3) қатор $|x| < 1$ бўлганда яқинлашади.

$(-1, 1)$ интервалда (3) қатор (1) дифференциал тенгламани ва $s(0) = 1$ шартни қаноатлантирувчи $s(x)$ функцияни тасвирлайди.

(1) дифференциал тенглама ва $s(0) = 1$ шартни фақат битта функция қаноатлантиргани учун (3) қаторнинг йиғиндиси $(1+x)^m$ функцияга айнан тенг бўлиб, биз қуйидаги ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (3')$$

Жумладан $m = -1$ бўлганда:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad (4)$$

$m = \frac{1}{2}$ бўлганда:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \quad (5)$$

$m = -\frac{1}{2}$ бўлганда:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \quad (6)$$

2) Бином ёйилмасини бошқа функцияларнинг ёйилмасига татбиқ этамиз:

$$f(x) = \arcsin x$$

функцияни Маклорен қаторига ёямиз. (6) тенгликдаги x ўрнига $-x^2$ ифодани қўйсак:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots .$$

$|x| < 1$ бўлганда, даражали қаторларни интеграллаш ҳақидаги теоремага асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Бу қатор $(-1, 1)$ интервалда яқинлашади. Қатор $x = \pm 1$ бўлганда ҳам яқинлашишини ва бу қийматлар учун қаторнинг йиғиндиси $\arcsin x$ га тенглигини исбот қилиш мумкин. У вақтда $x = 1$ деб олиб, π ни ҳисоблашнинг қуйидаги формуласини ҳосил қиламиз:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots .$$

20-§. $\ln(1+x)$ функцияни даражали қаторга ёйиш. Логарифмларни ҳисоблаш

19-параграфдаги (4) тенгликни ($|x| < 1$ бўлганда) 0 дан x гача чегарада интеграллсак:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)\,dt$$

ёки

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (1)$$

Бу тенглик $(-1, 1)$ интервалда ўринлидир.

Агар бу формуладаги x ни $-x$ га алмаштирсак $(-1, 1)$ интервалда яқинлашувчи қатор ҳосил бўлади:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots . \quad (2)$$

(1) ва (2) қаторлар ёрдами билан ноль билан икки орасидаги сонларнинг логарифмларини ҳисоблаш мумкин. Шунингдек, $x = 1$ бўлганда (1) ёйилманинг ҳам ўринли эканлигига исботсиз ишонч ҳосил қилишимизни айтиб ўтамиз.

Ихтиёрий бутун сонларнинг натурал логарифмларини ҳисоблаш учун формула чиқарамиз.

Иккита яқинлашувчи қаторнинг биридан иккинчисини ҳадлаб айирганда ҳосил бўлган қатор яқинлашувчи (1-параграфдаги 3-теоремага қаранг) бўлганлиги учун (1) тенгликдан (2) тенгликни ҳадлаб айириб, қуйидаги қаторни ҳосил қиламиз:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right].$$

Сўнгра $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ деб фараз қилсак, $x=\frac{1}{2n+1}$ бўлади. Ҳар қандай $n>0$ учун $0<x<1$ бўлганидан

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right],$$

бундан

$$\ln(n\pm 1)-\ln n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\dots\right]. \qquad (3)$$

$n=1$ бўлганда;

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\dots\right].$$

$\ln 2$ ни берилган δ даражада аниқлик билан ҳисоблаш учун s_p қисмий йиғиндини, унинг ҳадлари сони p ни шундай танлаб олиб ҳисоблаймизки, ташлаб юборилган ҳадларнинг йиғиндиси (яъни s ни s_p билан алмаштирганда қилинган R_p хато) йўл қўйиладиган δ хатодан кичик бўлсин. Бунинг учун R_p хатони баҳолаймиз:

$$R_p=2\left[\frac{1}{(2p+1)3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+3)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+5)\,3^{2p+5}}+\dots\right].$$

$2p+3$, $2p+5$, ... сонлар $2p+1$ дан катта бўлгани учун уларни $2p+1$ билан алмаштириб, ҳар бир касрни орттирамиз. Шунинг учун

$$R_p<2\left[\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+1}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+3}}+\frac{1}{(2p+1)\,3^{2p+5}}+\dots\right]$$

ёки

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\left[\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{3^{2p+3}}+\frac{1}{3^{2p+5}}+\dots\right].$$

Ўрта қавс ичидаги қатор махражи $\frac{1}{9}$ бўлган геометрик прогрессиядир. Бу прогрессиянинг йиғиндисини ҳисоблаб қуйидагини топамиз:

$$R_p<\frac{2}{2p+1}\,\frac{\frac{1}{3^{2p+1}}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{(2p+1)3^{2p-1}\cdot 4}. \qquad (4)$$

Энди $\ln 2$ ни, масалан 0,000000001 гача аниқлик билан ҳисобламоқчи бўлсак, p ни шундай танлаш керакки, $R_p < 0{,}000000001$ бўлсин. Бунга p ни (4) тенгсизликнинг ўнг томони 0,000000001 дан кичик бўладиган қилиб танлаб олиш билан эришиш мумкин. Бевосита танлаш йўли билан $p = 8$ деб олиш етарли эканлигини аниқлаймиз. Демак, 0,000000001 гача аниқлик билан топамиз:

$$\ln 2 \approx s_8 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13\cdot 3^{13}} + \frac{1}{15\cdot 3^{15}}\right] = 0{,}693147180.$$

Демак, $\ln 2 = 0{,}693147180$. Бунда шу тўққизта рақам ишончли.

(3) формулада $n = 2$ деб олсак:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \ldots\right] = 1{,}098612288$$

ва ҳоказо. Шу усул билан ҳар қандай бутун сонларнинг натурал логарифмларини ҳосил қилишимиз мумкин.

Сонларнинг ўнли логарифмларини ҳосил қилиш учун,

$$\lg N = M \ln N$$

муносабатдан фойдаланиш керак (I том II бобининг 8-параграфига қаранг) бунда $M = 0{,}434294$. У вақтда масалан:

$$\lg 2 = 0{,}434294 \cdot 0{,}693147 = 0{,}30103.$$

21-§. Аниқ интегралларни қаторлар ёрдами билан ҳисоблаш

X ва XI бобларда (I том) юқори чегаранинг функциялари сифатида элементар функциялар орқали чекли-кўринишда ифодаланмайдиган аниқ интегралларнинг мавжудлиги кўрсатилган эди. Баъзан бундай интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш қулай бўлади.

Бир нечта мисол қараймиз:

1. $\int\limits_0^a e^{-x^2}dx$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. Бунда e^{-x^2} нинг бошланғич функцияси элементар функция бўлмайди. Бу интегрални ҳисоблаш учун e^x нинг ёйилмасидаги x ни $-x^2$ га алмаштириб, интеграл остидаги функцияни қаторга ёямиз (17-параграфдаги (2) формулага қаранг):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} + \ldots$$

Бу тенгликнинг иккала томонини 0 дан a гача чегараларда интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx=\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\dots\right)\Big|_0^a=\frac{a}{1}-\frac{a^3}{1!\cdot 3}+$$

$$+\frac{a^5}{2!\cdot 5}-\frac{a^7}{3!\cdot 7}+\dots$$

Бу тенглик ёрдами билан a нинг исталган қийматида берилган интегрални ихтиёрий даражада аниқлик билан ҳисоблай оламиз.

2. $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинсин. Интеграл остидаги функцияни қаторга ёямиз:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

Бу тенгликдан

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қатор эса x нинг барча қийматларида яқинлашади. Уни ҳадлаб интегралласак:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx=a-\frac{a^3}{3!\cdot 3}+\frac{a^5}{5!\cdot 5}-\frac{a^7}{7!\cdot 7}+\dots$$

a ҳар қандай бўлганда ҳам қаторнинг йиғиндисини исталган даражада аниқлик билан ҳисоблаш мумкин.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ $(k<1)$ эллиптик интеграл ҳисоблансин.

$m=\frac{1}{2}$, $x=-k^2\sin^2\varphi$ деб олиб (19-параграфдаги (5) формулага қаранг), интеграл остидаги функцияни биномиал қаторга ёямиз:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}k^4\sin^4\varphi-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{6}k^6\sin^6\varphi-\dots$$

Бу қатор φ нинг ҳамма қийматларида яқинлашади ва уни ҳадлаб интеграллаш мумкин, чунки у ихтиёрий интегралда кучайтирилган қатордир. Шунинг учун

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt=\varphi-\frac{1}{2}k^2\int_0^{\varphi}\sin^2 t\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4}k^4\int_0^{\varphi}\sin^4 t\,dt-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}k^6\int_0^{\varphi}\sin^6 t\,dt-\dots$$

Ўнг томондаги интеграллар жуда содда ҳисобланади. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ бўлганда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

(I том XI бобининг 6- параграфига қаранг). Демак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\dots\right].$$

22- §. Дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдами билан интеграллаш

Агар дифференциал тенгламани ечиш интеграллашга олиб келинса, тенгламани ечиш учун тақрибий усулдан фойдаланишга тўғри келади. Бу усуллардан бири тенгламанинг ечимини Тейлор қатори шаклида тасвирлашдир; бу қатор чекли сондаги ҳадларининг йиғиндиси тақрибан изланган хусусий ечимга тенг бўлади.

Масалан:

$$y''=F(x,\ y,\ y')\qquad(1)$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг

$$(y)_{x=x_0}=y_0,\qquad (y')_{x=x_0}=y_0'\qquad(2)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин.

$y=f(x)$ ечим мавжуд ва уни Тейлор қатори кўринишида тасвирлаш мумкин дейлик (биз буни қандай шартларда ўринли эканлигига тўхтаб ўтирмаймиз):

$$y=f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}f''(x_0)+\dots\qquad(3)$$

Биз $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... ларни, яъни хусусий ечимдан олинган ҳосилаларнинг $x=x_0$ бўлгандаги қийматларини топишимиз керак. Аммо буни (1) тенглама ва (2) шартлар ёрдами билан бажариш мумкин.

Ҳақиқатан, (2) шартдан

$$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y_0'$$

эканлиги чиқади; (1) тенгламадан:

$$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y_0').$$

(1) тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциалласак:

$$y''' = F_x'(x, y, y') + F_y'(x, y, y')y' + F_{y'}'(x, y, y')y'', \qquad (4)$$

$x = x_0$ қийматни бу тенгламанинг ўнг томонига қўйсак:

$$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}.$$

(4) муносабатни яна бир марта дифференциаллаб,

$$f^{IV}(x_0) = (y^{IV})_{x=x_0}$$

тенгликни топамиз ва ҳоказо.

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (3) тенгликка қўямиз. x нинг бу қатор яқинлашадиган қийматларида (3) қатор тенгламанинг ечимини беради.

1-мисол. $y'' = -yx^2$ тенгламанинг $(y)_{x=0} = 1$, $(y')_{x=0} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш

$$f(0) = y_0 = 1, \qquad f'(0) = y_0' = 0$$

ларни топамиз. Берилган тенгламадан $(y'')_{x=0} = f''(0) = 0$; сўнгра,

$$y''' = -y'x^2 - 2xy, \qquad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0,$$

$$y^{IV} = -y''x^2 - 4xy' - 2y, \qquad (y^{IV})_{x=0} = -2.$$

Умуман, тенгламанинг иккала қисмини Лейбниц формуласи бўйича, k марта дифференциалласак (I т. III бобининг 22- параграфи):

$$y^{(k+2)} = -y^k x^2 - 2kxy^{(k-1)} - k(k-1)y^{k-2}.$$

Энди $x = 0$ деб олсак:

$$y_0^{(k+2)} = -k(k-1)\,y_0^{(k-2)}$$

ёки $k + 2 = n$, демак,

$$y_0^{(n)} = -(n-3)(n-2)\,y_0^{(n-4)}.$$

Бундан

$$y_0^{IV} = -1 \cdot 2, \quad y_0^{(8)} = -5 \cdot 6 y_0^{IV} = (-1)^2 (1 \cdot 2)(5 \cdot 6),$$

$$y_0^{(12)} = -9 \cdot 10\, y_0^{(8)} = (-1)^3 (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10),$$

. . . .

$$y_0^{4k} = (-1)^k (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10) \ldots [(4k-3)(4k-2)].$$

. . . .

Бундан ташқари

$$\begin{array}{lll} y_0^{(5)} = 0, & y_0^{(9)} = 0, \ldots, & y_0^{(4k+1)} = 0, \ldots, \\ y_0^{(6)} = 0, & y_0^{(10)} = 0, \ldots, & y_0^{(4k+2)} = 0, \ldots, \\ y_0^{(7)} = 0, & y_0^{(11)} = 0, \ldots, & y_0^{(4k+3)} = 0. \ldots, \end{array}$$

Шундай қилиб, тартиблари тўртга каррали бўлган ҳосилаларгина нолга айланмайди.

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини Маклорен қаторига қўйиб, тенгламанинг ечимини аниқлаймиз:

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!} 1 \cdot 2 + \frac{x^8}{8!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6) - \frac{x^{12}}{12!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6)(9 \cdot 10) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} (1 \cdot 2)(5 \cdot 6) \ldots [(4k-3)(4k-2)] + \ldots .$$

x нинг барча қийматларида бу қаторнинг яқинлашишини Даламбер аломати ёрдами билан текшириш мумкин; демак, бу қатор тенгламанинг ечимидир.

Агар тенглама чизиқли бўлса, хусусий ечим ёйилмасининг коэффициентларини аниқмас коэффициентлар усули бўйича излаш қулайдир. Бунинг учун

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

қаторни тўғридан-тўғри дифференциал тенгламага „қўямиз" ва тенгламанинг турли қисмларидаги бир хил даражали x ларнинг коэффициентларини тенглаймиз.

2-мисол. $y'' = 2xy' + 4y$ тенгламанинг $(y)_{x=0} = 0$, $(y')_{x=0} = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

деб фараз этамиз.

Бошланғич шартларга асосан:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1.$$

Демак,

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots$$

Ёзилган ифодаларни берилган тенгламага қўйиб ва бир хил даражали x ларнинг коэффициентларини тенглаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{ll} 2a_2 = 0, & \text{бундан } a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2a_3 = 2 + 4, & \text{бундан } a_3 = 1, \\ 4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2, & \text{бундан } a_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$n(n-1) a_n = (n-2) 2a_{n-2} + 4a_{n-2}, \text{ бундан } a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1},$$

. . . .

Демак,

$$a_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!},\ a_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!},\ a_9=\frac{1}{4!},\ \ldots,\ a_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!},\ \ldots,$$

$$a_4=0,\quad a_6=0,\ \ldots,\ a_{2k}=0\ \ldots$$

Топилган коэффициентларни ўрнига қўйиб, изланаётган ечимни топамиз:

$$y=x+\frac{x^3}{1}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k+1}}{k!}+\ldots$$

Ҳосил қилинган қатор x нинг барча қийматларида яқинлашади.

Топилган хусусий ечимни элементар функциялар орқали ифодалаш мумкинлигини кўрамиз: x ни қавсдан ташқарига чиқарсак, қавс ичида e^{x^2} функциянинг ёйилмаси ҳосил бўлади. Демак,

$$y=xe^{x^2}.$$

23- §. Бессель тенгламаси

Ушбу

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \qquad (p=\text{const}) \qquad (1)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *Бессель тенгламаси* дейилади.

Бу тенгламанинг ечимини ўзгарувчи коэффициентли баъзи бир тенгламаларни ечишдаги сингари даражали қатор шаклида изламасдан, x нинг бирор даражаси билан даражали қаторнинг кўпайтмаси шаклида излаш керак:

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k. \qquad (2)$$

r кўрсаткич аниқ бўлмагани учун a_0 коэффициентни нолдан фарқли деб ҳисоблашимиз мумкин.

(2) ифодани

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}$$

шаклида ёзамиз ва унинг ҳосилаларини топамиз:

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)\,a_kx^{r+k-1},\qquad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}.$$

Бу ифодаларни (1) тенгламага қўямиз:

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}+$$

$$+x\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)a_kx^{r+k-1}+(x^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{r+k}=0.$$

r, $r+1$, $r+2$, ..., $r+k$ даражали x лар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{ll}
[r(r-1)+r-p^2]\,a_0=0 \text{ ёки} & [r^2-p^2]a_0=0, \\
[(r+1)r+(r+1)-p^2]a_1=0 \text{ ёки} & [(r+1)^2-p^2]a_1=0, \\
[(r+2)(r+1)+(r+2)-p^2]a_2+a_0=0 \text{ ёки} & [(r+2)^2-p^2]a_2+a_0=0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
[(r+k)(r+k-1)+(r+k)-p^2]a_k+a_{k-2}=0 \text{ ёки} & [(r+k)^2-p^2]a_k+ \\
 & +a_{k-2}=0. \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}\right| \tag{3}$$

Ушбу тенгликни қараймиз:

$$[(r+k)^2-p^2]a_k+a_{k-2}=0, \tag{3$'$}$$

Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$[(r+k-p)(r+k+p)]a_k+a_{k-2}=0.$$

Шартга кўра $a_0 \neq 0$; демак,

$$r^2-p^2=0,$$

шунинг учун $r_1=p$ ёки $r_2=-p$.

Аввал $r_1=p>0$ бўлган ҳолдаги ечимни қараб чиқамиз.

(3) тенгламалар системасидан бирин-кетин a_1, a_2, ... ҳамма коэффициентлар аниқланади; a_0 ихтиёрий бўлиб қолади. Масалан, $a_0=1$ бўлсин. У ҳолда

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2p+k)}.$$

k га турли қийматлар бериб, қуйидагиларни топамиз:

$$\left.\begin{array}{c}
a_1=0,\ a_3=0 \text{ ва, умуман } a_{2m+1}=0, \\
a_2=-\dfrac{1}{2(2p+2)},\quad a_4=\dfrac{1}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)},\ \dots, \\
a_{2\nu}=(-1)^{\nu+1}\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2\nu(2p+2)(2p+4)\dots(2p+2\nu)},\ \dots,
\end{array}\right| \tag{4}$$

Топилган коэффициентларни (2) формулага қўйсак:

$$y_1=x^p\left[1-\frac{x^2}{2(2p+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^4}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2p+2)(2p+4)(2p+6)}+\dots\right]. \tag{5}$$

k ҳар қандай бўлганда ҳам (3) тенгламадаги a_k нинг коэффициенти

$$(r_1+k)^2-p^2$$

нолдан фарқ қилгани учун ҳамма $a_{2\nu}$ коэффициентлар аниқланади.

Шундай қилиб, y_1 функция (1) тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Энди шундай шартни топамизки, бу шарт ва $r_2 = -p$ иккинчи илдиз берилганда ҳам барча a_k коэффициентлар аниқланади. Бу эса k ҳар қандай бутун мусбат жуфт сон бўлганда

$$(r_2 + k)^2 - p^2 \neq 0 \qquad (6)$$

ёки

$$r_2 + k \neq p$$

тенгсизлик бажарилгандагина бўлади.

Аммо $p = r_1$ демак,

$$r_2 + k \neq r_1.$$

Шундай қилиб, (6) шарт бу ҳолда ушбу

$$r_1 - r_2 \neq k$$

тенгсизликка эквивалентдир, бунда k бутун мусбат жуфт сон. Лекин,

$$r_1 = p, \quad r_2 = -p,$$

демак,

$$r_1 - r_2 = 2p.$$

Шундай қилиб, агар p бутун сон бўлмаса, (5) ифодадаги p ни $-p$ га алмаштириш билан ҳосил бўладиган иккинчи хусусий ечимни ёзиш мумкин:

$$y_2 = x^{-p}\left|1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2p+2)(-2p+4)(-2p+6)} + \ldots \right|. \qquad (5')$$

x нинг барча қийматларида (5) ва (5′) даражали қаторларнинг яқинлашишини Даламбер аломатига асосан осонгина аниқлаш мумкин. Шунингдек y_1 ва y_2 функцияларнинг ҳам чизиқли эркли эканлиги маълум*).

y_1 ечимнинг бирор ўзгармас сонга кўпайтмаси *Бесселнинг бир жинсли p-тартибли функцияси деб аталади* ва J_p

---

*) Функцияларнинг чизиқли эркли бўлиши қуйидагича текширилади. Ушбу

$$\frac{y_2}{y_1} = x^{-2p}\frac{1 - \frac{x^2}{2(-2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2p+2)(-2p+4)} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2(2p+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} - \ldots}$$

нисбатни қараймиз. $x \to 0$ да тенглик чексизликка интилгани учун бу нисбат ўзгармас бўла олмайди. Демак, y_1 ва y_2 функциялар чизиқли эрклидир.

символ билан белгиланади. y_2 ечим эса J_{-p} символ билан белгиланади.

Шундай қилиб, p бутун сон бўлмаганда, (1) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1J_p + C_2J_{-p}.$$

Масалан, $p = \frac{1}{2}$ бўлса, (5) қатор қуйидаги шаклни олади:

$$x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot3} + \frac{x^4}{2\cdot4\cdot3\cdot5} - \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7} - \dots\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right].$$

Бу ечимнинг $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ўзгармас кўпайтувчига кўпайтмаси Бесселнинг $J_{1/2}$ функцияси деб аталади; қавс ичида йиғиндиси $\sin x$ функцияга тенг бўлган қатор турганлигини кўрамиз. Демак,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Худди шунингдек, (5′) формуладан фойдалансак:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

(1) тенгламанинг умумий интеграли $p = \frac{1}{2}$ бўлганда қуйидагича бўлади:

$$y = C_1J_{1/2}(x) + C_2J_{-1/2}(x).$$

Сўнгра, p бутун сон бўлсин, уни $n\ (n \geqslant 0)$ билан белгилаймиз. Бу ҳолда (5) ечим маънога эга ва у (1) тенгламанинг биринчи хусусий ечими бўлади.

Лекин (5′) ечим маънога эга бўлмайди, чунки ёйилманинг махражидаги кўпайтувчилардан бири нолга айланади.

$p = n$ бутун мусбат бўлганда Бессель функцияси J_n (5) қаторни $\frac{1}{2^nn!}$ ўзгармас кўпайтувчига кўпайтириш билан ($n = 0$ бўлса, 1 га кўпайтириш билан) аниқланади:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^nn!}\left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot4(2n+2)(2n+4)}\right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots\right]$$

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu} \tag{7}$$

Бу ҳолда иккинчи хусусий ечимни

$$K_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

шаклда излаш кераклигини кўрсатиш мумкин.

Бу ифодани (1) тенгламага қўйиб, b_k коэффициентларни аниқлаймиз.

Коэффициентлари шу усулда топилган $K_n(x)$ функцияни бирор ўзгармас сонга кўпайтириш билан ҳосил қилинган функция *Бесселнинг n-тартибли иккинчи жинс функцияси* дейилади.

Бу эса (1) тенгламанинг биринчи ечим билан чизиқли эркли система ҳосил қилувчи иккинчи ечимидир.

Умумий интеграл ушбу кўринишда бўлади:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 K_n(x). \tag{8}$$

Бунда

$$\lim_{x \to 0} K_n(x) = \infty$$

эканлигини қайд этамиз.

Демак, биз $x = 0$ бўлгандаги чекли ечимни қарамоқчи бўлсак, (8) формулада $C_2 = 0$ деб олишимиз керак.

Мисол. $x = 0$ да $y = 2$, $y' = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Бессель тенгламасининг $p = 0$ бўлгандаги ечими топилсин.

Ечиш. (7) формулага асосан битта хусусий ечимни топамиз:

$$J_0(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Бу ечимдан фойдаланиб, берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимни ёзиш мумкин, чунончи:

$$y = 2J_0(x),$$

Изоҳ. Агар бизга берилган тенгламанинг умумий интегралини топиш керак бўлса, биз иккинчи хусусий ечимни

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

шаклда излаган бўлар эдик.

Ҳамма ҳисоблашларни келтирмасдан $K_0(x)$ билан белгиланган иккинчи хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлишини кўрсатамиз:

$$K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$

Бу функцияни бирор ўзгармас кўпайтувчига кўпайтиришдан ҳосил бўлган функция *Бесселнинг иккинчи жинс нолинчи тартибли функцияси* дейилади.

24-§. Комплекс ҳадли қаторлар

Ушбу комплекс сонлар кетма-кетлигини қараймиз:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

бунда

$$z_n = a_n + ib_n (n = 1,2,\ldots).$$

1-таъриф. Агар

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0 \tag{1}$$

бўлса, $z_0 = a + ib$ комплекс сон $z_n = a_n + ib_n$ комплекс сонлар *кетма-кетлигининг лимити* дейилади.

(1) шартни ёйиқ шаклда ёзамиз:

$$z_n - z_0 = (a_n + ib_n) - (a + ib) = (a_n - a) + i(b_n - b), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} = 0.$$

(2) тенгликка асосан

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{3}$$

шарти бажарилгандагина (1) шарт бажарилиши келиб чиқади. Комплекс сонлардан қатор тузамиз:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots, \tag{4}$$

бунда

$$w_n = u_n + iv_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

(4) қатор n та ҳадининг йиғиндисини қараймиз, уни s_n билан белгилаймиз.

$$s_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n \tag{5}$$

s_n — қуйидаги комплекс сондан иборат:

$$s_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right). \tag{6}$$

2-таъриф. Агар ушбу лимит

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = A + iB,$$

мавжуд бўлса, (4) қатор *яқинлашувчи қатор* дейилади ва s унинг *йиғиндиси* деб айтилади:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} w_k = A + iB. \tag{7}$$

(6) шартдан (3) тенгликка асосан ушбу тенгликлар келиб чиқади:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k \tag{8}$$

Агар $\lim s_n$ мавжуд бўлмаса, (4) қатор *узоқлашувчи* дейилади. (4) қаторнинг яқинлашишини текшириш учун қуйидаги теорема фойдалидир.

1-теорема. *Агар (4) қатор ҳадларининг модулларидан тузилган*

$$|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots, \text{ бунда } |w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \tag{9}$$

қатор яқинлашса, у холда (4) қатор яқинлашади.

Исбот. (9) қаторнинг яқинлашишидан ва

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|, |v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = w_n$$

шартлардан (8) тенгликлар келиб чиқади (ҳақиқий ҳадли абсолют яқинлашувчи мос қаторлар ҳақидаги теоремаларга асосан), демак, (7) тенглик ҳам шундан келиб чиқади.

Исботланган теорема мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг етарли ҳамма аломатларини комплекс ҳадли қаторларнинг яқинлашишини текшириш учун қўлланишга имкон беради.

25-§. Комплекс ўзгарувчили даражали қаторлар

Энди комплекс ҳадли даражали қаторларни қарашга ўтамиз.

1-таъриф. Ушбу қатор

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

комплекс ўзгарувчили даражали қатор дейилади, бунда $z = x + iy$ — комплекс ўзгарувчи, x ва y ҳақиқий сонлар, c_n — ўзгармас комплекс ёки ҳақиқий сонлар.

Даражали қаторлар учун ҳақиқий ҳадли даражали қаторлар назариясига ўхшаш назария мавжуд.

2-таъриф. z нинг (1) қатор яқинлашадиган комплекс ўзгарувчи текислигидаги қийматлари тўплами (1) даражали қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади (z нинг ҳар бир конкрет қийматида (1) қатор комплекс ҳадли 24-§ (4) типдаги сонли қаторга айланади).

3-таъриф. (1) қатор ҳадларининг модулидан тузилган қатор

$$|c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + \ldots + |c_n z^n| + \ldots \tag{2}$$

яқинлашса, (1) қатор *абсолют яқинлашувчи* қатор дейилади.

Ушбу теоремани исботсиз келтирамиз.

1-теорема. *Комплекс ҳадли* (1) *даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси маркази координата бошида бўлган комплекс ўзгарувчи z текислигидаги доирадан иборат. У яқинлашиш доираси дейилади. Яқинлашиш доираси ичида ётган нуқталарда* (1) *қатор абсолют яқинлашади.*

Яқинлашиш доирасининг радиуси R даражали қаторнинг *яқинлашиш радиуси* дейилади. Агар R—(1) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси бўлса, у ҳолда қатор $|z| < R$ соҳада яқинлашади деб ёзилади. (Ҳақиқий ўзгарувчи даражали қаторнинг яқинлашиш масаласига ўхшаш интервал охирларида қаторларнинг $|z| = R$ чегаралардаги нуқталарда яқинлашиши ҳақидаги масала қўшимча текшириш билан ҳал этилади). Яқинлашиш радиуси R c_n коэффициентларнинг характерига боғлиқ ҳолда $R=0$ дан $R=\infty$ гача исталган қийматга эга бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда қатор фақат $z=0$ нуқтада яқинлашади, охирги ҳолда қатор z нинг ҳар қандай қийматида яқинлашади.

Ушбу тенгликни ёзамиз:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (3)$$

Агар z яқинлашиш доираси ичида турли қийматлар қабул қилса, у ҳолда $f(z)$ функция турли қийматлар қабул қилади. Шундай қилиб, ҳар бир комплекс ўзгарувчили даражали қатор яқинлашиш доираси ичида комплекс ўзгарувчининг мос функциясини аниқлайди. Бу комплекс ўзгарувчининг *аналитик функциясидир.*

Комплекс ўзгарувчининг функциясига комплекс ўзгарувчанли даражали қаторлар билан аниқланган мисоллар келтирамиз.

1) $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (4)$$

Бу *комплекс ўзгарувчининг даражали функцияси.* Агар $y = 0$ бўлса, у ҳолда (4) формула § 17 даги (2) формулага айланади. Агар $x = 0$ бўлса, у ҳолда § 18 даги (1) тенглик ҳосил бўлади.

2) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad (5)$$

Бу *комплекс ўзгарувчининг синуси.* $y = 0$ да (5) формула § 17 даги (1) формулага айланади.

3) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad (6)$$

Бу *комплекс ўзгарувчининг косинуси.* Агар (4) формулада ўнгда ва чапда z нинг ўрнига (iz) ни қўйсак, у ҳолда § 18 да бўлгани каби,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{7}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу *комплекс ўзгарувчи z учун Эйлер формуласидир.* Агар z ҳақиқий сон бўлса, бу формула 18- § даги (2) формуланинг ўзи бўлади.

4)
$$\text{sh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \tag{8}$$

5)
$$\text{ch}\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \tag{9}$$

Сўнгги икки формула 17-§ даги (5) ва (6) формулаларга ўхшаш ва $z=x$ — ҳақиқий сон бўлса, улар билан бир хилдир.

(4), (5), (6), (8) ва (9) формулаларга асосан қаторларни қўшиш, айириш ва z ни (iz) га алмаштириш билан қуйидаги тенгликлар ҳосил қилинади:

$$e^z = \text{ch}z + \text{sh}z, \tag{10}$$

$$e^{-z} = \text{ch}z - \text{sh}z, \tag{11}$$

$$\text{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \text{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{12}$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2}, \qquad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}. \tag{13}$$

(4), (5), (6), (8), (9) қаторлар z нинг ҳамма қийматларида яқинлашишларини кўрсатиб ўтамиз, бунга 1 теоремага ва 24-§ га асосан осонгина ишониш мумкин. Ҳақиқий ўзгарувчининг даражали қаторлари бўлган ҳолларда қилинганидек, комплекс ўзгарувчининг $(z-z_0)$ даражалари бўйича қаторлар қаралади, бундаги z_0—бирор комплекс сон:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots \tag{14}$$

c_n—комплекс ёки ҳақиқий ўзгармаслар. (14) қаторни $z-z_0 = z^*$ алмаштириш билан (1) қатор кўринишига олиб келинади. (1) кўринишдаги қатор учун тўғри бўлган ҳамма хоссалар ва теоремалар (14) шаклдаги қаторга олиб ўтилади, фақат (14) қаторнинг яқинлашиш доирасининг маркази координата бошида эмас, балки z_0 нуқтада бўлади.

Агар R (14) қаторнинг яқинлашиш радиуси бўлса, у ҳолда қатор $(z-z_0) < R$ соҳада яқинлашади деб ёзилади.

Бу *комплекс ўзгарувчининг косинуси.* Агар (4) формулада ўнгда ва чапда z нинг ўрнига (iz) ни қўйсак, у ҳолда § 18 да бўлгани каби,

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{7}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу *комплекс ўзгарувчи z учун Эйлер формуласидир.* Агар z ҳақиқий сон бўлса, бу формула 18-§ даги (2) формуланинг ўзи бўлади.

4)
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \tag{8}$$

5)
$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{9}$$

Сўнгги икки формула 17-§ даги (5) ва (6) формулаларга ўхшаш ва $z = x$ — ҳақиқий сон бўлса, улар билан бир хилдир.

(4), (5), (6), (8) ва (9) формулаларга асосан қаторларни қўшиш, айириш ва z ни (iz) га алмаштириш билан қуйидаги тенгликлар ҳосил қилинади:

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \tag{10}$$

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z, \tag{11}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{12}$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2}, \qquad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i}. \tag{13}$$

(4), (5), (6), (8), (9) қаторлар z нинг ҳамма қийматларида яқинлашишларини кўрсатиб ўтамиз, бунга 1 теоремага ва 24-§ га асосан осонгина ишониш мумкин. Ҳақиқий ўзгарувчининг даражали қаторлари бўлган ҳолларда қилинганидек, комплекс ўзгарувчининг $(z - z_0)$ даражалари бўйича қаторлар қаралади, бундаги z_0—бирор комплекс сон:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{14}$$

c_n—комплекс ёки ҳақиқий ўзгармаслар. (14) қаторни $z - z_0 = z^*$ алмаштириш билан (1) қатор кўринишига олиб келинади. (1) кўринишдаги қатор учун тўғри бўлган ҳамма хоссалар ва теоремалар (14) шаклдаги қаторга олиб ўтилади, фақат (14) қаторнинг яқинлашиш доирасининг маркази координата бошида эмас, балки z_0 нуқтада бўлади.

Агар R (14) қаторнинг яқинлашиш радиуси бўлса, у ҳолда қатор $(z - z_0) < R$ соҳада яқинлашади деб ёзилади.

26-§. Биринчи тартибли дифференциал тенгламани кетма-кет яқинлашиш (итерация) методи билан ечиш

XIII бобнинг 32, 33 ва 34-параграфларида дифференциал тенгламани ва дифференциал тенгламалар системасини айирмали методлар билан тақрибий интеграллаш қараб чиқилган эди. Биз бу ерда дифференциал тенгламани тақрибий интеграллашнинг бошқа методини баён қиламиз. Шуни ҳам қайд қилиб ўтамизки, қараб чиқиладиган бу методнинг ўзи айни вақтда дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботлашдан иборат (XIII боб 2-§ га қаранг). Бизга қаторлар назариясидан фойдаланиш керак бўлади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг

$$x = x_0 \text{ да } y = y_0 \tag{2}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. (1) тенгламанинг ҳадларини x_0 дан x гача бўлган чегараларда интеграллаб ва $y|_{x=x_0} = y_0$ эканини эътиборга олиб ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx + y_0. \tag{3}$$

Сўнгги тенгламада изланаётган y функция интеграл ишораси остида турибди ва шунга кўра бу тенглама *интеграл тенглама* дейилади.

(1) тенгламани ва (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функция (3) тенгламани қаноатлантиради. (3) тенгламани қаноатлантирувчи $y = y(x)$ функция, (1) тенгламани ва (2) бошланғич шартни қаноатлантириши очиқ тушунарли.

Аввало (2) бошланғич шартда (1) тенгламанинг тақрибий ечимини ҳосил қилиш методини қараймиз.

y_0 ни *нолинчи* тақрибий ечим деб ҳисоблаймиз. (3) тенгликнинг ўнг қисмидаги интеграл остидаги функцияда y ўрнига y_0 қийматни қўйиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx + y_0. \tag{4}$$

Бу эса (1) дифференциал тенгламанинг (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи *биринчи* тақрибий ечимидир.

(3) тенгликда интеграл остидаги функцияга *биринчи* тақрибий қиймат $y_1(x)$ ни қўйиб, мана бу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} f[x,\ y_1(x)]dx + y_0. \tag{5}$$

Бу *иккинчи* яқинлашишдир. Бу процессни давом эттирамиз:

$$\left.\begin{array}{l} y_3(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f[x,\ y_2(x)]dx + y_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f[x,\ y_{n-1}(x)]dx + y_0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right| \tag{6}$$

Бизга керакли аниқликдаги талабни қаноатлантирадиган қайси яқинлашишни олиш кераклиги қуйида кўрсатилади.

Мисол. $y' = x + y^2$ тенгламанинг $x = 0$ да $y_0 = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган тақрибий ечими топилсин.

Ечиш. (4) формула бўйича мана буни ҳосил қиламиз:

$$y_1 = \int_0^x (x + 1)dx + 1 = \frac{x^2}{2} + x + 1,$$

$$y_2 = \int_0^x \left[x + \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)^2\right] dx + 1 = \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x + 1,$$

ва ҳ. к.

27- §. Дифференциал тенглама ечими мавжудлигининг исботи. Тақрибий ечишдаги хатога баҳо бериш

Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. *Ушбу дифференциал тенглама*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \tag{1}$$

ва бошланғич шарт

$$x = x_0 \text{ да } y = y_0 \tag{2}$$

берилган бўлсин.

$f(x,\ y)$ ва $f'_y(x,\ y)$ функциялар D ёпиқ соҳада

$$D\{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\} \text{ 372- расм.} \tag{3}$$

узлуксиз бўлсин. У ҳолда бирор

$$x_0 - l < x < x_0 + l \tag{4}$$

интервалда (1) тенгламанинг (2) шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуддир. Бу ечим биргина бўлади. l сони қуйида аниқланади.

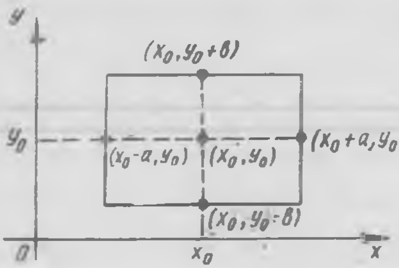
Исбот. $f(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$ функциялар D ёпиқ соҳада узлуксиз бўлгани учун шундай $M>0$ ва $N>0$ ўзгармас сонлар мавжудлиги чиқадики, унда соҳанинг ҳамма нуқталари учун ушбу муносабат бажарилади:

$$|f(x, y)| \leqslant M, \qquad (5)$$

$$|f'_y(x, y)| \leqslant N. \qquad (6)$$

(Бу хосса II боб 10-§ да кўрсатилган хоссага ўхшайди. (4) тенгсизликдаги l сони a ва $\frac{b}{M}$ сонлардан энг кичигидир, яъни

$$l = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \qquad (7)$$



372-расм.

D соҳага тегишли икки ихтиёрий $A_1(x, y_1)$ ва $A_2(x, y_2)$ нуқталар учун $f(x, y)$ функцияга Лагранж теоремасини татбиқ этамиз:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = f'_y(x, \eta)(y_2 - y_1),$$

бунда $y_1<\eta<y_2$, демак, $|f'_y|(x, \eta)| \leqslant N$. Шунга кўра исталган икки нуқта учун ушбу тенгсизлик ўринли:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant N|y_2-y_1| \, {}^{*)}. \qquad (8)$$

26-§ даги (4) тенгликка қайтамиз. (5), (4), (7) тенгликларни ҳисобга олган ҳолда, ундан шуни ҳосил қиламиз:

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} Mdx = M|x - x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \qquad (9)$$

Шундай қилиб, (4) кесмада 26-§ (4) тенглик билан аниқланган $y = y_1(x)$ функция D соҳадан четга чиқмайди.

---

*) Агар бирор функция $F(y)$ учун

$$F(y_2) - F(y_1)| \leqslant K|y_2 - y_1|$$

шарт қаноатлантирилса, бунда y_2 ва y_1—бирор соҳадаги ихтиёрий нуқталар, K—ўзгармас сон, у ҳолда бу шартни *Липшиц шарти* деб аталади. Шундай қилиб, (8) муносабатни аниқлаб, биз агар $f(x, y)$ функция бирор соҳада чегараланган $\frac{\partial f}{\partial y}$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, у шу соҳада Липшиц шартини қаноатлантиришини кўрсатдик. Бунинг тескариси тўғри бўлмаслиги мумкин.

Энди 26-§ даги (5) тенгликка ўтамиз. $f[x, y_1(x)]$ функциянинг аргументлари D соҳадан чиқмайди. Шунинг учун бундай ёзишимиз мумкин:

$$|y_2-y_0| = \int_{x_0}^{x} f[x, y_1(x)]dx| \leqslant M|x-x_0| \leqslant Ml \leqslant b. \qquad (10)$$

Тўлиқ индукция методи билан, агар x (4) интервалга тегишли бўлса, исталган n учун

$$|y_n - y_0| \leqslant b \qquad (11)$$

тенгсизликни исбот қилиш мумкин.

Энди

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \qquad (12)$$

лимитнинг мавжудлигини ва $y(x)$ функция (1) дифференциал тенгламани ва (2) бошланғич шартни қаноатлантиришини исбот қиламиз.

Исбот қилиш учун $u_n = y_n - y_{n-1}$ умумий ҳадли

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_{n-1}-y_{n-2})+(y_n-y_{n-1})+\ldots \qquad (13)$$

қаторни қараймиз, бунда $u_0 = y_0$. Бу қатор $n+1$ ҳадининг йиғиндиси

$$s_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} u_i = y_n \qquad (14)$$

эканлиги равшан.

(13) қатор ҳадларининг абсолют қийматларига баҳо берамиз:

$$|y_1 - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx| \leqslant M|x-x_0|. \qquad (15)$$

26-§ даги (4), (5) ва (6) га асосан шуни топамиз:

$$|y_2-y_1| = |\int_{x_0}^{x}[f(x, y_1)-f(x, y_0)]dx = |\int_{x_0}^{x} f'_y(x, \eta_1)(y_2-y_1)dx| \leqslant$$

$$\leqslant \pm N\int_{x_0}^{x} M|x-x_0|dx = N\frac{M}{2}|x-x_0|^2$$

(агар $x_0 < x$ бўлса, + ишора, агар $x_0 > x$ бўлса,—ишора олинади). Демак,

$$|y_2 - y_1| \leqslant M\frac{N}{1\cdot 2}|x-x_0|^2. \qquad (16)$$

Шунга ўхшаш (16) ни ҳисобга олиш билан

$$|y_3 - y_2| = |\int_{x_0}^{x}[f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)]dx| = |\int_{x_0}^{x} f'_y(x,\ \eta_2)(y_2 - y_1)dx| \leqslant$$

$$\leqslant \pm N\int_{x_0}^{x}\frac{NM}{2}|x - x_0|^2 dx = M\frac{N^2}{1\cdot 2\cdot 3}|x - x_0|^3. \tag{17}$$

Шунга ўхшаш давом эттириб қуйидагини топамиз:

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant M\frac{N^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n. \tag{18}$$

Шундай қилиб, $|x - x_0| < l$ интервал учун (13) функционал қатор кучайтириладиган қатордир. Мос ҳадларининг абсолют қийматлари (13) қаторнинг ҳадларидан катта бўлган мусбат ҳадли сонли қатор

$$y_0 + Ml + M\frac{Nl^2}{2!} + M\frac{N^2 l^3}{3!} + \ldots + M\frac{N^{n-1}l^n}{n!} + \ldots \tag{19}$$

бўлади, унинг умумий ҳади $v_n = M\frac{N^{n-1}l^n}{n!}$ бўлади. Бу қатор яқинлашади, буни Даламбер аломати ёрдамида топиш осон:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{M\frac{N^{n-1}l^n}{n!}}{M\frac{N^{n-2}l^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Nl}{n} = 0 < 1.$$

Шундай қилиб, (13) қатор кучайтириладиган қатор, демак, у яқинлашади. Унинг ҳадлари узлуксиз функциялардан иборат бўлгани учун, у $y(x)$ узлуксиз функцияга яқинлашади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} y_n = y(x), \tag{20}$$

бунда $y(x)$—узлуксиз функция. Бу функция бошланғич шартни қаноатлантиради, чунки ҳамма n учун

$$y_n(x_0) = y_0.$$

Ҳосил бўлган $y(x)$ функция (1) тенгламани қаноатлантиришини исбот қиламиз. 26-§ даги (6) тенгликлардан сўнггисини яна ёзамиз:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{n-1})dx. \tag{21}$$

Энди

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f[x,\ y_{n-1}(x)]\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x,\ y)dx \tag{22}$$

эканини исбот қиламиз, бундаги $y(x)$ (20) тенглик билан аниқланган.

Аввал қуйидагини эътиборга оламиз. Маълумки (13) қатор кучайтириладиган қатор, шунга кўра (20) дан ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай n топиладики,

$$|y-y_n|<\varepsilon \tag{23}$$

келиб чиқади. (23) ни ҳисобга олиб, бутун (4) интервалда ушбуни ёзишимиз мумкин:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x,\ y)dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_n)dx\right| \leqslant \pm\int_{x_0}^{x} |f(x,\ y)-f(x,\ y_n)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \pm\int_{x_0}^{x} N|y-y_n|\,dx \leqslant N\varepsilon\,|x-x_0|.$$

Бироқ $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon=0$. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{x_0}^{x} f(x,\ y)dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_n)dx\right|=0.$$

Охирги тенгликдан (22) тенглик келиб чиқади.

Энди, (21) тенгликнинг иккала қисмида $n\to\infty$ да лимитга ўтиб, (20) тенглик билан аниқланган $y(x)$ функцияни ҳосил қиламиз, бу эса

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y)dx \tag{24}$$

тенгламани қаноатлантиради.

Юқорида кўрсатилгандек, бундан эса топилган $y(x)$ функция (1) дифференциал тенгламани ва (2) бошланғич шартни қаноатлантириши келиб чиқади.

1-изоҳ. Исботлашнинг бошқа методларидан фойдаланиб, агар $f(x,\ y)$ функция D соҳада узлуксиз бўлса (Пеано теоремаси)*) (1) тенгламанинг ечими мавжуд (2) шартни қаноатлантирувчи деб тасдиқлаш мумкин.

2-изоҳ. (18) муносабатни ҳосил қилгандагига ўхшаш усул билан кўрсатиш мумкин, $y(x)$ ечимини унинг n-яқинлашиши y_n га алмаштиришдаги хато ушбу формула

$$|y-y_n|\leqslant\frac{N^nM}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{MN^n\,l^{n+1}}{(n+1)!} \tag{25}$$

билан берилишини кўрсатиш мумкин:

---

*) Масалан, И. Г. Петровскийнинг „Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений“ китобига қаралсин, Изд-во.—„Наука“.

Мисол. Бу баҳони $x=0$ да $y_0=1$ бошланғич шартда $y'=x+y^2$ тенгламанинг бешинчи яқинлашиш y_5 ечими учун қўллаб кўрамиз.

D соҳа тубандагича бўлсин:

$$D\left\{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\ -1<y<1\right\},$$

яъни $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. У ҳолда $M=\frac{3}{2}$, $N=2$ бўлади. Сўнгра, ушбуни аниқлаймиз,

$$l=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right)=\min\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

(25) формула бўйича шуни ҳосил қиламиз:

$$|y-y_5|<\frac{2^5\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6}{6!}=\frac{1}{960}.$$

(25)-баҳо анчагина қўпол эканлигини кўрамиз. Қаралган мисолни бошқа методлар билан қилган хатонинг ўн марта камлигини курсатиш мумкин.

28-§. Дифференциал тенглама ечимининг бирдан-бирлиги теоремаси

Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Теорема. *Агар $f(x,\ y)$ функция узлуксиз ва 27-§ да аниқланган D соҳада $\frac{\partial f}{\partial y}$ узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ечими,

$$x=x_0 \text{ да } y=y_0 \qquad (2)$$

бошланғич шартда бирдан-бирдир, яъни $(x_0,\ y_0)$ нуқта орқали (1) тенгламанинг биргина интеграл эгри чизиғи ўтади.

Исбот. Фараз этайлик, (1) тенгламанинг (2) шартни қаноатлантирувчи икки ечими, яъни $A\ (x_0,\ y_0)$ нуқтадан чиқадиган икки чизиқ: $y\ (x)$ ва $z\ (x)$ мавжуд бўлсин. Демак, бу иккала функция 27-§ даги (24) тенгламани қаноатлантиради:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\ y)\,dx, \qquad z=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\ z)\,dx$$

Ушбу

$$y(x)-z(x)=\int_{x_0}^{x}[f(x,\ y)-f(x,\ z)]\,dx \qquad (3)$$

айирмани қараймиз.

27- § даги (6) тенгсизликни ҳисобға олган ҳолда Лагранж формуласи бўйича интеграл остидаги айирманинг шаклини алмаштирамиз:

$$f(x,\ y)-f(x,\ z)=\frac{\partial f(x,\ \eta)}{\partial y}\,(y-z). \tag{4}$$

Бу тенгликдан шуни ҳосил қиламиз:

$$|f(x,\ y)-f(x,\ z)|\leqslant N|y-z|. \tag{5}$$

(5) ни ҳисобга олган ҳолда (3) га асосан ушбу тенгсизликни ёзишимиз мумкин:

$$|y-z|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(y-z)dx\right|\leqslant\pm\int\limits_{x_0}^{x}N|y-z|dx. \tag{6}$$

x нинг $|x-x_0|<\frac{1}{N}$ бўладиган қийматини қараймиз. Аниқлик учун $x_0<x$ деб ҳисоблаймиз, $x<x_0$ ҳол учун исбот шунга ўхшаш.

$|y-z|$ энг катта $x=x^*$ қийматини $|x-x_0|<\frac{1}{N}$ интервалда қабул қилсин ва у қиймат λ га тенг бўлсин. У ҳолда (6) тенгсизлик x^* нуқта учун ушбу кўринишни қабул қилади:

$$\lambda\leqslant N\int\limits_{x_0}^{x^*}\lambda\,dx=N\lambda(x^*-x_0)<N\lambda\frac{1}{N}<\lambda$$

ёки

$$\lambda<\lambda.$$

Иккита ҳар хил ечим мавжуд деб фараз этиб, қарама-қаршиликка дуч келдик. Демак, ечим биргинадир.

1-изоҳ. $f(x,\ y)$ функцияга нисбатан озроқ талаблар қилинганда ҳам ечим биргина бўлишини кўрсатиш мумкин. Масалан, И. Г. Петровскийнинг „Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений“ номли китобини қаранг.

2-изоҳ. Агар $f(x,\ y)$ функция соҳада чекланмаган $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда (1) тенгламани ва (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи бир қанча ечим мавжуд бўлиши мумкин.

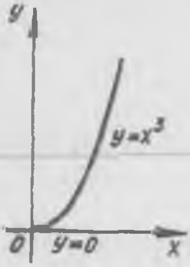
Ҳақиқатан, ушбу

$$y'=3\ x\sqrt[3]{y} \tag{7}$$

тенгламани қарайлик, бунинг бошланғич шарти

$$x=0 \text{ да } y=0 \tag{8}$$

Бу ерда $y\to 0$ да $\frac{\partial f}{\partial y}=xy^{-2/3}\to\infty$.



373-расм.

Бу ҳолда (7) тенгламанинг (8) бошланғич шартни қаноатлантирувчи иккита ечими мавжуд:

$$y = 0, \qquad y = x^3.$$

Бу функция (7) тенгламанинг ечими эканлигига ишониш учун уларни тўғридан-тўғри тенгламага қўйиш керак. Координат бошидан икки интеграл эгри чизиғи ўтади (373-расм).

XVI БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйида берилган умумий ҳадга кўра қаторнинг дастлабки бир неча ҳади ёзилсин:

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. 2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$. 3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 4. $u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^k}$.
5. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$.

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашиши текширилсин:

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$ *Жав.* Яқинлашади.

7. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{30}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10n}} + \ldots$ *Жав.* Узоқлашади.

8. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} + \ldots$ *Жав.* Узоқлашади.

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n+6}} + \ldots$ *Жав.* Узоқлашади.

10. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \ldots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \ldots$ *Жав.* Яқинлашади.

11. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} + \ldots$ *Жав* Узоқлашади.

12 $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{1+n^2} + \ldots$ *Жав.* Яқинлашади.

Умумий ҳадлари билан берилган ушбу қаторларнинг яқинлашиши текширилсин: **13.** $u_n = \frac{1}{n^3}$. *Жав* Яқинлашади. **14.** $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. *Жав.* Узоқлашади. 15. $u_n = \frac{2}{5n+1}$. *Жав.* Узоқлашади. **16.** $u_n = \frac{1+n}{3+n^2}$. *Жав.* Узоқлашади. **17.** $u_n = \frac{1}{n^2+2n+3}$. *Жав* Яқинлашади. **18.** $u_{n-1} = \frac{1}{n \ln n}$. *Жав.* Узоқлашади. **19.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{n+1}$ тенгсизлик исботлансин.

20. Ушбу $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$ қаторга Лейбниц теоремасини қўллаииб бўладими? *Жав.* Қатор ҳадларининг абсолют қиймати монотон камаймагани учун бу теоремани қўллаииб бўлмайди. Қатор узоқлашади.

Қуйидаги қаторларнинг қисмий йиғиндилари мос қаторларнинг йиғиндисидан $\frac{1}{10^6}$ дан ортиқ бўлмаган сонга фарқ қилиши учун бу қаторларнинг нечта бошланғич ҳадини олиш керак:

21 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n} + \dots$ *Жав.* $n = 20$.

22. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ *Жав.* $n = 10^6$.

23. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \dots$ *Жав.* $n = 10^3$.

24. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \dots$ *Жав.* $n = 10$.

Қуйидаги қаторларнинг қайси бирлари абсолют яқинлашиши аниқлансин:

25. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$ *Жав.* Абсолют яқинлашади.

26. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n} + \dots$ *Жав.* Абсолют яқинлашади.

27 $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$ *Жав.* Шартли яқинлашади.

28. $-1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{4}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n}} + \dots$ *Жав.* Шартли яқинлашади.

29. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$ Ушбу қаторнинг йиғиндиси топилсин: *Жав* $\frac{1}{4}$.

Қуйидаги қаторлар x нинг қандай қийматларида яқинлашади:

30. $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2n} + \dots$ *Жав.* $-2 < x < 2$.

31. $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} + \dots$ *Жав.* $-1 < x < 1$.

32 $3x + 3^4x^4 + 3^9x^9 + \dots + 3^{n^2}x^{n^2} + \dots$ *Жав.* $|x| < \frac{1}{3}$.

33 $1 + \frac{100x}{1\cdot3} + \frac{10\,000x^2}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1\,000\,000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7} + \dots$ *Жав.* $-\infty < x < \infty$.

34. $\sin x + 2\sin\frac{x}{3} + 4\sin\frac{x}{9} + \dots + 2^n\sin\frac{x}{3^n} + \dots$ *Жав.* $-\infty < x < \infty$.

35. $\frac{x}{1+\sqrt{1}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} + \ldots$ *Жав.* $-1 < x < 1.$

36 $x + \frac{2^k}{2!}x^2 + \frac{3^k}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n^k}{n!}x^n + \ldots$ *Жав.* $-\infty < x < \infty.$

37. $x + \frac{2!}{2^2}x^2 + \frac{3!}{3^3}x^3 + \ldots + \frac{n!}{n^n}x^n + \ldots$ *Жав.* $-e < x < e.$

38. $x + \frac{2^2}{4!}x^2 + \frac{(1\cdot2\cdot3)^2}{6!}x^3 + \ldots + \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n + \ldots$ *Жав.* $-4 < x < 4.$

39. Ушбу қаторнинг йиғиндиси топилсин: $x + 2x^2 + \ldots + nx^n + + \ldots$ $(|x| < 1)$. *Жав.* $\frac{x}{(1-x)^2}.$

Қуйидаги қаторларнинг қайси бири кўрсатилган кесмаларда кучайтирма қатор бўлиши аниқлансин:

40. $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} \ldots$ $(0 < x < 1)$. *Жав.* Кучайтирма.

41. $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ $(0 < x < 1)$. *Жав.* Кучайтирма эмас.

42. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ $[0, 2\pi]$ *Жав.* Кучайтирма.

Функцияларни қаторларга ёйиш

43. $\frac{1}{10+x}$ ифодани x нинг даражалари бўйича ёйинг ва яқинлашиш интервалини аниқланг. *Жав.* $-10 < x < 10$ бўлганда яқинлашади.

44. $\cos x$ ни $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots$

45. e^{-x} ни x нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots.$

46. e^x ни $(x-2)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жаз.* $e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \ldots.$

47. $x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ ни $x - 1$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3.$

48. $x^{10} + 2x^9 - 3x^7 - 6x^6 + 3x^4 + 6x^3 - x - 2$ кўпҳадни $x-1$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйинг, 1 сони бу кўпҳаднинг уч каррали илдизи эканлигини кўрсатинг. *Жав.* $f(x) = 81(x-1)^3 + 270(x-1)^4 + 405\times \times(x-1)^5 + 351(x-1)^6 + 186(x-1)^7 + 63(x-1)^8 + 12(x-1)^9 + (x-1)^{10}.$

49. $\cos(x+a)$ ни x нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $\cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a + \frac{x^4}{4!}\cos a - \ldots$

50. $\ln x$ ни $(x-1)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $(x-1)-$ $-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\ldots$.

51. e^x ни $(x+2)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.*

$$e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right].$$

52. $\cos^2 x$ ни $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $\frac{1}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x|<\infty)$.

53. $\frac{1}{x^2}$ ни $(x+1)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\times$ $\times(x+1)^n$ $(-2<x<0)$.

54. $\operatorname{tg} x$ ни $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $1+2\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\ldots$

Қуйидаги функцияларнинг x нинг даражалари бўйича ёйилган қаторининг дастлабки тўртта ҳадини ёзинг. **55.** $\operatorname{tg} x$. *Жав.* $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$ **56.** $e^{\cos x}$. *Жав.* $e\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{720}-\ldots\right)$. 57. $e^{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}$. *Жав.* $1+x+$ $+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{7x^4}{24}+\ldots$. 58. $\ln(1+e^x)$. *Жав.* $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$. 59. $e^{\sin x}$. *Жав.* $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\ldots$. 60. $(1+x)^x$. *Жав.* $1+x^2-\frac{x^3}{2}+$ $+\frac{5}{6}x^4-\ldots$. 61. $\sec x$. *Жав.* $1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\ldots$ 62. $\ln\cos x$. *Жав.* $-\frac{x^2}{2}-$ $-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\ldots$

63. $\sin kx$ ни x нинг даражалари бўйича ёйинг. *Жав.* $kx-\frac{(kx)^3}{3!}+$ $+\frac{(kx)^5}{5!}-\frac{(kx)^7}{7!}+\ldots$

64. $\sin^2 x$ ни x нинг даражалари бўйича ёйинг ва яқинлашиш интервалини топинг. *Жав.* $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ қатор x нинг ҳамма қийматларида яқинлашади.

65. $\frac{1}{1+x^2}$ ни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг. *Жав.* $1-$ $-x^2+x^4-x^6+\ldots$

66. $\operatorname{arc\,tg} x$ ни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Кўрсатма. $\operatorname{arc\,tg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ формуладан фойдаланинг. *Жав.* $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \ (-1 < x < 1)$.

67. $\frac{1}{(1+x)^2}$ ни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг. *Жав.* $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots \ (-1 < x < 1)$.

e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ функцияларни даражали қаторга ёйиш формулаларидан фойдаланиб ва турли усулларни қўллаган ҳолда, қуйидаги функциялар даражали қаторларга ёйилсин, ҳамда яқинлашиш интерваллари топилсин: 68. $\operatorname{sh} x$ *Жав.* $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$. 69. $\operatorname{ch} x$. *Жав.* $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$. 70. $\cos^2 x$. *Жав.* $1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \ (-\infty < x < \infty)$. 71. $(1+x)\ln(1+x)$. *Жав.* $x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)^n} \ (|x| < 1)$. 72. $(1+x)\cdot e^{-x}$. *Жав.* $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \ (-\infty < x < \infty)$. 73. $\frac{1}{4-x^4}$. *Жав.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4^{n+1}} \ (|x| < \sqrt{2})$. 74. $\frac{e^x - 1}{x}$. *Жав.* $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$. 75. $\frac{1}{(1-x)^2}$. *Жав.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \ (|x| < 1)$. 76. $e^x \sin x$. *Жав.* $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \ldots + \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\frac{x^n}{n!} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)$. 77. $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$. *Жав.* $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \ (-1 < x < 1)$.

78. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}dx$. *Жав.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} \ (|x| < 1)$. 79. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx$. *Жав.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \ (-1 < x < 1)$. 80. $\int \frac{\cos x}{x}dx$. *Жав.* $C + \ln|x| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)(2n)!} \ (-\infty < x < 0)$ ва $(0 < x < \infty)$. 81. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$. *Жав.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{9n-8}}{9n-8}$.

82. Чап томонларини x нинг даражалари бўйича ёйиш билан ушбу тенгликлар исбот қилинсин:

$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x,$$
$$\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$$

Мос келувчи қаторлардан фойдаланиб ҳисобланг: **83.** $\cos 10°$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,9848. **84.** $\sin 1°$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,0175. **85.** $\sin 18°$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,3090. **86.** $\sin \frac{\pi}{4}$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,7071. **87.** $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,1973. **88.** $\ln 5$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 1,609. **89.** $\lg_{10} 5$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,699. **90.** $\arcsin 1$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 1,5708. **91.** $\sqrt{e}$ ни 0,0001 гача аниқлик билан *Жав.* 1,6487. **92.** $\lg e$ ни 0,00001 гача аниқлик билан *Жав.* 0,43429. **93.** $\cos 1$ ни 0,00001 аниқлик билан. *Жав.* 0,5403. $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$ функцияларни Маклорен қаторига ёйиб, 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг: **94.** $\sqrt[3]{30}$. *Жав.* 3,107. **95.** $\sqrt{70}$. *Жав.* 4,121. **96.** $\sqrt[3]{500}$. *Жав.* 8,367. **97.** $\sqrt[3]{250}$. *Жав.* 3,017. **98** $\sqrt{84}$. *Жав.* 9,165. **99.** $\sqrt[3]{2}$. *Жав.* 1,2598.

Интеграл остидаги функцияни қаторга ёйиб, интегралларни ҳисобланг. **100.** $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ ни 10^{-5} гача аниқлик билан. *Жав.* 0,94608. **101.** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,7468. **102.** $\int_0 \sin(x^2)\,dx$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,1571. **103.** $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$ ни 0,01 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,81. **104.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,487. **105.** $\int_0^1 \cos \sqrt{x}\,dx$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,764 **106.** $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x})\,dx$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,071. **107.** $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,9226. **108.** $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ни 0,0001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,0214. **109.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$ ни 0,001 гача аниқлик билан. *Жав.* 0,494. **110.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. *Жав.* $\frac{\pi^2}{12}$.

Кўрсатма. Бу мисолни ва бундан кейинги икки мисолни ечишда ушбу тенгликларни назарда тутиш фойдали:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Бу тенгликлар XVII бобнинг 2-параграфида аниқланади.

111. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$. *Жав.* $\frac{\pi^2}{6}$. 112. $\int\limits_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\frac{dx}{x}$ *Жав.* $\frac{\pi^2}{4}$.

Дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдами билан интеграллаш

113. $y'' = xy$ тенгламанинг $x = 0$, $y = 1$; $y' = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Курсатма. Ечимни қатор шаклида изланг. *Жав.* $1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2\cdot3\cdot5\cdot6\ldots(3k-1)\,3k} + \ldots$.

114. $y'' + xy' + y = 0$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = 0$, $y' = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{1\cdot3\cdot5} - \ldots \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}$.

115. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Кўрсатма. Ечимни $y = x^p(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots)$ шаклда изланг. *Жав.* $C_1x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right] + C_2x^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right] = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

116. $xy'' + y' + xy = 0$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = 1$, $y' = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(1\cdot2)^2 2^4} - \frac{x^6}{(1\cdot2\cdot3)^2\cdot2^6} + \ldots (-1)^k\frac{x^2k}{(k!)^2\,2^{2k}} + \ldots$.

Изоҳ. Кейинги икки дифференциал тенглама $n = \frac{1}{2}$ ва $n = 0$ бўлганда

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Бессель тенгламасининг хусусий ҳолидир.

117. $4xy'' + 2y' + y = 0$ тенгламанинг умумий ечими топилсин.

Кўрсатма. Ечимни $x^p(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$ қатор шаклида изланг. *Жав.* $C_1\cos\sqrt{x} + C_2\sin\sqrt{x}$.

118. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ тенгламанинг $x = 0$ да $y = 0$, $y' = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

119. $(1+x^2)y''+2xy'=0$ тенгламанинг $x=0$ да $y=0$, $y'=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$.

120. $y''=xyy'$ тенгламанинг $x=0$ да $y=1$, $y'=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$

121. $(1-x)y'=1+x-y$ тенгламанинг $x=0$ да $y=0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин ва ҳосил қилинган қаторнинг яқинлашиш интервали кўрсатилсин. *Жав.* $x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^4}{3\cdot4}+\ldots$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

122. $xy''+y=0$ тенгламанинг $x=0$ да $y=0$, $y'=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин ва яқинлашиш интервали кўрсатилсин. *Жав.* $x-\frac{x^2}{(1!)^2\,2}+\frac{x^3}{(2!)^2\,3}-\frac{x^4}{(3!)^2\,4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{[(n-1)!]^2\,n}+$ $+\ldots$ $(-\infty<x<\infty)$.

123. $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ тенгламанинг $x=0$ да $y=1$, $y'=0$ бошлангич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $\frac{\sin x}{x}$.

124. $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$ тенгламанинг $x=0$ да $y=1$, $y'=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин ва ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиш интервали кўрсатилсин. *Жав.* $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+$ $+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\ldots$ $(|x|<\infty)$.

Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг кўрсатилган бошлангич шартлардаги ечимларининг даражали қаторга ёйилмаларининг дастлабки учта ҳади топилсин: 125. $y'=x^2+y^2$; $x=0$ да $y=1$. *Жав.* $1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots$.

126. $y''=e^y+x$; $x=0$ да $y=1$, $y'=0$. *Жав.* $1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$

127. $y'=\sin y-\sin x$; $x=0$ да $y=0$. *Жав.* $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\ldots$

Дифференциал тенгламалар ечимларининг кўрсатилган бошланғич шартларда даражали қаторга ёйилмасининг бир неча ҳадлари топилсин:

128. $y''=yy'-x^2$; $x=0$ да $y=1$, $y'=1$. *Жав.* $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+$ $+\frac{3x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$ 129. $y'=y^2+x^3$; $x=0$ да $y=\frac{1}{2}$. *Жав.* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+$ $+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots$ 130. $y'=x^2-y^2$; $x=0$ да $y=0$. *Жав.* $\frac{1}{3}x^3-$ $-\frac{1}{7\cdot9}x^7+\frac{2}{7\cdot11\cdot27}x^{11}-\ldots$ 131. $y'=x^2y^2-1$; $x=0$ да $y=1$. *Жав.* $1-x+$ $+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ 132. $y'=e^y+xy$; $x=0$ да $y=0$. *Жав.* $x+\frac{x^2}{2}+$ $+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot3\cdot4}+\ldots$

XVII БОБ

ФУРЬЕ ҚАТОРЛАРИ

1-§. Таъриф. Масаланинг қўйилиши

Ушбу кўринишдаги

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

функционал қатор ёки ихчамроқ қилиб ёзилган,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1)$$

қатор *тригонометрик қатор* дейилади. a_0, a_n ва b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ўзгармас сонлар *тригонометрик қаторнинг коэффициентлари* деб аталади.

Агар (1) қатор яқинлашса, унинг йиғиндиси даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция бўлади, чунки $\sin nx$ ва $\cos nx$ даври 2π бўлган даврий функциялардир.

Шундай қилиб,

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Шундай бир масала қўямиз.

Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция берилган. Қандай шартлар бажарилганда $f(x)$ учун берилган функцияга яқинлашувчи тригонометрик қатор топиш мумкин?

Бу масала шу бобда ҳал қилинади.

Қаторнинг коэффициентларини Фурье формулалари бўйича аниқлаш. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция $(-\pi, \pi)$ интервалда шу функцияга яқинлашувчи тригонометрик қаторни тасвир этсин, яъни шу қаторнинг йиғиндиси бўлсин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (2)$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги функциядан олинган интеграл (2) қатор ҳадларидан олинган интегралларнинг йиғиндисига тенг деб фараз қиламиз. Бу эса берилган тригонометрик қаторнинг коэффициентларидан тузилган сонли қатор, абсолют яқинлашганда, яъни

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \ldots + |a_n| + |b_n| + \ldots \quad (3)$$

мусбат қатор яқинлашади деб олинганда бажарилади.

Бу ҳолда (1) қатор кучайтирилган, демак, уни $-\pi$ дан π гача ҳадлаб интеграллаш мумкин. Бундан a_0 коэффициентни ҳисоблаш учун фойдаланамиз.

(2) тенгликнинг иккала қисмини $-\pi$ дан $+\pi$ гача чегараларда интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx\right).$$

Ўнг томондаги интегралларнинг ҳар бирини айрим ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{a_n \sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -b_n \frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

бундан

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \quad (4)$$

Қаторнинг қолган коэффициентларини ҳисоблаш учун бизга баъзи бир аниқ интеграллар керак бўлади, аввал шу интегралларни қараб чиқамиз.

Агар n ва k бутун сон бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринлидир: агар $n \neq k$ бўлса,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx = 0,\\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\,dx = 0, \end{aligned}\right| \quad (I)$$

агар $n = k$ бўлса,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = \pi, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx\,dx = 0, \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi. \end{aligned}\right| \qquad \text{(II)}$$

Масалан, (1) группадаги биринчи интегрални ҳисоблаймиз.

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos(n + k)x + \cos(n - k)x\right]$$

бўлгани учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n + k)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n - k)x\,dx = 0.$$

(I) группанинг қолган формулалари ҳам шу тариқа ҳисобланади*).

(II) группанинг интеграллари бевосита ҳисобланади (I т. X бобга қаранг).

Энди (2) қаторнинг a_k ва b_k коэффициентларини ҳисоблашимиз мумкин.

$k \neq 0$ бўлган бирор аниқ қийматда a_k коэффициентни ҳисоблаш учун (2) қаторнинг иккала томонини $\cos kx$ га кўпайтирамиз:

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \qquad (2')$$

Тенгликнинг ўнг томонида ҳосил қилинган қатор кучайтирилгандир, чунки унинг ҳадлари абсолют қиймат бўйича (3) яқинлашувчи мусбат қаторнинг ҳадларидан катта бўла олмайди. Шунинг учун уни исталган кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин.

---

*)

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2}\left[\sin(n + k)x - \sin(n - k)x\right],$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2}\left[-\cos(n + k)x + \cos(n - k)x\right]$$

формулалар ёрдами билан ҳисобланади.

(2′) тенгликни $-\pi$ дан π гача чегараларда интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right).$$

(II) ва (I) формулаларни эътиборга олиб, тенгликнинг ўнг томонидаги a_k коэффициентли интегралдан бошқа ҳамма интегралларнинг нолга тенг эканлигини кўрамиз. Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

бундан

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{5}$$

(2) тенгликнинг иккала томонини $\sin kx$ га кўпайтириб, яна $-\pi$ дан π гача интегралласак:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

бундан

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{6}$$

(4), (5) ва (6) формулалар бўйича аниқланган коэффициентлар $f(x)$ функциянинг *Фурье коэффициентлари* деб аталади, шундан коэффициентли (I) тригонометрик қатор эса $f(x)$ функциянинг *Фурье қатори* дейилади.

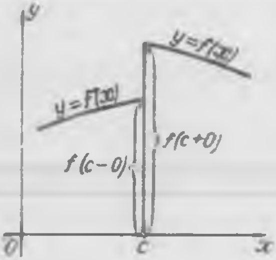
Энди биз параграфнинг бошида қўйилган масалага қайтамиз: берилган функция учун тузилган Фурье қатори яқинлашиши ва тузилган бу Фурье қаторининг йиғиндиси эса берилган функциянинг мос нуқталаридаги қийматларига тенг бўлиш учун бу функция қандай хоссаларга эга бўлиши керак? Биз $f(x)$ функцияни Фурье қаторига ёйиш учун етарли шартларни берувчи теоремани баён этамиз.

Таъриф. Агар $[a, b]$ кесмани чекли сондаги $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нуқталар билан шундай $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ интервалларга бўлиш мумкин бўлсаки, бу интервалларнинг ҳар бирида берилган функция монотон, яъни ўсмайдиган ёки камаймайдиган бўлса $f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесмада бўлакли монотон деб аталади.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада бўлакли монотон ва чегараланган бўлса, таърифга асосан бу функция фақат биринчи жинс узилиш нуқтасига эга бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар $x = c$ нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлса, функциянинг монотонлигидан

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0)$$

лимитлар мавжуд, яъни c нуқта биринчи жинс узилиш нуқтаси бўлади (374-расм).



374- расм.

Энди қуйидаги теоремани ифодалаймиз.

Теорема. *Агар даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли монотон ва чегараланган бўлса, бу функция учун тузилган Фурье қатори шу кесманинг ҳамма нуқталарида яқинлашади. Ҳосил қилинган қаторнинг $s(x)$ йиғиндиси $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқталаридаги қийматига тенг. $f(x)$ функциянинг узилиш нуқталарида қаторнинг йиғиндиси функциянинг ўнг ва чап лимитларининг ўрта арифметик қийматига тенг бўлади, яъни агар $x = c$ нуқта $f(x)$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлса, у вақтда*

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$$

Бу теоремадан, Фурье қатори билан тасвирланувчи функциялар синфи анча кенг эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун Фурье қаторлари математиканинг турли бўлимларида кенг татбиқ этилади. Фурье қаторлари, айниқса математик физикада ва унинг механика ҳамда физиканинг конкрет масалаларига татбиқларида муваффақиятли қўлланилади. (XVIII бобга қаранг).

Берилган теоремани исботсиз қабул қиламиз. 8—10-параграфларда функцияларни Фурье қаторига ёйишнинг функцияларнинг бирмунча торроқ синфларига тегишли бўлган етарлилик белгисининг исботи берилади.

2-§. Функцияларни Фурье қаторига ёйиш мисоллари

Функцияларни Фурье қаторига ёйиш мисолларини келтирамиз.

1-мисол. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция қуйидагича аниқлаган.

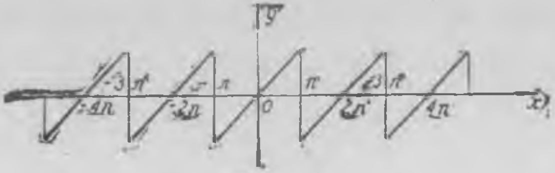
$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

Бу функция бўлакли монотон ва чегараланган (375-расм). Демак, уни Фурье қаторига ёйиш мумкин. 1-параграфдаги (4) формулага асосан:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

1-параграфдаги (5) формулани татбиқ этиб ва бўлаклаб интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left| x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right| = 0.$$



375-расм.

1-параграфдаги (6) формулага асосан:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги қатор ҳосил бўлади:

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + \ldots\right].$$

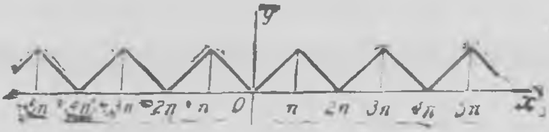
Бу тенглик узилиш нуқталаридан бошқа ҳамма нуқталарда ўринлидир. Қаторнинг ҳар бир узилиш нуқтадаги йиғиндиси, унинг ўнгдан ва чапдан лимитларининг ўрта арифметигига, яъни нолга тенг.

2-мисол. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция қуйидагича аниқланган:

$$-\pi \leqslant x < 0 \text{ бўлса, } f(x) = -x,$$

$$0 < x < \pi \text{ бўлса, } f(x) = x,$$

(яъни $f(x) = |x|$) (376-расм). Бу функция ҳам $-\pi < x < \pi$ кесмада бўлакли монотон ва чегаралангандир.



376-расм.

Унинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} k \text{ жуфт бўлса, } 0, \\ k \text{ тоқ бўлса, } -\frac{4}{\pi k^2}. \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx\right] = 0.$$

Шундай қилиб, қуйидаги қаторни ҳосил қиламиз:

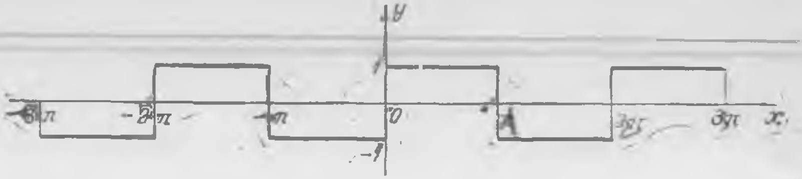
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \ldots\right].$$

Бу қатор ҳамма нуқталарда яқинлашади ва унинг йиғиндиси берилган функцияга тенг.

3-мисол. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция қуйидагича аниқланган:

$$-\pi < x < 0 \text{ бўлса, } f(x) = -1,$$
$$0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ бўлса, } f(x) = 1.$$

Бу функция (377-расм) $-\pi < x < \pi$ кесмада бўлакли монотон ва чегараланган.



377-расм.

Унинг Фурье коэффициентларини ҳисоблаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = -1\cdot\frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin kx}{k\pi}\Big|_{0}^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left|1 - \cos\pi k\right| = \begin{cases} k \text{ жуфт бўлса, } 0, \\ k \text{ тоқ бўлса, } \dfrac{4}{\pi k}. \end{cases}$$

Демак, қаралаётган функция учун Фурье қатори қуйидаги кўринишда бўлади:

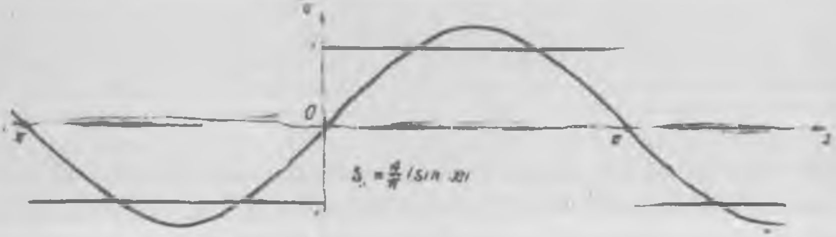
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left|\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \ldots\right|.$$

Бу тенглик узилиш нуқталаридан бошқа ҳамма нуқталарда ўринлидир.

378-расмда қаторнинг s_n қисмий йиғиндилари n ортиши билан $f(x)$ функцияни борган сари аниқроқ ифодалаши кўргазмали тасвир этилган.

4-мисол. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция қуйидагича аниқланган:

$$-\pi < x < \pi \text{ бўлса, } f(x) = x^2 \text{ (379-расм).}$$



378-расм.

Бу функциянинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

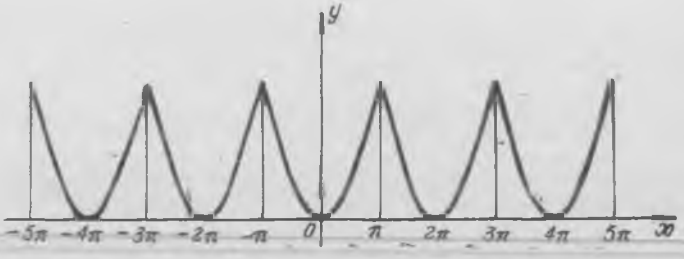
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right] = \frac{4}{\pi k^2}\left[\pi\cos k\pi\right] =$$

$$= \begin{cases} k \text{ жуфт бўлса, } \dfrac{4}{k^2}, \\ k \text{ тоқ бўлса, } -\dfrac{4}{k^2}, \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\frac{x \sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx\right] = 0.$$



379- расм.

Демак, берилган функциянинг Фурье қатори ушбу кўринишда бўлади:

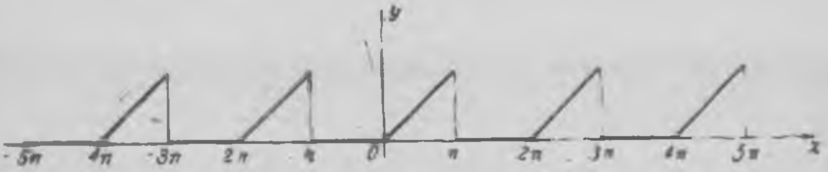
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right).$$

Функция бўлакли монотон, чегараланган ва узлуксиздир, шунинг учун бу тенглик ҳамма нуқталарда бажарилади. $x = \pi$ десак:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

5-мисол. Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция қуйидагича аниқланган:

$$-\pi < x < 0 \text{ бўлса, } f(x) = 0,$$
$$0 < x < \pi \text{ бўлса, } f(x) = x \quad (380\text{- расм}).$$



380- расм.

Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kx\,ax\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \begin{cases} k \text{ тоқ бўлса, } -\frac{2}{\pi k^2}, \\ k \text{ жуфт бўлса, } 0; \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{\pi k}\cos k\pi = \begin{cases} k \text{ тоқ бўлса, } \frac{1}{k}, \\ k \text{ жуфт бўлса, } -\frac{1}{k}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, Фурье қатори ушбу кўринишни олади:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

$f(x)$ функциянинг узилиш нуқталарида қаторнинг йиғиндиси унинг ўнг ва чап лимитларининг ўрта арифметик қийматига (яъни берилган ҳолда $\frac{\pi}{2}$ га) тенг.

Ҳосил қилинган тенгликда $x = 0$ фараз қилиб, ушбуни оламиз:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

3-§. Даврий функцияларни Фурье қаторига ёйиш ҳақида бир изоҳ

Даври 2π бўлган $\psi(x)$ даврий функциянинг λ ҳар қандай сон бўлганда ҳам ўринли бўлган қуйидаги хоссасини қайд қиламиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx.$$

Ҳақиқатан,

$$\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$$

бўлганлигидан $x = \xi - 2\pi$ деб олиб, c ва d ҳар қандай бўлганда ҳам ушбу тенгликни ёза оламиз:

$$\int_{c}^{d} \psi(x)\,dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)\,dx.$$

Жумладан, $c = -\pi$, $d = \lambda$ деб олиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx,$$

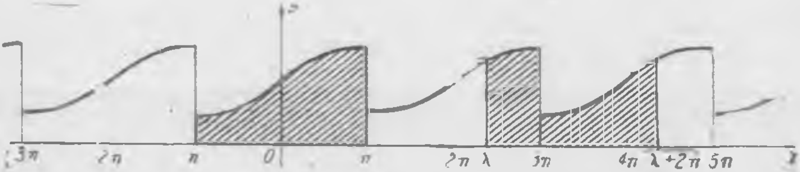
шунинг учун

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{\lambda}^{-\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\lambda} \psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,dx.$$

Бу кўрсатилган хосса $\psi(x)$ *даврий функциядан узунлиги функциянинг даврига тенг бўлган, исталган кесма бўйича олинган интеграл доимо битта ва фақат битта қийматга эга бўлишини* билдиради. Бу хоссани геометрик жиҳатдан ҳам осонгина тасвирлаш мумкин. 381-расмда штрихланган юзлар ўзаро тенгдир.

Исбот қилинган хоссадан, Фурье коэффициентларини ҳисоблашда биз интеграллаш оралиғи $(-\pi, \pi)$ ни $(\lambda, \lambda + 2\pi)$ интег-



381-расм.

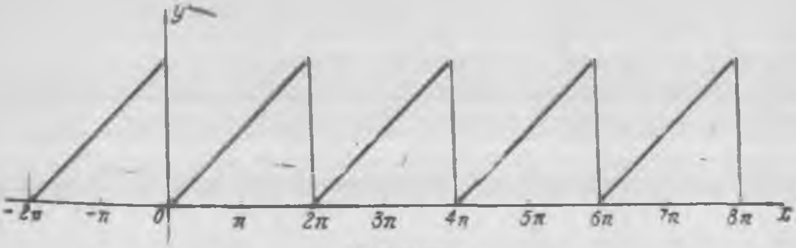
раллаш оралиғи билан алмаштиришимиз мумкинлиги келиб чиқади, яъни қуйидагича фараз этиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \end{aligned}\right| \tag{1}$$

бунда λ — ихтиёрий сон.

Бу эса шартга асосан $f(x)$ даврий функциянинг даври 2π эканлигидан келиб чиқади; демак $f(x)\cos nx$ ва $f(x)\sin nx$ функциялар ҳам даври 2π бўлган даврий функциялар бўлади. Исбот қилинган хосса баъзи ҳолларда коэффициентларни топиш процессини қандай соддалаштиришни мисолда кўрсатамиз.

Мисол. $0 < x < 2\pi$ кесмада $f(x) = x$ тенглик билан берилган даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функцияни Фурье қаторига ёйиш талаб қилинсин. $f(x)$ функциянинг графиги 382- расмда тасвирланган.



382- расм.

Бу функция $[-\pi, \pi]$ кесмада иккита формула билан берилади: $[-\pi, 0]$ кесмада $f(x) = x + 2\pi$ ва $[0, \pi]$ кесмада $f(x) = x$. Айни замонда $[0, 2\pi)$ кесмада бу функция битта $f(x) = x$ формула билан бирмунча соддароқ берилади. Шунинг учун бу функцияни Фурье қаторига ёйишда $\lambda = 0$ деб олиб, (1) формулалардан фойдаланиш маъқулдир.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x\cos nx}{n} +$$

$$+\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Демак,

$$f(x) = \pi - 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x -$$

$$-\frac{2}{5}\sin 5x - \ldots$$

Бу қатор узилиш нуқталаридан (яъни $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ нуқталардан) бошқа барча нуқталарда берилган функцияни аниқлайди. Бу нуқталарда қаторнинг йиғиндиси $f(x)$ функциянинг ўнг ва чап лимитлари қийматининг ярим йиғиндисига (яъни бу ҳолда, π сонига) тенг.

4-§. Жуфт ва тоқ функциялар учун Фурье қаторлари

Жуфт ва тоқ функцияларнинг таърифидан, агар $\psi(x)$ жуфт функция бўлса,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\,dx = 2\int_0^{\pi}\psi(x)\,dx$$

эканлиги келиб чиқади.

Ҳақиқатан,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\psi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0}\psi(x)\,dx + \int_0^{\pi}\psi(x)\,dx = \int_0^{\pi}\psi(-x)\,dx + \int_0^{\pi}\psi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\psi(x)\,dx + \int_0^{\pi}\psi(x)\,dx = 2\int_0^{\pi}\psi(x)\,ax,$$

чунки жуфт функциянинг таърифига кўра:

$$\psi(-x) = \psi(x).$$

Шунинг сингари $\varphi(x)$ тоқ функция бўлса,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx = \int_0^{\pi}\varphi(-x)\,dx + \int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx = -\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx +$$

$$+\int_0^{\pi}\varphi(x)\,dx = 0$$

эканлигини ҳам исбот қилиш мумкин.

Агар $f(x)$ тоқ функция Фурье қаторига ёйилса, $f(x)\cos kx$ кўпайтма ҳам тоқ функция, $f(x)\sin kx$ эса жуфт функция бўлади; демак

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right| \quad (1)$$

яъни тоқ функциянинг Фурье қатори „фақат синусларни“ ўз ичига олади (2-параграфдаги 1-мисолга қаранг).

Агар жуфт функция Фурье қаторига ёйилса, $f(x)\sin kx$ кўпайтма тоқ, $f(x)\cos kx$ эса жуфт функция бўлади, демак,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0, \end{aligned}\right| \quad (2)$$

яъни жуфт функцияларнинг Фурье қатори „фақат косинусларини“ ўз ичига олади (2-параграфдаги 2-мисолга қаранг).

Ҳосил қилинган формулалар, берилган функция жуфт ёки тоқ бўлган ҳолларда Фурье коэффициентларини топишдаги ҳисоблашларни соддалаштиришга имкон беради. Ҳар қандай даврий функция ҳам жуфт ёки тоқ бўлавермаслиги ўз-ўзидан маълум (2-параграфдаги 5-мисолга қаранг).

Мисол. Даври 2π бўлган ва $[0,\pi]$ кесмада $y = x$ тенглик билан берилган $f(x)$ даврий жуфт функцияни Фурье қаторига ёйиш талаб қилинган бўлсин.

Биз бу функцияни 2-параграфдаги 2-мисолда (376-расмга қаранг) Фурье қаторига ёйган эдик. Энди берилган функциянинг жуфт эканлигидан фойдаланиб, унинг Фурье коэффициентларини қайтадан ҳисоблаймиз

(2) формулага асосан, k ҳар қандай бўлганда ҳам $b_k = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \qquad a_b = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left|\frac{x\sin kx}{k} + \frac{\cos kx}{k^2}\right|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left|(-1)^k - 1\right| = \begin{cases} k \text{ жуфт бўлса, } 0, \\ k \text{ тоқ бўлса, } -\dfrac{4}{\pi k^2}. \end{cases}$$

Биз бу ерда ҳам 2-параграфнинг 2-мисолидаги ўша коэффициентларнинг ўзини, бироқ анча қисқа йўл билан ҳосил қилдик.

5-§. Даври 2l бўлган функциялар учун Фурье қатори

$f(x)$ функция даври $2l$, умуман айтганда, 2π дан фарқли бўлган даврий функция бўлсин. Уни Фурье қаторига ёямиз.

Бунинг учун ўзгарувчини

$$x = \frac{l}{\pi}t$$

формула бўйича алмаштирамиз. У ҳолда $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функция t нинг даври 2π бўлган даврий функцияси бўлади. Уни $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ кесмада Фурье қаторига ёйиш мумкин:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt), \tag{1}$$

бунда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt, \qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt.$$

Энди эски x ўзгарувчига қайтамиз:

$$x=\frac{l}{\pi}t, \qquad t=x\frac{\pi}{l}, \qquad dt=\frac{\pi}{l}dx.$$

У ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx, \qquad a_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos \cancel{k}\frac{\pi kx}{l}dx,\\ b_k&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.\end{aligned}\right|$$

Натижада (1) формула ушбу кўринишни олади:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{3}$$

бундаги a_0, a_k, b_k коэффициентлар (2) формулалар бўйича ҳисобланади. Бу эса даври $2l$ бўлган даврий функциянинг Фурье қаторидир.

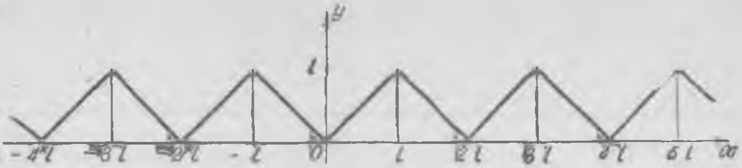
Даври 2π бўлган даврий функциялардан ҳосил қилинган Фурье қаторлари учун ўринли бўлган барча теоремалар, бирор $2l$ даврли даврий функциялардан ҳосил қилинган Фурье қаторлари учун ҳам ўз кучини сақлашини кўрамиз. Жумладан, функцияни Фурье қаторига (1-параграфнинг охирига қаранг) ёйилишнинг етарли аломати қаторнинг коэффициентларини узунлиги даврга (3-параграфга қаранг) тенг бўлган исталган кесма бўйича интеграллаш билан ҳисоблаш мумкинлиги ҳақидаги эслатма, шунингдек функция жуфт ёки тоқ (4-параграф) бўлганда қаторнинг коэффициентларини ҳисоблашни соддалаштириш мумкинлигига доир эслатма ўз кучини сақлайди.

Мисол. $[-l, l]$ кесмада $f(x) = |x|$ тенглик билан берилган $2l$ даврли $f(x)$ даврий функция Фурье қаторига ёйилсин (383- расм).

Ечиш. Қаралаётган функция жуфт бўлгани учун

$$b_k = 0; \qquad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x\,dx = l,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \begin{cases} k \text{ жуфт бўлса, } 0 \\ k \text{ тоқ бўлса,} -\dfrac{4l}{\pi^2k^2}\end{cases}$$



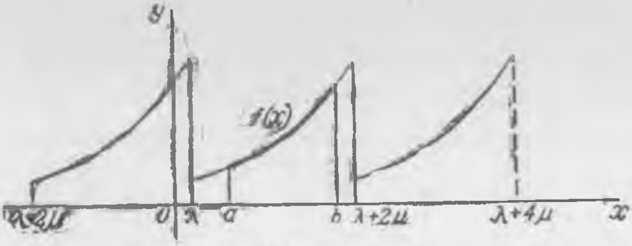
383- расм.

Демак, ёйилма қуйидаги кўринишда бўлади:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1} + \frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos\frac{(2p+1)\pi}{l}x}{(2p+1)^2} + \ldots\right]$$

6-§. Даврий бўлмаган функцияларни Фурье қаторига ёйиш ҳақида

Бирор $[a, b]$ кесмада бўлакли монотон бўлган $f(x)$ функция берилган бўлсин (384- расм). Берилган $f(x)$ функцияни бу функция узлуксиз бўлган нуқталарда Фурье қаторининг йиғиндиси сифатида тасвирлаш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $[a, b]$ кесмада $f(x)$ функция билан мос тушадиган даври $2\mu \geqslant b - a$ бўлган қандайдир даврий бўлакли монотон $f_1(x)$ функцияни қараймиз. (Биз бу билан $f(x)$ функциянинг таърифини тўлдирдик.)

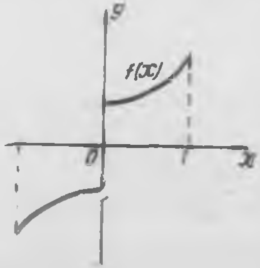


384- расм.

$f_1(x)$ функцияни Фурье қаторига ёямиз. Бу қаторнинг йиғиндиси $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида узилиш (нуқталаридан бошқа) берилган $f(x)$ функция билан устма-уст тушади, яъни биз $f(x)$ функцияни $[a, b]$ кесмада Фурье қаторига ёйдик.

Энди қуйидаги муҳим ҳолни қараб чиқамиз. $f(x)$ функция $[0, l]$ кесмада берилган бўлсин. Бу функциянинг аниқлашни ихтиёрий равишда $[-l, 0]$ кесмада тўлдириб (бўлакли монотонлигини сақлаб), бу функцияни Фурье қаторига ёйишимиз мумкин. Жумладан агар берилган функциянинг аниқлашни $-l \leqslant x < 0$ да $f(x) = f(-x)$ бўладиган қилиб тўлдирсак, натижада жуфт функция ҳосил қиламиз (385- расм). (Бу ҳолда $f(x)$ функция „жуфт ҳолда давом эттирилган" дейилади.) Бу функция фақат косинусларни ўз ичига олган Фурье қаторига ёйилади. Шундай қилиб, биз $[0, l]$ кесмада берилган $f(x)$ функцияни косинуслар бўйича ёйдик.

385- расм.



386- расм.

Агар $f(x)$ функцияни аниқлашни $-l \leqslant x < 0$ бўлганда $f(x) = -f(-x)$ бўладиган қилиб давом эттирсак, синуслар бўйича ёйиладиган тоқ функцияни ҳосил қиламиз (386- расм). ($f(x)$ функция, „тоқ ҳолда давом эттирилган".) Шундай қилиб, агар $[0, l]$ кесмада бўлакли монотон бирор $f(x)$ функция берилган бўлса, уни косинуслар бўйича ҳам, синуслар бўйича ҳам Фурье қаторига ёйиш мумкин.

1- мисол, $f(x) = x$ функцияни $[0, \pi]$ кесмада синуслар бўйича қаторга ёйиш талаб қилинсин.

Ечиш. Бу функцияни тоқ ҳолда давом эттириб (375- расм),

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right]$$

қаторни ҳосил қиламиз (2- параграфдаги 1- мисолга қаранг).

2- мисол. $f(x) = x$ функция $[0, \pi]$ кесмада косинуслар бўйича қаторга ёйилсин.

Ечиш. Бу функцияни жуфт ҳолда давом эттириб, $-\pi < x < \pi$ бўлганда $f(x) = |x|$ тенгликни ҳосил қиламиз (376- расм). Уни қаторга ёйсак:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

(2- параграфдаги 2- мисолга қаранг). Шундай қилиб, $[0, \pi]$ кесмада қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right].$$

7- §. Тригонометрик кўпҳад ёрдами билан берилган функцияга ўртача яқинлашиш

Функцияни чексиз қатор (Фурье, Тейлор ва ҳоказо) билан тасвирлаш амалда шундай маънога эгаки, қаторни n- ҳадида узиш билан ҳосил қилинган чекли йиғинди, қаторга ёйилувчи функциянинг тақрибий ифодаси бўлади; n ни исталганча катта қилиб олиш билан бу тақрибий ифодани жуда катта аниқликда ҳосил қилиш мумкин. Бироқ тақрибий тасвирлашнинг характери турлича бўлиши мумкин.

Масалан, Тейлор қаторининг олдинги n та ҳадининг s_n йиғиндиси қаралаётган функция билан битта нуқтада устма-уст тушади ва бу нуқтада қаралаётган функциянинг ҳосиласи билан бир хил бўлган n- тартибгача ҳосилага эга бўлади. n- тартибли Лагранж кўпҳади (I т. VII бобининг 9- параграфига қаранг) қаралаётган функция билан $n+1$ та нуқтада устма-уст тушади.

$f(x)$ даврий функцияни

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

шаклдаги тригонометрик кўпҳад, яъни Фурье қатори олдинги n та ҳадининг йиғиндиси орқали тақрибий тасвирлашнинг қандай характерда бўлишини қараймиз, бунда $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, \dots, a_n, b_n$ Фурье коэффициентлари. Аввал бир неча изоҳ берамиз. $[a, b]$ кесмада берилган бирор $y = f(x)$ функцияни текшираётган бўлайлик ва бу функцияни бошқа бир $\varphi(x)$ функция билан алмаштиргандаги хатони баҳоламоқчи бўлайлик. Қилинган хатонинг ўлчови учун, масалан, $[a, b]$ кесмада $\max|f(x) - \varphi(x)|$ ни, яъни $\varphi(x)$ функциянинг $f(x)$ функциядан *энг катта фарқи* деб аталувчи миқдорни қабул қилиш мумкин. Лекин, баъзан қилинган хатонинг ўлчови учун *ўртача квадратик фарқ* деб аталувчи ва

$$\delta^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

тенглик билан аниқланадиган δ миқдорни олиш табиийроқ бўлади.

387- расмда ўртача квадратик фарқ билан энг катта фарқ орасидаги айирмани тушунтирамиз.

Туташ чизиқ $y=f(x)$ функцияни, пунктир чизиқлар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ функцияларни тасвир этсин. $y=\varphi_1(x)$ эгри чизиқнинг энг катта фарқи $y=\varphi_2(x)$ эгри чизиқнинг фарқидан кичик, лекин биринчи эгри чизиқнинг ўртача квадратик фарқи иккинчи эгри чизиқникидан катта, чунки $y=\varphi_2(x)$ эгри чизиқ $y=f(x)$ эгри чизиқдан тор участкадагина анча фарқ қилади ва шунинг учун у биринчи эгри чизиққа нисбатан $y=f(x)$ эгри чизиқни яхшироқ характерлайди.

387- расм.

Энди масаламизга қайтамиз.

Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция берилган бўлсин. n- тартибли ҳамма

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

тригонометрик кўпҳадлар орасидан, α_k ва β_k коэффициентларни танлаб олиш йўли билан

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx$$

тенглик орқали аниқланадиган ўртача квадратик фарқи энг кичик қийматга эга бўладиган кўпҳадни топиш талаб қилинади.

Масала $2n+1$ та $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ўзгарувчилар функциясининг минимумини топишга келтирилади.

Интеграл ишораси остидаги квадратни очиб ва ҳадлаб интегралласак,

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{f^2(x)-2f(x)\Big[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\Big]+$$
$$+\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\Big]^2\Big\}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\sum_{k-1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx-$$

$$
-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi} dx+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jx\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx.
$$

Бунда

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=a_0,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=a_k,\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx=b_k
$$

лар $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари эканини кўрамиз.

Сўнгра, 1-параграфдаги (I) ва (II) формулаларга асосан: $k=j$ бўлганда

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi,
$$

k ва j нинг ҳар қандай қийматларида

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos jx\,dx=0
$$

ва $k\neq j$ бўлганда

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jx\,dx=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jx\,dx=0.
$$

Шундай қилиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$
\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).
$$

Энди

$$
\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)
$$

йиғиндини қўшсак ва айирсак:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right]. \tag{1}$$

Бу йиғиндининг биринчи учта қўшилувчиси

$$\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1, \ldots,\ \beta_n$$

коэффициентларни танлаб олишга боғлиқ эмас. Қолган

$$\frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right]$$

қўшилувчилар манфий эмас. Агар

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = a_1, \ldots, \quad \alpha_n = a_n,\ \beta_1 = b_1, \ldots, \quad \beta_n = b_n$$

деб олинса, уларнинг йиғиндиси энг кичик қийматга эришади (нолга тенг бўлади).

$$\alpha_0,\ \alpha_1, \ldots, \quad \alpha_n, \quad \beta_1, \ldots, \quad \beta_n$$

коэффициентлар бундай танлаб олинганда тригонометрик кўпҳад

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

$f(x)$ функциядан энг кам фарқ қилади, чунки коэффициентларни бундай танлаш билан δ_n^2 ўртача квадратик фарқ энг кичик бўлади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исбот қилдик: *n-тартибли ҳамма тригонометрик кўпҳадлар орасида коэффициентлари $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари бўлган кўпҳадгина $f(x)$ функциядан энг кичик ўртача квадратик фарқ қилади.*

Энг кичик квадратик фарқнинг миқдори қуйидагига тенг:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{2}$$

$\delta_n^2 \geqslant 0$ бўлгани учун n ҳар қандай бўлганда ҳам

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \geqslant \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Демак, ўнг томонда турган қатор $n \to \infty$ да яқинлашади ва биз уни қуйидагича ёза оламиз:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x\, dx \geqslant \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \tag{3}$$

Бу муносабат *Бессель тенгсизлиги* дейилади.

Ҳар қандай чегараланган ва бўлакли монотон функция учун берилган функцияни Фурье қаторининг n қисмий йиғиндиси билан алмаштиришдан ҳосил бўлган ўртача квадратик фарқ $n \to \infty$ да нолга интилишини, яъни $n \to \infty$ да $\delta_n^2 \to 0$ бўлишини исботсиз қайд қиламиз. Бироқ, у вақтда (2) формуладан *Ляпунов—Парсеваль* тенглиги деб аталган

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{3'}$$

тенглик келиб чиқади. Ляпунов—Парсеваль тенглиги функцияларнинг биз қараётган синфидан кўра кенгроқ синфлари учун исбот этилганини айтиб ўтамиз.

Исбот қилинганлардан Ляпунов тенглигини қаноатлантирувчи функцияга (жумладан ҳар қандай чегараланган бўлакли монотон функцияга) мос келувчи Фурье қатори нолга тенг бўлган ўртача квадратик фарқни бериши келиб чиқади.

Изоҳ. Фурье коэффициентларининг кейинроқ керак бўладиган битта хоссасини исбот қиламиз. Аввал ушбу таърифни киритамиз.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чекли сондаги бир жинсли узилиш нуқталарига эга бўлса (ёки ҳамма ерда узлуксиз бўлса), бу функция шу кесмада *бўлакли узлуксиз* деб аталади.

Қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли узлуксиз бўлса, унинг Фурье коэффициентлари $n \to \infty$ да нолга интилади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{4}$$

Исбот. Агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли узлуксиз бўлса, $f^2(x)$ функция ҳам шу кесмада бўлакли узлуксиз бўлади. У вақтда $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ мавжуд ва у чекли сондир*). Бу ҳолда Бесселнинг (3) тенгсизлигидан $\sum_{n-1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ қа-

---

*) Бу интегрални узлуксиз функциялардан $[-\pi, \pi]$ кесма бўлинадиган кесмалар бўйича олинган аниқ интегралларнинг йиғиндиси сифатида тасвирлаш мумкин.

торнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бироқ, агар қатор яқинлашса, унинг умумий ҳади нолга интилади, яъни берилган ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$. Бундан бевосита (4) тенглик ҳосил бўлади. Демак, бўлакли узлуксиз ва чегараланган функциялар учун қуйидаги тенгликлар ўринлидир.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Агар $f(x)$ функция даври 2π бўлган даврий функция бўлса (a ҳар қандай бўлганда ҳам), кейинги тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Интегралларнинг интеграллаш оралиги $[a, b]$ ни ихтиёрий олинганда ҳам юқоридаги тенгликлар ўз кучида қолишини кўрамиз, яъни агар $f(x)$ чегараланган ва бўлакли монотон бўлса, n чексиз ўсиб борганда

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx \text{ ва } \int_a^b f(x)\sin nx\,dx$$

интеграллар нолга интилади.

Ҳақиқатан, аниқлик учун $b-a<2\pi$ деб ҳисоблаб, қуйидагича аниқланган:

$$a\leqslant x<b \text{ да } \varphi(x)=f(x) \text{ бўладиган},$$
$$b<x\leqslant a+2\pi \text{ да } \varphi(x)=0 \text{ бўладиган}$$

даври 2π бўлган $\varphi(x)$ ёрдамчи функцияни қараймиз. Бу ҳолда

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx.$$

$\varphi(x)$ чегараланган ва бўлакли узлуксиз функция бўлгани учун ўнг томондаги интеграллар $n\to\infty$ да нолга интилади. Демак, чап томондаги интеграллар ҳам нолга интилади. Шундай қилиб, теорема исбот бўлди, яъни a ва b сонлар ҳар қандай бўлганда ва $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада бўлакли узлуксиз ҳамда чегараланган бўлса,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx=0;\qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0.\quad (5)$$

8-§. Дирихле интеграли

Биз бу параграфда Фурье қаторининг n-қисмий йиғиндисини бирор ихтиёрий интеграл орқали ифодаловчи формулани келтириб чиқарамиз. Бу формула бизга келгуси параграфларда керак бўлади.

Даври 2π бўлган $f(x)$ даврий функция Фурье қаторининг n-қисмий йиғиндисини қараймиз:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

бунда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt.$$

Бу ифодаларни $s_n(x)$ нинг формуласига қўйсак:

$$s_n(x) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dt + \frac{\sin kx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt\right]$$

ёки $\cos kx$ ва $\sin kx$ ни интеграл ишораси остига киритсак (бу эса мумкин, чунки $\cos kx$ ва $\sin kx$ интеграллаш ўзгарувчисига боғлиқ эмас, демак, уларни ўзгармас деб қараш мумкин):

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \cos kt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \sin kt\, dt\right].$$

Энди $\frac{1}{\pi}$ ни қавсдан чиқариб ва интеграллар йиғиндисини йиғиндининг интегралига алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s_n(x) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{\frac{f(t)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left| f(t) \cos kx \cos kt + f(t) \sin kx \sin kt \right|\right\} dt,$$

ёки

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right| dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right| dt. \qquad (1)$$

Ўрта қавс ичидаги ифодани алмаштирамиз. Фараз этайлик:

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \ldots + \cos nz$$

бўлсин; у ҳолда

$$2\sigma_n(z)\cos z = \cos z + 2\cos z\cos z + 2\cos z\cos 2z + \ldots +$$
$$+ 2\cos z\cos nz = \cos z + (1 + \cos 2z) + (\cos z + \cos 3z) + (\cos 2z +$$
$$+ \cos 4z) + \ldots + [\cos(n-1)z + \cos(n+1)z] = 1 + 2\cos z +$$
$$+ 2\cos 2z + \ldots + 2\cos(n-1)z + \cos nz + \cos(n+1)z$$

ёки

$$2\sigma_n(z)\cos z = 2\sigma_n(z) - \cos nz + \cos(n+1)z,$$

$$\sigma_n(z) = \frac{\cos nz - \cos(n+1)z}{2(1-\cos z)},$$

лекин

$$\cos nz - \cos(n+1)z = 2\sin(2n+1)\frac{z}{2}\sin\frac{z}{2},$$

$$1 - \cos z = 2\sin^2\frac{z}{2}.$$

Демак,

$$\sigma_n(z) = \frac{\sin(2n+1)\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}.$$

Шундай қилиб, (1) тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Интеграл остидаги функция даврий функция (даври 2π) бўлгани учун бу интеграл интеграллаш узунлиги 2π бўлган ҳар қандай кесмада ўз қийматини сақлайди. Шунинг учун биз бу интегрални қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Энди $t - x = \alpha$, $t = x + \alpha$ деб олиб, янги α ўзгарувчини киритамиз. У вақтда ушбу формула ҳосил бўлади:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha. \qquad (2)$$

Бу формуланинг ўнг томонидаги интеграл *Дирихле интеграли* деб аталади.

Бу формулада $f(x)\equiv 1$ деб оламиз. У ҳолда $k>0$ булганда $a_0=2$, $a_k=0$, $b_k=0$; демак, n ҳар қандай бўлганда ҳам $s_n(x)=1$ бўлади ва биз кейинроқ керак бўладиган қуйидаги айниятни ҳосил қиламиз:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha. \tag{3}$$

9-§. Берилган нуқтада Фурье қаторининг яқинлашиши

$f(x)$ функция $[-\pi,\ \pi]$ кесмада бўлакли узлуксиз бўлсин.

Олдинги параграфдаги (3) айниятнинг иккала қисмини ҳам $f(x)$ га кўпайтирсак ва $f(x)$ ни интеграл ишораси остига киритсак, қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Сўнгги тенгликнинг ҳадларини олдинги параграфдаги (2) тенгликнинг мос ҳадларидан айирсак:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+\alpha)-f(x)\right]\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Шундай қилиб, Фурье қаторининг $f(x)$ функциянинг берилган нуқтадаги қийматига яқинлашиши $n\to\infty$ да ўнг томондаги интегралнинг нолга интилишига боғлиқ.

Охирги интегрални $\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}=\sin n\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$ формуладан фойдаланиб икки интегралга ажратамиз:

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-f(x)]\cos n\alpha\,d\alpha.$$

Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интегрални учта интегралга ажратиб ёзамиз:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha) - f(x)]\frac{1}{2}\cos n\alpha\, d\alpha.$$

$\Phi_1(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{2}$ бўлсин. $f(x)$ чегараланган бўлакли узлуксиз функция бўлгани учун $\Phi_1(\alpha)$ ҳам α аргументнинг чегараланган бўлакли узлуксиз даврий функцияси бўлади. Демак, $n \to \infty$ да охирги интеграл нолга интилади, чунки у шу функциянинг Фурье коэффициентларидир.

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x+\alpha) - f(x)]\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

функция $-\pi \leqslant \alpha < -\delta$ ва $\delta \leqslant \alpha \leqslant \pi$ бўлганда чегараланган ҳамда

$$|\Phi_2(\alpha)| \leqslant [M + M]\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}},$$

бунда M сони $|f(x)|$ миқдорнинг юқори чегараси. Бундан ташқари $\Phi_2(\alpha)$ функция ҳам бўлакли узлуксиз бўлади. Демак, 7-параграфдаги (5) формулага асосан $n \to \infty$ да иккинчи ва учинчи интеграллар ҳам нолга интилади.

Шундай қилиб, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x) - f(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+\alpha) -$$

$$-f(x)]\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\,d\alpha. \qquad (1)$$

Ўнг томондаги ифода $-\delta \leqslant \alpha \leqslant \delta$ оралиқда интегралланади: демак, интеграл $f(x)$ функциянинг фақат $x-\delta$ дан $x+\delta$ гача оралиқдаги қийматларига боғлиқ бўлади. Шундай қилиб, сўнгги тенгликдан жуда муҳим бўлган ушбу хулоса чиқади: *берилган x нуқтада Фурье қаторининг яқинлашиши $f(x)$ функция x нуқтанинг исталганча кичик атрофидаги характеригагина боғлиқдир.*

Фурье қаторларини текширишдаги локаллаштириш принципи ана шундан иборатдир. Агар иккита $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функция бирор x нуқтанинг атрофида бир хил бўлса, у вақтда уларнинг Фурье қаторлари бу нуқтада ё бир вақтда яқинлашади ёки узоқлашади.

10- §. Фурье қатори яқинлашишининг баъзи бир етарли шартлари

Олдинги параграфда, агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли узлуксиз бўлса, у ҳолда Фурье қаторининг берилган x_0 нуқтада функциянинг $f(x_0)$ қийматига яқинлашиши функциянинг маркази x_0 нуқтада бўлган бирор ихтиёрий кичик $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ атрофдаги характерига боғлиқ эканлиги кўрсатилган эди.

Энди, *агар x_0 нуқтанинг атрофида $f(x)$ функциянинг*

$$\lim_{\alpha\to-0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_1, \qquad (1)$$

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha}=k_2 \qquad (2)$$

чекли лимитлари мавжуд бўлиб, x_0 нуқтанинг ўзида функция узлуксиз бўлса (388- расм), *бу нуқтада Фурье қатори $f(x)$*) функциянинг мос қийматига яқинлашишини исбот қиламиз.*

---

*) Агар (1) ва (2) шартлар бажарилса $f(x)$ функция x нуқтада ўнг ва чапдан ҳосилага эга дейилади. 388-расмда $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$, $k_1\neq k_2$ бўлган функция тасвирланган. Агар $k_1=k_2$ бўлса, яъни ўнг ва чап ҳосилалар тенг бўлса, бу функция берилган нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

Исбот. Олдинги параграфда аниқланган $\Phi_2(\alpha)$ функцияни қараймиз:

$$\Phi_2(\alpha) = [f(x_0+\alpha) - f(x_0)]\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ кесмада бўлакли узлуксиз ва x_0 нуқтада узлуксиз бўлгани учун у x_0 нуқтанинг бирор $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ атрофда узлуксиздир. Шунинг учун $\Phi_2(\alpha)$ функция $\alpha \neq 0$ ва $|\alpha| \leqslant \delta$ бўлган ҳамма нуқталарда узлуксиздир. $\alpha = 0$ бўлганда $\Phi_2(\alpha)$ функция аниқланмаган.

Энди (1) ва (2) шартлардан фойдаланиб, $\lim\limits_{\alpha\to 0-0}\Phi_2(\alpha)$ ни ва $\lim\limits_{\alpha\to 0+0}\Phi_2(\alpha)$ ни топамиз:

$$\lim_{\alpha\to 0-0}\Phi_2(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0-0}[f(x_0+\alpha) - f(x_0)]\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0-0}\frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha}\,\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -0}\frac{f(x_0+\alpha) - f(x_0)}{\alpha}\lim_{\alpha\to 0-0}\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\lim_{\alpha\to 0-0}\cos\frac{\alpha}{2} = k_1\cdot 1\cdot 1 = k_1.$$

388-расм.

Шундай қилиб, агар $\Phi_2(\alpha)$ функцияни $\Phi_2(0) = k_1$ десак, у ҳолда бу функция $[-\delta, 0]$ кесмада узлуксиз, демак, чегараланган бўлади. Шунинг сингари

$$\lim_{\alpha\to 0+0}\Phi_2(\alpha) = k_2$$

эканлигини ҳам исбот қиламиз.

Демак, $\Phi_2(\alpha)$ функция $[0, \delta]$ ораликда чегараланган ва узлуксиздир. Шундай қилиб, $\Phi_2(\alpha)$ функция $[-\delta, \delta]$ кесмада чегараланган ва бўлак-бўлак ҳолда узлуксиз. Энди (x ни x_0 билан белгилаб) 9-параграфдаги (1) тенгликка қайтамиз.

$$\lim_{n\to\infty}[s_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x_0+\alpha)-$$

$$- f(x_0)] \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \sin n\alpha \, d\alpha.$$

ёки

$$\lim_{n \to \infty} [s(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_2(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

7- параграфдаги (5) формулага асосан ўнг томондаги лимит нолга тенг, шунинг учун

$$\lim_{n \to \infty} [s_n(x_0) - f(x_0)] = 0$$

ёки

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x_0) = f(x_0).$$

Теорема исбот қилинди.

Исбот қилинган теорема 1- параграфда таърифланган теоремадан шу билан фарқ қиладики, агар унда Фурье қатори x_0 нуқтада функциянинг $f(x_0)$ қийматига яқинлашиши учун x_0 нуқта функциянинг $[-\pi, \pi]$ кесмадаги узлуксизлик нуқтаси, функциянинг ўзи эса бўлакли монотон бўлиши талаб қилинган бўлса, бу ерда x_0 нуқта функциянинг узлуксизлик нуқтаси бўлиши ва (1), (2) шартларнинг бажарилиши, $[-\pi, \pi]$ интервалнинг ҳаммасида эса функция бўлакли узлуксиз ҳамда чегараланган бўлиши талаб қилинади. Бу шартлар турлича эканлиги ўз-ўзидан маълум.

1- изоҳ. Агар бўлакли узлуксиз функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда (1) ва (2) шартларнинг бажарилиши равшан. Бунда $k_1 = k_2$. Демак, $f(x)$ функция дифференциалланувчи бўлган нуқталарда Фурье қатори функциянинг мос нуқтадаги қийматига яқинлашади.

2- изоҳ. 1°. 2- параграфдаги 2- мисолда қаралган функция (376- расм) 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... нуқталарда (1) ва (2) шартларни қаноатлантиради. Қолган ҳамма нуқталарда у дифференциалланувчи. Демак, бу функция учун тузилган Фурье қатори ҳар бир нуқтада функциянинг қийматига яқинлашади.

2°. 2- параграфнинг 4- мисолида қаралган функция (379- расм) $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ нуқталарда (1) ва (2) шартларни қаноатлантиради. Ҳамма нуқталарда у дифференциалланувчи. У ҳар бир нуқтада Фурье қаторини тасвир этади.

3°. 2- параграфнинг 1- мисолида қаралган (375- расм) функциялар $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ нуқталарда узлукли. Қолган ҳамма нуқталарда у дифференциалланувчи. Демак, узилиш нуқталаридан бошқа ҳамма нуқталарда функцияга тўғри келган Фурье қатори мос нуқталарда функциянинг қийматига яқинлашади. Узилиш нуқталарида Фурье қаторининг йиғиндиси, функция ўнг ва чап лимитларининг ўрта арифметик қийматига тенг, берилган ҳолда нолга тенг.

11-§. Амалий гармоник анализ

Функцияларни Фурье қаторларига ёйиш назарияси *гармоник анализ* деб аталади. Ҳозир биз Фурье қаторининг коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш ҳақида, яъни амалий гармоник анализ ҳақида бир неча изоҳ берамиз.

Маълумки, даври 2π бўлган $f(x)$ функция учун Фурье коэффициентлари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Амалда учрайдиган кўпгина ҳолларда функция ё жадвал кўринишида (агар функционал боғланиш тажриба натижасида ҳосил қилинган бўлса) ёки қандайдир асбоб ёрдами билан чизилган эгри чизиқ кўринишида берилади. Бу ҳолларда Фурье коэффициентлари тақрибий интеграллаш методлари ёрдамида ҳисобланади (I т. XI бобининг 8-параграфига қаранг).

Узунлиги 2π бўлган $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ оралиқни қараймиз. Бунга Ox ўқ бўйича мос масштаб танлаб олиш билан ҳамма вақт эришиш мумкин.

$[-\pi, \pi]$ оралиқни $-\pi = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = \pi$ нуқталар ёрдами билан n та тенг бўлакка бўламиз. Бу ҳолда бўлиниш қадами

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}$$

бўлади. $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги қийматларини мос равишда

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

билан белгилаймиз. Бу қийматларни биз жадвалдан ёки берилган функциянинг графиги бўйича мос ординаталарни ўлчаш билан топамиз.

У ҳолда, масалан, тўғри тўртбурчаклар формуласидан (I том XI бобининг 8-параграфидаги (I′) формулага қаранг) фойдаланиб, Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \cos kx_i, \qquad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sin kx_i.$$

Фурье коэффициентларини ҳисоблашни соддалаштирадиган схемалар ҳам ишлаб чиқилган (масалан, В. И. Смирнов „Курс высшей математики“, II т., А. М. Лопшиц „Шаблоны для гармонического анализа“га қаранг) бироқ биз бу ерда уларга муфассал тўхтаб ўта олмаймиз, лекин берилган функциянинг графиги бўйича Фурье коэффициентларининг тақрибий қийматларини ҳисоблаш учун имкон берадиган (гармоник анализатор деб аталадиган) асбоблар ҳам мавжуд эканлигини қайд қиламиз.

12- §. Комплекс формадаги Фурье қатори

2π даврли $f(x)$ даврий функция учун Фурье қаторига эга бўлайлик:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \tag{1}$$

$\cos nx$ ва $\sin nx$ ни кўрсаткичли функциялар билан ифодалаймиз. Бунинг учун маълум формуладан фойдаланамиз (I т. VII боб 5- § даги (3) формулага қаранг):

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

Демак,

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\qquad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=-i\,\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

$\cos nx$ ва $\sin nx$ нинг бу қийматларини (1) формулага қўямиз ва тегишли алмаштиришларни бажарамиз:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right). \tag{2}$$

Тубандаги белгиларни киритамиз:

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\qquad \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\qquad \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n}. \tag{3}$$

Бу белгилашларда (2) формула ушбу кўринишни олади:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right).$$

Сўнгги тенглик яна қисқа ёзилади.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \qquad (4)$$

Бу *Фурье қаторининг комплекс формада ёзилишидир.*

c_n ва c_{-n} коэффициентларни интеграллар билан ифодалаймиз: 1-§ даги (4), (5) ва (6) формулалардан фойдаланиб, (3) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Демак,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \qquad (5')$$

Шунга ўхшаш

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx. \qquad (5'')$$

(5′) ва (5″) формулаларни ва c_0 ифодани битта формула билан тасвирлаш мумкин:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \qquad (6)$$

c_n ва c_{-n} Фурьенинг $f(x)$ функция учун комплекс коэффициентлари дейилади.

Агар $f(x)$ ўзи $2l$ даврли даврий функция бўлса, у ҳолда $f(x)$ Фурье қатори учун қуйидагича бўлади.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (7)$$

(5-§ даги (3) формулага қаранг).

Бу ҳолда Фурье қатори комплекс формада, (4) формула ўрнига, мана бу формула билан ифодаланади:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x}. \qquad (8)$$

Қаторнинг c_n коэффициентлари ушбу формулалар билан ифодаланади

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (9)$$

Айниқса электротехникада ва радиотехникада мана бу терминология қабул қилинган. $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ ифодалар *гармониклар* дейилади.

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ сонлар}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha_n x} \tag{10}$$

функциянинг *тўлқин сонлари* дейилади. Тўлқин сонлар тўплами *спектр* дейилади. Агар бу сонлар сонлар ўқига қўйилса, у ҳолда айрим нуқталарнинг тўпламини ҳосил қиламиз. Нуқталарнинг бундай тўплами дискрет тўплам дейилади, мос спектрни эса—**дискрет** спектр дейилади. (9) формулалар билан аниқланадиган c_n коэффициентлар *комплекс амплитуда* дейилади.

Электротехника ва радиотехникага доир баъзи бир асарларда амплитудалар $|c_n|$ модулларининг тўплами ҳам $f(x)$ функциянинг *спектри* дейилади.

13-§. Фурье интеграли

$f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ чексиз интервалда аниқланган ва унда абсолют интегралланувчи бўлсин, яъни

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = Q, \tag{1}$$

интеграл мавжуд бўлсин. Сўнгра $f(x)$ функция шундай бўлсинки, у исталган $(-l, +l)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l} x + b_k \sin\frac{k\pi}{l} x, \tag{2}$$

бунда

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\, dt. \tag{3}$$

(3) даги формулалардан a_k ва b_k коэффициентларни (2) қаторга қўйиб, бундай ёзиш мумкин:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l} t\, dt\right)\cos\frac{k\pi}{l} x +$$

$$+ \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi}{l} t\, dt\right)\sin\frac{k\pi}{l} x =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\cos\frac{k\pi}{l} t\cos\frac{k\pi}{l} x + \sin\frac{k\pi}{l} t\sin\frac{k\pi}{l} x\right] dt$$

ёки

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\,dt. \qquad (4)$$

Энди $l \to \infty$ шартда лимитга ўтилганда (4) ёйилма қандай шакл олиши масаласини текширамиз.

Аввало қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots, \qquad \alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \ldots \text{ ва } \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l}. \qquad (5)$$

Буларни (4) га қўйиб, ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_k(t-x)\,dt\right)\Delta\alpha_k, \qquad (6)$$

$l \to \infty$ да ўнг томондаги биринчи ҳад нолга интилади. Ҳақиқатан,

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt = \frac{1}{2l}Q \to 0.$$

Ҳар қандай ўзгармас l учун, қавслар ичида турган ифодалар $\frac{\pi}{l}$ дан ∞ гача қийматлар қабул қилувчи α_k нинг функциясидир ((5) формулага қаранг). Агар $f(x)$ функция, чексиз интервалда чегараланган, ҳар бир чекли интервалда бўлакли монотон ва (I) шартни қаноатлантирувчи бўлса, у ҳолда $l \to +\infty$ да (6) формула ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha \qquad (7)$$

шаклига ўтишлигини исботсиз қабул қиламиз. Ўнг томондаги ифода $f(x)$ функция учун *Фурье интеграли* деб аталади. (7) тенглик функция узлуксиз бўладиган ҳамма нуқталар учун ўринлидир. Узилиш нуқталарда ушбу тенглик

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\right)dx = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (7')$$

бажарилади.

(7) тенгликнинг ўнг томондаги $\cos\alpha(t-x)$ ни очиб, интегрални алмаштирамиз:

$$\cos\alpha(t-x) = \cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x,$$

Бу ифодани (7) формулага қўйиб, $\cos\alpha x$ ва $\sin\alpha x$ ни интеграл белгисидан ташқарига чиқариб, қуйидагини ҳосил қиламиз, бунда интеграллаш t ўзгарувчи бўйича бажарилади:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (8$$

Қавслар ичидаги, t бўйича олинадиган интеграллардан ҳар бири мавжуддир, чунки $f(t)$ функция $(-\infty, \infty)$ интервалда абсолют интегралланувчи, шунга кўра $f(t)\cos\alpha t$ ва $f(t)\sin\alpha t$ функциялар ҳам абсолют интегралланувчидир.

Энди (8) формуланинг хусусий ҳолларини кўриб чиқамиз.

1. $f(x)$ жуфт функция бўлсин. Бу ҳолда $f(t)$ — $\cos\alpha t$ — жуфт функция, $f(t)\sin\alpha t$ тоқ функция ва ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt=0.$$

Бу ҳолда (8) формула қуйидаги шаклни олади:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \qquad (9$$

2. $f(x)$ тоқ функция бўлсин. Бу ҳолда, (8) формуладаги интегралларнинг характерларини анализ қилиб, қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (10)$$

Агар $f(x)$ функция фақат $(0, \infty)$ интервалда аниқланган бўлса, уни $x>0$ да (9) формула билан ҳам, (10) формула билан ҳам тасвирлаш мумкин. Биринчи ҳолда уни $(-\infty, 0)$ интервалда жуфт ва иккинчи ҳолда—тоқ деб аниқлаймиз.

Узилиш нуқталарда (9) ва (10) тенгликларда чапдаги $f(x)$ ифода ўрнига

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

ифодани қўйиш кераклигини яна бир бор айтиб ўтамиз.

Энди (8) формулага қайтамиз. Қавс ичидаги интеграллар α нинг функцияларидан иборат. Қуйидаги белгиларни киритамиз:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt, \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

У вақтда (8) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x|\,d\alpha. \tag{11}$$

(11) формула $f(x)$ функцияни 0 дан ∞ гача узлуксиз ўзгарувчи α частотали гармоникага ёйиш имкониятини беради. Амплитудаларнинг тақсимланиш қонуни ва бошланғич фазалар α частотага боғланишда $A(\alpha)$ ва $B(\alpha)$ функциялар билан ифодаланди.

(9) формулага қайтамиз. Агар,

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \tag{12}$$

деб олсак, (9) формула ушбу кўринишни олади:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha. \tag{13}$$

$F(\alpha)$ функцияни $f(x)$ функция учун *Фурьенинг косинус алмаштириши* дейилади.

Агар (12) тенгликда $F(\alpha)$ берилган, $f(t)$ эса изланган функция деб ҳисобланса, у ҳолда у $f(t)$ функция учун *интеграл тенглама* бўлади. (13) формула бу тенгламанинг ечимини беради.

(10) формулага асосан қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt, \tag{14}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{15}$$

$\Phi(\alpha)$ функция *Фурьенинг синус алмаштириши дейилади.*

Мисол. Фараз қилайлик,

$$f(x) = e^{-\beta x} \qquad (\beta > 0,\ x \geqslant 0)$$

бўлсин.

(12) формула бўйича Фурьенинг косинус алмаштиришини аниқлаймиз:

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \cos \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

(14) формула бўйича Фурьенинг синус алмаштиришини аниқлаймиз:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\beta t} \sin \alpha t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\beta^2 + \alpha^2}.$$

(13) ва (15) формулалардан ўзаролик муносабатларни топамиз:

$$\frac{2\beta}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \qquad (x > 0),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = e^{-\beta x} \qquad (x > 0)$$

14- §. Фурье интегралининг комплекс формада тасвирланиши

Фурье интегралида (12- параграфда (7) формула) қавс ичида α нинг жуфт функцияси турибди, демак, у α нинг манфий қийматларида ҳам аниқланган. Айтилганларга асосан (7) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha (t - x) \, dt \right) d\alpha. \tag{1}$$

Энди, айнан нолга тенг бўлган қуйидаги ифодани қараймиз:

$$\int_{-M}^{M} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \, dt \right) d\alpha = 0.$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги ифода айнан нолга тенг, чунки қавс ичида турган α нинг функцияси тоқ функциядир, тоқ функциянинг $-M$ дан $+M$ гача бўлган чегарадаги интеграли эса нолга тенг. Шунга кўра

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \, dt \right) d\alpha = 0$$

ёки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha (t - x) \, dt \right) d\alpha = 0. \tag{2}$$

бўлиши равшан.

Изоҳ. Бу ерда қуйидаги ҳолатни кўрсатиб ўтиш зарур. Чегаралари чексиз бўлган яқинлашувчи интеграл қуйидагича аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{c} \varphi(\alpha)\,d\alpha + \int_{c}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{c} \varphi(\alpha)\,d\alpha + \lim_{M\to\infty} \int_{c}^{M} \varphi(\alpha)\,d\alpha, \tag{*}$$

бунда ўнгда турган ҳар қайси қўшилувчининг лимитлари мавжуд деб шарт қиламиз (I т. XI боб 7-параграфга қаралсин). Биз (2) тенгликда бундай ёзган эдик:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \varphi(\alpha)\,d\alpha. \tag{**}$$

Равшанки, (**) лимитнинг мавжуд бўлиши, (*) тенглик ўнг томонида турган лимитлар эса мавжуд бўлмаслик ҳоллари юз бериши мумкин. (**) тенгликнинг ўнг томонида турувчи лимит *интегралнинг бош қиймати* деб аталади. Шундай қилиб, (2) тенгликда хосмас (ташқи) *интегралнинг* бош қиймати қаралади. Бу параграфнинг кейинги интеграллари ҳам шу маънода ёзилади.

(2) тенгликнинг ҳадларини $-\frac{i}{2\pi}$ га кўпайтириб ва (1) тенгликнинг мос қисмлари билан қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\alpha(t-x) - i\sin\alpha(t-x))\,dt\right]d\alpha$$

ёки

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha(t-x)}\,dt\right]d\alpha. \tag{3}$$

(3) формуланинг ўнг қисми $f(x)$ *функция учун комплекс формадаги Фурье интеграли* деб айтилади.

(3) формулани бундай ёзамиз:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}\,dt\right]e^{i\alpha x}\,d\alpha, \tag{4}$$

ёки қисқача

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha, \tag{5}$$

бунда

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt. \tag{6}$$

(5) формула 12-§ даги (10) формулага ўхшайди, α ҳам *тўлқин сон* дейилади, аммо бу ерда у $-\infty$ дан $+\infty$ гача ҳамма қийматларни қабул қилади ва тўлқин сонларнинг спектри, *узлуксиз спектр* дейилади. Шунга ўхшаш (5) формулани ва 12-§ даги (10) формулани бундан нарига ҳам ўтказиш мумкин. Агар 12-§ да (10) формуладаги α_n тўлқин сонга c_n комплекс амплитуда мос келса, у ҳолда (5) формулада $(\alpha_1, \alpha_1 + \Delta\alpha)$ интервалда қолган тўлқин сонларга $C(\alpha_1)$ комплекс амплитуда мос келади деб айтадилар. $C(\alpha)$ функция *спектрал зичлик* ёки *спектрал функция* деб айтилади. (Бу ерда зичлик термини, XIV боб 8-§ даги маънода ишлатилади; унда икки ўлчовли соҳа бўйича тақсимот зичлиги ҳақида сўзланган.)

(4) тенглик икки тенглик шаклида ёзилади:

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}\,dt, \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha. \tag{8}$$

(7) формула билан аниқланган $F^*(\alpha)$ функция $f(x)$ функция учун *Фурье алмаштириши* деб аталади. (8) формула билан аниқланган $f(x)$ функция $F^*(\alpha)$ функция учун Фурьенинг *тескари алмаштириши* деб аталади (алмаштиришлар i нинг ишораси билан фарқ қилади). $F^*(\alpha)$ функция $C(\alpha)$ функциянинг ўзгармас кўпайтувчи $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ билан фарқ қилади.

(7) ва (8) алмаштиришлардан 13-§ даги (12), (14), (13) ва (15) алмаштиришлар келиб чиқади. ($^1/_2$ ўзгармас кўпайтувчигача аниқлик билан). Агар (7) га қуйидагилар

$$e^{-i\alpha t} = \cos\alpha t - i\sin\alpha t, \qquad F^*(\alpha) = F(\alpha) - i\,\Phi(\alpha)$$

қўйилса ҳамда ҳақиқий ва мавҳум қисмлар тенгланса, (12) ва (14) алмаштиришлар олинади. Худди шунга ўхшаш, (8) алмаштиришдан (13) ва (15) алмаштиришлар ҳосил қилинади. Фурье алмаштиришларига ўхшаш алмаштиришлардан биз XIX бобда „Операцион ҳисоб ва унинг баъзи бир татбиқлари“да фойдаланишимизни айтиб ўтамиз.

15-§. Функцияларнинг ортогонал системаси бўйича Фурье қатори

1-таъриф. Агар исталган $n \neq k$ да

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

тенглик бажарилса, функцияларнинг чексиз системаси

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{2}$$

$[a,\ b]$ *кесмада ортогонал* дейилади. Бунда

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx \neq 0$$

деб фараз қилинади.

1-мисол. Ушбу

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{3}$$

функциялар системаси $[-\pi,\ \pi]$ кесмада ортогоналдир. Бу 1-§ даги (I) ва (II) тенгликлардан келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \cos 2\frac{\pi}{l}x,\ \sin 2\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots \tag{3'}$$

функциялар системаси $[-l,\ l]$ кесмада ортогонал, бунга тўғридан-тўғри текшириб кўриш билан ишониш мумкин

3-мисол. Ушбу

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots,\ \cos nx,\ldots \tag{4}$$

функциялар системаси $[0,\ \pi]$ кесмада ортогоналдир.

4-мисол. Ушбу

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots \tag{5}$$

функциялар системаси $[0,\ \pi]$ кесмада ортогонал.

Қуйида ортогонал функцияларнинг бошқа системалари кўрсатилади.

$[a,\ b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функция шундайки, у (1) ортогонал системадаги функцияларнинг қатори билан тасвирланади ва бу қатор $[a,\ b]$ кесмада берилган функцияга яқинлашади:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \tag{6}$$

c_n коэффициентларни аниқлаймиз. Фараз қилайлик, (6) қаторни исталган $\varphi_k(x)$ га кўпайтиргандан кейин олинган қатор ҳадлаб интеграллашга имкон берсин.

(6) тенгликнинг иккала қисмини $\varphi_k(x)$ га кўпайтирамиз ва a дан b гача чегараларда интеграллаймиз. (2) тенгликни ҳисобга олган ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = c_k\int_a^b \varphi_k^2(x)dx,$$

бундан

$$c_k = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx}, \qquad (7)$$

(7) формула бўйича ҳисобланган c_k коэффициентлар $f(x)$ функциянинг (1) ортогонал система бўйича *Фурье коэффициентлари* дейилади. (6) қатор (1) функциялар системаси бўйича *Фурье қатори* дейилади.

2-таъриф. Агар квадрати интегралланувчи функция учун, яъни $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$ бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_l \varphi_l(x) \right|^2 dx = 0 \qquad (8)$$

тенглик бажарилса,

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

ортогонал функциялар системаси *тўла система* дейилади.

7-§ даги таърифга мувофиқ (8) тенгликка бундай маъно бериш ҳам мумкин.

$\sum\limits_{i=0}^{n} c_l \varphi_l(x)$ йиғиндининг $f(x)$ функциядан ўрта квадратик четланиши $n \to \infty$ да нолга интилади.

Агар (8) тенглик бажарилса, (6) Фурье қатори $f(x)$ функцияга *ўртача* яқинлашади дейилади.

Ўртача яқинлашишдан $[a, b]$ кесмадаги ҳар бир нуқтада яқинлашиш келиб чиқмаслиги равшан.

1—4 мисолларда кўрсатилган тригонометрик системалар тегишли кесмаларда тўла эканини исботсиз белгилаб қўямиз. *Бесселнинг функциялар системаси*

$$J_n(\lambda_1 x),\ J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ J_n(\lambda_l x),\ \ldots, \qquad (9)$$

татбиқларда жуда кенг қўлланилади, улар XVI боб 23-§ да қаралган. Бу ерда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l \ldots$ Бессел функцияларининг илдизлари, яъни

$$J_n(\lambda_l) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

муносабатни қаноатлантирувчи сонлар.

Ушбу функциялар системаси

$$\sqrt{x}\,J_n(\lambda_1 x),\ \sqrt{x}\,J_n(\lambda_2 x),\ \ldots,\ \sqrt{x}\,J_n(\lambda_l x),\ \ldots \tag{10}$$

[0, 1] кесмада ортогонал эканлигини исботсиз кўрсатамиз:

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda_k x)\,J_n(\lambda_j x)dx = 0\ ^{*)} \qquad (k \neq j). \tag{11}$$

Лежандрнинг ортогонал кўпҳадлари ҳам татбиқларда қўлланилади, улар тубандагича аниқланади:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Улар ушбу тенгламани қаноатлантиради:

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

Ортогонал кўпҳадларнинг бошқа системаларидан ҳам фойдаланилади.

16-§. Чизиқли функционал фазо ҳақида тушунча. Функцияларни Фурье қаторига ёйиш ва векторларни ёйиш орасидаги ўхшашлик.

Аналитик геометрияда уч ўлчовли фазода вектор аниқланган эди:

$$A = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k},$$

бундаги $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ координата ўқлари бўйича йўналган ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ векторларни бундан буён $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ билан белгилаймиз.

Шунга ўхшаш йўл билан векторни n ўлчовли фазода аниқлаш мумкин:

$$A = \sum_{l=1}^{n} A_l e_l.$$

A кўринишдаги векторлар тўпламини *n ўлчовли Евклид фазоси* деб атаймиз ва E_n билан белгилаймиз.

A векторларни n ўлчовли Евклид фазосининг **) нуқталари ёки элементлари деб атаймиз. E_n фазонинг хоссаларини кўрсатамиз.

---

*) Агар $\varphi_k(x)$, $\varphi_j(x)$ функциялар учун $\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx=0\,(j\neq k)$ муносабат бажарилса, у ҳолда $\varphi_j(x)$ функциялар $\rho(x)$ вазнли ортогонал дейилади. Демак, $J_n(\lambda_l x)$ ($k \neq j$ да) функция x вазнли ортогонал функциядир.

**) Чексиз ўлчовли фазодаги векторлар ҳам қаралади.

E_n фазонинг иккита вектори берилган бўлсин:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i e_i \quad \text{ва} \quad B = \sum_{i=1}^{n} B_i e_i.$$

Агар C_1 ва C_2 — ҳақиқий сонлар бўлса, у холда уч ўлчовли фазога ўхшаш

$$C_1 A + C_2 B \tag{1}$$

вектор E_n фазонинг векторидир. A ва B векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб ушбу

$$(AB) = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \tag{2}$$

ифодага айтилади.

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторлар E_n фазога тегишли, (2) формула уларга ҳам қўлланилади.

Демак, $i \neq j$ да

$$(e_i e_j) = 0, \tag{2'}$$

$i = j$ да

$$(e_i e_i) = 1.$$

Скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлган векторлар *ортогонал* векторлар деб аталади. Демак, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогонал векторлардир.

Уч ўлчовли фазодагидек, скаляр кўпайтманинг қуйидаги хоссаларини аниқлаш осон.

$$\left.\begin{array}{c} (AB) = (BA), \\ (A + B,\ C) = (AC) + (BC), \\ (\lambda A,\ B) = \lambda(AB). \end{array}\right| \tag{3}$$

A векторнинг *узунлиги* ёки *модули* уч ўлчовли фазодагидек аниқланади:

$$|A| = \sqrt{(AA)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}\,. \tag{4}$$

Икки вектор айирмасининг узунлиги бундай аниқланади:

$$|A - B| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i - B_i)^2}. \tag{5}$$

Жумладан

$$|A - A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (A_i - A_i)^2} = 0.$$

Икки вектор орасидаги *бурчак* φ бундай аниқланади:

$$\cos\varphi = \frac{(AB)}{|A| \cdot |B|}. \tag{6}$$

$[a, b]$ кесмада чегараланган бўлакли монотон ҳамма функциялар тўпламини қараймиз*). Бу тўпламни Φ билан белгилаймиз ва Φ *функциялар фазоси* деб атаймиз.

Бу фазога тегишли функцияларни Φ фазонинг *элементлари* ёки *нуқталари* деб атаймиз.

Φ фазонинг функциялари устида, биз E_n фазонинг векторлари устида бажарилган амалларга ўхшаш амалларни ўрнатишимиз мумкин.

Агар C_1 ва C_2 исталган ҳақиқий сонлар ва $f_1(x)$, $f_2(x)$ функциялар Φ фазонинг элементлари бўлса, у вақтда

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \tag{7}$$

йиғинди Φ фазонинг элементи бўлади.

Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ Φ фазонинг икки функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ *функцияларнинг скаляр кўпайтмаси* деб ушбу

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \tag{8}$$

ифодага айтилади.

Бу ифода (2) ифодага ўхшайди. (8) скаляр кўпайтма векторлар учун аниқланган (3) хоссаларга ўхшаш хоссаларга эга эканлигини текшириб кўриш осон:

$$\left.\begin{aligned} (f, \varphi) &= (\varphi, f), \\ (f_1 + f_2, \varphi) &= (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \\ (\lambda f, \varphi) &= \lambda(f, \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Векторнинг модулини аниқлашдаги сингари (4) формула бўйича Φ фазонинг $f(x)$ элементининг *нормаси* аниқланади:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}. \tag{10}$$

Φ фазонинг $f(x)$ ва $\varphi(x)$ элементлари орасидаги масофа деб (5) формулага ўхшаш ушбу

$$\|f - \varphi\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx} \tag{11}$$

ифодага айтамиз.

Фазонинг элементлари орасидаги масофанинг (11) ифодаси

---

*) Функцияларнинг бундай синфини 1-§ даги теоремада қаралган. 1-§ даги барча қилинган тасдиқлар сақланадиган кенгроқ функциялар синфини қараш ҳам мумкин эди.

фазонинг *метрикаси* дейилади. $\sqrt{b-a}$ кўпайтувчи аниқлигида 7-§ даги δ ўртача квадратик оғишга тенг келади.

Маълумки, агар $f(x) = \varphi(x)$ бўлса, яъни $f(x)$ ва $\varphi(x)$ $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида устма-уст тушса, $\|f-\varphi\| = 0$. Лекин $\|f-\varphi\| = 0$ бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесманинг ҳамма нуқталарида $f(x) = \varphi(x)$ фақат чекли сондаги нуқталардан бошқасида*). Аммо бу ҳолда ҳам, Ф фазонинг элементлари ўзаро айнан тенг дейилади. Бўлак-бўлак ҳолда монотон чегараланган функцияларда (7), (8) амаллар аниқланган ва метрика (11) тенглик билан аниқланадиган бўлса, бундай функциялар фазоси *квадратик метрикали чизиқли функционал фазо* дейилади.

Ф фазонинг элементлари фазо *нуқталари* ёки *векторлари* деб аталади.

Энди Ф фазога тегишли

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{12}$$

функциялар кетма-кетлигини қараймиз.

Агар исталган i, $j (i \neq j)$ учун ушбу тенглик

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \tag{13}$$

бажарилса (12) функциялар кетма-кетлиги $[a, b]$ *кесмада ортогонал* дейилади.

1-§ даги (I) тенгликка асосан, масалан, 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$, ... функциялар системаси $[-\pi, \pi]$ кесмада ортогоналдир.

Энди функцияни ортогонал функциялар бўйича Фурье қаторига ёйиш векторни ортогонал векторлар бўйича ёйишга ўхшашлигини кўрсатамиз. Ушбу вектор берилган бўлсин:

$$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + A_k\boldsymbol{e}_k + \ldots + A_n\boldsymbol{e}_n. \tag{14}$$

Биз $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ векторларни ортогонал деб ҳисоблаймиз, яъни агар $i \neq j$ бўлса, у ҳолда

$$(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j) = 0. \tag{15}$$

A_k проекцияни аниқлаш учун (14) тенгликнинг ўнг ва чап томонларини $\boldsymbol{e}_k$ векторга скаляр ҳолда кўпайтирамиз. (2), (3) хоссаларга асосан тубандагини ҳосил қиламиз:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k) = A_1(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_k) + A_2(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_k) + \ldots + A_k(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k) + \ldots + A_n(\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_k).$$

(15) ни ҳисобга олсак,

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k) = A_k(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k),$$

---

*) $f(x) \neq \varphi(x)$ бўлган нуқталар чексиз сонда бўлиши ҳам мумкин.

бундан

$$A_k = \frac{(Ae_k)}{(e_k e_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Сўнгра $f(x)$ функцияни ортогонал система бўйича ёйилган деб фараз этамиз:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x). \tag{17}$$

(17) тенгликнинг иккала қисмини $\varphi_k(x)$ га скаляр ҳолда кўпайтириб, ҳамда (9) ва (13) тенгликларни ҳисобга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз*):

$$(f, \varphi_k) = a_k(\varphi_k, \varphi_k),$$

бундан

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b [\varphi_k(x)]^2 dx}. \tag{18}$$

(18) формула (16) формулага ўхшаш. Сўнгра бундай белгилаймиз,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{19}$$

$$\delta_n = \| f - s_n \| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Агар

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$$

бўлса, у ҳолда (12) ортогонал функциялар системаси $[a, b]$ кесмада *тўла* системадир. (17) Фурье қатори $f(x)$ функцияга *ўртача* яқинлашади.

XVII БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ бўлганда $f(x) = 2x$ функция ва $-\pi < x < 0$ бўлганда $f(x) = x$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин. *Жав.* $f(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$.

---

*) Биз қараётган процессда ҳосил қилинадиган қаторлар яқинлашади ва ҳадма-ҳад интеграллашни қонуний деб фараз қиламиз.

2. $f(x)=1$ функциянинг $(0, \pi)$ интервалда каррали ёйлар синуслари бўйича ёйилмасидан фойдаланиб,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

қаторнинг йиғиндиси ҳисоблансин. *Жав.* $\frac{\pi}{4}$.

3. $f(x)=x^2$ функциянинг Фурье қаторига ёйилмасидан фойдаланиб, $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ қаторнинг йиғиндиси ҳисоблансин *Жав.* $\frac{\pi^2}{12}$.

4. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин. *Жав.* $\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots$

5. $-\pi<x<0$ бўлганда $f(x)=-\frac{(\pi+x)}{2}$ функция, $0<x<\pi$ бўлганда $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин. *Жав.* $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots$

6. $-\pi<x<0$ бўлганда $f(x)=-x$ функция $0<x<\pi$ бўлганда $f(x)=0$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин. *Жав.* $\frac{\pi}{4}-$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}.$$

7. $-\pi<x\leqslant 0$ бўлганда $f(x)=1$ функция.
$0<x<\pi$ бўлганда $f(x)=-2$ функция Фурье қаторига ёйилсин. *Жаь*

$$-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

8. $f(x)=x^2$ функция $(0, \pi)$ интервалда синуслар қаторига ёйилсин *Жав.* $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx.$

9. $y=\cos 2x$ функция $(0, \pi)$ интервалда синуслар қаторига ёйилсин. *Жав.* $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$.

10. $y=\sin x$ функция $(0, \pi)$ интервалда косинуслар қаторига ёйилсин. *Жав.* $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\ldots\right]$.

11. $y=e^x$ функция $(-l, l)$ интервалда Фурье қаторига ёйилсин. *Жав.*

$$\frac{e^l-e^{-l}}{2l}+l(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}+\pi(e^l-e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}.$$

12. $f(x)=2x$ функция $(0, 1)$ интервалда синуслар қаторига ёйилсин. *Жав.* $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n^2}$.

13. $f(x) = x$ функция $(0, l)$ интервалда синуслар қаторига ёйилсин. *Жав.* $\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$.

14. $f(x) = \begin{cases} 0 < x < 1 \text{ бўлганда } x, \\ 1 < x < 2 \text{ бўлганда } 2 - x \end{cases}$

функция (0,2) интервалда: а) синуслар қаторига ёйилсин: б) косинуслар қаторига ёйилсин. *Жав.* а) $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$;

б) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

XVIII БОБ

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§. Математик физика тенгламаларининг асосий типлари

Математик физиканинг асосий тенгламалари деб (икки эркли ўзгарувчининг функциялари учун) қуйидаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар айтилади.

I Тўлқин тенглама:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Бундай тенгламани текширишга торнинг кўндаланг тебраниши, стерженнинг узунасига тебраниши, симда электр тебранишлар, айланувчи цилиндрдаги (валдаги) айланма тебранишлар, газнинг тебранишлари ва шунга ўхшаш тебраниш процессларини ўрганиш олиб келади. Бу тенглама *гиперболик типдаги* энг содда тенгламадир.

II. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси ёки Фурье тенгламаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Бундай тенгламани текширишга иссиқликнинг тарқалиш процесси, ғалвирак (ғовак) муҳитда суюқлик ва газнинг сузилиши (фильтрланиш) (масалан, ер остидаги қумлик жойларда нефть ва газнинг сизиб чиқиши-фильтрланиши) масаласи, эҳтимоллар назариясининг баъзи масалалари ва шунга ўхшаш масалаларни ўрганиш олиб келади. Бу тенглама *параболик типдаги* энг содда тенгламадир.

III. Лаплас тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (3)$$

Бундай тенгламани текширишга электр ва магнит майдонлари ҳақидаги масалаларни, стационар иссиқлик ҳолат ҳақидаги масалаларни, гидродинамика, диффузия ва шунга ўхшаш масалаларни ўрганиш олиб келади. Бу тенглама *эллиптик типдаги* энг содда тенгламадир.

(1), 2) ва (3) тенгламаларда изланаётган u функция иккита ўзгарувчига боғлиқ. Кўп сонли ўзгарувчиларнинг функциялари учун ҳам тегишли тенгламалар қаралади. Масалан, учта эркли ўзгарувчига эга бўлган тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1')$$

кўринишда бўлади. Учта эркли ўзгарувчига эга бўлган иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2')$$

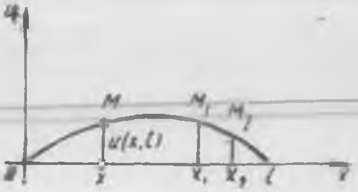
кўринишда бўлади. Учта эркли ўзгарувчиси бўлган Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (3')$$

кўринишда бўлади.

2-§. Тор тебранишлари тенгламасини келтириб чиқариш. Чегаравий масаланинг таърифи. Симларда электр тебранишлари тенгламаларини келтириб чиқариш

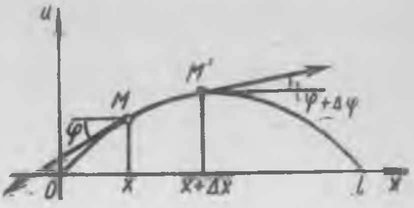
Математик физикада тор деганда эгилувчан ва эластик ип тушунилади. Торда ҳар қандай вақт моментида пайдо бўлган зўриқиш унинг профилига ўтказилган уринма бўйича йўналган бўлади. Масалан, l узунликдаги тор бошланғич моментда Ox ўқнинг O дан l гача бўлган кесмаси бўйича йўналган бўлсин. Торнинг учлари $x = 0$ ва $x = l$ нуқталарга бириктирилган деб фараз қиламиз. Агар торни унинг дастлабки ҳолатидан четлаштирсак, сўнгра ўз ҳолига қўйиб берсак ёки, торни четлантирмасдан, бошланғич моментда унинг нуқталарига бирор тезлик берсак ёки торни четлантирсак ва унинг нуқталарига бирор тезлик берсак, у ҳолда торнинг нуқталари ҳаракатга келади — *тор тебрана бошлайди* дейилади. Масала ҳар қандай вақт моментида тор шаклини аниқлашдан ҳамда торнинг ҳар бир нуқтасининг вақтга қараб ҳаракат қонунини аниқлашдан иборат.



389- расм.

Тор нуқталарининг бошланғич ҳолатидан кичик четланишларини қараймиз. Шунга кўра, тор нуқталарининг ҳаракати Ox ўққа перпендикуляр ҳолда ва бир текисликда вужудга келади деб фараз қилиш мумкин. Бундай фаразияда торнинг тебраниш жараёни битта $u(x, t)$ функция билан ифода этилади; бу функция абсциссаси x бўлган тор нуқтасининг t моментда силжиш миқдорини беради (389- расм).

Биз торнинг (x, u) текислигида кичик четланишларини қараётганимиз учун, тор элементи узунлиги $\smile M_1M_2$ унинг Ox ўқдаги проекциясига тенг*), яъни $\smile M_1M_2 = x_2 - x_1$ деб фараз қиламиз. Яна торнинг барча нуқталарида таранглик ҳам бир хил деб фараз қиламиз; уни T билан белгилаймиз.



390- расм.

Торнинг MM' элементини қараймиз (390- расм). Бу элементнинг учларида T кучлар торга уринма бўйича таъсир этади. Уринмалар Ox ўқ билан φ ва $\varphi + \Delta\varphi$ бурчаклар ҳосил қилсин. Бу ҳолда MM' элементга таъсир этувчи кучларнинг Ou ўқдаги проекцияси $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$ га тенг бўлади. φ бурчак жуда кичик бўлгани учун $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ деб фараз қилиш мумкин ва биз қуйидагига эга бўламиз:

$$T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx T\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T\operatorname{tg}\varphi =$$

$$= T\left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x + \theta\Delta x, t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}\Delta x,$$

$$0 < \theta < 1$$

(бу ерда биз квадрат қавсларда турган ифодага Лагранж теоремасини татбиқ қилдик).

Ҳаракат тенгламасини ҳосил қилиш учун элементга қўйилган ташқи кучни инерция кучига тенглаш керак. ρ торнинг чизиқли зичлиги бўлсин. У ҳолда тор элементининг массаси $\rho\Delta x$ бўлади. Элементнинг тезланиши $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ га тенг. Де-

---

*) Бу фараз 1 га нисбатан $u_x'^2$ миқдорни эътиборга олмаймиз дейишга эквивалентдир. Ҳақиқатан,

$$\smile M_1M_2 = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u'^2_x}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{2}u'^2_x - \ldots\right) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

мак, Даламбер принципига кўра ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Δx га қисқартириб ва $\frac{T}{\rho}=a^2$ деб белгилаб, ҳаракатнинг ушбу тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Бу — *тўлқин тенглама* деган тенгламамиз — торнинг тебраниш тенгламасидир. Тор ҳаракатини тўла аниқлаш учун (1) тенгламанинг ўзигина етарли эмас. Изланаётган $u(x, t)$ функция яна торнинг учларида ($x=0$ ва $x=l$ да) қандай бўлишини кўрсатувчи чегаравий шартларни ҳамда бошланғич ($t=0$) моментда тор ҳолатини тасвир этувчи бошланғич шартларни қаноатлантириши керак. Чегаравий ва бошланғич шартлар тўплами *четки шартлар* деб аталади.

Масалан, биз фараз қилганимиздек, $x=0$ ва $x=l$ да торнинг учлари қўзғалмас бўлсин. У ҳолда t қандай бўлганда ҳам ушбу тенгликлар бажарилиши керак:

$$u(0, t)=0, \tag{2'}$$

$$u(l, t)=0. \tag{2''}$$

Бу тенгликлар масаламиз учун чегаравий шартлардир.

Бошланғич $t=0$ моментда тор маълум формага эга, буни биз унга олдиндан берганмиз. Бу форма $f(x)$ функция билан аниқланган бўлсин. Шундай қилиб,

$$u(x, 0)=u\,|_{t=0}=f(x) \tag{3'}$$

бўлиши керак.

Энди, бошланғич моментда торнинг ҳар бир нуқтасининг тезлиги берилган бўлиши керак, бу тезлик $\varphi(x)$ функция билан аниқланади. Шундай қилиб,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x) \tag{3''}$$

бўлиши керак. (3') ва (3'') шартлар бошланғич шартлардир.

Эслатма. Жумладан $f(x)\equiv 0$ ёки $\varphi(x)\equiv 0$ бўлиши мумкин. Агарда $f(x)\equiv 0$ ва $\varphi(x)\equiv 0$ бўлса, бу ҳолда тор ҳаракатсиз ҳолатда бўлади, демак, $u(x, t)\equiv 0$.

Юқорида кўрсатиб ўтилганидек, симлардаги электр тебранишлар ҳақидаги масала ҳам (1) тенгламага олиб келади. Буни кўрсатамиз. Симдаги электр ток $i(x, t)$ миқдор ва $v(x, t)$ кучланиш билан характерланади, улар сим нуқтасининг x координатасига ва t вақтга боғлиқ. Сим элементи Δx ни қараб, Δx элементдаги кучланишнинг пасайиши $v(x, t) - v(x+\Delta x, t) \approx$ $\approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$ га тенг деб ёзишимиз мумкин.

Кучланишнинг бундай пасайиши $iR\Delta x$ га тенг бўлган омик кучланиш ва $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ га тенг бўлган индуктив кучланишдан ташкил топади. Шундай қилиб,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x, \tag{4}$$

бунда R ва L — симнинг бир узунлик бирлиги учун ҳисобланган қаршилик ва индуктивлик коэффициенти. Минус ишора олинганига сабаб шуки, электр токи v нинг ўсишига тескари йўналишда оқади. Δx га қисқартириб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Энди, Δt вақтда Δx элементдан чиқадиган ва унга кирадиган токларнинг айирмаси бундай бўлади:

$$-i(x, t) - i(x+\Delta x, t) \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\,\Delta t.$$

Бу $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ га тенг бўлган элементни зарядлашга ва изоляция яхши эмаслиги натижасида симнинг ён сирти орқали $Av\,\Delta x\,\Delta t$ га тенг бўлган оқимга сарф бўлади (бунда A — оқим коэффициенти). Бу ифодаларни бир-бирига тенглаб ва $\Delta x\,\Delta t$ га қисқартириб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Av = 0. \tag{6}$$

(5) ва (6) тенгламаларни *телеграф тенгламалари* деб аташ қабул қилинган.

(5) ва (6) тенгламалар системасидан фақат изланган $i(x, t)$ функцияни ўз ичига олувчи тенгламани ва фақат изланган $v(x, t)$ функцияни ўз ичига олувчи тенгламани ҳосил қилиш мумкин. (6) тенгламанинг ҳадларини x бўйича дифференциаллаймиз; (5) тенгламанинг ҳадларини t бўйича дифференциаллаймиз ва уларни C га кўпайтирамиз. Ундан кейин айириш амалини бажариб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\frac{\partial v}{\partial x} - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

Кейинги тенгламага (5) тенгламадан $\frac{\partial v}{\partial x}$ нинг ифодасини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + A\left(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - CR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial i}{\partial t} + ARi. \tag{7}$$

$v(x, t)$ ни аниқлаш учун шунга ўхшаш усул билан тенглама ҳосил қилинади:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (CR + AL)\frac{\partial v}{\partial t} + ARv. \tag{8}$$

Агар изоляция орқали оқиб чиқишни ($A = 0$) ва қаршиликни ($k = 0$) эътиборга олмаслик мумкин бўлса, у ҳолда (7) ва (8) тенгламалар тўлқин тенгламаларга ўтади:

$$a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \qquad a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

бунда $a^2 = 1/CL$ билан белгиланган. Физик шартларга асосланиб масаланинг чегаравий ва бошланғич шартлари ифодаланади.

3-§. Торнинг тебраниш тенгламасини ўзгарувчиларни ажратиш методи билан (Фурье методи билан) ечиш

Биз ҳозир қараб чиқадиган ўзгарувчиларни ажратиш методи (ёки Фурье методи) математик физиканинг кўп масалаларини ечиш учун намуна бўлади. Масалан,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

тенгламанинг

$$u(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(l, t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5}$$

четки шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин. (1) тенгламанинг (2) ва (3) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи (айнан нолга тенг бўлмаган) хусусий ечимини иккита $X(x)$ ва $T(t)$ функциялар кўпайтмаси шаклида топамиз, улардан биринчиси фақат x га боғлиқ, иккинчиси эса фақат t га боғлиқ бўлади:

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{6}$$

Бу қийматларни (1) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$X(x)\,T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

ва бу тенгликнинг ҳадларини a^2XT га бўлиб,

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} \tag{7}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг чап томонида турган функция x га боғлиқ эмас, ўнг томондаги функция t га боғлиқ эмас. (7) тенглик фақат чап томон ва ўнг томон x га ҳам, t га ҳам боғлиқ бўлмаган ҳолдагина, яъни ўзгармас сонга тенг бўлган ҳолда ўринли бўлиши мумкин. Уни $-\lambda$ билан белгилаймиз, бунда $\lambda > 0$ (кейинроқ $\lambda < 0$ бўлган ҳол ҳам қаралади). Шундай қилиб,

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Бу тенгликлардан иккита тенглама ҳосил қиламиз:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{9}$$

Бу тенгламаларнинг умумий ечимлари бундай бўлади (XIII боб 21-§ га қаранг):

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \tag{10}$$

$$T(t) = C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}t, \tag{11}$$

бунда A, B, C, D — ихтиёрий ўзгармас сонлар. $X(x)$ ва $T(t)$ ифодаларини (6) тенгликка қўйиб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$u(x, t) = (A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x)(C\cos a\sqrt{\lambda}t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t).$$

Энди A ва B ўзгармас сонларни (2) ва (3) шартлар қаноатланадиган қилиб танлаб оламиз. $T(t) \not\equiv 0$ бўлгани учун (акс ҳолда $u(x, t) \equiv 0$ бўлиб, бу қўйилган шартга зидлик қилади), $X(x)$ функция (2) ва (3) шартларни қаноатлантириши керак, яъни $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ бўлиши керак. $x = 0$ ва $x = l$ қийматларни (10) тенгликка қўйиб, (2) ва (3) га асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \qquad 0 = A\cos\sqrt{\lambda}\,l + B\sin\sqrt{\lambda}l.$$

Биринчи тенгламадан $A = 0$ эканини топамиз. Иккинчи тенгламадан

$$B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$$

келиб чиқади. $B \neq 0$, чунки акс ҳолда $X \equiv 0$ ва $u \equiv 0$ бўлиб, бу эса шартга зидлик қилади. Демак,

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

бўлиши керак, бундан

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{12}$$

(биз $n = 0$ қийматни олмаймиз, чунки бу ҳолда $X \equiv 0$ ва $u \equiv 0$ бўлур эди). Шундай қилиб, ушбу тенгликни ҳосил қилдик:

$$X = B \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{13}$$

λ нинг топилган қийматлари берилган четки масала учун *хос қийматлар* деб аталади. Буларга мос $X(x)$ функциялар *хос функциялар* дейилади.

Изоҳ. Агар биз $-\lambda$ ўрнига $+\lambda = k^2$ ифодани олганимизда (8) тенглама бундай кўринишни олган бўлур эди:

$$X'' - k^2 X = 0.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими қуйидагича:

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Нолдан фарқли бундай шаклдаги ечим (2) ва (3) чегаравий шартларни қаноатлантира олмайди.

$\sqrt{\lambda}$ ни билган ҳолда, (11) тенгликдан фойдаланиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$T(t) = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{14}$$

n нинг ҳар бир қиймати учун, демак ҳар бир λ учун (13) ва (14) ифодаларни (6) тенгликка қўйиб ҳам (1) тенгламанинг (2) ва (3) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қиламиз. Бу ечимни $u_n(x,\ t)$ билан белгилаймиз:

$$u_n(x,\ t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right). \tag{15}$$

n нинг ҳар бир қиймати учун биз ўзининг C ва D ўзгармас сонларини олишимиз мумкин ва шунинг учун уларни C_n ва D_n деб ёзамиз (ўзгармас B сон C_n ва D_n га киритилган). (1) тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлгани учун ечимларнинг йиғиндиси ҳам ечим бўлади ва шунинг учун

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\ t)$$

ёки

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{16}$$

қатор билан тасвирланган функция ҳам (1) дифференциал тенгламанинг (2) ва (3) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади. Агар C_n ва D_n коэффициентлар шундай бўлсаки, (16) қатор ва бу қаторни x ва t бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллашдан ҳосил бўлган қаторлар яқинлашувчи бўлса, шундай ҳолдагина (16) қатор (1) тенгламанинг ечими бўлиши равшан.

(16) ечим (14) ва (15) бошланғич шартларни ҳам қаноатлантириши керак. Бунга биз C_n ва D_n ўзгармас сонларни танлаб олиш йўли билан эришамиз. (16) тенгликка $t=0$ ни қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз ((4) шартга қаранг):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{17}$$

Агар $f(x)$ функцияни $(0,\ l)$ интервалда Фурье қаторига ёйиш мумкин бўлса (XVII боб 1-§ га қаранг), у ҳолда

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \tag{18}$$

деб фараз қилинса, (17) шарт бажарилади. Энди (16) тенглик ҳадларини t бўйича дифференциаллаймиз ва $t=0$ деб фараз қиламиз. (15) шартдан ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Бу қаторнинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$D_n\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

ёки

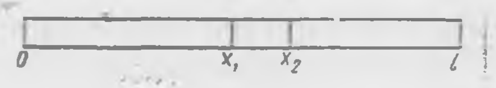
$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \tag{19}$$

Шундай қилиб, биз C_n ва D_n коэффициентлари (18) ва (19) формулалар билан аниқланадиган (16) қатор, агар уни икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, (I) тенгламанинг (2)—(5) чегаравий ва бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлган $u(x,\ t)$ функциядан иборат эканини исботладик.

Изоҳ. Тўлқин тенгламаси учун қаралган масалани бошқа усул билан ечиб, (16) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлмаган ҳолда ҳам, у қатор ечимдан иборат эканини исбот қилиш мумкин. Бунда $f(x)$ функция икки марта дифференциалланувчи, $\varphi(x)$ эса бир марта дифференциалланувчи функция бўлиши керак*)

4-§. Стерженда иссиқлик тарқалиш тенгламаси. Четки масаланинг ифодаси

Узунлиги l бўлган бир жинсли стерженни қараймиз. Стерженнинг ён сирти иссиқлик ўтказмайдиган деб ҳамда стержень кўндаланг кесимининг барча нуқталарида температура бир хил деб фараз қиламиз. Стерженда иссиқлик тарқалиш процессини ўрганамиз.



391- расм.

Ox ўқни стерженнинг бир учи $x=0$ нуқта билан, иккинчи учи эса $x=l$ нуқта билан устма-уст тушадиган қилиб жойлаштирамиз (391-расм).

$u(x, t)$ стерженнинг x абсциссали кесимининг t моментдаги температураси бўлсин. Иссиқлик тарқалишининг тезлиги, яъни битта бирлик вақтда x абсциссали кесимдан оқиб ўтадиган иссиқлик миқдори

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial x}S \tag{1}$$

формула билан аниқланиши тажриба йўли билан топилган, бунда s—қаралаетган стержень кесимининг юзи, k—иссиқлик ўтказиш коэффициенти**).

Абсциссалари x_1 ва x_2 ($x_2-x_1=\Delta x$) бўлган кесимлар орасида қолган стержень элементини қараймиз. x_1 абсциссали кесимдан Δt вақтда ўтадиган иссиқлик миқдори:

$$\Delta Q_1=-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}S\Delta t, \tag{2}$$

---

*) Бу шартлар ҳақида тўла маълумотни, масалан, А. И. Тихонов ва А. А. Самарскийнинг „Уравнения математической физики" китобидан қаранг, Гостехиздат, 1954.

**) Иссиқликнинг тарқалиш тезлиги ёки иссиқлик оқимининг тезлиги бундай аниқланади:

$$q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

бунда ΔQ, s кесимдан Δt вақтда ўтадиган иссиқлик миқдори.

x_2 абсциссали кесим учун ҳам ўша миқдорнинг ўзи:

$$\Delta Q_2 = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t. \qquad (3)$$

Стержень элементига Δt вақтда оқиб кирган иссиқлик $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left|-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\Delta t\right| - \left|-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t\right| \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \qquad (4)$$

(биз $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}$ айирмага Лагранж теоремасини қўлладик) Δt вақтдаги бу иссиқлик оқими стержень элементи температурасини Δn миқдорга кўтариш учун сарф бўлди:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\Delta u$$

ёки

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \qquad (5)$$

бунда C—стержень моддасининг иссиқлик сиғими, ρ—стержень моддасининг зичлиги ($\rho\Delta x S$ — стержень элементининг массаси). $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ бир хил иссиқлик миқдорининг (4) ва (5) ифодаларини бир-бирига тенглаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t = c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$\frac{k}{c\rho} = a^2$ деб белгилаб, қуйидаги натижани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Ана шу тенглама бир жинсли стерженда иссиқлик тарқалишининг тенгламасидир (*иссиқлик ўтказиш тенгламаси*).

(6) тенгламанинг ечими тўла аниқ бўлиши учун $u(x, t)$ функция масаланинг физик шартларига мос четки шартларни қаноатлантириши керак. (6) тенгламанинг ечими учун четки шартлар турлича бўлиши мумкин. $0 \leqslant t \leqslant T$ учун биринчи четки масала дейилган масалага мос келувчи шартлар қуйидагилар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad (7)$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \qquad (8)$$

$$u(l, t) = \psi_2(t). \qquad (9)$$

(7) шарт (*бошланғич шарт*) физика нуқтаи назаридан $t=0$ да стерженнинг турли кесимларида $\varphi(x)$ га тенг температура берилганлиги мос келади. (8) ва (9) шартлар (*четки шартлар*) $x=0$ ва $x=l$ бўлганда стержень учларида мос тартибда $\psi_1(t)$ ва $\psi_2(t)$ га тенг бўлган температуранинг сақланишига тўғри келади.

6-§ да (6) тенглама $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ соҳада (7), (8), (9) шартларни қаноатлантирувчи биргина ечимга эга экани исбот қилинади.

5-§. Фазода иссиқликнинг тарқалиши

Иссиқликнинг тарқалиш процессини уч ўлчовли фазода қараймиз. $u(x, y, z, t)$—координаталари x, y, z бўлган нуқтанинг t моментдаги температураси бўлсин. Δs юзчадан ўтувчи иссиқлик тезлиги, яъни бир бирлик вақт ичида оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори ушбу (олдинги параграфнинг (1) формуласига ўхшаш)

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta s \tag{1}$$

формула билан аниқланиши тажриба йўли билан белгиланган; бунда k—қаралаётган муҳитнинг иссиқлик ўтказиш коэффициенти (буни биз бир жинсли ва изотроп деб ҳисоблаймиз), $\boldsymbol{n}$—иссиқлик ҳаракати йўналишида Δs юзчага нормал бўйича йўналган бирлик вектор. I т. VIII боб, 14-§ га асосан бундай ёзишимиз мумкин:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

бунда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — $\boldsymbol{n}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари ёки

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n}\operatorname{grad} u.$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ нинг ифодасини (1) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\Delta Q = -k\boldsymbol{n}\operatorname{grad} u\Delta s.$$

Δt вақтда Δs юзчадан оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори мана бунга тенг:

$$\Delta Q\Delta t = -k\boldsymbol{n}\operatorname{grad} u\,\Delta t\,\Delta s$$

Энди параграф бошида қўйилган масалага қайтамиз. Қаралаётган муҳитда S сирт билан чегараланган кичик V ҳажмни ажратамиз. S сиртдан оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори:

$$Q = -\Delta t\iint_S k\boldsymbol{n}\operatorname{grad} u\,ds, \tag{2}$$

бунда n вектор S сиртга ташқи нормал бўйича йўналган бирлик вектор. (2) формуланинг Δt вақтда V ҳажмга келиб кирувчи (ёки V ҳажмдан чиқиб кетувчи) иссиқлик миқдорини бериши равшан. V ҳажмга кирувчи иссиқлик миқдори бу ҳажмдаги модда температурасини кўтаришга кетади.

Δv элементар ҳажмни қараймиз. Δt вақтда унинг температураси Δu га кўтарилган бўлсин. Δv элемент температурасини шу тариқа кўтаришга сарф бўлган иссиқлик миқдори қуйидагига тенг бўлиши равшан:

$$c\Delta v\rho\Delta u \approx c\Delta v\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

бунда c—модданинг иссиқлик сиғими, ρ—зичлиги. Δt вақтда V ҳажмда температура кўтарилишига сарф бўлган иссиқликнинг умумий миқдори бундай бўлади:

$$\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Аммо бу V ҳажмга Δt вақтда кирган иссиқликдир; бу иссиқлик миқдори (2) формула билан аниқланган. Шундай қилиб, ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$-\Delta t\iint\limits_S kn\,\mathrm{grad}\,u\,ds=\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv.$$

Δt га қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-\iint\limits_S kn\,\mathrm{grad}\,u\,ds=\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv. \tag{3}$$

Бу тенгликнинг чап томонида турган сирт интегралини $F = k\,\mathrm{grad}\,u$ деб фараз қилиб, Остроградский формуласи (XV боб 8-§ га қаранг) бўйича алмаштирамиз;

$$\iint\limits_S (k\,\mathrm{grad}\,u)n\,ds=\iiint\limits_V \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\,dv.$$

(3) тенгликнинг чап томонида турган икки каррали интегрални уч каррали интеграл билан алмаштириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$-\iiint\limits_V (\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)\,dv=\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dv$$

ёки

$$\iiint\limits_V\left[\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u)+c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]dv=0. \tag{4}$$

Чап томондаги уч каррали интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани (XIV боб, 12- § га қаранг) татбиқ қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left[\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) + c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x=x_1,\quad y=y_1,\quad z=z_1} = 0, \tag{5}$$

бунда $P(x_1, y_1, z_1)$ нуқта—V ҳажмдаги бирор нуқта.

Иссиқлик тарқалаётган уч ўлчовли фазода биз ихтиёрий V ҳажмни ажратишимиз мумкин бўлгани учун ва (4) тенгламада интеграл остидаги функцияни узлуксиз функция деб фараз қилганимиз учун (5) тенглик фазонинг ҳар бир нуқтасида бажарилади. Шундай қилиб,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u). \tag{6}$$

Аммо

$$k\operatorname{grad} u = k\frac{\partial u}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{k}$$

ва

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

(XV боб, 8-§ га қаранг). Бу қийматни (6) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Агар k—ўзгармас бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) = k\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ва бу ҳолда (6) тенглама қуйидагини беради:

$$-c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ёки, $-\frac{k}{c\rho} = a^2$ деб фараз қилсак, у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{8}$$

(8) тенглама қисқача бундай ёзилади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u,$$

бунда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — Лаплас оператори. (8) тенглама *фазода иссиқлик ўтказиш тенгламасидир*. Бунинг қўйилган масалага жавоб берадиган биргина ечимини топиш учун четки шартларни бериш зарур.

Сирти σ дан иборат бўлган Ω жисмни олайлик. Бу жисмда иссиқликнинг тарқалиш процесси қаралади. Бошланғич моментда жисмнинг температураси берилган. Бу $t=0$ *бошланғич шартда* ечимнинг қиймати маълум эканига мос келади:

$$u(x,\ y,\ z,\ 0)=\varphi(x,\ y,\ z). \tag{9}$$

Бундан ташқари ихтиёрий вақт моменти t да жисм сиртининг ҳар қандай M нуқтасидаги температура маълум бўлиши керак—*чегаравий шарт*:

$$u(M,\ t)=\psi(M,\ t). \tag{10}$$

(Бошқа чегаравий шартлар бўлиши ҳам мумкин.)

Агар изланаётган $u(x,\ y,\ z,\ t)$ функция z га боғлиқ бўлмаса, бу температура z га боғлиқ эмаслигига тўғри келади, у ҳолда ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

— *текисликда иссиқлик тарқалиш тенгламаси.* Агар чегараси C бўлган текис D соҳада иссиқлик тарқалиши қаралса, у ҳолда (9) ва (10) га ўхшаш четки шартлар бундай ифодаланади:

$$u(x,\ y,\ 0)=\varphi(x,\ y),\quad u(M,\ t)=\psi(M\ ,t),$$

бунда φ ва ψ—берилган функциялар, M эса C чегарадаги нуқта.

Агарда u функция z га ҳам, y га ҳам боғлиқ бўлмаса, у ҳолда ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

— *стерженда иссиқлик тарқалиш тенгламаси.*

6- §. Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун биринчи четки масалани чекли айирмалар усули билан ечиш

Оддий дифференциал тенгламалардаги каби чекли айирмалар усули билан хусусий ҳосилали тенгламаларни ечишда ҳосилалар мос айирмалар билан алмаштирилади (392-расм):

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\approx\frac{u(x+h,\ t)-u(x,\ t)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\approx\frac{1}{h}\left[\frac{u(x+h,\ t)-u(x,\ t)}{h}-\frac{u(x,\ t)-u(x-h,\ t)}{h}\right] \tag{1}$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+h,t)-2u(x,\ t)+u(x-h,\ t)}{h^2}; \tag{2}$$

шунга ўхшаш

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,\ t+l) - u(x,\ t)}{l}. \qquad (3)$$

Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун биринчи четки масала қуйидагича ифодаланади (4-§ га қаранг). Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4)$$

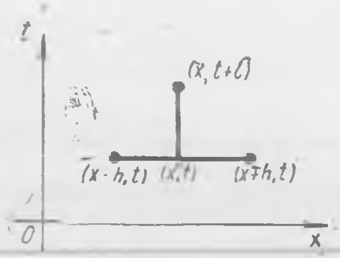
тенгламанинг

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \qquad (5)$$

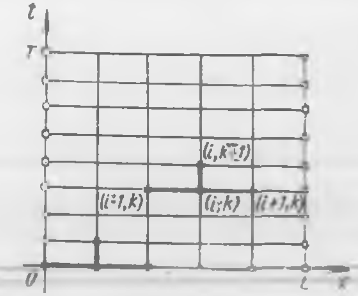
$$u(0,\ t) = \psi_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (6)$$

$$u(l,\ t = \psi_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (7)$$

четки шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилади, яъни агар изланаётган функциянинг қийматлари $t = 0$, $x = 0$, $x = L$, $t = T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакнинг учта $t = 0$, $x = 0$, $x = L$ томонида берилган бўлса, тўғри тўртбурчакдаги $u(x,\ t)$ ечимни топиш талаб этилади (393-расм).



392- расм.



393-расм.

Соҳамизни

$$x = ih, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$t = kl, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

тўғри чизиқлардан тузилган тўр билан қоплаймиз ва тўрнинг тугунларида, яъни бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталарида ечимнинг тақрибий қийматларини аниқлаймиз. $u(ih,\ kl) = u_i k$ белгилашни киритамиз. (4) тенглама ўрнига унга мос чекли айирмалар тенгламасини $(ih,\ kl)$ нуқталар учун ёзамиз. (3) ва (2) формулаларга мувофиқ қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{u_{i,\ k+1} - u_{i,\ k}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,\ k} - 2u_{i,\ k} + u_{i-1,\ k}}{h^2}. \qquad (8)$$

Бундан $u_{i,\,k+1}$ ни топамиз:

$$u_{i,\,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2l}{h^2}\right)u_{i,\,k} + a^2\frac{l}{h^2}(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}). \qquad (9)$$

(9) формуладан, агар k қаторда учта қиймат $u_{i,\,k}$, $u_{i+1,\,k}$, $u_{i-1,\,k}$ маълум бўлса, у ҳолда $u_{i,\,k+1}$ нинг қиймати $(k+1)$-қаторда топилиши келиб чиқади. Бизга $t=0$ тўғри чизиқдаги барча қийматлар маълум ((5) формулага қаранг). (9) формулага кўра $t=l$ кесманинг барча ички нуқталаридаги қийматларни аниқлаймиз. Бу кесманинг четки нуқталаридаги қийматлар бизга (6) ва (7) формулаларга асосан маълум. Шундай қатор кетидан қатор олиб биз изланаётган ечим қийматларини тўрнинг барча тугунларида аниқлаймиз.

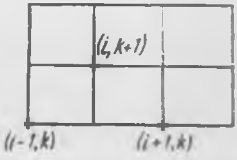
(9) формула бўйича ечимнинг тақрибий қийматини h ва l қадамлар ихтиёрий муносабатида эмас, балки $l \leqslant \frac{h^2}{2a^2}$ бўлган ҳолдагина ҳосил қилиш мумкинлигини исбот қилиб бўлади. Агар l қадам t ўқ бўйича

$$1 - \frac{2a^2l}{h^2} = 0 \quad \text{ёки} \quad l = \frac{h^2}{2a^2}$$

бўладиган қилиб танланса, (9) формула жуда соддалашади. Бу ҳолда (9) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}). \qquad (10)$$

Бу формула ҳисоблаш учун анча қулай (394-расм). Кўрсатилган усул билан тўрнинг тугунларидаги ечим аниқланади. Тўрнинг тугунлари орасидаги ечимнинг қийматини, масалан, фазодаги ҳар бир учта $(x,\ t,\ u)$ нуқта орқали текислик ўтказиб экстраполяция билан ҳосил қилиш мумкин. (10) формула ва шундай экстраполяция қилиш йўли билан ҳосил қилинган ечимни $u_h(x,\ t)$ билан белгилаймиз.



394-расм.

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,\ t) = u(x,\ t)$$

эканини исбот қилиш мумкин, бунда $u(x,\ t)$—масаламизнинг ечими. Яна

$$|u_h(x,\ t) - u(x,\ t)| < Mh^2,$$

эканини ҳам исботлаш мумкин*), бунда M—ўзгармас сон бўлиб h га боғлиқ эмас.

---

*) Бу масаланинг тўлароқ баёнини, масалан, ушбу китоблардан қаранг: Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в четных производных. Гостехиздат, 1951; Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений, И.Л. 1953.

7-§. Иссиқликнинг чегараланмаган стерженда тарқалиши

Бошланғич моментда температура чегараланмаган стерженнинг турли кесимларида берилган бўлсин. Вақтнинг кейинги моментларида стерженда температура тарқалишини аниқлаш талаб этилади. Иссиқликнинг чегараланмаган стерженда тарқалиш масаласига стержень анча узун бўлиб, қаралаётган вақт моментларида стерженнинг ички нуқталаридаги температура стержень учларидаги шартлар билан кам боғланган ҳолдаги физик масалалар келтирилади.

Агар стержень Ox ўқ билан устма-уст тушса, у ҳолда масала математик усулда қуйидагича ифодаланади. Ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

тенгламанинг $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ соҳада

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) \tag{2}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечимни топиш учун ўзгарувчиларни ажратиш методини татбиқ қиламиз (3-§ га қаранг), яъни (1) тенгламанинг хусусий ечимини икки функция кўпайтмаси шаклида топамиз:

$$u(x,\ t) = X(x)T(t). \tag{3}$$

Буни (1) тенгламага қўйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$$

ёки

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{4}$$

Бу нисбатларнинг ҳар бири x га ҳам, t га ҳам боғлиқ бўла олмайди, шунинг учун уларни ўзгармас $-\lambda^2$ га тенглаймиз*. (4) тенгликлардан иккита тенглама ҳосил қиламиз:

$$T' + a^2\lambda^2T = 0, \tag{5}$$

$$X'' + \lambda^2X = 0. \tag{6}$$

Буларни ечиб,

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2t}, \qquad X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

ни топамиз. Буларни (3) га қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u_\lambda\,(x,\ t) = e^{-a^2\lambda^2t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{7}$$

(ўзгармас C сон $A\ (\lambda)$ ва $B(\lambda)$ га киритилган).

---

*) Масаланинг маъносига кўра агар $\varphi(x)$ чегараланган бўлса, $T(t)$ функция ҳар қандай t да чегараланган бўлиши керак, шунга кўра T'/T нисбат манфий бўлиши керак. Шунинг учун биз $-\lambda^2$ деб ёзамиз.

λ нинг ҳар бир қиймати учун (7) кўринишдаги ечимни ҳосил қиламиз.

λ нинг ҳар бир қиймати учун ихтиёрий ўзгармас A ва B сонлар маълум қийматларга эга. Шунинг учун A ва B ни λ нинг функциялари деб ҳисоблаш мумкин. (7) кўринишдаги ечимлар йиғиндиси ҳам (1) тенглама чизиқли тенглама экаллиги сабабли ечим бўлади:

$$\sum_{\lambda} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x].$$

(7) ифодани λ параметр бўйича 0 дан ∞ гача чегараларда интеграллаб,

$$u(x,\ t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda \tag{8}$$

ни ҳосил қиламиз. Агар $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ шундай бўлсаки, бу интеграл, унинг t га нисбатан ҳосиласи ва X га нисбатан иккинчи ҳосиласи мавжуд бўлиб, улар интегрални t ва x бўйича дифференциаллаш йўли билан ҳосил қилинса, (8) даги $u(x,\ t)$ функция ечим бўлади. $A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ ни $u(x,\ t)$ ечим (2) шартни қаноатлантирадиган қилиб танлаб оламиз. (8) тенгликда $t = 0$ фараз қилиб, (2) шартга мувофиқ

$$u(x,\ 0) = \varphi(x) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda \tag{9}$$

ни ҳосил қиламиз. Энди $\varphi(x)$ функцияни Фурье интеграли билан тасвирлаб бўлади деб фараз қиламиз (XVII боб 13-§ га каранг):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)d\alpha\right)d\lambda$$

ёки

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda. \tag{10}$$

(9) ва (10) тенгликларнинг ўнг томонларини таққослаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha, \\ B(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

$A(\lambda)$ ва $B(\lambda)$ нинг топилган ифодаларини (8) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\lambda x\right]d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\Bigg[\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x)d\alpha\Bigg]\times$$

$$\times\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)d\alpha\right)d\lambda$$

ёки интеграллаш тартибини алмаштириб охирги натижани ҳосил қиламиз:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda\right)\right]d\alpha. \qquad (12)$$

Ана шунинг ўзи қўйилган масаланинг ечимидир.

(12) формулани ўзгартирамиз. Кичик қавслар ичидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta\,z\,dz. \qquad (13)$$

Интегрални бундай алмаштириш

$$a\lambda\sqrt{t}=z,\qquad \frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\beta \qquad (14)$$

ўрнига қўйиш йўли билан бажарилади. Бундай **белгилаймиз:**

$$K(\beta)=\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta\,z\,dz. \qquad (15)$$

Буни дифференциаллаб*)

$$K'(\beta)=-\int_0^\infty e^{-z^2}z\sin\beta\,z\,dz$$

ни ҳосил қиламиз. Буни бўлаклаб интеграллаб

$$K'(\beta)=\frac{1}{2}[e^{-z^2}\sin\beta z]_0^\infty-\frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-z^2}\cos\beta\,z\,dz$$

ни ёки

$$K'(\beta)=-\frac{\beta}{2}K(\beta)$$

---

*) Дифференциаллашнинг мумкинлигини асослаш осон.

ни топамиз. Бу дифференциал тенгламани интеграллаб,

$$K(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}} \tag{16}$$

ни ҳосил қиламиз. Ўзгармас C сонни аниқлаймиз. (15) дан

$$K(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

экани келиб чиқади (XIV боб 5-§ га қаранг). Демак, (16) тенгликда

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

бўлиши керак. Шундай қилиб,

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

(15) интегралнинг (17) қийматини (13) га қўямиз:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

β ўрнига унинг (14) ифодасини қўйиб, (13) интегралнинг қийматини ҳосил қиламиз:

$$\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}. \tag{18}$$

Интегралнинг бу ифодасини (12) ечимга қўйиб, охирги натижани ҳосил қиламиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\,e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha. \tag{19}$$

Пуассон интеграли деб аталган бу интеграл иссиқликнинг чегараланмаган стерженда тарқалиши ҳақида қўйилган масаланинг ечимидан иборат.

Изоҳ. Агар $\varphi(x)$ функция чексиз $(-\infty, \infty)$ интервалда чегараланган бўлса, (19) интеграл билан аниқланган $u(x, t)$ функция (1) тенгламанинг ечими эканлигини ва у (2) шартни қаноатлантиришини исбот қилиш мумкин.

(19) формуланинг физик маъносини аниқлаймиз. Ушбу функцияни қараймиз:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} -\infty < x < x_0 & \text{бўлганда } 0, \\ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x & \text{бўлганда } \varphi(x), \\ x_0 + \Delta x < x < \infty & \text{бўлганда } 0. \end{cases} \tag{20}$$

Бу ҳолда

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2t}} d\alpha \tag{21}$$

функция (1) тенгламанинг $t = 0$ бўлганда $\varphi^*(x)$ қийматни оладиган ечимидир.

(20) ни эътиборга олиб, бундай ёзишимиз мумкин:

$$u^*(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Кейинги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u^*(x, t) = \frac{\varphi(\xi)\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}}, \qquad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x. \tag{22}$$

Агар $t = 0$ да $[x_0, x_0 + \Delta x]$ кесмадан ташқари стерженнинг ҳамма жойида температура $u^* = 0$ бўлиб, бу кесмада температура $\varphi(x)$ га тенг бўлса, (22) формула стержень нуқтасининг исталган вақт моментидаги температураси қийматини беради. (22) кўринишдаги температуралар йиғиндиси ҳам (19) ечимни беради.

Агар ρ—стерженнинг чизиқли зичлиги, c—материалнинг иссиқлик сиғими бўлса, $t=0$ да $[x_0, x_0 + \Delta x]$ элементдаги иссиқлик миқдори бундай бўлади:

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\Delta x \rho c. \tag{23}$$

Энди

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}} \tag{24}$$

функцияни қараймиз. Буни (22) формуланинг ўнг томони билан (23) ни ҳисобга олган ҳолда таққослаб, агар $t = 0$ да ξ кесимда ($\Delta x \to 0$ даги лимит ҳол) $Q = c\rho$ иссиқлик миқдори иссиқликнинг оний манбаи бўлган бўлса, у ҳар қандай t вақт моментида стерженнинг исталган нуқтасидаги температура қийматини беради дейишади.

8-§. Лаплас тенгламасининг ечимларини текширишга келтирадиган масалалар. Четки масалаларни ифодалаш

Бу параграфда Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

ни ечишга олиб келадиган баъзи бир масалалар қаралади.

Юқорида кўрсатилганидек, (1) тенгламанинг чап томони бундай белгиланади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u$$

бунда Δ — *Лаплас оператори* дейилади. Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи u функциялар *гармоник функциялар* деб аталади.

1. **Бир жинсли жисмда температуранинг стационар (ўрнашган) тақсимоти.** σ сирт билан чегараланган бир жинсли Ω жисм берилган бўлсин. Жисмнинг турли нуқталаридаги температура

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

тенгламани қаноатлантириши 5-§ да кўрсатилган эди. Агар процесс ўрнашган бўлса, яъни температура вақтга боғлиқ бўлмасдан, балки фақат жисм нуқталарининг координаталарига боғлиқ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ва, демак, температура Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

ни қаноатлантиради. Жисмнинг температурасини бу тенгламадан бир қийматли ҳолда аниқлаш учун σ сиртдаги температурани билиш керак. Шундай қилиб, (1) тенглама учун четки масала қуйидагича ифодаланади:

Ω ҳажм ичида (1) тенгламани қаноатлантирувчи ва сиртнинг ҳар бир M нуқтасида берилган

$$u\,|_\sigma = \psi(M) \qquad (2)$$

қийматни қабул қилувчи $u\ (x, y, z)$ функция топилсин. Бу масала *Дирихле масаласи* ёки (1) тенглама учун *биринчи четки масала* деб аталади.

Агар жисм сиртидаги температура номаълум бўлиб, сиртнинг ҳар бир нуқтасида иссиқлик оқими маълум бўлса ва у $\frac{\partial u}{\partial n}$ га пропорционал бўлса (5-§ га қаранг), у ҳолда σ сиртда (2) четки шарт ўрнига ушбу шартга эга бўламиз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = \psi^*(M). \qquad (3)$$

(1) тенгламанинг (3) четки шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи *Нейман масаласи* ёки *иккинчи четки масала* деб аталади.

Агар температура тарқалиши C контур билан чегараланган D текис соҳада қаралса, у ҳолда u функция иккита x ва y ўзгарувчига боғлиқ бўлади, ҳамда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

тенгламани қаноатлантиради; бу тенглама текисликдаги *Лаплас тенгламаси* дейилади. Бу тенглама учун (2) ёки (3) четки шартлар C контурда бажарилиши керак.

II. Суюқлик ёки газнинг потенциал оқими. Узилмаслик тенгламаси. σ сирт билан чегараланган Ω ҳажм ичида (Ω чегараланмаган бўлиши ҳам мумкин) суюқлик оқадиган бўлсин. ρ—суюқликнинг зичлиги бўлсин. Суюқликнинг тезлигини

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \tag{5}$$

билан белгилаймиз, бунда v_x, v_y, v_z вектор $\mathbf{v}$ нинг координата ўқларидаги проекциялари. Ω жисмда S сирт билан чегараланган кичик ω ҳажм ажратамиз. Δt вақтда S сиртнинг ҳар бир Δs элементи орқали

$$\Delta Q = \rho \mathbf{vn} \Delta s \Delta t$$

миқдорда суюқлик оқиб ўтади, бунда $\mathbf{n}$—бирлик вектор бўлиб, S сиртга ташқи нормаль бўйича йўналган. ω ҳажмга оқиб кирган (ёки ω ҳажмдан оқиб чиққан) суюқликнинг умумий миқдори Q ушбу интеграл билан ифода этилади:

$$Q = \Delta t \iint_S \rho \mathbf{vn} ds \tag{6}$$

(XV боб 5 ва 6-§ га қаранг). t моментда ω ҳажмдаги суюқлик миқдори бундай бўлган:

$$\iiint_\omega \rho d\omega$$

Δt вақтда суюқлик миқдори, зичликнинг ўзгаришига биноан, ушбу миқдорга ўзгаради:

$$Q = \iiint_\omega \Delta\rho d\omega \approx \Delta t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{7}$$

ω ҳажмда манбалар йўқ деб фараз қилиб, бу ўзгариш миқдори (6) тенглик билан аниқланган суюқликнинг оқиб киришидан келиб чиқади деган хулосага келамиз. (6) ва (7) тенгликларнинг ўнг томонларини тенглаб ва Δt га қисқартириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_S \rho \mathbf{vn}\, ds = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{8}$$

Чап томондаги икки каррали интегрални Остроградский формуласига кўра алмаштирамиз (XV боб 8-§). У ҳолда (8) тенглик бундай кўринишни олади:

$$\iiint\limits_{\omega} \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\,\omega = \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega$$

ёки

$$\iiint\limits_{\omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})\right) d\omega = 0.$$

ω ҳажмнинг ихтиёрий эканлигига ва интеграл остидаги функциянинг узлуксизлигига асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{9}$$

ёки

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z). \tag{9'}$$

Ана шу тенглама *сиқиладиган суюқлик оқимининг узилмаслик тенгламасидир.*

Изоҳ. Баъзи масалаларда, масалан нефть ва газнинг ер остидаги ғалвирак (ғовак) муҳитда қудуққа томон ҳаракати процессини қарашда

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

деб қабул қилиш мумкин, бунда p—босим, k—ўтказувчанлик коэффициенти, ва

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t},$$

$\lambda = \text{const}$. Буни (9) узилмаслик тенгламасига қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lambda \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} p) = 0$$

ёки

$$-\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{10}$$

Агар k ўзгармас сон бўлса, бу тенглама

$$\frac{\partial p}{\partial t} - -\frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \tag{11}$$

кўринишни олади ва биз иссиқлик ўтказиш тенгламасига келамиз.

(9) тенгламага қайтамиз. Агар суюқлик сиқилмайдиган бўлса, у ҳолда $\rho=\text{const}$, $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ва (9) тенглама бундай кўринишни олади:

$$\operatorname{div} v=0.$$

Агар ҳаракат потенциал бўлса, яъни v вектор бирор φ функциянинг градиенти бўлса:

$$v=\operatorname{grad}\varphi,$$

у ҳолда (12) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=0$$

ёки

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{13}$$

яъни φ тезликнинг потенциал функцияси Лаплас тенгламасини қаноатлантириши керак. Кўп масалаларда, масалан, фильтрланиш (сузилиш) масалаларида

$$v=-k_1\operatorname{grad}p$$

деб қабул қилиш мумкин, бунда p—босим, k_1—ўзгармас сон; у ҳолда **босимни аниқловчи** Лаплас тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0. \tag{13$'$}$$

(13) ёки (13′) тенгламалар учун четки шартлар қуйидагилар бўлиши мумкин:

1. σ сиртда изланаётган p функциянинг қийматлари—босимлар берилади ((2) шарт). Бу Дирихле масаласи.

2. σ сиртда нормал бўйича ҳосиланинг қийматлари $\frac{\partial p}{\partial n}$ берилади—оқим сирт орқали берилади ((3) шарт). Бу Нейман масаласи.

3. σ сиртнинг бир қисмида изланаётган функция қийматлари p—босимлар берилади, яна бир қисмида эса нормал бўйича ҳосиланинг қийматлари $\frac{\partial p}{\partial n}$ —оқим сирт орқали берилади. Бу Дирихле—Нейман масаласи.

Агар ҳаракат текис-параллел ҳаракат бўлса, яъни φ (ёки p) функция z га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда чегаралари C бўлган икки ўлчовли D соҳада Лаплас тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{14}$$

(2) турдаги четки шартлар—Дирихле масаласи ёки (3) турдаги четки шартлар—Нейман масаласи C контурда берилади.

III. Стационар электр токнинг потенциали. Бирор V ҳажмни тўлдирувчи бир жинсли муҳитдан ҳар бир нуқтасидаги зичлиги $\boldsymbol{J}(x, y, z)=J_x\boldsymbol{i}+J_y\boldsymbol{j}+J_z\boldsymbol{k}$ вектор билан берилган электр токи ўтсин. Токнинг зичлиги t вақтга боғлиқ эмас деб фараз қиламиз. Бунинг устига қаралаётган ҳажмда ток манбалари йўқ деб фараз қиламиз. Демак, V ҳажм ичида ётувчи ҳар қандай ёпиқ сирт орқали $\boldsymbol{J}$ векторнинг оқими нолга тенг бўлади:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}\,ds = 0,$$

бунда $\boldsymbol{n}$—сиртга ташқи нормаль бўйича йўналган бирлик вектор. Остроградский формуласидан

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J} = 0 \qquad (15)$$

деган хулосани чиқарамиз.

Умумлашган Ом қонунига асосан, қаралаётган ўтказгич муҳитдаги электр кучи $\boldsymbol{E}$ аниқланади:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\lambda \qquad (16$$

ёки

$$\boldsymbol{J} = \lambda\boldsymbol{E},$$

бунда λ—муҳитнинг ўтказувчанлиги, биз буни ўзгармас сон деб ҳисоблаймиз.

Электромагнит майдонининг умумий тенгламаларидан келиб чиқишича, агар процесс стационар бўлса, у ҳолда векторлар майдони $\boldsymbol{E}$ уюрмасиздир, яъни $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$. Бу ҳолда суюқлик тезликлари майдонини қараганда ҳосил қилган натижаларимизга ўхшаш, векторлар майдони потенциал майдондир (XV боб 9-§ га қаранг). Шундай φ функция мавжудки,

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\varphi. \qquad (17)$$

(16) га асосан шуни ҳосил қиламиз:

$$\boldsymbol{J} = \lambda\operatorname{grad}\varphi. \qquad (18)$$

(15) ва (18) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\lambda\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad (19$$

Лаплас тенгламасини ҳосил қилдик.

Бу тенгламани мос четки шартларда ечиб, φ функцияни топамиз, (18) ҳамда (17) формулаларга асосан эса $\boldsymbol{J}$ токни ва электр кучи $\boldsymbol{E}$ ни топамиз.

9-§. Цилиндрик координаталардаги Лаплас тенгламаси. Ички ва ташқи айланаларда изланаётган функциянинг қийматлари ўзгармас бўлганда ҳалқа учун Дирихле масаласини ечиш

$u(x, y, z)$—уч ўзгарувчининг гармоник функцияси бўлсин. У ҳолда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Текширишга (r, φ, z) цилиндрик координаталарни киритамиз:

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z,$$

бундан

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad z=z. \tag{2}$$

x, y, z эркли ўзгарувчиларни r, φ ва z билан алмаштириб, u^* функцияга келамиз:

$$u(x, y, z)=u^*(r, \varphi, z).$$

r, φ, z аргументларнинг функцияси бўлган $u^*(r, \varphi, z)$ қаноатлантирадиган тенгламани топамиз. Бунинг учун ушбу ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{dx}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \tag{3}$$

шунга ўхшаш

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u^*}{\partial\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \tag{4}$$

бундан ташқари

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \tag{5}$$

(2) тенгликлардан

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

учун ифодалар топамиз. (3), (4) ва (5) тенгликларнинг ўнг томонларини қўшиб ва йиғиндини нолга тенглаб (чунки (1) га мувофиқ бу тенгликлар чап қисмларининг йиғиндиси нолга тенг), ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}=0. \tag{6}$$

Ана шунинг ўзи *цилиндрик координаталардаги Лаплас тенгламасидир.*

Агар u функция z га боғлиқ бўлмай, балки x ва y га боғлиқ бўлса, у ҳолда r ва φ га боғлиқ бўлган u^* функция ушбу тенгламани қаноатлантиради:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}=0, \tag{7}$$

бунда r ва φ — текисликдаги қутб координаталар.

Энди K_1: $x^2+y^2=R_1^2$ ва K_2: $x^2+y^2=R_2^2$ айланалар билан чегараланган D соҳада (ҳалқада) Лаплас тенгламасининг қуйидаги чегаравий қийматларни қабул қиладиган ечимини топамиз:

$$u|_{K_1}=u_1, \tag{8}$$

$$u|_{K_2}=u_2, \tag{9}$$

бунда u_1 ва u_2—ўзгармас сонлар.

Масалани қутб координаталарда ечамиз. φ га боғлиқ бўлмаган ечимни излаш мақсадга мувофиқ экани равшан. Бу ҳолда (7) тенглама бундай кўринишни олади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Бу тенгламани интеграллаб, ушбуни топамиз:

$$u=C_1\ln r+C_2. \tag{10}$$

C_1 ва C_2 ни (8) ва (9) шартлардан аниқлаймиз:

$$u_1=C_1\ln R_1+C_2, \qquad u_2=C_1\ln R_2+C_2.$$

Бу тенгликлардан қуйидагиларни топамиз:

$$C_1=\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \qquad C_2=u_1-(u_2-u_1)\frac{\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{u_1\ln R_2-u_2\ln R_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

C_1 ва C_2 нинг қийматларини (10) формулага қўйиб, охирги натижани ҳосил қиламиз:

$$u=u_1+\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}(u_2-u_1)=\frac{u_2\ln\frac{r}{R_1}-u_1\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \tag{11}$$

Изоҳ. Биз ҳақиқатда $r=R_1$, $r=R_2$, $z=0$, $z=H$ сиртлар билан (цилиндрик координаталарда) чегараланган соҳада Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи ва қуйидаги

$$u|_{r=R_1}=u_1, \qquad u|_{r=R_2}=u_2$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H}=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи u функцияни топиш масаласини ечдик. (Дирихле—Нейман масаласи.) Изланаётган ечимни z га ҳам, φ га ҳам боғлиқ бўлмаслиги ва (11) формула билан берилиши равшан.

10-§. Дирихле масаласини доира учун ечиш

Oxy текисликда маркази координаталар бошида бўлган R радиусли доира олинган бўлиб, унинг айланасида бирор $f(\varphi)$ функция берилган бўлсин, бунда φ—қутб бурчаги. Доирада ва унинг чегарасида узлуксиз бўлиб, доира ичида Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

ни қаноатлантирадиган ҳамда доира айланасида берилган

$$u\big|_{r=R}=f(\varphi) \tag{2}$$

қийматни қабул қиладиган $u(r,\ \varphi)$ функцияни топиш талаб қилинади. Масалани қутб координаталарида ечамиз. (1) тенгламани шу координаталарда кўчириб ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$$

ёки

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \tag{1'}$$

Ечимни

$$u=\Phi(\varphi)R(r) \tag{3}$$

фараз қилиб, ўзгарувчиларни ажратиш усули билан излаймиз. (3) дан u нинг ифодасини (1′) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r^2\Phi(\varphi)R''(r)+r\Phi(\varphi)R'(r)+\Phi''(\varphi)R(r)=0$$

ёки

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-k^2. \tag{4}$$

Бу тенгликнинг чап қисми r га, ўнг қисми эса φ га боғлиқ эмас, шунинг учун улар ўзгармас сонга тенг, биз уни—k^2 билан белгилаймиз. Шундай қилиб, (4) тенглик қуйидаги икки тенгламани беради:

$$\Phi''(\varphi)+k^2\Phi(\varphi)=0, \tag{5}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)-k^2R(r)=0. \tag{5'}$$

(5) тенгликнинг умумий ечими бундай бўлади:

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{6}$$

(5′) тенгликнинг ечимини $R(r) = r^m$ формада излаймиз. $k(r) = r^m$ ни (5) га қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r^2 m\ (m-1)\, r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

ёки

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Шундай қилиб, иккита хусусий чизиқли эркли r^k ва r^{-k} ечим мавжуд. (5) тенгламанинг умумий ечими бундай бўлади:

$$R = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{7}$$

(6) ва (7) ифодаларни (3) га қўямиз:

$$u_k = (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}). \tag{8}$$

(8) функция k нинг нолдан фарқли ҳар қандай қийматида (1′) тенгламанинг ечими бўлади. Агар $k=0$ бўлса, у ҳолда (5) ва (5′) тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\Phi'' = 0,\ rR''(r) + R'(r) = 0,$$

ва демак,

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln r). \tag{8′}$$

Ечим φ нинг даврий функцияси бўлиши керак, чунки r нинг биргина қийматида φ ва $\varphi + 2\pi$ учун ечимнинг биргина қийматига эга бўлишимиз керак, бунга сабаб шуки, доиранинг биргина нуқтаси қаралмоқда. Шунинг учун (8′) формулада $B_0 = 0$ бўлиши кераклиги равшан. Бундан ташқари биз доирада узлуксиз ва чекли ечимни излаймиз. Демак, доира марказида $r=0$ да ечим чекли бўлиши ва шунга кўра (8′) формулада $D_0 = 0$ бўлиши, (8) формулада эса $D_k = 0$ бўлиши керак.

Шундай қилиб, (8′) нинг ўнг томони A_0C_0 кўпайтмага айланади, уни $A_0/2$ билан белгилаймиз. Демак,

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{8″}$$

Масаламиз ечимини, ечимлар йиғиндиси ўз навбатида яна ечим бўлгани учун, (8) кўринишдаги ечимлар йиғиндиси шаклида тузамиз. Йиғинди φ нинг даврий функцияси бўлиши керак. Агар ҳар бир қўшилувчи φ нинг даврий функцияси бўлса, бу шундай бўлади. Бунинг учун k бутун қийматлар қабул қилиши керак (шунга ҳам эътибор беришимиз лозимки, агар (4) тенгликнинг қисмларини $+k^2$ сонга тенглаб олганимизда эди, бу ҳолда даврий ечим ҳосил қилмаган бўлар эдик). Биз фақат мусбат

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

қийматлар билан чегараланишимиз мумкин, чунки A, B, C, D ўзгармас сонлар ихтиёрий бўлгани учун k нинг манфий қийматлари янги хусусий ечимларни бермайди. Шундай қилиб,

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\, r^n \tag{9}$$

(ихтиёрий ўзгармас C_n сони A_n ва B_n га киритилган). Энди ихтиёрий ўзгармас A_n ва B_n сонларни (2) четки шартни қаноатлантирадиган қилиб оламиз. (9) тенгликка $r = R$ ни қўйиб, (2) шартга асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)\, R^n. \tag{10}$$

(10) тенглик ўринли бўлиши учун $f(\varphi)$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Фурье қаторига ёйилиши ва A_nR^n ҳамда B_nR^n унинг Фурье коэффициентлари бўлиши лозим. Демак, A_n ва B_n ушбу формулалар билан аниқланиши керак:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \qquad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt. \tag{11}$$

Коэффициентлари (11) формулалар билан аниқланган (9) қатор, агар уни r бўйича ва φ бўйича икки марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин бўлса, масаламизнинг ечими бўлади (аммо буни исбот қилганимиз йўқ). (9) формулани алмаштирамиз. A_n ва B_n ўрнига уларнинг (11) ифодаларини қўйиб ва тригонометрик алмаштиришларни бажариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t-\varphi) dt \left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) \right] dt. \tag{12}$$

Ўрта қавслардаги ифодани алмаштирамиз[*)]

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\ (t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}] =$$

[*)] Формулани чиқаришда биз махражининг модули бирдан кичик комплекс сондан иборат бўлган геометрик прогрессиянинг йиғиндисини аниқлаймиз. Геометрик прогрессия йиғиндисининг бу формуласи ҳақиқий сонлар бўлган ҳолдаги каби чиқарилади. Бу ҳолда ҳақиқий аргументнинг комплекс функцияси лимитининг таърифини эътиборга олиш лозим. Бунда n аргументдир (I том VII боб, 4-§ га қаранг).

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\right] =$$

$$= 1 + \frac{\frac{r}{R}\,e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}\,e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R}\,e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{k}\,e^{-i(t-\varphi)}} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \qquad (13)$$

формулада ўрта қавслар ичидаги ифодани (13) ифода билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$u(r,\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2r\,R\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (14)$$

(14) формула *Пуассон интеграли* дейилади. Бу формулани анализ қилиш йўли билан, агар $f(\varphi)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда (14) интеграл билан аниқланган $u(r,\ \varphi)$ функция (1′) тенгламани қаноатлантириши ҳамда $r \to R$ да $u(r,\ \varphi) \to f(\varphi)$ бўлиши, яъни $u(r,\ \varphi)$ Дирихленинг доира учун қўйилган масаласининг ечими эканлиги исботланади.

11- §. Дирихле масаласини чекли айирмалар усули билан ечиш

Oxy текисликда C контур билан чегараланган D соҳа берилган бўлсин. C контурда узлуксиз f функция берилган бўлсин. Лапласнинг тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

нинг чегаравий

$$u\Big|_C = f \qquad (2)$$

шартни қаноатлантирувчи тақрибий ечимини топиш талаб қилинади.

Иккита

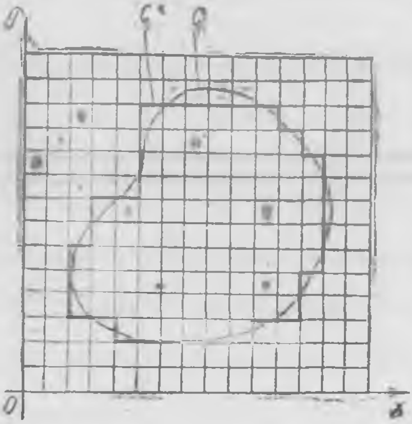
$$x = ih \text{ ва } y = kh \qquad (3)$$

тўғри чизиқлар оиласини ўтказамиз, бунда h — берилган сон, i ва k кетма-кет бутун қийматлар қабул қилади. Бу ҳолда D соҳа *тўр* билан қопланган деб атаймиз. Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини *тўрнинг тугунлари* деймиз.

Изланаётган функциянинг

$$x = ih, \quad y = kh$$

нуқтадаги тақрибий қийматини $u_{i,k}$ билан белгилаймиз, яъни $u(ih, kh) = u_{i,k}$. D соҳани бутунлай D соҳада ётувчи ҳамма квадратлардан ва C нинг чегаралари билан кесишувчи баъзи квадратлардан ташкил топувчи (кейингиларни ҳисобга олмаслик ҳам мумкин) тўрчали D^* соҳа билан аппроксимациялаймиз[*] (тақрибий тасвирлаймиз). Бунда C контур (3) типдаги тўғри чизиқлар кесмаларидан ташкил топган C^* контур билан аппроксимацияланади. C^* контурда ётган ҳар бир тугунда C контурнинг энг яқин нуқтасидаги f функциянинг қийматига тенг f^* қийматни берамиз (395- расм).

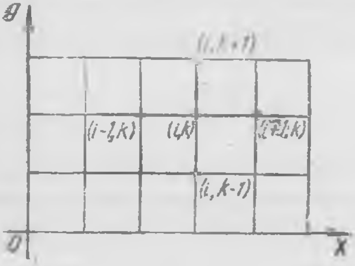


395- расм.

Изланган функциянинг қийматларини фақат тўрнинг тугунларидагина қараймиз. 6- § да айтиб ўтилганидек, қаралаётган тақрибий усулда ҳосилалар чекли айирмалар билан алмаштирилади:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\ y=kh} = \frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{i,\,k} + u_{i,\,k-1}}{h^2}.$$



396- расм.

(1) дифференциал тенглама қуйидаги *айирмали тенглама* билан ёки *чекли айирмалардаги тенглама* билан алмашинади (h^2 га қисқартиргандан кейин):

$$u_{i+1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i-1,\,k} + u_{i,\,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,\,k-1} = 0$$

ёки (396- расм)

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i,k+1} + u_{i-1\,k} + u_{i,\,k-1}). \tag{4}$$

---

[*] Аппроксимировать—тақрибий тасвирламоқ (*таржимон*).

Тўрнинг D соҳа ичида ётган (ва C^* нинг чегарасида ётмайдиган) ҳар бир тугуни учун (4) тенгламани тузамиз. Агар $(x = ih,\ y = kh)$ нуқта C контур нуқтаси билан қўшни бўлса, у ҳолда (4) тенгликнинг ўнг томонидаги баъзи бир қўшилувчилар f^* нинг маълум қийматларидир. Шундай қилиб, N та номаълумли, бир жинсли бўлмаган N та тенгламалар системани ҳосил қиламиз (N—D^* соҳа ичида ётган тўр тугунларининг сони).

(4) система ечимга эга эканлигини ва ечим биргина эканлигини исбот қиламиз. Бу N та номаълумли N та чизиқли тенгламалар системасидир. Агар системанинг дитерминанти нолдан фарқли бўлса, шу ҳолдагина у биргина ечимга эга. Агар бир жинсли система фақат тривиал (ноль) ечимга эга бўлсагина системанинг дитерминанти нолдан фарқлидир. Агар C контур чегарасидаги тўр тугунларида $f^* = 0$ бўлса, система бир жинсли бўлади. Биз бу ҳолда тўрнинг барча ички тугунларида $u_{i,k}$ нинг барча қийматлари нолга тенг эканини исбот қиламиз. Соҳа ичида нолдан фарқли $u_{i,\ k}$ мавжуд бўлсин. Аниқлик учун улардан энг каттаси мусбат бўлсин деб фараз қиламиз. Уни $\overline{u}_{i,k}>0$ билан белгилаймиз.

(4) формулага асосан бундай ёзамиз:

$$\overline{u}_{i,\ k}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1,\ k}+u_{i,\ k+1}+u_{i-1,\ k}+u_{i,\ k-1}\right), \qquad (4')$$

Агар бу тенгликнинг ўнг томонидаги u нинг барча қийматлари $\overline{u}_{i,k}$ нинг энг каттасига тенг бўлса, шу ҳолдагина (4′) тенглик ўринли бўлиши мумкин. Энди биз излаётган функциянинг қиймати $\overline{u}_{i,k}$ га тенг бўладиган бешта нуқтага эгамиз. Агар бу нуқталардан ҳеч бири чегаравий нуқта бўлмаса, улардан биттасини олиб ва бу нуқта учун (4) тенгликни ёзиб, бошқа нуқталарнинг бир нечасида изланаётган функциянинг қиймати $\overline{u}_{i,\ k}$ га тенг бўлишини исбот қиламиз. Шундай давом этиб, чегарагача етиб борамиз ва чегаравий нуқтада изланаётган функциянинг қиймати $\overline{u}_{i,\ k}$ га тенг бўлишини исбот қиламиз. Бу чегаравий нуқталарда $f^* = 0$ бўлишига зидлик қилади.

Соҳа ичида энг кичик манфий қиймат бор деб фараз қилиб, чегарада функциянинг қиймати манфий эканини исбот қиламиз. Бу берилган шартга зид бўлади.

Шундай қилиб, (4) система ечимга эга ва у биргинадир.

(4) системадан аниқланган $u_{i,\ k}$ қийматлар юқорида таърифланган Дирихле масаласи ечимининг тақрибий қийматидир. Агар берилган D соҳа ва берилган функция f учун Дирихле масаласининг ечими мав-

жуд бўлса (уни $u(x, y)$ билан белгилаймиз) ва агар $u_{l, k}$ (4) системанинг ечими бўлса, у ҳолда

$$|u(x, y) - y_{l, k}| < Ah^2 \qquad (5)$$

муносабатнинг ўринли бўлиши исбот қилинган, бунда A — ўзгармас ва h га боғлиқ эмас.

Эслатма. Тақрибий ечимдаги хатони баҳолаш учун қуйидаги йўл тўғри бўлса-да, аммо қатъий равишда исбот қилинмаган. $2h$ қадамдаги тақрибий ечим $u_{l, k}^{(2h)}$, h қадамдаги тақрибий ечим $u_{l, k}^{(h)}$, $u_{l, k}^{(h)}$ ечимнинг хатоси $E_h(x, y)$ бўлсин. У ҳолда тўрнинг умумий тугунларида ушбу тақрибий тенглик ўринли бўлади:

$$E_h(x, y) \approx \frac{1}{3}\left(u_{l, k}^{(2h)} - u_{l, k}^{(h)}\right).$$

Шундай қилиб, h қадамдаги тақрибий ечим хатосини аниқлаш учун $2h$ қадамдаги ечимни топиш зарур. Бу тақрибий ечимлар айирмасининг учдан бири h қадамдаги ечим хатосининг баҳосидан иборат. Бу эслатмани чекли айирмалар усули билан иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечиш учун ҳам татбиқ қилса бўлади.

XVIII БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Бир жинсли цилиндрик стерженнинг буралма тебранишлари тенгламаси чиқарилсин.

Кўрсатма. Стержендаги x абсциссали кесимда буралувчи момент $M = GI\frac{\partial\theta}{\partial x}$ формула билан аниқланади, бунда $\theta(x, t)$—t моментдаги абсциссаси x бўлган кесимнинг буралиш бурчаги, G—силжиш модули, I—стержень кўндаланг кесимининг қутбий инерция моменти. *Жав.* $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$, бунда $a^2 = \frac{GI}{k}$, k—стерженнинг битта бирлик узунлигининг инерция моменти.

2. $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ тенгликнинг ушбу

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(l, t) = 0, \; \theta(x, 0) = \varphi(x), \; \frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг,
бунда

$$0 \leqslant x < \frac{l}{2} \text{ бўлганда } \varphi(x) = \frac{2\theta_0 x}{l},$$

$$\frac{l}{2} < x < l \text{ бўлганда } \varphi(x) = -\frac{2\theta_0 x}{l} + 2\theta_0.$$

Масалага механика нуқтаи назаридан маъно берилсин. *Жав.* $\theta(x, t) =$

$$= \frac{8\theta_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{l}.$$

3. Бир жинсли цилиндрик стерженнинг узунасига тебранишлари тенгламаси чиқарилсин.

Кўрсатма. Агар $u(x, t)$ — абсциссаси x бўлган стержень кесимининг t моментдаги силжиши бўлса, у ҳолда x кесимда чўзувчи кучланиш $T = ES\dfrac{\partial u}{\partial x}$ формула билан аниқланади, бунда E—материалнинг эластиклик модули, S—стержень кўндаланг кесимининг юзи. *Жав.* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, бунда $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, ρ — стержень материали зичлиги.

4. Узунлиги $2l$ бўлган бир жинсли стержень ўзининг учларига қўйилган кучлар таъсири остида 2λ миқдорда қисқарди. $t = 0$ бўлганда унга ташқи кучларнинг таъсири бўлмаган. x абсциссали кесимининг t моментда x силжиши аниқлансин (стержень ўқи ўрта нуқтасининг абсциссаси $x = 0$). *Жав.*

$$u(x, t) = \frac{8\lambda}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

5. Узунлиги l га тенг бўлган стерженнинг бир учи бириктирилган бўлиб, иккинчи учига чўзувчи куч P таъсир этади. $t=0$ да стерженга P куч таъсир этмаса, стерженнинг узунасига тебранишлари топилсин.

Жав. $\dfrac{8Pl}{ES\pi^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}$

(E ва S нинг маъноларини 3- масаладан қаранг).

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u = (0, t) = 0, \qquad u(l, t) = A \sin \omega t, \qquad u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг. Масалага механик нуқтаи назардан маъно берилсин. *Жав.* $u(x, t) = \dfrac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} +$

$$+ \frac{2A\omega a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Кўрсатма. Ечимни иккита ечим йиғиндиси шаклида излансин:

$$u = v + w \text{ бунда } w = \frac{A \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin \frac{\omega}{a} l} \text{ ушбу}$$

$$v(0,\ t) = 0, \qquad v(l,\ t) = 0$$

$$v(x,\ 0) = -w(x,\ 0), \qquad \frac{\partial v(x,\ 0)}{\partial t} = -\frac{\partial w'x,\ 0)}{\partial t}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечим $\left(\sin\frac{\omega}{a}l \neq 0\right.$ деб фараз қилинади$\left.\right)$.

7. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(0,\ t) = 0, \qquad u(l,\ t) = 0, \qquad t > 0$

$$u(x,\ 0) = \begin{cases} 0 \leqslant x < \frac{l}{2} \text{ бўлганда } x, \\ \frac{l}{2} < x < l \text{ бўлганда } l - x, \end{cases}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. *Жав.* $u(x,\ t) =$

$$= \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Кўрсатма. Масалани ўзгарувчиларни ажратиш усули билан ечилсин.

8. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0, \qquad u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l^2}$ шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Жав. $u(x,\ t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

9. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad u(l,\ t) = u_0, \qquad u(x,\ 0) = \varphi(x)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг. Масаланинг физик маъноси кўрсатилсин. *Жав.* $u(x,\ t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\cos\frac{(n+1)\pi}{2l}x,$ бунда

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx - \frac{(-1)^n4u_0}{\pi(2n+1)}.$$

Кўрсатма. Ечимни $u = u_0 + v(x,\ t)$ формада излансин.

10. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u(0,\ t) = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -Hu\Big|_{x=l},\ u(x,0) =$ $= \varphi(x)$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг. Масаланинг физик маьноси курсатилсин. *Жав.* $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}e^{-\frac{\mu_n^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\mu_nx}{l},$

бунда $A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\mu_n x}{l}\,dx$, $p = Hl$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$

лар $\operatorname{tg}\mu = -\mu \mid p$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

Кўрсатма. $x = l$ да стерженнинг учида температураси нолга тенг бўлган муҳитда иссиқлик алмашиниши юз беради.

11. $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг

$$u(x, 0) = x\left(\frac{3}{2} - x\right), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \frac{1}{2}, \quad 0 < t < 4l$$

шартларни қаноатлантирувчи тақрибий ечими (6-§, (10) формулага кўра, $h = 0{,}2$ деб фараз қилиб) топилсин.

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 < y < \infty$ полосада $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = A\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $u(x, \infty) = 0$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Жав. $u(x, t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi x}{a}$.

Кўрсатма. Ечимни ўзгарувчиларни ажратиш усули билан излансин

13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0$ Лаплас тенгламасининг тўғри тўртбурчакдаги $0 \leqslant x < a$, $0 < y < b$ $u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = 0$, $u(0, y) = Ay(b-y)$, $u(a, y) = 0$, шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

$$Жав \quad u(x, t) = \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}.$$

14. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ тенгламанинг $x^2 + y^2 = R_1^2$ ва $x^2 + y^2 = R_2^2$ айланалар билан чегараланган ҳалқа ичида

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = +\frac{Q}{\lambda 2\pi R_1}, \qquad u\Big|_{r=R_2} = u_2$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг. Масалага гидродинамика нуқтаи назаридан маъно берилсин.

Кўрсатма. Масалани қутб координаталарда ечилсин.

Жав. $u = u_2 - \frac{Q}{2\lambda\pi}\ln\frac{R_2}{r}$.

15. $u(x, y) = e^{-y}\sin x$ функция $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

тенгламанинг $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ квадратда $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = e^{-y}\sin 1$, $u(x, 0) = \sin x$, $u(x, 1) = e^{-1}\sin x$

шартларни қаноатлантирувчи ечими экани исбот қилинсин.

16. 12—15 масалаларда Лаплас тенгламасини берилган чегаравий шартларда чекки айирмалар усули билан $h = 0{,}25$ бўлганда ечинг. Тақрибий ечимни аниқ ечим билан таққослаб кўрилсин.

XIX боб

ОПЕРАЦИОН ҲИСОБ ВА УНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

Операцион ҳисоб ҳозирги вақтда математик анализнинг муҳим соҳаларидан биридир. Физика, механика, электротехника ва бошқа фанларда турли масалаларни ечишда операцион ҳисоб методларидан фойдаланилади. Операцион ҳисоб ҳозирги замон автоматика ва телемеханикасида айниқса кенг қўлланилади. Бу бобда (дарсликнинг олдинги бобларининг материали асосида) операцион ҳисобнинг асосий тушунчалари берилади*) ва оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг операцион методлари баён қилинади.

1- §. Бошланғич функция ва унинг тасвири

Ҳақиқий ўзгарувчи t нинг $t \geqslant 0$ қийматларида аниқланган $f(t)$ функция берилган бўлсин. (Баъзан $f(t)$ функция чексиз интервал $-\infty < t < \infty$ да аниқланган, лекин $t < 0$ да $f(t) = 0$ деб ҳисоблаймиз.) $f(t)$ функция бўлакли-узлуксиз, яъни исталган чекли интервалда чекли сондаги биринчи тур узилиш нуқталарига эга деб фараз қиламиз (I том, II боб, 9-§ га қаралсин). Баъзи интегралларнинг $0 \leqslant t < \infty$ чексиз интервалда мавжудлигини таъминлаш учун $f(t)$ функцияга қўшимча шартлар қўямиз. t нинг $0 \leqslant t < \infty$ интервалдаги ҳар қандай қиймати учун

$$|f(t)| < Me^{S_0 t} \tag{1}$$

тенгсизлик қаноатланадиган M ва S_0 ўзгармас мусбат сонлар мавжуд деб фараз қиламиз.

---

*) Операцион ҳисобни ва унинг татбиқларини тўлароқ ўрганиш учун қуйидаги китобларни тавсия қилиш мумкин: А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М. —Л., Гостехиздат, 1950; В. А. Диткин ва П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, М. — Л., Гостехиздат, 1951; В. А. Диткин ва А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961; Я. Микусинский, Операционное исчисление. М., ИЛ, 1956.

$f(t)$ функциянинг ҳақиқий ўзгарувчи t нинг комплекс функцияси e^{-pt} га кўпайтмасини [бу ерда $p = a + ib$ $(a > 0)$ биронта комплекс сон], яъни

$$e^{-pt}f(t) \tag{2}$$

ни қараймиз*), (2) функция ҳам ҳақиқий ўзгарувчи t нинг комплекс функциясидир;

$$e^{-pt}f(t) = e^{-(a+ib)t}f(t) = e^{-at}f(t)e^{-ibt} = e^{-at}f(t)\cos bt -$$
$$- ie^{-at}f(t)\sin bt.$$

Сўнгра ушбу хосмас интегрални қараймиз:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt - i\int_0^\infty e^{-at}f(t)\sin bt\,dt \tag{3}$$

Агар $f(t)$ функция (1) шартни қаноатлантирса ва $a > s_0$ бўлса, (3) тенгликнинг ўнг қисмида турган интегралларнинг мавжудлигини ва интеграллар абсолют яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Дастлаб бу интеграллардан биринчисини баҳолаймиз:

$$\left|\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos bt\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty \left|e^{-at}f(t)\cos bt\right|dt < M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0t}\,dt =$$
$$= M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt = \frac{M}{a - s_0}.$$

Иккинчи интеграл ҳам шу тариқа баҳоланади. Демак, $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$ интеграл мавжуд. Бу интеграл p нинг биронта функциясини аниқлайди, у функцияни**) $F(p)$ билан белгилаймиз:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{4}$$

$F(P)$ функция $f(t)$ функциянинг *лаплас тасвири*, ёки *L тасвири*, ёки қисқача, *тасвири* деб аталади. $f(t)$ функция энди *бошланғич функция*, ёки *оригинал* деб аталади. Агар $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири бўлса, бундай ёзилади:

$$F(p) \mathrel{\underset{\cdot}{+\!\!\rightarrow}} f(t) \tag{5}$$

---

*) Ҳақиқий ўзгарувчининг комплекс функцияси ҳақида VII бобнинг 4- § ига қаралсин.

**) $F(p)$ функция $p \neq 0$ бўлганда комплекс ўзгарувчининг функциясидир (масалан, В. И. Смирнов „Курс высшей математике“, III т, 2- қисмига қаралсин). (4) алмаштириш XVII боб 14- § да қаралган Фурье алмаштиришига ўхшайди.

ёки

$$f(t) \risingdotseq F(p) \tag{6}$$

ёки

$$L\{f(t)\} = F(p). \tag{7}$$

Тасвирларни киритишнинг маъноси шундан иборатки, уларнинг ёрдами билан кўп масалаларнинг ечилишини соддалаштириш мумкин бўлади. Жумладан, дифференциал тенгламаларни ечиш тасвирни топиш учун бажариладиган жуда содда алгебраик амалларга келтирилиши мумкин. Тасвирни билган ҳолда оригинал ё аввал тузилган „оригинал—тасвир“ жадвалидан ёки қуйида баён қилинган методлар ёрдами билан топилиши мумкин. Қуйидаги табиий саволлар пайдо бўлади.

Бирор $F(p)$ функция берилган бўлсин. Тасвири шу $F(p)$ бўлган $f(t)$ функция мавжудми? Агар мавжуд бўлса, у ягона функциями? Иккала саволга ҳам, $F(p)$ ва $f(t)$ функциялар ҳақида маълум фаразлар қилиб, ижобий жавоб берилади. Жумладан, тасвирнинг ягоналиги қуйидаги теорема билан аниқланади, биз уни исботсиз келтирамиз:

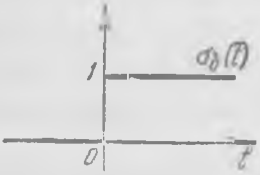
Ягоналик теоремаси. *Агар иккита узлуксиз функция $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ битта L-тасвир $F(p)$ эга бўлса, у функциялар айнан тенгдир.*

Бу теорема бундан буён жуда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, биз илгари амалий масалани ечишда бирор усул билан номаълум функциянинг тасвирини топиб, сўнгра бу тасвир бўйича бошланғич функцияни топган бўлсак, энди айтилган теоремага асосан топилган функция қўйилган масаланинг ечими эканлигини ва бошқа ечимлари мавжуд эмас деган хулосага келамиз.

2- §. $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ функцияларнинг тасвири

1. $f(t)$ функция бундай аниқланган:

$$t \geqslant 0 \text{ бўлганда } f(t) = 1,$$
$$t < 0 \text{ бўлганда } f(t) = 0.$$



397- расм.

$f(t)$ функция *Хевисайднинг бирлик функцияси* деб аталади ва $\sigma_0(t)$ билан белгиланади. Бу функциянинг графиги 397- расмда кўрсатилган.

Хевисайд функциясининг L-тасвирини топамиз:

$$L\left\{\sigma_0(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Демак[*]

$$1 \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p} \qquad (8)$$

ёки аниқроғи,

$$\sigma_0(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p}.$$

Операцион ҳисоб ҳақидаги баъзи қўлланмаларда $f(t)$ функциянинг тасвири деб ушбу ифодага айтилади:

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Бундай таърифлаганда: $\sigma_0(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} 1$ ва демак, $C \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} C$ аниқроғи $C\sigma_0(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} C$ бўлади.

II. $f(t) = \sin t$ бўлсин; у ҳолда

$$L\{\sin t\} = \int_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(-p\sin t - \cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{p^2+1}.$$

Демак,

$$\sin t \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p^2+1}. \qquad (9)$$

III. $f(t) = \cos t$ бўлсин; у вақтда

$$L\{\cos t\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cos t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}.$$

Демак,

$$\cos t \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+1}. \qquad (10)$$

3- §. Масштаби ўзгартирилган эркли ўзгарувчили функциянинг тасвири. sin *at*, cos *at* функцияларнинг тасвири

$f(at)$ функциянинг (бу ерда $a > 0$) тасвирини қараймиз:

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(at)\,dt.$$

---

[*] $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$ интегрални ҳисоблашда уни ҳақиқий функциялар интеграллари йиғиндиси каби тасвирлаш мумкин; лекин натижа ўшанинг ўзи бўлар эди. Бу изоҳ бундан кейинги икки интегралга ҳам тегишли.

Сўнгги интегралда $z = at$ деб белгилаб, алмаштирамиз, демак, $dz = adt$. У вақтда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{a}z} f(z)\,dz.$$

ёки

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Шундай қилиб, агар

$$F(p) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f(t)$$

бўлса,

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f(at) \tag{11}$$

бўлади.

1-мисол. (9) формуладан (11) формулага асосан бевосита шуни ҳосил қиламиз:

$$\sin at \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}} \frac{1}{a}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$$

ёки

$$\sin at \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}} \frac{a}{p^2+a^2}. \tag{12}$$

2-мисол. (10) формуладан (11) формулага асосан шуни ҳосил қиламиз:

$$\cos at \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}} \frac{1}{a}\,\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}$$

ёки

$$\cos at \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}}} \frac{p}{p^2+a^2}. \tag{13}$$

4-§. Тасвирнинг чизиқлилик хоссаси

Теорема. *Ўзгармас сонларга кўпайтирилган бир неча функциялар йиғиндисининг тасвири шу функциялар тасвирларининг тегишли ўзгармас сонларга кўпайтмасига тенг, яъни агар*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \tag{14}$$

(C_i — ўзгармас сонлар) ва

$$F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t) \qquad F_i(p) \xrightarrow{\cdot} f_i(t)$$

бўлса

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p) \tag{14'}$$

бўлади.

Исбот. (14) тенгликнинг ҳамма ҳадларини e^{-pt}га кўпайтириб ва t бўйича 0 дан ∞ гача чегарада интеграллаб (C_i кўпайтирувчиларни интеграл ишораси ташқарисига чиқариб), (14′) тенгликни ҳосил қиламиз.

1-мисол. Ушбу

$$f(t) = 3\sin 4t - 2\cos 5t$$

функциянинг тасвири топилсин.

Ечиш. (12), (13), (14′) формулаларга асосан:

$$L\{f(t)\} = 3\,\frac{4}{p^2+16} - 2\,\frac{p}{p^2+25} = \frac{12}{p^2+16} - \frac{2p}{p^2+25}$$

2-мисол. Тасвири ушбу формула $F(p) = \frac{5}{p^2+4} + \frac{20}{p^2+9}$ билан ифодаланган бошланғич функция топилсин.

Ечиш. $F(p)$ ни бундай кўринишда ёзамиз:

$$F(p) = \frac{5}{2}\,\frac{2}{p^2+2^2} + 20\,\frac{p}{p^2+3^2}.$$

Демак, (12), (13) ва (14′) формулаларга кўра мана буни топамиз:

$$f(t) = \frac{5}{2}\sin 2t + 20\cos 3t.$$

Бу функция 1-§ даги ягоналик теоремасига асосан берилган $F(p)$ га мос бирдан-бир бошланғич функциядир.

5- §. Силжиш теоремаси

Теорема. *Агар $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири бўлса, $F(p+\alpha)$ функция $e^{-\alpha t}f(t)$ функциянинг тасвиридир, яъни*

агар $F(p) \xrightarrow{\cdot} f(t)$ бўлса,

$$F(p+\alpha) \xrightarrow{\cdot} e^{-\alpha t} f(t) \text{ бўлади.} \tag{15}$$

(Бу ерда $\mathrm{Re}\,(p+\alpha) > s_0$ деб фараз қилинади.)

Исбот. $e^{-\alpha t}f(t)$ функциянинг тасвирини топамиз:

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt-\alpha t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}f(t)\,dt.$$

Шундай қилиб,

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=F(p+\alpha).$$

Исбот қилинган теорема бошланғич функциялари енгил топиладиган тасвирлар синфини анчагина кенгайтиришга имкон беради.

6- §. $e^{-\alpha t}$, sh αt, ch αt, $e^{-\alpha t}$ sin at, $e^{-\alpha t}$ cos at функцияларнинг тасвирлари

(8) формуладан (15) формулаларга асосан бевосита

$$\frac{1}{p+\alpha}\div e^{-\alpha t}\qquad(16)$$

экани чиқади. Шунингдек,

$$\frac{1}{p-\alpha}\div e^{\alpha t}.\qquad(16')$$

(16′) муносабат ҳадларидан (16) муносабатнинг мос ҳадларини айириб ва айириш натижаларини 2 га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)\div\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)$$

ёки

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\div\text{sh}\,\alpha t\qquad(17)$$

Шунга ўхшаш (16) билан (16′) ни қўшиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2}\div\text{ch}\,\alpha t.\qquad(18)$$

(12) формуладан (15) формулага асосан ушбу муносабат келиб чиқади:

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}\div e^{-\alpha t}\sin at.\qquad(19)$$

(13 формуладан (15) формулага асосан:

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}\div e^{-\alpha t}\cos at.\qquad(20)$$

1-мисол. Тасвири ушбу формула

$$F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}$$

билан берилган бошланғич функция топилсин.

Ечиш. $F(p)$ ни (19) муносабатнинг ўнг томонида турган ифода кўринишига келтирамиз:

$$\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\ \frac{4}{(p+5)^2+4^2}$$

Шундай қилиб,

$$F(p)=\frac{7}{4}\ \frac{4}{(p+5)^2+4^2}.$$

Демак, (19) формулага асосан шуни ҳосил қиламиз:

$$F(p)\mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}}\frac{7}{4}\ e^{-5t}\sin 4t.$$

2-мисол. Тасвири ушбу формула

$$F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}$$

билан берилган бошланғич функция топилсин.

Ечиш. $F(p)$ функцияни алмаштирамиз:

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{(p+1)^2+3^2}=$$

$$=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\ \frac{3}{(p+1)^2+3^2}$$

(19) ва (20) формулаларга асосан бошланғич функцияни топамиз:

$$F(p)\mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}}e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}\ e^{-t}\sin 3t.$$

7- §. Тасвирни дифференциаллаш

Теорема. *Агар* $F(p)\mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}}f(t)$ *бўлса,*

$$(-1)^n\ \frac{d^n}{dp^n}F(p)\mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}}t^n f(t) \tag{21}$$

бўлади.

Исбот. Дастлаб, агар $f(t)$ функция (1) шартни қаноатлантирса, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t)\,dt \tag{22}$$

мавжуд бўлишини исботлаймиз.

Шартга кўра $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $p = a + ib$, $a > s_0$; бунда $a > 0$, $s_0 > 0$. Равшанки, $a > s_0 + \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирадиган мусбат ε сон топилиши мумкин. Ушбу

$$\int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|\, dt$$

интегралнинг мавжудлиги 1-§ даги каби исбот қилинади.

Энди (22) интегрални баҳолаймиз:

$$\int_0^\infty |e^{-pt} t^n f(t)|\, dt = \int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t} e^{-\varepsilon t} t^n f(t)|\, dt.$$

$e^{-\varepsilon t} t^n$ функция $t > 0$ нинг ҳар қандай қиймати учун чегараланган ва унинг абсолют қиймати биронта N сонидан кичик бўлгани учун бундай ёзиш мумкин:

$$\int_0^\infty |e^{-pt} t^n f(t)|dt < N \int_0^\infty |e^{-(p-\varepsilon)t} f(t)|\, dt = N \int_0^\infty e^{-(a-\varepsilon)t} |f(t)|dt < \infty$$

Шундай қилиб, (22) интегралнинг мавжудлиги исботланди. Аммо бу интегралга

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

интегралнинг p параметр*) бўйича олинган n-тартибли ҳосиласи деб қараш мумкин. Шундай қилиб,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

формуладан

$$\int_0^\infty e^{-pt}(-t)^n f(t) dt = \frac{d^n}{dp^n} \int_0^\infty e^{-pt} f(t\, dt$$

---

*) Биз илгари (I том, XI боб, 10-§ га қаралсин) аниқ интегрални ҳақиқий параметр бўйича дифференциаллаш формуласини чиқарган эдик. Бу ерда p — комплекс сон, лекин дифференциаллаш формуласи тўғрилигича қолади.

формулани ҳосил қиламиз. Бу икки тенгликдан

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, t^n f(t)\, dt$$

ни, яъни (21) формулани ҳосил қиламиз.

(22) формуладан даражали функциянинг тасвирини топиш учун фойдаланамиз. (8) формулани ёзамиз:

$$\frac{1}{p} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} 1.$$

Бу формуладан (21) формулага асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t$$

ёки

$$\frac{1}{p^2} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t.$$

Шунга ўхшаш

$$\frac{2}{p^3} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t^2.$$

Ҳар қандай n учун ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t^n \tag{23}$$

1-мисол. Ушбу

$$\frac{a}{p^2+a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at\, dt$$

формуладан ((12) га қаралсин), чап ва ўнг томонларини p параметр бўйича дифференциаллаш йўли билан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t \sin at. \tag{24}$$

2-мисол. (13) формуладан (21) формулага асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} t\cos at, \tag{25}$$

3-мисол. (16) формуладан (21) формулага асосан шуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{(p+\alpha)^2} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} te^{-\alpha t}. \tag{26}$$

8- §. Ҳосилаларнинг тасвири

Теорема. *Агар* $F(p) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f(t)$ бўлса,

$$pF(p) - f(0) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f'(t) \tag{27}$$

бўлади.

Исбот. Тасвирнинг таърифига асосан бундай ёзишимиз мумкин:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt. \tag{28}$$

Бизга учрайдиган $f'(t)$, $f''(t)$, ... , $f^n(t)$ ҳосилаларнинг барчаси (1) шартни қаноатлантиради ва, демак, (28) интеграл ва бундан кейинги ҳосилалар учун шунга ўхшаган интеграллар мавжуд деб фараз қиламиз. (28) тенгликнинг ўнг қисмида турган интегрални бўлаклаб ҳисоблаб, мана буни топамиз:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Лекин (1) шартга кўра

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$$

ва

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p).$$

Шунинг учун

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

Теорема исботланди. Энди ҳар қандай тартибли ҳосиланинг тасвирини қараймиз. (27) формуладаги $F(p)$ ўрнига $pF(p)-$ $-f(0)$ ифодани ва $f(t)$ ўрнига $f'(t)$ ифодани қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p\,[pF(p) - f(0)] - f'(0) \overset{\cdot}{\rightarrow} f''(t)$$

ёки, қавсларни очсак,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \overset{\cdot}{\rightarrow} f''(t) \tag{29}$$

n-тартибли ҳосила учун тасвир бундай бўлади:

$$\begin{aligned} &p^nF(p) - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots \\ &\ldots + pf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)] \overset{\cdot}{\rightarrow} f^{(n)}(t\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Изоҳ. Агар $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ бўлса, (27), (29), (30) формулалар соддалашади. Бу ҳолда:

$$F(p) \overset{\cdot}{\rightarrow} f(t),$$

$$pF(p) \overset{\cdot}{\rightarrow} f'(t)$$

. . . .

$$p^nF(p) \overset{\cdot}{\rightarrow} f^{(n)}(t).$$

9-§. Баъзи тасвирлар жадвали

Топилган тасвирлардан фойдаланишни қулайлаштириш учун уларни бир жадвалга жойлаймиз:

1-жадвал

т/б №№	$F(P)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{sh}\,\alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\mathrm{ch}\,\alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$
11	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)\ F_2(p)$	$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$

Эслатма. Бу жадвалнинг 13- ва 15-формулалари кейинроқ чиқарилади.

Изоҳ. Агар $f(t)$ функциянинг тасвири учун

$$F^*(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

ни қабул қилсак, жадвалнинг биринчи устунида турган 1—13-формулаларни p га кўпайтириш керак. 14- ва 15-формулалар эса кўпроқ ўзгаради. $F^*(p) = pF(p)$ бўлгани учун, 14-формуладаги $F(p)$ ўрнига $\frac{F^*(p)}{p}$ ифодани қўйиб ва p га кўпайтириб, шуни ҳосил қиламиз:

14′. $$(-1)^n p\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{F^*(p)}{p}\right) \mathrel{\dot{\to}} t^n f(t).$$

15-формуланинг чап томонига

$$F_1(p) = \frac{F_1^*(p)}{p}, \qquad F_2(p) = \frac{F_2^*(p)}{p}$$

ни қўйиб ва бу кўпайтмани p га кўпайтириб ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

15′. $$\frac{1}{p}\,F_1^*(p)\,F_2^*(p) \mathrel{\dot{\to}} \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

10-§. Берилган дифференциал тенглама учун ёрдамчи тенглама

Ўзгармас a_0, a_1, ... , a_{n-1}, a_n коэффициентли n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \qquad (31)$$

Бу тенгламанинг

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \; \ldots, \; x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \qquad (32)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $t \geqslant 0$ учун $x = x(t)$ ечими топиш талаб қилинади.

Қўйилган масалани илгари бундай ечган эдик: (31) тенгламанинг n та ихтиёрий ўзгармасига эга бўлган умумий ечимини топиб, сўнгра ўзгармасларни (32) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб аниқлаган эдик.

Бу ерда масалани ечишнинг соддароқ методини—операцион ҳисоб методини баён қиламиз. (31) тенгламанинг (32) шартларни қаноатлантирадиган $x(t)$ ечимининг L-тасвирини топамиз. Бу L-тасвирни $\bar{x}(p)$ билан белгилаймиз;

Шундай қилиб $\bar{x}(p) \mathrel{\dot{\to}} x(t)$.

(31) тенглама ечимларининг тасвирлари ва унинг n- тартибгача ҳосилалари мавжуд деб фараз қиламиз. (Ечимларни топгандан сўнг бу фаразнинг тўғрилигини текширишимиз мумкин.) (31) тенгликнинг ҳамма ҳадларини e^{-pt} га кўпайтирамиз (бу ерда $p = a + ib$) ва t бўйича 0 дан ∞ гача чегарада интеграллаймиз:

$$a_0 \int\limits_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int\limits_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} dt +$$

$$+ \ldots + a_n \int\limits_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (33)$$

Бу тенгликнинг чап томонида $x(t)$ функциянинг ва ҳосилаларининг L- тасвирлари, ўнг томонида эса, $f(t)$ функциянинг L- тасвири турибди. Уни $F(p)$ билан белгилаймиз. Демак, (33) тенгликни бундай қайта ёзиш мумкин:

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Бу тенгликдаги функциянинг тасвирлари ва ҳосилаларининг тасвирлари ўрнига (27), (29 , ·30) ифодаларни қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$a_0 \{p^n \bar{x}(p) - [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + p^{n-3} x_0'' + \ldots + x_0^{(n-1)} \} +$$

$$+ a_1 \{[p^{n-1} \bar{x}(p) - (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)} \} +$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$+ a_{n-1} \{p \bar{x}(p) - x_0\} + a_n \bar{x}(p) = F(p). \qquad (34)$$

(34) тенглама *ёрдамчи тенглама* ёки *тасвирловчи тенглама* деб аталади. Бу тенгламада номаълум $\bar{x}(p)$ тасвир бўлиб, у шу тенгламадан топилади. (34) тенгламани $\bar{x}(p)$ иштирок этган ҳадларни чап қисмида қолдириб, қуйидагича алмаштириб ёзамиз:

$$\bar{x}(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) =$$

$$= a_0 (p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}) +$$

$$+ a_1\ p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}) +$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+ a_{n-2}(p x_0 + x_0') + a_{n-1} x_0 + F(p). \qquad (34')$$

(34) тенгликнинг чап қисмидаги $\bar{x}(p)$ нинг коэффициенти p га нисбатан n- даражали кўпҳад; буни ҳосил қилиш учун (31)

тенгламанинг чап қисмида ҳосилалар ўрнига p нинг мос даражаларини қўйиш кифоя. Уни $\varphi_n(p)$ билан белгилаймиз:

$$\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n. \qquad (35)$$

(34′) тенгламанинг ўнг қисми қуйидагича тузилади:

a_{n-1} коэффициент x_0 га кўпайтирилади,

a_{n-2} коэффициент $px_0 + x_0'$ га кўпайтирилади,

. . . .

a_1 коэффициент $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}$ га кўпайтирилади, a_0 коэффициент $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}$ га кўпайтирилади.

Бу кўпайтмаларнинг ҳаммаси қўшилади. Бунга дифференциал тенглама ўнг қисмининг тасвири $F(p)$ ҳам қўшилади. (34′) тенгликнинг ўнг қисмидаги $F(p)$ дан бошқа ҳамма ҳадлар ўхшашлари йиғиштирилгандан сўнг p га нисбатан (коэффициентлари маълум) $n-1$-даражали кўпҳадни ташкил этади. Уни $\psi_{n-1}(p)$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб (34′) тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$\overline{x}(p)\,\varphi_n(p) = \psi_{n-1}(p) + F(p).$$

Бу тенгламадан $\overline{x}(p)$ ни аниқлаймиз:

$$\overline{x}(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \qquad (36)$$

Шундай аниқланган $\overline{x}(p)$ (31) тенгламанинг (32) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $x(t)$ ечимининг тасвиридир. Энди, агар тасвири (36) тенглик билан аниқланган $\overline{x}(p)$ функция бўлган $x^*(t)$ функцияни топсак, бу ҳолда 1-§ да айтилган ягоналик теоремасига асосан $x^*(t)$ (31) тенгламанинг (32) шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади, яъни

$$x^*(t) = x(t).$$

Агар биз (31) тенгламанинг нолга тенг бошланғич шартлар: $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots = x_0^{n-1} = 0$ бўйича ечимини топсак, бу ҳолда (36) тенгликда $\psi_{n-1}(p) = 0$ бўлади ва у тенглик ушбу кўринишга келади:

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)}$$

ёки

$$\overline{x}(p) = \frac{F(p)}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}. \qquad (36')$$

1-мисол. Ушбу

$$\frac{dx}{dt} + x = 1$$

тенгламанинг $t=0$ да $x=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Ёрдамчи тенглама тузамиз:

$$\overline{x}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p} \quad \text{ёки} \quad \overline{x}(p)=\frac{1}{(p+1)p}.$$

Ўнг қисмда турган касрни элементар касрларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{x}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

1- жадвалнинг 1- ва 4- формулаларидан фойдаланиб, ечимни топамиз:

$$x(t)=1-e^{-t}.$$

2 мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=1$$

тенгламанинг $t=0$ да $x_0=x_0'=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин

Ечиш. (34′) ёрдамчи тенгламани ёзамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2+9)=\frac{1}{p} \quad \text{ёки} \quad \overline{x}(p)=\frac{1}{p(p^2+9)}$$

Бу касрни элементар касрларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{x}(p)=\frac{-\frac{1}{9}p}{p^2+9}+\frac{\frac{1}{9}}{p}.$$

1- жадвалнинг 1- ва 3- формулаларига асосан ечимни топамиз:

$$x(t)=-\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{9}$$

3- мисол.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t$$

тенгламанинг $t=0$ да $x_0=x_0'=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (34′) ёрдамчи тенгламани ёзамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2+3p+2)=\frac{1}{p^2}$$

ёки

$$\overline{x}(p)=\frac{1}{p^2}\,\frac{1}{p^2(p^2+3p+2)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Бу касрни номаълум коэффициентлар методи билан элементар касрларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{x}(p)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)}.$$

1- жадвалнинг 9, 1 ва 4- формулалари бўйича ечимни топамиз:

$$x(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

4-мисол.

$$\frac{d^2x}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t$$

тенгламанинг $t = 0$ да $x_0 = 1$; $x_0' = 2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (34′) ёрдамчи тенгламани ёзамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2 + 2p + 5) = p \cdot 1 + 2 + 2 \cdot 1 + L\{\sin t\}$$

ёки

$$\overline{x}(p)\,p^2 + 2p + 5) = p + 4 + \frac{1}{p^2 + 1},$$

бундан $\overline{x}(p)$ ни топамиз:

$$\overline{x}(p) = \frac{p+4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

Ўнг қисмдаги кейинги касрни элементар касрларга ажратиб, бундай ёза оламиз:

$$\overline{x}(p) = \frac{\frac{11}{10}p + 4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{1}{5}}{p^2 + 1}$$

ёки

$$\overline{x}(p) = \frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} -$$

$$-\frac{1}{10}\,\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p^2+1}.$$

1-жадвалнинг 8, 7, 3 ва 2-формулаларига асосан ечимни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$

ёки

$$x(t) = e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t + \frac{29}{20}\sin 2t\right) - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t.$$

11-§. Ажратиш теоремаси

Бундан олдинги параграфнинг (36) формуласидан чизиқли дифференциал тенглама ечимининг тасвири икки ҳаддан иборат бўлиб, биринчи ҳади p га нисбатан рационал каср, иккинчи ҳади—сурати тенглама ўнг қисмининг тасвири $F(p)$, махражи $\varphi_n(p)$ кўпҳаддан иборат каср экани келиб чиқади. Агар $F(p)$ рационал каср бўлса, иккинчи ҳад ҳам рационал каср бўлади. Шундай қилиб, тасвири тўғри рационал каср бўлган бошланғич функцияни топишни билиш керак. Бу параграфда ана шу масала билан шуғулланамиз. Бирон функциянинг L-тасвири p га нисбатан тўғри рационал каср

$$\frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}$$

бўлсин. Бошланғич функцияни (оригинални) топиш талаб қилинади. I т. X боб 7-§ да ҳар қандай тўғри рационал касрни тўрт хил элементар касрларнинг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлиги кўрсатилган эди:

I. $\frac{A}{p-a}$,

II. $\frac{A}{(p-a)^k}$,

III. $\frac{A_p - B}{p^2 + a_1 p + a_2}$, бу ерда махражнинг илдизлари комплекс сонлар, яъни $\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$.

IV. $\frac{Ap + B}{(p^2 + a_1 p + a)^k}$, бу ерда $k \geqslant 2$ махражнинг илдизлари комплекс сонлар.

Ёзилган элементар касрлар учун бошланғич функцияларни топамиз.

I тур каср учун 1-жадвалнинг 4-формуласига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{A}{(p-a)} \mathrel{\dot{\to}} Ae^{at}.$$

II тур касрлар учун 1-жадвалнинг 9 ва 4-формулаларига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{A}{(p-a)^k} \mathrel{\dot{\to}} A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}. \tag{37}$$

Энди III тур касрни қараймиз. Ушбу айний алмаштиришларни бажарамиз:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1 p + a_3} = \frac{A_p + B}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{A\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(B - \frac{Aa_1}{2}\right)}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2^2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} = A\frac{p+\frac{a_1}{2}}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right) + \left(\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} +$$

$$+ \left(B - \frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\left(p+\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2}.$$

Бу ерда биринчи ва иккинчи қўшилувчиларни мос равишда *M* ва *N* билан белгилаб, 1-жадвалнинг 8 ва 7-формулаларига асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} Ae^{-\frac{a_1}{2}t}\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}},$$

$$N \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \left(B-\frac{Aa_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}.$$

Шундай қилиб, охирги натижа:

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}$$

$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]. \qquad (38)$$

IV тур элементар касрнинг тасвирини топишни бу ерда қарамаймиз, чунки бу кўп ҳисоблашлар билан боғланган. Бу масалани баъзи хусусий ҳоллар учун қуйида кўрамиз. Зарур бўлиб қолган ҳолда китобхон шу бобнинг бошида тавсия қилинган китоблардан бирига мурожаат қилиши мумкин.

12-§. Дифференциал тенгламаларни ва дифференциал тенглама системаларини операцион метод билан ечиш мисоллари

1-мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3x$$

тенгламанинг $t=0$ да $x_0=0$ $x'_0=0$ бошланғич шартларини қаноатлантирадиган ечими топилсин.

Ечиш. (34′) ёрдамчи тенгламани тузамиз:

$$\bar{x}(p)(p^2+4)=\frac{3}{p^2+9}, \qquad \bar{x}(p)=\frac{3}{(p^2+9)(p^2-4)}$$

еки

$$\bar{x}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

бундан ечим ҳосил бўлади:

$$x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t.$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0$$

тенгламанинг $t=0$ да $x_0=1$, $x_0'=3$, $x_0''=8$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. $(31')$ ёрдамчи тенгламани тузамиз:

$$\overline{x}(p)(p^3+1)=p^2\cdot 1+p\cdot 3+8,$$

ечимни топамиз:

$$\overline{x}(p)=\frac{p^2+3p+8}{p^3+1}=\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Ҳосил бўлган рационал касрни элементар касрларга ажратамиз:

$$\frac{p^2+3p+8}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{2}{p+1}+\frac{-p+6}{p^2-p+1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

1-жадвалдан фойдаланиб, ечимни топамиз:

$$x(t)=2e^{-t}+e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{11}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

3-мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=t\cos 2t$$

тенгламанинг $t=0$ да $x_0=0$, $x_0'=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. $(34')$ ёрдамчи тенгламани тузамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2+1)=\frac{1}{p^2+4}-\frac{8}{(p^2+4)^2},$$

бундан

$$\overline{x}(p)=-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{p^2+1}+\frac{5}{9}\,\frac{1}{p^2+4}+\frac{8}{3}\,\frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Демак,

$$x(t)=-\frac{5}{9}\sin t+\frac{5}{18}\sin 2t+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-t\cos 2t\right).$$

Операцион метод билан чизиқли дифференциал тенглама системаларини ҳам ечиш мумкин, албатта. Буни мисолда кўрсатамиз.

4-мисол. Ушбу тенгламалар

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1,\qquad \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0$$

системасининг $t=0$ да $x=0$, $y=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Белгилаймиз: $x(t) \mathrel{\dot{\leftarrow}} \overline{x}(p)$, $y(t) \mathrel{\dot{\leftarrow}} \overline{y}(p)$ ва ёрдамчи тенгламалар системасини ёзамиз:

$$(3p+2)\overline{x}(p) + p\overline{y}(p) = \frac{1}{p},$$

$$p\overline{x}(p) + (4p+3)\overline{y}(p) = 0.$$

Бу системани ечиб, шуларни топамиз:

$$\overline{x}(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{1}{10(11p+6)},$$

$$\overline{y}(p) = -\frac{1}{(11p+6)(p+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\right).$$

Тасвирлар бўйича бошланғич функцияларни, яъни системанинг изланган ечимини топамиз:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

Юқори тиртибли чизиқли системалар ҳам шунга ўхшаш ечилади.

13-§. Композициялаш теоремаси

Дифференциал тенгламаларни операцион метод билан ечишда ушбу теорема фойдали бўлади.

Композициялаш теоремаси. *Агар $F_1(p)$ ва $F_2(p)$ функциялар $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функцияларнинг тасвирлари бўлса, яъни*

$$F_1(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f_1(t) \text{ ва } F_2(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} f_2(t)$$

бўлса, $F_1(p)F_2(p)$ ушбу

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

функциянинг тасвири бўлади, яъни

$$F_1(p)F_2(p) \mathrel{\dot{\rightarrow}} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \tag{39}$$

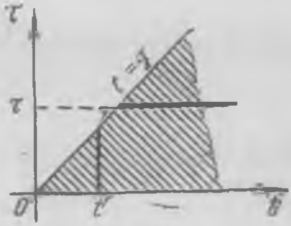
Исбот. Тасвирнинг таърифига суяниб,

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$$

функциянинг тасвирини топамиз:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau\right]dt.$$

Ўнгда турган интеграл $\tau = 0$, $\tau = t$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳада (398- расм) олинадиган икки каррали интегралдир. Бу интегралда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз; унда мана буни ҳосил қиламиз:



398- расм.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left[f_1(\tau)\int_0^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt\right] d\tau$$

Ички интегралда ўзгарувчини $t - \tau = z$ билан алмаштириб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\, dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)\, dz =$$

$$= e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)\, dz = e^{-pz} F_2(p).$$

Демак,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau)\, e^{-p\tau} F_2(p)\, d\tau =$$

$$= F_2(p)\int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\, d\tau = F_2(p)\, F_1(p).$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau \risingdotseq F_1(p)\, F_2(p).$$

Бу ўзи 1- жадвалдаги 15- формуладир.

1- изоҳ. $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$ ифода иккита $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функцияларнинг *композицияси* деб аталади. Композицияни ҳосил қилиш амали икки функцияни *композициялаш* деб аталади, бунда

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau.$$

Охирги тенгликнинг тўғрилиги ўнг интегралда ўзгарувчини $t - \tau = z$ орқали алмаштириш йўли билан аниқланади.

Мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$$

тенгламанинг $t = 0$ да $x_0 = x'_0 = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. (34′) ёрдамчи тенгламани ёзамиз:

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p),$$

бу ерда $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири. Демак, $\bar{x}(p)=\frac{1}{p^2+1}F(p)$ аммо $\frac{1}{p^2+1}\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}\sin t$ ва $F(p)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}f(t)$ Композиция формуласи (39) ни қўллаб ва $\frac{1}{p^2+1}=F_2(p)$, $F(p)=F_1(p)$ деб белгилаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau. \tag{40}$$

2-изоҳ. Агар функциянинг тасвири маълум бўлса, у функциянинг интеграли композициялаш теоремасига асосан осон топилади: агар $F(p)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}f(t)$ бўлса,

$$\frac{1}{p}F(p)\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\to}}\int_0^t f(\tau)\,d\tau \tag{41}$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$f_1(t)=f(t),\qquad f_2(t)=1$$

деб белгиласак,

$$F_1(p)=F(p);\qquad F_2(p)=\frac{1}{p}$$

бўлади. Бу функцияларни (39) формулага қўйиб, (41) формулани ҳосил қиламиз.

14-§. Механик тебранишларнинг дифференциал тенгламалари. Электр занжирлари назариясининг дифференциал тенгламалари

Механикадан маълумки, массаси m бўлган моддий нуқтанинг тебраниши ушбу дифференциал тенглама билан*) ифодаланади:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t). \tag{42}$$

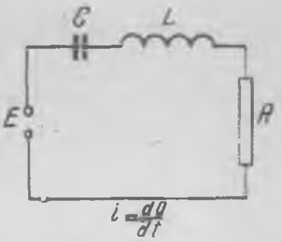
бу ерда x — нуқтанинг бирон ҳолатдан четланиши, k эластик системанинг (масалан, пружина (рессор)нинг қаттиқлиги, ҳаракатга қаршилик кучи тезликнинг биринчи даражасига пропорционал (λ — пропорционаллик коэффициенти), $f_1(t)$—ташқи куч, ёки ғалаёнлантирувчи куч. Бир эркинлик даражага эга бўлган бошқа механик системаларнинг кичик тебранишлари ҳам (42)тип-

---

*) Масалан, XIII боб 26-§ да рессорга қўйилган юкнинг тебраниш масаласи қаралганда шундай тенглама ҳосил қилинган.

даги тенгламанинг ечими орқали ифодаланади. Масалан, эластик ўқдаги маховикнинг айланма тебраниши ҳам шу тенгламага олиб келади; бунда x—маховикнинг айланиш бурчаги, m—маховикнинг инерция моменти, k—ўқнинг буралма қаттиқлиги, $mf_1(t)$ ташқи кучларнинг айланиш ўқига нисбатан моменти. (42) типдаги тенгламалар фақат механик тебранишларнигина эмас, балки электр занжиридаги ҳодисаларни ҳам ифодалайди.

L индуктивлик, R қаршилик, C сиғимдан иборат бўлган электр занжири берилган бўлиб, унга E электр юритувчи куч (э.ю.к.) қўйилган бўлсин (399-расм). Занжирдаги токни i билан, конденсатор зарядини Q билан белгилаймиз; электротехникадан маълумки, i ва Q ушбу тенгламаларни қаноатлантиради:



399- расм.

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=E, \qquad (43)$$

$$\frac{dQ}{dt}=i \qquad (44)$$

(44) тенгламадан:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{di}{dt}. \qquad (44')$$

(44) ва (44′) ни (43) тенгламага қўйиб, Q учун (42) типдаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E. \qquad (45)$$

(43) тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаб ва (44) тенгламадан фойдаланиб i ни аниқлаш учун ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt} \qquad (46)$$

(45) ва (46) тенгламалар (42) типдаги тенгламалардир.

15-§. Тебранишлар дифференциал тенгламасини ечиш

Тебранишлар тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t), \qquad (47)$$

бу ерда номаълум функция x нинг a_1, a_2 коэффициентларнинг ва $f(t)$ функциянинг механик ва физик маъноларини (42), (45) ва (46) тенгламаларни солиштириш йўли билан аниқлаш осон.

(47) тенгламанинг $t=0$ да $x = x_0$, $x' = x_0'$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топамиз.

(47) тенглама учун ёрдамчи тенглама тузамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2 + a_1 p + a_2) = x_0 p + x_0' + a_1 x_0 + F(p), \tag{48}$$

бу ерда $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири. (48) тенгликдан шуни топамиз:

$$\overline{x}(p) = \frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}. \tag{49}$$

Чунончи (45) тенгламанинг $t = 0$ да $Q = Q_0$; $Q' = Q_0'$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $Q(t)$ ечими учун тасвири ушбу кўринишда бўлади:

$$\overline{Q}(p) = \frac{L(Q_0 p + Q_0') + RQ_0}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{\overline{E}(p)}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Ечимнинг характери квадрат учҳад $p^2 + a_1 p + a_2$ нинг илдизлари комплекс, ҳақиқий ҳар хил ёки ҳақиқий бир хил бўлишига жуда боғлиқдир. Учҳаднинг илдизлари комплекс, яъни $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2 < 0$ бўлган ҳолни тўла қараб чиқамиз. Бошқа ҳоллар шу равишда қаралади.

Икки функция йиғиндисининг тасвири улар тасвирларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун (38) формулага асосан (49) тенгликнинг ўнг қисмида турган биринчи бошланғич функция ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{x_0 p + x_0' + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \doteqdot e^{-\frac{a_1}{2}t} \left[x_0 \cos t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \right.$$
$$\left. + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \right]. \tag{50}$$

Энди

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$$

касрга мос бошланғич функцияни топамиз. Бу ерда

$$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \doteqdot \frac{e^{-\frac{a_1}{2}t}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \sin t \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad F(p) \doteqdot f(t)$$

эканини эътиборга олиб, композициялаш формуласи (39) га асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{F(p)}{p^2+a_1p+a_2} \div \frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\int_0^t f(\tau)e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)}\sin\, t-\tau)\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\,d\tau. \tag{51}$$

(50) ва (51) ни эътиборга олиб (49) дан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x(t)=e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{x_0'+\frac{x_0a_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\int_0^t f(\tau)e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)}\sin(t-\tau)\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\,d\tau. \tag{52}$$

Агар ташқи куч $f(t)\equiv 0$ бўлса, яъни биз эркин механик ёки электр тебранишларни қараётган бўлсак, ечим (52) ифоданинг биринчи қўшилувчисидан иборат бўлади. Агар бошланғич шартлар нолга тенг: $x_0=x_0'=0$ бўлса, ечим (52) тенглик ўнг қисмининг иккинчи қўшилувчисидан иборат бўлади. Бу ҳолларни тўлароқ кўриб чиқамиз.

16- §. Эркин тебранишларни текшириш

Фараз қилайлик, (47) тенглама *эркин тебранишларни* ифодаласин, яъни $f(t)\equiv 0$ бўлсин. Формулаларнинг ёзилишини осонлаштириш учун қуйидагича белгилаймиз:

$a_1=2n,\ a_2=k^2;\ k_1^2=k^2-n^2$. У ҳолда (47) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \tag{53}$$

Бу тенгламанинг $t=0$ да $x=x_0;\ x'=x_0'$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими $x_{\text{эрк}}(t)$ (50) формула ёки (52) формуланинг биринчи қўшилувчиси билан берилади:

$$x_{\text{эрк}}(t)=e^{-nt}\left[x_0\cos k_1t+\frac{x_0'+x_0n}{k_1}\sin k_1t\right]. \tag{54}$$

$x_0=a,\ \frac{x_0'+x_0n}{k}=b$ деб белгилаймиз. Ҳар қандай a ва b учун $a=M\sin\delta,\ b=M\cos\delta$ тенгликларни қаноатлантирувчи

M ва δ сонларни топиш мумкин; $M^2 = a^2 + b^2$; $\operatorname{tg}\delta = \frac{a}{b}$ бўлади. Энди (54) формулани бундай ёзамиз:

$$x_{эрк} = e^{-nt}\left[M \cos k_1 t \sin \delta + M \sin k_1 t \cos \delta\right]$$

ёки охирги кўринишда ечимни бундай ёзиш мумкин:

$$x_{эрк} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta). \qquad (55)$$

Бу (55) ечим *сўнувчи тебранишларга* мос келади.

Агар $2n = a_1 = 0$, яъни ички ишқалиш бўлмаса, ечим ушбу кўринишни олади:

$$x_{эрк} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(k_1 t + \delta).$$

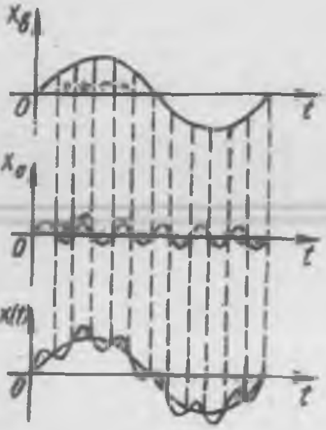
Бу ҳолда *гармоник тебраниш* бўлади. (I т. XIII бобнинг 27-§ даги 276 ва 278-расмларда гармоник ва сўнувчи тебранишларнинг графиклари берилган.)

17-§. Ташқи куч даврий бўлган ҳолда механик ва электр тебранишларни текшириш

Механик системаларнинг эластик тебранишларини ва айниқса электр тебранишларни ўрганишда $f(t)$ ташқи кучларнинг турли кўринишларини текшириб қарашга тўғри келади. Ташқи куч даврий бўлган ҳолни тўла қараб чиқамиз. Фараз қилайлик, (47) тенглама ушбу кўринишда бўлсин:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \omega t. \qquad (56)$$

Ҳаракатнинг характерини аниқлаш учун бошланғич шартлар $x_0 = x_0' = 0$ бўлган ҳолни қараш кифоя. Тенгламанинг ечимини (52) формула бўйича ҳосил қилиш мумкин эди, лекин бу ерда методика нуқтаи назаридан орадаги барча амалларни бажариб, ечимни ҳосил қилиш қулайроқ.



400- расм.

Тасвирловчи тенгламани ёзамиз:

$$\overline{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A\frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

бундан

$$\overline{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)}. \qquad (57)$$

$2n \neq 0\,(n^2 < k^2)$ бўлган ҳолни қараймиз. Ўнг томонда турган касрни элементар касрларга ажратамиз:

$$\frac{A\omega}{(p + 2np + k^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{Np + B}{p + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2}. \qquad (58)$$

N, B, C, D—ўзгармасларни ноаниқ коэффициентлар методи билан топамиз. (38) формуладан фойдаланиб, (57) формуладан бошланғич функцияни топамиз:

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\Big\{(k^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2n\omega\cos\omega t +$$

$$+ e^{-nt}\Big[(2n^2 - k^2 + \omega^2)\frac{\omega}{k_1}\sin k_1 t + 2n\omega\cos k_1 t\Big]\Big\}, \qquad (59)$$

бу ерда ҳам $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Бу (56) тенгламанинг бошланғич $x_0 = x_0' = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

$2n = 0$ бўлган хусусий ҳолни қараймиз. Бу, масалан, механик системада ички қаршилик бўлмаган, яъни амортизатор бўлмаган ҳолга мос келади. Электр контурда эса $R = 0$, яъни занжирнинг ички қаршилиги бўлмаган ҳолига мос келади. Бу ҳолда (56) тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\sin\omega t, \qquad (60$$

бу тенгламанинг $x_0 = x_0' = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳосил қилиш учун (59) формулада $n = 0$, яъни

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)\,k}\,[-\omega\sin kt + k\sin\omega t] \qquad (61)$$

деб фараз қилиш керак. Бу ерда икки гармоник тебранишнинг йиғиндиси ҳосил бўлди; улардан биринчиси частотаси k бўлган хусусий тебраниш:

$$x_{\text{хус}}(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2}\,\frac{\omega}{k}\sin kt$$

ва иккинчиси частотаси ω бўлган мажбурий тебраниш:

$$x_{\text{маж}}(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t.$$

$k \gg \omega$ (k сон ω дан жуда катта) бўлган ҳол учун тебранишлар характери 400- расмда тасвирланган.

Яна (59) формулага қайтамиз. Агар, қараб чиқилган механик ва электр занжирларида бўлганидек, $2n > 0$ бўлса, бу ҳолда e^{-nt} кўпайтувчига эга бўлган ва сўнувчи хусусий тебранишни ифодаловчи ҳад t нинг ўсиши билан тез камаяди. t етарли даражада катта бўлганда тебраниш характери e^{-nt} кўпайтувчиси бўлмаган ҳад, яъни

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}\left\{(k^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2n\omega\cos\omega t\right\} \qquad (62)$$

ҳад билан аниқланади.

Ушбу белгилашларни киритамиз:

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M\cos\delta; \qquad -\frac{A\cdot 2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M\sin\delta \qquad (63)$$

бу ерда

$$M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

(62) ечимни бундай ёзиш мумкин:

$$x(t) = \frac{A}{k^2\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4n^2\frac{\omega^2}{k^4}}}\sin(\omega t + \delta) \qquad (64)$$

(64) формуладан хусусий тебранишларнинг частотаси k ташқи куч частотаси ω билан бир хил эмаслиги келиб чиқади. Агар n сони билан кўрсатилувчи ички қаршилик, кичик, частота ω эса частота k га яқин бўлса, тебраниш амплитудаси ҳар қанча катта бўлиши мумкин; чунки бу ҳолда махраж истаганча кичик бўлади.

$n = 0$, $\omega^2 = k^2$ бўлганда ечим (64) формула билан ифодаланмайди.

18-§. Тебранишлар тенгламасини резонанс бўлган ҳолда ечиш

$a_1 = 2n = 0$, яъни қаршилик йўқ, ташқи кучнинг частотаси хусусий тебраниш частотаси билан бир хил ($k = \omega$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\sin kt. \qquad (65)$$

Бу тенгламанинг $t = 0$ да $x_0 = x_0' = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини излаймиз. Ёрдамчи тенглама бундай бўлади:

$$\bar{x}(p, (p^2 + k^2) = A\frac{k}{(p^2 + k^2)},$$

бундан

$$\bar{x}(p) = \frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2}. \qquad (66)$$

Биз IV тип тўғри рационал каср ҳосил қилдик; бундай касрни умумий кўринишда илгари қарамаган эдик. Бу (66) тасвирнинг бошланғич функциясини топиш учун қуйидаги усулдан фойдаланамиз. Ушбу айниятни ёзамиз (1- жадвал 2- формула):

$$\frac{k}{p^2+k^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\sin kt\,dt. \tag{67}$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини k бўйича дифференциаллаймиз*):

$$\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\,t\cos kt\,dt.$$

Бу тенгликни (67) дан фойдаланиб, бундай ёзиш мумкин:

$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^\infty e^{-pt}\left[t\cos kt-\frac{1}{k}\sin kt\right]dt.$$

Бундан бевосита ушбу формула келиб чиқади:

$$\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}\doteq\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cos kt\right)$$

(бу формуладан 1- жадвалдаги 13- формула келиб чиқади). Шундай қилиб, (65) тенгламанинг изланган ечими:

$$x(t)=\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cos kt\right). \tag{68}$$

Бу ечимнинг иккинчи қўшилувчисини текширамиз:

$$x_2(t)=-\frac{A}{2k}\,t\cos kt; \tag{68'}$$

t катталашганда бу миқдор чегараланган бўлмайди. t чексиз ўсиши билан (68′) га мос тебранишларнинг амплитудаси чегараланмаган ҳолда ўсади. Демак, (68) формулага мос тебранишларнинг амплитудаси ҳам чегараланмаган ҳолда ўсади. Хусусий тебранишлар частотаси билан ташқи куч частотаси бир хил бўлганда рўй берадиган бу ҳодиса *резонанс* деб аталади. (XIII боб, 29- даги 280- § расмга ҳам қаралсин.)

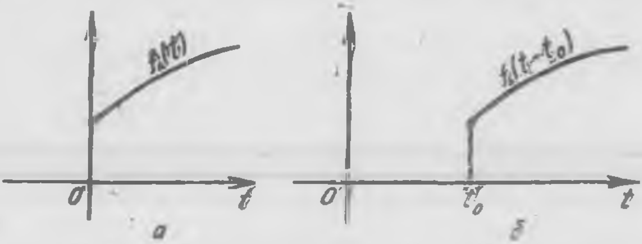
---

*) Ўнг томонда турган интегрални ҳақиқий ўзгарувчининг иккита интеграли йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин; иккала интеграл ҳам параметр k га боғлиқ.

19-§. Кечикиш теоремаси

Фараз қилайлик, $f(t)$ функция $t<0$ бўлганда айнан нолга тенг бўлсин (401-*а*, расм).

Бу ҳолда $f(t-t_0)$ функция $t<t_0$ бўлганда айнан нолга тенг бўлади (401-*б*, расм). Қуйидаги кечикиш теоремасини исбот қиламиз.



401-расм.

Теорема. *Агар $F(p)$ функция $f(t)$ функциянинг тасвири бўлса у ҳолда $e^{-pt_0}F(p)$функция $f(t-t_0)$ функциянинг тасвири бўлади, яъни агар $f(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} F(p)$ бўлса, у ҳолда*

$$f(t-t_0) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} e^{-pt_0}F(p) \tag{69}$$

бўлади.

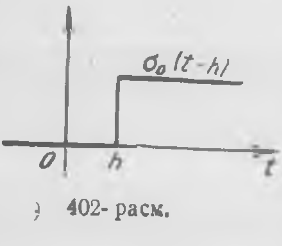
Исбот. Тасвирнинг таърифига кўра:

$$L\{f(t-t_0)\}=\int_0^\infty e^{-pt}f(t-t_0)dt=\int_0^{t_0} e^{-pt}f(t-t_0)dt+\int_{t_0}^\infty e^{-pt}f(t-t_0)dt.$$

Тенгликнинг ўнг қисмида турган биринчи интеграл нолга тенг, чунки $t<t_0$ бўлганда $f(t-t_0)=0$. Охирги интегралда $t-t_0=z$ фараз қилиб, ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$L\{f(t-t_0)\}=\int_0^\infty e^{-p(z+t_0)}f(z)\,dz=e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-pz}f(z)\,dz=e^{-pt_0}F(p).$$

Шундай қилиб, $f(t-t_0) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} e^{-pt_0}F(p)$ эканлиги исбот бўлди.



402-расм.

Мисол. 2-§ да Хевисайднинг бирлик функцияси учун ушбу муносабат аниқланган эди: $\sigma_0 \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p}$. Исбот қилинган теоремага асосан, 402-расмда тасвирланган $\sigma_0(t-h)$ функция учун L-тасвир $\frac{1}{p}e^{-ph}$ бўлади, яъни

$$\sigma_0(t-h) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\leftarrow}} \frac{1}{p}e^{-ph} \tag{70}$$

экани келиб чиқади.

20-§. Дельта-функция ва унинг тасвири

Ушбу функцияни қараб чиқамиз:

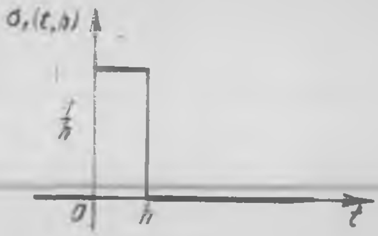
$$\sigma_1(t,h)=\frac{1}{h}\Big[\sigma_0(t)-\sigma_0(t-h)\Big]=\begin{cases} t>0 \text{ бўлганда } 0, \\ 0\leqslant t<h \text{ бўлганда } \dfrac{1}{h}, \\ h\leqslant t \text{ бўлганда } 0. \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 403-расмда тасвирланган.

Агар бу функцияни 0 дан h гача вақт орасида таъсир этувчи, қолган вақтда эса 0 га тенг, куч деб талқин қилинса, у ҳолда бу кучнинг импульси бирга тенг бўлиши равшан.

Бу функциянинг тасвири (8) ва (70) формулаларга асосан қуйидагича бўлади:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\,et^{-ph}\right),$$



403-расм.

яъни

$$\sigma_1(t,h)\leftarrow\!\!\div\frac{1}{p}\left(\frac{1-e^{-ph}}{h}\right). \tag{72}$$

Механика жуда қисқа вақт давомида таъсир этувчи кучни бир онда таъсир этувчи, аммо чекли импульсга эга бўлган куч деб қараш қулай бўлади. Шунинг учун $\sigma_1(t,h)$ функциянинг $h\to 0$ даги лимити сифатида $\delta(t)$ функция киритилади:

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\sigma_1(t,h).^{*)} \tag{73}$$

Бу функция *бирлик импульс функция* ёки дельта-функция деб аталади.

Бундай фараз қилиш мумкин:

$$\int_{-\infty}^{-\infty}\delta(t)\,dt=1. \tag{74}$$

Бундай ҳам ёзишади:

$$\int_{0}^{0}\delta(t)\,dt=1. \tag{75}$$

$\delta(x)$ функция фақат механикада эмас, математиканинг кўп бўлимларида, жумладан математик физика тенгламаларининг кўп масалаларини ечишда татбиқ этилишини айтиб ўтамиз.

---

*) Шуни назарда тутмоқ керакки, $\delta(t)$ одатдагича тушуниладиган функция эмас. (Кўп физик авторлар $\delta(t)$ ни Дирак функцияси деб атайдилар.)

Агар $\delta(t)$ ни куч фараз қилсак, унинг таъсирини қараймиз. Ушбу тенгламанинг

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \delta(t) \tag{76}$$

берилган бошланғич шартлар; $t = 0$ бўлганда $s=0, \frac{ds}{dt} = 0$ ни қаноатлантирувчи ечимини топамиз. (76) тенгламадан (75) ни эътиборга олиб, ушбуни топамиз:

$$v = \frac{ds}{dt} = \int_0^t \delta(\tau)\, d\tau = 1, \tag{77}$$

бу ерда t ҳар қандай қийматга, жумладан 0 га тенг бўлиши мумкин. Демак, $\delta(x)$ функцияни (73) тенглик билан аниқлаганда бу функцияни массаси бир бўлган моддий нуқтага $t = 0$ онда бирликка тенг тезлик берувчи куч деб талқин қилиш мумкин.

$\delta(t)$ функциянинг L-тасвирини $\sigma_1(t, h)$ функциянинг $h \to 0$ даги лимити сифатида аниқлаймиз:

$$L\{\delta(x)\} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1-e^{-ph}}{h} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

(бу ерда лимитни топиш учун Лопиталь қоидасидан фойдаланилади). Шундай қилиб,

$$\delta(t) \underset{\cdot}{\leftarrow} 1. \tag{78}$$

Сўнгра $\delta(t - t_0)$ функция топилади.

Бу функцияни $t = t_0$ онда бирлик массага бирга тенг тезлик берувчи куч деб талқин қилинади. Кечикиш теоремасига асосан ушбу формулага эга бўламиз:

$$\delta(t - t_0) \underset{\cdot}{\leftarrow} e^{-pt} \tag{79}$$

(75) даги каби ушбуни ёзишимиз мумкин:

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \tag{80}$$

Дельта-функциянинг механикадаги маъносига асосан тенгламанинг ўнг томонида дельта-функция бўлса, уни бошланғич шартларини тегишлича ўзгартириш билан алмаштириш мумкин. Буни содда мисолда кўрсатамиз. Ушбу дифференциал тенглама

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t) + \delta(t) \tag{81}$$

берилган бўлсин. Бунинг бошланғич шартлари: $t = 0$ да $x_0 = 0$, $x'_0 = 0$ бўлсин. Ёрдамчи тенглама бундай бўлади:

$$p^2 \bar{x}(p) = F(p) + 1, \tag{82}$$

бундан

$$\bar{x}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2}.$$

Жадвалнинг 9 ва 15-формулаларидан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)(t - \tau)\, d\tau + t. \tag{83}$$

Бошланғич шартлари: $t = 0$ да $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$ бўлган

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

тенгламани ечганда ҳам шу натижага келган бўлар эдик. Бу ҳолда ёрдамчи тенглама

$$p^2 \bar{x}(p) - 1 = F(p \qquad (84$$

кўринишда бўлар эди. Бу эса (82) нинг ечими билан бир хил бўлади.

Ниҳоят, дельта-функциянинг қуйидаги аҳамиятли хоссасини айтиб ўтамиз. (74) ва (75) тенгликларга асосан бундай ёзишимиз мумкин:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \begin{cases} -\infty < t < 0 \text{ бўлганда, } 0 \\ 0 \leqslant t < \infty \text{ бўлганда, } 1, \end{cases} \tag{85}$$

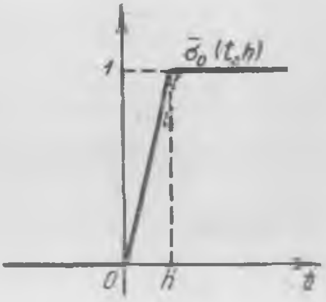
яъни бу интеграл Хевисайднинг бирлик функцияси $\sigma_0(t)$ га тенг.

Шундай қилиб

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau. \tag{86}$$

Бу тенгликнинг ўнг ва чап томонларини t бўйича дифференциаллаб, ушбу шартли тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\sigma'_0(t) = \delta(t). \tag{87}$$



404- расм.

(87) шартли тенгликнинг маъносини изоҳлаш учун 404- расмда тасвирланган $\bar{\sigma}_0(t, h)$ функцияни қараймиз. Равшанки,

$$\bar{\sigma}'_0(t, h) = \sigma_1(t, h) \tag{88}$$

($t = 0$ ва $t = h$ нуқталардан бошқа).

(88) тенгликда $h \to 0$ шарти билан лимитни олсак, $\bar{\sigma}_0(t, h) \to \sigma_0(t)$ бўлишини кўрамиз ва бундай ёзамиз: $h \to 0$ да $\bar{\sigma}'_0(t, h) \to \sigma'_0(t)$.

(88) тенгликнинг ўнг томони $h \to 0$ да $\sigma_1(t, h) \to \delta(t)$. Шундай қилиб, (88) тенглик (87) шартли тенгликка айланади.

XIX БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Қуйидаги тенгламаларнинг кўрсатилган бошланғич шартларда ечимлари топилсин:

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, $t = 0$ да $x = 1$, $x' = 2$. *Жав.* $x = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

2. $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} = 0$, $t = 0$ да $x = 2$, $x' = 0$, $x'' = 1$. *Жав.* $x = 1 - t + e^t$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (a^2 + b^2)x = 0$, $t = 0$ да $x = x_0$, $x' = x_0$. *Жав.*

$$x = \frac{e^{at}}{b}\left[x_0 b \cos bt + (x'_0 - x_0 a) \sin bt\right].$$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{5t}$ $t = 0$ да $x = 1$, $x' = 2$. *Жав.* $x = \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{2}{3}e^{2t}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = a \cos nt$, $t = 0$ да $x = x_0$, $x' = x'_0$. *Жав*

$$x = \frac{a}{m^2 - n^2}(\cos nt - \cos mt) + x_0 \cos mt + \frac{x'_0}{m} \sin mt.$$

6. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} = t^2$, $t = 0$ да $x = 0$, $x' = 0$. *Жав.* $x = 2e^t - \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 2t - 2$.

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = \frac{1}{2}t^2e^t$, $t = 0$ да $x = x' = x'' = 0$ *Жав.* $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t} - \frac{1}{3}\left\{\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right\}e^{\frac{1}{2}t}$.

8. $\frac{d^3x}{dt^3} + x = 1$, $t = 0$ да x $x'_0 = x''_0 = 0$. *Жав.* $x = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin t$, $t = 0$ да $x_0 = x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$.

Жав. $x = \frac{1}{8}\left[e^t(t - 2) + e^{-t}(t + 2) + 2 \sin t\right]$.

10. Ушбу дифференциал тенгламалар

$$\frac{d^2x}{dt^2} + y = 1, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + x = 0$$

системасининг $t = 0$ да $x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Жав. $x(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}e^t \quad \frac{1}{4}e^{-t} + 1$.

XX БОБ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Биз одатдаги турмушда, амалий фаолиятда ҳамда илмий текширишларда доимо шундай ҳолатларга дуч келамизки, бунда бизга азалдан одат бўлиб қолган қатъий детерминизм қонуниятлари энди ўринли бўлмай қолади. Кундалик тажриба бизни бунга ишонтиради. Бир неча мисол келтирамиз. Бизни тез ёрдам станциясига бир сутка давомида келиб тушадиган чақириқлар сони қизиқтиради деб тасаввур қилайлик.

Яқин суткалар давомида станцияга келиб тушадиган чақириқларнинг кўп ёки озлиги тўғрисида аниқ маълумот бериш учун ҳеч қандай имконият йўқ эканини узоқ вақт давомида олиб борилган кузатишлар кўрсатиб беради. Бу сон кўпгина ва бунинг устига тасодифий тебранишлар билан боғлангандир. Худди шунга ўхшаш, касал чақириғи билан етиб келган врачнинг сарф қиладиган вақти ҳам тасодифийдир.

Агар бир хил материалдан бир хил шарт-шароитда тайёрланган бирор N сондаги бирорта маҳсулот устида тажриба (синов) ўтказиш масаласи қўйилган бўлса, у ҳолда тажриба бошлангандан то бу маҳсулотлар ишга яроқсиз ҳолга (яъни чиқинди ҳолатигача) келгунга қадар сарф бўлган вақт тасодифий бўлиб, жуда кучли ўзгаришларга (тарқоқликка) мойил бўлар экан.

Тўпдан нишонга қараб отиш пайтида снарядлар тарқоқлиги деб аталувчи тарқоқлик кузатилади. Снаряд тушадиган нуқтанинг нишон марказидан оғишини олдиндан кўрсатиш имконияти йўқ—у тасодифийдир.

Табиат ҳодисаларидан ишончли фойдаланиш учун ёки технологик процессларни идора қила билиш учун тасодифийликнинг мавжудлиги фактини уқтириб ўтишнинг ўзи сира ҳам етарли эмас, тасодифий ҳодисани (воқеани) миқдор жиҳатдан баҳолашга, уларнинг қандай ўтишини олдиндан айтиб беришга ўрганиш зарур. Энди буни назарий масалалар ҳам, амалий масалалар ҳам қатъий талаб қилмоқда. Бу ерда келиб чиқадиган масалаларни ечиш ҳамда умумий математик назарияни яратиш билан иккита математик фан машғулдир—улар эҳтимоллар назарияси ва математик статистика.

Бу бобда эҳтимоллар назарияси ҳамда математик статистика элементлари баён этилган.

1-§. Тасодифий ҳодиса (воқеа). Тасодифий ҳодисанинг нисбий частотаси (такрорланиши). Ҳодисанинг эҳтимоли. Эҳтимоллар назариясининг мавзуи (предмети)

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаси *тасодифий ҳодиса* тушунчасидан иборат. Баъзи бир шартлар бажарилганда рўй бериши (келиб чиқиши) ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган ҳодиса тасодифий ҳодиса деб аталади.

1-*мисол.* Танга ташланганда гербнинг келиб чиқиши тасодифий ҳодисадир.

2-*мисол.* Берилган қуролдан берилган объектга ёки берилган юзга қараб отганда ўқни бу объектга ёки юзга тегиши тасодифий ҳодисадир.

3-*мисол.* Ихтиёримиздаги ишлаб чиқариш воситаларида диаметрининг катталиги 20 *см* га тенг бўлган цилиндр ясаш пайтида 0,2 *мм* дан кам хато қилиш тасодифий ҳодисадир.

1-таъриф. A ҳодисанинг *нисбий частотаси* ёки *частотаси* p^* деб берилган ҳодисанинг рўй бериш сони m^* нинг берилган ҳодиса ҳар бирида рўй бериши ёки рўй бермаслиги мумкин бўлган бир хил ўтказилган тажрибаларнинг умумий n^* сонига нисбатини айтилади. Буни қуйидагича ёзамиз:

$$P^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n^*}. \qquad (1)$$

4-*мисол.* Берилган объектга қараб берилган тўпдан бир хил шарт-шароитда 6 серия отиш бажарилган:

биринчи серия 5 та отишдан иборат бўлиб, ундан 2 таси мўлжалга теккан,

иккинчи серия 10 та отишдан иборат бўлиб, ундан 6 таси мўлжалга теккан,

учинчи серия 12 та отишдан иборат бўлиб, ундан 7 таси мўлжалга теккан,

тўртинчи серия 50 та отишдан иборат бўлиб, ундан 27 таси мўлжалга теккан,

бешинчи серия 100 та отишдан иборат бўлиб, ундан 49 таси мўлжалга теккан,

олтинчи серия 200 та отишдан иборат бўлиб, ундан 102 таси мўлжалга теккан.

A ҳодиса—ўқнинг нишонга (мўлжалга) тегиши. Серияларда ўқнинг мўлжалга тегишининг нисбий частотаси қуйидагича бўлади:

1- серияда $2/5 = 0{,}40$,
2- серияда $6/10 = 0{,}60$,
3- серияда $7/12 = 0{,}58$,
4- серияда $27/50 = 0{,}54$,
5- серияда $\frac{49}{100} = 0{,}49$,
6- серияда $\frac{102}{200} = 0{,}51$.

Турли ҳодисаларни кузатишлардан кўринадики, агар ҳар бир сериядаги тажрибалар сони амалда катта бўлмаса, у ҳолда ҳар бир серияда A ҳодисанинг рўй бериши нисбий частоталари бир-биридан муҳим фарқ қилиши мумкин. Агар сериялардаги тажрибалар сони катта бўлса, у ҳолда турли серияларда A ҳодисанинг рўй бериши нисбий частоталари одатда бир-биридан кам фарқ қилади ва бу фарқ сериялардаги тажрибалар сони қанча кўп бўлса шунча кам бўлади. Тажрибалар сони катта бўлганда нисбий частота борган сари тасодифий характерда бўлишдан чиқиб боради. Аммо шуни ҳам қайд қилиб ўтамизки, частотаси (такрорланиши) турғун характерда бўлмайдиган ва унинг миқдори турли серияларда, ҳатто жуда катта серияларда ҳам, бир-биридан кучли фарқ қиладиган ҳодисалар мавжуд.

Тажрибанинг кўрсатишига қараганда, кўпгина ҳолларда шундай ўзгармас p сон мавжудки, A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси, жуда кам учрайдиган ҳоллардан ташқари, синовлар сони катта бўлганда шу p сондан кам фарқ қилади. Тажрибадан ҳосил қилинадиган бу факт символик равишда қуйидагича ёзилади.

$$\frac{m^*}{n^*}\xrightarrow[n^*\to\infty]{} p. \qquad (2)$$

p сон тасодифий A ҳодисанинг рўй бериш *эҳтимоли* деб аталади. Кейинги жумлани символик равишда бундай ёзилади:

$$\mathrm{P}(A)=p. \qquad (3)$$

p эҳтимол берилган синовларда A ҳодиса рўй бериши имкониятининг A ҳодиса характери билан аниқланадиган *объектив характеристикасидан* иборатдир.

Кўпинча, мавжудлигини эътиборга олмаслик мумкин бўлган „кам учрайдиган ҳоллардан“ ташқари, катта сондаги синовларда нисбий частота эҳтимолдан кам фарқ қилади. (2) муносабатни сўз билан қисқача бундай таърифлайдилар:

Тажрибалар n^* сони чексиз ўсиб борганда A ҳодисанинг нисбий частотаси шу ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га яқинлашади.

Эслатма. Юқорида келтирилган мулоҳазаларда биз тажрибаларга асосланиб (2) муносабатни қоида сифатида қабул қилдик. Аммо тажрибадан келиб чиқадиган бошқа табиий шартларни ҳам қоида сифатида қабул қиладилар. Улардан (2) муносабат келтириб чиқарилади, бу ҳолда энди у теорема бўлади. (2) муносабат эҳтимоллар назариясида Я. Бернулли (1654—1705) теоремаси номи билан маълум.

Эҳтимол бирор ҳодисанинг рўй бериши имкониятининг объектив характеристикаси бўлгани учун ҳарбий ишларда ҳам, саноатни ташкил қилишда ҳам, иқтисод масалаларида ҳам ва ҳ. к. ларда қарашга тўғри келадиган кўп процессларнинг (жараёнларнинг) ўтиб бориш (кечиш) характерини олдиндан айтиб бериш учун бирор мураккаб ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини аниқлай билиш зарур бўлади.

Берилган мураккаб ҳодисани аниқловчи элементар ҳодисалар эҳтимолларига кўра у ҳодиса эҳтимолини аниқлаш, турли тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимоллик қонуниятларини ўрганиш *эҳтимоллар назариясининг* предметидир.

2-§. Эҳтимолнинг классик таърифи ва эҳтимолларни бевосита ҳисоблаш

Кўп ҳолларда қаралаётган тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли қўрилаётган тажриба анализига асосан ҳисобланиши мумкин бўлади.

Бундан кейинги баёнимизнинг тушунарли бўлиши учун мисолга мурожаат қиламиз.

1-мисол. Ёқларига 1 дан 6 гача турли сонлар ёзилган бир жинсли кубни соққа (шашқол) деб атаймиз. Соққа ташланганда унинг юқори ёғида $l\,(1 \leqslant l < 6)$ сонининг пайдо бўлишини — тасодифий ҳодисани қараймиз. Соққамиз симметрик бўлгани учун 1 дан 6 гача сонлардан исталган бирининг келиб чиқиши — ҳодисаларнинг рўй бериши — бир хил имкониятга эга бўлгани учун уларни *тенг имкониятли* ҳодисалар деб аталади. Соққани ташлаш сони n катта бўлганда l сонини — 1 дан 6 гача ҳар қандай сонларнинг ҳар бирининг ҳам — соққанинг юқори ёғида пайдо бўлишини тақрибан $\frac{n}{6}$ ҳолда кутиш мумкин. Бу тажриба билан тасдиқланган.

Нисбий частота $p^* = \frac{1}{6}$ сонга яқин бўлади. Шунинг учун l сонининг шунингдек, 1 дан 6 гача ҳар қандай бошқа соннинг ҳам, юқори ёқда пайдо бўлиш эҳтимолини $\frac{1}{6}$ га тенг деб ҳисобланади.

Эҳтимоллари бевосита ҳисобланадиган тасодифий ҳодисалар анализи билан биз қуйида шуғулланамиз.

1-таъриф. Агар берилган тажрибада тасодифий ҳодисаларнинг ҳеч қандай иккитасининг биргаликда рўй бериши мумкин бўлмаса, бундай ҳодисалар *биргаликда эмас* (биргаликда бўлмаган) ҳодисалар дейилади.

2-таъриф. Агар ҳар бир тажрибада тасодифий ҳодисалардан исталган бирининг рўй бериши мумкин бўлиб, бу ҳодиса билан биргаликда эмас бирор бошқа ҳодисанинг рўй бериши мумкин бўлмаса, бу ҳолда тасодифий *ҳодисалар тўлиқ группани ташкил қилади* деб айтамиз.

Тенг имкониятли биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини қарайлик. Бундай ҳодисаларни *ҳоллар* (ёки *имконлар*) деб атаймиз.

Бундай группанинг ҳодисаси (ҳоли), агар унинг рўй бериши натижасида A ҳодисанинг рўй бериши келиб чиқадиган бўлса, A ҳодисанинг рўй беришига *қулайлик туғдирувчи* ҳодисалар (ҳоллар) деб аталади.

2-мисол. Қутида 8 та шар бўлиб, унинг ҳар бирига биттадан 1 дан 8 гача бўлган рақам ёзилган 1, 2, 3 рақамли шарлар қизил, қолган бошқа шарлар эса қора рангда. 1 рақамли шарнинг пайдо бўлиши (шунингдек 2 ва 3 рақамли шарнинг пайдо бўлиши ҳам) қизил шарнинг пайдо бўлишига қулайлик туғдирувчи ҳодисадир.

Қаралаётган ҳол учун эҳтимолга 1-§ дагидан бошқача таъриф бериш мумкин.

3-таъриф. *A ҳодисанинг p эҳтимоли* деб A ҳодисага қулайлик туғдирувчи ҳоллар (имконлар) m сонининг тенг имкониятли, биргаликда бўлмаган ҳодисалар тўлиқ группасини ташкил қилувчи барча мумкин бўлган ҳоллар n сонига нисбатини айтилади, ёки символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$P(A) = p = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

4-таъриф. Агар қандайдир бирор ҳодисага тенг имкониятли биргаликда эмас ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилувчи барча n ҳоллар қулайлик туғдирса, бундай ҳодиса, *муқаррар ҳодиса* деб аталади. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг. Тенг имкониятли, биргаликда эмас ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилувчи барча n ҳолларнинг ҳеч бири A ҳодисага қулайлик туғдирмаса, бундай ҳодиса рўй бериши *мумкин бўлмаган ҳодиса* дейилади. Унинг эҳтимоли $p = 0$.

1-эслатма. Берилган ҳолда тескари тасдиқ ҳам ўринлидир. Аммо бошқа ҳолларда, жумладан, узлуксиз тасодифий миқдор қаралган ҳолда (12-§) тескари тасдиқ ўринли бўлмаслиги ҳам мумкин, яъни бирор ҳодисанинг эҳтимолини 1 га ёки 0 га тенг бўлишидан унинг муқаррар ёки рўй бериши мумкин бўлмаган ҳодиса эканлиги келиб чиқмайди.

Эҳтимолнинг таърифидан унинг ушбу

$$0 \leqslant p \leqslant 1$$

муносабатни қаноатлантириши келиб чиқади.

3-мисол. 36 та картали дастадан битта карта тортиб олинади. Чиллик туридаги картанинг келиб чиқиши эҳтимоли қандай?

Ечиш. Бу ерда ҳоллар схемаси тўғри келади, A ҳодиса чиллик туридаги картанинг келиб чиқиши.

Бунда ҳаммаси бўлиб $n = 36$ та мавжуд ҳол. A га қулайлик туғдирувчи ҳоллар сони $m = 9$.

$$\text{Демак, } p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

4-мисол. Иккита танга бир вақтда ташланади. Иккала тангада герб томоннинг тушиш эҳтимоли (иккита гербнинг пайдо бўлиш эҳтимоли) қандай?

Ечиш. Бўлиши мумкин бўлган ҳоллар схемасини тузамиз

	Биринчи танга	Иккинчи танга
1-ҳол	герб	герб
2-ҳол	герб	герб эмас
3-ҳол	герб эмас	герб
4-ҳол	герб эмас	герб эмас

Ҳоллар сони ҳаммаси бўлиб 4 та. Қулайлик туғдирувчи ҳоллар сони эса битта.

Демак, иккала тангада гербнинг пайдо бўлиши эҳтимоли

$$p = \frac{1}{4}.$$

5-мисол. Отишмала биринчи тўпдан нишонга тегиш эҳтимоли $\frac{8}{10}$ га, иккинчи тўпдан нишонга тегиш эҳтимоли эса $\frac{7}{10}$ га тенг. Иккала тўпдан бир вақтда ўқ узилганда нишонга тегиш эҳтимолини топинг. Бирор тўпдан отганда ҳеч бўлмаганда битта ўқнинг нишонга тегиши нишоннинг шикастланганлиги ҳисобланади.

Ечиш. Бу масала қуйидагича моделлаштирилади. Иккита қутида 10 тадан шар бўлиб, улар 1 дан 10 гача номерланган. Биринчи қутида 8 та қизил ва 2 та қора шар бўлиб, иккинчида эса 7 та қизил, ва 3 та қора шар бор. Ҳар бир қутидан биттадан шар олинади. Олинган иккита шар ичида камида биттаси қизил шар бўлиши эҳтимоли қандай?

Биринчи қутидаги ҳар бир шар иккинчи қутидаги ихтиёрий шар билан бирга олиниши мумкин бўлгани учун барча ҳоллар сони 100 та, яъни 100: $n = 100$.

Қулайлик туғдирувчи ҳолларни ҳисоблаймиз.

Иккинчи қутидаги ихтиёрий шар билан биргаликда биринчи қутидаги 8 та қизил шарнинг ҳар бирини олганда, олинган шарлар орасида энг камида битта қизил шар бўлади. Бундай ҳоллар $10 \times 8 = 80$ та. Биринчи қутидаги 2 та қора шарнинг ҳар бирини иккинчи қутидаги 7 та қизил шарнинг ҳар бири билан биргаликда олинганда олинган шарлар орасида битта қизил шар бўлади. Бундай имконлар $2 \times 7 = 14$ та Шундай қилиб, ҳаммаси бўлиб қулайлик туғдирувчи ҳоллар $m = 80 + 14 = 94$ та.

Олинган шарлар орасида камида битта қизил шар бўлиши эҳтимоли ушбуга тенг:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}.$$

Нишонга шикаст етказиш эҳтимоли ҳам шунга тенг.

2-эслатма. Бу мисолда отишмада эҳтимолни ҳисоблаш масаласини, биз қутидан шар олишда у ёки бу рангдаги шарнинг пайдо бўлиши эҳтимоли ҳақидаги масалага келтирдик. Эҳтимоллар назариясининг кўпгина масалаларини „Қутилар схемаси“га келтириш мумкин. Шунинг учун қутидан шар олиш масаласига *умумлашган масала* деб қараш лозим.

6-мисол. 100 та маҳсулотдан иборат бўлган партияда 10 та маҳсулот яроқсиз (брак). Олинган 4 та маҳсулот ичида 3 таси сифатли (брак эмас) бўлиши эҳтимоли қанча?

Ечиш. 100 та маҳсулотдан 4 тасини ушбу сондаги усуллар билан олиш мумкин:

$$n = C_{100}^4.$$

Бу 4 маҳсулот орасида 3 тасининг сифатли бўлиши ҳолларининг сони

$$m = C_{90}^3 \cdot C_{10}^1 \text{ га тенг.}$$

Изланаётган эҳтимол қуйидагига тенг:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}^3 \cdot C_{10}^1}{C_{100}^4} = \frac{1424}{4753} \approx 0{,}3.$$

3-§. Эҳтимолларни қўшиш. Қарама-қарши тасодифий ҳодисалар

1-таъриф. *Икки A_1 ва A_2 ҳодиса йиғиндиси* деб бу ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришидан иборат бўлган C ҳодисага айтилади.

Қуйида биргаликда бўлмаган иккита A_1 ва A_2 ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли қаралади. Бу ҳодисалар

$$A_1 + A_2$$

йиғинди ёки

$$A_1 \text{ ёки } A_2{}^{*)}.$$

шаклида белгиланади.

Эҳтимолларни қўшиш теоремаси деб аталадиган қуйидаги теорема ўринли:

1-теорема. *Берилган тажрибада (синовда) тасодифий A_1 ҳодиса $\mathbf{P}(A_1)$ эҳтимол билан ва A_2 ҳодиса $\mathbf{P}(A_2)$ эҳтимол билан рўй бериши мумкин бўлсин. A_1 ва A_2 ҳодисалар биргаликда эмас ҳодисалар бўлсин, бу ҳолда ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли, яъни ё A_1 ҳодиса, ёки A_2 ҳо-*

---

*) Бу ифодада „ёки“ сўзи рад этиш маъносида бўлмай, балки 1-таърифга мувофиқ бу ҳодисалардан камида биттасининг рўй беришини англатишига эътибор бериш керак.

диса рўй бериши эҳтимоли ушбу формула билан ҳисобланади.

$$P(A_1 \text{ ёки } A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (1)$$

Исбот. $P(A_1) = \frac{m_1}{n}$, $P(A_2) = \frac{m_2}{n}$ бўлсин. A_1 ва A_2 лар биргаликда эмас ҳодисалар бўлгани учун умумий ҳоллар сони n да A_1 ва A_2 ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳолларнинг сони нолга тенг бўлиб, ё A_1 ёки A_2 ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи ҳолларнинг сони эса $m_1 + m_2$ га тенг. Демак $P(A_1 \text{ ёки } A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$. Шуни исбот қилиш керак эди.

Бу теоремани ҳар қанча сондаги қўшилувчилар учун юқоридагига ўхшаш усул билан исбот қилиш мумкин:

$$P(A_1 \text{ ёки } A_2 \text{ ёки} \ldots \text{ёки } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad (1')$$

Кейинги тенгликни яна бундай ёзиш ҳам мумкин:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \quad (1'')$$

Эслатма. Биз эҳтимол бевосита ҳисоблаш йўли билан аниқланадиган ҳоллар схемаси учун қўшиш теоремасини исбот қилдик. Бундан кейин эҳтимолни бевосита ҳисоблаш мумкин бўлмаган ҳол учун ҳам қўшиш теоремаси ўринли деб ҳисоблаймиз. Бундай тасдиқ қуйидаги мулоҳазаларга асосланган. Тажриба сони катта бўлганда ҳодисаларнинг эҳтимоллари камдан-кам ҳоллардан ташқари нисбий частотага яқин, нисбий частота учун эса теореманинг исботи юқоридаги каби амалга оширилади. Бу эслатма бундан кейин келадиган теоремалар исботига ҳам тааллуқли бўлиб, уларни биз қутилар схемасидан фойдаланиб исбот қиламиз.

1-мисол. Бир-бири билан кесишмайдиган 3 та зонадан ташкил топган бирор соҳага қарата ўқ отилади (405-расм). Ўқнинг I зонага тушиш эҳтимоли $P(A_1) = \frac{5}{100}$. II зонага тушиш эҳтимоли $P(A_2) = \frac{10}{100}$, III зонага тушиш эҳтимоли $P(A_3) = \frac{17}{100}$. Ўқнинг D соҳага тушиш эҳтимоли қанча? A ҳодисаси D соҳага тушиш эҳтимоли бўлсин. (1′) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{5}{100} + \frac{10}{100} + \frac{17}{100} = \frac{32}{100}.$$

405-расм.

2-таъриф. Агар иккита ҳодиса биргаликда бўлмаса ва тўлиқ группани ташкил қилса, уларни *қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Агар бир ҳодисани A деб белгиланса, у ҳолда унга қарама-қарши бўлган ҳодисани $\overline{A}$ билан белгиланади.

A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p бўлсин, A ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимолини, яъни $\overline{A}$ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимолини $\mathrm{P}(\overline{A}) = q$ деб белгилаймиз.

Тажрибада ё A ҳодиса, ёки $\overline{A}$ ҳодисанинг рўй бериши шарт бўлгани учун 1-теоремага асосан

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$$

деган натижа келиб чиқади, *яъни қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолларининг йиғиндиси бирга тенг*:

$$p + q = 1. \tag{2}$$

2-мисол. Нишонга қарата битта ўқ узилган. Ўқнинг нишонга тегиши — A ҳодиса, тегиш эҳтимоли p: $\mathrm{P}(A) = p$. Ўқнинг нишонга тегмаслик эҳтимолини аниқланг. Ўқнинг нишонга тегмаслиги $\overline{A}$ ҳодисадир, у A ҳодисага қарама-қарши ҳодиса, шунинг учун ўқнинг нишонга тегмаслик эҳтимоли $q = 1 - p$.

3-мисол. Бирор ўлчаш ишлари бажарилади. Ўлчашда қилинган хатонинг λ дан кичик бўлиши—A ҳодиса. $\mathrm{P}(A) = p$ бўлсин. Қарама-қарши ҳодиса—қилинган хатонинг λ дан катта ёки λ га тенг бўлиши—$\overline{A}$ ҳодиса. Бу ҳодисанинг эҳтимоли

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = q = 1 - p.$$

1-натижа. *Агар тасодифий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:*

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) = 1. \tag{3}$$

Исбот. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилгани учун улардан қандайдир биттасининг рўй бериши муқаррар ҳодиса бўлади. Демак,

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ ёки } A_2 \text{ ёки } \ldots \text{ ёки } A_n) = 1.$$

Бу тенгликнинг чап томонини (1′) формула бўйича ўзгартирсак, (3) тенгликни ҳосил қиламиз.

3-таъриф. Агар берилган тажрибада A ва B ҳодисаларнинг иккаласининг рўй бериши мумкин бўлса, яъни A ва B ҳодисалар бирга рўй бера олса, A ва B ҳодисалар *биргаликдаги ҳодисалар* дейилади.

A ва B ҳодисаларнинг биргаликда эканлигини билдирувчи ҳодисани (A ва B) ёки (AB) кўринишда белгилаймиз. A ва B ҳодисаларнинг биргаликдалиги эҳтимолини $\mathrm{P}(A \text{ ва } B)$ деб белгилаймиз.

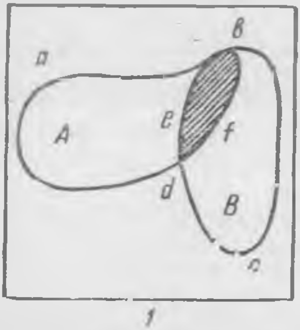
2-теорема. *Биргаликдаги ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоли*

$$\mathrm{P}(A \text{ ёки } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B - \mathrm{P}(A \text{ ва } B) \qquad (4)$$

формула билан ҳисобланади.

(4) формуланинг ўринли бўлишини биз геометрик тасвирлаш йўли билан кўрсатамиз. Дастлаб ушбу таърифни берамиз.

4-таъриф. Юзи S га тенг бўлган бирор D соҳа берилган бўлсин. D га кирувчи d соҳани қараймиз. Унинг юзи $\bar{S}$ бўлсин. Бу ҳолда нуқтанинг D соҳага тушишини муқаррар ҳодиса деб ҳисобласак, унинг d соҳага тушиш эҳтимоли $\bar{S}/S$ га тенг, яъни $p = \bar{S}/S$. Бу эҳтимолни *геометрик эҳтимол* дейилади.



406-расм.

Бу ҳолда нуқтанинг томони 1 га тенг бўлган квадратга тушишини муқаррар ҳодиса ҳисоблаб, қуйидагиларга эга бўламиз: (406-расм).

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{P}(A \text{ ёки } B) & = abcda \text{ нинг юзи}, \\ \mathrm{P}(A) & = abfda \text{ нинг юзи}, \\ \mathrm{P}(B) & = bcdeb \text{ нинг юзи}, \\ \mathrm{P}(A \text{ ва } B) & = debfd \text{ нинг юзи}. \end{array}\right| \qquad (5)$$

Ушбу тенгликнинг ўринли бўлиши равшан:

$$abcda \text{ нинг юзи} = abfda \text{ юзи} + bcdeb \text{ юзи} - debfd \text{ юзи}.$$

Бу тенгликка (5) тенгликнинг чап томонларини қўйиб, (4) тенгликни ҳосил қиламиз.

Шунга ўхшаш усул билан ихтиёрий сондаги биргаликда бўлган тасодифий ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимолини ҳисоблаш мумкин.

2-теоремани юқорида берилган таърифлар ҳамда амаллар қоидаларига асосланиб исбот қилиш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз.

4-§. Боғлиқ бўлмаган ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтириш

1-таъриф. Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли B ҳодисанинг рўй беришига ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда A ҳодиса B ҳодисага *боғлиқ эмас* дейилади.

1-теорема. *Агар A ҳамда B ҳодисалар боғлиқ бўлмаса, у ҳолда A ва B ҳодисаларнинг биргаликда бўлиш эҳти-*

моли A ва B ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимоллари кўпайтмасига тенг:

$$\mathrm{P}(A \text{ ва } B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B). \qquad (1)$$

Исбот. Бу теорема исботини қутилар схемаси учун келтирамиз. Иккита қутининг ҳар бирида мос тартибда n_1 ва n_2 тадан шар бор. 1- қутида m_1 та қизил шар бор бўлиб, қолганлари қора шарлар. Иккинчи қутида эса m_2 та қизил шар бўлиб, қолганлари қора шарлар. Ҳар бир қутидан биттадан шар олинади. Олинган шарларнинг иккаласининг ҳам қизил бўлиши эҳтимоли қанча?

A ҳодиса—биринчи қутидан қизил шарни олиш, B ҳодиса эса иккинчи қутидан қизил шарни олиш бўлсин. Бу ҳодисалар боғлиқ бўлмаган ҳодисалардир.

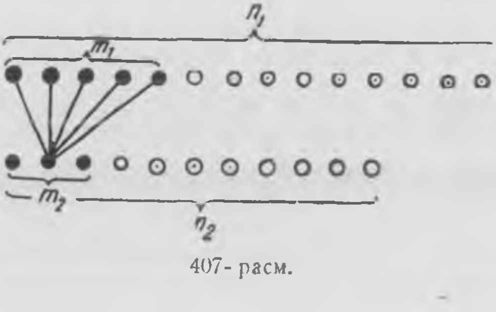
$$\mathrm{P}(A) = \frac{m_1}{n_1}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{m_2}{n_2} \qquad (2)$$

бўлиши равшан.

Ҳар бир қутидан бир вақтда биттадан шар олишда мумкин бўлган барча ҳоллар сони $n_1 n_2$ та бўлади. Иккала қутидан қизил шарларнинг олинишига қулайлик туғдирувчи ҳолларнинг сони $m_1 m_2$ га тенг. A ва B ҳодисаларнинг биргаликда бўлиш эҳтимоли

$$\mathrm{P}(A \text{ ва } B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

Бу формулада $\frac{m_1}{n_1}$ ва $\frac{m_2}{n_2}$ ларни уларнинг (2) даги ифодалари билан алмаштириб, (1) тенгламани ҳосил қиламиз. Бу теореманинг кўргазмали тасвирини 407- расмдан қаранг.



407- расм.

Агар n та боғлиқ бўлмаган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларни олсак, у ҳолда юқоридагига ўхшаш йўл билан

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ ва } A_2 \text{ ва } \ldots \text{ ва } A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n) \qquad (3)$$

тенгликнинг ўринли бўлишини исбот қилиш мумкин.

1-мисол. Иккита танкдан битта нишонга қарата ўқ узилади. Биринчи танкдан отилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $\frac{9}{10}$, иккинчидан эса—$\frac{5}{6}$. *Иккала танкдан бир вақтда биттадан ўқ узилган. Нишонга иккита ўқ тегиши эҳтимолини аниқланг.*

Ечиш. Бунда $P(A)=\frac{9}{10}$, $P(B)=\frac{5}{6}$; $P(A$ ва $B)$—иккита ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли (1) формулага кўра топилади: $P(A$ ва $B)=\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{4}$.

2-мисол. Асбобнинг тўхтамасдан ишлаши асбобни ташкил қилувчи *учта бўғиннинг ҳар бирини тўхтамасдан ишлаши билан аниқланади.* Бирор циклда бўғинларнинг тўхтамасдан ишлаши эҳтимоли мос равишда $p_1=0{,}6$; $p_2=0{,}7$; $p_3=0{,}9$ га тенг. Кўрсатилган циклда асбобнинг тўхтамасдан ишлаши эҳтимолини топинг.

Ечиш. Эҳтимолларни (3) кўпайтириш теоремасига мувофиқ қуйидагини ёзамиз:

$$p=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}378.$$

Эслатма. Биргаликда ҳодисаларнинг йиғиндиси эҳтимоли ҳақидаги 3-§ даги 2-теорема (4) формула (1) формулани ҳисобга олганда бундай ёзилади:

$$P(A \text{ ёки } B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B). \tag{4}$$

3-мисол. 2-§ 5-мисолда таърифланган масалани (4) формуладан фойдаланиб ечинг.

Ечиш. A ҳодиса—биринчи тўпдан отилган ўқнинг нишонга тегиши, B ҳодиса—иккинчи тўпдан отилган ўқнинг нишонга тегиши бўлсин. У ҳолда

$$P(A)=\frac{8}{10},\quad P(B)=\frac{7}{10},$$

$$P(A \text{ ёки } B)=\frac{8}{10}+\frac{7}{10}-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{94}{100}$$

экани равшан. Олдин ҳосил қилинган натижани олганимиз табиий.

4-мисол. *Бир отишда нишонни йўқ қилиш* эҳтимоли p га тенг. Q га тенг ёки ундан катта эҳтимол билан нишонни йўқ қилиш учун зарур бўлган ўқ узишлар n сонини аниқланг.

Ечиш. Эҳтимолларнинг йиғиндиси ҳамда кўпайтмаси ҳақидаги теоремаларга асосан қуйидагини ёза оламиз:

$$\geqslant 1-(1-p)^n.$$

Бу тенгсизликни n га нисбатан ечиб,

$$n\geqslant\frac{\lg(1-Q)}{\lg(1-p)}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бундай аналитик ечимга эга бўлган масала „қутилар системаси“ терминларида осон таърифланади.

5-§. Боғлиқ ҳодисалар. Шартли эҳтимол. Тўлиқ эҳтимол

1-таъриф. Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли B ҳодисанинг рўй бериш ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлса, у ҳолда A ҳодиса B *ҳодисага боғлиқ* дейилади.

A ҳодисанинг B ҳодиса рўй беради деган шартдаги эҳтимолини $P(A/B)$ билан белгилаймиз ва B шартида *A ҳодисанинг шартли эҳтимоли* деб атаймиз.

1-мисол. Қутида 3 та оқ ва 2 та қора шар бор. Қутидан битта шар олинади (биринчи олиш) ундан кейин иккинчи шар олинади (иккинчи олиш). B ҳодиса—биринчи олишда оқ шарнинг келиб чиқиши, A ҳодиса иккинчи олишда оқ шарнинг келиб чиқиши.

Агар B ҳодиса рўй берган бўлса, A ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A/B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

бўлиши равшан.

B ҳодиса рўй бермаци демак, биринчи олишда қора шар келиб чиққан деган шартда A ҳодисанинг эҳтимоли

$$P(A/\overline{B})=\frac{3}{4}$$

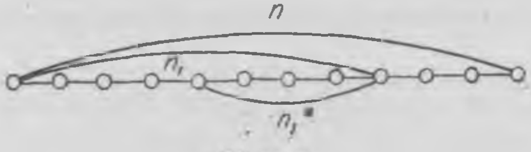
га тенг. Булардан кўрамизки,

$$P(A/B)\neq P(A/\overline{B}).$$

1-теорема. *Иккита ҳодисанинг биргаликда бўлиш эҳтимоли бир ҳодиса эҳтимоли билан бу ҳодиса рўй берди деган шартда иккинчи ҳодисанинг шартли эҳтимоли кўпайтмасига тенг, яъни*

$$P(A \text{ ва } B)=P(B)\cdot P(A/B). \tag{1}$$

Исбот. Исботни қутилар схемасига келадиган ҳодисалар учун келтирамиз (яъни эҳтимолнинг классик таърифи қўлланиладиган ҳол учун исбот қиламиз).



408- расм

Қутида n та шар бўлиб, ундан n_1 таси оқ, n_2 таси қора бўлсин. n_1 та оқ шар орасида n_1^* шар „юлдузча“ белгили бўлиб, қолганлари соф оқ (408- расм) дейлик.

Қутидан битта шар олинади. „юлдузча“ белгили оқ шар чиқиши ҳодисасининг эҳтимоли қанча?

B ҳодиса—оқ шарнинг келиб чиқиши, A — „юлдузча“ белгили оқ шарнинг келиб чиқиш ҳодисаси бўлсин:

$$P(B)=\frac{n_1}{n} \tag{2}$$

бўлиши равшан.

Оқ шар келиб чиқди шартида „юлдузча“ белгили оқ шарнинг келиб чиқиш эҳтимоли

$$P(A/B)=\frac{n_1^*}{n_1}. \qquad (3)$$

„Юлдузча“ белгили оқ шарнинг келиб чиқиш эҳтимоли $P(A$ ва $B)$ дир.

$$P(A \text{ ва } B)=\frac{n_1^*}{n} \qquad (4)$$

бўлиши равшан. Аммо

$$\frac{n_1^*}{n}=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{n_1^*}{n_1}. \qquad (5)$$

(2), (3) ва (4) ифодалар чап томонларини (5) га қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(A \text{ ва } B)=P(B)\cdot P(A/B).$$

(1) тенглик исбот қилинди.

Агар қаралаётган ҳодисалар классик схемага тушмаса, у ҳолда (1) формула шартли эҳтимолни таърифлаш учун хизмат қилади. Зотан, B ҳодиса рўй берди деган шартда A ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P(A/B)=\frac{P(A \text{ ва } B)}{P(B)} \qquad (P(B)\neq 0 \text{ бўлганда})$$

формула билан аниқланади.

1-эслатма. Кейинги формулани $P(B$ ва $A)$ ифодага татбиқ қиламиз:

$$P(B \text{ ва } A)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (6)$$

(1) ва (6) тенгликларда чап томонлар бир-бирига тенг, чунки улар бир хил эҳтимолдан иборат, демак, уларнинг ўнг томонлари ҳам тенг. Шунинг учун ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$P(A \text{ ва } B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (7)$$

2-мисол. Бу параграф бошланишида келтирилган 1-мисолдаги ҳол учун қуйидагиларга эга бўламиз;

$$P(B)=\frac{3}{5}, \qquad P(A/B)=\frac{1}{2}.$$

(1) формулага кўра,

$$P(A \text{ ва } B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

ни ҳосил қиламиз.

$P(A$ ва $B)$ эҳтимол бевосита ҳисоблаш йўли билан ҳам осон топилади.

3- мисол. Берилган станокда яроқли маҳсулот тайёрлаш эҳтимоли 0,9 га тенг. Яроқли маҳсулотлар орасида биринчи навли (1 сортли) маҳсулотнинг пайдо бўлиш эҳтимоли 0,8 га тенг. Берилган станокда биринчи навли маҳсулот тайёрлаш эҳтимолини топинг.

Ечиш. B ҳодиса—берилган станокда яроқли маҳсулот тайёрлаш. A ҳодиса—биринчи навли маҳсулотнинг пайдо бўлиши. Бу ерда $\mathrm{P}(B) = 0{,}9$, $\mathrm{P}(A/B) = 0{,}8$.

Буларни (1) формулага қўйиб, изланаётган эҳтимолни топамиз:

$$\mathrm{P}(A \text{ ва } B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72.$$

2-теорема. *Агар A ҳодисанинг рўй бериши биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилувчи $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ҳодисаларнинг фақат биттасининг рўй бериши билан биргаликда бўлса, у ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоли ушбу формула билан ҳисобланади:*

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1) \cdot \mathrm{P}(A/B_1) + \mathrm{P}(B_2)\,\mathrm{P}(A/B_2) + \ldots + \mathrm{P}(B_n)\,\mathrm{P}(A/B_n). \tag{8}$$

(8) *формула тўлиқ эҳтимол формуласи* дейилади.

Исбот. A ҳодиса биргаликда бўлган

$$(B_1 \text{ ва } A), \qquad (B_2 \text{ ва } A), \ \ldots, \qquad (B_n \text{ ва } A)$$

ҳодисаларнинг ихтиёриси бажарилганда рўй бериши мумкин. Демак, эҳтимолларнинг қўшиш теоремасига мувофиқ қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B_1 \text{ ва } A) + \mathrm{P}(B_2 \text{ ва } A) + \ldots + \mathrm{P}(B_n \text{ ва } A).$$

Ўнг томондаги қўшилувчиларни (1) формулага мувофиқ алмаштириб, (8) тенгликни ҳосил қиламиз.

4- мисол. Нишонга қарата учта кетма-кет ўқ узилган. Биринчи узилган ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли $p_1 = 0{,}3$, иккинчисиники $p_2 = 0{,}6$, учинчисиники эса $p_3 = 0{,}8$. Битта ўқ текканда нишоннинг зарарланиш эҳтимоли $\lambda_1 = 0{,}4$, иккита текканда $\lambda_2 = 0{,}7$, учта текканда $\lambda_3 = 1{,}0$. Учта ўқ узилганда (A ҳодиса) нишоннинг зарарланиш эҳтимолини ҳисобланг.

Ечиш. Биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўлиқ группасини қараймиз:

B_1 — битта ўқ теккан.
B_2 — иккита ўқ теккан.
B_3 — учта ўқ теккан.
B_4 — битта ҳам ўқ тегмаган.

Ҳар бир ҳодисанинг эҳтимолини ҳисоблаймиз. Битта ўқ тегиши рўй беради, агар: ёки биринчи узилган ўқ тегади, иккинчи ва учинчиси эса—тегмайди; ёки биринчи узилган ўқ тегмайди, иккинчиси тегади, учинчиси тегмайди; ёки биринчи узилган ўқ тегмайди, иккинчиси тегмайди, учинчиси тегади. Шунинг учун эҳтимолларни купайтириш ва қўшиш теоремаларига кўра, ўқнинг бир марта тегиш эҳтимоли учун ушбу ифодага эга бўламиз:

$$\mathrm{P}(B_1) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 = 0{,}332.$$

Худди шундай фикр юритиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}(B_2) = p_1 p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)\,p_3 + (1 - p_1)p_2 p_3 = 0{,}468,$$
$$\mathrm{P}(B_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}144,$$
$$\mathrm{P}(B_4) = (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 0{,}056.$$

Бу ҳодисаларнинг ҳар бири рўй берганда нишоннинг зарарланишининг шартли эҳтимолларини ёзамиз:

$$P(A/B_1) = 0{,}4,\ P(A/B_2) = 0{,}7,\ P(A/B_3) = 1{,}0,\ P(A/B_4) = 0.$$

Ҳосил қилинган ифодаларни (8) формулага қўйиб, нишоннинг зарарланиш эҳтимолини топамиз:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_8) + P(B_4) \cdot (A/B_4) = \\ = 0{,}332 \cdot 0{,}4 + 0{,}468 \cdot 0{,}7 + 0{,}144 \cdot 1{,}0 + 0{,}056 \cdot 0 = 0{,}6044$$

2-эслатма. Агар A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$P(A/B) = P(A),$$

бўлиб (1) формула ушбу кўринишни олади:

$$P(A \text{ ва } B) = P(B) \cdot P(A),$$

яъни 4-§ даги (1) формулани ҳосил қиламиз.

6-§. Гипотезалар эҳтимоли. Байес формуласи.

Масалани ифодалаш. 5-§ даги 2-теоремада бўлган каби рўй бериш эҳтимоллари $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_n)$ бўлган биргаликда эмас B_1, B_2, ..., B_n ҳодисаларнинг тўлиқ группасини қараймиз. A ҳодиса фақатгина B_1, B_2, ..., B_n ҳодисаларнинг қандайдир бирортаси билан биргаликда рўй бериши мумкин; B_1, B_2, ..., B_n ларни *гипотезалар* деб атаймиз.

A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 5-§ даги (8) формулага мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + \ldots + \\ + P(B_n)\,P(A/B_n). \qquad (1)$$

A ҳодиса рўй берди деб фараз қилайлик. A ҳодисанинг рўй бериши гипотезаларнинг $P(B_1)$, ..., $P(B_n)$ эҳтимолларини ўзгартиради. A ҳодиса рўй берди деб фараз қилиб, бу гипотезаларнинг бажарилиши шартли эҳтимолларини аниқлаш талаб қилинади, яъни

$$P(B_1/A),\ P(B_2/A),\ \ldots,\ P(B_n/A)$$

ларни аниқлаш талаб қилинади.

Масаланинг ечилиши. 5-§ даги (7) формулага кўра $P(A$ ва $B_1)$ эҳтимолни топамиз:

$$P(A \text{ ва } B_1) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) = P(A) \cdot P(B_1/A).$$

Бу тенгликдан

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}.$$

P(*A*) ўрнига унинг (1) ифодасини қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)}. \tag{2}$$

Шунга ўхшаш

$$P(B_2/A),\ P(B_3/A)\ ,\dots,\ P(B_n/A)$$

лар аниқланади. Шундай қилиб

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k)\cdot P(A/B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i)}. \tag{3}$$

(2) формула *Байес формуласи* ёки *гипотезалар теоремаси* деб аталади.

Эслатма. (3) формуладан кўринадики, $P(B_k/A)$ эҳтимолнинг ифодасида, яъни A ҳодиса рўй берди деган шартда B_k гипотезанинг рўй бериш эҳтимолида, махраж k номерга боғлиқ эмас.

1-мисол. Тажрибагача тўртта тенг эҳтимолли гипотезалар мавжуд бўлган; булар B_1, B_2, B_3, B_4 бўлиб

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 0{,}25.$$

A ҳодиса рўй беришининг шартли эҳтимоллари мос равишда қуйидагиларга тенг:

$$P(A/B_1) = 0{,}7, \qquad P(A/B_2) = 0{,}1,$$
$$P(A/B_3) = 0{,}1, \qquad P(A/B_4) = 0{,}02.$$

Синов натижасида A ҳодиса рўй берган бўлсин. Бу ҳолда (3) формулага кўра, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}7}{0{,}25\cdot 0{,}7 + 0{,}25\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}1 + 0{,}25\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}175}{0{,}23} \approx 0{,}76,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$P(B_3/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}1}{0{,}23} = 0{,}11,$$

$$P(B_4/A) = \frac{0{,}25\cdot 0{,}02}{0{,}23} = 0{,}02.$$

Бунда $P(B_1) = 0{,}25$ бўлиб, $P(B_1/A) = 0{,}76$ катта бўлиб қолди, чунки A ҳодиса рўй берган. Шунинг билан бир қаторда $P(A/B_1) = 0{,}7$ бўлиб, бошқа шартли эҳтимолларга қараганда катта.

2-мисол. Иккита танкнинг ҳар бири ўзича боғлиқ бўлмаган ҳолда бирор объектга қарата ўқ узди. Биринчи танк билан нишонни зарарлантириш эҳтимоли $p_1 = 0{,}8$, иккинчи танк билан эса $p_2 = 0{,}4$. Узилган битта ўқнинг тегиши натижасида объект зарарланган. Объектнинг биринчи танк билан зарарланган бўлиш эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. A ҳодиса—битта ўқнинг тегиши билан объектнинг зарарланиши. Отишгача қуйидаги гипотезаларнинг бўлиши мумкин.

B_1 — иккала танкдан узилган ўқ тегмаган.

B_2 — иккала танкдан узилган ўқ теккан.

B_3 — биринчи танкдан узилган ўқ теккан, иккинчидан тегмаган

B_4 — биринчи танкдан узилган ўқ тегмаган, иккинчидан — теккан. Эҳтимолларни кўпайтириш теоремасига асосланиб, бу гипотезалар эҳтимолларини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned}
&P(B_1) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12,\\
&P(B_2) = p_1 p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32,\\
&P(B_3) = p_1(1 - p_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48,\\
&P(B_4) = (1 - p_1)p_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.
\end{aligned}$$

A ҳодисанинг рўй бериши шартли эҳтимолларини аниқлаймиз:

$$P(A/B_1) = 0,\ P(A/B_2) = 0,\ P(A/B_3) = 1,\ P(A/B_4) = 1.$$

(2) формулага мувофиқ гипотезаларнинг шартли эҳтимолларини топамиз:

$$P(B_1 A) = \frac{0{,}12 \cdot 0}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}32 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = \frac{0}{0{,}56} = 0,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}32 \cdot 0}{0{,}56} = 0. \qquad P(B_3/A) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}56} = \frac{6}{7},$$

$$P(B_4/A) = \frac{0{,}08}{0{,}56} = \frac{1}{7}.$$

3-мисол. Асбобларнинг 30% ини юқори малакали мутахассис, 70% ини эса ўрта малакали мутахассис йиғади. Юқори малакали мутахассиснинг йиғган асбоби ишининг ишончлилиги 0,90, урта малакали мутахассиснинг йиғган асбобининг ишончлилиги 0,80. Олинган асбоб ишончли бўлиб чиқди. Асбоб юқори малакали мутахассис томонидан йиғилган эканлигининг эҳтимолини топинг.

Ечиш A ҳодиса—асбобнинг тўхтамай ишлаши. Асбобни текширишдан ўтказгунча ушбу гипотезалар бўлиши мумкин.

B_1 — асбобни юқори малакали мутахассис йиғган.

B_2 — асбобни ўрта малакали мутахассис йиғган.

Бу гипотезалар эҳтимолларини ёзамиз:

$$P(B_1) = 0{,}3, \qquad P(B_2) = 0{,}7.$$

A ҳодисанинг шартли эҳтимоли

$$P(A/B_1) = 0{,}9, \qquad P(A/B_2) = 0{,}8.$$

A ҳодиса рўй берди деган шартда B_1 ва B_2 гипотезалар эҳтимолларини топамиз.

(2) формулага мувофиқ, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8} = \frac{0{,}27}{0{,}83} = 0{,}325,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8} = \frac{0{,}56}{0{,}83} = 0{,}675.$$

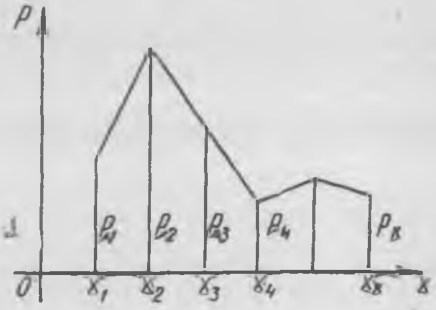
7- §. Дискрет тасодифий миқдор. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

1-таъриф. Агар ҳар бир x_k қийматга ўзгарувчи x миқдорнинг x_k қийматни қабул қилишининг маълум эҳтимоли p_k мос келса, у ҳолда тажриба натижасида чекли ёки чексиз x_1, x_2, . . . , x_k, . . . , кетма-кет қийматлардан бирини қабул қилувчи x ўзгарувчи миқдор *дискрет тасодифий миқдор* дейилади.

Таърифдан кўринадики, ҳар бир x_k қийматга p_k эҳтимол тўғри келади. p_k эҳтимолнинг x_k билан функционал боғланиши *дискрет тасодифий миқдорнинг x эҳтимоллари тақсимот қонуни* дейилади*).

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари	x_1	x_2	. . .	. . .	. . .	x_k	. . .
Бу қийматларнинг эҳтимоллари	p_1	p_2	. . .	. . .	. . .	p_k	. . .

Тақсимот қонуни *эҳтимоллар тақсимоти кўпбурчаги* кўринишида график усул билан берилиши ҳам мумкин, бунда, тўғри бурчакли координаталар системасида (x_k, p_k) координатали нуқталар ясалади ва улар синиқ чизиқ билан туташтирилади (409-расм).



409- расм.

Тақсимот қонуни аналитик усулда ҳам берилиши мумкин:

$$p_k = f(x_k).$$

Тасодифий миқдор x нинг x_1, x_2, . . . x_k, . . . , кетма-кет қийматлардан биттасининг қабул қилиши муқаррар ҳодисадир ва шунинг учун ушбу шарт бажарилиши керак: N та қийматнинг чекли кетма-кетлиги бўлган ҳолда:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \qquad (1)$$

---

*) Баъзан қисқача қилиб „тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни" дейилади.

кетма-кетлик чексиз бўлган ҳолда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \qquad (1')$$

Тасодифий миқдорнинг энг катта эҳтимолга эга бўлган қиймати *мода* деб аталишини эътиборга олиб ўтамиз. 409-расмда тасвир этилган тасодифий миқдор x нинг модаси x_2 дир.

1-мисол. Ўзгарувчи x миқдор соққани бир марта ташлаганда унинг юқори ёғида пайдо бўладиган очколар сони. Ўзгарувчи x миқдор 1, 2, 3, 4, 5, 6 қийматлардан биттасини қабул қилиши мумкин. Ҳар бир қийматнинг пайдо бўлиш эҳтимоли $^1/_6$ га тенг. Демак, бу тасодифий миқдорнинг тақсимот жадвали ушбу кўринишда бўлади:

x	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-мисол Чексиз кетма-кет синовларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг. x тасодифий миқдор – A ҳодиса биринчи маротаба рўй берадиган синовнинг номери. Тасодифий миқдор x нинг тақсимот қонунини топинг.

Ечиш. Тасодифий миқдор x ихтиёрий бутун мусбат 1, 2, 3 . . қийматларни қабул қилиши мумкин. A ҳодисанинг биринчи тажрибада рўй беришининг p_1 эҳтимоли

$$p_1 = \mathrm{P}(A) = p$$

бўлади. Ҳодисанинг биринчи синовда рўй бермаслик, аммо иккинчи синовда рўй бериш эҳтимоли p_2

$$p_2 = \mathrm{P}(\overline{A} \text{ ва } A) = (1-p)p$$

га тенг.

A ҳодисанинг биринчи синовда ҳам, иккинчи синовда ҳам пайдо бўлмаслиги, аммо учинчи синовда пайдо бўлиши эҳтимоли p_3 қуйидагича бўлади:

$$p_3 = \mathrm{P}(\overline{A} \text{ ва } \overline{A} \text{ ва } A) = (1-p)(1-p)p = (1-p)^2 p$$

ва ҳоказо:

$$p_k = (1-p)^{k-1} p. \qquad (2)$$

Эҳтимоллар тақсимот жадвали:

x	1	2	3	...	...	k	...
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	...	$(1-p)^{k-1}p$	...

Бу ерда ҳам

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Нишонга биринчи теккунча отиш ҳақидаги масала. Қурилган масала, хусусан, отиш масалаларига татбиқ қилинади.

Биринчи теккунча отиш бажарилади деб фараз қилайлик. Ҳар бир отишда ўқнинг тегиш эҳтимоли p га тенг бўлсин. Тасодифий миқдор x — ўқ биринчи теккунча отилгандаги отиш номери. Бундай тасодифий миқдорнинг эҳтимоллари тақсимотининг жадвали иккинчи мисолдаги каби бўлади.

3-**мисол.** Ҳар бир отишда ўқнинг тегиш эҳтимоли $p = 0{,}8$. Ихтиёримизда учта ўқ бор. Агар отиш биринчи теккунча ёки учала ўқнинг ҳаммаси тегмасдан отилгунча олиб борилса, битта ўқнинг сарф бўлиши, иккита ўқнинг сарф бўлиши, учта ўқнинг сарф бўлиши эҳтимолини топинг. Тасодифий миқдор x — (сарф бўлган ўқлар сони) нинг тақсимот жадвалини тузинг.

Ечиш. x — тасодифий миқдор сарф бўлган ўқлар сони бўлсин; $P(x = x_1) - x_1$ та ўқнинг сарфланиш эҳтимоли. У ҳолда $P(x = 1) = p = 0{,}8$ битта (биринчи) отишда ўқнинг тегиши эҳтимоли.

$$P(x = 2) = (1 - p)p = (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}8 = 0{,}16$$

биринчи отишда ўқнинг тегмаслик, иккинчи отишда эса ўқнинг тегиши эҳтимоли

$$P(x = 3) = (1 - p)^2 = (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04,$$

ҳаммаси бўлиб учта ўқ бўлгани учун отишни учинчи отишда ўқнинг тегиши ёки тегмаслигидан қатъи назар тўхтатилади. Кейинги эҳтимолни ушбу айирма каби ҳисобласа ҳам бўлади:

$$1 - P(x = 1) - P(x = 2) = 1 - 0{,}8 - 0{,}16 = 0{,}04,$$

Тақсимот жадвали қуйидаги кўринишда бўлади:

x	1	2	3
$P(x = x_k)$	0,8	0,16	0,04

Эслатма. Бу масалани қутилар системаси терминларида ифодалаш ҳам мумкин, демак бу масала бошқа масалаларни қарашда ҳам аҳамиятга эга бўлиши мумкин Бу эслатма баъзи бошқа масалаларга ҳам тааллуқлидир

8-§. Нисбий частота ва синовларнинг такрорланишида нисбий частота эҳтимоли

n та синовлар серияси ўтказилаётган бўлсин. Ҳар бир синовда A ҳодиса p эҳтимол билан рўй бериши мумкин бўлсин. x тасодифий миқдор n та синовдан иборат серияда A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотасини билдирсин. n та синовдан иборат серияда тасодифий миқдор x нинг тақсимот қонунини аниқлаш талаб этилади.

x тасодифий миқдор n та синовда қуйидаги қийматлардан биттасини қабул қилиши равшан:

$$\frac{0}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n}{n}.$$

1-теорема. *Ўзгарувчи миқдор* x *нинг* $\frac{m}{n}$ *қийматни қабул қилиш* $\mathrm{P}\left(x=\frac{m}{n}\right)$ *эҳтимоли, яъни* n *та синовда* A *ҳодисанинг* m *марта рўй бериши,* $\bar{A}$ *ҳодисанинг эса* $n-m$ *марта рўй бериши* (A *ҳодисанинг* $n-m$ *марта рўй бермаслиги) эҳтимоли* $C_n^m p^m q^{n-m}$ *га тенг, бунда* C_n^m n *элементдан* m *тадан тузилган комбинациялар сони;* p A *ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли,* $p=\mathrm{P}(A)$; q A *ҳодисанинг рўй бермаслик эҳтимоли, яъни*

$$q=1-p=\mathrm{P}(\bar{A}).$$

Исбот. A ҳодисанинг n та синовда m марта рўй беришини, мисол учун шундай тасвирласа бўлади: агар A ва $\bar{A}$ ҳодисаларнинг алмашиниши қуйидагича бўлса,

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m},$$

яъни биринчи m та синовда A ҳодиса рўй беради, кейинги $n-m$ та синовда эса A ҳодиса рўй бермайди ($\bar{A}$ ҳодиса рўй беради). Аммо

$$\mathrm{P}(A)=p, \qquad \mathrm{P}(\bar{A})=1-p=q$$

бўлгани учун кўпайтириш теоремасига мувофиқ A ва A ҳодисаларнинг бундай алмашиниши эҳтимоли

$$p^m\cdot q^{n-m}$$

бўлади. Лекин A ҳодиса n та синовда $\bar{A}$ ва A ҳодисалар алмашинишининг бошқача кетма-кетлигида ҳам m марта келиб чиқиши мумкин. Масалан, мана бундай алмашинишда $\underbrace{AA\ldots A}_{m-1}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m}\underbrace{A}_{1}$. Аммо A ҳодиса m марта рўй бериши, $\bar{A}$ ҳодиса эса $n-m$ марта рўй бериши шарт. A ҳамда $\bar{A}$ ҳодисалар рўй беришининг бундай алмашиниш эҳтимоли

$$p^{m-1}q^{n-m}p=p^mq^{n-m}$$

бўлади.

n та синовда A ҳодисанинг m марта келиб чиқиши учун A ҳамда $\overline{A}$ ҳодисаларнинг турли алмашинишлари сони қанча бўлиши мумкин? Бу n элементдан m тадан олинган комбинациялар сонига тенг бўлиши равшан, яъни

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ [n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Шундай қилиб, қўшиш теоремасига асосан, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}\left(x = \frac{m}{n}\right) = \underbrace{p^m q^{n-m} + p^m q^{n-m} + \ldots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m}$$

ёки

$$\mathrm{P}\left(x = \frac{m}{n}\right) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

Теорема исбот бўлди.

Теоремани исбот қилиш билан баробар, биз тасодифий миқдор x нинг тақсимот қонунини аниқладик, уни биз энди жадвал шаклида ҳам ифода этамиз:

x	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\ldots$	$\frac{m}{n}$	$\ldots$	$\ldots$	$\frac{n}{n}$
$\mathrm{P}\left(x = \frac{m}{n}\right)$	$1 \cdot q^n$	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$\ldots$	$C_n^m p^m q^{nm}$	$\ldots$	$\ldots$	$1 \cdot p^n$

Ҳосил қилинган тақсимот қонуни *биномиал қонун* деб аталади, чунки $(q+p)^n$ ифодани бином формуласи бўйича ёйилганда $\mathrm{P}\left(x = \frac{m}{n}\right)$ эҳтимоллар мос ҳадларга тенг бўлади:

$$(q+p)^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (2)$$

Ўзгарувчи миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари эҳтимолларининг йиғиндиси кутилганидек 1 га тенг, чунки

$$(p+q)^n = 1^n = 1.$$

Эслатма. Кўп масалаларни текширишда A ҳодисанинг камида бир марта рўй беришининг, яъни бу ҳодисанинг нисбий частотаси $x \geqslant \frac{1}{n}$ эканининг эҳтимолини аниқлаш зарур бўлиб қолади. Бу $\mathrm{P}\left(x \geqslant \frac{1}{n}\right)$ эҳтимолни ушбу

$$\mathrm{P}\left(x \geqslant \frac{1}{n}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(x = \frac{0}{n}\right) = 1 - q^n \qquad (3)$$

тенгликдан аниқланиши равшан. Тақсимот жадвалидан яна A ҳодисанинг рўй бериш сонининг k дан кичик бўлмаслик эҳтимоли $\mathrm{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right)$ ушбу

$$\mathrm{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right)=\sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{4}$$

ёки

$$\mathrm{P}\left(x \geqslant \frac{k}{n}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}$$

формулага асосан аниқланиши келиб чиқади.

1-мисол. $n=8$, $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ тасодифий миқдор x нинг биномиал тақсимот қонунини график тасвирланг.

Ечиш. Жадвалга кирадиган эҳтимолларнинг барча қийматларини топамиз.

$$\mathrm{P}\ (x=0)=C_8^0 q^8=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{1}{8}\right)=C_8^1\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{256}=\frac{1}{32},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{2}{8}\right)=C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{64},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{3}{8}\right)=C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{7}{32},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{4}{8}\right)=C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{35}{128},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{5}{8}\right)=C_8^5\ \frac{1}{2^8}=\frac{7}{32},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{6}{8}\right)=C_8^6\,\frac{1}{2^8}=\frac{7}{64},$$

$$\mathrm{P}\ \Bigl(x=\frac{7}{8}=C_8^7\,\frac{1}{2^8}=\frac{1}{32},$$

$$\mathrm{P}\left(x=\frac{8}{8}\right)=C_8^8\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}.$$

Тақсимот кўпбурчагини ясаймиз (410-расм).

2-мисол. *Агар ҳар бир синовда A ҳодисанинг келиб чиқиш* эҳтимоли 0,4 га тенг бўлса, бу ҳодисанинг а) 2 та синовда; б) 3 та синовда; в) 10 та синовда икки марта рўй бериши эҳтимоли қандай?

Ечиш. а) бу ерда $n=2$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$;

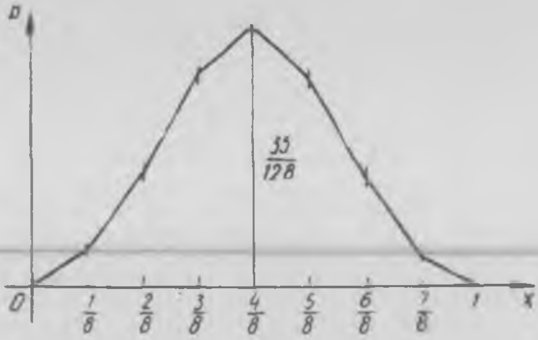
$$\mathrm{P}\left(x=\frac{2}{2}\right)=C_2^2 p^2 q^0=\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}\,(0{,}4)^2=0{,}16;$$

б) бу ерда $n = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$;

$$\mathrm{P}\left(x = \frac{2}{3}\right) = C^2 p^2 q^1 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}(0{,}4)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288;$$

в) бу ерда $n = 10$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$;

$$\mathrm{P}\left(x = \frac{2}{10}\right) = C_{10}^2 p^2 q^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}(0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^8 = 0{,}121.$$



410- расм.

3- мисол. Нишонга қараб боғлиқ бўлмаган ҳолда 5 та отиш бажарилади. Ҳар бир отишда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,2 га тенг. Нишонни зарарлантириш учун учта ўқ тегиши етарли. Нишонни зарарлантириш эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу ерда $n = 5$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Зарарлантириш эҳтимолини ушбу

$$P_{\text{зар}} = \mathrm{P}\left(x = \frac{3}{5}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{4}{5}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{5}{5}\right)$$

ёки

$$P_{\text{зар}} = 1 - \left[\mathrm{P}\left(x = \frac{0}{5}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{1}{5}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{2}{5}\right)\right]$$

формула билан ҳисоблаш керак эканлиги равшан. Биринчи формулага кўра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P_{\text{зар}} = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^2 +$$
$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(0{,}2)^4 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot (0{,}2)^5 = 0{,}05792 \approx 0{,}06.$$

4- мисол. Тўртта боғлиқ бўлмаган тажриба ўтказилади. Ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 0,5. A ҳодисанинг рўй беришлар сони иккитадан кам эмаслиги эҳтимолини топинг.

Ечиш. Бу ерда $n = 4$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$;

$$\mathrm{P}\left(x > \frac{2}{4}\right) = \mathrm{P}\left(x = \frac{2}{4}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{3}{4}\right) + \mathrm{P}\left(x = \frac{4}{4}\right),$$

ёки

$$P\left(x > \frac{2}{4}\right) = 1 - \left[P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right)\right].$$

Қуйидаги эҳтимолни ҳисоблаймиз:

$$P\left(x < \frac{2}{4}\right) = P\left(x = \frac{0}{4}\right) + P\left(x = \frac{1}{4}\right) = q^4 + 4q^3p^1 = (0,5)^4 + 4(0,5)^4 = 0,3125.$$

Демак, иккинчи формула бўйича қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P\left(x > \frac{2}{4}\right) = 1 - [(0,5)^4 + 4(0,5)^4] = 0,6875 \approx 0,69.$$

5-мисол. Қисмлар (деталлар) нинг берилган партиясида яроқсиз қисм бўлиш эҳтимоли $p = 0,1$. Учта қисмдан (деталдан) иборат партияда $m=0$, 1, 2, 3 та яроқсиз қисм бўлиши эҳтимоли қандай?

Ечиш.

$$P\left(x = \frac{0}{3}\right) = C_3^0 q^3 = 1 \cdot 0,9^3 = 0,729,$$

$$P\left(x = \frac{1}{3}\right) = C_3^1 pq^2 = \frac{3}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243,$$

$$P\left(x = \frac{2}{3}\right) = C_3^2 p^2 q = \frac{3^2 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027,$$

$$P\left(x = \frac{3}{3}\right) = C_3^3 p^3 = 1 \cdot 0,1^3 = 0,001.$$

9-§. Дискрет тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати (математик кутиши)

Дискрет тасодифий миқдор x ўзининг мос тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
$P(x = x_k)$	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

1-таъриф. Дискрет тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати (*математик кутиш*) деб (уни биз $M[x]$ ёки m_x билан белгилаймиз) тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари билан бу қийматлар эҳтимоллари кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади:

$$M[x] = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n,$$

ёки қисқача

$$M[x] = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k. \qquad (1)$$

Шунинг билан баробар, олдин кўрсатиб ўтилганидек,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Агар тасодифий миқдорнинг қийматлари чексиз кетма-кет қийматларни ташкил қилса, у ҳолда

$$m_x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \qquad (1')$$

Бундан кейин биз шундай тасодифий миқдорларни қараймизки, улар учун бу қатор яқинлашувчидир.

Тажрибалар сони катта бўлганда тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати билан тасодифий миқдорнинг ўрта арифметик қиймати орасидаги боғланишни тайинлаймиз, *чунончи тажрибалар сони катта бўлганда кузатиладиган қийматларнинг ўрта арифметиги тасодифий миқдорнинг ўрта қийматига яқиндир*, ёки 1-§ да белгиланган терминларда *тасодифий миқдорнинг кузатиладиган қийматларининг ўрта арифметиги тажрибалар сони чексиз ўсиб борганда тасодифий миқдорнинг ўрта қийматига интилади* деб айтиш мумкин.

N та боғлиқ бўлмаган тажрибалар ўтказилган бўлсин. Бу тажрибаларда

x_1 қиймат n_1 марта пайдо бўлган

x_2 қиймат n_2 марта пайдо бўлган

. . . .

x_ν қиймат n_ν марта пайдо бўлган

деб фараз қилайлик.

Тасодифий миқдор x $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ қийматларни қабул қилади.

x миқдорнинг ҳосил қилинган қийматларининг ўрта арифметигини ҳисоблаймиз (уни $\overline{\mathrm{M}}[x]$ ёки $\overline{m}_x$ билан белгилаймиз).

$$\overline{m}_x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_\nu n_\nu}{N} = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \ldots + x_\nu \frac{n_\nu}{N}. \qquad (2)$$

Аммо катта сон N даги тажрибалар учун $\frac{n_k}{N}$ нисбий частота x_k қийматнинг пайдо бўлиш эҳтимолига интилгани учун, бу ҳолда

$$\sum_{k=1}^{\nu} x_k \frac{n_k}{N} \approx \sum_{k=1}^{\nu} x_k p_k$$

Етарлича деб қилинган табиий фаразларда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\overline{\mathrm{M}}[x] \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{M}[x]. \qquad (3)$$

Эслатма. Агар биз x_1 сонли белгиси бўлган n_1 та шарли, x_2 сонли белгиси бўлган n_2 та шарли, ва ҳ. к. жами N та шарли қутилар схемасини қарасак эди, у ҳолда битта шар олганда „кутиладиган сон“ (ўрта қиймат) (2) формула билан ифода этилади, яъни m_x га тенг бўларди.

1-мисол. Агар ҳар бир отишда нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0,4$ бўлса, 3 та отишда нишонга тегиш сонини, яъни тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматини топинг.

Ечиш. Тасодифий миқдор x ушбу қийматларни қабул қилиши мумкин.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_8 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Берилган тасодифий миқдорнинг тақсимот жадвалини тузамиз.

Бу қийматлар эҳтимолларини такрорланган тажрибалар ҳақидаги теоремага кўра топамиз ($n = 3$, $p = 0,4$, $q = 0,6$):

$$\begin{aligned} P(x = 0) &= C_3^0(0,6)^3 = 0,216, \\ P(x = 1) &= C_3^1(0,4)(0,6)^2 = 0,432, \\ P(x = 2) &= C_3^2(0,4)^2 \cdot (0,6) = 0,288, \\ P(x = 3) &= C_3^3(0,4)^3 = 0,064. \end{aligned}$$

Тасодифий миқдорнинг тақсимот жадвали қуйидагича бўлади:

x	0	1	2	3
$P(x = x_k)$	0,216	0,432	0,228	0,064

Ўрта қийматини (1) формулага кўра ҳисоблаймиз:

$$m_x = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2 \text{ та тегиш.}$$

2-мисол. Объектга қарата битта ўқ узилган. Ўқнинг тегиш эҳтимоли p га тенг. Ўқнинг тегиш сони—тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматини аниқланг.

Тасодифий миқдорнинг тақсимот жадвалини тузамиз:

x	0	1
p_k	$1-p$	p

Демак, $m_x = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.

2-эслатма. n та боғлиқ бўлмаган тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш сонининг $M[x]$ ўрта қиймати тажрибалар сони билан ҳар бир тажрибада A ҳодиса рўй беришининг эҳтимоли p кўпайтмасига тенг экани, яъни

$$M[x] = np \tag{4}$$

экани келгусида тайинланади.

Агар (4) формулада n—ўқ узишлар сони, p—ўқнинг тегиши эҳтимоли бўлса, у ҳолда 1-мисолдаги масаланинг ечими бундай бўлади:

$$M[x] = np = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2 \text{ та тегиш.}$$

Агар (4) формулада $M[x]$ ва p лар маълум бўлса, у ҳолда бу формуладан ҳодисанинг рўй бериш сонининг берилган ўрта қийматини берувчи тажрибаларнинг сони n аниқланади:

$$n = \frac{M[x]}{p}.$$

3-мисол. Бир ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0{,}2$. Нишонга тегиш сони ўрта қийматининг 5 га тенг бўлишини таъмин этиш учун сарф бўладиган ўқлар сонини аниқланг.

$$n = \frac{5}{0{,}2} = 25 \text{ та ўқ.}$$

(Шунга ўхшаш масалалар турли текширишларда учраб туришини яна бир марта таъкидлаб ўтамиз. Унда „ўқнинг тегиши“ деган ибора „ҳодисанинг рўй бериши“ деган ибора билан, „ўқ узиш“ ибораси „тажриба“ сўзи билан алмашинади.)

4-мисол. Қуйидаги тақсимот жадвалига эга бўлган тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматини аниқланг.

x	1	2	3	...	k	...
p_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2p$	...	$(1-p)^{k-1}p$	...

7-§ даги 2-мисолга қаранг.

Ечиш. (1) формулага кўра, қуйидагига эгамиз ($1 - p = q$ деб белгилаймиз):

$$m_x = 1 \cdot p + 2qp + 3q^2p + \ldots + kq^{k-1}p + \ldots = p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots +$$

$$+ kq^{k-1} + \ldots) = p(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k + \ldots)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' =$$

$$= p \cdot \frac{1 - q + q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Шундай қилиб,

$$m_x = \frac{1}{p}.$$

Шунингдек:

$$p \to 1 \text{ да } m_x \to 1,$$

$$p \to 0 \text{ да } m_x \to \infty.$$

Бу муносабатларни масаланинг маъносига асосланиб тушунтириш мумкин.

Ҳақиқатан, агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли 1 га яқин ($p \approx 1$) бўлса, у ҳолда A ҳодисанинг битта (биринчи) тажрибада ($m_x \approx 1$) рўй беришини кутиш мумкин. Агарда p эҳтимол кичик бўлса ($p \approx 0$) у ҳолда A ҳодисанинг рўй бериши учун жуда кўп тажрибалар ($m_x \approx \infty$) ўтказилиши талаб қилинишини кутиш мумкин.

Тасодифий миқдор x нинг ўрта қиймати тасодифий миқдор *x эҳтимоллари тақсимотининг маркази* дейилади.

3-эслатма. „Эҳтимоллар тақсимоти маркази“ деган ном „оғирлик маркази“ деган номга қиёслаб киритилган. Агар Ox ўқидаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ абсциссали нуқталарга $p_1, p_2, \ldots, p_n$ массалар жойлаштирилган бўлса, у ҳолда аналитик геометриядан маълумки, бу массалар оғирлик марказининг абсциссаси ушбу формула билан аниқланади:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

Агар $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, бўлса, у ҳолда

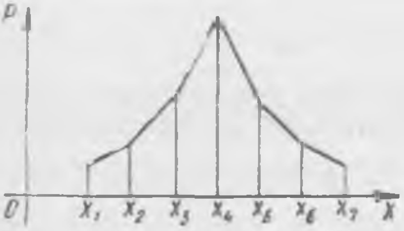
$$x_C = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{5}$$

(5) формула кўринишига кўра, ўрта қиймат учун ёзилган (1) формула билан бир хил.

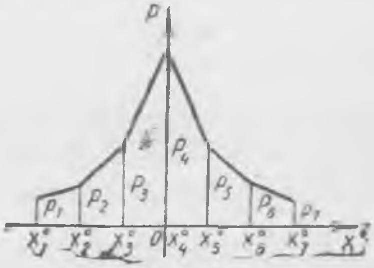
Шундай қилиб, массаларнинг оғирлик маркази ҳамда ўрта қиймат бир-бирига ўхшаш формулалар билан ҳисобланади. Ана шундан „эҳтимоллар тақсимоти маркази“ деган ном ҳосил бўлган.

Тасодифий миқдор x мос тақсимот қонуни билан берилган бўлсин (411-расм); унинг ўрта қиймати m_x бўлсин.

Энди тасодифий миқдор x билан унинг ўрта қиймати m_x орасидаги $x - m_x$ айирмани қараймиз.



411-расм.



412-расм.

Бу тасодифий миқдорни *марказлаштирилган тасодифий миқдор* ёки *четланиш* деб атаймиз ва x^0 билан белгилаймиз.

Бу тасодифий миқдор x^0 нинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлиши равшан:

x^0	$x_1^0 = x_1 - m_x$	$x_2^0 = x_2 - m_x$	...	$x_k^0 = x_k - m_x$
p_k	p_1	p_2	...	p_k

(412-расмга қаранг).

Марказлаштирилган тасодифий миқдорнинг ўрта қийматини топамиз:

$$M[x - m_x] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k - \sum_{k=1}^{n} m_x p_k =$$

$$= m_x - m_x \sum_{k=1}^{n} p_k = m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

Шундай қилиб, *марказлаштирилган тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати нолга тенг.*

4-эслатма. Баъзан тасодифий бўлмаган (ишончли, муқаррар) ўзгармас миқдорни 1 эҳтимол билан c қийматни қабул қилувчи, 0 эҳтимол билан эса бошқа қийматларни қабул қилувчи тасодифий миқдор деб қараш мақсадга мувофиқ бўлади. У ҳолда ўзгармас миқдорнинг ўрта қиймати ҳақида сўзлаш маънога эга бўлиб, $M[c] = c \cdot 1 = c$ бўлади.

Яъни, *ўзгармас миқдорнинг ўрта қиймати ўзгармас миқдорнинг ўзига тенг.*

10- §. Дисперсия. Ўрта квадратик четланиш. Моментлар ҳақида тушунча

Тасодифий миқдор x нинг эҳтимоллар тақсимоти марказининг ўрнини аниқлайдиган ўрта қийматидан ташқари тасодифий миқдор тақсимотининг сонли характеристикаси бўлиб тасодифий миқдор x нинг *дисперсияси* хизмат қилади.

Дисперсияни $D[x]$ ёки σ_x^2 билан белгилаймиз. „Дисперсия" сўзи тарқоқликни билдиради. Дисперсия тасодифий миқдорнинг ўрта қийматига нисбатан унинг қийматлари тарқоқлигининг, сочилганлигининг сонли характеристикасидир.

1-таъриф. Тасодифий миқдор x нинг *дисперсияси* деб тасодифий миқдор билан унинг ўрта қиймати орасидаги айирма квадратининг ўрта қийматига (яъни марказлаштирилган тасодифий миқдор квадратининг ўрта қийматига) айтилади:

$$D[x] = M[(x - m_x)^2] \tag{1}$$

ёки

$$D[x] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k. \tag{2}$$

Дисперсия тасодифий миқдор квадрати ўлчамида бўлади. Баъзан тарқоқлик характеристикаси учун ўлчами тасодифий миқдор ўлчами билан устма-уст тушадиган миқдордан фойдаланиш қулай бўлади. Бундай миқдор *ўрта квадрат четланишдир.*

2-таъриф. Тасодифий миқдорнинг *ўрта квадратик четланиши* деб унинг дисперсиясидан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]},$$

ёки ёйиқ кўринишда

$$\sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2 p_k}. \tag{3}$$

Ўрта квадратик четланишни σ_x билан ҳам белгиланади.

1-эслатма. Дисперсияни ҳисоблашда (1) формулани қуйидагича алмаштириш қулай булади:

$$D[x] = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k m_x p_k + \sum_{k=1}^{n} m_x^2 p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2m_x \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m_x^2 \sum_{k=1}^{n} p_k = M[x^2] - 2m_x \cdot m_x + m_x^2 \cdot 1 =$$

$$= M[x^2] - m_x^2.$$

Шундай қилиб,

$$D[x] = M[x^2] - m_x^2, \tag{4}$$

яъни дисперсия тасодифий миқдор квадратининг ўрта қиймати билан тасодифий миқдор ўрта қиймати квадрати орасидаги айирмага тенг.

1-мисол. Объектга карата битта ўқ узилган Уқнинг объектга тегиш эҳтимоли *p.* Урта *қийматни, дисперсияни ва ўрта квадратик четланишни* аниқланг.

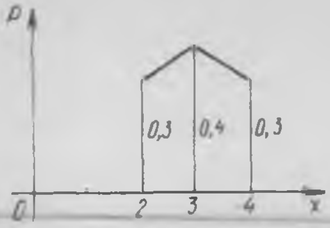
Ечиш. Ўқнинг тегиш сонларининг қийматлари жадвалини тузамиз:

x	1	0
p_k	p	q

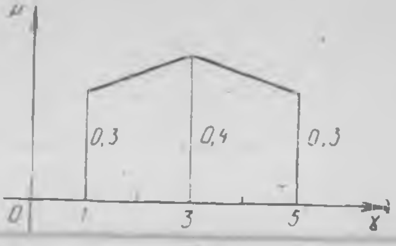
$q = 1 - p$. Демак,

$$\left.\begin{aligned} M[x] &= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \\ D[x] &= (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq, \\ \sigma[x] &= \sqrt{pq}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Дисперсия ҳамда ўрта квадратик четланиш тушунчаларини тасодифий миқдорнинг тарқоқлиги характеристикаси сифатидаги маъносини тасаввур этиш учун мисоллар кўриб чиқамиз.



413- расм.



414- расм.

2- мисол. Тасодифий миқдор x қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган (жадвал ва 413-расмга қаранг):

x	2	3	4
p_k	0,3	0,4	0,3

1) ўрта қийматни, 2) дисперсияни, 3) ўрта квадратик четланишни аниқланг

Ечиш.

1. $M[x] = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 3$,
2. $D[x] = (2-3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3)^2 \cdot 0{,}4 + (4-3)^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$,
3. $\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}77$.

3- мисол. Тасодифий миқдор x ушбу тақсимот қонуни билан берилган (жадвалга ва 414-расмга қаранг):

x	1	3	5
p_k	0,3	0,4	0,3

1) ўрта қийматни, 2) дисперсияни, 3) ўрта квадратик четланишни аниқланг.

Ечиш.

$M[x] = 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 = 3,$

2. $D[x] = (1-3)^2 \cdot 0{,}3 + (3-3)^2 \cdot 0{,}4 + (5-3)^2 \cdot 0{,}3 = 2{,}4,$

3. $\sigma[x] = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55.$

Биринчи мисолдаги тасодифий миқдорнинг тарқоқлиги, сочилганлиги иккинчи мисолдаги тасодифий миқдор тарқоқлигидан кам (414 ва 415-расмларга қаранг). Бу миқдорлар дисперсияси мос равишда 0,6 ва 2,4 га тенг.

4-мисол. Тасодифий миқдор x қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган (жадвалга ва 415-расмга қаранг).

x	3
p	1

1) ўрта қийматни, 2) дисперсияни, 3) ўрта квадратик четланишни аниқланг.

415-расм.

Ечиш.

1. $M[x] = 3 \cdot 1 = 3,$
2. $D[x] = (3-3)^2 \cdot 1 = 0,$
3. $\sigma[x] = 0.$

Бу тасодифий миқдор қийматларининг тарқоқлиги йўқ.

2-эслатма. Агар ўзгармас сонни 1 эҳтимол билан c қиймат қабул қилувчи тасодифий миқдор деб қарасак, у ҳолда $D[c] = 0$ бўлишини исбот қилиш осон.

Исбот $M[c] = c$ (9-§ (5) га қаранг) экани кўрсатилган эди. (1) формулага кўра, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$D[c] = M[(c-c)^2] = M[0] = 0,$$

шуни исбот қилиш керак эди.

3-эслатма. Механикадаги терминологияга ўхшатиб, $(x - m_x)$, $(x - m_x)^2$ миқдорларнинг ўрта қийматларини тасодифий миқдорнинг *биринчи* ва *иккинчи тартибли марказий моментлари* деб аталади. Учинчи тартибли марказий моментни ҳам қаралади:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^3 p_k.$$

Агар тасодифий миқдор эҳтимоллар тақсимотининг марказига нисбатан симметрик тақсимланган бўлса (411-расм), у ҳолда унинг учинчи тартибли марказий моменти нолга тенг бўлиши равшан. Агар учинчи тартибли момент нолдан фарқли бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор симметрик тақсимланган бўлиши мумкин эмас.

11-§. Тасодифий миқдорларнинг функциялари

Тасодифий миқдор x жадвал шаклидаги тақсимот қонуни билан берилган бўлсин:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$	p_n

Тасодифий миқдор x нинг

$$y = f(x)$$

функциясини қараймиз.

Функциянинг $y_k = f(x_k)$ қиймати тасодифий y миқдорнинг қиймати бўлади.

Агар барча $y_k = f(x_k)$ қийматлар турлича бўлса, у ҳолда тасодифий миқдор y нинг тақсимот қонуни ушбу жадвал билан берилади:

$y = f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\ldots$	$y_k = f(x_k)$	$\ldots$	$y_n = f(x_n)$
p_k	p_1	p_2	$\ldots$	p_k	$\ldots$	p_n

Агар $y_k = f(x_k)$ қийматлар орасида бир-бирларига тенг бўлганлари бўлса, у ҳолда мос эҳтимолларни қўшиб, мос устунларни битта устунга бирлаштириш керак.

Тасодифий миқдор x нинг $y = f(x)$ функциясининг ўрта қиймати 10-§ даги (1) формулага ўхшаш формула билан аниқланади

$$\mathrm{M}[f(x)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k. \qquad (1)$$

Шунга ўхшаш усул билан функциянинг дисперсияси ҳам аниқланади:

$$\mathrm{D}[f(x)] = \mathrm{M}[(f(x)] - \mathrm{M}[f(x)])^2] = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - m_{f(x)})^2 p_k.$$

Мисол. Тасодифий φ миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
p_k	0,1	0 1	0,2	0,3	0,3

Бу тасодифий миқдорнинг

$$y = A \sin \varphi$$

функциясини қараймиз.

Тасодифий миқдор y учун тақсимот жадвали тузамиз:

y	$-A$	$-\frac{A\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{A\sqrt{2}}{2}$	A
p_k	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3

Функциянинг ўрта қийматини (математик кутилишини) топамиз:

$$M[A \sin \varphi] = -A \cdot 0{,}1 - \frac{A\sqrt{2}}{2}\, 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}2 + \frac{A\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}3 + A \cdot 0{,}3 =$$

$$= A\left(0{,}2 + \frac{A\sqrt{2}}{2}\, 0{,}2\right) = A(0{,}2 + 0{,}14) = 0{,}34\, A.$$

Бу типдаги масалалар тебраниш жараёнларини қарашда келиб чиқади.

12-§. Узлуксиз тасодифий миқдор. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги. Тасодифий миқдорнинг берилган интервалда ётиши эҳтимоли

Бу масалани тушуниш учун мисол кўриб чиқамиз.

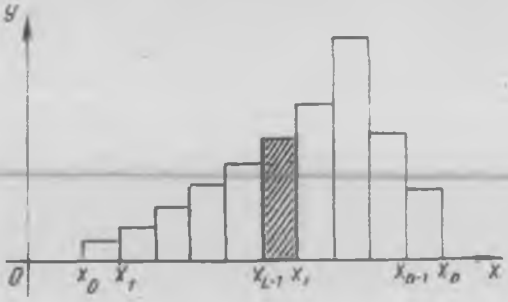
Мисол. Бирор давр ишлатилгандан кейин цилиндрнинг емирилиш миқдори ўлчанган. Бу миқдор цилиндр диаметрининг катталашиш қиймати билан аниқланади. Уни $\overline{x}$ билан белгилаймиз. Масаланинг моҳиятидан кўринадики, $\overline{x}$ миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бирор (a, b) интервални ташкил этади ва $\overline{x}$ шу интервалдаги ихтиёрий қийматларни қабул қила олади.

Бундай миқдор *узлуксиз тасодифий миқдор* дейилади.

Шундай қилиб, бирор (a, b) интервалда (бу интервал чексиз $(-\infty, \infty)$ интервал бўлиши ҳам мумкин) берилган узлуксиз тасодифий миқдор $\overline{x}$ ни қараймиз. Бу интервални ихтиёрий $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нуқталар билан узунлиги $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ бўлган кичик интервалларга ажратамиз.

Бизга тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг $(x_{i-1}, \ x_i)$ интервалда ётиш эҳтимоли маълум деб фараз қилайлик. Бу эҳтимолни биз қуйидагича белгилаймиз: $P(x_{i-1} < \bar{x} < x_i)$, ҳамда уни асоси Δx_i бўлган тўғри тўртбурчак юзи шаклида тасвир этамиз (416- расм).

Ҳар бир (x_{i-1}, x_i) интервал учун тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг бу интервалда ётиши эҳтимоли аниқланади ва, демак мос тўғри тўртбурчакни ясаш мумкин бўлади. Натижада зинасимон синиқ чизиқни ҳосил қиламиз.

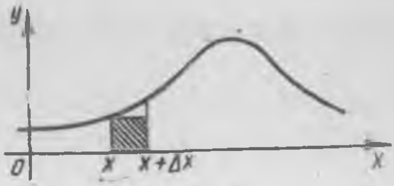


416- расм.

1-таъриф.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \bar{x} < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x) \qquad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $y = f(x)$ функция мавжуд бўлса, у ҳолда бундай $f(x)$ функция *тасодифий миқдор x нинг эҳтимоллари тақсимотининг зичлиги* ёки тақсимот қонуни дейилади (шунингдек, „тақсимот зичлиги“ ёки „эҳтимоллар зичлиги“ деб ҳам айтилади). $\bar{x}$ билан узлуксиз тасодифий миқдорни, x ёки x_k билан бу тасодифий миқдорнинг қийматларини белгилаймиз. Лекин баъзан, агар бу тушунишга халал бермаса, биринчи ҳолда ҳам x тепасидаги чизиқчани тушириб қолдирамиз. $y = f(x)$ эгри чизиқ *эҳтимоллар тақсимоти эгри чизиғи* ёки *тақсимот эгри чизиғи* дейилади (417- расм). Лимит таърифидан фойдалансак, (1) тенгликдан



417- расм.

Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлиги билан ушбу

$$P(x < \bar{x} < x + \Delta x) \cong f(x)\,\Delta x \qquad (2)$$

тақрибий тенглик келиб чиқади.

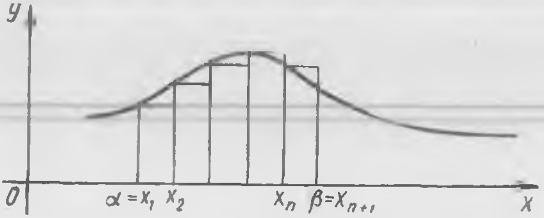
Энди ушбу теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. *$f(x)$ тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг тақсимот зичлиги бўлсин. У ҳолда тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг бирор (α, β) интервалда ётиши эҳтимоли $f(x)$ функциядан α дан β гача олинган аниқ интегралга тенг, яъни қуйидаги тенглик ўринлидир:*

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Исбот. (α, β) интервални $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} = \beta$ нуқталар билан n та кичик интервалларга бўламиз (418- расм). Бу интервалларнинг ҳар бирига (2) формулани татбиқ қиламиз:

$$\begin{aligned} P(x_1 < \bar{x} < x_2) &\cong f(x_1)\,\Delta x_1, \\ P(x_2 < \bar{x} < x_3) &\cong f(x_2)\,\Delta x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_n < \bar{x} < x_{n+1}) &\cong f(x_n)\Delta x_n. \end{aligned}$$



418- расм.

Бу тенгликларнинг ўнг ва чап томонларини қўшамиз. Чап томонда $P(\alpha < x < \beta)$ ни ҳосил қилишимиз равшан. Шундай қилиб,

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

тақрибий тенглик ҳосил қилдик. Ўнг томонда $\max \Delta x_i \to 0$ шартда лимитга ўтиб, интеграл йиғиндининг хоссаларига асосан ушбу аниқ тенглик ҳосил қиламиз:

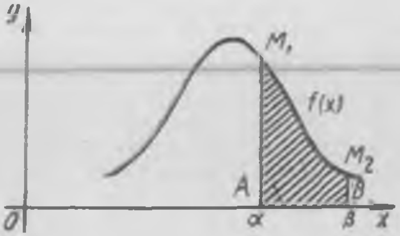
$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

(Биз $f(x)$ шундай функцияки, ўнг томондаги лимит мавжуд деб фараз қиламиз.) Аммо ўнг томонда турган лимит $f(x)$ функциядан α дан β гача бўлган чегараларда олинган аниқ интегралдир. Шундай қилиб,

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Теорема исбот бўлди.

Демак, тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлигини билсак, тасодифий миқдорнинг қийматини берилган интервалда ётиш эҳтимолини аниқлашимиз мумкин. Геометрик нуқтаи назардан, бу эҳтимоллик мос эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг (419- расм).



419- расм.

Эслатма. Узлуксиз тасодифий миқдор учун $\bar{x} = x_0$ дан иборат ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг бўлади.

Ҳақиқатан, (2) тенгликда $x=x_0$ деб фараз қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)\,\Delta x,$$

бу тенгликдан

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_0 < \bar{x} < x_0 + \Delta x) = 0$$

ёки

$$P(\bar{x} = x_0) = 0.$$

(475- бетдаги 1- эслатмага қаранг.) Шунинг учун (3) тенгликда ҳамда ундан олдинги муносабатларда биз фақат $P(\alpha < \bar{x} < \beta)$ дебгина эмас, балки $P(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta)$ деб ҳам ёзишимиз мумкин, чунки

$$P(\alpha \leqslant \bar{x} \leqslant \beta) = P(\bar{x} = \alpha) + P(\alpha < \bar{x} < \beta) + P(\bar{x} = \beta) = \\ = P(\alpha < \bar{x} < \beta).$$

Агар тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари (a, b) интервалда ётган бўлса, у ҳолда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1, \qquad (4)$$

чунки тасодифий миқдор қийматларининг (a, b) интервалда ётиши ҳодисаси муқаррар ҳодисадир.

Агар $\bar{x}$ нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар интервали $(-\infty, +\infty)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{5}$$

Агар қаралаётган масаланинг моҳиятидан $f(x)$ функциянинг чекли (a, b) интервалда аниқланганлиги келиб чиқса, у ҳолда у бутун чексиз $(-\infty, +\infty)$ интервалда аниқланган деб ҳисоблаш мумкин эканлигини, аммо (a, b) интервал ташқарисида эса

$$f(x) = 0$$

бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Бу ҳолда (4) тенглик ҳам, (5) тенглик ҳам бажарилади. Тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги тасодифий миқдорни тўла аниқлайди.

13- §. Тақсимот функцияси ёки тақсимотнинг интеграл қонуни. Эҳтимоллар текис тақсимотининг қонуни

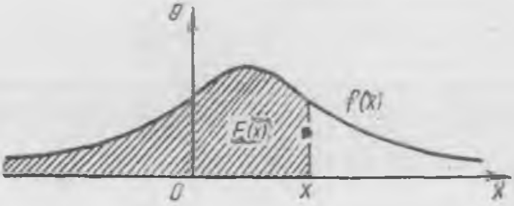
1-таъриф. Бирор тасодифий миқдор $\bar{x}$ $(-\infty < x < +\infty)$ нинг тақсимот зичлиги $f(x)$ бўлсин, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{1}$$

функция *эҳтимоллар тақсимоти функцияси* ёки *тақсимотнинг интеграл қонуни* дейилади.

Дискрет тасодифий миқдор учун тақсимот функцияси унинг x дан кичик бўлган x_k қийматлари эҳтимолларининг йиғиндисига тенг:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

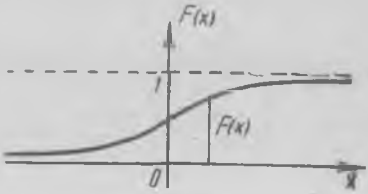


420- расм.

12- § даги (3) тенгликка асосан $F(x)$ тақсимот функция тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг x дан кичик бўлган қийматларни қабул қилиш эҳтимолидир (421- расм):

$$F(x) = \mathrm{P}(-\infty < \bar{x} < x). \qquad (2)$$

420- расмдан кўринишича x нинг берилган қийматида тақсимот функциянинг сон қиймати x нуқта орқали ўтказилган ординатадан чапда жойлашган тақсимот эгри чизиғи билан чегараланган юзга тенг.



421- расм.

$F(x)$ функциянинг графиги *тақсимотнинг интеграл эгри чизиғи* дейилади (421- расм).

(1) тенгликда 12- § даги (5) ни эътиборга олиб, $x \to +\infty$ да лимитга ўтсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x = \lim_{z\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

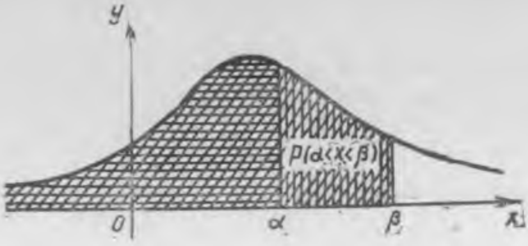
Қуйидаги теоремани исбот қиламиз:

1-теорема. *Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг берилган (α, β) интервалда ётиши эҳтимоли тақсимот функциянинг бу интервалдаги орттирмасига тенг:*

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Исбот. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг берилган (α, β) интервалда ётиши эҳтимолини топамиз. 12- § даги (3) формулани қуйидагича қайтадан ёзиб оламиз (422- расмга қаранг):

$$\mathrm{P}(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx$$



422- расм.

ёки (1) тенгликдан фойдаланиб, қуйидагини ёзишимиз мумкин;

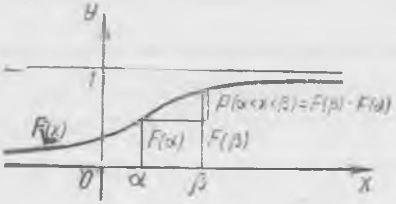
$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Шуни исбот қилиш керак эди (423- расмга қаранг).

Тақсимот зичлиги $f(x)$ ҳамда мос тақсимот функция $F(x)$

$$F'(x) = f(x) \qquad (3)$$

муносабат билан боғлангандир. Бу (1) тенгликдан ҳамда аниқ интегралнинг юқори чегараси бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремадан келиб чиқади.



423- расм.

424- расм.

Энди *эҳтимоллар тақсимотининг текис қонунига* эга бўлган тасодифий миқдорни қараймиз. Бундай тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ёки тақсимот зичлиги $f(x)$ қуйидагича берилади:

$$x < a \text{ бўлганда, } f(x) = 0,$$
$$a < x < b \text{ бўлганда, } f(x) = C,$$
$$b < x \text{ бўлганда, } f(x) = 0.$$

(a, b) интервалда $f(x)$ зичликнинг қиймати ўзгармас c сонга тенг (424- расм) бўлиб, бу интервалнинг ташқарисида нолга тенг. Бундай тақсимотни *текис зичланиш қонуни* ҳам дейилади.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ шартдан c нинг қийматини топамиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} c\,dx = c(b - a) = 1,$$

демак,

$$c = \frac{1}{b - a}, \qquad b - a = \frac{1}{c}.$$

Охирги тенгликдан текис тақсимот ўринли бўлган (a, b) интервал албатта чекли бўлиши кўринади. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг (α, β) интервалдаги қийматни қабул қилиш эҳтимолини аниқлаймиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{\beta - a}{b-a}.$$

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимол

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{\beta - a}{b-a} \text{ га тенг.}$$

(Бу муносабат 480- бетда келтирилган икки ўлчовли ҳол учун геометрик эҳтимол таърифи билан ўхшашдир.)

Текис тақсимотнинг интеграл қонунини аниқлаймиз:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Агар $x < a$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$ ва демак,

$$F(x) = 0.$$

Агар $a < x < b$ бўлса, у ҳолда $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ва демак,

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

Агар $b < x$ бўлса, у ҳолда

$$f(x) = 0, \quad \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx = 0,$$

демак,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

(425- расмга қаранг).

Текис зичланиш қонунига эга бўлган бир неча конкрет тасодифий миқдорни келтирамиз.

425- расм.

1- мисол. Бирор миқдорни ўлчашда шкаланинг энг яқин бўлинмасигача яхлитлаш бажарилади. Яхлитлашдаги хатолар эҳтимолларининг текис тақсимотига эга бўлган тасодифий миқдордир. Агар $2l$ шкаланинг бир бўлинишидаги баъзи бирликларнинг сони бўлса, у ҳолда бу тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги қуйидагича бўлади:

$$x < -l \text{ бўлганда } f(x) = 0,$$

$$-l < x < l \text{ бўлганда } f(x) = \frac{1}{2l},$$

$$l < x \text{ бўлганда } f(x) = 0,$$

бу ерда $a = -l,\ b = l,\ c = \dfrac{1}{2l}$

2-мисол. Айланувчи симметрик ғилдирак ишқаланиш натижасида тўхтаб қолади. Ғилдиракнинг бирор тайинланган ҳаракатланувчи радиуси билан ғилдирак тўхтагандан кейинги қўзғалмас радиуси орасида ҳосил бўлган θ бурчак тақсимот зичлиги қуйидагича бўлган тасодифий миқдордир:

$$\theta < 0 \text{ бўлса, } f(\theta) = 0,$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{ бўлса, } f(\theta) = \frac{1}{2\pi},$$

$$2\pi < \theta \text{ бўлса, } f(\theta) = 0.$$

14-§. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари

Дискрет тасодифий миқдор учун илгари бажарилгани каби тақсимот зичлиги $f(x)$ бўлган узлуксиз тасодифий миқдорнинг $\bar{x}$ сонли характеристикаларини қараймиз.

1-таъриф. Зичлиги $f(x)$ бўлган узлуксиз тасодифий миқдорнинг *ўрта қиймати* деб

$$M[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x f(x)\, dx \tag{1}$$

ифодага айтилади.

Агар тасодифий миқдор $\bar{x}$ чекли (a, b) кесмадагина қийматлар қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда $M[\bar{x}]$ ўрта қиймат ушбу

$$M[\bar{x}] = \int_{a}^{b} x f(x)\, dx \tag{1'}$$

формула билан ифодаланади. (1′) формулани 9-§ даги (1) формуланинг умумлашгани деб қараса бўлади.

Ҳақиқатан, (a, b) кесмани (x_{k-1}, x_k) интервалларга бўламиз. Ҳар бир интервалда ξ_k нуқта оламиз.

Ушбу

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$$

қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган ёрдамчи *дискрет* тасодифий миқдор ξ ни қараймиз. Дискрет тасодифий миқдорнинг мос қийматлари эҳтимоллари $p_1, \; p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$ бўлсин:

$$p_1 = f(\xi_1)\,\Delta x_1, \quad p_2 = f(\xi_2)\,\Delta x_2, \; \dots,$$
$$p_k = f(\xi_k)\,\Delta x_k, \; \dots, \quad p_n = f(\xi_n)\,\Delta x_n{}^{*)}.$$

Берилган дискрет миқдор ξ нинг ўрта қиймати қуйидагича бўлади:

$$\mathbf{M}[\xi] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k p_k$$

ёки

$$\mathbf{M}[\xi] = \xi_1 f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \xi_2 f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \dots + \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k + \dots +$$
$$+ \xi_n f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

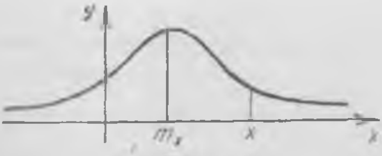
$\max \Delta x_k \to 0$ да лимитга ўтиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

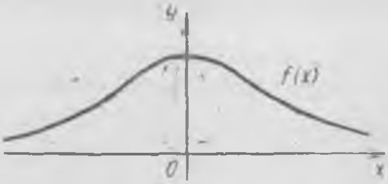
Ўнг томонда турган ифода $(a, \; b)$ кесмага тегишли ҳар қандай қийматни қабул қилиши мумкин бўлган *узлуксиз* тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматидир. Шунга ўхшаш мулоҳазани чексиз интервал учун ҳам, яъни (1) ифода учун ҳам келтириш мумкин. (1) ва (1′) формулалар дискрет тасодифий миқдор учун 9- § даги (1) формулага ўхшашдир. Ўрта қийматни илгаригидек m_x билан белгилаймиз.

Ўрта қийматни тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг эҳтимоллари *тақсимотининг маркази* деб аталади (426- расм). Агар тақсимот эгри чизиғи Oy ўқига нисбатан симметрик бўлса, яъни $f(x)$ функция жуфт функция бўлса, у ҳолда

$$M[\bar{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 0$$



426-расм.



427-расм.

[*)] Шунинг билан бир вақтда $f(\xi_k)\,\Delta x_k$ — узлуксиз тасодифий миқдор x нинг $(x_{k-1}, \; x_k)$ интервалдан қиймат қабул қилиши эҳтимолига тенг.

экани равшан. Бу ҳолда эҳтимолларнинг тақсимот маркази координатлар боши билан устма-уст тушади (427- расм).

Марказлаштирилган тасодифий $\bar{x}-m_x$ миқдорни қараймиз. Унинг ўрта қийматини топамиз:

$$M[\bar{x}-m_x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx-m_x\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=$$

$$=m_x-m_x\cdot 1=0.$$

Марказлаштирилган тасодифий миқдорнинг ўрта қиймати нолга тенг.

2-таъриф. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг дисперсияси деб мос марказлаштирилган тасодифий миқдор квадратининг ўрта қийматига айтилади:

$$D[\bar{x}]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)\,dx. \qquad (2)$$

(2) формула 10-§ даги (2) формулага ўхшаш.

3-таъриф. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг *ўрта квадратик четланиши* деб дисперсиянинг квадрат илдизига айтилади:

$$\sigma[\bar{x}]=\sqrt{D[\bar{x}]}=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2f(x)\,dx}. \qquad (3)$$

Бу формула 10-§ даги (3) формулага ўхшашдир. Биз конкрет мисоллар қараганимизда, дискрет тасодифий миқдорда бўлганидек, дисперсия ҳамда ўрта квадратик четланиш тасодифий миқдор қийматлари тарқоқлигини характерлашини кўрамиз.

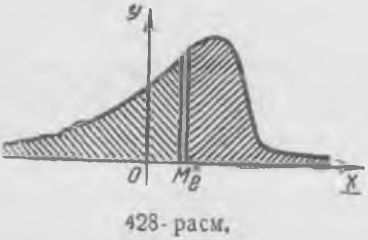
4-таъриф. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ тақсимот зичлигининг энг катта қийматига мос бўлган қиймати *мода* деб аталади (уни M_0 билан белгилаймиз). Тақсимот эгри чизиғи 426- ҳамда 427- расмларда тасвир этилган тасодифий миқдор $\bar{x}$ учун мода ўрта қиймат билан устма-уст тушади.

5-таъриф. Биз M_e билан белгилайдиган сон ушбу

$$\int_{-\infty}^{M_e}f(x)\,dx=\int_{M_e}^{\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{2} \qquad (4)$$

тенгликни қаноатлантирса, у сон *медиана* деб аталади (428- расм). Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P(\bar{x}<M_e)=P(M_e<\bar{x})=\frac{1}{2},$$



428- расм.

яъни тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг M_e дан кичик қиймат қабул қилиши ҳамда M_e дан катта қиймат қабул қилиши тенг эҳтимоллидир.

Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг ўзи M_e қийматни қабул қилмаслиги ҳам мумкин.

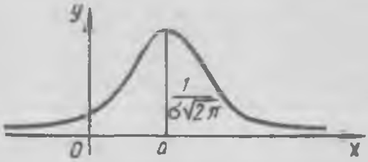
15- §. Тақсимотнинг нормал қонуни. Нормал тақсимотнинг ўрта қиймати

Турли ҳодисаларни ўрганиш шуни кўрсатдики, кўп тасодифий миқдорлар, масалан, ўлчашдаги хатолар ўқ узишдаги ён четланиш ҳамда бирор марказдан ўқнинг тушиш нуқтасининг узоқлиги бўйича четланиши, кўп механизмларда деталларнинг едирилиш миқдори ва ҳ. к. лар

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

формула билан ифодаланувчи эҳтимоллар тақсимоти зичлигига эга бўлади.

Бу ҳолда тасодифий миқдор *нормал тақсимот қонунига* бўйсунади деб айтилади (бу тақсимотни Гаусс қонуни деб ҳам атайдилар). Нормал тақсимотнинг эгри чизиғи 429- расмда тасвир этилган. $a=0$, $\sigma=1$ бўлганда (1) функция қийматлари жадвали китобнинг охирида келтирилган (2- жадвалга қ.). Шунга ўхшаш эгри чизиқ 1 томнинг V бобидаги 9- § да муфассал текширилган.



429- расм.

Дастлаб (1) тақсимот функция 12- § даги (5) асосий муносабат

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

ни қаноатлантиришини кўрсатамиз:

Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=t, \qquad dx=\sqrt{2}\,\sigma\,dt$$

белгилашларни киритиб, ёза оламиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1,$$

чунки

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

(XV боб 5-§ га қаранг).

(1) нормал тақсимот қонунига эга бўлган тасодифий миқдорнинг ўрта қийматини топамиз. 14-§ даги (1) формулага мувофиқ:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (2)$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma} = t,$$

бундан

$$x = a + \sqrt{2}\sigma t, \qquad dx = \sqrt{2}\,\sigma dt$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sqrt{2}\,\sigma t)\, e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt.$$

Ўнг томондаги биринчи интеграл $\sqrt{\pi}$ га тенг. Иккинчи интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Шундай қилиб,

$$m_x = a \qquad (3)$$

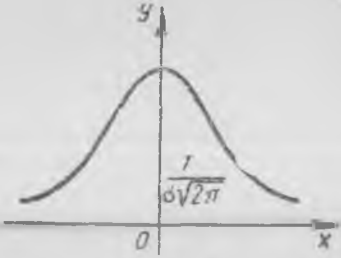
(1) формуладаги a параметрнинг қиймати қаралаётган тасодифий миқдорнинг ўрта қийматига тенг. $x=a$ нуқта эҳтимоллар тақсимотининг марказини ёки тарқоқлик марказини тасвир этади. $x=a$ бўлганда $f(x)$ функция энг катта қийматга эга, шунинг учун $x=a$ қиймат тасодифий миқдорнинг *модасини* ифодалайди. (1) эгри чизиқ $x=a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлгани учун

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx,$$

яъни $x=a$ қиймат нормал тақсимотнинг *медианасини* ҳам ифодалайди. Агар (1) формулада $a=0$ деб фараз қилсак, у ҳолда

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (4)$$

Бунга мос бўлган эгри чизиқ Oy ўқига нисбатан симметрикдир. $f(x)$ функция—эҳтимоллар тақсимотининг маркази координатлар боши билан устма-уст тушадиган тасодифий миқдорнинг нормал тақсимот зичлигидир (430-расм). Тарқоқлик марказига нисбатан тасодифий миқдор қийматлари характерини аниқловчи (1) ва (4) тақсимот қонунларига эга бўлган тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари эгри чизиқнинг шаклига қараб аниқланади. Бу шакл a нинг миқдорига боғлиқ эмас ва шунинг учун улар устма-уст тушади. a миқдор (1) эгри чизиқнинг $a>0$ бўлганда ўнгга ва $a<0$ бўлганда чапга силжиш миқдорини аниқлайди.



430- расм.

Бирмунча қисқартириб ёзиш мақсадида, биз бундан кейинги мулоҳазаларни (4) формула билан аниқланадиган тақсимот зичлигига нисбатан олиб борамиз.

16- §. Тақсимотнинг нормал қонунига бўйсунувчи тасодифий миқдорнинг дисперсияси ва ўрта квадратик четланиши

Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг тақсимот зичлиги

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

формула билан берилган бўлсин. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси 14- § даги (2) формула билан аниқланади. Биз қараётган ҳолда

$$m_x=a=0.$$

Тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$\mathrm{D}[\bar{x}]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

тенглик билан аниқланади. $\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} = t$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. Бу ҳолда

$$D[\bar{x}] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\cdot 2t\cdot e^{-t^2}\,dt$$

Бўлаклаб интеграллаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$D[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-t\cdot e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right].$$

Аммо

$$\lim_{t\to\infty} t\cdot e^{-t^2} = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi},$$

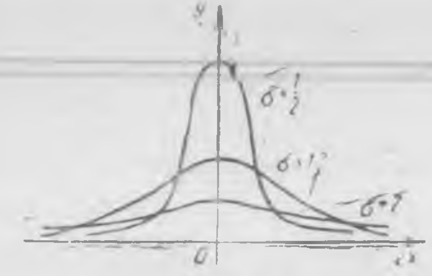
бўлгани учун, ҳисоблаш натижасида

$$D[\bar{x}] = \sigma^2 \qquad (2)$$

ни хосил қиламиз. 14- § даги (3) формулага мувофиқ, ўрта квадратик четланиш қуйидагича бўлади:

$$\sigma[\bar{x}] = \sqrt{D[\bar{x}]} = \sigma. \qquad (3)$$

Шундай қилиб, дисперсия (1) тақсимот зичлиги формуласидаги параметр σ^2 га тенг. Биз юқорида, дисперсия тарқоқлик марказига нисбатан тасодифий миқдор қийматларининг сочилганлигини характерлайди деб айтган эдик. σ^2 параметрнинг қиймати тақсимот эгри чизиғининг шаклига қандай таъсир кўрсатишини қараб чиқамиз. 431- расмда $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ қийматлар учун тақсимот эгри чизиғи тасвир этилган. Бу эгри чизиқларга қараганимизда кўрамизки, σ қанча кичик бўлса, $f(x)$ функциянинг максимуми шунча катта, тарқоқлик марказига ($x = 0$) яқин бўлган қийматлар эҳтимоли катта, ҳисоб бошидан ($x=0$) узоқлашган қийматлар эҳтимоли кичикдир. Бу сўз билан қуйидагича ифода этилади: дисперсия σ^2 қанча кичик бўлса, тасодифий миқдор қийматларининг тарқоқлиги шунча кичикдир.



431- расм.

17- §. Тасодифий миқдор қийматининг берилган интервалда ётиш эҳтимоли. Лаплас функцияси. Нормал қонун учун тақсимотнинг интеграл функцияси

12- § даги (3) формулага мувофиқ, гақсимот зичлиги

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

бўлган тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг қиймати (α, β) интервалда ётиши эҳтимолини аниқлаймиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

ёки

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1$$

(432- расм). Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = t.$$

Натижада ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt. \qquad (1')$$

Ўнг томонда турган интеграл элементар функция орқали ифодаланмайди. Бу интегралнинг қиймати ушбу

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad (2)$$

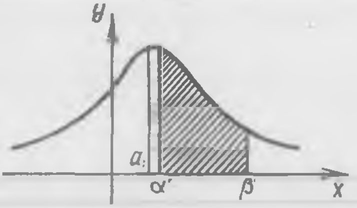
эҳтимоллар интеграли қиймати орқали ифодаланади.

$\Phi(x)$ функциянинг баъзи бир хоссаларини кўрсатиб ўтамиз; бу хоссалардан биз кейинроқ фойдаланамиз.

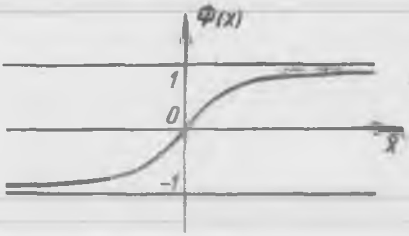
1. $\Phi(x)$ функция x нинг барча қийматларида аниқланган.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0 e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$
4. $\Phi(x)$ функция $(0, \infty)$ оралиқда монотон усиб боради.
5. $\Phi(x)$ функция тоқ функциядир, чунки

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \qquad (3$$

6. $\Phi(x)$ функциянинг графиги 433- расмда тасвир этилган. Бу функция қийматларининг мукаммал жадваллари тузилган. Китоб охирида қисқача жадвал келтирилган (1- жадвалга қаранг.)



432 расм



433 расм.

(1′) тенгликни интеграллаш оралиғини бўлиш ҳақидаги теоремага кўра қайта ёзиб оламиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{0} e^{-t^2}dt + \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt + \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt\right].$$

Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt\right].$$

$\Phi(x)$ функциядан фойдаланиб, [(2) га қ.] нормал қонунга бўйсунувчи тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг (α, β) интервалда ётиши эҳтимолини узил-кесил ушбу кўринишда ифодалаймиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (4)$$

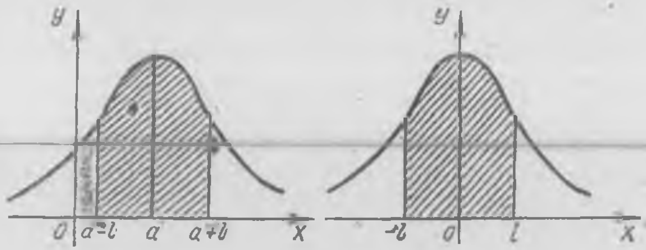
$a = 0$ бўлганда ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (5)$$

$a=0$ бўлган ҳол учун (1) тенгликнинг ўнг томонини (5) тенгликнинг ўнг томонига тенглаб

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}\left|\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right| \qquad (5')$$

ни ҳосил қиламиз. Кўпинча тасодифий миқдор қиймати $x=a$ нуқтага нисбатан симметрик бўлган $(a-l,\ a+l)$ интервалда ётиши эҳтимолини ҳисоблашга тўғри келади. Бундай ҳолда (4) формула ушбу кўринишни олади (434- расм):



434- расм.

$$\mathrm{P}\,(a-l<\bar{x}<a+l)=\frac{1}{2}\left|\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right|.$$

$\Phi\left(-\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)=-\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ эканини ҳисобга олсак [(3) формулага қ.] узил-кесил

$$\mathrm{P}\,(a-l<\bar{x}<a+l)=\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (6)$$

ни ҳосил қиламиз. Бунинг ўнг томони тарқоқлик маркази a га боғлиқ эмас, шунинг учун $a=0$ бўлганда ҳам

$$\mathrm{P}\,(-l<\bar{x}<l)=\Phi\left(\frac{l}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (7)$$

ни оламиз.

1-мисол. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ тарқоқлик маркази $a=0{,}5$ ва дисперсияси $\sigma^2=\frac{1}{8}$ бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунади. Тасодифий миқдор $\bar{x}$ нинг қийматини (0,4; 0,6) оралиқда ётиш эҳтимолини аниқланг (435- расм).

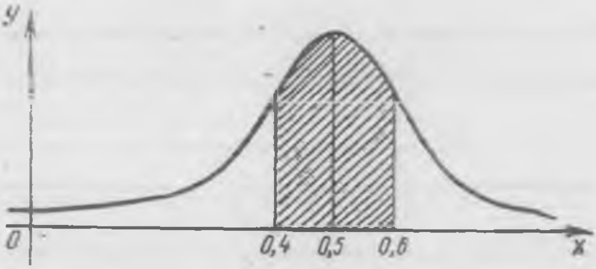
Ечиш. Бу ерда $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 2$. (4) формулага мувофиқ, ушбу ҳосил бўлади:

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}\{\Phi[2(0{,}6 - 0{,}5)] - \Phi[2(0{,}4 - 0{,}5)]\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\Phi(0{,}2) - \Phi(-0{,}2)\}.$$

Аммо $\Phi(-0{,}2) = -\Phi(0{,}2)$ [(3) формулага қ.]. Шунинг учун қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}2) + \Phi(0{,}2)] = \Phi(0{,}2).$$



435- расм.

$\Phi(x)$ функция қийматлари жадвалига кўра (китоб охиридаги 1-жадвалга қ.) ушбуни топамиз.

$$P(0{,}4 < \bar{x} < 0{,}6) = 0{,}223.$$

2- мисол. Автоматда тайёрланадиган деталнинг узунлиги параметрлари $M[\bar{x}] = 10$, $\sigma^2 = \frac{1}{200}$ бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдордан иборат. Агар деталнинг йўл қўйилиши мумкин бўлган ўлчамлари $10 \pm 0{,}05$ бўлса, деталнинг яроқсиз (брак) бўлиши эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. Бизнинг ҳолда $a = 10$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 10$, $\sigma = \frac{1}{10\sqrt{2}}$.
Яроқсизлик эҳтимоли $P_{яр}$ (4) формулага мувофиқ бундай ифода этилади:

$$P_{яр} = 1 - P(9{,}95 < \bar{x} < 10{,}05) = 1 - \frac{1}{2}\{\Phi[10(10{,}05 - 10)] - \Phi[10(9{,}95 - 10)]\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\{\Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5)\} = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48.$$

3- мисол. Агар отишмада бўладиган хато, параметрлари $a = 0$, $\sigma = 1{,}9$ бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунадиган бўлса, ўқнинг кенглиги $2l = 3{,}5$ *м* бўлган соҳага тушиш эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. Бизнинг ҳолда $\alpha = -1{,}75$, $\beta = 1{,}75$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = 0{,}372$. (7)формулага мувофиқ ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(-1{,}75 < \bar{x} < 1{,}75) = \Phi(1{,}75 \cdot 0{,}372) = \Phi(0{,}651) = 0{,}643.$$

Эслатма. (2) даги $\Phi(x)$ функция ўрнига кўпинча *Лаплас функцияси* деб аталувчи

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (8)$$

функциядан фойдаланилади. Лапласнинг бу функцияси $\Phi(x)$ функция билан содда муносабат орқали боғланган. (8) интегралда $\frac{t}{\sqrt{2}} = z$ алмаштириш ўтказиб

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \qquad (9)$$

ва

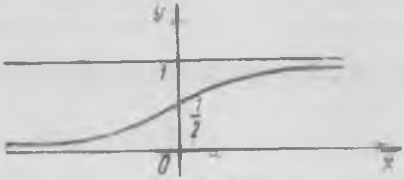
$$\bar{\Phi}(x\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \Phi(x). \qquad (10)$$

бўлиши равшан. (5) формула $\bar{\Phi}(x)$ функция ҳамда (9) муносабатдан фойдаланиш натижасида бундай ёзилади:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \bar{\Phi}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \qquad (11)$$

ва $\sigma = 1$ бўлганда

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha).$$



436- расм.

Лаплас функциясининг қийматлари жадвали китоб охирида берилган (3- жадвалга қ.).

Энди нормал тақсимот қонунининг *интеграл функциясини* аниқлаймиз. 13- § даги (1) формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = P(-\infty < \bar{x} < x).$$

$\alpha = -\infty$, $\beta = x$ бўлган ҳол учун (4) формуладан фойдаланиб,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi(-\infty)\right]$$

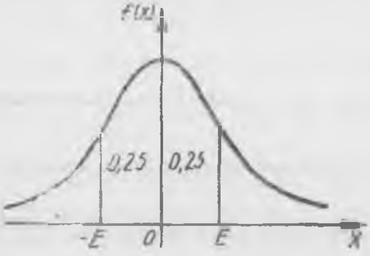
ни ҳосил қиламиз. Аммо $\overline{\Phi}(-\infty) = -1$ бўлгани учун [(3) формулага қ.]

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) + 1\right]. \tag{12}$$

$F(x)$ функциянинг графиги $a = 0$ бўлган ҳол учун 436-расмда тасвирланган.

18- §. Эҳтимолий (ўртача) четланиш ёки ўртача хато

Амалий эҳтимоллар назариясининг кўп масалаларида, хусусан, отиш назариясида, шунингдек хатолар назариясида тарқоқликнинг характеристикасидан фойдаланилади, у *эҳтимолий* ёки *ўртача четланиш* деб аталади. Отиш назариясида у *ўртача хато* дейилади.



437-расм.

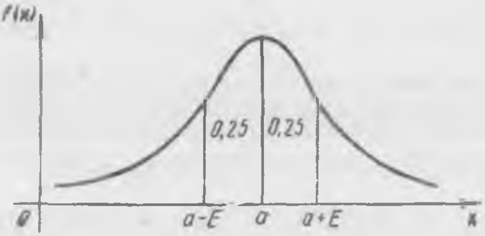
1-таъриф. Нормал тақсимотнинг ушбу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

қонунига бўйсунувчи тасодифий миқдорнинг (масалан, хатонинг) $(-E, E)$ интервалда ётиши эҳтимоли $\frac{1}{2}$ га тенг бўлса (437-расм), яъни

$$P(-E < \bar{x} < E) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

бўлса, бундай E сон *эҳтимолий* (*ўртача*) *четланиш* деб аталади.



438-расм.

Тарқоқлик маркази $x=a$ да бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунувчи ҳар қандай тасодифий миқдор учун ўртача четланиш E (438- расм)

$$P(a-E<\bar{x}<a+E)=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

муносабатни қаноатлантиради.

σ ўртача квадратик четланишни ўртача хато E орқали ифодалаймиз. (1) тенгликнинг чап томонини $\Phi(x)$ функция орқали ифода этамиз:

$$P(-E<\bar{x}<E)=\int_{-E}^{E}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (3)$$

17- § даги (7) формулага кўра,

$$P(-E<\bar{x}<E)=\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right) \qquad (4)$$

ни ҳосил қиламиз. (1) ва (4) тенгликларнинг чап томонлари тенг, демак, ўнг томонлари ҳам тенг:

$$\Phi\left(\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}. \qquad (5)$$

$\Phi(x)$ функция қийматлари жадвалидан аргументнинг $\Phi(x)=\frac{1}{2}$ га тўғри келадиган $x=0{,}4769$ қийматини топамиз. Демак,

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}=0{,}4769.$$

Бу 0,4769 сонни ρ билан белгилаш қабул қилинган:

$$\frac{E}{\sigma\sqrt{2}}=\rho=0{,}4769. \qquad (6)$$

Бу ердан

$$\left.\begin{aligned} E&=\rho\sqrt{2}\,\sigma,\\ \sigma&=\frac{E}{\rho\sqrt{2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

19- §. Нормал тақсимот қонунининг ўртача четланиш орқали ифодаси. Лапласнинг келтирилган функцияси

Параметр σ ни 18- § даги (7) формулага кўра, E параметр орқали ифода этиб ҳамда 15- § даги (4) қўйиб тақсимот қонунининг ўртача четланиши орқали ифодасини ҳосил қиламиз:

$$f(x)=\frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E^2}}. \qquad (1)$$

Тасодифий миқдорнинг (масалан, хатонинг) (α, β) оралиқда ётиш эҳтимоли 17-§ даги (5) формулага мувофиқ қуйидагига тенг бўлади:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta}{E}\right) - \Phi\left(\rho\frac{\alpha}{E}\right)\right] \qquad (2)$$

ҳамда 17-§ даги (7) формулага мувофиқ:

$$P(-l < \bar{x} < l) = \Phi\left(\rho\frac{l}{E}\right). \qquad (3)$$

(2) формуланинг ўнг томонида турган $\frac{\beta}{E}$ ва $\frac{\alpha}{E}$ сонлар масаланинг характерига кўра аниқланади, ρ — маълум сон, $\rho = 0{,}4769$.

Ҳар бир ҳисоблашда ρ га кўпайтириб ўтирмаслик мақсадида $\Phi(\rho x)$ функция учун жадвал тузилган. Бу функцияни $\hat{\Phi}(x)$ билан белгилайдилар:

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\rho x). \qquad (4)$$

$\hat{\Phi}(x)$ функция *Лапласнинг келтирилган функцияси* деб аталади. Бу функциянинг қийматлари жадвали китоб охирида келтирилган (1-жадвалга қ.)

17-§ даги (2) га асосан $\hat{\Phi}(x)$ функция

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho x} e^{-t^2}\,dt$$

интеграл билан аниқланади.

$t = \rho z$ алмаштириш бажариб

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-\rho^2 z^2}\,dz \qquad (5)$$

ни ҳосил қиламиз.

(2) тенгликнинг ўнг томонини Лапласнинг келтирилган функцияси орқали ифода этамиз:

$$P(\alpha < \bar{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E}\right)\right] \qquad (6)$$

Хусусий ҳолда, тасодифий миқдор қийматини тарқоқлик марказига нисбатан симметрик бўлган $(-l, l)$ интервалда ётиш эҳтимоли (3, формулага мувофиқ

$$P(-l < \bar{x} < l) = \hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \qquad (7)$$

ва

$$P(0 < \overline{x} < l) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}\left(\frac{l}{E}\right) \qquad (8)$$

каби ифодаланади.

Агар ўрта қиймат $a \neq 0$ бўлса, тасодифий миқдор $\overline{x}$ нинг (α, β) интервалда ётиш эҳтимоли ўртача хато E орқали қуйидагича ифода этилишига эътибор бериб ўтамиз (17- § даги (4) формулага қ.):

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\rho\frac{\beta - a}{E}\right) - \Phi\left(\rho\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]. \qquad (9)$$

Кейинги тенглик Лапласнинг келтирилган функцияси орқали қуйидагича ифодаланади:

$$P(\alpha < \overline{x} < \beta) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta - a}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\alpha - a}{E}\right)\right]. \qquad (10)$$

20- §. Уч сигма қоидаси. Хатолар тақсимоти эҳтимолларининг шкаласи

Амалий ҳисоблаш ишларини ўтказаётганда нормал қонунга бўйсунувчи тасодифий миқдорнинг унинг тарқоқлик марказидан (ўрта қийматидан) четланишининг ўлчов бирлиги учун ўрта квадратик четланиш σ қабул қилинган. Бу ҳолда 17- § даги (7) формулага мувофиқ турли ҳисоблаш ишларида фойдали бўлган ушбу тенгликлар ҳосил қилинади:

$$P(-\sigma < \overline{x} < \sigma) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}683,$$

$$P(-2\sigma < \overline{x} < 2\sigma) = \Phi\left(\sqrt{2}\right) = 0{,}954,$$

$$P(-3\sigma < \overline{x} < 3\sigma) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}997.$$

Бу тенгликларнинг геометрик тасвири 439- расмда берилган.

Тасодифий миқдорнинг (хатонинг) ўрта қийматидан абсолют қиймат бўйича 3σ дан ортиқ четланмаслиги деярли муқаррардир. Бу жумла *уч сигма қоидаси* дейилади.

Отиш назариясида ва турли статистик материалларни ишлаб чиқишда 19- § даги (1) формула билан аниқланадиган тақсимот зичлигида тасодифий миқдор $\overline{x}$ нинг $(0, E)$, $(E, 2E)$, $(2E, 3E)$, $(3E, 4E)$, $(4E, 5E)$ интервалларда ётиши эҳтимолларини билиш фойдали бўлади. Бу эҳтимолларни билиш кўп ҳолларда ҳисоблаш ишларини қисқартиради ҳамда ҳодисани анализ қилишга ёрдам беради.

Бу эҳтимолларни ҳисоблашда 19-§ даги (8) формуладан ҳамда $\hat{\Phi}(x)$ функциянинг ушбу жадвалидан фойдаланамиз:

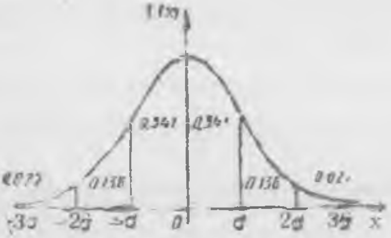
$$P(0 < \bar{x} < E) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}(1) \qquad = 0{,}2500,$$

$$P(E < \bar{x} < 2E) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}(2) - \hat{\Phi}(1)\right] = 0{,}1613,$$

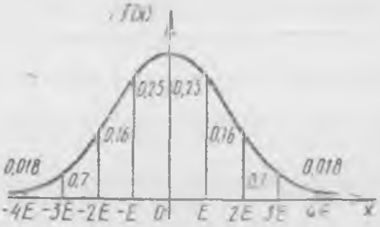
$$P(2E < \bar{x} < 3E) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}(3) - \hat{\Phi}(2)\right] = 0{,}0672,$$

$$P(3E < \bar{x} < 4E) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}(4) - \hat{\Phi}(3)\right] = 0{,}0180,$$

$$P(4E < \bar{x} < \infty) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}(\infty) - \hat{\Phi}(4)\right] = \frac{1}{2}(1 - 0{,}9930) = 0{,}0035.$$



439- расм.

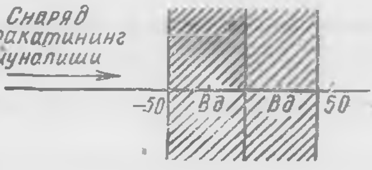


440- расм.

Ҳисоблаш натижаларининг геометрик тасвири 440-расмда берилган бўлиб, уни *хатолар тарқоқлиги шкаласи* дейилади.

Бу ҳисоблардан кўринишича, тасодифий миқдор қийматининг $(-4E,\ 4E)$ интервалда ётиши амалда муқаррардир. Тасодифий миқдор қийматининг бу интервал ташқарисида ётиши эҳтимоли 0,01 дан кичикдир.

1-мисол. 100 *м* кенгликдаги соҳага қарата битта ўқ узилган. Нишонга олишда ўқнинг учиш текислигига перпендикуляр бўлган соҳа ўрта чизигига мўлжал қилинган. Тарқоқлик, $E = 20$ *м* узоқлик бўйича эҳтимолий четланишга эга бўлган нормал қонунга бўйсунади. Ўқнинг соҳага тушиш эҳтимолини аниқланг (441-расм). Узунлик бўйича ўртача четланишни отиш назариясида *Вд* билан, ён бўйича ўртача четланишни *Вб* билан белгиланади.



441- расм.

Ечиш. 19-§ даги (7) формуладан фойдаланамиз. Бизда $l = 50$ *м* $E = Вд = 20$ *м*.

Демак,

$$P(-50 < \bar{x} < 50) = \widehat{\Phi}\left(\frac{50}{20}\right) = \widehat{\Phi}(2{,}5) = 0{,}9082 \approx 0{,}91.$$

Эслатма. $\widehat{\Phi}(x)$ функция жадвалларидан фойдаланмасдан, балки тарқоқлик шкаласидан фойдаланиб масалани тақрибан ечиш мумкин (440- расм). Бизнинг мисолда $l = 2{,}5E$. Демак,

$$P(-50 < \bar{x} < 50) = 2(0{,}25 + 0{,}16 + 0{,}04) = 0{,}90.$$

2- мисол. Узоқликни ўлчайдиган асбоб хатоси ўртача хатоси $E = 10$ *м* бўлган нормал қонунга бўйсуниши тажриба йўли билан аниқланган. Бу асбоб билан аниқланган узоқликнинг ҳақиқий узоқликдан четланишининг 15 *м* дан ошмаслик эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. Берилган мисолда $l = 15$ *м*, $E = 10$ *м*. 19- § даги (7) формулага биноан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(-15 < \bar{x} < 15) = \widehat{\Phi}\left(\frac{15}{10}\right) = \widehat{\Phi}(1{,}5) = 0{,}6883 \approx 0{,}69.$$

21- §. Ўрта арифметик хато

Хатоларнинг характеристикасини бериш учун хато абсолют миқдорининг ўрта қийматига тенг бўлган *ўрта арифтетик хато* тушунчаси киритилади. Ўрта арифметик хатони d билан белгилаймиз. x хатолар 15- § даги (4) нормал қонунга бўйсунсин деб ўрта арифметик хатони аниқлаймиз. 15- § даги (2) га ўхшаш формула бўйича ($a = 0$) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Шундай қилиб, ўрта арифметик хато ўрта квадратик четланиш σ орқали қуйидагича ифода этилади:

$$d = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \qquad (1)$$

22- §. Аниқлик ўлчови. Хатолар тақсимоти характеристикалари орасидаги муносабат

Кўпгина жараёнларни текширишда, хусусан отиш назариясида, нормал қонуннинг тақсимот зичлиги

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \qquad (1)$$

шаклда ёзилади. 15-§ даги (4) ҳамда юқоридаги (1) формулаларни таққослаб кўрамизки, киритилган h параметр σ параметр орқали қуйидагича ифодаланади:

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}. \tag{2}$$

h миқдор σ га тескари пропорционал, яъни ўрта квадратик хатога ёки ўрта квадратик четланишга тескари пропорционал. σ^2 дисперсия қанча кичик бўлса, яъни тарқоқлик қанча кам бўлса, h нинг қиймати шунча катта бўлади. Шунинг учун h *аниқлик ўлчови* дейилади.

21-§ даги (2) ҳамда юқоридаги (1) дан қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{3}$$

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Ўртача хато E аниқлик ўлчови h орқали (3) ва 18-§ даги (7) формулаларга асосан қуйидагича ифода этилади:

$$E = \frac{\rho}{h}. \tag{5}$$

Баъзан хатолар тақсимотининг бир характеристикасини бошқаси орқали ифода этиш зарур бўлиб қолади. Шу сабабли қуйидаги тенгликлар фойдали бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{E}{\sigma} = \rho\sqrt{2} = 0{,}6745, \quad \frac{E}{d} = \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8453, \quad \frac{\sigma}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}2533, \\ &\frac{\sigma}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{2}} = 1{,}4826, \quad \frac{d}{E} = \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} = 1{,}1829. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

23-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдор

Икки ўлчовли тасодифий миқдор билан масалан, (xOy) текислигида жойлашган объектни ишдан чиқариш жараёнини текширишда иш кўришга тўғри келади.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг қиймати иккита x ва y сон билан аниқланади; икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг ўзини $(\overline{x}, \overline{y})$ билан белгилаймиз. $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ лар дискрет x_i ва y_i қийматлар қабул қилсин. Бирор тўпламнинг ҳар бир (x_i, y_i) жуфт қийматига маълум бир p_{ij} эҳтимол мос келсин. Биз икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар тақсимоти жадвалини тузишимиз мумкин.

$\bar{x}$ $\bar{y}$	x_1	x_2	...	...	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}				p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}				p_{n2}
$\vdots$						
$\vdots$						
y_m	p_{1m}	p_{2m}				p_{nm}

Ушбу тенгликнинг ўринли бўлиши равшан:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1. \qquad (1)$$

Энди икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорни таърифлаймиз. Икки ўлчовли тасодифий $(\bar{x}, \bar{y})$ миқдорнинг қиймати $x<\bar{x}<x+\Delta x$, $y<\bar{y}<y+\Delta y$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимолини қуйидагича белгилаймиз:

$$\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ \ y<\bar{y}<y+\Delta y).$$

1-таъриф. Агар $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+y^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқликда

$$\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ y<\bar{y}<y+\Delta y)\cong f(x,\ y)\Delta x\,\Delta y \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, $f(x,\ y)$ функция икки ўлчовли тасодифий $(\bar{x},\ \bar{y})$ миқдорнинг *тақсимот зичлиги* дейилади.

(2) формула 12- § даги (2) формулага ўхшашдир.

Тўғри бурчакли (xOy) координаталар системасини қараймиз. Агар $(\bar{x},\ \bar{y})$ тасодифий миқдорнинг қийматларини текисликнинг мос x ва y координатали нуқталари орқали белгиласак, у ҳолда $\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ \ y<\bar{y}<y+\Delta y)$ ифода икки ўлчовли $(\bar{x},\ \bar{y})$ тасодифий миқдорнинг штрихланган Δs тўғри тўрт бурчакдаги нуқта билан аниқланган қийматни қабул қилиш эҳтимолини билдиради (442- расм). Бу ҳолда биз „тасодифий миқдорнинг қиймати Δs соҳада ётади“ деймиз*)

$\mathrm{P}(x<\bar{x}<x+\Delta x,\ \ y<\bar{y}<y+\Delta y)$ эҳтимолни $\mathrm{P}[(\bar{x},\ \bar{y})\subset\Delta s]$

---

*) (3) тенгликдаги юзни ихтиёрий формада олса ҳам бўлаверади.

каби ҳам белгилаймиз. Бундай белгилашларда (2) тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Delta s] \approx f(x, y)\Delta s. \tag{3}$$

Энди 12- § даги 1-теоремага ўхшаш ушбу теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. *Тақсимот зичлиги $f(x, y)$ бўлган икки ўлчовли $(\bar{x}, \bar{y})$ тасодифий миқдорнинг D соҳада ётиш эҳтимоли $P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Delta s]$ D соҳа бўйича $f(x, y)$ дан олинган икки каррали интеграл билан ифода этилади, яъни*

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Исбот. D соҳани икки каррали интеграллар назариясида қилганимиз каби Δs юзларга ажратамиз. Ҳар бир юз учун (3) тенгликни ёзиб, ҳосил бўлган тенгликларнинг ўнг ва чап томонларини қўшамиз.

$$\sum \Delta s = D \quad \text{ва} \quad \sum P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset \Delta s] = P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D]$$

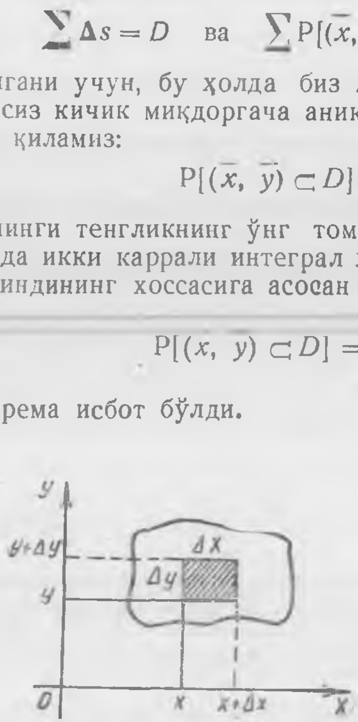
бўлгани учун, бу ҳолда биз Δs га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдоргача аниқлик билан тақрибий тенглик ҳосил қиламиз:

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] \approx \sum f(x, y)\,\Delta s.$$

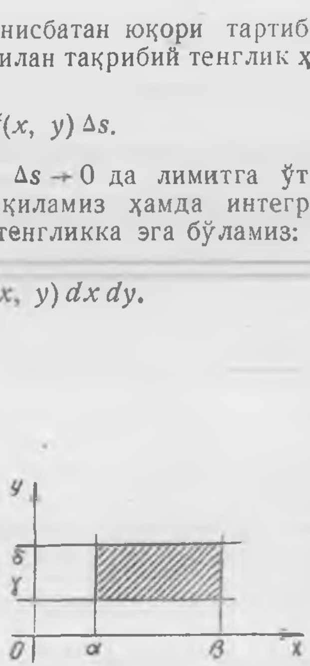
Кейинги тенгликнинг ўнг томонида $\Delta s \to 0$ да лимитга ўтиб ўнгда икки каррали интеграл ҳосил қиламиз ҳамда интеграл йиғиндининг хоссасига асосан аниқ тенгликка эга бўламиз:

$$P[(\bar{x}, \bar{y}) \subset D] = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Теорема исбот бўлди.



442- расм.



443- расм.

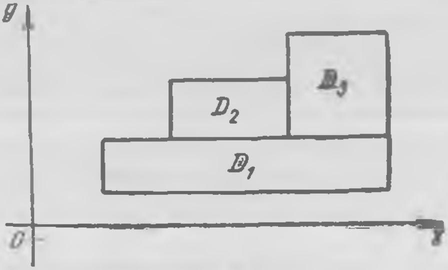
1-эслатма. Агар D соҳа $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ (443-расм) тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак бўлса, у ҳолда

$$\mathrm{P}[\alpha<\bar{x}<\beta,\ \gamma<\bar{y}<\delta]=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,\ y)\,dx\,dy. \tag{5}$$

2-эслатма. (1) тенгликка ўхшаш ушбу

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy=1 \tag{6}$$

тенглик бажарилади, чунки икки ўлчовли миқдорнинг бирор қиймат қабул қилиши муқаррардир. Қайси ерда $f(x,\ y)$ функция масаланинг маъносига кўра аниқланмаган бўлса, $f(x,\ y)=0$ деб фараз қиламиз



444- расм

Агар D соҳа 444-расмда тасвир этилган тўғри тўртбурчаклар йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда тасодифий миқдорнинг бундай соҳада ётиш эҳтимоли алоҳида тўғри тўртбурчаклар учун эҳтимоллар йиғиндиси каби аниқланади, яъни ҳар бир тўғри тўртбурчакдан олинган аниқ интеграллар йиғиндиси каби аниқланади:

$$\mathrm{P}[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D]=\mathrm{P}[(x,\ \bar{y})\subset D_1]+\mathrm{P}[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_2]+\mathrm{P}[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_3].$$

Мисол. Икки улчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

формула билан берилади. Тасодифий миқдор қийматини $x=0$, $x=1$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $v=\sqrt{3}$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда ётиши эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. (5) формулага кўра қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{P}\left|0<\bar{x}<1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}<\bar{y}<\sqrt{3}\right|=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1\operatorname{arctg}y\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{24}.$$

2-таъриф. Ушбу

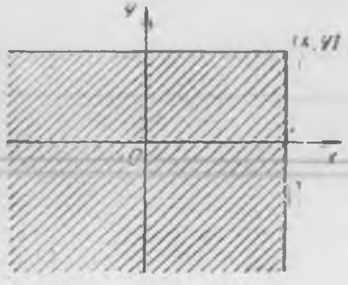
$$F(x,\ y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}f(u,\ v)\,du\,dv \qquad (7)$$

функция икки ўлчовли $(\bar{x},\ \bar{y})$ тасодифий миқдор *эҳтимоллари тақсимотининг интеграл функцияси* деб аталади.

Тақсимотнинг интеграл функцияси $\bar{x}<x,\ \bar{y}<y$ бўлиш эҳтимолини, яъни

$$F(x,\ y)=\mathrm{P}(\bar{x}<x,\ \bar{y}<y)$$

ни ифода этади.



445- расм.

Геометрик нуқтаи назардан тақсимот функция икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг 445-расмдаги штрихланган чексиз тўртбурчакда ётиши эҳтимолини билдиради.

Аниқ интегрални параметр бўйича дифференциаллаш ҳақидаги теоремага асосан тақсимот зичлиги билан тақсимотнинг интеграл функцияси орасидаги муносабат белгиланади:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,\ v)\,dv,\\ \frac{\partial^2F}{\partial x\,\partial y}&=f(x,\ y).\end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг эҳтимоллар зичлиги тақсимотнинг интеграл функциясидан олинган иккинчи тартибли аралаш ҳосиладан иборатдир.

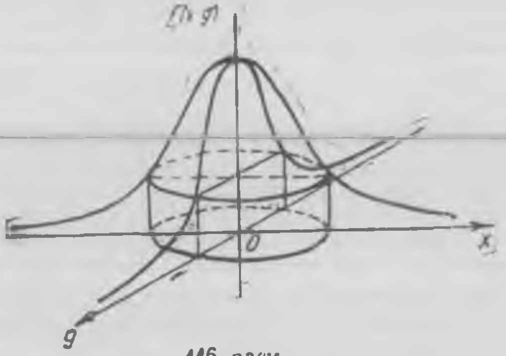
24- §. Текисликдаги нормал тақсимот қонуни

1-таъриф. Агар икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \tag{1}$$

формула билан ифода этилса, бу миқдорнинг тақсимотини *нормал тақсимот* дейилади.

Бу функциянинг графиги 446- расмда тасвир этилган сиртдир.



446- расм.

(1) тақсимот қонунига бўйсунган тасодифий миқдорнинг *тарқоқлик маркази* (0, 0) нуқтадир*). σ_x ва σ_y лар *бош ўрта квадратик четланиш* дейилади. (1) формулани қуйидагича ёзамиз:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}. \tag{2}$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ ни тасодифий $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ миқдорларнинг иккита нормал тақсимоти кўпайтмаси деб қараш мумкин. Бир ўлчовли тасодифий миқдорда бўлгани каби икки ўлчовли та-

---

*) Агар тарқоқлик маркази (a, b) нуқтада бўлса, бу ҳолда тақсимот қонуни ушбу формула билан берилади:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma_y^2}}, \tag{1'}$$

содифий миқдорнинг бош эҳтимолий четланиши E_x ва E_y ни қуйидагича аниқлаймиз (18-§ даги (7) формулага қ.):

$$E_x = \rho\sqrt{2}\sigma_x, \qquad E_y = \rho\sqrt{2}\,\sigma_y. \tag{3}$$

E_x ва E_y лар орқали ифодаланган σ_x ва σ_y ларни (1) формулага қўйсак,

$$f(x,\ y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)} \tag{4}$$

ҳосил бўлади. (4) сиртнинг юксаклик чизиғини қараймиз:

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = k^2 = \text{const} \tag{5}$$

(бунда $f(x,\ y) = \text{const}$ бўлади). Юксаклик чизиқлари ярим ўқлари kE_x ва kE_y га тенг бўлган эллипслардан иборат. Эллипсларнинг марказлари тарқоқлик маркази билан устма-уст тушади. Бу эллипслар *тарқоқлик эллипслари* дейилади. Уларнинг ўқлари *тарқоқлик ўқлари* дейилади. *Тарқоқликнинг бирлик эллипси* деб ярим ўқлари эҳтимолий четланиш E_x ва E_y ларга тенг бўлган эллипсга айтилади. Агар (5) тенгликда $k = 1$ деб фараз қилинса, бирлик эллипснинг тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2} = 1. \tag{6}$$

Тарқоқликнинг тўлиқ эллипси деб ярим ўқлари $4E_x$ ва $4E_y$ га тенг бўлган эллипсга айтилади. Бу эллипснинг тенгламаси қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{x^2}{(4E_x)^2} + \frac{y^2}{(4E_y)^2} = 1. \tag{7}$$

Кейинги параграфда биз икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тарқоқликнинг тўлиқ эллипсида ётиш эҳтимоли 0,97 га тенг эканлигини, яъни амалда шу эллипсда ётиши муқаррар эканини тайинлаймиз.

25-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот нормал қонунга бўйсунган ҳолда томонлари тарқоқликнинг бош ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакда ётиш эҳтимоли

Тақсимот нормал, яъни

$$f(x,\ y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2} + \frac{y^2}{E_y^2}\right)}$$

бўлсин. 23- § даги (5) формулага мувофиқ (443- расмга қ.) тасодифий миқдорнинг $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда ётиш эҳтимоли қуйидагича ифодаланади:

$$P(\alpha<\overline{x}<\beta,\ \gamma<\overline{y}<\delta)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta}\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right)}dx\,dy. \quad (1)$$

Интеграл остидаги функцияни иккита функция кўпайтмаси шаклида тасвирлаб, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$P(\alpha<\overline{x}<\beta,\ \gamma<\overline{y}<\delta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}}dx\int_{\gamma}^{\delta}\frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_y}e^{-\rho^2\frac{y^2}{E_y^2}}dy. \quad (2)$$

19- § даги (6) формулага асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(\alpha<\overline{x}<\beta,\ \gamma<\overline{y}<\delta)=\frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\beta}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\alpha}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\delta}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\gamma}{E_y}\right)\right]. \quad (3)$$

Агар кейинги формулада $\alpha=-l_1$, $\beta=l_1$, $\gamma=-l_2$, $\delta=l_2$ деб фараз қилсак, яъни маркази координаталар бошида бўлган тўғри тўртбурчакни қарасак, у ҳолда 19- § даги (7) формулага мувофиқ (3) формула

$$P(-l_1<\overline{x}<l_1,\ -l_2<\overline{y}<l_2)=\hat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right) \quad (4)$$

кўринишни олади.

Эслатма. Тасодифий миқдорнинг томонлари координата ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакда ётиш эҳтимоли ҳақидаги масалани қуйидагича ечиш ҳам мумкин эди. Тасодифий миқдор қийматларининг тўғри тўртбурчакда ётиши мураккаб ҳодиса бўлиб, у $-l_1<\overline{x}<l_1$ соҳада ётиш ҳамда $-l_2<\overline{y}<l_2$ соҳада ётишдан ташкил топган иккита боғлиқ бўлмаган ҳодисанинг бир вақтда рўй беришидан иборат (ёзувда қисқалик учун маркази координатлар бошида бўлган тўғри тўртбурчакни қараймиз) Тасодифий миқдор $\overline{x}$ нинг тақсимот зичлиги

$$f_1(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}}$$

бўлсин. Тасодифий $\overline{y}$ миқдорнинг тақсимот зичлиги эса

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}E_y}e^{-\rho^2\frac{y^2}{E_y^2}}$$

бўлсин.

Тасодифий миқдорнинг $-l_1 < \overline{x} < l_1$ соҳада ҳамда $-l_2 < \overline{y} < l_2$ соҳада ётиш эҳтимолини ҳисоблаймиз. 19-§ даги (7) формулага мувофиқ қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$P(-l_1 < \overline{x} < l_1) = \widehat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right),$$

$$P(-l_2 < \overline{y} < l_2) = \widehat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right).$$

Мураккаб ҳодисанинг—тасодифий миқдор қийматларининг тўғри тўртбурчакда ётишининг — эҳтимоли эҳтимоллар кўпайтмасига тенг бўлади:

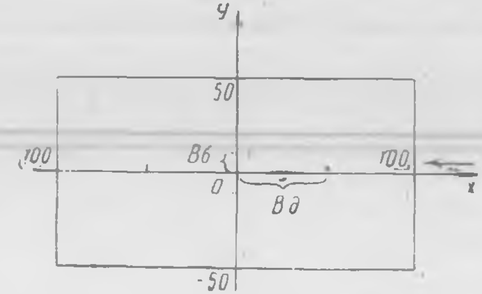
$$P(\alpha < \overline{x} < \beta,\ \gamma < \overline{y} < \delta) = P(-l_1 < \overline{x} < l_1)\ P(-l_2 < \overline{y} < l_2) = \widehat{\Phi}\left(\frac{l_1}{E_x}\right)\widehat{\Phi}\left(\frac{l_2}{E_y}\right).$$

(4) формулани ҳосил қилдик.

Мисол. Томонлари 200 *м* ҳамда 100 *м* бўлиб,

$$x = -100,\ x = 100,\ y = -50,\ y = 50$$

чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак юзига қарата отиш бажарилмоқда. Бош ўртача четланишлар мос равишда $E_x = Вд = 50$ *м*, $E_y = Вб = 10$ *м* га тенг. Битта ўқ узишда ўқнинг тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимолини топинг (447-расм).



447-расм.

Ечиш. Бизнинг мисолда

$$l_1 = 100,\quad l_2 = 50,\quad E_x = 50,\quad E_y = 10.$$

Бу қийматларни (4) формулага қўйиб, ҳамда $\widehat{\Phi}(x)$ функция қийматлари жадвалидан фойдаланиб (китоб охиридаги 1-жадвалга қаранг) топамиз:

$$P = \widehat{\Phi}\left(\frac{100}{50}\right)\cdot\widehat{\Phi}\left(\frac{50}{10}\right) = \widehat{\Phi}(2)\cdot\widehat{\Phi}(5) = 0{,}8227\cdot 0{,}9993 = 0{,}8221.$$

26-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тарқоқлик эллипсида ётиш эҳтимоли

Хатолар назариясида қуйидаги масалани қараш керак бўлади. Агар тақсимот зичлиги 24-§ даги (4) формула билан берилган бўлса, тасодифий миқдорнинг, масалан, текисликдаги хатонинг

$$\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}=k^2 \tag{1}$$

тарқоқлик эллипсида ётиши эҳтимолини ҳисобланг. 23-§ даги (4) формулага мувофиқ ушбуни ҳосил қиламиз

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D]=\iint\limits_{D_э}\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right]}dx\,dy, \tag{2}$$

бунда $D_в$ соҳа (1) эллипс билан чегараланган.

$$x=E_x u, \qquad y=E_y v$$

деб фараз қилиб, ўзгарувчиларни алмаштирамиз, бундай алмаштиришда $D_в$ эллипс

$$u^2+v^2=k^2$$

доирага ўтади. Алмаштириш якобиани $I=E_x\cdot E_y$ га тенг бўлгани учун (2) тенглик ушбу кўринишни олади:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})]\subset D_в]=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D_k}\rho^2e^{-\rho^2(u^2+v^2)}\,du\,dv. \tag{4}$$

Кейинги интегралда қутб координаталарига ўтамиз:

$$u=r\cos\varphi, \qquad v=r\sin\varphi.$$

Бу ҳолда (4) тенгликнинг ўнг томони

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_в]=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{k}\rho^2e^{-\rho^2r^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

кўринишни олади. Ўнг томонда ҳисоблашларини бажариб, тарқоқлик эллипсида ётиш эҳтимоли учун ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_в]=1-e^{-\rho^2k^2}. \tag{5}$$

Хусусий ҳолларни қараб чиқайлик. Агар (5) формулада

$$P[(\bar{x},\ \bar{y})\subset D_в]_{k=1}=1-e^{-\rho^2}=0{,}203. \tag{6}$$

деб фараз қилинса, тарқоқликнинг бирлик эллипсида ётиш эҳтимоли ҳосил қилинади.

Агар (5) формулада $k = 4$ деб фараз қилинса, 24-§ даги (7) тўлиқ тарқоқлик эллипсида ётиш эҳтимоли ҳосил бўлади:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D_{э}]_{k=4} = 1 - e^{-16\rho^2} = 0{,}974 \tag{7}$$

24-§ даги (4) формулада $E_x = E_y = E$ бўлган хусусий ҳолни қараймиз. 24-§ даги (5) тарқоқлик эллипси радиуси $R = kE$ бўлган

$$x^2 + y^2 = k^2E^2 \tag{8}$$

доирага айланади. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг радиуси R га тенг бўлган доирада ётиши эҳтимоли (5) формулага кўра қуйидагича бўлади:

$$P[(\bar{x},\ \bar{y}) \subset D_R] = 1 - e^{-\rho^2 \frac{R^2}{E^2}}. \tag{9}$$

1-таъриф. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг радиуси $R = E_R$ бўлган доирада ётиши эҳтимоли $\frac{1}{2}$ га тенг бўлса, бундай E_R сон *радиал эҳтимолий четланиш* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, $R = E_R$ миқдор

$$1 - e^{-\rho^2 \frac{E_R^2}{E^2}} = \frac{1}{2}$$

муносабатдан аниқланади. Кўрсаткичли функция қийматлари жадвалидан

$$E_R = 1{,}75\,E$$

бўлишини топамиз.

27-§. Математик статистика масалалари. Статистик материал

Оммавий тасодифий ҳодисаларни рўйхатга олиш ва кузатиш натижасида статистик маълумотлар ёки статистик материал ҳосил бўлади. Хусусан, турли ўлчашлардаги хатолар статистик материал бўлиб хизмат қилади.

Агар кузатилаётган миқдор тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда бундай миқдор эҳтимоллар назарияси методи билан текширилади. Бу тасодифий миқдорнинг характерини тушуниш учун унинг тақсимот қонунини билиш керак бўлади. Кузатилган қийматларга асосланиб қаралаётган миқдорларнинг тақсимот қонунларини аниқлаш ҳамда тақсимот параметрлари қийматларини баҳолаш — математик статистиканинг вазифасидир.

Математик статистиканинг яна бошқа бир вазифаси қаралаётган миқдорлар қатнашадиган процессни оптимал ташкил қилиш учун керак бўладиган аниқ хулосаларни ҳосил қилиш мақсадида статистик материални ишлаб чиқиш ҳамда анализ қилиш усулларини яратишдан иборатдир.

Ҳодисаларни турли кузатишлар мисолларини келтирамиз, бундай кузатишлар натижасида статистик материал ҳосил бўлади.

1-мисол. Ўлчов асбоби ёрдами билан бирор объектни кўп марта ўлчаганда, хусусан, бирор объектгача узоқликни аниқлаш пайтида, кузатилаётган миқдорнинг турли қийматлари ҳосил бўлади. Бундай қийматларни *кузатилган қийматлар* деб атаймиз (ҳар қандаи ҳодисани текширишда ҳосил қилинган қийматни биз шундай деб атаймиз).

Шу йўл билан олинган қийматларга асосланиб бирор натижага келишдан аввал улар системалаштиришни ҳамда ишлаб чиқишни талаб қилади.

Кўрсатиб ўтилганидек, кузатилган x қиймат билан кузатилаётган a миқдорнинг ҳақиқий қиймати орасидаги δ айирма $(x - a = \delta)$ *ўлчаш хатоси* деб аталади. Юқорида айтилганларни хатолар терминида айтиш мумкин. Ўлчаш хатоси аниқ хулосалар олиш мақсадида *математик ишлов беришни* талаб қилади.

2-мисол. Маҳсулотни кўплаб (оммавий) ишлаб чиқаришда ҳосил қилинган маҳсулотнинг бирор ўлчамини (масалан, узунлигини олинган маҳсулотлар учун олдиндан берилган ўлчамидан четланиш (тайёрлаш хатоси) миқдорини қарашга тўғри келади.

3-мисол. Отиш пайтида ўқнинг тегиш нуқтаси координати билан мўлжалга олиш нуқтаси координати орасидаги айирма *отиш хатосидир* (тарқоқликдир). Бу хатолар математик текширишларни талаб қилади.

4-мисол. Деталнинг эксплуатациядан кейинги ўлчамлари билан унинг эксплуатация қилинганга қадар (проект) ўлчами орасидаги фарқлар, четланишлар миқдорини ўлчаш натижалари математик анализни талаб қилади. Бу фарқларни ҳам „хатолар“ деб қараш мумкин.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, қаралаётган миқдорлар тасодифий миқдорлар бўлиб, ҳар бир кузатилган қийматни эса тасодифий миқдорнинг хусусий қиймати деб қараш керак.

Масалан, отишда узунлик бўйича қилинадиган хато (тарқоқлик) заряднинг тармоқланишдаги хато билан, снарядни тайёрлашда оғирликдаги хато билан, нишонга олишдаги хато билан, узоқликни аниқлашдаги хато билан, метереологик шароитларнинг ўзгариши билан ва ҳ. к. лар билан аниқланади. Буларнинг барчаси тасодифий миқдорлардир, бинобарин, тарқоқлик ҳам—уларнинг биргаликдаги таъсири натижаси ўлароқ—тасодифий миқдордир.

28-§. Статистик қатор. Гистограмма

Кузатишлар (ўлчашлар) натижасида ҳосил бўладиган статистик материални иккита сатрдан ташкил топган жадвалга жойлаштирилади. Биринчи сатрга ўлчаш номерлари i ни, иккинчи сатрга эса ўлчанадиган x миқдорнинг ҳосил қилинган x_i қийматлари ёзилади:

i	1	2	3	...	i	...	n
x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n

Бундай жадвал *оддий статистик қатор* деб аталади. Ўлчашлар сони катта бўлганда бундай жадвалга жойлаштирилган статистик материални кўздан кечириш қийин ва, демак, унинг анализи қийин бўлади. Шунинг учун ҳосил қилинган оддий статистик қаторга асосланиб *гуруҳлаш* (*группаларга ажратиш*) бажарилади. Бу қуйидагича олиб борилади. x миқдорнинг ҳосил қилинган қийматлари бутун оралиғини (интервалини) тенг хусусий (a_0, a_1), (a_1, a_2), ... $(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$ интервалларга ажратамиз ва x миқдорнинг (a_{k-1}, a_k) интервалга тўғри келадиган (тушадиган) m_k қийматлари сонини ҳисоблаб чиқамиз. Интервалнинг учларига тўғри келадиган қийматларни ё чап ёки ўнг интервалга киритилади (баъзан уларнинг ярмини чап интервалга, ярмини ўнг интервалга ўтказилади).

Ушбу

$$\frac{m_k}{n} = p_k^* \tag{1}$$

сон (a_{k-1}, a_k) интервалга мос бўлган нисбий частотадир.

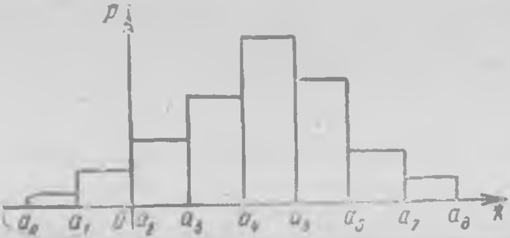
$$\sum_{k=1}^{\lambda} p_k^* = 1 \tag{2}$$

экани равшан.

Шундай ишлаб чиқиш натижаларига асосан учта сатрдан иборат бўлган жадвал тузамиз. Биринчи сатрда a_k нинг ўсиб бориш тартиби бўйича интервалларни, иккинчи сатрда уларга мос бўлган m_k сонларни, учинчи сатрда $p_k = \frac{m_k}{n}$ частоталарни кўрсатамиз:

Интерваллар	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{k-1}, a_k)	...	$(a_{\lambda-1}, a_\lambda)$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Ана шунинг ўзи *гуруҳлашдир* (группаларга ажратишдир). Группаларга ажратишни геометрик тарзда ҳам тасвирлаш мумкин. Бу қуйидагича бажарилади. Ox ўқида $a_0, a_1, \ldots a_k, \ldots a_\lambda$ нуқталарни белгилаймиз. $[a_{k-1}, a_k]$ кесмани асос қилиб юзи p_k^* га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз. Ҳосил қилинган шакл *гистограмма* деб аталади (448- расм).



448- расм.

Группаларга ажратиш ҳамда гистограммаларга асосланиб тақрибий равишда статистик тақсимот функция тузилади.

Материалнинг бундан кейинги ишланиши қуйидагича амалга оширилади. (a_{k-1}, a_k) интерваллар ўрталарини $\tilde{x}_k$ билан белгиланади ҳамда бу қийматни ўлчаш натижасининг қиймати деб ҳисобланади, у m_k марга такрорланади. Сўнгра гуруҳлашни тасвирловчи жадвал ўрнига қуйидаги жадвал тузилади:

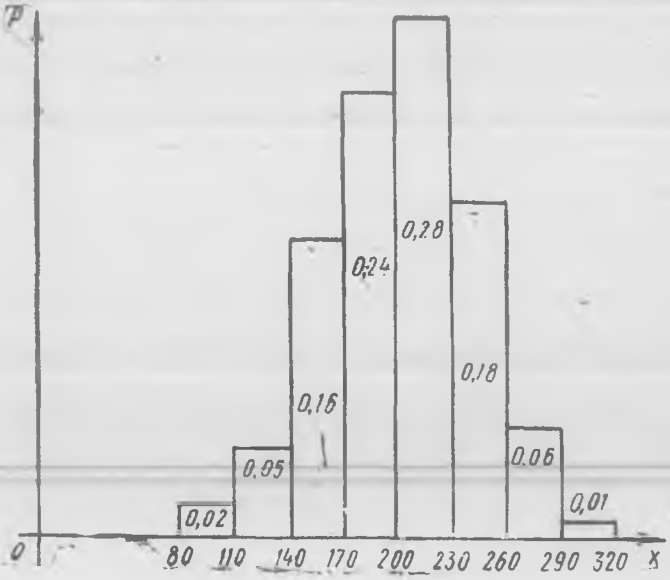
$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	...	$\tilde{x}_k$	...	$\tilde{x}_\lambda$
m_k	m_1	m_2	...	m_k	...	m_λ
p_k^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*	...	p_λ^*

Бу ишлаб чиқиш (a_{k-1}, a_k) интервалдаги барча қийматларнинг бир-бирига яқинлигига асосан бажарилган ва шунинг учун уларни интервал ўртасининг p_k^* абсциссасига тенг деб ҳисобланади.

Мисол. Узоқликни 100 марта ўлчашдан олинган натижаларга асосланиб қуйидаги гуруҳлаш бажарилган:

Интерваллар	80—110	110—140	140—170	170—200	200—230	230—260	260—290	290—320
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

Бу гуруҳлашга асосланиб статистик қаторнинг график тасвирини (гистограммасини) ясаймиз (449- расм).



449- расм.

Сўнгра ушбу жадвални тузамиз:

$\tilde{x}_k$	95	125	155	185	215	245	275	305
m_k	2	5	16	24	28	18	6	1
p_k^*	0,02	0,05	0,16	0,24	0,28	0,18	0,06	0,01

29- §. Ўлчанадиган миқдорнинг тўғри келадиган қийматини аниқлаш

Бирор миқдорни ўлчаш пайтида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўлчаш натижалари ҳосил қилинган бўлсин. Бу қийматларни тасодифий миқдор x нинг хусусий қийматлари деб қараш мумкин. Аниқланадиган миқдорнинг мос келадиган қиймати учун ҳосил қилинган қийматларнинг ўрта арифметиги қабул қилинади:

$$m_x^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

m_x^* миқдор *статистик ўрта* деб аталади.

Агар ўлчашлар сони n катта бўлса, у ҳолда 28- § да қаралган жадвал материалидан фойдаланилади ва m_x^* ни

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 m_1 + \tilde{x}_2 m_2 + \ldots + \tilde{x}_k m_k + \ldots + \tilde{x}_\lambda m_\lambda}{n}$$

каби ҳисобланади. Ёки 28- § даги (1) белгилашлардан фойдаланиб

$$m_x^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k p_k^* \tag{2}$$

каби ёзамиз. Ҳосил қилинган қиймат *вазнлари ҳисобга олинган ўрта* деб аталади.

Эслатма. Бундан кейин (1) ва (2) формулалар бўйича ҳисоблаш натижаларини биргина ҳарф билан белгилаймиз. Бу эслатма (3) ва (4) формулаларга ҳам тааллуқлидир.

Статистик ўртани, баъзи чеклашларда, $n \to \infty$ да эҳтимол бўйича тасодифий миқдор x нинг ўрта қийматига интилишини исбот қилиш мумкин. Бу тасдиқ Чебишев теоремасидан келиб чиқади.

Энди *статистик дисперсияни* таърифлаймиз. У бундай таърифланади:*)

$$D^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - m_x^*)^2}{n}. \tag{3}$$

Бу миқдор кузатилаётган миқдор қийматларининг тарқоқлигини характерлайди.

---

*) Аслида статистик дисперсияни 550- бетда келтирилган формула бўйича ҳисоблаган яхши.

Агар 28-§ даги жадваллар материалидан фойдаланилса, у ҳолда статистик дисперсия ушбу

$$D^* = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^* \qquad (4)$$

формула бўйича аниқланади. Бу формула 10-§ даги (2) формулага ўхшашдир.

Мисол. 28-§ даги статистик материалларга асосланиб статистик ўртани ҳамда статистик дисперсияни аниқланг.

Ечиш. (2) формулага мувофиқ ушбуни ҳосил қиламиз:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{\lambda} x_i p_i^* = 95 \cdot 0{,}02 + 125 \cdot 0{,}05 + 155 \cdot 0{,}16 + 185 \cdot 0{,}24 +$$
$$+ 215 \cdot 0{,}28 + 245 \cdot 0{,}18 + 275 \cdot 0{,}06 + 305 \cdot 0{,}01 = 201{,}20.$$

(4) формулага мувофиқ ушбуни ҳосил қиламиз:

$$D^*[\bar{x}] = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x^*)^2}{n} = \sum_{k=1}^{\lambda} (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^* = \sum_{k=1}^{\lambda} \tilde{x}_k^2 p_k^* - m_x^{*2} =$$
$$= 95^2 \cdot 0{,}02 + 125^2 \cdot 0{,}05 + 155^2 \cdot 0{,}16 + 185^2 \cdot 0{,}24 + 215^2 \cdot 0{,}28 +$$
$$+ 245^2 \cdot 0{,}18 + 275^2 \cdot 0{,}06 + 305^2 \cdot 0{,}01 - (201{,}20)^2 = 1753{,}56.$$

30-§. Тақсимот қонуни параметрларини аниқлаш. Ляпунов теоремаси. Лаплас теоремаси

$\bar{x}$ — тасодифий миқдор, масалан ўлчаш натижаси, a — ўлчанаётган миқдор, δ—ўлчаш хатоси бўлсин. У ҳолда бу миқдорлар

$$\delta = \bar{x} - a, \qquad \bar{x} = a + \delta \qquad (1)$$

муносабатлар билан боғланган. Кўп сондаги тажриба ва кузатишларнинг кўрсатишича, ўлчаш хатолари, систематик хатони, яъни ҳамма ўлчашларда ўзгармайдиган хатоларни (масалан, асбоб хатосини) ёки ўлчашдан ўлчашгача маълум қонун бўйича ўзгарадиган хатоларни чиқариб ташлагандан кейин, ҳамда қўпол хатоларни чиқариб юборгандан кейин, тақсимот маркази координатлар бошида бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунади. Бу назарий асослашлар билан ҳам тасдиқланади.

Агар тасодифий миқдор катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда баъзи бир шартларда бу йиғинди нормал тақсимот қонунига бўйсунади. Бу тасдиқ А. М. Ляпуновга (1857—1918) мансуб бўлган марказий лимит теорема деб аталадиган теорема шаклида таърифланади. Биз бу ерда шу теоремани бирмунча содда шаклда таърифлаймиз.

1-теорема. *Агар боғлиқ бўлмаган тасодифий* $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_n$ *миқдорлар ўрта қиймати а (умумийликни бузмасдан,* $a = 0$ *деб фараз қилиш мумкин) ва дисперсияси* σ^2 *бўлган бир хил тақсимот қонунига эга бўлса, у ҳолда n чегарасиз ўсиб борганда* $\overline{y}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i}{\sigma \sqrt{n}}$ *йиғиндининг тақсимот қонуни нормал тақсимотдан ҳар қанча кичик фарқ қилади, (бунда* $\overline{y}_n$ *шундай нормаланганки:*

$$M[\overline{y}_n] = 0, \quad D[\overline{y}_n] = 1)$$

Ляпунов теоремасининг амалиётдаги аҳамияти қуйидагидан иборат. Тасодифий миқдор, масалан, бирор миқдорнинг берилган миқдордан четланиши қаралади. Бу четланиш кўп факторларнинг таъсири натижасида келиб чиққан бўлиб, уларнинг ҳар бири бирор ташкил қилувчи четланишни беради, масалан, отишни олсак, тегиш нуқтасининг мўлжалга олиш нуқтасидан четланиши мўлжалга олишдаги хатодан, узоқликни аниқлашдаги хатодан, снарядни тайёрлашдаги хатодан ва ҳ. к. лардан келиб чиқади. Ташкил қилувчиларнинг ҳаммаси бизга маълум бўлмагани каби, ташкил қилувчи тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари ҳам бизга номаълум бўлиб қолиши мумкин. Аммо Ляпунов теоремасидан тасодифий миқдорнинг— умумий четланишининг — нормал қонунга бўйсуниши келиб чиқади.

Ляпунов теоремасидан агар $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_n$ лар бирор миқдорни ўлчаш натижалари бўлса (ҳар бир $\overline{x}_i$ — тасодифий миқдор) ва тасодифий $\overline{x}_i$ миқдорлар бир хил тақсимот қонунига бўйсунса, у ҳолда тасодифий миқдор—ўрта арифметик қиймат-

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n}{n}$$

нинг n етарли катта бўлганда нормал қонунга ҳар қанча яқин бўлган тақсимот қонунига бўйсуниши келиб чиқади. Амалиётда қараладиган тасодифий миқдорлар учун, одатда, бажариладиган баъзи бир қўшимча шартларда теорема бир хил бўлмаган тақсимот қонунига бўйсунувчи тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун ҳам ўз кучини сақлайди. Тажрибанинг кўрсатишига қараганда, қўшилувчилар сони 10 тартибида бўлгандаёқ уларнинг йиғиндиси нормал тақсимотга бўйсунади деб ҳисоблаш мумкин. $\bar{a}$ ва $\bar{\sigma}^2$ билан ўрта қиймат ва дисперсиянинг тақрибий қийматларини белгилаймиз. Бу ҳолда тасодифий δ ва $\bar{x}$ миқдорларнинг тақрибий тақсимот қонунларини ёза оламиз:

$$\bar{f}(\delta) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\bar{\sigma}^2}}, \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{a})^2}{2\bar{\sigma}^2}}. \tag{3}$$

Параметр $\bar{a}$ экспериментал маълумотларга асосланиб, 29-§ даги (1) формулага кўра аниқланади:

$$\bar{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{4}$$

Бу Чебишев (1821—1894) теоремаси деб аталувчи теоремадан келиб чиқади. Исботга тўхталиб ўтирмасдан параметр σ ни 29-§ даги (3) формулага кўра эмас, балки

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{a})^2}{n = 1} \tag{5}$$

формула билан аниқлаш табиийроқ эканини кўрсатиб ўтамиз.

(5) формуланинг ўнг томони 29-§ даги (3) формуланинг ўнг томонидан $\frac{n}{n-1}$ кўпайтувчи билан фарқ қилади, бу эса амалий масалаларда 1 га яқин.

1-мисол. 28-§ даги мисолда келтирилган ўлчаш натижаларига ҳамда 29-§ даги мисолда келтирилган ҳисоблаш натижаларига асосланиб, тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ифодасини ёзинг.

Ечиш. 29-§ даги мисолда келтирилган ҳисоблашларга асосан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{a} = m_x^* = 201,$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{100}{99} \cdot 1754 = 1771,$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{1771} \approx 41.$$

Буларни (3) формулага қўйиб,

$$f(x) = \frac{1}{41\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-201)^2}{2\cdot 1771}}$$

ни ҳосил қиламиз.

Эслатма. Агар бирор тасодифий x миқдор учун статистик тақсимот функция тузилган бўлса, у ҳолда берилган тасодифий миқдорни нормал тақсимот қонунига бўйсунадими ёки йўқми деган масала қуйидагича ечилади:

Тасодифий миқдорнинг

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

қийматларини олайлик. (4) формулага кўра ўрта арифметик $\bar{a}$ қийматни топамиз. Марказлаштирилган тасодифий миқдорнинг

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$$

қийматларини аниқлаймиз. y_i қийматларнинг абсолют миқдорини ўсиб бориш тартибида қатор қилиб ёзилади. Агар n тоқ бўлса, у ҳолда ўртача четланиш учун ёки $E_{\text{ўр}}$ ўртача хато учун тузилган абсолют миқдорлар қаторида $\frac{n-1}{2}+1$ ўринни эгаллаган $|y_{\text{ўр}}|$ абсолют миқдор қабул қилинади, агар n жуфт бўлса у ҳолда $E_{\text{ўр}}$ учун $\frac{n}{2}$ ва $\frac{n}{2}+1$-номерли ўринларда турган абсолют миқдорларнинг ўрта арифметиги қабул қилинади. Бундан кейин

$$d=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|}{n} \tag{6}$$

формулага кўра ўрта арифметик хатони тузамиз. (5) формулага биноан ўрта квадратик четланишни аниқлаймиз:

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{n-1}}. \tag{7}$$

Сўнгра эса $\frac{E_{\text{ўр}}}{d}$ ва $\frac{E_{\text{ўр}}}{\bar{\sigma}}$ нисбатларни аниқлаймиз.

Нормал қонунга бўйсунган тасодифий миқдор учун $\frac{E}{d}$ ҳамда $\frac{E}{\sigma}$ нисбатлар мос тартибда 0,8453 ва 0,6745 га тенг (22- § даги (6) формулага қ.). Агар $\frac{E_{\text{ўр}}}{d}$ ва $\frac{E_{\text{ўр}}}{\bar{\sigma}}$ нисбатлар 0,8453 ва 0,6745 лардан 10% тартибидаги миқдорга фарқ қилса, у ҳолда тасодифий y миқдор нормал қонунга бўйсунади деб шартли равишда қабул қилинади.

Марказий лимит теореманинг натижаси ҳодиса рўй беришининг α дан кам бўлмаслиги ва β дан катта бўлмаслиги эҳтимоли ҳақидаги Лапласнинг муҳим теоремасидан иборатдир. Бу теоремани исботсиз келтирамиз.

2-теорема. (Лаплас теоремаси). *Агар n та боғлиқ бўлмаган синовлар ўтказилган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг бўлса, у ҳолда ушбу муносабат ўринли:*

$$P(\alpha < m < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}}\right)\right] \qquad (8)$$

бу ерда m — A ҳодисанинг рўй бериш сони, $q = 1 - p$, $P(\alpha < m < \beta)$ — A ҳодиса рўй бериш сонининг α ва β оралиғида ётиш эҳтимоли.

$\Phi(x)$ функция 521-бетда аниқланган.

Лаплас теоремасини масала ечиш учун татбиқ қилинишини кўрсатамиз.

2-мисол. Бирор детални ишлаб чиқаришда деталнинг яроқсиз (брак) бўлиб қолиш эҳтимоли $p = 0{,}01$ га тенг. 1000 та деталнинг ичида бракларининг сони 20 тадан ортиқ эмаслиги эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. Бу ерда $n = 1000$, $p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$, $\alpha = 0$, $\beta = 20$. Қуйидагиларни топамиз:

$$\frac{\alpha - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10}{\sqrt{2}\sqrt{9{,}9}} = -2{,}25,$$

$$\frac{\beta - np}{\sqrt{2}\sqrt{npq}} = \frac{20 - 10}{\sqrt{2}\sqrt{9{,}9}} = 2{,}25.$$

(8) формулага кўра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = \frac{1}{2}[\Phi(2{,}25) - \Phi(-2{,}25)] = \Phi(2{,}25).$$

$\Phi(x)$ функция жадвалларидан қуйидагини топамиз:

$$P(0 \leqslant m \leqslant 20) = 0{,}9985.$$

Юқорида айтиб ўтилган Бернулли, Ляпунов, Чебишев, Лаплас теоремалари—*эҳтимоллар назариясининг катта сонлар қонуни* деб аталадиган қонунини ташкил қилишини қайд қилиб ўтамиз.

XX БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1 Иккита соққа бир вақтда ташланади. Келиб чиқадиган очколар йиғиндисининг 5 га тенг бўлиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 1/9.

2. Лотереяда 10 та билет бор: улардан 5 таси ютадиган, 5 таси ютқазадиган. Иккита билет оламиз. Ютиш эҳтимоли қанча? *Жав.* 7/9.

3. Соққа 5 марта ташланади. Камида 1 марта 4 очко келиб чиқмаслиги эҳтимоли қандай? *Жав.* 0,99987.

4. Милтиқдан узилган ўқнинг самолётга тегиш эҳтимоли 0,004 га тенг. Ўқнинг тегиш эҳтимоли 70% дан кўп бўлиши учун бир вақтнинг ўзида нечта мерган ўқ узиши керак? *Жав.* $n > 300$.

5. Иккита тўпдан битта нишонга биттадан ўқ узилган. Биринчи тўпдан нишонга тегиш эҳтимоли 0,7 иккинчисидан эса 0,6. Камида битта ўқ тегиши эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,88.

6. 100 та карточкага 1 дан 100 гача сон ёзилган. Тасодифан олинган карточкада 5 рақами бўлиш эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,19.

7. 4 та машина бор. Ихтиёрий t моментда машинанинг ишлаб турган бўлиши эҳтимоли 0,9 га тенг. t моментда камида битта машинанинг ишлаб турган бўлиши эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,9999.

8. Нишонга тегиш эҳтимоли $p = 0{,}9$. Учта отишда 3 та тегиш эҳтимолини аниқланг. *Жав.* $\approx 0{,}73$.

9. Биринчи нав деталлар биринчи яшикда 30%, иккинчи яшикда 40%. Ҳар бир яшикдан биттадан деталь олинади. Олинган иккала деталнинг биринчи навли бўлиш эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,12.

10. Механизм учта деталдан иборат. Тайёрлашда биринчи деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p_1 = 0{,}008$, иккинчи деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p_2 = 0{,}012$, учинчи деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p_3 = 0{,}01$. Бутун механизмни тайёрлашда яроқсизлик эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,03.

11. Битта отишда тегиш эҳтимоли $p = 0{,}6$. Учта отишда камида битта тегишнинг эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,936.

12. 350 та механизм орасида 160 таси биринчи навли, 110 таси иккинчи навли ва 80 таси учинчи навли. Механизмлар орасида яроқсиз механизм бўлиш эҳтимоли биринчи нав учун 0,01, иккинчи нав учун 0,02, учинчи нав учун 0,04.

Битта механизм олинган. Уни яроқли механизм экани эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,98.

13. Отишга тайёргарлик кўриш пайтида йўл қўйилган хато натижасида снарядлар тарқоқлиги маркази (СТМ) биринчи отишда узоқлик бўйича беш нуқтанинг биттасида бўлиши мумкин эканлиги маълум бўлсин. СТМ шу нуқталарда бўлиш эҳтимоли мос тартибда $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}2$; $p_5 = 0{,}1$ га тенг. Агар СТМ биринчи нуқтада бўлса, узоқлик бўйича нишонга тегиш эҳтимоли $\overline{p}_1 = 0{,}15$ га тенг бўлиб, бошқа нуқталар учун мос равишда $\overline{p}_2 = 0{,}25$, $\overline{p}_3 = 0{,}60$, $\overline{p}_4 = 0{,}25$, $\overline{p}_5 = 0{,}15$ бўлиши ҳам маълум.

Дастлаб нишонга қўйишда ўқ узилган бўлиб, бунинг натижасида ўқ узоқлик бўйича мўлжалга тегмай ўтган. СТМ нинг кўрсатилган ҳар бир бешта нуқтасига мос бўлган нишонга қўйишда отилганлик эҳтимолини қанчага тенг эканини аниқланг, яъни тажрибадан кейин (отишдан кейин) СТМ жойланишидаги турли хатолар ҳақидаги гипотезалар эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,85; 0,75; 0,40; 0,75; 0,85.

14. Соққа 5 марта ташланади. 2 марта олтилик тушиши ва 3 марта олтилик тушмаслиги эҳтимоли қанча? *Жав.* 625/3888.

15. 6 та ўқ узилган. Агар ўқнинг нишондан ўтиб кетиш эҳтимоли $p = \frac{1}{2}$ бўлиб, нишонга етиб бормаслик эҳтимоли $q = \frac{1}{2}$ бўлса („тор“ нишон бўйича отиш), отилган ўқларнинг ичида нишондан ўтиб кетмайдиганлари ҳам борлиги эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 31/32.

16. Аввалги масаладаги шартларда 3 марта ўтиб кетиш ва 3 марта етиб бормаслик эҳтимолини топинг. *Жав.* 5/16.

17. Соққани бир марта ташлагандаги очколар сонининг ўрта қийматини топинг. *Жав.* 7/2.

18. Қуйидаги тақсимот жадвали билан берилган тасодифий миқдорнинг дисперсиясини аниқланг.

x	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

Жав. 1,05.

19. Битта синовда A ҳодисасининг рўй бериш эҳтимоли 0,4 га тенг. 5 та боғлиқ бўлмаган синов ўтказилади. A ҳодисанинг рўй бериш сонининг дисперсиясини топинг. *Жав.* 1,2.

20. Нишонга қарата ўқ узилган. Ўқнинг тегиш эҳтимоли 0,8. Биринчи тегишга қадар ўқ узилади. 4 та снаряд бор. Сарф қилинган снарядлар сонининг ўрта қийматини топинг. *Жав.* 1,242.

21. Бирор „ингичка" нишон бўйича отишда ўқнинг нишондан учиб ўтиш эҳтимоли $p = \frac{1}{4}$, етиб бормаслик эҳтимоли $q = \frac{3}{4}$. Олтита отишда 2 та учиб ўтиш ва 4 етиб бормаслик комбинацияси эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,297.

22. Деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли $p = 0{,}01 \cdot 10$ та деталдан иборат бўлган партияда 0, 1, 2, 3 та деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимоли қандай? *Жав.* 0,9045; 0,0904; 0,0041; 0,0011.

23. Агар битта ўқ узганда мўлжалга тегиш эҳтимоли $p = 0{,}15$ бўлса 10 марта отганда мўлжалга камида битта тегиш эҳтимолини ҳисобланг. *Жав.* $1 - (0{,}85)^{10} \approx 0{,}803$.

24. Тасодифий x миқдор интеграл тақсимот функцияси билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } 0, \\ \text{агар } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлса, } x, \\ \text{агар } 1 < x \text{ бўлса, } 1. \end{cases}$$

Тақсимот зичлиги $f(x)$ ни, $M[x]$ ни ва $D(x)$ ни топинг.

$$\text{Жав. } f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ бўлганда } 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ бўлганда } 1 \\ 1 < x \text{ бўлганда } 0. \end{cases} \quad M[x] = \frac{1}{2}, \ D[x] = \frac{1}{12}.$$

25. Тасодифий x миқдор ўрта қиймати 30 га, дисперсияси 100 га тенг бўлган нормал тақсимот қонунга бўйсунади. Тасодифий миқдор қийматининг (10, 50) интервалда ётиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,954.

26. Тасодифий миқдор дисперсияси $\sigma^2 = 0{,}16$ бўлган нормал тақсимот қонунига бўйсунади. Тасодифий миқдорнинг қиймати унинг ўрта қийматидан абсолют қиймат бўйича 0.3 дан кам фарқ қилиши эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,5468.

27. Тасодифий миқдор x тарқоқлик маркази $a = 0{,}3$ ва аниқлик ўлчови $h = 2$ бўлган нормал тақсимот қонунга бўйсунади. Тасодифий миқдорнинг (0,5; 2,0) интервалда ётиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,262.

28. Кенглиги 4 *м* бўлган соҳа (йўлак) бўйича ўқ узиш олиб борилади, мўлжалга олишнинг систематик хатоси 1 *м* (ками билан). Эҳтимолий четланиш 5 *м*. Тарқоқликнинг нормал қонунида ўқнинг соҳага тушиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,211.

29. Ушбу $x_1 = 10$ *м*, $x_2 = 20$ *м*. $y_1 = 15$ *м*, $y_2 = 35$ *м* тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри туртбурчакка қарата кичик томонни тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқ йўналиши бўйича ўқ узиш олиб борилади. Текисликдаги нормал тақсимотнинг эҳтимолий четланишлари $E_x = 5$ *м*. $E_y = 10$ *м*. Битта ўқ узишда ўқнинг тегиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,25.

30. Берилган 20 *см* узунликдаги детални тайёрлашдаги хато нормал қонунга бўйсунувчи тасодифий миқдордир. $\sigma = 0.2$ *см*. Тайёрланган деталь узунлигининг берилган узунликдан 0,3 *см* дан кам фарқ қилиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,866.

31. 30-масала шартларида маҳсулот тайёрлашда 0,95 эҳтимол билан ошиб кетилмайдиган хатони аниқланг. *Жав.* 0.392.

32. Тасодифий миқдор x параметрлари $M[x] = 5$ ва $\sigma = 2$ бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган. Тасодифий миқдорнинг (1, 10) интервалда ётиш эҳтимолини аниқланг. Шакл ясанг. *Жав.* 0,971.

33. Автоматда тайёрланадиган деталнинг узунлиги параметрлари $M[x] = 15$, $\sigma = 0{,}2$ бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор-

дир. Агар деталнинг йўл қўйиш мумкин бўлган ўлчовлари (размери) $15 \pm 0,3$ бўлиши лозим бўлса, деталнинг яроқсиз бўлиш эҳтимолини топинг. Тайёрланадиган деталь узунлигининг қандай аниқлигини 0,97 эҳтимол билан таъминлаш мумкин? Шакл ясанг.

34. Бирор миқдорни ўлчашда қуйидаги статистик қатор ҳосил қилинган:

x	1	2	3	4
Такрорланиш	20	15	10	5

Статистик ўртани ва статистик дисперсияни аниқланг. *Жав.* 2; 1.

35. Ўлчаш натижалари ушбу жадвал билан берилган:

x	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
Такрорланиш	4	18	33	35	9	1

Статистик ўрта $\bar{a}$ ни, статистик дисперсия $\overline{\sigma}^2$ ни аниқланг. *Жав.* 0,226; 0,004.

36. Деталь ишлаб чиқаришда яроқсиз деталь чиқиш эҳтимоли $p = 0,02$, 400 та деталдан иборат бўлган партияда яроқсиз деталнинг 7 тадан 10 тагача бўлиш эҳтимолини топинг. *Жав.* 0,414.

37. Нишонга тегиш эҳтимоли $p = \frac{1}{2}$. 250 марта отишда нишонга тегиш сони 100 билан 150 орасида ётиш эҳтимоли қандай? *Жав.* 0,998.

38. Баъзи деталларни тайёрлашда яроқсиз деталь ҳосил бўлиш эҳтимоли $p = 0,02$. Олинган 1000 дона деталь орасида яроқсиз деталларнинг 25 тадан ортиқ эмаслиги эҳтимолини аниқланг. *Жав.* 0,87.

XXI БОБ

МАТРИЦАЛАР. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ВА БУ СИСТЕМА ЕЧИМЛАРИНИНГ МАТРИЦАЛАР ОРҚАЛИ ЁЗИЛИШИ

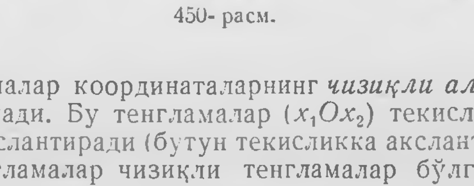
1- §. Чизиқли алмаштиришлар. Матрица

Иккита P ва Q текисликни қарайлик. P текисликда тўғри бурчакли x_1Ox_2 координаталар системаси ҳамда Q текисликда y_1Oy_2 координаталар системаси берилган бўлсин. P ва Q текисликлар устма-уст келтирилиши мумкин. Шунингдек координаталар системалари ҳам устма-уст келтирилиши мумкин.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

тенгламалар системасини қарайлик. (1) тенгликларга кўра (x_1Ox_2) текисликнинг ҳар бир $M(x_1, x_2)$ нуқтасига (y_1Oy_2) текисликнинг $\overline{M}(y_1, y_2)$ нуқтаси мос келади.



450- расм.

(1) тенгламалар координаталарнинг *чизиқли алмаштиришлари* деб аталади. Бу тенгламалар (x_1Ox_2) текисликни (y_1Oy_2) текисликка акслантиради (бутун текисликка акслантириши шарт эмас). (1) тенгламалар чизиқли тенгламалар бўлгани сабабли, акслантириш *чизиқли акслантириш* (аксланиш) дейилади.

Агар (x_1Ox_2) текисликда бирор $\mathfrak{A}$ соҳани, қарасак, у ҳолда (1) система ёрдамида (y_1Oy_2) текисликнинг бирор $\overline{\mathfrak{A}}$ нуқталар тўплами аниқланади (450- расм .

Эслатма. Чизиқли бўлмаган

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2), \qquad y_2 = \psi(x_1, x_2).$$

акслантиришлар ҳам кўрилишини қайд қилиб ўтамиз.

Биз бу ерда фақат чизиқли акслантиришларни кўриб чиқиш билангина чегараланамиз.

(1) акслантириш a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} коэффициентлар тўплами билан тўла аниқланади.

Бу коэффициентлардан тузилган ва

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \text{ ёки } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилган тўғри тўрт бурчакли жадвал (1) акслантиришнинг *матрицаси* дейилади. Юқоридаги || || ёки ( ) символлар матрица символларидир.

Матрицани биргина ҳарф билан ҳам белгилаш мумкин: A ёки $\|A\|$,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Матрица элементларидан уларнинг ўринларини алмаштирмасдан тузилган

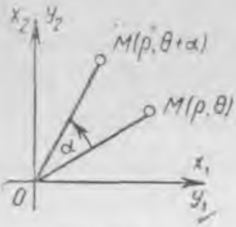
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

детерминантни (уни $\Delta(A)$ билан белгилаймиз) *матрицанинг детерминанти* деб аталади.

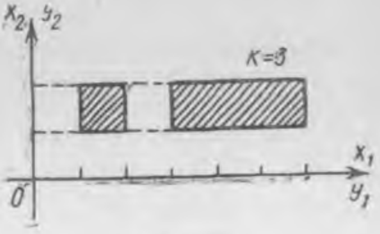
1-мисол. Ушбу

$$y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,$$
$$y_2 = x_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha$$

акслантириш α *бурчакка буришдир* Агар (x_1Ox_2) ва (y_1Oy_2) координаталар системаси устма-уст келтирилган бўлса, бу акслантиришда қутб координаталари (ρ, θ) бўлган ҳар бир M нуқта қутб координаталари $(\rho, \theta + \alpha)$ бўлган $\overline{M}$ нуқтага ўтади (451- расм)



451- расм.



452- расм.

Бу акслантиришнинг матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

2-мисол. Ушбу

$$y_1 = kx_1,$$
$$y_2 = x_2$$

акслантириш Ox_1 *ўқи бўйича чўзиш* бўлиб k чўзиш коэффициентидир (452-расм).

Бу акслантиришнинг матрицаси қуйидаги кўринишга эга:

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

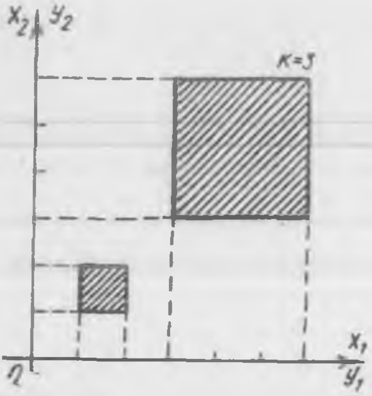
3-мисол. Ушбу

$$y_1 = kx_1,$$
$$y_2 = kx_2$$

акслантириш Ox_1 ўқи йўналиши бўйича ҳам, Ox_2 ўқи йўналиши бўйича ҳам k *марта чўзишдир* (453-расм).

Бу акслантиришнинг матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}.$$



453-расм.

4-мисол.

$$y_1 = - x_1,$$
$$y_2 = x_2$$

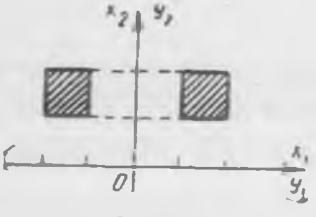
алмаштириш Ox_2 *ўқидан кўзгули акслантириш* дейилади. Бу алмаштириш матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

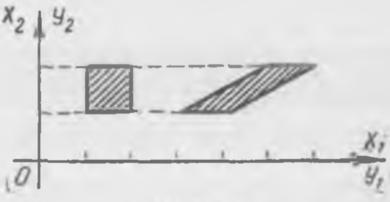
5-мисол.

$$y_1 = x_1 + \lambda x_2 \qquad y_2 = x_2$$

алмаштириш Ox_2 *ўқи бўйича силжиш* дейилади (455-расм).



454-расм.



455-расм.

Бу алмаштиришнинг матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Ихтиёрий сондаги ўзгарувчига эга бўлган чизиқли алмаштиришларни ҳам қараш мумкин. Жумладан,

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ y_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

алмаштириш уч ўлчовли (x_1, x_2, x_3) фазони уч ўлчовли (y_1, y_2, y_3) фазога акслантиришдир. Бу алмаштиришнинг матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix}.\qquad(5)$$

Квадрат бўлмаган, яъни йўлларининг сони устунларининг сонига тенг бўлмаган матрицага эга бўлган чизиқли алмаштиришларни ҳам қараш мумкин. Жумладан,

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2,\\ y_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2\end{aligned}\right|\qquad(6)$$

алмаштириш x_1Ox_2 текисликни (y_1, y_2, y_3) фазо нуқталарининг бирор тўпламига акслантирилишидан иборатдир. Бу алмаштиришнинг матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{Vmatrix}.\qquad(7)$$

Ихтиёрий сондаги йўл ва ихтиёрий сондаги устунларга эга бўлган матрицалар ҳам қаралади. Матрицалардан фақатгина чизиқли алмаштиришдагина фойдаланилмай, балки бошқа бўлимларда ҳам фойдаланилади. Шунинг учун матрицалар детерминант тушунчасига ўхшаш алоҳида, мустақил математик тушунчадир. Қуйида матрица тушунчаси билан боғлиқ бўлган бир неча таърифларни келтирамиз.

2-§. Матрица тушунчаси билан боғлиқ бўлган умумий таърифлар

1-таъриф. m та йўл (сатр) ва n та устундан иборат бўлган mn та соннинг тўғри бурчакли

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

жадвали *матрица* дейилади. Матрица қисқача қуйидагича белгиланади:

$$A = \| a_{ij} \| \quad (i = 1,2, \dots, m; \quad j = 1,2. \dots, n), \tag{2}$$

Бунда a_{ij} — матрицанинг ҳадлари.

Агар матрицада йўллар сони устунлар сонига тенг бўлса, яъни $m = n$ бўлса, бу ҳолда матрица *квадрат матрица* дейилади:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

2-таъриф. Квадрат матрицанинг элементларидан (ўрин алмаштирилмасдан) тузилган детерминант *матрицанинг детерминанти* дейилади. Уни $\Delta(A)$ билан белгилаймиз:

$$\Delta(A) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Квадрат бўлмаган матрица детерминантга эга эмаслигини қайд қилиб ўтамиз.

3-таъриф. Агар A матрицанинг устунлари A^* матрицанинг йўлларидан иборат бўлса, у ҳолда A^* матрица A матрицага нисбатан *транспонирланган матоица* дейилади.

Мисол.

Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Транспонирланган A матрица қуйидагича бўлади:

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{Vmatrix}.$$

4-таъриф. Агар $a_{ij}=a_{ji}$ бўлса, квадрат матрица ***A*** *бош диагоналга нисбатан симметрик матрица* дейилади. Симметрик матрица ўзининг транспонирланган матрицаси билан бир хил бўлиши равшан.

5-таъриф. Бош диагоналдан бошқа жойдаги элементлари ноллардан иборат бўлган квадрат матрица *диагонал матрица* дейилади. Агар диагонал матрицанинг бош диагоналидаги элементлари бирга тенг бўлса бундай матрица *бирлик матрица* дейилади.

Уни ***E*** ҳарфи билан белгилаймиз:

$$\boldsymbol{E}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{Vmatrix}. \tag{5}$$

6-таъриф. Битта устундан ёки битта йўлдан иборат бўлган матрицалар ҳам қаралади:

$$\boldsymbol{X}=\begin{Vmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}=\| y_1\ y_2\ \ldots\ y_m \|. \tag{6}$$

Биринчи матрицани *устун-матрица*, иккинчи матрицани *йўл-матрица* дейилади.

7-таъриф. Агар иккита ***A*** ва ***B*** матрицаларнинг йўл ва устунлари сони баробар бўлса ҳамда мос элементлари тенг бўлса, бу матрицалар бир-бирига тенг деб ҳисобланади, яъни агар

$$a_{ij}=b_{ij} \tag{7}$$

бўлса,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \tag{8}$$

ёки

$$\| a_{ij} \| = \| b_{ij} \| \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{9}$$

Баъзан устун-матрицани мос сондаги ўлчамга эга бўлган фазодаги вектор билан айнан бир хил деб ҳисоблаш қулай бўлади; бунда матрицанинг элементлари векторнинг мос координата ўқларидаги проекциялардир. Масалан,

$$\begin{Vmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Vmatrix}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k} \tag{10}$$

деб ёзишимиз мумкин.

Баъзан йўл-матрицани ҳам вектор билан айнан бир хил деб ҳисоблаш қулай бўлади.

3-§. Тескари алмаштириш

1-§ даги

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

тенгламалардан кўринадики, x_1Ox_2 текисликни y_1Oy_2 текисликка акслантириш бир қийматлидир, чунки x_1Ox_2 текисликнинг ҳар бир нуқтасига y_1Oy_2 текисликнинг ягона нуқтаси мос келади.

Агар алмаштириш матрицасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса, яъни

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ёки } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \qquad (2)$$

бўлса, у ҳолда (1) тенгламалар системасининг x_1 ва x_2 ларга нисбатан биргина ечимга эга эканлиги маълум; улар қуйидагилардир:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

ёки ёйилган ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{\Delta} y_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta} y_2, \\ x_2 &= \frac{-a_{21}}{\Delta} y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

y_1Oy_2 текисликнинг ҳар бир $M(y_1, y_2)$ нуқтасига x_1Ox_2 текисликнинг маълум бир $M(x_1, x_2)$ нуқтаси мос келади. Бу ҳолда (1) акслантириш ўзаро бир қийматли (*махсусмас*) акслантириш дейилади. (y_1, y_2) координаталарни (x_1, x_2) координаталарга (3) ёрдамида алмаштириш *тескари* алмаштириш дейилади. Ҳозирги ҳолда тескари алмаштириш ҳам чизиқли алмаштиришдир. Чизиқли махсусмас акслантиришни *аффин* акслантириш деб аталишини қайд қилиб ўтамиз.

Тескари алмаштириш матрицаси ҳам матрицадир; уни A^{-1} билан белгилаймиз:

$$A^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{matrix} \right\|. \qquad (4)$$

Агар A матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, яъни

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0 \tag{5}$$

бўлса у ҳолда (1) алмаштиришни *махсус* алмаштириш дейилади. У ўзаро бир қийматли бўлмайди.

Буни исбот қиламиз. Мумкин бўлган иккита ҳолни қараймиз:

1) Агар $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}$ бўлса, у ҳолда x_1 ва x_2 ларнинг ҳар қандай қийматларида ҳам $y_1=0$, $y_2=0$. Бу ҳолда x_1Ox_2 текисликнинг ихтиёрий (x_1, x_2) нуқтаси y_1Oy_2 текисликнинг координаталар бошига ўтади.

2) Алмаштириш коэффициентларидан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли, масалан, $a_{11}\neq 0$ бўлсин. (1) тенгламалардан биринчисини a_{21} га, иккинчисини a_{11} га кўпайтириб, айириш амалини бажариб, (5) тенгликни эътиборга олсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} a_{21} & y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ a_{11} & y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \\ \hline \multicolumn{2}{c}{a_{21}y_1-a_{11}y_2=0.} \end{array} \tag{6}$$

Шундай қилиб, ихтиёрий x_1, x_2 ларда y_1 ва y_2 ларнинг қиймати учун (6) тенгликни ҳосил қиламиз, яъни x_1Ox_2 текисликнинг мос нуқтаси y_1Oy_2 текисликдаги (6) тўғри чизиқ устига тушади. Бу акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш эмаслиги равшан, чунки y_1Oy_2 текисликдаги (6) тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасига x_1Ox_2 текисликнинг $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$ тўғри чизиқда ётувчи нуқталари тўплами мос келади.

Ҳар икки ҳолда ҳам акслантириш ўзаро бир қийматли эмас.

1-мисол. Ушбу

$$y_1=2x_1+x_2,$$
$$y_2=x_1-x_2$$

алмаштириш ўзаро бир қийматли алмаштиришдир, чунки A алмаштириш матрицасининг $\Delta(A)$ детерминанти нолдан фарқли:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Тескари алмаштириш қуйидагича бўлади:

$$x_1=\frac{1}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2,$$
$$x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2.$$

(4) формулага мувофиқ тескари алмаштириш матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

2-мисол. Ушбу

$$y_1 = x_1 + 2x_2,$$
$$y_2 = 2x_1 + 4x_2$$

чизиқли алмаштириш махсус алмаштиришдир, чунки алмаштириш матрицасининг детерминанти

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Бу алмаштириш (x_1, x_2) текисликнинг барча нуқталарини (y_1, y_2) текисликдаги $y_2 - 2y_1 = 0$ тўғри чизиққа ўтказади.

4-§. Матрицалар устида амаллар. Матрицаларни қўшиш

1-таъриф. Йўл (сатр) ва устунларининг сони баробар бўлган иккита $\|a_{ij}\|$ ҳамда $\|b_{ij}\|$ матрицаларнинг *йиғиндиси* деб C_{ij} элементлари $\|a_{ij}\|$ ва $\|b_{ij}\|$ матрицанинг мос элементларининг $a_{ij} + b_{ij}$ йиғиндисидан иборат бўлган $\|c_{ij}\|$ матрицага айтилади, яъни агар

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}\,(i = 1,2, \ldots m;\ j = 1,2 \ldots , n) \qquad (1)$$

бўлса, у ҳолда

$$\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\| \qquad (2)$$

бўлади.

1-мисол.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Vmatrix}.$$

Икки матрицанинг *айирмаси* ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

Икки матрица йиғиндисининг бундай аниқланиши мақсадга мувофиқ экани, хусусан, векторни устун-матрица каби тасвир этилишидан келиб чиқади.

Матрицани сонга кўпайтириш. Матрицани λ сонга кўпайтириш учун матрицанинг ҳар бир элементини бу сонга кўпайтириш керак:

$$\lambda\|a_{ij}\| = \|\lambda a_{ij}\|. \qquad (3)$$

Агар λ бутун сон бўлса, у ҳолда (3) формула матрицаларни қўшиш қоидаси натижаси сифатида ҳосил қилинади.

2-мисол.

$$\lambda\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Иккита матрица кўпайтмаси. x_1Ox_2 текисликни y_1Oy_2 текисликка чизиқли алмаштириш берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Бу алмаштириш матрицаси:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Сўнгра, y_1Oy_2 текислик z_1Oz_2 текисликка чизиқли алмаштирилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= b_{11}\, y_1 + b_{12}y_2, \\ z_2 &= b_{21}\, y_1 + b_{22}y_2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Алмаштириш матрицаси:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

x_1Ox_2 текисликни z_1Oz_2 текисликка алмаштириш матрицасини аниқлаш талаб қилинади. (4) ифодани (6) тенгликка қўйиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \\ z_2 &= b_{21}\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}\,(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})\,x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2, \\ z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})\,x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ҳосил қилинган алмаштиришнинг матрицаси қуйидагича бўлади:

$$C = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}\,a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

ёки қисқача:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}. \qquad (10)$$

(9) матрицани (7), (5) матрицаларнинг *кўпайтмаси* дейилади ва қуйидагича

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{Vmatrix} \qquad (11)$$

ёки қисқача

$$B \cdot A = C \tag{12}$$

каби ёзилади.

Энди агар биринчи матрица m та йўлга ва k та устунга, иккинчи матрица k та йўл ва n та устунга эга бўлса, B ва A матрицаларни кўпайтириш қоидасини таърифлаймиз.

Бу қоида схема шаклида ушбу тенглик билан кўрсатилган:

$$\begin{Vmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1k} \\ \dots\dots \\ b_{i1}b_{i2}\dots b_{ik} \\ \dots\dots \\ b_{m1}b_{m2}\dots b_{mk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1j}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2j}\dots a_{2n} \\ \\ \dots\dots\dots \\ a_{k1}a_{k2}\dots a_{kj}\dots a_{kn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11}\dots\dots c_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \;\dots c_{ij}\dots \vdots \\ \vdots \quad \dots\dots \\ c_{m1}\dots\quad\dots c_{mn} \end{Vmatrix} \cdot (13$$

B матрицанинг A матрица билан кўпайтмасидан иборат бўлган C матрицанинг c_{ij} элементи B матрицанинг i-йўли элементлари билан A матрицанинг j-устуни мос элементлари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{k} b_{i\lambda}a_{\lambda j} \qquad (i = 1,2, \dots, m;\; j = 1,2, \dots, n).$$

3-мисол.

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$1)\; BA = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$2)\; AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Бу мисолда

$$BA \neq AB$$

Биз қуйидаги натижага келдик. *Матрицаларни кўпайтиришда ўрин алмаштириш қонуни ўринли эмас.*

2-мисол. Ушбу матрицалар берилган:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

AB ҳамда BA ларни топинг.

Ечиш. (13) формулага биноан, топамиз:

$$AB = \begin{Vmatrix} 1\cdot0 + 0\cdot2 + 0\cdot1 & 1\cdot1 + 0\cdot0 + 0\cdot0 & 1\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot1 \\ 0\cdot0 + 2\cdot2 + 1\cdot1 & 0\cdot1 + 2\cdot0 + 1\cdot0 & 0\cdot0 + 2\cdot1 + 1\cdot1 \\ 3\cdot0 + 0\cdot2 + 0\cdot1 & 3\cdot1 + 0\cdot0 + 0\cdot0 & 3\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$BA = \begin{Vmatrix} 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot3 & 0\cdot0+1\cdot2+0\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 \\ 2\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 2\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot3 & 1\cdot0+0\cdot2+1\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3- мисол. Матрицалар кўпайтмасини топамиз:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \end{Vmatrix}.$$

Бевосита текшириб кўриш йўли билан матрицалар учун ушбу муносабатларнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин (k—сон, A, B, C—матрицалар):

$$(kA)\cdot B = A\cdot(kB), \tag{14}$$

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + BC, \tag{15}$$

$$C\cdot(A+B) = CA + CB, \tag{16}$$

$$A(BC) = (AB)C. \tag{17}$$

Квадрат A матрицани k сонга кўпайтириш қоидасидан ҳамда n- тартибли матрицаларнинг детерминанти устунларининг умумий кўпайтувчисини детерминант ташқарисига чиқариш қоидасидан

$$\Delta(kA) = k^n\Delta(A) \tag{18}$$

эканлиги келиб чиқади.

Иккита квадрат A ва B матрицаларни кўпайтирганда элементлари детерминантларни кўпайтириш қоидасига кўра ҳосил бўладиган квадрат матрица олингани учун, бу ҳолда

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\cdot\Delta\, B) \tag{19}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши равшан.

Бирлик матрицага кўпайтириш. Бош диагоналида турган элементлари бирга тенг бўлиб, барча қолган элементлари нолга тенг бўлган квадрат матрицани (юқорида кўрсатиб ўтилганидек) *бирлик матрица* дейилади.

Масалан,

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{20}$$

2- тартибли бирлик матрица бўлади.

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига мувофиқ ушбуни ҳосил қиламиз:

$$AE = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

яъни

$$AE = A, \tag{21}$$

шунга ўхшаш

$$EA = A. \tag{22}$$

Ихтиёрий тартибли квадрат матрицани мос бирлик матрица билан кўпайтмаси дастлабки матрицага тенг эканлигини кўриш осон, яъни (21) ва (22) тенгликлар ўринлидир. Шундай қилиб, матрицаларни кўпайтиришда бирлик матрица ҳақиқий сонларни кўпайтиришдаги бир вазифасини бажаради ва шунинг учун ҳам бирлик матрица дейилади.

(2) бирлик матрицага

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

алмаштириш мос келади. Бундай алмаштиришни *айний* (айнан) алмаштириш дейилади. Аксинча, айний алмаштиришга бирлик матрица мос келади. Шунга ўхшаш усул билан ихтиёрий сондаги ўзгарувчиларнинг айний алмаштириши аниқланади.

5- §. Матрица ёрдамида векторни бошқа векторга алмаштириш

Ушбу $X = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ вектор берилган бўлсин, уни устун-матрица шаклида ёзиб оламиз:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Бу вектор проекциясини

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

матрица ёрдамида алмаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Бу ҳолда янги

$$Y = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}$$

вектор ҳосил бўлади, уни устун-вектор шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Матрицани кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, бу алмаштириш операциясини бундай ёзиш мумкин:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

яъни

$$Y = AX. \qquad (6)$$

Квадрат матрицани устун-матрицага кўпайтирганда ўша баландликдаги устун-матрица ҳосил бўлади.

Уч ўлчовли X векторни Y векторга алмаштириш—уч ўлчовли фазони уч ўлчовли фазога алмаштиришнинг бошқача ифодаланиши экани равшан.

(3) тенгламалар системаси (4) матрицали тенгламадан ўнг ва чап томонларда турган матрицалар мос элементларини тенглаш йўли билан ҳосил бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

(4) тенглик X векторни Y векторга A матрица ёрдамида алмаштиришни беради.

Уч ўлчовли фазодаги вектор учун келтирилган барча мулоҳазалар ихтиёрий сондаги ўлчовга эга бўлган фазодаги векторларни алмаштириш учун ҳам ярайди.

6- §. Тескари матрица

X вектор берилган бўлсин. Бу векторни квадрат A матрица ёрдамида алмаштирамиз ва натижада Y векторни ҳосил қиламиз:

$$Y = AX. \qquad (1)$$

A матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлсин: $\Delta (A \neq 0.)$ Бу ҳолда Y векторни X векторга ўтказувчи тескари алмаштириш мавжуд. Бу алмаштириш 5- § даги (3) тенгламалар системасини x_1, x_2, x_3 га нисбатан ечиш йўли билан топилади. Тескари алмаштиришнинг матрицасини A га *тескари матрица дейилади* ва A^{-1} билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$X = A^{-1}Y \qquad (2)$$

деб ёзишимиз мумкин.

Бу ерда X—устун-матрица, Y—устун-матрица, AX—устун-матрица, A^{-1} — квадрат матрица. (2) тенгликнинг ўнг томонидаги Y нинг ўрнига (1) тенгликнинг ўнг томонини қўйиб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$X = A^{-1}AX. \qquad (3)$$

X вектор устидан A ва A^{-1} матрицали алмаштиришни кетма-кет бажардик, яъни матрицаси $(A^{-1}A)$ кўпайтма матрицага тенг бўлган алмаштириш бажардик. Натижада айний алмаштириш ҳосил бўлди. Демак, $A^{-1}A$ матрица бирлик матрицадир:

$$A^{-1}A=E. \tag{4}$$

(3) тенглик

$$X=EX \tag{5}$$

кўринишга келди.

1-теорема. *Агар A^{-1} матрица A матрицага тескари бўлса, у ҳолда A матрица ҳам A^{-1} матрицага тескаридир, яъни ушбу тенглик ўринли:*

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E. \tag{6}$$

Исбот. (3) тенгликнинг иккала томонига A матрица ёрдамида алмаштириш татбиқ қиламиз:

$$AX=A(A^{-1}A)\,X.$$

Матрицаларни кўпайтиришдаги группалаш хоссасидан фойдаланиб, кейинги тенгликни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$AX=(AA^{-1})\,AX.$$

Бу тенгликдан

$$AA^{-1}=E \tag{7}$$

эканлиги келиб чиқади. Юқоридаги тасдиқ исбот бўлди.

(4) ва (7) тенгликлардан A ҳамда A^{-1} матрицаларнинг ўзаро тескари экани келиб чиқади. Кўрсатилган тенгликлардан

$$(A^{\ 1})^{-1}=A \tag{8}$$

эканлиги ҳам келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (7) тенгликдан

$$A^{-1}(A^{-1})^{1}=E$$

эканлиги келиб чиқади. Кейинги тенгликни (4) тенглик билан таққослаб, (8) тенгликни ҳосил қиламиз.

7-§. Берилган матрицага тескари матрицани топиш

Махсусмас матрица берилган бўлсин:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\Delta=\Delta(A)=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

Тескари A^{-1} матрица ушбу

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

матрица бўлишини исбот қиламиз. Бунда A_{ij} лар $\Delta = \Delta(A)$ детерминант a_{ij} элементининг алгебраик тўлдирувчисидир.

AA^{-1} матрицалар кўпайтмасининг C матрицасини топамиз:

$$C = AA^{-1} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ҳақиқатан ҳам, матрицаларнинг кўпайтириш қоидасига мувофиқ C матрицанинг диагонал элементлари Δ детерминант йўл элементлари билан уларга мос алгебраик тўлдирувчилар кўпайтмалари йиғиндиларининг Δ детерминант нисбатига тенг, яъни бирга тенг. Масалан, c_{11} элемент

$$c_{11} = a_{11}\frac{A_{11}}{\Delta} + a_{12}\frac{A_{12}}{\Delta} + a_{13}\frac{A_{13}}{\Delta} = \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{\Delta} = 1$$

каби аниқланади. Диагоналда бўлмаган ҳар бир ҳад бирор йўл элементлари билан бошқа йўл элементларининг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмалари йиғиндисининг Δ детерминантга нисбатига тенг, масалан, детерминантнинг c_{23} элементи қуйидагича аниқланади:

$$c_{23} = a_{21}\frac{A_{31}}{\Delta} + a_{22}\frac{A_{32}}{\Delta} + a_{23}\frac{A_{33}}{\Delta} = \frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0.$$

Шундай қилиб теорема исбот бўлди.

Эслатма.

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

матрица A га *бириктирилган* матрица дейилади. Тескари A^{-1} матрица бириктирилган A матрица орқали

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\tilde{A}. \tag{5}$$

каби ифода этилади.

Бу тенгликнинг ўринли экани (3) тенгликдан келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$$

матрица берилган. Тескари A^{-1} матрицани ҳамда бириктирилган $\tilde{A}$ матрицани топинг.

Ечиш. A матрицанинг детерминантини топамиз:

$$\Delta(A) = 5.$$

Алгебраик тўлдирувчиларни топамиз:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 5, & A_{12} = 0, & A_{13} = 0, \\ A_{21} = -4, & A_{22} = 2, & A_{23} = -1, \\ A_{31} = \ \ 2, & A_{32} = -1, & A_{33} = 3. \end{array}$$

Демак (3) формулага биноан:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

(4) формулага мувофиқ бириктирилган матрицани топамиз:

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

8-§. Чизиқли тенгламалар системасининг ҳамда чизиқли тенгламалар системаси ечимларининг матрицалар орқали ёзилиши

Мулоҳазаларни уч ўлчовли фазо бўлган ҳол учун олиб борамиз. Чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = d_3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Учта матрицани қараймиз:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

$$D = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

У ҳолда матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, (1) системани матрица шаклида қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Ҳақиқатан ҳам, кейинги тенгликнинг чап томонида иккита матрицанинг кўпайтмаси турган бўлиб, у элементлари (5) тенглик билан аниқланадиган устун-матрицага тенг. Ўнг томонда ҳам устун-матрица турибди. Агар икки матрицанинг мос элементлари тенг бўлса, у матрицалар тенгдир. Мос элементларни тенглаб (1) тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. (5) тенглик қисқача қуйидагича ёзилади:

$$AX = D. \qquad 6)$$

Мисол. Қуйидаги тенгламалар системасини матрица шаклида ёзинг.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Ечиш. Системанинг A матрицасини, ечимларнинг X матрицасини ҳамда озод ҳадлар D матрицасини ёзамиз:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Берилган тенгламалар системаси матрица шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

9-§. Матрица усули билан чизиқли тенгламалар системасини ечиш

A матрицанинг детерминанти $\Delta(A)\neq 0$ бўлсин. 8-§ даги (6) тенгликнинг чап ва ўнг томонини чапдан A матрицага тескари бўлган A^{-1}матрицага кўпайтириб

$$A^{-1}AX = A^{-1}D \tag{1}$$

ни ҳосил қиламиз. Аммо

$$A^{-1}A = E, \quad EX = X,$$

шунинг учун (1) тенгликдан

$$X = A^{-1}D \tag{2}$$

келиб чиқади. Кейинги тенгликни 7-§ даги (5) тенгликни ҳисобга олган ҳолда бундай ёзиш мумкин

$$X = \frac{1}{\Delta(A)}\tilde{A}D \tag{3}$$

ёки ёйиқ шаклда:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{(\Delta A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Ўнг томондаги матрицаларда кўпайтиришни бажариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{(\Delta A)} \begin{Vmatrix} d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31} \\ d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32} \\ d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Ўнг ва чап томондаги матрицалар мос элементларини тенглаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{d_1A_{11} + d_2A_{21} + d_3A_{31}}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{d_1A_{12} + d_2A_{22} + d_3A_{32}}{\Delta}, \\ x_3 &= \frac{d_1A_{13} + d_2A_{23} + d_3A_{33}}{\Delta}. \end{aligned}\right\}$$

(6) ечимни детерминантлар шаклида ёзиш мумкин:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \qquad (7)$$

1-мисол Ушбу

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

тенгламалар системасини матрицалар усули билан ечинг.

Ечиш. Система матрицасининг детерминантини топамиз.

$$\Delta(A) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} = 5.$$

Тескари матрицани 7-§ даги (3) формулага мувофиқ аниқлаймиз;

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix}.$$

D матрицани ёзамиз:

$$D = \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix}.$$

Ечим (2) формулага кўра матрицалар шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 \quad \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1\cdot 5 - \frac{4}{5}\cdot 9 + \frac{2}{5}\cdot 8 \\ 0\cdot 5 + \frac{2}{5}\cdot 9 - \frac{1}{5}\cdot 8 \\ 0\cdot 5 - \frac{1}{5}\cdot 9 + \frac{3}{5}\cdot 8 \end{Vmatrix}.$$

Ўнг ва чап томондаги матрицалар мос йўлларини тенглаб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 = 1,$$

$$x_2 = 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 = 2,$$

$$x_3 = 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 = 3,$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

тенгламалар системасини матрицалар усули билан ечинг.

Ечиш. Система матрицаси детерминантини топамиз:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тескари матрицани топамиз:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Системанинг ечимини матрица шаклида ёзамиз:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{Vmatrix}.$$

Ўнг ҳамда чап томонда турган матрицаларнинг мос йўлларини тенглаб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = -7.$$

10-§. Ортогонал акслантиришлар Ортогонал матрицалар

Уч ўлчовли фазода умумий бошланғич 0 нуқтага эга бўлган иккита тўғри бурчакли (x_1, x_2, x_3) ва (x_1', x_2', x_3') координаталар системаси берилган бўлсин. M нуқтанинг биринчи ва иккинчи координаталар системасига нисбатан координаталари (x_1, x_2, x_3) ва $(x_1', x_2', x_3',)$ бўлсин (координаталар бошини устма-уст келтирмаслик ҳам мумкин).

Биринчи координаталар системасида координата ўқларидаги бирлик векторларни (ортларни) $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ лар билан, иккинчи координаталар системасидаги ортларни эса $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$, лар орқали белгилаймиз. e_1, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторлар (x_1, x_2, x_3) системадаги базис векторлар, $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3'$ векторлар эса (x_1', x_2, x_3') системадаги базис векторлардир.

Бу ҳолда $\overline{OM}$ вектор биринчи координаталар системасида бундай ёзилади:

$$\overline{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \tag{1}$$

Иккинчи координаталар системасида эса $\overline{OM}$ вектор

$$\overline{OM} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 \tag{2}$$

каби ёзилади.

Ихтиёрий M нуқтанинг x_1, x_2, x_3 координаталарини шу нуқтанинг ўзини x'_1, x'_2, x'_3 координаталарига алмаштириш масаласини қараймиз. (x_1, x_2, x_3) фазони (x'_1, x'_2, x'_3) фазога алмаштириш масаласини қараймиз деб айтиш ҳам мумкин.

Бу алмаштириш шундай хоссага эгаки, бу алмаштиришда узунлиги l га тенг бўлган кесма ўша l узунликдаги кесмага ўтади. Учбурчак тенг учбурчакка ўтади, демак, бир нуқтадан чиқувчи, орасидаги бурчаги φ бўлган иккита вектор ўша узунликдаги, орасидаги бурчаги ўша φ га тенг бўлган иккита векторга ўтади.

Кўрсатилган хоссага эга бўлган алмаштириш *ортогонал алмаштириш* дейилади.

Ортогонал алмаштиришда бутун фазони қаттиқ жисм каби силжиши (кўчиши) ёки силжиш ва кўзгуга нисбатан акслантириш содир бўлади. Бу акслантириш матрицасини аниқлаймиз.

e'_1, e'_2, e'_3 бирлик векторларни e_1, e_2, e_3 бирлик векторлар орқали ифода этамиз:

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \alpha_{31} e_3, \\ e'_2 &= \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \alpha_{32} e_3, \\ e'_3 &= \alpha_{13} e_1 + \alpha_{23} e_2 + \alpha_{33} e_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

бу ерда

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11} = \cos(e_1, e'_1), \quad \alpha_{12} = \cos(e_1, e'_2), \quad \alpha_{13} = \cos(e_1, e'_3), \\ &\alpha_{21} = \cos(e_2, e'_1), \quad \alpha_{22} = \cos(e_2, e'_2), \quad \alpha_{23} = \cos(e_2, e'_3), \\ &\alpha_{31} = \cos(e_3, e'_1), \quad \alpha_{32} = \cos(e_3, e'_2), \quad \alpha_{33} = \cos(e_3, e'_3). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тўққизта йўналтирувчи косинусларни матрица шаклида ёзиб оламиз:

$$S = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

(4) муносабатдан фойдаланиб қуйидагича ёзишимиз ҳам мумкин:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} e'_1 + \alpha_{12} e'_2 + \alpha_{13} e'_3, \\ e_2 &= \alpha_{21} e'_1 + \alpha_{22} e'_2 + \alpha_{23} e'_3, \\ e_3 &= \alpha_{31} e'_1 + \alpha_{32} e'_2 + \alpha_{33} e'_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Матрица

$$S^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

S матрицага нисбатан транспонирланган матрица экани равшан.

e_1', e_1', e_3' лар — ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар бўлгани учун, уларнинг вектор-скаляр кўпайтмаси ± 1 га тенг. Демак,

$$(e_1' e_2' e_3') = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \pm 1. \tag{8}$$

Шунга ўхшаш

$$(e_1 e_2 e_3) = \Delta (S^*) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \pm 1. \tag{9}$$

Матрицалар кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$SS^* = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E. \tag{10}$$

Ҳақиқатан ҳам, агар кўпайтма матрицанинг элементини c_{ij} билан белгиласак, у ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1, \\ c_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, \\ c_{33} &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$c_{12} = \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = (e_1' e_2') = 0.$$

Шунга ўхшаш

$$i \neq j \text{ бўлганда } c_{ij} = e_i' e_j' = 0, \; (i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{12}$$

Демак,

$$SS^* = E, \tag{13}$$

яъни транспонирланган S^* матрица тескари S^{-1} матрицага тенг:

$$S^* = S^{-1} \tag{14}$$

(13) ёки (14) шартларни қаноатлантирувчи матрица, яъни ўзининг транспонирланганига тескари бўлган матрица *ортогонал матрица* дейилади. Энди $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ координаталарни $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ координаталарга ўтказадиган ва аксинчасига ўтказадиган

формулаларни топамиз. (3) ҳамда (6) формулаларга асосланиб (1) ва (2) тенгликларнинг ўнг томонларини (e_1, e_2, e_3) базис орқали ҳам, (e_1', e_2', e_3') базис орқали ҳам ифода этиш мумкин: Демак, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3'. \tag{15}$$

(15) тенгликнинг ҳамма ҳадларини кетма-кет e_1' векторга, e_2' векторга, e_3' векторга кўпайтириб ҳамда

$$\left.\begin{aligned} i \neq j \text{ бўлганда } e_i'e_j' &= 0, \\ i = j \text{ бўлганда } e_i'e_j' &= 1, \\ e_ie_j' &= \alpha_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

эканини ҳисобга олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3, \\ x_2' &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3, \\ x_3' &= \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(15) тенглик ҳадларини кетма-кет e_1, e_2, e_3 ларга кўпайтириб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \alpha_{13}x_3', \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{23}x_3', \\ x_3 &= \alpha_{31}x_1' + \alpha_{32}x_2' + \alpha_{33}x_3'. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Демак, (17) ортогонал алмаштириш матрицаси S матрицадан, (18) тескари алмаштиришнинг матрицаси эса S^* матрицадан иборат.

Шундай қилиб, Декарт координаталар системасида *ортогонал алмаштиришга ортогонал матрица тўғри келиши исбот* қилинди. Агар (17) ва (18) тўғри ва тескари алмаштиришларнинг матрицалари (13) ва (14) муносабатларни қаноатлантирса, яъни ортогонал матрицалар бўлса, у ҳолда алмаштиришлар ҳам ортогонал алмаштиришлар бўлишини исбот қилиш мумкин.

Агар қуйидаги

$$X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

устун-матрицалар киритилса, (17) ва (18) системаларни бундай ёзиш мумкин:

$$X' = SX, \tag{20}$$

$$X = S^{-1}X', \tag{21}$$

Агар (19) матрицаларга нисбатан транспонирланган

$$X'^* = \| x_1' x_2' x_3' \|, \qquad X^* = \| x_1 x_2 x_3 \| \tag{22}$$

матрицалар киритилса,

$$X'^* = X^* S^{-1}, \qquad x^* = x'^* S \tag{23}$$

деб ёзиш мумкин.

11-§. Чизиқли алмаштиришнинг хос вектори

1-таъриф. X вектор берилган бўлсин:

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

бу ерда

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0.$$

Агар X векторни A матрица ёрдамида алмаштиргандан кейин (5-§ даги (2) га қаранг) X векторга параллел, яъни

$$Y = \lambda X, \tag{2}$$

бўлган

$$Y = AX, \tag{3}$$

вектор ҳосил бўлса,

бу ерда λ — сон, у ҳолда X вектор A *матрицанинг хос вектори ёки берилган чизиқли алмаштиришнинг хос вектори* деб аталади: λ сон унинг *хос қиймати* дейилади.

Берилган чизиқли алмаштириш учун ёки берилган матрица учун хос

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\|$$

векторни топамиз. X вектор A матрицанинг хос вектори бўлиши учун (2) ва (3) тенгликларнинг бажарилиши зарурдир. Бу тенгликлар ўнг томонларини бир-бирига тенглаб ушбуни ҳосил қиламиз:

$$AX = \lambda X \tag{4}$$

ёки

$$AX = \lambda EX,$$

яъни

$$(A - \lambda E)X = 0. \tag{5}$$

Бу тенгликдан кўринадики, X вектор ўзгармас сонгача аниқлик билан топилади.

(4) тенглик ёйилган кўринишда қуйидагича ёзилиши равшан:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(5) тенглик эса

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + \quad a_{12}x_2 + \quad a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \quad a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + \quad a_{32}x_2 + a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

каби ёзилади.

X векторнинг x_1, x_2, x_3 координаталарини аниқлаш учун бир жинсли чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қилдик. (7) система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун бу система дитерминантининг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

ёки

$$\Delta(A-\lambda E) = 0. \qquad (9)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу λ га нисбатан учинчи тартибли тенгламадир. Бу тенглама *A матрицанинг характеристик тенгламаси* деб аталади. Бу тенгламадан хос λ қийматлар топилади.

Характеристик тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлган ҳолни қараймиз. Уларни λ_1, λ_2, λ_3 билан белгилаймиз.

Ҳар бир хос λ қийматга координаталари (7) системадан λ нинг тегишли қийматида аниқланадиган хос вектор мос келади. Хос векторларни τ_1, τ_2, τ_3 лар билан белгилаймиз. Бу векторларнинг чизиқли эркли эканини, яъни улардан ҳеч бири қолганлари орқали чизиқли ифода этилмаслигини кўрсатиш мумкин. Демак, ҳар қандай векторни τ_1, τ_2, τ_3 векторлар орқали ифодалаш мумкин, яъни уларни базис векторлар учун қабул қилиш мумкин.

Симметрик матрица характеристик тенгламасининг ҳамма илдизлари ҳақиқий бўлишини исботсиз қайд қилиб ўтамиз.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг хос векторларини ҳамда уларга мос бўлган хос сонларни топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз ҳамда хос қийматларни топамиз:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ яъни } \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 5.$$

Мос (7) тенгламалар системасидан $\lambda_1 = -1$ хос қийматга тўғри келадиган хос векторни топамиз:

$$\begin{aligned} (1-\lambda_1)\,x_1 + \qquad\quad x_2 &= 0, \\ 8x_1 + (3-\lambda_1)\,x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ёки} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 8x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Бу системани ечиб $x_1 = m$, $x_2 = -2m$ ни топамиз, бу ерда m — ихтиёрий сон.

Хос вектор қуйидагича бўлади:

$$\tau_1 = mi - 2mj.$$

$\lambda_2 = 5$ хос қиймат учун

$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 &= 0, \\ 8x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системасини ёзамиз. Хос вектор қуйидагича бўлади:

$$\tau_2 = mi + 4mj.$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг хос қийматларини ҳамда хос векторларини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ яъни } -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_2 = 9$.

$\lambda_1 = 3$ учун хос вектор

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 \qquad\quad &= 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системасидан аниқланади. $x_1 = m$ деб фараз қилиб $x_2 = 2m$, $x_3 = 2m$ ни ҳосил қиламиз. Хос вектор:

$$\tau_1 = mi + 2mj + 2mk.$$

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$\tau_2 = mi + \frac{1}{2}mj - mk,$$

$$\tau_3 = -mi + mj - \frac{1}{2}mk.$$

12-§. Базис векторлар хос векторлардан иборат бўлганда чизиқли алмаштиришнинг матрицаси

Энди хос τ_1, τ_2, τ_3 векторлар базисдан иборат бўлган ҳолда чизиқли алмаштириш матрицасини аниқлаймиз. Бундай алмаштиришда қуйидаги муносабатлар бажарилиши лозим:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1^* &= \lambda_1\tau_1, \\ \tau_2^* &= \lambda_2\tau_2, \\ \tau_3^* &= \lambda_3\tau_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

бу ерда τ_1^*, τ_2^*, τ_3^* лар — τ_1, τ_2, τ_3 векторларнинг образлари.

Алмаштириш матрицаси

$$A' = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлсин. Бу матрица ҳадларини аниқлаймиз. τ_1, τ_2, τ_3 базисда ушбуни ёзишимиз мумкин:

$$\tau_1 = 1\cdot\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

τ_1 вектор A' матрица ёрдамида алмаштиргандан кейин $\tau_1^* = \lambda_1\tau_1$ векторга ўтгани учун

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 + 0\cdot\tau_2 + 0\cdot\tau_3,$$

бу ҳолда

$$\tau_1^* = \lambda_1\tau_1 = A'\tau_1$$

деб ёзишимиз мумкин. Демак,

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad (3)$$

ёки тенгламалар системаси шаклида:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= a'_{11}\cdot 1 + a'_{12}\cdot 0 + a'_{13}\cdot 0, \\ 0 &= a'_{21}\cdot 1 + a'_{22}\cdot 0 + a'_{23}\cdot 0, \\ 0 &= a'_{81}\cdot 1 + a'_{32}\cdot 0 + a'_{33}\cdot 0. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Бу системадан

$$a'_{11} = \lambda_1, \qquad a'_{21} = 0, \qquad a'_{31} = 0$$

эканини топамиз.

Энди

$$\tau^*_2 = \lambda_2\tau_2, \qquad \tau^*_3 = \lambda\tau_3.$$

муносабатларга асосан юқоридагига ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{aligned} &a'_{12} = 0, \qquad &a'_{22} = \lambda_2, \qquad &a'_{32} = 0,\\ &a'_{13} = 0, \qquad &a'_{23} = 0, \qquad &a'_{33} = \lambda_3. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, алмаштириш матрицаси

$$A' = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

кўринишда бўлади.

Чизиқли алмаштириш қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 x'_1, \\ y'_2 &= \qquad \lambda_2 x'_2, \\ y'_3 &= \qquad\qquad \lambda_3 x'_3. \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Агар $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^*$, бўлса, у ҳолда чизиқли алмаштириш

$$y'_1 = \lambda^* x_1,$$
$$y'_2 = \lambda^* x_2,$$
$$y'_3 = \lambda^* x'_3,$$

кўринишни олади.

Бундай алмаштириш λ^* коэффициентли *ўхшашлик* алмаштириши дейилади. Бундай алмаштиришда фазонинг ҳар бир вектори хос сони λ^* га тенг бўлган хос вектордан иборат бўлади.

13-§. Бир базисдан иккинчи базисга ўтишда чизиқли алмаштириш матрицасининг ўзгариши

X вектор (e_1, e_2, e_3) базисда берилган ихтиёрий вектор бўлсин:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3. \tag{1}$$

X вектор A матрица ёрдамида Y векторга алмашинади:

$$Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3, \tag{2}$$

$$Y = AX. \tag{3}$$

Қаралаётган фазода эски базис билан ушбу

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3, \\ e_2' &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3, \\ e_3' &= b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3 \end{aligned}\right| \tag{4}$$

ўтиш формулалари орқали боғланган янги (e_1', e_2', e_3') базис киритамиз. X вектор янги базисда қуйидагича ёзилган бўлсин:

$$X' = x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix} \tag{5}$$

Ушбу тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1'\,e_1' + x_2'\,e_2' + x_3'\,e_3', \tag{6}$$

бу ерда ўнг томонга (4) ифодалар қўйилган. Ўнг ва чап томонлардаги e_1, e_2, e_3 векторлар мос коэффициентларини бирбирига тенглаб

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_2 &= b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3 &= b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3', \end{aligned}\right| \tag{7}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Ёки қисқача

$$X = BX', \tag{8}$$

бу ерда

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Бу матрица махсусмас матрица бўлиб, унинг тескари B^{-1} атрицаси мавжуд, чунки (7) система x_1', x_2', x_3' ларга нисбаған маълум ечимга эга. Агар янги базисда Y векторни

$$Y' = y_1'\,e_1' + y_2'\,e_2' + y_3'\,e_3'$$

деб ёзсак, у ҳолда ушбу

$$Y = BY' \tag{10}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши равшан. (8) ва (10) ифодаларни (3) га қўйиб

$$BY' = ABX' \tag{11}$$

ни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг иккала томонини B^{-1} га кўпайтириб

$$Y' = B^{-1}ABX' \tag{12}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, алмаштиришнинг A' матрицаси янги базисда қуйидагича

$$A' = B^{-1}AB \tag{13}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрица ёрдамида (e_1, e_2, e_3) базисда векторни алмаштириш бажарилаётган бўлсин. Агар

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + 2e_2 + e_3, \\ e_2' &= 2e_1 + e_2 + 3e_3, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

бўлса. (e_1', e_2', e_3') базисда A' алмаштиришнинг матрицаси аниқлансин.

Ечиш. Бу ерда B матрица [(4) ва (9) формулаларга қ.] қуйидагича бўлади:

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тескари матрицани топамиз ($\Delta(B) = 1$):

$$B^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Сўнгра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$B^{-1}A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{Vmatrix}.$$

Ниҳоят (13) формулага мувофиқ:

$$A' = B^{-1}AB = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Энди қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. *Берилган чизиқли алмаштиришда характеристик кўпҳад [11- § даги (8) тенгламанинг чап томони] базиснинг танлаб олинишига қараб ўзгармайди.*

Исбот. Қуйидаги иккита матрицали тенгламани ёзамиз:

$$A' = B^{-1}AB,$$

$$E = B^{-1}EB,$$

бу ерда A ва A' лар — битта чизиқли алмаштиришдаги турли базисларга мос бўлган матрицалар, B — янги координаталардан эски координаталарга ўтиш матрицаси, E — бирлик матрица.

Кейинги иккита тенгликка асосан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A' - \lambda E = B^{-1}(A - \lambda E)B.$$

Матрицалардан детерминантларга ўтиб ҳамда матрицалар ва детерминантларни кўпайтириш қоидаларидан фойдаланиб,

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(B^{-1}(A - \lambda E)B) = \Delta(B^{-1}) \cdot \Delta(A - \lambda E)\,\Delta(B).$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Аммо

$$\Delta(B^{-1})\,\Delta(B) = \Delta(B^{-1}B) = \Delta(E) = 1.$$

Демак,

$$\Delta(A' - \lambda E) = \Delta(A - \lambda E).$$

Тенгликнинг ўнг ва чап томонларида алмаштириш матрицасининг характеристик кўпҳадлари турибди. Теорема исбот бўлди.

14- §. Квадратик формалар ва уларни алмаштириш

1-таъриф. Бир неча ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси* деб бу ўзгарувчиларнинг иккинчи даражали бир жинсли кўпҳадига айтилади.

Учта x_1, x_2, x_3 ўзгарувчиларнинг квадратик формаси қуйидаги кўринишга эга:

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (1)$$

бу ерда a_{ij} лар берилган сонлар, 2 коэффициентлар келгусида анча содда формулалар ҳосил қилиш учун олингандир. (1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3), \quad (2)$$

бу ерда a_{ij} лар ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) берилган сонлар, шунинг билан бирга

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{13} = a_{31}, \qquad a_{23} = a_{32}. \quad (3)$$

Ушбу

a_{12} a_{13}

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

матрица (1) *квадратик форманинг матрицаси* дейилади. Бу матрица симметрик матрицадир.

x_1, x_2, x_3 ларни фазо нуқталарининг координаталари деб ёки (e_1, e_2, e_3) ортогонал базисда вектор координаталари деб ҳисоблаймиз, e_1, e_2, e_3 лар эса бирлик векторлардир. e_1, e_2, e_3 базисда ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

чизиқли алмаштиришни қараймиз.

Бу чизиқли алмаштиришнинг матрицаси квадратик форманинг матрицаси билан бир хил.

Энди иккита векторни аниқлаймиз:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

X x

$$X' = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

(5) алмаштиришни

$$X' = AX \tag{8}$$

кўринишда ёзамиз

У ҳолда (2) квадратик формани бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси каби тасвирлаш мумкин:

$$F = X \cdot AX. \tag{9}$$

e_1', e_2', e_3' лар (8) алмаштиришнинг хос λ_1, λ_2, λ_3 қийматларга мос бўлган ортогонал хос векторлари бўлсин. Агар матрица симметрик матрица бўлса, у ҳолда A матрицанинг хос векторларидан тузилган ортогонал базиснинг мавжуд эканини исбот қилиш мумкин. (e_1', e_2', e_3') базисда (8) алмаштиришни бажарамиз. Бу ҳолда шу базисда алмаштириш матрицаси диагонал матрица бўлади (12-§ га қ.):

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Бу алмаштиришни (1) квадратик формага татбиқ қилиб уни

$$F = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_1^2 \tag{11}$$

шаклга келтириш мумкин эканини кўрсатиш мумкин.

e_1', e_2', e_3' хос векторларнинг йўналишларини квадратик форманинг *бош йўналишлари* дейилади.

15-§. Матрицанинг ранги. Чизиқли тенгламалар системаси ечимларининг мавжудлиги

1-таъриф. Берилган A матрицанинг *минори* деб унинг бир неча йўл ва устунларини чизиб ташлагандан кейин матрицанинг қолган элементларининг ўрнини ўзгартирмасдан тузилган детерминантга айтилади.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Бу матрицанинг учинчи тартибли минори битта устунни чизиб ташлагандан кейин матрица $\| \quad \|$ ишорасини детерминант $| \quad |$ ишораси билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади. Учинчи тартибли минорлар тўртта. Иккинчи тартибли минорлар иккита устун ва битта йўлни чизиб ташлагандан кейин ҳосил бўлади, улар 18 та. Биринчи тартибли минорлар 12 та.

2-таъриф. A матрицанинг *ранги* деб A матрица нолдан фарқли минорининг энг юқори тартибига айтилади.

2-мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг ранги 2 га тенг эканини текшириш осон.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг ранги 1 га тенг.

Агар A матрица n-тартибли квадрат матрица бўлса, бу матрицанинг k ранги $k \leqslant n$ муносабатни қаноатлантиради. Юқорида кўрсатиб ўтилганидек, агар $k = n$ бўлса, у ҳолда матрица *махсусмас* матрица деб аталади, агарда $k<n$ бўлса, бу ҳолда матрица *махсус* матрица дейилади.

Масалан,

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрица махсусмас матрицадир, чунки $\Delta(A) = 1 \neq 0$; 2-мисолдаги матрица махсус матрицадир, чунки унда $n = 3$, $k = 2$.

Матрица ранги тушунчаси чизиқли тенгламалар системаси назариясида кенг қўлланилади. Қуйидаги теорема ўринли:

1-теорема. *Чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Системанинг

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

матрицасини ҳамда кенгайтирилган

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{Vmatrix} \qquad (3)$$

матрицани қарайлик.

Агар **A** *матрицанинг ранги* **B** *матрицанинг рангига тенг бўлса,* (1) *система ечимга эга. Агар* **A** *матрицанинг ранги* **B** *матрицанинг рангидан кичик бўлса, система ечимга эга эмас. Агар* **A** *матрица ранги ҳамда* **B** *матрицанинг ранги учга тенг бўлса, бу ҳолда система ягона ечимга эга. Агар* **A** *матрицанинг ва* **B** *матрицанинг ранги 2 га тенг бўлса, бу ҳолда система чексиз кўп ечимга эга, шунинг билан баробар иккита номаълум учинчи номаълум орқали ифода этилади, бу учинчи номаълум эса ихтиёрий қийматга эга бўлади.*

Агар **A** *ва* **B** *матрицаларнинг ранги 1 га тенг бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимга эга, шунинг билан баробар иккита ноъмалум ихтиёрий қийматларга эга бўлиб, учинчиси улар орқали ифода этилади.*

Бу теореманинг ўринли экани алгебрада маълум бўлган тенгламалар системаси ечимларининг анализига асосан осон тайинланади. Бу теорема ихтиёрий сондаги тенгламалар системаси учун ҳам ўринлидир.

16- §. Матрицаларни дифференциаллаш ва интеграллаш

$\|a_{ij}(t)\|$ матрица берилган бўлиб, матрицанинг $a_{ij}(t)$ ҳадлари бирор t аргументнинг функциясидан иборат бўлсин:

$$\|a_{ij}(t)\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}(t) \, a_{12}(t) \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \, a_{22}(t) \dots a_{2n}(t) \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1}(t) \, a_{m2}(t) \dots a_{mn}(t) \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

ёки буни қисқача қуйидагича ёзамиз:

$$\|a(t)\| = \|a_{ij}(t)\| \qquad (i = 1,2, \dots, m; \; j = 1,2, \dots, n). \tag{2}$$

Матрицанинг ҳадлари

$$\frac{da_{11}(t)}{dt}, \dots, \qquad \frac{da_{mn}(t)}{dt}$$

ҳосилаларга эга бўлсин деб фараз қилайлик

1-таъриф. $\|a(t)\|$ *матрицанинг ҳосиласи* деб—биз уни $\frac{d}{dt}\|a(t)\|$ билан белгилаймиз—ҳадлари $\|a(t)\|$ матрица ҳадларининг ҳосилаларидан иборат бўлган матрицага айтилади, яъни

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \left\| \begin{matrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Агар матрицаларни айириш ва уларни сонга кўпайтириш амалларини киритиш (4- § га қ.) билан бир қаторда лимитга ўтиш амали

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \|a_{ij}(t + \Delta t)\| - \|a_{ij}(t)\| \} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij}(t)}{\Delta t} \right\| =$$

$$= \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a_{ij}(t + \Delta t) - a_{ij} + (t)}{\Delta t} \right\|$$

ҳам киритилса матрица ҳосиласининг юқоридаги таърифи табиий йўл билан ҳосил бўлишини таъкидлаб ўтамиз. (3) тенгликни символик равишда қисқача қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \left\| \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right| \tag{4}$$

ёки

$$\frac{d}{dt}\|a(t)\| = \left\|\frac{d}{dt}a(t)\right\| \tag{5}$$

деб ёзишимиз мумкин.

Дифференциаллаш символи $\frac{d}{dt}$ ўрнига баъзан D символини ишлатиш қулай ва (5) тенглик ўрнига

$$D\|a\| = \|Da\| \tag{6}$$

тенгликни ёзиш мумкин

2-таъриф. $\|a(t)\|$ матрицанинг *интеграли* деб—биз уни

$$\int_{t_0}^{t}\|a(z)\|dz,$$

билан белгилаймиз – ҳадлари берилган матрица ҳадларидан олинган интегралларга тенг бўлган ушбу

$$\int_{t_0}^{t}\|a(z)\|dz = \left\|\begin{matrix} \int_{t_0}^{t} a_{11}(z)\,dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{1n}(z)\,dz \\ \int_{t_0}^{t} a_{21}(z)\,dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{2n}(z)\,dz \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \int_{t_0}^{t} a_{m1}(z)\,dz & \ldots & \int_{t_0}^{t} a_{mn}(z)\,dz \end{matrix}\right\| \tag{7}$$

матрицага айтилади.

Бирмунча қисқача қилиб ёзганда

$$\int_{t_0}^{t}\|a(z)\|dz = \left\|\int_{t_0}^{t} a_{ij}(z)\,dz\right\|, \tag{8}$$

ёки

$$\int_{t_0}^{t}\|a(z)\|dz = \left\|\int_{t_0}^{t} a(z)\,dz\right\|. \tag{9}$$

бўлади.

$\int_{t_0}^{t}(\qquad)dz$ символини битта ҳарф билан, масалан, S билан белгилаш мумкин у ҳолда (6) га ўхшатиб, (9) тенгликни

$$S\|a\| = \|Sa\| \tag{10}$$

каби ёзиш мумкин.

17- §. Дифференциал тенгламалар системасини ва ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системасининг ечимларини матрица орқали ёзилиши

n та номаълум $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ функцияга эга бўлган n та чизиқли дифференциал тенгламалар системасини қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

a_{ij} — коэффициентлар ўзгармас сонлардир. Ушбу белгилашни киритамиз:

$$\|x\| = \left\| \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{matrix} \right\|. \qquad (2)$$

Бу ечимлар матрицаси ёки (1) системанинг векторли ечими. Энди ечимлар ҳосилалари матрицасини аниқлаймиз:

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix} \right\|. \qquad (3)$$

Дифференциал тенгламалар системаси коэффициентларининг матрицасини ёзамиз:

$$\|a\| = \|a_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\|. \qquad (4)$$

Матрицаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб (4- § га қ.), (1) дифференциал тенгламалар системасини матрица шаклида

$$\left\|\begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \, \ldots \, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \, \ldots \, a_{2n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \, \ldots \, a_{nn} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix}\right\| \tag{5}$$

деб ёзиш мумкин.

Ёки матрицаларни дифференциаллаш қоидасига асосан қисқача

$$\frac{d}{dt}\| x(t) \| = \| a \| \| x \| \tag{6}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Кейинги тенгламани яна ҳам қисқароқ қуйидагича ёзса бўлади:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{7}$$

бу ердаги x *векторли ечим* деб ҳам аталади, a эса $\|a_{ij}\|$ матрицани қисқача белгиланишидир.

$$\|\alpha\| = \alpha = \left\|\begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{matrix}\right\| \tag{8}$$

бўлсин, α_i лар бирорта сонлар.

Дифференциал тенгламалар системасининг ечимлари тўпламини

$$\| x \| = e^{kt} \| \alpha \| \tag{9}$$

ёки)

$$x = e^{kt} \alpha \qquad (10$$

кўринишда излаймиз [XIII б. 30- §, (2) формулага қ.] (10) ни (7) га (ёки (9) ни (6) га) қўйиб, матрицани сонга кўпайтириш қоидасидан ҳамда матрицаларни дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$ke^{kt} \alpha = ae^{kt} \alpha, \tag{11}$$

бу тенгликдан

$$k\alpha = a\alpha$$

ёки

$$a\alpha - k\alpha = 0 \tag{12}$$

ни ҳосил қиламиз. Кейинги тенгликда a—(4) матрица, k — сон, α — (8) устун-матрица эканини эслатиб ўтамиз. (12) тенгликнинг чап томонидаги матрицани бундай ёзиш мумкин:

$$(a - kE)\,\alpha = 0, \tag{13}$$

бу ерда E — n-тартибли бирлик матрица. (13) тенгликни ёйиқ шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = 0. \tag{14}$$

(12) тенглик α вектор a матрица ёрдамида ўзига параллел бўлган $k\alpha$ векторга алмашинишини кўрсатади. Демак, α вектор a матрицанинг k хос қийматига тўғри келадиган хос вектордир (11- § га қ.)

Скаляр кўринишда (12) тенглик алгебраик тенгламалар системаси каби ёзилади [XIII б., 30- §, (3) системага қ.] k сони XIII б. 30- § даги (5) тенгликдан аниқланиши керак, уни матрица шаклида бундай ёзса бўлади:

$$\Delta\,(a - kE) = 0, \tag{15}$$

яъни қуйидаги детерминант нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{Vmatrix} = 0. \tag{16}$$

(16) тенгламанинг барча илдизлари турлича бўлсин:

$$k_1,\ k_2,\ \dots\ k_n$$

(13) системадан топиладиган ҳар бир k_i қиймат учун α қийматларининг

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}$$

матрицаси аниқланади (бу қийматлардан биттаси ихтиёрий). Демак, (1) система ечими матрица шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n e^{k_n t} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

бу ерда C_i—ихтиёрий ўзгармас сонлар ёки қисқача:

$$\| x \| = \| \alpha \| \; \| C e^{kt} \|. \tag{18}$$

Ечим скаляр шаклда XIII б. 30-§ даги (6) формулалар билан берилади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x + 3x_2.$$

системани ҳамда чизиқли дифференциал тенгламалар системаси ечимини матрица шаклида ёзинг.

Ечиш. Система матрицасини ёзамиз:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Тенгламалар системаси матрица шаклида қуйидагича ёзилади ((5) тенгламага қ.):

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}.$$

(15) характеристик тенгламани тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{яъни} \quad k^2 - 5k + 4 = 0,$$

демак,

$$k_1 = 1, \qquad k_2 = 4.$$

$k_1 = 1$ илдиз учун $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ қийматларни аниқлаш мақсадида (14) системани тузамиз:

$$(2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0.$$

$\alpha_1^{(1)} = 1$ деб фараз қилиб, $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

$k_2 = 4$ илдизга мос бўлган $\alpha_1^{(2)}$ ва $\alpha_2^{(2)}$ ларни шунга ўхшаш усул билан аниқлаймиз. Натижада

$$\alpha_1^{(2)} = 1, \qquad \alpha_2^{(2)} = 1$$

ни топамиз

Энди ечимларни матрица шаклида ёзишимиз мумкин [(17) формула]:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{4t} \end{matrix} \right\|$$

ёки одатдаги шаклда:

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{4t},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 3x_3$$

системани ҳамда дифференциал тенгламалар системасининг ечимини матрица шаклида ёзинг.

Ечиш. Системанинг матрицасини ёзамиз:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Демак, тенгламалар системаси матрица шаклида қуйидагича ёзилади [(5) тенгламага қ.]:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\|.$$

(16) характеристик тенгламани тузамиз ва унинг илдизларини топамиз:

$$\left| \begin{matrix} 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 3-k \end{matrix} \right| = 1, \text{ яъни } \quad (1-k)(2-k)(3-k) = 0,$$

демак,

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

(14) тенгламадан $k_1 = 1$ илдизга мос бўлган $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}$ ларни аниқлаймиз:

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + 2\alpha_3^{(1)} = 0,$$

бу тенгламалардан

$$\alpha_1^{(1)} = 1, \qquad \alpha_2^{(1)} = -1, \qquad \alpha_3^{(1)} = 0$$

эканини топамиз.

$k_2 = 2$ илдизга мос бўлган $\alpha_1^{(2)}$ $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$ ларни

$$\begin{aligned} -\alpha_1^{(2)} \qquad\qquad &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} \qquad\qquad &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системасидан аниқлаймиз Бу тенгламалардан

$$\alpha_1^{(2)} = 0, \qquad \alpha_2^{(2)} = 1, \qquad \alpha_3^{(2)} = -1$$

ни топамиз. $k_3 = 3$ илдизга мос бўлган $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ ларни

$$\begin{aligned} -2\alpha_1^{(3)} &= 0, \\ \alpha_1^{(3)} - \alpha_2^{(3)} &= 0, \\ \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

системадан аниқлаймиз, натижада

$$\alpha_1^{(3)} = 0, \qquad \alpha_2^{(3)} = 0, \qquad \alpha_3^{(3)} = 1$$

ни топамиз. Система ечимини матрица шаклида ёзамиз [(17) формулага қ.]

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{Vmatrix}$$

ёки одатдаги шаклда:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1e^t, \\ x_2 &= -C_1e^t + C_2e^{2t}, \\ x_3 &= -C_2e^{2t} + C_3e^{3t}. \end{aligned}$$

18-§. n-тартибли чизиқли тенгламанинг матрицалар орқали ёзилиши

Ўзгармас коэффициентли n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 x. \qquad (1)$$

Келгусидаги баёнимиздан кўринишича, коэффициентларни бундай номерлаш қулай эканини таъкидлаб ўтамиз. $x = x_1$ деб ва

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt} = x_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,\\
&\frac{dx_n}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n
\end{aligned}\right| \tag{2}$$

деб белгилаймиз:

Бу система коэффициентлари матрицасини ёзамиз:

$$\|a^*\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

У ҳолда (2) системани 17- § даги (5) формулага ўхшаш

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dx_{n-1}}{dt}\\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n \end{Vmatrix} \tag{4}$$

каби ёзиш мумкин, ёки қисқача

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \|a^*\| \cdot \|x\|. \tag{5}$$

Сўнгра ечиш 17- § даги каби олиб борилади, чунки (5) матрицали тенглама 17- § даги (6) тенгламанинг хусусий ҳолидир.

Мисол. Ушбу

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dx}{dt} + qx$$

тенгламани матрица шаклида ёзинг.

Ечиш. $x = x_1$ деб ва

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = px_2 + qx_1$$

деб белгилаймиз.

У ҳолда тенгламалар системаси матрицалар шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ q & p \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|.$$

19-§. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системасини матрицалар орқали ёзилишидан фойдаланиб кетма-кет яқинлашиш усули билан ечиш

Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

нинг $t = t_0$ бўлганда $x_1 = x_{10},\ x_2 = x_{20},\ \dots,\ x_n = x_{n0}$ (2)

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинган бўлсин.

Агар текширишга система коэффициентлари матрицаси ҳамда ечимлар матрицаси билан бир қаторда бошланғич қийматларнинг

$$\|x_0\| = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{matrix} \right\|, \quad (3)$$

матрицасини ҳам киритсак, у ҳолда (2) бошланғич шартларга эга бўлган (1) тенгламалар системаси бундай ёзилади:

$$\frac{d}{dx}\|x\| = \|a(t)\| \cdot \|x\|. \quad (4)$$

Бошланғич шартлар

$$t = t_0 \text{ бўлганда } \|x\| = \|x_0\| \quad (5)$$

кўринишда бўлади,

Бу ерда $\| a(t) \|$ — аввалгидек, система коэффициентлари матрицасидир.

Масалани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

Бундан кейин келадиган материални яхши тушуниш учун кетма-кет яқинлашиш усулини дастлаб биринчи тартибли битта чизиқли тенгламага татбиқ қиламиз (XVI б., 26- § га қ.)

Битта

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x \tag{6}$$

тенгламанинг

$$t = t_0 \text{ бўлганда } x = x_0 \tag{7}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинади.

$a(t)$ — узлуксиз функция деб фараз қиламиз. XVI б., 26- § да кўрсатилиб ўтилганидек (6) дифференциал тенгламанинг (7) бошланғич шартларда ечиш ушбу

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x(z)\, dz \tag{8}$$

интеграл тенгламани ечишга келтирилади. Бу тенгламани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_0 dz, \\ x_2 &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)\, x_1(z) dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_{m-1}(z) dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Ёзувни қисқартириш мақсадида S оператор—интеграллаш оператори киритилади:

$$S(\quad) = \int_{t_0}^{t} (\quad)\, dz \tag{10}$$

S оператордан фойдаланиб, (9) тенгликлар қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + S(ax_0), \\ x_2 &= x_0 + S(ax_1) = x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))), \\ x_3 &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(ax_0))))), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a(x_0 + S(a\ldots))))))). \end{aligned}$$

Қавсларни очиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$x_m = x_0 + Sax_0 + SaSax_0 + SaSaSax_0 + \ldots + \underbrace{SaSaSa\ldots S_a x_0}_{m \text{ марта}}.$$

x_0 ни қавс ташқарисига чиқариб (x_0—ўзгармас сон) қуйидагига эга бўламиз:

$$x_m = [1 + Sa + SaSa + \ldots + \underbrace{SaSa \ldots Sa}_{m \text{ марта}}]\, x_0 \qquad (11)$$

Агар $a(t)$ узлуксиз функция бўлса, $\{x_m\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши юқорида (XVI б., 26-§ да) исбот қилинган эди. Бу кетма-кетликнинг лимити яқинлашувчи

$$x = [1 + Sa + SaSa + \ldots]\, x_0 \qquad (12)$$

қатордир.

Эслатма. Агар $a(t) = \text{const}$ бўлса, у ҳолда (12) формула содда кўринишни олади. Ҳақиқатан ҳам, (10) га асосан ёза оламиз:

$$Sa = aS1 = a(t - t_0),$$
$$SaSa = a^2 S(t - t_0) = a^2 \frac{(t - t_0)^2}{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\underbrace{SaSa \ldots Sa}_{m \text{ марта}} = a^m \frac{(t - t_0)^m}{m!}.$$

Бу ҳолда (12)

$$x = \left[1 + a\frac{t - t_0}{1} + a^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \ldots + a^m \frac{(t - t_0)^m}{m!} + \ldots\right] x_0$$

кўринишга эга бўлади

ёки

$$x = x_0 e^{a(t - t_0)}. \qquad (13)$$

Кўрилган битта (6) тенгламани ечиш усули (1) системани (2) бошланғич шартларда ечишга бутунлай кўчирилади. Матрица шаклида (1) система ўзининг (2) бошланғич шартлари билан қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\|x\| = \|a(t)\|\,\|x\| \qquad (14)$$

$$t = t_0 \text{ бўлганда: } \|x\| = \|x_0\| \qquad (15)$$

Матрицаларни кўпайтириш ҳамда матрицаларни интеграллаш қоидасидан фойдалансак, (14) системани (15) бошланғич шартларда ечиш ушбу

$$\|x(t)\| = \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|a(z)\| \cdot \|x(z)\|\, dz \qquad (16)$$

матрицали интеграл тенгламани ечишга келади.

Кетма-кет яқинлашишларни топамиз:

$$\| x_m(t) \| = \| x_0 \| + \int_0^t \|a(z)\| \cdot \|x_{m-1}(z)\| \, dz. \tag{17}$$

Интеграл остига кетма-кет яқинлашишни кетма-кет қўйиш йўли билан система ечими матрицалар шаклида бундай ифода этилади:

$$\| x(t) \| = \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \Biggl(\|x_0\| + \int_{t_0}^{z_1} \|a(z_2)\| \Biggl(\| x_0 \| +$$

$$+ \int_{t_0}^{z_2} \|a(z_3)\| (\ldots) \, dz_3 \Biggr) dz_2 \Biggr) dz_1$$

ёки

$$\| x(t) \| = \| x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \, \| x_0 \| dz_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \| a(z_1) \| \int_{t_0}^{z_1} \|a(z_2)\| \, \|x_0\| \, dz_2 dz_1 + \ldots \tag{18}$$

Интеграллаш оператори S дан фойдаланиб (18) тенгликни

$$\|x(t)\| = [\|E\| + S\|a\| + S\|a\|S\|a\| + \ldots] \|x_0\| \tag{19}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Квадрат қавслардаги оператор битта ҳарф билан белгиланади. Уни $\mathscr{E}_{\|a\|}^{(t_0 t)}$ билан белгилаймиз. (19) тенглик қисқача қуйидагича ёзилади:

$$\| x(t) \| = \mathscr{E}_{\|a(t)\|}^{(t_0 t)} \|x_0\|. \tag{20}$$

Қуйидаги ҳол диққатга сазовордир. Агар (1) системанинг коэффициентлари ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда матрицанинг барча ҳадлари умумий кўпайтувчисини матрица ишораси ташқарисига чиқариш қоидасидан фойдаланиб[*] қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$S\|a\| = \frac{t - t_0}{1} \|a\|,$$

$$S\|a\| S\|a\| = \frac{(t - t_0)^2}{2!} \|a\|^2,$$

$$S\|a\| S\|a\| S\|a\| = \frac{(t - t_0)^3}{3!} \|a\|^3$$

ва ҳ. к.

---

[*] Матрицалар устидаги амаллар учун лимитга ўтиш масаласини муҳокамасиз қолдирамиз.

Коэффициентлар ўзгармас бўлган ҳолда (19) формула ушбу кўринишни олади:

$$\|x(t)\| = \left[\|E\| + \frac{t-t_0}{1}\|a\| + \frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}\|a\|^2 + \ldots + \frac{(t-t_0)^m}{m!}\|a\|^m + \ldots\right]\cdot \|x_0\|. \qquad (21)$$

Кейинги тенглик символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\|x(t)\| = e^{(t-t_0)\|a\|}\|x_0\|. \qquad (22)$$

XXI БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

1. Ушбу

$$y_1 = 3x_1 + 2x_2, \qquad y_2 = 7x_1 + 5x_2$$

чизиқли алмаштиришга тескари алмаштириш матрицасини топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{Vmatrix}$.

2. Ушбу $y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_1$

алмаштиришга тескари алмаштириш матрицасини топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

3. Ушбу $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$ матрицалар кўпайтмасини топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 8 & -2 \\ 18 & -4 \end{Vmatrix}$.

4. Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \text{ ва } B = \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

матрицалар берилган. AB ҳамда BA матрицаларни топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 4 & 4 & 19 \\ 9 & 0 & 16 \\ 13 & -2 & 20 \end{Vmatrix}$ ва $\begin{Vmatrix} 26 & 3 & 22 \\ 14 & -1 & 8 \\ 3 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$.

5. Қуйидагилар берилган: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$

E—учинчи тартибли бирлик матрица. $A + 2E$ матрицани аниқланг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$.

6. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ матрица берилган. A^2 матрицани топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{Vmatrix}$.

7. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ бўлсин. $A^2 + 5A$ ни топинг. *Жав.* $\begin{Vmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 42 \end{Vmatrix}$.

8. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$ матрица учун тескари матрицани топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & -1 \end{Vmatrix}$.

9. Ушбу

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси ечимларини матрицалар шаклида ёзинг ҳамда x_1, x_2, x_3 ларни топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{Vmatrix}$, $x_1 = 30$, $x_2 = 20$, $x_3 = -60$.

10. Ушбу

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 11, \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 &= 11{,}5 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси ечимларини матрицалар шаклида ёзинг ҳамда x_1, x_2, x_3 ларни топинг.

Жав. $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ 11 \\ 11{,}5 \end{Vmatrix}$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$.

11. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

матрицанинг хос қийматларини ва хос векторларини топинг.

Жав. $k_1 = 6$, $k_2 = k_3 = -3$, $\tau_1 = mi + \frac{1}{2} mj - mk$,

τ_2 вектор $(\tau_1 \tau_2) = 0$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий вектор, m—ихтиёрий сон

12 Ушбу

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$$

матрицанинг хос векторларини топинг. *Жав.* Хос векторлар мавжуд эмас.

13. Ушбу $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$ матрицанинг хос векторларини топинг. *Жав.* Барча векторлар хос.

14. Ушбу

$$\frac{dx_1}{dt} + x_2 = 0;$$

$$\frac{dx_2}{dt} + 4x_1 = 0$$

дифференциал тенгламалар системасини матрицалар усули билан ечинг.

Жав. $x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$, $x_2 = -2(C_2 e^{2t} - C_2 e^{-2t})$

ИЛОВАЛАР

1-жадвал

$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ **функция қийматлари ва Лапласнинг келтирилган функцияси $\widehat{\Phi}(x)=\Phi(\rho x)$ қийматлари**

x	$\Phi(x)$	Δ	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ	x	$\Phi(x)$	Δ	$\widehat{\Phi}(x)$	Δ
0,00	0,0000	564	0,0000	269	2,20	0,9981	5	0,8622	92
0,05	0,0564	561	0,0269	269	2,25	0,9985	4	0,8709	87
0,10	0,1125	555	0,0538	268	2,30	0,9988	3	0,8792	83
0,15	0,1680	547	0,0806	267	2,35	0,9991	3	0,8871	79
0,20	0,2227	536	0,1073	266	2,40	0,9993	2	0,8945	74
0,25	0,2763	523	0,1339	265	2,45	0,9995	2	0,9016	71
0,30	0,3285	508	0,1604	262	2,50	0,9996	1	0,9082	66
0,35	0,3794	490	0,1866	261	2,55	0,9997	1	0,9146	64
0,40	0,4284	471	0,2127	258	2,60	0,9998	1	0,9205	59
0,45	0,4755	450	0,2385	256	2,65	0,9998	0	0,9261	56
0,50	0,5205	428	0,2641	252	2,70	0,9999	1	0.9314	53
0,55	0,5633	406	0,2893	250	2,75	0,9999	0	0,9364	50
0,60	0,6039	381	0,3143	246	2,80	0,9999	0	0,9410	46
0,65	0,6420	358	0,3389	[illegible]	2,85		1	0,9454	44
0,70	0,6778	334	0,3632	238	2,90			0,9495	41
0,75	0,7112	309	0,3870	235	2,95			0,9534	39
0,80	0.7421	286	0,4105	231	3,00	1,0000		0,9570	36
0,85	0,7707	262	0,4336	226	3,05			0,9603	33
0,90	0,7969	240	0,4562	221	3,10			0,9635	32
0,95	0,8209	218	0,4783	217	3,15			0,9661	29
1,00	0,8427	197	0,5000	212	3,20			0,9691	27
1,05	0,8624	178	0,5212	207	3,25			0,9716	25
1,10	0,8802	159	0,5419	201	3,30			0,9740	24
1,15	0,8961	142	0,5620	197	3,35			0,9761	21
1,20	0,9103	126	0,5817	191	3,40			0,9782	21
1,25	0,9229	111	0,6008	186	3,50			0,9818	36
1,30	0,9340	98	0,6194	181	3,60			0,9848	30
1,35	0,9438	85	0,6375	175	3,70			0,9874	26
1,40	0,9523	74	0,6550	169	3,80			0,9896	22
1,45	0,9597	64	0,6719	164	3,90			0,9915	19
1,50	0,9661	55	0,6883	159	4,00			0,9930	15
1,55	0,9716	47	0,7042	153	4,10			0,9943	13
1,60	0,9736	41	0,7195	147	4,20			0,9954	11
1,65	0,9804	34	0,7342	143	4.30			0,9963	9
1,70	0,9838	29	0,7485	136	4,40			0,9970	7
1,75	0,9867	24	0,7621	132	4,50			0,9976	6
1,80	0,9891	20	0,7753	126	4,60			0,9981	5
1,85	0,9911	17	0,7879	121	4,70			0,9985	4
1,90	0,9928	14	0,8000	116	4,80			0 9988	3
1,95	0,9942	11	0,8116	111	4,90			0,9991	3
2,00	0,9953	10	0,8227	105	5,00			0,9993	2
2,05	0,9963	7	0,8332	102	5,10			0,9994	1
2,10	0,9970	6	0,8434	96	5,20			0,9996	2
2,15	0,9976		0,8530		5,30			0,9997	1
					5,40			0,9997	0

2-жадвал

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **функция қийматлари**

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	0,3989	1,35	0,1604	2,70	0,0104
0,05	0,3984	1,40	0,1497	2,75	0,0091
0,10	0,3970	1,45	0,1394	2,80	0,0079
0,15	0,3945	1,50	0,1295	2,85	0,0069
0,20	0,3910	1,55	0,1200	2,90	0,0060
0,25	0,3867	1,60	0,1109	2,95	0,0051
0,30	0,3814	1,65	0,1023	3,00	0,0044
0,35	0,3752	1,70	0,0940	3,05	0,0038
0,40	0,3683	1,75	0,0863	3,10	0,0033
0,45	0,3605	1,80	0,0790	3,15	0,0028
0,50	0,3521	1,85	0,0721	3,20	0,0024
0,55	0,3429	1,90	0,0656	3,25	0,0020
0,60	0,3332	1,95	0,0596	3,30	0,0017
0,65	0,3230	2,00	0,0540	3,35	0,0015
0,70	0,3123	2,05	0,0488	3,40	0,0012
0,75	0,3011	2,10	0,0440	3,45	0,0010
0,80	0,2897	2,15	0,0396	3,50	0,0009
0,85	0,2780	2,20	0,0355	3,55	0,0007
0,90	0,2661	2,25	0,0317	3,60	0,0006
0,95	0,2541	2,30	0,0283	3,65	0,0005
1,00	0,2420	2,35	0,0252	3,70	0,0004
1,05	0,2299	2,40	0,0224	3,75	0,0004
1,10	0,2179	2,45	0,0198	3,80	0,0003
1,15	0,2059	2,50	0,0175	3,85	0,0002
1,20	0,1942	2,55	0,0154	3,90	0,0002
1,25	0,1826	2,60	0,0136	3,95	0,0002
1,30	0,1714	2,65	0,0119	4,00	0,0001

3-жадвал

$\overline{\Phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dr$ функция қийматлари

x	$\overline{\Phi(x)}$	x	$\overline{\Phi(x)}$	x	$\overline{\Phi(x)}$
0,00	0,0000	0,95	0,3289	1,90	0,4713
0,01	0,0040	1,00	0,3413	2,00	0,4772
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,10	0,4821
0 10	0,0398	1,10	0,3643	2,20	0,4861
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,30	0,4893
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,40	0,4918
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,50	0,4938
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,60	0,4953
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,70	0,4965
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,80	0,4974
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,90	0,4981
0,50	0,19 5	1,50	0,4332	3,00	0,49865
0,55	0,2088	1,55	0,4394	3,20	0,49931
0,60	0,2257	1,60	0,4452	3,40	0,49966
0,65	0,2422	1,65	0,4505	3,60	0,499841
0,70	0,2580	1,70	0,4554	3,80	0,499927
0,75	0,2734	1,75	0,4599	4,00	0,499968
0,80	0,2881	1,80	0,4641	4,50	0,499997
0,85	0,3023	1 85	0,4678	5,00	0,500000
0,90	0,3159				

МУНДАРИЖА

XIII боб

Дифференциал тенгламалар

XX боб. **Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика элементлари**

XXI боб. **Матрицалар. Чизиқли дифференциал тенгламалар системасининг ва бу система ечимларининг матрицалар орқали ёзилиши**

На узбекском языке

НИКОЛАЙ СЕМЕНОВИЧ ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

том II

Предназначено для студентов высших технических учебных заведений

Перевод с русского 9-го издания
издательство „Наука“ М., 1970

Издательство „Ўқитувчи“
Ташкент—1974

Таржимонлар: *М. Камолов* (XIII, XVIII, XX, XXI боблар)
Ю. Узоқов (XIV—XVII боблар)
А. Исламов (XIX боб)

XX ва XXI бобларнинг махсус редактори *М. Мирзаҳмедов*

Редактор *М. Одилов*
Техредактор *Э. Вильданова*
Бадиий редактор *Е. И. Соин.*
Корректор *М. Раҳматуллаева*

Теришга берилди 24/XII-73 й Босишга рухсат этилди 11/XII-74 й Қоғози № 3. $60\times90^{1}/_{16}$
Физик л. 38,5. Нашр. л. 36,1. Тиражи 25000.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент Навоий кўчаси, 30. Шартнома 230-72. Баҳоси 1 с. 01 т.
Муқоваси 10 т.

Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари область бошқармасининг
Морозов номли босмахонаси. Самарқанд, Кузнецк кўчаси, 82. Зак. № 610. 1974.

Типография им. Морозова Областного Управления по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли. Самарканд. Кузнецкая, 82