Ф. Б. БАДАЛОВ, Ғ. ШОДМОНОВ

Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги дарслик сифатида тавсия этган

Тошкент
Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти
2000

Дарсликда алгебраик тенгламалар тизими, оддий дифференциал ва интеграл - дифференциал ҳамда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали моделлаштириладиган муҳандислик масалалари ва уларни сонли ечиш усулари баён этилган.

Ушбу китоб биринчи навбатда техника олий ўқув юртларининг бакалавр талабалари учун мўлжалланган бўлиб, ундан муҳандислик масалаларини ЭҲМда ҳисоблаш муаммолари билан шуғулланадиган илмий тадқиқотчилар ва муҳандислар ҳам фойдаланишлари мумкин.

$$\text{М}\frac{1602010000 - З - 410}{\text{М}355(04) - 2000}\text{Рез.}2000$$

ISBN 5-648-02670-6

Теришга берилди 27.03.2000й. Босишга рухсат этилди 4.04.2000 йил. Бичими 84х108 1/32. Офсет босма усулида босилди. Шартли босма табоғи 17,0. Адади 2000 нусха.

Буюртма №   Келишилган нархда.

ЎзРФА «ФАН» нашриёти: 700047, Тошкент, акад. Я. Ғуломов кўчаси, 70.

Қўлёзма макети хўжалик ҳисобидаги «Матбаа маркази» корхонасининг компьютерида терилди. «Фан» босмахонасида чоп этилди.

СЎЗ БОШИ

Математик моделлаштириш, математик моделларни қуриш (яъни, у ёки бу жараёнларни ифода этувчи математик муносабатни келтириб чиқариш), ҳисоблаш тажрибаларини ўтказиш (яъни, ўрганилаётган жараёнларнинг миқдорий тавсифларини ҳосил қилиш мақсасида ЭҲМ да ҳисоблаш ишларини бажариш) кабиларни ўзида мужассамлаштиради. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари, олий математиканинг муҳим бўлимидан иборат бўлиб, ўқув фани сифатида техникавий, иқтисодий ва бошқа олий ўқув юртларининг ўқув дастурларида салмоқли ўрин эгаллайди. Маълумки, муҳандислик масалаларининг математик моделлари математик жиҳатдан пухта ўйлаб қурилсагина ҳамда уларни ечиш учун энг мақбул усуллар қўлланилсагина, ЭҲМдан оқилона фойдаланиш мумкин бўлади. Гарчи, бу борадаги масалаларга бағишланган турли хил адабиётлар рус тилида етарли даражада мавжуд бўлсада, лекин улар ўзбек тилида шу пайтгача деярли яратилмади. Шу сабабдан, математик моделлар ва муҳандислик масалаларининг сонли ечилишига доир дарсликларнинг ўзбек тилида яратилиши муҳим аҳамиятга эга. Зеро, Республикамизда ҳозирги давр талабларига тўла жавоб берадиган муҳандислар тайёрлаш, кўп жиҳатдан уларнинг она тилида ёзилган дарслик ҳамда ўқув қўлланмалар билан таъминланишларига бевосита боғлиқ.

Мазкур дарсликнинг асосий мақсади, техника олий ўқув юртларининг талабаларини, ҳисоблаш ва лойиҳалаш фаолиятлари билан шуғулланувчи мутахассисларни, математик моделлаштириш соҳаси бўйича тадқиқот ишлари олиб борувчиларни ва муҳандисларни, замонавий математик моделлаштириш усуллари билан таништириш ҳамда уларни ҳар хил муҳандислик қурилмаларини ҳисоблашда қўлланиладиган масалаларини ечишга ўргатишдан иборатдир.

Ушбу китобни ёзиш жараёнида муаллифлар, бирқанча йиллар мобайнида, Тошкент Давлат Техника университети ҳамда Тошкент Давлат Авиация институти талабаларига ўтказилган назарий ва амалий машғулотлари асосида тўпланган тажрыбаларидан фойдаландилар.

Дарсликнинг қўлёзма матнини синчковлик билан ўқиб чиқиб, ўзларининг қимматбаҳо маслаҳатларини аямаган тақризчилар, физика-математика фанлари доктори, профессор М.Йсроилов ҳамда физика-математика фанлари доктори, профессор Б.Мардоновларга ўзимизнинг алоҳида миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Шунингдек, табиийки китоб айрим хато ва камчиликлардан ҳоли эмас, шу сабабли, барча танқидий фикр ва мулоҳазаларни муаллифлар мамнуният билан қабул қиладилар.

1-БОБ
МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИНИНГ ЭҲМДА ҲИСОБЛАНИШЛАРИНИ АВТОМАТЛАШТИРИШНИНГ УМУМИЙ ЙЎЛ - ЙЎРИҚЛАРИ

Моделлаштириш усулларининг асосан физикавий ва математик моделлаштиришлар деб аталувчи иккита синфи мавжуд бўлиб, қуйида фақатгина математик моделлаштиришлар (яъни, муҳандислик масалаларининг бирор математик муносабатлар ёки тенгламалар орқали ифодаланиши) ҳақида сўз юритилади. Шунингдек, муҳандислик масалаларининг ЭҲМда ҳисобланишларини автоматлаштириш ҳақида ҳам қисқача маълумотлар келтирилади.

1.1. МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИНИНГ ЭҲМДА ЕЧИЛИШИНИНГ АСОСИЙ БОСҚИЧЛАРИ

Ҳар қандай муҳандислик масаласининг ЭҲМда батамом ечилиш жараёни бир-биридан муҳим фарқланадиган уч босқичга бўлиниб бажарилади. Биринчи босқичда унинг математик модели қурилади, механика тили билан айтилганда континуал масаланинг қўйилиши таърифланади.

Муҳандислик масалаларининг математик моделлари одатда ҳар хил тенгламалардан ташкил топган бўлиб, улар қаралаётган масала учун энг муҳим бўлган жараёнда қатнашувчи жисм ва моделларнинг барча тавсифларини қамраб олиши керак. Масалан, ихтиёрий равишда тақсимланган юк таъсири остида бўлган ва четлари қаттиқ бириктирилган l узунликдаги тўсиннинг эгилиши ҳақидаги масаланинг математик моделининг қурилиш жараёни билан танишиб ўтамиз.

Гук қонунига биноан, $\sigma = E\varepsilon$ (1.1.1) ни ёзамиз. Бу ерда: σ -кучланиш, ε -деформация, Е-

эластиклик модули.

Текис кесимлар гипотезасига кўра, тўсиннинг ε деформацияси унинг W(x) силжиши орқали қуйидаги формула билан ифдаланади:

$$\varepsilon(x) = -zw''(x) \qquad (1.1.2)$$

У ҳолда тўсиннинг эгувчи моментини (1.1.1) ва (1.1.2) формулаларга асосан

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma\, dz = -E\frac{h^3}{12}\cdot\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (1.1.3.)$$

каби формула билан ҳисобланади.

Маъумки, тўсиннинг мувозанат тенгламаси қуйидагича ёзилар эди, яъни:

$$M''(x) + q(x) = 0 \qquad (1.1.4.)$$

ва уни (1.1.3.) га қўйсак, тўсиннинг эгилишини ифода этадиган қуйидаги оддий дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$E\frac{h^3}{12}W^{IV}(x) = q(x) \qquad (1.1.5.)$$

Тўсиннинг четлари мустаҳкам бириктирилган бўлганлиги сабабли,

$$W(0) = W(l) = 0, W'(0) = W'(l) = 0 \qquad (1.1.6)$$

каби шартлар бажарилиши лозим бўлади.

Юқоридаги (1.1.5.) тенглама (1.1.6.) чегаравий шартлар билан биргаликда ўзгармас кесимга эга бўлган тўсиннинг эгилиши ҳақидаги масаланинг математик моделини ифода этади. Бу тенглама қаралаётган масаланинг барча тавсифлари (Е эластиклик модули, h-тўсиннинг қалинлиги, W(x) эгилиш ва q(x) - ташқи юк)ни қамраб олади.

Муҳандислик масаласининг математик модели қурилаётганда, у ерда қаралаётган объектнинг барча хусусиятларини ҳисобга олиш мумкин бўлмаганлиги сабабли ҳам у модел ҳеч қачон объектни айнан ифода эта олмайди. Шу билан бирга қаралаётган объектнинг математик модели тақрибан қуриладиган бўлса, уни ҳисоблаш учун ҳар қандай усуллардан фойдаланилмасин барибир, барча хулосалар етарлича аниқ бўлмайди. Айрим ҳолларда эса, ҳатто мутлақо нотўғри хулосалар вужудга келиши мумкин. Масалан, (1.1.5) тенглама тўсиннинг тебраниш жараёнини текшириш учун яроқсиздир, чунки унда инерция кучлари ҳисобга олинмаган.

Иккинчи босқич давомида қўйилган континуал масала бирор дискрет модел орқали ифодаланади. У ерда эса, ҳисоблаш ишлари борасидаги айрим қийинчиликларга дуч келинади. Аммо, машинасозлик, қурилиш конструкциялари ва учиш аппаратлари элементларининг ҳар хил масалалари учун бу қийинчиликларни ҳисоблаш математикасининг у ёки бу усуллари ёрдамида батамом бартараф этиш мумкин (масалан, чекли-айирмалар, вариацион - айирмалар, Бубнов-Галеркин, чекли элементлар ва бошқа усуллар) бўлади. Бу каби усуллар билан биз китобхонларни машинасозлик ва қурилиш конструкциялари элементларининг муайян масалаларини ечиш жараёнида муфассал таништирамиз.

Ниҳоят, учинчи босқич жараёнида, дискрет моделни ифодаловчи алгебраик ёки оддий дифференциал тенгламалар ва уларнинг тизимлари ечилади. Бу ерда ҳам ҳисоблаш борасидаги бир қатор қийинчиликлар мавжудки, уларни ЭҲМдан фойдаланмасдан туриб бартараф этиш мумкин эмас. Масалан $y^2=x$ ни ҳисоблаш лозим бўлсин дейлик, энг аввало бу ерда ҳисоблашнинг аниқлиги ҳақидаги савол туғилади. Ҳисоблашни эса кетма-кет яқинлашишликнинг дискрет алгоритми бўлган

$$y_{n+1} = 0.5\cdot(y_n + x / y_n),\ n = 0,1,2,\ldots; \tag{1.1.7}$$

каби формула орқали бажариш мумкин. Бу ерда исботлаш қийин эмаски $y_{n+1} \le y_n$ ва $y_n \ge \sqrt{x}$ Шунинг учун (1.1.7) кетма- кетлик чекли лимитта эга: $\lim\limits_{n\to\infty} Y_{n+1} = C$ ёки $\sqrt{x} = C$. Агар $y = \sqrt{5}$ ни

$\varepsilon = \left|y_{n+1} - y_n\right| = 0{,}0001$ аниқликда ва $y_0 = 2$ бошланғич яқинлашишликда ҳисоблаш талаб этилган бўлса, берилган аниқлик юз беришлиги учун ҳаммаси бўлиб атиги учтагина яқинлашиш керак бўлади, яъни: $n = 3$.

Бу (1.1.7) каби алгоритмларни ҳисоблаш алгоритмлари деб юритилади ва уларнинг муҳандислик амалиётида қўлланилиши эса ЭҲМлар туфайлигина мумкин бўлади.

ЭҲМларнинг яратилиши инсониятнинг энг буюк кашфиётларидан бири бўлиб, улар инсоннинг ақлий имкониятлари ривожини оширади. ЭҲМлар билишнинг янги самарадор усулларининг ривожланишига ва табиат қонунларини ўрганишга кенг имкониятлар яратди. Бир сўз билан айтганда, ЭҲМлар кейинги ўн йиллар давомидаги илмий-техника ривожининг энг муҳим омилларидан бири бўлиб қолди.

1.2. МУҲАНДИСЛИК КОНСТРУКЦИЯЛАРИНИ ҲИСОБЛАШ ВА МАШИНАВИЙ АЛГОРИТМЛАР. БИР ҚОЛИПДАГИ ДАСТУРЛАР КУТУБХОНАСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Учиш аппаратларининг қурилиш механикаси ёки машинасозликнинг ҳар қандай масалалари қуйидагича таърифланади: конструкцияларнинг физикавий тавсифлари ва уларга таъсир этадиган ташқи кучлар берилганда, уларда вужудга келадиган ички кучланиш (зўриқиш) ларни аниқлаш талаб этилади. Бу масаланинг ечилиш жараёни икки бўғиндан иборат: а) бирор ифодалар ва муносабатларни амалга оширадиган арифметик амаллар; б) масаланинг қўйилишидан бошлаб то натижалар олингунича бўлган ҳисоблашлар кетма-кетлигини бир бутун боғлайдиган мантиқий амаллар. Муҳандислик масалаларини ечишнинг ҳисоблаш ишларини ЭҲМда амалга ошириш учун бу тизимнинг ҳар иккала бўғинларини ҳам автоматлаштириш зарурати юзага келади.

Масалани ечиш усули аниқ бўлганда уни қўлда ечишликнинг мантиқий жараёни унчалик қийин эмас ва тадқиқотчи бу жараённи ярим автомат тарзида амалга оширади. Бу ерда, инсон ахборотларни хотирасининг қайси бўлагига юбориш, шунингдек, у хотирасининг тўлиб қолиш хавфи борлиги ҳамда у ёки бу оралиқ натижалар хотирасининг қайси бўлагида сақланишлиги тўғрисида ҳеч ҳам қайғурмайди. Инсон масаланинг ечимини миқдор жиҳатдан таҳлил этмай турибоқ, унинг натижасини тўла ва аниқ баҳолашга қурби етади. Масалан, агар пойдевор тоштахтасининг ҳисобига кўра унинг барча эгилишлари миқдор жиҳатдан манфий ишорали бўлиб қолса (яъни, тоштахта ҳавога кўтарилиб қоладиган бўлса), табиийки, тадқиқотчи ҳисоб натижаларини таҳлил қилиб ўтирмасдан, балки ҳисоблашлардаги хатоликни қидиради. Бу ерда ҳисоб натижалари масаланинг физикавий маъносига зид бўлганлиги сабабли, албатта бундан кейинги бажариладиган ишлар муҳандислик тажрибаларига таянган ҳолда олиб борилади.

Муҳандислик масалаларининг ЭҲМда ечилиш жараёни ўзига хос бир қатор қийинчиликларни бартараф этиш билан боғлиқ. Инсоннинг тафаккури учун характерли бўлган мантиқий жараённинг аспектлари ЭҲМда анча қийинчилик билан амалга оширилади. Бу қийинчилик биринчи галда, ЭҲМга тақдим этиладиган жараённинг даставвал формаллаштирилиши ҳамда бир қийматли натижаларга олиб келадиган амалларнинг муайян кетма-кетлиги шаклида (машинавий алгоритм кўринишида) ифодаланган бўлишлиги кераклиги билан боғлиқдир.

Мазкур банднинг якунида умумий характердаги айрим мулоҳазаларни келтирамиз:

1. Машинавий алгоритмларни ишлаб чиқараётганда, асосий эътиборни уларнинг машинавий ҳисоб учун қулай бўлишликларига қаратиш лозим.
2. Тажрибалар кўрсатадики, ҳар бир муайян муҳандислик масалаларини ечиш учун хусусий алгоритмлар тузишдан кўра, кенг миқёсдаги туркум намунавий муҳандислик масалаларини ечиш учун универсал алгоритмлар тузишликни ривожлантириш анча фойдалироқ бўлади.
3. Хилма-хил хусусиятларга эга бўлган объектларни ўрганиш, кўпинча бир хил математик масалаларни ечишликка келтирилади. Шу сабабдан, амалиётда тез-тез учрайдиган бундай масалаларни ажратиб ва уларнинг барча хусусиятларини ўрганиб, улар асосида самарали бўлган алгоритмлар ишлаб чиқарилиши ҳамда бу алгоритмларни ЭҲМ учун бир қолипдаги дастур шаклида амалга ошириш мумкин бўлади.

Бир қолипдаги дастур ёки дастуроcти деб, бирор тугалланган ҳаракатни бажарадиган ва уни бир ёки бир қанча дастурларнинг бир неча жойларида ишлатиш мумкин бўладиган қилиб жойлаштирилган буйруқлар кетма-кетлигига айтилади.

Дастуроcти бир марта тузилиб кўп марта ишлатилади. Масалан, e^x, sinx, cosx ва шунга ўхшаш элементар функцияларни ҳисоблаш учун бир марта тузилиб, улар ЭҲМнинг хотирасида сақланади. Дастуростига мурожаат қилиш зарурати пайдо бўлганда эса, асосий дастурнинг мос жойида бир неча буйруқлар ёзиладики, улар керакли ахборотни ташкил этиб, бошқаришни дастуростига узатадилар. Тегишли ҳисоблашлар бажарилгандан кейин дастуросги бошқарувни асосий дастурга қайтаради.

Амалий дастурчилар учун ёрдам тариқасида бир қолипдаги дастуростилар билан биргаликда бошқа дастурлар ҳам тайёрланиб қўйилади. Бу дастурлар ёрдамида бир қанча намунавий масалаларни ечиш мумкин бўлади. Бунга мисол тариқасида чизиқли алгебра, сонли интеграллаш, дифференциал тенгламалар ва махсус амалий масалаларга доир дастурларни қараш мумкин.

Шунингдек, муайян ЭҲМ учун тузилиб, маълум тартибда бирлаштирилган дастурлар тўплами, дастурлар кутубхонаси деб юритилади.

1.3. МУҲАНДИСЛИК КОНСТРУКЦИЯЛАРИНИ ЭҲМДА ҲИСОБЛАШНИНГ УНИВЕРСАЛ ДАСТУРЛАРИ

Ҳисоблаш жараёнларининг хусусиятларига кўра, муҳандислик конструкцияларини ҳисоблашни автоматлаштириш соҳасида икки хил йўналиш мавжуддир. Биринчи йўналиш, чекланган туркумдаги содда масалаларни ечиш учун махсуслаштирилган амалий дастурлар яратиш бўлса, иккинчи йўналиш, амалий дастурлар пакетини барпо этищдан иборат.

Дастурлар пакети дейилганда, бирор муайян соҳанинг ҳар қандай масаласини ечиш учун мўлжалланган ва бир-бирлари билан узвий боғлиқда бўлган дастурлар мажмуаси тушунилади. Масалан, стерженлар тизимининг масалаларини кучлар усули, чекли элементлар усули ва бошқа усуллар билан ҳисоблайдиган дастурларнинг пакетлари мавжуд. Маълум маънода дастурлар пакети, бир қолипдаги дастурлар кутубхонасининг ғояларини амалга оширувчи восита ҳисобланади. Улар орасидаги фарқ шуки, кутубхонадаги дастурлар одатда мустақил ишлатилади, пакет дастурлари эса, бирининг бошқалари билан ҳар хил комбинацияларда биргаликда қўлланишликлигига мўлжаллангандир.

Масаланинг ҳар бир қисмини ечиш учун мос алгоритм тузилиб, у асосида дастур ёзилади ва уни модул деб юритилади. Модулларнинг мажмуини эса, дастурлар пакетининг функционал тўлдирилишини ташкил этади деб юритилади.

Дастурлар пакетининг яна тизимли тўлдирилиши мавжуд бўлиб, у фойдаланувчилар учун максимал қулайлик таъминлашига мўлжаланган хизмат дастурларидан ташкил топгандир. Улар дастурлар пакетининг барча ишларини бошқариб, фойдаланувчиларнинг топшириқларини ҳам бажаради ва таҳлил этади. Шунингдек, улар орқали, модуллар ичидан фойдаланувчиларнинг дастурлар йиғиши жараёни автоматлаштирилади. Модулларга ўзгартиришлар киритилади ва дастурлар пакетининг тўлдирилишига имкон яратилади. Фойдаланувчиларнинг амалий дастурлар пакети билан мулоқот тили содда ва қулай бўлишлиги муҳим аҳамиятга эгадир.

Дастурларнинг биринчи тоифаси ўзининг тузилиши жиҳатдан универсал дастурларга нисбатан анча содда бўлиб, уни ишлаб чиқариш учун оз меҳнат сарфланади. Бироқ, у дастурлар нисбатан оз конструкцияларнинг ҳисобини автоматлаштиради ҳамда уларнинг қўлланиш соҳаси анчагина чекланган бўлади. Шу сабабдан ҳам кўпинча муҳандислик конструкцияларининг ҳисобида ЭҲМдан фойдаланишликнинг самарадорлиги кескин пасайиб кетади. Бундан шундай амалий дастурлар пакетини яратиш мақсадга мувофиқ эканки, улар дастлабки сарф - харажатларга қарамасдан кенг тоифадаги конструкциялар ҳисобини автоматлаштириш ҳамда уларни оммавий қўлланиш натижасида энг кўп самара олиш имконларини бериши лозимлиги кўринади.

АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ОРҚАЛИ МОДЕЛЛАШТИРИЛАДИГАН АЙРИМ МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИ ВА УЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Ҳар хил иқтисодий, саноатни бошқариш ва оптимал жиҳозлаш, ракеталарни лойиҳалаш, учувчи аппаратлар ва транспорт ҳаракатини тартибга солиш каби ва шуларга ўхшаш бошқа муҳандислик масалаларини ечишда математик усулларни қўллаш учун энг аввало шу жараёнларнинг моҳиятини тўла акс этдирадиган математик моделларини қуриб олиш зарурдир. Мазкур математик моделларнинг қурилишларида эса чизиқли алгебранинг асосий элементларидан фойдаланилади, масалан, муҳандислик конструкциялари ва қурилмалари элементларининг тебраниши ҳақидаги масала ҳам чизиқли алгебранинг масалаларидан бирига келтирилиб ечилади (яъни, мазкур тебранишлар билан боғлиқ бўлган матрицаларнинг хос қийматлари ва хос векторларини аниқлаш масаласи).

Шунингдек, муҳандислик конструкциялари ва қурилмаларининг бошқа кўпгина масалалари математик жиҳатдан ёмон шартланган чизиқли алгебраик тенгламалар тизими орқали моделлаштириладилар. Шу боисдан, биз дастлабки бобларда, алгебраик тенгламалар ва уларнинг тизимлари орқали моделлаштириладиган муҳандислик масалаларининг айримлари билан танишиб, уларнинг ЭҲМда ечилиш усулларини баён этамиз.

2-БОБ

МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШДА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ ВА УНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Кўпгина муҳандислик масалаларининг ечилиш жараёнида чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечиш усуллари ва матрицаларнинг хос қийматлари ҳамда хос векторларини топиш каби тушунчалардан кенг фойдаланилади. Хусусан, энг мақбул (оптимал) бошқаришнинг кўпгина масалалари математик жиҳатдан чизиқли алгебраик тенгламалар тизими орқали моделлаштириладики, улар эса, ўз навбатида, ҳисоблаш математикасининг бошқа масалаларини ечишга асос бўлиб хизмат қилади (масалан, дифференциал тенгламалар ва уларнинг тизимлари). Резонансли тебранишлар ҳаракатининг таҳлилида тебранишларнинг хос частоталарига хос қийматлар мос келиб, хос векторлар эса тебранишларнинг шаклини ифодалайди. Қуйида биз чизиқли алгебранинг юқорида номлари келтирилган бўлимларига доир тушунчаларни қисман баён этамиз.

2.1. КРАМЕР ФОРМУЛАЛАРИ. ТЎҒРИ ВА ИТЕРАЦИЯ УСУЛЛАРИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

Фараз қилайлик, n номаълумли n та чизиқли алгебраик тенгламалар тизими қаралаётган бўлсин, яъни:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Матрицаларни кўпайтириш тушунчасидан фойдаланиб, (2.1.1) тизимни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$AX = B. \qquad (2.1.2)$$

Бу ерда:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган квадрат матрица; (уни биз тизимнинг асосий матрицаси деб юритар эдик).

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- лар эса, мос ҳолда, номаълумлар ва озод ҳадлардан тузилган вектор-устун матрицалардир.

Юқоридаги (2.1.2) ифода матрицавий шаклдаги чизиқли алгебраик тенгламалар тизими деб юритилади.

Маълумки, агар A номахсус матрица бўлса, яъни, асосий матрицанинг детерминанти $\det A = \Delta$ нолдан фарқли бўладиган бўлса, (2.1.1) тизим ягона ечимга эга бўлиб, у Крамер формулалари деб аталувчи

$$x_i = \Delta_i / \Delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

каби формулалар ёрдамида топилар эди. Бу ерда, $\Delta_i = \det A_i$ бўлиб, A_i матрица A матрицадан унинг i-сон устун элементларини озод ҳадлар устуни билан мос равишда алмаштириш йўли билан ҳосил қилинар эди, яъни:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Крамер формулалари (2.1.1) тизимнинг ечимини аниқ равишда ифода этадиган бўлса ҳам лекин улар ҳисоблаш нуқтаи назаридан қаралганда самарали эмас. Чунки, у ерда n тартибли $(n+1)$ та детерминантларни ҳисоблаш лозим бўладики, ўз навбатида бу ҳисоблашлар жуда ҳам катта сон миқдордаги амаллар бажарилишлигини тақозо этади. Агар ҳисоблашларда яхлитлашлардан фойдалансак, унинг натижасида анча сезиларли даражадаги хатоликлар юзага келади. Шу боисдан амалиётда кўпинча чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечиш учун бошқа усуллардан фойдаланилади. Бу усуллар ҳисоблашни ташкил этиш йўлига нисбатан тўғри ва итерация усуллари деб юритилувчи иккита синфга бўлинади.

Чекли сон миқдордаги амалларни бажариш орқали тизимнинг аниқ ечимини қуришга имкон берадиган усуллар тўғри усуллар деб юритилади. Улар асосида қурилган алгоритмлар тизимнинг аниқ ечимини ифодалашлари учун тизимдаги барча қийматлар берилган бўлишлари ҳамда барча ҳисоблаш ишлари яхлитлаш хатоларисиз мутлақо аниқ бажарилишлари керак бўлади.

Итерация усуллари эса, изланаётган ечимга яқинлашувчи бўладиган (масалан, (1.1.7) каби формулалар) итерация кетма-кетликларининг тузилишига асослангандир. Маълум сон миқдордаги итерацияларни ҳисоблаб бўлиб итерация жараёни тўхтатилади ва натижада эса, тизимнинг олдиндан берилган ҳар қандай аниқликдаги тақрибий ечимини аниқлаш мумкин бўлади.

Қуйида биз аввало, энг кўп тарқалган тўғри усуллардан бири бўлган Гаусс усули билан танишиб ўтамиз.

2.2. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШНИНГ ГАУСС УСУЛИ

Чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини Гаусс усулида ечишликнинг асосида тизимдаги номаълумларни кетма-кет йўқотиш ғояси ётади. Мазкур усул билан тенгламалар тизимини ечиш икки босқичдан иборат бўлиб, биринчи босқичда тизим учбурчак шаклига келтирилади (уни тўғри юриш деб юритамиз), иккинчи босқичда эса, у учбурчакли тизимдан номаълумларнинг қийматлари кетма-кет аниқланади (уни тескари юриш деб атаймиз).

Биринчи босқич жараёни қуйидагича олиб борилади:

Биринчи қадам.

Айталик, (2.1.1) тизимни ечиш талаб этилган бўлсин. Фараз қилайлик у тизимда $a_{11}\neq 0$ бўлсин (агар $a_{11}=0$ бўлса, тенгламаларнинг ўринлари шундай алмаштириладики, натижада юқоридаги шарт бажариладиган бўлсин).

Тизимдаги биринчи тенгламанинг ҳар бир ҳадини a_{11} га ҳадлаб бўлиб чиқиб, янги

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = S_1,$$
$$c_{1j} = a_{1j}/a_{11},\ (j=\overline{2,n}),\ S_1 = b_1/a_{11} \qquad (2.2.1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз ва уни $-a_{j1}(j=\overline{2,n})$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодани мос ҳолда (2.1.1) тизимининг иккинчи, учинчи ва ҳоказо n-тенгламаларига қўшиб чиқамиз, натижада

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

каби тенгламалар тизими ҳосил қилинади.
Бу ерда:

$$a_{ji}^{(1)} = a_{ji} - a_{j1}c_{1i}, \quad b_j^{(1)} = b_j - a_{j1}S_1, \quad (i, j = \overline{2,n}).$$

Иккинчи қадам.

Юқоридаги (2.2.2) тизимнинг биринчи тенгламасини $a_{22}^{(1)} \neq 0$ га бўлиб юбориб

$$x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = S_2 \qquad (2.2.3)$$

каби тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу ерда: $c_{2j} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $(j = \overline{3,n})$, $S_2 = b_2^{(1)}/a_{22}^{(1)}$.

Энди эса (2.2.3) тенгламани $-a_{2j}^{(1)}(j = \overline{3,n})$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодани (2.2.2) тизимнинг иккинчи тенгламасидан бошлаб барча тенгламаларга қўшиб чиқамиз, у ҳолда

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 + \ldots + a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + a_{n4}^{(2)}x_4 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

каби тенгламалар тизими ҳосил бўлади.
Бу ерда:

$$a_{ji}^{(2)} = a_{ji}^{(1)} - a_{j2}^{(1)}c_{2i}, \quad b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - a_{j2}^{(1)}S_2, \quad (i, j = \overline{3,n}).$$

Учинчи, тўртинчи ва ҳоказо қадам

жараёнларини ҳам худди биринчи ва иккинчи қадам жараёнлари каби олиб бориб, охири n-қадамда

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)},$$

$$a_{nn}^{(n-1)} = a_{nn}^{(n-2)} - a_{n(n-2)}^{(n-2)}c_{(n-1)n}$$

каби ифода ҳосил қилинадики, ундан эса қуйидагини ҳосил қиламиз

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} = S_n \qquad (2.2.5)$$

Юқоридаги ҳосил қилинган барча тенгламаларни бирлаштириб

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = S_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = S_2, \\ \qquad\qquad x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = S_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + c_{(n-1)n}x_n = S_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = S_n \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

каби учбурчак шаклидаги тенгамалар тизимини ҳосил қиламиз, бу ерда:

$$c_{ki} = a_{ki}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \ \left(i = \overline{(k+1), n}\right).$$

$$b_j^{(k)} = b_j^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)}S_k.$$

Иккинчи босқич жараёнида (2.2.6) тизим ечилади, унинг учун тизимнинг охирги тенгламасидан x_n нинг қиймати топилиб, уни охирги тенгламадан олдингисига қўйилади ва натижада x_{n-1} нинг қиймати топилади, яъни:

$$x_{n-1} = S_{n-1} - c_{(n-1)n}x_n.$$

Бу жараён шу тариқа давом эттирилиб, биринчи тенгламадан

$$x_1 = S_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \ldots - c_{n(n-1)}x_{n-1} - c_{nn}x_n$$

топилади ва шу билан (2.1.1) тизимнинг ечилиш жараёни якунланади.

2.3. ДЕТЕРМИНАНТ ВА ТЕСКАРИ МАТРИЦАЛАРНИ ГАУСС УСУЛИДА ҲИСОБЛАШ ҲАМДА УЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИ ЕЧИШДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Биз аввалги бандда (2.1.1) тизимнинг (2.2.6) тизимга келтирилиш жараёнини Гаусс усулининг биринчи босқичида баён этиб, у жараён тизим асосий матрицасининг учбурчак шаклида ифодаланишлиги билан боғлиқ эканлигини кўриб ўтган эдик. Бу бандда эса, у жараёнинг тизим асосий матрицасининг детерминантини ҳамда тескари матрицани ҳисоблаш учун қўлланишлигининг мумкин эканлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда (2.2.6) тизимни қуйидаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = в_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = в_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = в_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

кўринишда ёзиб олиб, унинг коэффициентларидан тузилган матрицани эса P деб белгилаймиз, яъни:

$$P = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ . & & & . & . \\ & & & a_{(n-1)(n-1)}^{(n-2)} & a_{(n-1)n}^{(n-2)} \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{Vmatrix} \tag{2.3.2}$$

Шуни таъкидлаш лозимки, Гаусс усулидаги

биринчи босқич жараёнининг айрим ҳолларида тизим тенгламаларининг ўринлари шундай алмаштирилар эдики, навбатдаги қадам бошланиши олдидан $a_{ii}^{(i-2)}$ элемент нолдан фарқли бўлиши керак эди. Лекин асосий матрица йул элементларининг ўринлари алмашадиган бўлса, унга мос бўлган детерминант қийматининг ишораси тескарига ўзгаради. Шу боисдан ҳам

$$\det A = (-1)^k \det P = (-1)^k a_{11} a_{22}^{(1)} \ldots a_{nn}^{(n-1)} \qquad (2.3.3)$$

деб ёзиш мумкин бўлади, бу ерда k орқали A матрицанинг P учбурчакли матрицага ўзгартирилиш жараёнидаги йўлларнинг ўрин алмаштиришлар сони белгиланган.

Маълумки, агар A ва A^{-1} квадрат матрицалар учун AA^{-1} ёки $A^{-1}A$ кўпайтмалар E бирлик матрицани ифода этсалар, яъни $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ каби бўлса, A^{-1} ни A матрицанинг тескари матрицаси деб аталар эди. Эслатиб ўтамизки, махсус матрица учун тескари матрица мавжуд бўлмайди.

Гаусс усули ёрдамида A матрицага A^{-1} тескари матрицани ҳисоблаш учун (2.1.2) тизимни $AX = EB$ каби кўринишда ёзиб оламиз. Бунга нисбатан Гаусс усули қўлланилгандан кейин A матрица E бирлик матрицага ўзгариб, E матрица эса A^{-1} тескари матрицага ўзгаради:

$$EX = A^{-1}B \quad ёки \quad X = A^{-1}B \qquad (2.3.4)$$

Тенгламалар тизимининг номаълумлар олдидаги коэффициентлари ва озод ҳадлари устидаги алмаштиришларни ҳисоблаш қулай бўлсин учун Гаусс усулининг жараёнини махсус жадвалга тушириб бажарилади. Уларни биз чизиқли алгебраик тенгламалар тизимининг муайян мисолларида батафсил кўриб ўтамиз.

1-мисол. Қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ечиш талаб этилсин:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Ечиш. Бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

каби бўлганлиги учун тизимни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ёки

$$AX = EB. \tag{2.3.5}$$

Гаусс усули қўлланилгандан кейин (2.3.5) тенглама (2.3.4) каби тенглама кўринишига эга бўлишлиги жараёнини қуйидаги 1-жадвалга тушириб ёзамиз.

1-жадвал

	А-матрица	Е-бирлик матрица	В-озод ҳадлар вектори
	2 1 3 3 1 4 1 2 1	1 0 0 0 1 0 0 0 1	1 1 4
Биринчи қадам	1 1/2 3/2 0 -1/2 -1/2 0 1/2 -1/2	1/2 0 0 -3/2 1 0 -1/2 0 1	1/2 -1/2 7/2
Иккинчи қадам	1 0 1 0 1 1 0 0 -2	-1 1 0 3 -2 0 5 3 1	0 1 2
Учинчи қадам	1 0 0 0 1 1 0 0 1	-7/2 5/2 1/2 1/2 -1/2 1/2 5/2 -3/2 -1/2	1 2 -1

Жадвалдан P матрицани топамиз:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Бу ердан кўриняптики, $a_{11} = 2$, $a_{22}^{(1)} = -1/2$, $a_{33}^{(2)} = -2$, $k = 0$.

Энди (2.3.3) формулага асосан A матрица детерминантининг қийматини ҳисоблаймиз:

$$\det A = (-1)^k \det P = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) = 2.$$

У ҳолда A^{-1} тескари матрица кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/2 & 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 5/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Тескари матрицанинг тўғри ҳисобланганлигини (2.3.5) тенглик ёрдамида текширилади. Жадвалнинг охирги устунидан эса тизимнинг ечимини топамиз: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

<u>2-мисол (мустақил ишлаш учун).</u>

Қуйидаги тенгламалар тизими учун жадвал тузилиб, det A ни, A^{-1} ни ва унинг ечими топилсин:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 7/36$, $x_2 = -19/18$, $x_3 = -17/18$.

2.4. МУҲАНДИСЛИК КОНСТРУКЦИЯЛАРИ ВА ҚУРИЛМАЛАРИ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИНГ ЭРКИН ТЕБРАНИШЛАРИ БИЛАН БОҒЛИҚ БЎЛГАН МАТРИЦАЛАРИНИНГ ХОС ҚИЙМАТЛАРИ ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Маълумки, конструкция ва қурилмаларнинг эркин тебранишлари ташқи кучларнинг таъсирисиз юз беради ва

$$Bu»(t) + Au(t) = 0 \qquad (2.4.1)$$

каби оддий дифференциал тенглама орқали моделлаштирилади.

Бу ерда, $B = (b_{ij})$ ва $A = (a_{ij})$ лар квадрат матрицалар бўлиб, улар мос равишда конструкция ва қурилмаларнинг массалар ҳамда мустаҳкамликлар матрицалари деб юритиладилар, $u(t)$ ва $u»(t)$ лар эса устун - вектор функциялардир.

Юқоридаги (2.4.1) тенгламанинг ечимини

$$u(t) = X\cos\sqrt{\lambda}\, t \qquad (2.4.2)$$

каби кўринишда излаймиз. Бу ерда, $\sqrt{\lambda}$ ни доиравий частота деб аталиб, X вектор эса тебраниш шакли дейилади. Агар (2.4.2) ни ва унинг иккинчи тартибли ҳосиласини (2.4.1) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(A - \lambda \cdot B) \cdot X = 0 \qquad (2.4.3)$$

Бу тенглик X векторга нисбатан чизиқли бир жинсли алгебраик тенгламалар тизими бўлиб, $X = 0$ унинг ечими эканлиги равшан. Лекин, у ечим биз учун аҳамиятсиз ечим (яъни тривиал ечим), чунки бу ҳолда $u(t) = 0$ бўлади. Маълумки, агар (2.4.3) тизимнинг детерминанти нолга тенг бўлсагина, яъни,

$$|A - \lambda \cdot B| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

каби бўлса, у тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади.

Таъриф. Тривиал бўлмаган ечимга эга бўлган (2.4.3) тенгламани қаноатлантирувчи λ нинг қийматларини хос қийматлар ва уларга мос келувчи X векторни эса хос вектор деб аталади.

Демак, машиносозлик конструкциялари ва қурилмалари элементларининг тебраниши ҳақидаги масала чизиқли алгебранинг масалаларидан бирига келтирилиб ечилар экан.

Агар (2.4.4) детерминантни ҳисоблаб чиқилса, λ га нисбатан n-даражали алгебраик тенгламага эга бўламиз, яъни:

$$c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0 \quad (2.4.5)$$

ва бу тенглама (2.4.4) детерминантга мос бўлган матрицанинг хос қийматларини аниқлаш учун тавсифий тенглама деб юритилади.

Маълумки, n-даражали кўпҳаднинг n та илдизлари мавжуд бўлиб, улардан айримлари комплекс сонлар ҳам бўлишликлари мумкин. Аммо, A ва B матрицалар симметрик матрицалар бўлса, яъни агар $A = A^T$ ва $B = B^T$ каби шартни қаноатлантирса, у ҳолда, чизиқли алгебра курсидан маълумки, барча n та илдизларнинг ҳаммаси ҳақиқий сонлардан иборат бўлади. Худди ана шу ҳол машинасозлик муҳандислари учун муҳим аҳамиятга эгадир, чунки массалар ҳамда мустаҳкамлик матрицалари бўлган A ва B матрицалар ҳар доим ҳам симметрик матрицалар бўлади. Ундан ташқари у матрицалар кўп ҳолларда мусбат аниқланган матрицаларни ифодалайди,

$(AX, X) \geq 0, \ (BX, X) \geq 0 \forall X \neq 0, \ X \in R^n$, бу ерда:

$(Y, X) = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n$.

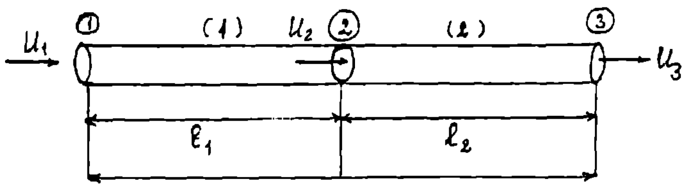
Бу ҳолда (2.4.5) тенглама илдизларидан бирортаси ҳам манфий сонлар бўлмайди.

Энди хос векторларни аниқлаш масаласини кўриб ўтамиз.

Ҳар бир $\lambda_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ хос қийматга $(A - \lambda_i B)X = 0$

каби тенгламалар тизимининг тривиал бўлмаган X_i ечими мос келади. Бу тизим детерминанти нолга тенг бўлганлиги учун унинг тенгламалари орасида ўзаро чизиқли боғланиш мавжуд, яъни, улардан бири қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади ва шу сабабли ҳам уни ташлаб юбориш мумкин бўлади. Натижада, X_i векторнинг ташкил этувчилари бўлган номаълумларга нисбатан (n-1) номаълумли (n-1)та чизиқли алгебраик тенгламалар тизимига эга бўламиз. У ерда X_i векторнинг номаълум ташкил этувчиларидан бирини ихтиёрий равишда танлаб олиб, бошқаларини эса қолган (n-1) та тенгламаларни ечиб топамиз. Бу келтирилган мулоҳазалардан кўриняптики, хос векторлар ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида топилар экан, яъни, X_i вектор ташкил этувчиларининг сон қийматлари улардан бирининг ихтиёрий равишда танланган қийматига боғлиқ бўлади. Қуйида келтириладиган мисоллар тимсолида юқоридаги масалаларни батафсилроқ баён этамиз.

1-мисол. Узунлиги l, кесим юзаси F ва погон массаси q_m бўлган эркин стержень бўйлама тебранишда бўлсин (1-расм).



(1-расм)

Агар стерженни $l/2$ узунликдаги иккита бўлакка ажратсак, у бўлакларнинг ҳар бири стерженнинг ўқ йўналиши бўйлаб силжиши мумкин. Бу йўсинда олинган модел учта эркинлик даражасига эга бўлади, яъни: $u(t)=\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$.

Масаланинг мустаҳкамлик ва массалар матрицалари эса

$$A = \frac{2EF}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{q_m l}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2.4.7)$$

каби кўринишларга эга бўлади.

Мазкур масала учун ёзилган (2.4.1) тенгламанинг ечими (2.4.2) дек кўринишда изланади, бу ерда X уч элементдан иборат устун-вектордир. Агар (2.4.7) ларни назарда тутиб, (2.4.2) ни (2.4.1) тенгламага қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\left\{\frac{2EF}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\lambda q_m l}{12}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Охирги тенгликни $(2EF)/\ l$ га бўлиб юбориб, $k = (q_m l^2\lambda)/(24EF)$ каби белгилаш киритсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{pmatrix} (1-2k) & -(1+k) & 0 \\ -(1+k) & 2(1-2k) & -(1+k) \\ 0 & -(1+k) & (1-2k) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.4.8)$$

Бу тизимнинг тривиал бўлмаган ечимини топиш мақсадида унинг детерминантини нолга тенглаштириб номаълум k га нисбатан тенгламага эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} (1-2k) & -(1+k) & 0 \\ -(1+k) & 2(1-2k) & -(1+k) \\ 0 & -(1+k) & (1-2k) \end{vmatrix} = 0$$

ёки $k(1\text{-}2k)(k\text{-}2)=0$. Бу тенгламани ечиб, $k_1=0$, $k_2=1/2$ ва $k_3=2$ ларни ҳамда уларга мос келувчи $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = (12EF)/(q_m l^2),\ \lambda_3 = (48EF)/(q_m l^2)$ ларни топамиз.

Энди k_1, k_2, k_3 ларга мос келувчи хос векторлар бўлган

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}$$

каби векторларни аниқлаймиз.

Агар (2.4.8) тизимда $k = k_1 = 0$ деб олсак, у ҳолда у тизим

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0$$

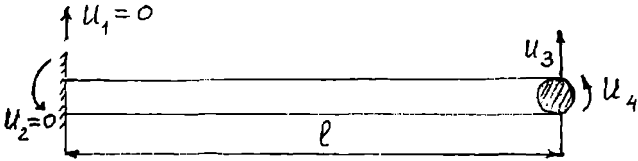
кўринишда бўлиб, ундан эса қуйидаги тизимни ҳосил қиламиз

$$\begin{cases} x_{11} - x_{12} + 0 \cdot x_{13} = 0, \\ -x_{11} + 2x_{12} - x_{13} = 0, \\ 0 \cdot x_{11} - x_{12} + x_{13} = 0. \end{cases}$$

Тизимда $x_{11} = 1$ деб қабул қилсак, у ҳолда $x_{12} = 1$ ва $x_{13} = 1$ ларни ҳосил қиламиз. Демак, $k = k_1 = 0$ хос қийматга $X_1 = (1,1,1)^T$ каби хос вектор мос келар экан.

Айнан юқоридагига ўхшаш, $k = k_2 = 1/2$ ва $k = k_3 = 2$ хос қийматларга $X_2 = (1,1,-1)^T$ ва $X_3 = (1,-1,1)^T$ каби хос векторлар мос келади (бу масалани ҳал этиш китобхонларга ҳавола этилади).

2-мисол. Узунлиги l бўлиб, четида массаси M_0 бўлган юк тўпланган консол тўсин эгилма тебранишда бўлсин (2-расм).



2-расм.

Тўсинни иккита эркинлик даражага эга қилиб идеаллаштирамиз ва юкнинг умумий инерция моментини нолга тенг деб қабул қиламиз. Бу ердаги мустаҳкамлик ва массалар матрицалари қуйидагича ёзилади:

$$A = \frac{2EJ}{l^3}\begin{pmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{q_m l}{210}\begin{pmatrix} 6(13+35\gamma) & -11l \\ -11l & 2l^2 \end{pmatrix}.$$

Бу ерда J, кесимнинг инерция моментини, q_m , тўсиннинг погон массасини ва $\gamma = M/(q_m l)$ эса юк массасининг тўсин массасига бўлган нисбатини ифодалайди.

Қаралаётган масала учун тавсифий тенгламанинг кўриниши қуйидагича ёзилади: $35(1+12\gamma)k^2 - 6(17+70\gamma)k + 3 = 0$. Бу ерда k орқали $(q_m l^4 \lambda)/(420EJ)$ каби ўлчовсиз миқдор белгиланган.

Агар $\gamma = 0$ бўлса, k_1 ва k_2 хос қийматлар аниқлансин. Жавоб: $k_1 = 0{,}02972$; $k_2 = 2{,}885$.

2.5. МАТРИЦАЛАРНИНГ ШАРТЛАНГАНЛИГИ. ЁМОН ШАРТЛАНГАН ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИ

Чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини умумий ҳолда ечишлик, ундаги номаълумларнинг сони катта миқдорда бўлганлиги сабабли анча қийин муаммолардан бири эканлигини биз юқорида кўриб ўтган эдик. Масалан, агар тизим Гаусс усулида ечиладиган бўлса, у ерда яхлитлаш хатоликларининг рўй бериши табиий ва бу хатоликлар тўпланиб, охирги натижани бузиб кўрсатиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, қуйидаги икки номаълумли иккита чизиқли алгебраик тенгламалар тизими

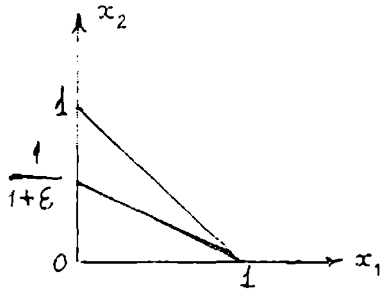
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 1 \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

қаралаётган бўлсин. Унинг $\varepsilon \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи аниқ ечими $x_1 = 1$ ва $x_2 = 0$ каби бўлади. Аммо бу тизимни Гаусс усули билан ечиладиган бўлса (яхлитлаш хатоликларини эътиборга олиб), у ҳолда:

$$x_1 = (\varepsilon + \delta_2)/(\varepsilon + \delta_1), \quad x_2 = \delta_3/(1 + \delta_1) \qquad (2.5.2)$$

лар ҳосил бўлади. Бу ерда $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ лар яхлитлаш хатоликлари бўлиб, улар ЭҲМ хотирасининг бўғинларидаги сонлардир.

Агар $\delta_1, \delta_3, \varepsilon$ сонлар бир хил тартибдаги сонлардан иборат бўлсалар, у ҳолда, (2.5.2) формулалар ёрдамида ҳисобланадиган x_2 нинг қиймати, $x_2 = 0$ аниқ ечимдан исталганча фарқ қилишлиги мумкин (3-расмда тизимнинг график усулида ечилиши тасвирланган). Шуниндек, ε кичик сон бўлиб, тенгламаларнинг коэффициентлари ёки озод ҳадларнинг берилишларида ҳам кичик хатоликлар бўладиган бўлса, улар ечимда жиддий хатоликлар юз беришига олиб келиши мумкин.



(3-расм)

Яхлитлаш хатоликлари ҳамда юқорида баён этилган хатоликларга нисбатан кузатилган бу нобарқарорликни, ε кичик сон бўлганда, 3-расмда тасвирланган тўғри чизиқларнинг қарийб параллел эканликлари билан тушунтириш мумкин.

Энди (2.5.1) тизим асосий матрицасининг хос қийматларини топиш масаласи билан шуғулланамиз. Шу мақсадда, асосий матрица A га асосан,

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1+\varepsilon-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+\varepsilon(1-\lambda)-1=0$$

ни ёзиб оламиз ва уни соддалаштириб, $\lambda^2-(2+\varepsilon)\lambda+\varepsilon=0$ каби тавсифий тенгламани ҳосил қиламиз.

Тавсифий тенглама илдизлари

$$\lambda_1=1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2},\quad \lambda_2=1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4+\varepsilon^2}$$

(2.5.3)

лардан кўриняптики, агар $\varepsilon\to 0$, уларга мос бўлган хос қийматлар $\lambda_1=\frac{\varepsilon}{2}$ ва $\lambda_2=2$ лар бўлиб, $\lambda_1/\lambda_2\to 0$.

Таъриф. Агар чизиқли алгебраик тенгламалар тизимининг асосий матрицасининг минимал хос қиймати билан максимал хос қиймати орасидаги нисбатни ифодаловчи миқдор кичкина сон бўлса, у тизимни ҳамда асосий матрицани мос равишда ёмон шартланган тизим ҳамда матрица деб юритилади.

Фараз килайлик, n номаълумли n та алгебраик тенгламалар тизимининг асосий матрицаси A симметриявий бўлсин, яъни у n та бир-бирига боғлиқ бўлмаган $\bar{K}_i (i = \overline{1, n})$ хос векторларга эгаки, у векторлар ўз навбатида базис векторларни ташкил этади. Бошқа бирор $\bar{l}_i = \{\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}\}$ базисдан $\bar{K}_i$ базисга ўтиш бошқа бирор V матрица орқали амалга оширилади, яъни: $V{:}\bar{K}_i = V_{ij}\bar{l}_j$. У ҳолда A матрицанинг $\bar{K}_i$ базисдаги кўриниши $A' = VAV^{-1}$ каби бўлади. Шу сабабдан, A ва A' матрицаларнинг детерминантлари бир хил бўлади:

$$\det A' = \det V \cdot \det A \cdot \det V^{-1} = \det A.$$

Лекин A матрицанинг $\bar{K}_i$ хос векторлар базисидаги кўриниши диагонал шаклда бўлиб, унинг бош диагонал элементлари хос сонлардан иборатдир.

Шунингдек, A матрица ёмон шартланган матрица бўладиган бўлса, унинг детерминантининг қиймати ҳам кичик бўлиб, тескари матрица элементлари эса катта қийматлардан иборат бўлади, яъни: $A^{-1} = A_{ij} / \det A$. Бу ерда, A_{ij} лар орқали A матрицанинг элементларига мос бўлган алгебраик тўлдирувчилар белгиланган. Шунинг учун ҳам тизимнинг озод ҳадларидаги яхлитлашлар натижасида рўй берадиган хатоликлар (улар қанчалик кичик бўлмасинлар) га ечимда ҳам катта хатоликлар мос келар экан.

Агар (2.5.1) тизимнинг асосий A матрицасининг детерминанти ε га тенг эканлигини эътиборга олсак, унинг тескари матрицаси қуйидагича ёзилади:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1} \\ -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

Фараз қилайлик, (2.5.1) тизимнинг озод ҳадлари тақрибан берилган бўлсин, яъни, масалан, $b_1 \approx 1$, $b_2 \approx 1$ каби бўлсин. У ҳолда тизимнинг ечими қуйидагича ёзилади:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon^{-1} & -\varepsilon^{-1} \\ -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (2.5.4)$$

Бу (2.5.4) дан кўринадики, (2.5.1) тизимнинг ечими $\varepsilon \to 0$ да барқарор эмас экан.

Муҳандислик конструкциялари ва қурилмаларининг кўпгина масалалари математик жиҳатдан ёмон шартланган чизиқли алгебраик тенгламалар тизими орқали моделлаштирилади. Улар Гаусс усули каби усуллар билан ечиладиган бўлса, яхши натижаларга эриша олмаслигимизни юқорида кўриб ўтган эдик. Шу сабабдан, яхлитлаш ҳамда озод ҳадларнинг берилишларидаги хатоликларга қарамасдан, уларга нисбатан барқарор бўлган усуллар ёрдамида тенгламалар тизимларини ечиш муҳим аҳамият касб этади. Ана шундай усуллар сирасига итерация усулларини киритиш мумкин.

2.6. ИТЕРАЦИЯ УСУЛЛАРИНИНГ УМУМИЙ ТАВСИФЛАРИ

Чизиқли алгебраик тенгламалар тизимларини ечиш жараёнидаги ҳисоблашларнинг барқарорликларини таъминлаш муаммоларининг ҳал қилиниши муносабати билан вужудга келган усуллардан энг кўп тарқалгани итерация усулларидир.

Маълумки, $AX = B$ каби тенгламалар тизимини итерация усуллари билан ечиш, тизимнинг изланаётган аниқ ечими X га яқинлашувчи бўладиган $X_0, X_2, \ldots, X_к, \ldots$; каби итерация кетма-кетликларини қуриш жараёнига асосланган эди. Ҳар бир бундай усул ўзининг шундай итерация формуласи билан тавсифланадики, у навбатдаги $X_{к+1}$ тақрибий қийматнинг аввал топилган тақрибий қийматлар орқали ҳисобланишга имкон беради. Энг содда ҳолатда $X_{к+1}$ ни ҳисоблаш учун фақат биттагина аввалги $X_к$ итерациядан фойдаланилади. Буни биз бир қатламли ёки икки қатламли усул деб юритамиз ва у учун итерация формуласини қуйидагича шаклда ёзиш қабул қилинган:

$$B \cdot \frac{X_{k+1} - X_k}{\tau_{k+1}} + AX_k = B \tag{2.6.1}$$

Бу ерда: B- ёрдамчи махсус матрица, $\tau_{к+1}$ -итерация параметрларидир. Уларни биз энг яхши яқинлашишликни таъмин этишлик мақсадида маълум тарзда танлаймиз. Масалан, (2.5.1) тизим учун (2.6.1) формула $B = E$ ва $\tau_{к+1} = \beta$ қилиб танланганда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \beta(x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - 1), \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \beta(x_1^{(k)} + (1+\varepsilon)x_2^{(k)} - 1). \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Шунингдек, $\varepsilon = 1/\beta$ деб олиб, нолинчи яқинлашиш сифатида $x_1^{(0)} = 0{,}9$ ва $x_2^{(0)} = 0$ ларни танлаймиз.

Қуйидаги 2-жадвалда, вергулдан кейин 9 та ишончли рақамларга эришишлик учун зарур бўладиган итерациялар сонининг итерация параметри β дан боғлиқлиги келтирилган.

2-жадвал

β	итерациялар сони		итерациялар сони
манфий	узоқлашувчилик	0,6	133
0,7	узоқлашувчилик	0,5	53
0,65	275	0,1	200

Бу жадвалдан кўриняптики, $\beta = 0{,}7$ бўлганда итерация узоқлашувчи бўлиб, $\beta = 0{,}65$ бўлганда эса 9 та ишончли рақамга эришишлик учун мос равишда атиги 53 та ва 200 та итерациялар талаб этилар экан. Таъкидлаш лозимки, (2.6.2) каби схема яқинлашувчи бўлишлиги учун $\beta \le 2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ шарт бажарилишлиги керак. Бу ердаги λ_1 ва λ_2 ларнинг қийматлари (2.5.3) каби формулалар орқали ҳисобланади. Текшириш қийин эмаски, бу шартни $\beta = 0{,}7$ қаноатлантирмасдан, $\beta = 0{,}65$ билан $\beta = 0{,}5$ лар қаноатлантирар экан. Юқоридаги мисолдан кўриняптики, итерацияларнинг сони β параметрнинг танланишига етарли даражада боғлиқ экан.

Энди (2.6.1) даги итерация параметрлари τ_{k+1} ларнинг энг мақбул танланиши назариясини умумий ҳолда баён этамиз.

Таъриф. Бирор X векторнинг нормаси деб

$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ каби ифодага айтилади.

Таърифга кўра, у ҳолда, бирор X ва У каби векторлар орасидаги масофа

$\rho(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ каби формула билан аниқланади.

Қуйидаги ифодаларни ҳар доим ўринли бўлсин деб фараз этамиз: $(Au, V) = (u, AV), (Au, u) \geq 0,$

$$(Bu, V) = (u, BV), (Bu, u) \geq 0, \qquad (2.6.3)$$

Бирор итерация усули қўлланиб, X_{k+1} нинг X га яқинлашишлигини ҳосил қилдик деб фараз қилайлик, яъни: $\lim\limits_{k\to\infty} X_{k+1} = X$ ёки

$$\rho(X_{k+1}, X) = \|X_{k+1} - X\| = \sqrt{\left(x_1^{(k+1)} - x_1\right)^2 + \ldots + \left(x_n^{(k+1)} - x_n\right)^2} \to 0.$$

Бу ердан кўриняптики, $X_{\kappa+1}$ векторлар кетма-кетлигининг X векторга яқинлашлигининг зарурий ва етарли шартлари бўлиб, уни ташкил этувчиларининг яқинлашишликлари ҳисобланар экан, яъни:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k+1)} = x_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Агар Xк итерация билан X аниқ ечим орасидаги айирма (уни хатолик деб аталади) ни Z_k деб белгиласак, у ердаги $X_\kappa = Z_k + X$ ни эса (2.6.1) га қўйсак, у Z_k хатолик учун қуйидаги кўринишда итерация формуласини ҳосил қиламиз:

$$B(Z_{k+1} - Z_k) / \tau_{k+1} = -A \cdot Z_k.$$

Бу ердан

$$Z_{k+1} = Z_k - \tau_{k+1} B^{-1} A Z_k, \quad \left(k = \overline{0,n}\right).$$

ни ёки

$$Z_1 = Z_0 \cdot \left(E - \tau_1 B^{-1} A\right),$$

. . . .

$$Z_k = \left[\prod_{j=0}^{k} \left(E - \tau_{j+1} B^{-1} A\right)\right] \cdot Z_0 = T_k Z_0$$

ларни ҳосил қиламиз.
Бу ерда:

$$T_k = \prod_{j=0}^{k}\left(E - \tau_{j+1}B^{-1}A\right).$$

Норма тушунчасидан фойдаланиб, қуйидагини ҳам ёзиш мумкин:

$$\|Z_k\| \le \|T_k\| \cdot \|Z_0\|$$

Маълумки, агар (2.6.3) каби ифодалар ўринли бўлса, у ҳолда A ва B матрицаларнинг максимал хос қийматлари билан уларнинг нормалари $\|A\|$ ва $\|B\|$ лар бир хил бўлар эди.

Агар $C = B^{-1} \cdot A$ деб белгилаш киритсак, у ҳолда T_k кўпҳад C га нисбатан ($k + 1$) даражали бўлган $T_k = P_k(C)$ кўпҳадни ифода этади ва унинг хос қийматлари $P_k(\lambda_i)$ сонлардан иборат бўлиб, у ердаги $\lambda_i (i = \overline{1,k})$ лар эса - C матрицанинг хос қийматларидир, яъни,

$$(C + \lambda_i) \cdot X_i = 0 \text{ ёки } (A + \lambda_i B) \cdot X_i = 0, \quad (i = \overline{1,N}) \qquad (2.6.4)$$

Бу ердаги N, қаралаётган фазонинг ўлчови бўлиб, у алгебраик тенгламалар тизимининг сонига тенг бўлади. Энди $\|T_k\|$ ни осонгина ҳисоблаш мумкин:

$$\|T_k^{\cdot}\| = \max_{\lambda_\alpha}|P_k(\lambda_\alpha)|, \quad (\alpha = \overline{1,N}).$$

Табиийки, τ_{k+1} параметрларни танлаш қуйидаги шарт $\min\limits_{\tau_j} \max\limits_{\gamma_1 \le \lambda \le \gamma_2}|P_k(\lambda)|, \quad (j = \overline{1,N})$ (2.6.5)

га бўйсуниши керак, бу ерда $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ лар мос равишда юқорида келтирилган (2.6.4) масаланинг минимал ва максимал хос қийматларидир. Бу ердаги

$\max|P_k|$ нинг минимумга эришишлиги учун P_k кўпҳад билан $(k+1)$ даражали Чебишев кўпҳади бир хил бўлишлиги керак. У ердан эса, τ_j параметрлар қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$\tau_j = 2\Big/\left[(\gamma_1+\gamma_2)-(\gamma_2-\gamma_1)\cos\frac{\pi}{2}(2j-1)\right].$$

Бу ерда k қаралаётган циклдаги итерациялар сонини ифода этади. Оддий итерация ҳосил бўлишлиги учун $k = 1$ бўлишлиги керак, у ҳолда, (2.6.5) дан қуйидагиларни ёзиш мумкин бўлади:

$$\tau = 2/(\gamma_1+\gamma_2), \quad \gamma_1 = \lambda_1, \quad \gamma_2 = \lambda_2.$$

Шундай қилиб, итерация параметрларининг танланилиши масаласи анчагина қийин масала эканлигига ишонч ҳосил қилдик. Шу муносабат билан ҳисоблашларда итерация параметрларини кўпинча эмпирик қилиб ёки бошқа бирор йўл билан танланади.

Қуйида итерация усулларидан иккитасини баён этамиз.

2.7. ОДДИЙ ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.

Фараз қилайликки, яна (2.1.1) ёки (2.1.2) каби тенгламалар тизими қаралаётган бўлиб, унинг А асосий матрицасидаги бош диагонал элементлари $a_{ii} \neq 0 (i=\overline{1,n})$ бўлсин. Тизимга тенг кучли бўлган қуйидаги

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{21}x_1 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \qquad (2.7.1)$$

тизимни ёзамиз. Бу ерда:

$$\beta_i = b_i / a_{ii}, \ \ \alpha_{ij} = a_{ij} / a_{ii}, \ \ \alpha_{ii} = 0.$$

Агар

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \beta = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{Vmatrix}$$

каби белгилашлар киритилса, (2.7.1) тизим қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (2.7.2)$$

Матрицавий шаклда эса:

$$X = \beta - \alpha X.$$

Юқоридаги (2.7.2) тизимни нормал шаклга келтирилган тизим деб атаймиз ва уни кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз.

Нолинчи яқинлашишлик сифатида озод ҳадлар устунини қабул қиламиз, яъни:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \qquad (2.7.3)$$

Биринчи, иккинчи ва бошқа яқинлашишликлар учун қуйидаги устун-матрицаларни тузамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$ - биринчи

яқинлашишлик

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$ - иккинчи

яқинлашишлик

ва ҳоказо шу тарзда давом эттираверамиз.

Умуман, $(k+1)$ яқинлашшишликни

$$X^{(k+1)} = \beta - \alpha X^{(k)} \qquad (2.7.4)$$

каби формула бўйича ҳисоблаймиз.

Агар α матрица элементлари учун қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \quad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \quad (i, j = \overline{1, n})$$

шартлардан бирортаси бажариладиган бўлса, $X^{(0)}$ ҳар қандай бошланғич вектор бўлганда ҳам итерация жараёни тизимининг аниқ ечимига яқинлашувчи бўлишлиги маълум эди, яъни:

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)} = X. \qquad (2.7.5)$$

Шу билан биргаликда, (2.7.4) итерация жараёнининг яқинлашувчилиги α матрицанинг нормалари билан қуйидаги муносабатлар орқали боғланган, яъни, агар

$$\|\alpha_1\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \quad \|\alpha_2\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

ёки

$$\|\alpha_3\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2} < 1$$

каби шартлардан бирортаси бажариладиган бўлса, чизиқли алгебраик тенгламалар тизимининг итерацияси ягона ечимга яқинлашувчидир.

Агар $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X$ каби бўлса, бу лимит (2.7.2) тизимнинг ечими бўлади, чунки, $\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty}(\beta - \alpha X^{(k)})$

дан $X = \beta - \alpha X$ ни ёзиш мумкин.

1-мисол. Қуйидаги тизимни оддий итерация усулида ечамиз.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

<u>Ечиш.</u> Тизимни нормал ҳолатга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 3{,}25 - 0{,}125x_2 - 0{,}125x_3, \\ x_2 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3, \\ x_3 = 1{,}4 - 02x_1 + 0{,}2x_2. \end{cases}$$

Бу ерда:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}125 & 0{,}125 \\ 0{,}2 & 0 & -0.2 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Энди яқинлашишлик шартларини текширамиз

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = 0{,}125 + 0{,}125 = 0{,}25 < 1,$$
$$|\alpha_{21}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{23}| = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4 < 1,$$
$$|\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| + |\alpha_{33}| = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4 < 1.$$

Демак, яқинлашишлик шартлари бажарилар экан, шунинг учун нолинчи яқинлашишлик сифатида қуйидагини ёзамиз

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}.$$

Биринчи ва иккинчи яқинлашишликлар эса, мос равишда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}03 \\ 1{,}03 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}9 \\ 1{,}03 \\ 1{,}03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}992 \\ 1{,}026 \\ 1{,}026 \end{pmatrix}.$$

Ниҳоят учинчи яқинлашишлик учун эса қуйидагини ёзамиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1{,}4 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}992 \\ 1{,}026 \\ 1{,}026 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}9935 \\ 1{,}0068 \\ 1{,}0068 \end{pmatrix}.$$

Бу ердан, $x_1 = 2{,}9935$, $x_2 = 1{,}0068$, $x_3 = 1{,}0068$ ларни ва улардан 10^{-2} аниқлик билан $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$ ларни ҳосил қиламиз.

2-мисол (мустақил ечиш учун).

Қуйида берилган тизимни юқоридаги усул билан 10^{-3} каби аниқликда ечилсин

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9, \\ 2{,}2x_1 + 91{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7, \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 0{,}236$; $x_2 = 1{,}103$; $x_3 = -0{,}214$.

2.8. ЗЕЙДЕЛ УСУЛИ

Зейдел усули кетма-кет яқинлашишлик усулининг такомиллашган туридан иборат бўлиб, у усул ёрдамида x_i номаълумнинг $(k+1)$ яқинлашишлигини ҳисоблашда $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ номаълумларнинг аввал ҳисобланган $(k+1)$ яқинлашишликларидан фойдаланилади.

Айтайлик, яна (2.1.1) каби тизим қаралаётган бўлиб, унинг асосий матрицасининг барча диагонал элементлари нолдан фарқли бўлсин. Уни қуйидаги кўринишдаги нормал шаклга келтирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \ldots + \alpha_{3n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (2.8.1)$$

бу ерда: $\beta_i = b_i / a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -a_{ij} / a_{ii}$, $\alpha_{ii} = 0$.

Тизим илдизларининг бошланғич яқинлашишликларини $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ каби ихтиёрий тарзда танлаб, уларни (2.8.1) тизимнинг биринчи тенгламасига қўямиз, у ҳолда:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)}$$

ва бу биринчи яқинлашишликни келтириб тизимнинг иккинчи тенгламасига қўямиз, у ҳолда:

$$x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)}.$$

Бу жараённи шу тарзда давом эттириб, охирида қуйидагига эга бўламиз:

$$x_n^{(1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{n(n-1)}x_{n-1}^{(1)} + \alpha_{nn}x_n^{(0)}.$$

Кейин иккинчи, учинчи ва бошқа итерациялари ҳам шу тарзда қурамиз. Шундай қилиб, x_i илдизларнинг k - яқинлашишликларини маълум деб фараз қилиб, Зейдел усули бўйича $(k+1)$ яқинлашишлик қуйидаги формулалар билан қурилади:

$$\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\
&x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \alpha_{21} x_1^{(k+1)}, \\
&\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
&x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \; (k = \overline{0, n}),
\end{aligned} \qquad (2.8.2)$$

Агар $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \; (i = \overline{1, n})$ ёки $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (2.8.3)

каби шартлардан бирортаси бажариладиган бўлса, (2.8.1) тизим учун кетма - кет яқинлашишлик ва Зейдел жараёнлари бошланғич векторни қандай танланишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ягона ечимга яқинлашувчи бўладилар.

Агар (2.1.1) тизим учун $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad (i = \overline{1, n})$ шарт бажариладиган бўлса, (2.8.3) шартнинг бажарилиши, у тизим учун кетма - кет яқинлашишлик ва Зейдел жараёнларининг яқинлашувчи эканликларига тенг кучлидир.

1-мисол. Зейдел усули билан қуйидаги тизим ечилсин:

$$\begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0, \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3. \end{cases}$$

Ечиш. Тизимни нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{cases} 10x_1 = 0 + 0,1x_1 + 1,5x_2 + 2,6x_3, \\ 20x_2 = 8,2 - 0,4x_1 + 6,4x_2 + 4,2x_3, \\ 10x_3 = -1,3 - 0,7x_1 - 0,4x_2 + 2,9x_3, \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 0,01x_1 + 0,15x_2 + 0,26x_3, \\ x_2 = 0,41 - 0,02x_1 + 0,32x_2 + 0,21x_3, \\ x_3 = -0,13 - 0,07x_1 - 0,04x_2 + 0,29x_3. \end{cases}$$

Охирги тизим матрицасининг кўриниши:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & -0,04 & 0,29 \end{pmatrix}$$

каби бўлганлиги учун (2.8.3) шартнинг бажарилишлигини текширамиз:

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{ij}| = 0,01 + 0,15 + 0,26 = 0,42 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{2j}| = 0,02 + 0,32 + 0,21 = 0,55 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |\alpha_{3j}| = 0,07 + 0,04 + 0,29 = 0,4 < 1.$$

Бу ердан кўриняптики, итерация жараёни яқинлашувчи экан. Нолинчи яқинлашишлик сифатида озод ҳадлар устунини олиб, биринчи яқинлашликларни қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$x_1^{(1)} = 0 + 0{,}01 \quad 0 + 0{,}15 \quad 0{,}41 + 0{,}26 \quad (-0{,}13) = 0{,}0953$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}41 - 0{,}02 \quad 0{,}0953 + 0{,}32 \quad 0{,}41 + 0{,}21 \quad (-0{,}13) = 0{,}512$$

$$x_3^{(1)} = -0{,}13 - 0{,}07 \quad 0.0953 - 0{,}04 \quad 0{,}512 + 0{,}29 \quad (-0{,}13) = -0{,}1948$$

ва шу тарзда давом эттира бориб бошқа яқинлашишликларни ҳам қурамиз.

2-мисол. (мустақил ечиш учун).

Қуйида берилган тизимни нормал кўринишга келтирилиб, Зейдел усули ёрдамида итерациялар қурилсин (биринчи ва иккинчи яқинлашишликлар билан чегаралансин).

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9, \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7, \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4. \end{cases}$$

Жавоб:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}97 \\ -0{,}14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2207 \\ 1{,}0703 \\ -0{,}1913 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2354 \\ 1{,}0985 \\ -0{,}2118 \end{pmatrix}.$$

3-БОБ
МАҚБУЛЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Кўп ўзгарувчи функцияларнинг бир қатор шартларга бўйсинувчи экстремум қийматларини ҳисоблаш масаласи, одатда, мақбуллаштириш масаласи деб номланади. Шунигдек, у функцияларни мақсад функциялари, шартларни эса, масаланинг чегараланиш шартлари деб юритилади.

Масалан, лойиҳачи муҳандис ўз ишини чекланган мавжуд имкониятлар ва ноқулай тасодифий вазиятлар доирасида бажаришига тўғри келадики, натижада у ўз олдига қўйилган муаммони ҳал қилишлиги учун энг мақбул йўлларни қидириб топади, бошқача айтганда, у мақбуллаштириш масаласи билан шуғулланади. Шу сабабдан ҳам барча муҳандислар ҳамда лойиҳачилар учун мақбуллаштириш масалалари муҳим масалалардан ҳисобланади.

3.1 МАҚБУЛЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИДАН АЙРИМЛАРИНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАРИНИ ҚУРИШ

Кўп ҳолларда, мақбуллаштириш масалаларини ечиш жараёнида иқтисодий жиҳатларни ҳисобга олиш лозим бўлади. Бу ўз навбатида, дастурлаштириш масаласини ечишликни тақозо этади. Бу жиҳатлар эса, махсус шартлар қаноатлантирилганда ва аниқ мақсадлар амалга оширилганда бирор масалани бажариш учун мавжуд имкониятлардан энг яхши фойдаланиш (масалан, харажатни минималлаштириш ёки максимал фойда олиш кабилар) билан боғлиқдир.

Масалан, ҳар хил қурилма ва конструкциялар лойиҳалаштирилаётганда, лойиҳачиларни шундай қурилма ва конструкцияларни барпо этишлик қизиқтирадики, биринчидан, улар ҳар хил ички ва ташқи таъсирларга бардошли бўлишлари, иккинчидан эса, уларга энг кам харажат сарфланган бўлиши керак бўлади.

Мақбуллаштириш ёки дастурлаштириш масаласи математик жиҳатдан қуйидагича таърифланиши мумкин, яъни, бирор мақсад функцияси

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(X) \qquad (3.1.1)$$

нинг $x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n})$ шарт бажарилганда,

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i(X) \leq b_i \qquad (3.1.2)$$

каби шартларни қаноатлантирувчи экстремум қийматларини топиш талаб этилади.

Агар $F(X)$ ва $\varphi_i(X)$ функциялар чизиқли бўлсалар, (3.1.1) билан (3.1.2) ни чизиқли дастурлаштириш масаласи деб, акс ҳолда ночизиқли дастурлаштириш масаласи деб юритилади. Мақсад функцияси, (3.1.2) шартлар билан биргаликда қаралаётган масаланинг математик моделини ифода этади ва у ҳар бир муайян ҳол учун ҳар хил кўринишларда бўлади.

Шундай қилиб, иқтисодиёт, корхоналарни бошқариш, мақбул лойиҳалаштириш, ишлаб чиқаришни режалаштириш, машина ва аппаратлар ёки ракета ва тайёраларни лойиҳалаштириш, транспорт воситаларининг ҳаракатини бошқариш ҳамда бошқа турли хил масалаларни ечишда математик усулларни қўллаш учун ўрганиладиган жараённи математик муносабатлар билан ифодалаш ёки бошқача айтганда, у жараённинг математик моделини қуриш лозим бўлар экан.

Масалан, ишлаб чиқаришни режалаштириш ҳақидаги масаланинг математик моделини қуриш жараёни билан танишиб ўтайлик. Бу билан ишлаб чиқариш омилларининг маълум бир ресурслари (хомашё, ишчи кучлари, жиҳозлар ва бошқалар)га эга бўлган корхонанинг турли хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш режасини тузиш масаласи ҳал этиладики, натижада ўша корхона энг кўп фойда оладиган бўлади.

Айтайлик, корхонада A_1 ва A_2 каби икки хилдаги маҳсулотлар тайёрланадиган бўлсин. Унинг учун эса, B_1, B_2, B_3 хиллардаги ишлаб чиқариш омиллари лозим бўлсин ва уларнинг корхонадаги ресурслари мос равишда $в_1, в_2, в_3$ бирликларни ташкил этсин. Шу билан биргаликда, $i (i=1,2,3)$ хилдаги ишлаб чиқариш омилларининг j $(j=1,2,3)$ хилдаги маҳсулот бирлигига бўлган сарфи a_{ij} бирликдан иборат бўлсин. Маҳсулотнинг ҳар бир турига корхона мос равишда c_1 ва c_2 бирликлардаги фойда олади. Корхона энг кўп фойда олиши учун ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча бирликда тайёрлашлиги кераклигини аниқлаш талаб этилади.

Масаланинг шартини 3 - жадвал кўринишида ифода этамиз.

3-жадвал

Ишлаб чиқариш омилларининг хиллари	Маҳсулотнинг хиллари		Ишлаб чиқариш ресурсларининг заҳиралари
	A_1	A_2	
B_1	a_{11}	a_{12}	$в_1$
B_2	a_{21}	a_{22}	$в_2$
B_3	a_{31}	a_{32}	$в_3$
Фойда	c_1	c_2	
Режа	x_1	x_2	

Масаланинг математик моделини қуриш учун корхона A_1 турдаги маҳсулотдан x_1 бирликда, A_2 турдаги маҳсулотдан x_2 бирликда ишлаб чиқарадиган бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда, маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарф қилинадиган ишлаб чиқариш омилларининг ресурсларини ҳисобга олган ҳолда қуйидагини ёзиш мумкин бўлади, яъни:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le в_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le в_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le в_3 \end{cases}$$

ва бу шартлар маҳсулот тайёрлаш учун сарфланадиган ишлаб чиқариш омилларининг миқдори мавжуд ресурслардан ошиб кетмаслигини ифода этади. Агар A_1 турдаги маҳсулот ишлаб чиқарилмаса, $x_1=0$ бўлиб, аксинча $x_1 \ge 0$ бўлади ёки A_2 маҳсулот учун ҳам мос равишда $x_2=0$ ёки $x_2 \ge 0$ дейиш мумкиндир. Умуман, $x_1 \ge 0$ ҳамда $x_2 \ge 0$ деб ёзиш мумкин экан.

Маҳсулотнинг x_1 бирлигини сотиш натижасида c_1x_1, x_2 дан эса c_2x_2 сўм фойда олинади, у ҳолда йиғинди фойдани ифодаловчи функция, қаралаётган масаланинг мақсад функциясини ифода этади, яъни

$$z = F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (3.1.4)$$

Ечилажак масаланинг асосий мақсади бўлиб, A_1 ва A_2 маҳсулотларни сотишдан олинадиган максимал фойда ҳисобланади, яъни x_1 ва x_2 ларнинг шундай мусбат қийматларини топиш лозимки, $F(x_1,x_2)$ мақсад функцияси ўзининг максимум қийматига $\max z = \max F(x_1,x_2)$ ни қуйидаги

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1,x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le в_1, \\ &\varphi_2(x_1,x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le в_2, \\ &\varphi_3(x_1,x_2) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le в_3, \qquad (3.1.5) \\ &x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

чегараланишларда эришадиган бўлсин.

Бу ердаги $F(x_1,x_2)$ ва $\varphi_i(x_1,x_2)$ функциялар чизиқли бўлганликлари учун ҳам (3.1.4) билан (3.1.5) биргаликда чизиқли дастурлаштиришнинг математик моделини ифодалайди.

Мазкур масалани n хилдаги маҳсулотни ишлаб чиқариш ҳолига умумлаштириш мумкин. Айтайлик, корхона $A_j(j=\overline{1,n})$ каби n хилдаги маҳсулотни m хилдаги ресурслардан фойдаланиб ишлаб чиқарадиган бўлсин. Бу ерда ҳам $B_i(i=\overline{1,m})$ лар орқали ресурсларнинг хилларини, b_i лар орқали ресурсларнинг заҳираларини, a_{ij} лар орқали j маҳсулотнинг тайёрланишига кетадиган i ресурснинг миқдорий бирлигини ва c_j орқали эса, j маҳсулот бирлигини сотиш натижасида олинадиган фойда миқдори белгиланади (4-жадвалга қаралсин).

Ресурсларнинг хиллари	маҳсулот хиллари					Ресурсларнинг заҳиралари
	A_1	A_2	A_3	...	A_n	
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	$в_1$
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	$в_2$
.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	...	.	.
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	$в_m$
Фойда	c_1	c_2	c_3	...	c_n	
Режа	x_1	x_2	x_3	...	x_n	

Агар x_j орқали j маҳсулотнинг миқдорий бирлигини белгиласак, у ҳолда масаланинг математик моделини қуйидагича ифодалаш мумкин.

$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ чизиқли функциянинг қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i, \ x_j \ge 0, \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$$

каби чегараланишлар бажарилгандаги максимал қийматини топиш лозимдир.

Энди ҳаво йўллари бўйича самолётларнинг тақсимланиш масаласининг математик моделини қуришни ўрганамиз. Айтайлик, 4 та ҳаво йўлига тақсимлаш учун 3 хил самолёт берилган бўлиб, ҳар бир турдаги самолётларнинг сони, бир ойлик юк ташиш ҳажмининг бирлиги ва самолётларнинг ишлатиш учун кетган харажатларнинг сон қиймати 5 - жадвалдагидек берилган бўлса, самолётларни шундай тақсимлаш керакки, энг кам миқдорда харажат сарфлаб, ҳар бир ҳаво йўли бўйича мос равишда 300,200,1000 ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилсин.

Самолётларнинг тури	Самолётларнинг сони	Ҳар бир ҳаво йўли бўйича бир ойлик юк ташиш ҳажми				Ҳар бир ҳаво йўли бўйича самолётларни ишлатиш учун кетган харажат			
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	30	25	10	17	70	28	15	45
3	30	25	50	30	45	40	70	40	65
Юк ташиш бирлигининг миқдори		300	200	1000	500				

Ечиш: j - сонли ҳаво йўли бўйича юк ташиш учун зарур бўлган i хилдаги самолётлар сонини x_{ij} билан белгиласак ($i=1,2,3,4$), шу йўллар бўйича юк ташиш учун кетган ҳаражатлар қуйидагича кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} z_1 = 15x_{11} + 70x_{21} + 40x_{31}, \\ z_2 = 20x_{12} + 28x_{22} + 70x_{32}, \\ z_3 = 25x_{13} + 15x_{23} + 40x_{33}, \\ z_4 = 40x_{14} + 45x_{24} + 65x_{34}. \end{cases} \qquad (3.1.6)$$

Бу ерда $z_1, z_2, z_3 z_4$ лар, биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи турдаги самолётларнинг мос равишда $j=1,2,3,4$ йўллар бўйича юк ташиш учун сарфланган харажатларидир. Умумий харажат эса

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \sum_{i=1}^{4} z_i \qquad (3.1.7)$$

га тенг бўлади. Иккинчи томондан, ҳар бир ҳаво йўли бўйича мос равишда 300, 200, 1000 ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилиши ҳамда ҳар бир турдаги самолётдан шу йўлларнинг ҳаммасига 50, 20 ва 30 тадан беркитилиши керак бўлганлиги учун қуйидаги чекланишлар-шартларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 15x_{11} + 30x_{21} + 25x_{31} \geq 300, \\ 10x_{12} + 25x_{22} + 59x_{32} \geq 200, \\ 20x_{13} + 10x_{23} + 30x_{33} \geq 1000, \\ 50x_{14} + 17x_{24} + 45x_{34} \geq 500 \end{cases} \tag{3.1.8}$$

ҳамда

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30, \\ x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}). \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Ушбу ҳосил қилинган (3.1.6), (3.1.8), ҳамда (3.1.9) ифодалар қаралаётган масаланинг математик моделини ифодалайди.

Демак, (3.1.9) тенгламалар тизимининг манфий бўлмаган ечимлари тўплами ичидан шундай x_{ij} ларнинг қийматларини танлашимиз лозимки, улар (3.1.6) мақсад функциясига энг кичик қиймат берадиган, яъни энг кам харажат сарфланадиган бўлсин.

Юқорида кўриб ўтилгандан ташқари яна, сув транспортида ташишни энг мақбул режалаштириш, темир йўл ишларини мақбуллаштириш ва бошқа транспорт турларидан энг мақбул фойдаланиш кабиларнинг ҳам математик меделларини қуриш мумкин.

3.2. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШТИРИШ УМУМИЙ МАСАЛАСИНИНГ ТАЪРИФЛАНИШИ ҲАМДА УНИНГ ҲАР ХИЛ ШАКЛЛАРДА ЁЗИЛИШИ.

Айтайлик, қуйидаги чизиқли мақсад функцияси ҳамда унга мос чизиқли чегараланишлар тизими қаралаётган бўлсин, яъни:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \qquad (3.2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ x_j \ge 0,\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}). \qquad (3.2.2)$$

Бу ердаги a_{ij}, b_i, c_j лар берилган ўзгармас ҳақиқий сонлардир.

Агар (3.2.2) ни $x_{n+i} \ge 0 (i = \overline{1,m})$ каби қўшимча ўзгарувчилар билан тўлдирилса, у ҳолда уни тенгламалар тизими кўринишида ёзиб олиш мумкин, яъни:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ x_j \ge 0,\ x_{n+i} \ge 0, (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \qquad (3.2.3)$$

Юқорида қаралган (3.2.1) чизиқли функциянинг (3.2.2) ёки (3.2.3) каби чегараланишлар бўйича экстремал қийматларини топиш масалаларини мос равишда чизиқли дастурлаштиришнинг бир қолипли ва энг содда масалалари деб юритилади. Чизиқли дастурлаштиришнинг бу хилдаги масалаларида $x_1, x_2, \ldots x_n$ номаълумларнинг шундай манфий бўлмаган қийматларини аниқлаш талаб этиладики, у қийматлар мос равишда (3.2.2) ва (3.2.3) чегараланишлар тизимини қаноатлантириб, (3.2.1) мақсад функциясининг экстремал қийматларини ифода этади. Яна шуни таъкидлаш лозимки, (3.2.3) тизимда номаълумлар сони тенгламалр сонига нисбатан кўп бўлганлиги сабабли, у тизим чексиз кўп ечимларга эга бўладики, ана шу ечимлар ичидан мақсад функциясининг ёки минимал ёки максимал қийматларини берадиган ечимларигина танланилади.

Агар

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдаланилса, (3.2.2) билан (3.2.3) чегараланишлар тизимлари қуйидаги кўринишларда ёзилади:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n \le A_0, \qquad (3.2.4)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + E_1x_{n+1} + \ldots E_mx_{n+m} \le A_0 \qquad (3.2.5)$$

У ҳолда чизиқли дастурлаштириш масаласи қуйидагича таърифланади: шундай $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $Y = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})$ каби векторларни аниқлаш лозимки, улар мос равишда (3.2.4) ва (3.2.5) кўринишдаги чегараланиш шартларини қаноатлантириб, $z = CX$ чизиқли мақсад функциясининг экстремал қийматини ифодалайдиган бўлсин, бу ерда: $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Агар

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \; A_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

каби матрицалар киритилса, у ҳолда, чизиқли дастурлаштириш масаласи қуйидагича таърифланади: $z = CX$ каби чизиқли мақсад функциясининг $AX \le A_0, X \ge 0$ ёки $AX + Y = A_0$ каби чегараланишларда экстремал қийматларини аниқлаш лозим. Бу ерда ҳам $C=(c_1,c_2,...,c_n)$.

1-таъриф. Чизиқли дастурлаштириш масаласининг режаси ёки мумкин бўлган ечими деб, (3.2.4) шартларни қаноатлантирувчи $X=(x_1, x_2,...,x_n)$ векторга айтилади.

2-таъриф. Чизиқли дастурлаштириш масаласининг энг мақбул режаси ёки энг мақбул ечими деб, мақсад функциясига минимум ёки максимум қиймат берадиган режа ёки ечимга айтилади.

Чизиқли дастурлаштириш масалаларида, кўпинча Z чизиқли мақсад функциясининг минимал қиймати эмас, балки максимал қийматини топиш талаб этилади. Лекин $\max Z=\min(-Z)$ бўлганлиги сабабли, Z ни -Z га алмаштириш орқали биринчи масала иккинчисига келтириб ечилади. Шу боисдан ҳам бундан буён, чизиқли дастурлаштиришнинг мақсад функциясининг фақатгина минимал қийматини аниқлаш билан боғлиқ бўлган масалалар қаралади.

3.3. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШТИРИШ МАСАЛАСИНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАЛҚИНИГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Чизиқли дастурлаштириш масаласининг мумкин бўлган ечимлари соҳаси.

Айтайлик, қуйидаги чизиқли мақсад функцияси ва унга мос бўлган чегараланишлар тизими қаралаётган бўлсин:

$$z=-4x_1+6x_2+2x_3-4x_4+7x_5+3x_6 \qquad (3.3.1)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+x_4=6, \\ x_1+x_2+x_5=12, \\ x_2+x_6=7, \\ x_i \geq 0, \ (i=\overline{1,6}). \end{cases} \qquad (3.3.2)$$

Юқорида келтирилган (3.3.2) чизиқли

алгебраик тенгламалар тизимининг барча манфий бўлмаган ечимлари ичидан шундай бирини топиш лозимки, натижада (3.3.1) чизиқли мақсад функцияси ўзининг минимум қийматига эришадиган бўлсин.

Асосий номаълумлар сифатида x_3, x_4, x_5, x_6 ларни ва эркин номаълумлар сифатида x_1, x_2 ларни танлаб олиб, (3.3.2) тизимни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_3 = -4 + 2x_1 + x_2, \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2, \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 7 - x_2. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Шунингдек, масала шартига биноан,

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ x_3 = -4 + 2x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_6 = 7 - x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.4}$$

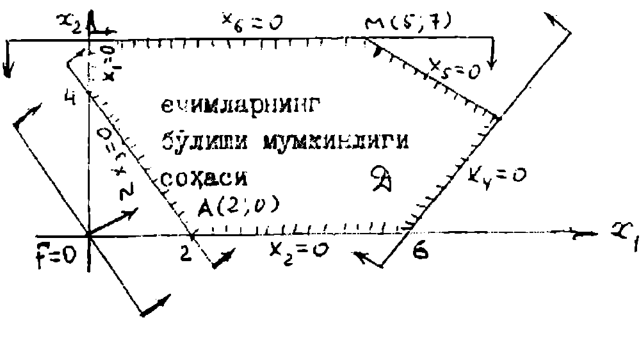
каби тенгсизликлар бажарилган бўлишлари керак. Ана шу тенгсизликлар тизимининг ечими берилган чизиқли дастурлаштириш масаласининг мумкин бўлган ечимлари соҳаси деб юритилади.

Қаралаётган масаланинг мумкин бўлган ечимлари соҳаси геометрик жиҳатдан қандай талқин этилишини ўрганиш мақсадида, текисликдаги $x_1\,0\,x_2$ тўғрибурчакли координаталар тизимини киритамиз (4-расмга қаралсин).

Юқорида келтирилган (3.3.4) тенгсизликлар тизимидаги барча тенгсизлик ишораларини тенглик ишоралари билан алмаштириб, чегаравий тўғри чизиқлар деб аталувчи тўғри чизиқларнинг тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -4 + 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2 = 0, \\ x_5 = 12 - x_1 - x_2 = 0, \\ x_6 = 7 - x_2 = 0 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бири $x_1 0 x_2$ текисликни иккита ярим текисликка ажратади. Улардан биринчиси нуқталарининг координаталари (3.3.4) тизимдаги мос тенгсизликларни қаноатлантириб (улар расмда миллар орқали тасвирланган), иккинчисининг нуқталарининг координаталари эса қаноатлантирмайди.



4-расм

Шундай қилиб, (3.3.4) тенгсизликлар тизимининг ҳар бир тенгсизлиги геометрик жиҳатдан (3.3.5) каби чегаравий тўғри чизиқларга мос келувчи ярим текисликни ифодалар экан. Ярим текисликлар кесишиб қаварик кўпбурчак ҳосил қилишлигини эътиборга олсак, чизиқли дастурлаштиришнинг қаралаётган масаласининг мумкин бўлган ечимлари соҳаси геометрик жиҳатдан қавариқ кўпбурчакни ифодалар экан. Уни биз Д билан белгилаймиз ва чизиқли дастурлаштириш масаласининг мумкин бўлган ечимлари кўпбурчаги деб атаймиз.

2. Чизиқли дастурлаштириш масаласининг график усулда ечилиши.

Энди юқорида қаралган чизиқли дастурлаштириш масаласининг энг мақбул ечимини топиш жараёни геометрик жиҳатдан қай тарзда талқин этилишини баён этамиз. Шу мақсадда, (3.3.1) мақсад функциясини x_1 ва x_2 номаълумлар орқали ифода этамиз. Унинг учун (3.3.3) ни (3.3.1) га қўйиб, қуйидагича мақсад функциясини ҳосил қиламиз

$$z = 73-3x_1-6x_2. \qquad (3.3.6)$$

Бу функция ечимларнинг мумкин бўлган кўпбурчагидаги ҳар бир нуқтада аниқ бир қийматга эга бўлиб, шу нуқталарнинг бирортасида ўзининг минимум қийматига эришади. Ана шу нуқтани топиш мақсадида,

$$F_0 = 3x_1 + 6x_2 \qquad (3.3.7)$$

каби ёрдамчи функция киритамиз. Агар унинг максимум қийматини топиб, уни (3.3.6) га қўйсак, мақсад функциясининг $z_{min} = 73\text{-}\max F_0$ каби минимум қийматини ҳосил қиламиз.

Таъриф. Агар чизиқли дастурлаштириш масаласи ечимларининг мумкин бўлган соҳасидаги барча нуқталар бирор тўғри чизиқнинг бир томонида ётса ҳамда у тўғри чизиқ билан соҳа ҳеч бўлмаганда битта умумий нуқтага эга бўлса, у тўғри чизиқ соҳага нисбатан таянч тўғри чизиқ деб аталади.

Ёрдамчи функцияни нолга тенглаштириб, яъни $3x_1 + 6x_2 = 0$ деб олиб, унинг графиги бўлган тўғри чизиқни ясаймиз. Энди қаралаётган масала учун қуйидагича геометрик талқинни бериш мумкин: ечимларнинг мумкин бўлган кўпбурчаги ичида шундай бир нуқтани топиш лозимки, у нуқтада $3x_1 + 6x_2 = const$ тўғри чизиқ кўпбурчакка нисбатан таянч тўғри чизиқ бўлиб, F_0 функция эса у нуқтада ўзининг максимум қийматига эришадиган бўлсин.

Ёрдамчи функциянинг қийматлари $\bar{N}=(3;6)$ вектор йўналишида ўсиб борганлиги сабабли, $F_0=0$ тўғри чизиқни ўзини - ўзига $\bar{N}$ вектор йўналиши бўйлаб параллел кўчирамиз. 4-расмдан кўриняптики, F_0 тўғри чизиқ ечимларнинг мумкин бўлган кўпбурчагига нисбатан икки марта таянч тўғри чизиқ бўларкан (А ва М нуқталарда) ҳамда М нуқтада максимум қийматга эришар экан. У $M(x_1; x_2)$ нуқтанинг координаталарини аниқлаш учун $x_5=0$ билан $x_6=0$ тўғри чизиқ тенгламалари тизимини ечамиз:

$$\begin{cases} 12-x_1-x_2=0, \\ 7-x_2=0. \end{cases}$$

Ундан $x_1=5$ ва $x_2=7$ ларни топамизки, улар масаланинг энг мақбул ечими бўлади.

Ёрдамчи функция учун $\max F_0=3\cdot5+6\cdot7=57$ бўлганлиги сабабли, $\min Z=73-57=16$.

Демак, қаралаётган масаладаги чегараланишлар шартини ифодаловчи тенгламалар тизимининг ечими $x_1=5$, $x_2=7$, $x_3=13$, $x_4=8$, $x_5=0$, $x_6=0$ лардан иборат ва берилган чизиқли мақсад функциясининг минимал қиймати эса $Z_{min}=16$ экан.

3.4. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШТИРИШ МАСАЛАСИНИНГ СИМПЛЕКС УСУЛДА ЕЧИЛИШИ.

Аввалги бандда ечилган масалага асосан айтиш мумкинки, чизиқли дастурлаштиришнинг масалаларидаги чекланишларнинг ҳар қандай ноаниқлик даражаси $n-m=2$ каби бўлганда ҳам у масалаларни график усул ёрдамида ҳал қилиш мумкиндир. Лекин чекланишлардаги ноаниқлик даража $n-m>2$ бўладиган бўлса, чизиқли даструлаштириш масалаларини график усулида ечиб бўлмайди, чунки бу ҳолни геометрик талқин этиш мумкин эмас. Бу ҳолга мос келувчи масалаларни ечиш учун бошқа усуллардан фойдаланиладики, улардан бири симплекс усул деб юритилади.

Айтайлик, $$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.4.1)$$

функциянинг $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = в_i, \quad x_j \geq 0, (i = \overline{1,m}) \qquad (3.4.2)$$

каби чегараланишлардаги минимал қийматини топиш талаб этилсин. Бу масалани симплекс усули билан ечиш мақсадида (3.4.2) тизим тенгламаларини m та номаълумларга нисбатан ечилган деб фараз қиламиз, яъни:

$$\begin{cases} x_1 = b_1' + a_{1(m+1)}' x_{m+1} + \ldots + a_{1n}^1 x_n, \\ x_2 = b_2' + a_{2(m+1)}' x_{m+1} + \ldots + a_{2n}^1 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = b_m' + a_{m(m+1)}' x_{m+1} + \ldots + a_{mn}' x_n. \end{cases} \qquad (3.4.3)$$

Бу ердаги, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ номаълумларни тизимнинг асосий номаълумлари деб атаймиз ва Б= $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ каби белгилаймиз, қолганларини эса, эркин номаълумлар деб юритамиз. Ушбу (3.4.3) ни (3.4.1) га қўйиб,

$$z = c_0 + c_{m+1}' x_{m+1} + \ldots + c_n' x_n \qquad (3.4.4)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу ерда:

$$c_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j b_j', \; c_k' = \sum_{j=1}^{m} c_j a_{jk}' + c_k, \; (k = \overline{(m+1), n}).$$

Барча эркин номаълумларнинг қийматларини ноллардан иборат деб оладиган бўлсак, (3.4.3) тизимдан $x_1 = b'_1, x_2 = b'_2, \ldots, x_m = b'_m$ лар ҳосил бўлади. Тизимнинг бу йўл билан ҳосил қилинган $Б = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m, 0, 0, \ldots, 0\}$ каби ечимини чизиқли дастурлаштиришнинг қаралаётган масаласининг мумкин бўлган ечими деб юритилади. Бу ҳолда мақсад функциянинг қиймати C_0, яъни: $Z_0 = C_0$ дан иборатдир.

Умуман, масалани симплекс усули билан ечиш жараёни бирқанча босқичлардан иборат. Симплекс усулининг ғоясини қуйидаги мисол орқали баён қиламиз:

1-мисол.

Берилган

$$z = x_1 + x_2 \tag{3.4.5}$$

функцияга максимум ёки

$$z = -x_1 - x_2 \tag{3.4.6}$$

функцияга минимум қийматлар берувчи x_1ва x_2 ларни $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ шартлар ҳамда

$$\begin{cases} 0.08x_1 \leq 160, \\ 0.01x_1 + 0.022x_2 \leq 50, \\ 2.1x_2 \leq 4200, \\ 0.17x_1 + 0.27x_2 \leq 675 \end{cases} \tag{3.4.7}$$

каби чегараланишлар бажарилганда аниқлансин.

Симплекс усулни қўллаш мақсадида (3.4.7) чегараланиш шартларини қўшимча $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, шартларни қаноатлантирувчи номаълумлар билан кенгайтириб, у шартларни қуйидаги тенгликлар кўринишида ифодалаймиз, яъни:

$$\begin{cases} 0.08x_1 + x_3 = 160, \\ 0.01x_1 + 0.022x_2 + x_4 = 50, \\ 2.1x_2 + x_5 = 4200, \\ 0.17x_1 + 0.27x_2 + x_6 = 675 \end{cases} \tag{3.4.8}$$

ва у тизимни номаълумларга нисбатан ечиб оламиз

$$\begin{cases} x_3 = 160 - 0.08x_1, \\ x_4 = 50 - 0.01x_1 - 0.022x_2, \\ x_5 = 4200 - 2.1x_2, \\ x_6 = 675 - 0.17x_1 - 0.27x_2 \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Бу ерда, x_1 ва x_2 лар эркин номаълумлар бўлиб, x_3, x_4, x_5, x_6, лар эса асосий номаълумлардир. Агар $x_1 = x_2 = 0$ деб олсак, мос равишда асосий ечим $Б = \{0,0,160,50,4200,675\}$ каби бўлади. Бу ечимга мос келувчи Z нинг қиймати 0 бўлганлиги учун у энг мақбул ечим бўла олмайди.

Эркин ўзгарувчиларнинг ҳар иккаласи ҳам Z мақсад функциясида (-1) га тенг бўлган коэффициентлар билан қатнашганликлари учун ҳам улардан бирини асосий номаълумларга ўтказиш мумкин бўлади. Агар (3.4.9) да $x_2 = 0$ деб олсак, x_1 номаълумнинг қиймати кўпая бориши билан x_3, x_4, x_5 номаълумларнинг қийматлари камая борадилар. Бу номаълумлардан қайси бири бошқаларга нисбатан олдинроқ нолга айланишлигини аниқлаш мақсадида (3.4.9) ифодаларда $x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 0$ деб олинади, яъни:

$$\begin{cases} x_3 = 160 - 0.08x_1 = 0, \\ x_4 = 50 - 0.01x_1 = 0, \\ x_5 = 675 - 0.17x_1 = 0 \end{cases}$$

ва уларнинг ҳар бирини x_1 номаълумга нисбатан ечилади. У ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$x_1 = 2000$, $x_1 = 5000$, $x_1 = 3970.6$. Бу ердан кўриняптики, x_1 нинг қиймати ошиши билан ($x_1 = 2000$) бошқа номаълумларга нисбатан x_3 номаълум олдинроқ нолга айланмоқда. Шунинг учун x_3 номаълумни эркин номаълумлар таркибига ўтказамиз, унинг учун (3.4.9) тизимнинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан ечиб, уни эса бошқа тенгламаларга қўямиз. У ҳолда,

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - 12.5x_3, \\ x_4 = 30 - 0.022x_2 + 0.125x_3, \\ x_5 = 4200 - 2.1x_2, \\ x_6 = 335 - 0.27x_2 + 2.125x_3 \end{cases} \qquad (3.4.10)$$

ни ҳосил қиламиз. Мақсад функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$z = -2000 - x_2 + 12.5x_3 \qquad (3.4.11)$$

ҳамда мос асосий ечим $Б^{(1)} = \{2000, 0, 0, 30, 4200, 335\}$

каби бўлиб, $z_{Б^{(1)}} = -2000 < z_Б$ бўлади.

Мақсад функциясининг янги ифодасида фақатгина x_2 номаълумгина манфий ишорали бўляпти, шу сабабли, x_2 нинг қийматини кўпайтириб, Z нинг қийматини эса камайтириб олиш керак бўлади. Лекин ҳар қандай $x_2 \geq 0$ қиймат учун $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ бўлганликлари сабабли, юқоридаги ишни эҳтиётлик билан бажариш керак бўлади. Агар (3.4.10) ифодада $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, деб олиб ҳамда бу ифодаларда $x_3 = 0$ эканлигини эътиборга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз $x_2 = 30/0.022 = 1363{,}6$; $x_2 = 4200/2.1 = 2000$; $x_2 = 335/02.7 = 1240.7$.

Бундан кўриняптики, x_2 нинг қиймати 1240,7 гача ортиши (ундан кўп эмас, чунки x_6 манфий қиймат бўлиб қолишлиги мумкин) мумкин ва эркин номаълумлар таркибига x_6 асосий номаълум ўтказилиши керак бўлади. Унинг учун (3.4.9) нинг тўртинчи тенгламасини олиб, у ерда x_2 номаълумни x_6 орқали ифодалаб, ҳосил бўлган натижани эса тизимнинг қолган тенгламаларига қўямиз:

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - 12.5x_3, \\ x_2 = 1240.7 + 7.8704x_3 - 3.7037x_6, \\ x_4 = 2.7046 - 0.04815x_3 - 0.08148x_6 \\ x_5 = 1594.5 - 16.528x_3 + 7.777x_6. \end{cases} \quad (3.4.12)$$

У ҳолда мақсад функциясининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Z = -3240.7 + 4{,}0296x_3 + 3.7037x_6. \quad (3.4.13)$$

Энди (3.4.12) ифодалардаги эркин номаълумларга ноль қийматлар бериб, қуйидаги асосий ечимга эга бўламиз:

$$Б^{(2)} = \{2000{,}1246.7;0;2.7046;1594{,}5;0\}.$$

Кўриниб турибдики, ҳосил қилинган бу асосий ечим энг мақбул ечимдир, чунки x_3 ва x_6 каби асосий бўлмаган ечимлар Z нинг таркибига мусбат коэффициентлар билан кираяпти. Демак, Z ни бошқа камайтиришнинг имконияти йўқ. Шундай қилиб, $x_1 = 2000$; $x_2 = 1240$; $x_3 = 0$; $x_3 = 2.7046$; $x_5 = 1594.5$; $x_6 = 0$.

2-мисол (мустақил ечиш учун). $Z = -7x_1 - 5x_2$ каби чизиқли функциянинг минимал қийматини қуйидаги чегараланишларда топилсин

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 19, \\ x_2 - 3x_1 + x_4 \le 13, \\ 3x_2 + x_5 \le 15, \\ 3x_1 + x_6 \le 18, \\ x_i \ge 0, \ (i = \overline{1{,}6}) \end{cases}$$

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ - ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ОРҚАЛИ МОДЕЛЛАШТИРИЛАДИГАН АЙРИМ МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИ ҲАМДА УЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Биз юқорида чизиқли алгебраик тенгламалар тизими ёрдамида математик моделлаштириладиган муҳандислик масалаларининг айрим намуналари ҳамда уларни ЭҲМда ечиш усуллари билан танишган эдик. Навбатдаги бобларда, математик моделлари оддий дифференциал ёки оддий интеграл дифференциал тенгламалар орқали ифодаланадиган муҳандислик масаларидан айримлари билан танишамиз ҳамда уларни ЭҲМда ечишнинг бир неча усулларини баён этамиз.

4-БОБ

БОШЛАНҒИЧ ШАРТЛАРИ БИЛАН БЕРИЛГАН ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ - ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Кўпгина муҳандислик масалалари ўзларининг муайян қўйилишларига қараб, бошланғич шартлари билан берилган оддий дифференциал ёки оддий интеграл - дифференциал тенгламалар орқали моделлаштириладиларки, уларнинг аниқ ечимларини ҳар доим ҳам қуриш мумкин бўлавермайди. Бу хилдаги тенгламаларни етарлича аниқлик билан тақрибий ечиш учун турли хил усуллар мавжуд бўлиб, у усуллардан замонавий ЭҲМларсиз фойдаланиш мумкин эмас.

4.1. БОШЛАНҒИЧ ВА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ҲАҚИДАГИ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

Қуйидаги

$$M\ddot{u}(t) + B\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \qquad (4.1.1)$$

каби иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенгламани қараймиз. Бу ерда, A, B ва M лар орқали элементлари мос ҳолда (a_{ij}), (b_{ij}) ва (m_{ij}) лардан иборат бўлган квадрат матрицалар белгиланган $(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$ ҳамда $u(t)$ аниқланиши лозим бўлган ва $f(t)$ берилган n ўлчовли вектор - функциялардир.

1-таъриф. Агар (4.1.1) тенгламанинг берилган бошланғич шартларини ифодаловчи

$$u(t_0) = \alpha_1, \; \dot{u}(t_0) = \alpha_2 \qquad (4.1.2)$$

каби шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилса, у ҳолда (4.1.1) тенглама билан (4.1.2) бошланғич шартлар биргаликда бошланғич шартлари билан берилган масала ёки Коши масаласи деб юритилади (бу ерда, α_1 ва α_2 лар берилган сонли векторлардир).

2-таъриф. Агар (4.1.1) тенгламанинг берилган

$$u(t_0) + \gamma_1 \dot{u}(t_0) = \beta_1, \; u(t_l) + \gamma_2 \dot{u}(t_l) = \beta_2 \qquad (4.1.3)$$

каби шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилган бўлса, (4.1.1) тенглама билан (4.1.3) чегаравий шартлар биргаликда чегаравий масала деб юритилади. Бу ерда ҳам β_1 ва β_2 лар берилган сонли векторлар бўлиб, γ_1 ва γ_2 лар эса, берилган ўзгармас сонлардир.

Таърифлардан кўриняптики, Коши масаласи бир нуқтадагина берилган чегаравий шартларга эга бўлган дифференциал тенгламалар билан аниқланиб, чегаравий масала эса, ҳеч бўлмаганда иккита нуқтада берилган чегаравий шартларга эга бўлган дифференциал тенгламалар билан аниқланар экан.

Юқоридаги тушунчаларни интеграл-дифференциал тенгламаларга нисбатан ҳам келтириш мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Биз, биринчи навбатда, дифференциал ва интеграл - дифференциал тенгламалар учун Коши масалаларини ечишнинг ҳар хил сонли усулларини баён этишдан олдин, математик жиҳатдан оддий дифференциал ва интеграл-дифференциал тенгламалар орқали ифодаланадиган муҳандислик масалаларининг айримлари билан танишиб ўтамиз.

4.2. МЕХАНИКАВИЙ ТИЗИМЛАРНИНГ ТЕБРАНИШЛАРИ ҲАҚИДАГИ МАСАЛАЛАРНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАРИНИ ҚУРИШГА ДОИР АЙРИМ МИСОЛЛАР

Массалари бир жойга тўпланган механикавий тизимларнинг тебранишлари ҳақидаги масалаларнинг математик моделлари, асосан, назарий механика курсидан маълум бўлган Гамильтон принципи ёки 2-хил Лагранж тенгламасига асосланган усуллар бўйича қурилади. Бу усуллардан фойдаланиш мақсадида аввало, тизимнинг кинетик энергияси, потенциал энергияси ва тизимга таъсир этувчи консерватив бўлмаган кучларнинг бажарадиган ишлари учун уларнинг математик ифодаларини тузиш лозим бўлади. Маълумки, ишқаланиш кучлари ҳамда вақтга боғлиқ бўлган функцияни ифодаловчи ташқи тойилиш кучлари консерватив бўлмаган кучлар сирасига киради. Шунингдек, тизимнинг Т кинетик ва П потенциал энергияларининг ҳар бири умумлашган $q_1, q_2, \ldots, q_n$ каби координаталарга боғлиқ бўлиб, улар эса ўз навбатида, вақтга нисбатан функциялар бўлади.

Фараз қилайлик, қаралаётган механикавий тизимнинг умумлашган $q_j (j = \overline{1, n})$ координаталарига эга бўлган ихтиёрий нуқтаси бирор t вақт мобайнида $\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ радиус - вектор билан аниқланадиган ҳолатни эгаллаган бўлсин. У ҳолда унинг тезлиги ва кинетик энергиясининг ифодалари қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$V = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j,$$

$$T = \frac{1}{2} S_m V^2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Бу ерда, $m_{jk} = S_m \partial\bar{r} / \partial q_j \cdot \partial\bar{r} / \partial q_k$ каби бўлиб, S_m белги орқали эса барча массалар бўйича олинган йиғинди ифодаланган. Шунингдек, m_{jk} лар q_j ва q_k ларнинг функцияларидир ҳамда уларни кичик тебранишларда ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин бўлади.

Айтайлик, q_j координаталар тизим элементларининг мувозанат ҳолатидан четлангандаги чизиқли ёки бурчак силжишларини ифода этадиган бўлсин. Бирор белгиланган вақт мобайнида q_j силжишларни юзага келтирувчи эластик кучлар тизимини F_j деб белгиласак, у ҳолда $q_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} F_k$ деб ёзиш мумкин бўлади. Бу ерда, α_{jk} лар юмшоқлик коэффициентларидир.

Агар

$$u = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдалансак, силжиш

матрицавий кўринишда ёзилади, яъни: $u=\alpha F$.

Бу ердаги α матрицага мос келувчи тескари матрицани α^{-1} деб белгиласак, юқоридаги тенгликдан $F=\alpha^{-1}u$ ни ёзиб оламиз. Агар $\alpha^{-1}=A=(a_{jk})$ эканлигини эътиборга оладиган бўлсак, бу тенглик $F_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}q_k$ дек кўринишга эга бўлади.

Эластик тизимнинг потенциал энергиясини F_j кучлар билан уларга мос бўлган q_j силжишлар кўпайтмалари йиғиндисининг ярмига тенг деб олиш мумкин, яъни:

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}F_jq_j=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}q_k)q_j=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}q_jq_k \quad (4.2.2)$$

Маълумки, механикавий тизимга q_j силжишларни вужудга келтирадиган P_j ташқи тойилиш кучлари таъсир этадиган бўлса, у тизимнинг ҳаракат тенгламаси 2-хил Лагранж тенгламаси деб аталувчи

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=P_j \quad (4.2.3)$$

тенглама билан ифодаланар эди. Агар (4.2.1) билан (4.2.2) ни (4.2.3) га қўйсак,

$$\sum_{k=1}^{n}(m_{jk}\ddot{q}_k+a_{jk}q_k)=P_j,\ (j=\overline{1,n}) \quad (4.2.4)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда ҳам агар

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{2n} \\ \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{nn} \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, u=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдалансак, (4.2.4) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$M\ddot{u}+Au=F \tag{4.2.5}$$

Ушбу (4.2.5) тенглама (4.2.1) бошланғич шартлар билан биргаликда массалари бир жойга тўпланган механикавий тизимнинг тебранишлари ҳақидаги масаланинг математик моделини ифода этади.

Агар механикавий тизимнинг тебранишида материалнинг ички ишқаланиш кучининг таъсирини ҳисобга олинадиган бўлса, у ҳолда, Ю.Н. Работнов томонидан киритилган ғояга асосан, (4.2.2) эластик потенциал билан бирга қовушқоқ потенциални қуйидаги

$$\Pi_1=-\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}q_j\dot{q}_k, \quad b_{jk}=b_{kj} \tag{4.2.6}$$

ёки умумийроқ ҳолдаги

$$\Pi_1=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}q_jR^*q_k=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}q_j\times \tag{4.2.7}$$

$$\times\int_0^t R(t-\tau)q_k(\tau)d\tau$$

каби ифодалар ёрдамида киритиш лозимдир. Бу ердаги R(t) наслий ядро деб аталиб, у одатда тажриба йўли билан аниқланади.

Агар (4.2.3) тенгламадаги П нинг ўрнига П-Π_1 ни қўйиладиган бўлса, у ҳолда (4.2.5) тенглама (4.2.6) билан (4.2.7) ларга нисбатан мос равишда қуйидаги кўринишларга эга бўлади:

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Au = F, \qquad (4.2.8)$$

$$M\ddot{u} + A(1 - R^{*})u = F. \qquad (4.2.9)$$

Бу ерда, B орқали элементлари b_{jk} $(j, k = \overline{1, n})$ лардан иборат бўлган квадрат матрица белгиланган.

Юқорида келтирилган (4.2.8) ёки (4.2.9) тенгламалар (4.1.2) бошланғич шартлар билан биргаликда механикавий тизимларнинг сўнувчи тебранишлари ҳақидаги масаланинг математик моделини ифодалайди.

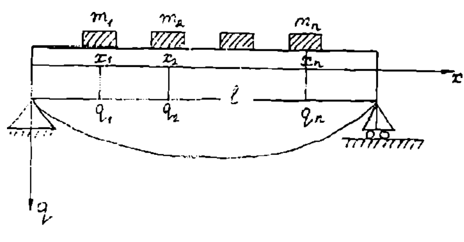
Таъриф. Агар номаълум функция ҳам дифференицал ҳам интеграл белгилари остида қатнашса, у номаълумга нисбатан тенгламани интеграл - дифференциал тенглама деб аталади.

Демак, таърифга кўра, (4.2.9) тенглама интеграл - дифференциал тенглама экан.

МИСОЛЛАР

Биринчи мисол сифатида массалари бир жойга тўпланган тўсиннинг тебраниши ҳақидаги масалани кўриб ўтамиз.

Фараз қилайлик, узунлиги l бўлган тўсин ўзининг чап таянчидан $x_1, x_2, \ldots, x_n$ масофаларда жойлашган нуқталарда мос равишда тўпланган $m_1, m_2, \ldots, m_n$ каби массалар билан юкланган бўлиб, унинг ҳар иккала чеккаси шарнирли таянч билан бириктирилган бўлсин (5-расм).



5–расм

Тўсиннинг кичик эгилишидаги тебранишларини, яъни тўсиннинг юкланган нуқталаридаги $q_1, q_2, \ldots, q_n$ каби кичкина четланишларини қараймиз. Тўсин массасини тўпланган массаларга нисбатан кичик деб фараз қилиб, уни эътиборга олмаймиз, фақатгина тўсиннинг эгилишига нисбатан қаттиқлиги EJ ни ҳисобга оламиз. Шунингдек, масала

$$q_j(0) = \alpha_{0j}, \quad \dot{q}_j(0) = 0 \qquad (4.2.10)$$

каби шартлар билан тўлдирилган деб фараз қиламиз.

Агар иккала чети ҳам шарнирли таянчда бўлган тўсиннинг эгилишига нисбатан қаттиқлигини ўзгармас деб оладиган бўлсак, α_{jk} боғланиш коэффициентлари қуйидагича ҳисобланади:

$$\alpha_{jk} = \frac{x_j^2 (l - x_j)^2}{6EJl}\left(\frac{2x_k}{x_j} + \frac{x_k}{l - x_j} - \frac{x_k^3}{x_j^2 (l - x_j)}\right),$$

$$x_k \le x_j, \ \alpha_{kj} = \alpha_{jk}.$$

Ихтиёрий x_j нуқтадаги F_j юк, ихтиёрий x_k нуқтада $q_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} F_j \ (k = \overline{1, n})$ ёки матрицавий кўринишда $u = \alpha F$ эгилишни юзага келтиради. Бу ерда ҳам юқоридаги

$$u = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдаланилган. Боғланиш коэффициентларидан тузилган α матрицага мос бўлган $A = \alpha^{-1}$ тескари матрицани топиб,

$F = Au = \alpha^{-1}u$ ёки $F_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k$ ларни ҳосил қиламиз. Бу ердаги a_{jk} лар яна $A=\alpha^{-1}$ тескари матрица элементларидир.

Потенциал ва кинетик энергияларнинг ифодалари учун яна

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} q_j q_k, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{q}_j^2$$

ларни эътиборга оладиган бўлсак, қаралаётган масаланинг математик моделини ифодалайдиган қуйидаги Коши масаласини ҳосил қиламиз:

$$M\ddot{u} + Au = 0, \tag{4.2.11}$$

$$u(0) = \alpha_0, \; \dot{u}(0) = 0 \tag{4.2.12}$$

Бу ерда:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & & 0 \\ 0 & m_2 & & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix}, \; \alpha_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \cdot \\ \\ \\ \alpha_{0n} \end{bmatrix}.$$

Таъкидлаш лозимки, тўсин четларининг бошқа усуллар билан ҳам бириктирилишлигини қараш мумкин, фақат бу ерда α_{jk} боғланиш коэффициентларигина ўзгаришлари мумкин.

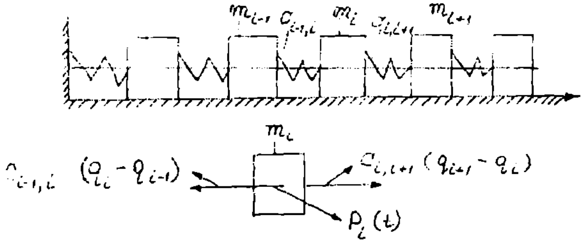
Агар, массалари бир жойга тўпланган тўсиннинг сўнувчан тебранишлари ҳақидаги масала кўриладиган бўлса, у ҳолда, (4.2.11) тенглама ўрнига

$$M\ddot{u} + A(1 - R^*)u = 0 \tag{4.2.13}$$

тенгламани ёзиш мумкин бўлади.

Иккинчи мисол тариқасида, чизиқли - эластик пружиналар билан бириктирилган бир неча қаттиқ юклардан ташкил этилган механикавий тизим тебраниши ҳақидаги масалани қараймиз.

Юкларнинг массаларини $m_1, m_2, \ldots, m_n$ лар билан, уларнинг мувозанат ҳолатидан четланишликларини $q_1, q_2, \ldots, q_n$ лар билан, i ва $(i+1)$ юклар орасидаги пружина қаттиқлигини $c_{i,i+1}$ билан ва тойилиш кучларини эса $P_1(t)$, $P_2(t), \ldots, P_n(t)$ лар билан белгилаймиз (6-расм).



6-расм

Ихтиёрий m_i юк учун тизимнинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$m_i\ddot{q}_i + c_{i-1,i}(q_i - q_{i-1}) - c_{i,i+1}(q_{i+1} - q_i) = P_i(t), \ (i = \overline{2, n-1}) \qquad (4.2.14)$$

Биринчи m_1 юк учун юқоридаги тенгламада q_0 қатнашмайди, чунки пружиналарнинг чап четкаси қўзғалмас деб олинади. Агар m_n юк учун ҳам у тенгламада охирги қўшилувчининг иштирок этмаслигини эътиборга олсак, у тенгламалар тизимни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\ddot{q}_1 + (c_{0,1} + c_{1,2})q_1 - c_{1,2}q_2 = P_1(t), \\ m_i\ddot{q}_i - c_{i-1,i}q_{i-1} + (c_{i-1,i} + c_{i,i+1})q_i - c_{i,i+1}q_{i+1} = P_i(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n\ddot{q}_n - c_{n-1,n}q_{n-1} + c_{n-1,n}q_n = P_n(t). \end{array}\right\} \qquad (4.2.15)$$

Агар бу ерда

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}, \ f = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

каби белгилашлар киритсак, (4.2.15) тизим қуйидагича ёзилади

$$M\ddot{u} + Au = f. \qquad (4.2.16)$$

А матрицанинг элементлари қуйидаги формулалар билан ҳисобланадилар

$$a_{i-1,i} = -c_{i-1,i};\ a_{ii} = c_{i-1,i} + c_{i,i+1};\ a_{ij} = 0$$

Ушбу (4.2.16) тенглама билан (4.2.12) бошланғич шартлар биргаликда қаралаётган масаланинг математик моделини ифода этади.

Эластик валларга бириктирилган оғир гардишларнинг тизими учун буралма тебранишлар тенгламаси ҳам худди юқоридагидек ҳосил қилинади (7-расм).

Гардишларнинг бурилиш бурчакларини $q_1, q_2, \dots, q_n$ лар билан белгилаймиз. Оралиқдаги i гардишга валнинг туташган жойларининг буралма моментлари

$$M_{i-1,i} = c_{i-1,i}(q_i - q_{i-1}),$$
$$(4.2.17)$$
$$M_{i,i+1} = c_{i,i+1}(q_{i+1} - q_i)$$

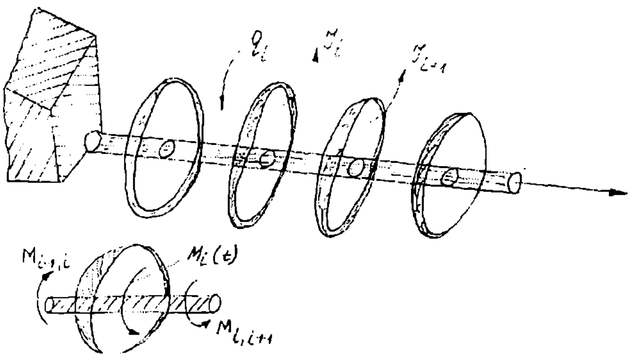
ларнинг ҳамда ташқи тойилма моментлари $M_i(t)$ ларнинг таъсир этишликларини эътиборга олиб, у i-гардишнинг ҳаракат тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$-J_i\ddot{q}_i + M_{i,i+1} - M_{i-1,i} + M_i(t) = 0,\ (i = \overline{1,n}) \qquad (4.2.18)$$

бу ерда, J_i орқали i-гардиш массасининг инерция моменти белгиланган. Энди (4.2.17) ни (4.2.18) га қўйиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$J_i\ddot{q}_i - C_{i-1,i}q_{i-1} + \left(C_{i-1,i} + C_{i,i+1}\right)q_i - C_{i,i+1}q_{i+1} = M_i(t) \quad (4.2.19)$$

Мазкур тенглама билан (4.2.14) тенгламалар бир – бирларидан фақатгина биринчи ҳадларининг коэффициентлари билангина фарқ қиладилар. Агар (4.2.19) да $J_i = m_i$ ва $M_i(t) = P_i(t)$ деб оладиган бўлсак, у ҳолда, оғир гардишлар тизими учун буралма тебранишлар тенгламасини ҳосил киламиз.



7-расм.

Шундай қилиб, биз юқорида бошланғич шартлари билан берилган оддий дифференциал ёки оддий интеграл-диффиренциал тенгламалар орқали математик моделлаштирилувчи муҳандислик масалаларининг энг содда хилдаги айрим намуналаринигина кўриб ўтдик.

Кўп ҳолларда, муҳандислик масалалари ночизиқли оддий дифференциал ёки оддий интеграл - дифференицал тенгламалар орқали математик моделлаштириладиларки, уларнинг тақрибий ечимларини қуриш учун ҳар хил сонли усуллар мавжуд бўлиб, уларнинг қўлланилишини ЭҲМ орқалигина муваффақиятли амалга ошириш мумкин. Биз қуйида сонли интеграллаш усулларининг айримлари билан танишиб ўтамиз.

4.3. РУНГЕ -КУТТА УСУЛИ

Мазкур усул энг кўп тарқалган сонли интеграллаш усулларидан ҳисобланиб, у асосида тузилган дастурлардан фойдаланиб ҳам ўқув ҳам муҳандислик тавсифидаги турли хил масалаларни ечиш мумкин.

Айтайлик, (4.1.1)-(4.1.2) каби Коши масаласи қаралаётган бўлсин. Агар (4.1.1) тенгламада $y_1 = u$, $Ey_2 = M\dot{u}$ каби алмаштиришлар киритсак, унга тенг кучли бўлган қуйидаги тенгламалар тизими ҳосил бўлади

$$\left.\begin{aligned} M\dot{y}_1 &= Ey_2 \\ E\dot{y}_2 &= f(t) - BM^{-1}y_2 - Ay_1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.1)$$

ёки уни қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} M & O \\ O & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ -A & -BM^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ f \end{pmatrix}.$$

Агар

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} M & O \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} O & E \\ -A & -BM^{-1} \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} M & O \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} O \\ f \end{pmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдалансак, юқоридаги ифода қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\dot{y} = Dy + q = F(t, y) \qquad (4.3.2)$$

ҳамда унинг бошлангич шартлари

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ M\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha \qquad (4.3.3)$$

дай ёзилади.

Шундай қилиб, биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлган (4.3.2) тенгламани (4.3.3) каби бошлангич шартлар бажарилганда тақрибий ечишликнинг Рунге - Кутта усулини баён этамиз. Шу мақсадда, бирор $t_i = i\Delta t(t_{i+1} - t_i = \Delta t)$ вақт мобайнидаги Y(t) номаълум функция қийматини y_i орқали белгилаб, $y_{i+1} = y(t_i + \Delta t)$ функция учун Δt нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига бўлган ёйилмаси

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \cdot \Delta t + \ddot{Y}_i(\Delta t)^2 / 2! + \dddot{Y}_i(\Delta t)^3 / 3! + \ldots \qquad (4.3.4)$$

ни қараймиз. Бу ерда, дастлабки иккита ҳад билан чегараланиб, қуйидаги тақрибий ифодани ёзамиз:

$$Y_{i+1} \approx Y_i + \dot{Y}_i \cdot \Delta t. \qquad (4.3.5)$$

Шунингдек, (4.3.2) ифоданинг $t = t_i$ бўлгандаги қиймати

$$\dot{Y}_i = F(t_i, y_i) \qquad (4.3.6)$$

ни (4.3.5) га қўйиб, қуйидагини ёзамиз:

$$Y_{i+1} \approx Y_i + F(t_i, y_i) \cdot \Delta t. \qquad (4.3.7)$$

Бу (4.3.7) формула, биринчи тартибли Рунге - Кутта формуласи деб юритилади. Биринчи тартибли дейишлигимизнинг боиси, Тейлор қаторида биз фақат Δt нинг биринчи даражаси билангина чегараланган эдик. Мазкур формула $0(\Delta t^2)$ тартибли хатоликка эга бўлиб, $F(t_i, Y_i)$ да бир марта ҳисоблаш бажарилгандан кейин, у орқали навбатдаги нуқтага ўтилади.

Амалий ҳисоблашларда, асосан, 4–тартибли Рунге - Кутта усули деб номланувчи усул ишлатилади. Бу усулга кўра, t_i дан t_{i+1} га ўтишлик қуйидаги формулалар билан амалга оширилади

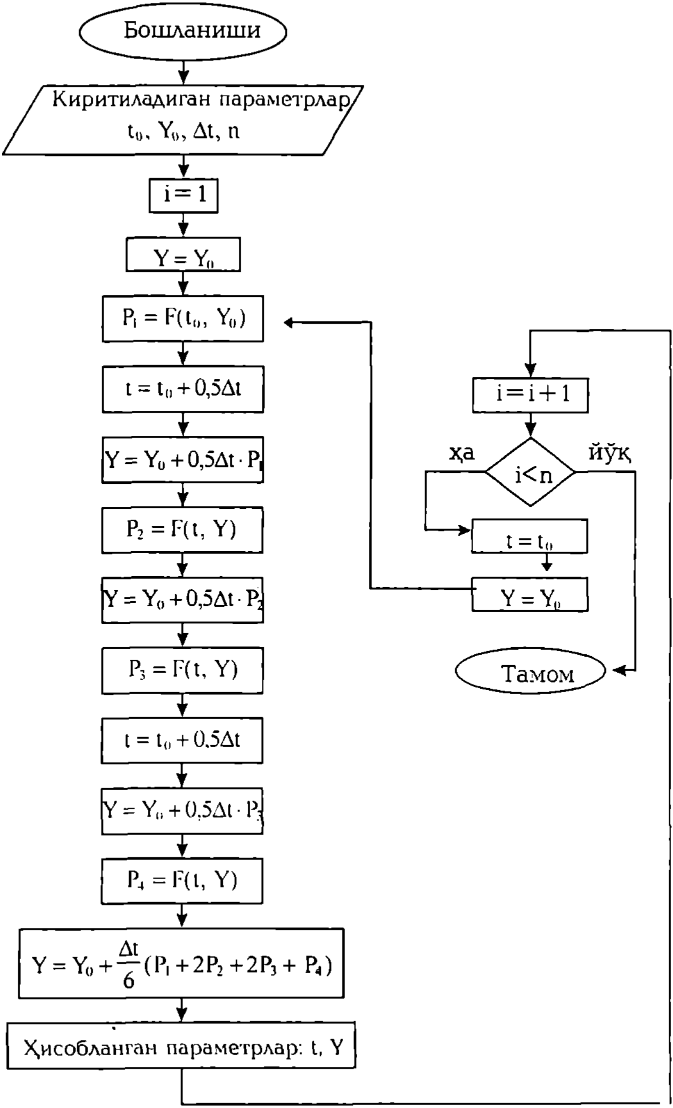
$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t \cdot P; \; P = \frac{1}{6}\left(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4\right) \quad (4.3.8)$$

Бу ерда:

$$P_1 = F\left(t_1, y_1\right); \; P_2 = F\left(t_1 + 0{,}5\Delta t, y_1 + 0{,}5\Delta t \cdot P_1\right);$$

$$P_3 = F\left(t_i + 0{,}5\Delta t, y_i + 0{,}5\Delta t \cdot P_2\right); \; P_4 = F(t_i + \Delta t, \, y_i + \Delta t \cdot P_3).$$

Бу ерда хатолик $0(\Delta t^5)$дан иборат ва у (4.3.7) формуладаги хатоликка нисбатан ангагина кичикдир. Шуни ҳам эътиборга олиш лозимки, умумий хатолик интеграллаш кесмасининг узунлиги ортиши билан ўса боради. Уни камайтириш мақсадида Δt қадам етарлича кичик қилиб танланилади, шу билан баробар машина вақтининг сарфи ошиб кетади. Муайян масалаларда энг мақбул Δt қадамни синов ҳисоблари ёрдамида аниқлаш мумкин. Берилган аниқликдаги ечимни таъминлайдиган қадамни автомат тарзда танлайдиган алгоритм ва дастурлар мавжуд. Қуйида биз Рунге - Кутта усули алгоритми асосида тузилган дастурнинг блок - схемасини келтирамиз.


Бошланиши
Киритиладиган параметрлар
t_0, Y_0, Δt, n
i=1
$Y = Y_0$
$P_1 = F(t_0, Y_0)$
$t = t_0 + 0{,}5\Delta t$
$Y = Y_0 + 0{,}5\Delta t \cdot P_1$
$P_2 = F(t, Y)$
$Y = Y_0 + 0{,}5\Delta t \cdot P_2$
$P_3 = F(t, Y)$
$t = t_0 + 0{,}5\Delta t$
$Y = Y_0 + 0{,}5\Delta t \cdot P_3$
$P_4 = F(t, Y)$
$Y = Y_0 + \frac{\Delta t}{6}(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4)$
Ҳисобланган параметрлар: t, Y
i=i+1
i<n
ҳа
йўқ
$t = t_0$
$Y = Y_0$
Тамом

4.4. КОШИ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШИНГ ТЎҒРИ УСУЛИ

Биз аввалги бандда Рунге - Кутта усули дифференциал тенгламаларнинг ҳосилага нисбатан ечилган бўлишлигини талаб этишини кўриб чиқдик. Шундай усуллар ҳам мавжудки, улар иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун махсус тадқиқ этилган бўлиб, тенгламаларнинг ҳосилага нисбатан ечилган бўлишини талаб этмайди. У хилдаги усуллардан бирини қуйида баён этамиз.

Агар (4.1.1) тенгламада B=0 деб олсак, (4.1.1) - (4.1.2) Коши масаласининг кўриниши қуйидагича ёзилади:

$$M\ddot{u} + Au = f(t) \tag{4.4.1}$$

$$u(t_0) = \alpha_1, \quad \dot{u}(t_0) = \alpha_2 \tag{4.4.2}$$

ҳамда бу ердаги A матрицани симметрик деб қараймиз. Эслатиб ўтамизки, n ўлчовли симметрик матрица n та ўзаро боғлиқ бўлмаган хос векторларга эга бўлар эди.

Фараз қилайлик, дастлабки ҳисоблашлар натижасида тебранишларнинг хос частоталари билан хос тебранишларининг ифодалари аниқланган бўлсин. Хос частоталарни ўсиб бориш тартибида, яъни, $\omega_1 \le \omega_2 \le \ldots \le \omega_n$ каби қилиб жойлаштириб, уларга мос келувчи тебранишларни эса, $W_1, W_2, \ldots, W_n$ лар орқали белгилаймиз.

Айтайлик, қуйидаги муносабатлар бажариладиган бўлсин:

$$W_i^T M W_j = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \ne j \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса}, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

$$W_i^T A W_j = \begin{cases} 0, & \text{агар } i \ne j \text{ бўлса}, \\ \omega_i^2, & \text{агар } i = j \text{ бўлса}; \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Қаралаётган масаланинг ечимини

$$u(t) = Z_1(t)W_1 + \ldots + Z_n(t)W_n$$

ёки

$$u(t) = WZ(t) \tag{4.4.5}$$

кўринишда излаймиз.

Агар бу ерда

$$W = (W_1, \ldots, W_n), \quad Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))^T$$

эканлигини эътиборга олсак, (4.4.3) билан (4.4.4) ларга асосан

$$W^T MW = E, \; W^T AW = \Omega^2 \tag{4.4.6}$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу ерда, E - бирлик матрица ва

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{bmatrix}.$$

Агар (4.4.5) ни (4.4.1) га қўйиб, ҳосил бўлган ифодани чап томондан W^T га кўпайтирсак,

$$W^T MW\ddot{Z} + W^T AWZ = W^T f$$

ни ҳосил қиламиз ва бу ифодада (4.4.6) ни эътиборга олсак, у қуйидагича кўринишга эга бўлади

$$E\ddot{Z} + \Omega^2 Z = F(t) \tag{4.4.7}$$

Бу ерда:

$$F(t) = W^T f = (F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_n)^T.$$

Юқорида ҳосил қилинган (4.4.7) каби дифференциал тенгламалар тизими боғланмаган тизим бўлиб, унинг ҳар бир номаълум функциясини аниқлаш учун

$$\ddot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = F_i(t), \quad (i = \overline{1, n}) \tag{4.4.8}$$

каби тенгламалар интегралланади.

Вақтнинг бошланғич пайти $t_0=0$ да $u(0)$ ва $\dot{u}(0)$ лар аниқ бўлганликлари учун (4.4.8) тенгламаларни интеграллашда $Z_i(0)$ билан $\dot{Z}_i(0)$ ларни улар орқали ифодалаш лозимки, уни (4.4.5) га асосан бажариш мумкин. Шу мақсадда (4.4.5) ни $W^T M$ га чап томондан кўпайтирилади, у ҳолда, $Z(t) = W^T Mu(t)$ каби муносабат ҳосил бўлиб, ундан биз

$$Z(0) = W^T Mu(0), \dot{Z}(0) = W^T M\dot{u}(0)$$

каби боғланишларга эга бўламиз ёки улардан биз учун керакли бўлган қуйидаги ифодаларни ёза оламиз

$$Z_i(0) = W_i^T Mu(0), \ \dot{Z}_i(0) = W_i^T M\dot{u}(0). \quad (4.4.9)$$

У ҳолда, (4.4.8) тенгламанинг (4.4.9) каби бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими қуйидагича ёзилади:

$$Z_i(t) = Z_i(0)\cos\omega_i t + \frac{1}{\omega_i}\dot{Z}_i(0)\sin\omega_i t +$$
$$+\frac{1}{\omega_i}\int_0^t F_i(t-\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau. \quad (4.4.10)$$

Юқорида келтирилган тенгламани сонли интеграллаш ҳам мумкин, уни биз навбатдаги бандларда кўриб ўтамиз.

4.5. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР УСУЛЛАРИ

Қадамба-қадам интеграллаш усуллари деб номаълум усуллар ёрдамида бирор $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ вақтга мос (Δt интеграллаш қадами) келувчи ва аниқланилиши лозим бўлган $u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}$ ларнинг қийматлари уларнинг аввалги қадамлар бўйича топилган қийматлари орқали ҳисобланади.

Қулай бўлсин учун бундан буён (4.4.8) билан (4.4.9) лардаги индексларни ташлаб юбориб, уларни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\ddot{u} + bu = f(t), \tag{4.5.1}$$

$$u(0) = Z(0), \ \dot{u}(0) = \dot{Z}(0). \tag{4.5.2}$$

Бу ерда:

$$u(t) = Z_i(t), \ b = \omega_i^2, \ f(t) = F_i(t).$$

Ушбу (4.5.1) - (4.5.2) Коши масаласини сонли интеграллашнинг чекли айирмалар усулидан иккитасини баён этамиз.

1. Марказий айирмалар усули.

Бирор $t_i = i\tau$ вақт мобайнидаги $u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$ ларнинг қийматларини мос равишда $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ лар орқали белгилаймиз ҳамда $u(t_i + \tau)$ функциянинг Тейлор қаторига τ нинг даражалари бўйича ёйилмасидаги τ^2 қатнашган ҳаддан кейинги ҳадларни ташлаб

$$u(t_i + \tau) \approx u_i + \tau \dot{u}_i + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i \tag{4.5.3}$$

каби тақрибий ифодани ҳосил қиламиз.

Агар (4.5.3) да, аввал $\tau = -\Delta t$ кейин $\tau = \Delta t$ деб оладиган бўлсак, қуйидаги иккита тенглик ҳосил бўлади.

$$u_{i-1} = u_i - \Delta t \cdot \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i, \ u_{i+1} = u_i + \Delta t \cdot \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_i$$

Бу ифодаларни аввал ҳадлаб айириб, кейин ҳадлаб қўшиб, қуйидагиларга эга бўламиз

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2\Delta t}(u_{i+1} - u_{i-1}), \quad \ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}). \quad (4.5.4)$$

Агар (4.5.1.) тенгламанинг $t = t_i$ вақт мобайнидаги кўриниши

$$\ddot{u} + bu_i = f_i \qquad (4.5.5)$$

ни ёзиб олиб, унга (4.5.4) нинг иккинчи ифодасини қўядиган бўлсак

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - bu_i\Delta t^2 + f_i\Delta t^2 \qquad (4.5.6)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу (4.5.6) ифодадаги $i=0$ га мос келувчи u_{-1} ни аниқлаш мақсадида (4.5.4) ифоданинг биринчи тенглигидан

$$u_{-1} = u_1 - 2\Delta t \cdot \dot{u}_0 \qquad (4.5.7)$$

ни ва (4.5.6.) дан эса, $i=0$ да

$$u_1 = 2u_0 - u_{-1} + (f_0 - bu_0) \cdot \Delta t^2 \qquad (4.5.8)$$

ни ҳосил қиламиз.

Охирги иккита ифодадан эса,

$$u_1 = u_0 + \dot{u}_0 \cdot \Delta t + (f_0 - bu_0) \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \qquad (4.5.9.)$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар $u(0) = u_0 = Z(0)$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = \dot{Z}_0$ эканлигини эътиборга олсак, энди (4.5.6) формула орқали u_{i+1} нинг $i = 1,2,...$ ларга мос келадиган бошқа қийматлари ҳисобланади.

2. Ньюмарк усули.

Мазкур усул $u(t_i + \tau)$ ва $\dot{u}(t_i + \tau)$ каби функцияларнинг Тейлор қаторига τ нинг даражалари бўйича ёйилмалари бўлган тақрибий ифодаларига асосланган, яъни:

$$\left.\begin{aligned} u(t_i+\tau) &\approx u_i+\tau\cdot\dot{u}_i+\frac{\tau^2}{2}\ddot{u}+\alpha\tau^3\dddot{u}_i,\\ \dot{u}(t_i+\tau) &\approx \dot{u}_i+\tau\ddot{u}_i+\beta\tau^2\dddot{u}_i. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.10)$$

Бу ердаги α ва β коэффициентлар интеграллаш жараёнининг шартсиз турғунлигини таъмин этадиган қилиб танланади (уларнинг сон қийматлари ҳақида қуйироқда сўз юритамиз).

Агар (4.5.10) да $\tau=\Delta t$ деб олсак ва $\dddot{u}_i$ ни $(\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i)/\Delta t$ каби тақрибий ифода билан алмаштирсак, у ҳолда

$$\begin{cases} u_{i+1}\approx u_i+\Delta t\cdot\dot{u}_i+\Delta t^2/2\cdot\ddot{u}_i+\alpha\,\Delta t^2(\ddot{u}_{i+1}-\ddot{u}_i),\\ \dot{u}_{i+1}\approx\dot{u}_i+\Delta t\cdot\ddot{u}_i+\beta\Delta t(\ddot{u}_{i+1}+\ddot{u}_i). \end{cases} \qquad (4.5.11)$$

Юқоридаги тенгликларнинг биринчисидан $\ddot{u}_{i+1}$ ни топамиз, яъни

$$\dot{u}_{i+1}=\frac{1}{\alpha\Delta t^2}(u_{i+1}-u_i)-\frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i+(1-\frac{1}{2\alpha})\ddot{u}_i \qquad (4.5.12)$$

ва уни уларнинг иккинчисига қўямиз, натижада, $\dot{u}_{i+1}$ ни аниқлаймиз

$$\dot{u}_{i+1}=\frac{\beta}{\alpha\Delta t}(u_{i+1}-u_i)+(1-\frac{\beta}{\alpha})\dot{u}_i+\left[1+\beta(1-\frac{1}{2\alpha})\right]\cdot\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i \qquad (4.5.13)$$

Энди (4.5.1) тенгламани $t=t_{i+1}$ учун

$$\ddot{u}_{i+1}+bu_{i+1}=f_{i+1} \qquad (4.5.14)$$

каби кўринишда ёзиб олиб, у билан (4.5.12) ни биргаликда ечсак, натижада, u_{i+1} учун қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз

$$u_{i+1}=\frac{\alpha\Delta t^2}{1+b\alpha\Delta t^2}\left[f_{i+1}+\frac{1}{\alpha\Delta t^2}u_i+\frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{u}_i+(\frac{1}{2\alpha}-1)\ddot{u}_i\right], \quad (4.5.15)$$
$(i=1,2,3,\ldots)$.

Юқоридаги (4.5.12) билан (4.5.15) лар биргаликда Ньюмарк усулининг рекуррент муносабатларини ифодалайди.

Таъкидлаш лозимки, Ньюмарк усули, нафақат, u_0, $\dot{u}_0$ ларнинг берилишинигина эмас, балки $\ddot{u}_0$ нинг ҳам берилишини тақозо этади. Одатда, $\ddot{u}_0$ нинг қиймати берилган (4.5.1) тенгламанинг $t_0 = 0$ бўлган ҳолга мос келувчи қийматидан топилади, яъни:

$$\ddot{u}_0 = f - bu_0 = f_0 - bZ(0).$$

Энди u_0, $\dot{u}_0$, $\ddot{u}_0$ ларнинг қийматларини билган ҳолда u1 нинг қиймати (4.5.15)дан, $\dot{u}_1$ ва $\ddot{u}_1$ ларнинг қийматлари эса, мос равишда (4.5.13) билан (4.5.12) лардан топилади. Бу жараён давом эттирилиб, u_{i+1}, $\dot{u}_{i+1}$, $\ddot{u}_{i+1}$ ларнинг барча қийматлари топилади.

Чекли айирмалар усулининг қўлланиш жараёнида Δt қадам қанчалик кичик бўладиган бўлса, ечим ўшанчалик аниқ бўлади, лекин шу билан биргаликда ҳисоблашлардаги қийинчиликлар ҳам орта боради ҳамда қадам даврга боғлиқ бўлиб, у унинг қисмини ташкил этишлиги керак бўлади ((4.1.1) дифференциал тенгламаларнинг ҳар бири ўзининг $b=\omega_i$ қисмига ва $T=2\pi/\omega_i$ га тенг даврига эга). Барча (4.1.1) тенгламалар учун чекли айирмалар усули қўлланилаётганда қадам бир хил қилиб олинади ва у энг кичик давр қисмидан ташкил топган бўлиши керак. Шунинг учун ҳам ечимнинг турғунлигини тадқиқ этишликни фақатгина энг катта ω_i даврга эга бўлган дифференциал тенгламалар учунгина ўтказиш керак бўлади.

3. Энди чекли айирмалар усулининг турғунлиги масаласини ўрганамиз. Шу мақсадда (4.1.1) тенгламаларга мурожаат этиб, уларнинг ҳар бирини битта эркинлик даражага эга бўлган тизимнинг ҳаракат тенгламаси сифатида талқин этиш мумкинлигини эътиборга оламиз. Бу тенгламалардаги сўндиргичлик қобилиятини ифода этадиган параметр эътиборга олинмайди, чунки ҳисоблашлардан маълумки, у интеграллаш жараёнининг турғунлигига муҳим таъсир кўрсатмайди. Ундан ташқари турғунлик масаласининг тадқиқида тенгламаларнинг ўнг томонини ноль деб қараш мумкин.

Шундай қилиб,

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad (4.5.16)$$

тенгламани қараймиз. Маълумки, мазкур тенгламанинг аниқ ечими $u = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$ каби ёзилар эди (бу ечимни $u = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ каби кўринишда ҳам ёзиш мумкин, чунки бу ердаги A ва B комплекс ўзгармас сонлардир).

а) Аввало марказий айирмалар усулининг ҳисоб жараёни турғун эканлигини ўрганамиз.

Марказий айирмалар усулига асосан ҳосил қилинган

$$\ddot{u}_i = 1/\Delta t^2 \cdot (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

ифодани (4.5.16) га қўйиб, қуйидаги муносабат

$$u_{i+1} + u_{i-1} + (\omega^2 \Delta t^2 - 2) \cdot u_i = 0$$

ни ҳосил қиламизки, у тақрибий ечимни ифода этади.

Шундай бир $u(t)$ функцияни аниқлашни мақсад қилиб қўямизки, у

$$u(t+\Delta t)+u(t-\Delta t)+(\omega^2\Delta t^2-2)u(t)=0 \quad (4.5.17)$$

тенгликни қаноатлантириб, шу билан бирга (4.5.16) тенглама учун интеграл функцияни ифода этадиган бўлсин. Уни қуйидаги кўринишда ахтарамиз:

$$u(t)=Ae^{\nu t}\cdot e^{i\omega t}=Ae^{(\nu+i\omega)t}$$

(бу ерда A ихтиёрий ўзгармас комплекс сон).

Бу ифодадаги $e^{\nu t}$ кўпайтувчи вақт ўтиши билан тебраниш амплитудасининг ўзгаришини белгилайди, ечим эса, $\nu\leq 0$ бўлган ҳолдагина турғун бўлади.

Агар

$$q=e^{(\nu+i\mu)\Delta t} \quad (4.5.18)$$

каби белгилаш киритсак, қуйидагиларни ёза оламиз

$$u(t+\Delta t)=Ae^{(\nu+i\mu)(t+\Delta t)}=qu(t),$$

$$u(t-\Delta t)=Ae^{(\nu+i\mu)(t-\Delta t)}=\frac{1}{q}u(t)$$

Бу ифодаларни (4.5.17) га қўйиб, q га нисбатан квадрат тенглама $q^2-2aq+1=0$ ни ҳосил қиламиз.

Унинг ечими эса, $q_{1/2}=a\pm\sqrt{a^2-1}$ каби ёзилади. Бу ерда: $a=1-\omega^2\Delta t^2/2$.

Ечим турғун бўлишлиги учун $\nu\leq 0$ бўлиши кераклиги сабабли, турғунлик соҳасининг аниқланилиши Δt нинг шундай қийматларини аниқлашга келтириладики, у ерда $|q|=e^{\nu\Delta t}<1$ бўлиши керак бўлади.

Иккита q_1 ва q_2 илдизларга (4.5.17) муносабатни каноатлантирувчи иккита $u_1(t)$ ва $u_2(t)$

функциялар мос келадилар, улар турғун бўлишлари учун $t \to \infty$ да уларнинг ҳар бири чегараланган бўлишлари керак бўлади. Шундай қилиб, ҳам q_1 ҳам q_2 лар ёки ҳақиқий ёки қўшма комплекс сонлар бўлиб, Δt нинг қийматига боғлиқ бўлади ҳамда уларнинг мутлақ қийматлари ҳар доим бирдан кичик бўлишлари керак экан.

Фараз қилайлик, аввало, $\Delta t \le \frac{2}{\omega}$ бўлсин, яъни, $a^2 - 1 \le 0$. У ҳолда $q_{1,2} = a \pm ib$ каби қўшма илдизларга эга бўламиз. Бу ерда, $b = \sqrt{1 - a^2}$ бўлиб, $a^2 + b^2 = 1$ бўлгани учун $|q_1| = |q_2| = 1$ бўлади. Бундан кўриняптики, q_1 ва q_2 ларга мос бўлган ҳар иккала хусусий ечимлар учун $\nu = 0$, яъни бу ерда ҳосил қилинган тақрибий ечим ҳам худди аниқ ечим каби ўзгармас амплитудали гармоник тебранишни ифодалайди. У ҳолда, (4.5.18) га асосан қуйидагини ёза оламиз:

$$q_{1,2} = e^{\pm i\mu\Delta t} = \cos\mu\Delta t \pm i\sin\mu\Delta t.$$

Бу ифодадан кўринятики, тақрибий ечимдаги тебраниш частотаси $\cos\mu\Delta t = a$ ёки

$$\mu = \frac{1}{\Delta t}\arccos(1 - 0{,}5\omega^2\Delta t^2) \qquad (4.5.19)$$

каби бўлар экан.

Энди $a^2 - 1 > 0$ бўлган ҳолни қараймиз, яъни $\Delta t > \frac{2}{\omega}$. Агар $b = \sqrt{a^2 - 1}$ деб белгилаш киритсак, $q_{1,2} = a \pm b$ каби иккита ҳақиқий илдизларни ҳосил қиламиз. Виет теоремасига кўра, $q_1 \cdot q_2 = 1$ бўлганлиги сабабли, у илдизлардан бири

1 дан катта бўлиб, ечим эса турғун булмайди.

Шундай қилиб, марказий айирмалар усулининг турғун бўлишлиги учун ҳар доим Δt қадам критик қиймат деб аталувчи $\Delta t^* = 2/\omega = T/\pi$ қийматдан кичик бўлишлиги талаб қилинар экан (бу ерда, $T = 2\pi/\omega$ тебраниш даври). Шунингдек, сонли ечим ҳам аниқ ечимдаги амплитудага тенг амплитуда, лекин ω дан фарқли бўлган доиравий частота билан тебраниш жараёнини ифода этар экан.

Умуман эса, (4.1.1) тенгламанинг марказий айирмалар усули билан интегралланиш жараёни $\Delta t \le \Delta t^* \le T_{min}/\pi$ шартда турғун бўлар экан (бу ерда, T_{min} қаралаётган тизимнинг эркин тебранишлардаги минимал давр).

б) Ньюмарк усулининг аниқлигини ва турғунлигини ўрганиш мақсадида яна (4.5.16) тенгламага мурожаат этиб, у ерда яна (4.5.11) ифодалардан фойдаланамиз. Ньюмарк усулида ҳосил қилинадиган $u(t)$, $\dot{u}(t)$ ва $\ddot{u}(t)$ функцияларни

$$u(t) = A_1 e^{(\nu+i\mu)t}, \dot{u}(t) = A_2 e^{(\nu+i\mu)t}, \ddot{u}(t) = A_3 e^{(\nu+i\mu)t} \quad (4.5.20)$$

каби кўринишларда ахтарамиз. Бу ерда, A_1, A_2, A_3 лар ихтиёрий ўзгармас комплекс сонлардир.

Агар (4.5.16) тенгламанинг $t = t_i$ бўлгандаги ифодасининг кўриниши $\ddot{u}_i + \omega^2 u_i = 0$ дек бўлишлигини ҳамда

$$A_3 = -\omega^2 A_1 \quad (4.5.21)$$

ни ва $u_{i+1} = q u_i$, $\dot{u}_{i+1} = q \dot{u}_i$, $\ddot{u}_{i+1} = q \ddot{u}_i$ ларни эътиборга олсак, (4.5.11) нинг иккинчи ифодасига асосан,

$$A_2 = -A_1\omega^2\Delta t\left(\beta - \frac{1}{1-q}\right) \qquad (4.5.22)$$

ни ҳосил қиламиз.

Шунингдек, (4.5.21) билан (4.5.22) ларни эътиборга олиб, (4.5.11) ифоданинг биринчи тенглигидан q га нисбатан квадрат тенгламани ёзиш мумкин.

$$\gamma_1(1-q)^2 + \gamma_2(1-q) + 1 = 0. \qquad (4.5.23)$$

Бу ерда: $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = -(\beta + 0{,}5)$.

Бу (4.5.23) тенгламани ечиб, унинг

$$q_{1,2} = \frac{1}{2\gamma_1}\left(2\gamma_1 + \gamma_2 \pm \sqrt{\gamma_2^2 - 4\gamma_1}\right) \qquad (4.5.24)$$

каби иккита илдизларини топамиз.

Энди чекли айирмалар усулининг сўзсиз турғунлигини таъминловчи α ва β параметларнинг қийматларини аниқлаймиз. Унинг учун ҳар иккала q_1 ва q_2 илдизларнинг $t \to \infty$ да мутлақ қийматларининг бирдан катта бўлишини талаб этамиз ҳамда γ_1 ва γ_2 ларнинг қийматларини (4.5.24) га қўйганимизда $1/\omega^2\Delta t^2$ ни ташлаб юборамиз. У ҳолда (4.5.24) учун қуйидагини ёзамиз

$$q_{1,2} = \frac{1}{2\alpha}\left[2\alpha - (\beta + 0{,}5) \pm \sqrt{(\beta + 0{,}5)^2 - 4\alpha}\right].$$

Аввало, фараз қилайликки, $\alpha \geq 0{,}25 \cdot (\beta + 0{,}5)^2$ шарт бажарилган бўлсин. У ҳолда, $q_{1,2} = a_0 \pm ib_0$ каби иккита бир - бирига қўшма бўлган комплекс илдизларни ҳосил қиламиз, у ерда

$$a_0 = \frac{1}{2\alpha}\left[2\alpha - (\beta + 0{,}5)\right], \quad b_0 = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha - (\beta + 0{,}5)^2}.$$

Тургунлик шартлари бўлган $|q_1| \le 1$, $|q_2| \le 1$ шартлар $a_0 + b_0 \le 1$ тенгсизликнинг бажарилишлигига келтириладики, унинг бажарилишлиги учун эса $\beta = 0.5$ бўлишлиги керак бўлади.

Агар $\alpha < 0{,}25 \cdot (\beta + 0{,}5)^2$ шарт бажариладиган бўлса, ҳар иккала q_1 ва q_2 илдизлар ҳақиқий сонлар бўлиб, улардан бири албатта мутлақ қиймати бўйича бирдан катта бўлади. Демак, Ньюмарк усулининг шак - шубҳасиз турғун бўлишлиги учун $\beta \ge 0.5$ ва $\alpha \ge 0{,}25 \cdot (\beta + 0{,}5)^2$ каби шартлар бажарилиши керак экан.

Шундай қилиб, Ньюмарк усули Δt нинг ҳар қандай қийматларида ҳам турғун бўлар экан ва у усул мутлақ турғун усул деб аталади.

Марказий айирмалар усули қўлланилганда қадамни $\Delta t \le T_{min} / \pi$ шартдан танлаш лозим. Амалий масалалар ечилаётганда бу қадам жуда ҳам кичик бўлиши мумкин, бу ўз навбатида, жуда ҳам машина вақтининг кўп сарфланишига олиб келади. Шу билан биргаликда, кўпинча, юқори частотали (кичик даврли) тебранишларни ҳисобга олиш талаб қилинмайди. Шунинг учун ҳам тебранишларнинг юқори шаклларини ҳисобга олиш керак бўлгандагина марказий айирмалар усулини ишлатиш лозим (масалан, тўлқин масалалари ёки эркинлик даражаси унчалик юқори бўлмаган масалалар).

4.6. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР УСУЛИ

Айтайлик, қуйидаги иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама

$$\ddot{u}(t) + b(t)u(t) = f(t) \tag{4.6.1}$$

ўзининг қуйидаги

$$u(0) = \alpha_0, \ \dot{u}(0) = \alpha_1 \tag{4.6.2}$$

бошланғич шартлари билан берилган бўлсин. Бу ердаги b(t) ва f(t) лар берилган функциялар бўлиб, α_0 ва α_1 лар берилган ўзгармас сонлардир.

Шунингдек фараз қилайликки, b(t) ва f(t) лар бирор [0;t] оралиқда яқинлашувчи бўлган даражали қаторлар орқали ифодаланадиган функциялар бўлсин, яъни:

$$b(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i, \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i. \tag{4.6.3}$$

Бу ерда, b_i ва f_i лар орқали маълум константалар белгиланган.

Қаралаётган (4.6.1)-(4.6.2) Коши масаласининг ечимини қуйидаги даражали қатор кўринишида излаймиз

$$u(t) = \sum_{K=0}^{\infty} a_k t^k \tag{4.6.4}$$

Бу ердаги a_K лар аниқланилиши лозим бўлган номаълум сонлар бўлиб, улардан дастлабки иккитаси a_0 ва a_1 лар (4.6.2) бошланғич шартлардан фойдаланиб аниқланади, яъни: $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$.

Юқоридаги (4.6.4) қаторни кетма - кет икки марта дифференциалласак, у ҳолда

$$\dot{u}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}, \ \ddot{u}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} \tag{4.6.5}$$

лар ҳосил бўлади ёки у ерда k-2=i каби белгилаш киритсак,

$$\ddot{u}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) a_{i+2} t^i \tag{4.6.6}$$

ни ҳосил қиламиз.

Агар (4.6.3), (4.6.4) ҳамда (4.6.6) ларни (4.6.1) га қўйсак ва у ерда

$$b(t)\cdot u(t)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \cdot \qquad (4.6.7)$$

ни эътиборга олсак, у ҳолда қуйидаги ифодага эга бўламиз, яъни $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)a_{i+2}t^i + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i$

ёки

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[(i+1)(i+2)a_{i+2}+c_i\right]t^i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i \qquad (4.6.8)$$

Бу ерда: $c_i = \sum_{k=0}^{i} b_k a_{i-k}$.

Энди t^i ларнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб,

$(i+1)(i+2)a_{i+2}+c_i = f_i$ ни ёки

$$a_{i+2}=\frac{1}{(i+1)(i+2)}\left[f_i - \sum_{k=0}^{i} b_k a_{i-k}\right],\ (i=0,1,2,\ldots) \qquad (4.6.9)$$

ни ҳосил қиламиз.

Ушбу (4.6.9) рекуррент формулалар ёрдамида номаълум бўлган a_i $(i=2,3,\ldots,;)$ коэффициентларнинг барчаси кетма - кет аниқланади ва уларни (4.6.3) га қўйиб, (4.6.1) тенгламанинг берилган (4.6.2) бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечими топилади.

1-мисол.

Қуйидаги $\ddot{u}(t)-e^{-t}u(t)=e^t-1$ тенгламанинг берилган бошланғич $u(0)=1,\ \dot{u}(0)=1$ шартларини қаноатлантирувчи ечими аниқлансин. Бу ерда:

$b(t) = -e^{-t}$, $f(t) = e^{t} - 1$

ёки $b(t) = -\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{t^{i}}{i!}$, $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{i}}{i!}$.

Демак, $b_i = -\frac{(-1)^{i}}{i!}$, $(i = 0,1,2,\ldots)$; $f_i = \frac{1}{i!}$, $(i = 1,2,3,\ldots)$ ва (4.6.9) рекуррент формулалар қуйидаги кўринишларда ёзилади

$$a_{i+2} = \frac{1}{(i+1)(i+2)}\left[\frac{1}{i!} + \sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^{k}}{k!}a_{i-k}\right], a_0 = 1, a_1 = 1,$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}(1 + a_0 - a_1) = \frac{1}{3!},\ldots,a_k = \frac{1}{k!}.$$

Бу қийматларни (4.6.3) га қўйиб,

$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^{k} = e^{t}$ ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. (мустақил ечиш учун). Қуйидаги $\ddot{u} + (e^{-t}\sin t - 1)u = \sin t$ тенгламанинг $u(0) = 1$, $\dot{u}(0) = 1$ каби бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечимини даражали қаторлар усулида топилсин.

4.7. КВАДРАТУРА ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИГА АСОСЛАНГАН УСУЛ

Бу усулнинг моҳиятини яна (4.6.1)-(4.6.2) Коши масаласи учун баён этамиз. Агар (4.6.1) тенгламани 0 дан t гача бўлган чегараларда интеграллаб юборсак,

$$\dot{u}(t) - \dot{u}(0) + \int_0^t b(t)u(t)dt = \int_0^t f(t)dt$$

ни ҳосил қиламиз ёки (4.6.2) га асосан, бундан

$$\dot{u}(t) + \int_0^t b(\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau + \alpha_1 \qquad (4.7.1)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу тенгламани ҳам 0 дан t гача бўлган чегараларда интеграллсак,

$$u(t) + \int_0^t\int_0^\tau b(S)u(S)dSd\tau = \int_0^t\int_0^\tau f(S)dSd\tau + \alpha_1 t + \alpha_0 \quad (4.7.2)$$

ни ҳосил қиламиз.

Математик таҳлилдан маълум бўлган қуйидаги

$$\int_0^t\int_0^t \ldots \int_0^t \Phi(t)dt \ldots dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}\Phi(\tau)d\tau$$

формулани эътиборга олсак, (4.7.2) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$u(t) + \int_0^t (t-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0$$

ёки

$$u(t) = F(t) - \int_0^t (t-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau. \qquad (4.7.3)$$

Бу ерда:

$$F(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Бу (4.7.3) каби интеграл тенгламани ечишга квадратура усулини қўллаш учун

$$u(t_n)+\int_0^{t_n}(t_n-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau = F(t_n),\ (n=\overline{1,N}) \quad (4.7.4)$$

ифодадан фойдаланамиз. Мазкур ифода (4.7.3) ифодадан $t=t_n$ каби белгиланган қийматлар орқали ҳосил қилинган бўлиб, уни бошқачарок кўринишда ёзиб оламиз:

$$u(t_n) = F(t_n)-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_n-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (4.7.5)$$

Агар бу ердаги ҳар бир қўшилувчи интегрални трапециялар формуласи ёрдамида ҳисобласак, яъни:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_n-\tau)b(\tau)u(\tau)d\tau = \frac{h}{2}\left[(t_n-t_i)b(t_i)u(t_i)+(t_n-t_{i-1})b(t_{i-1})u(t_{i-1})\right],$$

у ҳолда (4.7.5) ифода қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{gathered} u_n = F_n-\sum_{i=1}^{n-1}A_i(t_n-t_i)b(t_i)u(t_i), \\ A_1=h/2,\ A_k=h,\ (k=\overline{2,n-1}),\ (n=1,2,\ldots) \end{gathered} \qquad (4.7.6)$$

Ушбу ҳосил бўлган рекуррент формулалар орқали

$$u(t_1)=u_1,\ u(t_2)=u_2,\ldots,\quad u(t_n)=u_n$$

сонли қийматлар кетма - кет ҳисобланади.

Агар машиносозлик ҳамда қурилиш конструкциялари материалларининг ички қаршиликлари эътиборга олинадиган бўлса, уларнинг элементларининг барча ҳаракат масалалари,

$$\ddot{u}+b\left[u-\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau\right]=f(t) \qquad (4.7.7)$$

каби иккинчи тартибли оддий интеграл - дифференциал тенгламалар орқали ифодаланади. Бу тенглама, берилган (4.6.2) бошланғич шартлар билан биргаликда, 5.6 ва 5.7 бандларда кўриб ўтилган усуллар билан ечилади.

Даражали қаторлар усули билан (4.7.7) тенгламани, (4.6.2) бошланғич шартлари билан биргаликда ечиш учун у ерда қатнашаётган R(t-τ) ва f(t) функцияларнинг яқинлашувчи даражали қаторлар шаклида ифодаланишларини фараз қилиб, яъни:

$$R(t-\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}R_i(t-\tau)^i,\ f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}f_i t^i \qquad (4.7.8)$$

ҳамда қуйидаги айниятни эътиборга оламиз

$$\int_0^t\sum_{i=0}^{\infty}R_i(t-\tau)^i\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k\tau^k d\tau=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{S=1}^{i}a_{S-1}R_{i-S}B(i-S+1,S)\right]t^i.$$

Бу ерда: $B(i-S+1,S)=\dfrac{(i-S)!(S-1)!}{i!}$.

Энди (4.6.3), (4.6.5) ва (4.7.8) ларни (4.7.7) га қуйиб,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)(i+2)a_{i+2}t^i+b\sum_{i=0}^{\infty}a_i t^i-$$
$$-b\sum_{i=0}^{\infty}\left[\sum_{S=1}^{i}a_{S-1}R_{i-S}B(i-S+1,S)\right]t^i=\sum_{i=0}^{\infty}f_i t^i$$

каби ифодани ҳосил қиламиз. Бу ердаги t нинг бир хил даражаларига қараб, улар олдидаги коэффициентларни тенглаштирсак, a_i номаълум коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги рекуррент формулани ҳосил қиламиз

$$a_{i+2}=\frac{1}{(i+1)(i+2)}\left[f_i-b(a_i-\sum_{S=1}^{i}a_{S-1}R_{i-S}B(i+S+1,S))\right],$$
$$a_0=\alpha_0,\ a_1=\alpha_1,\ (i=0,1,2,\ldots)$$

Номаълум коэффициентларнинг аниқланган барча қийматларини (4.6.4) га қўйиб, (4.6.2), (4.7.7) каби Коши масаласининг аниқ ечимини ҳосил қиламиз.

Энди (4.7.7) тенгламанинг квадратура усулига асосланган ечимини қуриш мақсадида, у тенгламани кетма - кет икки марта интеграллаб, (4.6.2) бошланғич шартлардан фойдаланамиз, у ҳолда

$$u(t)+b\int_0^t \Gamma(t-\tau)u(\tau)d\tau = F(t)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу ерда:

$$\Gamma(t-\tau) = t-\tau-\int_0^{t-\tau}(t-\tau-S)R(S)dS,$$

$$F(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t + \alpha_0.$$

Умуман, квадратура усулига асосан, (4.7.7) тенгламанинг тақрибий ечими қуйидаги формула билан ҳисобланади

$$u(t_n) = F(t_n) - b\sum_{i=0}^{n-1} A_i \Gamma(t_n - t_i)\cdot u(t_i).$$

Бу ерда:

$$F(t_n) = \int_0^{t_n}(t_n-\tau)f(\tau)d\tau + \alpha_1 t_n + \alpha_0,$$

$$\Gamma(t_n - t_i) = t_n - t_i - \int_0^{t_n - t_i}(t_n - t_i - S)R(S)dS, \quad (n = \overline{1,\infty})$$

4.8. ЛАПЛАС АЛМАШТИРИШ УСУЛИ

Ҳар хил дифференциал ва интеграл – дифференциал тенгламаларни ечишда Лапласнинг интеграллар алмаштирилиши деб номланувчи усули кенг миқёсда қўлланилади. Бу усул операцион ҳисобнинг асосий ғояларига асосланган бўлганлиги сабабли, аввало, операцион ҳисобнинг энг муҳим тушунчаларини қисқача баён этамиз.

1. Лаплас алмаштириши тушунчаси ва унинг асосий хоссалари.

1- Таъриф. Агар ҳақиқий t ўзгарувчили f(t) комплекс функция, қисмий - узлуксиз бўлиб (яъни, ҳар қандай чекли оралиқда у функция чекли дона 1-хил узилишларгагина эга), барча t<0 лар учун ҳар доим ҳам айнан 0 бўлса ва шундай M>0, S_0>0 каби сонлар мавжуд бўлганда, барча $0 \leq t < +\infty$ лар учун $|f(t)| \leq Me^{S_0 t}$ каби шарт бажарилса, у ҳолда у оригинал ёки бошланғич функция деб аталади.

2 - таъриф.

Қуйидаги $$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \qquad (4.8.1)$$

хосмас интеграл билан аниқланадиган функция, f(t) функциянинг тасвири деб юритилади (бу ерда $p=a+ib$ каби комплекс ўзгарувчи миқдор).

Оригинал билан тасвир орасидаги боғланиш, қуйидаги ифодаиинг бирортаси орқали белгиланади, яъни:

$$F(p) \div\rangle f(t), \ \ f(t) \langle\div F(p), L\{f(t)\} = F(p) \qquad (4.8.2)$$

Юқоридаги (4.8.1) билан (4.8.2) ни Лапласнинг интеграл алмаштириши деб юритилади.

Энди $\sigma_0(t)$, $\sin t$ ва $\cos t$ каби функцияларнинг тасвирларини ўрганамиз.

а) $\sigma_0(t)$ функциянинг тасвири:

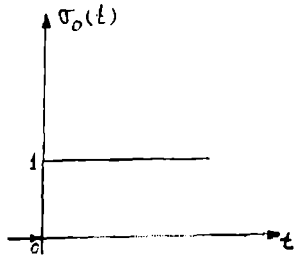
Хевисайд бирлик функцияси деб аталувчи функция қуйидагича аниқлангандир:

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } t \geq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } t < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унинг тасвирини ҳисоблаш учун таърифдан фойдаланамиз, яъни,

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sigma_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-pt} dt = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-pt} \right) \Big|_0^c = \frac{1}{p},$$



8-расм

$$F(p) = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p} \div \rangle 1.$$

б) sin t нинг тасвири:
Таърифга кўра:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \sin t e^{-pt} dt = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \sin t \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= -\lim_{c \to +\infty} \frac{e^{-pt}(\cos t + p \sin t)}{1 + p^2} \Big|_0^c = \frac{1}{1 + p^2},$$

Демак: $\sin t \langle \div \frac{1}{1 + p^2}$.

в) cos t нинг тасвири:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \cos t \cdot e^{-pt} dt = \lim_{c \to +\infty} \int_0^{c} \cos t \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left(e^{-pt} \sin t - pe^{-pt} \cos t \right) \Big|_0^c - p^2 F(p);$$

$$F(p) = \lim_{c \to +\infty} \frac{e^{-pt} (\sin t - p \cos t)}{1 + p^2} \Big|_0^c = \frac{p}{1 + p^2}.$$

Демак: $\cos t \langle\div \dfrac{p}{1+p^2}$.

Ўхшашлик теоремаси. Агар $F(p) \div\rangle f(t)$ каби бўлса, ҳар доим

$$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \div\rangle f(\alpha t)$$

Исбот. Ҳақиқатан ҳам $\alpha > 0$ бўлганда, таърифга кўра, қуйидагини ёза оламиз

$$L\{f(\alpha t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \begin{vmatrix} \alpha t = z, & dt = \frac{1}{\alpha} dz \\ t = \frac{z}{\alpha} & \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} z} f(z) dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Демак: $f(\alpha t) \langle\div \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

Бу теоремага аосан, $\sin \alpha t$ ва $\cos \alpha t$ каби функцияларнинг тасвирлари қуйидагича ёзилади:

$$\sin \alpha t \langle\div \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}, \quad \cos \alpha t \langle\div \frac{p}{p^2 + \alpha^2}.$$

Тасвирнинг чизиқлилик хоссаси ҳамда унинг ягоналиги

а) Агар $f(t)=C_1f_1(t)+...+C_nf_n(t)$ каби бўлиб (C лар ўзгармас сонлар), $F(p)\div\rangle f(t), F_i(p)\div\rangle f_i(t)$ каби бўладиган бўлсалар, у ҳолда, ҳар доим $F(p)=\sum_{i=1}^{n} C_iF_i(p)$.

б) Агар $F(p)\div\rangle f(t)$ ва $F(p)\div\rangle\varphi(t)$ бўлса, у ҳолда ҳар доим ҳам $f(t)\equiv\varphi(t)$ дир.

Юқорида баён қилинганларнинг исботларини тасвирнинг таърифидан фойдаланиб осонгина амалга ошириш мумкин.

Силжиш теоремаси. Агар $F(p)\div\rangle f(t)$ каби бўладиган бўлса, у ҳолда ҳар доим ҳам $F(p+\alpha)\div\rangle e^{-\alpha t}f(t)$ каби бўлади (бу ерда, α - ихтиёрий ҳақиқий сон).

Исбот. Таърифга асосан:

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-pt}f(t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t}f(t)dt=F(p+\alpha)$$

Бу теоремадан фойдаланиб, қуйида биз бир қатор функцияларнинг тасвириларини ҳисоблаймиз

$$e^{-\alpha t}\langle\div\frac{1}{p+\alpha},\ e^{\alpha t}\langle\div\frac{1}{p-\alpha},\ Sh\alpha t=\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\langle\div\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},$$

$$ch\alpha t=\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\langle\div\frac{p}{p^2-\alpha^2},$$

$$e^{-\alpha t}\sin at\langle\div\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2},\ e^{-\alpha t}\cos at\langle\div\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}.$$

Тасвирни дифференциаллаш теоремаси.

Агар $F(p)\div\rangle f(t)$ каби бўлса, у ҳолда, ҳар доим ҳам қуйидаги ифода ўринли бўлади:

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \div\rangle t^n f(t)$$

Исбот. Таърифга кўра: $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt.$

Бундан эса,

$$-\frac{d}{dp}\left[F(p)\right] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t \cdot f(t)dt \div\rangle t\, f(t),$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left[F(p)\right] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t^2 \cdot f(t)dt \div\rangle t^2 f(t),$$

....

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left[F(p)\right] = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot t^n \cdot f(t)dt \div\rangle t^n f(t)$$

ларни ёза оламиз.

Бу теоремадан фойдаланиб қуйидагиларни ёзиш мумкин бўлади:

Агар $\frac{1}{p} \div\rangle 1$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда,

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{n!}{p^{n+1}} \div\rangle t^n$$

Шунингдек, $\alpha / \left(p^2 + \alpha^2\right) \div\rangle \sin\alpha t, 1/(p+\alpha)^2 \div\rangle te^{-\alpha t}$ эканликларини эътиборга олсак, у ҳолда

$$-\frac{2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2} \div\rangle t\sin\alpha t, \quad -\frac{1}{(p+\alpha)^2} \div\rangle te^{-\alpha t}$$

Оригинални дифференциаллаш ҳақидаги теорема.

Агар f(t) ва унинг ҳосилалари $f'(t), f''(t), \ldots, f^n(t)$ чегараланган функциялар бўлиб, уларнинг ҳар бирининг e^{-pt} га бўлган кўпайтмаларидан ҳисобланган хосмас интеграллар яқинлашувчи бўладиган бўлсалар, у ҳолда, у ҳосилаларнинг ҳам тасвирлари мавжуд бўлиб, улар қуйидагича ёзилади:

$$f'(t)\langle\div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t)\langle\div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^n(t)\langle\div p^nF(p) - \left[p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0)+\ldots+f^{n-1}(0)\right].$$

Ўралиш теоремаси.

Агар $F_1(p)$ ва $F_2(p)$ лар мос ҳолда $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ ларнинг тасвирларини ифодаласалар, у ҳолда, ҳар доим ҳам

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\div\rangle\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)dt$$

каби бўлади.

Исбот. Таърифга асосан:

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right]dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau)d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f_2(t-\tau)dt = \begin{vmatrix} t-\tau = z \\ dt = dz \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau)d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pz} f_2(z)dz = F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Демак:

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \langle \div F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Меллинининг интеграли ҳақидаги теорема.

Агар F(p) функция f(t) функциянинг тасвири бўлса, f(t) функция узлуксиз бўлган барча нуқталарда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

каби тенглик ҳар доим ўринли бўлади. Бу ердаги интеграл ҳар қандай $Rep=c>S_0$ тўғри чизиқ бўйлаб интегралланиб, унинг $(c-i\theta,\ c+i\theta)$ кесмаси бўйича интегралининг $\theta\to\infty$ даги лимитидир. Бу интеграл Меллинининг интеграли деб аталади ҳамда у Лаплас алмаштиришга тескари алмаштиришни ифода этади.

Қуйида асосий элементар функциялар учун тасвирлар жадвалини келтирамиз.

	f(t)	F(p)		f(t)	F(p)
1	1	$\frac{1}{p}$	9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
2	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	10	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
3	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	11	$t\cos at$	$-\frac{a^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}$
4	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	12	$t\ e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
5	$ch\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	13	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
6	$sh\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	14	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$
7	$e^{-\alpha t}\sin at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	15	$\frac{1}{2a^3}(\sin at -$	
8	$e^{-\alpha t}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$		$-\, at\cos at)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$

Дифференциал ва интеграл - дифференциал тенгламаларни Лаплас алмаштириши усули билан ечиш учун аввало, уларга мос бўлган «тасвир» тенгламалар ҳосил қилинади ва улардан «тасвир ечим»лар топилиб, уларга нисбатан тескари Лаплас алмаштириши қўлланилади. Натижада, «оригинал ечим»лар ҳосил қилинадиларки, улар энди қаралаётган тенгламаларнинг ечимларини ифодалайди. Лекин ҳар доим ҳам функцияларнинг мавжуд тасвирлари орқали оригиналларни топиш мумкин бўлавермайди ёки мумкин бўлганда ҳам анча катта ҳажмдаги ҳисоблаш ишларини бажаришга тўғри келади. Шу боисдан ҳам кўпинча, Лапласнинг тақрибий тескари алмаштиришидан фойдаланиладики, у ерда ЭҲМсиз бу муаммони ҳал этиб бўлмайди.

2. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ - ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ ЛАПЛАС АЛМАШТИРИШИ УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ

Айтайлик, коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама

$$\ddot{u} + a_1 \dot{u} + a_2 u = f(t) \qquad (4.8.3)$$

нинг берилган

$$u(0) = \alpha_0, \qquad \dot{u}(0) = \alpha_1 \qquad (4.8.4)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Лаплас алмаштириши усули билан ечиш лозим бўлсин.

Агар $u(t)$ нинг тасвирини $u(p)$, $f(t)$ нинг тасвирини эса $F(p)$ орқали белгиласак, ҳамда ҳосилаларнинг тасвирлари ҳисобланаётганда бошланғич шартлардан фойдалансак, (4.8.3) тенгламага мос бўлган «тасвир» тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади

$$\left(p^2 + a_1 p + a_2\right)u(p) = \left(p + a_1\right)\alpha_0 + \alpha_1 + F(p)$$

ёки

$$u(p) = \frac{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)\alpha_0 + \left(\frac{a_1}{2}\alpha_0 + \alpha_1\right) + F(p)}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2 - \frac{a_1^2}{4}}\right)^2} \div\rangle \alpha_0 e^{-\frac{a_1}{2}t} \times$$

$$\times \cos\omega t + \frac{\overline{\alpha}_1}{\omega} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau) \times$$

$$\times e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} d\tau$$

Агар $\omega^2 = a_2 - \frac{a_1^2}{4}$ ва $\overline{\alpha}_1 = \frac{a_1}{2}\alpha_0 + \alpha_1$ каби белгилашлар киритиб,

$$\frac{p + \frac{\alpha_1}{2}}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \omega^2} \div\rangle e^{-\frac{a_1}{2}t}\cos\omega t, \quad \frac{1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \omega^2} \div\rangle \frac{1}{\omega} e^{-\frac{a_1}{2}t}\sin\omega t$$

эканликларини ва ўралиш теоремасига асосан,

$$\frac{1}{\omega}F(p)\frac{\omega}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \omega^2} \div\rangle \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

эканлигини эътиборга олсак, (4.8.3) - (4.8.4) Коши масаласининг ечими қуйидагича ёзилади:

$$u(t)=\alpha_0 e^{-\frac{\alpha_1}{2}t}\cos\omega t+\frac{\overline{\alpha}_1}{\omega}e^{-\frac{\alpha_1}{2}t}\sin\omega t+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)e^{-\frac{\alpha_1}{2}(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)d\tau.$$

Энди қуйидаги иккинчи тартибли оддий интеграл - дифференциал тенглама

$$\ddot{u}+b\left[u-\int_0^t R(t-\tau)u(\tau)d\tau\right]=f(t) \tag{4.8.5}$$

нинг

$$u(0)=0,\ \dot{u}(0)=0 \tag{4.8.6}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини Лаплас алмаштириши усули ёрдамида ечиш жараёнини баён этамиз.

Мазкур масала учун оригинални дифференциаллаш ва ўралиш теоремаларини қўллаб, қуйидаги тасвир тенгламасига эга бўламиз

$$\left[p^2+b\left(1-R(p)\right)\right]u(p)=F(p) \tag{4.8.7}$$

Бу ерда:

$$R(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,R(t)dt,$$

$$u(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,u(t)dt,$$

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,f(t)dt.$$

Бу тенгламадан эса,

$$u(p)=\frac{F(p)}{p^2+b\left[1-R(p)\right]} \tag{4.8.8}$$

ни топамиз.

Ихтиёрий R(p) лардан уларнинг оригиналларига ўтиш жараёни анча мураккабдир, чунки улар тайёр ўтиш формулалари мавжуд бўлмаганлигидан, у ерда Меллинининг интеграли қўлланиладики, уни эса ҳар доим ҳам аниқ ҳисоблаш мумкин бўлавермайди ёки уни ҳисоблаш учун катта ҳажмдаги ҳисоблаш ишларини бажариш керак бўлади. Шу сабабли, бу муаммони ҳал қилиш учун кўпинча, тақрибий асимптотик ёки сонли усулларга мурожаат қилинадики, улар эса одатда, у ёки бу хилдаги камчиликларга эгадирлар.

Қуйида биз, Лапласнинг тескари алмаштиришига доир бир усулни баён этамизки, у усул Вольтерра хилидаги интеграл тенгламаларга асосланган бўлиб, интеграл - дифференциал тенгламаларнинг берилган аниқлик даражасидаги сонли ечимларини олиш ҳамда уларнинг ядроларининг ҳар хил кўринишларидаги соддалаштиришларидан холос бўлиш имкониятларини беради.

Энди (4.8.7) тенгламани

$$\left[1 + b(1/p^2 - R(p)/p^2)\right]u(p) = F(p)/p^2 \quad (4.8.9)$$

каби кўринишда ёзиб олиб, унинг учун ўралиш теоремасини қўлласак, оригинални топиш учун қуйидаги интеграл тенгламани ҳосил қиламиз

$$u(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau)u(\tau)d\tau = q(t) \qquad (4.8.10)$$

Бу ерда:

$$q(t) = \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d(\tau),$$

$$\Gamma(t) = b\left[t - \int_0^t (t-z)R(z)dz\right].$$

Ҳақиқатан ҳам ўралиш теоремасига асосан, қуйидаги муносабатларни ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{p^2}F(p) \div > \int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau,\; u(p) \xrightarrow{\cdot} u(t),$$

$$\frac{1}{p^2}u(p) \div > \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$\frac{1}{p^2}R(p)u(p) \div > \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} (t-\tau-z)R(z)dz\right]u(\tau)d\tau.$$

Бу ифодаларга асосан, (4.8.10) тенгламанинг тўғрилиги келиб чиқади. Шу билан биргаликда, у (4.7.11) тенгламадан ҳеч ҳам фарқ қилмайди ва шу боис, (4.8.10) тенгламанинг сонли ечимини топиш учун квадратура формулаларига асосланган усулдан фойдаланиш мумкин бўлади, яъни:

$$u(t_n) = q(t_n) - b\sum_{i=1}^{n-1} A_i \Gamma(t_n - t_i) u(t_i). \qquad (4.8.11)$$

Бу ерда:

$$t_n = n \cdot \Delta t,\; q(t_n) = \int_0^{t_n} (t_n - \tau) f(\tau) d\tau,$$

$$\Gamma(t_n - t_i) = t_n - t_i - \int_0^{t_n - t_i} (t_n - t_i - z) R(z) dz, \quad n = 1,2,\ldots;$$

Квадратура формулаларига асосланган усул, етарли даражада умумий ядроларга эга бўлган интеграл тенгламаларнинг сонли ечимларини ҳосил қилиш имкониятига эга. Масалан, (4.8.10) тенгламанинг ядроси суст хусусиятли Абель хилидаги ядродан иборат бўлсин, яъни

$$\Gamma(t) = bt^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta t}, \quad (0 < \alpha < 1) \tag{4.8.12}$$

Агар (4.8.10) да $t = t_n$ деб олсак,

$$u_n + b\int_0^{t_n}(t_n - \tau)^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta(t_n-\tau)} \cdot u(\tau)d\tau = q_n \tag{4.8.13}$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди юқоридаги тенгликда қатнашаётган интегрални қуйидагича ўзгартирамиз

$$\int_0^{t_n}(t_n - \tau)^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta(t_n-\tau)} \cdot u(\tau)d\tau = \left| \begin{array}{c} t_n - \tau = z^{\frac{1}{\alpha}},\ \tau = t_n - z^{\frac{1}{\alpha}} \\ d\tau = -\frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{t_n^\alpha} z^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-\beta z^{\frac{1}{\alpha}}} u(t_n - z^{\frac{1}{\alpha}}) \cdot z^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} dz = \frac{1}{\alpha}\int_0^{t_n^\alpha} e^{-\beta z^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot u(t_n - z^{\frac{1}{\alpha}})dz =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}^\alpha}^{t_i^\alpha} e^{-\beta z^{\frac{1}{\alpha}}} u(t_n - z^{\frac{1}{\alpha}})dz. \tag{4.8.14}$$

Бу ердаги ҳар бир интегрални трапециялар формуласи билан ҳисоблаймиз:

$$\int_{t_{i-1}^\alpha}^{t_i^\alpha} e^{-\beta z^{\frac{1}{\alpha}}} u(t_n - z^{\frac{1}{\alpha}})dz \approx \frac{t_i^\alpha - t_{i-1}^\alpha}{2}\left[e^{-\beta t_i}u_{n-i} + e^{-\beta t_{i-1}}u_{n-i+1}\right].$$

У ҳолда

$$\int_0^{t_n}(t_n - \tau)^{\alpha-1} e^{-\beta(t_n-\tau)} u(\tau)d\tau \approx$$

$$\approx \frac{t_1^\alpha}{2\alpha}u_n + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta t_i} u_{n-i}. \tag{4.8.15}$$

Бу ерда

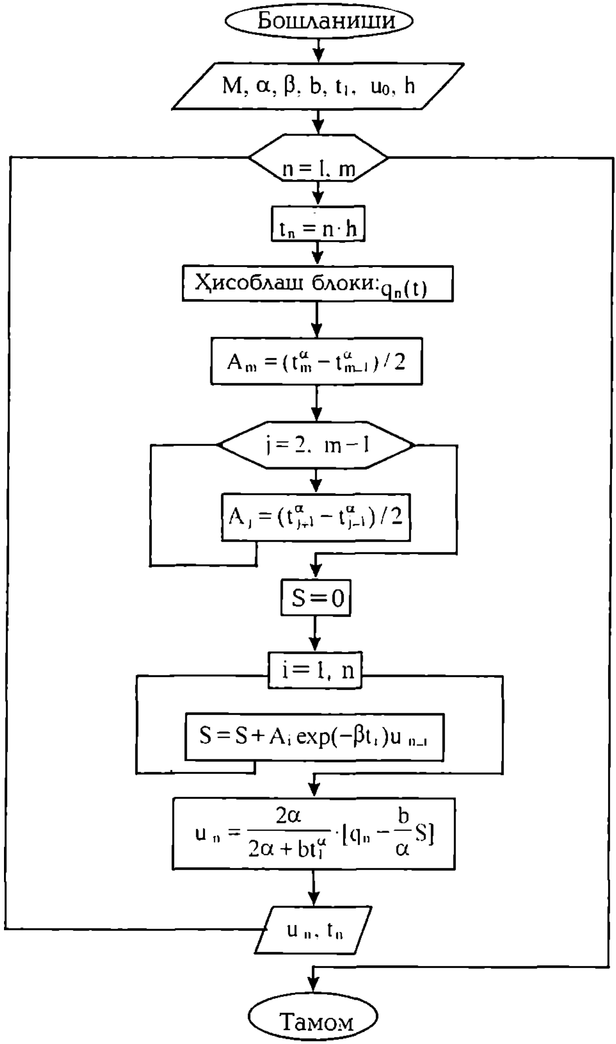
$$A_n = \frac{t_n^\alpha - t_{n-1}^\alpha}{2}, \quad A_j = \frac{t_{j+1}^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{2}, \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Энди (4.8.15) ни (4.8.13) га қўйиб, ҳосил бўлган ифодани u_n га нисбатан ечсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$u_n = \frac{2\alpha}{2\alpha + bt_1^\alpha}\left[q_n - \frac{b}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta t_i} u_{n-i}\right]. \quad (4.8.16)$$

Бу қурилган (4.8.16) формула ифодалайдиган ҳисоблаш алгоритми, юқори аниқликдаги ва шу билан бирликда анча кам миқдордаги машина вақти сарфланадиган ҳисоблашларни ЭҲМда бажариш имконини беради.

Қуйида мазкур алгоритм асосида тузилган дастурнинг блок - схемасини келтирамиз:



Бошланиши
M, α, β, b, t_1, u_0, h
n = 1, m
$t_n = n \cdot h$
Ҳисоблаш блоки: $q_n(t)$
$A_m = (t_m^\alpha - t_{m-1}^\alpha)/2$
$j = 2, m-1$
$A_j = (t_{j+1}^\alpha - t_{j-1}^\alpha)/2$
S = 0
i = 1, n
$S = S + A_i \exp(-\beta t_i) u_{n-i}$
$u_n = \frac{2\alpha}{2\alpha + b t_1^\alpha} \cdot [q_n - \frac{b}{\alpha} S]$
u_n, t_n
Тамом

5-БОБ
ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Биз аввалги бобда чегаравий масалалар ҳақидаги тушунча билан танишган эдик. Чегаравий масалаларни ечиш Коши масалаларига нисбатан анча мураккаб бўлганлиги сабабли, кўпинча улар Коши масалаларига келтириб ечилади. Қуйида биз чегаравий масалаларни Коши масалаларига келтириш муаммосига бағишланган айрим усуллар билан танишиб ўтамиз. Бобнинг охирида эса чекли айирмалар усулини баён этамиз.

5.1. СУПЕРПОЗИЦИЯ УСУЛИ

Айтайлик,

$$\ddot{u}(x) + a(x)\dot{u}(x) + b(x)u(x) = f(x) \qquad (5.1.1)$$

каби иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама ва

$$u(a) = Y_a, \; u(b) = Y_b \qquad (5.1.2)$$

каби чегаравий шартлар билан берилган чегаравий масалани Коши масаласига келтириш лозим бўлсин. Қуйидагича алмаштириш киритамиз:

$$u(x) = Y_1(x) + \alpha Y_2(x) \qquad (5.1.3)$$

Бу ерда, α орқали ҳозирча номаълум бўлган константани белгилаймиз. Юқоридаги (5.1.3) ифодадан кетма-кет биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни ҳисоблаб, уларни (5.1.1) тенгламага қўйсак қуйидагини ёзамиз

$$\begin{aligned}&[\ddot{Y}_1(x) + a(x)\dot{Y}_1(x) + b(x)Y_1(x) - f(x)] + \\ &+ \alpha[\ddot{Y}_2(x) + a(x)\dot{Y}_2(x) + b(x)Y_2(x)] = 0\end{aligned} \qquad (5.1.4)$$

ва ундан қуйидаги иккита тенгламани ҳосил қиламиз

$$\ddot{Y}_1(x) + a(x)\dot{Y}_1(x) + b(x)Y_1(x) = f(x), \qquad (5.1.5)$$

$$\ddot{Y}_2(x) + a(x)\dot{Y}_2(x) + b(x)Y_2(x) = 0. \qquad (5.1.6)$$

Биринчи чегаравий шарт *билан* (5.1.3) дан

$$Y_1(a) + \alpha Y_2(a) = Y_a$$

бўлганлиги учун

$$Y_1(a) = Y_a, \quad Y_2(a) = 0$$

(5.1.7а,б)

деб ёзиш мумкин.

Энди (5.1.3) ифоданинг биринчи тартибли ҳосиласининг $x = a$ бўлгандаги қиймати

$$\dot{u}(a) = \dot{Y}_1(a) + \alpha \dot{Y}_2(a) \qquad (5.1.8)$$

да $\dot{Y}_1(a) = 0, \dot{Y}_2(a) = 1$ (5.1.9а,б)

деб олсак, (5.1.8) дан

$$\dot{u}(a) = \alpha \qquad (5.1.10)$$

ни топамиз. Бундан кўриняптики, номаълум α константа билан $\dot{u}(a)$ бошланғич қийматлар бир хил экан.

Иккинчи чегаравий шарт билан (5.1.3) дан қуйидагини ёзамиз

$$Y_1(b) + \alpha Y_2(b) = Y_b.$$

Бундан эса,

$$\alpha = \frac{Y_b - Y_1(b)}{Y_2(b)} \qquad (5.1.11)$$

ни топамиз.

Умуман, (5.1.1) - (5.1.2) чегаравий масаланинг суперпозиция усули билан ечилиш жараёни қуйидагича олиб борилади:

1. (5.1.5) тенгламани (5.1.7а), (5.1.9а) каби бошланғич шартлар билан биргаликда а дан в гача бўлган чегараларда интеграллаб, $Y_1(b)$ нинг қийматини ҳисоблаймиз.

2. (5.1.6) тенгламани (5.1.7б), (5.1.9б) каби бошланғич шартлар билан биргаликда а дан в гача

бўлган чегараларда интеграллаб, $Y_2(b)$ нинг қийматини ҳисоблаймиз.

3. (5.1.11) дан $Y_1(b)$, $Y_2(b)$, Y_b лар орқали α ни топамиз.

4. α нинг қийматини (5.1.3) га қўйиб, қаралаётган чегаравий масаланинг ечимини топамиз.

5.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ПРОГОНКА УСУЛИ

Мазкур усул ёрдамида ҳам кўпгина чегаравий масалаларни Коши масаласига келтириб ечилади. Қуйида биз уларнинг айримлари билан танишиб ўтамиз.

1. Айтайлик, қуйидаги иккинчи тартибли чизиқли биржинсли бўлмаган оддий дифференциал тенглама

$$\ddot{u}(x) + A(x)\dot{u}(x) + B(x)u(x) = f(x) \qquad (5.2.1)$$

билан биргаликда унинг учун

$$\alpha_{10}\dot{u}(0) + \alpha_{20}u(0) = \lambda_0, \qquad (5.2.2)$$

$$\alpha_{1l}\dot{u}(l) + \alpha_{2l}u(l) = \lambda_l \qquad (5.2.3)$$

каби чегаравий шартлар қаралаётган бўлсин. Бу ерда, $A(x)$, $B(x)$ ва $f(x)$ лар берилган узлуксиз функциялар бўлиб, α_{10}, α_{20}, α_{1l}, α_{2l}, λ_0, λ_l лар эса, маълум константалардир.

Энди $\alpha(x)\dot{u}(x) + \beta(x)u(x) = \gamma(x) \qquad (5.2.4)$

каби биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламани қараб, бу ердаги номаълум бўлган $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ функцияларни шундай танлаймизки, натижада $u(x)$ фукция (5.2.1) тенгламани ҳамда (5.2.2) билан (5.2.3) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган бўлсин. Шу мақсадда, (5.2.4) тенгламани дифференциаллаб, ҳосил бўлган ифоданинг ҳар иккала томонини $\alpha(x)$ га бўлиб юбориб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned} &\ddot{u}(x) + \alpha^{-1}(x)[\dot{\alpha}(x) + \beta(x)] \cdot \dot{u}(x) + \\ &+ \alpha^{-1}(x) \cdot \dot{\beta}(x) u(x) = \alpha^{-1}(x) \cdot \dot{\gamma}(x). \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Ушбу (5.2.5) ҳамда (5.2.1) тенгламалардаги $u(x)$ билан $\dot{u}(x)$ лар олдидаги коэффициентлар ва уларнинг озод ҳадларини тенглаштириб, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ ларни аниқлаш учун қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(x) = \alpha(x)A(x) - \beta(x), \\ \dot{\beta}(x) = \alpha(x)B(x), \\ \dot{\gamma}(x) = \alpha(x)f(x). \end{cases} \tag{5.2.6}$$

Агар (5.2.4) тенгламада $x=0$ деб олиб, уни (5.2.2) чегаравий шарт билан таққосласак, (5.2.6) тизим учун қуйидаги бошланғич шартларни ёзамиз

$$\alpha(0) = \alpha_{10}, \quad \beta(0) = \alpha_{20}, \quad \gamma(0) = \lambda_0 \tag{5.2.7}$$

Мазкур бошланғич шартлардан фойдаланиб (5.2.6) тизимни ечсак, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ лар аниқланади ва уларнинг қийматларини (5.2.4) га $x = l$ деб олингандан сўнг қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади

$$\alpha(l)\dot{u}(l) + \beta(l)u(l) = \gamma(l) \tag{5.2.8}$$

У ҳолда, (5.2.3) чегаравий шарт билан (5.2.8) ифодани биргаликда ечсак, қуйидагича кўринишда бўлган бошланғич шартларни ҳосил қиламиз

$$u(l) = \frac{\alpha_{1l}\gamma(l) - \lambda_l\alpha(l)}{\alpha_{1l}\beta(l) - \alpha_{2l}\alpha(l)}, \quad \dot{u}(l) = \frac{\lambda_l\beta(l) - \lambda_{2l}\gamma(l)}{\alpha_{1l}\beta(l) - \alpha_{2l}\alpha(l)}. \tag{5.2.9}$$

Шундай қилиб, (5.2.1) - (5.2.3) чегаравий масала (5.2.1), (5.2.9) каби Коши масаласига келтириладики, уни энди 4 - бобда баён қилинган усулларнинг бирортаси билан ҳал қилиш мумкин.

2. Айтайлик, энди қуйидаги кўринишда бўлган 4 - тартибли оддий дифференциал тенглама қаралаётган бўлсин, яъни:

$$[P(x)W''(x)]'' + Q(x)W''(x) + R(x)W'(x) + S(x)W(x) = F(x)$$

Бу ерда, $W(x)$ - номаълум функция бўлиб, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ ва $F(x)$ лар маълум узлуксиз функциялардир.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$u_1(x) = P(x)W''(x), \quad u_2(x) = W(x),$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & R(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} Q(x)p^{-1}(x) & S(x) \\ -p^{-1}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} F(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \quad p(x) \neq 0.$$

У ҳолда (5.2.10) тенгламадан, (5.2.1) тенгламага ўхшаш бўлган дифференциал тенгламалар тизими

$$u''(x) + A(x)u'(x) + B(x)u(x) = f(x) \qquad (5.2.11)$$

ни ҳосил қиламиз. Мазкур тизим учун чегаравий шартларни умумийроқ кўринишда танлаймиз, яъни, $x=0$ ва $x=l$ бўлганда:

$$G(x)u'(x) + C(x)u(x) = 0 \qquad (5.2.12)$$

Бу ердаги $G(x)$ ва $C(x)$ лар иккинчи тартибли матрицалар бўлиб, уларнинг элементлари дастлабки чегаравий шартларга боғлиқ ҳолда танланади. Масалан, агар дастлабки чегаравий шартлар, $x=0$ бўлганда $W = W' = 0$ ва $x=l$ бўлганда эса, $W'' = W''' = 0$ бўлсалар, у ҳолда:

$$G(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$G(l)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C(l)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Юқоридаги (5.2.11) тизимнинг ечимини ҳам худди (5.2.1) тенгламанинг ечими бўлган (5.2.4) кўринишда ахтарамиз, фақат, бу ердаги фарқ шундан иборатки, $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар икки ўлчовли квадрат матрицалар бўлиб, $\gamma(x)$ эса, икки ўлчовли устун-вектордир, яъни:

$$\alpha(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(x) & \alpha_{12}(x)\\ \alpha_{21}(x) & \alpha_{22}(x)\end{pmatrix},$$

$$\beta(x)=\begin{pmatrix}\beta_{11}(x) & \beta_{12}(x)\\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x)\end{pmatrix},\qquad \gamma(x)=\begin{pmatrix}\gamma_1(x)\\ \gamma_2(x)\end{pmatrix}.$$

Шу билан биргаликда, (5.2.6) тенгламанинг кўриниши ўзгармасдан қолиб, (5.2.7) бошланғич шартлар эса,

$$\alpha(0)=G(0),\quad \beta(0)=C(0),\quad \gamma(0)=0 \qquad (5.2.13)$$

каби кўринишга эга бўлади.

Энди (5.2.6) матрицавий дифференциал тенгламалар тизимини юқорида келтирилган (5.2.13) бошланғич шартларда ечиб (масалан, Рунге-Кутта усулида), $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ва $\gamma(x)$ ларнинг $x=l$ бўлгандаги қийматлари $\alpha(l)$, $\beta(l)$, $\gamma(l)$ ларни топамиз. У ҳолда, (5.2.4) билан (5.2.11) лардан $u(l)$ ва $\dot{u}(l)$ ларни аниқлаш учун қуйидаги алгебраик тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}\alpha(l)u'(l)+\beta(l)u(l)=\gamma(l),\\ G(l)u'(l)+C(l)u(l)=0.\end{cases} \qquad (5.2.14)$$

Мазкур тизимни ечиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}u(l)=\left[\alpha(l)C(l)-\beta(l)G(l)\right]^{-1}\cdot\gamma(l)C(l),\\ u'(l)=-\left[\alpha(l)C(l)-\beta(l)G(l)\right]^{-1}\cdot\gamma(l)G(l).\end{cases} \qquad (5.2.15)$$

Энди эса, (5.2.11) тенгламаларни (5.2.15) бошланғич шартлар билан биргаликда ечиб, $u(\mathbf{x})$ номаълум функциянинг сонли қийматларини ва улар орқали $W(\mathbf{x})$ нинг қийматларини топамиз.

Дифференциал прогонка усули алгоритмининг ЭҲМга киритилишининг блок-схемасини қуйида келтирамиз (124-бетга қаралсин).

1-масала. Агар чегаравий шартлар қуйидагича берилган бўлса, яъни:

$$w(0)=w'(0)=0,\ w(l)=w'(l)=0 \qquad (5.2.16)$$

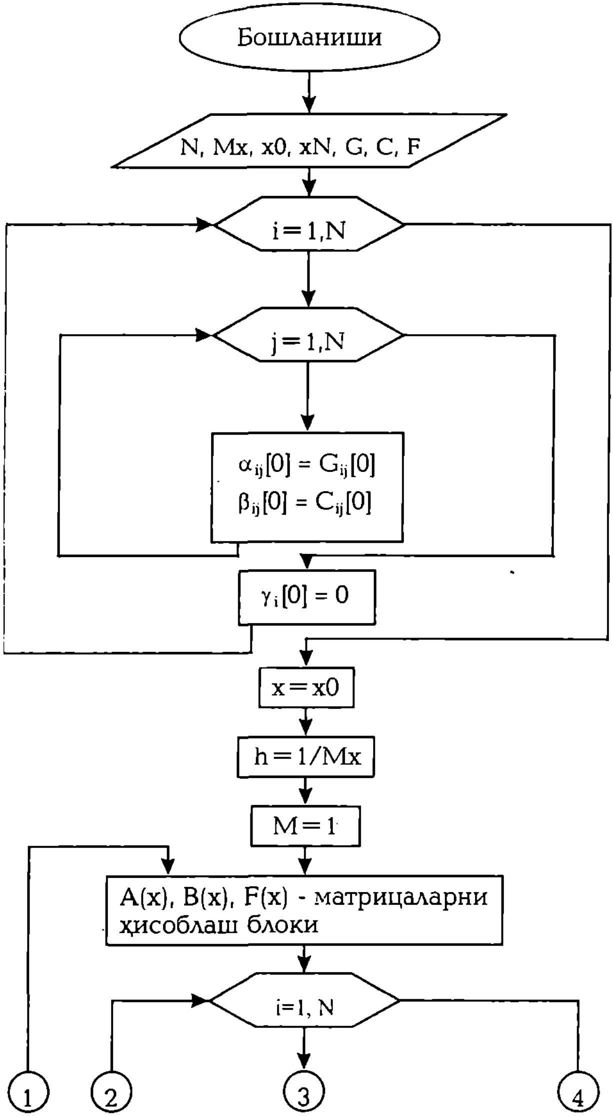
у ҳолда, (5.2.10), (5.2.16) чегаравий масаланинг (5.2.6), (5.2.13) ва (5.2.11), (5.2.15) каби Коши масалаларига тенг-кучли эканлиги исботлансин. Бу ерда $G(0), C(0), G(l), C(l)$ лар учун қуйидаги матрицалар олинсин:

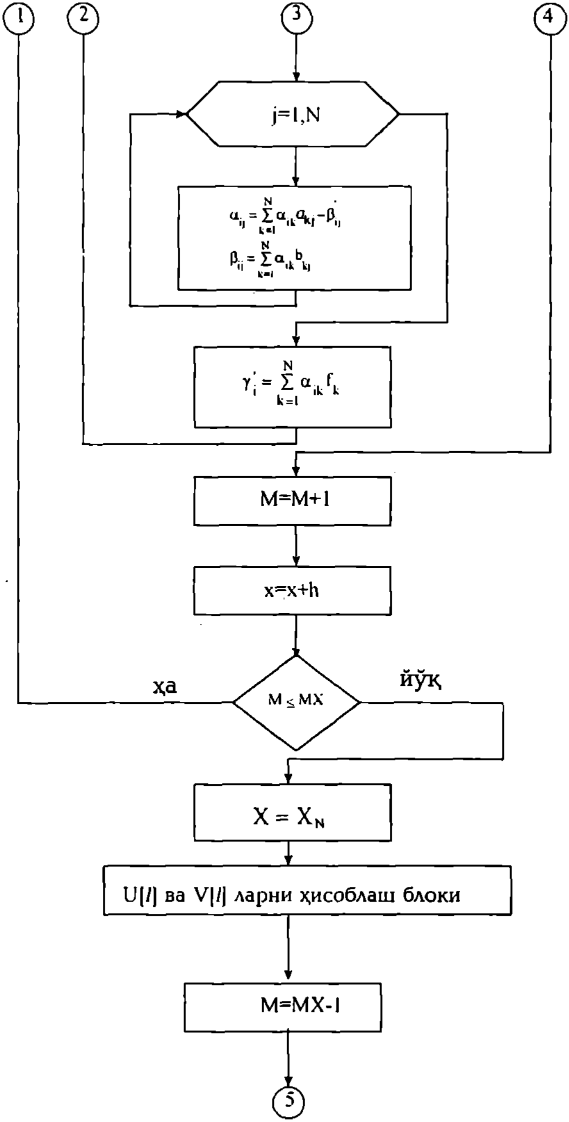
$$G(0)=G(l)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ C(0)=C(l)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

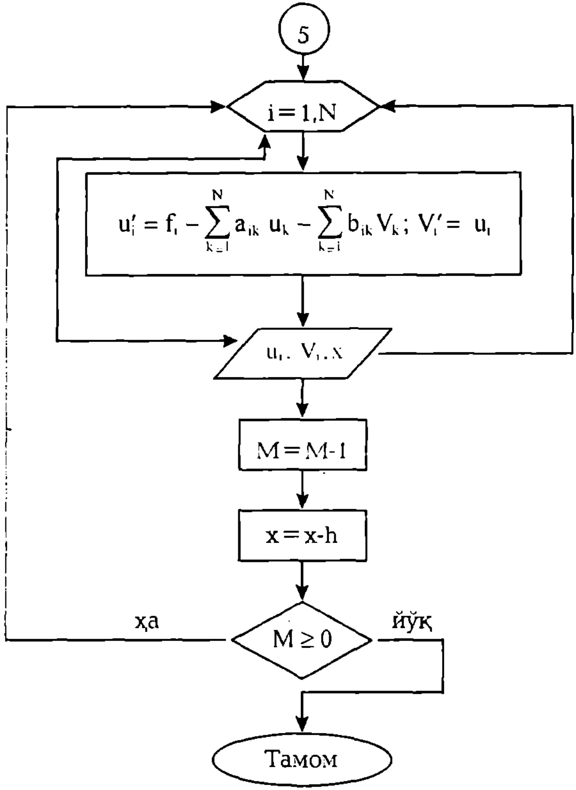
1-мисол.

Ушбу $\left[R(x)u''(x)\right]''+S(x)u(x)=F(x)$

тенглама $u(0)=u'(0)=0,\ u(1)=u'(1)=0$ каби чегаравий шартлар билан биргаликда ечилсин.


Бошланиши
N, Mx, x0, xN, G, C, F
i=1,N
j=1,N
$\alpha_{ij}[0] = G_{ij}[0]$
$\beta_{ij}[0] = C_{ij}[0]$
$\gamma_i[0] = 0$
x=x0
h=1/Mx
M=1
A(x), B(x), F(x) - матрицаларни ҳисоблаш блоки
i=1, N
1
2
3
4


1
2
3
4
j=1,N
$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} a_{kj} - \beta_{ij}$
$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} b_{kj}$
$\gamma_i' = \sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik} f_k$
M=M+1
x=x+h
ҳа
йўқ
M ≤ MX
$X = X_N$
U[l] ва V[l] ларни ҳисоблаш блоки
M=MX-1
5



Агар $R(x) = 1 + x$, $S(x) = x$, $F(x) = x\left[72 + x^2(1 - x^2)\right]$ каби бўлсалар, бу масала $u(x) = \left[x(1 - x)\right]^2$ аниқ ечимга эга.

Рунге - Кутта усули билан ЭҲМда (5.2.6), (5.2.13) ва (5.2.11), (5.2.15) каби Коши масалаларини

$Q(x) = R(x) = 0$ бўлган ҳол учун ечиб, қуйидаги 5 - жадвалда келтирилган сонли натижаларнинг тўғри эканлиги текширилсин (у ерда, юқоридаги қаторда аниқ ечимнинг сонли қийматлари келтирилган).

5-жадвал.

x	u(x)	u′(x)	u″(x)	u‴(x)
0	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	2.00000 2.00000	-12.00000 -12.00000
0.25	0.03515 0.03515	0.18750 0.18750	-0.25000 -0.25000	-6.00000 -5.99983
0.50	0.06250 0.06250	0.00000 0.00000	-1.00000 -1.00000	0.00000 0.00002
0.75	0.35156 0.35156	-0.18750 -0.18750	-0.25000 -0.25000	6.00000 5.99988
100	0.00000 0.00000	0.00000 0.00000	2.00000 2.00000	12.00000 12.00000

2-масала. Айтайлик, (5.2.10) тенглама учун қуйидаги чегаравий шартлар қўйилган бўлсин:

$$\begin{cases} u(a) = u'(a) = 0, \\ u''(b) + \rho_1 u(b) = 0, \\ u'''(b) + \rho_2 u'(b) = 0. \end{cases} \tag{5.2.17}$$

У ҳолда, (5.2.10), (5.2.17) чегарвий масаланинг (5.2.6) билан (5.2.13) ва (5.2.11) билан (5.2.15) Коши масалаларига тенгкучли эканлиги исботлансин. Бу ерда, $G(0)$,$C(0)$,$G(l)$ ва $C(l)$ матрицаларнинг қийматлари қуйидагича танлансин:

$$G(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R^{-1}(l) & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad C(l) = \begin{pmatrix} R^{-1}(l) & \rho_1 \\ R'(l)R^{-2}(l) & 0 \end{pmatrix}.$$

2-мисол.

Ушбу $\left[p(x)u''(x)\right]'' + Q(x)u''(x) + S(x)u(x) = F(x)$ тенглама $u(0) = u'(0) = 0,\ u''(1) - 6{,}5u(1) = 0,\ u'''(1) - 3u'(1) = 0$ каби чегаравий шартларда ечилсин.

Бу тенглама $P(x) = 1 + x,\ \ Q(x) = 1,\ \ S(x) = -12$ ҳамда $F(x) = 2\left[25 + 6x(7 - x^2)(2 + x)\right]$ бўлганда $U(x) = \left[x \cdot (1 + x)\right]^2$ каби аниқ ечимга эга.

Рунге - Кутта усули билан (5.2.6), (5.2.13) ва (5.2.11), (5.2.15) Коши масалаларини $R(x) = 0,\ \rho_1 = -6.5$ ва $\rho_2 = -3$ бўлганда ЭҲМда ечиб, қуйидаги 6-жадвалда келтирилган сонли натижаларнинг тўғри эканликларини текширилсин. У жадвалда, $u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)$ лар учун аниқ (юқоридаги қатор) ва тақрибий қийматлар берилган.

6-жадвал

x	u(x)	u′(x)	u″(x)	u‴(x)
0.00	0.000000 0.000000	0.000000 0.000000	2.000000 2.000000	12.000000 11.999993
0.25	0.097650 0.097650	0.937000 0.937500	5.750000 5.749993	18.000000 18.000004
0.50	0.562500 0.562500	3.000000 2.999997	11.000000 11.000000	24.000000 23.999997
0.75	1.722656 1.722656	6.562500 6.562499	17.750000 17.749994	30.000000 29.999997
1.00	4.000000 3.999998	12.000000 11.999998	26.000000 25.999999	36.000000 35.999999

3-масала. Агар (5.2.16) тенглама учун чегаравий шартлар

$$\begin{cases} u''(a)+\rho_1 u(a)=0, \\ u''(b)+\rho_1 u(b)=0, \qquad u'''(b)+\rho_2 u'(b)=0. \\ u'''(a)+\rho_2 u'(a)=0, \end{cases} \tag{5.2.18}$$

каби берилган бўлсалар, у ҳолда, (5.2.10), (5.2.18) чегаравий масаланинг (5.2.6), (5.2.13) ва (5.2.15), (5.2.11) Коши масалаларига тенгкучли эканлигини исботлансин. Бу ердаги, $G(0), C(0), G(l)$ ва $C(l)$ матрицалар қуйидаги кўринишда танлансин:

$$G(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -R^{-1}(0) & \rho_2 \end{pmatrix},\ C(0)=\begin{pmatrix} R^{-1}(0) & \rho_1 \\ R'(0)R^{-2}(0) & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(l)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{R}(l) & \rho_2 \end{pmatrix},\ C(l)=\begin{pmatrix} R^{-1}(l) & \rho_1 \\ R'(l)R^{-2}(l) & 0 \end{pmatrix}.$$

3-мисол.

Ушбу $\left[p(x)u''(x)\right]'' + Q(x)u'' + S(x)u(x) = F(x)$ тенгламанинг берилган

$$\begin{cases} u''(0)-16u(0)=0, \quad u'''(0)-\frac{28}{3}u'(0)=0, \\ u''(1)-16u(1)=0, \quad u'''(1)-\frac{28}{3}u'(1)=0. \end{cases}$$

каби чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин. Бу тенглама, агар $P(x)=1+x,\ Q(x)=-20,\ S(x)=1$

$F(x)=24(1+5x-4x^2)-x^4(1+x)$ бўлсалар,

$u(x)=x^4\cdot(1+x)$ дай аниқ ечимга эгадир.

Рунге - Кутта усули билан (5.2.6), (5.2.13) ва (5.2.11), (5.2.15) Коши масалаларини $R(x)=0,$

$\rho_1 = -16$ ва $\rho_2 = -\dfrac{28}{3}$ бўлган ҳол учун ЭҲМда ечиб, қуйидаги 7-жадвалда келтирилган сонли ечимларнинг қийматларининг тўғрилиги текширилсин.

7-жадвал

x	u(x)	u′(x)	u″(x)	u‴(x)
0.00	0.000000 0.000000	0.000000 0.000000	0.000000 0.000000	0.000000 0.000000
0.25	0.004882 0.004882	0.080231 0.080231	1.062500 1.062400	9.750000 9.750007
0.50	0.093750 0.093750	0.812500 0.812500	5.500000 5.500006	27.000000 26.999993
0.75	0.553710 0.553710	3.269531 3.269531	15.187500 15.187499	51.750000 51.749002
1.00	2.000000 1.999997	9.000000 8.999998	32.000000 31.999995	84.000000 83.999904

5.3. ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР УСУЛИ

Айтайлик, яна иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган оддий дифференциал тенглама.

$$\ddot{u}(x) + a(x)\dot{u}(x) + в(x)u(x) = f(x) \qquad (5.3.1)$$

ўзининг $u(0) = \alpha$, $u(l) = \beta$ каби чегаравий шартлари билан қаралаётган бўлсин.

Мазкур тенгламани чекли айирмалар шаклида ифодалаш мақсадида тўрни $x_0 = 0,\ x_n = x_{n-1} + h,\ (n = \overline{1, N-1})$ кўринишда аниқлаймиз. Бу ердаги N, оралиқлар сонини ифода этиб, $x_{N+1} = l$.

Номаълум функция ҳамда унинг ҳосиласининг x_n нуқтадаги қийматлари қуйидаги муносабатлар билан берилади:

$$u(x_n) = u_n,\ \dot{u}(x_n) = \dot{u}_n = \left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)/2h,$$

$$\ddot{u}(x_n) = \ddot{u}_n = \left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right)/h^2.$$

У ҳолда, (5.3.1) тенгламанинг $x = x_n$ нуқтадаги ифодаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) + \frac{a_n}{2h}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) + b_n u_n = f_n \qquad (5.3.2)$$

ёки

$$A_n u_{n-1} + B_n u_n + C_n u_{n+1} = r_n.$$

Бу ерда:

$$A_n = 1 - \frac{h}{2}a_n,\ \ B_n = h^2 b_n - 2,$$

$$C_n = 1 + \frac{h}{2}a_n,\ \ r_n = h^2 f_n.$$

Чегаравий шартларни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$u(0) = u_0 = \alpha,\ \ u(l) = u_{N+1} = \beta \qquad (5.3.3)$$

Агар

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},\ \ P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - \alpha A_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N - \beta C_N \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} B_1\, C_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2\, B_2\, C_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots A_{N-1}\, B_{N-1}\, C_{N-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_N\ B_N \end{pmatrix}$$

каби белгилашлардан фойдалансак, (5.3.2) билан (5.3.3) ларни матрицавий шаклда ёзиш мумкин, яъни:

$$Mu = P \qquad (5.3.4)$$

Натижада ҳосил қилинган (5.3.4) чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини 2 - бобда баён қилинган усулларнинг бирортаси ёрдамида ечиш мумкин. Лекин, M матрица уч диагоналли матрица бўлганлиги сабабли, биз анча самарали усул ҳисобланган факторизациялаш усулидан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, det M≠0 бўлсин. У ҳолда M матрицани қуйидагича ёзиш мумкин: $M = LV$ (5.3.5) Бу ерда:

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ A_2 & \beta_2 & & & \\ & & & & \\ & & A_{n-1} & \beta_{n-1} & \\ & & & A_n & \beta_n \end{pmatrix}, \qquad (5.3.6)$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \gamma_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.3.7)$$

каби бўлиб, β_n ва γ_n номаълумлар қуйидаги муносабатлар билан боғланган:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = B_1,\ \beta_1\gamma_1 = C_1, \\ &\beta_n = B_n - A_n\gamma_{n-1},\ \left(n = \overline{2,N}\right), \\ &\beta_n\gamma_n = C_n,\ \left(n = \overline{2,N-1}\right). \end{aligned} \qquad (5.3.8)$$

Агар (5.3.5) эътиборга олинса, (5.3.4) тизим $LVu = P$ шаклда ёзилади ёки бу ерда, $Vu = Z$ (5.3.9) деб белгилаш киритсак, у тизим $LZ = P$ кўринишда бўлади ёки

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & & & & \\ A_2 & \beta_2 & & & & \\ & A_3 & \beta_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{n-1} & \beta_{N-1} & \\ & & & & A_n & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} \qquad (5.3.10)$$

дек ёзилади. Бу тизимни ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$Z_1 = \frac{P_1}{\beta_1}, \ Z_n = \frac{P_n - A_n Z_{n-1}}{\beta_n}, \ \left(n = \overline{2,N}\right).$$

Энди эса, (5.3.4) тенгламалар тизимининг ечимини топиш мақсадида, (5.3.9) тизимни ечамиз. Унинг учун уни қуйидагича ёзиб олиб, яъни

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & \\ & 1 & \gamma_2 & & & \\ & & 1 & \gamma_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \gamma_{N-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{N-1} \\ Z_N \end{pmatrix}, \qquad (5.3.11)$$

ундан эса қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$u_N = z_N, \ u_n = z_n - \gamma_n u_{n+1} \ \left(n = \overline{1,N-1}\right).$$

Шундай қилиб, қаралаётган чегаравий масаланинг ечилиши қуйидаги босқичлардан иборат бўлар экан:

1. Берилган (5.3.1) дифференциал тенгламани, (5.3.2) кўринишдаги чекли айирмалар шаклида ифодаланади.

2. (5.3.4) тенгламалар тизимининг таркибидаги A_n, B_n, C_n ва P_n лар аниқланади.

3. (5.3.8) муносабатлардан β_n ва γ_n $\left(n=\overline{1,N}\right)$ номаълум қийматлар аниқланади.

4. (5.3.10) тенгламалар тизимидан z_n $\left(n=\overline{1,N}\right)$ лар аниқланади.

5. (5.3.11) тенгламалар тизимидан u_n лар $\left(n=\overline{1,N-1}\right)$ аниқланадиларки, улар қаралаётган чегаравий масаланинг ечимини ифодалайди.

6-БОБ.
ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ВАРИАЦИОН УСУЛЛАРИ.

Чегаравий масалаларни ечишнинг "вариацион усуллар" деб аталувчи усуллари энг кўп тарқалган усуллар бўлиб, улар сирасига Ритц, Бубнов-Галеркин усуллари ҳамда чекли элементлар усули киради. Бу бобда, мазкур усулларнинг моҳиятларини баён этиш билан биргаликда, вариацион ҳисобнинг энг асосий тушунчаларига қисқача тўхталиб ўтамиз. Чунки, улар билан "вариацион усуллар" орасида бевосита узвий боғланишлар мавжуддир.

6.1. ВАРИАЦИОН ҲИСОБНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ.

1. Кўпгина масалаларни ечишда, бир ёки бир неча ҳақиқий ўзгарувчиларга боғлиқ функциялардан фойдаланиш етарли бўлмайди. Масалан, ўтказгич бўйлаб электр токи ўтганда, ўтказгич атрофида ҳосил бўлган электромагнит майдон кучланганлиги, ўтказгичнинг эгри чизиқ кўринишидаги шаклига боғлиқ бўлади. Яна бир мисол: учирилаётган турли хилдаги коинот кемаларининг Ер атмосферасидан чиқишида, Ерга қайтиб тушиш вақтида, Ер атмосферасига киришида мумкин қадар камроқ қизиши, мумкин қадар атмосфера қаршилигини

камроқ сезиши ва бошқа қаршиликларни енгиши учун уларнинг сиртларининг шакллари қандай тузилишга эгалиги муҳим аҳамиятга эга. Бу мисоллардаги катталиклар, чунончи, кучланганлик, қаршилик ва бошқа катталиклар, эркин ўзгарувчиларнинг қийматларидан ташқари яна функция (эгри чизиқ, сирт шакли ва ҳ.к.) ларга ҳам боғлиқ бўлаяптилар, яъни, қатъиймас қилиб айтганимизда, функцияларнинг функцияларидир. Шу муносабат билан биз қуйида функциянинг умумлашмасидан иборат бўлган функционал тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар $u = u(x)$ каби функциянинг бирор М тўпламидан олинган ҳар бир $u(x)$ функцияга бирор $J = J[u(x)]$ сон мос қўйилса, у сон функционал деб аталади.

Масалан, агар М шундай $f(x)$ функциялар тўпламидан иборат бўлиб, унинг ҳар бир функцияси ўзининг биринчи тартибли ҳосиласи билан биргаликда бирор $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўладиган бўлса, у ҳолда $f(x)$ эгри чизиқнинг $[a;b]$ кесмага мос келувчи ёйининг узунлигини ифодалайдиган

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$ формула функционалдир, ёки

тенгламаси $z = z(x;y)$ бўлган сирт юзини ифода этувчи

$$S(z) = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$ формула ҳам функционал

бўла олади (бу ердаги Д, S сиртнинг ХОУ координата текислигидаги изини ифодаловчи соҳадир).

Функционаллрнинг экстремум қийматларини аниқлаш масалалари ҳам худди функцияларнинг экстремум қийматларини аниқлаш масалаларига ўхшаш бўлиб, у масалалар билан олий математиканинг вариацион ҳисоб деб аталувчи бўлими шуғулланади. Шунингдек, функционалга экстремум қийматлар берувчи функцияларни аниқлаш масаласи, вариацион ҳисобнинг асосий масаласи ҳисобланади.

2. Дифференциал тушунчаси дифференциал ҳисобда қандай фундаментал аҳамиятга эга бўлса, вариация тушунчаси ҳам вариацион ҳисобда шундай аҳамиятга эгадир.

Таъриф. Бирор $u=u(x)$ функциянинг вариацияси деб, қаралаётган масала шартлари бўйича унинг мумкин бўлган кичик ўзгаришига айтилади ва у δu каби белгиланади.

Функцияларнинг биринчи, ҳамда юқори тартибли ҳосилаларига нисбатан вариация тушунчаси худди юқоридагидек киритилади, яъни, агар $u=u(x)$ функциянинг вариацияси δu бўлса, унинг ҳосилаларининг вариациялари $(\delta u)'=\delta u', (\delta u)''=\delta u''$ ва ҳоказо каби бўлади. Демак, вариация белгиси δ ни дифференциаллаш белгисидан ташқарига чиқариб ёзиш мумкин экан. Бирор $J=J[u(x)]$ функционалнинг таркибидаги функция ҳамда унинг ҳосилалари вариацияланганда, у функционалнинг қиймати ҳам ўзгаради. Бу функционалнинг δu вариацияга нисбатан орттирмаси деб, $\Delta J=\Delta J(\delta u)=J(u+\delta u)\text{-}J(u)$ каби миқдорга айтилади.

Фараз қилайлик, J функционалнинг орттирмаси қуйидаги кўринишга эга бўлсин, яъни: $\Delta J=\Delta J(\delta u)=L(\delta u)\text{-}O(\|\delta u\|)$.

Бу ердаги $L(\delta u)$, δu га нисбатан чизиқли функционал бўлиб, $O(\|\delta u\|)$эса $\|\delta u\|$ га нисбатан юқорироқ тартибли бўлган чексиз кичик миқдордир. Ушбу ΔJ орттирманинг δu вариацияга нисбатан чизиқли бош қисми бўлган $L(\delta u)$, J функционалнинг вариацияси деб аталади ва δJ каби белгиланади.

6.2. ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ ВА УНИНГ БАЪЗИ БИР ХУСУСИЙ ҲОЛЛАРИ

Энди вариацион ҳисобда энг кўп учрайдиган қуйидаги функционални қараймиз:

$$J_1\left[u(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u^{'})dx \qquad (6.2.1)$$

Бу ерда, интеграл белгиси остидаги функцияни узлуксиз ҳамда барча ўзгарувчилар бўйича кераклы тартибдаги узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қилинади.

Вариацион ҳисобнинг асосий масаласига кўра, ушбу функционалга экстремум қиймат берадиган шундай бир $u = u(x)$ функцияни аниқлаш лозимдир. Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шартига ўхшаш, функционал экстремуми мавжуд бўлиши учун ҳам зарур шарт бўлиб, унинг вариациясининг нолга тенглиги хизмат қилади.

Мазкур функционал вариацияси

$$\delta J_1 = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u^{'}} \delta u^{'} \right] dx \qquad (6.2.2)$$

нинг нолга тенглик шартидан фойдаланиб, шундай бир дифференциал тенглама ва унга мос келувчи чегаравий шартларни ҳосил қилиш мумкинки, аниқланиши лозим бўлган $u = u(x)$ функция (чегаравий шартларни қаноатлантирадиган) у тенгламанинг ечимини ифода этади. Ана шу тенглама ва унга мос чегаравий шартларни аниқлаш мақсадида, (6.2.2) вариацияда бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб, интеграл белгиси остидаги номаълум функция ҳосиласининг вариациясидан холос бўламиз:

$$\delta J_1 = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u\right)dx + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\,\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u dx =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\,\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\right]\delta u dx \qquad (6.2.3)$$

Бу вариациянинг нолга тенг бўлиши учун, аввало,

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \qquad (6.2.4)$$

бўлиши,кейин эса, $x=x_0$ ва $x=x_1$ ларда $\delta u=0$ ёки $\partial F/\ \partial u' = 0$ нинг бажарилиши лозим бўлади.

Юқорида ҳосил қилинган (6.2.4.) тенгламани Эйлер тенгламаси деб юритилади. У иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлиб, унинг учун чегаравий шартлар бўлган $u(x_0)$ билан $u(x_1)$ лар $\delta u=0$ шартдан ҳосил қилинади.

Эйлер тенгламасининг ечимида иккита ихтиёрий ўзгармас иштирок этадики, уни биз экстремал деб атаймиз.

Хусусан, агар $F(x,u,u') = \frac{E}{2}\left[P(x)u'^2(x)\right] + f(x)u(x)$

дек бўлса, $J_1 = J_1\left[u(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{E}{2}\left[P(x)u'^2(x)\right] + f(x)u(x)\right\}dx$

га мос бўлган (6.2.4) Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dx}\left[E\,P(x)u'(x)\right] = f(x) \qquad (6.2.5)$$

Ушбу тенглама $u(x_0) = \alpha_0, u(x_1) = \alpha_1$ каби чегаравий шартлар билан биргаликда четлари маҳкам бириктирилган, ўзгарувчан P(x) кесимли стерженнинг бўйлама эгилиши ҳақидаги масалани ифода этади (Е-эластиклик модули).

Энди Эйлер тенгламасининг баъзи бир хусусий ҳолларини кўриб ўтамиз.

1-ҳол. $F(x,u,u') = F(u')$, яъни (6.2.1) функционалдаги интеграл белгиси остидаги функция фақат u' га боғлиқ, у ҳолда (6.2.4) тенглама $\left(\partial^2 F(u') \ / \ \partial u'^2\right)u'' = 0$ кўринишга келади.

Бундан $u'' = 0$ ва тенглама ечими $u = C_1 x + C_2$ дек бўлади, яъни экстремал чизиқли функциядан иборат бўлади.

2-ҳол. $F(x,u,u') = F(x,u')$, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда u иштирок этмайди.

Бу ҳол учун Эйлер тенгламаси $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F(x,u')}{\partial u'} = 0$.

кўринишга эга бўлади, бундан эса

$$\frac{\partial F(x,u')}{\partial u'} = C_1 \qquad (6.2.6)$$

бўлиб, бу ифода Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли дейилади ва уни ечиб, $u = f(x, C_1, C_2)$ кўринищдаги умумий ечимга эга бўламиз.

3-ҳол. $F(x,u,u') = F(u,u')$ бўлсин, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда x иштирок этмайди. Бу ҳолда Эйлер тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{\partial F(u,u')}{\partial u} - \frac{\partial^2 F(u,u')}{\partial u \partial u'} - \frac{\partial^2 F(u,u')}{\partial u'^2}u'' = 0 \qquad (6.2.7)$$

Агар бу тенгламани u' га кўпайтирсак,

$$\frac{d}{dx}\left[F(u,u') - \frac{\partial F(u,u')}{\partial u'}u'\right] = 0 \qquad (6.2.8)$$

ҳосил бўлади. (6.2.8) тенгламадан

$$F(u,u') - \frac{\partial F(u,u')}{\partial u'}u' = C_1 \qquad (6.2.9)$$

бўлиб, бу Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли деб аталади ва у биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлгани учун уни интеграллаш натижасида яна битта ихтиёрий ўзгармас иштирок этган қуйидаги $u = f(x, C_1, C_2)$ ечимга эга бўламиз.

4-ҳол. $F(x,u,u') = F(x,u)$ бўлсин, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда u' иштирок этмайди. Бу ҳолда (6.2.4) тенглама $\partial F(x,u)/\ \partial u = 0$ кўринишга келади. Бу тенглама эса дифференциал тенглама эмас. Тенгламани u га нисбатан ечиб, $u = f(x)$ кўринишдаги битта ёки бир нечта экстремалларни топамиз. Бу ҳолда вариацион масала умумий ҳолда ечилмайди.

Энди юқорида кўрилган ҳолларга оид мисоллар кўрамиз.

Мисоллар:

1.Қуйидаги

$$J_1[u(x)] = \int_{0,5}^{1}[u' + x^2u'^2]dx, u(0,5) = 0, u(1) = 0,5$$

функционалнинг экстремали топилсин.

Ечиш.

$$F(x,u,u') = F(x,u') = u' + x^2u'^2, \frac{\partial F}{\partial u'} = 1 + 2x^2u'$$

(6.2.6.)га асосан

$$1+2x^2u'=C_1,$$

$$u'=\frac{C_1-1}{2x^2},\frac{du}{dx}=\frac{C_1-1}{2}\frac{1}{\cdot x^2},$$

$$du=\frac{C_1-1}{2}\frac{dx}{x^2},\ u=\frac{1-C_1}{2x}+C_2.$$

$u(0{,}5)=0, u(1)=0{,}5$ ва

$$\begin{cases}(1-C_1)+C_2=0,\\(1-C_1)+2C_2=1.\end{cases}$$

Бундан эса:

$$C_1=2, C_2=1, u=-\frac{1}{2x}+1.$$

2. Ушбу $J_1[u(x)]=\int\limits_0^{\pi/2}(u'^2-u^2)dx$

функционалнинг $u(0)=0$, $u(\pi/2)=1$ шартларига бўйсинувчи экстремали топилсин.

Ечиш.

$F(u,u')=u'^2-u^2$ бўлгани учун (6.2.7) га асосан

$-2u-2u''=0,\quad u''+u=0.$

Унинг умумий ечими

$u=C_1\cos x+C_2\sin x$ каби бўлади.

Ечимда иштирок этган C_1 ва C_2 ўзгармаслар $u(0)=0, u(\pi/2)=1$ шартлардан топилади, яъни $C_1=0, C_2\sin\frac{\pi}{2}=1, C_2=1$.

Демак, берилган функционал $u = \sin x$ функцияда экстремумга эришади.

Қуйидаги функционалларнинг экстремумларини топишни китобхонларга мустақил бажариш учун тавсия этамиз:

1. $J_1[u(x)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{x} dx,\ u(1) = 0,\ u(2) = 1$.

2. $J_1[u(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (xu + u'^2) dx,\ u(x_1) = 1,\ u(x_2) = 2$.

3. $J_1[u(x)] = \int_{x_1}^{x_2} (u^2 + u'^2 - 2u\sin x) dx, u(x_1) = 1, u(x_2) = 2$.

4. $J_1[u(x)] = \int_0^1 (u'^2 + 12xu) dx, u(0) = 0, u(1) = 1$.

5. $J_1[u(x)] = \int_0^2 (xu' + u'^2) dx, u(0) = 0, u(2) = 1$.

6.3. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАЛАРГА БОҒЛИҚ БЎЛГАН ФУНКЦИОНАЛЛАР УЧУН ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ

Қуйидаги функционални қараймиз:

$$J_2[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u', u'') dx \qquad (6.3.1)$$

Бу ерда ҳам интеграл белгиси остидаги функцияни узлуксиз, ҳамда барча ўзгарувчилар бўйича керакли тартибдаги узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Мазкур функционал вариацияси

$$\delta J_2 = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''}\right]dx \qquad (6.3.2)$$

да ҳам бўлаклаб интеграллаш усулини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\delta J_2 = \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\right]dx =$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''}\right]\delta u dx$$

Бу ердан эса аввалги банддагига ўхшаш

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''} = 0 \qquad (6.3.3)$$

тенгламани ва унга мос бўлган чегаравий шартларни ҳосил қиламиз. Мазкур тенглама, тўртинчи тартибли дифференциал тенглама бўлиб, унинг учун $u(x_0), u(x_1), u'(x_0), u'(x_1)$ лар чегаравий шартлардир.

Умумий ҳолда, функционал таркибида n-тартибли ҳосилалар қатнашсалар, унга мос булган Эйлер тенгламаси 2n-тартибли оддий дифференциал тенглама бўлиб, чегаравий шартларнинг сони ҳам 2n та бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бизга ушбу

$$J_n[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)})dx \qquad (6.3.4)$$

функционалга экстремал қиймат бериб, чекланиш шартлари

$$\begin{cases} u(x_0) = C_0, u'(x_0) = C_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}, \\ u(x_1) = D_0, u'(x_1) = D_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_1) = D_{n-1} \end{cases} \quad (6.3.5)$$

ни қаноатлантирадиган ва C^{2n} синфга тегишли бўлган функцияни топиш талаб этилган бўлсин. Мазкур функционал учун ҳам экстремум мавжудлигининг зарурий шарти $\delta J_n = 0$ бўлгани сабабли, унинг ҳам вариациясини ҳисоблаймиз:

$$\delta J_n = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \delta u^{(n)} \right] dx \quad (6.3.6)$$

Бу ерда ҳам бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб, юқорида баён қилинганга ўхшаш қуйидаги тенгламага эга бўламиз

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} = 0 \quad (6.3.7)$$

Бу тенглама одатда Эйлер-Пуассон тенгламаси деб аталиб, 2n-тартибли оддий дифференциал тенгламадир. Унинг ечимида иштирок этувчи 2n та ихтиёрий ўзгармасларни (6.3.5) чекланиш шартларидан фойдаланиб аниқланади.

Хусусий ҳолда, агар

$$F(x, u, u', u'') = \frac{E}{2} J(x) u''^2 - f(x) u(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$J_2[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{E}{2} J(x) u''^2 - f(x) u(x) \right] dx$$

га мос (6.3.3) Эйлер тенгламаси

$$\left[EJ(x) u''(x) \right]'' = f(x)$$

дек ёзилади. Бу тенглама, $u(x_0) = u'(x_0) = 0$,

$$M = EJ(x_1)u''(x_1) = 0, \ Q = \frac{d}{dx}M(x_1) = 0$$

каби чегаравий шартлар билан биргаликда ўзгарувчан кесимли консол тўсиннинг эгилиши ҳақидаги масаланинг математик моделини ифода этади ($J(x)$ -кесимнинг инерция моменти).

Мисоллар.

1.Ушбу

$$J_2[u(x)] = \int_0^{\pi/2} (u''^2 - u^2 + x^2)dx$$

функционалга экстремум қиймат берувчи ва

$$u(0) = 1, \ u'(0) = 0,$$

$$u(\pi/2) = 0, \ u'(\pi/2) = -1$$

шартларни қаноатлантирувчи функция топилсин. Бу ҳолда Эйлер-Пуассон тенгламаси

$$-2u + \frac{d^2}{dx^2}(2u'') = 0$$

ёки

$$u^{IV} - u = 0$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $к^4 - 1 = 0$ бўлиб, $к_1 = 1$, $к_2 = -1$, $к_3 = i$, $к_4 = -i$ илдизларга эга. Шунинг учун дифференциал тенгламанинг ечими ёки экстремали қуйидагича бўлади:

$$u = C_1\ell^x + C_2\ell^{-x} + C_3\mathrm{Sin}x + C_4\mathrm{Cos}x.$$

Масаланинг чекланиш шартларига асосан, C_1, C_2, C_3, ва C_4 ларни топиш учун

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_4 = 1, \\ C_1 - C_2 + C_3 = 0, \\ C_1\ell^{\frac{\pi}{2}} + C_2\ell^{-\frac{\pi}{2}} + C_3 = 0, \\ C_1\ell^{\frac{\pi}{2}} - C_2\ell^{-\frac{\pi}{2}} - C_4 = -1 \end{cases}$$

тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз. Бу тизимнинг ечими $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$ бўлади. Демак, функционалга экстремум берувчи функция $u = \cos x$ экан.

2.Қуйидаги функционалнинг экстремумлари топилсин:

а) $J_2[u(x)] = \int\limits_0^1 (1 + u''^2)\,dx,$

$u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ u(1) = 1,\ u'(1) = 1.$

б) $J_2[u(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (16u^2 - u''^2 + x^2)dx$

$u(0) = 0{,}5;\ \ u'(0) = 0;\ u(\pi/2) = 0;\ \ u'(\pi/2) = 1.$

Умуман Эйлер тенгламасининг у ёки бу чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечими берилган функционалнинг минимумини беради ёки аксинча, берилган функционалнинг минимуми унга мос келувчи Эйлер тенгламасининг берилган чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимини ифода этади. Шу сабабли, кўп ҳолларда Эйлер тенгламасини ечиш ўрнига унга мос бўлган функционални минималлаштириш масаласи ечилади, чунки, кейинги масаланинг ечилиши олдингисига нисбатан анча қулайроқдир.

Функционалларни минималлаштиришга асосланиб чегаравий масалаларни ечиш усулларини одатда, вариацион усуллар деб юритилади.

6.4. ЭНГ СОДДА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ РИТЦ ВА БУБНОВ-ГАЛЕРКИН УСУЛЛАРИДА ЕЧИШ.

Мазкур усуллар координата функциялари тушунчаси билан боғлиқ бўлганликлари сабабли, аввал унинг таърифини киритамиз.

Таъриф. Агар $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ каби функциялар тизимидаги ҳар бир функция узлуксиз, ҳамда исталган тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, у функциялар чизиқли боғланмаган бўлсалар ва функцияларнинг тўла тизимни ташкил этсалар, у ҳолда у функциялар тизими координата функциялари деб юритилади.

1. Ритц усули.

Айтайлик,

$$u''(x) + bu(x) = f(x) \qquad (6.4.1)$$

каби иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама ўзининг

$$u(x_0) = 0, \;\; u(x_1) = 0 \qquad (6.4.2)$$

каби чегаравий шартлари билан қаралаётган бўлсин. Бу ердаги b, бирор ўзгармас сондир.

Мазкур тенгламага мос бўлган функционал қуйидагича бўлади:

$$J_1 = J_1[u(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{2}(u'^2 - bu^2) + fu\right]dx \qquad (6.4.3)$$

Ҳақиқатан ҳам $F(x, u, u') = \frac{1}{2}(u'^2 - bu^2) + fu$

бўлгани учун, $\frac{\partial F}{\partial u} = -bu + f, \;\; \frac{\partial F}{\partial u'} = u'$ эканликларини эътиборга олсак, Эйлернинг (6.3.7) тенгламасига асосан, (6.4.1) тенгламани ҳосил қиламиз. Ритц усулига кўра, (6.4.1) билан (6.4.2) чегаравий масалани ечиш, (6.4.3) функционалнинг минималлаштирилишига келтирилади. У усулга биноан, масаланинг ечими қуйидаги кўринишда изланади:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i(x) \tag{6.4.4}$$

Бу ердаги a_i лар аниқланиши лозим бўлган номаълум коэффициентлар бўлиб, $u_i(x)$ лар эса, (6.4.2) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи аниқ координата функцияларидир.

Энди (6.4.4) ифодани (6.4.3) га қўйсак, натижада, (6.4.3) функционал, n та a_1, a_2, ..., a_n ўзгарувчи (номаълум коэффициентлар)ларга боғлиқ бўлган функцияга ўзгаради, яъни:

$$J_1(a_1,\dots,a_n) = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i' \right)^2 - b\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right)^2 \right] + f\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\} dx \tag{6.4.5}$$

ва $a_1, a_2, \dots a_n$ коэффициентларни шундай аниқлаймизки, (6.4.5) ифода минимум қийматга эришадиган бўлсин. Шундай қилиб, (6.4.3) функционалнинг минимуми ҳақидаги масала, (6.4.5) каби n ўзгарувчили функциянинг минимуми ҳақидаги масалага келтирилди, у эса функционалнинг минимумини топиш масаласига нисбатан осонроқдир.

$J_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$ функция минимуми мавжудлигининг зарурий шартига биноан,номаълум $a_1, a_2, \dots a_n$ коэффициентларни аниқлаш учун алгебраик тенгламалар тизими ҳосил қиламиз, яъни,

$$\frac{\partial J_1}{\partial a_i} = 0, \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (6.4.6)$$

га асосан,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_{ki} = q_k, \; (k = \overline{1,n}) \qquad (6.4.7)$$

ни ҳосил қиламиз.Бу ерда:

$$A_{kr} = \int_{x_0}^{x_1} (u_i' u_k' - b u_i u_k) dx,$$

$$q_k = -\int_{x_0}^{x_1} f(x) u_k(x) dx \qquad (6.4.8)$$

У тизимдан аниқланган a_i коэффициентларни (6.4.4) га қўйсак, қаралаётган (6.4.1)-(6.4.2) чегаравий масаланинг тақрибий ечимини ҳосил қиламиз.

2. Бубнов-Галеркин усули.

Мазкур усулга кўра,(6.4.1)-(6.4.2) чегаравий масаланинг ечимини яна (6.4.4) ифода орқали излаймиз, яъни,(6.4.4) ни (6.4.1) тенгламага қўямизки, натижада, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left[u_i''(x) + b u_i(x) \right] = f(x) \qquad (6.4.9)$$

Ушбу ифоданинг ҳар бир ҳадини $u_k(x)$, $(k = \overline{1,n})$ ларга кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликни x_0 дан x_1 гача бўлган чегараларда интеграллаcак,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i B_{ki} = P_k, \; (k = \overline{1,n}) \qquad (6.4.10)$$

ни ҳосил қиламиз.Бу ерда:

$$B_{ki} = \int_{x_0}^{x_1} \left[u_i''(x) + b\,u_i(x)\right] u_k(x)dx,$$

$$P_k = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,u_k(x)\,dx$$

Юқоридаги (6.4.10) алгебраик тенгламалар тизимини ечиб, номаълум a_i коэффициентларни аниқлаймиз ва уларни (6.4.4) га қўйсак, (6.4.1)-(6.4.2) чегаравий масаланинг тақрибий ечимини топамиз.

Ритц, ҳамда Бубнов-Галеркин усуллари орқали ечиладиган муҳандислик масалалари ҳақида кейинги бобларда муфассал сўз юритилади.

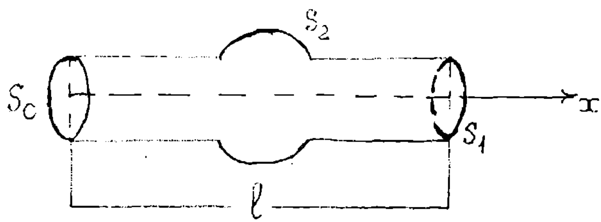
6.5. ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИ.

Кўпгина муҳандислик масалаларининг ечилиши жараёнида ҳал қилиниши анча мураккаб бўлган муаммоларга дуч келинадики(масалан, моделнинг мураккаб шаклдалиги,моделдаги мустаҳкамликнинг зинапоясимон тарздаги ўзгариши ва бошқалар), у масалаларни мавжуд сонли ечиш усуллари ёрдамида ечиш қониқлари натижаларга олиб келмайди. Бу жиҳатдан «чекли элементлар усули» деб номланган усул, бирқадар, у қийинчиликларни енгишда устунликка эга.

Мазкур усулга кўра, қаралаётган масаладаги соҳани чекли дона бўлакларга (элементларга) бўлиниб, ҳар бир бўлак учун масала алоҳида ечилади ва у натижаларни бир бутун қилиб бирлаштирилади.У эса ўз навбатида, қўйилган масаланинг ечимини тақрибан ифодалайди.

Чекли элементлар усулининг моҳиятини соддалик учун стерженнинг чўзилиши ҳақидаги масалага нисбатан баён этамиз. Фараз қилайлик,чизиқли эластик муҳитни эгаллаб турувчи

S соҳа бирор S_2 айланма сирт, ҳамда айланиш ўқига тик жойлашган иккита S_0 ва S_1 текис кесимлар билан чегараланган бўлсин. Шу билан бирга, S_0 кесим мустаҳкам бириктирилган бўлиб, S_1 кесим эса, кучланишлардан ҳоли бўлсин (9-расм).



9-расм.

Айланиш ўқи учун, координата боши S_0 кесимдаги 0 нуқта бўлган Декарт координаталар тизимининг 0х ўқини танлаймиз. Агар 0х ўққа параллел бўлиб, зичлиги $F = F(x)$ дан иборат умумий кучлар берилган бўлса қаралаётган соҳадаги барча нуқталарнинг силжишларини аниқлашни мақсад қилиб қўямиз.

Стержен нуқталарининг 0х ўқ бўйлаб силжишларини $u = u(x)$ билан, бўйлама деформацияни $\varepsilon = du/\ dx$ орқали, айланиш ўқига тик кесимлардаги кучланишларни $\sigma = \sigma\ (x)$ билан белгилаб, кўндаланг кесимларнинг юзини $S(x)$ билан белгиласак, у ҳолда у кесимнинг ихтиёрий нуқтасидаги кучланишнинг тўла ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$P = P(x) = \sigma(x)S(x) \qquad (6.5.1)$$

ёки Гук қонунига асосан, $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{du}{dx}$ каби бўлганлигидан тўла кучланишни қуйидагича ёзамиз:

$$P = P(x) = ES(x)\frac{du}{dx} \qquad (6.5.2)$$

Энди $u = u(x)$ силжишларни аниқлаш масаласини тақрибан ечиш мақсадида қуйидаги усулни қўллаймиз: S соҳа (уни биз қисқалик учун стержен деб атаймиз)ни, хаёлан 0x ўққа тик бўлган $x_n = const$ кесимлар ёрдамида N та бўлакка бўламиз ва h_k орқали $x_{k-1} \le x \le x_k$ шартни қаноатлантирувчи k бўлакнинг узунлигини белгилаймиз, яъни:

$$h_k = x_k - x_{k-1} \qquad (6.5.3)$$

Ҳар бир бўлакдаги u(x) силжишни етарлича аниқлик билан чизиқли функция орқали тақрибан ифодалаш мумкин деб фараз қиламиз:

$$u(x) = u^{(k)}(x) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}x \qquad (6.5.4)$$

Бундай буён, кесимдан кесимга ўтилганда силжишларнинг узлуксизликларини таъминлаш мақсадида, $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}$ коэффициентлар ўрнига силжишларнинг қийматлари бўлган $u_k = u(x_k)$ ларни киритамиз ва уларни аниқланиши лозим бўлган номаълумлар деб юритамиз.

Равшанки,

$$\begin{cases} u_{k-1} = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}x_{k-1}, \\ u_k = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}x_k. \end{cases}$$

Агарда бу тизимни, (6.5.3) ни эътиборга олиб ечсак, қуйидагини топамиз:

$$a_0^{(k)} = \frac{1}{h_k}(u_{k-1}x_k - u_k x_{k-1}),$$

$$a_1^{(k)} = \frac{1}{h_k}(u_k - u_{k-1}).$$

Демак, k элементнинг силжиши қуйидагича ёзилар экан

$$u(x) \approx u^{(k)}(x) = \sum_{i=(k-1),k} u_i \varphi_i(x) \qquad (6.5.5)$$

Бу ерда:

$$\varphi_{k-1}(x) = \frac{1}{h_k}(x_k - x), \varphi_k(x) = \frac{1}{h_k}(x - x_{k-1})$$

Фараз қилайлик, стерженнинг k бўлагига тақсимланган умумий кучлар таъсирининг самараси билан x_{k-1} ва x_k кесимларга мос равишда текис тақсимланган R_{k-1} ва R_k кучларнинг таъсири бир-бирига тенг кучли бўлсин. Мазкур сирт кучларини топишнинг энг содда усули бўлиб, бу кучларнинг бирор мумкин бўлган силжишда бажарган иши δA^k ни ҳисоблашдан иборатдир, яъни:

$$\delta A^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x) F(x) \delta u \, dx$$

Бу ифодага (6.5.5) ни қўйиб, қуйидаги

$$\delta A^k = R_{k-1}\, \delta u_{k-1} + R_k \delta u_k$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда:

$$R_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)F(x)\varphi_{k-1}(x)dx,$$

$$R_k^{\cdot} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)F(x)\varphi_k(x)dx.$$

Энди, k элементнинг ички кучланиш ҳисобига вужудга келадиган эластик потенциал энергиянинг вариациясини ҳисоблаймиз

$$\delta \Pi^k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} P(x)\delta\varepsilon(x)dx = E\int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)\frac{du^{(k)}}{dx}\delta\left(\frac{du^{(k)}}{dx}\right)dx =$$

$$= EJ_k\frac{u_k - u_{k-1}}{h_k^2}\delta(u_k - u_{k-1}) = P_k\delta(u_k - u_{k-1})$$

Бу ерда:

$$J_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)dx$$

Агар k элементнинг ички кучланиши ҳисобига вужудга келувчи сирт кучининг

$P_k = EJ_k(u_k - u_{k-1}) \; / \; h_k^2$ эканлигини эътиборга олсак, k элементга таъсир этувчи йиғинди куч қуйидагича ёзилади:

$$\phi^{(k)} = R_k - P_k = \frac{1}{h_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)F(x)(x - x_k)dx - \frac{EJ_k(u_k - u_{k-1})}{h_k^2} \quad (6.5.6)$$

У ҳолда, $x = x_k$ кесимдаги барча кучларнинг мувозанат тенгламасини $\phi^{(k)} = \phi^{(k+1)}$ ёки

$\phi^{(k)} - \phi^{(k+1)} = 0$ каби кўринишда ёзиш мумкин бўлади. Бу ифодани (6.5.6) га қўйиб,қуйидагини ҳосил қиламиз

$$-EJ_k \frac{u_k - u_{k-1}}{h_k^2} - EJ_{k+1} \frac{u_{k+1} - u_k}{h_{k+1}^2} +$$

$$+\frac{1}{h_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} S(x)F(x)(x - x_k)dx + \qquad (6.5.7)$$

$$+\frac{1}{h_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} S(x)F(x)(x_{k+1} - x)dx = 0$$

Ушбу (6.5.7) тизимни ечиб, $u_1, u_2, \ldots, u_N$ ларнинг қийматларини топамиз ($u_0 = 0$ ва $u_{N+1} = 0$ дир, чунки, S_0 ва S_{N+1} кесимлар мустаҳкам бириктирилган эди). Шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, (6.5.7) тизим, ўзининг машинавий ечилиши нуқтаи назаридан қаралганда анча яхши тизимдир, чунки унинг матрицаси симметриявий уч диагоналлидир. Шунинг учун унинг тескари матрицасини ҳисоблашнинг тежамли барқарор усуллари мавжуд. Чекли элементлар усули баёнини китобнинг 9-бобида давом эттирамиз.

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ОРҚАЛИ МОДЕЛЛАШТИРИЛАДИГАН АЙРИМ МУҲАНДИСЛИК МАСАЛАЛАРИ ВА УЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШ УСУЛЛАРИ.

Алгебраик тенгламалар тизими ёки оддий дифференциал ва интеграл - дифференциал тенгламалар орқали моделлаштирилувчи айрим муҳандислик масалалари, ҳамда уларнинг ечилиш усуллари билан биз аввалги бобларда танишиб ўтган эдик.

Бундан буён биз хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга асосланган математик моделларнинг айрим масалалари ва уларнинг ечилиш усуллари билан шуғулланамиз. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар асосан, машиносозлик, қурилиш конструкциялари ва учиш аппаратлари элементларининг мустаҳкамлик, турғунлик ва динамикаси каби турли хил масалаларини ечишда қўлланилади.

7-БОБ.
ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ АСОСИЙ ХИЛЛАРИ УЧУН АЙРИМ ЧЕГАРАВИЙ ВА БОШЛАНҒИЧ - ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ҚЎЙИЛИШИ.

Маълумки, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг асосан уч хили мавжуд бўлиб, улар эллиптик, гиперболик ва параболик тенгламалар деб юритилади. Биз бу бобда асосан, мазкур тенгламалар учун айрим чегаравий ва бошланғич-чегаравий масалаларнинг тўғри ҳамда вариацион тарзда қўйилишлари ҳамда уларнинг бир-бирларига тенг кучли эканликлари ҳақидаги масалалар билан шуғулланамиз.

7.1. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДАГИ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР.

Таъриф. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каби эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган номаълум $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция ва унинг турли хил тартибдаги хусусий ҳосилаларини боғловчи муносабатга айтилади ҳамда унинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади.

$$F\left(x_1, x_2, \cdots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0$$

бу ерда, F- ўзининг аргументига нисбатан берилган функциядир.

Таъриф. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг тартиби дейилганда, унинг таркибига кирувчи хусусий ҳосилаларнинг энг юқори тартиби тушунилади.

Таъриф. Агар бирор $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция ва унинг керакли тартибдаги хусусий ҳосилалари тенгламага қўйилганда, тенглама айниятга айланса, у функция, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Таъриф. Агар хусусий ҳосилали дифференциал тенглама номаълум функциянинг барча юқори тартибли ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлса, у квазичизиқли тенглама дейилади. Масалан,

$$A\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+C\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right)=0$$

тенглама иккинчи тартибли квазичизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламадир.

Таъриф. Агар хусусий ҳосилали дифференциал тенгламадаги номаълум функция ва унинг барча тартибдаги хусусий ҳосилалари фақатгина биринчи даражада қатнашса, уни хусусий ҳосилали чизиқли дифференциал тенглама деб аталади.

Масалан,

$$A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+D\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+E\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}+G\left(x,y\right)u=f\left(x,y\right)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, $u(x,y)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тартибли чизиқли тенгламадир.

Оддий дифференциал тенгламаларда бўлгани каби, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ҳам ягона ечимларини қўшимча шартлар берилгандагина топиш мумкин бўлади. Бу шартлар номаълум функция ва унинг хусусий ҳосилаларига нисбатан қўйилишлари мумкин ҳамда улар номаълум функциянинг кўриниши ва ўзгариш хусусиятини белгиловчи тенгламанинг хилларига боғлиқ бўлади.

Мазкур бобнинг асосий масаласини баён этишдан олдин, биз китобхонларга оператор ҳақидаги айрим тушунчаларни эслатиб ўтамиз.

7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРЛАР ҲАҚИДАГИ АЙРИМ ТУШУНЧАЛАР.

Таъриф. Агар бирор A алмаштириш мумкин бўлган u функцияни $f=Au$ функцияга ўтказса, у алмаштириш оператор деб аталади.

Операторлар, одатда, лотин алифбосининг бош ҳарфлари билан белгиланади.

Таъриф. Бирор A операторнинг аниқланиш соҳаси деб, Au амал аниқланган u функциялар тўпламига айтилади, Au функциялар тўплами эса, A операторнинг ўзгариш соҳаси дейилади.

Демак, операторнинг таърифидан кўриняптики, оператор аниқланган бўлиши учун аниқланиш соҳаси, ҳамда ҳар бир *u* функцияга унинг тасвирини мос қилиб қўядиган қонун кўрсатилган бўлиши керак экан.

Бундан буён, асосан, дифференциал операторлар қараладики, улар учун функция ва унинг тасвири орасидаги мослик бирор дифференциал ифода воситасида берилади (яъни: функция ва унинг ҳосилаларини ўз ичига олувчи ифода). Масалан, стерженнинг буралиши ҳақидаги масалада $A = \Delta$, пластинканинг эгилиши ҳақидаги масалада эса, $A = \Delta^2$ каби бўлиб, уларга мос бўлган дифференциал ифодалар қуйидагича ёзиладилар:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

Дифференциал операторнинг аниқланиш соҳаси функциялардан иборат бўлиб, улар учун дифференциал ифода аниқ маънога эга ҳамда улар қаралаётган масаланинг чегаравий шартларини қаноатлантиради.

Таъриф. *Иккита A* ва *B* операторлар учун *A+B* оператор $(A+B)u=Au+Bu$ тенглик билан, $A\cdot B$ оператор $(A\cdot B)u=A(Bu)$ тенглик билан, *CA* оператор эса, $(C \cdot A)u = CAu$ каби тенглик (C-ихтиёрий ўзгармас сон) билан аниқланади.

Ҳар бир функцияни ўзини ўзига акслантирувчи оператор айний ёки бирлик оператор деб аталади.

Таъриф. Агар бирор A операторнинг аниқланиш соҳасида u ва W каби функциялар билан биргаликда ҳар қандай иккита ҳақиқий C_1 ва C_2 сонлар учун C_1u+C_2W функция ҳам ётадиган бўлса ва ҳар доим ҳам $A(C_1u+C_2W)=C_1Au+C_2AW$ каби тенглик бажариладиган бўлса, у ҳолда, A оператор чизиқли оператор деб аталади.

Бу A чизиқли операторнинг таърифидан келиб чиқадики, агар $Au=0$ тенгламанинг ечими айнан нолга тенг функция бўлса, у ҳолда, унга A^{-1} тескари оператор мавжуд бўлади.

Таъриф. Агар A операторнинг S аниқланиш соҳасидаги ҳар қандай $u \neq 0$ функция учун

$$(Au, u) = \int_S Au \cdot u dS \rangle 0$$

тенгсизлик бажарилса, А оператор мусбат аниқланган оператор деб аталади.

Шуни таъкидлаш лозимки, ҳар қандай мусбат аниқланган операторга мос бўлган тескари оператор ҳар доим ҳам мавжуддир.

Таъриф. Агар ҳар қандай иккита u ва W

функциялар учун $(Au,W)=(AW,u)$ каби тенглик бажариладиган бўлса, A оператор симметриявий ёки ўз-ўзига қўшма оператор деб аталади.

7.3. ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЭНГ СОДДА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ҚЎЙИЛИШИ.

Машинасозлик ва қурилиш конструкциялари элементларининг, ҳамда учиш аппаратлари қурилиш механикасининг барча статикавий масалалари (мембрана, гардиш, самолёт қаноти, пластинка ва қобиқларнинг эгилиши, ҳамда стерженнинг буралиши каби масалалар)ни ечиш, эллиптик тенгламаларни ечишга келтирилади. Бу масалалар, бирор ёпиқ соҳада қўйилиб, соҳанинг чегарасидаги ҳар бир нуқтада чегаравий шартлар берилади.

Эллиптик тенгламалар учун $\{0 \le x \le a;\ 0 \le y \le b\}$ каби тўғри тўртбурчакли соҳада қуйидаги чегаравий масалаларни кўриб ўтамиз:

а) $$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = f(x,y) \qquad (7.3.1)$$

$$u(0,y) = u(a,y)=0,$$
$$u(x,0)=u(x,b)=0 \qquad (7.3.2)$$

ёки

$$\left.\begin{array}{l} u'_x(0,y) = u'_x(a,y) = 0, \\ u'_y(x,0) = u'_y(x,b) = 0 \end{array}\right\} \qquad (7.3.3.)$$

б) $$\Delta^2 u = u^{IV}_{xxxx} + 2u^{IV}_{xxyy} + u^{IV}_{yyyy} = f(x,y), \tag{7.3.4}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) = u(a,y) = u''_{xx}(0,y) = u''_{xx}(a,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,b) = u''_{yy}(x,0) = u''_{yy}(x,b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) = u(a,y) = u'_{x}(0,y) = u'_{x}(a,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,b) = u'_{y}(x,0) = u'_{y}(x,b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

Бу ерда, Δ ва Δ^2 лар орқали мос равишда Лаплас ва бигармоник операторлар белгиланган.

Мембрананинг барқарор эгилиши ва стерженнинг буралиши каби масалаларни ечиш, (7.3.2.) ёки (7.3.3) каби чегаравий шартлар билан биргаликда (7.3.1.) тенгламани ечишга келтирилади. Шунингдек, (7.3.1)-(7.3.2) масалани Дирихле масаласи, (7.3.1) билан (7.3.3) эса, Нейман масаласи деб юритилади.

Эркин таянчли тўғри тўртбурчакли пластинканинг эгилиши ҳақидаги масалани ечиш, (7.3.5) каби чегаравий шартлар билан биргаликдаги (7.3.4) тенгламани ечишга ёки агар у пластинканинг четлари мустаҳкам бириктирилган бўлса, (7.3.4) билан (7.3.6) масалани ечишга келтирилади.

Булардан ташқари бошқа чегаравий масалалар ҳам мавжуд, масалан, агар пластинканинг x=0 ва x=a четлари эркин таянчда бўлиб, y=0 ва y=b четлари эса эркин бўлса, у ҳолда чегаравий шартлар қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y) = u(a,y) = u''_{xx}(0,y) = u''_{xx}(a,y) = 0, \\ u''_{yy}(x,0) = u''_{yy}(x,b) = u'''_{yyy}(x,0) = u'''_{yyy}(x,b) = 0 \end{array}\right\} \quad (7.3.7)$$

Юқорида кўриб ўтилган барча чегаравий масалаларнинг қўйилишларини, уларнинг эллиптик тенгламалар учун тўғри қўйилишлари деб юритамиз.

Энди эллиптик тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг вариацион тарзда қўйилишининг айримлари билан танишамиз.

Теорема. Эллиптик тенглама бўлган (7.3.1) тенглама қуйидаги

$$J = \int_0^a \int_0^b F(x,y,u,u'_x,u'_y)dxdy =$$

$$= \int_0^a \int_0^b [u'^2_x + u'^2_y + 2uf]dxdy \qquad (7.3.8)$$

функционалнинг экстремуми топилишига тенг кучлидир.

Исбот. Теореманинг шартида келтирилган (7.3.8) функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u'_y} = 0 \qquad (7.3.9)$$

Агар

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2u'_x, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'_y} = 2u'_y$$

эканликларини эътиборга олиб, уларни (7.3.9) га қўйсак, (7.3.1) тенглама ҳосил бўлади.

Энди (7.3.8) функционални қуриш мақсадида, қуйидаги ифодани қараймиз, яъни:

$$J = (-\Delta u, u) - 2(u, f). \tag{7.3.10}$$

Бу ерда:

$$(-\Delta u, u) = \int_0^a \int_0^b (-\Delta u) \cdot u dx dy,$$

$$(u, f) = \int_0^a \int_0^b f \cdot u dx dy.$$

Юқоридаги ифодаларнинг биринчисида бўлаклаб интеграллаш усулини қўллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\int_0^a \int_0^b u''_{xx} \cdot u dx dy = \int_0^b (u \cdot u'_x) \Big|_0^a dy - \int_0^a \int_0^b u'^2_x dx dy, \tag{7.3.11}$$

$$\int_0^a \int_0^b u''_{yy} \cdot u dx dy = \int_0^a (u \cdot u'_y) \Big|_0^b dx - \int_0^a \int_0^b u'^2_y dx dy.$$

Ушбу ифодаларни (7.3.10) функционалга қўйиб, ёки (7.3.2), ёки (7.3.3) чегаравий шартлардан фойдалансак, (7.3.8) функционал ҳосил бўлади.

Умуман, агар (7.3.1) тенглама ечимга эга бўлса, у ечим (7.3.8) функционалнинг минимум қийматини ифодалайди, ва аксинча, (7.3.8) функционалнинг минимумини ифодаловчи функция (7.3.1) тенгламанинг ечими бўлади.

Қуйидаги

$$J = \int_0^a\int_0^b F(x, y, u, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy})dxdy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b [u''^2_{xx} + 2u''^2_{xy} + u''^2_{yy} - 2uf]dxdy \qquad (7.3.12)$$

функционалнинг ҳам минимумини топиш масаласи (7.3.4) тенгламага тенг кучли эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, (7.3.12) функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади, яъни:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u''_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial u''_{yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial u''_{xy}} = 0 \quad (7.3.13)$$

Ушбу тенгламадан (7.3.12) функционалга кўра, (7.3.4) тенглама ҳосил бўлади.

Шунингдек, (7.3.4) тенгламага яна қуйидаги

$$J = \int_0^a\int_0^b [(u''_{xx} + u''_{yy})^2 - 2uf]dxdy \qquad (7.3.14)$$

ҳамда бунга нисбатан умумийроқ бўлган

$$J = \int_0^a \int_0^b [(u''_{xx} + u''_{yy})^2 - $$
$$- 2(1-\mu)(u''_{xx} u''_{yy} - u''^2_{xy}) - 2uf]dxdy \qquad (7.3.15)$$

каби функционалнинг экстремуми масаласи ҳам олиб келишини кўрсатиш мумкин (бу ерда, μ - бирор параметр).

Масалаларни тақрибий ечиш усуллари орқали ечилаётганда, уларнинг тўғри шаклда қўйилишларига нисбатан вариацион тарзда қўйилишлари мақсадга мувофиқ, чунки функционал таркибидаги номаълум функция ҳосилаларининг тартиби тўғри шаклдагига нисбатан кичикрок бўлади. Шу боисдан, вариацион масалаларнинг Ритц ва чекли элементлар усуллари билан ечилиш жараёнлари анча осонлашади.

Масалаларнинг вариацион тарзда қўйилишларининг ҳар хил усуллари мавжуд бўлиб, биз учун биринчи навбатда, қараладиган тенгламалар билан устма-уст тушувчи Эйлер тенгламаларига олиб келадиган усулларни ўрганиш аҳамиятлидир. Функционал танлашда эса, унинг аргументлари бўлган, ҳамда ечилаётган масаланинг ечимини ифода этувчи функцияларнинг қандай кўринишда ва қанча бўлишларини ҳисобга олиш муҳим аҳамиятга эга. Шу билан биргаликда, функционалнинг экстремум хоссалари, ҳар хил қўшимча хоссалари бажарилишининг мураккаблиги ва бошқа хоссаларни эътиборга олиш муҳим омиллардандир. Шу нуқтаи назардан қаралганда, Лагранж функционали, яъни, минимуми масаланинг ечимида эришиладиган тўла потенциал энергиянинг функционали энг маҳбул функционаллардан ҳисобланади.

Энди, юқорида кўриб ўтилган (7.3.12), (7.3.14) ва (7.3.15) функционалларнинг ҳақиқатан ҳам мавжуд функционаллар эканликларини исботлаймиз.

Айтайлик, ўзгармас h қалинликдаги пластинка l контури бўйлаб мустаҳкам бириктирилган бўлсин. Пластинка эгаллаган фазовий соҳани S билан, S_1 ва S_2 лар билан эса мос равишда у соҳанинг юқори ҳамда пастки асосларини белгилаймиз. Шунингдек, пластинканинг устки асосига жадаллиги $f(x,y)$ бўлган нормал юк таъсир этаётган бўлиб, унинг пастки асоси ташқи кучлардан ҳоли бўлсин.

Албатта, пластинканинг l контури бўйича

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (7.3.16)$$

каби шартлар ёки уларга тенг кучли бўлган

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad (7.3.17)$$

каби шартлар бажарилган бўлишлари

табиийдир (бу ерда, ν - орқали l контурнинг ташқи нормали белгиланган).

Бигармоник операторнинг l контур бўйича (7.3.17.) шартларни қаноатлантирувчи функциялар тўпламида симметриявий бўлиб, мусбат аниқланган эканлигини, ҳамда (7.3.4) бигармоник тенгламанинг эса,

$$J = (\Delta^2 u, u) - 2(f, u) \qquad (7.3.18)$$

функционалнинг минималлаштирилишига эквивалентлигини кўрсатамиз.

Бигармоник операторнинг симметриявий эканлигини кўрсатиш мақсадида, Лаплас операторига Грин формуласини қўллаймиз, яъни:

$$\iint\limits_S (V\Delta W - W\Delta V)dS = \oint\limits_l (V\frac{\partial W}{\partial \nu} - W\frac{\partial V}{\partial \nu})dl \qquad (7.3.19)$$

Агар (7.3.19) формулада $W = \Delta u_1$, $V = u_2$ каби белгилашлар киритсак, қуйидагини ёза оламиз:

$$(\Delta^2 u_1, u_2) =$$

$$= \iint\limits_S u_2 \Delta^2 u_1 dS = \iint\limits_S \Delta u_2 \Delta u_1 dS + \oint\limits_l (u_2 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \nu} - \Delta u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu}) dl$$

ва ундан эса, (7.3.17) шартларга кўра, қуйидаги ифода ҳосил бўлади

$$(\Delta^2 u_1, u_2) = \iint\limits_S \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 dS \qquad (7.3.20)$$

Бу (7.3.20) ифоданинг ўнг томони u_1 ва u_2 ларга нисбатан симметриявий бўлгани учун, бигармоник операторнинг (7.3.17) шартларни қаноатлантирувчи функциялар тўпламида симметриявий оператор эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, чунки,

$$(\Delta^2 u_1, u_2) = (u_1, \Delta^2 u_2).$$

Агар (7.3.20) формулада $u_1 = u_2 = u$ деб олсак, у ҳолда

$$(\Delta^2 u, u) = \iint_S \Delta u \cdot \Delta u ds = \iint_S (\Delta u)^2 ds \qquad (7.3.21)$$

ёки тўғри тўртбарчакли пластинка учун

$$(\Delta^2 u, u) = \int_0^a \int_0^b (\Delta u)^2 dxdy \qquad (7.3.22)$$

каби ифодани ҳосил қиламиз. Ушбу (7.3.22) ифодани (7.3.18) функционалга қўйиб, (7.3.14) функционални ҳосил қиламиз.

Энди, (7.3.12), ҳамда (7.3.15) функционалларнинг ҳам ҳақиқатан мавжуд эканликларини кўрсатиш мақсадида, қуйидаги икки ўлчовли интеграл

$$\iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] dxdy$$

нинг эгри чизиқли интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. Уни бўлаклаб интеграллаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 ds = -\iint_S \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} ds - \oint_l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx,$$

$$\iint_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ds = -\iint_S \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} ds + \oint_l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy.$$

Бу тенгликларни ҳадлаб айириб,

$$\iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] ds = \oint_l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\frac{\partial u}{\partial y}) d\rho$$

ни ёзиб оламиз (бу ерда, $d\rho$ орқали l контур ёйининг дифференциали белгиланган).

Агар бу тенгликнинг ўнг томонидаги контур интегралини бўлаклаб интеграллаш усули билан интегралланаётганда, контурнинг ёпиқлиги, ҳамда функция ва унинг ҳосилаларининг бир қийматли эканликлари эътиборга олинса, интегралдан ташқаридаги ҳадлар нолга айланади, у ҳолда

$$\iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] ds = \oint_l \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{d}{d\rho} (\frac{\partial u}{\partial x}) d\rho$$

Охирги икки тенгликни ҳадлаб қўшиб, қуйидаги ифода ҳосил қилинади

$$\iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] ds =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{l}[\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{d}{d\rho}(\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d}{d\rho}(\frac{\partial u}{\partial y})]d\rho$$

Агар $u(x,y)$ функциянинг l контурда (7.3.17) шартларни қаноатлантиришини эътиборга олсак, у ҳолда:

$$\int_S\int[(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]ds = 0 \qquad (7.3.23)$$

Ушбу тенгликни иккига кўпайтириб, уни (7.3.21)га қўшсак, у ҳолда қуйидаги ифодага эга бўламиз

$$(\Delta^2 u, u) = \int_S\int[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2]ds \qquad (7.3.24)$$

Агар (7.3.24) ифодада S соҳани тўғри тўртбурчак деб қаралса ва уни (7.3.18)га қўйилса, (7.3.12) функционал ҳосил бўлади.

Яна (7.3.23) ифодани $2(1-\mu)$га кўпайтириб, уни (7.3.21)га ҳадлаб қўшиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$(\Delta^2 u, u) =$$

$$= \int_S\int\{(\Delta u)^2 + 2(1-\mu)[(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]\}ds \qquad (7.3.25)$$

Бу ифодани (7.3.18) га қўйсак,

$$J = (\Delta^2 u, u) - 2(f, u) =$$

$$= \iint_S \{(\Delta u)^2 + 2(1-\mu)[(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] - 2fu\} ds$$

Бу ифодада тўғри бурчакли координаталарга ўтилса, (7.3.15) функционал ҳосил бўлади.

Бигармоник операторнинг мусбат аниқланган оператор эканлигини кўрсатиш мақсадида, *u* номаълум функция ва унинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларига нисбатан Фридрихс тенгсизлигини қўллаш мумкин, чунки (7.3.17) шартлар билан (7.3.16) шартлар бир-бирлари билан тенг кучли шартлардир, яъни:

$$\iint_S (\frac{\partial u}{\partial x})^2 ds \le \frac{1}{C} \iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2] ds,$$

$$\iint_S (\frac{\partial u}{\partial y})^2 ds \le \frac{1}{C} \iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2] ds,$$

$$\iint_S u^2 ds \le \frac{1}{C} \iint_S [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] ds \le$$

$$\le \frac{1}{C} \iint_S [(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2] ds,$$

бу ерда *C* - Фридрихс константаси.

Агар (7.3.24) тенгликка кўра,

$$(\Delta^2 u, u) \ge C^2 (u, u) = C^2 \|u\|^2$$

эканлигини эътиборга олсак, ундан бигармоник операторнинг мусбат аниқланган оператор эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, хулоса қилиш мумкинки, мустаҳкам бириктирилган пластинканинг мувозанати ҳақидаги масала ечимга эга бўлиб, у ечим ўз навбатида (7.3.12), (7.3.24) ва (7.3.15) каби функционалларнинг минимумларини ифодалар экан.

7.4. ГИПЕРБОЛИК ВА ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЭНГ СОДДА БОШЛАНҒИЧ-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИНГ ҚЎЙИЛИШИ.

1. Муҳандислик амалиётида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан энг кўп учрайдигани гиперболик тенгламалардир. Улар орқали ҳар хил тебраниш жараёнларини ифодалайдиган муҳандислик масалалари математик моделлаштириладилар (масалан, стерженнинг кўндаланг ва бўйлама ҳамда пластинка ва қобиқларнинг эркин ва мажбурий тебранишлари). Шунингдек, машинасозлик ва қурилиш конструкциялари элементлари, учиш аппаратларининг қурилиш механикаси кабиларнинг ҳаракат масалаларини ечиш учун гиперболик тенгламалар қўлланилади.

Қуйида гиперболик тенгламалар учун айрим бошланғич-чегаравий масалаларнинг аввал тўғри қўйилиши, сўнгра уларнинг вариацион тарзда қўйилишларини баён этамиз:

а) $$u''_{tt} = Cu''_{xx} + f(x,t), \tag{7.4.1}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{7.4.2}$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0. \tag{7.4.3}$$

б) $$u''_{tt} + Cu^{iv}_{xxxx} = f(x,t), \tag{7.4.4}$$

$$u(0,t) = u''_{xx}(0,t) = u(a,t) = u''_{xx}(a,t) = 0, \tag{7.4.5}$$

$$u(0,t) = u'_x(0,t) = u(a,t) = u'_x(a,t) = 0. \tag{7.4.6}$$

в) $$u''_{tt} + C\Delta^2 u = f(x,y,t), \tag{7.4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(0,y,t) = u''_{xx}(0,y,t) = u(a,y,t) = u''_{xx}(a,y,t) = 0,\\ &u(x,0,t) = u''_{yy}(x,0,t) = u(x,b,t) = u''_{yy}(x,b,t) = 0,\end{aligned}\right\} \tag{7.4.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(0,y,t) = u'_x(0,y,t) = u(a,y,t) = u'_x(a,y,t) = 0,\\ &u(x,0,t) = u'_y(x,0,t) = u(x,b,t) = u'_y(x,b,t) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{7.4.9}$$

Юқорида келтирилган (7.4.1) - (7.4.3) масала ёрдамида стерженнинг бўйлама тебраниши ҳақидаги масала ҳал қилинади. Эркин таянчли стерженнинг кўндаланг тебраниши ҳақидаги масалани, (7.4.4), (7.4.2) ва (7.4.5) каби масала ёрдамида, агар стерженнинг чегаралари мустаҳкам бириктирилган бўлса, (7.4.4), (7.4.2) ва (7.4.6) каби масала ёрдамида ечилади.

Эркин таянчли ва чеккалари мустаҳкам бириктирилган тўғри тўртбурчакли пластинкаларнинг мажбурий тебранишлари ҳақидаги масалалар мос равишда (7.4.2), (7.4.7), (7.4.8) ҳамда (7.4.7), (7.4.9) каби масалалар ёрдамида ечилади.

Теорема. Юқоридаги (7.4.1) - (7.4.3) каби бошланғич- чегаравий масаланинг вариацион тарзда қўйилиши қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$J = \int_0^T \int_0^a F(x, t, u, u'_x, u'_t) dt dx =$$

$$= \int_0^T \int_0^a [C u'^2_x - u'^2_t - 2fu] dt dx \qquad (7.4.10)$$

яъни, (7.4.1) тенглама (7.4.10) функционалнинг минималлаштирилишига эквивалентдир.

Исбот.

Теорема шартидаги (7.4.10) функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u'_t} = 0 \qquad (7.4.11)$$

Агар

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2f, \quad \frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2C u'_x, \quad \frac{\partial F}{\partial u'_t} = -2u'_t \qquad (7.4.12)$$

эканликларини эътиборга олиб, у ифодаларни (7.4.11)га қўйсак, (7.4.1) тенглама ҳосил бўлади.

Эллиптик тенгламалардагига ўхшаш, (7.4.10) функционални ҳам қуйидагича қуриш мумкин:

$$J = \int_0^T [(-Cu''_{xx}, u) - (u'_t, u'_t) - 2(f, u)]dt \qquad (7.4.13)$$

Шунингдек, қуйидагиларни ҳам ёзиш мумкин

$$(-Cu''_{xx}, u) = -C\int_0^a u''_{xx}udx = -Cu \cdot u'_x \Big|_0^a + C\int_0^a u_x'^2 dx,$$

$$(u'_t, u'_t,) = \int_0^a u_t'^2 dt, \quad (f, u) = \int_0^a f \cdot udx \qquad (7.4.14)$$

Агар (7.4.14) ифодаларни (7.4.13) га қўйиб, (7.4.3) чегаравий шартларни қўлласак, (7.4.10) функционални ҳосил қиламиз.

Стерженнинг кўндаланг тебранма ҳаракат тенгламасини ифодаловчи (7.4.4) тенгламанинг ҳам қуйидаги функционал минимумига эквивалент эканлигини кўрсатиш мумкин:

$$J = \int_0^T \int_0^a F(x, t, u, u''_{xx}, u'_t)dtdx =$$

$$= \int_0^T \int_0^a [Cu_x''^2 - u_t'^2 - 2fu]dtdx \qquad (7.4.15)$$

Ҳақикатан ҳам (7.4.15) функционал учун Эйлер тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u'_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u''_{xx}} = 0 \qquad (7.4.16)$$

Текшириш қийин эмаски,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -2f, \quad \frac{\partial F}{\partial u'_t} = -2u'_t, \quad \frac{\partial F}{\partial u''_{xx}} = 2Cu''_{xx} \qquad (7.4.17)$$

Ушбу (7.4.17) ифодани (7.4.16)га қўйсак, (7.4.4) тенглама ҳосил бўлади, функционалнинг ўзи эса қуйидагича қурилади:

$$J = \int_0^T [(Cu^{iv}_{xxxx}, u) - (u'_t, u'_t) - 2(f, u)]dt \qquad (7.4.18)$$

Маълумки,

$$(u'_t, u'_t) = \int_0^a u'^2_t dt, \quad (f, u) = \int_0^a f \cdot u dx \qquad (7.4.19)$$

Шунингдек, агар (7.4.18) ифодадаги биринчи қўшилувчида бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб, у ерда, ёки (7.4.8), ёки (7.4.9) чегаравий шартлардан фойдалансак, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$(Cu^{iv}_{xxxx}, u) = C\int_0^a u^{iv}_{xxxx} u dx =$$

$$= C(u \cdot u'''_{xxx} - u'_x u''_{xx}) \Big|_0^a + C\int_0^a u''^2_{xx} dx = C\int_0^a u''^2_{xx} dx \qquad (7.4.20)$$

Агар (7.4.19) билан (7.4.20)ларни (7.4.18) га қўйсак, юқоридаги (7.4.15) функционал ҳосил бўлади.

Теорема. Пластинканинг (7.4.7) тебранма ҳаракат тенгламаси қуйидаги функционалнинг минимумига эквивалентдир:

$$J = \int_0^T\int_0^a\int_0^b F(x, y, t, U, U'_t, U''_{xx}, U''_{xy}, U''_{yy})dxdydt =$$

$$= \int_0^T\int_0^a\int_0^b [C(U''^2_{xx} + 2U''^2_{xy} + U''^2_{yy}) - U'^2_t - 2fU]dxdydt \quad (7.4.21)$$

Исбот.

Ушбу (7.4.21) функционал учун Эйлер-Остроградский тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u'_t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u''_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial u''_{yy}} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial u''_{xy}} = 0 \quad (7.4.22)$$

Равшанки, $\frac{\partial F}{\partial u} = -2f$, $\frac{\partial F}{\partial u''_{xx}} = 2Cu''_{xx}$,

$$\frac{\partial F}{\partial u''_{yy}} = 2Cu''_{yy}, \quad \frac{\partial F}{\partial u''_{xy}} = 4Cu''_{xy}, \quad (7.4.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_t} = -2u'_t.$$

Бу топилган (7.4.23) ифодаларни (7.4.22)га қўйиб, (7.4.7) тенгламани ҳосил қиламиз.

(7.4.21) функционал қуйидагича қурилади:

$$J=\int_0^T[C(\Delta^2 u,u)-(u'_t,u'_t)-2(f,u)]dt \quad (7.4.24)$$

Агар эллиптик тенгламадагига ўхшаш чиқарилган (7.4.24) формула тўғри бурчакли координаталар учун қўлланиладиган бўлса, яъни,

$$(\Delta^2 u,u)=$$

$$=\int_0^a\int_0^b[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2+2(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2]dxdy$$

ва

$$(u'_t,u'_t)=\int_0^a\int_0^b u_t'^2dxdy, \quad (f,u)=\int_0^a\int_0^b f\cdot u\,dxdy,$$

у ҳолда, (7.4.24) функционалдан (7.4.21) функционал ҳосил қилинади:

2. Суюқликнинг сузилиши ва узун стержен бўйлаб иссиқликнинг тарқалиши ва бошқа шунга ўхшаш муҳандислик масалалари, параболик тенгламаларни ечишга келтириладиган масалаларнинг намуналаридир.

Бу хилдаги тенгламалар учун энг содда бошланғич-чегаравий масалаларнинг кўриниши қуйидагича ёзилади:

а) $\qquad u'_t=C u''_{xx}+f(x,t),$

$$u(x,0) = \alpha(x),$$
$$u(0,t) = u(a,t) = 0.$$

б) $$u'_t = C(u''_{xx} + u''_{yy}) + f(x,y,t),$$

$$u(x,y,0) = \alpha(x,y).$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0. \end{array}\right\}$$

бу ерда, С- аниқ ўзгармас сон бўлиб, $\alpha(x)$, $\alpha(x,y)$, $f(x,t)$, $f(x,y,t)$лар эса, берилган функциялардир.

8-БОБ.

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЭҲМДА ЕЧИШНИНГ ПРОЕКЦИОН УСУЛЛАРИ.

Электрон ҳисоблаш машиналарининг ривожи, дастурлаштириш алгоритмик тилларининг яратилиши каби ва бошқа омиллар, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали математик моделлаштириладиган турли хил муҳандислик масалаларини ечиш учун ҳисоблаш математикасининг бой усулларини кенг кўламда ишлатишга имконият яратди. Аммо, махсус математик маълумотга эга бўлмаган муҳандис учун ҳисоблаш математикасининг мавжуд адабиётларидан фойдаланиши ҳамда ўз олдига қўйилган математик масалани ечиши учун у ёки бу усулни танлаши, кўпинча, анча мушкул масалалардан ҳисобланади. Шу сабабдан, биз бу бобда юқорида баён этилган уч хилдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга ўхшаш тенгламаларни ечишнинг проекцион усулларидан энг асосийларининг амалий жиҳатдан қўлланилишлари юзасидан айрим тавсияларни келтирамиз. У ерда, ҳар бир усулнинг баёнини, асосий алгоритмларини ёзиш билан бошлаб, уларнинг назарий жиҳатдан асосланишларини келтирмасдан, қаралаётган масалаларнинг ишончли ечимларини ҳосил қилишга имкон берадиган амалий тавсияномалар берамиз.

8.1. ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЭНГ СОДДА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ РИТЦ ВА БУБНОВ -ГАЛЕРКИН УСУЛЛАРИ БИЛАН ЕЧИШ.

I. Пуассон тенгламаси учун Дирихле масаласини ечиш.

Эллиптик тенгламалардан бири бўлган Пуассон тенгламаси учун энг содда чегаравий масалалардан бири, Дирихле масаласи ҳисобланади. У масаланинг тўғри ва вариацион тарзда ёзилишлари мос равишда қуйидагича бўлади:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = f(x, y), \qquad (8.1.1)$$

$$J = \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{2}\left(u_x'^2 + u_y'^2\right) + fu \right] dxdy \qquad (8.1.2)$$

Уларнинг чегаравий шартлари эса:

$$\begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = 0, \\ u(x,0) = u(x,b) = 0. \end{cases} \qquad (8.1.3)$$

Мазкур масала ёрдамида тўғри тўртбурчакли кесимга эга бўлган стерженнинг буралиши ҳақидаги масала ечилади.

Биз бу ерда, (8.1.2) ва (8.1.3) масаланинг Ритц усулида, (8.1.1) ва (8.1.3) масаланинг эса Бубнов-Галеркин усулида ечилиш жараёнларини кўриб ўтамиз.

а) Вариацион тарзда қўйилган Дирихле масаласини Ритц усули билан ечиш мақсадида, масаланинг ечимини қуйидаги кўринишда изланади:

$$u(x,y) = \sum_{k,i=1}^{N,M} a_{ki}\varphi_{ki}(x,y) \qquad (8.1.4)$$

бу ерда, a_{ki} лар номаълум коэффициентлар бўлиб, $\varphi_{ki}(x,y)$ лар эса, аниқ координата функцияларидир. Координата функциялари учун $\varphi_{ki}(x,y) = Sin\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{i\pi y}{b}$ ни танлаб, (8.1.4) ни (8.1.2) га қуямиз:

$$J=\int_0^a\int_0^b\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k,i=1}^{N,M}\frac{k\pi}{a}a_{ki}Cos\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{i\pi y}{b}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k,i=1}^{N,M}\frac{i\pi}{b}a_{ki}Sin\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{i\pi y}{b}\right)^2\right]+ \qquad (8.1.5)$$

$$\left.+f(x,y)\sum_{k,i=1}^{N,M}a_{ki}Sin\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{i\pi y}{b}\right\}dxdy.$$

Бу функционал минимум қийматга эришишлигининг зарурий шарти бўлиб

$$\partial J/\partial a_{ki}=0. \quad (k=\overline{1,N};\; i=\overline{1,M})$$

каби тенглик хизмат қилади. Бундан, қуйидаги тизимга эга бўламиз

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}A_{kinj}a_{ki}=q_{nj},\;(n=\overline{1,N};\; j=\overline{1,M}) \qquad (8.1.6)$$

бу ерда:

$$q_{nj}=-\int_0^a\int_0^b f(x,y)Sin\frac{n\pi x}{a}Sin\frac{j\pi y}{b}dxdy,$$

$$A_{kinj}=\frac{kn\pi^2}{a^2}\int_0^a Cos\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{n\pi x}{a}dx\times\int_0^b \mathrm{Sin}\frac{i\pi y}{b}\mathrm{Sin}\frac{j\pi y}{b}dy+$$

$$+\frac{ij\pi^2}{b^2}\int_0^a \mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi x}{a}dx\int_0^b \mathrm{Cos}\frac{i\pi y}{b}\mathrm{Cos}\frac{j\pi y}{b}dy.$$

Агар

$$\int_0^d \mathrm{Cos}\frac{p\pi x}{d}\mathrm{Cos}\frac{q\pi x}{d}dx = \begin{cases} \frac{d}{2}, & \text{агар } p = q \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } p \neq q \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\int_0^d \mathrm{Sin}\frac{p\pi x}{d}\mathrm{Sin}\frac{q\pi x}{d}dx = \begin{cases} \frac{d}{2}, & \text{агар } p = q \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } p \neq q \text{ бўлса.} \end{cases}$$

эканликларини эътиборга олсак, у ҳолда:

$$A_{kinj} = \begin{cases} A_{ki} = \frac{ab}{4}\left(\frac{k^2\pi^2}{a^2} + \frac{i^2\pi^2}{b^2}\right), & \text{агар } k = n \text{ ва } i = j \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k \neq n \text{ ёки } i \neq j \text{ бўлса} \end{cases}$$

каби бўлиб, (8.1.6) алгебраик тенгламалар тизими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A_{ki}a_{ki} = q_{ki} \qquad (8.1.7)$$

ва бу тизимдан a_{ki} номаълум коэффициентларни топамиз

$$a_{ki} = \frac{q_{ki}}{A_{ki}} = \frac{4}{ab}\cdot\frac{q_{ki}}{\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{i^2}{b^2}\right)},$$

$$(k = \overline{1, N};\ i = \overline{1, M}) \qquad (8.1.8)$$

Бу аниқланган қийматларни (8.1.4) га қўйиб, Дирихле масаласининг (вариацион тарзда қўйилиш ҳоли учун) ечимини ҳосил қиламиз

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k,i=1}^{N,M}\frac{q_{ki}}{\left(k^2b^2+i^2a^2\right)}\operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a}\operatorname{Sin}\frac{i\pi y}{b} \qquad (8.1.9)$$

б) Тўғри кўринишда қўйилган Дирихле масаласининг ечимини Бубнов-Галеркин усулида ечиш учун ҳам ечимни яна (8.1.4) орқали излаймиз ва координата функциялари учун ҳам яна $\varphi_{ki}(x,y)=Sink\pi x/a\cdot Sini\pi y/b$ ни танлаймиз, у ҳолда

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{i^2}{b^2}\right)Sin\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{i\pi y}{b}=-f(x,y) \qquad (8.1.10)$$

ни ҳосил қиламиз.

Мазкур ифоданинг ҳар иккала томонини координата функциялари $\varphi_{nj}(x,y)=Sinn\pi x/a\cdot Sinj\pi y/b$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодани x ҳамда y ўзгарувчилар бўйича мос равишда 0 дан a гача ва 0 дан b гача бўлган чегараларда интеграллаймиз, у ҳолда:

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}A_{kinj}a_{ki}=q_{nj}, \quad (n=\overline{1,N};\ \ j=\overline{1,M}) \qquad (8.1.11)$$

бу ерда:

$$q_{nj}=-\int_0^a\int_0^b f(x,y)Sin\frac{n\pi x}{a}Sin\frac{j\pi y}{b}dxdy,$$

$$A_{kinj}=\frac{\pi^2(k^2b^2+i^2a^2)}{a^2b^2}\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^b \sin\frac{i\pi y}{b}\sin\frac{j\pi y}{b}dy.$$

Агар

$$A_{kinj}=\begin{cases}A_{ki}=\dfrac{\pi^2(k^2b^2+i^2a^2)}{4ab}, & \text{агар } k=n \text{ ва } i=j \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } k\neq n \text{ ёки } i\neq j \text{ бўлса}.\end{cases}$$

эканлигини эътиборга олсак, (8.1.11) тизим қуйидагича ёзилади:

$$A_{ki}a_{ki}=q_{ki}$$

Уни a_{ki} га нисбатан ечиб, яна (8.1.8) билан айнан бир хилда бўлган қийматларни ҳосил қиламизки, у қийматларни келтириб (8.1.4) га қўйсак, (8.1.1) ва (8.1.3) масаланинг ечими ҳосил бўлади ва бу ечим Ритц усули билан топилган ечимга айнан тенгдир.

2. Пуассон тенгламаси учун Нейман масаласини ечиш.

Нейман масаласи, Дирихле масаласидан фақатгина чегаравий шартлар билангина фарқ қилади, яъни (8.1.1) - (8.1.3) масаладаги (8.1.3) чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} u'_x(0,y) = u'_x(a,y) = 0,\\ u'_y(x,0) = u'_y(x,b) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Нейман масаласини Ритц ёки Бубнов-Галеркин усуллари билан ечищда, координата функциялари учун

$$\varphi_{ki}(x,y) = Cos\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{i\pi y}{b} \qquad \text{каби}$$

функциялар танланади.

Дирихле масаласидагига ўхшаш барча амалларни бажариб, мазкур масала учун қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз (уларни бажариш китобхонларга ҳавола этилади):

$$u(x,y) = \frac{4ab}{\pi^2}\sum_{k,i=1}^{N,M}\frac{q_{ki}}{\left(k^2b^2 + i^2a^2\right)}Cos\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{i\pi y}{b}.$$

Бу ерда:

$$q_{ki} = -\int_0^a\int_0^b f(x,y)Cos\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{i\pi y}{b}dxdy.$$

3. Эркин таянчли пластинканинг эгилиши ҳақидаги масалани ечиш.

Мазкур масаланинг тўғри ва вариацион тарзларда қўйилишлари қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x,y), \qquad (8.1.12)$$

$$J=\int_0^a\int_0^b\left[\frac{1}{2}\left(u''^2_{xx}+u''^2_{yy}\right)+u''^2_{xy}-fu\right]dxdy, \quad (8.1.13)$$

$$\left.\begin{aligned}&u(0,y)=u''_{xx}(0,y)=u(a,y)=u''_{xx}(a,y)=0,\\&u(x,0)=u''_{yy}(x,0)=u(x,b)=u''_{yy}(x,b)=0.\end{aligned}\right\}\quad(8.1.14)$$

Вариацион тарзда қўйилган (8.1.13) билан (8.1.14) масалани Ритц усулида ечамиз.

Ечимни яна (8.1.4) кўринишда излаб, координата функцияларини $\varphi_{ki}(x,y)=Sin k\pi x/a\cdot Sin i\pi y/b$ каби танлаб, (8.1.4) ни (8.1.13) га қўйиб, Ритц усулининг барча амалларини бажарсак, қуйидаги алгебраик тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}A_{kinj}a_{ki}=q_{nj}, \quad (n=\overline{1,N};\ \ j=\overline{1,M})$$

бу ерда:

$$q_{nj}=\int_0^a\int_0^b f(x,y)Sin\frac{n\pi x}{a}Sin\frac{j\pi y}{b}dxdy,$$

$$A_{kinj}=\frac{\pi^4(k^2n^2b^4+i^2j^2a^4)}{a^4b^4}\int_0^a Sin\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{n\pi x}{a}dx\times$$

$$\times\int_0^b Sin\frac{i\pi y}{b}Sin\frac{j\pi y}{b}dy+$$

$$+\frac{2\pi^4 knij}{a^2b^2}\int_0^a Cos\frac{k\pi x}{a}Cos\frac{n\pi x}{a}dx\int_0^b Cos\frac{i\pi y}{b}Cos\frac{j\pi y}{b}dy.$$

Агар

$$A_{knij}=\begin{cases}A_{ki}=\frac{ab}{4}\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\right]^2, \text{агар } k=n \text{ ва } i=j \text{ бўлса}\\ 0, \qquad \text{агар } k\neq n \text{ ёки } i\neq j \text{ бўлса}\end{cases}$$

эканлигини эътиборга олсак, номаълум a_{ki} коэффициентлар учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_{ki}=\frac{4}{ab}\cdot\frac{q_{ki}}{\pi^4\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{i^2}{b^2}\right)^2}$$

ва уни (8.1.4) га қўйиб, қаралаётган масаланинг ечимини топамиз:

$$u(x,y)=\frac{4}{ab}\sum_{k,i=1}^{N,M}\frac{q_{ki}}{\pi^4\left(k^2/a^2+i^2/b^2\right)^2}Sin\frac{k\pi x}{a}Sin\frac{i\pi y}{b}.$$

Агар (8.1.12) билан (8.1.14) ни Бубнов-Галеркин усули ёрдамида ечиладиган бўлса (ечилиш жараёнига тўхталмаймиз), бу ерда ҳам Ритц усулида ҳосил қилинган ечим билан айнан бир хил бўлган ечим ҳосил бўлишини кўрамиз.

4. Мустаҳкам бириктирилган пластинканинг эгилиши ҳақидаги масала, эркин таянчли пластинканинг эгилиши ҳақидаги масаладан

чегаравий шартлари билангина фарқланади. Бу масала учун чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) = u'_x(0,y) = u(a,y) = u'_x(a,y) = 0, \\ u(x,0) = u'_y(x,0) = u(x,b) = u'_y(x,b) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.1.15)$$

Бу ерда ҳам (8.1.13) билан (8.1.15) масала Ритц усулида, (8.1.12) билан (8.1.15) масала Бубнов-Галеркин усулида ечилганда, координата функциялари учун

$$\varphi_{ki}(x,y) = \left(1 - Cos\frac{2k\pi x}{a}\right)\left(1 - Cos\frac{2i\pi y}{b}\right)$$

каби функциялар танланади.

Қаралаётган масала ҳар иккала усул билан ечилганда ҳам ечимларнинг айнан бир хил бўлишларига ишонч ҳосил қилишни, ва масалани мустақил бажаришни китобхонларга тавсия қиламиз.

8.2. ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН АЙРИМ БОШЛАНҒИЧ-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ РИТЦ ВА БУБНОВ-ГАЛЕРКИН УСУЛЛАРИДА ЕЧИШ.

Гиперболик тенгламалар учун тўғри ва вариацион тарзда қўйилган энг содда бошланғич-чегаравий масалалардан айримларини келтирамиз:

1. $$u''_{tt} = Cu''_{xx} + f(x,t), \qquad (8.2.1)$$

$$J = \int_0^T \int_0^a \left[\frac{C}{2} u_x'^2 - \frac{1}{2} u_t'^2 - fu \right] dxdt, \qquad (8.2.2)$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \qquad (8.2.3)$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad u_t'(x,0) = \beta(x), \qquad (8.2.4)$$

2. $$u_{tt}'' + C u_{xxxx}^{IV} = f(x,t), \qquad (8.2.5)$$

$$J = \int_0^T \int_0^a \left[\frac{C}{2} u_{xx}''^2 - \frac{1}{2} u_t'^2 - fu \right] dxdt, \qquad (8.2.6)$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad u_t'(x,0) = \beta(x), \qquad (8.2.7)$$

$$u(0,t) = u_{xx}''(0,t) = u(a,t) = u_{xx}''(a,t) = 0. \qquad (8.2.8)$$

3. $$u_{tt}'' + C\Delta^2 u = f(x,y,t), \qquad (8.2.9)$$

$$J = \int_0^T \int_0^a \int_0^b \left[\frac{C}{2}\left(u_{xx}''^2 + u_{yy}''^2\right) + C u_{xy}''^2 - \frac{1}{2} u_t'^2 - f\mathring{u} \right] dxdydt, \qquad (8.2.10)$$

$$\begin{cases} u(x,y,0) = \alpha(x,y), \\ u_t'(x,y,0) = \beta(x,y), \end{cases} \qquad (8.2.11)$$

$$\begin{cases} u(0,y,t) = u_{xx}''(0,y,t) = u(a,y,t) = u_{xx}''(a,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u_{yy}''(x,0,t) = u(x,b,t) = u_{yy}''(x,b,t) = 0. \end{cases} \qquad (8.2.12)$$

Келтирилган 1- ва 2- масалалар орқали мос равишда стерженнинг бўйлама ва кўндаланг тебранишлари ҳақидаги масалалар ечилади, 3 - масала орқали эса, пластинканинг кўндаланг тебраниши ҳақидаги масала ечилади.

Биз қуйида 3-масаланинг ҳам Ритц, ҳам Бубнов-Галеркин усуллари билан ечилиш жараёнини баён

...этамиз.

а) Ритц усулига асосан, (8.2.10) - (8.2.12) масаланинг ечимини қуйидагича излаймиз:

$$u(x,y,t)=\sum_{k,i=1}^{N,M}u_{ki}(t)\varphi_{ki}(x,y) \qquad (8.2.13)$$

бу ерда $\varphi_{ki}(x,y)$ лар бизга маълум бўлган координата функциялари бўлиб, $u_{ki}(t)$ лар эса, аниқланиши лозим бўлган вақтга боғлиқ функциялардир.

Координата функциялари учун $\varphi_{ki}(x,y)=Sink\pi x/a\cdot Sini\pi y/b$ ни танлаб, (8.2.13) ни (8.2.10) га қўйсак, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$J=\int_0^{T_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{N,M}u_{ki}(t)\sum_{n,j=1}^{N,M}u_{nj}(t)\int_0^a\int_0^b C\Big(\varphi''_{kixx}\varphi''_{njxx}+\right.$$

$$+\varphi''_{kiyy}\varphi''_{njyy}+2\varphi''_{kixy}\varphi''_{njxy}\Big)dxdy-\frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{N,M}u'_{kit}(t)\times$$

$$\left.\times\sum_{n,j=1}^{N,M}u'_{njt}(t)\int_0^a\int_0^b\varphi_{ki}\varphi_{nj}dxdy-\sum_{k,i=1}^{N,M}u_{ki}(t)\int_0^a\int_0^b f(x,y,t)\varphi_{ki}dxdy\right]dt=$$

$$=\int_0^{T_1}\left\{\frac{C}{2}\cdot\frac{ab}{4}\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\right]^2u_{ki}^2(t)-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{4}u'^2_{kit}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k,i=1}^{N,M}u_{ki}(t)q_{ki}(t)\right\}dt=\int^{T_1}F\big[u_{ki}(t),u'_{kit}(t)\big]dt.$$

Бу ерда:

$$q_{ki}(t) = \int_0^a \int_0^b f(x,y,t)\varphi_{ki}(x,y)dxdy,$$

$$J = \int_0^{T_1} F\left[u_{ki}(t), u'_{kit}(t)\right]dt. \qquad (8.2.14)$$

Бу функционалнинг минимумини топиш учун Эйлер тенгламаси

$$\frac{\partial F}{\partial u_{ki}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u'_{kit}} = 0 \qquad (8.1.15)$$

ни тузамиз. У ҳолда, бу тенгламага кўра, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$u''_{kit}(t) + \omega_{ki}^2 u_{ki}(t) = \frac{4}{ab} q_{ki}(t) = \tilde{q}_{ki}(t), \quad (8.2.16)$$

бу ерда:

$$\omega_{ki}^2 = C\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{b}\right)^2\right]^2.$$

Мазкур тенгламанинг бошланғич шартлари қуйидагича бўлади:

$$u_{ki}(0) = \alpha_{ki}, \quad u'_{kit}(0) = \beta_{ki}, \qquad (8.2.17)$$

бу ерда:

$$\alpha_{ki} = \int_0^a \int_0^b \alpha(x,y)\varphi_{ki}(x,y)dxdy,$$

$$\beta_{ki} = \int_0^a \int_0^b \beta(x,y)\varphi_{ki}(x,y)dxdy.$$

Юқоридаги (8.2.14) каби иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламани (8.2.15) бошланғич шартлар билан биргаликда ечиб,

$$u_{ki}(t) = \alpha_{ki}Cos\omega_{ki}t + \frac{\beta_{ki}}{\omega_{ki}}Sin\omega_{ki}t +$$

$$+\frac{1}{\omega_{ki}}\int_0^t \tilde{q}_{ki}(\tau)Sin\omega_{ki}(t-\tau)d\tau \qquad (8.2.18)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар (8.2.18) ни (8.2.13) га қўйсак, пластинканинг кўндаланг тебраниши ҳақидаги чегаравий масаланинг ечимини топамиз.

б) Энди (8.2.9) билан (8.2.11) - (8.2.12) масалани Бубнов-Галеркин усули билан ечамиз.

Ечимни (8.2.13) дек ахтариб, у ерда, координата функциялари учун яна $\varphi_{ki}(x,y) = Sink\pi x/a \cdot Sini\pi y/b$ ларни танлаймиз. Уларни (8.2.9) га қўйсак,

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}\left[u''_{kitt}(t)\varphi_{ki}(x,y) + Cu_{ki}(t)\Delta^2\varphi_{ki}(x,y)\right] = f(x,y,t)$$

ни ҳосил қиламиз ва бу ифодани $\varphi_{nj}(x,y) = Sinn\pi x/a \cdot Sinj\pi y/b$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган натижани мос равишда x ва y ларга нисбатан 0 дан a гача, ҳамда 0 дан b гача бўлган чегараларда интеграллаб, қуйидаги тизимни ҳосил қиламиз:

$$\sum_{k,i=1}^{N,M}\left[B_{kinj}u''_{kitt}+A_{kinj}u_{ki}\right]=q_{nj} \qquad (8.2.19)$$

бу ерда, агар

$$B_{kinj}=\int_0^a\int_0^b\varphi_{ki}(x,y)\varphi_{nj}(x,y)dxdy,$$

$$A_{kinj}=\int_0^a\int_0^b\left(\Delta^2\varphi_{ki}(x,y)\right)\cdot\varphi_{nj}(x,y)dxdy,$$

$$(k,n=\overline{1,N};\ \ i,j=\overline{1,M})$$

эканликларини эътиборга олсак, (8.2.19) тенгламалар тизими қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$u''_{kitt}(t)+\omega_{ki}^2u_{ki}(t)=\frac{4}{ab}q_{ki}(t)=\tilde{q}_{ki}(t) \qquad (8.2.20)$$

Бу эса, (8.2.16) билан айнан бир хилдир. Уни (8.2.17) бошлангич шартлар билан биргаликда ечиб, $u_{ki}(t)$ номаълум функцияларни топамиз ва уларни (8.2.13)га қўйиб, қаралаётган масаланинг ечимини ҳосил қиламиз.

8.3. ПАРАБОЛИК ВА ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ФУРЬЕ УСУЛИДА ЕЧИШ.

1. Энг содда кўринишдаги параболик тенглама учун қуйидаги бошланғич-чегаравий масалани қараймиз

$$u'_t = Cu''_{xx} + f(x,t), \qquad (8.3.1)$$

$$u(x,0) = \alpha(x), \qquad (8.3.2)$$

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \qquad (8.3.3)$$

ва уни Фурье усулида ечишни мақсад қилиб қўямиз.

Фараз қилайлик, $f(x,t)$ ва $\alpha(x)$ функциялар Фурье қаторига ёйилувчи функциялар бўлсин, яъни:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a} \qquad (8.3.4)$$

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a} \qquad (8.3.5)$$

бу ерда, $f_k(t)$ лар вақтга боғлиқ бўлган маълум функциялар бўлиб, α_k лар эса, аниқ ўзгармас сонлардир.

Қаралаётган масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a} \qquad (8.3.6)$$

каби қатор кўринишида излаймиз. Бу ердаги $u_k(t)$ лар вақтга боғлиқ бўлган ҳозирча номаълум функциялардир.

Юқоридаги (8.3.4) - (8.3.6) ифодаларни (8.3.1) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\sum_{k=0}^{\infty} [u'_{kt}(t) + C(\frac{k\pi}{a})^2 u_k(t)] \operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \operatorname{Sin} \frac{k\pi x}{a} \qquad (8.3.7)$$

Мазкур ифодадаги $\operatorname{Sin}\frac{k\pi x}{a}$ ларнинг олдидаги коэффициентларни таққослаб,

$$u'_{kt}(t) + \omega_k^2 u_k(t) = f_k(t) \qquad (8.3.8)$$

ни ёзамиз. Бу ерда: $\omega_k^2 = C(\frac{k\pi}{a})^2$.

Бу тенгламалар учун (8.3.2) билан (8.3.5) ларга асосан, $u_k(0) = \alpha_k$ каби бошланғич шартларга эга бўламизки, уларга кўра, (8.3.8) ларни ечсак, $u_k(t)$ функциялар топилади, ҳамда уларни (8.3.6) га қўйсак, (8.3.1)–(8.3.3) масаланинг ечими аниқланади.

2. Иссиқлик ўтказувчанликнинг икки ўлчовли тенгламаси учун қўйилган қуйидаги бошланғич-чегаравий масалани қараймиз

$$u'_t = C(u''_{xx} + u''_{yy}) + f(x, y, t), \qquad (8.3.9)$$

$$u(x, y, 0) = \alpha(x, y), \qquad (8.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0. \end{aligned} \right\} \qquad (8.3.11)$$

Бу ерда ҳам берилган $f(x,y,t)$ ва $\alpha(x,y)$ функцияларни қуйидагича кўринишдаги Фурье қаторларига ёйиладиган функциялар бўлсин деб фараз қиламиз:

$$f(x,y,t)=\sum_{k,i=0}^{\infty} f_{ki}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{i\pi y}{b} \qquad (8.3.12)$$

$$\alpha(x,y)=\sum_{k,i=0}^{\infty}\alpha_{ki}\mathrm{Sin}\frac{k\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{i\pi y}{b} \qquad (8.3.13)$$

бу ердаги $f_{ki}(t)$ лар вақтга боғлиқ бўлган аниқ функциялар бўлиб, α_{ki} лар эса, маълум ўзгармас коэффициентлардир. Тенгламанинг ечими

$$u(x,y,t)=\sum_{k,i=0}^{\infty} u_{ki}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{i\pi y}{b} \qquad (8.3.14)$$

каби изланадики, $u_{ki}(t)$ лар аниқланиши лозим бўлган функциялар бўлиб, уларни аниқлаш мақсадида, (8.3.12) - (8.3.14) ларни (8.3.9) га қўямиз ва ҳосил бўлган ифодадаги синусларнинг коэффициентларини тенглаштириб, қуйидаги биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни хосил киламиз.

$$u'_{kit}(t)+\omega_{ki}^{2}u_{ki}(t)=f_{ki}(t), \qquad (8.3.15)$$

бу ерда: $\omega_{ki}^2 = C[(\frac{k\pi}{a})^2+(\frac{i\pi}{b})^2]$.

Бошланғич шартларнинг $u_{ki}(0)=\alpha_{ki}$ эканликларини эътиборга олиб, (8.3.15)ни ечамиз ва у ечимни (8.3.14) га қўйсак, қаралаётган масаланинг ечимини аниқлаймиз.

3. Энди Фурье усулининг четлари маҳкам

бириктирилган торнинг тебраниши ҳақидаги масаланинг ечилиш жараёнига қўлланилишини баён этамиз.

Бу масалани ечиш қуйидаги

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8.3.16)$$

энг содда гиперболик тенгламанинг

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (8.3.17)$$

каби чегаравий ва

$$u(x,0)=\varphi_0(x), \quad u'_t(x,0) = \varphi_1(x) \qquad (8.3.18)$$

каби бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига келтирилади. Бундан буён соддалик учун $l = 1$ деб оламиз.

Мазкур масаланинг ечимини

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \mathrm{Sin} k\pi x \qquad (8.3.19)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда, $T_k(t)$ аниқланиши лозим бўлган номаълум функциялардир.

Агар (8.3.19) ни (8.3.16) тенгламага қўйсак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) + (k\pi)^2 T_k(t)] \mathrm{Sin} k\pi x = 0$$

ни, ёки ундан

$$\ddot{T}_k(t)+k^2\pi^2 T_k(t)=0 \qquad (8.3.20)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Маълумки, (8.3.20) тенгламанинг умумий ечими

$$T_k(t)=a_k Cos k\pi t + b_k Sin k\pi t$$

дек ёзилар эди (бу ерда, a_k ва b_k лар номаълум коэффициентлардир). Бу ифодани (8.3.19) га қўйиб, (8.3.16) - (8.3.18) масаланинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \mathrm{Cos} k\pi t + b_k \mathrm{Sin} k\pi t)\mathrm{Sin} k\pi x \quad (8.3.21)$$

Таъриф. Агар (8.3.21) қаторнинг йиғиндисини ифода этувчи $u(x,t)$ ечим, $0\le x\le 1$ ва $t\ge 0$ шартларда x ва t ўзгарувчилар бўйича икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, ҳам (8.3.21) қаторнинг ўзи, ҳам уни икки марта дифференциаллашдан ҳосил бўлган қатор яқинлашувчи қаторлар бўлса, у ҳолда, $u(x,t)$ ечим, (8.3.16)–(8.3.18) масаланинг мумтоз ечими деб юритилади.

Юқоридаги (8.3.21) ни t ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$u_t'(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi(-a_k \mathrm{Sin} k\pi t + b_k \mathrm{Cos} k\pi t)\mathrm{Sin} k\pi x \quad (8.3.22)$$

Энди (8.3.21) билан (8.3.22) ифодалардан (8.3.18) бошланғич шартларга асосан, қуйидагиларни ёзиб оламиз

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k \mathrm{Sin} k\pi x\,,\ \varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi b_k \mathrm{Sin} k\pi x \quad (8.3.23)$$

Фараз қилайлик, $\varphi_0(x)$ функция, $[0;1]$ кесмада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, қисмий узлуксиз бўлган учинчи тартибли ҳосилага эга бўлсин; $\varphi_1(x)$ функция эса, у кесмада бир марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, қисмий узлуксиз бўлган иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлсин; шунингдек

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 0\,, \qquad \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0,$$

$$\varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = 0$$

каби шартлар бажарилсин.

Бу шартларнинг дастлабки иккитаси $u(x,t)$ функциянинг $x=0$, $t=0$, ҳамда $x=1$, $t=1$ нуқталардаги узлуксизлигидан келиб чиқади, кейинги иккитаси эса $u_t'(x,t)$ нинг ҳам ўша нуқталардаги узлуксизлигидан келиб чиқади. Агар (8.3.16) тенгламада $t=0$ деб олсак, $u_{tt}''(x,0) = \varphi_0''(x)$ ни ва (8.3.17) чегаравий шартни икки марта дифференциаллаб, $u_{tt}''(0,t) = u_{tt}''(1,t) = 0$ ни ҳосил қиламиз. У муносабатларнинг биринчисида $x=0$ ҳамда $x=1$ деб олиб, иккинчисида эса, $t=0$ деб олсак, учинчи жуфт шартлар ҳосил бўлади.

Энди, (8.3.23) ифодаларнинг Фурье қаторлари эканликларини эътиборга олиб, бўлаклаб интеграллаш усули билан a_k ва b_k коэффициентларни қуйидагича ўзгартирамиз, яъни:

$$a_k = -\frac{2}{k\pi}\varphi_0(x)\cos k\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos k\pi x dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \varphi_0'(x)\cos k\pi x dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\varphi_0'(x)\sin k\pi x \Big|_0^1 -$$

$$-\frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin k\pi x dx = \frac{-2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \varphi_0''(x)\sin k\pi x dx =$$

$$= \frac{2}{k^3\pi^3}\varphi_0''(x)\cos k\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{k^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos k\pi x dx =$$

$$= -\frac{2}{k^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos k\pi x dx,$$

$$b_k = -\frac{2}{k^3\pi^3}\int_0^1 \varphi_1'''(x)\sin k\pi x dx.$$

$$\text{Агар } \alpha_k = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_0'''(x)\cos k\pi x dx,$$

$$\beta_k = -\frac{2}{\pi^3}\int_0^1 \varphi_1'''(x)\sin k\pi x dx$$

каби белгилашлардан фойдалансак, юқоридаги коэффициентлар учун $a_k=\alpha_k/k^3$, $b_k=\beta_k/k^3$ лар ҳосил бўлади. Шунингдек α_k ва β_k ларнинг $L_2[0;1]$ фазога тегишли бўлган $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\varphi_0'''(x)$ ва $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^3}\varphi_1'''(x)$

функцияларнинг Фурье коэффициентлари

эканликларини эътиборга олсак, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ каби

қаторларнинг яқинлашувчиликлари келиб чиқади.

У ҳолда, $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|/k$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|/k$ каби қаторлар ҳам

яқинлашувчидирлар, чунки

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+\alpha_k^2\right),$$

$$\frac{|\beta_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+\beta_k^2\right).$$

Юқоридаги a_k ва b_k ларни (8.3.21) га қўйиб

қуйидаги

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}(\alpha_k\cos k\pi t+\beta_k\sin k\pi t)\sin k\pi x$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қатор яқинлашувчи бўлгани учун унинг йиғиндисидан ҳосил бўлган $u(x,t)$ функция ўзининг ҳам биринчи, ҳам иккинчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлади.

Айнан шу мулоҳазаларни параболик тенгламаларнинг Фурье усули билан ҳосил қилинган ечими учун ҳам исбот қилиш мумкин.

9-БОБ.
ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИДА ЕЧИШ

Маълумки, чекли элементлар усули вариацион ҳисобга асосланган бўлиб, у ерда, дифференциал тенглама ҳамда унинг чегаравий шартлари вариацион масаланинг қўйилиши учун ишлатилар эди. Мазкур усулни 6-бобда бир ўлчовли масалалар учун ўрганган эдик. Бу бобда у усулнинг кўп ўлчовли масалалар учун қўлланилишини баён этамиз.

9.1. УСУЛНИНГ УМУМИЙ ҒОЯСИ.

Айтайлик, соф математик ёки механикавий масаланинг қўйилиши, бирор кўп ўлчовли S соҳада бирор J функционални минималлаштириш масаласининг ҳал этилишини тақозо этадиган бўлсин. Агар S соҳа чегарасининг қисмларини l билан белгиласак, J функционалнинг қийматини қуйидаги

$$J=\int_S F(\{u\},\frac{\partial\{u\}}{\partial x},\frac{\partial\{u\}}{\partial y},\dots)ds+\int_l g(\{u\},\frac{\partial\{u\}}{\partial x},\dots)dl \qquad (9.1.1)$$

интеграл билан аниқлаймизки, бу ерда номаълум бўлиб u функция ёки унинг ҳосилалари ҳисобланади.

Қаралаётган S соҳани бир қанча майда

соҳачаларга бўламизки, уларни биз элементлар деб атаймиз. Шуни таъкидлаш ўринлики, муҳандислик амалиётида, чегаралари ҳам тўғри чизиқли, ҳам эгри чизиқли бўлган учбурчак ва тўртбурчаклар шаклидаги элементлар айниқса кўп ишлатилади. Шунингдек, ҳар бир элемент учун номаълум функциялар

$$\{u\}_e = [N]\{u\}^l \qquad (9.1.2)$$

кўринишда ифодаланадиган бўлсин (бу ерда, ҳам юқорида, номаълум функция вектор ҳам бўлиши мумкин эканлигини кўрсатиш мақсадида уни катта қавс ичига олиб ёзилган). Бу ерда, *[N]* орқали, функциянинг координаталарга боғлиқлигини аниқловчи матрица белгиланган бўлиб, $\{u\}^l$ орқали функциянинг тугун қийматлари вектори белгиланган.

Соҳанинг барча *{u}* параметрлари бўйича *J* функционалнинг минимуми қуйидаги тенгламалар тизимидан топилади:

$$\frac{\partial J}{\partial\{u\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial J}{\partial u_1} \\ \frac{\partial J}{\partial u_2} \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \qquad (9.1.3)$$

Агар функционалнинг айрим элементлар бўйича олинган жамғармаларнинг йиғиндисидан иборат эканлигини эътиборга олсак, яъни,

$$J=\sum J^{l} \qquad (9.1.4)$$

у ҳолда, қуйидагини ёзиш мумкин

$$\frac{\partial J}{\partial u_{n}}=\sum \frac{\partial J^{l}}{\partial u_{n}}=0,$$

бу ерда йиғинди барча элементлар бўйича олинган. Бу эса, бутун даста учун функционални минималлаштириш қоидасини ифодаловчи тенгламалар тизимидир.

Айтайлик, J функционал (9.1.4) тенглик билан ифодаланадиган бўлсин, у ҳолда, l элемент учун ҳосилани қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$\frac{\partial J^{l}}{\partial \{u\}^{l}}=[K]^{l}\{u\}^{l}+[q]^{l},$$

бу ердаги $[K]^{l}$ ва $[q]^{l}$ лар, элементлари ўзгармас сонлардан иборат бўлган матрицалардир. Энди, функционални минималлаштирувчи тенгламалар тизимини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial J}{\partial \{u\}}=[K]\cdot\{u\}+[q]=0, \qquad (9.1.5)$$

бу ерда, $[K]$ коэффициентлар матрицаси бўлиб, одатда у мустаҳкамлик матрицаси деб юритилади ва $[q]$ оғирлик векторидир, яъни:

$$[K_{ij}] = \sum [K_{ij}]^l, q_i = \sum \{q_i\}^l.$$

Юқоридаги (9.1.5) тенгламалар тизимини ечиб, функциянинг тугун қийматлари векторини топамиз ва у топилганларни (9.1.2) га қўйиб, $\{u\}$ вектор функциянинг қийматлари берилган соҳанинг ихтиёрий нуқтасида аниқланади.

9.2. ПУАССОН ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ

Аввалги бандда баён этилган асосий ғояни муфассал тушунтириш мақсадида, қуйидаги соф математик масаланинг ечилиш жараёнини кўриб ўтамиз, яъни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(x,y) \qquad (9.2.1)$$

тенгламанинг бирор S соҳада, унинг чегараси l да $u=0$ шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш лозим бўлсин (10[a]расм). Бу масаланинг ечими шундай u(x,y) функциянинг аниқланишига тенг кучлики, у функция, берилган чегаравий шартни қаноатлантириб, қуйидаги

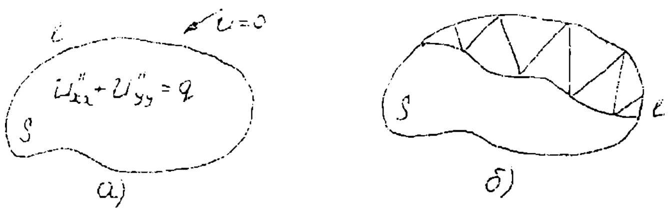
$$J = \iint_S [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 - 2qu]dxdy \qquad (9.2.2.)$$

функционалнинг минимумини ифода этади.

Тенгламанинг ечимини чекли элементлар усули билан топиш мақсадида, S сохани шундай элементларга бўлиб чиқамизки, бу элементларнинг ҳар бири учун (10б-расм)

$$\{u\} = [N]\{u\}' = [N_i N_j \dots]\cdot\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} \qquad (9.2.3)$$

каби тенглик бажариладиган бўлсин, бу ерда, $\{u\}^l$ орқали, ҳар бир элементнинг тугун нуқталаридаги u функциянинг қийматлари белгиланган.



10-расм

Юқоридаги (9.2.3) ни (9.2.2) га қўйиб, ҳар бир элементнинг юзаси бўйича у ифодани интеграллаб юборсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial J'}{\partial u_i} = \iint_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - q\,\frac{\partial u}{\partial u_i}\right]dxdy =$$

$$= \iint_{S\,l} [(\frac{\partial N_i}{\partial x}u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}u_j + \dots)\frac{\partial N_i}{\partial x} + (\frac{\partial N_i}{\partial y}u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y}u_j + \dots)\frac{\partial N_i}{\partial y} - qN_i]dxdy$$

ёки

$$\frac{\partial J^l}{\partial\{u\}^l} = [K]^l\{u\}^l + \{q\}^l,$$

бу ерда

$$K_{ij} = \iint_{S\,l} (\frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial N_j}{\partial y})dxdy,$$

$$q_i = -\iint_{S\,l} qN_i dxdy.$$

Ҳар бир элементнинг шакли, ҳамда функциялар берилган бўлса, барча қийматларни ҳисоблаш мумкин бўлади ва $u_1, u_2, \dots, u_n$ ларни аввалги бандда келтирилган алгебраик тенгламалар тизимига ўхшаш тизимдан аниқланадики, унинг ечимидан тугун нуқталаридаги силжишларни топиш билан масаланинг ечилиши батамом якунланади.

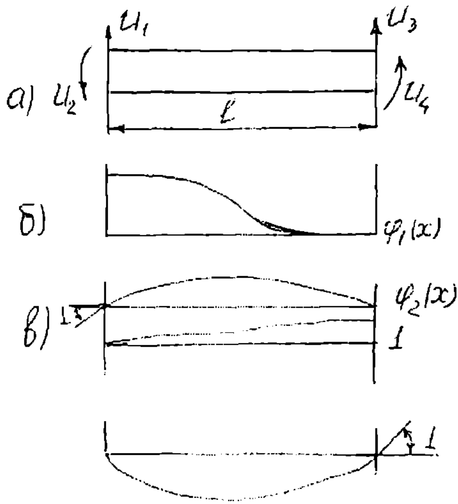
9.3. ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШДА ЧЕКЛИ ЭЛЕМЕНТЛАР УСУЛИНИНГ ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Чекли элементлар усулининг гиперболик тенгламаларни ечишга қўлланилишини баён этиш мақсадида, тўсиннинг кўндаланг тебраниши ҳақидаги масаланинг ечилиш жараёнини кўриб ўтамиз. Маълумки, мазкур масаланинг вариацион тарзда таърифланиши,

$$J=\int_0^T\int_0^l[Cu''^2_{xx}-u'^2_t-2qu]dxdt \qquad (9.3.1)$$

функционалнинг минимумини топиш масаласига келтирилар эди.

Элемент сифатида бирор l узунликдаги тўсининнг маълум бир қисмини қараймиз ва уни чўзилмас деб фараз қиламиз (11[a]-расм).



11-расм

Айтайлик, элементнинг силжиши, унинг кўндаланг силжишлари, яъни:

$$u(0,t) = u_1(t),$$
$$u(l,t) = u_3(t)$$

ва бурилиш бурчаклари, яъни:

$$u'_x(0,t) = u_2(t),$$
$$u'_x(l,t) = u_4(t)$$

билан тўла аниқланган бўлсин. У ҳолда, элементдаги силжишни тақрибий ифода этадиган ифодани учинчи даражали кўпҳад билан ёзиш мумкин, яъни:

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \qquad (9.3.2)$$

бу ерда, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ лар орқали t вақтга боғлиқ бўлган номаълум функциялар белгиланган. Бурилиш бурчаги эса,

$$u'_x = \alpha_1 + 2a_2 x + 3\alpha_3 x^2$$

формула билан ҳисобланади.

Агар $x=0$ ва $x=l$ бўлган ҳолларда (9.3.2) билан (9.3.3) ифодаларни ҳисобласак, (9.3.2) кўпҳаднинг номаълум коэффициентларини аниқлаш мақсадида, қуйидаги алгебраик тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad (9.3.4.)$$

У тизимни ечиб, қуйидагиларни топамиз

$$\alpha_0 = u_1, \alpha_1 = u_2,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{l}(-\frac{3}{l}u_1 - 2u_2 + \frac{3}{l}u_3 - u_4),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{l^2}(\frac{2}{l}u_1 + u_2 - \frac{2}{l}u_3 + u_4).$$

Энди $u(x,t)$ силжиш, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ ва $u_4(t)$ тугун силжишлари ва x га боглиқ бўлган функциялар орқали ифодаланиши мумкин, яъни:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i(x) u_i(t), \qquad (9.3.5)$$

бу ерда,

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3,$$

$$\varphi_2(x) = x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3,$$

$$\varphi_3(x) = \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3,$$

$$\varphi_4(x) = -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3$$

Агар (9.3.5.) ни (9.3.1)га қўйсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$J = \int_0^T F[t, u_1(t), \ldots, u_4(t), u'_{1t}(t), \ldots, u'_{4t}(t)]dt =$$

$$= \int_0^T [\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} u_i u_j - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} u'_{it} u'_{jt} - 2\sum_{i=1}^4 \tilde{q}_i u_i]dt \,, \quad (9.3.6)$$

бу ерда,

$$K_{ij} = \int_0^l C\varphi''_i(x)\varphi''_j(x)dx \,,$$

$$m_{ij} = \int_0^l \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \,,$$

$$\tilde{q} = \int_0^l q\,\varphi_i(x)dx \,, \qquad (i,j) = \overline{(1,4)} \qquad (9.3.7)$$

(9.3.6) функционалнинг минимумга эришишининг зарурий шарти бўлиб, қуйидаги тенглама хизмат қилади:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial u'_{it}} = 0 \qquad (9.3.8)$$

Бундан эса қуйидагини ёзиш мумкин

$$\sum_{j=1}^4 m_{ij} u''_{jtt} + \sum_{j=1}^4 K_{ij} u_j = \tilde{q}_i \,, \quad (i,j) = \overline{(1,4)} \qquad (9.3.9)$$

ёки уни матрицавий кўринишда ёзиб оламиз

$$Mu''_{tt} + Ku = \tilde{q} \,, \qquad (9.3.10)$$

бу ерда, *M* орқали масса матрицаси, *K* орқали эса, чекли элементнинг мустаҳкамлик матрицалари белгиланган. Мазкур матрицаларнинг элементларини (9.3.7) формулалар орқали ҳисоблаб, уларни қуйидаги кўринишда ёзамиз

$$K = \frac{C}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad M = \frac{l}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Энди (9.3.10) тенгламалар тизимининг берилган бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечимини, бизга маълум бўлган усулларнинг бирортаси ёрдамида топиш мумкин.

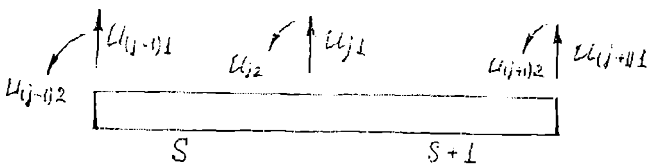
Айтайлик, бирор механикавий тизим қаралаётган бўлсин. У тизимнинг умумий мустаҳкамлик, ҳамда массалар матрицаларини ҳисоблаш учун, тизимни чекли дона чекли элементларга ажратиб, ҳар бир элементнинг ўзига хос бўлган мустаҳкамлик ҳамда массалар матрицалари тузилади ва уларнинг барчасининг йиғиндиси олинади. Масалан, тизимнинг S элементи ичидаги ихтиёрий нуқтанинг силжиши, шу элементни боғлайдиган тугунларнинг силжишлари билан тўла аниқланадиган бўлсин, яъни:

$$u^{(s)} = \sum_i \varphi_i^{(s)} u_{si}(t)$$

Бу ерда, $u^{(s)}$-нуқта силжишининг бирон-бир изи, u_{si}-элементи боғловчи тугунларнинг силжишлари, $\varphi_i^{(s)}(x)$ лар эса, элементдаги нуқтанинг координаталарига боғлиқ бўлган функциялардир (бу функциялар шундай танланишлари лозимки, силжишлар ҳам элемент ичида, ҳам қўшни элементларнинг чегараларида узлуксиз равишда ўзгарадиган бўлсин).

Бутун тизимнинг мустаҳкамлик ва масса матрицалари, уни ташкил этувчи чекли элементларнинг мос матрицалари йиғиндиларидан иборат эканлигини эътиборга олсак, улар қуйидагича ёзиладилар:

$$\left[K_{ij}\right] = \sum_{s} K_{ij}^{(s)}, \left[m_{ij}\right] = \sum m_{ij}^{(s)}.$$



12 -расм

Айтайлик, механикавий тизим сифатида тўсин элементларининг бирлашмаси қаралаётган бўлсин. Тўсиннинг *j* сонли тугунида иккита S ва $(S+1)$ элементлар бирлаштирилган бўлсин (12-расм). Тугуннинг силжишини u_{j1} ва u_{j2} лар билан белгилаймиз (бурилиш ва силжиш), у ҳолда, *j1* ва *j2* сатрларга мос келувчи *[K]* матрицанинг мустаҳкамлик коэффициентлари қуйидагиларга тенг бўлади:

$$K_{j1,(j-1)1} = K_{31}^{(s)}, \qquad K_{j1,(j-1)2} = K_{32}^{(s)},$$

$$K_{j1,j1} = K_{33}^{(s)} + K_{11}^{(s+1)},$$

$$K_{j1,j2} = K_{34}^{(s)} + K_{12}^{(s+1)}, \qquad K_{j1,(j+1)1} = K_{13}^{(s+1)},$$

$$K_{j1,(j+1)2} = K_{14}^{(s+1)},$$

$$K_{j2,(j-1)1} = K_{41}^{(s)}, \qquad K_{j2,(j-1)2} = K_{42}^{(s)},$$

$$K_{j2,(j+1)2} = K_{34}^{(s)} + K_{12}^{(s+1)},$$

$$K_{j2,j2} \doteq K_{44}^{(s)} + K_{22}^{(s+1)}, \qquad K_{j2,(j+1)1} = K_{23}^{(s+1)},$$

$$K_{j2,(j+1)2} = K_{24}^{(s+1)}.$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонларидаги ифодаларнинг юқоридаги индекслари, мустаҳкамлик коэффициентлари ҳисобланиши керак бўлган элементнинг сонини кўрсатади, қуйи индекслар эса, (9.3.7) формулаларга мос келади. Умумий масса матрицасининг элементлари ҳам шундай формулалар билан ҳисобланади.

Шуни таъкидлаш лозимки, чекли элементлар усулининг алгоритмини ЭҲМга киритиш анча мураккаб масала бўлиб, у тадқиқотчидан ЭҲМда ишлашнинг катта малакасини, назарий ҳамда амалий тайёргарликни ва қаралаётган масаланинг физикавий, механикавий ва бошқа шунга ўхшаш моҳиятларини билишни талаб этади.

10 - БОБ.

ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР УСУЛИДА ЕЧИШ.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ҳам чекли айирмалар усули билан ечилишининг асосида яна хусусий ҳосилаларнинг чекли айирмалар орқали тақрибий ифодаланиши ётади. Бу эса, кўп жиҳатдан, оддий дифференциал тенгламаларнинг шу усул билан ечилишига ўхшайди. Айрим ҳолларда, ҳосилаларнинг чекли айирмалар орқали тақрибий ифодаланиши, тенгламаларнинг ўлчовларини пасайтириш учун ишлатиладики, ана шундай ҳолларда чекли айирмалар усули дифференциал айирма ёки тўғри чизиқлар усули деб аталади.

10.1. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР УСУЛИНИНГ МОҲИЯТИ.

Мазкур усулнинг моҳиятини энг содда чегаравий шартлар билан берилган уч хилдаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун баён этамиз.

$$\text{a)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (10.1.1.)$$

$$\left.\begin{aligned} &u(0,y) = \theta(y),\ u(a,y) = \bar{\theta}(y), \\ &u(x,0) = \mu(x),\ u(x,b) = \bar{\mu}(x). \end{aligned}\right\} \qquad (10.1.2.)$$

б) $u''_{xx} = Cu''_{tt} + f(x,t)$, (10.1.3.)

$$u(0,t) = \theta(t),\ u(a,t) = \bar{\theta}(t), \quad (10.1.4.)$$

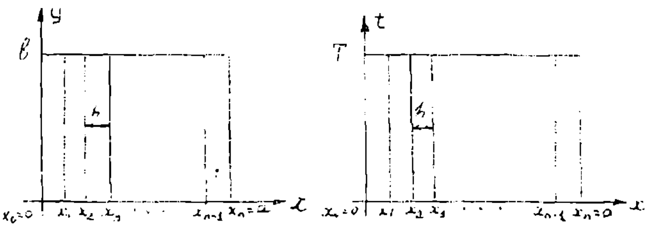
$$u(x,0) = \mu(x),\ u'_t(x,0) = \bar{\mu}(x). \quad (10.1.5.)$$

в) $u''_{xx} = Cu'_t + f(x,t)$, (10.1.6.)

$$u(0,t) = \theta(t),\ u(a,t) = \bar{\theta}(t), \quad (10.1.7.)$$

$$u(x,0) = \mu(x). \quad (10.1.8.)$$

Мазкур масалаларни бирор тўғри тўртбурчакли G соҳада тўғри чизиқлар усули билан ечамиз. Шу мақсадда, G соҳани n та тўғри чизиқлар ёрдамида $(n+1)$ та қатламга бўлиб чиқамиз (13-расм), яъни: $x_k = x_o + kh,\ \ h = a/(n+1),\ \ (k = \overline{1,n})$.



13-расм.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз :

$$u(x_k + h, y) = u_{k+1}(y),\ \ u(x_k + h, t) = u_{k+1}(t),$$

$$u(x_k - h, y) = u_{k-1}(y),\ \ u(x_k - h, t) = u_{k-1}(t).$$

Агар қуйидаги Тейлор формуласидан фойдалансак, яъни:

$$u_{k+1} = u_k + h\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_k} + \cdots, \quad (10.1.9.)$$

$$u_k = u_k$$

$$u_{k-1} = u_k - h\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_k} - \cdots, \quad (10.1.10.)$$

қуйидаги ифодани ёзиш мумкин

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_k} + \frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_k}\right) + 0(h^4).$$

Агар

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi, \Delta^2 u_k = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} \qquad (10.1.11.)$$

деб белгилаш киритсак, у ҳолда:

$$h^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\bigg|_{x=x_k} = h^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_k} =$$

$$= h^2\left(\frac{\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}}{h^2}\right) + 0(h^4). \qquad (10.1.12.)$$

Агар (10.1.12.) ни (10.1.10.) га қўйиб, (10.1.11.) белгилашларни эътиборга олсак, x ўзгарувчига нисбатан иккинчи тартибли хусусий ҳосиланинг $0(h^4)$ аниқликдаги тақрибий ифодасининг формуласини ҳосил қиламиз

$$\frac{\Delta^2 u_k}{h^2} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_k} +$$

$$+\frac{1}{12}\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_{k+1}} - 2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_k} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_{k-1}}\right) + \qquad (10.1.13.)$$

$$+0(h^4).$$

Энди (10.1.1.), (10.1.3.) ва (10.1.6.) тенгламаларда $x = x_k$ дейилса, у ҳолда:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_k} = f(x_k, y) - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=x_k} = f_k(y) - \frac{d^2 u_k}{dy^2}, \quad (10.1.14.)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_k} = f(x_k, t) + C\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=x_k} = f_k(t) + C\frac{d^2 u_k}{dt^2}, \quad (10.1.15.)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_k} = f(x_k, t) + C\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=x_k} = f_k(t) + C\frac{du_k}{dt}. \quad (10.1.16.)$$

Бу (10.1.14.) - (10.1.16.) ифодаларни (10.1.13.) га қўйиб, қаралаётган уч хил хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни $0(h^4)$ аниқлик билан тақрибан ифода этувчи оддий дифференциал тенгламалар тизимини ёзамиз

$$\frac{d^2 u_k(y)}{dy^2} + \frac{1}{12}\Delta^2\left(\frac{d^2 u_k(y)}{dy^2}\right) + \frac{1}{h^2}\Delta^2 u_k(y) = f_k(y) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_k(y),$$

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 u_k(t) = f_k(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_k(t) + C\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{C}{12}\Delta^2\left(\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2}\right),$$

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 u_k(t) = f_k(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_k(t) + C\frac{du_k(t)}{dt} +$$
$$+\frac{C}{12}\Delta^2\left(\frac{du_k(t)}{dt}\right), \ (k = \overline{1,n}).$$

Бу тизим матрицавий кўринишда қуйидагича ёзилади

$$\left(E + \frac{M}{12}\right)\frac{d^2V}{dy^2} + \frac{M}{h^2}V = F_1(y), \qquad (10.1.17.)$$

$$\frac{M}{h^2}V - C\left(E + \frac{M}{12}\right)\frac{d^2V}{dt^2} = F_2(t), \qquad (10.1.18.)$$

$$\frac{M}{h^2}V - C\left(E + \frac{M}{12}\right)\frac{dV}{dt} = F_3(t), \qquad (10.1.19.)$$

бу ерда E бирлик матрица. Шунингдек, қуйидагилар

$V=\left[u_1(y),\ldots,u_n(y)\right]$, $\quad V=\left[u_1(t),\ldots,u_n(t)\right]$,

$F_1(t)=\left[F_{11}(t), F_{12}(t),\ldots,F_{1n}(t)\right]$,

$F_2(t)=\left[F_{21}(t), F_{22}(t),\ldots,F_{2n}(t)\right]$,

$F_3(t)=\left[F_{31}(t), F_{32}(t),\ldots,F_{3n}(t)\right]$,

устун-векторлар бўлиб, уларнинг элементлари қуйидагилардир:

$$F_{11}(y) = f_1(y) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_1(y) - \frac{1}{h^2}u_0(y) - $$
$$-\frac{1}{12}u_0''(y) \ .$$

$$F_{1i}(y) = f_i(y) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_i(y) \ ,$$
$$(i = 2,3,\ldots,(n-1)) \ ,$$

$$F_{1n}(y) = f_n(y) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_n(y) - \frac{1}{h^2}u_{n+1}(y) - \frac{1}{12}u_{n+1}''(y) \ ,$$

$$F_{21}(t) = f_1(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_1(t) - \frac{1}{h^2}u_0(t) - \frac{C}{12}u_0''(t) \ ,$$

$$F_{2i}(t) = f_i(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_i(t) \ ,$$
$$(i = 2,3,\ldots,(n-1)) \ ,$$

$$F_{2n}(t) = f_n(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_n(t) - \frac{1}{h^2}u_{n+1}(t) - \frac{C}{12}u_{n+1}''(t) \ ,$$

$$F_{31}(t) = f_1(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_1(t) - \frac{1}{h^2}u_0(t) - \frac{C}{12}u_0'(t) \ ,$$

$$F_{3i}(t) = f_i(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_i(t) \ ,$$
$$(i = 2,3,\ldots,(n-1)) \ ,$$

$$F_{3n}(t) = f_n(t) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_n(t) - \frac{1}{h^2}u_{n+1}(t) - \frac{C}{12}u_{n+1}'(t) \ ,$$

$$u_0(y) = \theta(y) \ , \quad u_0''(y) = \theta_{yy}''(y) \ ,$$

$$u_{n+1}(y) = \bar{\theta}(y)\ ,\quad u''_{n+1}(y) = \bar{\theta}''_{yy}(y)\ ,$$

$$u_0(t) = \theta(t)\ ,\quad u''_0(t) = \theta''_{tt}(t)\ ,$$

$$u_{n+1}(t) = \bar{\theta}(t)\ ,\quad u''_{n+1}(t) = \bar{\theta}''_{tt}(t)\ ,$$

$$u'_0(t) = \theta'_t(t)\ ,\quad u'_{n+1}(t) = \bar{\theta}'_t(t)\ ,$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Қуйидаги

$$B = B^{-1} = \left\| b_{ks} \right\| = \left\| (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} Sin \frac{ks\pi}{n+1} \right\|$$

матрица ёрдамида M матрица диагонал матрица шаклида ифодаланади:

$$BMB^{-1} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\ ,$$

бу ерда,

$$\lambda_k = -2\left(1 + Cos\frac{k\pi}{n+1}\right)\ ,\ (k = \overline{1,n})$$

ёки бу тенгликнинг ҳар иккала томони B матрицага ўнг томондан кўпайтирилса, у ҳолда

$$BM = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot B.$$

Агар

$$\left.\begin{aligned} BV &= \left[P_1, P_2, \dots, P_n\right], \\ BF_i &= \left[q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (10.1.20)$$

каби белгилашлар киритилса, (10.1.17) - (10.1.19) лардан n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тенгламаларни ҳосил қиламиз

$$P_k''(y) - \alpha_k^2 P_k(y) = \overline{q}_{1k}(y) , \quad (10.1.21)$$

$$\widetilde{P}_k'(t) + \omega_k^2 \widetilde{P}_k(t) = \overline{q}_{2k}(t) , \quad (10.1.22)$$

$$\overline{P_k'}(t) + \omega_k^2 \overline{P}_k(t) = \overline{q}_{3k}(t) . \quad (10.1.23)$$

Бошланғич ва чегаравий шартлар бўлган (10.1.2), (10.1.5) ва (10.1.8) лардан фойдаланиб, (10.1.20) белгилашларни эътиборга олиб, қуйидагиларни ёзиб оламиз

$$P_k(0) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}\mu_s, \quad P_k(b) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}\overline{\mu}_s, \qquad (10.1.24)$$

$$\widetilde{P}_k(0) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}\mu_s, \quad \widetilde{P}_{kt}(0) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}\overline{\mu}_s, \qquad (10.1.25)$$

$$\overline{P}_k(0) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks}\mu_s, \qquad (10.1.26)$$

бу ерда:

$$\overline{q}_{ik} = \frac{12q_{ik}}{12+\lambda_k}, \quad (i = 1,2,3,\ldots),$$

$$\mu_s = \mu(x_s), \ \overline{\mu}_s = \mu(x_s),$$

$$\alpha_k^2 = -\frac{12\lambda_k}{h^2(12+\lambda_k)}, \ \omega_k^2 = \frac{12\lambda_k}{C(12+\lambda_k)}, \ (k = \overline{1,n}).$$

Энди (10.1.21), (10.1.22) ва (10.1.23)

тенгламаларнинг уларга мос келувчи (10.1.24) чегаравий, (10.1.25) ва (10.1.26) каби бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини топиш қийин эмас.

Агар (10.1.20) белгилашларни эътиборга олсак, P_k лар маълум бўлган ҳолда, қуйидагиларни топамиз:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

ёки

$$u_k(y) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} P_s(y), \tag{10.1.27}$$

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} \widetilde{P}_s(t), \tag{10.1.28}$$

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} b_{ks} \overline{P}_s(t) \tag{10.1.29}$$

Бу топилган (10.1.27) - (10.1.29) ифодалар мос ҳолда (10.1.1), (10.1.3) ва (10.1.6) каби хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич ва чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимларини ифодалайди.

10.2 ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР УСУЛИНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ ВА УНИНГ ХАТОЛИГИНИ БАҲОЛАШ.

Аввалги бандда биз уч хилдаги энг асосий хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг тақрибий ечимларини тўғри чизиқлар усули билан аниқлаган эдик. Бу бандда, у ечимларнинг аниқ ечимга яқинлашишларини ва йўл қўйилган хатоликни баҳолашни мақсад қилиб қўямиз. Соддалик учун бу мулоҳазаларни чегаравий шартлари нолдан иборат бўлган Пуассон тенгламаси учун баён этамиз.

Қаралаётган тўғри тўртбурчакли бирор соҳада ўтказилган ҳар қандай учта кетма-кет параллел тўғри чизиқлар учун қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин

$$Lu_k(y) = u''(x_k, y) + \frac{\Delta^2 u''(x_k, y)}{12} + \frac{\Delta^2 u(x_k, y)}{h^2} =$$

$$= f_k(y) + \frac{1}{12}\Delta^2 f_k(y) - \frac{3h^4}{6!} \cdot \left.\frac{\partial^6 r}{\partial x^6}\right|_{x=x_k}. \qquad (10.2.1)$$

Теорема. Агар қаралаётган соҳада $Lu_k(y) \le 0$ бўлиб, чегаравий нуқталарда $u_k(y) \ge 0$ бўлса, соҳанинг барча ички нуқталарида $u(x_k, y) \ge 0$ бўлади.

Исбот. Аниқ ва тақрибий ечимлар айирмасини

$\delta_k(y)$ деб белгилаб, яъни, $u(x_k,y)-u_k(y)=\delta_k(y)$, ундан $u(x_k,y)$ ни (10.2.1)га қўямиз. У ҳолда, $u_k(y)$ нинг ўнг томонидаги қолдиқ ҳадни ташлаб юборишдан ҳосил бўлган тақрибий тизимнинг ечими эканлигини ҳисобга олсак, хатоликни аниқлаш учун қуйидаги дифференциал тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз.

$$\delta_k''(y)+\frac{1}{12}\Delta^2\delta_k''(y)+\frac{1}{h^2}\Delta^2\delta_k(y)=-\frac{3h^4}{6!}\cdot\left.\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|_{x=x_k} \quad (10.2.2)$$

Соҳада $M_6=\max\limits_{\substack{1\le k\le n\\ -b\le y\le b}}\left|\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|_{x=x_k}$ каби белгилаш

киритиб ва барча $\delta_k(y)$ ларни мос $\overline{\delta}_k(y)$ ларга алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\overline{\delta_k''}(y)+\frac{1}{12}\Delta^2\overline{\delta_k''}(y)+\frac{1}{h^2}\overline{\delta_k}(y)=-\frac{3h^4}{6!}M_6. \quad (10.2.3)$$

Юқоридаги ифодаларнинг айирмасини қараймиз, яъни:

$$\overline{\delta_k''}(y)-\delta_k''(y)+\frac{1}{12}\Delta^2\left[\overline{\delta_k''}(y)-\delta_k''(y)\right]+$$

$$+\frac{1}{h^2}\Delta^2\left[\overline{\delta_k}(y)-\delta_k(y)\right]=-\frac{3h^4}{6!}\left[M_6-\left.\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right|_{x=x_k}\right]. \quad (10.2.4)$$

Бу ердан кўриняптики, (10.2.4) ифоданинг ўнг томони нолдан кичик ёки тенг, у ҳолда, агар қаралаётган соҳанинг чегарасида $\overline{\delta_k}(y)-\delta_k(y)\geq 0$ бўлса, теореманинг шартига асосан, соҳанинг барча ички нуқталарида ҳам $\overline{\delta_k}(y)-\delta_k(y)\geq 0$ бўлади. Шу боисдан, $\overline{\delta_k}(y)$ ни $\delta_k(y)$ хатолик учун мажоранта сифатида қабул қилиш мумкин. У мажоранта (10.2.3) тенгламалардан аниқланади. У тенгламалар учун чегаравий шартлар қуйидагича ёзиладилар:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\delta_o}(y)=0, \quad \overline{\delta_{n+1}}(y)=0,\\ &\overline{\delta_k}(b)=0, \quad \overline{\delta_k}(-b)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (10.2.5)$$

чунки, чегара тўғри чизиқларда ҳар доим $u_o(y)$ ва $u_{n+1}(y)$ тақрибий қийматлар, аниқ ечимлар билан бир хил бўладилар.

Юқоридаги (10.2.3) тенгламалар тизимини матрицавий кўринишда ёзиб оламиз

$$\left(E+\frac{M}{12}\right)\varepsilon''(y)+\frac{M}{h^2}\varepsilon(y)=T, \qquad (10.2.6)$$

бу ерда:

$$\varepsilon(y)=\left[\overline{\delta_1}(y),\overline{\delta_2}(y),\ldots,\overline{\delta_n}(y)\right],$$

$$T=\left[T_1,T_2,\ldots,T_n\right],$$

$$T_1=T_2=\ldots=T_n=-\frac{3h^4}{6!}\cdot M_6$$

Агар ушбу

$$\left.\begin{array}{l} B\varepsilon(y) = \left[\varepsilon_1(y), \varepsilon_2(y), \ldots, \varepsilon_n(y)\right], \\ BT = \left[t_1, t_2, \ldots, t_n\right] \end{array}\right\} \quad (10.2.7)$$

белгилашларни киритсак, (10.2.6) дан n та ўзаро боғлиқ бўлмаган тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\varepsilon_k''(y) - \alpha_k^2 \varepsilon_k(y) = \overline{t_k}, \ (k = 1, n), \quad (10.2.8)$$

бу ерда:

$$\alpha_k^2 = -\frac{12\lambda_k}{h^2(12+\lambda_k)}, \quad \overline{t_k} = \frac{12t_k}{12+\lambda_k} = -\frac{36h^4 M_6}{6!(12+\lambda_k)} \sum_{s=1}^{n} b_{ks}.$$

Юқорида киритилган (10.2.7) белгилашларни (10.2.5) ларга қўлласак, (10.2.8) тенгламалар учун қуйидаги чегаравий шартлар ҳосил бўлади

$$\varepsilon_k(b) = 0, \ \varepsilon_k(-b) = 0, \quad (10.2.9)$$

Энди (10.2.8) тенгламанинг (10.2.9) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи ечимнинг умумий кўриниши қуйидагича ёзилади

$$\varepsilon_k(y) = \left(1 - \frac{ch\alpha_k y}{ch\alpha_k b}\right) \cdot \frac{3h^6 M_6}{6!\lambda_k} \sum_{s=1}^{n} b_{ks},$$

(10.2.7) белгилашларга асосан, юқоридаги ифодадан қуйидаги ҳосил қилинади

$$\overline{\delta_k}(y) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\varepsilon_j(y) =$$

$$= \frac{3h^6 M_6}{6!} \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\left[x_j(y) \sum_{s=1}^{n} b_{js}\right] =$$

$$= \frac{h^6 M_6}{5!(n+1)} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \mathrm{Sin} \frac{kj\pi}{n+1} \left[x_j(y) \sum_{s=1}^{n} (-1)^{j+s} \mathrm{Sin} \frac{js\pi}{n+1} \right],$$

бу ерда:

$$x_j(y) = \frac{1}{\lambda_j} \left(1 - \frac{ch\alpha_j y}{ch\alpha_j b} \right).$$

Бундан эса, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\left|\overline{\delta_k}(y)\right| \le \frac{h^6 M_6}{5!(n+1)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left| (-1)^{k+j} Sin \frac{kj\pi}{n+1} \right| \cdot \left| x_j(y) \right| \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{n} \left| (-1)^{j+s} Sin \frac{js\pi}{n+1} \right| \le \frac{h^2 M_6 M_1}{5!(n+1)} h^6 < \frac{a^2 M h^4}{5!(n+1)},$$

бу ерда:

$$M = M_6 M_1, \quad M_1 = \max_{\substack{1 \le j \le n \\ -b \le y \le b}} \left| x_j(y) \right|$$

Демак, юқоридагиларга асосан , қуйидаги тенгсизликни ёзиш мумкин бўлади:

$$\left|\delta_k(y)\right| \le \left|\overline{\delta}_k(y)\right| < \frac{a^2 M h^4}{5!(n+1)}.$$

Бу тенгсизликдан кўриняптики, параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа камайиши билан, хатолик $0(h^4)$ тезликда камаяр экан, демак, тақрибий ечим эса аниқ ечимга интилар экан, яъни:

$$\lim_{h\to 0}\left|u(x_k, y) - u_k(y)\right| = \lim_{h\to 0}\left|\delta_k(y)\right| = 0.$$

10.3. СОНЛИ МИСОЛЛАР.

1. Биринчи мисол сифатида мембрананинг барқарор деформацияси ҳақидаги масалани қараймиз. Маълумки мембрананинг кўндаланг деформацияси *u*, пластинканинг деформациясига нисбатан бошқачароқ ифодаланади, чунки, унда эгилиш ҳамда силжиш зўриқишлари иштирок этмайди ҳамда қуйидаги тенглама билан аниқланади, яъни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{P}{T}, \qquad (10.3.1)$$

бу ерда *P*- босим, *T*- узунлик бирлигига келтирилган зўриқиш (мембранадаги нисбатан кичик деформацияларда зўриқишни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин бўлганлиги сабабли, *P*=*T* деб олиш мумкин).

Юқоридаги (10.3.1) тенглама учун чегаравий шартлар қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) = u(a,y) = 0,\\ u(x,-b) = u(x,b) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.3.2)$$

Тўғри чизиқлар усулига кўра, (10.3.1) билан (10.3.2) масаланинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u_k(y) = -\frac{2h^2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\mathrm{Sin}\frac{kj\pi}{n+1}x_j(y)\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{n}(-1)^{j+s}\mathrm{Sin}\frac{js\pi}{n+1}, \qquad (10.3.3)$$

бу ерда:

$$x_j(y) = \frac{1}{\lambda_j}\left(1 - \frac{ch\alpha_j y}{ch\alpha_j b}\right),$$

$$\lambda_j = -2\left(1 + Cos\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad \lambda_j = \frac{1}{h}\sqrt{-\frac{12\lambda_j}{12+\lambda_j}},$$

$$(j = \overline{1,n}).$$

Қуйидаги 8- жадвалда мембрана тўғри тўртбурчаги томонларининг ҳар хил нисбатлари учун $u_k(y)$ нинг қийматлари тўғри тўртбурчак марказида келтирилган ва улар аниқ ечимлар билан таққосланган. Таҳлиллар кўрсатяптики, амалий ҳисоблашлар учун $n=5$ билан чегараланиш етарли экан.

2. Иккинчи мисол сифатида Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг ечимини келтирамиз, яъни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (10.3.4)$$

$$u = \begin{cases} \mathrm{Sin}\pi x, & агар \quad y = \pm 0{,}5 \text{ бўлса}, \\ 0, & агар \ x = 0 \text{ ва } x = 1 \text{ бўлса}. \end{cases} \qquad (10.3.5)$$

8-жадвал.

a/b	a	b	$u_k(y)$ $y=0,\ n=5$	$u_k(y)$ $y=0,\ n=7$	аниқ ечим
2.0	1.0	0.5	0.1138599	0.1138701	0.11387
1.6	0.8	0.5	0.1042404	0.1042452	0.10426
1.5	0.75	0.5	0.1007707	0.1007761	0.10079
1.2	0.6	0.5	0.0867433	0.0867474	0.08676
1.0	0.5	0.5	0.0736583	0.0736537	0.07304
0.5	1.0	2.0	0.2947141	0.2946943	0.29467

Мазкур масаланинг аниқ ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(x,y) = \frac{1}{\mathrm{ch}\pi/2}\mathrm{ch}\pi y \cdot \mathrm{Sin}\pi x. \qquad (10.3.6)$$

Агар

$$f(x,y) = 0, \mu(x) = \overline{\mu}(x) = Sin\pi x, \theta(y) = \overline{\theta}(y) = 0$$

деб олсак, қаралаётган масаланинг ечими қуйидагича ёзилади:

$$u_k(y) = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \mathrm{Sin}\frac{kj\pi}{n+1} \cdot \frac{\mathrm{ch}\alpha_j y}{\mathrm{ch}(\alpha_j/2)} \times$$

$$\times\left[\sum_{s=1}^{n}(-1)^{j+s}Sin\frac{js\pi}{n+1}\cdot Sin\pi x_s\right].$$

Қуйидаги 9- жадвалда, $y=0$ тўғри чизиқнинг нуқталаридаги ҳисоб натижалари $n=5$ ва $n=7$ бўлган ҳоллар учун келтирилган, ҳамда аниқ ва тақрибий ечимлар ўзаро таққосланган.

9- жадвал.

k	аниқ ечим	тўғри чизиқлар усули бўйича ечим	аниқ ечим	тўғри чизиқлар усули бўйича ечим
1	0.1992684	0.1993138	0.1525134	0.152524
2	0.3451430	0.3452219	0.2818080	0.281828
3	0.3985365	0.3936276	0.3682000	0.368226
4	0.3451430	0.3452219	0.3985360	0.398565
5	0.19926884	0.1993138	0.3682000	0.368226
6	—	—	0.2818080	0.281928
7	—	—	0.1525134	0.152524

Юқорида келтирилган мисоллардан кўриняптики, $u_k(y)$ нинг тўғри чизиқлар усули билан ҳисобланган қийматлари, ҳамда аниқ қийматлари орасидаги фарқ жуда ҳам кам бўлар экан.

Умуман, тўғри чизиқлар усулини ҳар хил кўринишдаги юқори тартибли (масалан, 4-тартибли) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечишда қўлланилади. Лекин, у ерда, ҳар доим ҳам тақрибий аналитик ечимни қуриш мумкин бўлавермайди. Тўғри чизиқлар усулидаги бу камчиликни, тўрлар усули орқали бир қадар бартараф этилади, шу боисдан, навбатдаги боб шу усулнинг баёнига бағишланади.

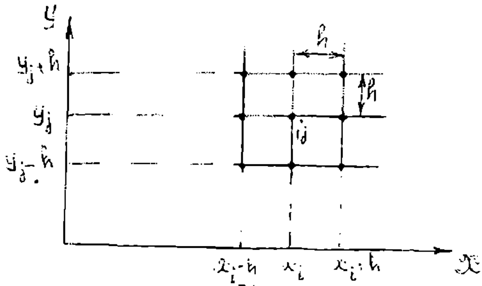
11-БОБ.
ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ТЎРЛАР УСУЛИ.

Кўп ҳолларда, чекли айирмалар муносабатлари орқали хусусий ҳосилалар тақрибан ифода этиладиларки, улар қаралаётган тенгламанинг барча ўзгарувчилари бўйича бажарилади. Бундай ҳолларда, чекли айирмалар усулини тўрлар усули деб юритилади.

11.1. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРНИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР ОРҚАЛИ ИФОДАЛАШ.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг энг содда ва шу билан бирга кенг тарқалган усулларидан бири, тўрлар усули ҳисобланади. Мазкур усул ёрдамида хусусий ҳосилаларни тақрибий ифодалаш учун кўпинча икки ўлчовли тўғри тўртбурчакли тўрдан фойдаланилади.

Қадами h бўлган икки ўлчовли квадрат тўрга нисбатан тузиладиган чекли айирмалар андазасини, 5-бобда кўриб ўтилган бир ўлчовли ҳолга ўхшаш қилиб тузиш мумкин (14-расм).



14-расм.

Қулай бўлсин учун $u(x_i+h, y_j)$ каби белгилашларни $u_{i+1,j}$ лар билан алмаштириб ёзамиз.

Бу белгилашлардан, ҳамда икки ўзгарувчили $u(x,y)$ функциянинг Тейлор қаторига бўлган ёйилмасидан фойдаланиб, хусусий ҳосилаларни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = \frac{1}{2h}[-1 \quad 0 \quad 1],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} = \frac{1}{2h}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cong \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{ij} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^4} =$$

$$= \frac{1}{h^4}[1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad 1],$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \cong \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{ij} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{h^4} = = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Бу элементларга асосан, дифференциал тенгламаларни ечиш учун ҳисоблаш андазалари тузилади. Масалан, Лаплас тенгламасининг ҳисоблаш андазаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cong\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=0$$

Келтирилган барча ҳисоблаш андазалари h^2 тартибдаги хатоликка эга. Қўшимча тугунлар киритиб, ундан ҳам аниқроқ бўлган ҳисоблаш андазалари тузиш мумкин. Масалан, тўрнинг n та тугуни бўлса, ҳар бир тугун учун ҳисоблаш андазасини қўллаб, n та алгебраик тенгламалар тизими ҳосил бўладики, агар қаралаётган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама чизиқли бўлса, у ҳам чизиқли бўлади. Масаланинг чегаравий шартларини ҳисобга олиб, қуйидаги кўринишда бўлган тенгламалар тизими ҳосил қилинади:

$$\begin{bmatrix}\text{коэффициентлар}\\ \text{матрицаси}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\text{тугунлардаги номаълум}\\ \text{кийматлар (устун - вектор)}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\text{маълум устун – вектор}\right]$$

Бу хилдаги алгебраик тенгламалар тизимининг ечилиш усуллари билан биз аввалги бобларда танишган эдик.

11.2. ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ.

Томонларининг узунликлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчакли соҳада Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласини тўрлар усулида ечамиз, яъни, шундай $u(x,y)$ узлуксиз функцияни топиш талаб этиладики, у функция $S=\{(x,y)/(0\le x\le a),\ (0\le y\le b)\}$ соҳанинг ичида Лаплас тенгламаси

$$\Delta u = u''^2_{xx} + u''^2_{yy} = 0 \qquad (11.2.1)$$

ни қаноатлантириб, соҳа чегарасида эса, қуйидаги берилган қийматларни қабул қиладиган бўлсин:

$$u(0,y)=\theta(y), \qquad u(a,y)=\overline{\theta}(y),$$

$$u(x,0)=\mu(x), \qquad u(x,b)=\overline{\mu}(x) \qquad (11.2.2)$$

бу ерда, $\theta(y)$, $\overline{\theta}(y)$, $\mu(x)$, $\overline{\mu}(x)$ лар берилган функциялардир. Ечимлар соҳасида OX ўқ бўйлаб h қадамли, OY ўқ бўйлаб эса ℓ қадамли икки ўлчовли тўрни киритамиз. Соддалик учун $\ell=h$ деб қабул қилиб, биринчи банддаги белгилашлардан фойдалансак, ҳамда (11.2.1) тенгламани айирмали тенглама билан тақрибан ифодаласак, у ҳолда, қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар тизимини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{llll} u_{ij}=\frac{1}{4}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}), & & & \\ u_{i,0}=\mu(x_i), & u_{i,m}=\overline{\mu}(x_i)\,. & u_{0,j}=\theta(y_j), & u_{n,j}=\overline{\theta}(y_j), \\ i=\overline{1,(n-1)}, & j=\overline{1,(m-1)}, & x_i=ih, & y_j=jh \end{array}\right\}$$

Бу тенгламалар тизими катта сон миқдордаги ноллик элементлардан ташкил топган бўлиб, унинг учун итерация усулларидан фойдаланилгандагина яқинлашиш шартлари бажарилади. Бундай тизимларни ечиш учун Гаусс-Зейдел усули кўпроқ қўлланади ва у усул одатда, эллиптик айирмали тенгламаларга нисбатан Либман усули ёки кетма-кет силжиш усули деб аталади. Итерация жараёнининг тартибини кузатиш мақсадида, юқоридаги тизимни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$u_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}[\mu(h) + \theta(h) + u_{2,1}^{(0)} + u_{1,2}^{(0)}],$$

$$u_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{4}[\mu(2h) + u_{1,1}^{(0)}(h) + u_{3,1}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}],$$

$$u_{3,1}^{(1)} = \frac{1}{4}[\mu(3h) + u_{2,1}^{(0)}(h) + u_{4,1}^{(0)} + u_{3,2}^{(0)}],$$

(11.2.3)

$$u_{(n-1),1}^{(1)} = \frac{1}{4}[\mu((n-1)h) + \overline{\theta}(h) + u_{(n-2),1}^{(1)} + u_{(n-2),2}^{(0)}],$$

$$u_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{4}[\theta(2h) + u_{1,1}^{(1)} + u_{2,2}^{(0)} + u_{1,3}^{(0)}],$$

$$u_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4}[u_{2,1}^{(1)} + u_{1,2}^{(1)} + u_{3,2}^{(0)} + u_{2,3}^{(0)}],$$

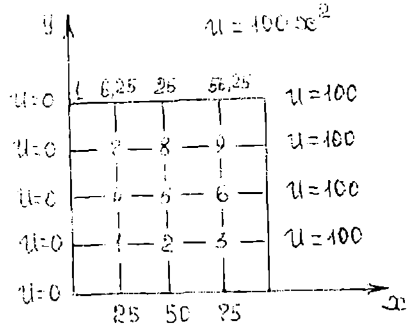
бу ерда, юқори индекслар орқали итерациянинг тартиб сони белгиланган. Одатда, барча i, j лар учун $u_{i,j}^{(0)} = 0$ деб олинади. Бу (11.2.3) тизим ЭҲМда осонгина ечилади.

Мисол. Айтайлик, квадрат мембранада

ҳароратнинг барқарор тарқалиши ҳақидаги масала қаралаётган бўлсин. Маълумки, ушбу масаланинг математик модели, Лаплас тенгламаси эди. Чегаравий шартлар қуйидагича берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} &u(0,y)=0, \qquad && u(1,y)=100 \\ &u(x,0)=100x, \qquad && u(x,1)=100x^2 \end{aligned}\right\} \quad (11.2.4)$$

Тўрлар усулини қаралаётган масалага қўллаш мақсадида, тугунлари орасидаги масофа h = 0.25 дан иборат бўлган икки ўлчовли тўрни киритамиз. Тугунларнинг жойлашишлари 15-расмда кўрсатилган бўлиб, у ерда, ички тугунлар рақамлар билан белгиланган. Тўр 25 тугундан иборат бўлиб, чегаравий шартларга кўра у тугунларнинг 16 тасида ҳарорат маълумдир, қолган 9 та тугунда ҳарорат аниқланиши лозим.



15-расм.

Лаплас тенгламаси асосида тузилган ҳисоблаш андазаси ёрдамида ҳароратнинг тугундаги янги қиймати топилади:

$$u_{i,j}=0{,}25\ (u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}u_{i,j-1}).$$

Ҳароратнинг тугунлардаги бошланғич қийматлари чизиқли интерполяция ёрдамида берилади. Тугунлардаги u нинг ҳақиқий қийматлари эса итерация усулида аниқланади.

Қуйидаги 10-жадвалда 30 та итерациядан кейинги олинган натижалар келтирилган.

10-жадвал

итерация сони	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
Бошл	20,313	43,750	70,313	15,625	37,500	65,624	60,953	31,250
1	21,094	44,531	71,094	17,188	39,063	67,188	13,281	33,594
10	23,371	47,709	73,371	20,923	44,287	70,923	16,225	37,887
20	23.439	47,874	73,460	21,088	44,524	71,088	16,343	38,053
30	23,493	47,879	73,493	21,094	44,531	71,094	16,350	38,058
аник ечим	23,493	47,879	73,493	21,094	44,531	71,094	16,350	38,058

Тўққизинчи тугундаги u_9 нинг қийматлари мос равишда қуйидаги натижаларга эга: 60.938; 63.281; 66.228; 66.347; 66.350; 66.350.

Қаралган ҳолатдаги тугунлар сони унчалик кўп бўлмаганлиги сабабли, мазкур масалани тўғри чизиклар усулида ҳам ечиш мумкин эди. Бу ечимнинг натижаларини таққослаш мақсадида, улар ҳам юқоридаги жадвалда келтирилди.

11.3. ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ.

Умумий ҳолда масала қуйидагича таърифланади:

Шундай u(x,t) функцияни топиш лозимки, у ирор тўгри тўртбурчакли $S=\{(x,t)/(0\le x\le a),\ (0\le t\le T)\}$

соҳа ичида $u''_{tt} = u''_{xx}$ тенгламани, ҳамда бошланғич ва чегаравий шартлар бўлган қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган бўлсин, яъни:

$$u(x,0)=f(x), \qquad u'_t(x,0) = g(x),$$

$$u(0,t)=\theta(t), \qquad u(a,t)=\bar{\theta}(t).$$

Қадамлари x бўйича h, t бўйича τ бўлган тўрлардаги марказий айирмалар орқали айирмали тенгламага ўтиб, қуйидагина ёзамиз:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\tau^2}$$

Агар $r=\tau/h$ каби белгилаш киритсак, юқоридаги ифодадан $u_{i,j+1}$ ни аниқлаймиз

$$u_{i,j+1} = r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1-r^2)u_{ij} - u_{i,j-1}. \qquad (11.3.1)$$

Масаланинг бу тенглама орқали ечилиши, уч қатламли боғланиш орқали ечилиши деб юритилади, чунки, у тенглама, $u_{i,j}$ нинг учта $j-1,j,j+1$ каби муваққат қатламлардаги қийматлари орасидаги боғланишни ифода этади. Бу боғланиш ёрдамида $u_{i,j}$ нинг қийматлари, u нинг аввалги қатламлардаги қийматлари орқали ифодаланади. Шуни таъкидлаш лозимки, бошқа ҳисоблаш андазаларига асосланган боғланишлар ҳам мавжуд, аммо улар тенгламалар тизимини ечишда катта ҳажмдаги ҳисоблаш ишларини бажаришни тақозо етади.

Тенгламаларни биринчи қатламда ечиш учун одатда, бошланғич шартлардан фойдаланиб, $u_{i,1}=u_{i,0}+\tau g(x)=f(x_i)+ \tau g(x_i)$ ни барча ички тугун нуқталар учун тўғри бўлган чекли-айирмали (11.3.1) ифода ишлатилади. Улар эса ўз навбатида, t_{j+1} даги ечимни t_j ва t_{j-1} даги ечимлар орқали ифодалайдилар. Масаланинг бу тарица қўйилиши, биргаликдаги тенгламалар тизимининг ишлатилмаслигига ва шу билан биргаликда итерация усулларининг ҳам қўлланмаслигига олиб келади. Чекли айирмалар орқали тенгламалар тақрибан ифодаланаётганда h^2 ва τ^2 тартибларда хатоликларга йўл қўйилади, чунки у ерда шундай тартибдаги ҳадлар ташлаб юборилар эди.

Тўрнинг томонлари орасидаги муносабат r миқдор билан аниқланар эдики, у ҳосил қилинган ечимнинг турғунлик ўлчовини ифодалайди. Хатолик қандай ҳосил бўлишидан қатъи назар, агар у вақт ўтиши билан камаймаса, айирмали боғланиш турғун бўлмаган ечимни беради.

Шу сабабли, ҳисоблаш андазаларидан эҳтиётлик билан фойдаланиш лозим.

Агар $r>1$ бўлса, ечим турғун бўлмаган ечим бўлади; агар $r<1$ бўлса, гарчи ечим турғун бўлсада, лекин унинг аниқлиги r нинг кичрая бориши билан камая боради ва ниҳоят, $r=1$ бўлса, ечим турғун бўлиб, у аниқ ечим билан бир хил бўлади. Шунингдек, $r=1$ танловнинг қулайлиги шундаки, (11.3.1) ифода анчагина соддалашади, яъни:

$$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-u_{i,j-1}.$$

Бу формула, ҳамда бошлангич ва чегаравий шартлардан фойдаланиб қаралаётган масаланинг ечимини аниқлаш мумкин.

11.4. ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ

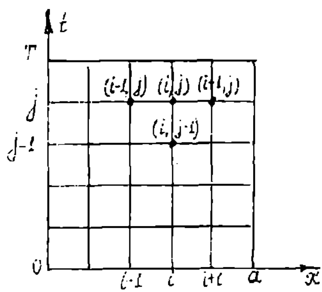
Тўрлар усулининг параболик тенгламаларни ечиш учун қўлланишини баён қилиш мақсадида, қуйидаги энг содда бошланғич-чегаравий масаланинг ечилиш жараёнини ўрганамиз, яъни, шундай бирор $u(x,t)$ функцияни аниқлаш лозимки, у тўғри тўртбурчакли $S=\{(x,t)/(0\leq x\leq a),\ (0\leq t\leq T)\}$ соҳада қуйидаги тенгламани ва қуйидаги берилган бошланғич ҳамда чегаравий шартларни қаноатлантирадиган бўлсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

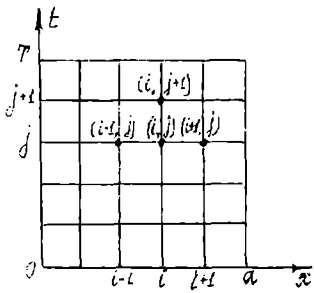
$$u(x,0)=\mu(x),$$

$$u(0,t)=\theta(t), \qquad u(a,t)=\bar{\theta}(t)$$

Қадамлари x бўйича h, у бўйича эса τ бўлган тўрда, айирмали тенгламани икки хил ҳолатда тузиш мумкин (16- ва 17-расмлар).



16-расм



17-расм

Тўрт нуқтали андазадаги тақрибийлаштириш ҳолати ошкормас шаклдаги икки қатламли боғланишга олиб келади (16-расм):

$$ru_{i+1,j}-(1+2r)u_{i,j}+ru_{i-1,j}=-u_{i,j-1}, \qquad r=\tau/h^2.$$

Чегаравий шартлардан ҳосил қилинган

қуйидаги

$$u_{0,j}=\theta(t_j), \qquad u_{n,j}=\bar{\theta}(t_j),$$
$$t_j=j\tau, \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

тенгламалар билан тўлдирилган мазкур боғланиш, r нинг ҳарқандай қийматларида ҳам турғун бўлган ечимга эга тенгламалар тизимини ечишга олиб келади.

17-расмда келтирилган тўрт нуқтали андаза ёрдамидаги тақрибийлаштириш ҳолати, ошкор шаклдаги икки қатламли боғланишга олиб келади:

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (1-2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j}$$

Бу боғланиш фақаттина $r \leq 0.5$ бўлгандагина турғун ечимли тенгламалар тизимига олиб келганлиги сабабли, ҳисоблашларни t бўйича жуда ҳам кичик қадамлар билан бажариш лозим (масалан, $\tau \leq h^2/2$ билан). Бу эса, ўз навбатида, ЭҲМнинг кўп вақти сарф бўлишини талаб этиб, тезлигини ҳам чегаралаб қўяди. Шу сабабли, параболик тенгламаларни ечиш учун ошкор шаклдаги боғланишга нисбатан ошкормас боғланишдан фойдаланиш кенг тарқалган.

11.5. ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ БЎЙИЧА УМУМИЙ ТАВСИЯЛАР.

Ҳар бир хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг ўзига хос хусусиятлари ва бошланғич-чегаравий шартлари, ёки фақат чегаравий шартлари бўлганлиги сабабли, у хилдаги тенгламаларнинг ечилишлари бўйича умумий бир хил тавсиялар бериш амалий жиҳатдан мумкин эмас. Лекин, шу билан бирга қуйида келтирилаётган баъзи тавсияларни эътиборга олиш фойдадан ҳоли эмас деб ҳисоблаймиз.

1. Агар ечимларнинг йўл қўйилиши мумкин бўлган соҳаси тўғри тўртбурчак шаклида бўлиб, масаланинг чегаравий ёки бошлангич-чегаравий шартлари ечимга мос келадиган координата функцияларни танлашга ёки номаълум функцияларни хос функцияларнинг ёйилмаси кўринишида ифодалашга имкон берадиган бўлса, тақрибий-аналитик ечимларни қуриш учун Ритц ёки Бубнов-Галеркин усулларидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

2. Агар ечимларнинг йўл қўйилиши мумкин бўлган соҳаси мураккаб геометрик шаклда бўлса, қаралаётган масалани ечиш учун чекли элементлар усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу усулнинг универсаллиги туфайли, унинг асосида, ЭҲМлар учун шундай дастурлар тузиш имкони туғиладики, улар ёрдамида хилма-хил масалалар ечилади. Лекин, бу усулнинг алгоритмини ЭҲМга киритилишини амалга ошириш мушкул масала бўлиб, у тадқиқотчидан етарлича назарий тайёргарликни, масаланинг барча хилдаги моҳиятларини билишни, ҳамда ЭҲМда ишлашнинг етарлича малакасини талаб этади.

3. Кўп ўлчовли масалани бир ўлчовли масалаларнинг кетма-кетлиги сифатида ечишнинг самарали йўлларидан бири тўғри чизиқлар усулидир. Агар кўп ўлчовли масалага мос келувчи бир ўлчовли масалаларнинг юқори даражадаги аниқлигини таъминлайдиган сонли ёки тақрибий-аналитик ечимларни қуриш мумкин бўладиган бўлса, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тўғри

чизиқлар усули билан ечиш мақсадга мувофиқдир.

4.Фазовий ва вақт координатлари бўйича дискретлаштириш усулларидан энг соддаси-чекли айирмалар усулларидан бири бўлган тўрлар усулидир. Мазкур усулни қўллаб масалани ечишдаги асосий омиллардан бири аниқлик ҳисобланади. Юқори даражадаги аниқлик юз бериши учун қаралаётган соҳада етарлича кичик тўрларни тузиш ёки уни жуда ҳам майда элементларга бўлиш тавсия этилади.

5. Агар қаралаётган ечимлар соҳаси симметрик бўлса, тугунлар сонини икки марта камайтириш, агар ҳар иккала координата ўқларига нисбатан ҳам симметрия мавжуд бўлса, тўрт марта камайтириш имкони туғилади. Бу эса ўз навбатида, ЭҲМнинг вақтини ва хотирасининг ҳажмини тежайди.

6. Масалани самарали ечиш учун, у ердаги ўзгарувчи параметрларнинг бошланғич қийматларини танлаш катта аҳамиятга эга, чунки, итерация усулларининг яқинлашиш тезлиги кўп жиҳатдан ҳам ўша танланган бошланғич қийматларга боғлиқ бўлади.

7. Кўп ҳолларда, масаланинг ечилиш жараёнини босқичма-босқич олиб бориш мақсадга мувофиқдир. Масалан, бирор масалани тўрлар усули билан ечиш лозим бўлса, у ерда дастлабки босқич давомида йирикроқ тўрлар тузилиб, улар орқали етарли даражада яхши яқинлашиш ҳосил қилинади, кейинги босқич давомида эса, нисбатан майдароқ тўрлар тузилиб, улар ёрдамида етарлича аниқликдаги ечим олинади.

ҚЎШИМЧАЛАР.

1. Вариацион ҳисобнинг Эйлер теоремаси.

Вариацион муносабатдан, унга тенг кучли бўлган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага ўтиш жараёни қай тарзда бўлиши масаласини кўриб ўтамиз.

Айтайлик, қуйидаги

$$J = \int_S F(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z)dv + \int_l \left(qu + \frac{\alpha}{2}u^2\right)dl \qquad (1)$$

ифода билан аниқланган функционал қаралаётган бўлсин. Бу ерда:

$u=u(x,y,z)$–ихтиёрий функция, $dv=dxdydz$–ҳажм элементи, l орқали фазовий соҳа чегарасининг бирор қисми белгиланган бўлиб, у ерда u функциянинг қийматлари берилмаган, чегаранинг қолган қисмида эса $u = u_l$.

Ушбу киритилган функционалнинг биринчи вариацияси қуйидагича ёзилади:

$$\delta J = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x}\delta u'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\delta u'_y + \frac{\partial F}{\partial u'_z}\delta u'_z\right)dv + \int_l (q\,\delta u + \alpha u\,\delta u)dl.$$

Агар

$$\delta u'_x = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u),$$

$$\delta u'_y = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\delta u),$$

$$\delta u'_z = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(\delta u)$$

эканликларини эътиборга олсак, юқоридаги вариация қуйидагича ифодаланади:

$$\delta J = \int_S \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\delta u) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial u'_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\delta u)\right]dv + \int_l (q\delta u + \alpha u\delta u)dl \qquad (2)$$

Мазкур ифодадаги биринчи интегралнинг иккинчи, учинчи ва тўртинчи қўшилувчиларини бўлаклаб интегралласак, қуйидагилар ҳосил қилинади:

$$\int_S \frac{\partial F}{\partial u'_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dV = \int_l \frac{\partial F}{\partial u'_x}C_x\delta u dl - \int_S \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)\delta u dV,$$

$$\int_S \frac{\partial F}{\partial u'_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\delta u)dV = \int_l \frac{\partial F}{\partial u'_y}C_y\delta u dl - \int_S \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\delta u dV,$$

$$\int_S \frac{\partial F}{\partial u'_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\delta u)dV = \int_l \frac{\partial F}{\partial u'_z}C_z\delta u dl - \int_S \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_z}\right)\delta u dV,$$

бу ерда, C_x, C_y, C_z лар орқали, сирт ташқи нормалининг координата ўқлари билан ташкил этган бурчакларининг косинуслари белгиланган. Бу ифодаларни (2) га қўйиб, қуйидагича вариацияга эга бўламиз

$$\delta J = \int\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_z} \right) \right] \delta u dV +$$

$$+ \int\limits_l \left[q + \alpha u + C_x \frac{\partial F}{\partial u'_x} + C_y \frac{\partial F}{\partial u'_y} + C_z \frac{\partial F}{\partial u'_z} \right] \delta u dl = 0. \qquad (3)$$

Маълумки, вариацион ҳисобнинг асосий масаласига кўра, бирор $u=u(x, y, z)$ функция, (1) функционалнинг экстремумини ифода этиши учун $\delta J = 0$ бўлиши зарур шарт эди. Ана шу шартга асосланиб айта оламизки, (3) ифоданинг нолга тенг бўлиши $\delta u(x,y,z)$ вариациядаги ихтиёрий қийматлар учун бажарилади. Демак, S соҳанинг барча нуқталарида ҳамда унинг чегараси l нинг бир қисмида қуйидагилар мос равишда бажарилган бўлиши керак бўлади:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial u'_z} = 0, \qquad (4)$$

$$C_x \frac{\partial F}{\partial u'_x} + C_y \frac{\partial F}{\partial u'_y} + C_z \frac{\partial F}{\partial u'_z} + q + \alpha u = 0. \qquad (5)$$

Булардан биринчиси, яъни, (4) тенглама Эйлер тенгламаси деб аталиб, унинг учун (5) тенглик чегаравий шартларни ифода этади. Умуман, қуйидаги Эйлер теоремаси ўринлидир:

Теорема. Агар (4) тенглама (5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ягона ечимга эга бўлса, у ҳолда у ечим (1) функционалнинг экстремумини ифодалайди ва аксинча, агар бирорта функция (1) функционалнинг экстремумини ифодаласа, у функция (5) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи функция бўлиб, (4) тенгламанинг ягона ечими бўлади.

Агар бирор функционал, $u=u(x, y, z)$ функциянинг юқори тартибли ҳосилаларига ҳам боғлиқ бўладиган бўлса, унга ҳам мос бўлган Эйлер тенгламаси худди (4) тенгламага ўхшаш йўл билан ҳосил қилинади. Айнан шу йўсинда, чекли дона функциялар ва уларнинг хусусий ҳосилаларига боғлиқ бўлган функционал учун ҳам Эйлернинг дифференциал тенгламалар тизимини ҳосил қилиш мумкин.

2. Механиканинг вариацион принципга асосланган функционалларини қуриш.

Машинасозлик ва қурилиш конструкциялари элементларининг статикавий масалаларини ечишда, кўпинча, Лагранжнинг вариацион принципи деб аталувчи принципидан фойдаланилади, яъни геометрик шартлар билан келишилган деформацияланувчи жисмнинг барча мумкин бўлган майдонлари ичида шундай майдонлар мавжуд бўлиб, у ерда тўла потенциал энергия функционали ўзининг минимум қийматига эришадиган бўлса, у ҳақиқий ҳисобланади. Бундай деформацияланувчи тизимнинг юкланган ҳолатдаги тўла потенциал энергиясининг функционали қуйидагича аниқланади

$$J = V + \Pi \qquad (1)$$

Материаллар қаршилиги курсидан бизга маълумки, деформацияланувчи жисмнинг потенциал энергияси қуйидагича аниқланар эди, яъни:

$$V = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_s \left(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy}^2 \right) ds \qquad (2)$$

бу ерда,

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \qquad \varepsilon_y = \partial V / \partial y, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Шунингдек, E, μ, $G = E / 2(1+\mu)$лар эластиклик константаларидир.

Ташқи кучлар потенциали эса, қуйидагича аниқланади, яъни:

$$\Pi = -\int_s \left(P_x' u + P_y' V \right) ds \qquad (3)$$

Динамика масалаларида эса функционал қуриш учун Остроградский-Гамильтон принципидан фойдаланилади. У принципга асосан, (1) функционалнинг кўриниши қуйидагича ёзилади:

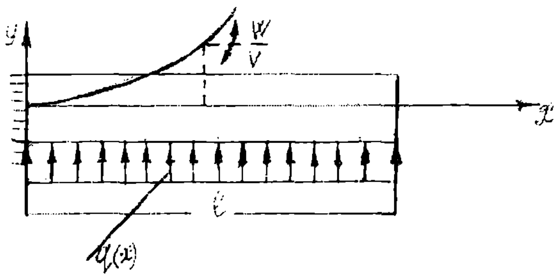
$$J = \int_0^{t_1} (V + \Pi - T) dt, \qquad (4)$$

бу ерда, T - деформацияланувчи жисмнинг кинетик энергиясидир, яъни:

$$T = \frac{m}{2} \int_s \left(u_t'^2 + V_t'^2 \right) ds \qquad (5)$$

Энди текис тақсимланган юк таъсири остида бўлган тўсиннинг кўндаланг эгилиши ҳақидаги масалани кўриб ўтамиз.

Айтайлик юкнинг миқдори q га тенг бўлиб, у W мусбат силжишлар томонига йўналган бўлсин (18-расм). У ҳолда, ташқи кучларнинг потенциали қуйидагича ёзилади:



18 - расм.

$$П = -\int_0^l qWdx. \qquad (6)$$

Текис кесимлар гипотезасига асосан, тўсиннинг эгилишидаги ўқ бўйлаб силжишлар, $u = -yW'$ каби тенглик билан аниқланганлиги сабабли қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -yW'', \qquad \sigma_x = E\varepsilon_x = -yEW'' \qquad (7)$$

Агар нормал σ_y зўриқишни σ_x зўриқишга нисбатан кичик деб фараз қилиб, уни эътиборга олмасак, потенциал энергия учун қуйидаги ифодага эга бўламиз (бу ерда, $\tau_{xy} = 0$ деб оламиз, чунки, текис кесимлар гипотезасидан фойдаланамиз):

$$V = \frac{1}{2}\int\limits_s \sigma_x \varepsilon_x dS = \frac{E}{2}\int\limits_s \varepsilon_x{}^2 dx.$$

Агар юқоридаги ифодада ε_x нинг ўрнига (7) формуладан унинг қийматини қўйсак, қуйидагини ёзиш мумкин бўлади:

$$V = \frac{E}{2}\int_0^l W''^2_{xx}\left[\int_F y^2 dF\right]dx.$$

Квадрат қавс ичидаги интеграл, тўсиннинг кўндаланг кесимининг юзаси бўйича интегралланган бўлиб, унинг қиймати тўсин кесимининг инерция моментига тенг ва у $\bar{J}$ каби белгиланади. Агар $E\bar{J} = G$ каби белгилаш киритсак, у ҳолда, қуйидагини ёзамиз

$$V = \frac{G}{2}\int_0^l W''^2_{xx} dx. \qquad (8)$$

Шундай қилиб, (1), (6) ва (8)ларни эътиборга олсак, қурилиши лозим бўлган функционал ҳосил бўлади

$$J = \int_0^l \left(\frac{G}{2}W''^2_{xx} - qW\right)dx. \qquad (9)$$

Ушбу функционалнинг биринчи вариациясини ҳисоблаб, уни нолга тенглаштирамиз, яъни:

$$\delta J = \left(GW''_{xx}\delta W''_{xx} - GW'''_{xxx}\delta W\right)\Big|_0^l + \int_0^l \left(GW^{IV}_{xxxx} - q\right)\delta W = 0.$$

Бундан эса, тўсиннинг кўндаланг эгилиши ҳақидаги масаланинг дифференциал тенгламаси - Эйлер тенгламаси ҳосил бўлади

$$GW^{IV}_{xxxx} - q = 0. \qquad (10)$$

Тўсиннинг кўндаланг тебраниши қараладиган бўлса, (4) га асосан, қуйидаги функционални ҳосил қиламиз:

$$J = \int_0^{T_1}\int_0^l \left(\frac{G}{2}W''^2_{xx} - \frac{m}{2}W'^2_t - qW\right)dxdt. \qquad (11)$$

Бу ҳолда кинетик энергия

$$T = \frac{m}{2}\int_0^l W'^2_t dx \qquad (12)$$

формула билан ҳисоблангани учун текшириш унчалик қийин эмаски, (11) функционалнинг Эйлер тенгламаси, тўсиннинг кўндаланг тебраниши ҳақидаги масаланинг тенгламасига келтирилади.

Энди юпқа пластинканинг кўндаланг эгилиши, ҳамда тебраниши ҳақидаги масалани кўриб ўтамиз.

Айтайлик, қалинлиги h бўлган пластинкани тўғри бурчакли ХОУ координаталар тизимида шундай жойлаштирамизки, координата текислиги билан пластинканинг ўрта текислиги устма-уст тушадиган бўлсин. Юпқа пластинкаларнинг текис кесимлар гипотезасига кўра, пластинканинг деформацияланмаган ўрта текислигига ўтказилган нормал, пластинка эгилганда ҳам қийшаймасдан яна деформацияланган ўрта текисликка нормаллигича қолаверади. Материаллар қаршилигидан маълумки, бу ҳолда деформациянинг компоненталари қуйидагича аниқланар эди:

$$\varepsilon_x = -zW''_{xx}, \quad \varepsilon_y = -zW''_{yy}, \quad \sigma_{xy} = -2zW''_{xy}.$$

У ҳолда (2) га асосан:

$$V = \int_0^a\int_0^b\left\{\left[W''^2_{xx} + 2\mu W''_{xx}\cdot W''_{yy} + W''^2_{yy} + 2(1-\mu)W''^2_{xx}\right]\cdot\left(\frac{E}{2(1-\mu^2)}\int_{-h/2}^{h/2} z^2dz\right)\right\}dxdy.$$

Агар оддий қавс ичидаги интегрални интеграллаб, пластинканинг цилиндрик мустаҳкамлиги деб аталувчи катталик бўлган

$D = \left(Eh^3\right)/12\left(1-\mu^2\right)$ белгилашни киритсак, у ҳолда

$$V = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(W''_{xx} + W''_{yy}\right)^2 + 2(1-\mu)\left(W''^2_{xy} - W''_{xx}\cdot W''_{yy}\right)\right]dxdy. \quad (13)$$

Ташқи кучларнинг потенциал ва кинетик энергиялари мос равишда қуйидагича аниқланади:

$$\Pi = -\int_0^a\int_0^b qWdxdy, \qquad (14)$$

$$T = \frac{m}{2}\int_0^a\int_0^b W_t'^2dxdy, \qquad (15)$$

бу ерда, q - пластинкага таъсир этувчи текис тақсимланган сирт юки, m - пластинка массаси.

Тўла потенциал энергияни, яъни, қурилиши лозим бўлган функционални топиш учун (13) билан (14) ифодаларни ҳадлаб қўшиб чиқамиз, у ҳолда:

$$J = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(W''_{xx} + W''_{yy} \right)^2 + 2(1-\mu) \cdot \left(W''^2_{xy} - W''_{xx} W''_{yy} \right) \right] - qW \right\} dxdy. \quad (16)$$

Агар (13) - (15) ифодаларни (4) га қўйсак, қуйидаги функционални ҳосил қиламиз

$$J = \int_{t_0}^{T_1} \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(W''_{xx} + W''_{yy} \right)^2 + 2(1-\mu) \cdot \left(W''^2_{xy} - W''_{xx} W''_{yy} \right) \right] - \frac{m}{2} W_t'^2 - qW \right\} dxdydt. \quad (17)$$

Функционал экстремуми мавжудлигининг зарурий шартига асосан, (16) ва (17) функционалларнинг вариацияларини нолга тенглаштириб, юпқа пластинканинг эгилиши, ҳамда кўндаланг тебраниши ҳақидаги масалалар учун дифференциал тенгламалар ҳамда уларнинг чегаравий ва бошланғич-чегаравий шартларини ҳосил қиламиз.

Хулоса қилиб айтганда, механиканинг вариацион принципига асосланиб, машинасозлик ва қурилиш конструкцияларининг ҳар хил масалаларини ечиш учун функционаллар қуриш мумкин экан. Тўла потенциал энергия функционалининг экстремумига асосланган, деформацияланувчи жисм механикасининг масалаларини ечиш усуллари энергетик усуллар деб юритилади.

3. Функционалларнинг қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг вариацион принципи асосида қурилиши.

Материалларнинг қайишқоқ эгилувчан

сўндиргичлик қобилияти машинасозлик конструкциялари элементларининг динамикасида жуда ҳам муҳим ўринга эга. У эркин тебранишларнинг кучли заифлашувига, ҳамда мажбурий тебранишлар амплитудаларининг сезиларли даражада пасайишига олиб келади. Шу сабабдан, машинасозлик конструкциялари элементларининг динамикавий масалаларини математик жиҳатдан тўғри моделлаштириш, ҳамда уларни ечиш учун самарали усулларни ишлаб чиқиш каби муаммолар муҳандислик амалиётидаги энг муҳим муаммолардан бири ҳисобланади.

Қайишқоқ эгилувчан материаллардан ясалган машинасозлик конструкциялари элементларининг ҳар хил динамикавий ва квазистатикавий масалаларини ечиш учун вариацион принципга асосланган J_b белги билан белгиланадиган функционални киритамиз. Уни киритишда худди идеал эгилувчан тизимларда фойдаланиш учун қурилган тўла энергия функционалига ўхшаш усулдан фойдаланамиз, яъни:

а) квазистатика ҳолида

$$J_b = J - V_1 \qquad (1)$$

б) динамикавий ҳолда

$$J_b = \int_0^{T_1} \left(J - V_1 - T \right) dt \qquad (2)$$

Бу ердаги V_1, шартли равишда, қайишқоқ потенциали деб аталади ва у қуйидагича ёзилади

$$V_1 = \int_s \left(\sigma_x^* \varepsilon_x + \sigma_y^* \varepsilon_y + \tau_{xy}^* \gamma \varepsilon_{xy}\right) ds, \tag{3}$$

бу ерда:

$$\sigma_x^* = \frac{E}{1-\mu^2} R^* (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y^* = \frac{E}{1-\mu^2} R^* (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{2}{2(1+\mu)} R^* \gamma_{xy},$$

$$R^* f = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

ҳамда *R(t)* релаксация ядроси деб юритилади.

Биринчи мисол сифатида, текис тақсимланган юк таъсири остидаги қайишқоқ эгилувчан тўсиннинг кўндаланг эгилиши ва тебраниши ҳақидаги масалаларни келтирамиз. Агар бу ерда ҳам 2-қўшимчадаги қилинган фаразлардан фойдалансак, у ҳолда, қуйидагиларни ёзиш мумкин бўлади:

$$V_1 = \int_0^l \sigma_x^* \varepsilon_x dx = \int_0^l (E\bar{J}R^* W''_{xx}) W''_{xx} dx = \int_0^l (GR^* W''_{xx}) W''_{xx} dx \tag{4}$$

Ушбу (4) ифодани аввал (1) га , кейин эса (2) га қўйиб, 2-қўшимчадаги аввал (9) формулани, кейин эса (9) билан (12) формулаларни эътиборга олсак, мос равишда, қайишқоқ эгилувчан тўсиннинг кўндаланг эгилиши, ҳамда кўндаланг тебраниши ҳақидаги масалаларга мос келувчи функционалларни ҳосил қиламиз, яъни:

$$J_b = \int_0^l G[W''_{xx}(\frac{1}{2}W''_{xx} - R^* W''_{xx}) - qW]dx \quad (5)$$

$$J_b = \int_0^T \int_0^l G[W''_{xx}(\frac{1}{2}W''_{xx} - R^* W''_{xx}) - \frac{m}{2}W_t'^2 - qW]dxdt \quad (6)$$

Юқоридаги (5) ва (6) функционалларнинг экстремумга эришишларининг зарурий шартидан фойдаланиб, мос равишда қуйидаги Эйлер тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$G(1 - R^*)W^{IV}_{xxxx} - q = 0 \quad (7)$$

$$mW''_{tt} + G(1 - R^*)W^{IV}_{xxxx} - q = 0 \quad (8)$$

Иккинчи мисол сифатида қайишқоқ эгилувчан тўғри бурчакли пластинканинг кўндаланг эгилиши ва кўндаланг тебраниши ҳақидаги масалаларнинг функционаллари ва уларга мос келувчи Эйлер тенгламаларини қараймиз.

Тўсин учун қандай амаллар бажарилган бўлса, худди ушандай амалларни қайишқоқ эгилувчан тўғри тўртбурчакли пластинка учун ҳам бажариб, пластинканинг кўндаланг эгилиши ҳамда кўндаланг тебраниши ҳақидаги масалалар учун қуйидаги мос функционалларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} J_b = \int_0^a \int_0^b \Big\{ \frac{G}{2}\Big[\left(W''_{xx} + W''_{yy}\right)^2 + 2(1-\mu)\left(W''^2_{xy} - W''_{xx} \cdot W''_{yy}\right)\Big] - \\ - \left(M^*_x W''_{xx} + M^*_y W''_{yy} + 2M^*_{xy} W'_x + qW\right)\Big\} dx\,dy, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} J_b = \int_0^T \int_0^a \int_0^b \Big\{ \frac{G}{2}\Big[\left(W''_{xx} + W''_{yy}\right)^2 + 2(1-\mu)\left(W''^2_{xy} - W''_{xx} \cdot W''_{yy}\right)\Big] - \\ - \left(M^*_x W''_{xx} + M^*_y W''_{yy} + 2M^*_{xy} W''_{xy} + \frac{m}{2}W_t'^2 + qW\right)\Big\} dx\,dy, \end{aligned} \quad (10)$$

бу ерда:

$$M_x^* = GR^*(W_{xx}'' + \mu W_{yy}''),$$

$$M_y^* = GR^*(W_{yy}'' + \mu W_{xx}''),$$

$$M_{xy}^* = (1-\mu)GR^* W_{xy}'',$$

$$G = h^3 / 12(1-\mu^2).$$

Булардан эса, (9) билан (10) функционалларга мос келувчи Эйлер тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$G(1-R^*)\Delta^2 W = q, \qquad (11)$$

$$mW_{tt}'' + G(1-R^*)\Delta^2 W = q, \qquad (12)$$

бу ерда, $\Delta^2 W = W_{xxxx}^{IV} + 2W_{xxyy}^{IV} + W_{yyyy}^{IV}$.

Таъкидлаш лозимки, квазистатика ҳамда динамиканинг масалаларида юқоридаги функционалларни минимизациялаш учун чекли элементлар усулининг қўлланиши мос равишда қуйидаги интеграл ва интеграл - дифференциал тенгламалар тизимларини ечишга олиб келади, яъни

$$K(1-R^*)u(t) = \theta(t), \qquad (13)$$

$$Mu_{tt}'' + K(1-R^*)u(t) = F(t) \qquad (14)$$

бу ерда, M - масса матрицаси, K - мустаҳкамлик матрицасидир.

Юқоридаги (13) билан (14) тенгламалар тизимларини берилган бошланғич шартлар билан биргаликда ечилиш усулларини эса биз аввалги бобларда ўрганган эдик.

4. Математик моделлаштиришнинг ҳозирги замон муаммолари ва муҳандислик конструкцияларининг ноэгилувчан элементларини ЭҲМда ҳисоблаш усуллари.

Наслий деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг назарий ва амалий йўналишлари соҳасида кейинги йилларда анчагина муваффақиятларга эришилди. Лекин, шу билан бирликда, замонавий техниканинг ривожи муносабати билан вужудга келувчи масалалар ҳамда муҳандислик амалиётида композит материалларнинг қўлланилиши кабилар ва бошқа омиллар, бир қатор янги ва муҳим, ҳамда қийин муаммоларни келтириб чиқарди.

Кейинги йиллардаги илмий тадқиқотларнинг характерли томони шундан иборатки, бир томондан, қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг асосий масалаларини ечиш бўлса, иккинчи томондан, амалиёт учун муҳим аҳамиятга эга бўлган, ҳамда турли хил жисмларнинг ўзларига хос хусусиятларини ва ўзаро таъсирларини тўла ҳисобга оладиган масалаларнинг сафини сезиларли даражада кенгайтириш ва уларни текширищдан иборатдир.

Биз бу бандда, математик моделлаштириш, ҳамда ЭҲМда ҳисоблаш усуллари борасидаги, бизнинг назаримизда, ҳали етарлича ўрганилмаган, лекин назариянинг ривожи ва муҳандислик муаммоларининг амалий тадқиқотлари учун муҳим ҳисобланган илмий йўналишларнинг айримларини баён этамиз.

1) Наслий чизиқли қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг кўплаб муаммолари ҳал этилган бўлсада, лекин у ҳали ўзининг фундаментал аҳамиятини йўқотганича йўқ. Мазкур назария ривожининг асосий йўналишларидан айримлари қуйидагилардан иборат: бурчаксимон қирралар ва

қирқимларни, кучланишлар тўпланишини ва бошқа хусусиятларни ўзида мужассамлантирган мураккаб шаклдаги соҳа ва жисмлар учун текис ва фазовий масалаларни ечиш; кучсиз сингуляр интеграл ва интеграл-дифференциал тенгламаларнинг ҳар хил ечилиш усуллари билан бирликда, қайишқоқ эгилувчан тизимларга доир турғунлик назариясининг статика ҳамда динамика масалаларини ечишнинг ҳам турли хил усулларини ривожлантириш; мураккаб шаклдаги металл қолиплар билан ўзаро таъсирда бўлган қайишқоқ эгилувчан жисмлар анизотропиясини, ҳамда биржинслимасликнинг ҳар хил геометриясини ҳисобга олиш; контакт масалаларининг тадқиқи; юпқа деворли ҳар хил қурилмалар элементларининг мақбуллаштириш масалалари; қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг турли хилдаги синфларини ифода этувчи масалаларни математик жиҳатдан тўғри моделлаштириш, ҳамда у масалаларни ечишнинг турли хил самарали усулларини ривожлантириш.

2) Ночизиқли қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг турли хил масалаларини ечиш учун янги самарали усулларни яратиш борасидаги тадқикот ишлари қуйидагилардир: чегараланган соҳалардаги чекли деформацияларнинг локаллаштирилишини инобатга оладиган масалаларнинг ечилиш усулларини ишлаб чиқиш; эгилувчанлик модулининг қийматлари билан ўзаро ўлчовдош бўлиб, кучланишлар ҳолатидаги қайишқоқ эгилувчан тизимларнинг турғунлик назариясини ишлаб чиқиш; ночизиқли қайишқоқ эгилувчан қобиқлар назариясининг чегаравий масалаларини бевосита уч ўлчовли қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг чегаравий масалалари асосида келтириб чиқариш ва у жараённи асослаш, ҳамда унинг қўлланиш чегарасини аниқлаш; кенг туркумдаги чегаравий шартлар учун қайишқоқ

эгилувчан пластинка ва қобиқлар назариясининг чегаравий масалаларини математик таҳлил этиш (хусусан, ҳеч қанақа геометрик шартларга бўйсунмайдиган эркин тебранишли пластинка ва қобиқлар ҳақидаги масалаларнинг мавжудлик теоремалари); мустаҳкамлик қирралари билан бириктирилган ва қаттиқ жисмлар билан туташ бўлган қайишқоқ эгилувчан пластинка ва қобиқлар назариясининг ночизиқли чегаравий масалаларининг қўйилиши. Ночизиқли қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг ва айниқса, унинг амалиётдаги татбиқларининг бундан кейинги ривожи, кўп жиҳатдан, уларни аниқловчи муносабатларга кирадиган функция ва константалар ҳақидаги тажрибавий ахборотларнинг мавжудлигига, ҳамда у ёки бошқа муайян ҳолатлардаги ўша муносабатларнинг тажрибага асосланиб танланишлигига боғлиқдир. Шунинг учун, мазкур назариянинг энг асосий масалаларидан бири, кўрсатилган ахборотни ҳосил қилишни таъмин этадиган кенг қамровли, ҳамда бир мақсад томон йўналтирилган тажрибавий тадқиқотлар тизимини ўтказишдан иборатдир.

3) Машиналар, конструкциялар ва иншоотларнинг ўлчамлари ва оғирликларини камайтириш муаммолари, ҳамда уларнинг мустаҳкамлик хусусиятларига қўйиладиган талаблар билан биргаликда мавжуд материалларнинг хоссаларини тўла ва мутаносиб ҳисобга оладиган ҳисоблаш усулларини яратиш зарурлигини тақозо этадики, улар эса ўз навбатида, тадқиқотчиларнинг эътиборини бир жинсли бўлмаган қайишқоқ эгилувчан жисмларга доир масалаларга жалб этади.

Бир жинсли бўлмаган қайишқоқ эгилувчан жисмлар назариясининг бундан кейинги ривожига доир тадқоқотлар ҳақида сўз юритилар экан, энг аввало шуни таъкидлаш лозимки, бу ерда қараладиган масалалар, яъни, коэффициентлари ўзгарувчи хусусий ҳосилали интеграл-дифференциал тенгламалар учун қўйиладиган чегаравий ва бошланғич-чегаравий масалаларга нисбатан анча мураккабдир. Шу боисдан, ҳозиргача ечилган масалалар координаталар ҳамда вақтга нисбатан аниқ ва етарлича содда боғланишдаги қайишқоқ эгилувчан моделларнинг энг содда геометрик шаклдаги жисмларигагина тааллуқлидир. Ушбу назариянинг бош масалаларидан яна бири - етарлича умумий биржинсли бўлмаган хоссаларга эга қайишқоқ эгилувчан жисмларнинг ҳар хил синфларга мансуб бўлган масалаларини ечишнинг умумий самарали усулларини ишлаб чиқиш ҳисобланади. Шунингдек, жисмларнинг биржинсли бўлмаган қайишқоқ эгилувчанлик хусусиятлари билан ташқи майдонлар мавжудлиги шартланган туркум масалаларни ечишнинг ҳар хил усулларини яратиш даркор.

Хусусан, ҳарорат ўзгарганда материалнинг иссиқлик физикаси, ҳамда қайишқоқ эгилувчанлик хусусиятларининг ўзгаришини ҳисобга оладиган термоқайишқоқ эгилувчанлик масалаларининг ечилиш усулларини ишлаб чиқиш лозим.

4) Қайишқоқ эгилувчан материалдан ясалган юпқа деворли ҳар хил конструкциялар элементларининг назариясида олиб борилаётган фаол илмий тадқиқотларга қарамасдан, ҳали у ерда ҳал қилинмаган муаммолар талайгина. Масалан: пластинка ва қобиқларнинг ночизиқли қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг масалаларини ечиш усулларини ишлаб чиқиш; кучлар, ҳамда ҳароратлар таъсири остида бўлиб, ўзгарувчан қаттиқликка эга бўлган юпқа деворли қайишқоқ эгилувчан стержен, пластинка ва қобиқларни ҳисоблашнинг самарали усулларини яратиш; ҳам тирқишлар ёрдамида сусайтирилган қобиқларни, ҳам локал юк таъсири

остида бўлган қобиқларни ҳисоблашнинг амалий жиҳатдан қулай усулларини ишлаб чиқиш; қайишқоқ эгилувчан материалдан ясалган ва минимал оғирликда бўлган юпқа деворли конструкциялар ҳисобининг энг мақбул усулларини ишлаб чиқиш; қайишқоқ эгилувчан тизимларнинг ночизиқли тебранишларининг квазистатикавий, ҳамда динамикавий турғунликларини йўқотиш назариясининг бундан кейинги ривожланиши каби муаммолардир.

Хилма-хил материаллар деформацияланишининг динамикавий жараёнларини математик ифодалаш борасида, ҳамда наслий қайишқоқ эгилувчанлик назарияси соҳасида, тадқиқотчиларнинг олдида кенг имкониятлар мавжуд. Лекин, бу имкониятларни амалга ошириш мутаносиб математик аппарат йўқлиги сабабли анча қийин. Шунинг учун ҳам, материалнинг ҳақиқий механик хоссаларини математик ифода этадиган рационал моделларни яратиш, ҳамда наслий қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг ҳар хил динамикавий масалаларини ечиш учун мутаносиб ҳисоблаш алгоритмларини ишлаб чиқиш каби масалалар қайишқоқ эгилувчанлик назариясининг энг муҳим масалаларидан ҳисобланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР.

1. Адҳамов М., Отабоев Т. Планлаштиришда математик методларни қўллаш. Тошкент, «Ўқитувчи», 1982.
2. Бадалов Ф.Б. Численные методы решения инженерных задач на ЭВМ. Ташкент, ТашПИ, 1987.
3. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент «Меҳнат», 1987.
4. Бадалов Ф.Б., Шодмонов Ғ. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар орқали моделлаштириладиган айрим муҳандислик масалалари ва уларни ЭҲМда ечиш усуллари. Тошкент, «Фан» нашриёти, 1991.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Н.П. Численные методы. М., «Наука», 1987.
6. Бадалов Ф.Б. Оптимизация назарияси ва математик программалаш. Тошкент, «Ўқитувчи», 1989.
7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М. «Наука», 1970.
8. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1988.
9. Краскевич В.Е., Зелинский К.Х., Гречко В.И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев, ВШ, 1986.
10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М., «Наука»,1966.
12. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. М., ВШ, 1985.
13. Собиров М.А. Математика фанларидан ўзбекча-русча луғат. Тошкент, «Ўқитувчи», 1984.
14. Тихонов А.М Самарский А.А. Уравнения

математической физики. М., Главиздат, 1977.
15. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т.2. М., ВШ, 1978.
16. Шуп Т. Решения инженерных задач на ЭВМ. М., «Мир», 1982.
17. Қобулов В.Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. Тошкент, «Ўқитувчи», 1976.
18. Қобулов В.Қ. Оптимал планлаштириш масалалари. Тошкент, «Фан», 1975.
19. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.

МУНДАРИЖА

Изоҳлар учун

Изоҳлар учун