ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Х.Н.ЖУМАЕВ, Б. ОТАНИЁЗОВ,
Л.П.ЮГАЙ, А.ЖАЛИЛОВ

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Дарслик

Ўзбекистон Ёзувчилар уюшмаси
Адабиёт жамғармаси нашриёти
Тошкент – 2005

Ушбу китоб математик программалаштириш бўйича ёзилган дарслик булиб, иқтисодиёт йўналишидаги ихтисосликларнинг ҳаракатдаги ўқув дастури асосида тайёрланган.

Дарсликда математик программалаштиришнинг асосий йўналишлари ва методлари баён этилган ҳамда улар тегишли мисол ва масалалар билан тулдирилган. Шунингдек, масалаларнинг иқтисодий талқини ва татбиқий жиҳатларига эътибор берилган.

Дарслик бакалавриат студентлари учун мулжалланган. Ундан магистратура ва аспирантура тингловчилари ҳамда амалий математики мутахассислари фойдаланишлари мумкин.

Настоящая книга является учебником по математическому программированию и написана на основе действующей учебный программы для студентов экономических специальностей вузов.

В учебнике изложены основные направления и методы математического программирования, приведены соответствующие примеры и задачи. Уделено большое внимание прикладному характеру и экономической интерпретации приведенных задач.

Учебник рассчитан для студентов бакалавриата. Им могут также пользоваться слушатели магистратуры, аспирантуры и специалисты по прикладной математики.

The original book is a mathematical programming textbook and is based on the current curriculum of the university students studying economics.

There are basic mathematical programming methods displayed in the textbook, appropriate examples and problems are set. A lot of attention is paid to the application charakter and economic interpretation of the given problems.

The textbook is designed for students studying for the bachelor degree.

It can be also used by graduate and postgraduate students and specialists on applied mathehematics.

Масъул муҳаррир:
Ш.Ш.ШОРАҲМЕТОВ, ф.-м.ф.д., профессор

Тақризчилар:
Н.Ю. САТИМОВ, ф.-м.ф.д., академик,
М. МИРВАЛИЕВ, ф.-м.ф.д., профессор.

Ўзбекистон Республикаси Олий ва урта махсус таълим вазирлиги
томонидан дарслик сифатида тавсия этилган

I БОБ

КИРИШ

1-§. Математик программалаштиришнинг мақсади ва вазифаси

Инсон фаолиятининг турли соҳаларида шундай ҳолатлар бўладики, мавжуд бўлган бир неча вариантлар ичидан бирини танлашга тўғри келади. Агар вариант ягона бўлса, шубҳасиз ўша танланади. Бироқ вариантлар кўп бўлса, уларнинг ихтиёрийси танланмайди, балки маълум маънода энг яхшиси, энг самаралисини танлаш мақсадга мувофиқ бўлади. Одатда бундай вариантлар оптимал деб аталади. Оптимал сўзи аслида лотинча бўлиб, энг яхши (мавжуд имкониятлар доирасида ундан яхшиси йўқ) энг маъқул, энг самарали каби маънони англатади.

Оптимал ечимни, оптимал вариантни тадқиқ этиш давр талабидир. Турли соҳаларда ресурслар миқдорининг чекланганлиги, имкониятлар кўлами чекли бўлганлиги туфайли, мавжуд ресурсларни сарфлашда энг оқилона вариант, яъни оптимал вариантни танлаш заруратга айланиб қолди. Масалан, аҳоли сонининг ўсиб бориши, шаҳар майдонининг кенгайиши, янги шаҳарлар ва аҳоли яшаш пунктларининг пайдо бўлиши мавжуд экинга яроқли ер майдонининг қисқаришига олиб келади. Ундан ташқари, ердан олинадиган маҳсулотларга бўлган талаб эса тўхтовсиз ўсиб боради. Бу муаммоларнинг барчаси ердан унумли, яъни оптимал фойдаланиш масаласини тадқиқ этишни тақозо этади.

Оптимал ечимни излаш масаласи кенг кўламли бўлиб, математикада аввало экстремал (максимал ёки минимал) масалалар деб аталувчи соҳани қамраб олади. Экстремумга (максимумга ёки минимумга) оид дастлабки тушунчалар ўқувчига мактаб математикаси курсидан яхши танишдир.

Экстремал масалаларнинг муҳимлигини унинг амалий (татбиқий) эканлиги билан асослаш кифоядир. Шу мақсадда, айтилган фикрнинг исботи сифатида иқтисодиётнинг турли соҳаларига оид бўлган баъзи масалаларни матнли кўринишда келтирайлик:

1.Ишлаб чиқариш жараёнини шундай ташкил этиш керакки, белгиланган ресурслар берилган миқдорда сарфланиб, энг катта фойда олишга эришилсин.

2.Ернинг маълум бир нуқтасидан космик фазонинг маълум орбитасига космик кема ёрдамида энг кам ёқилғи сарфлаб ўтилсин.

3.Ўзининг барқарор ҳолатидан бирор сабаб таъсирида чиқиб кетган системани дастлабки ҳолатига энг қисқа вақт ичида ўтказилсин.

Бундай масалаларни кўплаб келтириш мумкин. Бундан мақсад шуки, бу каби масалаларни ўрганиш зарур ва бу жараён махсус математик усулларни тақазо этади. У ҳақда курсимизда батафсил тўхталамиз. Умуман олганда, бундай масалалар математик нуқтаи назардан махсус функция ёки функционалларнинг экстремумини излаш масаласига келтирилади.

Шундай қилиб, математик программалаш тириш - амалиётда, яъни иқтисодиёт, техника, физика, инженерлик, ҳарбий соҳа каби йўналишлардаги турли жараёнларда экстремал масалаларни математик усуллар ва қурилмалар ёрдамида тадқиқ этиш билан шуғулланувчи фан бўлиб, у амалиёт билан назарияни боғлаб турувчи кўприк вазифасини ҳам ўтайди. Бу йўналишнинг куртаклари анча илгари пайдо бўлган бўлса ҳам у асосан 40-йилларда шаклланди, 50-йилларда эса гуркираб ўсди. Шу ўринда соҳа ривожига ўзининг салмоқли ҳиссасини қўшган, Нобель мукофоти совриндорлари рус олими Л.В.Канторович ва америкалик олим Г.Купмансни, шунингдек, Р.Беллман, Г.Кун, Л.С. Понтрягин, А.А. Милютин, А.Н. Дубовицкий каби ўнлаб, юзлаб олимлар номини келтириш жоиздир. Ўзбек математикларидан академик Н.Сатимов фан докторлари А.Аъзамов, А.Фозилов, Б.Рихсиевлар ҳам бу соҳага салмоқли ҳисса қўшганлар.

Мазкур дарслик авторларнинг «Операциялар тадқиқоти», «Оптималлаштириш усуллари», «Математик программалаштириш», «Иқтисодиётда математик усуллар ва моделлар» каби фанлардан узоқ йиллар давомида ўқиган маърузалари асосида ёзилган. Шу боис дарслик эслатилган фанларни ўрганишда қўл келди.

Шунингдек, бу дарсликдан татбиқий математикага оид курсларни ўрганишда ҳам самарали фойдаланиш мумкин.

Авторлар ушбу дарслик матнини компьютерда тайёрлашдаги хизматлари учун М.Сухов, Д.Маҳкамова ва Д.Абдурасуловага ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

2-§. Чизиқли функция, чизиқли тенгликлар ва тенгсизликлар системаси ҳақида

Математик программалаштириш курси олий математика элементлари, чизиқли алгебра ва геометриянинг кўплаб тасдиқ ва натижаларига таянади. Айниқса, чизиқли функция, чизиқли тенглик ва тенгсизликлар ҳамда уларнинг хоссаларидан кенг кўламда фойдаланилади. Шу туфайли уларнинг айрим хосса ва хусусиятларини эслатиб ўтиш ўринлидир.

Ушбу, $x_1, x_2, ..., x_n$ номаълумларга нисбатан чизиқли бўлган, яъни номаълумлар фақат ўзининг биринчи даражаси билан қатнашган

$$z=c_1x_1+c_2x_2+...c_nx_n$$

кўринишдаги функция чизиқли функция деб аталади. Бу ерда $c_1, c_2,...c_n$ - берилган ўзгармас, ҳақиқий сонлардир.

Шунингдек,

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=k$$

муносабат чизиқли тенглик,

$$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \leq k$$

муносабат эса чизиқли тенгсизлик деб аталади. Бу ерда *k*-тайин ўзгармас сон.

Қуйидаги тенгламалар системасини қарайлик:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \text{- - - - - - - - - - - - - -} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{gathered}$$

бу ерда a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ - ўзгармас сонлар. Алгебра курсида бу система қисман ўрганилган бўлиб, асосан, $n = m$ бўлган ҳолда системани ечишнинг турли усуллари қаралган. Гаусс-Жордан усули, детерминантлар усули шулар жумласидандир. Бироқ $m < n$ бўлганда, яъни тенгликлар сони номаълумлар сонидан кичик бўлган ҳол система ечимини излаш нуқтан назаридан қизиқиш уйғотмаган. Ҳолбуки, бу ҳолда системанинг ечими чексиз кўп бўлиб, улар орасидан маълум бир мақсадга мувофиқини танлаш имконияти туғилади. Системанинг бундай хусусиятлари мазкур курсда етарлича ўрганилади.

Шунингдек, қуйидаги тенгсизликлар системасини қарайлик:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2, \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m. \end{array} \qquad (2.1)$$

Бу ерда тенгсизлик ишораси аниқлик учун бир томонлама қилиб олинди, аслида эса улар турлича бўлиши мумкин. Умуман олганда (2.1) тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами: бўш тўплам, ягона нуқта, чегараланган соҳа ва чегараланмаган соҳадан иборат бўлиши мумкин. Бу тўпламлар одатда қавариқ бўлади.

Маълумки бирор X тўплам қавариқ дейилади, агар у ўзининг ихтиёрий икки нуқтаси билан бирга уларни туташтирувчи кесмани ҳам ўз ичига олса, яъни ихтиёрий $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ ва $0 \le \lambda \le 1$ учун $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2$ ҳам X га тегишли бўлса.

Қавариқ тўпламлар ва уларга оид натижалар хусусида курсимизда батафсил тўхталамиз. Бироқ бу ерда чизиқли функцияга хос бўлган тасдиқни келтириш жоиздир.

Қавариқ тўпламда қаралаётган чизиқли функция экстремумга фақат тўплам чегарасида эришиши мумкин.

Бу тасдиқнинг тўғрилиги қуйидаги масалада равшан кўринади.

Масала. $Z=2x_1+3x_2$ функциянинг

$$|x_1|+|x_2| \le 1$$

тенгсизлик билан аниқланадиган соҳадаги экстремумни топинг.

Бу ерда чизиқли функция қаралаётган соҳада чегараланган, демак Вейерштрасс теоремасига кўра экстремумга эришади. Дейлик, функция экстремумга соҳанинг ички (x_1^0, x_2^0) нуқтасида эришсин. У ҳолда Ферма теоремасига кўра шу нуқтада хусусий ҳосилалар нолга тенг бўлиши зарур. Бироқ:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 3.$$

Бундай зиддиятга сабаб, чизиқли функция соҳанинг ички нуқтасида экстремумга эришсин, деб қилинган фаразнинг нотўғрилигидир. Демак чизиқли функция экстремумга фақат соҳа чегарасида эришади.

3-§. Моделлар ҳақида.
Математик моделларга оид татбиқий мисоллар

Юқорида келтирилган чизиқли тенглик ва тенгсизликларнинг хоссаларини инобатга олиб, иқтисодиётнинг кўплаб масалалари уларга бевосита алоқадор эканлигини кўрамиз. Шу мақсадда математик модел тушунчасини ёритайлик.

Ўрганилаётган объектнинг асосий хоссалари ва характеристикаларини ўзида ифодаловчи махсус қурилган объектга модел дейилади.

Моделлаштириш деб эса, тадқиқ этилаётган объектнинг муҳим характеристикаларини ифодалаш, акслантириш жараёнига айтилади.

Одатда, моделлар турлича бўлади: физик моделлар, электрон моделлар, мантиқий моделлар, абстракт моделлар, математик моделлар ва б.

Тадқиқ этилаётган объектнинг асосий характеристикаларини математик ифодалар ва муносабатлар орқали ифодаловчи моделга математик модел деб аталади. Бу модел тадқиқот учун барча моделлардан қулай бўлиб, у ортиқча харажат ва қурилмалар талаб этмайди. Ундан ташқари моделаштириш жараёнида моделни янада такомиллаштириш, мукаммаллаштириш имконияти мавжуддир.

Қуйида иқтисодий - математик моделлар туркумига кирувчи ва реал ҳолатларни ифодаловчи моделларга мисоллар келтирамиз. Моделларни иқтисодий деб аташимизга сабаб, буларда асосий кўрсаткичнинг нархдан иборат эканлигидир.

1. Диета (парҳез таом) ҳақидаги масала. Таркибида маълум сондаги (масалан, n та) тўйимли моддалар (витаминлар, оқсил, крахмал ва б.) белгиланган миқдордан кам бўлмаган пархез таом тайёрлаш лозим бўлсин. Бу моддалар харид қилиниши лозим бўлган маълум бир сондаги (масалан, m та) хомашёлар таркибида турли пропорцияларда учрайди. Маҳсулотларни қандай миқдорда харид қилиш керакки, сўралган таом тайёрлансин ва унинг таннархи энг арзон бўлсин.

Бу иқтисодиёт масаласининг матнли баёнидир. Унинг математик моделини тузайлик. Шу мақсадда, $x_i, i = \overline{1,m},$ орқали харид қилиниши лозим бўлган i-маҳсулот миқдорини; $b_j,\ j = \overline{1,n}$, орқали эса талаб этилаётган j-модданинг зарурий миқдорини белгилайлик. У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

- миқдор харид қилинадиган барча маҳсулот таркибидаги j-зарурий модда миқдорини ифодалайди. Масала шартига кўра

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge b_j, j=\overline{1,n}, \tag{3.1}$$

муносабат ўринли бўлишиш лозим. Шунингдек, харид қилинадиган маҳсулотлар миқдори учун ушбу

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ... x_n \ge 0 \tag{3.2}$$

тенгсизликлар ўринлидир. Агар маҳсулотларнинг бирлик нархларини мос равишда $c_1, c_2, ... c_m$ орқали белгиласак,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \tag{3.3}$$

миқдор барча маҳсулотларнинг жами нархини ифодалайди ва унинг минимал қийматини излаш талаб этилади.

Шундай қилиб, масаланинг математик модели (3.1) ва (3.2) тенгсизликларни қаноатлантирувчи ҳамда (3.3) чизиқли функцияга минимал қиймат берувчи $x_1, x_2, ..., x_m$ миқдорларни аниқлашдан иборатдир.

2. Ишлаб чиқариш масаласи. Дейлик, корхонада турли маҳсулотлар ишлаб чиқарилсин ва маҳсулотнинг ҳар бир тури турли технология асосида ишлаб чиқарилиши мумкин бўлсин. Ҳар бир маҳсулотни ишлаб чиқариш эса миқдори чегараланган турли ресурслар сарфига боғлиқдир. Тайёр маҳсулот ишлаб чиқариш технологияга боғлиқ равишда нархга эга бўлади. Ишлаб чиқаришни қандай ташкил этиш кераккки, корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг жами нархи максимал бўлсин.

Масаланинг математик моделини тузиш мақсадида қуйидагича белгилашлар киритамиз: $x_{ij} - j$ технология билан ишлаб чиқаришга мўлжаланган i-маҳсулот миқдори бўлсин, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$; a_{ijk} -бирлик i-маҳсулотни j-технология билан ишлаб чиқариш учун сарфланган k-ресурс миқдори бўлсин, $k=\overline{1,l}$, C_{ij}-j технология билан ишлаб чиқарилган бирлик i-маҳсулотнинг нархи, b_k эса k-ресурсни чегараловчи сон бўлсин.

У ҳолда масала шартлари математик муносабатлар ёрдамида қуйидагича ифодаланади:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk}x_{ij} \le b_k, k=\overline{1,l} \tag{3.4}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,n};\quad j = \overline{1,m}. \qquad (3.5)$$

Барча технологик усуллар билан ишлаб чиқарилган жами маҳсулот нархи эса

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \qquad (3.6)$$

миқдордан иборат бўлади.

Шундай қилиб, масала (3.4) ва (3.5) шартларни қаноатлантирувчи x_{ij}, $i = \overline{1,n}$, миқдорлар ичидан (3.6) чизиқли функцияга максимал қиймат берувчиларини топишидан иборат бўлади.

3. Экин майдонларидан унумли фойдаланиш масаласи. Дейлик, маълум бир сондаги қишлоқ хўжалиги экинлари, маълум сондаги экин майдонларига экишга мўлжалланган бўлсин. Бу ер майдончалари, жойлашуви ва тупроғи таркибига қараб фарқланади. Ҳар бир майдончага мўлжалдаги экинлардан бир ёки бир нечтаси экилиши мумкин. Экиш режасини қандай тузиш керакки, етиштирилган ҳосил маҳсулотларини сотишдан олинадиган фойда энг катта бўлсин.

Масаланинг математик моделини тузиш мақсадида экин турларини $Q_1,Q_2,...,Q_n$ экин майдончаларини эса $S_1,S_2,...S_m$ каби белгилайлик. Дейлик, Q_j, $j = \overline{1,n}$, экин турини S_i, $i = \overline{1,m}$ экин майдонига экишидан олинган ҳосилдорлик миқдори гектаридан a_{ij} центнерни ташкил этиб, S_i экин майдони a_i гектардан иборат бўлсин. Шунингдек, ҳар бир Q_j экиндан етиштириладиган ҳосил миқдори b_j ва унинг харид нархи c_j маълум бўлсин. Агар x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, i-майдондаги Q_j экин экилган майдонча юзаси бўлса, масала шартига кўра қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \ge b_j\,,\ \ j = \overline{1,n}\,, \qquad (3.7)$$

яъни ҳосил миқдори белгиланган миқдордан кам бўлмасин;

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,,\ \ i = \overline{1,m}\,, \qquad (3.8)$$

яъни экин майдончалари йиғиндиси белгиланган гектарни ташкил этсин;

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij}\right) \to \text{максимал}, \qquad (3.9)$$

яъни жами фойда максимал бўлсин. Бу ерда ҳам масаланинг математик модели (3.7), (3.8), (3,9) муносабатлардан иборат бўлади.

4. Транспорт масаласи. Дейлик, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ лар орқали ишлаб чиқариш пунктлари белгиланган бўлиб (уларни таъминотчилар деб атаймиз) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ лар орқали эса истеъмолчилар манзилларини белгилайлик. A_i -таъминотчи a_i бирлик маҳсулот ишлаб чиқарсин ва B_j истеъмолчига b_j бирлик маҳсулот зарур бўлсин. Ундан ташқари, барча ишлаб чақарилган маҳсулотлар миқдори, истеъмолчилар талаб қилган маҳсулотлар миқдорига тенг бўлсин, яъни:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Ишлаб чиқарилган маҳсулотларни истеъмолчиларга етказиш транспорт харажатларига боғлиқ. A_i таъминотчи B_j истеъмолчига етказиб берган x_{ij} , $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, маҳсулотнинг бирлик миқдорини ташиш харажати c_{ij} бўлсин. Маҳсулотларнинг шундай x_{ij} миқдорини аниқлаш керакки, натижада: таъминотчиларнинг барча маҳсулоти ташиб кетилади, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \tag{3.10}$$

барча истеъмолчилар талаби қондирилади, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \tag{3.11}$$

жами транспорт харажати минимал бўлади, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{3.12}$$

Юқоридаги (3.10)-(3.12) масала транспорт масаласи номини олган бўлиб, курсимизда етарлича ўрганилади.

5. Ресурсларни оптимал тақсимлаш масаласи. Дейлик, n та технологик жараён қаралаётган бўлиб, уларга заҳира миқдори c га тенг бўлган хомашё сарфлансин. i-жараёнга x_i хомашёнинг ажратилиши $f_i(x_i)$, бирлик фойда келтирсин. Бу ерда $f_i(x)$ маълум функция. Хомашё заҳирасини технологик жараёнларга қандай миқдорларда тақсимлаш керакки, барча хомашё сарфлансин, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c , \; x_i \geq 0 , \tag{3.13}$$

жами фойда максимал бўлсин, яъни

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max \qquad (3.14)$$

Олинган (3.13), (3,14) ифодалар масаланинг математик моделини ифодалайди.

Бу масала ҳам тегишли бобда батафсил ўрганилади.

6. Максимал ҳажмли идиш ясаш масаласи. Турли маҳсулотларни ташиш учун турли сиғимли ва ҳар хил шаклга эга бўлган идишлар керак бўлади. Айниқса нефт ва газ маҳсулотларини сақлаш ва ташиш учун ҳар қандай формадаги идиш ҳам талабга жавоб беравермайди. Идиш деворларини қалинлаштириш эса иқтисодий самара бермайди. Демакки. ҳақли равишда қуйидаги масала пайдо бўлади:

Берилган S юзали металл сатҳдан босимга чидамли ва транспортда ташишга қулай, максимал ҳажмли идиш ясалсин.

Масалани механик нуқтаи-назардан таҳлил қилиб, идишнинг цилиндр шаклида бўлиши лозимлигини аниқлаш мумкин. Бу эса масалани қуйидагича ифодалашга имкон беради: сатҳи S бўлган, максимал ҳажмли цилиндрнинг асосий параметрлари аниқлансин.

Цилиндр баландлигини x_1, асос айланаси радиусини x_2 деб белгиласак, масала шарти қуйидагича ифодаланади:

$$2\pi x_2 (x_2 + x_1) = S , \qquad (3.15)$$

$$\pi x_1 \cdot x_2^2 \to \max . \qquad (3.16)$$

(3.15), (3.16) муносабатлар экстремал масалани ифодалайди.

Биз юқорида математик программалаштириш предметининг моҳиятини очиш мақсадида баъзи элементар математик моделлардан намуналар келтирдик. Аслида, моделлаштириш, моделнинг қаралаётган жараённи қанчалик аниқ акслантириши алоҳида муаммо бўлиб, у алоҳида ўрганишга моликдир.

4-§. Предметнинг таркиби ва махсусликлари

Умуман олганда математик программалаштириш предметида иккита йўналиш бўлиб, улардан бири аниқланадиган (детерминланган) масалалар туркумини ўз ичига олса, иккинчиси стохастик, яъни ноаниқлик элементларини ўз ичига олувчи масалалар туркумидан иборатдир.

Аниқланадиган масалалар туркумида барча зарурий катталиклар аниқ қиймат қабул қилади ва уни бир қийматли аниқлаш мумкин. Стохастик масалаларда эса асосий катталиклар ёки уларнинг баъзилари ноаниқ бўлиб, тасодифий (маълум эҳтимолли) характерга эга бўлади.

Мазкур курсда асосан аниқланаладиган масалалар туркуми қаралади.

Курснинг таркибига чизиқли программалаштириш ҳамда унинг таркибига кирувчи транспорт масаласи, бутун сонли программалаштириш; чизиқсиз программалаштириш ва унинг қавариқ программалаштириш бўлими, динамик программалаштириш, ўйинлар назарияси элементлари каби бўлимлар киради.

Математик дастурлашнинг махсусликларидан бири шундан иборатки, унинг таркибига кирувчи масалаларни классик усуллардан фойдаланиб ҳал этиб бўлмайди. Ҳатто содда деб ҳисобланувчи чизиқли функция ҳам экстремумга барча чеклашларни қаноатлантирувчи тўпламнинг четки нуқталарида эришади. У нуқталарда эса функция дифференциалланувчанлик хусусиятини йўқотади.

Чизиқсиз программалаштириш бўлимида эса Лагранжнинг кўпайтувчилар усули чеклашлар тенгсизлик тарзида бўлган ҳол учун ҳам баён этилади. Ҳолбуки классик анализда бу усул фақат тенглик тарзидаги чеклашлар учунгина баён этилган.

Ундан ташқари амалий масалаларда номаълум ўзгарувчилар сони ва чеклашлар сони кўпайган сари экстремалликка даъвогар нуқталар бениҳоя кўпая боради. Ҳолбуки ҳатто энг замонавий ЭҲМ ҳам барча нуқталарни текшириш имкониятига эга эмас. Шу сабабдан, математик программалаштириш предметининг асосий вазифаларидан яна бири самарали аналитик усулларни топишдан иборатдир.

Асосий белгилашлар. Белгилашлар ҳар бир боб учун алоҳида бўлиб, биринчи рақам параграф номерини, иккинчи рақам эса, теорема, таъриф ёки формула номерини англатади. Асосий символлар қуйидагича белгиланади:

R^n - n ўлчовли Евклид фазоси;

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ - n ўлчовли вектор-устун;

$x^1=(x_1,x_2,...x_n)$- n ўлчовли вектор-сатр;

$x \in R$ - x нинг R га тегишли эканлигини англатади;

$x \notin R$ - x нинг R га тегишли эмаслигини англатади;

$R \cap S$ - R ва S тўпламлар кесишмаси;

$R \cup S$ - R ва S тўпламлар бирлашмаси;

$\varnothing$ - бўш тўплам;

$\partial G - G$ тўпламнинг чегараси;

$intR=R \setminus (\partial G)$-$R$ тўпламнинг ички қисми;

$x^1 y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - x ва y векторларнинг скаляр кўпайтмаси;

$A=[a_{ij}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ - $m \times n$ ўлчовли матрица;

$A^1=[a_{ji}]$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ - $n \times m$ ўлчовли, A ни транспонирлаш йўли билан ҳосил қилинган матрица;

A^{-1} - A матрицага тескари матрица;

detA - квадрат A матрицанинг детерминати;

grad φ (x) - φ (x) функция градиенти, яъни $\text{grad}\,\varphi(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

I бобга оид машқлар

Қуйидаги масалаларнинг математик моделларини тузинг:

1. Цех икки турдаги маҳсулот, дейлик, столлар ва стуллар ишлаб чиқарсин. Битта стол ишлаб чиқариш учун ишчи 3 соат, битта стул учун эса 2 соат вақт сарфлайди. Корхона 1 та столни сотишдан 8 минг сўм, 1 та стулни сотишдан эса 6 минг сўм фойда кўради. Цех камида 100 та стол ва 200 та стул ясаш мажбуриятини олган. Агар ажратилган ишчи соати 900 га тенг бўлса, энг катта фойда олиш учун қолган вақтда нечта стол ва стул ишлаб чиқариш керак?

2. A_1, A_2, A_3, A_4 турдаги маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 2 хил хомашёдан фойдаланилади. Ишлаб чиқариш даврига 1 турдаги хомашёдан 92 бирлик, 2 турдаги хомашёдан 88 бирлик ажратилган. Бирлик миқдорда A_1, A_2, A_3, A_4 маҳсулот ишлаб чиқариш учун 1-хомашёдан

мос равишда 1,2,1 ва 3 бирлик, 2-хомашёдан эса 4,3,1 ва 2 бирлик сарфланади. A_1, A_2, A_3, A_4 турдаги бирлик маҳсулотларни сотишдан мос равишда 4 минг сўм, 5 минг сўм, 10 минг сўм ва 5 минг сўм фойда олинади. Максимал фойда олиш учун ишлаб чиқариш қандай режалаштирилиши керак?

3. Хўжаликда 850 га экинга яроқли ер бўлиб, унга ишлов бериш учун 15000 т органик ўғит ва 50000 ишчи куни ажратилган. Ресурслар сарфи ва ҳосил миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган

Кўрсаткич	Экин		
	картошка	карам	беда
Меҳнат сарфи, ишчи-кун	50	30	10
органик ўғит сарфи (т)	20	15	10
ҳосил миқдори (минг сўм)	1000	800	200

1) ҳосилни (пул ҳисобида) максимал бўлишини таъминлайдиган экиш режасини тузинг;

2) бедага ажратилган ер майдони 100 га дан кам бўлмаган ҳолда экинларни оптимал экиш режасини топинг.

4. Қорамолларни боқишда суткалик оптимал рацион миқдорини топинг. Зарурий моддалар ва уларнинг миқдорлари қуйидаги жадвалда берилган:

Озиқавий моддалар (шартли бирликда)	Бирлик емдаги тўйимли модда (турига қараб)		Суткалик минимал норма
	I тур	II тур	
Ем бирликлари	1	0,5	5
Озиқавий протеин	80	200	560
Кальций	1	8	20
1 бирлик ем нархи (сўм)	30	50	

5. A_1, A_2, A_3 пунктларда миқдори $a_1=90$, $a_2=30$, $a_3=50$ тонна бўлган цемент бор. Бу юкларни талаб миқдори $b_1=40$, $b_2=60$, $b_3=70$ тонна бўлган B_1, B_2, B_3 қурилиш майдонларига ташиб келиш керак. Юкни ташиш тарифлари қуйидаги жадвалда берилган.

b_j a_i	40	60	70
90	5	4	5
30	6	2	3
50	4	5	8

Юк ташишни шундай ташкил этиш керакки; барча юк ташиб кетилсин; барча талаб қондирилсин; жами ташиш харажатлари минимал бўлсин.

6. A_i, $i = \overline{1,4}$ пунктлардан 100, 400, 100, 100 бирлик юкларни талаб миқдори мос равишда 50, 100, 150, 200 ва 225 бирлик бўлган B_j, $j = 1,5$ пунктларга ташиш масаласи қаралаётган бўлсин. Юкларни ташиш тарифлари қуйидаги жадвалда келтирилган

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	6	8	12	16
A_2	16	10	8	6	15
A_3	4	1	9	11	13
A_4	3	2	7	7	15

Умумий ташиш нархи энг кам бўлган ташиш режаси тузилсин.

7. Беш йилга мўлжаллаб ажратилган 1 млн. сўм пулга бир хил, ҳар бири 100000 сўм бўлган ускуна сотиб олиб, ишлаб чиқаришни ташкил этиш талаб этилади. Ҳар бир дастгоҳ корхонага йилига 40000 сўм фойда келтиради. Ҳар йили тушган фойдани бир қисмини яна ишлаб чиқаришни кенгайтириш мақсадида қўшимча ускуна олишга ишлатиш мумкин. Корхонани шундай кенгайтириш керакки, беш йилда олинган жами фойда максимал бўлсин.

8. Дейлик, 5 та технологик жараён бўлиб, уларга заҳира миқдори 1000 бирлик бўлган хомашё сарфлансин. i-жараёнга x_i хомашё ажратилиши $2x_i$ фойда келтирсин. Хомашёни шундай тақсимлаш керакки, барча хомашё сарфлансин ва якуний фойда максимал бўлсин.

9. Нефт маҳсулотларини ташиш учун ҳажми 62 т бўлган цилиндрик идишлар зарур бўлади. Идишнинг параметрлари қандай бўлганда уни ясашга энг кам металл лист ишлатилади.

10. Газни сақлаш ва ташишни ташкил этиш махсус идишни талаб этади. Дейлик, сиғими 1000м^3 бўлган идишни доимий жойда сақлаш тавсия этилади. У идишнинг ўлчамлари қандай бўлганда уни ясашга кетадиган қимматбаҳо махсус металл листларга ажратиладиган харажат минимал бўлади?

11. Бурғулаш ускунаси тўғри йўлдан 9 км.масофада жойлашган. Тўғри йўл бўйлаб кетганда тўғри йўлнинг бурғулаш ускунаси тўғрисидаги нуқтасидан энг яқин аҳоли яшаш пунктигача бўлган масофа 15 км. Зудлик билан пунктга бориш зарур бўлиб қолди. Агар велосипед-

чининг тўғри йўлгача тезлиги 8 км/соат, тўғри йўл бўйлаб 10 км/соат бўлса, энг қисқа вақтда бориш учун қандай йўлни танлаш керак?

12. Кўлдаги қайиқ тўғри чизиқли қирғоқдан 3 км. масофада жойлашган. Йўловчи қирғоқ бўйлаб рўпарадаги нуқтадан 5 км узоқда бўлган қишлоққа боришга шошилмоқда. Агар йўловчи қайиқда 4 км/соат, қуруқликда 5 км/соат тезликда йўл босса, қишлоққа энг қисқа вақт ичида бориши учун қандай йўлни танлаши керак?

II БОБ

ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Чизиқли программалаштириш деб математик программалаштиришнинг чизиқли функцияни чизиқли тенгликлар ёки тенгсизликлар билан аниқланадиган соҳадаги экстремумини излаш билан шуғулланадиган бўлимига айтилади. Чизиқли программмалаштиришнинг дастабки масалалари 30-йилларда Л.В.Канторович томонидан қўйилган ва ўрганилган бўлиб, 40-йилларда америкалик олимлар Ж.Данциг, Г.Купманс кабилар томонидан ривожлантирилиб, алоҳида йўналиш даражасига олиб чиқилган. Бу соҳа амалиётда, айниқса, иқтисодиётда қўлланилиши жиҳати билан алоҳида ажралиб туради. Шу ўринда иқтисодиётнинг қатор амалий масалаларини чизиқли программалаштириш масалалари ёрдамида ҳал этганларини муносиб тақдирлаб, 1975 й. Швеция академиясининг қарори билан рус олими Л.В. Канторович ва америкалик Г.Купмансга Халқаро Нобель мукофоти берилганлигини эслатиш жоиздир.

1-§. Чизиқли программалаштириш масаласининг қўйилиши ва унинг турли формалари. Асосий таърифлар ва тушунчалар

Чизиқли программалаштириш масаласининг аналитик ифодаси, ушбу

$$z=c_1x_2+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \qquad (1.1)$$

чизиқли функцияни, қуйидаги

$$\begin{aligned} &a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pn}x_n\leq b_p,\ p=\overline{1,k}\,, \\ &a_{q1}x_1+a_{q2}x_2+\ldots+a_{qn}x_n=b_q,\ q=\overline{k+1,l}\,, \end{aligned} \qquad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &a_{e1}x_1+a_{e2}x_2+\ldots+a_{en}x_n\geq b_e,\ \ e=\overline{l+1,m}\,, \\ &x_1\geq 0, x_2\geq 0,\ldots, x_r\geq 0,\ \ r\leq n, \end{aligned} \qquad (1.3)$$

тенглик ва тенгсизликлар билан аниқланадиган тўпламдаги экстремумини топишдан иборат.

Чизиқли программалаштириш масаласининг нормал, симметрик ёки стандарт кўриниши деб унинг қуйидаги кўринишига айтилади:

$$\begin{array}{c} c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max \\ \hline a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1\ , \end{array} \qquad (1.4)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2\,, \tag{1.5}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\underline{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m}\,, \tag{1.6}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\,.$$

Бу ерда «$\to$ max » белгиси мазкур чизиқли функциянинг максимум қиймати изланётганлигини билдиради.

Шунингдек, чизиқли программалаштириш масаласининг ушбу

$$\underline{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max}\,, \tag{1.7}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\,, \tag{1.8}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\underline{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}\,, \tag{1.9}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

кўринишига унинг каноник кўриниши дейилади.

Агар масала умумий (1.1)-(1.3) кўринишда ифодаланган бўлса, алгебраик амаллар ва алмаштиришлар ёрдамида уни нормал ёки каноник кўринишга келтириш мумкин. Ҳақиқатан, умумий масаладаги бирор

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

тенгсизликни, янги $x_{n+i} \ge 0$ ўзгарувчи қўшиш ёрдамида, ушбу

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

тенглик шаклига келтириш мумкин. Натижада масаланинг формаси керакли тарзга келтирилади, бироқ масаладаги номаълумлар сони мос равишда ортади.

Шунингдек, (1.3) да x_i ўзгарувчилардан бирортасига манфиймаслик шарти қўйилмаган бўлса (масалан, x_k ўзгарувчига), у

$$x_k = x^1_k - x^2_k,\ x_k^1 \ge 0, x_k^2 \ge 0\,,$$

кўринишда ифодаланади. Натижада, барча ўзгарувчилар учун манфиймаслик шартига эга бўламиз. Бироқ, бу ҳолда ҳам масаланинг ўлчами катталашади, яъни ундаги номаълумлар сони ортади.

Юқоридаги мулоҳазалардан келиб чиқадики, масалани нормал ёки каноник ҳолда тадқиқ этиш мумкин ва олинган натижа умумий масала учун ҳам мос хулоса чиқаришга имкон беради. Шунингдек, қулайлик туғдириш мақсадида масалани вектор-матрицали кўринишда ёзиб оламиз. Агар

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}a_{12}\dots a_{2n}\\a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}\end{pmatrix}$$

каби белгилашлар киритсак, нормал масала ушбу

$$c^1x\to\max \tag{1.10}$$

$$Ax\le b\,, \tag{1.11}$$

$$x\ge 0 \tag{1.12}$$

кўринишда, каноник масала эса

$$c^1x\to\max \tag{1.13}$$

$$Ax=b\,, \tag{1.14}$$

$$x\ge 0 \tag{1.15}$$

кўринишда ифодаланади. Масаланинг бундай формаларда ифодаланиши назарий тадқиқотлар учун қулайлик туғдиради.

Чизиқли программалаштиришга оид бўлган асосий тушунчалар ва таърифларни каноник масала учун келтирамиз. Бироқ бу тушунчалар барча кўринишдаги чизиқли программалаштириш масалаларига ҳам тегишлидир.

Масаладаги (1.14) чеклашлар асосий чеклашлар, (1.15) чеклашлар эга бевосита (тўғри) чеклашлар деб аталади. Шунингдек, c^1x функцияни мақсад функцияси деб, *c* векторни-нарх вектори, *b* векторни - чеклаш вектори, А-матрицани -шарт матрицаси деб юритишади. Шарт матрицаси

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

каби ифодаланиб,

$$a_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{ml}\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\dots,a_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

векторларга шарт векторлари дейилади.

1-таъриф. Масаланинг асосий ва бевосита чеклашларини қаноатлантирувчи ҳар бир n-вектор *x* масаланинг режаси деб аталади.

2-таъриф. Масаланинг ечими бўлган режа, яъни

$$c'x^0=\max c'x,\ Ax^0=b,\ x^0\geq 0$$

шартни қаноатлантирувчи x^0 режа оптимал режа деб аталади.

3-таъриф. Агар бирор *x* режанинг n-m та компонентлари нолга тенг бўлиб, қолганларига мос келувчи шарт векторлари чизиқли эркли бўлса, бундай режа базис режа деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, масалан, n=5, m=3 бўлган масалада $X^0=(x_1,x_2,0,x_4,0)$ режа бўлиб x_1,x_2,x_4 ўзгарувчиларга мос бўлган a^1,a^2 ва a^4 шарт векторлари чизиқли эркли бўлса, *x* режа базис режа ҳам бўлади. Одатда бундай x_1,x_2,x_4 ўзгарувчиларга базис ўзгарувчилар дейилади.

4-таъриф. Агар базис режанинг барча базис ўзгарувчилари аниқ мусбат бўлса, бундай режага бузилмаган базис режа деб аталади.

Юқоридаги таърифларни ойдинлаштириш мақсадида қуйидаги масалани қараймиз.

Масала.

$$\begin{array}{c}
6x_1+x_2+4x_3-5x_4\to\max \\
\hline
3x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\
5x_1+x_2+x_3-x_4=4, \\
\hline
x_i\geq 0, i=1,4.
\end{array}$$

Бу масалада $X^0=(1,0,0,1)$ бузилмаган базис режа бўлади, чунки n-m=4-2=2 ва иккита компонента нолга тенг, ҳамда $x^0_1=1$, $x^0_4=1$ га мос келувчи

$$a_1=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \text{ ва } a_4=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

векторлар чизиқли эркли, яъни улардан бирини иккинчиси орқали ифодалаб бўлмайди. Ундан ташқари x^0_1 ва x^0_4 лар аниқ мусбат, демак, a_1, a_4 - векторлар базисни ташкил этади, ҳамда (1;0;0;1)-бузилмаган базис режа бўлади.

Қаралаётган масала учун $X_1=(0,4,0,0)$ ҳам базис режа бўлади, чунки $a_1^0=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, a_2^0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ вектор чизиқли эркли, бироқ базисга мос ўзгарувчи $x^1_1=0$ бўлганлиги туфайли X_1 бузилмаган базис режа бўла олмайди.

2-§. Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқини. Масалани график усулда ечиш

Аниқлик учун чизиқли программалаштириш масаласининг нормал формасини қарайлик. Масала шартларини реал фазода ихтиёрий n ва m учун геометрик талқин қилиб бўлмайди. Бироқ $n \le 3$, m-ихтиёрий, ёки n ва m лар $n - m \le 3$ шартни қаноатлантирса, масалани геометрик усулда ифодалаш, агар ечим мавжуд бўлса, уни топиш ҳам мумкин бўлади.

Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида, n=2, m-ихтиёрий бўлган ҳолни қарайлик. Нормал масала бу ҳолда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\underline{c_1x_1 + c_2x_2 \to \max}, \qquad (2.1)$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ \underline{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_{m,}} \end{array} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (2.3)$$

Юқоридаги (2.2) ва (2.3) тенгсизликлардан ҳар бири $x_1 0 x_2$ текислигида мос яримтекисликларни ифодалайди. Уларни аниқлаш учун дастлаб, яримтекисликларни чегараловчи тўғри чизиқларни қуриб олиш лозим бўлади. Масалан, аниқлик учун

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k, 1 \le k \le m \qquad (2.4)$$

тенгсизлик қаралаётган бўлсин. Унинг чегараси

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k, 1 \le k \le m, \qquad (2.5)$$

тўғри чизиқдан иборат бўлиб, у текисликни иккита ярим текисликларга ажратади. Тенгсизликнинг ечими қайси ярим текислик эканлигини аниқлаш мақсадида, текисликнинг (2.5) тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий нуқтасида (2.4) тенгсизликни текширамиз. Агар нуқта тенгсизликни қаноатлантирса, тенгсизликнинг ечими шу нуқта ётган ярим текислик, қаноатлантирмаса, шу нуқта ётмаган ярим текислик бўлади. Бу чизиқли тенгсизликка хос хусусиятдир.

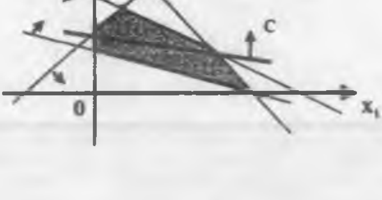
Шу усул билан барча тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини аниқлаб оламиз. Бу тўплам масаланинг режалари тўплами бўлиб, у бўш тўплам, ягона нуқта, чегараланган қавариқ кўпбурчак ва чегараланмаган соҳалардан иборат бўлиши мумкин. Аниқлик учун, режалар тўплами қавариқ кўпбурчакдан иборат бўлган ҳолни қарайлик. (2.1) чизиқли функцияни максимумга текшириш учун уни бирор ўзгармас сон p га тенглаштириб,

$$c_1x_1 + c_2x_2 = p \tag{2.6}$$

чизиқни x_10x_2 текислигида қуриб оламиз. Сўнгра уни режалар тўпламида қараймиз ва чизиқли функцияни режалар тўплами узра

$$grad c'x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

градиент вектор йўналиши бўйлаб параллел силжитамиз. Тўғри чизиқнинг шу йўналишда режалар тўплами билан ҳосил қилган таянч нуқтаси мақсад функцияга максимал қиймат берувчи нуқта бўлади (1-чизма).



1-чизма

1-изоҳ. Агар мақсад функциянинг c вектор йўналиши бўйлаб параллел қанча силжитганда ҳам унинг режалар тўплами билан умумий нуқталари қолаверса, мақсад функция режалар тўпламида чегараланмаган бўлади, яъни масала ечимга эга бўлмайди (2-чизма).

2-чизма

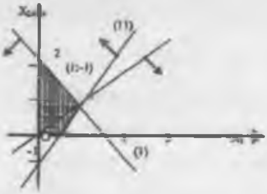
2-изоҳ. Агар мақсад функция минимумга текширилаётган бўлса, (2.6) тўғри чизиқ (2.7) градиентга қарама-қарши йўналишда параллел силжитилади ва натижада, мос таянч нуқта изланаётган ечим бўлади.

Мисол. қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг

$$\frac{x_1 - x_2 \to extr}{x_1 + x_2 \le 2,} \quad (I)$$

$$\frac{2x_1 - x_2 \le 1,}{x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.} \quad (II)$$

Юқорида баён қилинган усуллар ёрдамида барча жоиз режалар тўпламини аниқлаймиз. Бу тўплам (I) ва (II) ярим текисликлар кесишмасининг биринчи чоракда ётган қисмидан иборат бўлади (3-чизма, штрихланган тўртбурчак). Сўнгра, аниқлик учун x_1-x_2=0 тўғри чизиқни қуриб оламиз ва унинг градиенти $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ни аниқлаймиз. Равшанки, тўғри чизиқни градиент бўйлаб параллел силжитсак, мақсад функцияга максимум қиймат берувчи (0,5;0) нуқтани, қарама-қарши йўналишда силжитсак эса минимум қиймат берувчи (0,2) нуқтани топишга эришамиз (3-чизма). Натижада $(c'x)_{max}$=0,5, $(c'x)_{min}$=-2 бўлади.



3-чизма

Энди $n - m \le 3$ бўлган ҳолни қарайлик. Дейлик, аниқлик учун чизиқли программалаштиришнинг каноник масаласи яъни (2.7)-(2.9) масала берилган бўлсин. Агар n-m=3 бўлса, масалани ечиш муаммоси уч ўлчовли фазога кўчирилади. Бу фазода чизмаларни бажариш мураккаб эканлигини инобатга олиб, n-m=2 бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда n та ўзгарувчилардан n-2 тасини қолган иккитаси орқали ифодалаб оламиз. Дейлик, (2.8) муносабатлардан $x_3,x_4,...,x_n$ ўзгарувчилар x_1 ва x_2 орқали ифодаланган бўлсин:

$$\begin{array}{l} x_3 = e_{31}x_1 + e_{32}x_2, \\ x_4 = e_{41}x_1 + e_{42}x_2, \\ \text{- - - - - - - -} \\ x_n = e_{n,1}x_1 + e_{n,2}x_2. \end{array} \qquad (2.8)$$

У ҳолда, (1.9) шартларга кўра

$$\begin{array}{l} e_{31}x_1 + e_{32}x_2 \geq 0, \\ e_{41}x_1 + e_{42}x_2 \geq 0, \\ \text{- - - - - - - - -} \\ e_{n,1}x_1 + e_{n,2}x_2 \geq 0, \end{array} \qquad (2.9)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \qquad (2.10)$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Шунингдек, (2.8)ни мақсад функцияга қўйиб, фақат x_1 ва x_2 га боғлиқ бўлган

$$c_1^* x_1 + c_2^* x_2 \to \max \qquad (2.11)$$

муносабатга эга бўламиз. Ҳосил бўлган (2.11), (2.9), (2.10) масала эса юқорида баён этилган n=2, m- ихтиёрий бўлган ҳол сингари ҳал этилади ва натижада, агар ечим мавжуд бўлса, мос (x^0_1,x^0_2) экстремал нуқта топилади. Сўнгра (2.8) дан оптимал режани, яъни (x^0_1,x^0_2,...,x^0_n) ни топишга эришилади.

Изоҳ . Масалани ечиш жараёнида берилган тенглик ва тенгсизликларни имкон борича ихчамлаш, ўзгарувчилардан қулайларини эркин ўзгарувчи сифатида танлаш яхши самара беради.

Мисол . қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ \underline{-2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1,} \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4. \end{array}$$

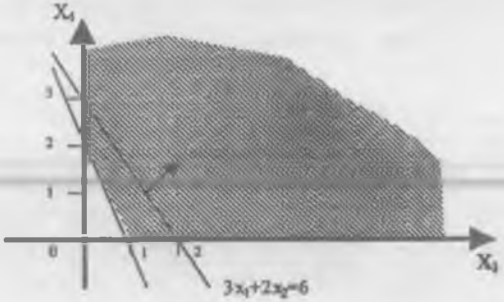
Дастлаб, асосий тенгликларни қўшиб, x^0_2=1 ни аниқлаб оламиз ва иккита тенглик ўрнига битта

$2x_1$-x_3+x_4=2

тенгликка эга бўламиз. Бундан, $x_3 \geq 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, ҳамда x^0_2=1, x_3=$2x_1$+x_4-2 ни текширилаётган мақсад функцияга қўйиб, x_1 ва x_4 ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган қуйидаги масалага келамиз:

$$\underline{3x_1 + 2x_4 \to \min}$$
$$\underline{2x_1 + x_4 \geq 2,}$$
$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Бу масалани $x_1 0 x_4$ текислигида юқоридаги усул ёрдамида ечиб, $x^0_1=1$, $x^0_4=0$ ни топамиз (4-чизма). Сўнгра, ўз навбатида $x^0_3=2x^0_1+x^0_4-2=0$ ни аниқлаймиз. Шундай қилиб (1,1,0,0). Режа оптимал бўлиб, мақсад функциянинг минимал қиймати эса: $c'x_{\min}=2$ бўлади.



4-чизма

3-§. Четки нуқталар ва уларнинг хоссалари

Чизиқли програмалаштириш масаласининг хусусий ҳолда геометрик талқин қилиниши ва график усулда ечилиши умумий ҳол учун ҳам жоиз режалар тўпламининг айрим хоссаларини ўрганиш имконини беради.

Таъриф. Агар чекли сондаги ярим фазолар кесишмаси чегараланган тўпламдан иборат бўлса бундай тўплам, қавариқ кўпёқли деб аталади. қавариқ кўпёқлига мисол қилиб текисликда кесма, кўпбурчак каби фигураларни, фазода эса призма, тетраэдр, куб, октоэдр, додекаэдр, икосаэдр каби фигураларни келтириш мумкин.

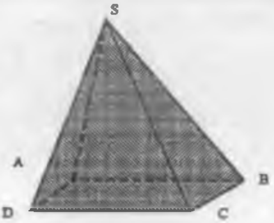
Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг каноник масаласи қаралаётган бўлсин:

$$c'x \to \max \tag{3.1}$$
$$Ax=b, \tag{3.2}$$
$$x \geq 0. \tag{3.3}$$

Бу масаланинг жоиз режалари тўпламини X орқали белгилайлик ва бу тўплам кўпёқлардан иборат бўлсин. Бу тўпламнинг бирор x нуқтаси четки нуқта дейилади, агар уни

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

тарзда ифодалашга имкон берадиган $\lambda(0 < \lambda < 1)$ сон ва $x_1, x_2 \in X$ нуқталар топилмаса. Бошқача қилиб айтганда, уни тўпламга тегишли ҳеч қандай кесманинг ички нуқтаси (хусусан, ўртаси) сифатида ифодалаб бўлмаса, у нуқта четки нуқта дейилади. Масалан, агар X тўплам пирамидадан иборат бўлса, унинг A,B,C,D,S нуқталари четки нуқталардир (5-чизма), AS, AB, BS,BC, CS, CD, DS, DA қирралар ва ABCD, ABS, BCS, CDS, ADS ёқлар эса чегаравий нуқталардан ташкил топган.



5-чизма

Четки нуқталарнинг айрим хоссаларини ўрганайлик.

1-лемма. Юқоридаги (3.1)-(3.3) масаланинг жоиз режалари тўплами четки нуқтасининг мусбат координаталари сони m дан ортмайди.

Исботи. Дейлик, X режалар тўплами бўлиб, унинг четки нуқтаси x нинг m+1 та мусбат координатаси бўлсин. Аниқлик учун, $x_1>0$, $x_2>0,...,x_{m+1}>0$. Дастлабки m+1 та шарт векторидан тузилган $A_{m+1}=\{a_1,a_2,...,a_{m+1}\}$ матрица ва m+1 ўлчовли Z вектор учун

$$A_{m+1}Z=0$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама нолга тенг бўлмаган Z ечимга эга. Бу векторни n ўлчовли бўлгунча ноллар билан тўлдирамиз, яъни $\tilde{x}=\{Z,0,...,0\}$ ва унинг ёрдамида

$$x^1 = x + \varepsilon\tilde{x}, x^2 = x - \varepsilon\tilde{x} \qquad (3.4)$$

векторларни қуриб оламиз. Бу ерда x векторнинг дастлабки m+1 та координаталари мусбат бўлганлиги, $\tilde{x}$ векторнинг эса охирги n-m-1 координатаси нол бўлганлиги туфайли, шундай етарли кичик ε, $\varepsilon > 0$ топиладики, $x^1>0$, $x^2>0$ бўлади. Иккинчи томондан,

$$Ax^1=Ax+\varepsilon A\bar{x}=Ax+\varepsilon A_{m+1}Z=Ax=b,$$
$$Ax^2=Ax-\varepsilon A\bar{x}=Ax-\varepsilon A_{m+1}Z=b.$$

Яъни иккала вектор ҳам жоиз режа: $x_1 \in X, x_2 \in X$. Бироқ, (3.4) дан $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2), x_1 \neq x_2$ келиб чиқади. Бу эса x нинг четки нуқта дейлишига зид. Лемма исботланди.

2-лемма. Четки нуқтанинг мусбат координаталарига мос келувчи шарт векторлари чизиқли эрклидирлар.

Исботи. Дейлик, $x \in X$ бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ унинг барча мусбат координаталари, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ эса мос шарт векторлари бўлсин, яъни

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=b. \tag{3.5}$$

Агар леммани ўринсиз деб фараз қилсак, шундай n ўлчовли $\lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,0,\ldots,0\}, \lambda \neq 0$ вектор топиладики,

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ka_k=0 \tag{3.6}$$

бўлади. Бу тенгликни ε сонга кўпайтириб, (3.5) га аввал қўшамиз, сўнгра айирамиз. Натижада,

$$a_1(x_1\pm\varepsilon\lambda_1)+\ldots+a_k(x_k\pm\varepsilon\lambda_k)=b \tag{3.7}$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай етарли кичик $\varepsilon>0$ топиладики,

$$x_i+\varepsilon\lambda_i \geq 0, x_i-\varepsilon\lambda_i \geq 0, i=\overline{1,k} \tag{3.8}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

(3.7), (3.8) муносабатлардан $x^1=x+\varepsilon\lambda, x^2=x-\varepsilon\lambda$ векторларнинг жоиз векторлар эканлиги ва $x=\frac{1}{2}(x^1+x^2)$ келиб чиқади. Бу эса x нинг четки нуқта дейилишига зид. Лемма исботланди.

Натижа. Юқоридаги леммалардан четки нуқталар сонининг чекли эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, бу миқдор $\sum_{k=1}^{m} c_n^k$ дан ортмайди. Бу ерда C^k_n - n та шарт векторлари орасидаги, k та векторнинг чизиқли комбинациясидир.

3-лемма. Бузилмаган масалада x жоиз вектор m та мусбат компонентага эга бўлса, у четки нуқта бўлади.

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни шундай $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ жоиз векторлар ва λ, $0<\lambda<1$, сонлар топилсинки, $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ ўринли бўлсин. У ҳолда x режанинг охирги n-m та координатаси нолга тенг бўлганлиги ва $\lambda>0$, $1-\lambda>0$ бўлгани сабабли x_1, x_2 векторнинг ҳам охирги n-m координаталари нолга тенг бўлади. Шу сабабли, ихтиёрий ε учун

$$x(\varepsilon)=x+\varepsilon(x_1-x_2)$$

векторнинг ҳам охирги n-m координатаси нолга тенг бўлади. Шартга кўра $x_1 \neq x_2$. Агар x_1-x_2 векторнинг дастлабки m та координаталари орасида манфийлари бор бўлса, ε ни 0 дан $+\infty$ гача ошириб боравересак, шундай ε_1 топиладики, $x(\varepsilon_1)$нинг координаталаридан бири нолга тенг бўлади, яъни $x(\varepsilon_1)$ векторнинг мусбат координаталари сони m-1 дан ортмайди. Иккинчи томондан,

$$A(x(\varepsilon_1)) = Ax + \varepsilon_1(Ax_1 - Ax_2) = Ax = b$$

Демак, b вектор m-1 тадан кўп бўлмаган векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. Бу эса масаланинг бузилмаган деб фараз қилинишига зид. Худди шу сингари x_1-x_2 векторнинг координаталари орасида мусбатлари бор бўлса ҳам, ε ни 0 дан $-\infty$ гача камайтира бориб бирор ε_2 учун мос координатани нолга тенглаштириб юқоридагидек зидликка келиш мумкин.

Юқоридаги учта леммадан муҳим бир натижага келиш мумкин: бузилмаган масалада жоиз нуқта четки нуқта бўлиши учун унинг m та мусбат координатаси бўлиши зарур ва етарлидир.

Четки нуқтанинг бу хоссаси масалани аналитик усулда ечиш учун қўл келади.

4-§. Симплекс методнинг асосий ғояси

Юқорида таъкидланганидек, чизиқли программалаштириш масаласини ҳар доим ҳам график усулда ечиб бўлавермайди. Бир томондан, n-m>3 бўлган ҳолда масала шартларини график тасвирлашнинг иложи йўқлиги бўлса, иккинчи томонидан m ва n лар ортиб борган сари четки нуқталар сони беҳад кўпайиб кетади ҳамда мақсад функция у нуқталарнинг қайси бирида экстремумга эришишини аниқлаш мураккаблашади. Бу сабаблар масалани ечишнинг аналитик усулларини топишни тақозо этади. Бундай усуллардан бири американлик олим Дж. Данциг томонидан тавсия этилган симплекс методдир. Бу усулнинг асосий ғоясини график усул ёрдамида баён этиш қулайдир.

Дейлик, чизиқли программалаштириш масаласининг режалар тўплами чегараланган кўп ёқлидан иборат бўлиб, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ унинг четки нуқталари бўлсин ҳамда бу нуқталардан бирортаси (масалан

A_1) аниқ топилган бўлсин. Мақсад функциянинг A_1 нуқтадаги қийматини ҳисоблаган ҳолда $c'x=p$, p-const, гипертекисликни кўпёқликнинг A_1 учидан чиққан барча қирралари бўйлаб, параллел силжитамиз. Агар натижада, чизиқли форманинг қиймати унинг A_1 нуқтадаги қийматидан ортмаса, бу нуқта оптимал планни аниқлайди. Агар баъзи қирралар бўйлаб силжитганимизда чизиқли форманинг қиймати ортиб борса, улардан бирини (масалан, энг катта ўсишни таъминловчи қиррани) танлаймиз ва ўша йўналишда навбатдаги четки нуқтага ўтамиз. Шубҳасиз

$$(c^{1}x)\Big|_{A_1} \le (c^{1}x)\Big|_{A_2}$$

ўринли бўлади. Сўнгра A_2 нуқтани дастлабки нуқта сифатида қараб барча жараёнларни такрорлаймиз ва зарурат бўлса навбатдаги четки нуқтага ўтамиз ва ҳ.к.

Агар қаралаётган масаланинг барча базис режалари бузилмаган бўлса, бундай масала бузилмаган масала деб аталади.

Бузилмаган масала учун юқорида баён этилган алгоритмнинг (уни симплекс алгоритм деб аташади) чеклилиги ҳақидаги муҳим теоремани келтириш ўринлидир.

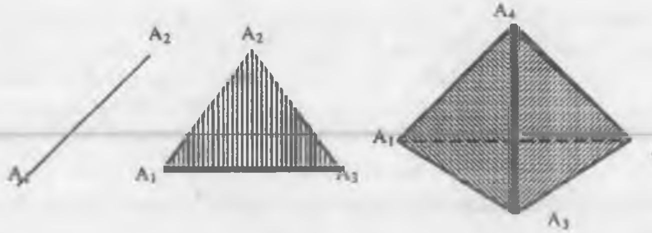
Теорема. Ечимга эга бўлган ҳар бир бузилмаган (3.1)-(3.3) масала ва унинг ихтиёрий бошланғич базис режаси учун симплекс алгоритм чеклидир.

Шу ўринда таъкидлаш лозимки, симплекс методни қўллаш жараёнида итерациялар (бир базис режадан бошқасига ўтишлар) сони 2m дан ортмайди, базис режалар сони эса п элементдан *m* тадан гуруҳлашлар сони C^m_n га етиши мумкин.

Эвристик баён қилинган усулнинг симплекс метод деб аталишига сабаб шуки, тадқиқ этилган дастлабки масалаларда жоиз режалар тўплами сифатида симплекслар қаралган.

Таъриф. k ўлчовли симплекс деб, битта k-1 ўлчовли гипертекисликда ётмаган k+1 та нуқтанинг қавариқ комбинациясидан тузилган тўпламга айтилади.

Мисол тариқасида бир ўлчовли симплекснинг кесма кўринишида, икки ўлчовли симплекснинг учбурчак кўринишида, уч ўлчовли симплекснинг тетраэдр кўринишида бўлишини эслатиб ўтиш кифоядир (6-чизма)



6-чизма

Энди юқорида баён этилган ғояни аналитик ифодалаш ва асослашга ўтамиз.

5-§. Мақсад функция орттирмаси ва оптималлик критерийси (мезони). Ечимнинг чегараланмаганлик шарти

Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг каноник масаласи қаралаётган бўлиб, x - базис режа бўлсин. У ҳолда $x=(x_Б,x_Н)$, $A=(A_Б,A_Н)$, $c=(c_Б,c_Н)$ каби белгилашлар киритиб, бошқа $\bar{x} = x + \Delta x$ режа учун мақсад функция орттирмасини ҳисоблаймиз. Бу ерда ва бундан кейин "Б" индекс базис катталикларни, "Н" индекс эса нобазис катталикларни ифодалайди. Шунингдек, базисга мос индекслар тўпламини $J_Б$, нобазисга мос индекслар тўпламини $J_Н$ орқали белгилаймиз.

$$c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x \tag{5.1}$$

айирмани мақсад функция орттирмаси деб атаймиз ва уни масаланинг берилган катталиклари орқали ифодалаймиз. $A\bar{x} = b$, $Ax = b$ бўлганлиги сабабли

$$A\Delta x = A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = 0.$$

Бундан, скаляр кўпайтириш қоидасига кўра

$$A_Б\Delta x_Б + A_Н\Delta x_Н = 0 \tag{5.2}$$

муносабатга эга бўламиз. $A_Б$- базис векторлардан тузилган матрица бўлганлиги учун $A^{-1}_Б$-тескари матрица мавжуд. Бу эса (5.2) дан

$$\Delta x_Б = -A_Б^{-1} A_Н \Delta x_Н \tag{5.3}$$

миқдорни топиш имконини беради. Буни (5.1)га қўйиб топамиз

$$C'\Delta x = C'_Б\Delta x_Б + C'_H\Delta x_H = -(C_Б A_Б^{-1} A_H - C'_п)\Delta x_H \qquad (5.4)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула қуйидаги натижани келтиришга имкон беради.

Теорема. Қаралаётган масалада x базис режанинг оптимал бўлиши учун унга мос

$$\Delta'_H = C'_Б A_Б^{-1} A_н - C'_H \geq 0 \qquad (5.5)$$

тенгсизлик бажарилиши етарли бўлиб, агар x бузилмаган базис режа бўлса, бу шартнининг бажарилиши зарур ҳамдир.

Кўриниб турибдики, бузилмаган базис режа учун бу теорема оптималлик критерийини ифодалайди. Теоремани исботлайлик.

Зарурийлик. Тескарисини фараз қилайлик, яъни x оптимал режа бўлиб, унинг учун (5.5) шарт бажарилмасин, яъни бирор нобазис $j_0 \in J_H$ индекс учун

$$\Delta_{j0} = (C'_Б A_Б^{-1} A_H - C'_H)\big|_{j=j_0} < 0 \qquad (5.6)$$

бўлсин. У ҳолда Δx ни қуйидагича танлаш ҳисобига $\overline{x} = x + \Delta x$ векторини тузамиз:

$$\Delta x_{j_0} = \theta > 0, \Delta x_j = 0,\ j \neq j_0,\ j \in J_H$$

Шунингдек, базис компонентларни аниқлаймиз:

$$\Delta x_Б = -A_Б^{-1} A_H \Delta x_H = -\theta A_Б^{-1} a_{j_0}$$

Шу тариқа қуриб олинган $\overline{x}$ векторни режа эканлигини кўрсатайлик. У асосий чеклашларни қаноатлантиради: $A\overline{x} = Ax + A\Delta x = Ax = b$. Ундан ташқари етарли кичик $\theta_{j_0} > 0$ лар учун $\overline{x} = (\overline{x}_Б, \overline{x}_H)$ вектор бевосита чеклашларни ҳам қаноатлантиради, яъни:

$$\begin{aligned} \overline{x}_Б &= x_H + \Delta x_H = \Delta x_H \geq 0, \\ \overline{x}_Б &= x_Б + \Delta x_Б = x_Б - \theta A_Б^{-1} a_{j_0} \geq 0. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Бу муносабатлар $\overline{x}$ нинг жоиз режа эканлигини ифодалайди. Бироқ, бу режа учун

$$c'\overline{x} - c'x = -\theta_{j_0} \cdot \Delta_{j_0} > 0$$

яъни, $c'\overline{x} > c'x$. Бу эса x режанинг оптимал дейлишига зид. Демак, (5.5) зарурий шарт ўринли.

Етарлилик. Базис режа таърифига кўра, $x = (x_Б, x_H) = (x_Б, 0)$, яъни $x_H = 0$. Бевосита (тўғри) чеклашлардан, юқорида қурилган $\overline{x}$ режа учун

$$\Delta x_H = \overline{x}_H - x_H = \overline{x}_H \geq 0.$$

Буни инобатга олиб, (5.5) шартга кўра $c'\overline{x} - c'x = -\Delta'_n \Delta x_n = -\Delta'_n \cdot \overline{x}_n \leq 0$, яъни $c'\overline{x} \leq c'x$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса x-режанинг оптималлигини ифодалайди.

Масалани график усулда ечиш жараёнида режалар тўпламининг чегараланмаган ҳам бўлиши ва унда мақсад функция чегараланмаган тарзда ўсишини таъкидлаган эдик. Шу тасдиқни аналитик ифодалаймиз.

Теорема. Агар бирорта $j_0 \in J_П$ индекс учун оптималлик шарти бажарилмаса, яъни (5.6) тенгсизлик ўринли бўлса ҳамда унга мос бўлган $A_Б^{-1} a_{j_0}$ векторнинг барча компонентлари $x_{ij_0} \leq 0$ бўлса, мақсад функция режалар тўпламида чегараланмаган тарзда ортиб бораверади.

Исботи. Бу теореманинг исботи (5.7) тенгсизликнинг ихтиёрий $\theta > 0$ учун бажарилишидан келиб чиқади. Чунки бу ҳолда

$$c'\overline{x} = c'x - \theta_{j_0} \cdot \Delta_{j_0}$$

бўлиб, $\theta_{j_0} \to +\infty$ да $c'\overline{x} \to \infty$ бўлади. Демакки, бу ҳолда масаланинг ечими мавжуд бўлмайди.

6-§. *Симплекс итерация*

Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг каноник масаласида x-бошланғич базис режа бўлиб, $А_Б$ унга мос базис матрица бўлсин. Шунингдек (5.5) векторнинг компонентлари орасида манфийлари бор бўлиб (яъни оптималлик критерийи бажарилмасин), уларга мос $A_Б^{-1} a_j$ векторлар компонентлари орасида аниқ мусбатлари мавжуд бўлсин (акс ҳолда ечим мавжуд бўлмайди). У ҳолда бир режадан иккинчисига ўтиш натижасида мақсад функциянинг қиймати $-\Delta_j \cdot \theta$ миқдорга ортади. Демак θ қанча катта қилиб танланса, функция қиймати шунча ортади. Бироқ θ нинг қийматини ихтиёрий равишда ошириб бўлмайди. Қуйида уни қанчага ошириш мумкинлигини аниқлаймиз $\overline{x}$ режани қуришга кўра

$$\overline{x}_i = x_i + \Delta x_i = x_i - \theta \cdot A_Б^{-1} a_j, j \in J_H, \tag{6.1}$$

бўлиб, буни нолга айлантирувчи θ ларнинг энг кичигини θ_0 деб белгилайлик:

$$\theta_0 = \min_{x_{ij_0} > 0} \frac{x_i}{x_{i_0 j_0}}, x_{ij_0} > 0$$

Агар базис режа x бузилмаган бўлса, ҳар доим $\theta_0 > 0$ бўлади, ҳамда барча $\overline{x}_i \geq 0$ бўлади.

Шундай қилиб, x режа асосида, Δx_H ни танлаш ҳисобига янги $\bar{x}$ режага ўтиш, мақсад функция қийматини $-\Delta_{j_0} \cdot \theta_0$ га ортишини таъминлайди, яъни $c'\bar{x} = c'x - \Delta_{j_0} \cdot \theta_0$.

Агар $\bar{x}$ ҳам базис режа бўлса, уни дастлабки режа сифатида қараб, барча тадбирларни такрорлаш ҳисобига янгисига ўтиш ва мақсад функция қийматини янада ортишини таъминлаш, қолаверса шу усул билан оптимал режани топиш мумкин бўлади.

Шуниси ажабланарлики, x базис режа асосида юқорида баён этилгандек қилиб қурилган $\bar{x}$ режа ҳам базис режа бўлади. Ҳақиқатан (6.1) га асосан $\bar{x}$ вектор координаталардан биттаси 0 бўлади:

$$\bar{x}_{i_0} = x_{i_0} - \theta_0 \cdot x_{i_0 j_0} = x_{i_0} - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} \cdot x_{i_0 j_0} = 0 .$$

Шунингдек,

$$\bar{x}_H = \Delta x_H = (0,0,\ldots,0,\theta_0^{j_0},0,\ldots,0)$$

бўлгани сабабли $\bar{x}$-векторнинг ҳам n-m та компонентлари нолга тенг бўлади. қолган компонентларига эса

$$a_j,\ j \in (J_Б \setminus i_0) \cup j_0 \qquad (6.2)$$

шарт векторлари мос келади.

Маълумки, бирлик векторнинг $A_Б$ базисдаги ёйилмаси

$$\sum_{i \in J_Б} a_i u_{ij} = e_j,\ j = \overline{1,n}\ , \qquad (6.3)$$

бўлади. Бу ерда u_{ij} лар $A_Б^{-1}$ матрица элементлари, e_j-бирлик вектор компонентлари. Шунингдек, a_{j_0}, $j_0 \in J_Б$ векторнинг $A_Б$ базисдаги ёйилмаси

$$\sum_{i \in J_Б} a_i x_{ij_0} = a_{j_0} \qquad (6.4)$$

бўлади. Бу ерда $x_{ij_0}, i \in J_Б$ - мос координаталардир.
(6.4) дан топамиз:

$$a_{i_0} x_{i_0 j_0} + \sum_{i \in J_Б \setminus i_0} a_i x_{ij_0} = a_{j_0},$$

$$a_{i_0} = \frac{1}{x_{i_0 j_0}} a_{j_0} - \sum_{i \in J_Б \setminus i_0} a_i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}. \qquad (6.5)$$

(6.5)ни (6.3)га қўйиб топамиз:

$$a_{i_0}u_{i_0 j}+\sum_{i\in J_Д\setminus i_0}a_i u_{ij}=\frac{u_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}a_{i_0}+\sum_{i\in J_Д\setminus i_0}a_i\left(u_{ij}-\frac{u_{i_0 j}\cdot x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}\right)=e_j,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Бу муносабат (6.2) векторларнинг чизиқли эркли эканлигини, яъни $\overline{x}$ режанинг ҳам базис режа эканлигини англатади.

Одатда, юқорида баён қилинган алгоритм асосида бир базис режадан бошқасига ўтиш жараёнига симплекс итерация дейилади.

Энди «эски» базис режа x дан «янги» базис режа $\overline{x}$ га ўтганда мос базис векторларнинг координаталари ўзаро қандай боғлиқ эканлигини аниқлаймиз, яъни, янги базис векторнинг координаталарини топамиз.

Маълумки, x режага мос базисда a_j, $j=\overline{1,n}$ вектор қуйидагича ифодаланади

$$\sum_{i\in J_Б}a_i x_{ij}=a_j \tag{6.6}$$

Бундан

$$\sum_{i\in J_Б\setminus i_0}a_i x_{ij_0}+a_{i_0}x_{i_0 j_0}=a_{j_0},\ a_{i_0}=-\sum_{i\in J_Б\setminus i_0}a_i\frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}+a_{j_0}\cdot\frac{1}{x_{i_0 j_0}} \tag{6.7}$$

(6.7)ни (6.6)га қўйиб, топамиз:

$$\sum_{i\in J_Б\setminus i_0}a_i x_{ij}+a_{i_0}x_{i_0 j}=a_j,\ \sum_{i\in J_c\setminus i_0}a_i\left(x_{ij}-\frac{x_{ij_0}\cdot x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}\right)+a_{j_0}\frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}=a_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Бу эса a_j векторнинг янги базисдаги ёйилмасини ифодалайди. Бундан,

$$\begin{aligned}(x_{i_0 j})_{янги}&=\left(\frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}\right)_{эски},\ j=\overline{1,n},\ j\neq j_0\ ,\\ (x_{ij})_{янги}&=\left(x_{ij}-\frac{x_{i_0 j}\cdot x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}\right)_{эски},\ i\neq i_0,\ j\neq j_0,\\ (x_{ij_0})_{янги}&=0,(x_{i_0 j_0})_{эски}=1,\end{aligned} \tag{6.8}$$

муносабатлар келиб чиқади.

Изоҳ. Симплекс методда, агар оптималлик шартини ифодаловчи $\Delta_j, j\in J_Б$ ларнинг бир нечтаси манфий бўлса, улар ичидан энг кичигини танлаш тавсия этилган. Бироқ бошқача қилиб ҳам танлаш мумкин, масалан, j_0 сифатида шундай индексни олиш кераки, натижада $-\Delta_{j_0}\cdot\theta_0$

энг катта бўлсин. Бу ҳолда мақсад функциянинг қиймати ҳар бир итерацияда кўпроқ усиб боради.

7-§. Симплекс жадвал

Юқорида баён қилинган симплекс итерация симплекс методни назарий асослашга қулай бўлиб, аниқ мисолларни ечишда беҳад кўп ҳисоблашларни талаб этади. Ҳисоблашларни енгиллаштириш мақсадида симплекс методни махсус тузилган жадвалда ҳам намойиш этса бўлади.

Аниқлик учун, қаралаётган масалада дастлабки базис режани $x=(x_1,x_2,...,x_m,0,...,0)$ каби олайлик. У ҳолда $A_Б=(a_1,a_2,...,a_m)$, $A_Н=(a_{m+1},a_{m+2},...,a_n)$ бўлади. Симплекс жадвал номини олган жадвални тузайлик.

Биринчи устунга базис ташкил этувчи $a_1,a_2,...,a_m$ векторларни, иккинчи устунга нарх вектори c нинг мос компонентларини, учинчи устунга эса b векторнинг қаралаётган базисдаги координаталарини, яъни $x_1,x_2,...,x_m$ ларни жойлаштирамиз. Чунки x-режа бўлгани сабабли $a_1x_1+a_2x_2+...+a_mx_m=b$ ёйилма ўринлидир. Биринчи сатрга c векторнинг барча координаталарини жойлаштиргач, тўртинчи устундан бошлаб, барча устунларни шарт векторларининг қаралаётган базисдаги координаталари билан тўлдириб чиқамиз. Бунда, дастлабки m та устун осон тўлдирилади, чунки улар бирлик векторлардан иборат бўлади. қолган m+1 дан n гача бўлган устунларни a_j, $j=\overline{m+1,n}$ векторларнинг

$$a_j=\sum_{i=1}^{m}a_ix_{ij} \qquad (7.1)$$

ёйилмаси координаталари x_{ij} лар билан тўлдириб чиқамиз. Таъкидлаш лозимки, агар $x^1_j=\{x_{1j},x_{2j},...,x_{mj}\}$ белгилаш киритсак, уни (7.1) дан топиш мумкин:

$$x_j=A_Б^{-1}a^j. \qquad (7.2)$$

Шундай қилиб, жадвалнинг барча катаклари берилган масалага оид катталиклар билан тўлдирилади. Бироқ, асосий мақсад оптималлик критерийини текширишдан иборат бўлгани сабабли, жадвалга ёрдамчи Z ва Z-C орқали белгиланган иккита сатр киритамиз. Z белгили сатрнинг катакларига мос равишда

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i1}, \ldots, Z_n = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{in} \qquad (7.3)$$

миқдорларни жойлаштирамиз. Агар (7.2) ни инобатга олиб, (7.3) ни бошқача ифодаласак,

$$Z_j = C_Б^1 A_Б^{-1} a_j \qquad (7.4)$$

га эга бўламиз. Ниҳоят, сўнгги сатрга Z сатр элементларидан, биринчи сатр элементларини мос равишда айириб ёзамиз:

$$Z_j - C_j = C_Б^1 A_Б^{-1} a_j - c_j .$$

Дастлабки (тўртинчисидан бошлаб) m та устун учун

$$Z_j - C_j = (Z - C)_Б = 0$$

бўлиб, қолган устунлар учун эса

$$Z_j - C_j = (Z - C)_Н = C_Б^1 A_Б^{-1} A_н - C_н^1$$

бўлади. Бу эса оптималлик критерийидаги $\Delta_Н$ векторнинг координаталаридир. Яъни сўнгги сатрдаги барча элементларнинг манфий бўлмаслиги қаралаётган базис режанинг оптималлигини англатади (7.1 жадвалга қаранг).

Симплекс жадвалнинг қулайлиги шундаки, унда оптимал ечимни топишдаги итерацияларни ҳам амалга оширса бўлади.

Шунингдек, ечимнинг чегараланмаганлик шартини ҳам, текшириш мумкин.

Дастлаб ечимнинг чегараланмаганлик шартини келтирайлик.

Дейлик x базис режа учун юқоридагидек қилиб тўлдирилган жадвалнинг сўнгги сатрида манфий $Z_{j_0} - C_{j_0}$ мавжуд бўлиб, унга мос устундаги a_{j_0} векторнинг барча координаталари мусбат бўлмасин, яъни $x_{ij_0} \leq 0, i = \overline{1,m}$ бўлсин. Бу ҳолда мақсад функция режалар тўпламида чегараланмаган тарзда ўсади.

Ҳақиқатан, (5.7) га асосан.

$$\bar{x}_Б = x_Б - \theta A_Б^{-1} a_{j_0}$$

ёки

$$\bar{x}_i = x_i - \theta \cdot x_{ij_0}$$

бўлиб, $x_{ij_0} \leq 0$ бўлганда ихтиёрий $\theta > 0$ учун $\bar{x}$ вектор режа бўлиб қолади ва

$$c'\bar{x} = c'x - \theta \cdot \Delta_{j_0}$$

бўлганлигидан, $\theta \to \infty$ да $c'\overline{x} \to +\infty$.

Энди, янги симплекс жадвалга ўтишни баён этайлик.

Дейлик, x базис режа учун тўлдирилган дастлабки жадвалнинг сўнгги сатридаги $Z_j - C_j$ лар орасида манфийлари бор бўлиб, уларга мос устунларда жойлашган a_j-векторларнинг мусбат координатаси мавжуд бўлсин. У ҳолда мақсад функция қийматини ошириш имконияти пайдо бўлади. Бу ҳолда симплекс итерацияда, Δ_j ларнинг манфийлари ичидан энг кичиги танланар эди.

Жадвалда эса сўнгги сатрдаги $Z_j - C_j$ ларнинг манфийлари орасидан энг кичигини танлаймиз ва мос устунни ҳал қилувчи устун деб белгилаймиз, у j_0-индексли устун бўлсин. Сўнгра j_0 устундаги мусбат x_{ij0} ларни танлаб, улар ичидан x_i / x_{ij0} нисбатга энг кичик қиймат берувчи i_0 индексни аниқлаймиз ва унга мос сатрни ҳал қилувчи сатр деб атаймиз. Ҳал қилувчи сатр ва устун кесишмасида жойлашган $x_{i0\,j0}$ элементга эса ҳал қилувчи элемент деб аталади. Бу элементни топиш, базис векторлар ичидаги a_{i0} вектор ўрнини a_{j0} вектор эгаллаши лозимлигини англатади ва натижада янги

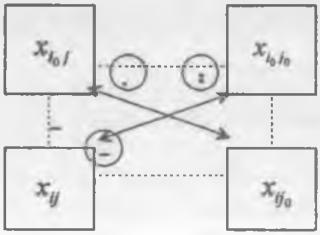
$$a_1, a_2, \ldots, a_{i_0-1}, a_{j_0}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m$$

базисга эга бўламиз. Барча шарт векторларининг янги базисдаги координаталари эса «тўғри тўртбурчак қоидаси» деб аталувчи усул ёрдамида топилади. Ҳақиқатан, дейлик, янги жадвалдаги x_{ij} ни аниқлаш талаб этилаётган бўлсин. У ҳолда дастлабки жадвалда, диагоналининг бир учи x_{ij}, бир учи $x_{i0\,j0}$ бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз (7-чизма). Тўртбурчакнинг фақат бурчакларида жойлашган элементлар устида қуйидаги амалларни кетма-кет бажарамиз:

1) ҳал қилувчи элемент билан бир диагоналда ётмаган x_{i0j} ва x_{ij0} ларни ўзаро кўпайтирамиз;

2) натижани ҳал қилувчи элементга бўлиб, ҳосил бўлган сонни x_{ij} дан айрамиз.

Равшанки, юқоридаги амаллар натижасида (6.8) муносабатларга эга бўламиз.



7-чизма

Янги жадвалнинг дастлабки жадвалдаги i_0 сатр ва j_0 устунга мос координаталари ҳам (6.8) га кўра осон топилади. Сатр барча элементларни $x_{i_0 j_0}$ га бўлиш орқали ҳосил қилинса, j_0-устун бирлик вектордан иборат бўлиб қолади.

Сўнгра Z ва Z-C сатрлар худди дастлабки жадвалдагидек, амалларни янги жадвал учун амалга ошириш орқали тўлдирилади ва оптималлик шарти текширилади. Шундай қилиб, жадвалда, симплекс методнинг битта итерацияси амалга оширилади.

Изоҳ. Симплекс методни бузилмаган базис режа учун баён қилдик. Агар режа бузилган бўлса мос масала ҳам бузилган дейилади. Бу ҳолда, юқоридаги тадбирларни қўлласак, баъзи итерацияда Θ_0 параметр 0 га тенг бўлиб қолиши мумкин. Агар бу ҳол бир неча марта такрорланса «циклланишт» деб аталувчи ҳолат вужудга келади, яъни қаралган базисга яна қайтиш содир бўлади. Умуман олганда бу ҳол ниҳоятда кам учрайди. Шу сабабдан, бундай ҳолатлардан қутилиш йўлларини ушбу китобда келтирмасликка қарор қилдик.

7.1-жадвал. Дастлабки симплекс жадвал

	C / $C_Б$		c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
b, a_i / $A_Б$		b	a_1	a_2	...	a_m	a_{m+1}	...	a_n
a_1	c_1	x_1	1	0	...	0	$x_{1\,m+1}$	...	x_{1n}
a_2	c_2	x_2	0	1	...	0	$x_{2\,m+1}$	...	x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
a_m	c_m	x_m	0	0	...	1	$x_{m\,m+1}$	...	x_{mn}
Z			c_1	c_2	...	c_m	$\sum_{i=1}^{m} c_i x_{im+1}$	...	$\sum_{i=1}^{m} c_i x_{in}$
Z-C			0	0	...	0	$\sum_{i=1}^{m} c_i x_{im+1} - c_{m+1}$	...	$\sum_{i=1}^{m} c_i x_{in} - c_n$

8-§. Дастлабки базис режани топиш усуллари

1. Нормал масала учун дастлабки режани топиш

Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг нормал масаласи берилган бўлсин:

$$c'x \to \max$$
$$[Ax]_i \le b_i, i = \overline{1,m},$$
$$x \ge 0.$$

Бу масалада барча b_i ни мусбат деб фараз қилиш мумкин. Агар баъзи b_i лар бу шартни қаноатлантирмаса, масалани ўхшаш эквивалент масалага келтириш мумкин ва натижада барча $b_i \ge 0$ бўлади. Симплекс методни қўллаш мақсадида қаралаётган масалани, янги ўзгарувчилар қўшиш ҳисобига, эквивалент каноник масалага келтирамиз:

$$c'x \to \max \tag{8.1}$$

$$[Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m}, \tag{8.2}$$

$$x \ge 0, x_{n+i} \ge 0, i = \overline{1,m}. \tag{8.3}$$

Бу масалага бевосита симплекс методни қўллаш учун дастлабки базис режани аниқлаш зарур. Текшириш мумкинки, $(0,0,...,0,b_1,b_2,...,b_m) - (n+m)$ вектор (8.1)-(8.3) масала учун базис режа бўлади. Ҳақиқатан, унинг режа эканлиги равшан, $b_1, b_2, ..., b_m$ координаталарига эса бирлик $a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{n+m}$ векторлар мос келади. Демак у базис режа бўлар экан.

Юқорида баён этилган усулни аниқ мисолда намойиш этайлик.

Мисол. Корхонада тўрт хил маҳсулот тайёрланади. Бирлик маҳсулотларнинг сотув нархлари мос равишда 2,1,3 ва 5 минг сўмдан бўлсин. Маҳсулотларни тайёрлаш учун энергия, хомашё ва меҳнат сарфланади. Бирлик маҳсулот учун сафланадиган ресурслар миқдори қуйидаги (8.1) жадвалда келитирилган.

8.1-жадвал

	1 хил маҳсулот	2 хил маҳсулот	3 хил маҳсулот	4 хил маҳсулот	Ресурслар
Энергия	2	3	1	2	30
Хомашё	4	2	1	2	40
Меҳнат	1	2	3	1	25

Маҳсулотларни ишлаб чиқаришнинг шундай режасини тузиш кеpакки, маҳсулотларнинг сотув нархлари йиғиндиси максимал бўлсин.

Бу иқтисодиёт масаласини ечиш учун унинг математик моделини тузамиз. Шу мақсадда x_1, x_2, x_3, x_4 лар орқали режалаштирилган маҳсулотлар миқдорларини белгилаймиз. Уларнинг нархи

$$\sum_{i=1}^{4} c_i x_i = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

бўлади. Маҳсулотларга сарфланадиган энергия миқдори $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, хомашё миқдори $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ ва меҳнат миқдори $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$ дан иборат бўлади.

Масала шартига кўра, қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласига эга бўламиз:

$$\underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max} \qquad (8.4)$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30,$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40, \qquad (8.5)$$

$$\underline{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 25,} \qquad (8.6)$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}.$$

Бу масалани симплекс метод ёрдамида ечиш учун уни каноник кўринишга келтирамиз. Шу мақсадда (8.5) тенгсизликларга мувозанатловчи, ёрдамчи, x_5, x_6 ва x_7 миқдорларни қўшамиз. Бу миқдорларни иқтисодий талқин этсак, улар қаралаётган режа учун эркин ресурсларни англатади. Натижада қуйидаги каноник масалага эга бўламиз:

$$\underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max} \qquad (8.7)$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40, \qquad (8.8)$$

$$\underline{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 25,} \qquad (8.9)$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,7}.$$

Бу масала учун (0,0,0,0,30,40,25) базис режа бўлади ва унга

$$A_s = (a_5, a_6, a_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

базис мос келади. Демак, (8.7)-(8.9) масалани симплекс метод ёрдамида ечиш мумкин. Дастлаб, юқорида баён этилган алгоритм асосида биринчи симплекс жадвални тўлдирамиз (8.2- жадвал)

8.2-жадвал

	C_j \ $C_Б$		2	1	3	5	0	0	0	
b, a_i \ $a_Б$		b,x	a_1	a_2	a_3	A_4	a_5	a_6	a_7	θ
a_5	0	30	2	3	1	[illegible]	1	0	0	15
a_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	
Z-C			-2	-1	-3	-5	0	0	0	
a_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0	30
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_7	0	10	0	1/2	[illegible]	0	-1/2	0	1	4
Z		75	5	15/2	5/2	5	5/2	0	0	
Z-C			3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0	
a_4	5	13	1	7/5	0	1	3/5	0	-1/5	
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_3	3	4	0	1/5	1	0	-1/5	0	2/5	
Z		77	5	38/5	3	5	12/5	0	1/5	
Z-C			3	33/5	0	0	12/5	0	1/5	

Демак иккинчи итерация натижасида учинчи қадамда оптималлик шарти бажарилди. Оптимал режа $x_{опт}$=(0,0,4,13,0,10,0) бўлиб, мақсад функциянинг жоиз максимал қиймати $c'x/_{опт} = 77$ бўлади.

Изоҳ. Ҳар бир жадвалнинг Z сатридаги учинчи катакда мақсад функциянинг мос режадаги қиймати ҳосил бўлади ва ҳар бир итерацияда бу қиймат ошиб боради.

2.Сунъий базис усули

Дейлик, каноник масала

$$c'x \to \max \tag{8.10}$$

$$Ax = b, \tag{8.11}$$

$$x \geq 0, \tag{8.12}$$

қаралаётган бўлиб, дастлабки базис режа аниқланмаган бўлсин. Демак, симплекс методни бевосита қўллаб бўлмайди. Бу ҳолда Дж. Данциг (2) масалани ечишнинг икки фазали методини таклиф этган. Биринчи фаза (8.10)-(8.12) масала асосида, (8.11) мувозанатни сунъий равишда бузишга асосланган қуйидаги ёрдамчи масалани тузишдан иборат:

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max \qquad (8.13)$$

$$[Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m} \qquad (8.14)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+m}. \qquad (8.15)$$

Бу ерда $x_{n+i}, i = \overline{1,m}$ - ўзгарувчилар сунъий ўзгарувчилар бўлиб, $x=(0,0,...,0,b_1, b_2,...,b_m)$ (8.13)-(8.15) масаланинг базис режаси бўлади, чунки бу ҳолда ҳам $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$ деб олиш мумкин.

Демак, ёрдамчи масалани симплекс метод ёрдамида ечиш мумкин. Асосий масала ва ёрдамчи масалалар орасидаги боғланиш қуйидаги теоремада ўз ифодасини топган.

Теорема. (8.11)-(8.12) масаланинг жоиз режага эга бўлиши учун (8.13)-(8.15) масала ечимида $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} = 0$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Ҳақиқатан, агар (8.15) ўринли бўлса, $x_{n+i} \geq 0, i = \overline{1,m}$, бўлганлиги сабабли $x_{n+i} = 0, i = \overline{1,m}$, бўлади ва натижада $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, 0,0,...,0)$ режа (8.13)-(8.15)ни қаноатлантиради, $(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ эса (8.10)-(8.12) масаланинг режаси бўлади.

Шунингдек, агар $(x_1, x_2,..., x_n)$ вектор (8.10)-(8.12) масаланинг режаси бўлса, $x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_n^*, 0,0,...,0)$(8.13)-(8.15) нинг ечими бўлади.

Юқоридаги усул билан, берилган масаланинг дастлабки режасини топиш биринчи фазани ташкил этади. Иккинчи фаза эса топилган режа асосида симплекс методни қўллаб, оптимал режани топишдан иборатдир.

Ёрдамчи масалани ечиш жараёнида қуйидагича ҳолатлар рўй бериши мумкин:

1) ечимда сунъий ўзгарувчилар орасида нолдан фарқлилари бор;

2) барча сунъий ўзгарувчилар нолга тенг ҳамда мос базис векторлар орасида сунъий ўзгарувчиларга мос шарт векторлари йўқ;

3) барча сунъий ўзгарувчилар нолга тенг, бироқ мос базис векторлар орасида сунъий ўзгарувчиларга мос шарт векторлари бор.

Биринчи ҳолда, юқоридаги теоремага кўра дастлабки масала жоиз режага эга эмас, демакки, бу ҳолда масаланинг ечими йўқ.

Иккинчи ҳолда, сўнгги симплекс жадвалда сунъий ўзгарувчиларга мос катакларни эътиборсиз қолдириб, бу жадвални асосий масала учун дастлабки жадвал сифатида қабул қилинади. Сўнгра жадвалга нарх векторининг мос координаталари қўйилиб, симплекс метод давом эттирилади ва оптимал ечим ҳақидаги тегишли хулосага келинади.

Учинчи ҳолда эса сунъий масала ечимидан бевосита фойдаланиб бўлмайди, чунки базис векторлар орасида сунъий ўзгарувчиларга мос келувчи векторлар бор. Шу сабабли, аввал шу векторлардан қутилиш чорасини кўриш керак. Шу мақсадда, ҳал қилувчи сатр сифатида x_{n+k} ўзгарувчига мос сатрни, ҳал қилувчи устун сифатида эса, базисга кирмаган, x_{n+k}, $j \neq 0$ координатага мос келувчи a^j, $j \leq n$ - векторни оламиз. Симплекс итерацияга хос барча амаллар бажарилгандан сўнг $\Delta = Z - C$ сатр ўзгармайди, шунингдек b устун ҳам ўзгаришсиз қолади.

Фақат энди x_{n+k} ўзгарувчи ўрнида $x_j = 0$, $j \leq n$, ўзгарувчи пайдо бўлади. Бу жараён базис векторлар орасидан барча сунъий ўзгарувчиларга мос векторларни йўқотиш билан ёки қолган барча $x_{n+k}, k = k_1, \ldots, k_s$ ўзгарувчилар учун

$$x_{n+k,j} = 0,\ j = \overline{1,n}, k = k_1, \ldots, k_s$$

натижани олиш билан тугайди. Биринчи ҳолда масалани ечиш учун иккинчи фазага ўтамиз. Иккинчи ҳол эса асосий чеклашлар орасида ўзаро чизиқли боғлиқлари борлигини кўрсатади. Шуни инобатга олиб, s та чизиқли боғлиқ сатрларни ўчириб, иккинчи фазани, қолган m-s та базис вектор учун давом эттирамиз.

Мисол. Қуйидаги каноник масалани сунъий базис усули ёрдамида ечинг

$$\begin{gathered}
\underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max} \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\
\underline{-x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1,} \\
x_i \geq 0, i = \overline{1,4}.
\end{gathered}$$

Бу масалда $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ бўлгани сабабли, асосий чеклашлардаги иккинчи тенгламани -1 га кўпайтириб, $b \geq 0$ ҳолатга олиб келамиз:

$$\begin{gathered}
\underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max} \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\
\underline{x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,} \\
x_i \geq 0, i = 1,4.
\end{gathered}$$

Бу масалага мос сунъий масала қуйидагича бўлади.

$$-x_5 - x_6 \to \max$$

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6}. \end{gathered}$$

Бу масаланинг ечимини симплекс усул ёрдамида изласа бўлади, чунки масала каноник кўринишда бўлиб, x_0=(0,0,0,0,4,1) бузилмаган базис режадир. Ечимни излаш жараёни 8.3 -жадвалда келтирилган.

8.3-жадвал

			2	1	3	1			
	C $C_Б$		0	0	0	0	-1	-1	
A $A_Б$		x_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_5	-1	4	1	2	5	-1	1	0	→
a_6	-1	1	1	-1	-1	2	0	1	
Z		-5	-2	-1	-4	-1	-1	-1	
Z-C			-2	-1	-4	-1	0	0	
					↑				
a_3	0	4/5	1/5	2/5	1	-1/5	1/5	0	
a_6	-1	9/5	6/5	-3/5	0	9/5	1/5	1	→
Z		-9/5	-6/5	3/5	0	-9/5	-1/5	-1	
Z-C			-6/5	- 3/5	0	-9/5	4/5	0	
						↑			
$\boxed{a_3}$	3	1	1/3	1/3	1	0			→
$\boxed{a_4}$	1	1	2/3	-1/3	0	1			
Z		4	5/3	2/3	3	1			
Z-C			-1/3	-1/3 ↑	0	0			
a_2	1	3	1	1	3	0			
a_4	1	2	1	0	1	1			
Z		5	2	1	4	1			
Z-C			0	0	1	0			

$x_{опт} = (0,3,0,2), c'x_{опт} = 5.$

Изоҳ. Масалани ечиш жараёнида 1-фазага тегишли сўнгги жадвалда базисга мос $C_Б$=0 бўлгани сабабли, оптималлик критерийи бажарилади. Шу сабабли, $C_Б$ нинг қийматларини катак бурчагига жойлаштириб, сунъий шарт векторларига мос устунларни эътиборсиз қолдириш мумкин. Шунинглек, дастлабки жадвалнинг 1-сатри устига мос равишда дастлабки масалага тегишли нарх вектори координаталарини ёзиб қўйиш ҳам қулайлик туғдиради.

3.Чизиқли программалаштириш масаласини М-метод ёрдамида ечиш

Юқорида баён этилган сунъий базис усулининг иккита фазадан иборат бўлиши, фазаларни бирлаштириш ва ечимни симплекс усул ёрдамида топиш ғоясини юзага келтиради. Бу ғояни америкалик олим Чарнес амалга оширган бўлиб, у қуйидагича ифодаланади. Берилган ушбу

$$c'x \to \max \tag{8.16}$$

$$[Ax]_i = b_i, i = \overline{1,m}, \tag{8.17}$$

$$x \geq 0, \tag{8.18}$$

каноник масала ўрнига қуйидаги

$$c'x - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+1} \to \max \tag{8.19}$$

$$[Ax]_i + x_{n+i} = b_i, \tag{8.20}$$

$$x \geq 0, i = \overline{1,m}, \tag{8.21}$$

масалани қарайлик. Бу ерда М-етарли даражада катта қилиб олса бўладиган мусбат сон, $x_{n+i}, i = 1, m$ - сунъий ўзгарувчилар. Тузилган ёрдамчи (8.19)-(8.21) масалани симплекс усул ёрдамида ечиш мумкин, чунки x_0=(0,...,0,b_1,...,b_m) дастлабки базис режа.

Асосий масала ва ёрдамчи масала орасидаги боғланишни қуйидаги теоремалар ёрдамида ифодалаймиз.

1-теорема. Агар $X = (x_1,...,x_n,0,0,...,0)$ режа ёрдамчи масала ечими бўлса $x = (x_1,...,x_n)$ режа асосий масала ечими бўлади.

Исботи. Дейлик, $X = (x_1,...,x_n,0,...,0)$ - режа ёрдамчи масала ечими бўлсин. У ҳолда ихтиёрий жоиз режа $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},...,\bar{x}_{n+m})$ учун

$$c'x \geq c'\bar{x} - M(\bar{x}_{n+1} + ... + \bar{x}_{n+m}) \tag{8.22}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Агар теорема натижасини нотўғри деб фараз қилсак, шундай $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ топиладики, асосий масала учун

$$\begin{aligned} &c'x^* > c'x, \\ &Ax^* = b, \\ &x^* \geq 0, \end{aligned} \qquad (8.23)$$

шарт бажарилади. Бундан, x ни ноллар билан n+m га тўлдириб, ёрдамчи масаланинг жоиз режасини ҳосил қиламиз: $X^* = (x_1^*,...,x_n^*,0,...,0)$. Бу режа учун ҳам (8.22) шарт бажарилади, яъни

$$c'x > c'x^*,$$

бу эса (8.23) га зиддир. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар асосий масала ечимга эга бўлса, етарли катта M>0 учун ёрдамчи масала ечимида барча сунъий ўзгарувчилар нолга тенг бўлади, яъни $x_{n+i} = 0, i=\overline{1,m}$.

Бу теоремани исботсиз қолдириб, эътиборни ёрдамчи масалани ечишга қаратайлик. Масала ечимини симплекс усул ёрдамида излаш мумкин, чунки $X_0 = (0,...,0,b_1,...,b_m)$ бошланғич базис режа. Бу жараёнда M етарли даражадаги катта сон деб қаралади. Жараённинг охирги итерациясида, яъни охирги жадвалда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) сўнгги сатрдаги барча $Z_j - C_j \geq 0$, $j = \overline{1, n+m}$, барча сунъий ўзгарувчилар нолга тенг. Бу ҳолда оптимал режадан барча сунъий ўзгарувчиларни ташлаб юборсак, берилган масала ечимига эга бўламиз.
2) Барча $Z_j - c_j \geq 0$, бироқ ечимда сунъий ўзгарувчилар ичида мусбатлари бор. Бу ҳолда масала ечимга эга бўлмайди, чунки бу ҳолат, масала шартларининг биргаликда эмаслигини англатади.
3) Сўнгги сатрда манфий $Z_{j_0} - C_{j_0} < 0$ мавжуд бўлиб, унга мос устундаги барча координаталар мусбат эмас, яъни $x_{ij_0} \leq 0, i = \overline{1,m}$. Бу ҳолда мақсад функция режалар тўпламида юқоридан чегараланмаган.

Изоҳ. M-метод ёрдамида масала ечиш жараёнида, M соннинг аниқ қиймати ҳисобланмайди. Шу сабабли, жадвалда $Z_j - C_j$ ни $Z_j - C_j = M \cdot \alpha_j + \beta_j$ кўринишида ифодалаб, унга иккита сатр ажратиш қулай бўлади. Бир сатрга α_j лар жойлаштирилса, иккинчисига β_j лар жойлаштирилади.

Мисол. қуйидаги масалани M-метод ёрдамида ечинг:

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max} \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ \underline{-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{array}$$

Дастлаб, юқоридаги асосий масала асосида ёрдамчи *M*-масалани тузиб оламиз:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - M\sum_{i=1}^{2} x_i \to \max$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Бу масалани x_0=(0,0,0,5,1) базис режа асосида симплекс метод ёрдамида ечамиз (8.4-жадвал).

8.4-жадвал

	C / $C_Б$		1	-2	1	-M	-M
A / $A_Б$		X	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_4	-M	5	1	4	1	1	0
a_5	-M	1	-1	2	1	0	1
Z	M	-6	0	-6	-2	-1	-1
	1	0	0	0	0	0	0
Z-C	M		0	-6	-2	0	0
	1		-1	2	-1	0	0
a_4	-M	3	3	0	-1	1	-2
a_2	-2	1/2	-1/2	1	1/2	0	1/2
Z	M	-3	-3	0	1	-1	2
	1	-1	1	-2	-1	0	-1
Z-C	M		-3	0	1	0	3
	1		0	0	-2	0	-1
a_1	1	1	1	0	-1/3	1/3	-2/3
a_2	-2	1	0	1	1/3	1/6	1/6
Z		0	0	0	0	0	0
		-1	1	-2	-1	0	-1
Z-C			0	0	0	1	1
			0	0	-2	0	-1
a_1	1	2	1	1	0	1/2	-1/2
a_1	1	3	0	3	1	1/2	1/2
Z		5	1	4	1	5/2	1/2
Z-C			0	6	0	+	+

$x_{опт}$=(2,0,3) $c'x_{опт}$=5.

9-§. Икkиланмалик назарияси

1.Иkkиланма масалалар. Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг нормал масаласи қаралаётган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} c'x \to \max, \\ Ax \le b, \\ x \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} b'y \to \min, \\ A'y \ge c, \\ y \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (9.2)$$

масалага (9.1) га иккиланма масала деб аталади. (9.1) дан (9.2) га ўтиш қуйидагича шартли алмаштириш натижасида амалга оширилади:

$$"\max" \to "\min"; c \to b; A \to A'; b \to c; (\le), \textit{белги} \to (\ge) \textit{белги}$$

Бу ерда A^1 матрица A матрицани транспонирлаш натижасида олинган матрица бўлиб, агар A матрица m $*$ n ўлчовли бўлса A^1 матрицанинг ўлчови $n \times m$ бўлади. Демак, агар каноник масалада шарт векторлари сони n та бўлса, иккиланма масалада m та бўлади.

Юқоридаги таърифдан фойдаланиб, каноник масала

$$\begin{array}{l} c'x \to \max \\ Ax = b, \\ x \ge 0. \end{array} \qquad (9.3)$$

учун ҳам иккиланма масалани тузамиз. Дастлаб, (9.3) масалани нормал кўринишда ифодалаб оламиз:

$$\left.\begin{array}{l} c'x \to \max \\ Ax \le b, \\ -Ax \le -b, \\ x \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (9.4)$$

ёки,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

каби белгилаб, (9.4)ни қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} & c'x \to \max \\ & \bar{A}x \le \bar{b}, \\ & x \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.5)$$

Бу масалага иккиланма бўлган масала қуйидагича бўлади

$$\left.\begin{aligned} & \bar{b}'\bar{y} \to \min, \\ & \bar{A}'\bar{y} \ge c, \\ & \bar{y} \ge 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

Бу ерда $\bar{y} = \{y_1, y_2\}$ – $2m$ ўлчовли вектор бўлиб, y_1, y_2- лар m ўлчовли векторлар. (9.6) масалани ёйиб ёзсак, қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} & b'y_1 - b'y_2 \to \min \\ & A'y_1 - A'y_2 \ge c \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Бундан, $y_1 - y_2 = y$ деб,

$$\left.\begin{aligned} & b'y \to \min, \\ & A'y \ge c. \end{aligned}\right\} \qquad (9.7)$$

иккиланма масалага эга бўламиз. (9.7) масалада $y \ge 0$ шарти қўйилмади, чунки $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ бўлганда $y_1 - y_2$ турлича бўлиши мумкин.

Изоҳ. Чизиқли программалаштириш масалаларининг қайси бирини асосий, қайсинисини унга иккиланма деб аташ шартлидир.Ҳақиқатан, агар (9.2) масалани асосий деб олсак, (9.1) унга иккиланма бўлади. Буни исботлаш учун (9.2) ни нормал кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned} & -b'y \to \max, \\ & -A'y \le -c, \\ & y \ge 0. \end{aligned}$$

Бу масалага иккиланма бўлган масала

$$\begin{aligned} & -c'x \to \min \\ & (A')'x \le b, \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

кўринишда ёки

$$c'x \to \max$$
$$Ax \le b,$$
$$x \ge 0.$$

нормал кўринишда бўлади. Бу эса дастлабки асосий масаладан иборатдир.

2. Иккиланма масалаларга оид теоремалар

1-лемма. Агар x ва y асосий ва иккиланма масалаларнинг жоиз режалари бўлса, $c'x \le b'y$ бўлади.

Исботи. Шартга кўра $x \ge 0, Ax \le b$. Бу асосий чеклашни манфий бўлмаган $y \ge 0$ га кўпайтириб, (9.2) масала асосида $b'y \ge x'A'y \ge x'c = c'x$ яъни $b'y \ge c'x$ тенгсизликка эга бўламиз. Лемма исбот бўлди.

2-лемма. Агар x^* ва y^* векторлар асосий ва иккиланма масалаларнинг жоиз режалари бўлиб, $c'x^* = b'y^*$ тенглик ўринли бўлса, x^* ва y^* мос равишда оптимал режалар бўлади.

Исботи. Юқорида 1-леммага асосан, ихтиёрий x ва y режалар учун

$$c'x \le b'y$$

жумладан

$$c'x \le b'y^* = c'x^*,$$

яьни

$$c'x \le c'x^*.$$

Демак, x^*-асосий масаланинг оптимал режаси. Шунга ўхшаш y^*нинг иккиланма масаланинг оптимал режаси эканлигини исботлаш мумкин.

1-теорема (мавжудлик теоремаси). Чизиқли программалаштиришда каноник масаланинг ечими мавжуд бўлиши учун асосий ва унга иккиланма масалалар режалари тўпламларининг бўш бўлмасликлари зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. Дейлик, (9.1) масала x^0 ечимга эга бўлсин. Демак, асосий масаланинг режалар тўплами бўш эмас. Иккиланма масаланинг ҳам бирорта режаси борлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда асосий масаланинг оптимал режасига мос базис матрицани $A_Б$ деб белгилаб, $y = c_Б^{1} A_Б^{-1}$ векторни қурайлик. Бундан,

$$A_Б^{1} y = c_Б$$

муносабатга эга бўламиз. Бу эса y-миқдор иккиланма масаланинг режаси эканлигини англатади. Зарурийлик исботланди.

Етарлилик. Дейлик, асосий ва иккиланма масалалар режалари тўпламлари X,У бўлиб, улар бўш бўлмасин. У ҳолда, ихтиёрий

$x \in X$, $y \in Y$ режалар учун 1-леммага кўра $c'x \leq b'y$ тенгсизлик бажарилади, яъни асосий масаланинг мақсад функцияси юқоридан чегараланган. Демак оптимал режа мавжуд. Теорема тўла исбот бўлди.

3.Иккиланма масаланинг иқтисодий талқини

Дейлик, ишлаб чиқариш масаласи қаралаётган бўлсин. Маълумки, масаланинг математик модели (9.1) кўринишда бўлади. Бу моделда x_i-координата i- маҳсулот миқдори, c_i-бирлик i-маҳсулот нархи, b_i миқдор j-ресурс, $A=(a_{ij})$ матрица элементлари a_{ij} i-маҳсулотга ажратилган j-ресурс миқдори сифатида талқин қилинган.

Моделнинг ўзи эса қуйидагича талқин қилинади: қанча ва қандай $x_i, i=1,...,n$ маҳсулотларни, берилган c_i нарх ва ресурс миқдори $b_j, j=1,...,m$, асосида ишлаб чиқариш керакки, жами ишлаб чиқарилган маҳсулот нарх маъносида максимал бўлсин.

Энди эътиборни ишлаб чиқариш учун зарур бўлган ресурсларни баҳолашга қаратайлик. Шу мақсадда ресурсларнинг бирлик нархи сифатида ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг бирлик нархини белгилайлик. Дейлик, y_j, $j = \overline{1,m}$, орқали i-ресурс бирлик нархи белгиланган бўлсин. У ҳолда i-маҳсулотга сарфланган барча ресурслар нархи $\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j$ бўлади.

Сарфланган ресурслар нархи, якуний маҳсулот нархидан кам бўла олмайди:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \geq c_i \,, \quad i = 1,\ldots,n \,.$$

Мавжуд барча ресурслар нархи

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

орқали ифодаланади.

Натижада, масала

$$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \geq c_j,$$

$$y_j \geq 0,$$

кўринишни олади. Шундай қилиб, иккиланма масалада: ҳар бир ресурснинг бирлик баҳоси қандай бўлиши керакки, ресурсларнинг берилган миқдори b_i ва бирлик маҳсулот нархи c_i маълум бўлганда сарфланган барча ресурс миқдори (нархи) минимал бўлсин.

10-§. Иккиланма симплекс метод

1. Дастлабки масаланинг симплекс жадвалидан иккиланма масала ечимини топиш

Дейлик, дастлабки масала

$$c^1 x \to \max \qquad (10.1)$$

$$Ax = b\,, \qquad (10.2)$$

$$x \geq 0 \qquad (10.3)$$

кўринишда бўлиб, унга иккиланма масала

$$b'y \to \min \qquad (10.4)$$

$$A'y \geq c \qquad (10.5)$$

бўлсин. Шунингдек, x^0-режа (10.1)- (10.3) масаланинг ечими бўлиб, аниқлик учун унинг дастлабки m компонентлари мусбат бўлсин. У ҳолда

$$x_{\text{Б}}^0 = A_{\text{Б}}^{-1} b \qquad (10.6)$$

бўлиб,

$$y^{0^1} = c_{\text{Б}}^1 A_{\text{Б}}^{-1} \qquad (10.7)$$

вектор (10.4)-(10.5) масаланинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, бир томонидан

$$y^{0^1} A = y_з^{0^1} \{A_{\text{Б}}; A_{\text{Н}}\} = \{C_{\text{Б}}^1; C_{\text{Б}}^1 A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{Н}}\} \qquad (10.8)$$

Иккинчи томондан, симплекс жадвалдаги Z-сатр, $\text{С}_{\text{Б}}$ векторнинг $a_1, \ldots, a_m$ базисдаги $\left(E,\, A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{н}}\right)$ ёйилмасидан иборат, яъни

$$Z^1 = \left(C_{\text{Б}}^1, C_{\text{Б}}^1 A_{\text{Б}}^{-1} A_{\text{н}}\right). \qquad (10.9)$$

x^0 режа (10.1)-(10.3) масаланинг ечими бўлгани учун, оптималлик критерийига асосан $Z \geq C$ шарт бажарилади, демак, (10.8)-(10.9) ларга кўра

$$y^{0^1} A \geq c'$$

бўлади. Бу эса y^0 векторнинг жоиз режа эканлигини билдиради ҳамда (10.6), (10.7) га кўра

$$b'y = b'\left(A_Б^{-1}\right)' C_Б = X_Б^{0'} C_Б = C'X^0 .$$

Бу эса y^0 режа иккиланма масаланинг оптимал режаси эканлигини англатади. Симплекс жадвал терминида (10.7) муносабат, y^0 векторнинг координаталари Z-сатрда, бирлик векторга мос устунлар остида жойлашганини англатади.

Мисол. Дейлик, қуйидаги масалани ечиш талаб этилаётган бўлсин:

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + 2x_2 \to \min} \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ 0{,}5x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ \underline{x_1 + 3x_2 \ge 2,} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Масаланинг нормал кўриниши қуйидагича

$$\begin{array}{c} \underline{-x_1 - 2x_2 \to \max} \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ -0{,}5x_1 - 2x_2 \le -1, \\ \underline{-x_1 - 3x_2 \le -2,} \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

Бу масалага мос иккиланма масаланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{array}{c} \underline{y_1 + y_2 + 2y_3 \to \max} \\ y_1 + 0{,}5y_2 + y_3 \le 1, \\ \underline{y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 2,} \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{array}$$

Ёрдамчи $y_4 \ge 0, y_5 \ge 0$ ўзгарувчилар киритиш ҳисобига масалани каноник кўринишга келтирамиз:

$$\begin{array}{c} \underline{y_1 + y_2 + 2y_3 \to \max} \\ y_1 + 0{,}5y_2 + y_3 + y_4 = 1, \\ \underline{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 = 2,} \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,5}. \end{array}$$

Бу масала учун (0,0,0,1,2) базис режа бўлиб, унга a_4, a_5 бирлик векторлар мос келади. Базис режани оптималлика текширамиз (10.1 жадвал).

10.1-жадвал

▨	C / C_Б		1	1	2	0	0	
A / A_Б		X	A₁	a₂	a₃	A₄	a₅	θ
a₄	0	1	1	0,5	1	1	0	1
a₅	0	2	1	2	3	0	1	[illegible]
Z	▨	0	0	0	0	0	0	
Z-C	▨	▨	-1	-1	▲ -2 ▲	0	0	
					▨			
a₄	0	1/3	2/3	-1/6	0	1	-1/3	[illegible]
a₃	2	2/3	1/3	2/3	1	0	1/3	
Z	▨	4/3	2/3	4/3	2	0	2/3	
Z-C	▨	▨	▲ -1/3 ▲	1/3	0	0	2/3	
			▨					
a₁	1	1/2	1	-1/4	0	3/2	-1/2	
a₃	2	1/2	0	3/4	1	-1/2	1/2	
Z	▨	3/2	1	5/4	2	1/2	1/2	
Z-C	▨	▨	0	1/4	0	1/2	1/2	

Жадвалдан маълум бўлдики, $y_{опт} = \left({}^1\!/_2 ;0, {}^1\!/_2 \right) b'y^0_{опт} = {}^3\!/_2$.

Симплекс жадвалдан фойдаланиб, иккиланма масаланинг ечимини топиш қоидасига кўра, Z-сатрда, бирлик шарт векторлари остида, яъни a_4, a_5 векторлар остида $x_1^0 = 1/2, x_2^0 = 1/2$.

Шундай қилиб, дастлабки масалада $x_{опт} = \left({}^1\!/_2, {}^1\!/_2\right) c'x^0_{опт} = {}^3\!/_2$, яъни $c'x_{\max} = b'y_{\min}$.

2. Иккиланма сиплекс жадвал

Дейлик, чизиқли программалаштиришнинг каноник масаласи

$$\left.\begin{aligned} c'x &\to \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

ва унга иккиланма бўлган

$$\left.\begin{aligned} b'y &\to \min, \\ A'y &\geq c, \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

масала қаралаётган бўлсин. Бу ерда x ва y мос равишда n ва m ўлчовли векторлар. қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. Иккиланма масалада $(y_1,...,y_m)$ жоиз режанинг оптимал бўлиши учун b векторнинг $a_1,...,a_m$ базис бўйича ёйилмасидаги координаталарнинг манфий бўлмаслиги, яъни

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,m},$$

бажарилиши зарур ва етарлидир.

Бу теореманинг исботи юқорида баён этилган симплекс метод натижаларидан келиб чиқади. Масалани ечишда қулай восита бўлгани сабабли эътиборни симплекс жадвал учун эришилган натижаларга қаратайлик:

1. Симплекс метод ва иккиланма симплекс методда якуний симплекс жадвал бир хил бўлади.

2. Симплекс методда ҳисоблашлар b шарт вектори манфий бўлмаган компонентларга эга бўлган $a_i, i = 1,m$ базисдан бошланган эди. Иккиланма симплекс методда эса ҳисоблашлар $\Delta = Z - C$ вектори манфий бўлмаган $a_i, i = 1,m$ базисдан бошланади.

3. Симплекс методда қаралаётган режанинг оптималлиги жадвалда охирги Z-C сатр орқали аниқланса, иккиланма симплекс методда b устун ёрдамида аниқланади. Аниқроғи иккиланма масалада бирор $\{x_1,...,x_m,0,...,0\}$ режанинг оптимал бўлиши учун b векторнинг барча компонентлари манфий бўлмаслиги, яъни $x_i \geq 0, i = 1,m$, бўлиши зарур ва етарлидир.

4. Маълумки, каноник масалани симплекс метод ёрдамида ечишда Z-C сатрда бирор $(Z - C)_{j_0} < 0$ бўлиб, унга мос j_0 устундаги барча $x_{ij_0}, i = 1,m$, координаталар мусбат бўлмаса, масала ечимга эга бўлмас эди. Иккиланма симплекс методда эса агар b устун элементларидан бирортаси манфий бўлиб, мос сатрдаги барча координаталар манфий бўлмаса, асосий масала жоиз режага эга бўлмайди.

5. Агар юқорида баён қилинган шартлар бажарилмаса, симплекс жадвалда дастлаб Z-C сатр орқали ҳал қилувчи устун топилар эди. Иккиланма симплекс методда эса b устундаги минимал элемент x_i орқали ҳал қилувчи сатр аниқланади ва кейинги амаллар симплекс методдагидек кетма-кет бажарилаверади.

Натижа. Юқоридагиларни қўллаш мақсадида диета масаласини қарайлик (I боб, 3-§):

$$\begin{aligned} &c'x \to \min, \\ &Ax \geq b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \qquad (10.12)$$

Бу ерда x ва y векторлар мос равишда n ва m ўлчовли ҳамда $c_i > 0, i = \overline{1,n}$.

Диета масаласининг, каноник кўриниши қуйидагича бўлади:

$$
\begin{aligned}
& -c'x \to \max \\
& [Ax]_j - x_{n+j} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\
& x_k \geq 0, k = \overline{1,n+m}.
\end{aligned}
\qquad (10.13)
$$

Бу масалани бевосита симплекс метод ёрдамида ечиш анча ноқулай, чунки, масалан, сунъий базис усулини қўлламоқчи бўлсак яна m та янги ўзгарувчи киритиш лозим бўлади ва натижада номаълумлар сони n тадан n+2m тага ортади.

Бироқ иккиланма симлекс методни қўллаш анча самаралидир. ҳақиқатан, (10.13)га иккиланма масала қуйидагича

$$
\begin{aligned}
& b'y \to \min \\
& A'y \geq -c \\
& -y_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}.
\end{aligned}
$$

Бу масала учун эса дастлабки базис режа сифатида

$$a_{m-1} = -e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, a_{n+m} = -e_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$ векторларни олиш мумкин. Диета масаласида $c_i > 0, i = \overline{1,n}, c_{n+j} = 0,\ j = \overline{1,m}$, бўлгани сабабли иккиланма симплекс жадвалда Z-C сатр элементлари манфий бўлмайди:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{n+i} x_{n+i,j} + c_j \geq 0\,.$$

Яъни иккиланма симплекс методнинг зарурий шарти бажарилади. Кейинги қадамларда қилинадиган ишлар симплекс методдагидек бажарилади ва жараён оптимал ечимни топиш билан якунланади.

Мисол.

$$
\begin{gathered}
\underline{x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min} \\
2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\
x_1 - x_2 \geq 2, \\
3x_1 + x_3 \geq 0, \\
\underline{x_2 + 2x_3 \geq 1,} \\
x_1 \geq 0 j = 1{,}3.
\end{gathered}
$$

Масала диета ҳақидаги масала бўлгани сабабли дастлабки жадвал қуйидагича бўлади (10.2 жадвал).

10.2 -жадвал

	C \ $C_Б$		1	3	1
A \ $A_Б$		X	a_1	a_2	a_3
$-e_1$	0	-1	-2	-1	1
$-e_2$	0	-2	-1	1	0
$-e_3$	0	0	-3	0	-1
$-e_4$	0	-1	0	-1	-2
Z-C			1	3	1
$-e_1$	0	3	0	-3	1
a_1	1	2	1	-1	0
$-e_3$	0	6	0	-3	-1
$-e_4$	0	-1	0	-1	-2
Z-C			1	4	1
$-e_1$	0	5/2	0	5/2	0
a_1	1	2	1	-1	0
$-e_3$	0	13/2	0	7/2	0
a_3	1	1/2	0	1/2	1
Z-C			1	7/2	1/2

Оптимал режа: $x = \left\{2, 0, {}^{1}\!/_{2}\right\}$ $c'x_{\max} = \frac{5}{2}$.

11-§. Транспорт масалалари

1. Ёпиқ ва очиқ моделли транспорт масалалари

Чизиқли программалаштириш масалаларини ечишда юқорида баён қилинган симплекс усул чекли бўлса ҳам баъзан, шарт матрицасининг таркибига қараб, итерациялар сони етарли катта бўлиши мумкин. Баъзи ҳолларда А матрицанинг тузилиши умумий усулни четлаб ўтиб, жараённи тезлаштирувчи бошқа усулларни тавсия этишга имкон беради. Чизиқли программалаштиришда шарт матрицаси махсус таркибига эга бўлган масалалардан бири транспорт масаласидир. Бу масаланинг моҳияти фақат назариядагина эмас, балки унинг амалиётда кенг кўламда қўлланиб келинаётганлигидадир. Ривожланган транспорт тармоқларида транспорт масаласи ечимига таянган ҳолда иш кўриш яхши иқтисодий самара бермоқда.

Транспорт масаласининг математик модели 3-§ да келтирилган бўлиб, у қуйидагича эди:

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{11.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_{i} \tag{11.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_{j} \tag{11.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{11.4}$$

Агар таъминотчи ишлаб чиқарган ялпи маҳсулот истеъмолчи талаб этаётган ялпи маҳсулотга тенг бўлса, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{11.5}$$

шарт бажарилса, мос моделни ёпиқ модел деб аташади. Одатда, (11.5) шарт баланс шарти, яъни мувозанат шарти деб аталади.

Юқоридаги (11.2)-(11.3) шартлардан кўриниб турибдики, (11.1)-(11.5) масаланинг шарт матрицаси кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A=\begin{bmatrix} \overbrace{11...1}^{n} & \overbrace{00..0...}^{n} & \overbrace{00...0}^{n} \\ 00...0 & 11...1... & 00...0 \\ --- & --- & --- \\ 00...0 & 00...0... & 11...1 \\ 10...0 & 10...0... & 10...0 \\ 01...0 & 01...0... & 01...0 \\ --- & --- & --- \\ 00...1 & 00...1... & 00...1 \end{bmatrix}. \begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}m \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\end{matrix}$$

Бу матрицанинг ранги n+m-1 га тенг эканлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан, матрицада ҳаммаси бўлиб, m+n та сатр бўлиб, барчаси чизиқли боғлиқдир. Чунки дастлабки m та сатрни қўшиб, ундан қолган n та сатр йиғиндисини айирсак нол векторга эга бўламиз. Шунингдек, ихтиёрий m+n-1 та сатрнинг чизиқли эркли эканлигини кўриш мумкин.

Режа тушунчаси юқорида келтирилгандек сақланиб қолади, бироқ режанинг

$$\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}\}$$

кўринишида бўлишини эслатиб ўтиш ўринлидир.

Изоҳ. Агар транспорт масаласида (11.5) мувозанат шарти бажарилмаса, мос моделга очиқ транспорт масаласи деб аталади. Агар таъминотчининг ишлаб чиқариш жами қуввати истеъмолчилар талабидан ортиқ бўлса, яъни $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ шарт бажарилса, транспорт масаласи моделига қалбаки (n+1)- истеъмолчи пункти киритилади ва мос равишда юк ташиш тарифлари нолга тенг қилиб олинади. Шунингдек, масала матрицасида қўшимча устун киритилиб, унга

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

катталиклар жойлаштирилади. Натижада, масала ёпиқ типдаги масалага айланади.

Агар мос равишда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

шарт бажарилса, қалбаки, (m+1)- таъминотчи пункти киритилади ва юқоридагидек, яна ёпиқ типдаги моделга ўтилади.

Юқоридаги изоҳ асосий натижаларни ёпиқ типдаги масала учун баён қилиш имконини беради.

Теорема. Ёпиқ типдаги транспорт масаласи ечимга эга бўлиши учун, мувозанат шартининг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. Дейлик, $\{x_{ij}\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, оптимал ташиш режаси бўлсин. У ҳолда (11.2), (11.3) дан, уларни барча индекслар бўйича йиғиб топамиз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

яъни мувозанатлик шарти бажарилади.

Етарлилиги. Дейлик, мувозанат шарти бажарилсин:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha > 0.$$

Юк ташиш режасини қуйидагича қуриб олайлик $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{\alpha}$.

Бу жоиз режа, чунки $x_{ij} > 0$ ва

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{a_i}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \frac{b_j}{\alpha}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

яъни жоиз режалар тўплами бўш эмас. Ундан ташқари, (11.2)-(11.4) шартларга асосан, у тўплам ёпиқ. Шунингдек, унинг чегараланганлиги ҳам равшан:

$$x_{ij} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j < \sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha .$$

Узлуксиз (11.1) функция чегараланган ёпиқ тўпламда минимумга эришади, яъни (11.1)-(11.4) масала ечимга эга. Теорема исботланди.

Натижа. Ҳар қандай ёпиқ типдаги транспорт масаласи ечимга эгадир.

2. Дастлабки режани топиш усуллари

2.1. Шимоли-ғарбий бурчак усули

Транспорт масаласини ечишда дастлабки режани омадли топиш катта рол ўйнайди. Агар режа оптимал режага яқин бўлса, кейинги ҳисоблашлар сони кескин камаяди.

«Шимоли-ғарбий бурчак» усулининг алгоритми қуйидагича. Дейлик, ёпиқ моделли транспорт масаласи қаралаётган бўлиб, у қуйидаги 11.1 жадвал кўринишида ифодаланган бўлсин:

11.1-жадвал

Истеъмолчи / Таъминотчи	B_1	B_2	...	B_n	Заҳира миқдори
A_1	C_{11}	C_{12}		C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
. . .	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
Маҳсулотга бўлган талаб миқдори	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Бу ерда ташилиши лозим бўлган юк бир жинсли бўлиб, бирлик миқдордаги юкнинг ташиш тарифлари $c_{ij}, i = 1,m; j = 1,n$, мос равишда катакларнинг юқори ўнг бурчагида ёзиб қўйилган.

Мазкур усулда юкларни истеъмолчиларга тақсимлашни жадвалнинг шимоли-ғарбий бурчагидан бошлаш тавсия этилади. Жадвалдаги (1,1) номерли катакка мос келувчи юк миқдорилари мос равишда a_1 ва b_1 дан иборат бўлгани сабабли бу катакка шу сонларнинг кичигини жойлаштирамиз. Агар бу сонни x_{11} деб белгиласак, $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ бўлади. Агар $a_1 > b_1$ булса, $x_{11} = b_1$ бўлиб, B_1 истеъмолчи бошқа маҳсулот талаб этмайди, яъни биринчи устундаги қолган барча катакларга юк тақсимланмайди. Шу сабабли у катаклар бўш қолдирилади. Агар $b_1 > a_1$ бўлса, $x_{11} = a_1$ бўлиб, A_1 таъминотчи бошқа юк тарқатмайди, яъни биринчи сатрдаги қолган барча катаклар бўш қолдирилади.

Дейлик, аниқлик учун, $a_1 > b_1$ бўлсин. Демак, бу ҳолда биринчи устундаги барча катаклар тўлдирилган бўлгани учун, яна эътиборни қолган катакларнинг энг шимоли-ғарбий катаги бўлган (1,2) катакка қараймиз. Бу катакни тўлдириш учун ҳам худди юқоридаги тадбирларни такрорлаймиз, яъни

$$x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$$

сони шу катакка ёзиб қуямиз. Агар $a_1 - b_1 > b_2$ бўлса, $x_{12} = b_2$ бўлиб, иккинчи устдаги барча катакларга бўш қолдирилади, агар $a_1 - b_1 < b_2$ бўлса, биринчи сатрдаги қолган барча катаклар бўш қолдирилади. Бу тадбирни сўнгги катакни тўлдиргунча давом этдириб, натажади, ушбу

$$\{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}\}$$

режага эга бўламиз. Бу режанинг кўплаб элементлариноллардан иборат бўлади.

11.1-масала. Учта кўмир омборидан тўртта иситиш тармоғига кўмирни талабга мос равишда «шимоли-ғарбий» усулдан фойдаланиб тарқатинг. Захира, талаб ва тарифлар миқдорлари жадвалда келтирилган (11.2- жадвал).

11.2-жадвал

b_j a_i	75	80	60	85
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	3	10	20	4

Масалани тўлиқ жадвал шаклида ифодалаб, «шимоли-ғарбий» усулни қўлласак, натижада қуйидаги 11.3- жадвалга эга бўламиз.

11.3-жадвал

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Захира миқдори
A_1	6 75	7 25	3	5	100
A_2	1	2 55	5 60	6 35	150
A_3	3	10	20	4 50	50
Талаб миқдори	75	80	60	85	300

Жадвалдан маълум бўлдики, режа {75,25,0,0,0,55,60,35,0,0, 0,50} бўлиб, транспорт харажати 6*75+7*25+2*55+60*5+6*35+ +4*50=1445 бирлик пулни ташкил этади.

2.2. Минимал харажатлар усули

Юқорида баён этилган усулда, режани топиш жараёнида транспорт харажатлари инобатга олинмади. Бу эса таъминотчи ва истеъмолчини қаноатлантирувчи режадан анча узоқ бўлиши мумкин. Шу сабабли, дастлабки режани тузишда c_{ij} тарифларни ҳисобга олиш яхши самара беради.

Минимал харажатлар усулининг моҳияти шундаки, ҳар гал истеъмолчининг талаби қондирилаётган пайтда энг кам харажатли катак тўлдириб борилади. Яъни агар c_{ke} энг кам харажатни ифодаласа, (k,e) катакка min(a_k,b_e) ни ёзамиз. Натижада, a_k ва b_e нинг қийматларига қараб, ё k-сатр, ёки e-устуннинг қолган катаклари ноллар билан тўлдирилади. Агар энг кичик тарифни ифодаловчи сон бирнечта бўлса, уларнинг ихтиёрий бирини танлаш мумкин. Сўнгра навбатдаги кичик тариф қаралади ва бу жараён охирги катак тўлдирилгунча давом этдирилади.

Транспорт харажатини таққослаш мақсадида, юқорида қаралган 11.1-масаланинг дастлабки режасини минимал харажатлар усули билан топсак, қуйидаги 11.4 -жадвалга эга бўламиз.

11.4-жадвал

B_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Захира миқдори
A_1	6	7 5	3 60	5 35	100
A_2	1 75	2 75	5	6	150
A_3	3	10	20	4 50	50
Талаб миқдори	75	80	60	85	300

Жадвалга асосан, дастлабки режа (0,5,60,35,75,75,0,0,0,0, 0,50) бўлиб, мос транпорт харажатлари 5*7+60*3+35*5+75*1+ +75*2+50*4=815 бирлик пулни ташкил этади. Бу харажат, шимолиғарбий усулдаги харажатдан анча кам эканлигини пайқаш қийин эмас.

3. Потенциаллар усули

Бирор усул билан топилган бошланғич режа умуман олганда оптимал режа бўлавермайди, бироқ усулнинг самарасига қараб, оптимал режага яқинроқ бўлиши мумкин. Ҳар қандай ёпиқ моделли транспорт масаласи оптимал режага эга эканлигини инобатга олиб, оптимал режани топиш усулларидан бири бўлган потенциаллар усулини баён қиламиз. Бу усулда, дастлабки режа топилгандан сўнг, ҳар бир таъминотчи ва истеъмолчига, потенциал деб аталувчи $u_i, i=\overline{1,m}$ ва v_j, $j=\overline{1,n}$ сонларни мос қўямиз. Бу сонларни аниқлаш учун, жадвалдаги барча банд (юк тақсимланган) катаклар учун потенциалларни аниқловчи тенгламалар тузамиз. Дейлик, (i,j)- катак банд бўлсин. У ҳолда u_i ва v_j ларни шундай танлаймизки, уларнинг йиғиндиси мос тарифга тенг бўлсин:

$$u_i + v_j = c_{ij}\ .$$

Барча u_i ва v_j миқдорлар сони n+m та, банд катаклар сони эса n+m-1 та бўлгани сабабли, n+m та номаълумни топиш учун n+m-1 та тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламалардан номаълумларни бир қийматли топиб бўлмаслиги туфайли, номаълумлардан бирини ихтиёрий танлаймиз (масалан, $u_1=0$ деб танлаймиз), шунда қолган ўзгарувчилар бир қийматли аниқланади.

Оптималлик шартини текшириш мақсадида барча бўш (юк тақсимланмаган) каттаклар учун қалбаки тариф киритамиз:

$$c'_{ke} = u_k + v_e\ .$$

Сўнгра ҳар бир бўш катак учун шу катакка мос тариф ва қалбаки тарифлар фарқини ҳисоблаймиз:

$$s_{ke} = c_{ke} - c'_{ke}\ .$$

Қаралаётган масала учун ўринли бўлган ушбу теоремани келтирайлик:

Теорема. Транспорт масаласида қаралаётган режа оптимал бўлиши учун, барча банд катаклар учун

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

бўлиши ва барча бўш катаклар учун

$$s_{ke} = c_{ke} - c'_{ke} \geq 0$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теорема исботи иккиланмалик назарияси натижаларидан келиб чиқади.

Оптимал режани топиш алгоритмини давом эттирайлик. Агар оптималлик шарти бажарилса, қаралаётган режа оптимал бўлади. Дейлик, оптималллик шарти бажарилмасин, яъни s_{ke} сонлар ичида манфийлари бор бўлсин. Бундай сонларнинг борлиги планни янада «яхшилаш» имкониятини беради. Шу мақсадда, манфий s_{ke} лар ичидан энг кичигини танлаймиз (агар ягона бўлса ўзини, энг кичиги бир нечта бўлса, улардан ихтиёрий биттасини танлаймиз). Танланган катакни қутб деб атаймиз ва унга ⊕ ишорасини қўйиб, уни банд катаклар сафига қўшамиз. Натижада, жадвалдаги банд катаклар сони n+m тага етади ва бир учи қутбда қолган учлари банд катаклардан иборат ягона цикл қуриш мумкин бўлади. Сўнгра, цикл бўйлаб, қутбдан бошлаб, қутбнинг барча учларига соат стрелкаси йўналиши бўйлаб навбат билан ⊕ ва - ишорасини қўйиб чиқамиз. Барча - ишорага мос келувчи юкларни таққослаб, энг кичик юкни ўлчов миқдори сифатида қабул қилиб, - ишорали ка таклардаги юк миқдоридан ўлчов миқдорини айириб, устун бўйича, ⊕ ишорали катаклардаги юкка қўшамиз. Натижада янги режа ҳосил бўлади. Янги режа учун яна потенциалларни аниқлаб, оптималлик шарти бажарилмаса, юқоридаги тадбирларни оптимал режани топгунча давом эттирамиз ва чекли қадамдан сўнг оптимал режа топилади.

12-§. Бутун сонли чизиқли программалаштириш масаласининг қўйилиши

Бутун сонли чизиқли программалаштириш (БСЧП) чизиқли программалашнинг чуқур ўрганилган бўлими ҳисобланади. БСЧП масалаларини ечишнинг бир неча методлари мавжуд бўлиб, бу методлар масалани ечишга ёндашиши билан асосан учта гуруҳга бўлинади.

Биринчи гуруҳдаги методлар кесувчи текисликлар методи дейилади. Бундай ном билан аталишига сабаб, аввал масала бутунлилик шартисиз бирор метод билан ечилади, агар ечим бутунлилик шартини қаноатлантирса, берилган масала ечилган бўлади. Акс ҳолда эса шундай янги чегара қўшиладики, натижада масала ечимлари тўпламининг бир қисми кесиб ташланади. Бунда янги чегара бошланғич масалани бирорта ҳам ечимини йўқотмайди ва қўшимча чегарага мос келган гипертекислик берилган масала ечимлари тўпламининг камида битта бутун координаталар ечимидан ўтади. Бу янги соҳада масала бутунлилик шартсиз ечилади. Агар ечим бутунлилик шартини қаноатлантирса, берилган бошланғич масала ечилган бўлади, акс ҳолда янги чегара қўшилиб жараён қайтарилади. Жараён чегараланганлигини таъминлаш учун айрим ҳолларда қўшимча чегаралар ҳам қўшилиши мумкин. Таъкидлаш керакки, бутунлилик шартисиз топилган оптимал ечимни бутунгача яхлитлаш билан берилган масаланинг ечимини умуман олганда ҳосил қилиб бўлмайди. Бу гуруҳга тегишли бўлган, Р.Гомори, Р.Д. Юнг томонларидан яратилган учта методни: циклик, тўла бутун сонли, тўғри методларни кўриб чиқамиз.

Иккинчи гуруҳ методлари асосан кетма-кет кўриб чиқиш ғоясига асосланган бўлиб, бунда кўриб чиқиш сони чегараланганлиги ва масалани комбинатор характерга эгалиги муҳим рол ўйнайди. Бундай методлардан энг кўп ишлатиладигани тармоқлар ва чегаралар методидир. Бу метод 1960 йилда Ленд ва Дойг томонидан «сайёр савдогар» масаласини ечиш учун топилган бўлиб, кейинчалик дискрет программалаш масаласини ечиш учун мослаштирилган.

БСЧП масалаларини ечишда ишлатиладиган кўпгина методларнинг асосий ғояси масалани чизиқли программалаш (ЧП) масаласига келтириш ва ечимлар тўпламини торайтириб бориш ҳисобига бошланғич масалани ечишга асосланган. Бунда, албатта, чизиқли программалаш масаласининг ечимлари тўплами бошланғич масала ечимлари тўпламига қараганда кенгроқ бўлади. Шунинг учун БСЧП масалаларини ечишда кўп ҳолларда чизиқли программалаш методларига мурожаат қилишга тўғри келади.

Юқорида биз чизиқли программалаш масаласининг қўйилишини кўрдик. Агар ўзгарувчиларга яна қўшимча шарт: барча ўзгарувчиларни ёки уларнинг бир қисмини бутунлилиги талаб қилинса, биз мос равишда тўла бутун сонли ёки қисман бутун сонли чизиқли программалаш масаласига келамиз. Шундай қилиб БСЧП масаласи қуйидагича: ушбу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq a_{i0}, \; i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,\ldots,n \qquad ,$$

$$x_j \, бутун \; j = 1,2,\ldots,n_1 \leq n \, ,$$

шартлар остида

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} \left(-x_j\right)$$

функциянинг экстремуми топилсин.

Масалани қуйидаги кўринишга келтириш қулайлик туғдиради:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} \left(-x_j\right) \rightarrow \max, \tag{12.1}$$

$$x_{n+1} = a_{n+i0} - a_{n+1,1} x_1 - \cdots - a_{n+in} x_n \, ,$$

$$\text{— — — — — — —}$$

$$x_{n+m} = a_{n+m0} - a_{n+m1} x_1 - \cdots - a_{n+mn} x_n \, , \tag{12.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n+m, \tag{12.3}$$

$$x_j \, бутун \quad j = 1,2,\ldots,n_1 \leq n+m. \tag{12.4}$$

Таъкидлаб ўтамизки, бунда масаланинг тўла ёки қисман бутунлилик шарти ўзгармайди. Энди БСЧП масаласига доир бир нечта мисолларни кўриб чиқайлик.

1-мисол. Дарё кемачилик бошқармаси шуни аниқладики, n та маршрутнинг ҳар бир маршрути бўйича сезон давомида ўртача сондаги йўловчилар юрар экан. Транспорт воситасини ишлатилиш самарадорлиги ҳар бир маршрут бўйича ишлатилиш самарадорликлари йиғиндисидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири ўз навбатида мос рейсдан келадиган фойда билан рейсга кетган харажат айирмасига тенг. Фойда сотилган билетлар сони билан, хизматчиларга кетган ҳақ ва ёқилғи учун кетган сарфлар орқали аниқланади. қайси маршрутга қандай типдаги кемадан нечтадан ажратилса, йўловчилар талаби тўла қондирилади ва келадиган фойда максимал бўлади?

Фараз қилайлик, j - маршрут бўйича сезон давомида b_j та йўловчи қатнасин: Бу маршрутда 1,2.........,m типдаги кемалардан фойдаланиш мумкин ва ҳар бир i - типдаги кема учун қуйидаги кўрсаткичлар маълум:

1) a_{i1} - юк кўтаришлик (ўринлар сони);

2) a_{i2} - хизмат кўрсатувчилар сони;

3) a_{i3} - сезон давомида сарфланадиган ёқилғи миқдори;

4) c_{ij} - j маршрут бўйича i - типдаги битта кема ишлатилганда келадиган фойда;

5) Сезон давомида ишлатиладиган ёқилғи миқдори b_3 дан, хизмат кўрсатувчилар сони эса b_2 дан ошмасин. x_{ij} -миқдор j-маршрутдаги i-типидаги кемалар сонини билдирсин. У ҳолда, шартга кўра чекланишлар қуйидагича бўлади:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_{ij} \geq b_j^1, j = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_{ij} \leq b_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i3} x_{ij} \leq b_3,$$

$$x_{ij} \geq 0\text{–}бутун$$

$$i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n.$$

Масаланинг қўйилишига асосан, шу берилган соҳада шундай $x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ векторларни топиш керакки, у

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

функциясига максимал қиймат берсин.

2-мисол. Фараз қилайлик n та турли типдаги самолётлар бўлиб, уларни n та йўналишга тақсимлаш лозим бўлсин.

Агар i-типдаги самолёт j-йўналишга қўйилса, бундан келадиган фойда c_{ij} га тенг. Самолётларни йўналишларга шундай тақсимлаш керакки, натижавий фойда максимал бўлсин.

Бу масалани ечиш учун қуйидагича ўзгарувчилар киритамиз

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, агар\ i - самолёт\ j\ йўналишга\ қўйилса, \\ 0, акс\ холда \end{cases}$$

у ҳолда, биз қуйидаги БСЧП масаласига келамиз:

1. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$ (ҳар бир йўналишга битта самолёт тайинланади);

2. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (ҳар бир самолёт фақат битта йўналишга тайинланади),

шу шартлар остида

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

функциянинг максимумини топинг.

Маълумки, ўзгарувчи фақат иккита 0 ва 1 қийматларни қабул қилса, бундай ўзгарувчи Буль ўзгарувчиси дейилади. Шунга асосан, бундай ўзгарувчиси бўлган масалалар Буль масалалари деб юритилади. Биз кўрган 2-масала ҳудди шундай масалалардан биридир.

13-§. Кесувчи текисликлар методи

Бу бўлимда биз I – гуруҳга тегишли бўлган циклик, тўла бутун сонли ва тўғри методларни кўриб чиқамиз. Буларни биринчи иккитаси Гомори, учинчиси Юнг методлари деб ҳам аталади. Бу методлар асосида симплекс-метод ётади. Тўла бутун сонли ва тўғри методларни циклик методдан асосий фарқи шундаки, агар уларда бошланғич жадвал бутун элементлардан иборат бўлса, кейинги жадвалларда ҳам бутунлилик сақланиб қолади.

Бу методларни баён қилиш давомида учрайдиган айрим белгилашлар, ўзгаришлар ва таърифларни келтирайлик. Берилган масала диагонал ҳолга келтирилган деб фараз қилинади:

$$x_0 = a_{00} - a_{01}x_1 - \cdots - a_{0n}x_n \to \max, \qquad (13.1)$$

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = a_{n+10} - a_{n+11}x_1 - \dots - a_{n+1n}x_n, \\ \text{\_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_} \\ x_{n+m} = a_{n+m0} - a_{n+m1}x_1 - \dots - a_{n+mn}x_n, \end{array} \tag{13.2}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n+m, \tag{13.3}$$

$$x_j - \text{бутун } j = 1,2,\dots,n_1. \tag{13.4}$$

Энди биз (13.1)-(13.2) тенгликлар ёрдамида қуйидаги жадвални тузишимиз мумкин.

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$x_0=$	a_{00}	a_{01}	...	a_{0n}
$x_{n+1}=$	$a_{n+1,0}$	$a_{n+1,1}$	...	$a_{n+1,n}$
...	...	...	...	...
$x_{n+m}=$	$a_{n+m,0}$	$a_{n+m,1}$	...	$a_{n+m,n}$

X_0 - сатр 0 - сатр деб, 1 - устун озод қадлар устуни дейилади, - $-x_i (i=1,2,\dots,n)$ устун элементларидан тузилган векторни $\alpha_i (i=1,2,\dots,n)$ билан белгилаймиз.

Таъриф. α_i вектор α_j вектордан лексикографик маънода кичик дейилади (белгиланади $\alpha_i \prec \alpha_j$), агар $c = \alpha_i - \alpha_j$ векторнинг нолдан фарқли биринчи элементи манфий сондан иборат бўлса.

Худди шундай, лексикографик маънодаката ($\alpha_i \succ \alpha_j$), кичик эмас ($\alpha_i \geq \alpha_j$), катта эмас ($\alpha_i \leq \alpha_j$) таърифларни ҳам киритиш мумкин.

1. Гоморининг биринчи алгоритми

Бу алгоритм тўла бутун сонли масалалар учун мўлжалланган бўлиб, бунда асосан симплекс методдан фойдаланади.

Қуйидаги БСЧП масаласини кўрайлик:

$$\begin{array}{l} x_0 = a_{00} - a_{01}x_1 - \dots - a_{0n}x_n \to \max, \\ x_i = -(-x_i), \ i = 1,2,\dots,n, \end{array} \tag{13.5}$$

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = a_{n+10} - a_{n+11}x_1 - \dots - a_{n+1n}x_n \\ \text{\_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_ \_\_\_} \\ x_{n+m} = a_{n+m0} - a_{n+m1}x_1 - \dots - a_{n+mn}x_n, \end{array} \tag{13.6}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n+m, \tag{13.7}$$

$$x_j - \textit{бутун} \quad j = 1,2,\dots,n+m. \tag{13.8}$$

Бу ерда $x_i = -(-x_i)$ айниятларнинг қўшилиши масала ечимини аниқлашни осонлаштиради.

Энди бевосита алгоритмни баён қилишга ўтамиз. Бунинг учун (13.5) - (13.7) масалага мос жадвални тузамиз.

	1	$-x_1$	$-x_2$		$-x_n$
$x_0=$	a_{00}	a_{01}	a_{02}		a_{0n}
$x_1=$	0	-1	0		0
$\vdots$					
$x_n=$	0	0	0		-1
$\vdots$					
$x_{n+m}=$	a_{n+m0}	a_{n+m1}	a_{n+m2}		a_{n-mn}

Бу ерда, жадвал иккиланма жоиз ва унинг барча элементлари бутун сонлардан иборат деб фараз қилинади. Агар жадвал иккиланма жоиз бўлмаса, у ҳолда, янги

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - x_2 - \cdots - x_n$$

(бу ерда M - етарлича катта сон) чегара қўшилиб, шу сатр ва лексикографик маънода минимум бўлган устун ёрдамида битта итерация амалга оширилади. Шундан кейин жадвал иккиланма жоиз бўлиб қолади. Агар $a_{i0} \geq 0,\ i = 1,2,...,n+m$ ва бутун бўлса, масала ечилган бўлади, акс ҳолда жадвал тагига янги шундай чегара қўшиладики, бу билан жадвал тўғри жоиз бўлмай қолади. Кейин иккиланма симплекс метод ёрдамида жадвал тўғри жоиз ҳолатга келтирилади. Шундан кейин ҳам $a_{i0}(i = 1,2,...,n+m)$ ларни бирортаси бутун сондан иборат бўлмаса, яна янги чегара қўшилади ва жараён қайтарилади.

Эҳтимолдан ҳоли эмаски, етарлича чекли чегара қўшишдан сўнг биз учлари бутун координатали нуқталардан иборат бўлган кичрайтирилган соҳага эга бўламиз. Бу соҳада бошланғич масаланинг оптимал ечимини аниқлаш қийинчилик туғдирмайди. Лекин бу ерда янги чегараларни топиш ва алгоритмнинг чеклилигини кўрсатиш қийинчилиги мавжуд. Энди янги чегараларни топиш йўлини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, (13.8) шартни ҳисобга олмай ечилган масалада бирор ўзгарувчи-ни қиймати бутун сондан иборат бўлмасин, у ҳолда соддалик учун индексни ташлаб юборсак, мос тенглама қуйидаги кўринишда бўлади.

$$x = a_0 + \sum_{j\in J} a_j(-x_j). \qquad (13.9)$$

Бу ерда J жадвал юқорисида ёзилган ўзгарувчиларнинг индекслари тўплами.

Маълумки, a соннинг бутун қисми деб, a дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади ва $[a]$ орқали белгиланади. Масалан: $[2{,}6]=2$, $[-1{,}3]=-2$. Ушбу $f=a-[a]$ қиймат a сонини каср қисми дейилади. (13.9) тенгламада иштирок этаётган озод ҳад ва коэффициентлардан қуйидаги каср қисмларини ҳосил қиламиз

$$f_0=a_0-[a_0],\ \ f_j=a_j-[a_j],\ \ j\in J.$$

1-теорема. Агар $x=(x_1,...,x_{n+m})$ (13.5) - (13.8) масаланинг жоиз ечими бўлса, у ҳолда қуйидагича аниқланган S ўзгарувчи

$$S=-f_0+\sum_{j\in J} f_j x_j \qquad (13.10)$$

манфий эмас ҳамда бутун бўлади.

Исботи. Аввал биз S ни бутунлигини исботлайлик.
(13.9)тенгликдан

$$x=[a_0]+f_0+\sum_{j\in J}\{[a_j]+f_j\}(-x_j)$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан элементар алмаштиришлар ёрдамида қуйидаги тенгликка келамиз

$$S=-x+[a_0]+\sum_{j\subset J}[a_j](-x_j)$$

Бутун қисмнинг аниқланиши ва теорема шартига асосан бу тенгликни ўнг қисми бутун, демак S ҳам бутун.

Энди S нинг манфий эмаслигини кўрсатайлик. Бунинг учун тескарисини фараз қиламиз, яъни $S<0$ бўлсин. Каср қисмларнинг аниқланишига асосан $0\le f_0, f_i<1$ ва x_j лар (13.7) шартни қаноатлантиришини назарга олсак, унда қуйидаги

$$-1<f_0+\sum_{j\in J} f_j x_j<0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан $-1<S<0$, яъни S бутун эмас. Бу юқоридаги тасдиққа зиддир, демак $S\ge 0$.

Шу билан теорема тўла исбот бўлди.

Алгоритм давомида (13.10) тенгламага мос сатр жадвал тагига ёзилади ва у ҳал қилувчи сатр сифатида олинади, чунки у базис ўзгарувчи бўлиб, манфий $-f_0$ қийматга эга. Кейинги итерацияда у нобазис ўзгарувчи бўлиб, ҳал қилувчи сатр S=(-1)(-S) айниятга айланиб ҳолади ва кейинчалик у ташлаб юборилади. (10) тенгламадаги S Гомори ўзгарувчиси деб аталади. Агар жоиз ечимлар тўплами чегараланган соҳадан иборат бўлса, алгоритм чекли бўлади. Алгоритм қуйидаги қадамлардан иборат бўлади.

1. Худди чизиқли программалаш масаласи каби (13.5) - (13.7) масала симплекс - ёки иккиланма симплекс методи билан ечилсин. Агар $a_{i0} \ge 0,\ i=1,...,n+m;\ a_{0j} \ge 0,\ j=1,2,...,n$ бўлса, оптимал ечим топилган бўлади. (охирги жадвалда $\alpha_j \succ 0, j=1,2,...,n$ бўлишлигини ҳам талаб қиламиз).

2. Агар $a_{i0}(i=1,...,n+m)$ ларни барчаси бутун бўлса (5)-(8) масала ечилган бўлади, акс ҳолда, каср сонга мос келган сатр ҳосил қиладиган сатр деб олиниб, (13.9) тенглама тузилади ва у жадвал тагига ёзиб қўйилади. Бу билан жадвал тўғри жоизмас бўлиб, иккиланма жоиз бўлиб қолаверади. Кейин, охирги сатрни ҳал қилувчи сатр сифатида, иккиланма симплекс-метод билан бу масала ечилади. 1,2 қадамлар озод ҳадлар устунида бутун сонлар ҳосил бўлгунга қадар қайтарилади (агар a_{00} бутунмас сондан иборат бўлса, 0-сатр ҳам ҳосил қиладиган сатр сифатида ҳам олиниши мумкин).

Энди циклик алгоритм ёрдамида қуйидаги мисолни ечайлик. **Мисол**. қуйидаги бутун сонли чизиқли программалаш масаласи берилган бўлсин

$$x_0 = 7x_1 + 9x_2 \to \max,$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$7x_1 + x_2 \le 35,$$
$$x_1, x_2 \ge 0 - \textit{бутун}.$$

Тенгсизликларни чап томонга мос равишда $x_3, x_4 \ge 0$ ларни қўшиб, диагонал кўринишга келтирамиз

$$
\begin{aligned}
&x_0 = -7(-x_1) - 9(-x_2),\\
&x_1 = -(-x_1),\\
&x_2 = -(-x_2),\\
&x_3 = 6 - (-x_1) + 3(-x_2),\\
&x_4 = 35 + 7(-x_1) + (-x_2),\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 - \textit{бутун}
\end{aligned}
$$

Алгоритмга асосан аввал x_1, x_2, x_3, x_4 ларни бутунлигини талаб қилмасдан симплекс метод билан ечамиз. Бунинг учун 1-жадвални тузиб, унга симплекс методни қўлласак 3-жадвалдаги $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$ оптимал ечимга эга бўламиз.

1-жадвал

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_0	0	-7	-9
$x_1=$	0	-1	0
$x_2=$	0	0	-1
$x_3=$	6	-1	3
$x_4=$	35	7	1

2-жадвал

1	$-x_1$	$-x_2$
18	-10	3
0	-1	0
2	-1/3	1/3
0	0	-1
33	22/3	-1/3

3-жадвал

	1	$-x_1$	$-x_2$
	63	15/11	28/11
	9/2	3/22	-1/22
	7/2	1/22	7/22
	0	0	-1
	0	-1	0
S_1	-1/2	-3/22	-21/22

3-жадвалда ўзгарувчи $x_1\left(=\frac{9}{2}\right)$ каср ечимга эга, шунинг учун бу сатр ҳосил қиладиган сатр деб олинади ва бу сатр элементларини каср қисми ёрдамида янги сатр тузилади. Бу янги сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади. Ҳал қилувчи устун топилиб иккиланма симплекс метод ёрдамида кейинги 4-жадвалга ўтилади. Бунда x_0 жойлашган сатрнинг биринчи элементи каср сондан иборат бўлганлиги учун бу сатр ҳосил қиладиган сатрдир. Яна янги сатр қўшилиб, у ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади ва ҳоказо. Бу жараён озод ҳадлар устунида бутун сонлар пайдо бўлгунча давом эттирилади, ёки бундай ечим йўқлиги кўрсатилади. Бу масалада 5-жадвалда $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ оптимал ечимга эга бўламиз, мақсад функциянинг қиймати эса $x_0 = 55$ га тенг бўлади.

4-жадвал

	1	$-x_4$	$-s_1$
$x_0=$	185/3	1	8/3
$x_1=$	95/21	1/7	-1/21
$x_2=$	10/3	0	1/3
$x_3=$	11/21	1/7	-22/21
$x_4=$	0	-1	0
$s_5=$	-2/3	0	-2/3

5-жадвал

	1	$-s_5$	$-s_3$
$x_0=$	55	5/2	2
$x_1=$	4	1	-1
$x_2=$	3	-1/2	1
$x_3=$	1	5/2	-4
$x_4=$	4	-13/2	26/5

2. Тўла бутун сонли метод

Бу методнинг тўла бутун сонли деб аталишига сабаб, агар бошланғич жадвал элементлари бутун сонлардан иборат бўлса, кейинги итерация жадвали элементлари ҳам бутун сонлардан иборат бўлади. Бошланғич жадвал иккиланма жоиз бўлса, кейинчалик ҳам бу хосса сақланиб қолади. Агар $a_{i0}(i = 1,2,\dots,n+m)$ ларнинг барчаси манфиймас бўлмаса, масала ечилган бўлади. Акс ҳолда, ҳал қилувчи элемент - 1 бўлган янги ҳал қилувчи сатр тузилади ва иккиланма симплекс метод ёрдамида янги жадвалга ўтилади. Бу ерда ҳосил қиладиган сатр сифатида энг кичик индексли $a_{i0} < 0(i = 1,2,\dots,n+m)$ олинади.

Бизга қуйидаги БСЧП масаласи берилган бўлсин:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max,$$

$$x_i = -(-x_i), j = 1,2,\dots,n,$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1j}(-x_j), \qquad (13.11)$$

$$\text{— — — — — —}$$

$$x_{n+m} = a_{n+m0} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+mj}(-x_j), \qquad (13.12)$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n+m, \qquad (13.13)$$

$$x_j,\ j = 1,2,\dots,n+m - \textit{бутун}. \qquad (13.14)$$

Фараз қилайлик

$$x = a_0 + \sum_{j\in J} a_j(-x_j) \qquad (13.15)$$

бирор бўлмаган сатрга мос индекссиз ёзилган тенглама бўлсин (бу ерда J базис ўзгарувчиларнинг индекслар тўплами).

Теорема. Фараз қилайлик, λ бирор мусбат сон бўлиб, (13.15) тенгламадаги x, x_j $(j \in J)$ лар манфиймас, бутун бўлишсин. У ҳолда

$$S = \left[\frac{a_0}{\lambda}\right] + \sum_{j \in J} \left[\frac{a_j}{\lambda}\right](-x_j) \qquad (13.16)$$

тенглик билан аниқланган S манфиймас ва бутун бўлади.

Исбот. S ни бутунлиги соннинг бутун қисмини аниқланиши ва x_j $(j \in J)$ ларни бутунлигидан келиб чиқади. Манфий эмаслигини кўрсатиш учун тескарисини фараз этайлик, яъни $S<0$, у ҳолда S нинг бутунлигидан $S \leq -1$ эканлиги келиб чиқади.

Шунингдек (13.5) тенгламадан ушбуга эга бўламиз

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{a_0}{\lambda} + \sum_{j \in J} \frac{a_j}{\lambda}(-x_j)$$

ёки

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j \in J} f_j x_j = f_0 + S, \qquad (13.17)$$

бу ерда

$$f_j = \frac{a_j}{\lambda} - \left[\frac{a_j}{\lambda}\right], \; j \in \{0\} \cup J\,. \qquad (13.18)$$

(13.17) ва (13.18) тенгликлардан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$\frac{x}{\lambda} + \sum_{j \in J} f_j x_j \leq f_0 - 1 < 0\,.$$

Лекин бундай бўлиши мумкин эмас, чунки чап томондаги биринчи ифода мусбат. Бу зиддият теоремани исботлайди.

Бошланғич жадвал иккиланма жоиз бўлиши керак, агар бу шарт бажарилмаса, янги

$$x_{n+m+1} = M - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$$

сатр қўшиш билан худди циклик алгоритмдаги каби иккиланма жоиз жадвалга ўтишимиз мумкин (бу ерда M - етарлича катта сон). Энди алгоритмни бевосита баён қилишга ўтамиз:

1. Бошланғич жадвал элементлари бутун сонлардан иборат ва иккиланма жоиз жадвал бўлсин;

2. $a_{i0} < 0$ $(i = 1,...,n+m)$ шартни қаноатлантирувчи энг кичик индексли V - сатр танлаб олинсин, бу сатр ҳосил қиладиган сатр бўлади (агар $a_{i0} \ge 0, i = 1,2,...,n+m$ бўлса, у ҳолда масала ечилган бўлади);

3. Мусбат λ танлаб олинсин (уни танлаш шарти қуйида келтирилган) ва жадвал тагига қуйидаги тенгламага мос сатр ёзилсин

$$S = \left[\frac{a_{v0}}{\lambda}\right] + \sum_{j\in J}\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right](-x_j).$$

Бу сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади;

4. Иккиланма симплекс метод билан кейинги жадвалга ўтилсин, охирги қўшимча сатр ўчирилсин ва 2-қадамга қайтиб ўтилсин.

Энди λ сонини танлаш шартини келтирайлик:

а) ҳал қилувчи элемент - 1 га тенг бўлиши керак, яъни

$$\left[\frac{a_{vl}}{\lambda}\right] = -1;$$

б) a_0 устун лексикографик маънода мумкин қадар камайсин.

Устун кейинги ўтилган жадвалда

$$\alpha_0 + \left[\frac{a_{v0}}{\lambda}\right]\alpha_l$$

га тенг бўлиб қолади (l - ҳал қилувчи устун), демак λ қанчалик кичик бўлса бу, a_0 устуннинг лексикографик маънода камайиши тез бўлади.

а), б) шартларни қаноатлантирувчи λ ни танлаш қоидаси қуйидагича бўлади;

1) фараз қилайлик v - ҳосил қиладиган сатр бўлсин;

2) $a_{vj} < 0$ га мос келган a_0 векторлар ичида лексикографик маънода минимум бўлган вектор a_l бўлсин ($a_{vj} \ge 0$ барча j ларда бўлса, у ҳолда масаланинг ечими йўқ);

3) μ_j *сон* $a_{vj} < 0$ га мос $\alpha_l < {}^{\alpha_j}\!/_{\mu_j}$ шартни қаноатлантирувчи энг катта, бутун мусбат сон бўлсин;

4) μ_j ларга мос λ_j лар қуйидаги

$$\lambda_j = -\frac{a_{vj}}{\mu_j}$$

тенглик билан аниқлансин;

5) λ сони λ_j ларни энг каттасига тенг қилиб олинсин, яъни

$$\lambda = \max_{i} \lambda_i$$

Мисол. Қуйидаги БСЧП масаласи қаралаётган бўлсин

$$x_0 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 \to \max, \qquad (13.19)$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5,$$
$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 18, \qquad (13.20)$$
$$10x_1 + 5x_2 + 12x_3 \geq 26,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ - бутун.} \qquad (13.21)$$

(13.20) тенгсизликларни ўнг томонига $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ларни мос равишда қўшиб диагонал кўринишга келтирамиз:

$$x_0 = 2(-x_1) + 5(-x_2) + (-x_3) \to \max, \qquad (13.19')$$
$$x_i = -(-x_i), i = 1,2,3,$$
$$x_4 = -5 - 3(-x_1) - 4(-x_2) - (-x_3), \qquad (13.20')$$
$$x_5 = -18 - 7(-x_1) - 2(-x_2) - 5(-x_3),$$
$$x_6 = -26 - 10(-x_1) - 5(-x_2) - 12(-x_3),$$
$$x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,6 - \textit{бутун}. \qquad (13.21')$$

Бошланғич жадвал қуйидаги кўринишда бўлади

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0=$	0	2	5	1
$x_1=$	0	-1	0	0
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	0	0	0	-1
$x_4=$	-5	-3	-4	-1
$x_5=$	-18	-7	-2	-5
$x_6=$	-26	-10	-5	-12
$s_1=$	-2	-1	-2	-1*

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-s_1$
$x_0=$	-2	1	3	1
$x_1=$	0	-1	0	0
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	2	1	2	-1
$x_4=$	-3	-2	-2	-1
$x_5=$	-8	-2	8	-5
$x_6=$	-2	2	19	-12
$s_2=$	-2	-1*	-1	-1

Бу жадвал иккиланма жоиз жадвал бўлиб, x_4 жойлашган сатр биринчи элементи (x_4 қиймати) манфий, шунинг учун у ҳосил қиладиган сатр бўлади. Бу сатрнинг барча элементлари манфий сонлардан иборат бўлганлиги учун, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ векторларнинг лексикографик минимумини топамиз, бу α_3 вектордир.

Қуйидаги

$$\alpha_3 < \frac{\alpha_j}{\mu_j}, j = 1,2,$$

шартдан энг катта мусбат, бутун μ_j сонларни аниқлаймиз:

$\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 4,\ \mu_3 = 1$. Энди $\lambda_0 = -{a_{ij}}/{\mu_j}$ тенглик ёрдамида λ_j ларни топамиз: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1$, демак $\lambda = 3$.

Шу $\lambda = 3$ ёрдамида янги чегара ҳосил қилиб жадвал тагига ёзиб қўямиз. Бу янги сатр ҳал қилувчи сатр бўлиб хизмат қилади. α_3 устун эса ҳал қилувчи устун, уларнинг кесишган жойдаги элемент - 1 ҳал қилувчи элементдир. Бу ҳал қилувчи элемент ёрдамида кейинги 2-жадвалга ўтамиз. Бу 2-жадвалда ҳам x_4 сатр ҳосил қиладиган сатрдир. Бу сатрнинг барча элементлари манфий, шунинг учун $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ векторлардан лексикографик маънода минимумини топамиз, у α_1 вектордир.

$$\alpha_1 < \frac{\alpha_j}{\mu_j}, j = 2,3$$

шартдан μ_2, μ_3 ларни аниқлаймиз: $\mu_2 = 3, \mu_3 = 1, \lambda_j$ ларни $\lambda_j = -\frac{a_{4j}}{\mu_j}$ тенгликдан топсак: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{2}{3},\ \lambda_3 = 1$ келиб чиқади, демак $\lambda = 2$. Бу $\lambda = 2$ ёрдамида S_2 ҳал қилувчи сатрни тузамиз. Кейинги жадвалларда ҳам олдинги жараённи давом эттирсак, 6-итерациядан сўнг тўғри жоиз жадвалга эга бўламиз. Яъни, берилган масаланинг оптимал ечими: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$, мақсад функциянинг қиймати эса $x_0 = -5$ бўлади.

6-жадвал

	1	$-s_3$	$-x_2$	$-s_4$
$x_0=$	-5	1	3	0
$x_1=$	2	-2	2	1
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	1	3	-2	-2
$x_4=$	2	-3	0	1
$x_5=$	1	1	2	-3
$x_6=$	6	16	-9	-14

3. Тўғри алгоритм

Бу алгоритмнинг «тўғри» дейилишига сабаб, биз ҳар бир итерацияда тўғри жоиз жадвалга эга бўламиз. Яъни, ҳисоблаш давомида ҳар вақт масаланинг тақрибий ечимини олишимиз мумкин бўлади.

Тўла бутун сонли алгоритмда асосан, иккиланма симплекс метод ишлатилиб, ҳал қилувчи элемент - 1 га тенг бўлган бўлса, бу алгоритмда симплекс метод ишлатилгач, ҳал қилувчи элемент 1 га тенг бўлади. қуйидаги БСЧП масаласини кўрайлик:

$$x_0 = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-x_j) \to \max,$$

$$x_{n+1} = a_{n+10} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1j}(-x_j), \qquad (13.22)$$

$$x_{n+m} = a_{n+m0} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+mj}(-x_j), \qquad (13.23)$$

$$x_i = -(-x_i), j = 1,2,...,n,$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,n+m, \qquad (13.24)$$

$$x_j,\ j = 1,2,...,n+m - \textit{бутун}, \qquad (13.25)$$

бу ерда: a_{0j}, a_{ij} ва a_{i0}, лар бутун, манфиймас.
Фараз қилайлик, симплекс-жадвалда v ҳал қилувчи сатр,
l ҳал қилувчи устун бўлсин, яъни

$$\frac{a_{v0}}{a_{vl}} \leq \frac{a_{i0}}{a_{il}}$$

тенгсизлик барча мусбат a_{ij} лар учун ўринли. Қуйидаги қўшимча

$$S = \left[\frac{a_{v0}}{a_{vl}}\right] + \sum_{j \in J}\left[\frac{a_{vj}}{\lambda}\right]\left(-x_j\right) \qquad (13.26)$$

тенгламани тузайлик, агар $\lambda = a_{vl}$ деб, ундан ҳал қилувчи сатр сифатида фойдалансак, ҳал қилувчи элемент 1 га тенг бўлади. Бу эса кейинги жадвални бутун элементлилигини сақлаб қолади. Агар $\left[{}^{a_{v0}}\!/\!{}_{a_{vl}}\right] = 0$ бўлса, равшанки, мақсад функциянинг қиймати ҳам, ечим ҳам ўзгармайди.

Бу эса алгоритмнинг чегараланганлигини таъминламаслиги мумкин. Бу худди ЧП даги чексиз қадамли масалаларга олиб келади. Лекин ЧП да ўзгарувчилар, чегаралар сони чекли эканлигидан фойдаланиб, чексиз қадам бўла олмаслик кўрсатилади. БСЧП да эса, ҳар сафар янги чегара қўшилиб бориллаверади, шунинг учун қадамлар сони чегараланганлигини бошқача йўл билан кўрсатиш керак бўлади.

Бир жадвалдан кейингисига ўтиш ўтиш цикли деб юритилади, ўтиш циклини стационар цикл деб айтамиз, агар $0 \le a_{\nu 0} < a_{\nu l}$ бўлса, ўтувчи цикл деб айтамиз, агар $0 \le a_{\nu l} < a_{\nu 0}$ бўлса. Агар цикл ўтувчи бўлса, у ҳолда, $a_{0l} \le -1$ бўлганлиги учун мақсад функциянинг қиймати камида бир бирликка ошади. Демак, чегараланган мақсад функцияда, чекли қадамдан кейин биз оптимал ечимга келамиз.

Шундай қилиб, асосий муаммо стационар цикллар сони чегараланган эканлигида бўлиб, буни кўрсатиш учун биз ўтиш ва стационар циклларни фарқламасдан кўрамиз. Алгоритмнинг чегараланганлигини таъминлаш учун қуйидаги уч ўзгартиришни киритиш керак:

1) бошланғич жадвалга янги қўшимча сатр қўшиб ёзилади;

2) ҳал қилувчи устун янги қоида асосида танлаб олинади;

3) ҳосил қиладиган сатр ҳам қуйида берилган қоида бўйича олинади.

Жадвалга қўшиб ёзиладиган янги сатр

$$x_L = a_{L0} + \sum_{j=1}^{n} (-x_j) \qquad (13.27)$$

кўринишда бўлиб, a_{L0} бутун сон шундай танлаб олинадики, (13.23)-(13.25) шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий жоиз ечимнинг нобазис $x_i (i = 1,2,...,n)$ ларнинг қийматида x_L манфиймас, бутун бўлиб қолиши керак. Бу L - сатр ҳал қилувчи устунни танлашда муҳим роль ўйнайди. a_{Nj} (13.27) тенгламадаги бирор итерациядан кейин j - устунга мос келган коэффициентни билдирсин. Ҳар бир α_j вектор учун янги r_j вектор қуйидагича аниқланади:

$$r_j = \left(\frac{a_{0j}}{a_{2j}}, \frac{a_{n+1j}}{a_{Lj}}, \ldots, \frac{a_{n+mj}}{a_{Lj}} \right). \qquad (13.28)$$

Мусбат a_{Lj} ларга мос r_j векторларнинг лексикографик минимуми r_l бўлсин, унда l - ҳал қилувчи устун бўлиб хизмат қилади.

Энди ҳосил қиладиган сатрни аниқлаймиз. Бунинг учун уни танлаш усулини келтирамиз, у алгоритмнинг чегараланганлигини таъминлайди.

Танлаш усули. Бирор сатр келтириладиган сатр сифатида олиниши мумкин, агар у танланган сатр i учун бирор чекли итерациядан кейин $a_{il} \le a_{i0}$ тенгсизлик бажарилса (бу тенгсизликларнинг барчаси битта жадвалда бажарилиши шарт эмас).

Бу усулни қаноатлантирган ихтиёрий қоидани жоиз қоида деб атаймиз. Бундай жоиз қоидалар кўп бўлиб, қуйида шулардан биттаси келтирилган.

Фараз қилайлик ушбу

$$S = \left[\frac{a_{v0}}{a_{vl}}\right] + \sum_{j\in J}\left[\frac{a_{vj}}{a_{vl}}\right]\left(-x_j\right) \tag{13.29}$$

янги чегара ҳосил қилинган бўлсин. Жадвалнинг тўғри жоизлигини сақлаб қолиш учун, ҳосил қиладиган сатр қуйидагича танлаб олиниши керак:

$$0 \le \left[\frac{a_{v0}}{a_{vl}}\right] \le \theta_l\,, \tag{13.30}$$

бу ерда

$$\theta_l = \min_{a_{il}>0}\frac{a_{i0}}{a_{il}}\,.$$

Биз $V(l)$ рқали (13.30) шартни қаноатлантирадиган v сатрлар тўпламини белгилаймиз.

Энди $V(l)$ дан ҳосил қиладиган сатрни танлаб олишни кўриб чиқамиз. Аниқки, агар ўтиш циклли бўлса, $\theta_l \ge 1$, яъни $a_{1l} \le a_{i0}$ барча i лар учун бажарилади. Шунинг учун, стационар циклни кўрамиз унда $\theta_l < 1$ бўлади.

Қуйидаги

$$V(l) = \left\{i : 0 \le \frac{a_{i0}}{a_{il}} < 1\right\}$$

белгилашни киритамиз.

Алгоритмни бевосита келтиришдан аввал жоиз қоидани келтирайлик.

Қоида. а). Фараз қилайлик $V_p(l)$ p- чи итерацияда ҳосил бўлган тўпламни билдирсин ва уни элементлар сони биттадан ортиқ бўлсин:

$$V_p(l)=\{v_1, v_2, \ldots, v_{k+2}\}$$

у ҳолда $V\left(\in V_p(l)\right)$ сатр ҳосил қиладиган сатр сифатида олинади, агар v-сатр $V_1(l), \ldots, V_p(l)$ тўпламларда қолган V_l элементларга нисбатан аввал пайдо бўлиб ва кейинги тўпламларнинг барчасида иштирок этиб келган бўлса;

б) аввал а) да олинган v- сатр, $v \in V(\ell)$ бўлгунга қадар олинаверади, агар $V \notin V(\ell)$ бўлса а) га ўтилади.

Энди тўғри методнинг алгоритмини келтирамиз.

1. Бошланғич жадвалга

$$x_L = a_{L0} + \sum_{j \in J}(-x_l)$$

сатр қўшилсин. Бу ерда a_{L0} мусбат, бутун сон шундай танлаб олинадики, (13.23)-(13.25) ни қаноатлантирувчи ихтиёрий жоиз ечимнинг нобазис $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларида $x_1 \geq 0$ - бутун бўлиши керак.

2. Оптималлик шарти текширилсин: агар $a_{0j} \geq 0$ барча $j(\in J)$ лар учун бўлса, масала ечилган бўлади, акс ҳолда 3 га ўтилсин.

3. $a_{Lj} > 0$ га мос келувчи r_l векторларнинг лексикографик минимуми r_l топилсин, бу устун ҳал қилувчи устун бўлади.

4. Қуйидаги

$$V(l)=\left\{i : 0 \leq \left[\frac{a_{i0}}{a_{il}}\right] \leq \theta_l\right\}$$

тўпламдан жоиз қоида асосида қал қилувчи сатр танлаб олинсин.

5. Қуйидаги

$$S=\left[\frac{a_{v0}}{a_{vl}}\right]+\sum_{j \in J}\left[\frac{a_{vj}}{a_{vl}}\right](-x_l)$$

тенгламага мос сатр жадвал тагига ёзилсин.

6. α_1 ҳал қилувчи устун ва охирги сатр ҳал қилувчи сатр деб олиниб, кейинги жадвалга ўтилсин.

7. Охирги сатр ташлаб юборилсин ва 2 га ўтилсин.

Юқорида айтилганга асосан, бошланғич жадвал тўғри жоиз бўлиши керак. Бундан келиб чиқадики, алгоритм самарадор ишлаши учун мумкин қадар «яхши» базис ечимни аниқлаш керак бўлади. Кўпгина, татбиқий масалаларда бу «яхши» ечим маълум бўлади ёки уни аниқлаш мумкин бўлади.

Энди тўғри алгоритм учун сонли мисол кўрамиз.

Мисол. Қуйидаги БСЧП масаласи одатдагидек диагонал ҳолга келтирилган бўлсин

$$
\begin{aligned}
&x_0 = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,\\
&x_4 = 22 + 2(-x_1) - (-x_2) + 22(-x_3),\\
&x_5 = 6 + 2(-x_1) - (-x_2) + 6(-x_3),\\
&x_6 = 2 + 2(-x_1) - 5(-x_2) + 2(-x_3),\\
&x_1 = -(-x_1),\\
&x_2 = -(-x_2),\\
&x_3 = -(-x_3),\\
&x_1, x_2, \dots, x_7 \ge 0,\\
&x_1, x_2, \dots, x_7 - \textit{бутун},
\end{aligned}
$$

қўшимча чегарани қуйидагича киритамиз:

$$x_L = 10 - x_1 - x_2 - x_3$$

у ҳолда, бошланғич жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0=$	0	-1	-1	-1
$x_4=$	22	2	7	22
$x_5=$	6	2	-1	6
$x_6=$	2	2	-5	2
$x_7=$	1	-4	1	1
$x_1=$	0	-1	0	0
$x_2=$	0	0	-1	0
$x_3=$	0	0	0	-1
$x_L=$	10	1	1	1
$s_1=$	1	1	-3	1

1	$-s_1$	$-x_2$	$-x_3$
1	1	-4	0
20	-2	13	20
4	-2	5	4
0	-2	1	0
5	4	-11	5
1	1	-3	1
0	0	-1	0
0	0	0	-1
0	-1	4	0
0	-2	1	0

α_1 вектор лексикографик маънода минимум, демак 1-устун ҳал қилувчи устун бўлиб хизмат қилади. a_{i0}/a_{il} $(a_{il} > 0)$ нисбатнинг энг кичигига x_6 - сатрда эришилади, у ҳосил қиладиган сатр бўлади, $V_0(1) = \{6\}$ ҳосил қиладиган сатр ёрдамида (x_6 - сатр элементларини 2 сонига бўлиш орқали) ҳал қилувчи сатрни топамиз. Ҳал қилувчи элемент 1 га тенг, симплекс метод билан кейинги жадвалга ўтамиз. Бу жалвалга α_2 устун ҳал қилувчи устун бўлиб, $V_1(2) = \{5,6\}$, лекин x_6- сатр олдинги $V_0(1)$ да ҳам иштирок этганлиги учун, яна уни ҳосил қиладиган сатр, сифатида оламиз. Бу жоиз қоидадан келиб чиқади.

Бу жараённи давом эттирсак 8-жадвалда қуйидаги оптимал ечимга эга бўламиз: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 0$

8-жадвал

	1	$-s_7$	$-s_6$	$-x_3$
$x_0=$	6	1	0	5
$x_4=$	0	-7	-37	0
$x_5=$	0	1	-3	0
$x_6=$	4	5	-7	4
$x_7=$	15	-1	5	15
$x_1=$	4	0	1	4
$x_2=$	2	1	-1	2
$x_3=$	0	0	0	-1
$x_L=$	4	-1	0	-5

14-§. Комбинаторик методлар

Комбинаторик методларнинг асосий ғояси кўп имкониятлар (ечимлар) тўпламидан истиқболли, яъни оптимал ечимни ўз ичига олган тўпламни ажратиб олишдир. Айрим комбинаторик методларда чизиқли программалаш методлари умуман ишлатилмайди. Бундан ташқари, уларнинг чегараланганлигини исботлаш шарт эмас, бу кўп ҳолларда методнинг ўзидан келиб чиқади.

Методлардан энг кўп ишлатиладиган ва муҳим аҳамиятта эга бўлгани тармоқлар ва чегаралар методидир. Бу методни 1960 йили Лэнд ва Дойг таклиф этишган бўлиб, кейинчалик унинг кўпгина махсус БСЧП масалаларини ечишда модификациялари топилган. Хусусан тармоқлар ва чегаралар методи қисман БСЧП масаласини ечиш учун ҳам ишлатилиши мумкин.

Бу гуруҳга тегишли методлардан яна бири аддитив алгоритмдир. У буль ўзгарувчили масалаларни ечишда ишлатилади. Бу алгоритм ҳам кетма-кет кўриб чиқишлар сонини камайтириш билан характерланади.

1. Тармоқлар ва чегаралар методи

Бу алгоритм қисман ва тўла бутун сонли масалаларни ечишда ишлатилади. Унинг ғояси ҳар сафар масалани иккита чизиқли программалаш масаласига келтириш, яъни тармоқлашдир. Шундан кейин ҳар бир тармоқдаги чизиқли масалани ечиб мақсад функцияни экстремум қийматичегара топилади. Бундай тармоқлаш жараёни бутун сонли оптимал ечим топилишига қадар давом эттирилади. Бизга қуйидаги БСЧП масаласи берилган бўлсин:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j \to \max, \qquad (14.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,\ldots,m, \qquad (14.2)$$

$$0 \le x_j \le \alpha_j, j = 1,2,\ldots,n, \qquad (14.3)$$

$$x_j\left(j = 1,2,\ldots,n_1\right)\text{-бутун.} \qquad (14.4)$$

Бундай масалани ечиш учун тармоқлар ва чегаралар методи қуйидаги қадамлардан иборат бўлади:

1. Фараз қилайлик (2), (3) шартлар билан п ўлчовли фазода чегараланган, ёпиқ ва қавариқ G_0 соҳа аниқланган бўлсин;

2. G_0 соҳада (1) функцияга максимум қиймат берувчи оптимал ечим топилади. Агар x_0 (4) шартни қаноатлантирса, (1) - (4) масала ечилган бўлади, акс ҳолда кейинги қадамга ўтилсин;

3. $L(x_0)$ ни $\xi\,(G_0)$ деб белгилансин ва кейинги итерацияга ўтилсин;

Биринчи итерация

1. Оптимал ечим x_0 ни бутунмас компоненти $x_i = x_{i0}$ аниқлансин. G_0 ни қуйидаги усул билан $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}$ тўпламларга ажратилсин

$$G_{(1}^{(1)} = \{x \in G_0 : x_i \le [x_{i0}]\},$$
$$G_1^{(2)} = \{x \in G_0 : x_i \ge [x_{i0}] + i\}$$

2. (1) функциянинг $G_1^{(1)}$ тўпламда оптимал ечими $x_1^{(1)}$ топилсин. (1) функцияни $G_1^{(2)}$ тўпламда оптимал ечими $x_1^{(2)}$ топилсин. Қуйидаги белгилашлар киритилсин:

$$\xi\left(G_1^{(1)}\right) = L\left(x_1^{(1)}\right), \ \xi\left(x_1^{(2)}\right) - L\left(x_1^{(2)}\right)$$

3. Оптималлик шарти текширилсин:

Агар $x_1^{(i)}$ (18.4) шартни қаноатлантириб

$$\xi\left(G_1^{(i)}\right)=\max\left(\xi\left(G_1^{(1)}\right),\xi\left(G_1^{(1)}\right)\right)$$

бўлса, у ҳолда $x_1^{(i)}$ (41.1)-(14.4) масалани оптимал ечими, акс ҳолда кейинги итерацияга ўтилсин;

k+1 - **Итерация.**

Фараз қилайлик k та итерация бажарилган бўлиб, $G_k^{(i)}-i=1,2,...,r_k$ тўпламлар ҳосил қилинган бўлсин.

Лекин (1) - (4) масаланинг оптимал ечими топилмаган бўлсин. У ҳолда, қуйидаги усул билан $\xi(G_k^{(i)}), i=1,2,...,r_k$, лар ёрдамида истиқболли тўплам $G_k^{(v)}$ аниқланади.

$$\xi\left(G_k^{(v)}\right)=\max_{1\le i\le r_k}\xi\left(G_k^{(i)}\right)$$

1. $G_k^{(v)}$ тўпламни тармоқлаш учун $x_1^{(v)}$ ечимдан бутун бўлмаган компонент танлаб олиниб, қуйидаги тўпламлар тузилади

$$G_{k,1}^{(v)}=\left\{x\in G_k^{(v)}:x_s\le\left[x_{s0}\right]\right\}$$
$$G_{k,2}^{(v)}=\left\{x\in G_k^{(v)}:x_s\ge\left[x_{s0}\right]+1\right\}$$

2. Мақсад функция (14.1) нинг $G_{k,j}^{(v)}, j=1,2$ тўпламда максимал қиймати ва оптимал ечими топилсин:

$$\xi\left(G_{k,1}^{(v)}\right)=L\left(X_{k,1}^{(v)}\right),\xi\left(G_{k,2}^{(v)}\right)=L\left(X_{k,2}^{(v)}\right)$$
$$X_{k,j}^{(v)},X_{k,2}^{(v)}.$$

3. Оптималлик шарти текширилсин:

Агар $X_{k,j}^{(v)}$-(14.4) шартни қаноатлантирса, $G_{k,j}^{(v)}$ тўплам кейинчалик тармоқланмайди ва у фиксирлаб қуйилади. Бундан ташқари

$$\xi\left(G_{k,j}^{(v)}\right)=\max\xi\left(G_k^{(i)}\right)$$

тенглик барча охирги $G_k^{(i)}$ тўпламлар учун бажарилса, $X_{k,j}^{(v)}$ оптимал ечим бўлади, яъни масала ечилган бўлади. Акс холда, тармоқлаш итерацияси давом эттирилади.

Алгоритмни чеклилигини (3) шарт таъминлайди. Шу билан бирга алгоритмдан кўриниб турибдики, n_1 сони қанчалик кичик бўлса, итерациялар сони ҳам шунчалик кам бўлади. Яна шуни таъкидлаш керакки, $x_i\le\left[x_{i0}\right]$ ёки $x_i\ge\left[x_{i0}\right]+1$ чегаралар янги чегаралар бўлиб, соҳани кичрайтиради ва шу билан бирга ҳосил бўлган янги масалаларни ечиш учун аввалги жадваллардан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун янги чегарага мос сатр жадвал охирига қўшиб ёзилади.

Тармоқлар ва чегаралар методи айниқса, бутун сонли чизиқли программалаш масалаларини ечишда самарадор методлардан ҳисобланади. Чунки, бу ҳолда тармоқланиш сони кам бўлиб, оптимал ечимга тезроқ келинади. (14.3) кўринишдаги чегараларни қуйидаги қўшимча масалаларни ечиш орқали топиш мумкин.

$$x_j \to \max, \quad (1')$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1,2,\ldots,m, \quad (2')$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n. \quad (3')$$

Бунда $d_j = \left[x_j^0\right] j = 1,\ldots,n_1$, бўлади, бу ерда $x_j^0, j = 1,2,\ldots,n_1$, (1′) мақсад функциясининг максимал қийматидир.

II бобга оид машқлар

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини нормал кўринишда ифодаланг:

а)

$$\underline{x_1 + x_2 \to \max}$$
$$3x_1 + x_2 \le 1,$$
$$2x_1 - x_2 \le 2;$$

б)

$$\underline{x_1 - x_2 - x_3 \to \max}$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$
$$\underline{x_1 - 4x_2 + x_3 \le 1,}$$
$$x_1 \ge 0;$$

в)

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 \to \min}$$
$$x_1 \quad - x_3 \le 1,$$
$$\underline{x_2 + x_3 \ge 1,}$$
$$x_1 \ge 0;$$

г)

$$\underline{x_1 - x_2 + x_3 \to \max}$$
$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$\underline{x_2 \le 1,}$$
$$x_3 \ge 0;$$

д)

$$\begin{array}{c} x_1 - x_2 \to \min \\ \hline x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 1; \end{array}$$

е)

$$\begin{array}{c} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3x_4 \to \min \\ \hline x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - x_4 \leq 5, \\ x_2 + x_3 \geq 10, \\ \hline x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \end{array}$$

ж)

$$\begin{array}{c} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min \\ \hline x_1 + x_2 - x_4 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \leq 1, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ \hline x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{array}$$

з)

$$\begin{array}{c} x_2 + x_4 \to \min \\ \hline -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_4 = 3, \\ \hline x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0; \end{array}$$

и)

$$\begin{array}{c} x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 \to \max \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 1; \end{array}$$

к)

$$\begin{array}{c} 2x_1 + 3x_2 \to \min \\ \hline x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ \frac{3}{2} x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_2 \leq 4, \\ \hline x_2 \geq 0; \end{array}$$

2. Юқоридаги а)-к) чизиқли программалаштириш масалаларини каноник кўринишда ифодаланг.

3. Қуйидаги тенгсиликлар системаларининг ечимларидан иборат соҳани геометрик тасвирланг

а)

$$\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ 7x_1 - 3x_2 \leq 1; \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{array}$$

в)

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1,$$
$$x_i \ge 0, i = \overline{1,3};$$

г)

$$0 \le x_i \le 1,$$
$$i = 1,3;$$

д)

$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 + x_3 \le 1,$$
$$x_2 + x_3 \le 1;$$

е)

$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 - x_3 \le 1,$$
$$x_2 + x_3 \le 1;$$

ж)

$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_2 + x_3 = 2,$$
$$x_1 - x_3 \le 0,$$
$$x_2 \ge 0;$$

з)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1 - x_3 = 2,$$
$$x_2 - x_3 = 1,$$
$$x_2 \ge 0;$$

и)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$
$$-x + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_i \ge 0, i = \overline{1,4};$$

к)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$
$$x_i \ge 0, i = \overline{1,4};$$

4. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини график усулда ечинг:

а)

$$2x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \ge 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 16,$$
$$4x_1 + x_2 \le 12,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

б)

$$x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

в)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \to \min \\ \hline 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 2, \\ 0 \le x_1 + x_2 \le 3, \\ -1 \le x_1 - x_2 \le 0; \end{array}$$

г)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 \to \max \\ \hline 1 \le x_1 + x_2 \le 2, \\ 2 \le x_1 - 2x_2 \le 3, \\ 1 \le 2x_1 - x_2 \le 2, \\ \hline x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; \end{array}$$

д)

$$\begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 \to \max \\ \hline x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ \hline x_1 \ge 0 \ldots x_2 \ge 0; \end{array}$$

е)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ \hline x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 0 \le x_1 \le 12, \\ 0 \le x_2 \le 8; \end{array}$$

ж)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 \to \max \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ \hline x_i \ge 0, i = \overline{1,3}; \end{array}$$

з)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\ \hline x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ \hline x_i \ge 0, i = \overline{1,3}; \end{array}$$

и)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min \\ \hline 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ \hline x_i \ge 0, i = \overline{1,4}; \end{array}$$

к)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \to \max \\ \hline x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ \hline x_i \ge 0, i = \overline{1,4}; \end{array}$$

5. Симплекс метод ёрдамида қуйидаги чизиқли программалаштириш масалалари учун берилган режани базис режа бўлиш-бўлмаслигини аниқланг ва қуйидаги учта ҳолдан қайси бири ўринли бўлишини аниқланг:

1) берилган режа оптимал;
2) масала ечимга эга эмас;
3) берилган режани «яхшилаш» мумкин.

а)

$$\underline{-x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$

$$\underline{x_1 + x_2 + 5x_3 = 2,}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3},$$

$$x = (1,1,0);$$

б)

$$\underline{x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max}$$

$$x_1 - 3x_2 + 11x_3 = -9$$

$$\underline{3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$x = (3,4,0)$$

в)

$$\underline{-x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 = 3}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$x = (2,1,0)$$

г)

$$\underline{x_1 + 4x_2 - 7x_3 \to \max}$$

$$x_1 - x_2 + 7x_3 = 1,$$

$$\underline{x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0,}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3},$$

$$\bar{x} = (2,1,0);$$

д)

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 \to \max}$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$

$$\underline{-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1,}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3},$$

$$\bar{x} = (0,1,3);$$

е)

$$\underline{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6,$$

$$\underline{x_1 + 2x_3 + x_4 = 4,}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4},$$

$$\bar{x} = (2;0;0;2);$$

6. Қуйидаги масаларни дастлабки x_0 режадан фойдаланиб симплекс метод ёрдамида ечинг:

а)

$$\underline{x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max}$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$$

$$\underline{x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3},$$

$$x_0 = (1;1,0);$$

б)

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 \to \max}$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2,$$

$$\underline{3x_1 - x_2 + x_3 = 0}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$x_0 = (0,1,1)$$

в)

$$\begin{array}{c} \underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max} \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ \underline{x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0,0,1,1), \end{array}$$

г)

$$\begin{array}{c} \underline{6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max} \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ \underline{5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (1,0,0,1), \end{array}$$

д)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max} \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ \underline{x_1 - x_2 + x_3 = 0,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0,1,1,0), \end{array}$$

е)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max} \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ \underline{2x_1 - x_3 + x_4 = 1,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0,1,0,1), \end{array}$$

ж)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max} \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ \underline{x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0,0,0,1), \end{array}$$

з)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + x_2 + ax_3 \to \max} \\ x_1 + x_2 + (2+a)x_3 = 3 + a, \\ \underline{x_1 - x_2 + (a-2)x_3 = a - 3,} \\ x_i > 0, i = \overline{1,3}, \\ a \neq 0, x_0 = (0,1,1) \end{array}$$

7. I бобга оид масалалар туркумидаги 1-4 масаларнинг математик моделларини чизиқли программалаш масалалари сифатида қараб уларнинг ечимини топинг ва иқтисодий талқин этинг.

8.Қуйидаги масаларни сунъий базис усули ёрдамида ечинг:

а)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max} \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ \underline{2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 2,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}; \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{c} \underline{x_1 + x_2 \to \max} \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_2 - x_3 \leq 1, \\ \underline{x_1 + x_3 \leq 2,} \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}; \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max}\\ x_1 - x_2 + x_3 = 3,\\ \underline{2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3};\end{array}$$

г)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max}\\ 2x_1 - 11x_2 - 14x_3 = -26,\\ \underline{2x_1 + 29x_2 + 14x_3 = 30,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3};\end{array}$$

д)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max}\\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,\\ \underline{2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4};\end{array}$$

е)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max}\\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5,\\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5,\\ \underline{3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4};\end{array}$$

ж)

$$\begin{array}{c}\underline{3x_1 + 5x_2 + 4x_1 \to \max}\\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9,\\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8,\\ \underline{x + 2x_2 + 4x_3 \geq 7,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3};\end{array}$$

з)

$$\begin{array}{c}\underline{12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \to \min}\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6,\\ \underline{6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22,}\\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}.\end{array}$$

9.Қуйидаги масалаларга мос бўлган иккиланма масалаларни тузинг:

а)

$$\begin{array}{c}\underline{2x_1 + 3x_2 \to \max}\\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6,\\ \underline{x_1 + 4x_2 \leq 4,}\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;\end{array}$$

б)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1 - 10x_2 \to \min}\\ 2x_1 - x_2 \geq 0,\\ \underline{x_1 - 5x_2 \geq -5,}\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;\end{array}$$

в)

$$\begin{array}{c}\underline{3x_1+4x_2+5x_3+6x_4\to\min}\\ 2x_1+x_2-x_3+5x_4\ge 5,\\ \underline{3x_1-2x_2+x_3+4x_4\ge 4,}\\ x_i\ge 0, i=\overline{1,4};\end{array}$$

г)

$$\begin{array}{c}\underline{2x_1+3x_2+2x_3\to\max}\\ 4x_1-3x_2-x_3=4,\\ 2x_1-x_2+3x_3=4,\\ \underline{3x_1\qquad+4x_3=7,}\\ x_i\ge 0, i=\overline{1,3};\end{array}$$

д)

$$\begin{array}{c}\underline{x_1+x_2+x_3+x_4\to\max}\\ x_1+3x_2+7x_3-x_4=6,\\ \underline{x_1-x_2-x_3+3x_4=2,}\\ x_i\ge 0, i=\overline{1,4};\end{array}$$

е)

$$\begin{array}{c}\underline{3x_1+7x_2+6x_3+5x_4\to\max}\\ 4x_1+3x_2+2x_3-x_4=7,\\ \underline{x_1-2x_2-5x_3-3x_4=-12,}\\ x_i\ge 0, i=\overline{1,4};\end{array}$$

10. Қуйидаги масаларни иккиланма симплекс метод ёрдамида ечинг:

а)

$$\begin{array}{l}\underline{4x_1+2x_2-x_3\to\max}\\ x_1+2x_3=4,\\ x_1-x_2=3,\\ -5x_1-3x_2+x_3=-10,\\ \underline{x_1+6x_2-x_3=5,}\\ \quad x_i\ge 0, i=\overline{1,3};\end{array}$$

б)

$$\begin{array}{c}\underline{3x_1+8x_2+5x_3\to\max}\\ x_1+3x_2\le 4,\\ x_1+2x_3\le 7,\\ \underline{x_1+3x_2+2x_3\le 12,}\\ x_j\ge 0, j=\overline{1,3};\end{array}$$

в)

$$\begin{array}{c}\underline{4x_1+3x_2+5x_3\to\max}\\ x_1+x_2+x_3\le 8,\\ 2x_1-x_2+3x_3\ge 10,\\ \underline{3x_1+2x_2+x_3\ge 12,}\\ x_j\ge 0, j=\overline{1,3};\end{array}$$

г)

$$\begin{array}{c}\underline{-2x_1+3x_2+x_3\to\max}\\ x_1+x_2+x_3\ge 6,\\ -2x_1-x_2+2x_3\le 4,\\ \underline{-2x_1+3x_2+3x_3\le 7,}\\ x_j\ge 0, j=1,3.\end{array}$$

11. Қуйидаги транспорт масалаларининг дастлабки режасини шимоли-ғарбий ва минимал харажатлар усулида топинг ва мақсад функциянинг мос қийматларини таққосланг.

а)

bj ai	40	60	70
90	4	4	5
30	6	2	3
50	4	5	8

б)

bj ai	45	65	75
95	2	4	5
35	2	6	4
55	1	5	6

в)

bj ai	25	27	28
29	4	2	1
31	3	6	8
20	1	4	5

г)

bj ai	35	45	50
30	3	2	1
40	4	2	5
60	1	2	3

д)

bj ai	40	25	20	50
60	5	4	1	2
40	4	2	6	3
35	7	3	5	4

е)

bj ai	20	30	20	20
20	4	1	5	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

12. Куйидаги транспорт масалаларини потенциаллар усули ёрдамида ечинг:

а)

bj ai	30	40	20
20	7	5	3
40	4	6	1
30	3	2	4

б)

bj ai	20	25	30	25
40	4	2	5	7
30	6	0	3	1
30	5	4	2	6

13. 10 масалалар туркумидаги а)-е) масалаларни потенциаллар усули ёрдамида ечинг.

14. Тўртта омборхонадан бешта савдо шохобчасига картошка ташиб келтирилиши лозим бўлсин. Ташиш харажатлари қуйидаги жадвал кўринишида берилган:

Савдо шахобчалари Омборхоналар	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Омборхонадан чикарилган юклар
A1	4	2	3	6	1	50
A2	5	3	4	2	6	160
A3	3	4	7	3	2	70
A4	2	6	5	4	3	100
Савдо шохобчаси кабул килган юклар	80	100	90	50	60	

Ташиш харажатлари энг кам бўлган режани аниқланг. Бу ерда юклар тоннада, тарифлар минг сўмда ифодаланган.

15. Очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг:

а)

bj ai	25	30	40	15
30	4,5	3,0	2,7	1,5
40	4,2	2,3	4	6,2
30	1,6	5,4	3,6	4,4

б)

bj ai	20	50	45	30
40	6,5	4,3	5,1	4
50	3	7,4	3,5	6,3
30	4,3	5,7	6,5	3,8

Юқорида қурилган БСЧП методлари ёрдамида ечиш мумкин бўлган қуйидаги мисолларни берамиз (бунда, *n* масалан, талабанинг рўйхатдаги тартиб номери бўлиши мумкин).

16. Циклик алгоритм ёрдамида ечинг.

1)

$$\begin{aligned} & x_0 = 3 + x_1 + 10x_2 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 \le 20, \\ & -3x_1 + 2x_2 \le 16, \\ & x_1 - 5x_2 \le 9, \\ & x_1, x_2 \ge 0 - \textit{бутун}; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & x_0 = nx_1 + nx_2 + x_3 \to \max \\ & nx_1 + 7x_2 + 22x_3 \le 22 + n, \\ & 2x_1 - nx_2 + 6x_3 \le 6, \\ & 2x_1 - 5x_2 + nx_3 \le 8n, \\ & -nx_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 - \textit{бутун}. \end{aligned}$$

17. Тўла бутун сонли алгоритм ёрдамида ечинг.

1)

$x_0 = 2 - 3x_1 - x_2 \to \max$

$-4x_1 + 3x_2 \le 40,$

$2x_1 - x_2 \le 15,$

$4x_1 + 3x_2 \ge 38,$

$x_1, x_2 \ge 0$–*бутун;*

2)

$x_0 = -2nx_1 - x_2 - nx_3 \to \max$

$x_1 + nx_2 + 3x_3 \ge 8,$

$-x_1 + nx_2 + nx_3 \le 14n,$

$nx_1 + x_2 + x_3 \ge 15,$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$–*бутун.*

18. Тўғри алгоритм ёрдамида ечинг.

1) $x_0 = 2 + 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$3x_1 + 2x_2 \le 7,$

$3x_1 + x_2 \le 6,$

$5x_1 + 5x_2 \le 16,$

$x_1, x_2 \ge 0$–*бутун;*

2)

$x_0 = n + x_1 + nx_2 + 2nx_3 \to \max$

$-nx_1 + 6x_2 + x_3 \le 6,$

$-3x_1 + (10 + n)x_2 \le 10,$

$5x_1 - 3x_2 + (7 + n)x_3 \le 7,$

$3x_1 - 6x_2 \le 12,$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$–*бутун.*

19. Тармоқлар ва чегаралар алгоритмни ёрдамида ечинг.

1)

$x_0 = 1 - x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$

$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4,$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2,$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$ – *бутун;*

2)

$x_0 = x_1 + nx_2 \to \max$

$-nx_1 + 2x_2 \le 4n,$

$3nx_1 - 2x_2 \le 6n,$

$4nx + 3x_2 \le 32n,$

$0 \le x_1 \le 6,$

$0 \le x_2 \le 54,$

x_1, x_2 –*бутун,*

III БОБ

ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Математик дастурлашда функциянинг чекли фазо тўпламларида экстремумини тадқиқ этиш билан шуғулланувчи бўлимини – **чизиқсиз программалаштириш** деб аташади. Белгилар ёрдамида масалани қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$f(x) \to extr, \quad x \in X . \quad (*)$$

Бу ерда, $f(x)x \in R^n$, текширилаётган функция бўлиб, унинг табиати турлича бўлиши мумкин (масалан, узлуксиз, силлиқ, чизиқсиз, чизиқли, йўналиш бўйича дифференциалланувчи ва ш.к.). Шунингдек, X тўплам ҳам умуман олганда турлича табиатли бўлиши мумкин (чегараланган, чегараланмаган, чизиқли ёки чизиқсиз муносабатлар билан аниқланган, қавариқ, ёпиқ, очиқ ва ҳ.к.). Функция ва тўпламнинг хусусиятларини инобатга олиб, (*) масалани чизиқсиз программалаш деб аташ мақсадга мувофиқдир.

Хусусан (*) масаланинг ушбу

$$f(x) \to extr, x \in R^n$$

кўриниши шартсиз экстремум масаласи деб аталади ва бу масала айрим функциялар синфи учун ўқувчига мактаб курсидан ҳамда олий математика курсидан маълум.

Мазкур бўлимда (*) масалани айрим функциялар синфи ҳамда X тўпламнинг баъзи махсус кўринишлари учун ўрганамиз.

1-§. Шартли экстремум масалалари

Дейлик, n ўлчовли R^n фазода $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$,.. $g_m(x)$ скаляр функциялар берилган бўлсин. Қуйидаги

$$\begin{gathered} g_1(x) \le 0, \\ g_2(x) \le 0, \\ ----- \\ g_m(x) \le 0 \end{gathered}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи барча $x, x \in R^n$, нуқталар ичидан шундай $x^0, x^0 \in R^n$ нуқтани аниқлангки, у нуқтада $f(x)$ функция минимумга эришсин:

$$f\left(x^0\right) = \min f(x).$$

Аниқлик учун масалада минимум ҳақида сўз юритдик. Агар $f(x)$ функция минимумга эришган нуқтада $-f(x)$ функция максимумга эришишини инобатга олсак, бу масалани умумий деб қараш мумкин. Шундай қилиб, масала қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$f(x) \to \min \tag{1.1}$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}, x \in R^n. \tag{1.2}$$

Бу ерда (1.2) чеклашлар асосий шартларни ташкил этади. Шу сабабли, (1.1)-(1.2) масаланинг ечими бўлган $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0\right)$ нуқта шартли минимум нуқта дейилади. Бу нуқтани излаш масаласига эса шартли минимум масаласи дейилади. Агар $X = \left\{x : g_i(x) \le 0, \ \ i = \overline{1,m}, \ x \in R^n \right\}$ деб белгиласак, (1.1)-(1.2) масалани (*) масаланинг хусусий ҳоли эканлигини пайқаш қийин эмас. Юқоридаги (1.2) шартларни қаноатлантирувчи нуқталарни жоиз нуқталар деб атаймиз.

(1.1)-(1.2) масалани ихтиёрий табиатли функциялар синфи учун ўрганиш мушкул. Шу сабабли мазкур бўлимда бу функцияларни барча аргументлари бўйича узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи деб фараз қиламиз.

Қаралаётган масалани ўрганишга қулайлик туғдириш мақсадида, ёрдамчи ўзгарувчилар киритиш ҳисобига уни қуйидагича, чеклашлари тенглик тарзида бўлган масалага келтириш мумкин.

Лемма. Чеклашлари тенгсизлик тарзида бўлган (1.1)-(1.2) масала қуйидаги

$$f(x) \to \min \tag{1.3}$$

$$g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0, \ \ i = 1,m, \tag{1.4}$$

масалага эквивалент.

Бу ерда x_{n+i} лар ёрдамчи ўзгарувчилар бўлиб, эквивалентлик қуйидаги маънода: агар $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ жоиз нуқта (1.1)-(1.2) масаласининг ечими бўлса

$$X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0\right) = \left(x^0, \left[-g_1(x^0)\right]^{1/2}, \dots, \left[-g_m(x^0)\right]^{1/2}\right) \tag{1.5}$$

нуқта (1.3)-(1.4) масаланинг ечими бўлади.

Исботи. Дейлик, $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ нуқта (1.1)-(1.2) масала ечими бўлиб, унга мос (1.5) нуқта (1.3)-(1.4) масаланинг ечими бўлмасин. У ҳолда (1.3)-(1.4) масаланинг шундай жоиз нуқтаси

$$\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, ..., \widetilde{x}_{n+m}\right) = \left(\widetilde{x}, \widetilde{x}_{n+1}, ..., \widetilde{x}_{n+m}\right)$$

топиладики, бу нуқта учун қуйидагилар ўринли бўлади:

$$f(\widetilde{x}) < f(x^0),$$
$$g_i(\widetilde{x}) + \widetilde{x}_{n+i}^2 = 0,$$

бундан

$$f(\widetilde{x}) < f(x^0),$$
$$g_i(\widetilde{x}) = -x_{n+i}^2 \le 0$$

келиб чиқади. Бу эса x^0 нуқтани (1.1)-(1.2) масаланинг ечими дейилишига зид.

Энди, дейлик, X^0 нуқта (1.3)-(1.4) масаланинг ечими бўлиб, мос x^0 нуқта (1.1)-(1.2) масаланинг ечими бўлмасин. У ҳолда шундай бошқа x^* жоиз нуқта топиладики,

$$f\left(x^*\right) < f\left(x^0\right), \tag{1.6}$$
$$g_i\left(x^*\right) \le 0, i = \overline{1,m} \tag{1.7}$$

шарт бажарилади. Агар x^* нуқтани

$$x_{n+1}^* = \left[-g_1\left(x^*\right)\right]^{1/2}, ..., x_{n+m}^* = \left[-g_m\left(x^*\right)\right]^{1/2}$$

каби нуқталар билан тўлдирсак, ҳосил бўлган $\left\{x^*,\ x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*\right\}$ жоиз нуқта учун (1.6)-(1.7) муносабатлар ёрдамида

$$f\left(x^*\right) < f\left(x^0\right),$$
$$g_i\left(x^*\right) + \left[x_{n-i}^*\right]^2 = 0$$

муносабатга эга бўламиз. Бу эса X^0 нуқтани (1.3)-(1.4) масаланинг ечими деб олинишга зид. Лемма исботланди.

Юқоридаги лемма шартли минимум масаласини чеклашлари тенглик тарзида бўлган ҳолда ўрганиш кифоя эканлигини асослайди. Шу сабабли, белгилашларни сақлаган ҳолда ушбу

$$f(x) \to \min \tag{1.8}$$

$$g_i(x)=0,\ i=\overline{1,m},\ x\in R_n, \qquad (1.9)$$

шартли минимум масаласини асосий масала сифатида тадқиқ этамиз.

Таъриф. Юқоридаги (1.8)-(1.9) масалада $f(x)$ функция x^0 жоиз нуқтада нисбий шартли минимумга эришади дейилади, агар шу нуқтанинг етарли кичик атрофидан олинган ихтиёрий жоиз нуқта x учун

$$f(x^0)\le f(x)$$

шарт бажарилса.

Қуйида, қаралаётган масаланинг шартли нисбий минимум нуқтасини топиш билан шуғулланамиз.

2-§. Шартли экстремум масаласини номаълумларни йўқотиш усули билан ечиш

Дейлик, (1.8)-(1.9) масала қаралаётган бўлсин.

Агар m<n бўлса, баъзи ҳолларда (1.9) тенгликлардан номаълумларнинг m тасини қолган n-m таси орқали ифодалаш мумкин бўлади. Қандай шартлар бажарилганда бундай бўлиши қуйидаги леммадан кўринади.

Лемма. Агар $g_i(x)=0, i=\overline{1,m}$, тенгликларда $x=x^0$ нуқтада

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2(x^0)}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

матрицанинг ранги m га тенг бўлса, яъни нолдан фарқли бирорта m-тартибли минор топилса, x^0 нуқта атрофида (1.9) тенгликларни m та номаълумларига нисбатан ечиш мумкин бўлади.

Бу лемманинг исботи ошкор бўлмаган функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремадан келиб чиқади.

Дейлик, қаралаётган масала учун (2.1) матрицанинг ранги m га тенг бўлсин. У ҳолда масаладаги номаълумлардан m тасини «йўқотиш» мумкин.

Ҳақиқатан, юқоридаги леммага кўра (аниқлик учун дастлабки m та ўзгарувчиларга нисбатан) қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right), \\ x_2 &= \varphi_2\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right), \\ &\rule{3cm}{0.4pt} \\ x_m &= \varphi_m\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) ни (1.8) га қўйиб,

$$f\left(x\right) = f\left(x_1, x_2,\ldots,x_n\right) =$$

$$f\left(\varphi_1\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right), \varphi_2\left(x_{x+1},\ldots,x_n\right), \ldots, \varphi_m\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right), x_{m+1},\ldots,x_n\right) =$$

$$= F\left(x_{m+1},\ldots,x_n\right) \to \min \tag{2.3}$$

масалага эга бўламиз.

Теорема. Юқоридаги (1.8)-(1.9) шартли экстремум масаласи (2.3) шартсиз экстремум масаласига эквивалент.

Бу ерда эквивалентлик шу маънодаки, агар $x^0 = \left\{x_1^0,\ldots,x_n^0\right\}$ жоиз нуқта (1.8)-(1.9) масаланинг шартли нисбий минимум нуқтаси бўлса, $\left\{x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0\right\}$ жоиз нуқта (2.3) масаланинг шартсиз минимум нуқтаси бўлади ва аксинча, $\left(x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0\right)$ жоиз нуқта (2.3) масаланинг шартсиз минимум нуқтаси бўлса $\left(\varphi_1\left(x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0\right),\ldots,\varphi_m\left(x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0\right),\ x_{m+1}^0,\ldots,x_n^0\right)$ нуқта (1.8)-(1.9) масаланинг шартли минимум нуқтаси бўлади.

Бу теореманинг исботи тескарисини фараз қилиш йўли билан амалга оширилади.

Усулни аниқ бир масалада намойиш этайлик.

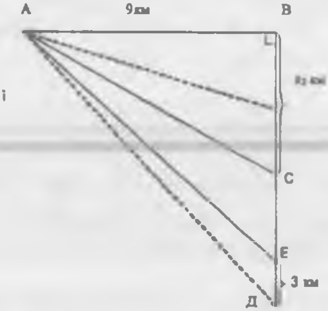
Масала. Қурилиш майдончасидан тўғри магистрал йўлгача бўлган масофа 9 км. бўлиб, магистрал бўйлаб 15 км. узоқликда бошқарма жойлашган. Зудлик билан бошқармага бориш зарурати туғилди. Агар уловнинг магистрал йўлгача бўлган тезлиги 8 км/с, йўл бўйлаб 10 км/с бўлса, энг қисқа вақт ичида бошқармага бориш учун қандай йўлни танлаш керак?

Ечиш: Дастлаб масаланинг математик моделини тузайлик. Аниқлик учун магистрал йўлнинг изланаётган нуқтасини *C* орқали белгилайлик. Агар қурилиш майдончасини *A* орқали, бошқармани *Д*, йўлнинг майдончага энг яқин нуқтасини *B* орқали белгиласак (2.1-чизма) масала шарти қуйидагича ифодаланади:

$$T_{AC} + T_{CД} \to \min$$

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 0$$

Бу ерда T_{AC} ва $T_{CД}$ мос масофаларни босиб ўтиш учун кетадиган вақт.



2.1-чизма

AC=x_1, BC=x_2 деб белгилсак, қуйидаги

$$\frac{x_1}{8} + \frac{15 - x_2}{10} \to \min \qquad (2.3)$$

$$9^2 + x_2^2 - x_1^2 = 0 \qquad (2.4)$$

шартли минимум масаласига эга бўламиз. (2.4) шартдан

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + 81}$$

қийматни топиб (2.3)га қўйсак, яъни x_1 ни «йўқотсак», ушбу

$$F(x_2) = \frac{\sqrt{x_2^2 + 81}}{8} + \frac{15 - x_2}{10} \to \min$$

шартсиз минимум масаласига эга бўламиз.

$$F'(x_2) = \frac{x_2}{8 \cdot \sqrt{x_2^2 + 81}} - \frac{1}{10} = 0$$

шартдан $x_2 = 12$ ва $F''(x_2) > 0$ бўлганлиги туфайли $x_2 = 12$ да функция минимумга эришади.

Демак, энг қисқа вақтда манзилга етиш учун Д нуқтадан 3 км. юқорида жойлашган Е нуқтагача дала бўйлаб, ЕД масофани эса магистрал йўл бўйича босиб ўтиш керак экан.

Номаълумларни йўқотиш усули ҳар доим ҳам яхши самара беравермайди. Баъзи ҳолларда номаълумлардан бирини бошқаси орқали ифодалаш мушкул бўлиб қолади. Ҳақиқатан, қуйидаги масалани қарайлик

$$x_1^3 - x_2^3 \to extr, \tag{2.5}$$

$$x_1^5 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^5 = 2. \tag{2.6}$$

Бу масалада (2.6) тенгликдан номаълумлардан биринчи иккинчиси орқали аналитик ифодалашнинг қийинлигини изоҳлашга ҳожат йўқ.

Шу сабабли, шартли минимум масаласини ечишнинг бошқа усулларини келтириш зарурати пайдо бўлади. Қуйида шундай усуллардан бирини келтирамиз.

3-§. Лагранж кўпайтувчилари усули

Дейлик, қуйидаги шартли минимум масаласи қаралаётган бўлсин:

$$f(x) \to \min \tag{3.1}$$

$$g_i(x) = 0, i = \overline{1, m}, x \in R^n. \tag{3.2}$$

Лагранж кўпайтувчилари деб аталадиган ёрдамчи $\bar{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ $m+1$ - ўлчовли вектор ёрдамида тузилган ушбу

$$F(x, \bar{\lambda}) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$$

функция Лагранж функцияси деб аталади.

Теорема. Агар (3.1)-(3.2) масалада x^0 жоиз нуқта шартли нисбий минимум нуқта бўлса, шундай бирортаси нолдан фарқли бўлган $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ сонлар топиладики, шу нуқта Лагранж функцияси учун стационар нуқта бўлади, яъни

$$\frac{\partial F(x^0, \bar{\lambda})}{\partial x} = 0. \tag{3.3}$$

Исботи. Агар (3.3) ни ёйиб ёзсак, у қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_0 \cdot \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x^0)}{\partial x} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x^0)}{\partial x} = 0.$$

Бу эса ушбу

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x}, \frac{\partial g_1\left(x^0\right)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x} \tag{3.4}$$

m+1 та векторнинг чизиқли боғлик эканлигини англатади. Тескарисини фараз қилайлик, яъни (3.4) векторлар чизиқли эркли бўлсин. Қуйидаги тенгламалар системасини қарайлик:

$$\begin{array}{l} f(x) - f\left(x^0\right) - \varepsilon = 0, \\ g_1(x) = 0, \\ \rule{2cm}{0.4pt} \\ g_m(x) = 0. \end{array} \tag{3.5}$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидан иборат вектор-функцияни $G(x, \varepsilon)$ деб белгиласак, (3.5) ни

$$G(x, \varepsilon) = 0$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу тенгламада (x^0,0) нуқта атрофида ошкор бўлмаган функциянинг мавжудлик шартлари бажарилади:

$$1) G\left(x^0, 0\right) = 0,$$

$$2) \left|\frac{\partial G\left(x^0, 0\right)}{\partial x}\right| = \det\left\{\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x}, \frac{\partial g_1\left(x^0\right)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x}\right\} \neq 0.$$

Демак, $\varepsilon = 0$ атрофида m+1 ўлчовли (дейлик, дастлабки m+1 ўзгарувчига нисбатан) $x = x(\varepsilon)$ функция мавжуд. Буни $x_{m+2}(\varepsilon) = x^0_{m+2}, \dots, x_n(\varepsilon) = x^0_n$ лар билан n ўлчовли қилиб тўлдирсак

$$x_i = x_i(\varepsilon), i = \overline{1, n},$$

функцияга эга бўламиз ва $\varepsilon = 0$ атрофида функция (3.5) тенгликни қаноатлантиради:

$$\begin{array}{l} f(x(\varepsilon)) \equiv f\left(x^0\right) + \varepsilon, \\ g_1(x(\varepsilon)) \equiv 0, \\ \rule{2cm}{0.4pt} \\ g_m(x(\varepsilon)) \equiv 0. \end{array}$$

Жумладан, $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon} < 0$ учун, $x = x(\bar{\varepsilon})$ жоиз нуқтада

$$f\left(x(\bar{\varepsilon})\right) < f\left(x^0\right)$$

га эга бўламиз. Бу эса x^0 ни нисбий минимум дейилишга зид. Теорема исботланди.

Изоҳ. Қаралаётган масалада номаълумлар сони n+m+1 та бўлиб ($x_1,\ldots,x_n$; λ_0, λ_{11}, ..., λ_m), уларни аниқлаш учун Лагранж кўпайтувчилар усули n+m та тенгликдан иборат бўлган муносабатларни беради $\left(\frac{\partial F(x,\bar{\lambda})}{\partial x} = 0 - n\ та\ ва\ g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\right)$. Демак бу усул ёрдамида умуман олганда, номаълумларни бир қийматли топиб бўлмайди. Бироқ Лагранж кўпайтувчилар қоидасининг мағзини ифодаловчи (3.3) тенглик $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ кўпайтувчиларга нисбатан бир жинсли бўлгани учун, агар $\lambda_0 \neq 0$ бўлса, барча тенгликларни λ_0 га бўлиб,

$$1 \lambda_1, \ldots, \lambda_m$$

каби кўпайтувчиларга эга бўлишга имкон беради. Натижада, бундай кўпайтувчилар учун Лагранж функцияси

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 \cdot g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x)$$

каби кўринишга эга бўлади. Бу ерда. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

Таъкидлаш лозимки, ҳар доим ҳам $\lambda_0 \neq 0$ деб олиб бўлавермайди. Фикримизнинг исботи сифатида бир мисол келтирайлик.

Мисол.

$$f(x) = x_1 + x_2^2 \to \min,$$

$$g(x) = x_1^3 - x_2^2 = 0$$

бўлсин. Бу масаланинг ечими (0,0) нуқтадан иборат эканлиги равшан. Бироқ, бу нуқтада

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2^2 + \lambda\left(x_1^3 - x_2^2\right)$$

функция учун Лагранж кўпайтувчилар қоидаси ўринли эмас:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 1 + 3\lambda x_1^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2.$$

Бу эса қачон $\lambda_0 \neq 0$ деб олиш мумкинлигини ўрганиш зарурлигини тақазо этади.

4-§. Нормал масалалар

Лагранж кўпайтувчилар қоидасидан кўринадики, агар $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ кўпайтувчилар бўлса, ихтиёрий $k\neq 0$ сон учун $k\lambda_0,k\lambda_1,\ldots,k\lambda_m$ ҳам Лагранж кўпайтувчилари бўлади.

Таъриф. Агар шартли нисбий минимум нуқтага мос келувчи Лагранж кўпайтувчилари орасида $0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ кабилари бўлмаса, мос нуқта нормал нуқта масала эса нормал масала деб аталади.

Нормал масаланинг тадқиқот учун қулайлиги қуйидаги леммадан кўринади.

Лемма. Нормал масала учун Лагранж кўпайтувчилари мавжуд ва ягонадир.

Исботи. Мавжудлиги Лагранж функциясининг бир жинслилиги ва $\lambda_0\neq 0$ шартдан келиб чиқади ва кўпайтувчилар $1,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ кўринишга эга бўлади.

Дейлик, x^0 шартли нисбий минимум нуқта бўлиб, унга икки хил Лагранж кўпайтувчилари мос келсин: $1,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ ва $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. Бу ерда ҳеч бўлмаса бирорта k учун $\lambda_k\neq\alpha_k$. Яъни қуйидаги муносабатлар ўринли бўлсин:

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial g_1\left(x^0\right)}{\partial x}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x}+\alpha_1\frac{\partial g_1\left(x^0\right)}{\partial x}+\ldots+\alpha_m\frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x}=0.$$

Булардан бирини иккинчисидан айириб,

$$\left(\lambda_1-\alpha_1\right)\frac{\partial g\left(x^0\right)}{\partial x}+\ldots+\left(\lambda_m-\alpha_m\right)\frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x}=0$$

муносабатга эга бўламиз. Бу эса x^0 нуқтага

$$0,\lambda_1-\alpha_1,\ldots,\lambda_m-\alpha_m,$$

каби кўпайтувчи мос келаётганлигини кўрсатади ва бу зидлик леммани исботлайди.

Теорема. Қаралаётган (3.1)-(3.2) масалада x^* жоиз нуқта нормал нуқта бўлиши учун у нуқтада

$$\frac{\partial g_1\left(x^*\right)}{\partial x},\ldots,\frac{\partial g_m\left(x^*\right)}{\partial x}\tag{4.1}$$

векторларнинг чизиқли эркли бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Дейлик, x^* нормал нуқта бўлиб, унга мос (4.1) векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин, яъни шундай $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ (бирортаси нолдан фарқли) сонлар топилсинки,

$$\beta_1 \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} + ... + \beta_m \cdot \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x} = 0$$

ўринли бўлсин. Бу муносабат эса x^* нуқтага $0, \beta_1, ..., \beta_m$ кўпайтувчилар мос келаётганлигини англатади. Бу эса нормалликка зид.

Энди, дейлик, (4.1) векторлар чизиқли эркин бўлиб, x^*-нормал нуқта бўлмасин. У ҳолда шундай $0, \lambda_1, ..., \lambda_m$ кўпайтувчилар топиладики (бирортаси нолдан фарқли бўлган):

$$0 \cdot \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x} + ... + \lambda_m \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x} = 0$$

бўлади. Бу эса (4.1) векторларнинг чизиқли боғлиқлигини англатади. Бу зидлик теоремани тўла исботлайди.

Изоҳ. Нормал масала учун Лагранж кўпайтувчилар қоидасининг асосий муносабатлари

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda)}{\partial x} = 0, \frac{\partial F(x^0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

кўринишда бўлиб, n+m та тенгликни ташкил этади. Бу тенгликлар эса n+m та номаълумларни яъни $x_1, x_2, ..., x_n$ ва $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ларни бир қийматли топишга имкон беради.

Масала. Маълумки, нефт савдосида ўлчов бирлиги сифатида баррел (бочкача) ишлатилади. Сиғими бир баррел бўлган цилиндрик идишнинг ўлчамлари қандай бўлганда уни ясашга кам металл сатҳ кетади?

Ечиш. Дастлаб масаланинг математик моделини тузайлик. Идиш асоси радиусини x_1, баландлигини x_2 орқали белгиласак, қуйидаги аналитик масалага эга бўламиз (4.1-чизма).

4.1-чизма

$$2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \to \min \tag{4.2}$$

$$\pi x_1^2 x_2 = V_0 \tag{4.3}$$

Бу ерда V_0 - идишнинг 1 баррелга мос сиғими. (4.2)-(4.3) масала шартли экстремум масаласидир:

$$f(x_1, x_2) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 x_2 \to \min,$$
$$g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - V_0 = 0.$$

Масалани нормалликка текширайлик:

$$\frac{\partial g(x_1, x_2)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi x_1 \cdot x_2 \\ \pi x_1^2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.4}$$

чунки шартга кўра $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Демак, Лагранжнинг нормал функциясини тузиш мумкин:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 2\pi x_1^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2 + \lambda(\pi x_1^2 x_2 - V_0).$$

Кўпайтувчилар қоидасига кўра, агар (x_1, x_2) экстремал нуқта бўлса, у нуқтада

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 4\pi x_1 + 2\pi x_2 + 2\lambda\pi x_1 x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2\pi x_1 + \lambda\pi x_1^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F(x_1, x_2 \lambda)}{\partial \lambda} = \pi x_1^2 x_2 - V_0 = 0,$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур. Бу тенгламалар системасини ечиб, $x_2^0 = 2x_1^0$ни топамиз, яъни энг кам материал сарфлаш учун бочканинг баландлигини асос айланаси диаметрига тенг қилиб олиш зарур экан.

Агар бочкалар шу усулда ясалса, иқтисодий самара энг юқори бўлиши шубҳасиздир.

5-§. Шартли минимумнинг етарлилик шарти

Лагранж кўпайтувчилари усули зарурий шарт бўлиб, жоиз нуқта, қаралаётган функциянинг шартли минимум нуқтаси бўлса ҳам, максимум нуқтаси бўлса ҳам у нуқтада (3.3) шарт бажарилаверади. Бу нуқталарни фарқлаш учун етарлилик шартини келтирамиз.

Таъриф. Агар шундай m+1 ўлчовли вектор λ топилса ва x^0 нуқтада (3.3) тенгликлар бажарилса, қаралаётган (3.1)-(3.2) масалада x^0 жоиз нуқта шартли-стационар нуқта дейилади.

Теорема. Дейлик, қаралаётган масалада $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, функциялар x^0 нуқта атрофида икки марта дифференциалланувчи бўлсин. Шартли-стационар нуқтанинг шартли нисбий минимум нуқта бўлиши учун

$$\frac{\partial g^T(x^0)}{\partial x}y=0 \qquad (5.1)$$

гипертекисликда

$$y^T\frac{\partial^2 F(x^0,\lambda)}{\partial x^2}y \qquad (5.2)$$

квадратик форманинг аниқ мусбат бўлиши етарлидир.

Бу теоремани исботсиз қабул қилиб, унинг асосий шартларини таҳлил қилайлик. (5.1) ва (5.2) ифодалардаги Т белги транспонирлаш белгиси бўлиб, (5.1) тенглик $g(x)=0$ гиперсиртга (бу ерда $g(x)=(g_1(x),\ ...,g_m(x))$ $x=x^0$ нуқтада ўтказилган уринма гипертекисликни ифодалайди (5.1-чизма)

5.1-чизма

Демакки, (5.2) шарт (5.1) гипертекисликда

$$\frac{\partial^2 F(x^0,\lambda)}{\partial x^2}$$

матрицанинг мусбат аниқланган бўлиши яъни (5.2) квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлишини англатади.

Бу шартни 5-§ даги масалага қўллаб кўрайлик.

Масалада (5.1) гипертекислик

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

тенгликдан иборат бўлиб, уни (4.4) ёрдамида ёзсак,

$$2\pi x_1 x_2 \cdot y_1 + \pi x_1^2 y_2 = 0$$

ёки

$$2x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0 \qquad (5.3)$$

тенгликка эга бўламиз. Шартли-стационар $(x_1^0, x_2^0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)$ нуқтада эса (5.3) тенглик

$$y_1 = -y_2 \qquad (5.4)$$

тўғри чизиқдан иборат бўлади. Иккинчи тартибли матрица эса

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

бўлиб, шартли-стационар нуқтадаги қиймати

$$\begin{pmatrix} 4\pi + 2\lambda\pi x_2^0 & 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 \\ 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицадан иборат бўлади. Бунга мос квадратик формани (5.4) уринма тўғри чизиқда текширсак

$$(-y_2\ y_2)\begin{pmatrix} 4\pi + \lambda\pi x_2^0 & 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 \\ 2\pi + 2\lambda\pi x_1^0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

га эга бўламиз. Шартли-стационар нуқтада $x_2^0 = 2x_1^0$ ва $\lambda = -\frac{2}{x_1^0}$ ни инобатга олсак, соддалаштиришлардан сўнг квадратик форманинг қиймати $4y_2^2$ га тенг эканлигини кўрамиз. Бу эса аниқ мусбат сондир.

Шундай қилиб, V_0 баррел нефт ташийдиган цилиндрик бочканинг энг самарали формасини ясаш учун, унинг ўлчамларини

$$x_1^0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}},\ x_2^0 = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

каби олиш зарур ва етарли экан.

6-§. Чеклашлари тенгсизлик тарзида бўлган масалалар

Чеклашлари тенглик тарзида бўлган юқоридаги масала учун келтирилган тасдиқлардан фойдаланиб, чеклашлари тенгсизлик тарзида бўлган масалалар учун ҳам айрим натижаларни келтирамиз.

Дейлик, қуйидаги масала қаралаётган бўлсин:

$$f(x) \to \min \tag{6.1}$$

$$g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{6.2}$$

Бу масалани тенглик типидаги ушбу

$$f(x) \to \min \tag{6.3}$$

$$g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0,\ i = \overline{1,m}\,, \tag{6.4}$$

масалага эквивалентлигини юқорида келтирган эдик. Шу эквивалентликдан фойдаланиб, (6.3)-(6.4) масала учун нисбий шартли минимумнинг зарурий ва етарли шартларини ифодалаймиз.

Таъриф. Бирор $g_k(x) \le 0, 1 \le k \le m$, чеклаш x^0 жоиз нуқтада актив (фаол) дейилади, агар $g_k(x^0) = 0$ бўлса, ҳамда пассив (суст) дейилади, агар $g_k(x^0) < 0$ бўлса .

Кўрсатиш мумкинки, агар x^0 жоиз нуқтада актив бўлган $i_1, i_2, \dots, i_k$ индексли барча чеклашлар учун

$$\frac{\partial g_{i_1}(x^0)}{\partial x}, \frac{\partial g_{i_2}(x^0)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_{i_k}(x^0)}{\partial x}, 1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_k \le m \tag{6.5}$$

векторлар чизиқли эркли бўлса, (6.3)-(6.4) масала учун

$$\left\{x^0, \left[-g_1(x^0)\right]^{1/2}, \ \dots, \ \left[-g_m(x^0)\right]^{1/2}\right\}$$

нуқта нормал нуқта бўлади. Шу сабабли, (6.5) векторларни чизиқли эркли деб фараз қилиб, Лагранж нормал функциясини ёзамиз:

$$\widetilde{F}\left(x, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}, \lambda\right) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{n+i}^{2} .$$

Лагранж кўпайтувчилари қоидасига биноан, агар $X^0 = \left\{x^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0\right\}$ (бу ерда $x_{n+i}^0 = \left[-g_i\left(x^0\right)\right]^{1/2}$, $i = \overline{1,m}$ нуқта (6.3)-(6.4) масаланинг нисбий шартли минимум нуқтаси бўлса, бу нуқтада

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \widetilde{F}\left(X^0\right)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial g_1\left(x^0\right)}{\partial x} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m\left(x^0\right)}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial \widetilde{F}\left(X^0\right)}{\partial x_{n+1}} = 2\lambda_1 x_{n+1}^0 = 0, \\
&\rule{5cm}{0.4pt} \qquad\qquad\qquad\qquad (6.7) \\
&\frac{\partial \widetilde{F}\left(X^0\right)}{\partial x_{n+m}} = 2\lambda_m x_{n+m}^0 = 0
\end{aligned}$$

муносабатларнинг ўринли бўлиши зарур.

Агар (6.3)-(6.4) масала учун ҳам Лагранж функциясини

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$

киритсак, нисбий минимумнинг зарурий шарти, яъни (6.7) муносабатлар

$$\frac{\partial F\left(x^0, \lambda\right)}{\partial x} = 0, \qquad (6.8)$$

$$\lambda_i x_{n+i}^0 = 0 \text{ ёки } \lambda_i g_i\left(x^0\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (6.9)$$

кўринишда ифодаланади. Одатда, (6.8) шартни пассивликни тўлдирувчи шарт дейилади.

Шундай қилиб, (6.1)-(6.2) масалада $f(x)$ функция x^0 жоиз нуқтада нисбий шартли минимумга эришиши учун шу нуқтада (6.8) ва (6.9) шартларнинг бажарилиши зарур.

Шунингдек, (6.6) кўринишдаги Лагранж функцияси иккинчи тартибли ҳосилалари матрицаси

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F\left(x^0,\lambda\right)}{\partial x^2} & 0 \\ & 2\lambda_1 0...0 \\ & 02\lambda_2...0 \\ 0 & ---- \\ & 00..2\lambda_m \\ & \end{bmatrix} \qquad (6.10)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $\frac{\partial^2 F\left(x^0,\lambda\right)}{\partial x^2}$ ҳам $n \times n$ ўлчовли матрицадан иборат. (6.10) матрицага нисбатан ёзилган квадратик форма ва (6.4) чеклашлар учун ёзилган уринма гипертекисликларни ёзиб, айрим соддалаштиришлар бажарсак, (6.1)-(6.2) масала учун қуйидаги етарлилик шартини оламиз.

Таъриф. Қаралаётган (6.1)-(6.2) масалада x^0 жоиз нуқта шартли-стационар нуқта дейилади, агар шундай $\lambda = \left\{\lambda_1,...,\lambda_m\right\} \geq 0$ топилсаки, $F\left(x,\lambda\right) = f\left(x\right) + \lambda_1 g_1\left(x\right) + ... + \lambda_m g_m\left(x\right)$ Лагранж функцияси учун

$$\frac{\partial F\left(x^0,\lambda\right)}{\partial x} = 0,$$

$$\lambda_i g_i\left(x^0\right) = 0, \ i = \overline{1,m},$$

шартлар бажарилса.

Теорема. (6.1)-(6.2) масалада шартли-стационар нуқтанинг нисбий минимум нуқта бўлиши учун, x^0 нуқтада актив бўлган $i_1, i_2, ..., i_k$ индексли чеклашларга нисбатан тузилган

$$\frac{\partial g_{i_1}\left(x^0\right)'}{\partial x} y = 0, ..., \frac{\partial g_{i_k}\left(x^0\right)'}{\partial x} y = 0 \qquad (\Gamma)$$

гипертекисликда

$$y'\frac{\partial^2 F\left(x^0,\lambda\right)}{\partial x^2}y$$

квадратик форманинг аниқ мусбат бўлиши етарлидир.

Юқоридаги шартларни аниқ бир масала учун қўллаб кўрайлик.

Масала.

$$\begin{cases} f\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+x_2^2-12x_1+16x_2\rightarrow extr \\ g\left(x_1,x_2\right)=x_1^2+x_2^2-25\le 0 \end{cases} \qquad (6.11),\ (6.12)$$

Бу масалада (6.12) чеклаш актив бўлган нуқтада

$$\frac{\partial g\left(x_1,x_2\right)}{\partial x}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}\ne 0,$$

бўлгани учун Лагранжнинг нормал функциясини тузамиз:

$$F\left(x_1,x_2,\lambda\right)=x_1^2+x_2^2-12x_1+16x_2+\lambda\left(x_1^2+x_2^2-25\right)$$

Чеклашлари тенгсизлик тарзида бўлган масала учун келтирилган (6.8)-(6.9) зарурий шартга асосан, бирор жоиз нуқтада функция шартли экстремумга эришса, у нуқтада қуйидаги тенгликлар ўринли бўлиши зарур:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-12+2\lambda x_1=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2+16+2\lambda x_2=0,$$

$$\lambda\cdot\left(x_1^2+x_2^2-25\right)=0.$$

Охирги тенгликда, $\lambda=0$ бўлса ($x_1^2+x_2^2-25\le 0$), $x_1=6, x_2=-8$ бўлиб, бу жоиз нуқта бўлмайди, шу сабабли $\lambda_0\ne 0$. Демак, $x_1^2+x_2^2=25$ бўлиши зарур. Натижада, қуйидаги системани ечиб,

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_1=6, \\ x_2+\lambda x_2=-8, \\ x_1^2+x_2^2=25, \end{cases}$$

A(+3;-4) ва B (-3; +4) экстремал нуқталарга эга бўламиз. Бу ерда A нуқтага $\lambda = +1$ ва B нуқтага $\lambda = -3$ қийматлар мос келади. Дастлаб функцияни A(3;-4) нуқтада текширайлик. Бу нуқтага мос (Г) уринма текислик

$$3y_1 = 4y_2$$

тўғри чизиқдан иборат бўлади. Иккинчи тартибли квадратик форма эса

$$\left(y_1 y_2\right)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 4\left(y_1^2 + y_2^2\right) > 0$$

аниқ мусбат бўлади. Демак функция A(3,-4) нуқтада шартли минимумга эришади, ҳамда

$$f_{\min} = f\left(3,-4\right) = -75 \text{ бўлади.}$$

Энди функцияни B(-3;4) нуқтада текширайлик. Бу нуқтага мос (Г) уринма текислик ҳам $3y_1=4y_2$ бўлади. Мос иккинчи тартибли квадратик форма

$$\left(y_1 y_2\right)\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -4\left(y_1^2 + y_2^2\right) < 0$$

бўлиб, аниқ манфий бўлади. Бу эса B(-3,4) нуқтада функция шартли максимумга эришишни тасдиқлайди:

$$f_{\max} = f\left(-3,4\right) = 125$$

III бобга оид машқлар

1. Дераза рамаси тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, тепа қисми ярим айланадан иборат. Агар раманинг периметри берилган бўлса, унинг ўлчамлари қандай бўлганда юзаси энг катта бўлади?
2. Асоси диаметри 40 см. бўлган ғуладан тўғри тўртбурчакли кўндаланг кесимга эга бўлган устун тайёрлаш лозим бўлсин. Агар устун асоси а ва b ўлчамларга эга бўлиб, устуннинг мустаҳкамлиги bh^2 га тўғри пропорционал бўлса (h-устуннинг баландлиги), унинг ўлчамлари қандай бўлганда мустаҳкамлиги энг юқори бўлади.
3. Буюртма бўйича, ҳажми 72 $см^2$ бўлган қопқоқли қутини шундай ясаш керакки, асосининг томонлари 1:2 нисбатда бўлсин. Қутининг ўлчамлари қандай бўлганда уни тайёрлашга энг кам тахта кетади, яъни иқтисодий тежамкорлик энг юқори бўлади?
4. Баландлиги 1,4 м бўлган картина кўргазма деворига осилган бўлиб, унинг пастки асоси кузатувчи кўзидан 1,8 м баландликда жойлашган. Картинани кўриш бурчаги энг катта бўлиши учун, кузатувчи девордан қанча узоқда туриши керак?
5. Бир бет қоғозда текст 384 $см^2$ жойни эгаллаши шарт. Тепа ва пастдан 3 см дан ён томонлардан эса 2 см дан жой қолдирилади. Агар қоғозни тежаш асосий мақсад бўлса, қоғознинг энг самарали ўлчамлари қандай бўлиши керак?
6. Пароходда ёнилғи сарфи икки қисмга бўлинади. Улардан бири тезликка боғлиқ бўлиб, 4800 сўм/соат. Иккинчи қисми эса тезликнинг кубига пропорционал бўлиб, тезлик 10 км/соат бўлганда 300 сўм/соат. Тезлик қандай бўлганда, 1 км йўлга сарфланган жами харажат (ёнилғи сарфи) минимал бўлади.
7. Қайиқ қирғоқнинг энг яқин нуқтасидан 3 км масофада турган бўлиб, мақсад ўша нуқтадан 5 км наридаги тўғри чизиқли қирғоқда жойлашган маёққа бориш бўлсин. Агар қайиқнинг тезлиги 4 км/соат йўловчининг қирғоқ бўйлаб тезлиги 5 км/соат бўлса, у манзилга энг қисқа вақтда бориши учун қандай маршрутни танлаш керак?
8. Ҳажми $16\pi м^3$ бўлган цилиндрлар ичидан тўла сирти энг кичик бўлган цилиндр ўлчамларини топинг.
9. Узунлиги 1м бўлган симни тўғри тўртбурчак шаклида қандай ўлчамларда букиш керакки, у билан чегараланган юза максимал бўлсин?
10. Периметри 20 см бўлган тенг ёнли учбурчаклардан қайси бири энг катта юзага эга бўлади.

11. Ярим доирага ички чизилган (бир томони диаметрда ётади) тўғри тўртбурчаклар ичидан энг катта юзалисини топинг.

12. Тўғри тўртбурчак шаклидаги 294 м^2 юзага эга бўлган майдончани девор билан ўраш ва яна девор билан уни тенг иккига бўлиш керак бўлсин. Майдончанинг чизиқли ўлчамлари қандай бўлганда жами девор узунлиги энг қисқа бўлади?

13. Трапециянинг ён қирралари унинг кичик асосига тенг бўлиб, унинг катта асосига ёпишган бурчаги қандай бўлганда юзаси максимал бўлади.

14. Берилган доирага максимал юзали ички учбурчакни чизинг.

15. Берилган доирага томонлари квадратларининг йиғиндиси максимал бўлган учбурчак ички чизилсин.

16. Текисликда x_1,x_2 ва x_3 нуқталар берилган. Шундай x_0 нуқтани топингки, x_0дан берилган нуқталаргача бўлган масофалар квадратларнинг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

17. Эллипсга томонлари координата ўқларига параллел бўлган максимал юзали ички тўғри тўргбурчак чизилсин.

18. $$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to extr, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} \to extr, \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \to extr, \\ \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b} - 1 = 0. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2 \to extr, \\ 4x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 \to extr, \\ x_1 - x_2 - \dfrac{\pi}{4} = 0. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to extr \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_3 \to extr \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0. \end{cases}$$

25. Шартли экстремум масаласини ечиш усулидан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликни исботланг:

$$\frac{x_1^n + x_2^n}{2} \ge \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n,$$

$$n \ge 1, x \ge 0, y \ge 0.$$

26. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3 \to extr, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 1, \\ 0 \le x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \to extr \\ |x_1| + |x_2| - 1 \le 0 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \to extr, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 \le 0, \\ x_3 - 1 \le 0. \end{cases}$$

29. Берилган мусбат сонни шундай иккита мусбат қўшилувчига ажратингки, уларнинг тескари қийматлари йиғиндиси минимал бўлсин.

30. Берилган мусбат α сонни шундай n та қўшилувчига ажратингки, уларнинг квадратлари йиғиндиси минимал бўлсин.

31. Ўлчамлари қандай бўлганда V ҳажмли очиқ, тўртбурчакли ванна энг кам сиртга эга бўлади?

32. Периметри 2p бўлган шундай тўртбурчакни аниқлангки, уни томонларидан бири атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми энг катта бўлсин.

33. $y=x^2$ парабола ва x-$y=2$ тўғри чизиқ орасидаги масофани топинг.

IV БОБ

ҚАВАРИҚ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Чизиқсиз программалаштиришнинг фақат қавариқ функциялар ва қавариқ тўпламлар билан иш кўрувчи бўлимига қавариқ программалаштириш дейилади. Бу бўлимнинг асосий элементлари қавариқ функциялар ва қавариқ тўпламлар бўлиб, уларнинг айрим ўзига хос хусусиятлари масала ечимини топишга имкон беради.

1-§. Қавариқ тўпламлар, қавариқ функциялар ва уларнинг баъзи хоссалари

Таъриф. R^n фазонинг бирор X тўплами қавариқ дейилади, агар ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ ва $0 \le \lambda \le 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи λ сон учун

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

нуқта яна X тўпламга тегишли бўлса.

Қавариқ тўпламга мисол қилиб, доира, шар, квадрат, яримтекислик, ҳақиқий сонлар тўплами кабиларни келтириш мумкин.

Ҳалқа, айлана, сфера, бўш қути, рационал сонлар тўплами кабилар эса қавариқ бўлмаган тўпламларга мисол бўла олади.

Қавариқ тўпламларнинг баъзи муҳим хоссаларини келтирайлик.

1. Исталган сондаги қавариқ тўпламлар кесишмаси қавариқ тўплам бўлади.

Бу хосса исботини иккита тўплам учун келтириш кифоя. Дейлик

$$Z = X \cap Y$$

бўлиб, X, Y - қавариқ тўпламлар бўлсин. Z га тегишли иккита z_1, z_2 нуқта олайлик. У ҳолда тўпламлар кесишмасининг таърифига кўра,

$$z_1 \in X, z_2 \in X; z_1 \in Y, z_2 \in Y$$

X ва Y тўпламлар қавариқ бўлганлиги сабабли

$$z(\lambda) = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

нуқта қавариқ X, Y тўпламларга тегишли бўлади, демак, $z(\lambda) \in Z$, яъни Z - қавариқ тўплам.

2. Қавариқ X тўпламнинг ихтиёрий сондаги $x_1, x_2, \dots, x_k$ нуқталарнинг қавариқ комбинацияси, яъни

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ \lambda_i \ge 0, \ i = \overline{1,k}, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

шу қавариқ тўпламга тегишли бўлади.

3. Агар x нуқта қавариқ X тўпламнинг чегаравий нуқтаси бўлса, шундай c, $c \neq 0$, вектор топиладики, барча $x \in X$ учун

$$c'x \leq c'x^*$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Одатда бундай $c'x = \alpha$ гипертекислик таянч гипертекислик дейилади. Демак, қавариқ тўпламнинг ихтиёрий чегаравий нуқтаси орқали таянч гипертекислик ўтказиш мумкин.

Энди қавариқ функцияларнинг баъзи хоссаларини келтирайлик.

Таъриф. Қавариқ тўплам X да аниқланган $f(x)$ функция қавариқ функция дейилади, агар ихтиёрий x_1, $x_2 \in X$ ва λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, учун

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса. Шунингдек, қавариқ функция қатъий қавариқ дейилади, агар ихтиёрий x_1, $x_2 \in X$ нуқталар ва λ, $0 < \lambda < 1$, учун

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

қатъий тенгсизлик бажарилса.

Бу таърифдан кўринадики, қавариқ функциянинг графиги тўғри чизиқли кесмаларни ўз ичига олиши мумкин, бироқ қатъий қавариқ функция графиги бундай кесмаларни ўз ичига олмайди.

1. Қавариқ функция икки хил нисбий минимумга эга бўла олмайди. Қатъий қавариқ функция эса минимумга ягона нуқтада эришади.

Ҳақиқатан, дейлик, x_1, $x_2 \in X$ нуқталарда қавариқ $f(x)$ функция нисбий минимумларга эришсин ва аниқлик учун

$$f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right) \tag{1.1}$$

бўлсин. У ҳолда $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, нуқта учун, функциянинг қавариқлигидан (1.1) шартга кўра

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right) < f\left(x_1\right)$$

бўлади ва $\lambda^* \to 1$ да $x\left(\lambda^*\right) \to x_1$. Яъни $x\left(\lambda^*\right)$ нуқта x_1 нинг етарли кичик атрофига тушади. Демак,

$$f\left(x\left(\lambda^*\right)\right) < f\left(x_1\right)$$

муносабатга эга бўламиз. Бу зидлик, $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ ўринли бўлишини асослайди.

Энди, дейлик $f(x)$ қатъий қавариқ бўлиб, x_1 ва x_2 нуқталарда минимумга эришсин ҳамда $x_1 \neq x_2$ бўлсин. У ҳолда юқоридаги хоссага кўра

$f(x_1) = f(x_2)$ бўлади, ҳамда $0 < \lambda < 1$ ни қаноатлантирувчи λ учун

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = f(x_1)$$

бўлиб, яна юқоридагидек зидликка эга бўламиз, демак, $x_1 = x_2$.

Қавариқ функциянинг бу хоссасига кўра унинг ихтиёрий нисбий минимуми мутлақ минимум бўлади. Шу сабабдан, функциянинг бирор минимум нуқтасини топиш кифоя.

Қавариқ функциялар синфининг яна бир жиҳати шундаки, унга дифференциалланувчи бўлмаган функциялар ҳам киради. Масалан

$$y = |x|$$

функция узлуксиз ва қавариқ, бирок, $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи эмас.

Таъриф. Берилган $f(x)$ функция x_0 нуқтада $\ell, \|\ell\| = 1$, йўналиш бўйича дифференциалланувчи дейилади, агар

$$\lim_{\alpha \to 0+} \frac{f(x_0 + \alpha\ell) - f(x_0)}{\alpha}$$

лимит мавжуд бўлса ва $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial \ell}$ каби белгиланади.

2. Қавариқ X тўпламда аниқланган қавариқ функция ҳар бир $x \in \operatorname{int} X$ нуқтада ихтиёрий $\ell, \|\ell\| = 1$, йўналиш бўйича дифференциалланувчи бўлади.

Бу хоссани ёритиш мақсадида бир мисол келтирайлик, яъни $y = |x|$ функциянинг $\ell, \|\ell\| = 1$, йўналиш бўйича ҳосиласини ҳисоблайлик:

$$\left.\frac{\partial |x|}{\partial \ell}\right|_{x=0} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{|0 + \alpha\ell| - |0|}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot |\ell|}{\alpha} = |\ell|,$$

$$\left.\frac{\partial |x|}{\partial \ell}\right|_{x>0} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{|x + \alpha\ell| - |x|}{\alpha} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial |x|}{\partial \ell}\right|_{x<0} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{|x + \alpha\ell| - |x|}{\alpha} = -1.$$

3. Қавариқ тўпламда аниқланган қавариқ функция тўпламнинг барча ички нуқталарида узлуксиз бўлади.

4. Қавариқ тўплам X да аниқланган қавариқ $f(x)$ функция ҳар бир $x^* \in X$ нуқтада таянч функцияга эга, яъни шундай чизиқли $c'x$ функция топиладики, барча $x \in X$ учун

$$f(x) - f(x^*) \geq c'(x - x^*)$$

Бу ерда c векторни тасаввур этиш учун, $f(x)$ функция оддий маънода дифференциалланувчи бўлганда

$$c = gradf\left(x^*\right)$$

эканлигини таъкидлаш кифоядир.

Қавариқ функция экстремумини топишда муҳим рол ўйнайдиган бир хоссани келтирайлик

5. **Теорема**. Қавариқ тўплам X да аниқланган, қавариқ, барча йўналиш бўйича дифференциалланувчи $f(x)$ функция бирор $x_0 \in X$ нуқтада минимумга эришиши учун шу нуқтада барча йўналиш бўйича олинган ҳосиланинг манфий бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Исботи. Дастлаб зарурлигини исботлайлик. Дейлик, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришсин, бироқ шу нуқтада бирор $\ell, \|\ell\| = 1$ йўналиш бўйича олинган ҳосила манфий бўлсин, яъни

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \bar{\ell}} = \alpha < 0.$$

У ҳолда, йўналиш бўйича олинган ҳосиланинг таърифи ва лимитнинг маъносига кўра, шундай $\bar{\varepsilon} > 0$ топиладики, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ бўлганда

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon\bar{\ell}) - f(x_0)}{\varepsilon} < \frac{\alpha}{2}$$

бўлади. Демак, x_0 нинг атрофида шундай $\bar{x} = x_0 + \varepsilon\bar{\ell}$ топиладики,

$$f(\bar{x}) < f(x_0) + \frac{\varepsilon \cdot \alpha}{2} < f(x_0)$$

бўлади. Бу эса x_0 нинг минимум нуқта деб олинишига зид. Демак, барча жоиз йўналиш бўйича олинган ҳосила манфий бўлмайди.

Энди, етарлиликни исботлайлик. Дейлик, x_0 нуқтада барча $\ell, \|\ell\| = 1$ йўналиш бўйича

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \ell} \geq 0 \qquad (*)$$

бўлиб, $f(x)$ функция бу нуқтада минимумга эришмасин, яъни шундай $x_1 \in X$ нуқта топилсинки,

$$f(x_1) = f(x_0) - \alpha, \alpha > 0$$

бўлсин. Қуйидагича нуқта қуриб олайлик:

$$x(\lambda) = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, \quad 0 \le \lambda < 1,$$

X ва $f(x)$ 4 функцияларнинг қавариқлиги туфайли $x(\lambda) \in X$, $0 \le \lambda < 1$, ҳамда,

$$f(x(\lambda)) \le (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) = f(x_0) - \lambda f(x_0) + \lambda f(x_0) - \lambda \cdot \alpha,$$

яъни

$$f(x(\lambda)) \le f(x_0) - \alpha \cdot \lambda$$

бўлади. Шу x_0 нуқтада $\ell = x_1 - x_0$ йўналиш учун

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \ell} = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x_0 + \lambda\ell) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{-\lambda \cdot \alpha}{\lambda} = -\alpha < 0.$$

Бу эса (*) шартга зид. Демак $f(x_0)$ ягона минимум қиймат экан.

6. Агар $f(x)$ функция оддий маънода икки марта дифференциалланувчи бўлса, унинг очиқ X тўпламда қавариқ бўлиши учун

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, x \in X,$$

квадратик матрица билан аниқланадиган квадратик форманинг манфий бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

2-§. Қавариқ программалаштириш масаласининг қўйилиши. Эгар нуқта. Кун-Таккер теоремаси

Қавариқ программалаштириш масаласи шаклан чизиқсиз программалаштириш масаласига ўхшаса ҳам, мазмунан фарқ қилади.

Масаланинг қўйилиши. Берилган қавариқ Q тўпламга тегишли бўлган, ҳамда қавариқ $g_i(x)$, $i = 1, m$, функциялар билан аниқланувчи

$$g_1(x) \le 0, g_2(x) \le 0, \dots, g_m(x) \le 0,$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар (бундай нуқталар жоиз нуқталар дейилади) ичидан қавариқ $f(x)$ функцияга минимум қиймат берувчи нуқта топилсин:

$$f(x) \to \min, \tag{2.1}$$

$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, \tag{2.2}$$

$$x \in Q. \tag{2.3}$$

Барча қавариқ тўпламлар кесишмаси қавариқ бўлганлиги туфайли юқоридаги масалада барча жоиз нуқталар тўплами қавариқ тўплам бўлади. Демак, қавариқ функция хоссаларига кўра, масаланинг ихтиёрий нисбий минимуми мутлақ минимум ҳам бўлади. Қуйида шундай минимумни топишга имкон берувчи шартларни келтирамиз.

Таъриф. Юқоридаги (2.1)-(2.3) масала учун тузилган ушбу

$$F(x,\lambda)= f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$$

функцияга Лагранж функцияси дейилади.

Таъриф. Қаралаётган масалада жоиз векторлар жуфтлиги $\{x^*,\lambda^*\}x^* \in Q, \lambda^* \geq 0$, Лагранж функциясининг эгар нуқтасини ташкил этади, дейилади, агар барча $x \in Q$ ва $\lambda \geq 0$ векторлар учун

$$F(x^*,\lambda)\leq F(x^*,\lambda^*)\leq F(x,\lambda^*) \qquad (2.4)$$

қўш тенгсизлик ўринли бўлса. Бу тенгсизликнинг ўнг ярим қисмини алоҳида қарасак, $\{x^*,\lambda^*\}$ нуқта $F(x,\lambda^*)$ функция учун x ўзгарувчи бўйича минимум нуқта бўлишини, чап ярим тенгсизлик эса ўша нуқтанинг айни пайтда λ ўзгарувчи бўйича максимум нуқта бўлишини англатади. Бу ҳолатни геометрик тасаввур этсак, у оддий маънодаги эгарни эслатади.

Теорема. (Минимумнинг етарли шарти). Агар қаралаётган масалада $\{x^*,\lambda^*\}, x^* \in Q, \lambda^* \geq 0$, жуфтлик Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлса, x*4-масаланинг ечими бўлади.

Исботи. Эгар нуқтани англатувчи (2.4) тенгсизликни ёйиб ёзайлик:

$$f(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x^*)\leq f(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x^*)\leq f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x)$$

бундан,

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i\cdot(x^*)\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(x^*) \qquad (2.5)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик ўринли бўлиши учун

$$g_k(x^*)\leq 0 \qquad (2.6)$$

бўлиши зарур. Ҳақиқатан, агар бирорта k, $1 \leq k \leq m$, индекс учун (2.6) ўринли эмас деб фараз қилсак, яъни

$$g_i\left(x^*\right) > 0$$

бўлса, λ ни: $\lambda_i = 0, i \neq k, \lambda_k > 0$ каби танлаш ҳисобига

$$\lambda_k g_k\left(x^*\right) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ерда $\lambda_k \to \infty$ қилиб олинса, тенгсизликнинг бир томонида чекли, иккинчи томонида эса чексиз сон пайдо бўлади. Демак, (2.6) ўринли.

Шунингдек,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) = 0 \qquad (2.7)$$

бўлишини ҳам кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, агар тескарисини фараз қилсак,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) < 0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Яна (2.5) тенгсизликда $\lambda = \frac{\lambda^*}{2}$ қилиб танласак

$$0 \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i\left(x^*\right) < 0$$

зидликка келамиз. Бу зидлик (2.7) тенгликни исботлайди.

Энди эгар нуқтани ифодалувчи тенгсизликнинг ўнг ярим тенгсизлигидан

$$f\left(x^*\right) \le f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x)$$

га эга бўламиз. Бу эса барча жоиз векторлар учун

$$f\left(x^*\right) \le f(x)$$

ўринли эканлигини англатади.

Демак, $x^* \in Q$ нуқтада функция минимумга эришади. Теорема тўла исбот бўлди.

Бу теорема зарурий шарт бўлиб, агар маълум шартлар бажарилса, етарли ҳам бўлишини исботлаш мумкин.

Таъриф. Қаралаётган (2.1)-(2.3) масалада (2.2) чеклашлар Слейтер шартини қаноатлантиради, дейилади, агар шундай $x^* \in Q$ нуқта топилсаки, у нуқтада

$$g_i\left(x^*\right) < 0, i = \overline{1,m},$$

бўлса. Яъни бошқача қилиб айтганда, $g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m}$, тенгсизликлар кесишмаси ички нуқтага эга бўлса.

Кун - Таккер номи билан юритилувчи қуйидаги теоремани келтириш ўринлидир.

Теорема. Дейлик, қаралаётган масалада (2.2) тенгсизликлар Слейтер шартини қаноатлантирсин. Жоиз нуқта $x^* \in Q$ масаланинг ечим бўлиши учун шундай $\lambda^*, \lambda^* \geq 0$, вектор топилиши керакки, $\left\{x^*, \lambda^*\right\}$ жуфтлик Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теорема исботини [1] дан топиш мумкин.

IV бобга оид машқлар

1. Агар $X \subset R^n$ тўпламнинг ихтиёрий икки элементи $x_1, x_2 \in X$ учун $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in X$ бўлса, X тўплам қавариқ бўладими?
2. Ихтиёрий икки қавариқ тўплам бирлашмаси қавариқ бўладими? Жавобни асосланг.
3. Қавариқ бўлмаган тўртбурчаклар ва кўпбурчаклар қуриб кўрсатинг.
4. Фақатгина маркази қийиб олинган шар қавариқ бўладими?
5. $M = \left\{x : g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m},\ x \in R^n,\ g_i(x) -\right.$ қавариқ$\}$ тўпламнинг қавариқлигини исботланг.
6. $N = \left\{x : g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,k};\ ax_i = b_i,\ i \in k,\overline{m},\ a_1 b -\right.$ ўзгармас сонлар$\}$ – тўплам қавариқми?
7. R^n да аниқланган $f(x)$ функция қавариқ бўлиши учун $\varphi(t) = f(x + ts)$, $t \in R^1$, функциянинг t нинг функцияси сифатида ихтиёрий x ва s учун қавариқ бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.
8. Қуйидаги функциялар параметрларнинг қандай қийматларида қавариқ бўлади?

   $a)\ f(x) = ax^2 + bx + c$

   $b)\ f(x) = a\ell^{2x} + b\ell^x + c$

   $c)\ f(x_1, x_2) = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p},\ p > 0$

   $d)\ f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

9. $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ функциянинг (0,0) нуқтадаги $\ell, \|\ell\| = 1$, йўналиш бўйича ҳосиласини ҳисобланг.
10. Иккита қавариқ функция йиғиндиси ҳар доим ҳам қавариқ бўлавермаслигини мисол келтириш йўли билан исботланг.
11. $\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \le 0 \\ -g_1(x_1, x_2) \le 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси қавариқ $g(x_1, x_2)$ функция учун Слейтер шартини қаноатлантирадими?
12. Қуйидаги функцияларни қавариқликка текширинг:

1) $f(x) = e^{2x_1+x_2}, (x_1, x_2) \in R^2$.

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 \cdot x_2 - x_3 + 10$.

Қуйидаги масалаларда Слейтер шартининг бажарилиши ва берилган режаларнинг оптимал бўлиш ёки бўлмасилигини аниқланг.

13.

$$-x_1^2 - x_2^2 + 6 \to \max$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$x_1 \ge 0,$$

$$x^{(1)} = (1;-1);\ x^{(2)} = (0,0).$$

14.

$$-5x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 \cdot x_2 \to \max$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \le 4,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$x^{(1)} = (1,8), x^{(2)} = (-1,0),$$

$$x^{(3)} = (0,0), x^{(4)} = (0,1).$$

V БОБ

ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

1-§. Динамик программалаштиришнинг асосий тушунчалари

Динамик программалаш кўп босқичли масалаларнинг мукаммал ечимини аниқлашни таъминловчи математик усуллардан биридир. Ушбу усул Беллманнинг оптималлик қоидасига асосланган бўлиб, у уч босқичдан иборатдир.

1. Бошланғич масала асосида туркум масалалар ҳосил қилинади, туркумдаги параметрларнинг маълум бир қийматларида кўрилаётган бошланғич масала хосил бўлади.
2. Аниқланган туркум масалалар учун Беллманнинг оптималлик қоидаси асосида асосий тенглама (Белман тенгламаси) тузилади.
3. Беллман тенгламаси ечилади ва ушбу ечимлар асосида оптимал ечим қурилади.

Беллманнинг оптималлик қоидасини кўриб чиқайлик. Оптимал ҳатти-ҳаракат, бошланғич ҳолат ва ушбу ҳолатга олиб келган ечим қандай бўлишидан қатъий назар келгусидаги ечимлар бошланғич ҳолатга нисбатан оптимал ечим бўлиши керак.

Динамик программалаш масаласининг қўйилиши: дискрет бошқарилувчан тизимда бошланғич S_0 ҳолатни охирги S_N ҳолатга ўтказувчи шундай бошқарувни топиш керакки, мақсад функция W ўзининг экстремум қийматига эришсин.

Кўп босқичли жараённинг ечимини аниқлаш икки усулда амалга оширилиши мумкин: бошланғич ҳолатдан охирги ҳолатга қараб ёки охирги холатдан бошланғич ҳолатга қараб.

N- босқич ечимини қуриш учун *N-1* босқичдаги тизим ҳолатини билиш зарурдир. Тизим дискрет бўлганлиги учун бу ҳолатлар

$$S_{N-1,1},\quad S_{N-1,2},\ldots,S_{N-1,k} \qquad (1.1)$$

бўлади.

Ҳар бир $S_{N-1,j}$ $(j=\overline{1,k})$ ҳолатни S_N ҳолатга ўтказувчи шартли оптимал $U^*_{N,j}=U^*_{N,j}(S_{N-1,j})$ бошқарувни аниқлаймиз. Ушбу шартли оптимал бошқарув $U^*_{N,j}$ мақсад функция W учун экстремум қийматни беради.

Ушбу фикрнинг давоми сифатида *N-1* босқич учун шартли оптимал бошқарувни аниқлаймиз. Бу бошқарувни аниқлаш учун тизимнинг *N-2* босқичидаги мумкин бўлган ҳолатлари

$$S_{N-2,1},\quad S_{N-2,2},\quad \ldots\ldots, S_{N-2,c} \qquad (1.2)$$

билиш зарурдир.

Мумкин бўлган ҳар бир ҳолат $S_{N-2,j}$ учун шартли оптимал $U^*_{N-2,j} = U^*_{N-2,j}(S_{N-2,j})$ ечимни аниқлаймиз.

Ушбу шартли оптимал бошқарув (ечим) $W\left(U^*_{N-1,l}\right) + W\left(U^*_{N-1,j(l^*)}\right)$ мақсад функцияга экстремум қиймат беради.

Бошқача қилиб айтганда $(N-i)$ босқичда шартли оптимал ечим U^*_{N-i} $(N-(i+1))$ босқичнинг ҳар бир мумкин бўлган ҳолати учун қуйидаги мақсад функция

$$\left\lfloor W\left(U^*_{N-i,j}\right) + \ldots + W\left(U^*_{N-1,j}\right) + W\left(U^*_{N,j}\right)\right\rfloor$$

учун экстремум қийматини таъминлайди.

Ушбу шартли максимал ечимларни қуриш жараёни биринчи босқич учун $U^*_1(S_0)$ оптимал ечим аниқлангунча давом эттирилади. Аниқланган $U^*_1(S_0)$ оптимал ечим

$$W^* = \left\lfloor W\left(U^*_{1,j}\right) + \ldots + W\left(U^*_{N-i,j}\right) + \ldots + W\left(U^*_{N,j}\right)\right\rfloor$$

мақсад функцияга экстремум қиймат беради.

Оптимал ечимни эришилган ҳолатдан оптимал равишда келгуси ҳолатга давом эттириш Беллманнинг оптималлик қоидаси дейилади. Беллманнинг оптималлик қоидаси асосида оптимал ечимни қуриш алгоритмини тузиш ва функция қийматларини рекуррент равишда олдинги қийматлар асосида ҳисоблаш мумкин бўлади, яъни

$$B_{N-i}(S_i) = \underset{U_{i-1}}{extr}\left\lfloor W_{i+1}\left(S_{i+1}, U_{i+1}\right) + B_{N-(i+1)}\left(S_{i+1}\right)\right\rfloor \qquad (1.3)$$

бу ерда $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$, қийматларни қабул қилади.

Беллман тенгламасида $U_i = \left(U_i^1, U_i^2, \ldots, U_i^m\right)$ бошқарув вектори, $S_i = \left(S_i^1, S_i^2, \ldots, S_i^n\right)$-системанинг i-босқичдаги Беллман функцияси, яъни мақсад функциянинг экстремум қийматидир. Юқорида келтирилган Беллман (1.3) тенгламаси функция қийматларини рекуррент равишда ҳисоблаш имкониятини беради, яъни $B_0(S_N)$ асосида $B_1(S_{N-1})$ ни ва $B_1(S_{N-1})$ асосида $B_2(S_{N-2})$ ва хоказо.

1. Динамик программалаштириш ёрдамида оптимал ечимни аниқлаш алгоритми

1) Беллман экстремал тенгламасини охирги ҳолат учун ёзиб оламиз, яъни

$$B_1\left(S_{N-1}\right) = extr\left\{W_N\left(S_{N-1}, U_N\right) + B_0\left(S_N\right)\right\} \qquad (1.4)$$

2) $W_N\left(S_{N-1}, U_N\right)$ функциянинг қийматларини S'_{N-1} мумкин бўлган ҳолатлар ва U_N бошқарув учун ҳисоблаб оптимал U^*_N ва $B_1\left(S_{N-1}\right)$ ларни аниқлаймиз;

3) Беллманнинг асосий тенгламасини ихтиёрий $\ell = N - i,\ i = N-1,...,0$ босқичлар учун қурамиз;

4) шартли оптимал ечимларини қуриш жараёни $\ell = 0$ бўлганда тўхтатилади;

5) шартли оптимал ечимлар асосида, бошланғич ҳолат S_0 учун оптимал ечим танлангандан сўнг, келгуси оптимал ечимларни шартли оптимал ечимлардан ҳосил қиламиз ва кўрилаётган масаланинг оптимал ечими $B_N\left(S_0\right)$ни аниқлаймиз.

2-§. Инвестицияларни оптимал тақсимлаш масаласи

Қуйидаги масала билан танишайлик. Умумий миқдори А бирлик бўлган инвестиция n йилга оптимал тақсимлансин. Агар инвестициянинг x миқдорини i - йилда сарфланса, $f_t(x)$ фойда олинади. Максимал фойда олиш учун инвестицияни йиллар ўртасида қандай тақсимлаш керак?

Фараз қилайлик, x_t t- йил учун ажратилган инвестиция миқдори бўлсин. У ҳолда кўрилаётган инвестицияларни тақсимлаш масаласининг математик модели

$$\sum_{t=1}^{n} f_t\left(x_t\right) \to \max$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = A, \qquad (2.1)$$

$$x_t \geq 0,\ бутун\ t = \overline{1,n},$$

кўринишини олади.

(2.1) чизиқсиз программалаштириш масаласининг ўзига хослиги шундан иборатки, унинг мақсад функцияси $f(x)$ ва асосий чеклаш функцияси $g(x)$ *сепарабелдир*, яъни улар бир ўзгарувчили функциялар йиғиндиси шаклида ифодаланган.

Экстремал масалани динамик програмалаштириш усули билан ечишнинг биринчи босқичи берилган масалани унга ўхшаш масалалар оиласига инвариант туркумлашдан иборатдир. Бу босқич маълум маънода санъат бўлиб, ҳар бир муайян ҳолда тадқиқотчининг тажрибаси, сезгиси ва маҳоратига боғлиқдир. Ушбу (2.1) масала учун ихтиёрий $k,1 \le k \le n$, йиллар мобайнида ва $y,0 \le y \le A$ инвестиция жамламасига эга бўлган инвестицияларни тақсимлашнинг ушбу

$$\begin{gathered}\sum_{t=1}^{k} f_t(x_t) \to \max,\\ \sum_{t=1}^{k} x_t = y, \quad x_t \ge 0, \ t = \overline{1,k},\end{gathered} \tag{2.2}$$

масалаларини қарашдан иборатдир. $k = n,\ y = A$ бўлганда (2.2) масалалар оиласидан бошланғич (2.1) масала олинади.

(2.2) масалалар оиласидан олинган ихтиёрий масала мақсад функциясининг оптимал қиймати Беллман функцияси дейилади:

$$\begin{gathered}B_k(y) = \max \sum_{t=1}^{k} f_t(x_t),\\ \sum_{t=1}^{k} x_t = y, \ x_t \ge 0, \ t = \overline{1,k}\ .\end{gathered} \tag{2.3}$$

Масалани динамик программалаштириш усули билан ечишнинг иккинчи босқичи - Беллман функцияси учун реккурент тенгламани олишдан иборатдир. Бу босқичда Беллманнинг оптималлик принципи умумий ҳолда қўлланилади. (2.1) масала учун унинг моҳияти қуйида келтириладиган мулоҳазалар орқали берилади. Бу мулоҳазалар оддий математик фактларга асосланган ва етарлича универсалдир. Изланаётган тенгламани тузишда инвариант жойлашнинг тўғрилиги намоён бўлади. (2.2) масалада k –йилга $z,0 \le z \le y$, миқдоридаги инвестиция ажратамиз. Бунда k - йилдан олинадиган фойда $f_k(z)$ га тенг бўлади. 1,2,...,k-1 номерли йиллар учун эса y-z миқдоридаги инвестиция қолади. Айтайлик, бу инвестиция қолган йилларга оптимал тақсимланган бўлсин. (2.3) нинг аниқланишига кўра k-1 та йилдан келадиган фойданинг максимал миқдори $B_{k-1}(y-z)$ га тенг бўлади. Шундай қилиб, k йилга z миқдорида инвестиция ажратилганда барча k йиллар ва y инвестиция жамламасидан

$$f_k(z) + B_{k-1}(y-z) \tag{2.4}$$

фойда оламиз.

Агар z миқдорни $0 \le z \le y$ чегарасида ўзгартириб, (2.4) умумий фойда максимал бўладиган $x_k^0(y)$ (k *-йил* учун инвестициянинг оптимал миқдори) қийматини топамиз:

$$f_k\left(x_k^0(y)\right)+B_{k-1}\left(y-x_k^0(y)\right)=\max_{0\le z\le y}\left[f_k(z)+B_{k-1}(y-z)\right] \quad (2.5)$$

Иккинчи томондан (2.3) га асосан инвестиция миқдори y бўлганда k та йилдан олинадиган максимал фойда $B_k(y)$ га тенгдир. Бу қийматни (2.5) ифоданинг ўнг томонига тенглаштириб, $B_k(y)$ ункция учун

$$B_k(y)=\max_{0<z\le y}\left[f_k(z)+B_{k-1}(y-z)\right], \qquad k=\overline{1,n}, \quad 0\le y\le A, \quad (2.6)$$

тенгламани оламиз. Бу Беллман тенгламаси деб аталади. (2.6) тенглама $B_k(y)$ функциянинг k аргументига нисбатан рекуррент бўлганлигидан уни ечиш учун бошланғич шарт берилиши керак. Унинг (2.3) дан $k=1$ бўлганда топиш мумкин:

$$B_1(y)=\max f_1(x_1), \quad x_1=y, \ x_1\ge 0,,$$

шундай қилиб, Беллман тенгламаси (2.6) учун бошланғич шарт

$$B_1(y)=f_1(y) \quad (2.7)$$

кўринишга эга бўлади.

Масалани динамик программалаш усули билан ечишнинг учинчи (ва охирги) босқичи Беллман тенгламасининг ечимини излашдан ва у бўйича (2.1) масаланинг ечимини қуришдан иборатдир. (2.6) тенгламада $k=2$ деб оламиз:

$$B_2(y)=\max_{0\le z\le y}\left[f_2(z)+B_1(y-z)\right], \quad (2.8)$$

бу ифоданинг ўнг томонида берилган $f_2(z)$ функция ва (2.7) дан топилган $B_1(y)$ функция бор. Шунинг учун (2.8) формула маълум бир ўзгарувчили функциянинг максималлаштириш билан $B_2(y)$ функциянинг ҳисоблаш имконини беради. Сўнгра (2.6) да $k=3,4,\dots,n$ деб олиб, ҳар бир ҳолда бир ўзгарувчили функциянинг максималлаштириш амалини бажариб, кетма-кет $B_3(y), \ B_4(y),\dots, B_n(y)$ функцияларни оламиз.

(2.3)га асосан $B_n(A)$ сон (2.1) бошланғич масала учун максимал фойдадан иборатдир. Инвестициянинг йиллар бўйича оптимал тақсимотини топиш учун (2.5) ифодага мурожаат қиламиз. Унда $k=n, y=A$ деб оламиз, (2.5) нинг аниқланиши бўйича, агар барча n та йил учун инвестиция миқдори A га тенг бўлса, охирги йилга (бу ҳолда n -йилга) ажратилган инвестициянинг оптимал миқдорига тенг бўлган $x_n^0(A)$ сонни оламиз. шундай қилиб бошланғич масала $x^0 = \{x_1^0,...,x_n^0\}$ оптимал режасининг x_n^0 компоненти топилди: $x_n^0 = x_n^0(A)$.

Агар *n-йил* учун x_n^0 миқдор ажратилса, у ҳолда қолган *n-1* та йил учун $A - x_n^0$ миқдордаги инвестиция қолади. (2.5) да $k = n - 1$, $y = A - x_n^0$ деб оламиз ва $x_{n-1}^0(A - x_n^0)$ ни топамиз. Равшанки, (2.1) масаланинг x^0 оптималнинг охиргидан олдинги компоненти $x_{n-1}^0 = x_{n-1}^0(A - x_n^0)$га тенгдир. Жараённи давом эттириб, (2.1) бошланғич масала ечимининг $x_{n-2}^0,...,x_1^0$ компонентларини топамиз.

Натижани таҳлил қиламиз. Усулнинг афзалликлари:

1) бошланғич n та ўзгарувчи бўйича максималлаштириш масаласи (2.1) битта ўзгарувчи бўйича *n-1* та максималаштириш масаласи (2.6) га келтирилди ҳамда натижа - глобал оптимал режадан иборат бўлади;

2) ечиш жараёнида масала элементларининг аналитик хоссаларидан фойдаланилмади; берилган функциялар жадвал, график, алгоритм ва ҳ.к. кўринишда берилиши мумкин эди;

3) $B_k(y)$ ларни ҳисоблаш натижалари бўйича A ва n нинг қийматларини вариациялаб, (2.1) масаланинг ечимини осон ҳосил қилиш мумкин; бу (2.1) масала ечимини кўрсатилган параметрларнинг ўзгаришига сезгирлигини таҳлил қилиш имконини беради.

Усулнинг асосий камчилиги Беллман томонидан ўз вақтида «ўлчовнинг қарғиши» деб аталган бўлиб, у шундан иборатки, (2.6) Беллман тенгламасини ечишда кўплаб функцияларни эсда сақлашга тўғри келади. Берилган битта инвестицияни тақсимлаш масаласида улар бир ўзгарувчили функциялардан иборат. Умумий ҳолда эса аргументларнинг сони инвестициянинг хиллари сонига тенг бўлади. ЭҲМда кўп ўзгарувчили функциялар жадвалларини тузиш оператив хотира имконияти чегараланганлигидан принципиал қийинчиликларга олиб келади, шунинг учун бу усулнинг муҳокама қилинаётган шу камчилиги кўп ўлчовли масалаларини ечишда динамик программалашнинг юқорида баён қилинган классик усулини амалга ошириш имконини бермайди. «ўлчов қарғиши» ни бартараф этишнинг турли усуллари тавсия қилинган.

Мисол. (2.1) масалага оид сонли мисол қарайлик. Бу ерда $n = 3$, $A = 5$ ва функциялар қуйидагича аниқланган бўлсин.

$$f_1(x) = x, \text{ агар } x = \overline{0,5},$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, x = 0,1, \\ x - 1, x = \overline{2,4}, \\ 7, x = 5, \end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} 0,\ x=0, \\ 2,\ x=1,2, \\ 3,\ x=3,4,5. \end{cases}$$

Беллман тенгламасини тузамиз.

$n=1$ учун $B_1(y)=\max\limits_{x_{33}\le y} f_3(x)= f_3(y),\quad y=\overline{0,5}.$

y	$\tilde{x}_3(y)$	$B_1(y)$
0	0	0
1	1	2
2	2	2
3	3	3
4	4	3
5	5	3

$n=2$

$$B_2(y)=\max_{x_2}\left\{f_2(Vx_2)+B_1(y-x_2)\right\},\ y=\overline{0,5}.$$

y	$x_2(y)$	$B_2(y)$
0	0	0
1	0	2
2	0	2
3	0;2	3
4	3	4
5	5	7

$n=3$

$$B_3(5)=\max_{0\le x_1\le 5}\left\{f_1(x_1)+B_2(y-x_1)\right\}=$$
$$=\max\left\{0+B_2(5);1+B_2(4);2+B_2(3);3+B_2(2);4+B_2(1);5+B_2(0)\right\}=$$
$$=\max\left\{0+7;1+4;2+3;3+2;4+2;5+0\right\}=$$
$$=\max\left\{7;5;3;5;6;5\right\}=7;\ x_1(5)=0.$$

(2.6) қаралаётган масалада максимал фойда $B_3(5)=7$ бўлади. Инвестицияларни оптимал тақсимлашни топамиз. $x_1^0(5)=0$ бўлганлигидан, биринчи йилга инвестиция ажратмаймиз: $x_1^0 = 0$. Шундай қилиб, 2, 3-йилларга тўлиқ 5 ҳажмдаги инвестиция қолади. $x_2^0(5) = 5$ эканлигини топамиз. Демак, максимал фойда олиш учун ҳамма инвестицияларни иккинчи йилга ажратиш керак $\left(x_2^0 = 5\right)$. Шунинг учун, $x_3^0 = 0$.

3-§. Самолётга оптимал юк юклаш масаласи

Қуйидаги масалани таҳлил қилайлик. N турдаги қадоқланган маҳсулотлар берилган бўлиб, ушбу маҳсулотлар билан умумий юк кўтариш қуввати W бирликка тенг бўлган самолётни тўлдириш керак бўлсин. Ҳар бир $j \in N$ маҳсулотнинг бир донасининг оғирлиги p_j бирлик ва ундан келадиган соф фойда c_j бирликни ташкил этсин. Самолётни шундай маҳсулотлар билан тўлдириш керакки:

1) юкнинг умумий оғирлиги W бирликдан ошмасин;

2) юкланган маҳсулотлардан олинадиган умумий соф фойда энг катта бўлсин.

Ушбу масаланинг чизиқли оптимизация моделини қурамиз ва уни динамик программалаштириш усули билан ечамиз. Масалада аниқланиши керак бўлган миқдор j-маҳсулотдан нечта дона олинишидир, шу туфайли x_j деб j маҳсулот сонини белгилаймиз, у ҳолда

$p_j \cdot x_j$ миқдор x_j - дона j-маҳсулот оғирлиги

$c_j \cdot x_j$ миқдор x_j - дона j-маҳсулотдан келадиган соф фойда бўлади.

У ҳолда

$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ - юкнинг умумий оғирлигини,

$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ - юкдан келадиган умумий соф фойдани билдиради. Масала шартига кўра чизиқли оптимизация моделини қурамиз.

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \\ p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le W, \\ \qquad x_j \ge 0 - \text{бутун}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ҳосил қилинган масалани динамик программалаштириш усули билан ечамиз. Ушбу масалани ечишда маҳсулотлар сони ва самолётнинг юк кўтариш қуввати бўйича индукция усулини қўллаймиз. *n=1* яъни самолёт фақат 1-маҳсулот билан тўлдирилсин. У ҳолда

$f_1(\alpha)$ - юк кўтариш қуввати α бирликка тенг бўлган самолёт 1-маҳсулот билан тўлдирилгандаги максимал соф фойда миқдори $\alpha = \overline{0,W}$.

$$f_1(\alpha) = \max_{\substack{p_1 x_1 \le \alpha \\ x_1 \ge 0 \quad бутун}} \{c_1 \cdot x_1\} = \max_{x_1 = 0,\left[\frac{\alpha}{p_1}\right]} c_1 x_1 = c_1 \cdot x_1(\alpha) = c_1 \cdot \left[\frac{\alpha}{p_1}\right], \quad (3.2)$$

бу ерда $x_1(\alpha)$ оптимал ечим. Самолётнинг юк кутариш қуввати-α ни 0 дан W гача ўзгартириш натижасида қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз.

α	$x_1(\alpha)$	$f_1(\alpha)$
0	0	0
1	$\left[\frac{1}{p_1}\right]$	$c_1 \cdot \left[\frac{1}{p_1}\right]$
2	-	-
-	-	-
W	$\left[\frac{W}{p_1}\right]$	$c_1 \cdot \left[\frac{W}{p_1}\right]$

Келгуси босқичда маҳсулотлар сонини яна битта маҳсулотга оширамиз, яъни юк кўтариш қуввати $\alpha = \overline{0,W}$ бўлган самолётни $\{1\}$ ва $\{2\}$ маҳсулотлар билан тўлдирамиз. Агар $\{2\}$ махсулотдан x_2 дона олинса, унинг оғирлиги $p_2 \cdot x_2$ миқдорга ва ундан келадиган фойда $c_2 \cdot x_2$ миқдорга тенг бўлади. Бу ҳолда $\{1\}$ махсулот учун $\alpha - p_2 \ x_2$ оғирлик ажратилиши мумкин бўлади. Бу оғирлик $\{1\}$ маҳсулот билан оптимал равишда тўлдирилса, ундан келадиган фойда $f_1(\alpha - p_2 \ x_2)$ га тенг бўлади. Мақсадимиз умумий фойдани катталаштириш бўлганлиги туфайли, $\{2\}$ маҳсулотлар сони x_2 миқдор шундай танланиши керакки, бунинг натижасида иккала маҳсулотдан олинадиган умумий фойда

$$c_2 \ x_2 + f_1(\alpha - p_2 \ x_2) \text{ энг катта бўлсин,}$$

яъни

$$f_2(\alpha) = \max_{\substack{p_2 x_2 \le \alpha \\ x_1 \ge 0 - бутун}} \{c_2 \cdot x_2 + f_1(\alpha - p_2 \ x_2)\} =$$

$$= \max_{\substack{p_2 x_2 \le \alpha \\ x_2 \ge 0 - бутун}} \{c_2 \cdot x_2 + f_1(\alpha - p_2 \ x_2)\} = \max_{x_1 = 0,\left[\frac{\alpha}{p_2}\right]} \{c_2 \cdot x_2 + f_1(\alpha - p_2 \cdot x_2)\} \quad (3.3)$$

$f_2(\alpha)$ - юк кўтариш қуввати α бирликка тенг бўлган самолёт $\{1\},\{2\}$ маҳсулотлар билан оптимал тўлдирилганда олинадиган максимал фойда миқдорини белгилайди. Ушбу ҳол учун ҳам $\alpha = \overline{0,W}$ қийматлари учун $f_2(\alpha)$ ва $x_2(\alpha)$ миқдорлар жадвалини қурамиз.

α	$x_2(\alpha)$	$f_2(\alpha)$
0	$x_2(0)$	$f_2(0)$
1	$x_2(1)$	$f_2(1)$
2	-	-
-	-	-
-	-	-
W	$x_2(W)$	$f_2(W)$

Ушбу жараён қуйидаги рекуррент формула асосида давом эттирилади.

$$f_k(\alpha) = \max_{x_k = 0, \left[\frac{\alpha}{P_k}\right]} \{c_k \cdot x_k + f_{k-1}(\alpha - p_k\ x_k)\}, \qquad (3.4)$$

ушбу (3.4) формула кўрилаётган масала учун динамик программалашнинг рекуррент формуласи дейилади.

Юқорида келтирилган масалани аниқ маълумотларда динамик программалаш усули билан ечамиз.

$$n = 3, \qquad W = 11,$$

$$p_1 = 4, \qquad p_2 = 3, \qquad p_3 = 2,$$

$$c_1 = 10, \qquad c_2 = 9, \qquad c_3 = 7.$$

n=1 бўлган ҳол учун масалани ечамиз

$$f_1(\alpha) = \max_{\substack{p_1\ x_1 \le \alpha \\ x_1 \ge 0 - бутун}} c_1\ x_1 = c_1 \cdot x_1(\alpha) = c_1 \cdot \left[\frac{\alpha}{p_1}\right] = 10 \cdot \left[\frac{\alpha}{4}\right] \quad \alpha = \overline{0,11}$$

α	$x_1(\alpha)$	$f_1(\alpha)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	1	10
5	1	10
6	1	10
7	1	10
8	2	20
9	2	20
10	2	20
11	2	20

n=2 бўлган ҳолда

$$f_2(\alpha) = \max_{x_2=0,\left[\frac{\alpha}{p_2}\right]} \{c_2x_2 + f_1(\alpha - p_2x_2)\} = \max_{x_2=0,\left[\frac{\alpha}{3}\right]} \{9\cdot x_2 + f_1(\alpha - 3x_2)\}$$

α	$x_2(\alpha)$	$f_2(\alpha)$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	1	9
4	0	10
5	0	10
6	2	18
7	1	19
8	0	20
9	3	27
10	2	28
11	1	29

n=3 бўлган ҳол учун $f_3(11)$ ни ҳисоблаймиз.

$$f_3(11) = \max_{\substack{2x_3\le 11\\ x_3\ge 0,\ \text{бутун}}} \{7x_3 + f_2(11-2x_3)\} = \max_{x_3=0,5} \{7\cdot x_3 + f_2(11-2\cdot x_3)\}$$

$$= \max\{7\cdot 0+29; 7\cdot 1+27;$$

$$7\cdot 2+19; 7\cdot 3+10; 7\cdot 4+9; 7\cdot 5+0\}$$

$$= \max\{29; 34; 33; 31; 37; 35;\} = 37,$$

$$x_3(11) = 4.$$

Демак {3}-махсулотдан 4 дона олиш керак экан, бу ҳолда {1, 2} маҳсулотлар учун $\alpha_2 = 11 - 2\cdot 4 = 3$бирлик оғирликка мос оптимал ечимни $n = 2$ даги жадвалдан аниқлаймиз.

$x_2(\alpha_2) = x_2(3) = 1$

Агар {2} махсулотдан бир дона олинса, у ҳолда {1} махсулот учун ажратилган оғирлик $\alpha_1 = \alpha_2 - 3\cdot x_2(\alpha_2) = 3 - 3\cdot 1 = 0$ ва $x_1(\alpha_1) = x_1(0) = 0$ бўлади.

Оптимал ечим

$x_{опт.} = (0, 1, 4)$ **ва максимал фойда** $f^{\max} = f_3(11) = 10\cdot 0 + 9\cdot 1 + 7\cdot 4 = 37$

4-§. Икки дастгоҳда деталларга ишлов бериш

Фараз қилайлик, $i \in I = \{1,2,...,n\}$ номерли n та деталь ва иккита дастгоҳ берилган бўлсин. Ҳар бир деталга аввал биринчи дастгоҳда, сўнгра иккинчи дастгоҳда ишлов бериш керак. Биринчи дастгоҳда i- деталга ишлов бериш вақти a_i га, иккинчисида эса b_i га тенг бўлсин. Дастгоҳлар бир вақтда t=0 моментда ишга туширилади. Барча деталларга ишлов бериш умумий вақти минимал бўлиши учун деталларни ишлов беришга қандай кетма-кетликда тушириш керак?

Бу масалани ўхшаш масалалар оиласига туркумлаймиз. Оиланинг умумий элементини қуйидагича қурамиз. Бошланғич I партиядан $i_1, i_2, ..., i_k$ номерли k та деталдан ажратиб оламиз. Қолган k та деталнинг ҳар бирига аввал биринчи дастгоҳда, сўнгра иккинчисида ишлов берилсин, лекин энди биринчи дастгоҳ t=0 моментда ишга туширилади, иккинчиси эса биринчи дастгоҳ ишга туширилганидан y бирлик вақт ўтгандан сўнг ишга туширилади.

Ушбу

$$B_{n-k}\left(i_1, i_2, ..., i_k / y\right) \tag{4.1}$$

орқали Беллман функциясини, яъни қолган n - k та деталга юқорига кўрсатилган шартларда ишлов беришнинг минимал вақтини белгилаймиз.

Беллман тенгламасини тузиш учун қуйидагича иш қурамиз. қолган $I_k = I \setminus \{i_1, ..., i_k\}$ номерли деталлар тўпламидан ихтиёрий i - детални оламиз ва ишлов беришга биринчи қўямиз. Биринчи дастгоҳ i деталга ишлов беришни y моментда тугаллайди. Иккинчи дастгоҳ i - деталдан

$$\begin{array}{l} \text{агар } y \le a_i \text{ бўлса, } a_i + b_i \text{ моментда,} \\ \text{агар } y > a_i \text{ бўлса, } y + b_i \text{ моментда} \end{array} \tag{4.2}$$

бўшайди.

Айтайлик, қолган $I_k \setminus \{i\}$ номерли деталлар ишлов беришга оптимал кетма-кетликда туширилган бўлсин. Улар учун биринчи дастгоҳдан t=a_i моментдан бошлаб фойдаланиш мумкин. Иккинчи дастгоҳ эса $I_k \setminus \{i\}$ дан олинган деталларга ишлов бериш учун (4.2) га асосан уларга ишлов бериш учун дастгоҳ ишга туширилганидан

$$t_i = b_i + \max\{0, y - a_i\} \tag{4.3}$$

вақт бирлиги ўтгандан кейин ишга туширилади. Беллман функциясининг аниқланишига кўра $I_k \setminus \{i\}$ дан олинган деталларга ишлов беришнинг минимал вақти $B_{n-k-1}(i_1, i_2, ... i_k, i / t_i)$ га тенг. Шундай қилиб, I_k дан олинган n-k та деталга юқорида кўрсатилган усул билан ишлов бериш вақти

$$a_i + B_{n-k-1}(i_1, ..., i_k, i / t_i) \tag{4.4}$$

га тенгдир. I_k дан ҳар бир детални биринчи навбатда ишлов бериш учун танлаб олиб, (4.4) сонлар ичида минималини топамиз:

$$\min_{i\in I_k}\left\{a_i + B_{n-k-1}(i_1, ..., i_k, i / t_i)\right\} \tag{4.5}$$

Равшанки, (4.5) сон (4.1) сонга тенгдир:

$$B_{n-k}(i_1, ..., i_k / y) = \min_{i\in I_k}\left\{a_i + B_{n-k-1}(i_1, ..., i_k, i / t_i)\right\}. \tag{4.6}$$

Беллман тенгламаси олинди. Агар k=n-1 деб олсак, яъни $I = \{1, ..., n\}$ дан i дан бошқа барча деталларни ажратиб олсак (4.6) рекуррент тенглама учун

$$B_1(1, ..., i-1,\ i+1, ..., n / y) = \begin{cases} a_i + b_i, \text{ агар } y \le a_i \text{ булса}; \\ y + b_i, \text{ агар } y > a_i \text{ булса}, \end{cases} \tag{4.7}$$

бошланғич шартни оламиз.

(4.6) тенгламани (4.7) бошланғич шартда ечиб, деталларга ишлов беришнинг оптимал кетма-кетлигини қуриш мумкин. Бу ҳолда масаланинг ечимини (4.6) тенгламани таҳлил қилиб оламиз.

Агар $B_n(y)$ орқали иккинчи дастгоҳнинг деталларига биринчи дастгоҳда ишлов бериш бошланганидан y вақт бирлиги ўтгандан кейин ишга туширилганда, I дан олинган барча n та деталга ишлов бериш вақтини белгиласак, (4.6) дан $k = 0$, $k = 1$ бўлганда

$$B_n(y) = \min_{i\in I}\left\{a_i + B_{n-1}(i / t_i)\right\}, \tag{4.8}$$

$$B_{n-1}(i / t_i) = \min_{i\in I\setminus\{i\}}\left\{a_i + B_{n-1}(i, j / t_{ij})\right\} \tag{4.9}$$

эканлигини оламиз, бу ерда (4.3) га кўра

$$t_{ij} = b_j + \max\{0, t_i - a_j\}. \tag{4.10}$$

(4.9) ни (4.8) га келтириб қўямиз:

$$B_n(y) = \min_{i\in I}\min_{i\in I\setminus\{i\}}\left\{a_i + a_j + B_{n-2}(i,\ j / t_{ij})\right\} \tag{4.11}$$

$a_i + a_j + B_{n-2}(i,\ j / t_{ij})$ сон I дан олинган деталлар ичида аввал i деталга, сўнгра j -деталга ишлов берилиб, қолган деталларга оптимал кетма-кетликда ишлов берилгандаги вақтга тенгдир. Агар фақат i - ва j - деталларга ишлов бериш тартибини алмаштирсак, I дан олинган барча деталларга ишлов бериш вақти $a_i + a_j + B_{n-2}\left(i,\ j/t_{ij}\right)$ га тенгдир, бу ерда

$$t_{ij} = b_j + \max\left\{0, t_j - a_i\right\}. \qquad (4.12)$$

Беллман функциясининг физик маъносидан келиб чиқадики, $B_{n-2}(i, j/y)$ функция y бўйича камаймайдиган функциядир (иккинчи дастгоҳни ишга туширишни кечиктириш деталларга ишлов беришнинг минимал вақтини қисқартира олмайди). Шунинг учун

$$B_{n-2}\left(i,\ j/t_{ij}\right) \le B_{n-2}\left(i,\ j/t_{ji}\right),\ \text{агар } t_{ij} \le t_{ji}\, \textit{булса};$$
$$B_{n-2}\left(i,\ j/t_{ji}\right) \le B_{n-2}\left(i,\ j/t_{ij}\right),\ \text{агар } t_{ji} \le t_{ij}\, \textit{булса},$$

тенгсизликлар бажарилади. Агар (4.11) да бу тенгсизликларни ҳисобга олсак, деталларни ишловга қўйишнинг оптимал кетма-кетлигида, агар $t_{ij} \le t_{ji}$ бўлса, i-деталга j-деталдан олдин ишлов берилади, деган хулосага келамиз. $t_{ji} \le t_{ij}$ бўлганда аввал j-деталга ишлов берилиши зарур. (4.10) дан y=0 бўлганда ушбуни оламиз:

$$t_{ij} = b_i + \max\left\{0, b_i + \max\left\{0, 0 - a_i\right\} - a_j\right\} = b_j + \max\left\{0, b_i - a_j\right\} =$$
$$= \begin{cases} b_j,\ \textit{агар}\ b_j \le a_i\ \textit{булса}, \\ b_j + b_i - a_j,\ \textit{агар}\ b_i > a_j\, \textit{булса}. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Шунга ўхшаш

$$t_{ji} = \begin{cases} b_i,\ \textit{агар}\quad b_j \le a_i\, \textit{булса}, \\ b_i + b_j - a_i,\ \textit{агар}\quad b_j > a_i\, \textit{булса}. \end{cases} \qquad (4.14)$$

(4.13)-(4.14) дан деталларни ишлов беришга қўйиш оптимал кетма-кетлигини қуришнинг содда алгоритми келиб чиқади. Берилганларни 4.1-жадвалга ўтказамиз. a_i, b_i элементлар орасида энг кичигини топамиз, у a_{i_0} элементдан иборат бўлсин:

$$a_{i_0} = \min_{i=\underline{1,n}} a_i \le \min_{i=\underline{1,n}} b_j. \qquad (4.15)$$

Бу ҳолда

$$t_{i_0 j} \le t_{j i_0},\ j = \overline{1,n}\ , \qquad (4.16)$$

тенгсизликлар бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, (4.14) дан $t_{ji_0} = b_{i_0} + b_j - a_{i_0}$ эканлигини оламиз. У ҳолда (4.15) га асосан

$t_{ji_0} \geq b_j, t_{ji_i} \geq b_{i_0} + b_j - a_j$ тенгсизликлар ўринли бўлади, булардан, (4.13) ни ҳисобга олсак, (4.16) тенгсизликлар келиб чиқади. (4.16) тенгсизликлар i_0 рақамли деталга биринчи навбатда ишлов берилиши лозимлигини кўрсатади.

4.1-жадвалнинг $a_i, b_i, i = \overline{1,n}$ элементлари ичида b_{i_0} элемент минимал бўлсин, яъни

$$b_{j_0} = \min_{j=1,n} b_j \leq \min_{j=1,n} a_j. \tag{4.17}$$

Бу ҳолда j_0 рақамли деталга охирги навбатда ишлов берилиши керак. Ҳақиқатан, (4.17) шартлардан қуйидаги

$$t_{j_0 i} = b_i, t_{j_0 i} \geq b_{j_0}, t_{j_0 i} \geq b_{j_0} + b_i - a_{j_0} \tag{4.18}$$

муносабатлар ўринлидир. (4.18) дан (4.13) ни ҳисобга олганда тасдиғимизнинг тўғри эканлигини кўрсатувчи

$$t_{ij_0} \leq t_{j_0 i}, i = \overline{1,n},$$

тенгсизликлар келиб чиқади.

4.1-жадвал

Деталлар №	1	2	. . .	i	. . .	n
№1 дастгоҳ	a_1	a_2	. . .	a_i	. . .	a_n
№2 дастгоҳ	b_1	b_2	. . .	b_i	. . .	b_n

Биринчи ва охирги навбатда бажариладиган деталлар топилгандан кейин жадвалдан мос устун ўчирилади ва амаллар кам сонли деталлар учун давом эттирилади.

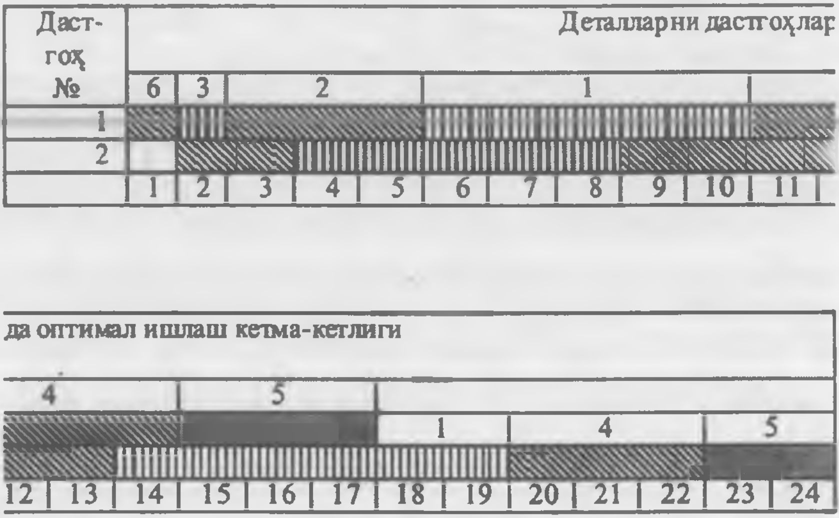
Изоҳ. Агар $a_{i_0} = b_{i_0}$ бўлса, ўчириб ташланмаган i_0 рақамли деталлар ичида i_0 деталга биринчи ёки охирги навбатда ишлов берилишининг фарқи йўқ. Унга доимо биринчи навбатда ишлов берилади деб ҳисоблаш мумкин.

Сонли мисолни кўрайлик, $n = 6$ бўлсин ва деталларга ишлов вақтлари қуйидаги жадвалда келтирилган бўлсин.

Деталлар номи	1	2	3	4	5	6
Биринчи дастгоҳ	5	3	1	4	3	1
Иккинчи дастгоҳ	6	5	5	3	2	2

Берилган сонли мисол учун оптимал кетма-кетлик қуйидагичадир: $6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 5$.

Деталларга ишлов бериш графиги Гант схемаси ёрдамида 4.1-чизмада тасвирланган бўлиб, унда абсциссалар ўқи бўйича вақт, ординаталар ўқида дастгоҳларнинг рақамлари қўйилган.



4.1-чизма

Оптимал ечимда иккинчи дастгоҳда деталларга ишлов бериш кетма-кетлиги биринчи дастгоҳдаги деталларга ишлов бериш кетма-кетлиги билан бир хилда бўлади. Оптимал ишлов бериш вақти $t_{\min} = 24$ *га тенг.*

5-§. Тўрда энг қисқа масофани аниқлаш

Айтайлик, $S = \{I, U\}$ тўр бўлиб, унда фақат $(i, j) \in U$ ёйларнинг характеристикалари $c_{ij} \geq 0$, яъни i тугундан j тугунгача масофа берилган бўлсин. Белгиланган иккита $s, t \in I$, тугун учун s дан t гача минимал узунликка эга бўлган йўлни топиш талаб қилинади (s дан t га йўл деб, s дан t га бўлган шундай тўрга айтиладики, s дан t га ҳаракат қилганда унинг ёйлари тўғри чизиқлардир).

Бу масалани ўхшаш масалалар оиласига туркумлаймиз.

Оиланинг умумий масаласи s тугундан ихтиёрий $j \in I$ тугунгача энг қисқа йўлни қуришдан иборатдир. B_j деб Беллман функциясини -s дан j гача энг қисқа йўл узунлигини белгилаймиз. B_j функция қаноатлантирадиган тенгламани тузишда s дан j гача йўл учун охирги ёйни ихтиёрий танлаб оламиз: $(i,j) \in U$ ва s дан $i \in I_j^-$ тугунга энг қисқа йўл топилган деб фараз қиламиз, бу ерда $I_j^- - j$ билан $(i,j) \in U$ ёйлар ёрдамида туташтирилган $i \in I$ тугунлар тўпламидир. У ҳолда s дан j га бўлган йўлнинг узунлиги

$$B_i + c_{ij} \tag{5.1}$$

га тенг бўлади. $i \in I_j^-$ тугунларни саралаб, (5.1) сонлар ичида минималини топамиз:

$$\min_{i \in I_j^-} \left(c_{ij} + B_i\right). \tag{5.2}$$

Равшанки, (5.2) s дан j га бўлган энг қисқа йўлнинг узунлигидир. Аниқланишига кўра Беллман функцияси B_j га тенг бўлганлигидан B_j учун қуйидаги Беллман тенгламаси олинади:

$$B_j = \min_{i \in I_j^-} \left(c_{ij} + B_i\right). \tag{5.3}$$

(5.3) тенглама учун чегаравий шарт

$$B_s = 0 \tag{5.4}$$

кўринишга эга бўлади ва функциянинг ўз-ўзидан равшан хоссасини ифодалайди.

Олдинги параграфлардан фарқли ўлароқ, (5.3) Беллман тенгламаси рекуррент эмас. Γ деб $i \in I$ тугунларнинг шундай тўпламини белгилаймизки, улар учун Беллман функциясининг B_i қиймати маълум бўлсин. $I^* \neq \varnothing$ чунки (5.4) га асосан $s \in I^*$. Агар $t \in I^*$ бўлса, масала ечилган бўлади: $B_t - S$ дан t гача бўлган энг қисқа йўлнинг узунлигидир.

Айтайлик, $t \overline{\in} I^*$ бўлсин. S тўрда $I^*, s \in I^*, t \overline{\in} I^*$ тўплам бўйича $U\left(I^*\right)=\left\{(i, j) \in U : i \in I^*,\ j \overline{\in} I^*\right\}$ кесим қурамиз. $U(I^*) \neq \varnothing$ деб фараз қилайлик. Равшанки, S тугундан $k \overline{\in} I^*$ тугунгача бўлган ҳар бир йўл ҳеч бўлмаганда $U(\Gamma)$ дан олинган битта ёйни ўз ичига олади. Демак, $c_{ij} \geq 0, (i, j) \in U$ бўлганлигидан ҳар бир $k \overline{\in} I^*$ тугун учун,

$$B_k \geq \min_{(i,j) \in U\left(I^*\right)}\left(B_i + c_{ij}\right) = B_{i^*} + c_{i^* j^*}, k \overline{\in} I^*, \qquad (5.5)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (i_*, j_*) - кесимининг ёйи бўлганлигидан $i_* \in I^*, j_* \overline{\in} I^*$. (5.5) да $k = j_*$) деб оламиз. У ҳолда (5.3) га асосан

$$B_{j^*} = B_{i^*} + c_{i^* j^*}$$

эканлигини оламиз. j_* тугунини Γ тўпламга қўшамиз ва ечишни давом эттирамиз. Чекли сондаги қадамлардан сўнг B_t ни топамиз, ёки $U(I^*) \neq \varnothing$ бўлган Γ тўпламини қурамиз. Иккинчи ҳол S тўрда s дан t га йўллар йўқ эканлигини англатади. Беллман тенгламасини ечишнинг юқорида баён қилинган тарихини S тўрда *белгилар усули* ёрдамида амалга ошириш мумкин. Γ орқали Беллман функциясининг қийматлари маълум бўлган тугунлар тўпламини ва $\omega\left(I^*\right)= \left\{j \in I : (i, j) \in U\left(I^*\right)\right\}$ орқали Γ тўплам билан қўшни тугунлар тўпламини белгилаймиз. Агар $\omega\left(I^*\right)=\varnothing$ бўлса, S тўрда s дан t га йўл мавжуд эмас. $\omega\left(I^*\right)=\varnothing$ бўлсин. B'_j сонларни (Γ билан қўшни *j тугунларнинг вақтинча белгиларини*) ҳисоблаймиз:

$$B'_j = \min_{i \in I^* \cap \Gamma^-(j)}\left(B_i + c_{ij}\right), j \in \omega\left(I^*\right) \qquad (5.6)$$

ва улар орасида минималини топамиз:

$$B'_{j^*} = \min B'_j, j \in \omega\left(I^*\right).$$

$j_* \overline{\in} I^*$ тугун учун Беллман функциясининг B_{j^*} қиймати B'_{j^*} га тенгдир. j^* тугунни Γ тўпламга қўшамиз ва амалларни такрорлаймиз. $B_j, j \in I^*$, сонлар *тугунларнинг ўзгармас белгилари* деб аталади. Ҳар бир итерацияда ўзгармас белгилар тўплами ортиб боради. Чекли сондаги итерациялардан сўнг t тугун j^* ё ўзгармас B_t белгини олади ёки уни олмайди ва $\omega\left(I^*\right)=\varnothing$. Иккинчи ҳол s дан t га йўл йўқлигини билдиради.

Биринчи ҳолда B_t катталик s дан t гача энг қисқа йўлнинг узунлигидир. Энг қисқа йўлни (5.3) га асосан ўзгармас белгилар бўйича қуриш мумкин. B_t белги бўйича B_{i_1} белгини шундай топамизки, $B_t = c_{i_1 t} + B_{i_1}$ бўлсин. B_{i_1} билан ҳам шунга ўхшаш иш кўрамиз: $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$ ва ҳ.к.

6–§. «Ишончли таъминотчи» ҳақидаги масала

«Ишончли таъминотчи» корхонаси маълум бир маҳсулотни ишлаб чиқариб истеъмолчиларига ўз вақтида етказиб беришни кафолатлайди.

Ушбу маҳсулотга бўлган талаб вақт(давр)га қараб ўзгаради. Корхона N давр давомида ўз истеъмолчиларини маҳсулот билан таъминлаши шарт. Маҳсулотга $t \in \overline{1,N}$, даврдаги талаб D_t, $t \in \overline{1,N}$, га тенг бўлсин. Корхона t даврдаги талабни шу даврда ишлаб чиқарилган x_t миқдордаги маҳсулот билан ёки корхона омборларида сақланаётган i_t-маҳсулотлар ҳисобига қондириш мумкин.

Корхона истеъмолчиларнинг талабини энг кам сарф-харажатлар билан қондиришни режалаштирмоқда. Шу туфайли корхона раҳбарияти ҳар бир даврда истеъмолчилар талабини тўлиқ қондирган ҳолда ишлаб чиқарилиши зарур бўлган ва омборда сақланиши керак бўлган маҳсулот миқдорини, бутун режалаштирилаётган N давр ичида умумий сарф-харажатларни энг кичик миқдорини таъминлайдиган ҳолда танлаб олмоқчи.

Кўп босқичли ушбу масаланинг математик моделини қурайлик.

$C_t(x_t, i_t)$ - деб t даврда x_t дона маҳсулот ишлаб чиқариш ва i_t маҳсулотни омборда 1 давр мобайнида сақлаш билан боғлиқ бўлган сарф-харажатлар миқдорини белгилайлик.

Истеъмолчилар талабини тўлиқ қондириш билан боғлиқ бўлган шарт у ҳолда қуйидагича ифодаланади $x_t + i_{t-1} \geq D_t$, $t = \overline{1,N}$.

Корхонанинг t-даврдаги максимал ишлаб чиқариш қуввати $x_t^{\max}$ га, омбордаги максимал маҳсулот миқдори $i_t^{\max}$ га тенг бўлсин.

Режалаштирилаётган бутун давр мобайнидаги умумий сарф - харажатлар $\sum_{t=1}^{n} C_t(x_t, i_t)$ га тенг бўлади

Истеъмолчилар талабларининг қондирилиши ва ишлаб чиқариш қувватларига бўлган шартлар: режалаштириш даври бошида омбордаги маҳсулот миқдори i_0 ва давр охирида омборда қолиши керак бўлган i_N маҳсулотни ҳисобга олган ҳолда тузилган математик моделимиз қуйидаги кўринишда акс эттирилади.

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} C_t(x_t, i_t) \to \min \\ i_{t-1} + x_t \geq D_t, \qquad t = \overline{1,n} - 1, \\ i_{n-1} + x_n = D_n + i_N, \quad t = n, \\ 0 \leq x_t \leq x_t^{\max}, \qquad \textit{бутун}, \\ 0 \leq i_t \leq i_t^{\max}, \qquad \textit{бутун}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Ушбу кўп босқичли масалани ечишда динамик программалаш усулидан фойдаланиб, динамик прогламмалашнинг рекуррент формулаларини келтириб чиқарамиз. Ушбу формулаларни келтириб чиқаришда динамик программалашда кенг қўлланиладиган тескари редукция усулидан фойдаланиб, режалаштирилаётган вақтни тескари тарзда харакатлантирамиз, яъни $\tau = N - t$ тескари вақт ўзгарувчисини киритамиз ва қуйидаги белгилашларни амалга оширамиз.

$$d_t = D_{N-t+1}, \quad t = \overline{1,n} \quad , \quad \widetilde{x}_t = x_{N-t+1}, \quad t = \overline{1,n} .$$

$f_k(i)$ –режалаштириш даврининг тугашига k давр қолиб, ушбу давр бошида омборда i дона маҳсулот сақланаётган ҳолда, қолган k давр мобайнида истеъмолчиларнинг талабини тўлиқ қондириш учун зарур энг минимал сарф - харажат миқдорини белгилаймиз.

Агар тескари вақт бўйича белгиланган k-давр бошида омборда i дона маҳсулот мавжуд бўлса ва $\widetilde{x}_k$ дона маҳсулот ишлаб чиқарилса, истеъмолчининг d_k миқдордаги талаби қондирилгандан сўнг $k+1$ давр бошига келиб $\widetilde{i}_k = i + \widetilde{x}_k - d_k$ миқдорида маҳсулот қолади. k даврда $\widetilde{x}_k$ махсулот ишлаб чиқариш ва i_k маҳсулотни 1 давр мобайнида сақлаш билан боғлиқ сарф - харажатлар

$$C_k(\widetilde{x}_k, \widetilde{i}_k) = C_k(\widetilde{x}_k, \quad i + \widetilde{x}_k - d_k) \text{ га тенгдир.}$$

Динамик программалаштиришнинг Беллман оптималлик мезонига кўра

$$f_k(i) = \min_{\widetilde{x}_k + i \geq d_k} \left\{ C_k(\widetilde{x}_k, i - \widetilde{x}_k - d_k) + f_{k\ 1}(i + \widetilde{x}_k - d_k) \right\} \tag{6.2}$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

Ушбу рекуррент формулани қўллаш учун қуйидаги бошланғич шартлардан фойдаланамиз

$$f_0(i) = 0, \qquad i = \overline{0, i_1^{\max}},$$

$$\tilde{x}_1 = d_1 + \tilde{i}_N - \tilde{i}_{N-1} = D_N + i_N - i_{N-1},$$

Бунинг натижасида

$$f_1(i) = C_1(\tilde{x}, \tilde{i}) = C_1(d_1 + i_N - i, \;\; i_N) \qquad (6.3)$$

функциянинг $(i = \overline{0, i_1^{\max}})$ ўзгаргандаги қийматлар жадвалини ҳосил қиламиз, токи $D_i + i_N - i \geq 0$

$k = 1$

i	$\tilde{x}_1(i)$	$f_1(\tilde{x}_1(i), i)$
0	$D_N + i_N$	$f_1(\tilde{x}_1(0))$
1	$D_N + i_N - 1$	$f_1(\tilde{x}_1(1))$
$\overline{\tilde{i}_1^{\max}}$	$D_N + i_N - i_{\max}$	$f_1(\tilde{x}_1(i_1^{\max}))$

$k = 2$ ҳол учун

$$f_2(i) = \min_{\substack{\tilde{x}_2 + i > d_2 \\ i = 0, \tilde{i}_2^{\max}}} \left\{ C_2(\tilde{x}_2, \tilde{x}_2 + i - d_2) + f_1(\tilde{x}_2 + i - d_2) \right\}$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз ва ушбу формула асосида ҳисобланган функция қийматларини қуйидаги жадвалда акс эттирамиз

x \ i	0	1	...	$x_2^{\max}$	$x_2(i)$	$f_2(i)$
0	▨	▨			$\tilde{x}_2(0)$	$f_2(0)$
1					$\tilde{x}_2(1)$	$f_3(1)$
...						
$\tilde{i}_2^{\max}$				▨	$\tilde{x}_2(\tilde{i}_{2\max})$	$f_2(i_2^{\max})$

Изоҳ: Агар $i + x$ ўзгарувчиларининг баъзи қийматларида $i + x \geq d_2$ шарт ёки $i + \tilde{x}_2 - d_2 \leq i_2^{\max}$ шартлар бажарилмаса, ушбу катаклар тўлдирилмайди.

$k = n$ ва $\tilde{i} = i_0$ бўлган ҳолда бошланғич масаланинг ечимини ҳосил қиламиз,

$$f_n(i_0) = \min_{\substack{i_0 + \tilde{x}_n \geq d_n \\ \tilde{x}_n \in 0, \tilde{x}_n^{\max}}} \left\{ c_n(\tilde{x}_n, \; i_0 + \tilde{x}_n - d_n) + f_{n-1}(i_0 + \tilde{x}_n - d_n) \right\},$$

яъни

$$f_n(i_0) = \min_{\substack{x_t + i_0 \geq D_t,\ t=\overline{1,n} \\ x_N + i_{N-1} - D_N + i_N}} \sum_{t=1}^{n} c_t(x_t, i_t)$$

Шартли оптимал ечимлар $\tilde{x}_k(i)$ лар асосида оптимал ечимни қуйидагича ечиш мумкин.

$$x_t = \tilde{x}_n(i_0),$$
$$i_1 = i_0 + \tilde{x}_n(i_0) - d_n = i_0 + \tilde{x}_1(i_0) - D_1,$$
$$x_2(i_0 + \tilde{x}_1(i_0) - D_1) = \tilde{x}_{n_1}(i_0 + \tilde{x}_n(i_0) - d_n),$$
$$i_2 = x_2(i_1) + i_1 - D_2,$$
$$x_N(i_{N-1}) = \tilde{x}_1(i_{n-1}) + i_{n-1} - d_1 = D_N + i_N - i_{N-1},$$
$$i_N = i_N.$$

Юқорида баён этилган усулни қуйидаги иқтисодий масалани ечиш учун татбиқ этайлик

$N = 3;\ D_1 = 3;\ D_2 = 4;\ D_3 = 2,$

$i_0 = 2;\ i_3 = 1;\ x_t = \overline{0,4},\ t = \overline{1,3},$

$i_t = \overline{0,3},\ t = \overline{1,3},$

$c_t(x_t, i_t) = c(x_t) + h(i_t)\ \ (t = \overline{1,3})$ - сарф-харажат функцияси,

$c(x_t) = \begin{cases} 0 & ,x_t = 0, \\ 18 + 3x_t & ,x_t = \overline{1,4}. \end{cases}$ - ишлаб чиқариш харажатлари функцияси.

$h(i_t) = 2 \cdot i_t,\ i_t = \overline{0,3},\ (t = \overline{1,3})$ - i_t дона маҳсулотни омборда 1 давр мобайнида сақлаш билан боғлиқ сарф-харажатлар функцияси.

$k = 1$

i	$\tilde{x}_1(i)$	$f\ (i)$
0	3	$f_1(0) = 27$
1	2	$f_1(1) = 24$
2	1	$f_1(2) = 21$
3	0	$f_1(3) = 0$

$$\tilde{x}_1(i) = d_1 + \tilde{i}_0 - i = D_3 + i_3 - i = 2 + 1 - i = 3 - i,$$
$$h\ (i_1) = 0.$$
$$f_1(0) = \min_{x_1 + 0 \geq d} \{c_1(\tilde{x}_1) + h_1(i_1) + f_0(i_1)\} =$$
$$= c_1(3 - 0) = c\ (3) = 18 + 3 \cdot 3 = 27,$$
$$f_1(1) - c_1(3 - 1) - c\ (2) - 18 + 3 \cdot 2 - 24,$$
$$f\ (2) - c_1(3 - 2) - c_1(1) - 18 + 3 - 21,$$
$$f_1(3) = c_1(3 - 3) = c_1(0) = 0,$$

$$k = 2\ \ f_2(i) = \min_{\tilde{x}_2 - i \geq d_2} \{c(\tilde{x}_2) + h(i + \tilde{x}_2 - d_2) + f_1(i + \tilde{x}_2 - d_2)\} =$$
$$= \min_{x_2 + i \geq 4} \{c(\tilde{x}_2) + h(i + \tilde{x}_2 - 4) + f_1(i + \tilde{x}_2 - 4)\},$$

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	$\widetilde{x}_2(i$	$f_2(i)$
0	▨	▨	▨	▨	30+0+27=57	4	57
1	▨	▨	▨	27+0+27=54	30+2×1+24=56	3	54
2	▨	▨	24+0+27=51	27+2×1+24=53	30+2×2+21=55	2	51
3	▨	21+0+27=48	24+2×1+24=50	27+2×2+21=52	30+2×3+0=36	0	36

$$f_2(0) = \min_{\widetilde{x}_2+0\ge4} \{c(\widetilde{x}_2) + h(0+\widetilde{x} \ -4) + f_1(0+\widetilde{x}_2-4)\} =$$

$$= c(4) + h(4+0-4) + f_1(4+0-4) = 18+3\cdot4+2\cdot(4+0-4)+27 = 57,$$

$$f_2(1) = \min_{\widetilde{x}_2+1\ge4} \{c(\widetilde{x}_2) + h(1+\widetilde{x}_2-4) + f_1(\widetilde{x}_2+1-4)\} =$$

$$= \min\{c(3)+h(1+3-4)+f_1(3+1-4);\ c(4)+h(1+4-4)+f_1(4+1-4)\} =$$

$$= \min\{27+2\cdot0+27;\ 30+2\cdot1+24\} = 54,\quad \widetilde{x}_2(1) = 3,$$

$$f_2(2) = \min_{\widetilde{x}_2+2\ge4} \{c(\widetilde{x}_2) + h(2+\widetilde{x}_2-4) + f_1(\widetilde{x}_2+2-4)\} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} c(2)+h(2+2-4)+f_1(2+2-4); \\ c(3)+h(2+3-4)+f_1(3+2-4); c(4)+h(2+4-4)+f_1(4+2-4) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \min\{51{,}53{,}55\} = 51,\quad \widetilde{x}_2(2) = 2,$$

$$f_2(3) = \min_{\widetilde{x}_2+3\ge4} \{c(\widetilde{x}_2) + h(3+\widetilde{x}_2-4) + f_1(3+\widetilde{x}_2-4)\} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} c(1)+h(3+1-4)+f_1(3+1-4);\ c(2)+h(3+2-4)+f_1(3+2-4); \\ c(3)+h(3+3-4)+h(3+3-4);\ c(4)+h(3+4-4)+f_1(3+4-4) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \min\{48{,}50{,}52{,}36\} = 36 \quad \widetilde{x}_2(3) = 0,$$

$k = 3, \qquad i_0 = 2,$

$$f_3(i_0 = 2) = \min_{i_0+\widetilde{x}_3\ge d_3} \{c(\widetilde{x}_3) + h(i_0+\widetilde{x}_3-d_3) + f_2(i_0+\widetilde{x}_3-d_3)\}$$

$$= \min_{2+x_3\ge3} \{c(x_3) + 2\cdot(2+\widetilde{x}_3-3) + f_2(2+\widetilde{x}_3-3)\} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} c(1)+2(2+1-3)+f_2(2+1-3);\ c(2)+2(2+2-3)+f_2(2+2-3); \\ c(3)+2\cdot(2+3-3)+f_2(2+3-3);\ c(4)+2\cdot(2+4-3)+f_2(2+4-3) \end{matrix}\right\} =$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} 21+2\cdot0+57;\ 24+2\cdot1+54;\ 27+2\cdot2+51; \\ 30+2\cdot3+36 \end{matrix}\right\} = \min\{78, 80, 82, 72\} = 72 \quad \widetilde{x}_3(2) = 4;$$

$x_1(2)=\tilde{x}_3(2)=4;\quad i_1=i_0+x_1(2)^{-d_1}=2+4=6-3=3,$

$x_2(3)=0;\quad i_2=i_1+x_2(3)-d_2=3+0-3=0;\quad x_3(0)=4,$

$x_{оптим}=(4;0;4),$

$f_{min}(2)=72.$

Маҳсулотга бўлган умумий талаб, $D_1+D_2+D_3+i_3=3+4+2+1=10$ умумий таклиф:

$$i_0+x_1+x_2+x_3=2+4+0+4=10,$$

<умумий талаб>=<умумий таклиф>

10=10.

V бобга оид машқлар

1. Самолётни оптимал юклаш масаласи.

Маҳсулотлар тури N=4.

Самолёт максимал юк кўтариш қуввати

$W=\min\{K,2m+5n\}$

$p_1=n+2m;\ p_2=\left[\frac{m+5}{4}\right]+1;\ p_3=\left[\frac{2n+m}{3}\right]+1;\ p_4=\left[\frac{2m+3n}{5}\right]+1,$

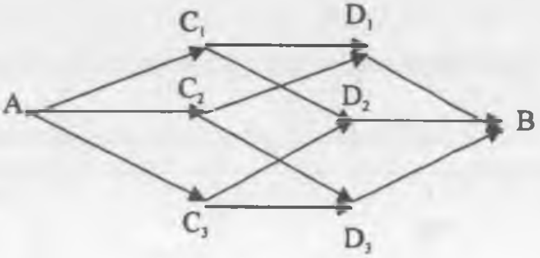
$c_1=n+2m;\ c_2=2n+m;\ c_3=2n+3\cdot m;\ c_4=3n+4m$

$K=12,13,.....$

$n=1,2,3,......$

$m=1,2,3,.....$

2. Тўрда энг қисқа масофани аниқлаш масаласи. Шаҳарлар орасидаги босқичлар сони N=3.



- **Ушбу масала учун хисоблашнинг рекуррент формуласини келтириб чикаринг**

- **Энг киска масофани аникланг, агарда:**

$$C_{AC_1} = 2k + 3m \quad , \quad C_{C_1D_1} = 6k + 3m \quad , \quad C_{D_1B} = 4k + 5m \quad ,$$
$$C_{AC_2} = k + 4m \quad , \quad C_{C_1D_2} = 3k + 6m \quad , \quad C_{D_2B} = 5k + 5m \quad ,$$
$$C_{AC_3} = 4k + m \quad , \quad C_{C_2D_1} = 4k + 5m \quad , \quad C_{D_3B} = 6k + 4m \quad ,$$
$$C_{C_2D_3} = 5k + 4m \quad ,$$
$$C_{C_3D_2} = 3k + 5m \quad ,$$
$$C_{C_3D_3} = 5k + 3m \quad ,$$
$$k, m = 1,2,3,.....,10.$$

3. «Ишончли таъминотчи» ҳақидаги масала

$N = 4,$

$i_\circ = \min\{3; k + 1; m + 1\},$

$i_N = \min\{2; k + 1; m\},$

$D_1 = \min\{3, k + m\},$

$D_2 = \min\{4; 2k + m\},$

$D_3 = \min\{5; k + m + 2\},$

$D_4 = \min\{2; m\},$

$$C(x_7) = \begin{cases} 0, & x_7 = 0 \\ (10k + 3m) + 2km \cdot x_7, & x_7 = \overline{1,4}, \end{cases}$$

$h(i_t) = (3k + 4m) \cdot i_t, \quad i_t = \overline{0,4},$

$k, m = 1, 2, 3, ..., 10.$

VI БОБ

МАТРИЦАЛИ ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ

1-§. Ўйинлар назарияси. Асосий тушунчалар ва мисоллар

1. Асосий тушунчалар

Ўйинлар назарияси зиддиятли холатларнинг математик моделини ўрганиш орқали мукаммал ёки самарадор қабул қилиш имкониятини ўрганади. Математик ўйинлар назариясининг асосчилари Дж. Фон Нейман ва О. Моргенштернлардир.

Ҳар кандай зиддиятли холат ижтимоий-иқтисодий ҳолатнинг математик модели бўлиб қуйидагилардан ташкил топгандир:

1) иштирок этувчи томонлар;

2) ҳар бир томоннинг имкониятлар тўплами;

3) томонларнинг мақсадлари.

Зиддиятли ҳолатларнинг ушбу ташкил этувчиларини математика тили ёрдамида тасвирлаш натижасида ўйин тушунчаси келиб чиқади.

Зиддият иштирокчилари одатда ўйинчилар ёки иштирокчилар дейилиб, $I = \{1,2,...n\}$ ўйинчилар тўпламини билдиради, яъни ўйинчилар сони чекли.

Ҳар бир ўйинчининг зиддият ҳолатидаги ҳаракат режаси ёки жоиз хатти-ҳаракатлари ушбу $i \in I$ ўйинчининг стратегияси дейилади. Ҳар бир $i \in I$ ўйинчининг x_i хатти-ҳаракатлар тўпламини $X_i, i \in I$ деб белгилаймиз.

1-таъриф. Ҳар бир $i \in I$ ўйинчи $x_i \in X_i$ стратегиясини танласин, у ҳолда $x = (x_1, \ x_2, ..., x_n) \in \prod\limits_{i \in I} X_i$ **ўйин ҳолати** дейилади.

Ўйин ҳолатлари тўпламини $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$; деб белгилаймиз. Ҳар бир ўйин ҳолати $x \in X_i$ да $i \in I$ ўйинчининг ютуғи $H_i(x)$ функция орқали аниқланган бўлсин.

Демак ҳар қандай зиддиятли ҳолатлар

$$\Gamma = \{I, \ X, \ H_i, \ i \in I\} \tag{1. 1}$$

учлик ёрдамида берилади ва ушбу учлик **коалициясиз (гуруҳсиз) ўйин** ёки ўйин дейилади. Бундай дейилишига сабаб, ҳар бир ўйинчи ҳеч қандай гуруҳга қўшилмай, фақат ўз ютуғини катталаштириш мақсадида ҳаракат қилади.

Агар $Г$ ўйинда иштирокчилар сони иккига тенг бўлиб, ҳар бир $x = (x_1, \quad x_2)$ ўйин ҳолатида умумий ютуқ миқдори нолга тенг бўлса, яъни

$$H_1(x_1, \quad x_2) + H_2(x_1, \quad x_2) = 0, \qquad (x_1, \quad x_2) \in X_1 \cdot X_2$$

ёки

$$H_1(x_1, \quad x_2) = -H_2(x_1, \quad x_2), \qquad (x_1, \quad x_2) \in X_1 \cdot X_2$$

бундай коалициясиз (гуруҳсиз) икки иштирокчининг ўйини **антогонистик (қарама-қарши) ўйин** дейилади. қарама-қаршилик шундан иборатки, бир иштирокчи қанча миқдор ютса, иккинчи иштирокчи шунча миқдорни ютқазади.

Агар (1.1) коалициясиз (гуруҳсиз) ўйинда иштирокчиларнинг стратегиялар тўплами чекли бўлса, бундай ўйин чекли коалициясиз (гуруҳсиз) ўйин дейилади.

Чекли икки иштирокчининг ўйинида биринчи иштирокчи ютуқларини сатрнинг мос устунларига, иккинчи ўйинчининг ютуқларини устуннинг мос сатрларига жойлаштириш қулайдир. Бунинг натижасида ҳар бир ўйинчининг ютуқлари матрица кўринишида ҳосил бўлади, ушбу матрица **ютуқ матрицаси** дейилади.

Иккита ютуқ матрицалари ҳар қандай чекли икки иштирокчининг (1.1) ўйинини тўлиқ ифодалайди. Шу туфайли чекли икки иштирокчининг ўйинлари **биматрицали** (қўш матрицали) ўйинлар дейилади. Агар икки иштирокчининг чекли ўйини қарама-қарши бўлса, у ҳолда иккита ютуқ матрицаси ўрнига ягона бир ютуқ матрицасидан фойдаланиш мумкин бўлади, ушбу ютуқ матрицасида биринчи ўйинчининг ютуғи мос равишда иккинчи ўйинчининг ютқазишини билдиради ва аксинча.

Бундай ўйинлар **матрицали ўйинлар** дейилади.

2-таъриф. Матрицали ўйин деб икки иштирокчининг чекли антогонистик ўйинига айтилади.

Бу турдаги ўйинларда ўйин қуйидаги тарзда рўй беради ҳар бир иштирокчи ўзининг $x_i \in X_i, \quad i \in 1{,}2$ стратегиясини танлайди ва бунинг натижасида $x = (x_1, \quad x_2)$ ўйин ҳолати вужудга келиб, *i*-иштирокчи $H_i(x_1, \quad x_2), \quad i = 1{,}2$ ютуққа эга бўлади. Иштирокчиларнинг ҳар бири ўз ютуқларини катталаштириш учун ҳаракат қиладилар.

Ўйин бир неча бор такрорланиши мумкин, бу ҳолда ўйин бир неча партиядан иборат дейилади.

2. Чекли коалициясиз ўйинларга мисоллар

а) «Рейтинг – назорати иши»

Талаба (I ўйинчи)- рейтинг назорат ишига тайёргарлик кўриши керак.

Устоз (II ўйинчи)-рейтинг назоратини қабул қилиши керак, ҳар бир иштирокчининг 2 тадан стратегияси мавжуддир. Талаба 1-яхши тайёргарлик кўриш (Я) ёки 2-ёмон тайёргарлик кўриши мумкин (Е).

Устоз 1-рейтинг назоратидан талаба ўтди деб ҳисоблаш (+) ёки

2-талаба рейтинг назоратини топшира олмади (-) деб хисоблаши мумкин.

Ўйинчиларнинг ютуқлари матрицасини қуйидагича аниқлаймиз.

$$\text{Талаба ютуқлари } \begin{array}{c|cc} & + & - \\ я & 5 & +1 \\ е & 3 & 0 \end{array}, \qquad \text{устоз ютуқлари } \begin{array}{c|cc} & + & - \\ я & 2 & -1 \\ е & -2 & -1 \end{array}$$

б) «Икки кишилик Морро ўйини» (икки бармоқли Морра ўйини)

Ўйин қоидаси: ҳар бир ўйинчи 1 ёки 2 бармоғини очиб 1 ёки 2 рақамини эълон қилди. Агар I ўйинчи II ўйинчи очган бармоқлар сонини топган бўлса, II ўйинчи эса тополмаган бўлса I ўйинчининг ютуғи очилган бамоқлар сонига тенг бўлади, бу ҳолда II ўйинчи ушбу миқдорни ютқазади. Агар иккала ўйинчи ҳам тўғри топган бўлса, бу ҳолда ҳар бир ўйинчининг ютуғи 0 га тенг бўлади. Кўриниб турибдики, ўйинчиларнинг стратегиялари сифатида *(i; j)* жуфтликлар бўлиб, бу ерда $i\ (i=1,2)$ очилган бармоқлар сони $j, (j=1,2)$- айтилган бармоқлар сонини билдиради.

I ўйинчининг ютуқлари матрицаси қуйидагича ёзилади

$$\begin{array}{c} \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1;1) & (1;2) & (2;1) & (2;2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (1.4)$$

Ушбу матрицада I ўйинчи (2;2) стратегияни, II ўйинчи эса (1;2) стратегияни танласа, I ўйинчи 3 бирликни ютқазади ва мос равишда II ўйинчи 3 бирликни ютади. Ушбу ўйин матрицали ўйиндир, чунки битта ютуқ матрицаси ёрдамида берилаяпти.

2-§. Матрицали ўйинлар

1. Минимакс қоидаси ва эгар нуқталар

Икки иштирокчининг умумий ютуқ миқдори нолга тенг бўлган чекли ўйинини таҳлил этайлик. Биринчи иштирокчининг m дона соф стратегиялари $i=1,2,\dots m$ ва иккинчи иштирокчининг n дона $j=1,2....n$ стратегиялари мавжуд бўлсин. Агар иштирокчилар мос равишда i ва j стратегияларни танлаган бўлсалар, ушбу ҳолда (i, j) ўйин ҳолатида I ўйинчининг ютуғи a_{ij} миқдорига, II ўйинчининг ютуғи эса мос равишда $-a_{ij}$ миқдорига тенг бўлади, яъни.

$$a_{ij} + (-a_{ij})=0$$

ушбу ўйиндаги барча ютуқлар $A = (a_{ij})$ матрица ёрдамида ифодаланса, A -ютуқлар ёки тўловлар матрицаси деб номланади.

$A = (a_{ij})$ матрицанинг i-сатрда I ўйинчининг ютуқлари $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$ жойлашган бўлиб, ютуқ қиймати II ўйинчининг танлаган усули j- га боғлиқ бўлади.

Ҳар бир ўйинчи ўз ютуғини катталаштиришга ҳаракат қилмоқда, I ўйинчи A матрицанинг мос сатрларини, II ўйинчи эса устунларини танлаш орқали.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ютуқ матрицали ўйинда ўз ютуқларини катталаштириш учун ўйинчилар қандай ҳаракат қилмоқлари даркор?

Эслатиб ўтамизки I иштирокчининг стратегияси сифатида $A = (a_{ij})$ ютуқ матрицанинг сатрини танлаш (I ўйинчининг соф стратегияси) ва ўз навбатида II ўйинчининг стратегияси сифатида устунни танлаш (II ўйинчининг соф стратегияси) қабул қилинади.

Фараз қиламизки, ўйинчилар ўзларини оқилона тутадилар.

Агар I ўйинчи i-сатр соф стратегиясини танлаган бўлса, у ҳолда II ўйинчи шундай j- устун соф стратегиясини танлаши керакки, a_{ij} ютуқ $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$, ютуқлар ичида энг кичиги бўлиши керак, ушбу энг кичик ютуқ миқдорини a_i -деб белгилайлик, яъни

$$a_i = \min_{j=1,n} a_{ij}$$

бундай усулда аниқланган a_i -ютуқ I ўйинчи i соф стратегияни танлагандаги кафолатланган ютуғи дейилади, чунки II ўйинчининг ихтиёрий хатти-ҳаракатига қарамасдан I ўйинчи a_i ютуқдан кам бўлмаган ютуққа эгадир. Ҳар бир ўйинчи ўз ютуғини катталаштиришга интилаётгани туфайли I ўйинчи ўз соф стратегиялари ичидаги шундайини танлайдики, ушбу соф стратегия a_i -ютуққа энг катта қийматини беради, яъни

$$v_* = \max_{i=1,m} a_i = \max_{i=1,m} \min_{j=1,n} a_{ij}$$

ушбу ютуқни таъминловчи p-соф стратегия **максимин стратегия** деб аталади ва v_* - бўлса ўйиннинг қуйи қиймати дейилади.

Иккинчи ўйинчи учун шунга ўхшаш фикр юритиш асосида, агар у j -стратегияни (A -матрицанинг j-устунини) танлаган бўлса,

$$b_j = \max_{i=1,m} a_{ij}$$

миқдор II ўйинчининг кафолатланган ютқизиғи бўлади. Шу туфайли II ўйинчи шундай q-стратегиясини танлаши керакки, унинг кафолатланган ютқизиғи энг кичик, яъни

$$v^* = b_q = \min_{j=1,n} b_j = \min_{j=1,n} \max_{i=1,m} a_{ij}$$

бўлсин.

Бу ҳолда v^* миқдор ўйиннинг соф стратегияларидаги юқори қиймати, q -соф стратегия эса **минимакс стратегияси** дейилади.

Кўриниб турибдики, максимин стратегиясини танлаш натижасида I ўйинчи v_* ютуқдан кам бўлмаган, II ўйинчи бўлса, v^* ютуқдан кўп бўлмаган ютқизиққа эга бўладилар.

Юқорида келтирилган максимин ва минимакс стратегияларини танлаш усуллари минимакс принципи (ёки кафолатланган натижа принципи) дейилади, ушбу принципнинг мазмунини ҳар бир ўйинчи томонидан кафолатланган ютуққа эришиш истаги ташкил этади.

Ихтиёрий матрицали ўйин учун $v^* \geq v_*$.

Ушбу тенгсизлик бажарилишини исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

Аслида $v^* = v_*$ ҳол жуда муҳимдир. Ғйинда ўйинчининг юқори ва қуйи қийматлари тенг бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар $A = (a_{ij})$ ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлса, яъни шундай (p, q) соф стратегиялар жуфтлиги мавжудки, улар учун

$$a_{iq} \leq a_{pq} \leq a_{pj}, \qquad i = \overline{1,m} \text{ ва } j = \overline{1,n}$$

тенгсизлик ўринлидир.

Бундай (p, q) эгар нуқталар $A = (a_{ij})$ матрицали ўйинда (p, q) -мувозанат ҳолатини беради. Агар (p, q) эгар нукта бўлса, у ҳолда I ва II ўйинчилар учун p ва q соф стратегиялардан мос равишда четга чиқиш уларнинг кафолатланган ютуқларини фақатгина камайтириши мумкин. Шу туфайли p ва q соф стратегиялар мукаммал соф стратегиялар деб аталади ва (p, q) жуфтликда аниқланган $v = v_* = v^*$ миқдор матрицали ўйин қиймати дейилади.

Агар $v_* < v^*$ бўлса, у ҳолда $A = (a_{ij})$ матрица соф стратегияларда эгар нуқтага эга бўлмайди ва ўйин соф стратегияларда ечимга эга эмасдир.

2. «Эгар» нуқтани аниқлаш алгоритми

1. A ютуқлар матрицасининг ҳар бир сатрида α_i - энг кичик элементни аниқлаймиз, $i = \overline{1, m}$.

2. Ушбу танланган $\alpha_i, i = \overline{1, m}$, ўз устунидаги максимал элемент бўладими? Шуни текширамиз. Агар шундай устун мавжуд бўлса аниқланган i_0 сатр ва j_0 устун эгар нуқтани аниқлайди. Бу ҳолда ўйин қиймати $a_{i_0 j_0}$ га тенг бўлади.

Агар шундай устун мавжуд бўлмаса, ушбу матрицали ўйинда соф стратегияларда «эгар» нуқта мавжуд бўлмайди.

Мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = -2$ ва $\alpha_3 = 5$ бўлиб $\alpha_1 = 5$ иккинчи ва тўртинчи устунлардаги максимал элементлардир. Демак (1,2) ва (1,4) стретегиялар «эгар» нуқтани аниқлайди.

$\alpha_3 = 5$ ҳам иккинчи ва тўртинчи устунларда максимал элемент бўлади, шу туфайли (3,2) ва (3,4) стретегияллар ҳам «эгар» нуқтани аниқлайди. Демак ушбу ўйинида 4та «эгар» нуқталар (1,2),(1,4), (3,2) ва (3,4) мавжуд бўлиб, ўйин қиймати v=5 га тенг бўлади.

«Эгар» нуқта стретегиясидан четга чиқиш ўйинчилар ютуғининг камайишига олиб келади.

Агар I ўйинчи 3-сатрни танласа ва II ўйинчи 2-устунни танласа ўйин қиймати v=5 га тенг (I ўйинчининг ютуғи 5 га, II ўйинчиннинг ютуғи -5 га тенг). Фараз қилайликки I ўйинчи 3-сатр ўрнига 2-сатрни танласин. У ҳолда II ўйинчи 2-устунни танлаши натижасида ўйин қиймати v=3 га тенг бўлади ва бу миқдор эгар нуқта таъминлаган v=5 бирликдан кичикдир.

3-§. «Эгар» нуқтасиз матрицали ўйинлар. Аралаш стратегиялар. Асосий теоремалар

1. Аралаш стратегиялар

Дейлик, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$- $\Gamma\ (A)$ матрицали ўйиннинг ютуқлар матрицаси бўлсин.

I ўйинчи A матрицанинг 1-сатрини танлаш эҳтимоли x бўлсин, бу ерда $0 \le x \le 1$, у ҳолда $1\text{-}x$ I ўйинчи томонидан A-матрицанинг 2-сатрини танлаш эхтимоли бўлади.

Мос равишда у II ўйинчи томонидан 1-устунни ва $1\text{-}y$ II ўйинчи томонидан 2-устунни танлаш эҳтимолликлари бўлсин, бу ерда $0 \le y \le 1$. Фараз қилайлик, ўйинчилар $(x, 1\text{-}x)$ ва $(y, 1\text{-}y)$ аралаш стратегияларни танлашган бўлишсин у ҳолда ўртача кутилаётган ютуқ миқдори қуйидагига тенг бўлади

$$E(x, y) = (-1)\cdot x \cdot y + 3 \cdot x(1 - y) + 4y(1 - x) - 2(1 - x)(1 - y)$$

соддалаштиришдан сўнг қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз

$$E(x, y) = -10\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right) + 1.$$

Мабодо I ўйинчи $x^* = x = \frac{1}{2}$ эҳтимолликни танласа, ихтиёрий $y \in [0,1]$ учун $E(x^*, y) = 1$ бўлади, яъни I ўйинчи II ўйинчининг танловидан қатъий назар 1 бирлик ютуққа эга бўлади.

Агар II ўйинчи $y^* = y = {}^3\!/_5$ эҳтимолликни қабул қилса, I ўйинчининг ихтиёрий $x \in [0,1]$ танловидан қатъий назар 1 бирликдан ортиқ бўлмаган ютқизиққа эга бўлади.

Демак, $x^0 = \frac{1}{2}$ ва $y^* = {}^3\!/_5$ аралаш стратегиялардаги «эгар» нуқта бўлиб, бу ҳолда ўйин қиймати v=1 га тенгдир

$$x^* = \left({}^1\!/_2; {}^1\!/_2\right),$$

$$y^* = \left({}^3\!/_5; {}^2\!/_5\right).$$

$$v^* = 1.$$

Юқорида айтиб ўтилганидек «эгар» нуқтаси мавжуд ва «эгар» нуқтаси мавжуд бўлмаган матрицали ўйинлар орасида катта тафовут бор бўлиб, ушбу тафовут ушбу ўйинлар бир неча бор такрорланганда яққол сезилади.

Ютуқ матрицаси қуйидаги келтирилган Г ўйинни кўрайлик

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ушбу ўйинда «эгар» нуқта мавжуд эмас
($\min_j \max_i a_{ij} = 1 > \max_i \min_j a_{ij} = -1$), шу туфайли максимин ва минимакс соф стратегиялар ҳам мавжуд эмас.

Фараз қилайлик $\Gamma(A)$ ўйин бир неча бор такрорланувчи бўлсин, ушбу ҳолда I ўйинчи 1-сатрни танлаган ҳолда унинг ютуғи 3 га ёки -1 га тенг бўлади агарда II ўйинчи мос равишда 2-ёки 1 -устунларни танласа. Агарда I ўйинчи 2-сатрини танлаган ҳолда унинг ютуғи ёки 4 ёки (-2) бирликка тенг бўлади, II ўйинчи мос равишда 1-ёки 2- устунларни танлаган ҳолда. Ушбу тенгликдан кўриниб турибдики, I ўйинчининг ютуғи II ўйинчининг танловига боғлиқдир ва аксинча. Агар II ўйинчи I ўйинчининг танлаган стратегиясини аниқ билса, I ўйинчини тўлиқ ютиши мумкин.

Шу сабабли ушбу ўйинларда танланаётган соф стратегияларнинг маҳфийлиги жуда муҳимдир. Ушбу тасдиқ «эгар» нуқта мавжуд бўлмаган ҳар бир матрицали ўйинлар учун ўринлидир.

Қуйидаги савол туғилади: такрорланувчи ўйинда II ўйинчининг ихтиёрий хатти-ҳаракатида I ўйинчининг унга кафолатланган ютуқни таъминлайдиган хатти-ҳаракати мавжудми?

Бирор бир соф стратегиясини мунтазам равишда қўллаш кафолатланган ютуқни таъминлай олмаслигини аниқлагач I ўйинчи соф стратегияларни тасодифий равишда танлашга ўтсин. Агар тасодифий танлаш тўғри ташкил этилса, ушбу усул кўзланган мақсадни бериши мумкин экан. Соф стратегияларнинг эҳтимоли деган тушунча билан танишайлик.

Юқорида келтирилган $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ матрицали ўйин учун x ва $1-x$ лар I ўйинчи томонидан мос равишда 1-сатр ва 2-сатрни танлаш эҳтимоллиги бўлсин, яъни $0 \le x \le 1$. Мос равишда ва $1-y$ 2-ўйинни томонидан 1-устунни ва

2-устунни танлаш эҳтимолликлари бўлсин, яъни $0 \le y \le 1$. Такрорланувчи ўйинда соф стратегияларни танлаш эҳтимоллигини қуйидагича талқин қилиш мумкин. Мисол учун $x = \frac{2}{5}$, шуни билдирадики, кўп маротаба такрорланган ўйинда ўртача 5 та ўйиннинг 2 тасида I ўйинчи 1-сатрни танлаш соф стратегиясини ва 3 марта 2-соф стратегиясини тасодифий равишда танлайди. Ушбу танлаш бирор бир тасодифий жараён асосида амалга оширилади. Мисол тариқасида ушбу жараён қуйидагича ташкил этилиши мумкин. Радиуси $R > 0$ бўлган доирада юзаси $S_1 = \frac{2}{5}\pi R^2$ бўлган сектор ажратиб олиб айтилган доирага кичик бир жисмни ташлаймиз. Агар жисм S_1 -секторга тушса, у ҳолда 1-соф стратегия қўлланилади, акс ҳолда 2-стратегия қўлланилади

$$S_1 = \frac{2}{5}\pi R^2$$

$$S_2 = \frac{3}{5}\pi R^2$$

3.1-чизма

S_1 ва S_2 секторларнинг юзаларини ўзгартириш натижасида бошқа эҳтимолликларни ҳам ҳосил қилиш мумкин бўлади.

Демак I ўйинчи қуйидаги стратегия (қоида) асосида ўйнаши керак бўлади:

1-сатрни x эҳтимоллик билан ва 2-сатрни $1-x$ эҳтимоллик билан танлаш, бу ерда $0 \leq x \leq 1$. Бундай қоида асосида танланаётган стратегияни аралаш стратегия деб номлаймиз. Мос равишда II ўйинчи 1-устунни y ва 2-устунни $1-y$ эҳтимолликлар билан танлайди бу ерда $0 \leq y \leq 1$.

Кўриниб турибдики, I ўйинчининг аралаш стратегияси $(x, 1-x)$, II ўйинчининг аралаш стратегияси эса $(y, 1-y)$ векторлар орқали берилмоқда.

Матрицали $\Gamma(A)$ ўйиннинг ютуқ матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда берилган бўлсин.

Ушбу ўйинда I ўйинчи, A матрицанинг сатрларини танлайди ва у m дона соф стратегия $i = 1,2,...,m$ га эга. II ўйинчи A матрицанинг устунларини танлайди ва n дона соф стратегиялар $j = 1,2,3,...,n$ га эга.

1-таъриф. I ўйинчининг аралаш стратегияси деб шундай $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ векторга айтиладики, бу ерда

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \text{ва} \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 .$$

I ўйинчининг аралаш стратегиялар тўпламини S_1 билан белгилаймиз.

Мос равишда **II ўйинчининг аралаш стратегияси** деб $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ векторга айтиладики, бу ерда

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \text{ва}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1.$$

II ўйинчининг аралаш стратегиялар тўпламини S_2 билан белгилаймиз.

Агарда ўйинчилар мос равишда $X \in S_1$ ва $Y \in S_2$ аралаш стратегияларини танласа, у ҳолда I ўйинчи учун ўртача ютуқ (ютуқнинг математик кутилмаси) қуйидаги ифодага тенг бўлади

$$E(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j .$$

2-таъриф. Аралаш стратегиялар $X^* \in S_1$ ва $Y^* \in S_2$ учун

$$E = (X,Y^*) \le E(X^*,Y^*) \le E(X^*,Y), X \in S_1 \text{ ва } Y \in S_2 \quad (3.1)$$

бўлса, у ҳолда (X^*, Y^*) $E(X, Y)$ функциянинг «эгар» нуқтаси бўлади.

Агар $X^* \in S_1$ ва $Y^* \in S_2$ $\Gamma(A)$ ўйин учун эгар нуқта бўлса, у ҳолда $X^*(Y^*)$ I ўйинчининг (II ўйинчининг) **оптимал аралаш стратегияси** дейилади.

Оптимал аралаш стратегиялар (3.1) га асосан ҳар бир ўйинчига рақибининг хатти-ҳаракатида қатъий-назар кафолатланган ютуқни таъминлайди

3-таъриф. Матрицали ўйинда

$$v_* = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} \sum_{in}^{m} \sum_{jn}^{n} a_{ij} x_i y_j , \tag{3.2}$$

ва

$$v^* = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} \sum_{in}^{m} \sum_{jn}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{3.3}$$

мос равишда ўйиннинг қуйи ва юқори қийматлари дейилади. Агар $v_* = v^* = v$ бўлса **v-ўйин қиймати дейилади.**

Изоҳ 1. $E\ (X,\ Y)$ функцияси $(X^*,\ Y^*)$ лар бўйича узлуксиз бўлиб, $(X,Y) \in S_1$ x S_2, S_1 ва S_2 чекли ёпиқ тўпламлар бўлгани учун v_* ва v^* доимо мавжуддир.

Матрицали ўйинларда кўп ҳолларда масштаб ҳақидаги леммадан фойдаланилади. Шу туфайли ушбу леммани келтирамиз.

Лемма (масштаб ҳақида). $\Gamma(A^I)$ ва $\Gamma(A)$ $m \times n$ бўлган матрицали ўйинлар бўлсин ва $A^1 = \alpha A + \beta \cdot B$, $\alpha > 0$ ва B ҳамма элементлари бирлардан иборат бўлган матрица бўлсин, у ҳолда

$$v(A^1) = \alpha v(A) + \beta . \tag{3.4}$$

1-теорема (Асосий теорема). Ихтиёрий матрицали ўйинда аралаш стратегияларда «эгар» нуқта ҳолати мавжуд ва

$$v_* = v^* \tag{3.5}$$

ўринлидир.

Исботи. Ушбу теоремадаги (3.5) тенглик бажарилиши учун зарурий ва етарлилик шарти бу $E\ (X,\ Y)$ функциянинг эгар нуқтаси мавжудлигидир. Иккинчи томондан агар $(X^*,\ Y^*)$ $E\ (X,\ Y)$ функциянинг эгар нутқтаси бўлса у ҳолда

$$E\ (X^*,\ Y^*) = v_* = v^* \tag{3.6}$$

тенглик ўринлидир.

1-теорема ихтиёрий матрицали ўйинларда оптимал аралаш стратегиялар $X^* \in S_1$ ва $Y^* \in S_2$ мавжудлигини тасдиқлайди.

Теоремани ютуқлар матрицаси $A = (a_{ij})$ элементлари учун $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ ҳол учун исботлаймиз.

Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини қурамиз

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1, \qquad j = \overline{1,n}, \\ x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{3. 7}$$

ва ушбу масалага иккиланма бўлган

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1, \qquad i = \overline{1,m}, \\ y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3. 8}$$

Бошланғич шартга кўра ҳар бир $a_{ij} > 0$ лигидан шундай $X^1 = (x_1^1, x_2^1, ... x_m^1) > 0$ вектор мавжудки, бу вектор (3. 7) масаланинг жоиз ечими бўлади. Мисол тариқасида бундай вектор сифатида ҳар бир компонентаси $x_i^1 = \frac{1}{a}$, $i = \overline{1,m}$, бу ерда $a > 0$ ва $A = (a_{ij})$ матрицанинг энг кичик элементи.

Иккинчи томондан $y = (0,0...,0)$ вектор ҳам (3.8) масаланинг жоиз ечими бўлади.

Тўғри (3.7) ва иккланма (3.8) чизиқли программалаш масалаларининг жоиз ечимлар тўплами бўш тўплам эмаслигидан иккиланмалик теоремасига кўра иккала масаланинг ҳам оптимал ечимлари мавжуд бўлади, яъни шундай

$$\overline{X} = (\overline{x_1}, ... \overline{x_m}) \text{ ва } \overline{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, ... \overline{y_m})$$

мавжудки улар учун

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x_i} = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} = \lambda > 0. \tag{3. 9}$$

Ушбу оптимал ечимлар асосида

$$X^* = \frac{1}{\lambda} \overline{X} \text{ ва } Y^* = \frac{1}{\lambda} \overline{Y}$$

векторларни қурамиз ва уларнинг мос равишда I ва II ўйинчиларнинг оптимал аралаш стратегиялари элементларини кўрсатамиз. Бу ҳолда ўйин қиймати $v = \frac{1}{\lambda}$ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам (3. 9) тенгликдан

$$x_i^* = \frac{1}{\lambda}\overline{x_i} \ge 0, \quad i=\overline{1,m} \text{ ва } y_j^* = \frac{1}{\lambda}\overline{y_j} \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$$

деб қабул қилсак

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{i=1}^m\left(\frac{1}{\lambda}\overline{x_i}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^m \overline{x_i} = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda = 1,$$

ва

$$\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m\left(\frac{1}{\lambda}\overline{y_j}\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^m\overline{y_i} = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda=1,$$

ларни ҳосил қиламиз, яъни $X^* \in S_1$ ва $Y^* \in S_2$.
Биринчи ўйинчининг (X^*, Y^*) аралаш стратегиядаги ютуғи

$$E(X^*,Y^*) = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^*y_j^* = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{x_i y_j}.$$

Иккинчи томондан $\overline{X}$ ва $\overline{Y}$ (3.7) ва (3.8) шартларини қаноатлантиришдан ва (3. 9)ни эътиборга олсак қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \overline{y_j} = \sum_{j=1}^n 1\cdot\overline{y_j} \le \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\overline{x_i}\right)\overline{y_j} = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{y_j}\right)\overline{x_i} \le \sum_{i=1}^m \overline{x_i} = \lambda.$$

Ушбу қўш тенгсизликдан

$$E(X^*,Y^*) = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{x_i}\,\overline{y_j} = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\lambda = \frac{1}{\lambda} \qquad (3.10)$$

келиб чиқади.
Агар $X \in S_1$ ва $Y \in S_2$ ихтиёрий аралаш стратегиялар бўлса, у ҳолда ((3.7) ва (3.8) дан)

$$E(X^*,Y) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{x_i y_j} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\overline{x_i}\right)y_j \ge \frac{1}{\lambda}, \qquad E(X,Y^*) \le \frac{1}{\lambda}$$

ҳосил қиламиз. Ушбу тенгсизлик ва (3.10) тенгликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$E(X,Y^*) \le E(X^*,Y^*) \le E(X^*,Y), \qquad X \in S_1, \qquad Y \in S_2,$$

яъни, $\{X^*, Y^*\}$ аралаш стратегия $\Gamma(A)$ ўйинда эгар нуқтани ҳосил қилади. Демак X^* ва Y^* мос равишда I ва II ўйинчиларнинг оптимал аралаш стратегиялари бўлиб, ўйин қиймати $v = \dfrac{1}{\lambda} > 0$ бўлади.

Бошланғич фаразни олиб ташлаб, ихтиёрий $A^1 = (a_{ij}^1)$ матрица учун теорема ўринли эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун ушбу матрицанинг ҳар бир элементига шундай $\beta > 0$ сонини қўшиб чиқамизки, бунинг натижасида $A = A + \beta B > 0$ мусбатлик шартини қаноатлантиради. Агар X^* ва Y^* $\Gamma(A)$ ўйин қиймати бўлса, у масштаб ҳақидаги леммага асосан X^* ва Y^* оптимал аралаш стратегиялар $\Gamma(A^1)$ ўйинда ҳам оптимал аралаш стратегиялар бўладилар ва ўйин қиймати $v^1 = v - \beta$ бўлади.

Теорема исботланди.

Изоҳ. Ушбу теореманинг исботлаш жараёнида матрицали ўйиннинг оптимал стратегиялари қурилади ва ушбу оптимал аралаш стратегиялар чизиқли программалаш масалаларини ечиш орқали топилади.

4-таъриф. Агар аралаш стратегиялар $X^* = (x_1^*, x_2^* ... x_m^*) \in S_1$ ва $Y^* = (y_1^*, y_2^* ... y_n^*) \in S_2$ ларда $x_i^* > 0$ ва $y_j^* > 0$ бўлса, уларга мос келувчи I - ва j - соф стратегиялар **актив стратегиялар** дейилади. I ўйинчининг II ўйинчи j - соф стратегиясини қўллагандаги ўртача ютуғини $E(X^*, j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^*$ деб аниқлаймиз.

2-теорема (актив стратегиялар ҳақида). Агар $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*) \in S_1$ ва $Y^* = (y_1^*, ..., y_n^*) \in S_2$ лар оптимал аралаш стратегиялар бўлса, у ҳолда I ўйинчининг ихтиёрий актив стратегияси i ва II ўйинчининг ихтиёрий актив стратегияси j учун қуйидаги тенглик ўринлидир

$$E(i, Y^*) = v. \quad \text{ва} \quad E(X^*, j) = v. \tag{3.11}$$

Исботи. Оптимал аралаш стратегияларни аниқлашга кўра

$$E(X^*, j) \geq v, \qquad j = \overline{1, n}. \tag{3.12}$$

Фараз қилайлик $E(X^*, j) > v$ бўлсин, у ҳолда $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ... y_n^*)$ оптимал аралаш стратегия учун (3. 8) ва $y_j^* > 0$ лигидан қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} E(x^*, j) y_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \right] y_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^* = E(X^*, Y^*) = v,$$

тенгсизликни ва $E(x^*, y^*) = v$ тенгликдан $v > v$ қарама-қаршилик келиб чиқиши теоремани исботлайди. Теорема исботланди.

4-§. Матрицали ўйинларни ечиш усуллари (аналитик ва геометрик усуллар)

Ушбу параграфда (2×2) бўлган матрицали ўйинларни геометрик ва аналитик усулда ечиш келтирилиб, сўнгра $(2\times m)$ ва $(m\times 2)$ ўлчамли ўйинлар (2×2) ўлчамли ўйинга келтирилади.

1. (2×2) ўлчамли матрицали ўйин

Ушбу ўйинда ҳар ўйинчи 2 стратегияга эга бўлиб, ютуқлар матрицаси қуйидаги кўринишга эга бўлсин

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Агар A-матрицали ўйинда «эгар» нуқта мавжуд бўлса, минимакс қоидасига асосан ўйин ечими енгил аниқланади.

Фараз қилайликки ўйинда «эгар» нуқта мавжуд бўлмасин, бу ҳолда ўйинда аралаш оптимал стратегиялар ва ўйин қийматини аниқлаймиз.

Оптимал аралаш стратегияларни қуйидагича белгилайлик

$$x^* = (x_1, x_2) \quad \text{ва} \quad y^* = (y_1, y_2), \quad \text{бу ерда}$$

$$x_1 + x_2 = 1, \qquad 0 \le x_1;\, x_2 \le 1,$$

$$y_1 + y_2 = 1, \qquad 0 \le y_1;\, y_2 \le 1,$$

v-ўйин қиймати.

Агар I ўйинчи оптимал $x^* = (x_1, x_2)$ аралаш стратегиясини қўлласа, II ўйинчи 1-соф стратегиясини қўлласа, яъни 1-устунни танласа, I ўйинчининг ютуғи

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2$$

тенг бўлиб, ўйин қиймати v га тенг, яъни

$$v = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 .$$

Агар II ўйинчи 2-соф стратегиясини (2-устун) қўлласа, $a_{12}x_1 + a_{22}x_2$ ҳосил қиламиз

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v.$$

Берилиши бўйича $x_1 + x_2 = 1$ тенгликдан x_1 ва x_2 аниқлаш учун қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ \quad x_1 + x_2 \quad = 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ушбу тенгламалар системасини ечиб x_1, x_2 ва v миқдорларни аниқлаймиз

$$\begin{cases} x^* = (x_1, x_2) \\ v \ = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \end{cases}$$

ва II ўйинчи учун аралаш стратегиялар $y^* = (y_1, y_2)$ қуйидаги тенгламалар системасидан аниқланади

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ \quad y_1 + y_2 \quad = 1. \end{cases} \qquad (4.2)$$

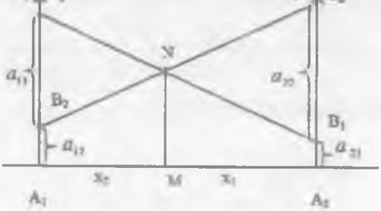
Юқорида келтирилган ечиш усули аналитик бўлиб, (2×2) ўйин ўлчамлари кичик бўлганлиги учун ушбу масалани ечимини график усулида ҳосил қилиш мумкин.

I ўйинчининг соф стратегияларини A_1 ва A_2 (1- ва 2- сатрлар) ва II-ўйинчининг соф стратегияларини B_1 ва B_2 (1- ва 2-устунлар) белгилайлик.

Текисликнинг абсцисса ўқида $[A_1, A_2]$ 1 бирлик узунликдаги кесма олайлик. Ушбу кесманинг A_1 учи координата боши бўлсин.

$[A_1, A_2]$ кесманинг учларидан ўтказилган перпендикуляр тўғри чизиқларда I-ўйинчининг ютуқларини белгилайлик (4.1-чизма).

A_1 учидан ўтувчи перпендикуляр ордината Oy ўқи билан мос тушиб, x_1=1 ва x_2=0 стратегия мосдир, A_2 учидан ўтказилган A_2P перпендикуляр A_2 соф стратегияга мос келиб x_1=0 ва x_2=1. Агар II ўйинчи B_1 соф стратегиясини қўлласа I ўйинчининг ютуғи a_{11} га тенг, агар I ўйинчи A_1 соф стратегияни қўлласа, a_{21} тенг, агарда у A_2 стратегиясини қўлласа, a_{11} ва a_{21} миқдорларни Оу ва A_2P кесмаларида мос равишда аниқлаб, ушбу нуқталарни B_1B_1 кесма билан туташтирамиз (4.1-чизма). B_1B_1 кесманинг ихтиёрий ординатаси I-ўйинчининг ўртача ютуғига тенг бўлади, агар у A_1 ва A_2 стратегияларини x_1 ва x_2 эҳтимолликлар билан мос равишда қўлласа, (4.1) тенгламалар ҳосил бўлади.



4.1-чизма

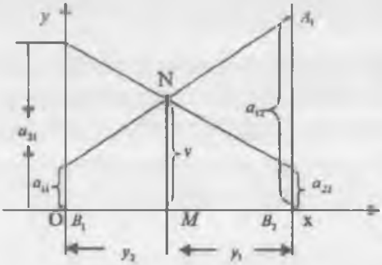
Агар II ўйинчи B_2 соф стратегиясини қўлласа B_2B_2 кесмани ҳосил қиламиз, агар I ўйинчи A_1 ва A_2 соф стратегияларни x_1 ва x_2 эҳтимолликлар билан мос равишда танласа, B_2B_2 кесманинг ординаталари I ўйинчининг ўртача ютуғига тенг бўлади.

$B_2\text{N}B_1$ синиқ чизиқнинг ординаталари I ўйинчининг у аралаш стратегияларини қўллагандаги минимал ютуғини белгилайди. I ўйинчи минимал ютуқлар ичидан энг каттасини танлаш мақсадидадир ва бу оптимал ечим N нуқта бўлади. N нуқтанинг ординатаси ўйин қиймати ν га тенг бўлиб, унинг абцисса ўқига проекцияси, яъни М нуқта I ўйинчи учун оптимал аралаш стратегия $x^* = (x_1, x_2)$ аниқлайди.

Бу ерда $x_1 = MA_2$ ва $x_2 = \text{O}M$ тенгдир.

N нуқта координаталарини аниқлаш учун (4.1) тенгламалар системасини ечиш керакдир.

Иккинчи ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси $y^* = (y_1, y_2)$ни топиш учун I ва II ўйинчининг ўринларини алмаштириш керак бўлади, яъни A матрицани транспонирлаймиз. У ҳолда II ўйинчининг стратегияси сифатида сатрларни танлаш, I ўйинчи учун устунларни танлашга тўғри келади. График усулдан фойдаланиб, қуйидаги чизмага эга бўламиз.



4.2-чизма

Ушбу чизмадаги A_2NA_1 синиқ чизиқ II ўйинчининг энг катта ютқизиқлар чизиғидир. II ўйинчи ўз ютқизиғини кичрайтиришга интилади. Шу туфайли у N нуқтани танлайди, N нуқта координаталари $y^* = (y_1, y_2)$ оптимал аралаш стратегияларни ва ўйин қиймати ν ни (4.2) системадан аниқлайди.

2. $(2 \times n)$ турдаги ўйинларни ечиш

$(2 \times n)$ турдаги ўйинларни ечиш қуйидагича амалга оширилади.

1) (4.1) чизмадаги каби ўйиннинг тасвири қурилади, фақатгина иккита B_1B_1 ва B_2B_2 тўғри чизиқлар билан биргаликда $B_3B_3, \ldots, B_nB_n$ тўғри чизиқлар ҳам қурилади;

2) I ўйинчининг қуйи ютуқлар синиқ чизиғи аниқланиб, ушбу синиқ чизиқда энг катта ординатали N нуқта танланади. Ушбу нуқта ординатаси ўйин қийматига тенг бўлади;

3) N нуқтада кесишувчи $B_{i_0}B_{i_0}$ ва $B_{j_0}B_{j_0}$ тўғри чизиқлар аниқланиб, ушбу актив стратегиялар II ўйинчининг оптимал стратегиясини аниқлашда иштирок этадилар (4.2-чизма). B_{i_0} ва B_{j_0} актив стратегиялар аниқлангандан кейин $(2\times n)$ матрицали ўйин (2×2) ўйинга айланади. Ушбу ўйинда I ўйинчи A_1 ва A_2 стратегияларини II ўйинчи бўлса, фақатгина B_{i_0} ва B_{j_0} стратегияларини мусбат эҳтимоллик билан қўллайди. Ҳосил қилинган (2×2) ўйинни ечиш (4.1) бўлимда кўрсатилгани каби амалга оширилади. N нуқта иккитадан кўп тўғри чизиқлар кесишмасидан ҳам ҳосил бўлиши мумкин.

3. $(m\times 2)$ матрицали ўйинларни ечиш

Ушбу ҳолда $(m\times 2)$ ўйинни ечиш қуйидагича амалга оширилади.

1) Транспонирланган, $A = (a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$ матрица учун ўйиннинг (4.2)чизмаси чизилади. Бу ҳолда A_iA_i чизиқ бир нечта бўлиши мумкин;

2) II-ўйинчининг ютуқларининг юқори чегараси қурилади ва ушбу синиқ чизиқда энг кичик ординатали M нуқта танланади. Ушбу нуқтанинг ординатаси ўйин қийматига тенг бўлади;

3) M нуқта кесишувчи $A_{i_0}A_{i_0}$ ва $A_{i_1}A_{i_1}$ тўғри чизиқлар аниқланади ва ушбу тўғри чизиқ индексларига мос I ўйинчининг i_0 ва i_1 актив стратегиялари аниқланади. Бунинг натижасида (2×2) матрицали ўйин ҳосил қилинади ва 1-бўлимдаги (4.3) ихтиёрий усул билан ечилади.

4. Стратегиялар орасида устунлик хоссаси

Матрицали ўйинларни ечишда ютуқ матрицасининг ўлчамларини ихчамлаштириб олиш ҳисоблашларни камайтиради. Ютуқ матрицаларини ўлчамларини ихчамлаштиришда ўйинчиларнинг оптимал бўлмаган стратегияларидан воз кечиш асосий усулдир. Ушбу усул стратегиялар ўртасидаги устунлик хусусиятига асослангандир.

1-таъриф. $\Gamma(A)$ матрицали ўйинда I ўйинчининг i_0 соф стратегияси i_1 соф стратегия устидан устунликка эга дейилади, агар

$$a_{i_0 j} \ge a_{i_1 j}, \qquad j=\overline{1,n} \text{ бўлса.} \qquad (4.3)$$

2-таъриф. II ўйинчининг j_0 соф стратегияси j_1 соф стратегиясидан устунликка эга дейилади, агар $-a_{ij_0} \ge -a_{ij}$, $\quad i=\overline{1,m}$.

Изоҳ. II ўйинчининг j_1 -стратегияси устунликка эга бўлмаган стратегия дейилади.

Устунлик стратегияларидан фойдаланиш қоидалари: I ўйинчи ўзининг устунлик стратегияларини мусбат эҳтимоллик билан қўллаб, ўз ютуғини оширади, II ўйинчи бундай стратегияларни ноль эҳтимоллик билан қўллаб, ўз ютқизиғини кичиклаштиради.

Устунлик стратегияларни қўллаш қоидаларига амал қилиш натижасида бошланғич ютуқ матрицасининг ўлчамларини ноль эҳтимоллик билан танланувчи сатр ва устунлари ташлаб юбориш ҳисобига камайтириш мумкин бўлади.

Ихчамлаштирилган матрицали ўйин асосида бошланғич ўйин ечимлари қуйидагича аниқланади:

а) бошланғич ўйин қиймати ихчамлаштирилган ўйин қийматига тенгдир;

б) ўчириб ташланган соф стратегиялар оптимал ечимда ноль эҳтимоллик билан иштирок этадилар.

5. Матрицали ўйинларни ечишнинг асосий босқичлари

Биринчи босқич: матрицали ўйинда эгар нуқта мавжудлигини текшириш, агар у мавжуд бўлса, оптимал стратегиялар ва ўйин қиймати эгар нуқтада аниқланади.

Иккинчи босқич: ютуқ матрицасининг ўлчамларини устунлик стратегияларини қўллаш қоидаси асосида ихчамлаштириш.

Учинчи босқич: оптимал аралаш стратегиялар ва ўйин қийматини график, аналитик ёки чизиқли программалаштириш усуллари ёрдамида топиш.

5-§. Матрицали ўйинлар ва чизиқли программалаштириш

Олдинги параграфда ўлчамлари (2xn) ва (mx2) бўлган матрицали ўйинларни ечиш усуллари келтирилди. Ўлчамлари бундан катта бўлган холларда юқоридаги усулларни қўллаб бўлмайди. Шу туфайли бундай матрицали ўйинлар чизиқли программалаштириш масалаларига келтирилади ва улар симплекс усул ёрдамида ечилади. Ҳосил қилинган ечим асосида оптимал аралаш стратегиялар ва ўйин қиймати аниқланади.

1. Чизиқли программлаштириш масаласига келтириш

Фараз қилайлик, ютуқлар матрицаси ёрдамида берилган матрицали ўйиннинг элементлари манфий бўлмасин, яъни $a_{ij} > 0$ ва $v = v(A) > 0$ ўйин ютуғи бўлсин. Ушбу фараз умумийликни камайтирмайди, чунки A матрица элементларига ўзгармас мусбат сон қўшиш билан юқоридаги ҳолга ўтиш мумкин. Ютуқ матрицасининг бундай ўзгартирилиши оптимал аралаш стратегияларни ўзгартирмайди.

Матрицали ўйин соф стратегияларида эгар нуқтага эга бўлмасин, шу туфайли оптимал аралаш стратегияларни топамиз.

Келгусида $X^* = (p_1, p_2, \dots p_m)$ ва $Y^* = (q_1, q_2, \dots q_n)$ мос равишда I ва II ўйинчиларнинг оптимал стретегияларини билдирсин.

Фараз қилайликки I ўйинчи ўзининг X оптимал аралаш стратегиясини, II ўйинчи бўлса $j(j = \overline{1,n})$ соф стратегиясини қўлласин. У ҳолда I ўйинчининг кутилаётган ўртача ютуғи

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots a_{mj} p_m, \qquad 1 \le j \le n, \tag{5.1}$$

тенг бўлади. Ушбу ютуқ ўйин v дан кичик эмаслигини эътиборга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + \dots a_{mj} p_m \ge v, \qquad 1 \le j \le n. \tag{5.2}$$

Тенгсизликнинг иккала томонини $v > 0$ га бўлиб юбориб

$$a_{ij} \frac{p_1}{v} + a_{ij} \frac{p_2}{v} + \dots + a_{mj} \frac{p_m}{v}, \qquad j = 1,2 \dots n, \tag{5.3}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз ва

$$x_i = \frac{p_i}{v}, \ i = 1,2,\dots,m, \tag{5.4}$$

ўзгарувчиларни киритиб

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \dots + a_{mj} x_m \ge 1, \qquad j = 1,2 \dots n,$$

тенгсизликлар системаси ҳосил бўлади

$$p_1 + p_2 + \dots p_m = 1$$

Янги ўзгарувчиларни аниқлаш ва (5.4) тенгликдан қуйидаги

$$x_1 + x_2 + \dots x_m = \frac{1}{v} \tag{5.5}$$

тенглик келиб чиқади.

I ўйинчи ўз ютуғи v ни катталаштиришга интилаётганлиги учун (5.5) ифода ўзининг катта қийматига v минимумга эришганда эришади.

Демак (5.2)-(5.5) формулалардан қуйидаги келиб чиқади, I ўйинчининг оптимал аралаш стратегиялари ва ўйин қиймати v ни аниқлаш қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласига келтирилади.

$$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \overline{\phantom{a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1,}} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_m \geq 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Ушбу (5.6)-(5.7) чизиқли программалаштириш масаласи симплекс усул ёрдамида ечилади ва дейлик $(x_1^*, x_2^*, \ldots., x_m^*)$ оптимал ечим бўлсин. У ҳолда (5.4) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$v = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^*}, \qquad p_i = x_i^* \cdot v = \frac{x_i^*}{x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^*}. \tag{5.8}$$

Ушбу тарздаги йўл билан II ўйинчи учун (5.4)-(5.7) муносабатларга ўхшаш муносабатларини аниқлаймиз ва $Y^* = (q_1, \ldots., q_n)$ лар учун

$$q_j = u_j^* \cdot v = \frac{u_j^*}{u_1^* + u_2^* + \ldots. + u_m^*} \tag{5.9}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бу ерда $u_1^*, u_2^*, \ldots u_n^*$ чизиқли программалштириш масаласининг (5.10) оптимал ечими:

$$f(u) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1j}u_j + \ldots a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2j}u_j + \ldots a_{2n}u_n \leq 1, \\ ---------------------- \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mj}u_j + \ldots a_{mn}u_n \leq 1, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \ldots, u_n \geq 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Матрицали ўйиннинг қиймати $v(A)$ ва Y^* оптимал аралаш стратегиялари қуйидаги ўзаро иккиёқлама чизиқли программлаштириш масаласини ечиш орқали ҳосил қилиниши мумкин.

Бошланғич масала **Иккиланма масала**

$$\begin{cases} f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_1 \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}x_i \geq 1, \quad j=1,2,\ldots,n, \\ x_i \geq 0, \quad i=\overline{1,m}. \end{cases} \qquad \begin{cases} f(u)=\sum\limits_{j=1}^{n}u_j \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}u_i \leq 1, \quad i=1,2,\ldots,m, \\ u_i \geq 0. \quad i=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{5.11}$$

Ўйин қиймати v ва аралаш стратегиялар p_i, q_i лар қуйидагича ҳисобланади

$$v=\frac{1}{x_1^*+x_2^*+\ldots+x_m^*}=\frac{1}{u_1^*+\ldots+u_n^*}. \tag{5.12}$$

Бу ерда X^* ва Y^* мос равишда бошланғич ва иккиланма масалаларнинг оптимал ечимлари.

2-мисол. Қуйидаги

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 7 & -5 \\ 6 & 5 & 11 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

матрицали ўйин оптимал стратегияларни аниқланг. Ушбу матрицали ўйиннинг эгар нуқтаси мавжуд эмас. Демак ечим аралаш стратегияларда аниқланади. Ўйин қиймати шартни қаноатлантириш учун, A матрицанинг ҳар бир элементига 6 қийматни қўшиб чиқамиз:

$$A^1=A+B\cdot\beta=A+6\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 13 & 1 \\ 12 & 11 & 17 \end{pmatrix},$$

B матрицанинг ҳар бир элементи 1 га тенг.

Ушбу A^1 матрица учун $v(A^I)>0$ ва $v(A)=v(A^I)-6$ бўлади.

$$y_1+y_2+y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} y_1+13y_2+6y_3+y_4=1, \\ 12y_1+11y_2+17y_3+y_5=1, \\ y_j \geq 0, \quad j=\overline{1,5}, \\ \tilde{y}=(0,0,0,1,1). \end{cases}$$

Ушбу чизиқли программалаштириш масаласини II ўйинчининг оптимал аралаш стратегияларини топиш учун симплекс метод ёрдамида ечамиз (II боб, 7-§). Ушбу масаланинг оптимал ечими.

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^* y_3^*\right) = \left(\frac{2}{145}, \frac{11}{145}, 0\right),$$

$$q_1^* = \frac{y_1^*}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} = \frac{2}{13},$$

$$q_2^* = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} = \frac{11}{13},$$

$$q_3^* = \frac{y_3^*}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} = 0,$$

$$v(A^1) = \frac{1}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} \frac{145}{13} = 11\frac{2}{13},$$

$$v(A) = v(A^1) - 6 = 11\frac{2}{13} - 6 = 5\frac{2}{13}.$$

6-§. Матрицали ўйинларнинг иқтисодга татбиқи

Матрицали ўйинлар иқтисодий муаммоларнинг таҳлилида кенг қўлланилади. Ҳар бир иқтисодий вазият ёки ҳолат иқтисодий тизимдаги иштирокчиларнинг ўзаро муносабати натижасида келиб чиқади. Иқтисодий тизимдаги иштирокчиларнинг хатти-ҳаракатларини олдиндан тўлиқ ҳолда башорат қилиб бўлмайди. (Мисол учун: талаб миқдори, об-ҳаво, бозордаги рақобат ва бошқалар).

Шу туфайли иқтисодий вазиятлар ноаниқлик ёки қарама-қаршилик холатларида рўй беради ва бу қабул қилинаётган қарорларга ўз таъсирини ўтказади. Бу ҳолларда самарадор ёки мукаммал қарорлар қабул қилиш учун ўйин моделларини қуриш ва улар асосида қарорлар қабул қилиш мақсадга мувофиқдир. µуйида ўйинлар назарияси асосида қарор қабул қилиш самарадорлигини кўрсатувчи бир неча иқтисодий масалаларни кўриб ўтамиз.

1-мисол (Маҳсулот етказиб бериш)

Омборда n турдаги маҳсулот бўлиб, савдо растасига ушбу маҳсулотлардан фақат 1 тури юборилиши мумкин бўлсин. Шундай турдаги маҳсулотни танлаш керакки ушбу маҳсулотни савдо растасига юбориш мақсадга мувофиқ бўлсин. Агарда j ($j = \overline{1, n}$) турдаги маҳсулот савдо растасига юборилса ва ушбу маҳсулот харидоргир бўлса савдо растаси бунинг натижасида P_j $(j=\overline{1,n})$, миқдорда соф фойда олади, аксинча бўлиб чиқса, у ҳолда S_j $(j=\overline{1,n})$ миқдорда зарар кўради. Харидор талаби аниқ берилмаган ҳолда савдо растаси ва харидор орасида зиддият вужудга келади. Ушбу зиддиятли ўйинни кўриш мумкин: савдо растаси I ўйинчи, харидор талаби II ўйинчи сифатида қабул қилиниб, ҳар бир ўйинчи ўз стратегияларига эгадирлар. I ўйинчининг $i=\overline{1,n}$ та стратегияси i - маҳсулотни савдо растасига юбориш бўлса, II ўйинчининг ҳам $j=\overline{1,n}$ стратегияси мавжуд бўлиб, бу j - турдаги маҳсулотга харидор талабидир.

II ўйинчи I ўйинчига қарши ўйнасин, яъни унга энг катта зарар етказмоқчи бўлсин, бу ҳолда кўрилаётган ўйин чекли антигонистик (матрицали ўйин бўлиб, ютуқ матрицаси қуйидагича берилади)

$$A=\begin{pmatrix} P_1 & -S_1 & -S_1 \ldots -S_1 \\ -S_2 & P_2 & -S_2 \ldots -S_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -S_n & -S_n & -S_n \ldots P_n \end{pmatrix}. \qquad (6.\ 1)$$

Соддалик учун $P_i \equiv P = const$ ва $S_1 > S_2 > \ldots S_n$. Ўйин таҳлилини содалаштириш учун A ютуқ матрицасининг ҳар бир элементини $P = const$ миқдорга камайтириб қуйидаги янги

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & -h_1 & -h_1 \ldots . -h_1 \\ -h_2 & 0 & -h_2 \ldots . -h_2 \\ ---- & ---- & ---- \\ -h_n & -h_n & -h_n \ldots . 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2)$$

матрицани ҳосил қиламиз, бу ерда $h_i = S_i + P$ ва $h_1 > h_2 \ldots . > h_n > 0$.

Илгари олинган натижаларга асосан ушбу ўйиннинг оптимал аралаш стратегиялари $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*), Y^* = (y_1^*, \ldots . y_n^*)$ ва ўйин ютуғи v^* қуйидаги -ча аниқланади.

1) агар $h_n\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{h_s}\right)-(n-1)>0$ бўлса ,у ҳолда

$$x_i^* = \left(h_i \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{h_s}\right)^{-1}, \quad 1 \le i \le n, \qquad (6.\ 3)$$

$$y_j^* = \left[h_j \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s} - (n-1)\right] \cdot \left(h_j \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}, \quad 1 \le j \le n, \qquad (6.3)$$

$$v = -(n-1)\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}.$$

$$2) \text{ агар } h_n \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right) - (n-1) \le 0 \qquad (6.5)$$

бўлса у ҳолда $v = -h_n$ ва I ўйинчининг оптимал стратегияси n-сатрни 1 эҳтимоллик билан қабул қилишдан, яъни $X^* = \{0,0,...0,1\}$ II ўйинчининг оптимал стратегияси (6.5) формула ва қуйидаги тенгсизликдан танлаб олинади

$$\begin{cases} y_j^* \le 1 - \dfrac{h_n}{h_j} & агар \quad 1 \le j \le n-1, \\ y_n^* = 0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Мисол учун

$$y_j^* = \frac{1}{K}\left(1 - \frac{h_n}{h_j}\right), \quad 1 \le j \le n-1,$$

$$y_n^* = 0,$$

бу ерда

$$K = \left(n - h_n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1} \geqslant 1 \text{ шартга кўра.}$$

Бошланғич A ютуқ матрицали $\Gamma(A)$ ўйин қийматини аниқлаш учун v ўйин қийматига P миқдорини қўшиш керак, яъни

$$v(A) = P - (n-1)\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{h_s}\right)^{-1}.$$

Савдо растаси учун талаб номаълум бўлган ҳолда максимал фойда олиш учун қуйидаги қоидага амал қилиш мақсадга мувофиқдир: агар

$$v(A) > 0$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{P}{S_j + P} - (n-1) > 0 \qquad (6.7)$$

бўлса у ҳолда (6.4.) шарт асосида ўз стратегиясини танлаш керак, мабодо (6.7) шарт бажарилмаса, у ҳолда хеч қандай маҳсулот савдо растасига юборилмаслиги керак.

2-мисол (Экин экиш)

Қишлоқ хўжалигида I ўйинчи 2 турдаги A_1 ва A_2 экин турини экишни мўлжалламоқда. Ушбу экинлар учун ажратилган майдонлар миқдорини шундай аниқлаш кераккки, олинадиган ҳосилдан келадиган фойда энг катта бўлсин. Ҳосилдорликка об-ҳаво шароити ва табиат (II ўйинчи) ўз таъсирини кўрсатади деб хисоблаймиз. Лалмикор ва суғориладиган ерлардаги деҳқончиликда табиат ва об-ҳаво энг ноқулай келган ҳоллардан келиб чиқиб экин майдонларини аниқлаш мақсадга мувофиқдир.

Келтирилган фаразларга асосан I ўйинчи 2 та соф стратегияга , A_1 ёки A_2 турдаги экинни экиш.

II ўйинчининг соф стратегиялари қуйидагилардан иборат:

B_1 : қурғоқчилик;

B_2 : сув сероб;

B_3 : серсув ва ортиқча намгарчилик;

B_4 : экинларнинг хашоратлар ва сел билан зарарланиши.

Ушбу зиддиятли холатнинг моделини матрицали ўйин сифатида қуриш учун ютуқлар матрицасини аниқлаш зарурдир. Ушбу ютуқ матрицасини аниқлашда $h_{ij}\,(i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,4})$ i- турдаги экиннинг табиатнинг B_j ҳолати рўй бергандаги хосилдорлиги ва $a_i(i=1,2)$ 1 центнер i тур экиндан олинадиган фойда берилган бўлсин, у ҳолда

$$A=\begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & a_1h_{11} & a_1h_{12} & a_1h_{13} & a_1h_{14} \\ A_2 & a_2h_{21} & a_2h_{22} & a_2h_{23} & a_2h_{24} \end{array}.$$

Асосий теоремага кўра $\Gamma(A)$ матрицали ўйин аралаш стратегияларда доимо ечимга эга бўлади. Агар $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ I ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси бўлса, табиатнинг B_j ҳолатида I ўйинчининг кутилаётган фойдаси учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$H_j = a_1h_{1j}x_1^* + a_2h_{2j}x_2^* \geq \nu, \qquad j=1,2,3,4.$$

Албатта, кутилаётган фойда айнан олинган фойдага тенг бўлмайди, лекин экин майдонларини бир неча йил давомида ушбу қоида асосида экилса, кутилаётган фойда олинган фойдаларнинг ўртача йиллигига тенг бўлади.

7-§. Мисоллар ечиш

Ушбу парагрфда $\Gamma(A)$ матрицали ўйинларни турли ҳил усулларда ечишни кўрамиз.

1-мисол. «Эгар» нуқта мавжуд ҳол.

Ютуқ матрицаси қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1=-3,\\ \alpha_2=1.\end{matrix}$$

Ечиш. Ушбу ўйинда I ўйинчи томонидан 2-соф стратегияни ва II ўйинчи томонидан 3-устунни танлаш соф стратегиясини қўллаши эгар нуқтага олиб келади, чунки

$$\max_{i=1,2}\min_{i=1,3} a_{ij} = \min_{j=1.3}\max_{i=1,2} a_{ij} = a_{23} = 1.$$

Демак, $v = a_{23} = 1$.

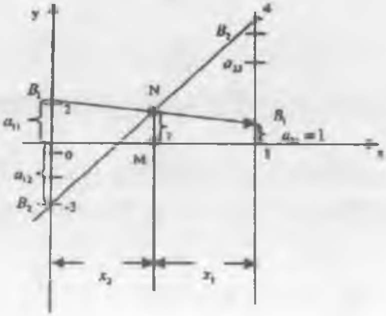
2-мисол (2×2 **ўйин**). Ютуқ матрицаси қуйидагича берилган

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Ечиш. Ушбу матрицали ўйинда эгар нуқта мавжуд эмасдир, чунки $\max\limits_{i}\ \min\limits_{j} a_{j} = 1 < \min\limits_{j}\ \max\limits_{i} a_{ij} = 2$, $i=1,2$, $j=1,2$ шу туфайли ўйинчиларнинг оптимал стратегиялари аралаш стратегиялардан иборат бўлади ва иккала стратегиялари ҳам **актив** бўлади.

Ушбу ўйиннинг чизмасини кўрайлик (I ўйинчи учун).

$$a_{11}=2, \qquad a_{12}=-3,$$
$$a_{21}=1, \qquad a_{22}=4.$$



7.1-чизма

N нуқта B_1B_1 ва B_2B_2 кесмаларнинг кесишиш нуқтасидир, бу ерда

$$B_1B_1 : 2x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \text{ ва } B_2B_2 : (-3)x_1 + 4x_2 = 0$$

тўғри чизиқлар тенгламаларини тенглаш натижасида

$$2x_1 + x_2 = -3x_1 + 4x_2, \quad 5x_1 = 3x_2$$

тенгламани ҳосил қиламиз, $x_1 + x_2 = 1$ тенгликдан

$$5(1 - x_2) = 3x_2 \quad \text{ёки} \quad x_2 = \frac{5}{8}.$$

аралаш стратегияни топамиз. Ўйин қиймати

$$\nu = 2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8} = 1{,}375$$

тенг бўлади. I ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси

$$x^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right).$$

Ушбу натижани актив стратегиялар ҳақидаги 2-теорема асосида қурилган

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v, \\ -3x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечишдан ҳам олиш мумкин.

II ўйинчининг оптимал стратегияларини топамиз. Бунинг учун қуйидаги тенгламалар системасини ечамиз

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = v, \\ 1 \cdot y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

тегламани ечиб

$$v = \frac{11}{8},$$

$$2y_1 - 3y_2 = y_1 + 4y_2,$$

$$y_1 = 7y_2 = 7(1 - y_1) = 7 - 7y_1,$$

$$8y_1 = 7,$$

$$y_1 = \frac{7}{8}, \qquad y_2 = 1 - y_1 = \frac{1}{8}.$$

II ўйинчининг оптимал стратегияси

$$y^{*}=\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right)$$

га тенг бўлади.

3-мисол ($(2\times n)$ **- ўйин)**

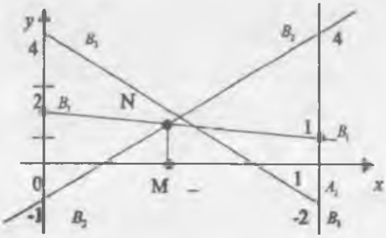
Ютуқ матрицаси қуйидагича берилган

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ўйинни таҳлил қилайлик.

Ечиш: Ушбу ўйинда ҳам эгар нуқта мавжуд эмас. Ушбу турдаги ўйинларни (4. 1) ва (4. 2) тенгламалар системаси орқали топиш ҳар доим ҳам самарадор эмасдир. Шу туфайли ушбу ўйиннинг чизмасидан ва II ўйинчининг 2та актив стратегиясини танлаш орқали (2×2) бўлган матрицали ўйинга келтириб олиш мақсадга мувовиқдир. (2×2) ҳолга келтирилган ўйинни 2-мисол асосида ечиш мумкин бўлади.

Ушбу ўйиннинг I ўйинчи учун чизмаси қуйидаги кўринишда бўлади:



7.2-чизма

7.2 чизмадан кўриниб турибдики, ўйин қиймати

$$v=|MN|$$

ва N нуқта B_1B_1 ва B_2B_2 тўғри чизиқларнинг кесишиши, натижасида аниқланмоқда, демак II ўйинчининг 1-ва 2-соф стратегиялари мусбат эҳтимоллик билан, 3-стратегияси бўлса, ноль эҳтимоллик билан танланади.

Бу ҳолда бошланғич (2×3) ўйин (2×2) ўйин келтирилади ва бу ўйиннинг ютуқ матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ бўлиб}$$

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad y^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \qquad v = 1{,}5$$

га тенгдир.

Бошланғич (2×3) ўйин учун оптимал стратегиялар

$$x_{опт} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad y_{опт} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0\right) \text{ бўлиб}$$

ўйин қиймати $v = 1{,}5$ га тенг.

4-мисол ($m\times 2$ ўйин)

Матрицали ўйин $\Gamma(A)$ ни ечинг, агар ютуқ матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Ушбу ўйинни ечиш учун A матрицани транспонирлаб оламиз

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ва II ўйинчи учун чизма чизамиз (6.3 -чизма)

7.3-чизма

Ушбу расмда синиқ чизиқ A_2KNA_1 II ўйинчининг аралаш стратегияларда энг катта ютқизиқларини билдиради. II ўйинчи ўз ютқизиғини кичиклаштиришга ҳаракат қилгани учун, унинг энг кичик ютқизиғи $v = |MN|$ N нуқтанинг ординатасига тенг бўлади. N нуқта A_1A_1 ва A_3A_3 чизиқларнинг кесишишида ётибди, шу туфайли I ўйинчи учун актив стратегиялар. A_1 ва A_3 лар бўлади. Бу ҳолда $\Gamma(A)$ ўйин яна (2×2) матрицали ўйинга келтирилади. Ушбу ўйиннинг ютуқ матрицаси

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлади. Ушбу ўйинни 2-мисолда қўлланган усул асосида ечиб

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

$$y = (y_1, y_2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

ва $v = 1{,}4$ ларни ҳосил қиламиз. Бошланғич ўйин учун

$$x^* = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \quad y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

ва $v = 1{,}4$ бўлади.

5-мисол

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ -6 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кўриниб турибдики 2-сатр 4-сатрдан, 5-устун бўлса 4-устундан устунликка эга, шу туфайли 2-сатр ва 4-устунларни ташлаб юборамиз ва қуйидаги матрицани хосил қиламиз

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Бу ерда ҳам 2-сатр 3-сатрдан, 1-устун 2-устундан 3-устун 4-устундан устунликка эга шу туфайли 3-сатр, 1-ва 4-устунларни ташлаб юбориб қуйидаги ютуқ матрицасини ҳосил қиламиз

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ушбу (2×2) – матрицали ўйинни 2-мисолга ўхшаб ечиб

$$x^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \qquad y^* = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right), \qquad \nu = 1{,}375$$

ҳосил қиламиз. Бошланғич ўйин учун

$$x^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, 0{,}0\right), \quad y^* = \left(\frac{7}{8}. \frac{1}{8}, 0{,}0\right), \quad \nu = 1{,}375$$

бўлади.

6-мисол. Ўйинларни симплекс усул билан ечиш. Қуйидаги матрицали ўйин учун ўйин қиймати ва оптимал стратегияларини топинг.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (7.\ 1)$$

Кўриниб турибдики, $\widetilde{A}$ ютуқлар матрицасида соф стратегияларда эгар нуқта мавжуд эмас, шу туфайли мукаммал стратегияларни аралаш стратегиялар ичидан излаш керак бўлади. Матрицали ўйинлар учун келтирилган асосий теоремага асосан бундай оптимал стратегиялар доимо мавжуддир.

Юқорида келтирилган (7.1) матрицали ўйинни чизиқли программалаштириш масаласига келтириб ечамиз. Энг аввало $\widetilde{A}$ матрицага шундай α сонни қўшамизки $\widetilde{A} + \alpha \cdot B$ матрица элементлари манфиймаслик шартини қаноатлантирсин, мисол учун $\alpha = 2$ бўлсин (ёки ихтиёрий $\alpha \geq 2$). У ҳолда қуйидаги ютуқ матрицасига эга бўламиз.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.\ 2)$$

Ушбу A ва $\widetilde{A}$ матрицали ўйинларнинг ютуқ қийматлари орасида қуйидаги боғланиш мавжуд $v(A) = v(\widetilde{A}) + 2$ бўлиб оптимал стратегиялар иккала ўйин учун ҳам бир хилдир.

A-матрицали ўйин учун 5-§ даги (5.8), (5.9) ва (5.12) тенгликлардан фойдаланиб, оптимал стратегияларни аниқлаш учун қуйидаги чизиқли программалаш масалаларини тузамиз.

Бошланғич масала **Иккаланма масала**

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 \to \min & u_1 + u_2 + u_3 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, & 2u_1 + 1u_2 + 4u_3 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, & 3u_1 + 2u_2 + 4u_3 \leq 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1, & 2u_1 + 4u_2 + u_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. & u_i \geq 0, \quad i = 1,2,3. \end{array} \tag{7.3}$$

Бошланғич масалага мос М-масалани кўриб,уни М-усулда ечамиз.

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + M(u_1 + u_2 + u_3) \to \min \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + u_1 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_5 + u_2 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_6 + u_3 = 1, \\ x_i \geq 0. \quad i = \overline{1,6}, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1,2,3, \end{gathered} \tag{7.4}$$

ушбу (7.4) чизиқли программалаш масаласи учун симплекс-жадвал 1-жадвалда келтирилган.

1- жадвал

				1	1	1	0	0	0	M	M	M
№	$Б$	$C_б$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	u_1	u_2	u_3
1	u_1	M	1	2	3	2	−1	0	0	1	0	0
2	u_2	M	1	1	2	4	0	−1	0	0	1	0
3	u_3	M	1	4	4	1	0	0	−1	0	0	1
M			3	7	9	7	−1	−1	−1	0	0	0
			0	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0

Ушбу масаланинг оптимал ечими.

$$x^{*} = \left(0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0 \right)$$

га тенг бўлади ва (7.4) масаланинг оптимал ечими мос равишда

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right) \text{ бўлади.}$$

Аниқланган $\bar{x}$ ва (5. 5) формуладан v ўйин қиймати аниқлаймиз

$$v = \frac{1}{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{8}{3} \quad .$$

I ўйинчининг оптимал аралаш стратегияларни (5.8) формула асосида аниқлаймиз.

$$\begin{aligned} p_1 &= \bar{x}_1 \cdot v = 0 \cdot \frac{8}{3} = 0, \\ p_2 &= \bar{x}_2 \cdot v = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}, \\ p_3 &= \bar{x}_3 \cdot v = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

оптимал аралаш стратегия $X^{*} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ га тенг бўлади.

II ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси Y^{*} ҳам шундай усулда аниқланади:

$$Y^{*} = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0 \right).$$

$\Gamma(\widetilde{A})$ матрицали ўйин ютуғи $\widetilde{v} = v - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ га тенг бўлади.

I ўйинчига унинг 2-соф стратегияси v ютуқни таъминлар эди, оптимал аралаш стратегияларни қўллаш, унга $\frac{2}{3} > 0$ ютуқтни таъминламоқда.

VI бобга оид машқлар

1-топшириқ. График ва аналитик усуллар ёрдамида қуйидаги $\Gamma(A)$-матрицали ўйиннинг оптимал аралаш стратегиялари ва ўйин қийматини топинг.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$,

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ -2 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

г) $A=\begin{pmatrix} n & -1 & m & 1 \\ -1 & n & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $A=\begin{pmatrix} n & -2 \\ 1 & 2m \\ -2 & 4 \\ -m & 5 \end{pmatrix}$,

бу ерда $m, n=1, 2, 3, \ldots$.

2-топшириқ. Стратегиялар орасидаги устунлик тушунчасидан фойдаланиб, бошланғич $\Gamma(A)$ ўйинни (2×2) ўлчамли ўйинга келтиринг ва $\Gamma(A)$ ўйин учун оптимал аралаш стратегиялар ва ўйин қийматини аниқланг.

$$A=\begin{pmatrix} +3 & -1 & 2 & 3m & 4 \\ m & 1 & -3 & 0 & 2 \\ m & 2n & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$m, n =1, 2, 3, \ldots$

3-топшириқ. Чизиқли программалаш масаласига келтириш йўли билан $\Gamma(A)$ матрицали ўйинни ечинг.

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

б) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix} -1 & -m & 2 \\ -1 & n+1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$m, n =1, 2, 3, \ldots$

4-топшириқ. Савдо растасига махсулотлар етказиб бериш масаласи учун ўйин моделини матрицали ўйин шаклида қуринг, оптимал стратегияларни ва ўйин ютуғини аниқланг.

Изоҳ. а) ва б) мисолларни ечиш жараёнида 6-§ даги (6. 4) ва (6. 6) формулалардан фойдаланинг

а)

	Товар тури			
	1	**2**	**3**	**4**
Сотувдан келган фойда	30	30	30	30
Сотилмай колгандаги зарар	12	8	10	6

	Товар тури					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Сотувдан келган фойда	60	60	60	60	60	60
Сотилмай колгандаги зарар	16	12	10	8	18	14

б)

	Товар тури					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Сотувдан келган фойда	80	80	60	80	80	80
Сотилмай колгандаги зарар	16	$8(1+\|p-6\|)$	9	$1+\|q-8\|$	7	8

$p = 1,2, ..., 15; \quad q = 1,2, ..., 80.$

5-топшириқ. Экинзорларга 4 турдаги $A_i, i=\overline{1,4}$, экин шундай танлаб экилиши керакки, об-ҳавонинг ёмон келган ҳолда ҳам йиғиб олинган ҳосилдан келган фойданинг кутилмаси энг катта бўлсин. Ушбу масаланинг маълумотлари жадвалда келтирилган.

Ушбу масаланинг моделини матрицали ўйин кўринишида тузинг , оптимал стратегиялар ва ҳосилни сотишдан кутилаётган фойда -ўйин қийматини максималлаштиринг.

№	Табиат ва	**Ҳосилдорлик ц/га**			
	об-ҳаво	A_1	A_2	A_3	A_4
1	Қурғоқчилик	10	20	5	10
2	Сув сероб	30	$50(1+\|q-2\|)$	20	$60(1+\|q-8\|)$
3	Сув сероблиги ва намгарчилик	$20(1+\|p-6\|)$	40	15	50
4	Бошқа ҳолатлар	5	10	10	0
	1 центнер ҳосил қиймати	12	6	7	4

$p,q = 1, 2, 3 ...., 10.$

VII БОБ

ГУРУҲСИЗ (КОАЛИЦИЯСИЗ) ЎЙИНЛАР

1-§. Коалициясиз ўйинларда оптималлик қоидалари

1. Кириш. Коалициясиз ўйинларда оптималлик ва ечим тушунчаси

VI бобда матрицали ўйинлар кўриб чиқилди, бу ўйинлар 2 иштирокчи (ўйинчи) ўртасида вужудга келган зиддият, қарама-қаршиликларни акс эттирган эди. Кўп ҳолларда икки иштирокчи орасидаги зиддият доимо ҳам қарама-қарши зиддият бўлмайди, бундан ташқари кўп ҳолларда иштирокчиларнинг сони иккитадан кўп бўлади ва улар томонидан вужудга келган ҳолатларни таққослаш имконияти мавжуд бўлади.

Ушбу бобда шундай зиддиятли холатларни ўрганамизки, бу ҳолатларда иштирокчилар ўртасида гуруҳлар тузиш ва келишувларга келиш ман этилгандир. Бундай ўйинларни гуруҳсиз (коалициясиз) ўйинлар деб номлаймиз.

Коалициясизлик (гуруҳсизлик) шуни билдирадики, ҳар бир иштирокчи фақат ўз **шахсий ютуғини** катталаштириш мақсадида ҳеч бир бошқа иштирокчисиз мустақил ва алоҳида ҳаракат қилади. Ушбу ўйинларни таҳлил қилишдан асосий мақсад оптималлик қоидаларини танлаш ва улар асосида ўйинчиларнинг самарадор ва оптимал стратегияларини аниқлаш.

Оптималлик қоидалари шундай шартлардан иборатки, самарадор ёки оптимал стратегиялар бу шартларни қаноатлантириши керак бўлади. Оптималлик бу фойдалилик, турғунлик ва самарадорлик, тушунчаларини ўзида акс этирган тушунчадир.

Матрицали ўйинларда оптималлик қоидаси сифатида кафолатланган ютуқ (максимин) қоидаси қабул қилинган эди ва бу қоида ўйинчилар учун мақбул ва турғун бўлган эгар нуқталарни танлашни таклиф этган эди.

1-таъриф. Коалициясиз n шахснинг ўйини деб

$$\Gamma = \{I, P_i, H_i, i \in I\} \tag{1.1}$$

системага айтилади.

Бу ерда $I = \{1,2,...n\}$ – ўйинчилар тўплами,

P_i – i – ўйинчининг соф стратегиялар тўплами,

H_i – i – ўйинчининг ютуқ функцияси.

H_i ютуқ функцияси $X = (x_1, x_2, ...x_n) \in \prod_{i \in I} P_i = P$ ўйин ҳолатларида аниқлангандир.

Коалициясиз ўйин қуйидагича ташкил этилади. Ҳар бир $i \in I$ ўйинчи бошқа ўйинчилардан мустақил ва бир вақтда ўз стратегиясини яширинча танлайди. Натижада $X = (x_1, x_2, ...x_n)$ ўйин ҳолати вужудга келиб $i \in I$ ўйинчи $H_i = (x_1, ...x_n)$ ютуққа эга бўлади. Шу билан ўйин тугатилади, баъзи ҳолларда ўйин бир неча марта такрорланиши мумкин.

Агар P_i, $(i \in I)$ соф стратегиялар тўплами чекли бўлса, у ҳолда бундай ўйин n-шахснинг **чекли коалициясиз** ўйини дейилади. Чекли коалициясиз ўйинда $n = 2$ бўлган ҳол биматрицали ўйиндир. Бундай дейилишига сабаб ўйинчиларнинг ютуқларини икки матрица $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n})$ ёрдамида ифодалаш мумкин бўлади. Матрица элементлари a_{ij} ва b_{ij} мос равишда I ва II ўйинчиларнинг (i, j) ўйин ҳолатидаги ютуқларидир. Биматрицали ўйинларни $\Gamma(A, B)$ деб белгилаймиз.

Баъзи ҳолларда $\Gamma(A, B)$ биматрицали ўйин бир матрица ёрдамида ифодаланади, бу ҳолда ҳар бир (i, j) ўйин холатига (a_{ij}, b_{ij}) ютуқлар жуфтлиги мос қўйилади. Агар $B = -A$ бўлса, у ҳолда биматрицали ўйин матрицали ўйинга айланади.

2. Мувозанат ҳолати ва Нэш I.Nash бўйича оптималлик

Γ ўйинда ихтиёрий $x = (x_1 ... x_n) \in P$ – ўйин ҳолатини олайлик ва фақатгина $i \in I$ ўйинчи ушбу ҳолатда ўз стратегиясини x_i дан ўзгартириб x_i^1 стратегияни танласин, ҳосил бўлган ўйин ҳолатини $(X // x_i^1)$ деб белгилаймиз.

2-таъриф. Ўйин Γ да $X = (x_1, ...x_n)$ ўйин ҳолати i -ўйинчи учун **мақбул ўйин ҳолати** дейилади. Агар

$$H_i(X // x_i^1) \le H_i(X), \qquad x_i^1 \in P_i. \qquad (1.2)$$

Ўйиндаги $i \in I$ ўйинчининг ҳамма мақбул стратегиялар тўплами $F_i(\Gamma)$ деб белгилаймиз.

3-таъриф (Нэш мувозанат ҳолати). Ўйин ҳолати $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ Γ ўйинда Нэш мувозанат ҳолати дейилади, агар

$$X^* \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i(\Gamma). \qquad (1.3)$$

Изоҳ. Нэш ҳолатлари ҳамма иштирокчилар учун мақбул ҳолатлардан ташкил топгандир, яъни

$$H_i(X^*) \geq H_i(X^* // x_i), \quad x_i \in X_i, \qquad i \in I. \qquad (1.4)$$

4-таъриф. Коалициясиз ўйинда ўйинчининг мувозанат стратегияси деб бирор бир Нэш мувозанат ҳолатида қатнашувчи стратегиясига айтилади.

Нэш бўйича оптималлик қоидаси бу шундай мувозанат ҳолатики, бу холатдан бирор бир иштирокчининг оғиши унга фойда келтирмайди.

Коалициясиз ўйиннинг ечимини аниқлаш бу мувозанат ҳолатлари ва мувозанат стратегияларини аниқлаш демакдир. Коалициясиз ўйинда мувозанат ҳолати ҳар бир ўйинчининг оптимал ҳатти-ҳаракатлари натижасидир.

3. Коалициясиз ўйинларда аралаш стратегиялар. Нэшнинг асосий теоремаси

Чекли коалициясиз n- шахснинг ўйинида хар бир иштирокчи чекли соф стратегияларга эгадир. Матрицали ўйинларда бўлгани каби, коалициясиз ўйинларда ҳам соф стратегияларда мувозанат ҳолати мавжуд бўлмаслиги мумкин, шу сабабли соф стратегиялар тўплами аралаш стратегиялар тўпламига кенгайтирилади ва аралаш стратегиялар тўпламида мувозанат ҳолати изланади.

Ихтиёрий чекли коалициясиз ўйин

$$\Gamma = \{I, P_i, H_i, i \in I\} \text{ да}$$

аралаш стратегия тушунчаси қуйидагича аниқланади.

5-таъриф. Коалициясиз ўйин

$$\Gamma = \{I, P_i, H_i, i \in I\}$$

i - ўйинчининг аралаш стратегияси деб

$$X_i = (X_i(y_1), ...X_i(y_{m_i})),$$

векторга айтилади, бу ерда y_j i -ўйинчининг j -соф стратегияси бўлиб,

$$X_i(y_j) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m_i} X_i(y_j) = 1. \qquad (1.5)$$

Бошқача қилиб айтганда X_i - векторнинг $X_i(y_j)$ – компоненти i -ўйинчининг ўзининг j соф стратегиясини қандай эҳтимоллик билан қўллаётганини билдиради.

Ҳар бир i -ўйинчи ўзининг X_i аралаш стратегиясини танласин, яъни i-ўйинчи ўзининг y_i -соф стратегиясини $X_i(y_i)$ эҳтимоллик билан танласин. У ҳолда $x = (x_1, ...x_n)$ ўйин ҳолатининг вужудга келиши эҳтимолини $P(x)$ билан белгилаймиз ва

$$P(x) = X_1(x_1) \cdot X_2(x_2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot X_n(x_n) \qquad (1.6)$$

тенг бўлади.

6-таъриф. Коалициясиз Г ўйинда аралаш стратегиялардаги ўйин ҳолати деб, шундай

$$X(x) = (X_1(x_1), X_2(x_2), \ldots\ldots\ldots X_n(x_n))$$

аралаш стратегиялар векторига айтиладики бу ерда ҳар бир $x = (X_1 \ldots\ldots X_n) \in P^*$ учун (1.6) шарт бажарилади.

Аралаш стратегияларда i- ўйинчи ютуғининг математик кутилмаси (ўртача кутилаётган ютуқ) қуйидагича аниқланади

$$\widetilde{H}_i(X) = \sum_{x \in \widetilde{X}} H_i(x) \cdot X(x) = \sum_{x_1 \in P_1} \ldots\ldots \sum_{x_n \in P_n} H_i(x_1) \times \ldots\ldots \times X_n(x_n). \qquad (1.7)$$

7-таъриф. Коалициясиз ўйинннинг аралаш стратегияларга кенгайтирилгани деб, қуйидаги коалициясиз ўйинга айтилади $\widetilde{\Gamma} = \{I, \widetilde{X}_i, \widetilde{H}_i, i \in I\}$

8-таъриф. $\widetilde{\Gamma}$ коалициясиз ўйинда X^* ўйин холати аралаш стратегиялардаги мувозанат ҳолати дейилади, агар

$$\widetilde{H}_i(X^* \| X_i) \le \widetilde{H}_i(X^*) \qquad i \in I, \qquad X_i \in \widetilde{X}_i. \qquad (1.8)$$

Агар (1.8) шарт баъзи i ўйинчилар учун бажарилса, у ҳолда бу X^* ўйин ҳолати i -ўйинчи учун мақбул ҳолат дейилади.

Теорема (Нэшнинг асосий теоремаси). Ихтиёрий чексиз коалициясиз ўйин Г да аралаш стратегияларда мувозанат ҳолати мавжуд.

4. Парето бўйича оптималлик

Коалициясиз ўйинларда оптималлик мезонлари турлидир. Бунинг сабаби шуки, оптималлик фақатгина Нэш мувозанат ҳолати асосида аниқланмасдан, балки бошқа оптималлик қоидалари асосида ҳам аниқланиши мумкин. Шундай оптималлик қоидаларидан бири Парето оптималлик қоидасидир.

9-таъриф. Коалициясиз ўйин Г да x^0 ўйин ҳолати Парето бўйича оптимал ҳолат дейилади. Агар шундай x ўйин ҳолати мавжуд бўлмасаки, бу ҳолат учун

$$H_i(x^0) \le H_i(x), \qquad i \in I, \text{ ва} \qquad (1.9)$$

бирор бир

$$i_0 \in I \qquad \textit{учун} \quad H_{i_0}(x^0) < H_{i_0}(x). \qquad (1.10)$$

Парето оптималлик қоидасининг маъноси қуйидагидан иборатдир. Бирор бир ўйинчи ютуғини камайтирмасдан туриб, ўйинчилар ўзаро ҳатти-ҳаракатлар орқали ҳар бир ўйинчининг ютуғини оширолмайдилар.

Г ўйинда Парето оптималлик қоидаси: ўйинчилар Парето оптимал ўйин ҳолатларини танлашлари лозим.

5. Нэш ва Парето оптималлик қоидаларининг таҳлили

Коалициясиз ўйинларнинг мақсади шундай шартларни аниқлашки, топилаётган стратегиялар, ўйин ҳолатлари ва ютуқлар, ушбу шартлар аниқлаётган оптималлик мезонини қондирсин. Бундай шартларга фойдалилик, турғунлик ва адолатлик шартлари киради.

Коалициясиз ўйинларда энг табиий оптималлик принципи кафолатланган ютуқ (максимин ёки минимакс) принципидир. Бу принцип эгар нуқталарга олиб келади ва ҳар бир бундай ҳолат мувозанат, фойдали ва турғун ҳолат бўлади.

Умумий коалициясиз ўйинларда ҳар бир ўйинчи учун фойдали ва турғун бўлган ўйин ҳолатлари гуруҳ нуқтаи назаридан бундай бўлмасликлари мумкин.

Қуйидаги мисолларни фикримизнинг далили сифатида келтирамиз. Ушбу биматрицали ўйинларни кўрайлик.

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_1(A,\ B), \qquad A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 \equiv \Gamma_2(A,\ B), \quad A=\begin{pmatrix}1 & 1-\varepsilon\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1-\varepsilon & 0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 \equiv \Gamma_3(A,B), \qquad A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 10 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

бу ерда A I ўйинчи, B II ўйинчи ютуқ матрицалари. Ҳар бир ўйинчи 2 тадан соф стратегияларга эгадир. I ўйинчи стратегиялари α_1 ва α_2, II ўйинчи стратегиялари β_1 ва β_2 бўлсин мос равишда. Агар I ўйинчи α_i ва II ўйинчи β_j соф стратегиясини танласа, (α_i, β_j) ўйин ҳолатида I ўйинчининг ютуғи a_{ij} га ва II ўйинчининг ютуғи b_{ij} га тенг бўлади.

Келтирилган ўйинларда аралаш стратегияларда Нэш мувозанат ҳолатлари қуйидагига тенг бўладилар.

А) $Г_1$ ўйинда: Ушбу ўйинда 3 та мувозанат ҳолати мавжуддир булар (α_1, β_1), (α_2, β_2), ҳолатларда ўйинчилар мос равишда (1,4) ва (4,1) ютуқларга эга бўладилар.

$x^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right)$ ва $y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right)$ аралаш стратегияларда кутилаётган ютуқ

$\left(\frac{32}{25}, \frac{32}{25} \right)$ га тенг бўлади.

В) $Г_2$ ўйинда: Нэш бўйича учта мувозанат ҳолати мавжуддир (α_1, β_2) ва (α_2, β_1) – соф стратегияларда бу ҳолларда ютуқ (1- ε,2) ва (0,0) га тенг бўлади мос равишда ва

$(x^* = y^*) = \left(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon} \right)$ аралаш стратегияларда кутилаётган ютуқ

$\left(1-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, 1-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \right)$ ларга тенг бўлади.

С) $Г_3$ ўйинда (α_2, β_2) Нэш бўйича ягона мувозанат ҳолатидир. Бу ҳолатда ўйин ютуғи (1,1) га тенгдир.

Ушбу Нэш бўйича мувозанат ечимларини топиш қуйида келтирилади.

$Г_3$ ўйин билан батафсирроқ танишайлик.

Агар иккала ўйинчи келишилган ҳолда ўзларининг биринчи соф стратегияларини танласалар, (α_1, β_1) ўйин ҳолати вужудга келади ва бу ҳолатда ўйинчилар (5;5) ютуққа эга бўладилар.

Ушбу ҳолат Нэш турғун мувозанат ҳолати эмас, аммо иккала ўйинчи учун фойдали. Ушбу қарама-қаршилик турғун ҳолат ва самарадорлик орасидаги қарама-қаршилик мавжудлигини кўрсатади. Нэш бўйича мувозанат ҳолат бўлмаган (α_1, β_1) ўйин ҳолати Парето бўйича оптималдир. Иккинчи томондан (α_2, β_2) Нэш мувозанат ҳолати Парето бўйича оптимал эмасдир.

Коалициясиз ўйин $Г_2$ да(α_2, β_1) ва (α_1, β_2) ҳолатлар Парето ва Нэш бўйича оптималлардир, аммо (α_1, β_1) ўйин ҳолати Парето бўйича оптимал, лекин Нэш бўйича оптимал эмасдир. Аралаш мувозанат ҳолати (x^*, y^*) Парето бўйича оптимал бўлмаган ҳолатдир. Коалициясиз ўйин $Г_1$ да(α_1, β_2) ва(α_2, β_1) ўйин ҳолатлари Нэш ва Парето бўйича оптималлик шартларини қаноатлантирадилар.

2-§. Икки ўйинчининг коалициясиз ўйинлари

1. Умумий маълумотлар

Ихтиёрий чекли коалициясиз ўйинларда мувозанат ҳолатларини аниқлаш катта ўлчамли, маълумотларга турлича шартлар қўйилган тенгсизликларни ечишга олиб келади. Математика нуқтаи назаридан бу етарлича мураккаб ва катта хажмдаги ҳисоблаш ишларини амалга оширишни талаб қилади, фақатгина баъзи коалициясиз ўйинлар содда тасвирланади ва улар учун мувозанат ҳолатларини аниқлаш мумкин.

Шундай ўйин турларидан бири икки шахснинг чекли коалициясиз ўйинларидир. Аниқлик учун I ўйинчи $i=\overline{1,m}$ m-та соф стратегияга ва II ўйинчи $j=\overline{1,n}$ n-та соф стратегияга эга бўлишсин ва (i, j)-ўйин ҳолатида I ўйинчининг ютуғи a_{ij} ва II ўйинчининг ютуғи b_{ij} миқдорларга тенг бўлсин.

Бу ҳолда ўйинчиларнинг ютуқларини

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & - & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & - & - & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & - & - & - & b_{1n} \\ b_{21} & - & - & - & b_{1n} \\ - & - & - & - & - \\ b_{m1} & & - & - & b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицалар ёрдамида аниқлаш мумкин бўлиб, бундай ўйинлар биматрицали (қўш матрицали) ўйинлар $\Gamma(A,B)$ деб номланади.

Биматрицали $\Gamma(A,B)$ ўйинда ўйинчиларнинг аралаш стратегиялари қуйидагича аниқланади.

$$X=(x_1,x_2,...,x_m), \quad x_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,m}), \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$Y=(y_1,y_2,...,y_{n_m}), \quad y_j \geq 0 \quad (i=\overline{1,n}), \quad \sum_{j=1}^{m} y_i = 1.$$

Аралаш стратегияларда аниқланган ютуқ функциялари $H_1(X,Y)$ ва $H_1(X,Y)$, қуйидаги кўринишда аниқланади

$$H_1(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_iy_j,$$

$$H_2(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_iy_j, \qquad (2.1)$$

ва мос равишда I ва II ўйинчиларнинг ўртача ютуқларини билдиради.

Вектор-матрицалардан фойдаланилса, (2.1) формула қуйидагича ёзилади.

$H_1(X,Y)=XAY^T$, $H_2(X,Y)=XBY^T$ бу ерда T-транспонирлаш белгиси.

Биматрицали $\Gamma(A,B)$ ўйинда қуйидагилар бажарилса, (X,Y)-аралаш стратегиялар мувозанат ҳолати бўлади

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le XAY^T, \quad i=\overline{1,m} \text{ ва}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_j \le XBY^T, \quad j=\overline{1,n}. \qquad (2.2)$$

Агар $B=-A$ (яъни $A+И=0$) бўлса (2.2) шарт $\Gamma(A)$=$\Gamma(A,-A)$ матрицали ўйинда эгар нуқтани беради.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le XAY^T, \quad i=\overline{1,m}, \qquad (2.3)$$

ва II ўйинчи учун

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}y_i \le XBY^T, \quad j=\overline{1,n} \qquad (2.4)$$

бўлса, $\Gamma(A,B)$ ўйинда (X,Y) ўйин ҳолати I ўйинчи учун мақбул стратегия бўлади.

Содда ечиладиган (2×2) биматрицали ўйинларни кўрайлик.

2. (2×2) биматрицали ўйинларни ечиш

$\Gamma(A,B)$ биматрицали ўйин қуйидаги ютуқ матрицалари

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

ва $X=(\xi,\ 1-\xi)$, $Y=(\eta,\ 1-\eta)$ – аралаш стратегиялари ёрдамида берилган бўлсин.

Ушбу ўйинда X ва Y аралаш бир қийматли стратегиялар ξ ва η миқдор орқали аниқланади. Шу туфайли X ва Y аралаш стратегияларни ξ ва η миқдорлар ёрдамида аниқлаймиз. Хар бир (X,Y) аралаш стратегияни текисликдаги бирлик квадратга тегишли нуқта сифатида тасвирлаш мумкин. Ўйиндаги соф стратегиялар ушбу бирлик квадратнинг бурчак нуқталарини беради (улар тўртта бўлади).

Биматрицали ўйинларни ечиш худди матрицали ўйинларни ечиш каби амалга оширилади: аввало ҳар бир ўйинчи учун мақбул стратегиялар тўпламини аниқлаймиз, сўнгра иккала ўйинчи учун мақбул бўлган стратегиялар тўплами, яъни уларнинг кесишмасини аниқлаймиз. Ушбу тўпламларнинг кесишмаси биматрицали ўйинда мувозанат ҳолатлар тўпламини беради.

Агар қуйидаги шартлар бажарилса, (X, Y) -аралаш стратегия I ўйинчи учун мақбул стратегия бўлади.

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j, \qquad y_1 + y_2 = 1, \qquad y_1, y_2 \ge 0,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \le \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_iy_j, \qquad x_1 + x_2 = 1, \qquad x_1, x_2 \ge 0,$$

Ушбу тенгсизликлар системасини тўғридан-тўғри ечиш анча мушкул. Шу туфайли ўзга мулохазалар асосида ечимни аниқлаймиз.

Келтирилган тенгсизлик системасининг ечими В-ютуқ матрицасига боғлиқ эмас, шу туфайли $\Gamma(A,B)$ биматрицали ўйинда I ўйинчининг мақбул стратегиялар тўплами A-матрицали $\Gamma(A)$ ўйиндаги I ўйинчининг мақбул стратегиялари билан мос тушади. Матрицали ўйинларда аниқланган натижалар асосида I ўйинчининг мақбул стратегиялар тўплами $F_I(\Gamma(A))$ учта синиқ чизиқ ёки бирлик квадратнинг барча нуқталаридан иборат бўлади.

I ўйинчининг мақбул стратегияларини аниқлаш алгоритми:

Қуйидаги

$$C = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21} \qquad \text{ва} \qquad \alpha = a_{22} - a_{12}$$

миқдорларни аниқлаймиз ва улар орасидаги муносабатлар асосида (ξ, η) нуқталарни келтирилган қоида асосида аниқлаймиз.

1) $C \ne 0$ ва α ихтиёрий сон у ҳолда

$$S_1 = \left\{ (\xi,\eta): \begin{array}{r} \xi = 1 \quad \text{агарда} \quad \eta C > \alpha \quad , \\ \xi = 0 \quad \text{агарда} \quad \eta C < \alpha \quad , \\ \xi \in [0,1] \quad \text{агарда} \quad \eta C = \alpha \, . \end{array} \right\}.$$

2) $C = 0$ ва $\alpha \ne 0$ у ҳолда

$$S_2 = \left\{ (\xi,\eta): \begin{array}{r} \xi = 1 \quad \text{агарда} \quad a_{22} > a_{12}\, , \\ \xi = 0 \quad \text{агарда} \quad a_{22} < a_{12}\, , \\ 0 \le \eta \le 1. \end{array} \right\}.$$

3) $C = 0, \alpha = 0$:

$$S_3 = \left\{ (\xi,\eta): \begin{array}{l} \xi \in [0,1] \\ \eta \in [0,1] \end{array} \right\},$$

яъни S_3 – бирлик квадратни беради.

Ушбу усул билан аниқланган ҳар бир $S_i, i = \overline{1,3}$, $\Gamma(A,B)$ ўйиндаги I ўйинчининг мақбул стратегиялари тўпламини беради, шу туфайли

$$F_1(\Gamma)=\begin{cases} S_1, & \text{агар}\quad C\neq 0,\\ S_2, & \text{агар}\quad C=0,\alpha\neq 0,\\ S_3, & \text{агар}\quad C=0,\alpha=0.\end{cases}$$

Шунга ўхшаш фикрлар асосида II ўйинчининг мақбул стратегиялар тўпламини аниқлаш мумкин бўлади.

$$F_2(\Gamma)=\begin{cases} Q_1, & \text{агар}\quad D\neq 0,\\ Q_2, & \text{агар}\quad D=0,\beta\neq 0,\\ Q_3, & \text{агар}\quad D=0,\beta=0.\end{cases}$$

бу ерда $D=b_{11}+b_{22}-b_{21}-b_{12}$, **ва** $\beta=b_{22}-b_{21}$,

$$Q_1=\left\{(\xi,\eta):\begin{array}{r} \eta=1\quad \text{учун}\quad \xi D\geq\beta,\quad D\neq 0\\ \eta=0\quad \text{учун}\quad \xi D\leq\beta,\quad D\neq 0\\ \eta\in[0,1]\quad \text{учун}\quad \xi D=\beta, D\neq 0\end{array}\right\},$$

$$Q_2=\left\{(\xi,\eta):\begin{array}{lllll} \eta=1, & \text{агар}\quad b_{22}>b_{21}, & D=0, & \beta\neq 0, & 0\leq\xi\leq 1,\\ \eta=0, & \text{агар}\quad b_{22}<b_{21}, & D=0, & \beta\neq 0, & 0\leq\xi\leq 1.\end{array}\right\},$$

$$Q_3=\{(\xi,\eta):0\leq\xi\leq 1\ ,\qquad 0\leq\eta\leq 1,\qquad D=\beta=0\}.$$

Геометрик нуқтаи назардан $F_2(\Gamma(A,B))$ уч бўлакли синиқ чизиқдан ёки бирлик квадратдан хам иборат бўлади.

У холда $\Gamma(A,B)$ биматрицали ўйинда мақбул ҳолатлар тўплами

$F(\Gamma(A,B))=F_1(\Gamma(A,B))\cap F_2(\Gamma(A,B))$ **бўлади.**

Кўрилган ҳоллардан бири $C\neq 0$ ва $D\neq 0$ ҳолда мувозанат ҳолати стратегияларни (ξ^*,η^*) қуйидаги формулалар ёрдамида аниқлаш мумкин

$$\xi^*=\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}+b_{22}-b_{12}-b_{21}}\equiv\frac{\beta}{D},$$

$$\eta^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\equiv\frac{\alpha}{C}.$$

3-мисол

$\Gamma(A,B)$ биматрицали ўйинда ютуқ матрицалари қуйидагича берилган бўлсин

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

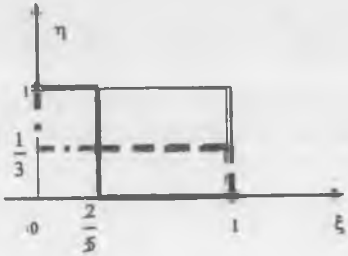
Ушбу биматрицали ўйинда мувозанат ҳолатини аниқлайлик. Бунинг учун қуйидаги миқдорларни ҳисоблаймиз.

$$C=1+1-3-2=-3\neq 0, \qquad \alpha=1-2=-1,$$

Ушбу ҳолда $C\neq 0$ бўлгани учун I ўйинчининг мақбул стратегиялар тўплами қуйидагича аниқланади.

$$F_1(\Gamma(A,B))=S_1=\left\{(\xi,\eta):\begin{array}{ll}\xi=1, \ \text{агар} & \eta\leq\frac{1}{3},\\ \xi=0, \ \text{агар} & \eta\geq\frac{1}{3},\\ 0\leq\xi\leq 1, & \eta=\frac{1}{3}.\end{array}\right\}.$$

Кўриниб турибдики $F_1(\Gamma(A,B))$ тўплам учта синиқ чизиқ бўлагидан иборат бўлмоқда (2.1-чизма)



2.1-чизма

▬ $F_2(\Gamma)$ тўплам нуқталари

▬ ▪ ▬ ▪ $F_1(\Gamma)$ тўплам нуқталари

● мувозанат ҳолат нуқталари

Ушбу ўйинда II ўйинчининг мақбул стратегиялар тўплами ҳам шунга ўхшаш қурилади.

$$F_2(\Gamma(A,B))=Q_1, \quad \text{чунки} \quad D=0+2-3-4=-5\neq 0$$

$$\beta=2-4=-2\neq 0.$$

$$Q_1 = \left\{ \begin{array}{r} \eta = 1, \quad агар \quad \xi \le \frac{2}{5}, \\ (\xi,\eta) : \eta = 0, \quad агар \quad \xi \ge \frac{2}{5}, \\ 0 \le \eta \le 1, \qquad \xi = \frac{2}{5} \end{array} \right\}.$$

$F_1(\Gamma(A,B))$ ва $F_2(\Gamma(A,B))$ тўпламларининг кесишмаси

$$F(\Gamma(A,B)) = F_1(\Gamma(A,B)) \cap F_2(\Gamma(A,B))$$

учта мувозанат ҳоллатларидан иборат бўлади, яъни

$$F(\Gamma(A_1,B)) = \left\{ (0,1),(1,0),(\frac{2}{5},\frac{1}{3}) \right\}.$$

Ушбу $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right)$ мувозанат ҳолатидаги I ўйинчининг ютуғи

$$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$$

га тенг бўлади.

$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right)$ мувозанат ҳолатини кўрайлик.

Бу ҳолатда $X^* = \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ ва $Y^* = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ аралаш стратегияларга мос келади. Бу аралаш стратегияларда ўйинчиларнинг ютуқлари мос равишда

$$\Pi_1(X^*,Y^*) = X_* A Y_*^T = \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 1\frac{2}{3},$$

ва

$$H_2(X^*,Y^*) = X_* B Y_*^T = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 2,4$$

тенг бўлади.

Иккинчи томондан (0,1) ҳолатида $X^* = (0,1)$ ва $Y^* = (0,1)$ бўлиб ўйин қийматлари

$H_1(X^*, Y^*) = 3$ ва $H_2(X^*, Y^*) = 4$ га тенгдир.

Кўриниб турибдики ушбу уччала мувозанат ҳолатлари ичида (0,1) мувозанат ҳолати иккала ўйинчи учун ҳам фойдалидир. Аралаш стратегиялар такрорланувчи ўйинларда қўлланилади ва бунда ўйинчилар ўз соф стратегияларини мусбат эҳтимолликлар билан қабул қиладилар.

3-§. *Иқтисодда коалициясиз ўйинларни қўллаш*

Иқтисодиётда, техника ва ҳарбий ҳатти-ҳаракатлардаги кўпгина масалаларнинг математик моделлари ўйинлар томонидан самарали таҳлил қилиниши мумкин.

Баъзи бир мисоллар билан танишайлик

1-мисол (Лойиҳа танлови)

Лойиҳа танловида 2 та фирма иштирок этмоқда. Ушбу лойиҳа бўйича умумий ютуқ 10 бирликни ташкил этсин. Ҳар бир фирма ушбу танловда иштирок этиши ҳақида фақат ариза (A) (харажат 1 бирлик) ёки ушбу танлов учун ишлаб чиқилган дастур (D) (харажат 3 бирлик) билан қатнашиши мумкин. Танлов қоидалари шундайки, агар иккала фирма бир хилда ҳаракат турини танласа, проектни бажаришга иккала фирма жалб этилади ва фойда иккала фирма ўртасида тенг бўлинади. Агар фирмалар турли хил ҳаракат турини танлаган бўлсалар, танлов ғолиби сифатида лойиҳа дастурини таклиф қилган фирма ғолиб деб топилади.

Ушбу зиддиятли ҳолатни биматрицали ўйин тарзида ифода қиламиз. Ўйинчилар сифатида I ва II фирма қабул қилинади.

Ҳар бир ўйинчининг қуйидаги стратегиялари мавжуддир

A -фақатгина ариза топшириш

D -лойиҳа дастурини топшириш.

Ўйин ҳолати (A,A) да ўйинчиларнинг ютуқлари $\frac{10}{2} - 1 = 4$ га ва (D,D) ўйин ҳолатида $\frac{10}{2} - 3 = 2$ бирликка тенг бўлади. Агар фирмалар турли ҳаракат йўлини танласалар, масалан (A,D) ва (D,A) ўйин ҳолатларида I ўйинчининг ютуқлари 10-3=7 ёки 0-1=-1 га тенг бўлади. Ушбу ўйинда A ва B ютуқ матрицалари қуйидагича тенг бўлади.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ушбу ўйинда ягона Нэш мувозанат ҳолати мавжуд бўлиб, бу (D,D) ўйин ҳолатидир, бу ҳолатда хар бир ўйинчи 2 бирлик ютуққа эга бўлади. Агар ўйинчилар (D,D) ўйин ҳолатида бўлсалар, ҳеч бир ўйинчига бу ҳолатдан чиқиш фойда келтирмайди, чунки бу ҳолатдан чиққан ўйинчи, иккинчи ўйинчи ўз ҳолатини ўзгартирмаса -1 бирлик ютуққа эга бўлиб қолади. Мабодо иккала ўйинчи келишган ҳолда (A,A) ўйин ҳолатини танласалар, бу ҳолда уларнинг ютуқлари (4, 4) тенг бўлади, аммо бу ҳолат турғун эмас, чунки бирор бир ўйинчи ўз холатини ўзгартирса, иккинчи иштирокчи ютқазиб қўйиши хавфи бор. Ушбу хавф ҳар бир иштирокчини (D,D) мувозанат ҳолатидан четлашмаслигини таъминлайди ва ютуқнинг 4 бирликдан 2 бирликача камайтиради. Ушбу келтирилган мисол самарадорлик ва турғунлик орасида қарама-қаршилик мавжудлигини кўрсатади.

Ҳақиқатан ҳам (D,D) ўйин ҳолати турғун, амммо самарадор эмасдир, (A,A) ўйин ҳолати иккаласи учун самарадордир, бироқ турғун эмас. Шу туфайли иккала ўйинчи биргаликда (A,A) ҳолатини танлаш ҳақида келишилган ҳолида ҳам, ушбу келишувнинг бузилиш хавфи доимо мавжуддир, чунки хар бир ўйинчи учун бу келишувдан бир томонлама чиқиш фойдалидир.

2-мисол (Маҳсулот бозори учун кураш)

Фирма A бир туркум маҳсулотни мавжуд икки бозорнинг бирида сотишни кўзламоқда. Ушбу иккала бозор A-фирмадан бирмунча йирик бўлган B фирма томонидан назорат қилинмоқда. Шу туфайли фирма A маркетинг изланишлари учун маълум миқдорда сарф-харажатни амалга оширмоқда. Агар фирма B фирма A қайси бозорда ўз маҳсулотини сотишни кўзлаётганини билиб қолса, у қарши чоралар кўради ва бунинг натижасида фирма A ютқазади. Агар B фирма қарши чораларни кўрмаса, A фирма ютуққа эга бўлади. Фараз қилайликки фирма A учун I бозорда ғалабага эришиш, II бозорда ғалабага эришишдан муҳимроқ, аммо I бозор учун кураш ундан кўпроқ сарф-харажатни талаб этади. Мисол тариқасида қуйидаги фаразларни қабул қилайлик фирма A учун I бозордаги ғалабаси 2-бозордаги ғалабасидан 2 маротаба муҳимроқ ва 1 бозордаги унинг мағлубияти уни касодга олиб келади.

Ушбу зиддиятли ҳолатнинг математик моделни келтирамиз. Фирма A -I ўйинчи, фирма B-II ўйинчи бўлсин. I ўйинчи стратегиялари:

1) 1-бозорда маҳсулот сотиш;

2) 2-бозорда маҳсулот сотиш.

II ўйинчи стратегиялари:

1) 1 бозорда A фирма га қарши чораларни қўлламоқ;

2) 2 бозорда A фирмага нисбатан қарши чораларни қўлламоқ.

I ўйинчи учун 1 бозордаги ютуқ 6 бирлик ва мағлубияти 10 бирлик билан 2-бозордаги ютуқ 3 бирлик ва мағлубияти -1 билан ўлчансин.

II ўйинчи учун унинг ютуқлари 5 ва 1 бирликни мағлубиятлари -2 ва -1 бирликларни ташкил этсин. Натижада қуйидаги биматрицали ўйин Г(A,В) ҳосил қиламиз

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ушбу биматрицали ўйинни ечиш натижасида ягона мувозанат ҳолати (x^*,y^*) ни аниқлаймиз. Бу ерда $x^*=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)$ ва $y^*=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right)$ ларга тенгдир.

Ушбу ўйинда мувозанат ҳолати аралаш стратегияларда мавжуддир. Кутилаётган ютуқ

$$v(A)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}x_i^*y_j^*=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix}=\frac{7}{15},$$

$$v(B)=x^*By^*=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}$$ га тенг бўлади.

4-§. Мустақил ишлар учун топшириқлар

1-топшириқ. Биматрицали Г(A,B) ўйин учун мувозанат ҳолати ва ўйин иштирокчиларнинг ютуқлари аниқлансин, агар:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Жавоб: а) $C_1=(0,0)$, $C_2=(1,1)$, $C_3=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{3}\right)$ ўйиннинг мувозанат ҳолати;

б) ўйинчиларнинг мувозанат стратегиялари:

$X_1^* = (0,1)$, $X_2^* = (1,0)$, $X_3^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$ – биринчи ўйинчи учун,

$Y_1^* = (0,1)$, $Y_2^* = (1,0)$, $Y_3^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – иккинчи ўйинчи учун,

C_1 мувозанат ҳолати учун ютуқ (4,3)га тенг,
C_2 мувозанат ҳолати учун ютуқ (4,2)га тенг,

C_3 мувозанат ҳолати учун ютуқ $\left(2\frac{14}{15},\ 1\frac{5}{9}\right)$га тенг.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$,

а) $C_1 = (0,0)$, $C_2 = (1,0)$, $C_3 = \left(\frac{9}{17}, \frac{5}{7}\right)$,

б) $X_1^* = (0,1)$, $X_2^* = (1,0)$, $X_3^* = \left(\frac{9}{17}, \frac{8}{17}\right)$,

$Y^* = (0,1)$, $Y_2^* = (1,0)$, $Y_3^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Кўрсатма: ушбу (3×3) биматрицали ўйинни ечиш учун устунлик қоидасидан фойдаланиб, ўйинни (2×2) ҳолга келтиринг.

4) $A = \begin{pmatrix} -20 & 2n \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} m+6 & -4 \\ -1 & m \end{pmatrix}$,
$m, n = 1,2.....$

VIII БОБ

КООПЕРАТИВ ЎЙИНЛАР

1-§. Кириш. Асосий тушунчалар

Коалициясиз ўйинларда бирор ўйинчининг мувозанат ҳолатидан оғиши унинг ютуқ ҳолати ёмонлашувига сабаб бўлишини кўрдик. Бироқ бир неча ўйинчи маълум мақсадда келишилган ҳолда бирлашиб мувозанат ҳолатидан чиқса, улар ҳар бирининг ютуғи мувозанат ҳолатидаги ютуғидан юқори бўлиши мумкин.

Ўйинчиларнинг гуруҳини коалиция деб атаймиз. Ўйинчиларнинг ўзаро гуруҳ ташкил этиб, биргаликда ҳаракат қила олиш имконияти коалициясиз ўйинга нисбатан ўйинчиларнинг имкониятлар доирасини кенгайтиради.

Ушбу фикримизнинг тасдиғи сифатида қуйидаги биматрицали ўйинни кўрайлик

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Ушбу биматрицали ўйинда ягона мувозанат ҳолати мавжуд бўлиб, бу ҳолатда I ва II ўйинчилар 2- соф стратегияларини танлайдилар. Натижада ўйинчиларнинг ҳар бири 2 бирлик ютуққа эга бўладилар. Агарда I ва II ўйинчилар коалицияга бирлашсалар ва ўзаро келишиб (1;1) ҳолатини, яъни 1-соф стратегияларини танласалар, у ҳолда ҳар бир ўйинчининг ютуғи 5 бирликка тенг бўлади. Бироқ (1;1) ўйин ҳолати келишув асосида амалга оширилиши ва мувозанат ҳолатига нисбатан иккала ўйинчи учун манфатли бўлишига қарамасдан, бу ҳолат турғун ҳолат эмасдир, чунки ҳар бир иштирокчи келишув шартини бузиб, ўз ютуғини ошириш имкониятига эга. Шу туфайли ўйинчиларнинг ўз ютуғини катталаштириш иштиёқи ўйин ҳолатининг турғунлиги тушунчаси билан ўзаро зиддият туғдиради.

Коалицион ўйинларда мувозанат ҳолатларни таҳлил қилиш ўрнига ўйиннинг характеристик функциялари ва ютуқ тақсимотини ўрганиш қулайдир. Буни батафсилроқ тушунтирайлик.

Дейлик қуйидаги коалициясиз $\Gamma = \langle I, P_i, H_i, i \in I \rangle$ ўйин берилган бўлсин, бу ерда $I = \{1,2,.....n\}$ ўйинчилар, P_i i - ўйинчининг стратегиялар тўплами, H_i i - ўйинчининг ютуқ функцияси.

Фараз қилайликки бир гуруҳ ўйинчилар таъминланган энг катта ютуққа эга бўлиши учун бирор бир гуруҳга бирлашсинлар. Ўйинчиларнинг бирлашишидан ҳосил бўлган $K \in I$ гуруҳни янги бир ўйинчи деб қараш мумкин бўлади. Ўйинчиларнинг бирор бир K гуруҳга бирлашиши шундан далолат берадики, ушбу бирлашиш натижасида қабул қилинадиган ўйин ҳолати ҳар бири алоҳида ўйнаган ҳолдаги кафолатланган ютуқдан кам бўлмаган ютуқни таъминлайди. Ушбу мақсадга эришишда K гуруҳ $I \setminus K$ ўйинчиларнинг гуруҳи қаршилик кўрсатишлари мумкин. Шу мақсадда $I \setminus K$ гуруҳдаги ўйинчиларни ҳам ягона бир ўйинчи сифатида қараш мумкин.

Демак бошланғич ўйин ўрнига бутун ўйинчилар тўплами икки гуруҳга ажралиб ўйнаётган ўйинни, яъни икки ўйинчининг ўйинини таҳлил қилиши мумкин бўлади. Бошланғич ўйинчиларнинг гуруҳга $K \subseteq N$ учун ўйнаётган ўйинчини I ўйинчи ва $I \setminus K$ гуруҳ ўйинчилар учун ўйнаётган ўйинчини II ўйинчи деб белгилайлик. Ушбу I ва II ўйинчиларнинг стратегиялари сифатида мос гуруҳга тегишли ўйинчиларнинг барча жоиз стратегияларининг турли хил комбинациялари бўлиши мумкин.

Демак коалициясиз ўйин Г ва гуруҳ K учун шундай

$$\Gamma_K = \{P_K, P_{I|K}, H_K\} \tag{1.2}$$

ўйин мос қўйилиши мумкинки, бу ерда

$$H_K(x) = \sum_{i \in K} H_i(x) \qquad K - \text{гуруҳ ютуқ функцияси,}$$

$$X \in X^1 \times X^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x\, X^n \text{ - ўйин ҳолати.}$$

Ушбу қарама-қарши (1.2) ўйинда K-гуруҳ ўзи учун кафолатланган ютуқ $v(K)$ га эга бўлади ва ушбу ютуқ фақатгина гуруҳ K га боғлиқдир

Ўйин қиймати $v(K)$ ихтиёрий гуруҳ $K \subset I$ учун аниқланган бўлиб, фақатгина $v(\emptyset) = 0$ шартни қаноатлантирса кифоя.

1-таъриф. Кооператив ўйин деб $\{I, v\}$ жуфтликка айтилади.

Бу ерда $I = \{1,2,\ldots..n\}$ - ўйин иштирокчилари ва $v : S \to R^1, \quad S \subset I$, ўйиннинг характеристик функцияси дейилади.

Г кооператив ўйиннинг характеристик функцияси асосида турли хил коалицияларнинг ҳатти-ҳаракатларини таҳлил қилиш мумкин. Ушбу таҳлил асосида берилган кооператив ўйиннинг оптимал ечимларини аниқлаш мумкин бўлади.

Характеристик функциянинг баъзи хоссалари билан танишайлик. Характеристик функция ихтиёрий $S \subseteq I$ коалиция учун аниқлангандир, яъни $v : R^{|I|} \to R^1$

Агар S ва T гуруҳлар учун $S, T \subset I$ ва $S \cap T = \emptyset$ бўлиб

1) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ v-супераддитивлик хоссасига

эга дейилади;

2) $\nu(S \cup T) = \nu(S) + \nu(T)$ ν аддитивлик хоссасига эга

дейилади; (1.3)

3) $\nu(S \cup T) \le \nu(S) + \nu(T)$ ν субаддитивлик хоссасига

эга дейилади.

Супераддитивлик хоссаси ўйинчиларнинг ўзаро бирлашуви, $S \cup T$ гуруҳни ташкил этиш S ва T гуруҳлар учун фойдали эканлигини кўрсатади. Юқорида келтирилган (1.3) хоссадаги супераддитивлик хоссаси «бирлашиш самарадорлиги хоссаси» дейилади.

Математик индукция усули билан ўзаро кесишувчи S_i тўпламлар учун

$\sum_{i=1}^{K} \nu(S_i) \le \nu(\bigcup_{i=1}^{K} S_i)$ эканлиги кўрсатиш мумкин, ушбу тенгсизликнинг хусусий ҳоли сифатида қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз

$$\sum_{i \in I} \nu(i) \le \nu(I), \tag{1.4}$$

бу ерда $\nu(i)$ i - ўйинчининг шахсий ютуғи.

$$\sum_{i \in I} \nu(i) < \nu(I) \tag{1.5}$$

шарт бажарилса,

$$\{I, \nu\}$$

кооператив ўйин муҳим дейилади. Акс ҳолда, яъни $\sum_{i \in I} \nu(i) = \nu(I)$ бўлса, ўйин аддитив дейилади.

Кооператив ўйинда қатъий супераддитивлик хоссаси ўйинчиларнинг ягона бош коалицияга бирлашиши мақсадга мувофиқ эканлигини кўрсатади.

3-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса,

$\{I, \nu\}$ кооператив ўйинда $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in R^n$ вектор ютуқ тақсимоти дейилади:

$$x_i \ge \nu(i), \quad i \in I, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = \nu(I). \tag{1.7}$$

Бу ерда x_i катталик i -ўйинчи томонидан бирор тақсимот натижасида олинган $\nu(I)$ ютуқнинг қисми.

Келтирилган (1.6) тенгсизлик шахсий рационаллик, (1.7) тенглик бўлса, коллектив рационаллик шарти дейилади.

Келгусида бутун ютуқ тақсимотлари тўпламини H деб ва ҳар бир K гуруҳнинг умумий ютуғини $X(K)=\sum_{i\in K} x_i$ деб белгилаймиз.

Кооператив ўйинларда ўйин натижаси сифатида ютуқ тақсимоти қабул қилингандир. Шу туфайли кооператив ўйинларда ўйин ҳолатлари эмас, балки ютуқ тақсимотлари турли хил оптималлик принциплари асосида ўзаро таққосланади.

4-тариф. Қуйидаги $\{I, v, H\}$ учлик классик кооператив ўйин дейилади (ККЎ).

Турли иккита ютуқ тақисимотларини солиштириш учун устунлик муносабатини киритамиз.

5-таъриф. Агар

$$x_i > y_i \quad i\in S \text{ ва } x(S)=\sum_{i\in S} x_i \le v(S), \qquad (1.8)$$

шартлар бажарилса, $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ ютуқ тақсимоти $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ тақсимотдан S гуруҳ бўйича устунликка эга дейилади ва $x \underset{S}{\succ} y\ (x\, dom_S\, y)$ каби белгиланади. Келгусида $x \underset{S}{\succ} y$ билан биргаликда $x \succ y$ муносабатдан ҳам фойдаланамиз.

Ушбу (1.8) шарт S гуруҳ ўз гуруҳидаги ҳар ўйинчига x_i миқдор ютуқни ҳақиқатан ҳам таъминлай олишини кўрсатади.

6-таъриф. Агар $\Gamma_1=\{I, v_1\}$ ва $\Gamma_2=\{I, v_2\}$ кооператив ўйинлар учун шундай $K_0>0$ ва $C_1, C_2, ...C_n$ сонлари мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $S\subset I$ гуруҳ учун

$v_2(S)=K_0 v_1(S)+\sum_{i\in S} C_i$ тенглик ўринли бўлса, Γ_1 ва Γ_2 кооператив ўйинлар эквивалент ўйннлар дейилади.

7-таъриф. Агар $\Gamma=\{I, v\}$ кооператив ўйинда $v(i)=0$, $i\in I$ ва $v(I)=1$ бўлса, Г кооператив ўйин (0,1) ҳолга келтирилган ўйин дейилади.

1-теорема. Ҳар қандай муҳим ўйин учун, унга эквивалент бўлган (0,1) келтирилган ҳолдаги ўйин мавжуддир.

Исботи: ихтиёрий $\{I, v\}$ кооператив ўйин учун, унга эквивалент (0,1) келтирилган кооператив ўйин $\{I, v^1\}$ мавжудлигини кўрсатсак теорема 1 исботланади.

Исботлаш учун K_0 ва $C_1, C_2, ..., C_m$ миқдорларни танлай олишимиз мумкинлиги ва ҳосил қилинган v^1 ўйин учун

$$v^1(i)=0, \qquad i\in I \qquad ва$$

$$v^1(I)=1$$

эканлигини кўрсатишимиз зарур. Кооператив ўйин v қатъий супераддитив эканлигидан қуйидагиларни ҳосил қиламиз

$$K_0 = \frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} > 0,$$

$$C_i = \frac{-v(i)}{v(I) - \sum_{i \in i} v(i)}, \qquad i \in I,$$

$$v^1(S) = K_0 \cdot v(S) + \sum_{i \in S} C_i, \qquad i \in I.$$

Ушбу янги қурилган кооператив ўйин v^1 учун қуйидаги шартлар бажарилади:

$$v^1(i) = K_0 \cdot v(i) + C_i = \frac{1}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} \cdot v(i) - \frac{v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} = 0,$$

$$v^1(I) = K_0 \cdot v(I) + \sum_{i \in I} C_i = \frac{v(I)}{v(I) - \sum_{i \in I} (i)} - \sum_{i \in I} \frac{v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} = \frac{v(I) - \sum v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)} = 1.$$

Теорема исботланди.

Теорема 1га асосан ҳамма қатъий супераддитив ўйинларни ўрганиш ўрнига (0,1) кетирилган ўйинларни ўрганиш кифоя. (0,1) келтирилган ўйинларни текшириш кўп жиҳатдан қулайликларга эгадир. Иҳтиёрий қатъий супераддитив ўйин учун унинг келтирилган (0,1) кўринишдаги ўйин қуйидагича аниқланади

$$v^1(S) = \frac{v(S) - \sum_{i \in S} v(i)}{v(I) - \sum_{i \in I} v(i)}.$$

Изоҳ. Келтирилган ўйинларда ўйин ютуғи тақсимоти (0,1) $x = (x_1, x_2, \ldots.., x_n)$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради,

$$x_i \geq 0, \qquad i \in I \quad \text{ва} \quad \sum_{i \in I} x_i = 1,$$

яъни ютуқ тақсимотлари T тўплами (n-1) ўлчамли симплексни ташкил этади. Ушбу симплекснинг учлари қуйидаги

$$\gamma_n = (0,\ \ 0,\ \ 1, \ldots\ldots, 0) = \ell^i, \qquad i \in I.$$

бирлик векторлар бўлади.

2-§. Кооператив ўйинларда оптималлик мезонлари ва ўйин ечими

Юқорида айтиб ўтилганидек, кооператив ўйинларда ўйин ҳолатлари эмас, балки умумий ютуқ тақсимотини солиштириш асосида ўйинчилар ўз қарорларини қабул қиладилар. Ушбу қарорларни қабул қилиш оптималлик мезонлари асосида амалга оширилади. Оптималлик мезони ютуқ тақсимоти «энг яхши» тақсимотми ва у ягона оптимал тақсимотми деган саволларга жавоб бериши керак.

Оптимал ечимларни қуриш усулларидан бири ихтиёрий берилган икки ютуқ тақсимотидан афзаллини ажратиб олишдир. Устунлик (афзаллик) хоссаси (6-таъриф) икки ютуқдан афзалини ажратиб берадиган усуллардан биридир. Ушбу хосса асосида икки турдаги оптимал С-ядро ва N-M ечимлар хосил қилинади.

Иккинчи усул ютуқ тақсимоти учун оптималлик аксиомаларини қуришдан иборатдир. Ушбу усулга Шепли вектори ёки «адолатли тақсимот» қоидасини мисол сифатида келтириш мумкин.

1. С-ядро

9-таъриф. Кооператив ўйинда бирор бир $S \subseteq I$ коалиция таъқиқлай олмайдиган юуқ тақсимотлари тўплами ўйининг С-ядроси дейилади ва С(v) ёки С(Г) деб белгиланади.

Ушбу таърифдан кўриниб турибдики, С-ядрога тегишли хар бир ютуқ тақсимоти учун ундан устунликка эга бўлган ютуқ тақсимоти мавжуд бўлмайди ва шу туфайли С-ядро элементларини устунлик хоссасига кўра энг яхши ечимлар сифатида қабул қиладилар.

2-теорема. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, кооператив ўйинда $x = (x_1, ..., x_n)$ ютуқ тақсимоти С-ядрога тегишли бўлади:

$$\begin{aligned} v(K) \le \sum_{i \in K} x(i) = x(K), \qquad & K \subset I \text{ ва} \\ v(I) = \sum_{i \in I} x(i) = x(I). & \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ушбу теорема С-ядро элементларининг хоссаси ва уларни қай усулда топиш мумкинлигини кўрсатиб бермоқда (2.1) тенгсизликлар системаси С-ядро тўпламининг аниқлагани туфайли, С-ядро доимо қавариқ кўпбурчакдан иборат бўлади.

2. Нейман-Моргенштерн (N-M) ечими

Ўйинлар назариясининг асосчилари Джон фон Нейман ва Оскар Моргенштернлар кооператив ўйин ечими сифатида қабул қилинувчи ютуқ тақсмотлари учун қуйидаги шартларни танладилар.

-ички мувозанат, яъни хеч бир N-M ечимни иккинчи бир N-M ечим билан таққослаб бўлмайди,

-ҳар қандай N-M ечим бўлмаган ечим учун уидан афзал бўлган N-M ечим мавжуддир.

10-таъриф. Кооператив ўйиннинг N-M ечими деб шундай R-ечимлар тўпламига айтиладики, бу тўплам элементлари учун қуйидаги шартлар бажарилса:

1) $x \succ y$ дан $x \notin R$ ёки $y \notin R$ келиб чиқади, яъни R-тўплам элементларини ўзаро устунлик хоссасига эга эмас;

2) Ихтиёрий $z \notin R$ ютуқ тақсимоти устун $x \in R$ мавжудки, $x \succ y$ ўринлирдир.

3-теорема. Ҳар қандай кооператив ўйинда бўш бўлмаган С-ядро ва N-M ечим мавжуд бўлса, $C(v) \subseteq R$ бўлади.

Исботи: Фараз қилайликки $x = (x_1......x_n) \in C(v)$ ва $x \notin R$ бўлсин. Ушбу ҳолда N-M ечимнинг 2 хоссасига кўра шундай $x^{(1)}$ ютуқ тақсимоти мавжудки, бу тақимот учун $x^{(1)} \succ x$ ўринлидир, аммо бу афзаллик хусусияти $x \in C(v)$ деган фараз билан қарама-қаршилик келтириб чиқаради. Демак $x \notin R$ деган фаразимиз нотўғри, ушбу зиддият теоремани исботлайди, яъни $C(v) \subseteq R$.

4-теорема. Агар (0,1)-келтирилган кооператив ўйин $\{I, v\}$ учун $v(S) \le \dfrac{1}{n-|S|+1}$, $S \subseteq I$, тенгсизлик ўринли бўлса, $C(v)$ N-M ечим бўлади.

Ушбу теоремани исботсиз келтирамиз.

3-§. «Адолатли тақсимот» - Шепли вектори

1. « Адолатли тақсимот» принципи. Шепли вектори

Олдинги бўлимда кооператив ўйинлар учун С-ядро ва

N-M ечимларни киритдик. Ушбу ечимлар ўйинчилар учун мувозанат ҳолатлари каби эди.Ҳар бир ечим тушунчаси маълум бир «оптималлик қоидаси» асосида ҳосил қилинади ва ўз навбатида ушбу қоида ўзида мукаммаллик ва самарадорлик хоссаларини мужассам этгандир.

Ушбу бўлимда оптималлик қоидаси қандай шартларни қаноатлантириши кераклигини аниқлаб, ушбу шартларни қаноатлантирувчи тақсимотларни оптимал тақсимот сифатида қабул қиламиз «яъни аксиомалар асосида оптималлик қоидасини аниқлаймиз». Бундай усулда оптималлик қоидаларини аниқлаш усули аксиоматик усул дейилади.

Ҳар бир кооператив ўйин $\{I,v\}$ учун шундай $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),......\Phi_n(v))$ векторни аниқлашимиз керакки, ушбу векторнинг ҳар бир компоненти танланган аксиомаларни қаноатлантирсин ва $\Phi(v)$ вектори ютуқ тақсимоти бўлиши шарт.

«Адолатли тақсимот» принципини аниқловчи аксиомаларни тузайлик.

А1. Симметрия аксиомаси. π-акслантириш учун $\pi : I \to I$ бўлсин, у ҳолда

$\Phi_i(v)=\Phi_{\pi(i)}(v^{\pi})$, бу ерда $v^{\pi}-\pi$ акслантириш қўллангандан кейин хосил бўлган коoперати ўйин.

А2. Самарадорлик аксиомаси. Агар $i_0 \in I$ иштирокчи учун ихтиёрий $S \subseteq I$ гуруҳ учун

$v(S \cup \{i_0\}) = v(S)$ бўлса, у ҳолда

$\Phi_{i_0}(v)=0$ бўлади.

А3. Перето оптималлик аксиомаси

$$\sum_{i\in I}\Phi_i(v)=v(I).$$

А4. Қўшилувчанлик аксиомаси. Агарда $\{I,\ v^{(1)}\}$ ва $\{I,\ v^{(2)}\}$ иккита кооператив ўйин бўлса у ҳолда

$$\Phi_i(v^{(1)}+v^{(2)})=\Phi(v^{(1)})+\Phi(v^{(2)})$$ бўлади.

А1 аксиома ўйинчиларнинг тенг ҳуқуқлилигини ифодалайди, яъни ўйинчининг ютуғи унинг қандай номланишига боғлиқ эмас.

А2 аксиома ҳеч бир гуруҳга фойда келтира олмайдиган ўйинчи ноль миқдордаги ютуққа эга бўлиши кераклигини ифодалайди.

А3 аксиомадаги Парето оптималлик $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),......\Phi_n(v))$ векторнинг ютуқ тақсимоти эканлиги ва умумий ютуқ ўйинчилар орасида тўлиқ тақсимланишини белгилайди

А4 аксиомага кўра агар ўйинчилар бир вақтда иккита кооператив ўйинда иштирок этсалар, уларнинг ютуқлари жамланиши кераклигини англатади.

11-таъриф. А1-А4 аксиомаларни қаноатлантирувчи $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),......\Phi_n(v))$ вектори $\{I,\ v\}$ кооператив ўйиннинг Шепли вектори дейилади.

Изоҳ: А1-А4 аксиомалар биринчи маротаба 1953 йилда Шепли (L. S. Shapley) томонидан таклиф этилди.

5-теорема. Ҳар қандай $\{I,\ v\}$ кооператив ўйин учун ягона Шепли вектори $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),......\Phi_n(v))$ мавжуд бўлиб, унинг қийматлари қуйидагича ҳисобланади:

$$\Phi_i(v)=\sum_{\substack{i\in S\\ S\subset I}}\frac{(|S|-1)!\,(n-|S|)!}{n!}\,(v(S)-v(S\setminus\{i\})),\qquad i\in I. \qquad (3.1)$$

(3.1) формулада йиғинди ўйинда $\{i\}$ ўйинчини ўз ичига олган ҳамма S коалициялар бўйича амалга оширилади.

2. Ўйинчилар учта бўлган кооператив ўйин учун Шепли вектори

Асосий (3.1) формула ёрдамида «адолатли тақсимот» векторини катта тўпламлар учун ҳисоблаш имконияти қийин.

6-теорема. Кооператив ўйин $\{I, v\}$ нинг (0,1) келтирилган ҳолдаги характеристик функцияси v нинг қийматлари қуйидагича аниқланган бўлсин

1) $v(i) = 0,\ \ i\in I$;

2) $v=(2,3)=C_1,\ \ v(1,3)=C_2,\ \ v(1,2)=C_3,$

$$0\le C_i\le 1,\qquad i=\overline{1,3};$$

3) $v(I) = 1$ бўлсин у ҳолда

$$\Phi_1(v)=\frac{1}{6}(2-2C_1+C_2+C_3)\,,$$

$$\Phi_2(v)=\frac{1}{6}(2-2C_2+C_1+C_3)\,, \qquad (3.2)$$

$$\Phi_3(v)=\frac{1}{6}(2-2C_3+C_1+C_2)\,.$$

7-теорема. Агар кооператив ўйин $\{\{1,2,3\}, v\}$ да $v(i, j) = C_k$ бўлса, Шепли вектори $\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),\Phi_3(v))$ларнинг С-ядрога тегишли бўлиши учун зарурий ва етарли шарт $4C_i+C_j+C_k\le 4$, $i, j, k\in I=\{1,2,3\}$ дан иборат бўлади.

4-§. Иқтисодда кооператив ўйинларга мисоллар

1-мисол (Уч иштирокчили бозор модели)

Қуйидаги бозор моделини кўрайлик. Ушбу бозорда қиймати a бирлик бўлган бўлинмас ягона маҳсулотни сотувчи $\{1\}$ ўйинчи ва ушбу маҳсулотни мос равишда b ва c нархда сотиб олишга интилаётган 2 та харидор $\{2\}$ ва $\{3\}$ ўйинчилар мавжуд бўлсин. Агар $a>b$ бўлса, сотувчи учун биринчи харидор билан савдолашишдан наф йўқ, агар $a>c$ бўлса, иккинчи харидор билан мулоқотдан наф йўқ.

Шу туфайли $a < b \le c$ деб фараз қиламиз.

Ютуқнинг бошланғич ҳолатдаги тақсимоти (a 0,0) га тенг бўлади. Агар сотувчи ўз маҳсулотини х-нархда {2} ўйинчига (1-харидор) сотса, ютуқ тақсимоти $(x, b-x, 0)$ ва {3} - ўйинчи (2-харидорга сотса) $(x, 0, c-x)$ бўлади.

Кооператив ўйиннинг характеристик функцияси қуйидагича аниқланади.

$$1)\quad v(\emptyset) = 0, \qquad v(1) = 0, \qquad v(2) = v(3) = 0;$$

$$2)\quad v = (1,2) = b - a, \quad v(1,3) = c - a, \quad v(2,3) = 0;$$

$$3)\quad v(1,2,3) = c - a.$$

Ушбу кооператив ўйинни унга мос (0,1) келтирилган кооператив ўйин ёрдамида текширамиз

$$C_1 = v(2,3) = \frac{v(2,3) - v(2) - v(3)}{v(1,2,3) - (v(1) + v(2) + v(3))} = \frac{0}{c-a} = 0,$$

$$C_2 = v(1,3) = \frac{v(1,3) - v(1) - v(3)}{v(1,2,3) - (v(1) + v(2) + v(3))} = \frac{b-a}{c-a} \le 1, \tag{4.1}$$

$$C_3 = v(1,2) = \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{v(1,2,3) - (v(1) + v(2) + v(3))} = \frac{c-a}{c-a} = 1.$$

Келтирилган (0,1) кооператив ўйиннинг С-ядросини аниқлайлик. 2-теоремага асосан $x = (x_1, x_2, x_3)$ ютуқ тақсимоти С-ядрога тегишли бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак

$$1)\quad x_1 \ge v(i), \quad i \in I = \{1,2,3\};$$

$$2)\quad x_1 + x_2 \ge v(1,2) = 1 = C_3;$$

$$x_1 + x_3 \ge v(1,3) = \frac{b-a}{c-a} = C_2,$$

$$x_2 + x_3 \ge v(2,3) = 0 = C_1;$$

$$3)\quad x_1 + x_2 + x_3 = v(I).$$

Ушбу тенгсизликлардан қуйидагиларни ҳосил қиламиз

$$x_3 \le 1 - C_3, \qquad x_2 \le 1 - C_2, \qquad x_1 \le 1 - C_1. \tag{4.2}$$

Ҳосил қилинган (4.2) тенгсизликлардан ва (4.1) тенгликлардан $C_i, i \in I$ ларнинг қийматларини қўйиб С-ядро учун шартларни хосил қиламиз

$$\begin{cases} 0 \le x_3 \le 0\,, \\ 0 \le x_2 \le \dfrac{c-b}{c-a}\,, \\ 0 \le x_1 \le 1\,, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

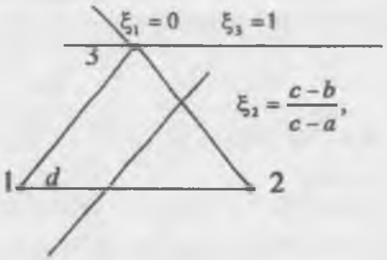
Текширилаётган кооператив ўйинда ютуқ тақсимотларининг геометрик ўрни уч ўлчамли фазода учлари (1,0,0), (0,1,0) ва (0,0,1) нуқталарда жойлашган {1,2,3} учбурчакни ташкил этади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз $\zeta_1 = 1 - C_1$, {2,3} томонга паралел тўғри чизиқ

$\xi_2 = 1 - C_2$ {1,3} томонига паралел тўғри чизиқ,

$\xi_3 = 1 - C_3$ {1,2} томонига паралел тўғри чизиқ тенгламалари. Агар кооператив ўйинда С-ядро бўш тўплам бўлмаса, бу ядро элементлари $\xi_i = 1 - C_i$, $i = \overline{1,3}$, шартни қаноатлантиради. Бизнинг мисолимиз учун

$\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \dfrac{c-b}{c-a}$ ва $\xi_3 = 0$ дан иборат бўлиб, С-ядро {1,2,3} учбурчакнинг {1,2} томонида ётувчи *d* кесмадан иборатдир (4.1-чизма).



4.1-чизма

Шепли векторини (3.2) (3-§) формула асосида ҳисоблаш натижасида қуйидаги жавобларни оламиз.

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{6}\cdot\frac{b-a}{c-a} + \frac{1}{2},$$
$$\Phi_2(v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{c-a}, \qquad (4.4)$$
$$\Phi_3(v) = \frac{1}{6}\cdot\frac{b-a}{c-a}.$$

Ҳосил қилинган (4.4) формуладан Шепли векторини аниқлаш мумкин бўлади. Сотувчининг маҳсулотига якка ҳокимлиги туфайли, сотувчи, яьни 1 ўйинчи умумий ютуқнинг ярмидан кўпроғига эгалик қилади. Маблағ миқдори кўпроқ бўлган 3-ўйинчи (2-харидор) 2-ўйинчи (1-харидор) га нисбатан каттароқ ютуққа эга бўлмоқда.

2-мисол(Ишлаб чиқарувчилар ўртасида қўшимча харажат ларни тақсимлаш)

Учта ишлаб чиқарувчи ўз маҳсулотларини қуйидаги усулда ишлаб чиқарсинлар: Иккинчи ишлаб чиқарувчи биринчи ишлаб чиқарувчининг 1 бирлик махсулотидан 1 бирлик иккинчи маҳсулот ишлаб чиқаради, учинчи ишлаб чиқарувчи 1 бирлик иккинчи маҳсулотдан 1 бирлик учинчи маҳсулот ишлаб чиқаради.

Маҳсулотларнинг бошланғич қийматлари 1 бирликка тенг бўлсин. Агар ҳар бир i - ишлаб чиқарувчи ўз маҳсулоти нархини x_1 миқдорга оширса, охирги маҳсулотни ишлаб чиқаришда ҳосил бўлган қўшимча харажатлар ишлаб чиқарувчилар ўртасида қандай тақсимланиши керак?

Демак I ишлаб чиқарувчининг 1 бирлик маҳсулоти нархи 1 дан 1 + x_1 га ўзгаради;

II – ишлаб чиқарувчи 1 бирлик маҳсулотнинг янги нархи

1 дан 1 + x_2 га ўзгаради;

III ишлаб чиқарувчининг 1 бирлик маҳсулотининг янги нархи 1 + x_3 га тенг бўлса, у ҳолда 1 бирлик якуний маҳсулот ишлаб чиқариш харажатлари $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$ га тенг бўлади ва қўшимча ҳосил бўлган харажат $f(x_1, x_2, x_3) = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) - 1$ га тенг бўлади.

Ҳосил бўлган қўшимча харажатни учала ишлаб чиқарувчи орасида адолатли тарзда қандай тақсимлаш керак? Ушбу қўшимча харажатларни Шепли вектори орқали тақсимлайлик, у ҳолда харажатлар қуйидагича тақсимланди.

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{2}x_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{3}x_1\ x_2\ x_3,\\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \frac{1}{2}x_2(x_1 + x_3) + \frac{1}{3}x_1\ x_2\ x_3,\\ \Phi_3(x) = x_3 + \frac{1}{2}x_3(x_1 + x_2) + \frac{1}{3}x_1\ x_2\ x_3.\end{array}\right\}$$

Қуйидаги шартли мисолни кўрайлик. $x_1 = 3, x_2 = 5$ ва $x_3 = 7$ бўлсин, у ҳолда $f(x_1, x_2, x_3) = (1+3)(1+5)(1+7) - 1 = 191$ бўлади ва Шепли вектори қуйидаги қийматларни қабул қилади

$$\Phi_1(3, 5, 7) = 56, \qquad \Phi_2(3, 5, 7) = 65, \qquad \Phi_3(3, 5, 7) = 70.$$

3-мисол (Акциялар ўйини)

$N = \{1,2,3\}$ ўйин иштирокчилари «акциядорлар», $a_i - j$ акциядорнинг акциялар сони

$$a_1 = 90, \quad a_2 = 60, \quad a_3 = 30.$$

Агар ушбу S гуруҳдаги акцияларнинг умумий сони барча акцияларнинг β қисмидан кўп бўлса, S-ютувчи гуруҳ дейилади

$$\sum_{i \in S} a_i \geq \beta \cdot \sum_{i \in N} a_i.$$

Ушбу мисол учун $\beta = \frac{2}{3}$ улушини олайлик ва ушбу ўйинда ҳар бир «акция» эгасининг Шепли вектори бўйича ютуғини аниқлайлик. Юқорида келтирилган акцияларга мос равишда кооператив ўйинни қурамиз

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{агарда}S - \text{ютувчи}\quad \text{гурух}\quad \text{б улса},\\ 0, & \text{акс}\quad \text{холда},\end{cases}$$

$$v(\{1\}) = 0, \ \text{чунки}\ \ a_1 = 90 \geq \frac{2}{3}(90 + 60 + 30) = 120,$$

$$v(\{2\}) = 0, \quad \text{чулки} \quad a_2 = 60 \leq \frac{2}{3}(90 + 60 + 30) = 120,$$

$$v(\{3\}) = 0, \quad \text{чунки} \quad a_3 = 30 \leq 120,$$

$$v(\{1,2\}) = 1, \ \text{чунки}\ \ a_1 + a_2 = 90 + 60 = 150 \geq 120,$$

$$v(\{1,3\}) = 1, \ \text{чунки}\ \ a_1 + a_3 = 90 + 30 = 120 \geq 120,$$

$$v(\{2,3\}) = 0, \ \text{чунки}\ \ a_2 + a_3 = 60 + 30 = 90 \leq 120,$$

$$v(\{1,2,3\}) = 1, \ \text{чунки}\ \ a_1 + a_2 + a_3 = 90 + 60 + 30 = 180 \geq 120.$$

Ушбу қурилган кооператив ўйиннинг Шепли векторини аниқлаймиз.

$$\Phi_1 = \sum_{\substack{S=1\\ \{l\}\in S\\ |S=s}}^{n} \frac{(n-s)!(s-l)!}{n!}(v(S)-v(S\setminus\{i\})) = \sum_{\substack{S=1\\ \{l\}\in S\\ |S|=s}}^{3} \frac{(3-s)!(s-1)!}{n!}(v(S)-v(S\setminus\{1\})) =$$

$$= \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(v(\{1\})-v(0)) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(v(\{1,2\})-v(2)+v(\{1,3\})-v(\{3\})+$$

$$+\frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(v(\{1,2,3\}))-v(2,3)) = \frac{2}{6}(1-0+10)+\frac{2}{6}(10)=\frac{2}{3};$$

$$\Phi_2 = \sum_{\substack{S=1\\ \{l\}\in S\\ |S|=s}}^{3} \frac{(3-s)!(s-l)!}{3!}(v(S)-v(S/\{2\})) = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(v(2)-v(0))+$$

$$+\frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(v(1,2)-v(1))+(2,3)-v(3))+\frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(v(\{1,2,3\}))-v(1,3))=$$

$$=\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(1-0+0-0)+\frac{2}{3}(1-1)=\frac{1}{6};$$

$$\Phi_3 = \sum_{\substack{S=1\\ \{l\}\in S\\ |S|=s}}^{3} \frac{(3-s)!(s-l)!}{3!}(v(S)-v(S/\{3\})) = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(v(3)-v(\varnothing))+$$

$$+\frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(v(1,3)-v(1))+v(2,3)-v(2))+\frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(v(\{1,2,3\}))-v(1,2))=$$

$$=\frac{2}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(1-0+0-0)+\frac{2}{3}(1-1)=\frac{1}{6};$$

Ушбу акция ўйинида иштирокчиларнинг «таъсир» кучлари қуйидагича тақсимлангандир $\Phi_1 = \frac{2}{3}$, $\Phi_2 = \frac{1}{6}$ ва $\Phi_3 = \frac{1}{6}$, яъни {2} акциядорнинг 60 акциясининг таъсир {3} иштирокчининг 30 акциясининг таъсир кучи кабидир.

Фараз қилайлик {2} акциядор бирор усул билан {3} акциядорнинг камида 1 дона акцичсини сотиб олган бўлсин. У ҳолда янги «акция» кооператив ўйинда акциялар қуйидагича тақсимланган бўлсин.

$$a_1 = 90;\ a_2 = 61;\ a_3 = 29,\ \beta = \frac{2}{3}.$$

Янги кооператив ўйинни қурамиз

$\nu\{i\} = 0, \quad i = 1,2,3,$

$\nu(\{1,2\}) = 1,$ *чунки* $90 + 61 = 151 \geq 120,$

$\nu(\{1,3\}) = 0,$ *чунки* $90 + 29 = 119 \leq 120,$

$\nu\{2,3\} = 0, \quad 61 + 29 = 90 \leq 120,$

$\nu(\{1,2,3\}) = 1,$ *чунки* $90 + 61 + 29 \geq 120.$

$$\Phi_1 = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(\nu(1) - \nu(0)) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(\nu(1,2) - \nu(2)) + \nu(1,3) - \nu(3)) +$$
$$+ \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(\nu(1,2,3) - \nu(2,3)) = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}\cdot(1 - 0 + 0 - 0) + \frac{2}{6}(1-0) = \frac{1}{2};$$

$$\Phi_2 = \frac{(3-1)!(1-1)!}{3!}(\nu(2) - \nu(0)) + \frac{(3-2)!(2-1)!}{3!}(\nu(1,2)) - \nu(1) + \nu(2,3)) - \nu(3)) +$$
$$+ \frac{(3-3)!(3-1)!}{3!}(\nu(1,2,3) - \nu(1,3)) = \frac{2}{6}(0-0) + \frac{1}{6}\cdot(1 - 0 + 0 - 0) + \frac{2}{6}(1-0) = \frac{1}{2};$$

$$\Phi_3 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ушбу мисолдан кўриниб турибдики, ўз рақибига сотилган 1 дона акция {3} ўйинчи кучини 0 га тенглаштириб қўйди, 29 та акцияга эга бўлган акциядор қарорлар қабул қилишда ҳеч қандай тасир кучи йўқ.

VIII бобга оид машқлар

1-топшириқ (Уч иштирокчили кооператив ўйин)

$Г = \{I, \nu\}$ ўйинда $I = \{1,2,3\}$ ва характеристик функция $\nu - (0.1) -$ келтирилган ҳолда берилган ва қуйидагича бўлсин.

1) $\nu(i) = 0, \quad i \in I,$

2) $\nu(1,2) = C_3, \quad \nu(1,3) = C_2, \ \nu(2,3) = C_1$ ва

$$C_1 = \frac{1}{2m}, \ C_2 = \frac{1}{3n}, \ C_3 = \frac{6mn - 3n - 2m}{6mn},$$
$$m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

3) $\nu(I) = 0.$

Ушбу кооператив ўйинда қуйидагиларни аниқланг.

1. Шепли векторини аниқланг.
2. Ўйиннинг С-ядросини изоҳлаб беринг.
3. Шепли вектори ўйин С-ядросига тегишлилигини аниқланг.

2-топшириқ. $\Gamma = \{I, v\}$ – кооператив ўйинда $I = \{1,2,3,4\}$ – ўйинчилар тўплами ва v - кооператив ўйин характеристик функцияси бўлиб, у қуйидагича аниқланган бўлсин:

1) $v(i) = i \qquad i \in I = \{1, 2, 3, 4\};$

2) $v(\{i, j\}) = i + j + 1, \quad i \neq j, \ i, j \in I;$

3) $v(i, j, k) = 9, \quad i \neq j; j \neq k; i \neq j \ \ i, j, k \in I;$

4) $v(\{1, 2, 3, 4\}) = 14.$

Ушбу кооператив ўйинда қуйидагиларни аниқланг:

1. Характеристик функция қийматларини ҳисобланг $S \in I$.
2. Характеристик функция супераддитив эканлигини кўрсатинг.
3. Ушбу ўйиннинг (0,1) келтирилган ҳолга тасвирланг.
4. Шепли векторини аниқланг.
5. Берилган ўйиннинг С- ядросини ифодаланг.
6. Шепли вектори С-ядрога тегишлилигини аниқланг.

3-топшириқ (Акциялар ўйини)

$N = \{1,2,3,4\}$, $a_i\{i\}$ – иштирокчидаги акциялар сони бўлсин $(i \in N)$:

$$\alpha_1 = 40k + 10m,$$

$$\alpha_2 = 30k + 5m,$$

$$\alpha_3 = 15k + 10m,$$

$$\alpha_4 = 5k + 15m,$$

$$\beta = \frac{2k + 9m}{4k + 12m}.$$

Агар

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \geq \beta \cdot \sum_{i \in N} \alpha_i$$

бўлса, S ўйинчилар гуруҳи ютувчи гуруҳ бўлади.

Берилган кооператив ўйиннинг характеристик функцияси v қуйидагича қурилади.

$$v(S) = \begin{cases} 0, & S \text{ ютувчи булса,} \\ 2k + 3m, & S - \text{ютувчи гурух булса.} \end{cases}$$

Ушбу кооператив ўйинни қуриш ва унинг учун Шепли векторини аниқланг.

АДАБИЁТЛАР

Асосий адабиёт

А) Дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1. **Ашманов С.А.** Линейное программирование. –М.: Наука,1981, -304с.
2. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1988, -552с.
3. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. –М.: Наука, 1985, -272с.
4. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Оптималлаштириш усуллари. -Ўзбекистон, Т.: 1995, (таржима-Х.Н. Жумаев), -350с.
5. **Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.** Введение в прикладную теорию игр. Серия «Экономико-математическая библиотека», -М.: Наука, 1981, -336с.
6. **Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.** Математические методы в экономике. Учебник МГУ, -М.: ДИС, 2000, -368с.
7. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизациии экономическая теория. –М.: Айри-пресс, 2002, -576с. (перев. с англ.)
8. **Карманов В.Г.** Математическое программирование. –М., 1986, -288с.
9. **Кузнецов А.В., Кузубов В.И., ВолощенкоА.Б.** Математическое программирование. –М.: ВШ, 1980, -300с.
10. **Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.** Теория игр (учебное пособие). –М.: Книжный дом «Университет». 1998, -304с.

Б) Масалалар тўплами

11. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в примерах и задачах. –М.: Наука, 1991, -448с.
12. **Заславский Ю.Л.** Сборник задач по линейному программированию. –М.: Наука, 1969, -252с.
13. **Капустин В.Ф.** Практические занятия по курсу математического программирования. -ЛГУ, 1976, -192с.
14. **Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С.** Руководство к решению задач по математическому программированию. –Минск: ВШ, 1978, -256с.
15. **Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.** Исследование операций в задачах и упражнениях. –М.: ВШ, 1986, -288с.

Қўшимча адабиёт

16. **Арис Р.** Дискретное динамическое программирование (Введение в оптимизацию многошаговых процессов). М.: Мир, 1969, -172с. (перев. с англ.).

17. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. –М.: Мир, 1982, -584с. (перев. с англ.).

18. **Вагнер Г.** Основы исследования операций. Том 1-3, -М.: Мир, 1973 (пер. с англ.).

19. **Данциг Д.** Линейное программирование, его обобщение и применение. –М.: Прогресс, 1996, -600с. (перев. с англ).

20. **Калихман И.Л., Войтенко М.А.** Динамическое программирование в примерах и задачах. –М.: ВШ, 1979, -232с.

21. **Канторович Л.В., Горстко А.Б.** Оптимальные решения в экономике. –М.: 1972, -232с.

22. **Кубонива О.** Математическая экономика на персональном компьютере. –М.: Финансы и Статистика, 1989, -376с. (перев. с англ.).

23. **Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.Н.** Математические модели экономического взаимодействия. –М.: Наука, 1993, -376с.

24. **Мак-Кинси Дж.** Введение в теорию игр. –М.: ФМ, 1960, -420с.

25. **Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б.** Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. –Т.: Фан, 2000, -176с.

26. Справочник по математике для экономистов. (под.ред.проф. В.И. Ермакова), -М.: ВШ, 1987, -336с.

27. **Таха Х.** Введение в исследование операций. Том 1,2, -М.: Мир, 1985 (перев. с англ.).

28. **Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. -М.: Наука, 1970 (перев. с англ.).

29. **Тухтасинов М.** Матрицали ўйинлар (методик кўрсатма). –Т.: Университет, 1993, -32с.

30. **Хедли Дж.** Нелинейное и динамическое программирование. –М.: 1967(перев. с англ.).

МУНДАРИЖА

I БОБ. Кириш 3

II БОБ. Чизиқли программалаштириш 17

MATHEMATICAL PROGRAMMING

CONTENTS

Илмий-ўқув нашри

**ХОСИЯТ НИККИЕВИЧ ЖУМАЕВ, БОЛТАБОЙ ОТАНИЁЗОВ,
ЛЕВ ПАВЛОВИЧ ЮГАЙ, АБДУВОСИҚ ЖАЛИЛОВ**

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Дарслик

Муҳаррир М.ВАҲОБОВА
Бадиий муҳаррир Б.БОЗОРОВ
Мусаҳҳиҳ Д.ИКРОМОВА
Компьютерда саҳифаловчи Е.НАЗАРОВА

Босишга 25.01.2005й.да рухсат этилди. Бичими 60х84 1\16.
Босма тобоғи 0,0. Адади 1500 нусха. Буюртма № 00.
Баҳоси келишилган нархда.

Ўзбекистон Ёзувчилар уюшмаси Адабиёт Жамғармаси нашриёти.
700000, Тошкент, Ж-Неру,1-уй.

«Ёшлар матбуоти» босмахонасида босилди.
700113. Тошкент, Чилонзор-8, Қатортол кўчаси, 60.