

Д.Е. ИСКРА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И УПРАВЛЕНИЕ
ДВИЖЕНИЯМИ
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ОБОРУДОВАНИЯ**



МОСКВА НАУКА 2006

УДК 621.9
ББК 34.6
И86

Рецензенты:

доктор технических наук *М.Г. Косов*,
доктор технических наук *В.Г. Митрофанов*

Искра Д.Е.

Моделирование и управление движениями формообразования технологического оборудования / Д.Е. Искра. – М. : Наука, 2006. – 109 с. – ISBN 5-02-034131-2.

В монографии предложен новый подход к моделированию погрешностей, возникающих при обработке плоских поверхностей и цилиндрических отверстий у корпусных деталей, который заключается в представлении их как геометрических объектов. На примере фрезерования и растачивания описаны методы моделирования формообразования. Дан анализ существующих средств компьютерной диагностики и практические рекомендации по обработке экспериментальных данных. Изложена теория определения регламентированных показателей точности.

Для инженерно-технических работников, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

ISBN 5-02-034131-2

© Искра Д.Е., 2006

© Редакционно-издательское оформление.
Издательство «Наука», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Моделирование движений формообразования	6
1.1. Задачи моделирования.	6
1.2. Применение винтового исчисления при моделировании макрогеометрии (на примере фрезерования и растачивания)	8
1.2.1. Торцевое фрезерование плоских поверхностей	8
1.2.2. Моделирование растачивания цилиндрических поверхностей	29
Глава 2. Экспериментальные исследования точности формообразования и разработка устройств управления формообразующими траекториями	47
2.1. Экспериментальное построение геометрического образа детали	47
2.2. Экспериментальные измерения траекторий формообразующих элементов на токарном станке	62
2.3. Разработка устройств управления формообразующими траекториями токарного станка	81
Глава 3. Выбор оптимальных параметров технологических операций	89
3.1. Формирование критерия оптимальности	89
3.2. Оптимизация технологического процесса	93
3.3. Параметрическая оптимизация технологического перехода	96

Современный этап развития машиностроения характеризуются значительным ростом объема производства, номенклатуры и резким повышением требований к качеству изделий.

Создание прочной материально-технической базы, прогресс научных исследований, обеспечение возрастающих потребностей общества в основе своей предусматривают непрерывное повышение качества и производительности всех без исключения видов технологических процессов.

Автоматизации и управлению технологическими процессами и производствами отводится особо важная роль, так как именно этой отрасли науки и производства приходится непосредственно заниматься решением актуальных задач в машиностроении, имеющем значительный удельный вес в экономике всей страны.

В общем объеме механической обработки на долю изготовления корпусных деталей и деталей типа тел вращения приходится около 35%. Технологические возможности станков в обеспечении качества обработки зависят прежде всего от траекторий формообразующих элементов. В процессе обработки детали станок подвергается интенсивному воздействию целого комплекса эксплуатационных нагрузок, имеющих случайную природу, вследствие чего траектории формообразующих элементов изменяются в широких пределах, что, в свою очередь, ведет к изменению формы детали и ее показателей точности. Опыт эксплуатации станков показывает, что наибольшее влияние на точность обработки деталей оказывают динамические процессы, изменяющееся тепловое состояние станка и износ основных узлов.

В последнее время разработана методика экспериментальных исследований, когда на основе измерения траекторий оси детали и вершины инструмента строится виртуальная деталь, по которой определяются необходимые показатели точности.

Использование этого способа делает возможным с высокой точностью контролировать изменение траекторий формообразующих элементов и разрабатывать методы воздействия на технологическое оборудование с целью повышения точности обработки деталей.

Траектории формообразующих элементов зависят от многих конструкционных, технологических и эксплуатационных факторов, а следовательно, их можно изменять, используя различные виды воздействия.

Таким образом, разработка методов и устройств, позволяющих моделировать и управлять траекторией формообразующих элементов при обработке, является актуальной проблемой, имеющей важное производственное значение.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

1.1. ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 1.1 технологическая система изображена в виде ориентированного объекта. Выходами объекта являются следующие группы показателей:

- характеризующие деталь, к которым относятся показатели размерной точности, например A_d , и показатели качества поверхностного слоя, например шероховатость поверхности R_a ;
- характеризующие процесс обработки (резания), например скорость размерного износа q , сила резания P , мощность резания N ;
- критерий оптимальности θ .

В случае необходимости к перечисленным показателям можно добавить и ряд других, например машинное время, штучное время, производительность, надежность и т.д.

Входами объекта являются следующие группы переменных:

- возмущающие переменные, к которым относятся показатели размерной точности полуфабриката, поступающего на обработку, например припуск Z , и показатели качества поверхностного слоя полуфабриката, например твердость H ;
- управляющие переменные, к которым относятся режим обработки, например скорость резания V , подача S , параметры настройки, например размер статической настройки A_s ;
- конструктивные переменные, например диаметр растачиваемого отверстия в детали, диаметр фрезы и т.п.

Возмущающие переменные, как правило, суть случайные величины (векторы), конкретные значения которых априори неизвестны. Отсюда выходы объекта являются функциями случайных величин, т.е. они сами случайны. Кроме того, множество трудно поддающихся учету факторов делают сами зависимости между выходами и входами случайными [1].

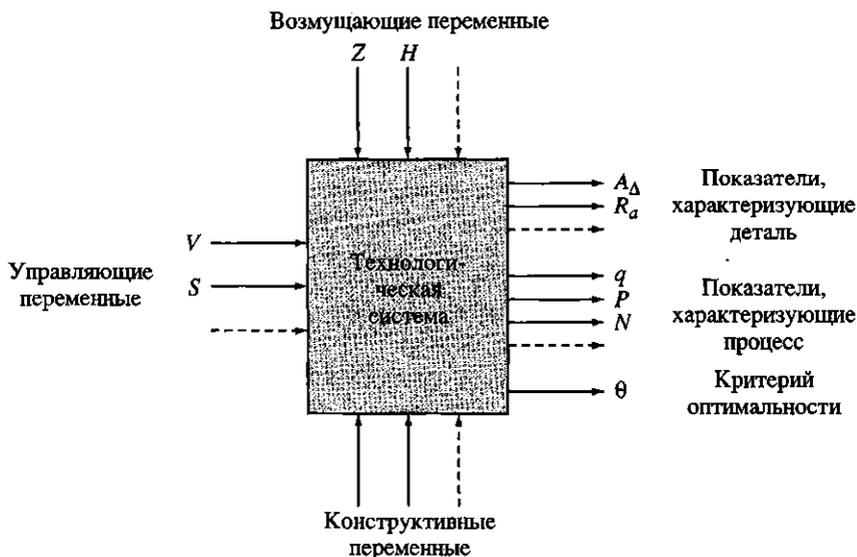


Рис. 1.1. Технологическая система как управляемый ориентированный объект

Под моделированием будем понимать математическое описание процессов обработки, помогающее анализировать их и делать разумные предсказания.

Следуя [20], под анализом процессов будем понимать применение научных методов при постановке задач и нахождении способов их решения. Анализ процессов включает в себя:

- 1) математическую формулировку задачи для заданной физической ситуации,
- 2) детальное рассмотрение с целью построения математической модели,
- 3) синтез и описание результатов для достижения полного понимания процесса.

Возможны два принципиально различных подхода к изучению явления.

Первый подход – аналитический, основан на применении фундаментальных физических законов (уравнения Ньютона, Максвелла и т.п.). Такой подход возможен в случаях, когда явление достаточно простое или представляет собой простое объединение простых явлений. Подобные задачи встречаются в основном при изучении идеализированных явлений. Например, моделями явлений переноса служат феноменологические уравнения обмена, т.е. уравнения непрерывности, описывающие сохранение массы, импульса и энергии.

Второй подход – экспериментальный. Задача исследователя в этом случае состоит в выдвижении гипотезы или ряда конкурирующих гипотез и в подтверждении или выборе одной из них. Выдвижение гипотез основано на априорной информации о характере изучаемого явления. Экспериментальный подход используется при описании сложных многофакторных явлений [12].

Рассматриваемый нами технологический процесс и является примером сложной, плохо организованной, диффузной системы. Процессы в таких системах воспроизводимы, а следовательно, сравнимы лишь статистически. Это объясняется сложностью физических процессов взаимодействия инструмента с обрабатываемой деталью, а также обилием неподдающихся учету факторов: температура окружающей среды, зоны резания, заготовки; разнородность химического состава материала заготовки; исходное состояние режущего инструмента; состав применяемой смазочно-охлаждающей жидкости и т.д.

Экспериментально-статистический метод не исключает применения аналитических построений, например, при создании размерных моделей.

В условиях многономенклатурного производства, которое рассматривается в настоящей работе, необходимо разумное сочетание аналитических и экспериментальных методов при моделировании, так как чисто экспериментальные методы, очевидно, не могут применяться в силу высокой удельной (на единицу продукции) стоимости эксперимента, а чисто аналитические – в силу малой точности, например, при определении сил резания или скорости износа режущего инструмента.

В следующих параграфах взаимодействие аналитических и экспериментальных методов рассмотрено на конкретных примерах.

1.2. ПРИМЕНЕНИЕ ВИНТОВОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МАКРОГЕОМЕТРИИ (НА ПРИМЕРЕ ФРЕЗЕРОВАНИЯ И РАСТАЧИВАНИЯ)

1.2.1. Торцевое фрезерование плоских поверхностей

Прежде всего, необходимо определить плоскую поверхность детали как некоторый математический объект. Плоскость, как известно из аналитической геометрии, определяется тремя параметрами, которые можно выбрать разными способами. На чер-

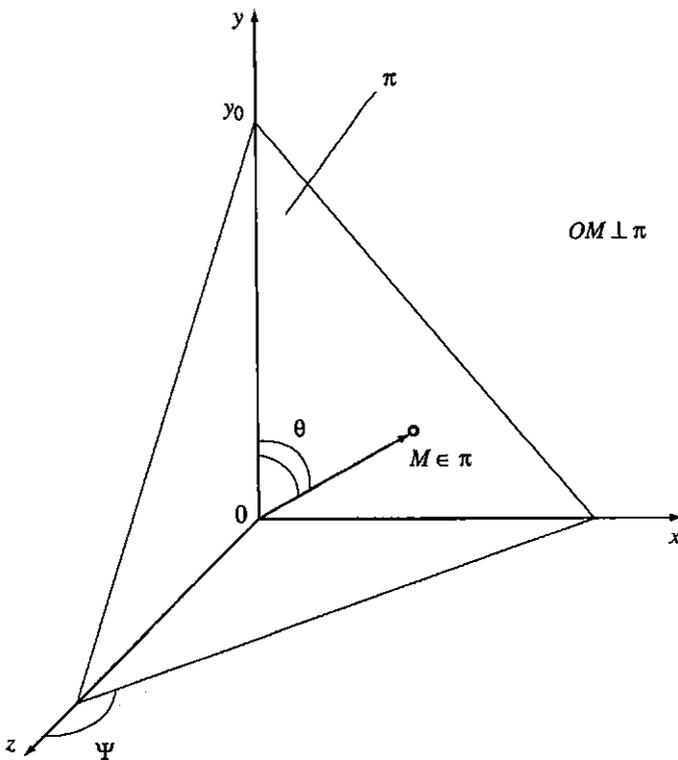


Рис. 1.2. Случайные параметры, характеризующие положение плоскости

тежах плоскость обычно задается расстоянием и допуском на него от другой плоскости, принятой за базу, а также допускаемой величиной непараллельности относительно базовой плоскости. В соответствии с этим определим положение плоской поверхности π следующими тремя величинами (рис. 1.2):

y_0 – координата пересечения плоскости с осью y ;

θ – угол между плоскостью π и координатной плоскостью zOx ;

ψ – угол между осью z и линией пересечения плоскостей π и zOx , т.е. направлением непараллельности.

Эти три параметра задают положение плоской поверхности естественным с точки зрения чертежа образом.

Величины y_0 , θ и ψ случайные, так как положение любого элемента формы детали случайно. С вероятностной точки зрения случайная величина полностью характеризуется своей плот-

ностью распределения. Будем считать известными плотности распределения величин y_0 , θ и ψ . Они суть $f(y)$, $f(\theta)$ и $f(\psi)$, причем, так как направление непараллельности обычно не задается, угол ψ можно считать распределенным равномерно в интервале $[0, \pi]$.

Выведем уравнение плоскости π в зависимости от указанных параметров. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $(0; 0; y_0)$, будет

$$y - y_0 = UZ + VX. \quad (1.1)$$

Косинус угла между плоскостью (1.1) и координатной плоскостью zOx имеет вид

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{U^2 + V^2}}, \quad (1.2)$$

а косинус угла между положительным направлением оси z и линией пересечения плоскости π с плоскостью zOx –

$$\cos \psi = -\frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}}. \quad (1.3)$$

Решая совместно уравнения (1.2) и (1.3) относительно параметров U и V , получаем

$$U = \frac{\sin \psi}{\cos \theta}, \quad V = -\frac{\cos \psi}{\cos \theta}.$$

Отсюда уравнение плоскости π можно записать следующим образом:

$$y - y_0 = \frac{\sin \psi}{\cos \theta} z - \frac{\cos \psi}{\cos \theta} x. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) может характеризовать положение плоских поверхностей у всего технологического комплекса поверхностей, начиная с заготовки и кончая готовой деталью. Плотности распределения параметров известны (обычно статистически) у поверхности заготовки. Задачей размерного моделирования обработки и является установление связей между параметрами заготовки и параметрами обработанной поверхности.

Следуя [2], процесс формообразования представим как движения взаимосвязанных координатных систем, проведенных через звенья технологической системы, которые непосредственно участвуют в образовании погрешности на детали. На рис. 1.3 показаны координатные системы, проведенные через узлы и детали многооперационного станка.

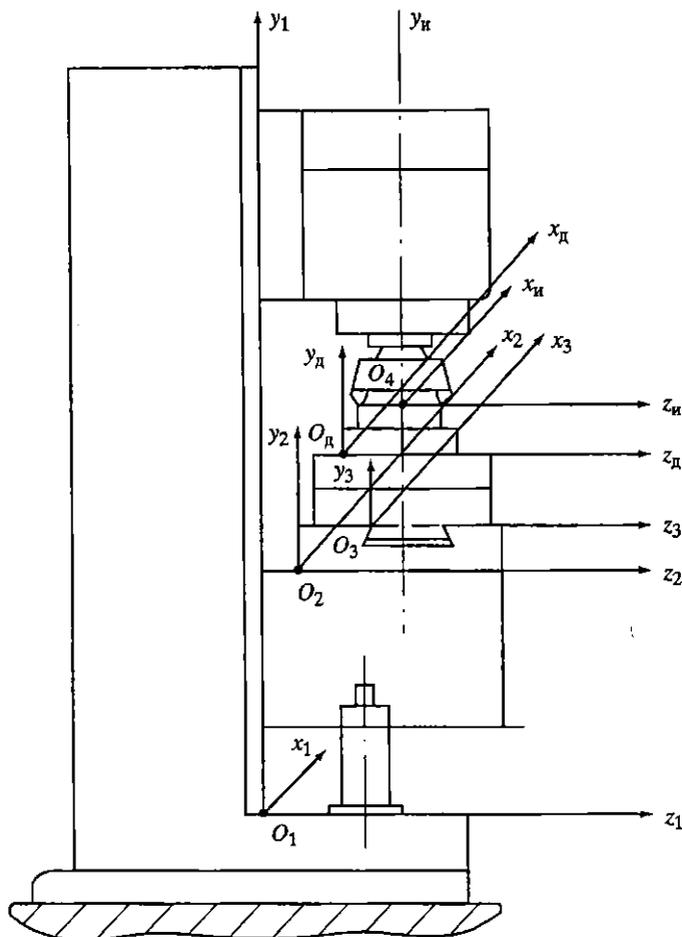


Рис. 1.3. Координатные системы, проведенные через элементы технологической системы многооперационного станка

На рис. 1.4 эти координатные системы связаны в цепочку, замыкание которой происходит в силу того, что формообразующие точки M_i принадлежат одновременно поверхности детали (векторы \vec{r}_i^d) и вершинам зубьев фрезы (векторы \vec{r}_i^f).

Пересчитаем вектор \vec{r}_i^d через координатные системы Σ^3 и Σ^2 в координатную систему Σ^1 и получим

$$\vec{r}_i^1 = \vec{r}_0^2 + A_2 \vec{r}_i^2 = \vec{r}_0^2 + A_2 (\vec{r}_0^3 + A_3 (\vec{r}_0^4 + A_4 \vec{r}_i^4)), \quad (1.5)$$

где \vec{r}_i^d – радиус-вектор текущей точки поверхности детали в системе координат детали Σ^d ;

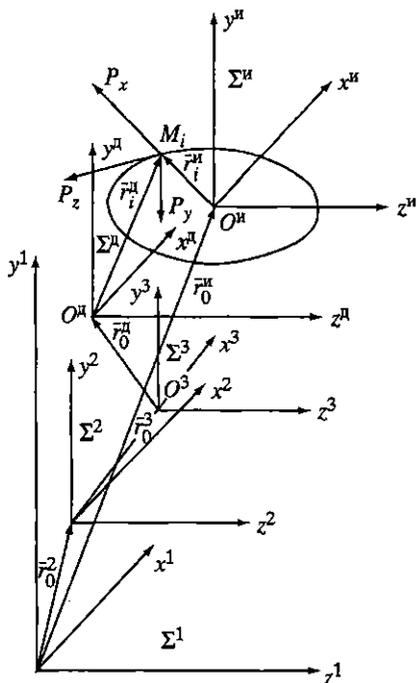


Рис. 1.4. Связь между системами координат элементов технологической системы многоцелевого станка

$\bar{r}_0^n, \bar{r}_0^3, \bar{r}_0^2$ – векторы параллельных переносов систем $\Sigma^n, \Sigma^3, \Sigma^2$ соответственно относительно систем $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3$;

A_n, A_3, A_2 – матрицы вращения систем $\Sigma^n, \Sigma^3, \Sigma^2$ соответственно относительно систем $\Sigma^3, \Sigma^2, \Sigma^1$;

\bar{r}_i^1 – радиус-вектор текущей точки поверхности детали в системе координат Σ^1 .

Пересчитаем также вектор \bar{r}_i^n в координатную систему Σ^1 и получим

$$\bar{r}_i^1 = \bar{r}_0^n + A_n \bar{r}_i^2,$$

где \bar{r}_0^n – вектор параллельности переносов системы Σ^n относительно координат системы Σ^1 ;

\bar{r}_i^n – радиус-вектор вершины i -го зуба фрезы в системе координат инструмента;

A_n – матрица вращения системы Σ^n относительно системы Σ^1 .

Приравняв (1.5) к (1.6), найдем в явном виде выражение для \bar{r}_i^n :

$$\bar{r}_i^n = A_n' A_3' A_2' O_2 A_n \bar{r}_i^1 + A_n' A_3' A_2' (\bar{r}_0^n - \bar{r}_0^2) - A_n' A_3' \bar{r}_0^3 - A_n' \bar{r}_0^n. \quad (1.7)$$

Здесь штрих означает операцию транспонирования матрицы, которая в данном случае (ортогональных матриц) совпадает с операцией взятия обратной матрицы.

Кинематическая схема резания задается следующими движениями:

$$\bar{r}_0^{n1} = \begin{pmatrix} x_0^{n1} + S_z Z_\phi n t \\ y_0^{n1} \\ z_0^{n1} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$A_{n1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & 0 & -\sin \varphi_n \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_n & 0 & \cos \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где S_z – подача на зуб фрезы; Z_ϕ – число зубьев фрезы; n – число оборотов фрезы; t – текущее время; A_{n1} – матрица, описывающая вращение фрезы; $\varphi_n = \frac{2\pi n}{60} t$ – угол поворота фрезы.

Чтобы построить траекторию векторов \bar{r}_i^n , описывающих поверхность детали, необходимо знать составляющие векторов \bar{r}_0^* и элементы матриц A_* . Здесь символом * мы обозначили индекс координатной системы. Будем считать известным начальное относительное положение координатных систем, которое определяется с точностью статической настройки и установки.

В качестве примера рассмотрим обработку прямоугольного несимметричного контура (рис. 1.5, а). Радиус-вектор i -го зуба фрезы будет иметь следующие координаты:

$$\bar{r}_i^{n1} = \begin{pmatrix} R_\phi \cos \frac{2\pi}{Z_\phi} i \\ 0 \\ R_\phi \sin \frac{2\pi}{Z_\phi} i \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где R_ϕ – радиус фрезы; $i = \overline{0; Z_\phi}$.

Зубья фрезы работают на угле $\Psi_1 + \Psi_2$, так что «рабочий» угол поворота системы Σ^{n1} стеснен следующим неравенством:

$$-\Psi_2 + 2k\pi < \varphi_n < \Psi_1 + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Исследования [13] показали, что на погрешности формы в продольном сечении, а следовательно, на характеристики положения плоской поверхности влияет нестационарность на входе и выходе фрезы из-за зацепления с деталью. Эта нестационарность определяется переменностью углов контакта Ψ_1 и Ψ_2 на входе и выходе фрезы. На рис. 1.5, б показаны три положения фрезы на входе O_1^{bx} , O_2^{bx} , O_3^{bx} и выходе O_1^{vbx} , O_2^{vbx} , O_3^{vbx} . При переходе фрезы из положения O_1^{bx} в O_2^{bx} и далее O_3^{bx} угол контакта меняется по следующему закону (см. рис. 1.5, в):

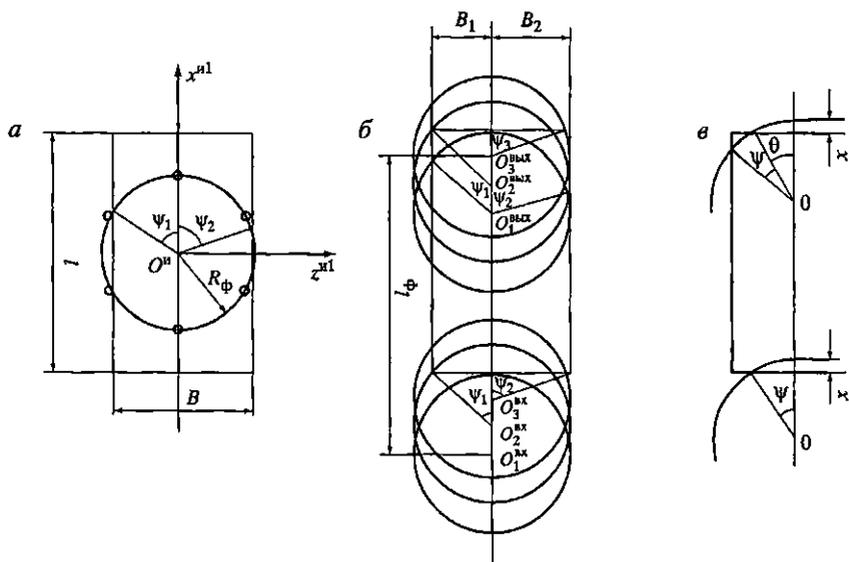


Рис. 1.5. Схема фрезерования несимметричного прямоугольного контура

$$\psi = \arcsin \frac{\sqrt{2R_{\phi}x - x^2}}{R_{\phi}}, \quad (1.12)$$

где x – координата перемещения фрезы относительно детали, отсчитываемая от точки $O_1^{вх}$.

Угол Ψ достигает своего максимального значения Ψ_1 при перемещении фрезы в положение $O_2^{вх}$, а значения Ψ_2 – при перемещении фрезы в положение $O_3^{вх}$, причем

$$O_1^{вх} O_2^{вх} = R_{\phi} - \sqrt{R_{\phi}^2 - B_1^2}, \quad (1.13)$$

$$O_1^{вх} O_3^{вх} = R_{\phi} - \sqrt{R_{\phi}^2 - B_2^2}. \quad (1.14)$$

Отсюда максимальные значения углов будут

$$\psi_1 = \arcsin \frac{B_1}{R_{\phi}}, \quad \psi_2 = \arcsin \frac{B_2}{R_{\phi}}. \quad (1.15)$$

При переходе фрезы из положения $O_1^{вх}$ в $O_2^{вх}$ и далее в $O_3^{вх}$ угол контакта меняется по следующему закону:

$$\psi = \psi_1 - \theta = \psi_1 - \arcsin \frac{\sqrt{2R_\phi x - x^2}}{R_\phi}, \quad (1.16)$$

где x – координата перемещения фрезы, отсчитываемая от точки $O_1^{\text{вых}}$.

Угол ψ_1 уменьшается до нуля при перемещении фрезы в положение $O_2^{\text{вых}}$, а угол ψ_2 – при перемещении фрезы в положение $O_3^{\text{вых}}$, причем величины этих перемещений подсчитываются по формулам (1.13) и (1.14).

Таким образом, возникает пять временных интервалов, в течение которых угол контакта определен по-разному:

$$\begin{aligned} 1) & 0 \leq t \leq t_1^{\text{вх}}, \\ 2) & t_1^{\text{вх}} \leq t \leq t_2^{\text{вх}}, \\ 3) & t_2^{\text{вх}} \leq t \leq t_1^{\text{вых}}, \\ 4) & t_1^{\text{вых}} \leq t \leq t_2^{\text{вых}}, \\ 5) & t_2^{\text{вых}} \leq t \leq t_1^{\text{вых}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

причем

$$\begin{aligned} t_1^{\text{вх}} &= \frac{R_\phi - \sqrt{R_\phi^2 - B_1^2}}{S_2 Z_\phi n}, \\ t_2^{\text{вх}} &= \frac{R_\phi - \sqrt{R_\phi^2 - B_2^2}}{S_2 Z_\phi n}, \\ t^{\text{вых}} &= \frac{1}{S_2 Z_\phi n}, \\ t_1^{\text{вых}} &= \frac{l + R_\phi - \sqrt{R_\phi^2 - B_1^2}}{S_2 Z_\phi n}, \\ t_2^{\text{вых}} &= \frac{l + R_\phi - \sqrt{R_\phi^2 - B_2^2}}{S_2 Z_\phi n}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Количество одновременно работающих зубьев можно учесть неравенством

$$\frac{2\pi}{Z_\phi} \leq \psi_k \leq \frac{2\pi}{Z_\phi} (i+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.19)$$

где ψ_k – угол контакта.

При $i = 0$ неравенству (1.19) удовлетворяет один зуб, при $i = 1$ – два зуба и т.д.

Неравенство (1.11), справедливое для первых трех участков (см. (1.17)), лучше переписать относительно времени следующим образом:

$$-\frac{\psi_2}{2\pi n} + \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{\psi_1}{2\pi n} + \frac{k}{n}. \quad (1.20)$$

Для четвертого и пятого участков неравенство (1.11) распадается на два неравенства:

$$\begin{aligned} \psi_1^{+2\pi n} \leq \varphi_n \leq \theta^{+2\pi n}, \\ 2\pi - \psi_2^{+2k\pi} \leq \varphi_n \leq 2\pi - \theta^{+2k\pi} \end{aligned} \quad (1.21)$$

или, в пересчете на время,

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{2\pi n} + \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{\theta}{2\pi n} + \frac{k}{n}, \\ \frac{2\pi - \psi_2}{2\pi n} + \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{2\pi - \theta}{2\pi n} + \frac{k}{n}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отсчет углов идет от оси x против часовой стрелки.

Величина K в выражениях (1.20) и (1.22) является дискретной функцией времени и представляет собой счетчик оборотов фрезы. Она может быть записана при помощи h – функции Хевисайда:

$$K(t) = \sum_{i=0}^N h\left(t - i \frac{60}{n}\right) - 1. \quad (1.23)$$

Полученные выражения позволяют вычислить кинематические траектории зубьев фрезы, находящихся в зацеплении с деталью.

В процессе обработки возникают силы резания, а силы массы движущихся элементов меняют свои координаты. Это вызывает перемещения координатных систем относительно друг друга вследствие конечной жесткости элементов технологической системы.

В работе [1] показано, что основную долю перемещений составляют упругие перемещения. Следовательно, каждую координатную систему можно рассматривать как твердое тело, подвешенное в пространстве с помощью некоторого числа упругих связей – пружин. Расположение пружин может быть произвольным, оно определяется условиями контактирования элементов технологической системы.

Примем зависимость между усилием в пружине и изменением ее длины линейной и будем полагать, что при отсутствии сил резания усилия во всех пружинах равны нулю. Кроме того, будем полагать перемещения тела малыми. В этом случае можно воспользоваться весьма эффективным методом решения задач статики твердого тела – методом винтового исчисления [5].

Рассмотрим упругие перемещения координатной системы Σ^A относительно координатной системы Σ^3 (рис. 1.6). В точке M_i действует сила резания $P_i = (P_{xi} P_{yi} P_{zi})'$ (штрих означает транспонирование). Положение осей пружин в пространстве определим их плюккеровыми координатами – направляющими косинусами единичных векторов e_i осей и моментами этих векторов относительно осей системы координат Σ^3 .

Пусть углы, образуемые осями пружин с осями координат системы Σ^3 , будут $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, а координаты точек прикрепления пружин к детали (точек контакта элементов технологической системы) – ξ_i, η_i, ζ_i , где i – номер пружины. Моменты единичных векторов осей пружин относительно осей координат будут иметь выражения

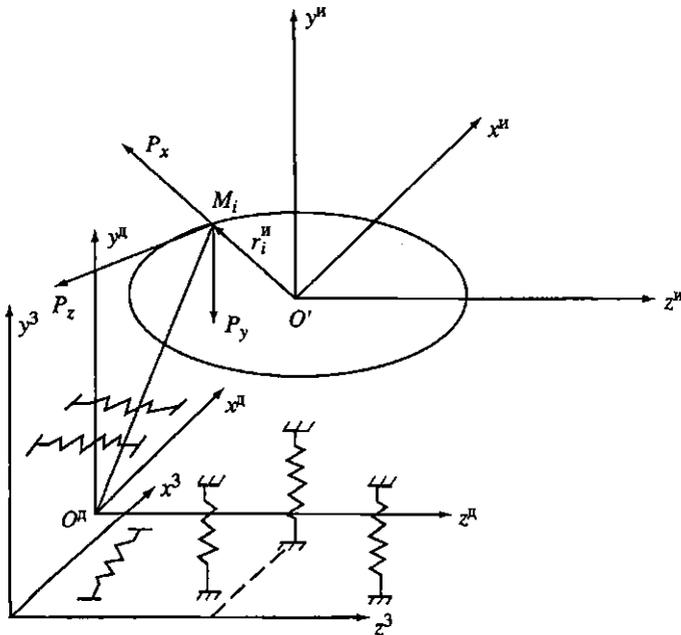


Рис. 1.6. Схематическое изображение упругой связи между координатными системами

$$e_i = \eta_i \cos \gamma_i - \zeta_i \cos \beta_i, \quad m_i = \zeta_i \cos \alpha_i - \xi_i \cos \gamma_i,$$

$$n_i = \xi_i \cos \beta_i - \eta_i \cos \alpha_i$$

и, следовательно, плюккеровы координаты осей пружин будут следующие:

$$\cos \alpha_i; \cos \beta_i; \cos \gamma_i; l_i; m_i; n_i. \quad (1.24)$$

Сообщим детали (системе Σ^A) малое винтовое перемещение, характеризуемое произвольным винтом Φ , задаваемым координатами

$$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z,$$

где первые три величины – проекции угла поворота детали на оси координат, а последние три – проекции на те же оси перемещения точки детали, совпадающей с началом координат O^A .

Чтобы выразить усилие в i -й пружине, возникшее в результате указанного перемещения, нужно найти перемещение какой-нибудь точки, неразрывно связанной с деталью, лежащей на оси пружины (в частности, точки прикрепления пружин к детали, т.е. точки контакта), и спроектировать это перемещение на ось пружины. Мы получим удлинение или укорочение пружины, а умножив эту величину на коэффициент жесткости j_i пружины, найдем усилие F_i пружины. Но перемещение точки детали (малое) выражается моментом винта перемещений относительно этой точки, проекция же момента на прямую, проходящую через точку, есть относительный момент винта и прямой. Следовательно, для пружины с единичным вектором оси e_i при перемещении тела по винту Φ будем иметь усилие

$$F_i - j_{i \text{ мом}}(\Phi \cdot l_i) = j_i(\delta_x \cos \alpha_i + \delta_y \cos \beta_i + \delta_z \cos \gamma_i + \varphi_x l_i + \varphi_y m_i + \varphi_z n_i). \quad (1.25)$$

Выразим проекции сил $\bar{F}_i = e_i F_i$ на оси координат и моменты их относительно этих осей, умножая величину F_i поочередно на каждую из шести величин (1.24), а затем, суммируя проекции и моменты по всем пружинам, найдем шесть координат: $-P_x, -P_y, -P_z, -L_x, -L_y, -L_z$ силового винта, уравнивающего тот силовой винт R , который способен вызвать перемещение детали по винту Φ .

Заметим, что ввиду допущения о малости перемещения мы не делаем никакого различия между начальным, т.е. ненагруженным, положением детали и конечным, т.е. получившимся

после перемещения. В теории малых колебаний это допущение является обычным; оно, кроме того, соответствует решению в первом приближении в тех случаях, когда учитывается нелинейность, связанная с учетом влияния составляющих перемещений второго и высшего порядков малости.

Произведя указанные выше умножения и суммирования, получим следующую систему уравнений равновесия упруго подвешенного твердого тела (системы координат):

$$\begin{aligned}
 j_{11}\delta_x^n + j_{12}\delta_y^n + j_{13}\delta_z^n + j_{14}\varphi_x^n + j_{15}\varphi_y^n + j_{16}\varphi_z^n - P_x &= 0, \\
 j_{21}\delta_x^n + j_{22}\delta_y^n + j_{23}\delta_z^n + j_{24}\varphi_x^n + j_{25}\varphi_y^n + j_{26}\varphi_z^n - P_y &= 0, \\
 j_{31}\delta_x^n + j_{32}\delta_y^n + j_{33}\delta_z^n + j_{34}\varphi_x^n + j_{35}\varphi_y^n + j_{36}\varphi_z^n - P_z &= 0, \\
 j_{41}\delta_x^n + j_{42}\delta_y^n + j_{43}\delta_z^n + j_{44}\varphi_x^n + j_{45}\varphi_y^n + j_{46}\varphi_z^n - L_x^3 &= 0, \\
 j_{51}\delta_x^n + j_{52}\delta_y^n + j_{53}\delta_z^n + j_{54}\varphi_x^n + j_{55}\varphi_y^n + j_{56}\varphi_z^n - L_y^3 &= 0, \\
 j_{61}\delta_x^n + j_{62}\delta_y^n + j_{63}\delta_z^n + j_{64}\varphi_x^n + j_{65}\varphi_y^n + j_{66}\varphi_z^n - L_z^3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

где

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= \Sigma_j \cos^2 \alpha; & j_{22} &= \Sigma_j \cos^2 \beta; & j_{33} &= \Sigma_j \cos^2 \gamma; \\
 j_{12} &= j_{21} = \Sigma_j \cos \alpha \cos \beta; & j_{13} &= j_{31} = \Sigma_j \cos \alpha \cos \gamma; \\
 j_{14} &= j_{41} = \Sigma_j \cos \alpha l; & j_{15} &= j_{51} = \Sigma_j \cos \alpha m; \\
 j_{16} &= j_{61} = \Sigma_j \cos \alpha n; & j_{24} &= j_{42} = \Sigma_j \cos \beta l; \\
 j_{25} &= j_{52} = \Sigma_j \cos \beta m; & j_{26} &= j_{62} = \Sigma_j \cos \beta n; \\
 j_{34} &= j_{43} = \Sigma_j \cos \gamma l; & j_{35} &= j_{53} = \Sigma_j \cos \gamma m; \\
 j_{36} &= j_{63} = \Sigma_j \cos \gamma n; & j_{44} &= \Sigma_j l^2; & j_{55} &= \Sigma_j m^2; & j_{66} &= \Sigma_j n^2; \\
 j_{45} &= j_{54} = \Sigma_j lm; & j_{46} &= j_{64} = \Sigma_j ln; & j_{56} &= j_{65} = \Sigma_j mn;
 \end{aligned}$$

суммирование ведется по всем пружинам; индекс i опущен.

Так как точка M_i (вершина i -го зуба фрезы) движется по циклоидальной траектории в соответствии с формулами (1.8) и (1.9), то проекция сил резания и плечи моментов становятся функциями времени или угла поворота φ_n :

$$\begin{aligned}
 P_{xi} &= P_{xni}^i \cos \varphi_n - P_{zni}^i \sin \varphi_n; \\
 P_{yi} &= -P_{yni}^i;
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$P_i = -P_{x_{n1}}^i \sin \varphi_n - P_{z_{n1}}^i \cos \varphi_n,$$

где $P_{x_{n1}}^i$, $P_{y_{n1}}^i$, $P_{z_{n1}}^i$ – проекции силы резания во вращающейся системе координат инструмента (система Σ^n , умноженная на матрицу A_{n1});

$$\begin{aligned} x_i^n &= x_n^n - S_z Z_\Phi n t + R_\Phi \cos(\varphi_n + 2\pi i / Z_\Phi), \\ y_i^n &= y_n^n, \\ z_i^n &= z_n^n - R_\Phi \sin(\varphi_n + 2\pi i / Z_\Phi), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где x_n^n , y_n^n , z_n^n – начальное положение центра фрезы относительно детали (в «момент врезания»).

Тогда силы в формуле (1.26) получаются суммированием по работающим зубьям фрезы (с учетом выражений (1.17) – (1.22)), а моменты можно подсчитать по следующим формулам:

$$\begin{aligned} L_x^3 &= \sum_i P_{zi}(y_i^n + y_0^n) - P_{yi}(z_i^n + z_0^n); \\ L_y^3 &= \sum_i P_{xi}(z_i^n + z_0^n) - P_{zi}(x_i^n + x_0^n); \\ L_z^3 &= \sum_i P_{yi}(x_i^n + x_0^n) - P_{xi}(y_i^n + y_0^n). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Таким образом, решение статической задачи сводится к определению координат неизвестного винта перемещений Φ по заданным координатам силового винта R из системы уравнений (1.26).

Вектор параллельных переносов системы Σ^3 будет

$$\bar{r}_0^n = \begin{pmatrix} x_0^n + \delta_x^n \\ y_0^n + \delta_y^n \\ z_0^n + \delta_z^n \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

а матрица вращения системы Σ^n относительно системы Σ^3 примет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_y \cos \varphi_z & -\sin \varphi_x \cos \varphi_y & \sin \varphi_y \\ \cos \varphi_z \sin \varphi_y \sin \varphi_x + \sin \varphi_z \cos \varphi_x & -\sin \varphi_z \sin \varphi_y \sin \varphi_x + \cos \varphi_z \cos \varphi_x & -\cos \varphi_y \sin \varphi_x \\ \sin \varphi_z \sin \varphi_x - \cos \varphi_z \sin \varphi_y \cos \varphi_x & \sin \varphi_z \sin \varphi_y \cos \varphi_x + \cos \varphi_z \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \cos \varphi_y \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Для нахождения составляющих вектора \bar{r}^3 и элементов матрицы A_3 необходимо пересчитать силы и моменты в систему координат Σ^2 . Вследствие малости упругих деформаций не будем учитывать вызываемые ими смещения координатных систем. Тогда выражение для сил определится формулами (1.27), а выражение для моментов запишется как

$$\begin{aligned} L_x^2 &= P_z(y^n + y_0^n + y_0^3) - P_y(z^n + z_0^n); \\ L_y^2 &= P_x(z^n + z_0^n + z_0^3) - P_z(x^n + x_0^n + x_0^3); \\ L_z^2 &= P_y(x^n + x_0^n + x_0^3) - P_x(y^n + y_0^n + y_0^3). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Для определения смещений и поворотов системы координат Σ^3 относительно системы Σ^2 запишем систему уравнений, аналогичную системе (1.26), но, разумеется, со своими жесткостными характеристиками. В результате решения системы уравнений найдем величины $\delta_x^3, \delta_y^3, \delta_z^3, \varphi_x^3, \varphi_y^3, \varphi_z^3$, а также составляющие вектора \bar{r}_0^3 и элементы матрицы A_3 .

Точно таким же образом найдем составляющие вектора \bar{r}_0^2 и элементы матрицы A_2 .

Теперь рассмотрим вторую ветвь цепочки координатных систем – системы Σ^n, Σ^1 .

Матрица вращения системы Σ^n относительно системы Σ^1 является произведением двух матриц: A_{n1} (см. (1.9)) и A_{n2} , элементы которых суть малые вращения вследствие упругих деформаций.

Координаты точки M_i в начальном положении в системе координат Σ^n вычисляются по формулам (1.10).

Для расчета величин $\delta_x^n, \delta_y^n, \delta_z^n, \varphi_x^n, \varphi_y^n, \varphi_z^n$ используется система уравнений, аналогичная системе (1.26). Силы P_{xi}, P_{yi}, P_{zi} рассчитываются по формулам (1.27) с учетом того, что знак сил, действующих на инструмент, противоположен знаку сил, действующих на деталь. Моменты сил определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} L_x^1 &= \sum_i P_{zi}(y_i^n + y_0^n) - P_{yi}(z_i^n + z_0^n); \\ L_y^1 &= \sum_i P_{xi}(z_i^n + z_0^n) - P_{zi}(x_i^n + x_0^n); \\ L_z^1 &= \sum_i P_{yi}(x_i^n + x_0^n) - P_{xi}(y_i^n + y_0^n), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$\begin{pmatrix} x_i^H \\ y_i^H \\ z_i^H \end{pmatrix} = A_{H1} \bar{r}_i^H.$$

Силы резания при фрезеровании зависят от параметров режима V_f и S_z , припуска Z , геометрии инструмента, твердости заготовки H и т.п. Так как модель учитывает силы на каждом работающем зубе фрезы, применение формул для определения сил фрезерования, приведенных, например, в [4], может дать большую погрешность. Будем определять силы фрезерования экспериментально на станке, оснащенный универсальным динамометром, при фрезеровании однозубой фрезой. Методика эксперимента аналогична методике, изложенной в работах [10, 11], и заключается в следующем. Изменяемыми величинами в нашем случае будут силы фрезерования P_x , P_y , P_z в системе координат инструмента. Обычно измеряемая величина зависит от одного или нескольких факторов, которые будем называть «контролируемыми переменными», тем самым подчеркивая, что значения каждого из факторов могут быть выбраны произвольно из некоторой заданной области. Контролируемыми переменными в нашем случае являются: скорость резания, подача на один зуб фрезы, припуск и твердость обрабатываемой заготовки.

Каждому набору указанных величин соответствует вектор-столбец

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

координаты которого x_1, x_2, \dots, x_k равны значениям контролируемых переменных, занумерованных в удобном для нас порядке. Пространство размерности k , в котором определен вектор \bar{x} , называется факторным пространством или пространством контролируемых переменных. Совокупность точек этого пространства, где измерения возможны (т.е. соответствующие значения контролируемых переменных x_1, x_2, \dots, x_k могут быть реализованы при постановке экспериментов), называется областью возможных измерений или областью действия.

Задачей эксперимента по поиску математической модели является отыскание связи между измеряемыми переменными. Так как результаты наблюдений – величины случайные, то в большинстве случаев имеет смысл говорить о связи средних значений исследуемых величин с контролируруемыми переменными. Предположим, что эта связь может быть описана некоторой функцией

$$M[\bar{y} / \bar{x}] = \eta(\bar{x}),$$

где $M[\bar{y} / \bar{x}]$ – среднее значение исследуемой величины y при значениях контролируемых переменных, определяемых координатами вектора \bar{x} , т.е. условное математическое ожидание y относительно \bar{x} ;

$\eta(\bar{x})$ – функция, зависящая от неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$; ее вид в общем случае может быть также неизвестен (в литературе данная функция обычно называется поверхностью отклика).

Количество априорной информации перед экспериментом по поиску математической модели (функция $\eta(\bar{x})$) можно охарактеризовать тремя основными уровнями [12].

1. Функция $\eta(\bar{x}) = \eta(\bar{x}, \theta)$ известна. Требуется определить или уточнить неизвестные параметры

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{pmatrix}.$$

2. Известно, что функция $\eta(\bar{x})$ совпадает с одной из функций

$$(\bar{x}) = \begin{cases} \eta_1(\bar{x}, \bar{\theta}_1), \\ \eta_2(\bar{x}, \bar{\theta}_2), \\ \dots \\ \eta_v(\bar{x}, \bar{\theta}_v). \end{cases}$$

Размерность векторов $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_v$ может быть различной. Требуется определить, какая из функций $\eta_1(\bar{x}, \bar{\theta}_1), \eta_2(\bar{x}, \bar{\theta}_2), \dots, \eta_v(\bar{x}, \bar{\theta}_v)$ является истинной, и найти неизвестные параметры.

3. Вид функции $\eta(\bar{x})$ неизвестен. Известно лишь, что функция $\eta(x)$ в интересующей области может быть достаточно хорошо аппроксимирована конечным рядом по некоторой си-

стеме (или системам) наперед заданных функций. Требуется найти наилучшее описание функции $\eta(x)$.

В нашем случае можно считать, что мы имеем степень информированности, соответствующую 1-му уровню.

Постулируем с точностью до параметров следующую модель:

$$\begin{aligned} P_x &= \beta_{10} V^{\beta_{11}} S_z^{\beta_{12}} Z^{\beta_{13}} H^{\beta_{14}}, \\ P_y &= \beta_{20} V^{\beta_{21}} S_z^{\beta_{22}} Z^{\beta_{23}} H^{\beta_{24}}, \\ P_z &= \beta_{30} V^{\beta_{31}} S_z^{\beta_{32}} Z^{\beta_{33}} H^{\beta_{34}}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Степенная модель принята, поскольку силы резания, согласно теории резания, представляются именно степенными моделями [14, 22].

Уравнения (1.34) логарифмированием обеих частей можно привести к линейным относительно логарифмов. Для линейных моделей оптимальным, в смысле минимума дисперсии оценок, является ортогональный план (в этом случае он еще и ротатабельный и доставляет минимум объему эллипсоида рассеяния оценок параметров).

Поэтому возьмем за основу полный факторный эксперимент типа 2^4 . В каждой модели нам нужно оценить пять параметров, а экспериментальный план 2^4 содержит 16 точек. Целесообразно воспользоваться дробной репликой от полного факторного эксперимента, а именно полурепликой типа 2^{4-1} , содержащей 8 экспериментальных точек.

В рассматриваемом эксперименте каждая переменная варьируется на двух уровнях: верхнем и нижнем. Уровни варьирования выбираются из технологических соображений: диапазон чисел оборотов коробки скоростей станка, диапазон подач, предельные колебания припуска и твердости материала заготовки, определяемые технологическим процессом ее получения.

Для удобства дальнейших вычислений закодируем переменные факторы при помощи уравнений преобразования:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2(\lg V - \lg V_{\max})}{\lg V_{\max} - \lg V_{\min}} + 1, \\ x_2 &= \frac{2(\lg S - \lg S_{\max})}{\lg S_{\max} - \lg S_{\min}} + 1, \\ x_3 &= \frac{2(\lg Z - \lg Z_{\max})}{\lg Z_{\max} - \lg Z_{\min}} + 1, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$x_4 = \frac{2(\lg H - \lg H_{\max})}{\lg H_{\max} - \lg H_{\min}} + 1,$$

$$y = \lg P_x \text{ или } \lg P_y, \text{ или } \lg P_z.$$

Используя формулы кодирования (1.35), получаем следующее уравнение первой модели из системы (1.34):

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4,$$

где $x_0 \equiv 1$ (фиктивная переменная);

$$b_0 = \lg \beta_{10} + \beta_{11} \frac{\lg V_{\max} + \lg V_{\min}}{2} + \beta_{12} \frac{\lg S_{\max} + \lg S_{\min}}{2} +$$

$$+ \beta_{13} \frac{\lg Z_{\max} + \lg Z_{\min}}{2} + \beta_{14} \frac{\lg H_{\max} + \lg H_{\min}}{2},$$

$$b_1 = \beta_{11} \frac{\lg V_{\max} - \lg V_{\min}}{2}; \quad b_2 = \beta_{12} \frac{\lg S_{\max} - \lg S_{\min}}{2};$$

$$b_3 = \beta_{13} \frac{\lg Z_{\max} - \lg Z_{\min}}{2}; \quad b_4 = \beta_{14} \frac{\lg H_{\max} - \lg H_{\min}}{2}.$$

Верхнему уровню переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 соответствует значение $+1$, а нижнему -1 . Соответственно матрица плана 2^{4-1} (из плана полного факторного эксперимента взяты нечетные строки) будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку изменение выходной величины y носит случайный характер, в каждой точке факторного пространства \bar{x}_g проводилось по три параллельных опыта и результаты наблюдений y_{g1}, y_{g2}, y_{g3} осреднялись.

Далее следовали проверка воспроизводимости (однородности выборочных дисперсий S_g^2) при помощи критерия Кохрена, определение коэффициентов модели B методом наименьших

квадратов, проверка гипотезы об их значимости с помощью t -критерия Стьюдента, проверка адекватности представления результатов эксперимента найденными уравнениями связи с помощью F -критерия Фишера.

В нашем случае уровни варьирования факторов были выбраны следующими:

$$V_{\max} = 130; \quad S_{\max} = 0,3; \quad Z_{\max} = 8; \quad H_{\max} = 182 \text{ НВ};$$

$$V_{\min} = 90; \quad S_{\min} = 0,2; \quad Z_{\min} = 3; \quad H_{\min} = 132 \text{ НВ}.$$

Исследовалась обработка деталей из серого чугуна СЧ 21–40 фрезой, оснащенной пластинкой твердого сплава ВК 6 со следующей геометрией:

главный угол в плане $\varphi = 60^\circ$

вспомогательный угол $\varphi_1 = 5^\circ$

задний угол $\alpha = 10^\circ$

передний угол $\gamma = +5^\circ$

угол наклона режущей кромки $\lambda = 12^\circ$

диаметр фрезы $d_\phi = 350 \text{ мм}$

ширина фрезерования 320 мм

При проведении эксперимента фиксировались максимальные значения сил резания, соответствующие определенному значению угла контакта.

Средняя величина \bar{y}_g определяется по формуле

$$\bar{y}_g = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{g,i}}{3}.$$

Выборочная дисперсия в каждой точке g факторного пространства

$$S_g^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 (y_{g,l} - \bar{y}_g)^2$$

определяется с $\nu_{1b} = 2$ степенями свободы. Критерий Кохрена вычисляется по формуле

$$G_{\max} = \frac{S_{g \max}^2}{\sum_{g=1}^8 S_g^2}.$$

Согласно [7], для $\nu_{1b} = 2$, $\nu_{2b} = 8$ и $q = 5\%$ определяем $G_{кр} = 0,5157$. Общей оценкой выборочной дисперсии может

служить величина

$$S^2 = \frac{\sum_{g=1}^8 S_g^2}{8} \quad \text{с} \quad v_s = 8(3-1) = 16$$

степенями свободы.

Оценка коэффициентов регрессии производится по формуле метода наименьших квадратов:

$$\bar{B} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

где \bar{B} – вектор оценок, \bar{Y} – вектор осредненных наблюдаемых значений. Штрих означает операцию транспонирования.

Отношение Стьюдента

$$t_i = \frac{|b_i|}{S\{\bar{b}_i\}},$$

где

$$S^2\{\bar{b}_i\} = \frac{S^2}{24}.$$

При $v_{3n} = 16$ и $q = 5\%$ $t_{кр} = 2,119$ [7].

Дисперсия неадекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{8-5} \sum_{g=1}^8 (\bar{y}_g - \hat{y}_g)^2$$

определяется с числом степеней свободы $v_{ад} = 8 - 5 = 3$.

Отношение Фишера $F = S_{ад}^2 / S^2$. Для $v_{1ад} = 3$ и $v_{2ад} = 16$ при $q = 2,5\%$ получаем $F_{кр} = 4,976$ [7].

Видим, что силы резания при прочих равных условиях зависят от скорости, подачи и глубины резания. Скорость резания и подача в обычных условиях постоянны. Глубина резания или припуск могут меняться по обеим координатам.

Определим переменный во времени припуск следующим образом:

$$Z(t) = |r^n - r^{3ar}|, \quad (1.36)$$

где $r^n(t)$ – радиус-вектор точки поверхности, которую бы описала вершина режущего инструмента при отсутствии резания, в системе координат детали Σ^n ;

$r^{\text{заг}}(t)$ – радиус-вектор точки поверхности заготовки, задаваемой кинематическими движениями (1.8) и (1.9).

Радиус-вектор настройки $r^n(t)$ в предположении, что при отсутствии сил резания все координатные системы (рис. 1.4) смещены параллельно, может быть вычислен по формуле

$$r_i'(t) = r_0^n + A_{n1} r_i^{n1} - r_0^2 - r_0^3 = r_0 + A_{n1} r_i^{n1}, \quad (1.37)$$

где

$$r_0 = \begin{pmatrix} x_0 - S_z Z_\phi n t \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить радиус-вектор заготовки $r^{\text{заг}}$, предварительно необходимо определить положение поверхности заготовки в некоторой системе координат. Будем считать, что положение всех поверхностей определено относительно прямоугольной ориентирующей системы координат.

Положение плоской поверхности заготовки в системе ориентирующих баз можно определить, как показано выше, уравнением (1.4). Не нарушая общность, можно предположить, что система технологических баз совпадает с системой ориентирующих баз. Теперь вычисление радиуса-вектора заготовки $r^{\text{заг}}$ сводится к вычислению координаты $u^{\text{заг}}$ по уравнению (1.4) при подставлении туда значений z и x из выражения (1.37), так как они у детали и заготовки одинаковы.

Определение координат кинематического винта по уравнениям (1.26) требует знания жесткостных характеристик технологической системы. Эти характеристики являются, вообще говоря, переменными величинами и зависят от конструктивных особенностей станка, состояния стыков, температуры, величины и направления предварительного натяга и др. Вопросами жесткости станков занимались многие исследователи. Поэтому не будем подробно останавливаться на экспериментах по определению жесткости элементов технологической системы. Применялась методика, заключающаяся в нагружении узлов станка силами при помощи специального нагрузочного устройства конструкции ЭНИМСа и измерении возникающих деформаций при помощи индикаторов. Деформации измерялись в местах действия опорных реакций в соответствии со схемой базирования. При этом, строго говоря, определялась не истинная упругая подвеска, а некоторая, эквивалентная ей. Степень адекватности определяется линейностью упругих характеристик.

Таким образом, мы определили все необходимые данные для вычисления векторов \vec{r}_i^A по формуле (1.7). Годографы векторов \vec{r}_i^A лежат на поверхности обработки. Определяя векторы \vec{r}_i^A для дискретного времени, получаем некоторое множество точек, принадлежащих поверхности детали. Задание этого множества позволяет определить фазовые координаты плоскости (см. рис. 1.4), характеризующей положение поверхности детали.

1.2.2. Моделирование растачивания цилиндрических поверхностей

В этом случае формообразование поверхности можно считать происходящим в результате точечного контакта вершины инструмента с поверхностью детали.

Идеальную цилиндрическую поверхность можно характеризовать пятью числами (обобщенными координатами), а именно:

$$\text{ЦП} = \langle a, b, p, q, d \rangle, \quad (1.38)$$

где первые четыре координаты – параметры уравнения оси цилиндра:

$$\begin{aligned} y &= ax + p, \\ z &= bx + q, \end{aligned} \quad (1.39)$$

пятая координата d – диаметр цилиндра.

Положение оси будем считать определенным относительно координатной системы, построенной на технологических базах детали.

Реальная цилиндрическая поверхность имеет отклонения от идеальной, которые должны лежать в пределах допусков по всем пяти параметрам.

Так же как и в случае торцевого фрезерования, процесс формообразования представим как движение взаимосвязанных координатных систем, проведенных через звенья технологической системы, которые непосредственно участвуют в образовании погрешности на детали. На рис. 1.7 показаны координатные системы, проведенные через узлы и детали многоцелевого станка. На рис. 1.8 эти координатные системы связаны в цепочку, замыкание которой происходит в силу того, что формообразующая точка M принадлежит одновременно поверхности детали (вектор \vec{r}^A) и вершине инструмента (вектор \vec{r}^H). В рассматриваемом случае имеем две ветви цепочки: $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \Sigma^4, \Sigma^A$ и $\Sigma^5, \Sigma^6, \Sigma^H$.

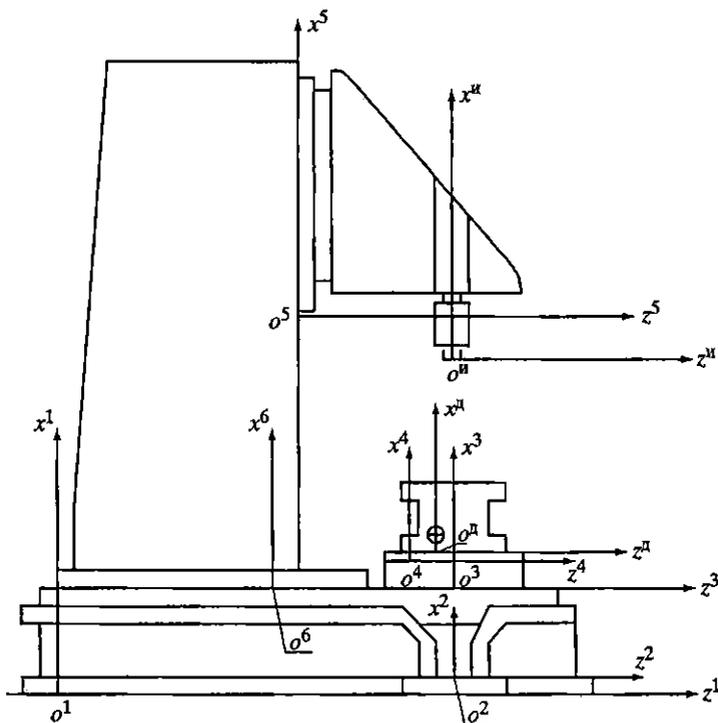


Рис. 1.7. Координатные системы, проведенные через узлы и детали многооперационного станка

Пересчитаем вектор \bar{r}^n через координатные системы $\Sigma^4, \Sigma^3, \Sigma^2$ в координатную систему Σ^1 и получим

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + A_2(\bar{r}_0^3 + A_3(\bar{r}_0^4 + A_4(\bar{r}_0^n + A\bar{r}^n))), \quad (1.40)$$

где \bar{r}^n – радиус-вектор текущей точки поверхности детали в системе координат детали Σ^n ;

$\bar{r}_0^n, \bar{r}_0^4, \bar{r}_0^3, \bar{r}_0^2$ – векторы параллельных переносов систем $\Sigma^n, \Sigma^4, \Sigma^3, \Sigma^2$ соответственно относительно систем $\Sigma^4, \Sigma^3, \Sigma^2, \Sigma^1$;

A_n, A_4, A_3, A_2 – матрицы вращения систем $\Sigma^n, \Sigma^4, \Sigma^3, \Sigma^2$ соответственно относительно систем $\Sigma^4, \Sigma^3, \Sigma^2, \Sigma^1$;

\bar{r}^1 – радиус-вектор текущей точки поверхности детали в системе координат Σ^1 .

Пересчитаем вектор \bar{r}^n через координатные системы Σ^6 и Σ^5 также в координатную систему Σ^1 и получим

$$\bar{r}^1 = \bar{r}_0^5 + A_5(\bar{r}_0^6 + A_6(\bar{r}_0^n + A_n\bar{r}^n)), \quad (1.41)$$

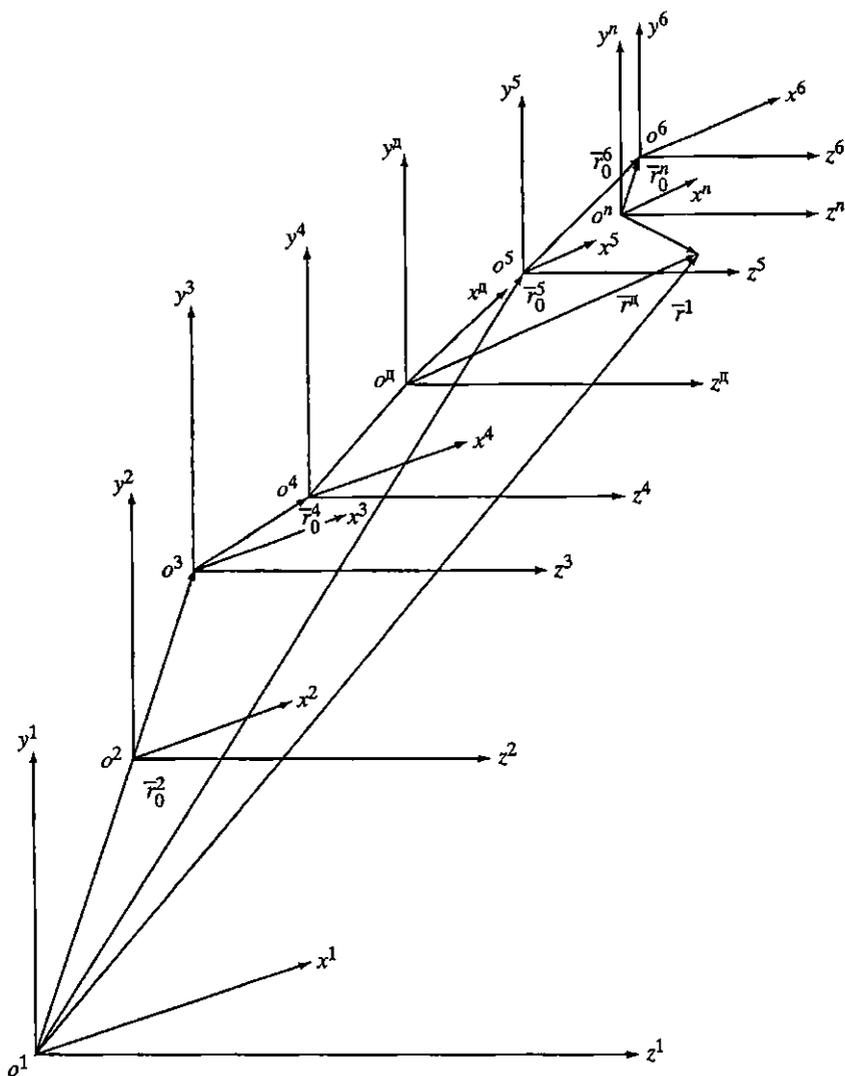


Рис. 1.8. Связь между системами координат элементов технологической системы

где \bar{r}^n – радиус-вектор вершины инструмента в системе координат инструмента Σ^n ;

$\bar{r}_0^n, \bar{r}_0^6, \bar{r}_0^5$ – векторы параллельных переносов систем $\Sigma^n, \Sigma^6, \Sigma^5$ соответственно относительно систем $\Sigma^6, \Sigma^5, \Sigma^1$;

A_n, A_6, A_5 – матрицы вращения систем $\Sigma^n, \Sigma^6, \Sigma^5$ соответственно относительно систем $\Sigma^6, \Sigma^5, \Sigma^1$.

Приравняв (1.40) к (1.41), найдем в явном виде выражение

$$\begin{aligned} \bar{r}^n = & A'_n A'_4 A'_3 A'_2 \bar{r}_0^5 + A'_n A'_3 A'_2 A'_5 (\bar{r}_6^0 + A_6 (\bar{r}_0^n + A_n \bar{r}^n)) - \\ & - A'_n A'_4 A'_3 A'_2 \bar{r}_0^2 - A'_n A'_4 A'_3 \bar{r}_0^3 - A'_n A'_4 \bar{r}_0^4 - A'_n \bar{r}_0^n. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Кинематическая схема резания задается движениями

$$\bar{r}_0^2 = \begin{pmatrix} x_0^2 = S_0 n t \\ y_0^2 = 0 \\ z_0^2 = 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

где S_0 – подача стола на оборот борштанги; n – частота вращения шпинделя; t – время; $\varphi_n = 2\pi n t / 60$ – угол поворота инструмента.

Чтобы построить траекторию вектора r_n , описывающего поверхность детали, необходимо знать составляющие векторов \bar{r}_0^* и элементы матриц A_n^* . Здесь символом * мы обозначили индекс координатной системы. Будем считать известным начальное относительное положение координатных систем, которые определяются с точностью статической настройки и установки.

Как и в случае торцевого фрезерования, в работах [1, 2] было показано, что основную долю перемещений координатных систем относительно друг друга, вызванных силами резания, составляют упругие перемещения.

Рассмотрим упругие перемещения координатной системы Σ^n относительно координатной системы Σ^4 (рис. 1.8). В точке M действует сила резания $P = (P_x P_y P_z)'$. Система равновесия упруго подвешенного твердого тела аналогична системе (1.26). Моменты определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} L_x^4 &= P_z (y^n + y_0^n) - P_y (z^n + z_0^n), \\ L_y^4 &= P_x (z^n + z_0^n) - P_z (x^n + x_0^n), \\ L_z^4 &= P_y (x^n + x_0^n) - P_x (y^n + y_0^n). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Так как точка M (вершина инструмента) движется по винтовой траектории в соответствии с формулами (1.43), то проекция сил резания и плечи моментов становятся функциями времени или угла поворота φ_n :

$$\begin{aligned} P_x &= P_x^{n1}, \\ P_y &= P_y^{n1} \cos \varphi_n - P_z^{n1} \sin \varphi_n, \\ P_z &= P_y^{n1} \sin \varphi_n + P_z^{n1} \cos \varphi_n, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где P_x^{n1} , P_y^{n1} и P_z^{n1} – проекции силы резания в системе координат Σ^n инструмента, умноженной на матрицу A_{n1} . Координаты точки M в системе Σ^n будут

$$\begin{aligned}x^n &= x_n^n - S_0 nt; \\y^n &= y_n^n - R(1 - \cos \varphi_n); \\z^n &= z_n^n + R \sin \varphi_n,\end{aligned}$$

где x_n^n , y_n^n , z_n^n – начальное положение инструмента; R – радиус растачиваемого отверстия.

Вектор параллельных переносов системы Σ^n относительно системы Σ^4 рассчитывается по формуле (1.30), а матрица A_n вращений системы Σ^n относительно системы Σ^4 – по формуле (1.31).

Пересчет сил и моментов в координатные системы Σ^4 , Σ^3 , Σ^2 и определение величин δ_x , δ_y , δ_z , φ_x , φ_y , φ_z , а также составляющих векторов \vec{r}_0^* и элементов соответствующих матриц A_* совершенно аналогичен уже рассмотренным при торцевом фрезеровании.

Несколько отличается рассмотрение второй ветви цепочки координатных систем – систем Σ^n , Σ^5 и Σ^6 . Координаты точки M в начальном положении в системе координат Σ^n следующие:

$$\vec{r}^n = \begin{pmatrix} x^n \\ R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Под действием силы P_y^n борштанга прогибается на величину y_6 , которую можно определить, приняв какую-либо схему замещения борштанги. Если считать борштангу консольной балкой с жесткой заделкой, то величина прогиба будет

$$y_6 = P_y \frac{l^3}{3EJ}, \quad (1.47)$$

где l – вылет борштанги, $l = x^n$; EJ – жесткость балки (борштанги).

Точно так же происходит прогиб борштанги под действием силы P_z :

$$Z_6 = P_z \frac{l^3}{3EJ}. \quad (1.48)$$

С учетом (1.47) и (1.48) вектор \bar{r}^n и при резании примет следующий вид:

$$\bar{r}^n = \begin{pmatrix} X^n \\ R - Yb \\ -Zb \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Для расчета величин $\delta_x^n, \delta_y^n, \delta_z^n, \varphi_x^n, \varphi_y^n, \varphi_z^n$ используется система уравнений, аналогичная системе (1.26). Силы P_x, P_y, P_z рассчитываются по формулам (1.44), моменты сил определяются по формулам

$$\begin{aligned} L_x^s &= P_z(Y^n + Y_0^n) - P_y(Z^n + Z_0^n), \\ L_y^s &= P_x(Z^n + Z_0^n) - P_z(X^n + X_0^n), \\ L_z^s &= P_y(X^n + X_0^n) - P_x(Y^n + Y_0^n). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Подобным образом находятся величины $\delta_x^5, \delta_y^5, \dots$ и определяются элементы матриц A_u, A_5, A_6 и составляющие векторов $\bar{r}_0^n, \bar{r}_0^5, \bar{r}_0^6$.

Таким образом, мы определили все необходимые данные для вычисления вектора \bar{r}^n по формуле (1.42). Годограф вектора \bar{r}^n лежит на поверхности обработки и представляет собой винтовую линию с шагом, равным подаче на оборот. Рассматривая сечения поверхности детали, перпендикулярные оси $O^n X^n$, получаем профиль в поперечном сечении, а совокупность этих профилей дает нам представление о точности обработки в целом в отношении формы и размеров поверхности отверстия.

В нашем случае обработки корпусных деталей большое значение имеет положение поверхности, характеризуемое положением ее оси относительно технологических баз. Вообще говоря, вначале нужно определить, что мы будем понимать под осью реальной, т.е. искаженной поверхностью отверстия.

Если отверстие достаточно короткое ($l \leq d$), то его осью будем считать прямую, параметры которой определяются из условия

$$S = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \rightarrow \min_{a, b, p, q}, \quad (1.51)$$

где ρ_i – расстояние от i -й точки поверхности детали до прямой (оси), $i = \overline{1, n}$; a, b, p, q – параметры прямой.

Точки поверхности детали будем выбирать при значениях угла поворота инструмента φ_n , кратных $1/4$ оборота, т.е. это точки $\bar{r}_i^n \left((i-1) \frac{\pi}{2} \right)$, где \bar{r}_i^n – радиус-вектор цилиндрической поверхности. Квадрат расстояния ρ_i^2 от точки $r_i^n = (x_i, y_i, z_i)'$ до прямой, определяемой уравнениями (1.39), будет

$$\rho_i^2 = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ p-y_i & q-z_i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q-z_i & -x_i \\ b & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -x_i & p-y_i \\ 1 & a \end{vmatrix}^2}{1+a^2+b^2}. \quad (1.52)$$

С учетом (1.52) выражение (1.51) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} S = & \left(b^2 p^2 + a^2 q^2 + q^2 + p^2 + 2(qb + ap) \sum_{i=1}^n x_i - \right. \\ & - 2bpaq - 2(b^2 p - baq + p) \sum_{i=1}^n y_i + 2(bpa - a^2 q - q) \sum_{i=1}^n z_i + \\ & + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n x_i^2 + (b^2 + 1) \sum_{i=1}^n y_i^2 + (a^2 + 1) \sum_{i=1}^n z_i^2 - \\ & \left. - 2a \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^n x_i z_i - 2ab \sum_{i=1}^n y_i z_i \right) / (1 + a^2 + b^2). \quad (1.53) \end{aligned}$$

Нахождение минимума функции (1.53) классическими методами дифференциального исчисления весьма затруднительно, так как это приводит к решению системы четырех уравнений 5-й степени. Поэтому для решения оптимальной задачи имеет смысл применить какой-либо численный метод нахождения экстремума. Так как нет сведений относительно унимодальности функции (1.53), а исследование на унимодальность достаточно сложно само по себе, то необходимо применять методы нахождения глобального минимума, среди которых наиболее просто реализуется на ЭВМ метод Монте-Карло [18]. В этом методе для каждой псевдослучайной четверки a, b, p, q , равномерно распределенной внутри некоторого объема, задаваемого неравенствами

$$\begin{aligned} a_{\min} & \leq a \leq a_{\max}, \\ b_{\min} & \leq b \leq b_{\max}, \\ p_{\min} & \leq p \leq p_{\max}, \\ q_{\min} & \leq q \leq q_{\max}, \end{aligned}$$

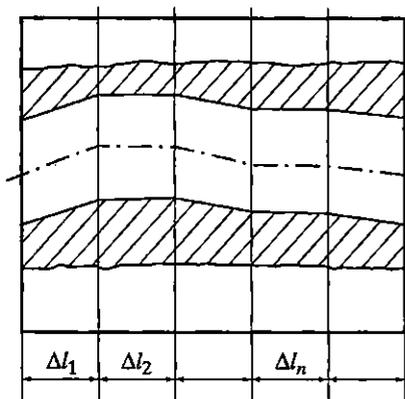


Рис. 1.9. «Ломаная ось» отверстия

где минимальные и максимальные значения определяются, исходя из сведений о погрешностях обработки на данном станке, вычисляются значения функции S . Далее определяется минимальное значение S .

Найденные «оптимальные» параметры прямой определяют положение растачиваемого отверстия в пространстве.

В случае длинных отверстий понятие «ось отверстия», если оно не идеальной формы, теряет смысл. Можно разбить отверстие на участки длиной Δl и на каждом участке определить «свою» ось со своими параметрами. Общая «ось» будет ломаной прямой (рис. 1.9).

На первом участке отрезок ломаной определяется из решения задачи (1.51). На втором и следующих участках в силу непрерывности ломаной оси будут проходить через фиксированные точки – координаты конца оси предыдущего участка. Уравнение «промежуточной» оси следующее:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (1.54)$$

где (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка.

В этом случае необходимо определить только два параметра: m и n . Будем определять их значения из условия (1.15) методом, аналогичным рассмотренному.

Для вычисления координат кинематического винта Φ необходимо знание составляющих силы резания, которые, в свою очередь, зависят при прочих равных условиях от скорости подачи и глубины резания. Глубина резания или припуск могут меняться как в продольном, так и в поперечном сечениях отверстия, особенно это заметно на черновых проходах.

Переменный во времени припуск будем определять по формуле (1.26). Радиус-вектор настройки $\bar{r}^n(t)$ вычисляется по формуле

$$\bar{r}^n(t) = \bar{r}_0^5 + \bar{r}_0^6 + \bar{r}_0^n + A_n \bar{r}^n - \bar{r}_0^2 - r_0^3 - \bar{r}_0^4 - \bar{r}_0^n = \bar{r}_0 + A_n \bar{r}^n, \quad (1.55)$$

где

$$\bar{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0^H - S_0 nt \\ y_0^H \\ z_0^H \end{pmatrix}; \quad A_n \bar{r}^H = \begin{pmatrix} x^H \\ R \cos \varphi_n \\ R \sin \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Чтобы вычислить радиус-вектор заготовки $r^{\text{заг}}(t)$, необходимо определить положение поверхности заготовки в системе координат, построенной на технологических базах.

Цилиндрическая поверхность задается пятью параметрами. Мы будем рассматривать искаженную поверхность, обладающую конусностью. Ось поверхности может занимать в пространстве случайное положение, определяемое четырьмя случайными величинами или параметрами. Если ось на чертеже задается расстояниями от двух плоскостей и допусками на них, а также допустимой величиной непараллельности относительно двух базовых плоскостей, то естественно ввести следующие фазовые координаты оси (рис. 1.10):

y_0, z_0 – координаты точки пересечения оси Δ с плоскостью yOz ;

ξ – угол между осями Δ и x , характеризующий непараллельность Δ относительно плоскостей xOy и xOz , принимаемых за базовые;

η – угол между проекцией Δ на плоскость yOz и осью x , характеризующий «направление» непараллельности.

Распределение случайных величин y_0, z_0 и ξ будем считать известным. Величина η , если «направление» непараллельности не задано, распределена равномерно в интервале $[0, \pi]$.

Каноническое уравнение прямой Δ , проходящей через точку $(0, y_0, z_0)$, имеет вид

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (1.56)$$

Косинус угла между прямой Δ и осью x будет

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}. \quad (1.57)$$

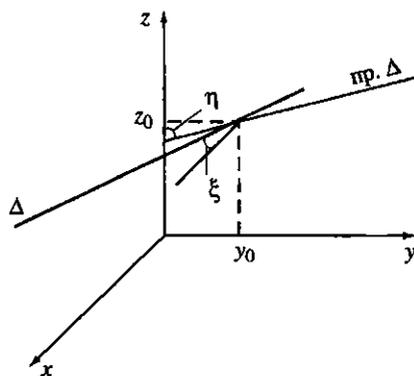


Рис. 1.10. Параметры случайной прямой Δ

Уравнение проекции Δ на плоскость yOz запишется, как

$$\frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (1.58)$$

Отсюда тангенс угла между проекцией Δ и осью z будет

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{m}{n}. \quad (1.59)$$

Решая совместно уравнения (1.57) и (1.59) относительно параметров m и n , получаем

$$m = \cos \eta \operatorname{tg} \xi, \quad n = \sin \eta \operatorname{tg} \xi.$$

Теперь уравнение случайной оси Δ можно записать следующим образом:

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{\operatorname{tg} \xi \cos \eta} = \frac{z - z_0}{\operatorname{tg} \xi \sin \eta}. \quad (1.60)$$

Чтобы задать случайную коническую поверхность, введем новую систему координат $O'x'y'z'$. Начало отсчета O' в старой системе имеет координаты $(0, y_0, z_0)$, ось x' совпадает с прямой Δ , ось z' перпендикулярна оси y . Эти условия позволяют определить элементы вектора параллельных переносов и матрицы поворотов новой системы относительно старой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

где α_{ij} – угол между i -й координатой новой системы и j -й координатой старой системы. Из уравнения (1.60) определим направляющие косинусы оси x' :

$$\cos \alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta}} = \cos \xi,$$

$$\cos \alpha_{21} = \operatorname{tg} \xi \cos \eta \cos \xi = \sin \xi \cos \eta,$$

$$\cos \alpha_{31} = \operatorname{tg} \xi \sin \eta \cos \xi = \sin \xi \sin \eta.$$

Уравнение оси z' примет вид

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{n_3}. \quad (1.62)$$

Условие ортогональности прямых (1.60) и (1.62) позволяет определить коэффициент n_3 :

$$1 + \operatorname{tg} \xi \cos \eta \cdot 0 + \operatorname{tg} \xi \sin \eta \cdot n_3 = 0.$$

Отсюда

$$n_3 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \xi \sin \eta}.$$

Направляющие косинусы оси z' будут

$$\cos \alpha_{31} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta + 1}}{\operatorname{tg} \xi \sin \eta},$$

$$\cos \alpha_{23} = 0,$$

$$\cos \alpha_{33} = -\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta + 1}}{\operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta}.$$

Уравнение оси y' запишем как

$$\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2}. \quad (1.63)$$

Условия ортогональности прямой (1.63) к прямым (1.60) и (1.62) позволяют определить коэффициенты m_2 и n_2 :

$$1 + \operatorname{tg} \xi \cos \eta \cdot m_2 + \operatorname{tg} \xi \sin \eta \cdot n_2 = 0, \quad 1 + m_2 \cdot 0 + n_2 \cdot n_3 = 0.$$

Отсюда

$$n_2 = \operatorname{tg} \xi \sin \eta, \quad m_2 = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta}{\operatorname{tg} \xi \cos \eta}.$$

Направляющие косинусы оси y' будут

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\cos \xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta}},$$

$$\cos \alpha_{22} = -\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta} \cdot \cos^2 \xi}{\sin \xi \cos \eta},$$

$$\cos \alpha_{32} = \frac{\sin \xi \sin \eta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi \sin^2 \eta}}.$$

В системе координат $O'x'y'z'$ зададим конус следующими кинематическими уравнениями:

$$x' = S_0 n t,$$

$$y' = (R_3 + S_y nt) \cos \varphi, \quad (1.64)$$

$$z' = (R_3 + S_y nt) \sin \varphi,$$

где R_3 – радиус заготовки (конуса) в сечении координатной плоскостью $y'O'z'$;

$$S_y = \lambda S_0 \frac{k}{l};$$

λ – случайная величина, принимающая равновероятно значения +1 и -1, характеризующая «направление конусности»;

k – величина конусности;

l – длина отверстия;

$$\varphi = \frac{2\pi n}{60} t;$$

t – время.

Величины R_3 и k случайные, распределение которых следует считать заданным.

Преобразование (1.61) определяет положение случайной цилиндрической поверхности заготовки относительно системы координат $Oxyz$, построенной на технологических базах.

Предположим, что на первых операциях произошла обработка поверхностей (плоскости π_1 , «прямой» L_1 и «точки» P_1) (рис. 1.11), которые будут служить технологическими базами при дальнейшей обработке отверстия.

Обработанные поверхности π_1 , L_1 , P_1 образуют систему координат $O^1x^1y^1z^1$, которая связана с системой координат $Oxyz$ следующими уравнениями перехода:

$$- \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \\ z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Положение плоскости π_1 получено при обработке от системы технологических баз $Oxyz$. Ее уравнение по структуре совпадает с уравнением (1.4):

$$z - z_0 = \frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} x - \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} y. \quad (1.66)$$

Величины z_{01} , ψ_1 и θ_1 – случайные.

Положение «прямой» L_1 (направляющей базы) уже определяется не четырьмя случайными параметрами, как в уравнении

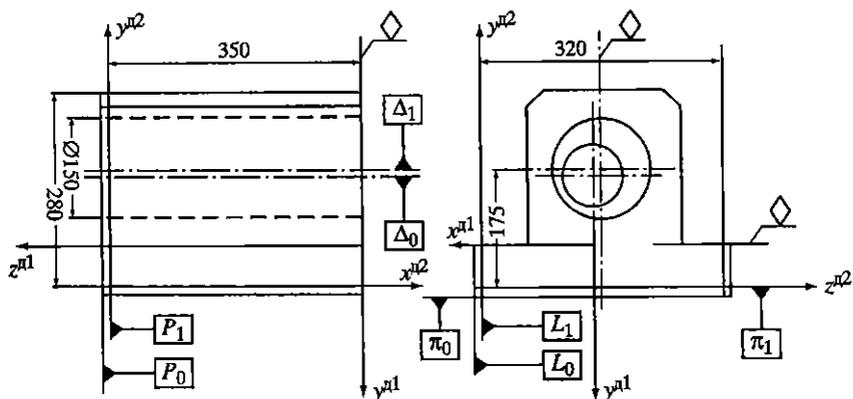


Рис. 1.11. Чертеж детали с указанием ориентирующих координатных систем Σ^{D1} и координатной системы Σ^{D2} , в которой обрабатывается отверстие Δ

(1.60), а только двумя, так как направляющая база лишает деталь двух степеней свободы.

Уравнение прямой L_1 тогда будет

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}. \quad (1.67)$$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки: (x', y', z') и (x'', y'', z'') , контактирующие с направляющей базой приспособления.

Предположим, что направляющая база L_1 связана с координатной плоскостью xOz . Тогда можно считать, что координаты $z' = z''$, x' и x'' неслучайны. Положение L_1 определяется двумя случайными параметрами: y' и y'' .

Положение базирующей «точки» (опорной базы) определяется тремя координатами (x_p, y_p, z_p) . Опорную базу в этом случае свяжем с координатной плоскостью yOz . Тогда можно считать, что координаты y_p и z_p неслучайны. Положение P_1 определяется одним случайным параметром x_p .

Таким образом, система координат $0^1x^1y^1z^1$, проведенная через базовые поверхности π_1 , L_1 и P_1 , определяется шестью случайными параметрами, что вполне согласуется с известными положениями теоретической механики и аналитической геометрии.

Определим коэффициенты уравнений перехода (1.65). Координатная плоскость $x^10^1y^1$ совпадает с плоскостью π_1 . Отсюда

направляющие косинусы оси z^1 будут

$$\cos \alpha_{31} = \frac{\sin \psi_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + 1}}, \quad \cos \alpha_{32} = -\frac{\sin \psi_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + 1}},$$

$$\cos \alpha_{33} = -\frac{\sin \theta_1}{\sqrt{\cos^2 \theta_1 + 1}}.$$

Координатную плоскость $x^1 0^1 z^1$ проведем через прямую L_1 перпендикулярно плоскости $x^1 0^1 y^1$.

Перепишем уравнение прямой L_1 в формуле (1.67) как пересечение двух плоскостей:

$$x - \frac{x'' - x'}{y'' - y'} y + y' - x' = 0,$$

$$x - \frac{x'' - x'}{z'' - z'} z + z' - x' = 0. \quad (1.68)$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (1.68), следующее:

$$x - \frac{x'' - x'}{y'' - y'} y + y' - x' + k \left(x - \frac{x'' - x'}{z'' - z'} z + z' - x' \right) = 0$$

или

$$(1+k)x - \frac{x'' - x'}{y'' - y'} y - k \frac{x'' - x'}{z'' - z'} z + y' - (k+1)x' + kz' = 0. \quad (1.69)$$

Произвольную постоянную k найдем из условия перпендикулярности плоскостей $x^1 0^1 y^1$ и $x^1 0^1 z^1$:

$$\frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} (1+k) + \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} \cdot \frac{x'' - x'}{y'' - y'} + \frac{k(x'' - x')}{z'' - z'} = 0. \quad (1.70)$$

Отсюда

$$k = -\frac{\frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} + \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} \cdot \frac{x'' - x'}{y'' - y'}}{\frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} + \frac{x'' - x'}{z'' - z'}}.$$

Подставляем значение k в (1.69), получим уравнение плоскости $x^1 0^1 z^1$. Теперь можно получить значение направляющих косинусов оси y^1 :

$$\cos \alpha_{21} = \frac{1+k}{\sqrt{(1+k)^2 + \left(\frac{x''-x'}{y''-y'}\right)^2 + \left(k \frac{x''-x'}{z''-z'}\right)^2}},$$

$$\cos \alpha_{22} = \frac{\frac{x''-x'}{y''-y'}}{\sqrt{(1+k)^2 + \left(\frac{x''-x'}{y''-y'}\right)^2 + \left(k \frac{x''-x'}{z''-z'}\right)^2}},$$

$$\cos \alpha_{23} = \frac{-k \frac{x''-x'}{z''-z'}}{\sqrt{(1+k)^2 + \left(\frac{x''-x'}{y''-y'}\right)^2 + \left(k \frac{x''-x'}{z''-z'}\right)^2}}.$$

Координатную плоскость $y^1 0^1 z^1$ проведем через точку P_1 перпендикулярно плоскости $x^1 0^1 y^1$. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку P_1 , примет вид

$$A(x - x_p) + B(y - y_p) + 1 \cdot (z - z_p), \quad (1.71)$$

Условия перпендикулярности запишем как

$$\frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} A - \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} B - 1 = 0,$$

$$(1+k)A - \frac{x''-x'}{y''-y'} B - k \frac{x''-x'}{z''-z'} = 0. \quad (1.72)$$

Решая систему (1.72) относительно неизвестных A и B , получим следующие значения:

$$A = \frac{k \frac{x''-x'}{z''-z'} \cdot \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} - \frac{x''-x'}{y''-y'}}{(1+k) \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} - \frac{x''-x'}{y''-y'} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1}},$$

$$B = \frac{k \frac{x''-x'}{z''-z'} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} - (1+k)}{(1+k) \frac{\cos \theta_1}{\cos \psi_1} - \frac{x''-x'}{y''-y'} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1}}.$$

Подставляя значения A и B в (1.71), получим уравнение плоскости $x^1 y^1 z^1$. Отсюда значения направляющих косинусов оси x^1

будут следующие:

$$\cos \alpha_{11} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}; \quad \cos \alpha_{12} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}};$$

$$\cos \alpha_{13} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Координаты точки O_1 получим, решая совместно уравнения координатных плоскостей $x^1 0^1 y^1, x^1 0^1 z^1, y^1 0^1 z^1$:

$$x - z_{01} = \frac{\sin \psi_1}{\cos \theta_1} x - \frac{\cos \psi_1}{\cos \theta_1} y,$$

$$(1+k)x - \frac{x'' - x'}{y'' - y'} y - k \frac{x'' - x'}{z'' - z'} z + y' - (k+1)x' + kz' = 0, \quad (1.73)$$

$$A(x-x_p) + B(y-y_p) - 1 \cdot (z-z_p) = 0.$$

Пусть решение системы (1.73) дает следующие координаты точки $O_1 (x_{01}, y_{01}, z_{01})$ в системе $0 x y z$. Используя уравнения (1.65), получим координаты точки O в системе $0^1 x^1 y^1 z^1$:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \\ z_{01} \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Таким образом, мы определили все коэффициенты преобразования (1.65), посредством которого случайная цилиндрическая поверхность заготовки из ориентирующей системы координат $0 x y z$ переводится в систему координат $0^1 x^1 y^1 z^1$ (технологические базы). Последовательное применение формул (1.61) и (1.65) к поверхности (1.64) позволяет получить значение радиуса-вектора $r^1(t) = r^{\text{зар}}(t)$ и, следовательно (см. формулу (1.36)), значение текущего припуска $z(t)$.

В качестве примера рассмотрим обработку плоскости π и отверстия Δ на детали «Корпус», показанной на рис. 1.11.

Поверхность заготовки π_0 задана в системе координат Σ^1 , построенной на технологических базах, уравнение

$$\pi_0 : y - y_0 = \frac{\sin \psi}{\cos \theta} z - \frac{\cos \psi}{\cos \theta} x,$$

величины y_0 и θ имеют нормальные распределения с параметрами

$$y_0 \rightarrow N(m_{y_0}^{\pi_0}, \sigma_{y_0}^{\pi_0}),$$

$$\theta \rightarrow N(m_{\theta}^{\pi_0}, \sigma_{\theta}^{\pi_0}),$$

причем $m_{y_0}^{\pi_0} = 64$; $\sigma_{y_0}^{\pi_0} = 0,1$; $m_{\theta}^{\pi_0} = 0,00086$; $\sigma_{\theta}^{\pi_0} = 0,00029$. Поверхность отверстия задана в этой же системе координат своей осью:

$$\Delta_0 = \frac{z}{1} = \frac{x - x_0}{tg\xi \cos \eta} = \frac{y - y_0}{tg\xi \sin \eta},$$

где

$$\xi \rightarrow N(m_{\xi}^{\Delta_0}, \sigma_{\xi}^{\Delta_0}),$$

$$x_0 \rightarrow N(m_{x_0}^{\Delta_0}, \sigma_{x_0}^{\Delta_0}),$$

$$y_0 \rightarrow N(m_{y_0}^{\Delta_0}, \sigma_{y_0}^{\Delta_0}),$$

радиусом

$$R_3 \rightarrow N(m_{R_3}, \sigma_{R_3})$$

и конусностью

$$k \rightarrow N(m_k, \sigma_k),$$

причем $m_{\xi}^{\Delta_0} = 0,00086$; $\sigma_{\xi}^{\Delta_0} = 0,00029$; $m_{x_0}^{\Delta_0} = 0$; $\sigma_{x_0}^{\Delta_0} = 0,067$; $m_{y_0}^{\Delta_0} = -115$; $\sigma_{y_0}^{\Delta_0} = 0,1$; $m_{R_3} = 73$; $\sigma_{R_3} = 0,1$; $m_k = 0,15$; $\sigma_k = 0,05$.

Численные значения параметров приняты в предположении, что заготовка – отливка 1-го класса точности. Гипотеза о нормальности подтверждается большим статистическим материалом [17].

Алгоритм, моделирующий обработку на многоцелевом станке, переводит поверхность заготовки π_0 в обработанную поверхность π_1 , заданную в той же системе координат уравнением

$$\pi_1 : y - y_0 = \frac{\sin \psi}{\cos \theta} z - \frac{\cos \psi}{\cos \theta} x,$$

где $y_{0cp}^{\pi_1} = 60,5$; $\omega_{y_0}^{\pi_1} = 0,25$; $\theta_{cp}^{\pi_1} = 0,00012$; $\omega_{\theta}^{\pi_1} = 0,00034$.

«Обработка» направляющей базы L_0 и опорной – P_0 дала следующее уравнение для L_1 :

$$L_1 : \frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'},$$

где $z' = z''$, y' и y'' – неслучайные величины;

$$x' \rightarrow N(m_{x'}^{L_1}, \sigma_{x'}^{L_1});$$

$$x'' \rightarrow N(m_{x''}^{L_1}, \sigma_{x''}^{L_1});$$

и координаты для P_1

$$P_1: (x \ y \ z),$$

где x и y – неслучайные величины;

$$z \rightarrow N(m_z^{P_1}, \sigma_z^{P_1}),$$

причем $m_{x'}^{L_1} = 175$; $\sigma_{x'}^{L_1} = 0,035$; $m_{x''}^{L_1} = 175$; $\sigma_{x''}^{L_1} = 0,035$; $m_z^{P_1} = 350$; $\sigma_z^{P_1} = 0,083$.

Поверхности π_1 , L_1 , P_1 образуют комплект технологических баз и, следовательно, систему координат Σ^{n^2} , от которой обрабатывается отверстие.

Параметры заготовки пересчитываются в систему координат Σ^{n^2} . В этой же системе координат мы получаем параметры оси обработанного отверстия Δ_1 (значения угловых величин даны в радианах):

$$y_{0\text{cp}}^{\Delta_1} = 175,4; \quad \omega_{y_0}^{\Delta_1} = 0,051; \quad z_{0\text{cp}}^{\Delta_1} = 175,4; \quad \omega_{z_0}^{\Delta_1} = 0,051;$$

$$\xi_{\text{cp}}^{\Delta_1} = 0,00015; \quad \omega_{\xi}^{\Delta_1} = 0,00027.$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ И РАЗРАБОТКА УСТРОЙСТВ УПРАВЛЕНИЯ ФОРМООБРАЗУЮЩИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

2.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗА ДЕТАЛИ

Статистическая обработка экспериментальных данных. Точность токарной обработки [8] – это степень соответствия обработанной детали рабочему чертежу. Чем больше соответствие, тем выше точность. Точность характеризуется погрешностями, которые определяются разностью между действительным и заданным значениями параметра.

Погрешности обработанной детали являются результатом воздействия на процесс обработки многочисленных факторов и вызываемых ими элементарных погрешностей обработки. К ним относятся:

- специфические свойства динамической системы токарного станка в процессе обработки (в частности, упругие деформации технологической системы, динамические характеристики процесса резания, степени устойчивости замкнутой динамической системы станка);

- деформации заготовки под влиянием усилий резания;
- размерный износ резца;
- погрешности настройки станка;
- геометрические погрешности станка;
- погрешности способа формообразования;
- погрешности изготовления и установки инструмента;
- тепловые деформации звеньев технологической системы под воздействием внешних и внутренних тепловых полей.

Доля погрешностей, вызванных перечисленными факторами, в общем балансе точности обработки может быть различной. Ряд факторов практически не изменяется в процессе обработки. К ним относятся деформации заготовки и элементов технологической системы под влиянием усилий закрепления, погрешности базовых поверхностей заготовки и установки ее на станке, погрешности изготовления и установки инструмента.

Ряд факторов [3] существенно изменяется в процессе обработки под воздействием переменных усилий, переменной жесткости, изменения температурных условий, изменения рабочих процессов резания. При этом факторы и их следствия – погрешности обработки могут содержать систематические и случайные составляющие.

Примером систематической погрешности обработки является геометрическая погрешность токарного станка. Так, при обработке вращающейся детали непараллельность оси вращения и траектории движения резца вызывает образование на детали конусности, а их перекося – гиперболоидальность обработанной поверхности. Неравномерная по углу поворота жесткость шпиндельного узла приводит к систематической составляющей погрешности формы поперечного сечения.

Многие из действующих факторов, а также их совокупность приводят к появлению случайных погрешностей, которые проявляются в рассеянии параметров, характеризующих точность обработки. Особенность проявления причин, вызывающих случайные погрешности, заключается в том, что они не поддаются точному прогнозированию и проявляют свое действие независимо друг от друга. Причинами случайных погрешностей могут быть колебания твердости материала заготовки, неоднородность припуска, положение заготовки из-за некачественного базирования, температурный режим, а также затопление инструмента. В результате действия случайных причин при обработке партии деталей на настроенном станке действительные размеры каждой детали являются случайными величинами непрерывного типа, так как они могут принимать любые значения в границах определенного интервала. Совокупность значений действительных размеров деталей, обработанных при неизменных условиях и расположенных в возрастающем порядке, с указанием частоты повторения этих размеров или частных называется распределением размеров деталей.

При различных условиях обработки деталей рассеяние их размеров подчиняется различным математическим законам.

Установлено, что распределение действительных размеров деталей, обработанных на настроенных станках, подчиняется закону нормального распределения Гаусса. Условия соответствия распределения случайных величин определяются согласно теореме Ляпунова:

– влияние каждого из слагаемых на сумму ничтожно мало и примерно одинаково, т.е. нет доминирующих составляющих;

– в состав суммы входит большое число взаимозависимых случайных величин.

Плотность нормального распределения имеет вид

$$y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(L_i - L_{cp})^2}{2\sigma^2}},$$

где σ – среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i (L_i - L_{cp})^2 \frac{m_i}{q}} = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_i (L_i - L_{cp})^2 m_i};$$

e – основание натуральных логарифмов;

L_{cp} – среднее арифметическое действительных размеров деталей партии:

$$L_{cp} = \sum_{i=1}^q L_i \frac{m_i}{q} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q L_i \cdot m_i,$$

где L_i – действительный текущий размер; m_i – частота (число деталей данного интервала размеров); q – количество деталей в партии.

Параметр L_{cp} характеризует положение центра группирования размеров. При $L_i = L_{cp}$ кривая имеет максимум

$$y_{max} = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{\pi}} = \frac{0,4}{\sigma}.$$

Координаты точек перегиба A и B определяются уравнением

$$y_A = y_B = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e} \approx 0,6 y_{max}.$$

В пределах $\pm 3\sigma$ расположено 99,73 % всей площади, ограниченной кривой Гаусса. Поэтому в практике принимают, что с вероятностью 99,73 % все распределение находится в пределах $\pm 3\sigma$. Среднее квадратичное отклонение σ показывает, насколько тесно сгруппированы действительные размеры около центра группирования, т.е. является мерой рассеяния или мерой точности. На практике кривая распределения деталей отклоняется от теоретической кривой нормального распределения. Оценка отклонения производится при помощи коэффициента асимметрии α и коэффициента крутости или эксцесса τ :

$$\alpha = \frac{\sum_i (L_i - L_{cp})^3 m_i}{q \cdot \sigma^3}; \quad \tau = \frac{\sum_i (L_i - L_{cp})^4}{q \cdot \sigma^4} - 3.$$

Закон нормального распределения справедлив для деталей, обработанных на токарном станке с точностью 8-го качества и грубее. Фактическое поле рассеяния $\omega = 6\sigma$.

Систематические погрешности складываются алгебраически, случайные – по правилу суммирования дисперсий:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_q^2}.$$

Определение геометрического образа и показателей точности в поперечном сечении детали. Рассмотрим экспериментальное построение геометрического образа цилиндрической детали на основе построения прилегающих линий и поверхностей для оценки отклонения формы профилей сечений и поверхностей, что позволяет определить параметры прилегающей окружности и прилегающего цилиндра посредством оптимального перебора всех возможных окружностей.

В целях нахождения прилегающей окружности для поперечного сечения цилиндрической поверхности предлагается из совокупностей всех возможных окружностей путем перебора выделять прилегающую окружность минимального радиуса.

Из теории ошибок следует, что отклонение от центра искомой окружности тем меньше, чем больше расстояние между рассматриваемыми точками. Следовательно, в качестве рассматриваемых точек m_{1i}, m_{2i}, m_{3i} , где $i = 1, n$, необходимо выбрать точки, наиболее удаленные друг от друга.

Далее вычисляются по представленным ниже формулам параметры опорного треугольника, которыми являются координаты центра и радиус описанной окружности:

$$x_{0i} = \frac{(y_{m2i} - y_{m3i})(x_{m1i}^2 - x_{m3i}^2 + y_{m1i}^2 - y_{m3i}^2)(y_{m1i} - y_{m3i})(x_{m2i}^2 - x_{m3i}^2 + y_{m2i}^2 - y_{m3i}^2)}{2[(x_{m1i} - x_{m3i})(y_{m2i} - y_{m3i}) - (x_{m2i} - x_{m3i})(y_{m1i} - y_{m3i})]},$$

$$y_{0i} = \frac{(x_{m2i} - x_{m3i})(x_{m1i}^2 - x_{m3i}^2 + y_{m1i}^2 - y_{m3i}^2)(x_{m1i} - x_{m3i})(x_{m2i}^2 - x_{m3i}^2 + y_{m2i}^2 - y_{m3i}^2)}{2[(x_{m1i} - x_{m3i})(y_{m2i} - y_{m3i}) - (x_{m2i} - x_{m3i})(y_{m1i} - y_{m3i})]},$$

$$R_{0i} = \sqrt{(x_{m1i} - x_{0i})^2 + (y_{m1i} - y_{0i})^2},$$

где $x_{m1(2,3)}$ и $y_{m1(2,3)}$ – координаты точек $m_{1(2,3)}$.

Затем осуществляется переход к соседним точкам в направлении по или против часовой стрелки и вычисления повторяются. Переходы повторяются до тех пор, пока начальной

точкой не окажется точка m со вторым индексом $i = n$. Во время этой процедуры как бы происходит вращение опорного треугольника.

После генерации совокупностей точек опорного треугольника и определения параметров x_{0i} , y_{0i} и R_{0i} осуществляется поиск окружности с наименьшим радиусом, для которого выполняется условие нахождения внутри нее всех точек. Для этой цели рассчитываются радиусы-векторы r_{ij} (где $j = 1, p$) с центром (x_{0i}, y_{0i}) и проверяется неравенство $R_{0i} \geq r_{0i}$.

Эту методику нахождения прилегающей окружности удобно использовать и при построении прилегающего цилиндра для реальной цилиндрической поверхности. Все измеренные точки цилиндрической поверхности проецируются на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра и проходящую через точку пересечения этой оси с торцом исследуемой поверхности.

Определяя из полученной совокупности точек (их число равно n_p) точки, наиболее удаленные от центра профиля, получают множество из n точек, для которого, используя описанную выше методику, находят параметры описанной прилегающей окружности. На ее базе строят правильный цилиндр с основанием в виде найденной прилегающей окружности и высотой L , равной высоте h исследуемой цилиндрической поверхности, деленной на косинус угла между торцом данной поверхности и ее осью. Полученный цилиндр будет искомым (прилегающим для исследуемой цилиндрической поверхности).

Расчеты по данной методике показали, что при количестве точек за оборот более 200 машинное время для поиска прилегающей окружности составляет несколько минут, что недопустимо в условиях реального производства. Поэтому были приложены усилия для поиска более простого варианта решения поставленной задачи.

Для построения геометрического образа в поперечном сечении детали достаточно определить перемещение оси детали $X_{дi}$ и вершины резца X_{pi} по углу поворота шпинделя φ только по оси X и рассчитать текущий радиус детали по формуле

$$R_d = \frac{D_n}{2} - X_{дi} + X_{pi}.$$

Измерительная система, установленная на станке МК-3002, позволяет измерять $X_{дi}$ и X_{pi} и через плату связи типа ЛА-2

Таблица 2.1. Значения перемещения оси детали и вершины резца

№ п/п	x_d , мкм	x_p , мкм	№ п/п	x_d , мкм	x_p , мкм	№ п/п	x_d , мкм	x_p , мкм
1	14,28	3	41	99,96	12,5	81	142,8	11
2	14,28	2,25	42	99,96	10,25	82	142,8	13,75
.....								
139	35,7	14	169	0	6	199	7,14	7,5
140	35,7	10,5	170	0	6,25	200	7,14	5,25

подавать их на компьютер для статистической обработки. Обработанные данные представлены в виде табл. 2.1.

Построение геометрического образа в поперечном сечении детали показано на (рис. 2.1). Это построение производится по образцу построения профилограмм на кругломерах. В качестве исходной выбирается окружность l , относительно которой строится геометрический образ. Диаметр окружности l соответствует настроечному диаметру D_d при обработке конкретной детали на токарном станке. Настроечный диаметр строится в масштабе 1 : 1. Если будем откладывать отклонения геометрического образа в этом же масштабе, то эти отклонения будут укладываться в толщину линии чертежа, так как они измеряются в десятках и единицах микрометров. Поэтому для отклонений геометрического образа используется другой масштаб, при котором 1 мкм отклонения геометрического образа соответствует на чертеже отрезку, равному 1 мм. Это позволяет получить наглядную картину искажения обработанной поверхности детали. Но не следует забывать, что эта картина является искаженной, точно так же, как и круглограмма.

Отметчик оборотов подает сигнал положения шпинделя на плату ЛА-2. Это положение фиксируется как точка A_i и находится на положительной ветви оси Y (рис. 2.1). На чертеже шпиндель вращается против часовой стрелки и поэтому, когда он повернется на угол 90° , то точка A_i будет лежать на отрицательной ветви оси x , и так далее.

Построение начинается с точки A_1 . Из табл. 2.1 берутся значения перемещений оси детали x_{d1} и вершины резца x_{p1} для точки A_1 , и определяется их алгебраическая сумма $x_{d1} + x_{p1}$, которая откладывается от окружности l по направлению от центра O . Таким образом, получается точка A_1 , которая соответствует геометрическому образу поперечного сечения детали в этом месте. Далее аналогичные построения проводятся для точек A_2, A_3, \dots, A_{200} .

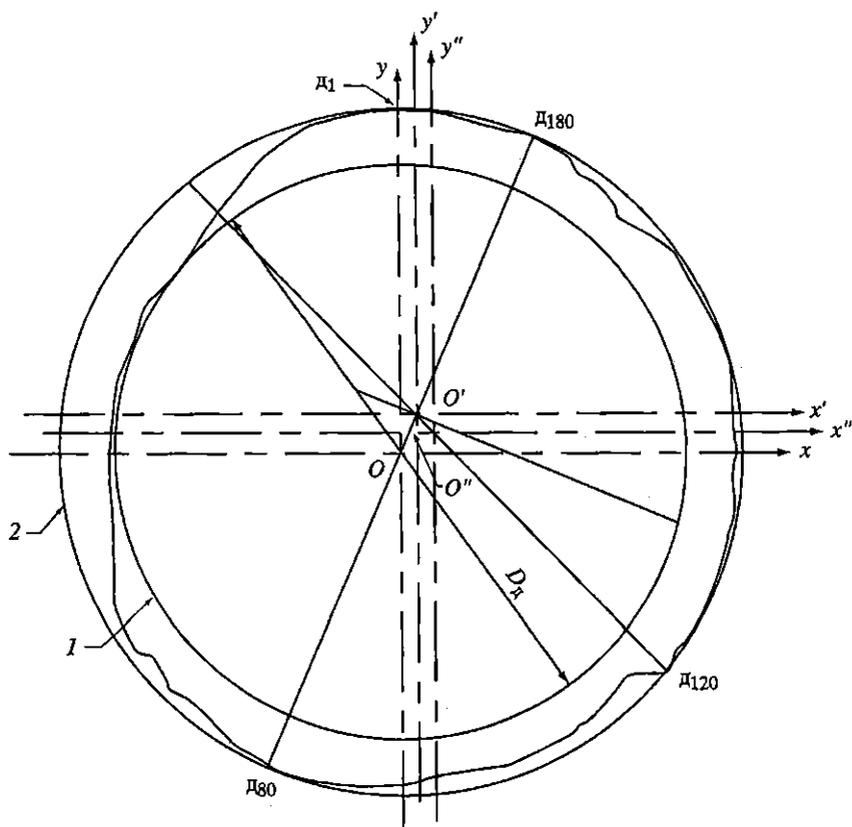


Рис. 2.1. Построение прилегающей окружности

В результате получается кривая геометрического образа поверхности детали в поперечном сечении. Геометрический образ в полной мере отражает все свойства детали и может быть использован для определения показателей точности в поперечном сечении детали. Однако для их определения необходимо иметь базовую окружность в соответствии с ГОСТ 0356-6333 «Отклонения формы и расположения поверхностей». В ГОСТе сказано, что отсчет отклонений формы производится от прилегающей окружности, которой является окружность наименьшего возможного диаметра, описанная вокруг реального профиля или в нашем случае описанная вокруг геометрического образа поперечного сечения детали.

Выше показано, что определение прилегающей окружности с использованием компьютера на основе известных методик составляет несколько минут машинного времени. Поэтому была

разработана оригинальная методика построения прилегающей окружности и по геометрическому образу обрабатываемой поверхности.

Определение и построение прилегающей окружности 2 проводится в следующем порядке. Сначала рассчитываем диаметры геометрического образа по формулам

$$D_{1-101} = D_d + (x_{d1} + x_{p1}) + (x_{d101} + x_{p101})$$

$$D_{2-102} = D_d + (x_{d2} + x_{p2}) + (x_{d102} + x_{p102})$$

$$D_{3-103} = D_d + (x_{d3} + x_{p3}) + (x_{d103} + x_{p103})$$

.....

$$D_{100-200} = D_d + (x_{d100} + x_{p100}) + (x_{d200} + x_{p200})$$

Затем из полученного ряда диаметров выбираем его максимальное значение D_{\max} на (рис. 2.1), это будет D_{80-180} .

Конечные точки диаметра D_{80-180} будут иметь следующие координаты:

$$A_{80} \left[\left(\frac{D_d}{2} + x_{d80} + x_{p80} \right) \sin \frac{360}{200} (101 - 80) \right] \times \\ \times \left[\left(\frac{D_d}{2} + x_{d80} + x_{p80} \right) \cos \frac{360}{200} (101 - 80) \right];$$

$$A_{180} \left[\left(\frac{D_d}{2} + x_{d180} + x_{p180} \right) \sin \frac{360}{200} (201 - 180) \right] \times \\ \times \left[\left(\frac{D_d}{2} + x_{d180} + x_{p180} \right) \cos \frac{360}{200} (201 - 180) \right].$$

Отрезок $A_{80}A_{180}$ делим пополам, используя формулу деления отрезка:

$$x' = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{и} \quad y' = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

где λ – отношение длин, в нашем случае $\lambda = 1$.

Точку с координатами x_1, y_1 принимаем за центр новых осей координат $x'O'y'$. Проводим перерасчет для всех точек A_1-A_{200} их координат в новой системе $x'O'y'$. Из нового центра O' проводим окружность 2 диаметром, равным отрезку $A_{80}A_{180}$. Определяем радиусы $O'A_1, O'A_2, \dots, O'A_{200}$, проведенные из центра O' новой системы координат в точки геометрического образа. Сравним вычисленные радиусы $O'A_1, O'A_2, \dots$ с радиусом окружности

$A_{80}A_{180}/2$. В том случае если все радиусы $O'A_1, O'A_2, \dots, O'A_{200}$ окажутся меньше или равны радиусу окружности $2 A_{80}A_{180}/2$, то окружность 2 является прилегающей и можно приступить к расчету показателей точности.

Если выяснится, что один или несколько радиусов $O'A_1, O'A_2, \dots$ окажутся больше радиуса окружности 2, то расчеты продолжаются. Составляем ряд радиусов, которые оказались больше радиуса окружности 2 и выбираем из него максимальное значение (например, точку A_{120}). Далее будем рассматривать три точки – A_{80}, A_{180} и A_{120} , координаты которых известны. Составляем систему трех уравнений для окружности:

$$\begin{cases} (x_{A_{80}} - a)^2 + (y_{A_{80}} - b)^2 = R^2, \\ (x_{A_{180}} - a)^2 + (y_{A_{180}} - b)^2 = R^2, \\ (x_{A_{120}} - a)^2 + (y_{A_{120}} - b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Решив систему трех уравнений, получаем новую окружность радиуса R'' с центром в точке O'' . Далее расчеты повторяем, а именно переходим в новую систему координат $x''O''y''$, определяем новые координаты точек геометрического образа; находим для них радиусы и сравниваем с радиусом R'' . Если все радиусы геометрического образа равны или меньше R'' , то окружность с центром O'' является прилегающей, и тогда приступаем к расчету показателей точности. Если имеются точки, которые выходят за окружность радиуса R'' , то снова берем три точки и расчеты повторяем. Многочисленные расчеты показали, что уже на 4–5-м этапах поиска прилегающей окружности расчеты заканчиваются.

Имея геометрический образ детали в поперечном сечении и прилегающую окружность с центром $O_{по}$, можно приступить к определению регламентированных показателей точности [3]. Составляется табл. 2.2. В первом столбце таблицы указываются номера референтных меток отметчика оборотов. Так как за один оборот отметчик оборотов делает 200 меток, то угол поворота от одной до следующей метки равен $360^\circ/200$. Во втором столбце приводятся текущие радиусы $R_{д}^{по}$ геометрического образа поперечного сечения детали, которые проводятся из центра прилегающей окружности $O_{по}$. В третьем столбце приводятся значения диаметра геометрического образа в поперечном сечении, которые вычисляются по формуле

$$D_{д}^{по} = R_{д(i)} + R_{д(i+100)}.$$

Таблица 2.2. Данные определения регламентированных показателей точности

Угол поворота шпинделя ϕ	Радиус детали $R_d^{по}$, мкм	Диаметр детали $D_d^{по}$, мкм	Разность $D_{d(i)}^{по} - R_{d(i+50)}^{по}$	Угол поворота шпинделя ϕ	Радиус детали $R_d^{по}$, мкм	Диаметр детали $D_d^{по}$, мкм	Разность $D_{d(i)}^{по} - R_{d(i+50)}^{по}$
1,8	30,0047	60,138	-0,007	64,8	30,0976	60,1523	-0,007
3,6	30,019	60,1451	0	66,6	30,0976	60,1451	-0,014
9	30,0262	30,1523	0,0071	72	30,0976	60,138	-0,007
10,8	30,0262	60,1523	0,0071	73,8	30,1047	60,1451	-0,007

В четвертом столбце приводится разность двух диаметров геометрического образа, расположенных под углом 90° друг к другу:

$$D_{d(i)}^{по} - D_{d(i+50)}^{по}.$$

В соответствии с ГОСТ 10356-63 «Отклонения формы и расположения поверхностей» определяем регламентированные показатели точности поперечного сечения по его геометрическому образу. Из столбца 2 табл. 2.2 выбираем максимальное $R_{d\max}^{по}$ и минимальное $R_{d\min}^{по}$ значения радиуса поперечного сечения детали. Их разность будет соответствовать отклонению от круглости (некруглость):

$$\Delta_{ок} = R_{d\max}^{по} - R_{d\min}^{по}.$$

Из третьего столбца выбираем максимальное и минимальное значения диаметра ($D_{d\max}^{по}$ и $D_{d\min}^{по}$). Их разность соответствует точности размера поперечного сечения детали:

$$\Delta_{тр} = D_{d\max}^{по} - D_{d\min}^{по}.$$

Из четвертого столбца выбираем максимальное значение разности двух диаметров, расположенных под углом 90° друг к другу, что соответствует овальности поперечного сечения детали:

$$\Delta_{ов} = D_{d\max}^{по} - D_{d\min}^{по}.$$

Под волнистостью поверхности понимают совокупность периодически повторяющихся неровностей, у которых расстояния между смежными возвышениями или впадинами превышают

базовую длину L . Волнистость занимает промежуточное положение между отклонениями формы и шероховатостью поверхности. Условно границу между различными порядками отклонений поверхности можно установить по значению отношения шага S_w к высоте неровностей W_z .

При $S_w/W_z < 40$ отклонения относят к шероховатости поверхности, при $40 \geq S_w/W_z < 1000$ – к волнистости, а при $S_w/W_z > 1000$ – к отклонению формы.

Параметры волнистости установлены ГОСТ 3951-73. Высота волнистости W_z есть среднее арифметическое из пяти ее значений (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5), определенных на длине участка измерения L_w , равной не менее пяти действительным наибольшим шагам S_w волнистости (рис. 2.2):

$$W_z = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5}{5}.$$

Отдельное измерение волнистости выполняют по длине l_{wi} , равной пятой части длины L_w . Наибольшая высота волнистости W_{\max} – расстояние между наивысшей и наимысшей точками измеряемого профиля в пределах длины L_w , измеряемое на одной полной волне.

Средний шаг волнистости S_w – среднее арифметическое длин отрезков средней линии S_{wi} , ограниченных точками их пересечения с соседними участками профиля волнистости:

$$S_w = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{wi}.$$

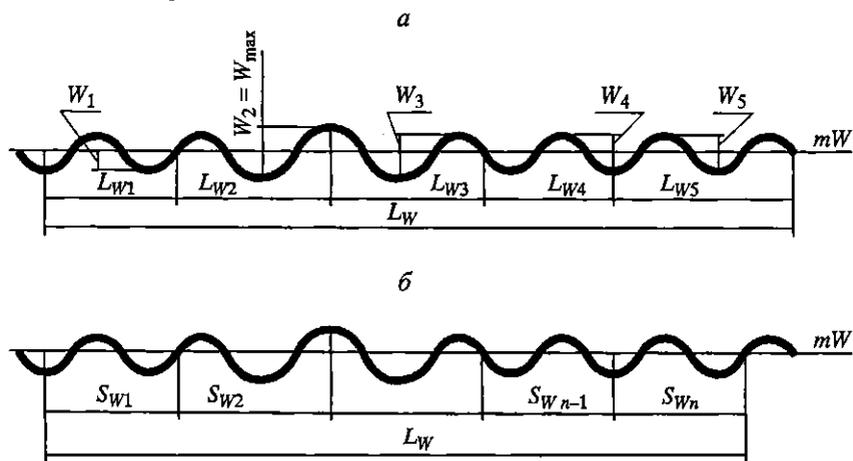


Рис. 2.2. Определение высоты (а) и шага (б) волнистости поверхности

Положение средней линии m_w определяется так же, как и положение средней линии профиля m шероховатости.

Разработан программный подход по расчету показателей точности обработанной детали.

В основу математического определения текущего радиуса геометрического образа в поперечном сечении заложена формула определения расстояния между двумя точками, лежащими на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В нашем случае эта формула используется для определения длины отрезка:

$$AP = \sqrt{(OP \pm x_{di} \pm x_{pi})^2 + (y_{di} \pm y_{pi})^2}.$$

Так как отрезок AP – мгновенный радиус обработки детали, то можно записать

$$R_{di} = \sqrt{\left(\frac{D_n}{2} \pm x_{di} \pm x_{pi}\right)^2 + (y_{di} \pm y_{pi})^2}. \quad (2.1)$$

По этой формуле можно определить точки геометрического образа при токарной обработке в идеальном виде. Определив экспериментально траекторию оси детали, ее текущие координаты x_{di} и y_{di} и траекторию режущей кромки, т.е. текущие координаты x_{pi} и y_{pi} по углу поворота ϕ_i , и подставив их в формулу (2.1), можно определить форму обрабатываемой поверхности детали или ее геометрический образ.

Эксперименты показали, что перемещения оси детали x_{di} и y_{di} и резца x_{pi} и y_{pi} составляют значения, измеряемые единицами или десятками микрометров. Настраечный радиус обработки детали $D_n/2$ обычно измеряется в единицах или десятках и сотнях миллиметров, т.е. на 3–5 порядков больше, чем перемещения x_{di} , y_{di} , x_{pi} , y_{pi} . Так как величина $D_n/2$ входит только в первый член уравнения (2.1) под корнем, то она будет на 3–5 порядков больше второго члена, влияние которого на результаты расчета очень мало. Это позволяет пренебречь значением второго члена $(y_{di} \pm y_{pi})$ вследствие его малости. Действительно, многочисленные расчеты для различных значений входящих в уравнение членов позволили установить, что второй член $(y_{di} \pm y_{pi})$ оказывает влияние на величину мгновенного радиуса обработки детали R_{di} не более 0,0004.

Здесь следует напомнить, что точность экспериментального определения траектории детали и режущей кромки имеет значе-

ние около 0,03, что на 2 порядка превышает погрешность, возникающую от предположения, что $(y_{di} - y_{pi}) = 0$. Таким образом, при экспериментальном определении геометрического образа обработанной поверхности достаточно определять перемещение только по оси x , а именно x_{di} и x_{pi} . Тогда формула для расчета точек геометрического образа обработанной поверхности запишется в виде

$$R_{di} = \frac{D_d}{2} \pm x_{di} \pm x_{pi}.$$

Формула положена в основу расчета геометрического образа в поперечном сечении детали.

Стандарт DIN ISO 1101 Jor und Lagetoleranzen регламентирует четыре способа определения базовой окружности: MZC, LSC, MJC, MCC. Тем не менее наибольшее распространение получил метод LSC, при котором базовая окружность определяется как окружность, имеющая минимальную сумму квадратов расстояний от базовой окружности до профиля реальной поверхности. На экране монитора компьютера строится расчетная кривая изменения текущего радиуса R_{di} в декартовых координатах (рис. 2.3).

При этом ось абсцисс проходит через точку, соответствующую минимальному значению R_{di} . Способ развертки позволяет значительно упростить расчеты по определению базовой окружности радиуса $R_{баз}$, так как двумерная задача по поиску радиуса базовой окружности $R_{баз}$ и ее центра $O_{баз}$ сводится к определению только $R_{баз}$, в результате чего резко сокращается использование машинного времени. Для определения радиуса базовой окружности $R_{баз}$ на графике (рис. 2.3) проводится прямая на расстоянии K_i от минимального радиуса геометрического образа, которая является разверткой базовой окружности. Для каждой из 200 точек по углу поворота шпинделя измеряется расстояние l_i от проведенной прямой линии до линии геометрического образа и рассчитывается сумма квадратов расстояний $L_i = \sum_{i=1}^{200} l_i^2$.

Рассчитанная величина выводится на экран монитора. Затем положение линии базовой окружности переносится на 1 мкм вверх или вниз и снова рассчитывается сумма квадратов расстояний L_i . Эта операция повторяется многократно. Из полученного ряда $L_1 L_2 L_3 \dots L_n$ выбирается минимальное значение $L_{мин}$, соответствующее искомой базовой окружности. Прямая

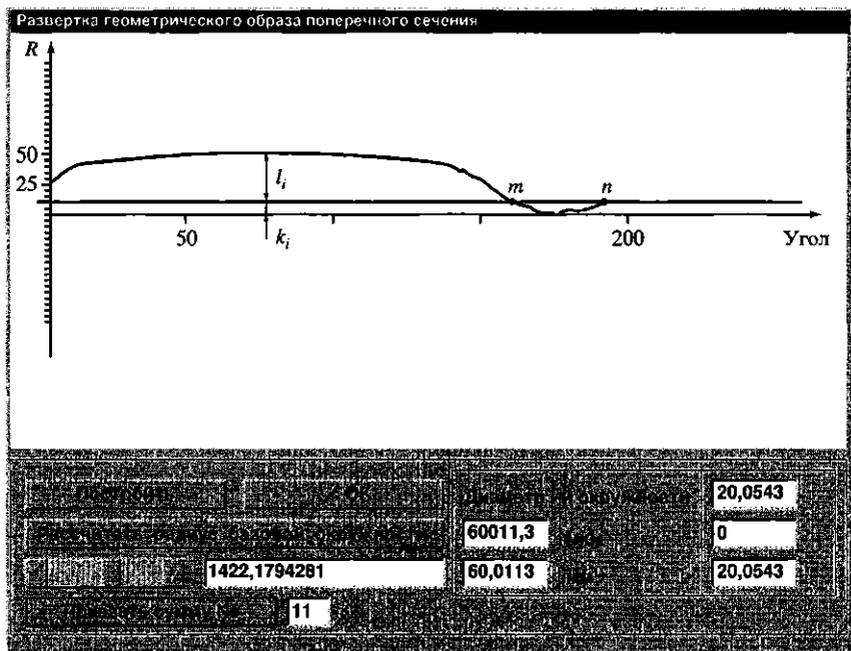


Рис. 2.3. Определение радиуса базовой окружности

развертки базовой окружности пересекает линию геометрического образа в нескольких точках, координаты которых известны: $x_m, y_m - x_n, y_n$. Кроме того, известен и радиус базовой окружности:

$$R_{\text{баз}} = R_{\text{дmin}} + K_n,$$

где $R_{\text{дmin}}$ – минимальное значение текущего радиуса геометрического образа; K_n – расстояние от линии, соответствующей радиусу $R_{\text{дmin}}$, до линии, соответствующей окружности с суммой квадратов расстояний $L_{\text{дmin}}$. На основе имеющихся данных решается система двух уравнений:

$$(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 = R_{\text{баз}}^2,$$

$$(x_m - a)^2 + (y_m - b)^2 = R_{\text{баз}}^2,$$

из которой определяются величины a и b , являющиеся координатами центра базовой окружности. В результате имеются все необходимые величины для построения базовой окружности. Пример построения приведен на рис. 2.4.

Имея геометрический образ детали в поперечном сечении и базовую окружность с центром $O_{\text{баз}}$, приступают к определению

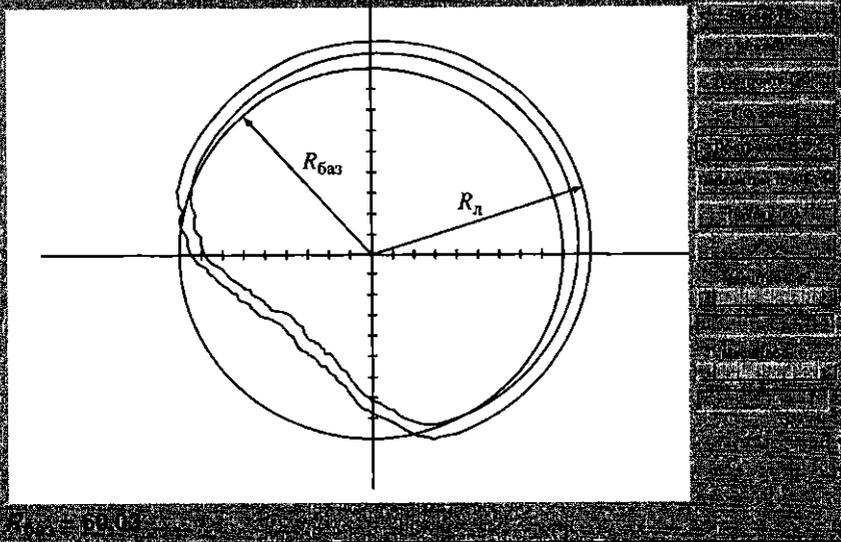


Рис. 2.4. Геометрический образ детали в поперечном сечении

регламентированных показателей точности. Прежде всего составляется таблица. В столбце 1 таблицы указываются номера референтных меток отметчика оборотов. Так как за один оборот отметчик оборотов делает 200 меток, то угол поворота от одной до следующей метки равен $360^\circ/200$. Во втором столбце таблицы приводятся значения текущего радиуса $R_{дi}$ геометрического образа поперечного сечения детали, который проводится из центра базовой окружности $O_{баз}$. В столбце 3 указан диаметр геометрического образа в поперечном сечении, который вычисляется по формуле

$$D_{д} = R_{д(i)} + R_{д(i+100)}.$$

В столбце 4 приводится разность двух диаметров геометрического образа, расположенных под углом 90° друг к другу:

$$D_{д(i)} - D_{д(i+50)}.$$

Из столбца 2 таблицы выбирают максимальное $R_{дmax}$ и минимальное $R_{дmin}$ значения радиуса поперечного сечения детали. Их разность будет соответствовать отклонению от круглости:

$$\Delta_{ок} = R_{дmax} - R_{дmin}.$$

Из столбца 3 выбираем максимальное и минимальное зна-

чения диаметра ($D_{\text{дmax}}$ и $D_{\text{дmin}}$). Их разность соответствует точности поперечного сечения детали:

$$\Delta_{\text{тр}} = D_{\text{дmax}} - D_{\text{дmin}}$$

Из столбца 4 выбираем максимальное значение разности двух диаметров, расположенных под углом 90° друг к другу, что соответствует овальности поперечного сечения детали:

$$\Delta_{\text{ов}} = D_{\text{дmax}} - D_{\text{дmin}}$$

2.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ФОРМООБРАЗУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТОКАРНОМ СТАНКЕ

При разработке устройств управления формообразующими траекториями возникла проблема, заключающаяся в том, что создание устройств управления формообразующими траекториями, испытание их и оценка по точности изготовленных деталей – очень трудоемкий и длительный процесс. Поэтому были предприняты поиски более быстрого решения этой проблемы. Во-первых, создание системы определения точности изготовления детали позволило на порядок снизить затраты времени на оценку изменения показателей точности при применении различных устройств для управления формообразующими траекториями. Во-вторых, проведение экспериментальных исследований позволяет наметить пути наиболее рационального воздействия на траектории формообразующих элементов.

Первоначальный вариант экспериментальной установки представлен на рис. 2.5. В шпинделе станка 4 устанавливалась прецизионная оправка 7. Соединение ее со шпинделем осуществлялось с помощью конуса Морзе. Оправка изготавливалась с высокой точностью. Погрешности размера, овальности и биения не превышали $0,05$ мкм. На оправке с помощью гайки закрепляется обрабатываемая деталь. Такая конструкция позволяет устанавливать на оправке различные детали, которые обрабатываются резцом 3, закрепленным в резцедержательной головке 8. На шпиндельной бабке станка закрепляется кронштейн 6, в котором установлены два вихретоковых датчика 5. Вихретоковые датчики располагаются под углом 90° друг к другу, при этом один из них лежит в плоскости, проходящей через вершину резца. Наконечники датчиков взаимодействуют с

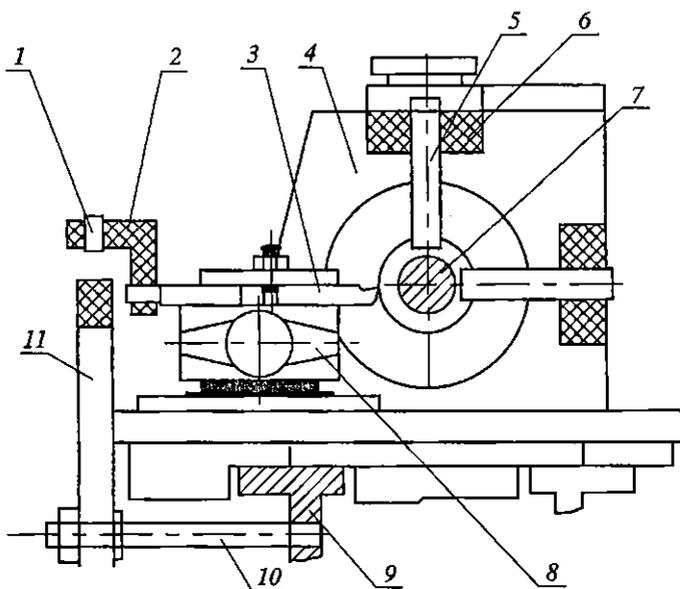


Рис. 2.5. Схема экспериментальной установки

поверхностью оправки 7, в результате чего возникают сигналы, которые усиливаются в усилителе ИП-22 и подаются через интерфейс на компьютер. На экране дисплея в декартовой системе координат строятся траектории оси детали. На станине 9 станка 4 при помощи двух шпилек 10 закрепляется прецизионная линейка 11, обработанная с высокой точностью.

На резцедержателе 8 закреплен кронштейн 2, в котором установлены еще два бесконтактных датчика 1, расположенные аналогично датчикам 5. Сигнал от датчиков 1 усиливается на усилителе ИП-22 и подается на катодный осциллограф С-8-17. Обработка детали проводилась резцом с твердосплавной пластиной Т15К6 с углами заточки $\gamma = 0^\circ$, $\alpha = 8^\circ$, $\phi = 45^\circ$, $\lambda = 0^\circ$.

Траектории, снятые на холостом ходу станка, приведены на рис. 2.6 для различной частоты вращения шпинделя: а) $n = 900$ об/мин; б) $n = 1250$ об/мин; в) $n = 2000$ об/мин; г) $n = 3150$ об/мин. При проведении экспериментов на станке были установлены четыре датчика, фиксирующие траекторию оси детали. Одна пара датчиков была установлена на расстоянии 41 мм от корпуса шпиндельной бабки, а другая – на расстоянии 112 мм. При их рассмотрении видно, что для каждого режима траектории для левого и правого сечения имеют подобную форму, близкую к форме эллипса, но их размеры разные. Левое сечение находится на расстоянии 41 мм от корпуса шпиндельной

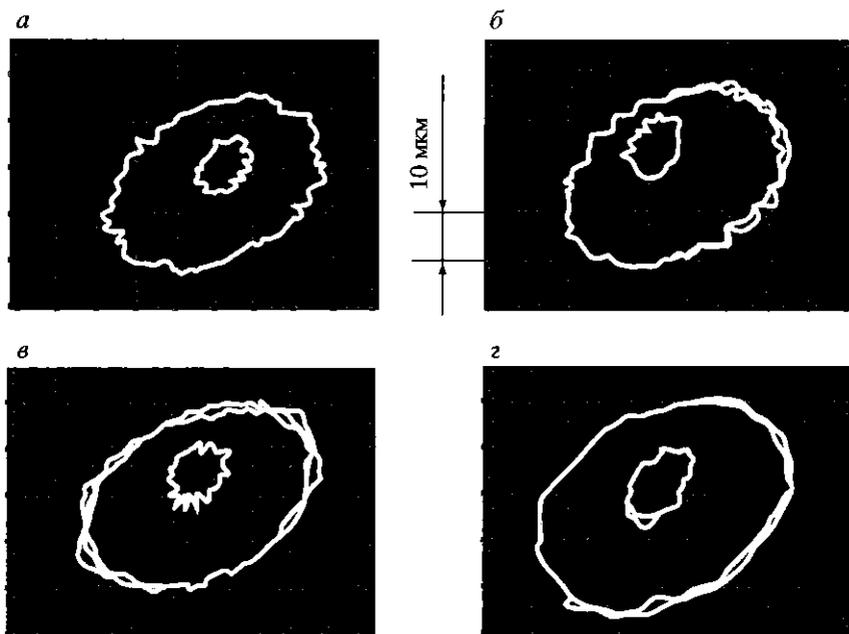


Рис. 2.6. Траектории оси детали в двух сечениях на холостом ходу

бабки, а правое – на расстоянии 112 мм. Траектория меньшего размера записана для левого сечения, а траектория большего размера – для правого сечения. Масштабы записей обеих траекторий одинаковые.

Максимальный диаметр большей траектории на всех режимах не превышает 53 мкм, а малой траектории – 17 мкм. Таким образом, размер траектории в правом сечении более чем в 3 раза больше траектории в левом сечении. Это говорит о том, что ось детали на холостом ходу движется по поверхности криволинейного конуса, вершина которого находится между опорами шпиндельной бабки. Сравнивая размеры траекторий для различных частот вращения шпинделя, можно заметить, что с увеличением скорости вращения траектория увеличивается в размерах. Траектория для правого сечения при изменении частоты вращения с 900 об/мин до 3150 об/мин увеличилась на 4 мкм. Это объясняется тем, что при увеличении частоты вращения шпинделя возрастают инерционные силы неуравновешенных масс, которые вызывают дополнительную деформацию опор, и как следствие этого увеличивается траектория оси детали.

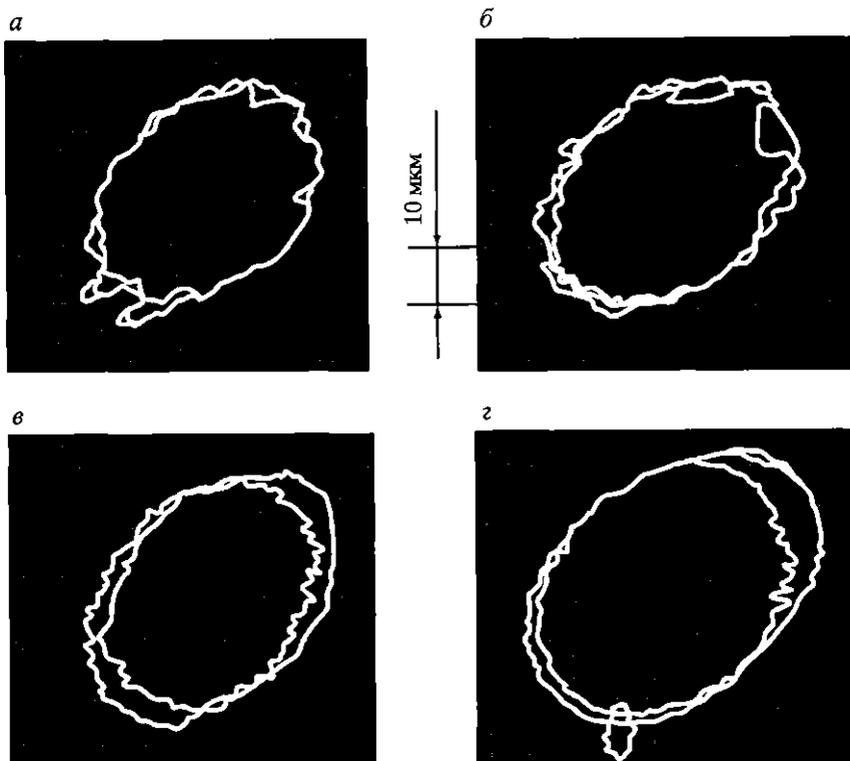


Рис. 2.7. Траектории оси детали при резании

На рис. 2.7 приведены траектории только правого сечения в режиме резания: обработка проводилась резцом с твердосплавной пластиной Т15К6 с $\gamma = 0^\circ$, $\alpha = 8^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\lambda = 0^\circ$. Глубина резания составляла $t = 0,10$ мм, а подача $S = 0,05$ мм/об. Частота вращения шпинделя составляла: а) $n = 900$ об/мин; б) $n = 1250$ об/мин; в) $n = 2000$ об/мин; г) $n = 3150$ об/мин. Из рассмотрения траекторий можно заметить, что в результате резания заготовки значительно увеличились колебания оси. На траекториях появились резкие выбросы. Особенно это заметно на режиме $n = 900$ об/мин. При частоте вращения шпинделя $n = 3150$ об/мин колебания становятся значительно меньше.

На рис. 2.8 показаны траектории оси детали при ее обработке с постоянной частотой вращения шпинделя $n = 900$ об/мин и постоянной подачей $S = 0,05$ мм/об. Глубина резания составляла: а) $t = 0,03$; б) $t = 0,06$; в) $t = 0,09$; г) $t = 0,015$ мм.

При глубине резания $t = 0,03$ мм траектория представляет собой плавную кривую, близкую к окружности. При увеличении

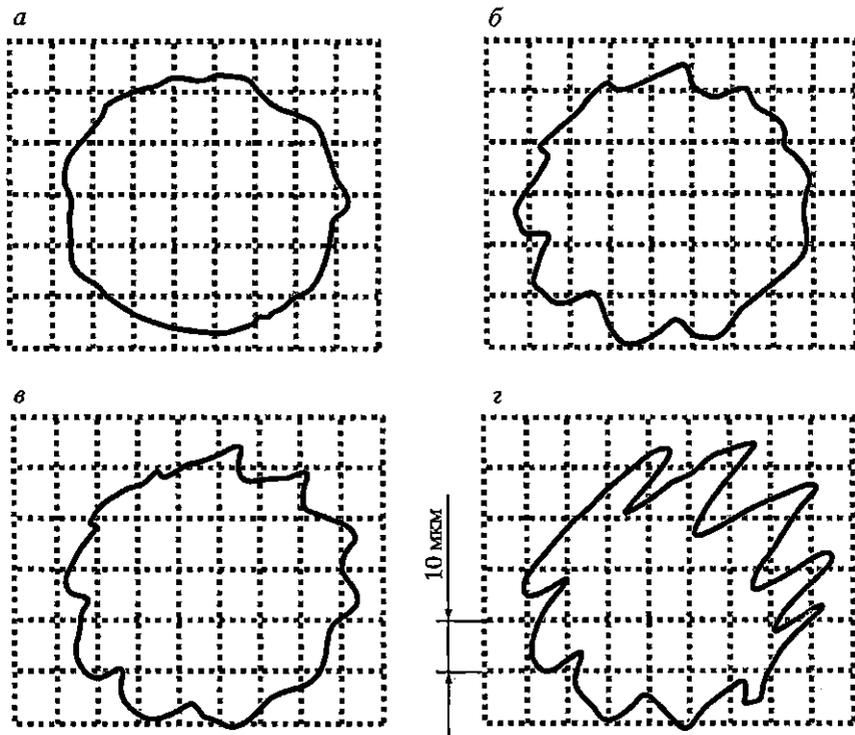


Рис. 2.8. Траектории оси детали при $n = 900$ об/мин, $S = 0,05$ мм/об и $t = 0,03 \div 0,15$ мм

глубины резания на траектории появляются явно выраженные колебания, которые достигают своего максимума при максимальной глубине резания $t = 0,15$ мм.

Это позволяет сделать вывод, что при увеличении глубины резания условия обработки детали ухудшаются, а при глубине резания $t = 0,15$ мм токарный станок работает в режиме вибрации, что, естественно, приводит к снижению качества обработки поверхности.

На рис. 2.9 приведены траектории оси детали и резца на холстом ходу $n = 900$ об/мин.

Траектория оси детали имеет форму, близкую к окружности, искаженную колебаниями, имеющими стохастическую природу. Движение оси детали по траектории является результатом кинематического взаимодействия шариков и дорожек качения внутренних и наружных колец передней опоры шпинделя. Траектория вершины резца имеет небольшие размеры и является следствием того, что при вращении шпинделя он заставляет

вибрировать весь станок, в том числе суппорт и резцедержатель с резцом.

На рис. 2.10 приведены траектории вершины резца при обработке детали.

Частота вращения шпинделя $n = 900$ об/мин, глубина резания $t = 0,03$ мм и подача $S = 0,05$ мм/об. Из сравнения траекторий вершины резца видно, что форма ее траектории не является постоянной, как это наблюдается у траектории оси детали, а все время изменяется. В некоторых случаях наблюдается близкое подобие колебаний.

Однако это скорее исключение, чем стабильная повторяемость. Несмотря на то что все траектории резца различаются по форме, тем не менее они строго ограничиваются теоретическим эллипсом перемещений. Здесь следует отметить, что записи траекторий соответствовали примерно одной восьмой оборота шпинделя. Если же проводилась запись для полного оборота шпинделя, на экране образовывалось белое пятно, в котором нельзя было определить, как движется резец, из-за того что множество траекторий накладывались одна на другую. Непостоянство траектории вершины резца объясняется многими причинами. В первую очередь, это неоднородность материала заготовки, образование и разрушение нароста на режущей кромке,

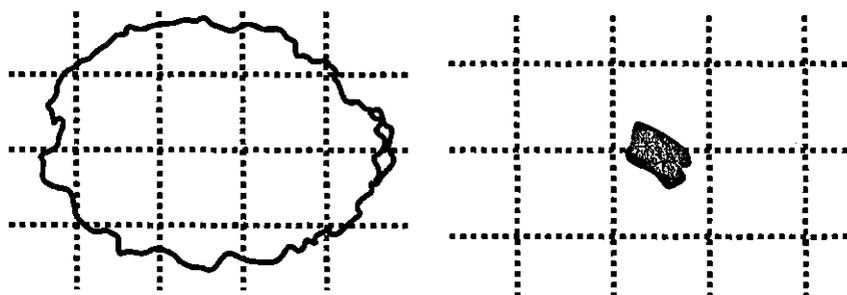


Рис. 2.9. Траектории оси детали и вершины резца

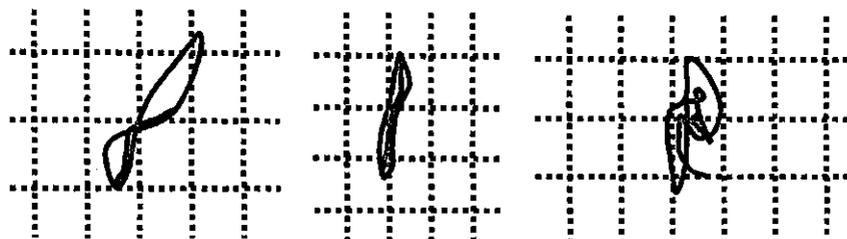


Рис. 2.10. Траектории вершины резца

износ резца и изменение температуры в точке резания. Если же вернуться к сравнению траекторий оси детали и вершины резца, то следует отметить, что они двигаются независимо друг от друга в том случае, когда выполняется чистовой проход при отсутствии явно выраженных вибраций. В том случае, когда при обработке детали происходят вибрации, наблюдаются зависимые колебания оси детали и вершины резца.

На рис. 2.11 приведен образец осциллограммы, записанной на светолучевом осциллографе Н115. Цифрой 1 обозначено перемещение вершины резца по оси y , а цифрой 2 – перемещение по оси x . Из их рассмотрения можно сделать следующие выводы. Перемещения вершины резца по осям x и y не являются синхронными, и это еще раз объясняет, что траектории за один оборот имеют разную форму. Расчеты показали, что при обработке заготовки диаметром 50 мм при частоте вращения шпинделя $n = 950$ об/мин, глубине резания $t = 0,12$ мм и подаче $S = 0,05$ мм/об частота колебаний вершины резца составляет 300–400 Гц. Полученные осциллограммы были подвергнуты обработке средних колебаний резца по оси x_p .

Полученные данные позволяют построить график зависимости средних перемещений вершины резца x_p от глубины резания при обработке детали диаметром 50 мм (рис. 2.12). Из рассмотрения полученного графика можно сделать ряд выводов. Перемещение вершины резца x_p в несколько раз меньше перемещения оси детали x_d , которое составляет 32–36 мкм.

Как видно из графика, перемещение вершины резца зависит от глубины резания. При уменьшении глубины резания с 0,20 до 0,10 мм перемещение вершины резца уменьшается, а при дальнейшем уменьшении глубины резания начинает возрастать. Наличие минимума кривой говорит о том, что при обработке резанием существует оптимальная глубина резания. Справочники по токарной обработке рекомендуют для $R_a \leq 0,8$ мкм выбирать глубину резания в пределах $t = 0,1 \div 0,4$ мм. Приведенный график

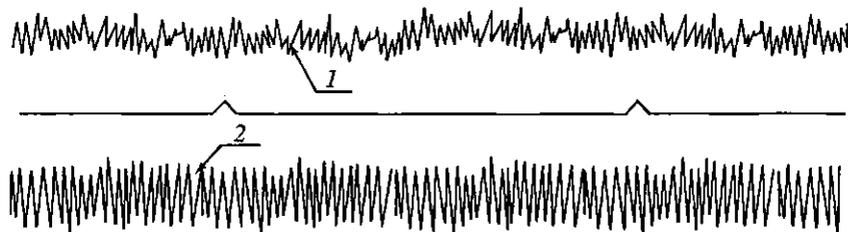


Рис. 2.11. Перемещения резца по осям x и y

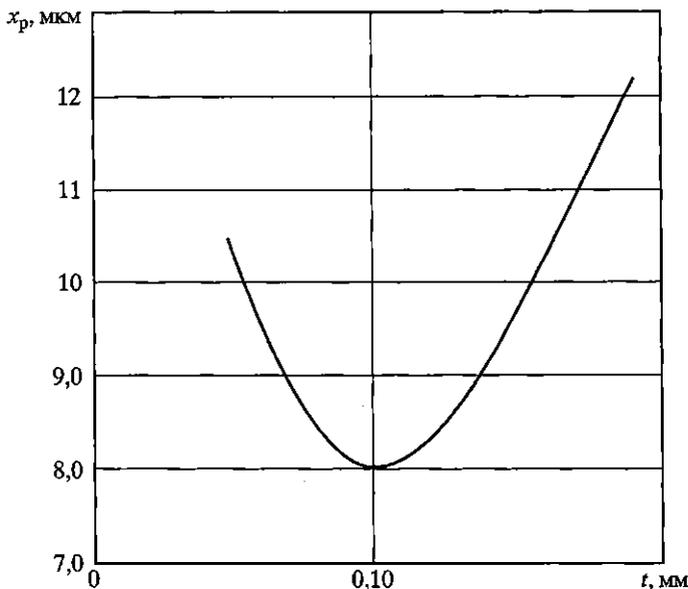


Рис. 2.12. Зависимость максимального перемещения вершины резака от глубины резания

(рис. 2.12) позволяет рекомендовать глубину резания, близкую к меньшему значению рекомендуемого диапазона, т.е. 0,1 мм. Этот вывод справедлив только при обработке детали диаметром 50 мм. Для других диаметров заготовки его следует уточнять.

На рис. 2.13 приведены траектории оси детали 1 и рассчитанный геометрический образ 2 обработанной поверхности при $S = 0,05$ мм/об, $t = 0,15$ мм и изменении скорости вращения: а) $n = 900$ об/мин; б) $n = 1250$ об/мин; в) $n = 2000$ об/мин; г) $n = 3150$ об/мин. На рис. 2.14 приведены траектории оси детали 1 и рассчитанный геометрический образ 2 обработанной поверхности при $S = 0,05$ мм/об, $n = 900$ об/мм и изменении глубины резания: а) $t = 0,03$; б) $t = 0,06$; в) $t = 0,09$; г) $t = 0,015$ мм.

В соответствии с ГОСТ 10356-63 (отклонение формы и расположения поверхностей) построена прилегающая окружность радиусом $R_{по}$ с центром $O_{по}$, а также вписанная окружность из центра $O_{по}$, касающаяся кривой геометрического образа радиусом $R_{мин}$. Рассчитанные диаметры D_{max} и D_{min} приведены в табл. 2.3. Из таблицы видно, что увеличение глубины резания с 0,03 до 0,15 мм приводит к одновременному увеличению максимального диаметра D_{max} и уменьшению минимального диаметра D_{min} . При этом разность диаметров $D_{max} - D_{min}$ возрастает с 5 до

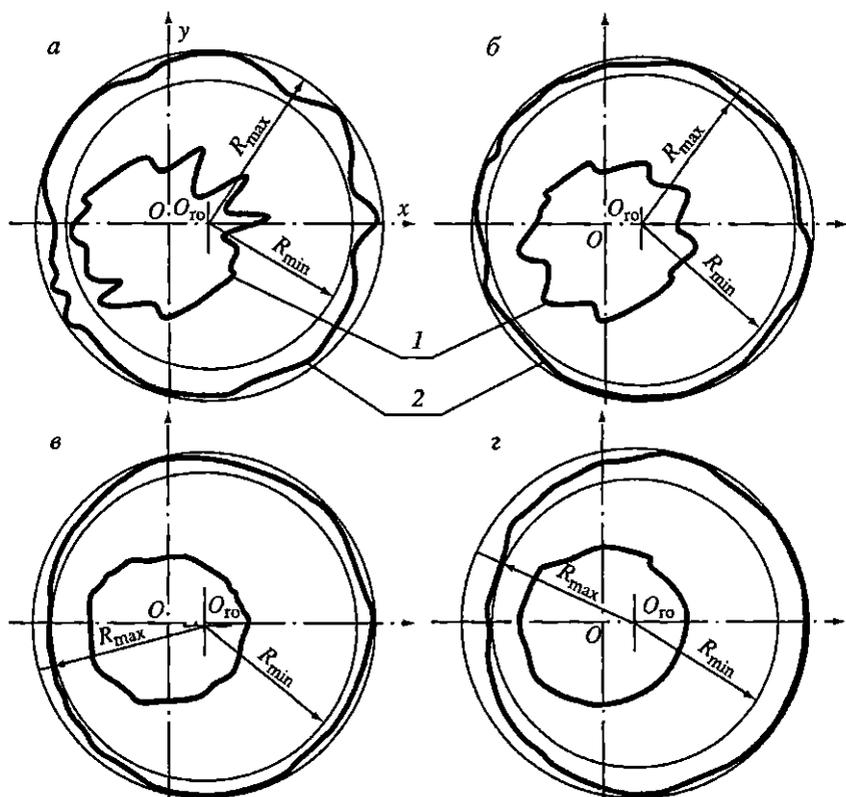


Рис. 2.13. Траектория оси детали 1 и геометрический образ 2 обработанной поверхности при изменении скорости вращения шпинделя

14 мкм. Следовательно, для повышения точности обработки следует выбирать меньшие глубины резания. В [4] рекомендуется выбирать глубину резания для чистовой обработки в зависимости от требуемой шероховатости поверхности. Так, для $R_a \leq 0,8$ мкм рекомендуется выбирать глубину резания $t = 0,1 \div 0,4$ мм.

Исходя из вышесказанного, можно еще раз констатировать, что рекомендуемый диапазон слишком завышен и не может использоваться для получения точных деталей.

При рассмотрении геометрического образа следует не забывать, что размеры детали выбирались в масштабе 1:1000, а размеры отклонения профиля – в масштабе 1:1. Поэтому геометрический образ, точно отражая амплитуду неровностей профиля, искажает их кривизну, и поэтому его внешний вид не

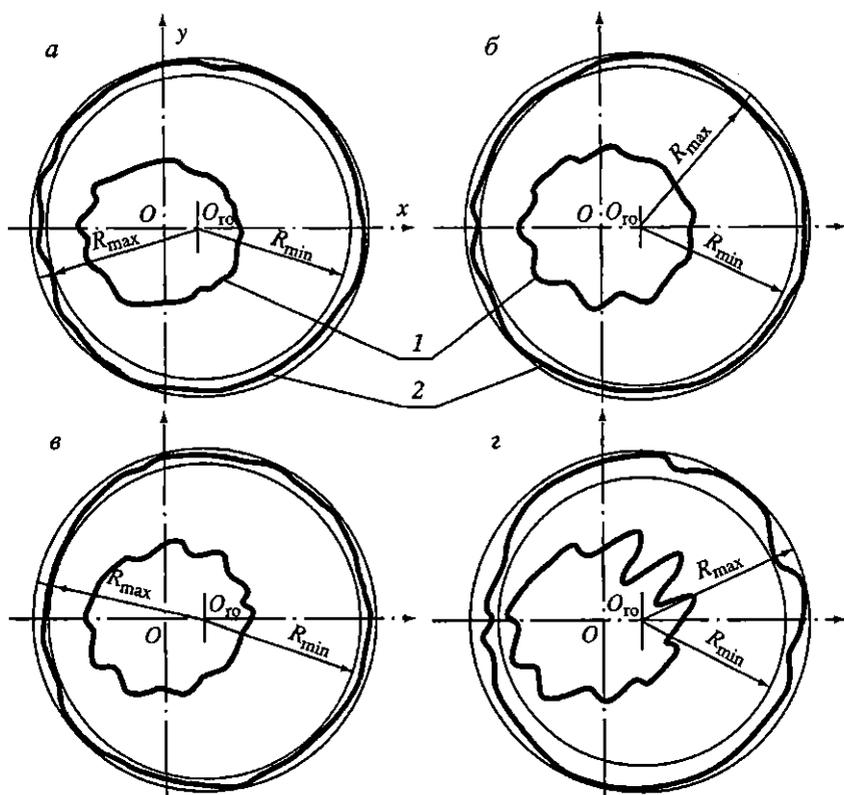


Рис. 2.14. Траектория оси детали 1 и геометрический образ 2 обработанной поверхности при изменении глубин резания

Таблица 2.3. Рассчитанные диаметры D_{\max} и D_{\min}

Рисунок	Режим обработки			D_{\max} , мм	D_{\min} , мм	$D_{\max} - D_{\min}$, мкм
	n , об/мин	T , мм	S , об/мин			
2.12: а	900	0,15	0,05	50,073	50,059	14
б	1250	0,15	0,05	50,072	50,064	8
в	2000	0,15	0,05	50,071	50,063	8
г	3150	0,15	0,05	50,07	50,061	9
2.13: а	900	0,03	0,05	50,07	50,065	5
б	900	0,06	0,05	50,071	50,065	6
в	900	0,09	0,05	50,072	50,064	8
г	900	0,015	0,05	50,073	50,059	14

соответствует действительной поверхности детали. Это явление точно соответствует тому, что происходит при снятии профилограмм поверхности детали при помощи кругломеров.

По специальной программе для компьютера проводили в автоматизированном режиме (рис. 2.15) построение прилегающей окружности и расчет регламентированных показателей точности по ГОСТ 10356-63 (табл. 2.4). В таблице использованы следующие обозначения: $\Delta_{ок}$ – отклонение от круглости (некруглость); $\Delta_{ов}$ – овальность; D_{max} , D_{min} – максимальный и минимальный диаметры сечения детали.

Из табл. 2.4 видно, что все показатели точности для режима обработки детали с глубиной резания $t = 0,26$ мм уступают соответствующим показателям точности, полученным при резании с глубиной $t = 0,02$ мм. Это вполне соответствует практике обработки деталей на токарных станках.

Таблица 2.4. Расчет регламентированных показателей точности

t , мм	$\Delta_{ок}$, мм	$\Delta_{ов}$, мкм	D_{max} , мм	D_{min} , мм	$D_{max} - D_{min}$, мкм
0,02	12	8	40,065	40,054	11
0,26	16	14	40,052	40,037	11

На рис. 2.16 приведены траектории оси детали и вершины резца, снятые с использованием двух пар датчиков, установленных под углом 90° друг к другу. Траектории оси детали 1 и вершины резца 2 получены для трех режимов работы станка, при подаче $S = 0,05$ мм/об и частоте вращения шпинделя $n = 1250$ об/мин. Глубина резания на рис. 2.16, а составила $t = 0,05$ мм; на рис. 2.16, б – $t = 0,10$ мм; на рис. 2.16, в – $t = 0,17$ мм.

На рис. 2.17 показаны перемещения в плоскости формообразования оси детали x_d и вершины резца x_p для режима обработки $n = 1250$ об/мин; $S = 0,05$ мм/об; $t = 0,10$ мм. Из их рассмотрения можно сделать вывод, что перемещение оси детали в плоскости формообразования происходит по кривой, близкой к синусоиде. При увеличении подачи и глубины резания появляются дополнительные колебания, амплитуда которых увеличивается при увеличении глубины резания и подачи. Перемещения вершины резца в плоскости формообразования носят колебательный характер. Частота колебаний вершины резца близка к частоте колебаний оси детали, однако точного их совпадения установить не удалось. Полное перемещение оси детали в плоскости формообразования превышает перемещение вершины в этой же

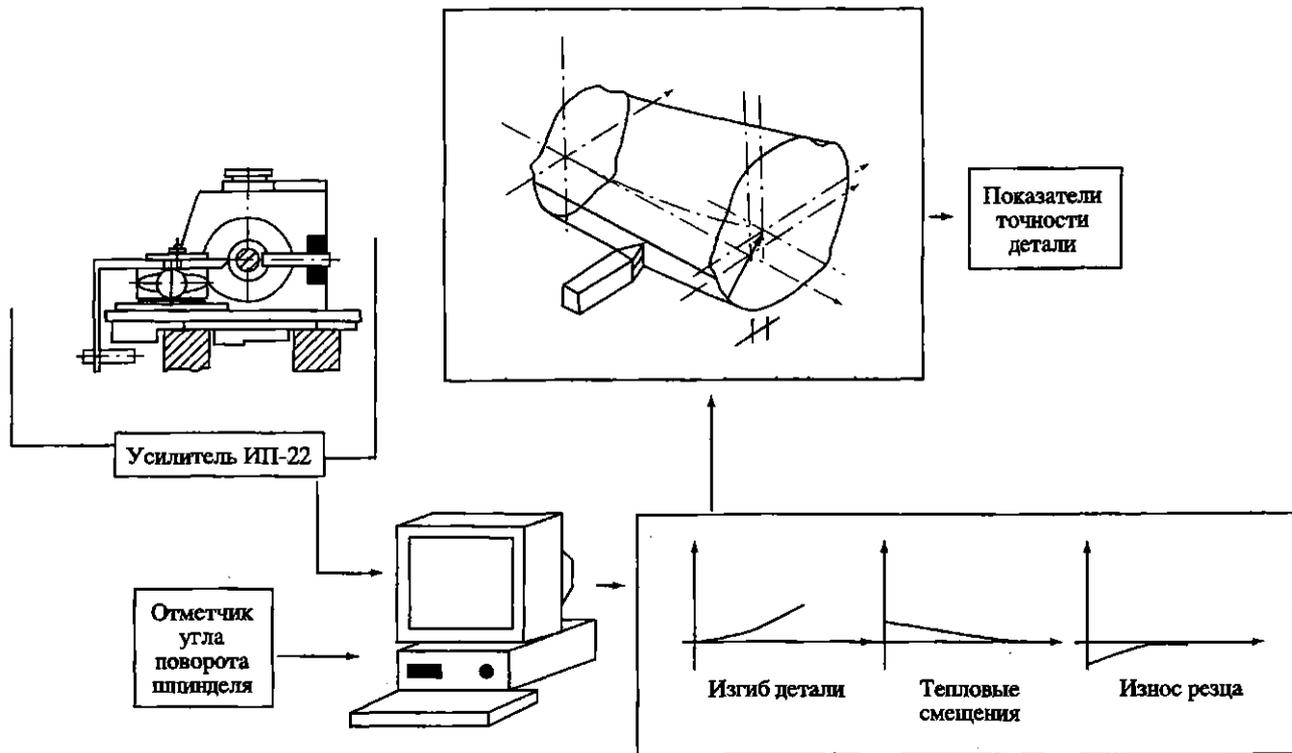


Рис. 2.15. Автоматизированная система контроля точности детали

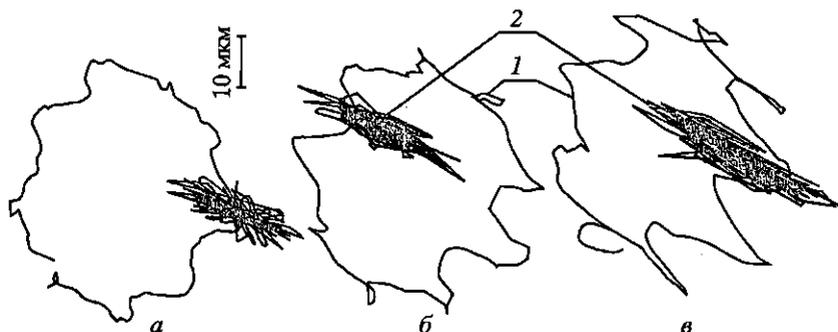


Рис. 2.16. Траектории оси детали и вершины резца, снятые с экрана монитора

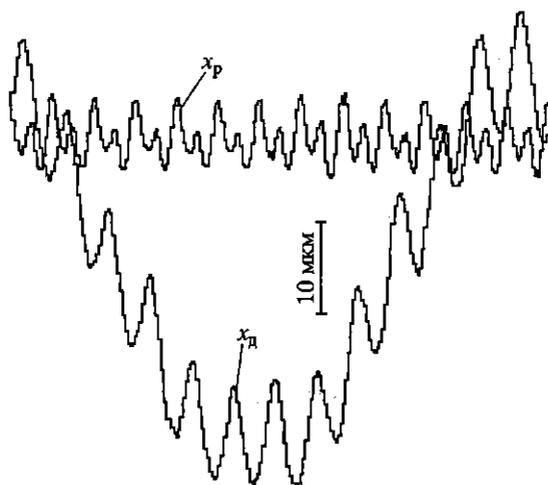


Рис. 2.17. Перемещение в плоскости формообразования оси детали x_d и вершины резца x_p

плоскости в несколько раз, что позволяет сделать вывод о том, что перемещение оси детали влияет на искажение макроформы обработанной поверхности, а перемещение вершины резца вызывает возникновение волнистости на поверхности детали. Эти выводы позволяют дать конструкторам следующие практические рекомендации. Точность размера изготавливаемой детали может быть повышена за счет уменьшения биения передней опоры шпинделя, а следовательно, за счет использования подшипников качения более высокой точности. Снижение волнистости обрабатываемой детали может быть достигнуто за счет уменьшения зазоров в соединениях суппортной группы, в

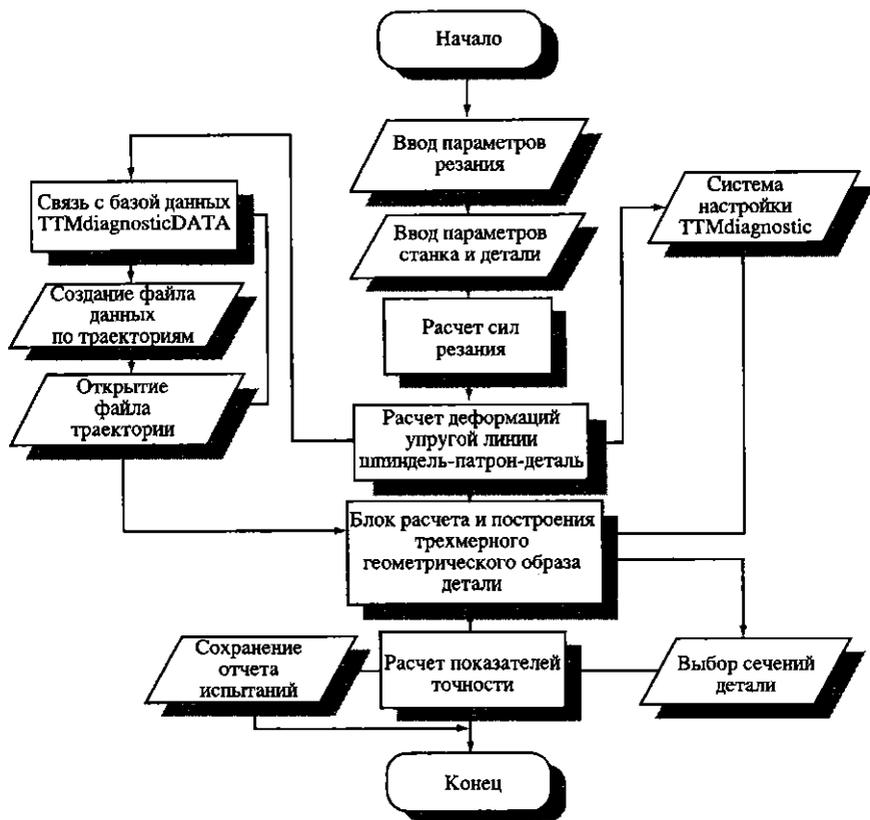


Рис. 2.18. Обобщенная блок-схема программы «TTMdiagnostic»

первую очередь в соединении поперечных салазок, а также каретки и направляющих станины.

Разработанное программное обеспечение позволяет реализовать математическую модель расчета и построения виртуальной детали с последующим определением требуемых показателей точности. Обобщенная блок-схема программы представлена на рис. 2.18.

На рис. 2.19–2.21 приведены результаты расчетов по программе «TTMdiagnostic». На рис. 2.19 изображена ось системы шпиндель–патрон–деталь. Как видно из рисунка, в процессе обработки детали она значительно смещается относительно своей идеальной оси. На рис. 2.20 построен геометрический образ поперечного сечения обработанной поверхности и приведены показатели точности обработанной поверхности.

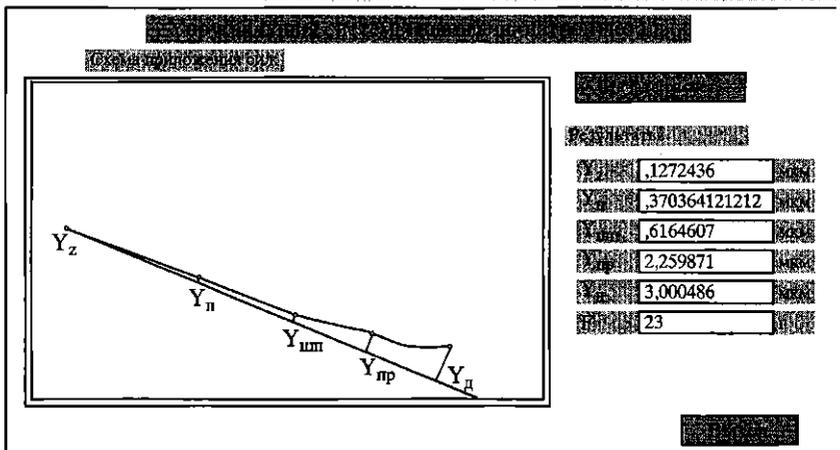


Рис. 2.19. Ось системы шпиндель-патрон-деталь

На рис. 2.21 представлена виртуальная деталь при действии на нее силы резания. С целью проверки изложенного метода прогнозирования точности детали в процессе ее изготовления проведена обработка контрольной детали на токарном станке МК-3002. Заготовка из стали 35 имела диаметр $D = 60$ мм и длину $L = 100$ мм. Обработка проводилась проходным резцом с твердосплавной пластиной Т15К6 с углами $\gamma = 0^\circ$; $\alpha = 8^\circ$; $\varphi = 45^\circ$; частота вращения шпинделя $n = 1250$ об/мин, подача $S = 0,05$ мм/об и глубина резания $t = 0,13$ мм.

В процессе обработки были сняты показания перемещений детали и вершины резца в 13 сечениях. Для каждого сечения снимались показания по 40 оборотам и в каждом обороте – для 200 точек. Экспериментальные данные подвергались обработке с определением для каждого конечного поворота шпинделя математического ожидания и дисперсии. По перемещениям оси детали и вершины резца построены геометрические образы поперечных сечений контрольной детали, которые приведены на рис. 2.22, и рассчитаны показатели точности (табл. 2.5).

Полученные результаты позволяют сделать ряд выводов. Формы геометрических образов поперечного сечения виртуальной детали незначительно отличаются друг от друга, в то время как максимальный диаметр изменяется. Разность максимальных диаметров для сечений 3 и 13 составляет 8 мкм, что является малой величиной для станка МК-3002. Это объясняется тем, что контрольная деталь обрабатывалась при закреплении ее в патроне и поджимании центром задней бабки, а длина детали

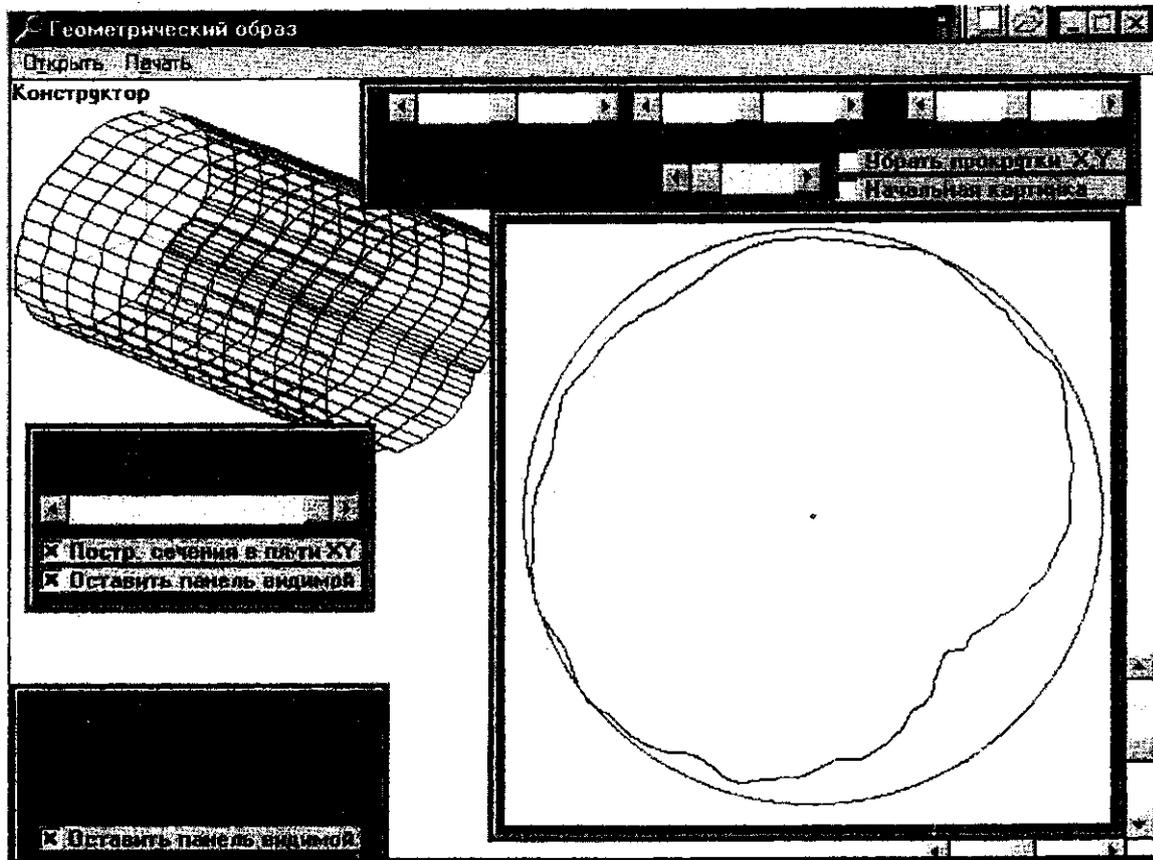


Рис.2.20. Геометрический образ поперечного сечения детали

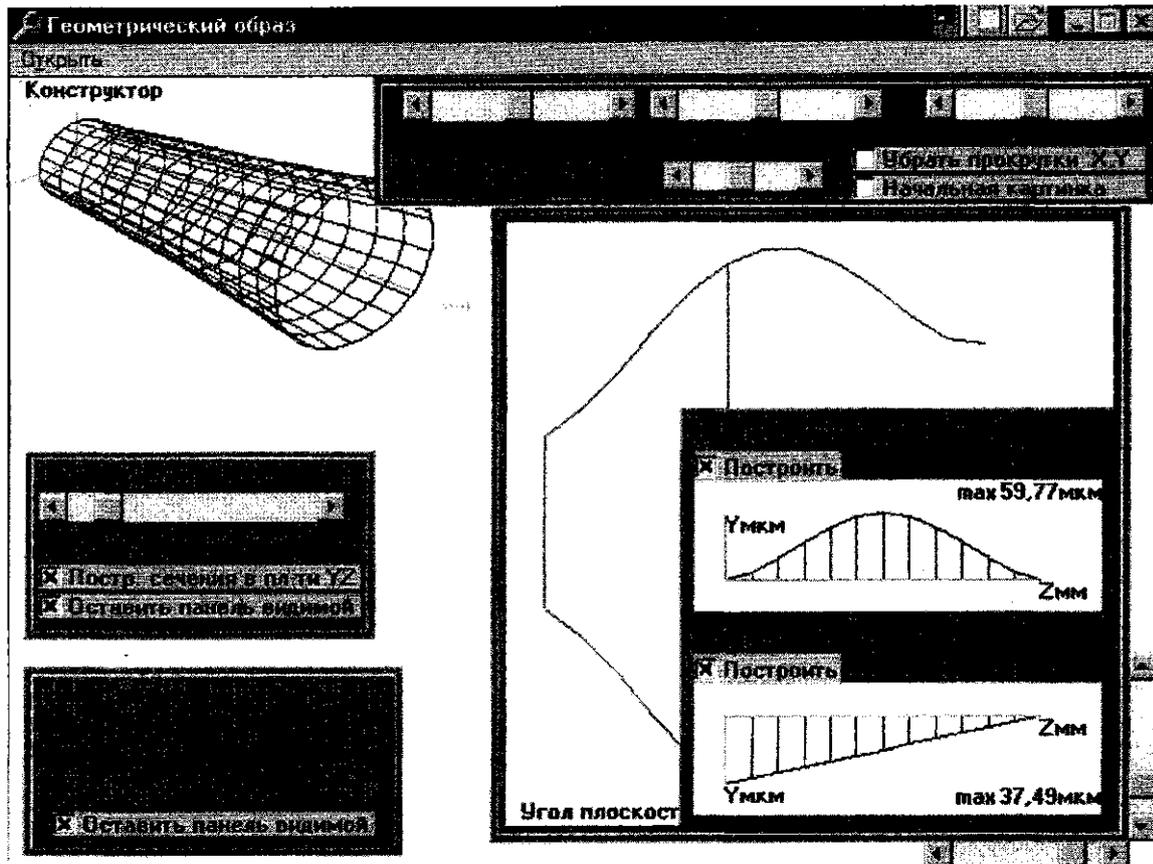


Рис. 2.21. Виртуальная деталь

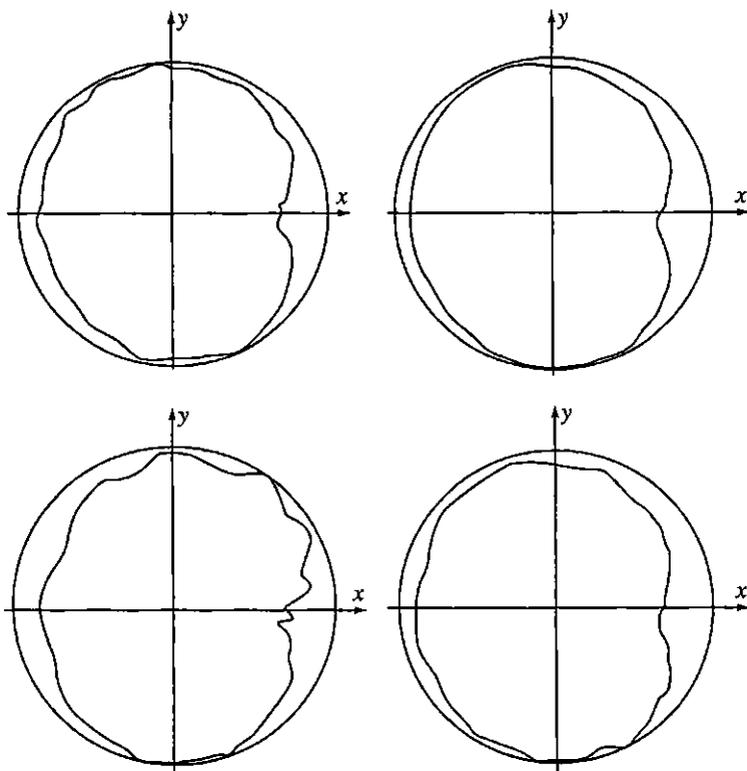
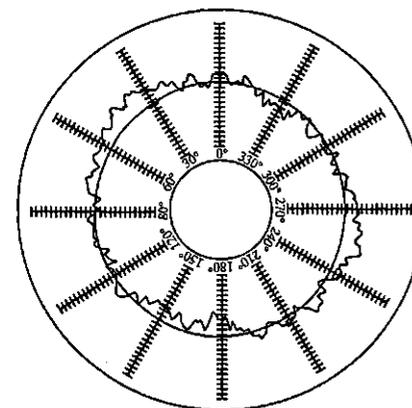
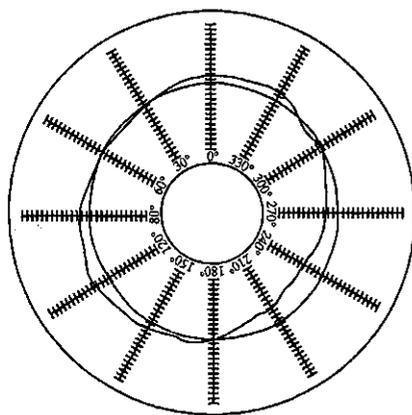
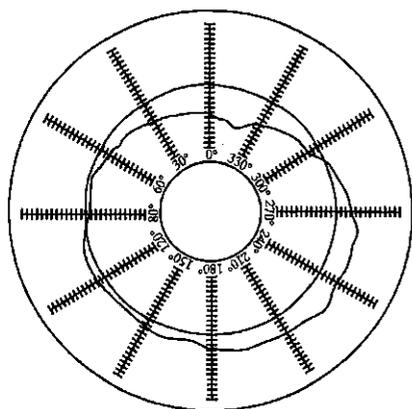


Рис. 2.22. Геометрические образы поперечного сечения виртуальной детали

Таблица 2.5. Рассчитанные показатели точности для построенных геометрических образов

Порядковый номер сечения	Погрешности сечения				
	Отклонение от круглости, мкм	Максимальный диаметр, мм	Минимальный диаметр, мм	Точность размера, мкм	Овальность, мкм
3	64,2	60,228	60,180	48	29,3
5	64,3	60,230	60,182	48	29,3
8	64,4	60,233	60,184	49	29,4
13	64,6	60,236	60,187	49	29,4



всего в 1,7 раз больше ее диаметра. Тем не менее более низкая жесткость задней бабки по сравнению со шпиндельной бабкой повлияла на образование конусности.

После исследований на станке контрольная деталь подверглась метрологическим измерениям. Для записи круглограмм использовался кругломер типа КД, класса точности 2, модели 290 завода «КАЛИБР». Прибор имеет предел допустимой радиальной погрешности 0,12 мкм. Был снят ряд профилограмм, которые приведены на рис. 2.23. На круглограмме одно деление соответствует 0,4 мкм. Снятие круглограмм проводили в тех же местах по длине детали, где снимались перемещения оси детали и вершины резца. Однако следует сказать, что снятие показаний перемещений за 40 оборотов детали соответствует перемещению вершины резца вдоль детали на 2 мм. Диаметр щупа кругломера был 5 мм, и, естественно, измерения проводились по наиболее выступающим шероховатостям на площади его контакта. Все это, конечно, оказало влияние на результаты исследований.

Из рассмотрения профилограмм (рис. 2.23) можно заметить, что круглограммы, снятые с использованием низкочастотных фильтров, по форме близки геометрическим

Рис. 2.23. Профилограммы поперечного сечения контрольной детали

образам виртуальной детали (рис. 2.22). Круглограмма, снятая с использованием высокочастотных фильтров, отображает имеющиеся на поверхности контрольной детали шероховатости. Как уже говорилось, перемещения оси детали и вершины резца снимались 200 раз за один оборот. Это значит, что при повороте шпинделя на $1/200$ часть полного поворота резец пройдет по поверхности детали путь, равный 0,94 мм, а следовательно, система не может фиксировать шероховатость обрабатываемой детали.

Сравнение геометрических образов виртуальной детали (рис. 2.22) и профилограмм контрольной детали (рис. 2.23) позволяет дать оценку точности автоматизированной системы контроля точности изготовления деталей. Максимальная разность между линией геометрического образа виртуальной детали и линией круглограммы контрольной детали в радиальном направлении при их наложении не превышают 0,86 мкм.

Это доказывает, что разработанная система автоматизированного контроля точности изготовления деталей гарантирует точность прогнозирования 1 мкм.

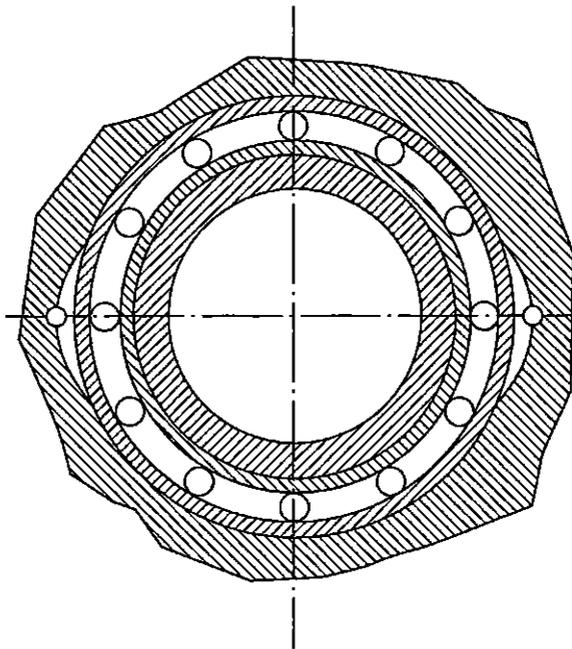
2.3. Разработка устройств управления формообразующими траекториями токарного станка

Многочисленные исследования показали, что для повышения точности токарной обработки необходимо иметь два устройства управления формообразующими элементами станка: одно для управления траекторией детали и второе для управления траекторией резца.

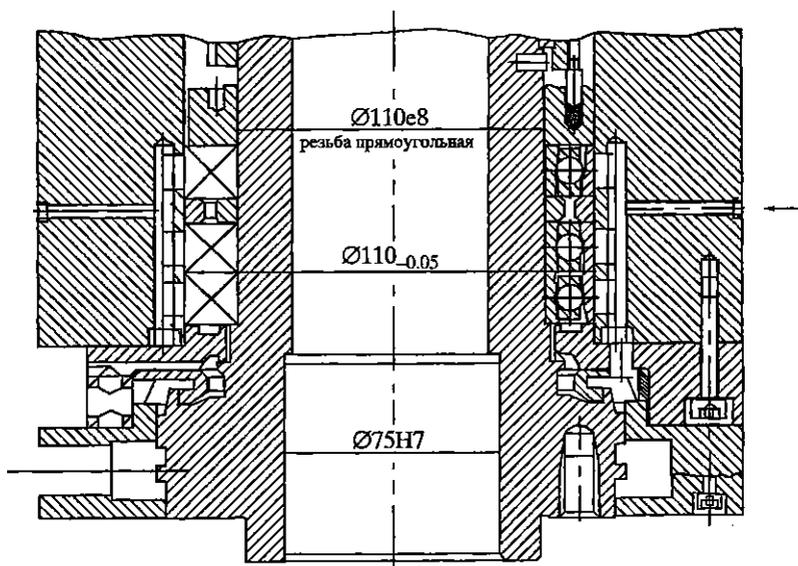
Анализ существующих патентов [15, 16] послужил основой для конструкторской разработки устройства повышения точности вращения шпинделя, показанного на рис. 2.24.

В передней опоре шпинделя фрезеруются шесть серповидных канавок, которые образуют после постановки трех подшипников шесть замкнутых камер по две на каждый подшипник. Камеры располагаются в плоскости резания и с помощью осевых и радиальных отверстий соединяются с гидросистемой станка.

Гидравлическая система (рис. 2.25) токарного станка МК 6763 Ф3 обеспечивает привод гидроцилиндра патрона, привод гидроцилиндра пиноли и другие функции. Для подключения устройства повышения точности вращения шпинделя к гидросистеме дополнительно подключался редукционный клапан КР



-



12/16, который подает масло под давлением в канавки передней опоры шпинделя. Редукционный клапан КР 12/16 имеет следующие технические характеристики:

– минимальное давление, подводимое перед клапаном, кгс/см ²	25
– пределы настройки давления редуцированного, кгс/см ²	15–150
– наименьшая допустимая разница между давлениями подводимыми и редуцированными, кгс/см ²	10
– потери давления при номинальном расходе, кгс/см ²	2
– номинальный расход, л/мм	25
– масса, кг	3,3
– температура рабочей жидкости, °С	От +10 до +50
– вязкость, сст	10–400
– управление	Ручное

Давление масла, подаваемого в канавки подшипников (рис. 2.24), регистрируется манометром МН2 (рис. 2.25).

Устройство повышения точности вращения шпинделя работает следующим образом. При подаче масла в канавки (рис. 2.24) под давлением происходит деформация наружного кольца подшипника в горизонтальной плоскости станка. В результате натяг в этой плоскости увеличивается и вызывает уменьшение колебаний оси шпинделя, а следовательно, и детали в плоскости резания, что приводит к уменьшению колебаний текущего радиуса R_d .

Давление масла, подаваемого в канавки, ограничивается, во-первых, удельными давлениями между наружным кольцом подшипника и корпусом шпинделя и, во-вторых, натягом в подшипниках, что сказывается на работоспособности подшипника.

На станке МК 6763 Ф3 в передней опоре установлены три радиальноупорных однорядных шарикоподшипника 46216, имеющих следующие размеры (мм):

наружный диаметр	$D = 140$,
внутренний диаметр	$d = 80$,
ширина колец	$B = 26$,
количество шариков	$z = 15$,
диаметр шариков	$D_{ш} = 19,05$.



Рис. 2.24. Устройство для повышения точности вращения детали

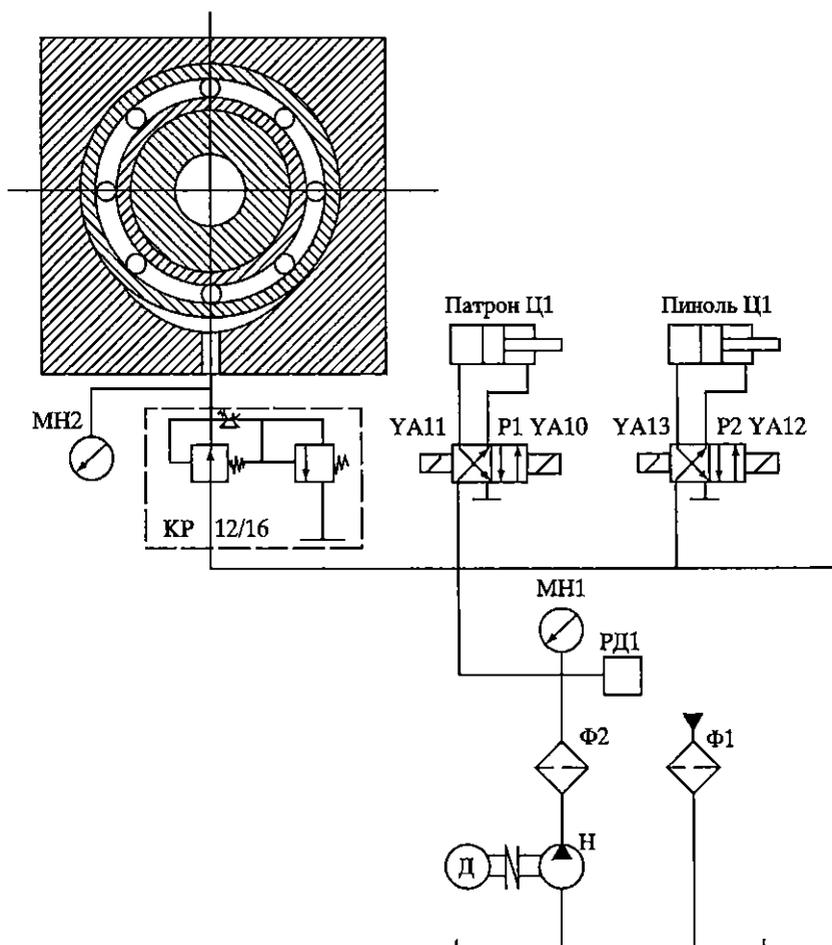


Рис. 2.25. Схема гидравлическая

При прессовой посадке подшипников в корпус между наружным кольцом подшипника и прилегающей поверхностью корпуса развиваются контактные напряжения, которые могут быть определены по формуле

$$P_k = \frac{H_k}{2D} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right] 2,08 \cdot 10^5,$$

где D_1 – внутренний диаметр наружного кольца подшипника, равный 129,0 мм; H_k – натяг в соединении наружное кольцо подшипника – корпус шпиндельной бабки, равный 23 мкм.

Подставляя H_x в формулу, получаем, что контактные напряжения между наружным кольцом подшипника и корпусом шпиндельной бабки составляют

$$P_k = \frac{0,023}{2 \cdot 140} \left[1 - \left(\frac{129}{140} \right)^2 \right] 2,08 \cdot 10^5 = 2,6 \text{ МПа.}$$

Это позволяет в камеру (рис. 2.24) подавать давление масла до 2,0 МПа.

При подаче давления масла в камеры (рис. 2.24) в подшипнике происходит местное увеличение натяга, что не может не вызвать повышения контактных нагрузок на поверхностях тел качения и дорожках качения подшипника.

Основным критерием при выборе предварительного натяга в опорах шпинделя является условие нераскрытия стыков в подшипниках при комбинированном нагружении. Определение области работоспособности шпиндельного узла в координатах его эксплуатационных параметров («преднатяг – частота вращения») необходимо для обеспечения условий его нормальной работы (рис. 2.26).

Для количественного определения условий, при которых контактные нагрузки в подшипниках достаточны для предотвращения проскальзывания, используют критерий гироскопического проскальзывания. В соответствии с этим критерием момент сил трения на дорожках качения должен быть больше, чем гироскопический момент (нижняя кривая).

Верхняя граница области работоспособности шпиндельного узла определяется зависимостью

$$F_n^{\max} = f(P_r, n),$$

где F_n^{\max} – осевой натяг; P_r – радиальная нагрузка; n – частота вращения.

Итак, на рис. 2.26 можно выделить три области. В области 1 долговечность подшипника меньше предельно допустимого значения 5 тыс. ч. В области 3 происходит раскрытие стыков в подшипнике в результате гироскопического проскальзывания шариков. Таким образом, работа подшипника в областях 1 и 3 невозможна, а в области 2 соответствует допустимым условиям эксплуатации шпиндельного узла.

Станок МК 6763 Ф3 имеет максимальную частоту вращения шпинделя $n = 3200$ об/мин. По рис. 2.26 для этой частоты вращения шпинделя определяем, что границы натяга будут в пределах 0,7–6,7 кН. Расчеты деформации наружного кольца под-

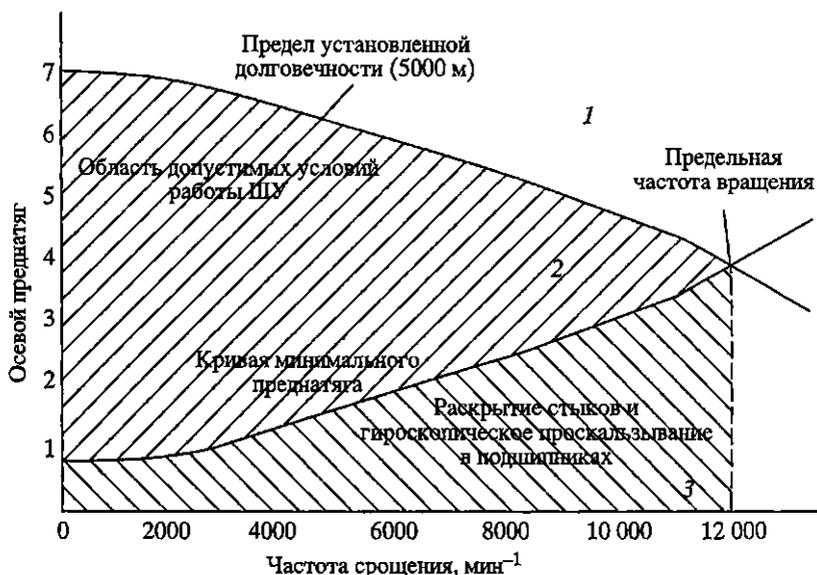


Рис. 2.26. Границы области работоспособности шпиндельных опор

шипника показывают, что подача в карманы давления до 2,0 МПа вызывает деформацию стенки подшипника, равную 4 мкм, что соответствует натягу 2,9 кН, находится практически в середине допустимого предела и доказывает, что создание дополнительного натяга не вызовет значительного снижения работоспособности опор шпинделя. Здесь необходимо подчеркнуть, что масло под давлением в карманы подшипников подается только при выполнении чистовых подходов и не подается при черновой обработке деталей.

Для управления перемещениями резца предлагается использовать виброгаситель фрикционно-динамического типа [8]. Виброгаситель устанавливается на резцедержательной головке 1 (рис. 2.27) при помощи шпильки 2, на которой собираются все детали виброгасителя. Между двумя гайками зажимаются свободно одеваемые на шпильку 2 груз 4 и тарельчатые пружины. Действия виброгасителя основаны на рассеянии энергии колебаний резца за счет внешнего и внутреннего трения тарельчатых пружин, а также за счет движения груза 4 в противофазе. Собственная частота вибраций присоединенных деталей должна быть равна частоте приложения силы. Изменение собственной частоты присоединенных деталей достигается за счет регулирования массы груза 4 и усилия сжатия тарельчатых пружин.

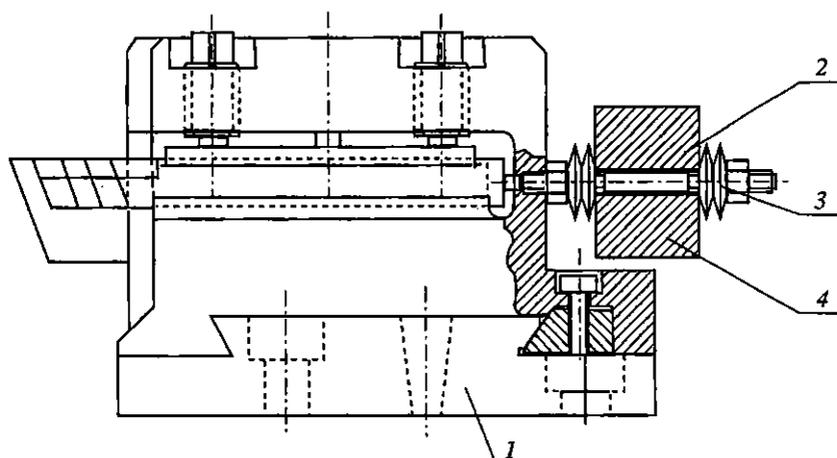


Рис. 2.27. Виброгаситель фрикционно-динамического типа

Результаты испытания устройств управления формообразующими траекториями токарного станка. На рис. 2.28, а, б приведены траектории при работе токарного станка на холостом ходу с частотой вращения $n = 950$ об/мин. Внешняя линия соответствует работе шпинделя без подачи масла в карманы, а внутренняя – работе, когда в карманы подавалось масло под давлением 1 МПа. Под действием давления масла траектория сжимается в горизонтальной плоскости на величину около 8 мкм по диаметру. Это, естественно, приводит к соответствующему повышению точности изготовления детали. На рис. 2.28, б давление масла равнялось нулю, 0,5 и 1,0 МПа. На рис. 2.28, в, г приведены траектории при обработке детали: $n = 950$ об/мин, $S = 0,05$ мм/об и $t = 0,20$ мм. Как видно из рисунка, при обработке детали форма и размеры траектории также изменяются, как это происходит и на холостом ходу. Давление подачи масла составляло 1,5 МПа.

При испытании работы виброгасителя проводилась запись перемещений оси детали и перемещения вершины резца по оси x .

Испытания проходили при частоте вращения шпинделя $n = 950$ об/мин, подаче $S = 0,05$ мм/об и глубине резания $t = 0,20$ мм. После того как наступал установившийся режим резания, проводилась запись перемещений оси детали и вершины резца при отключенном виброгасителе. После окончания записи включали виброгаситель и снова записывали перемещения. На протяжении одного прохода снималось 8 осциллограмм. Из их сравнения можно сделать вывод, что работа виброгасителя практически не сказывается на перемещении оси детали.

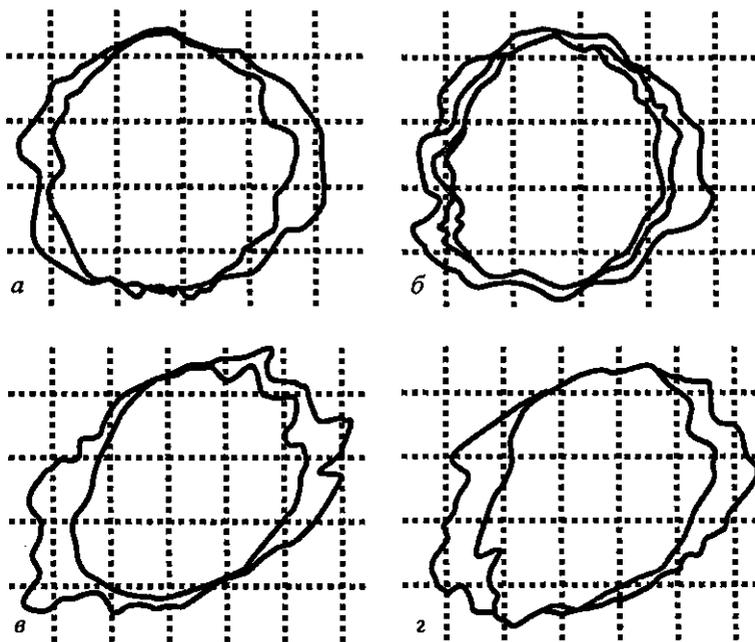


Рис. 2.28. Траектория оси детали при подводе давления масла в карманы

Колебания вершины резца при работе с виброгасителем и без него имеют практически одинаковую частоту, что определяется в основном параметрами резания.

Обработка осциллограмм с записями перемещения вершины резца при работе без виброгасителя и с виброгасителем показала, что перемещения резца при использовании виброгасителя уменьшились в среднем на 2 мкм. Отсюда следует, что уменьшение перемещений вершины резца будет способствовать уменьшению волнистости обработанной поверхности.

3.1. ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В учебниках по «Технологии машиностроения» дано содержательное определение основных технологических понятий: технологический процесс, операция, установ, переход, рабочий ход, наладка, маршрутный технологический процесс, операционный технологический процесс и т.п.

Так как в дальнейшем предполагается использование в исследованиях математических методов, уточним и конкретизируем основные понятия для рассматриваемого в работе случая многономенклатурного производства. Для этого случая характерна ситуация, когда фиксированы наборы оборудования и инструмента, оснастка, как правило, специальная, задано некоторое множество деталей, которое необходимо обработать за определенный промежуток времени. Таким образом, будем рассматривать обработку $N \ni n$ деталей на $L \ni l$ станках $M \ni m$ инструментами.

Деталь, участвующая в технологическом процессе, может быть представлена совокупностью технологических комплексов $J \ni j$ поверхностей $I \ni i$, т.е. множеством, на котором введены отношения (размерные связи между поверхностями).

Строго говоря, размерные связи возникают не только между поверхностями, например, положение цилиндрической поверхности характеризуется положением ее оси. Поэтому введено понятие элемента формы поверхности, определяемого как множество точек, положение которых в координатной системе может быть задано единым аналитическим выражением. Геометрическим образом этого элемента является точка, линия или поверхность любого порядка. Но для краткости будем в дальнейшем говорить о технологических комплексах поверхностей, в случае необходимости делая соответствующие оговорки.

Каждая поверхность i технологического комплекса j детали n обрабатывается от соответствующего комплекта баз $k \ni K_n$ на

l -м станке m -м инструментом. Здесь K_n – множество технологических комплексов баз детали.

Тогда конкретный рабочий ход формально можно представить последовательностью

$$px = \langle n, i, j, k, l, m, A, T_A, z, V, S \rangle, \quad (3.1)$$

где A – межпереходный размер; T_A – допуск на размер A ; z – припуск; V – скорость резания; S – подача.

В рабочем ходе, определенном таким образом, можно различить структурную $\langle n, i, j, k, l, m \rangle$ и параметрическую $\langle A, T_A, z, V, S \rangle$ части.

Структурная часть рабочего хода определена на следующих множествах: I_n, J_n, K_n, L_n, M_n , где индекс n указывает на конкретную деталь.

Технологический переход представляет собой упорядоченное множество рабочих ходов:

$$\Pi = \langle px_1 - px_2 - \dots \rangle. \quad (3.2)$$

Установ – упорядоченное множество технологических переходов:

$$y = \langle n_1, n_2 \dots \rangle. \quad (3.3)$$

Технологическая операция – упорядоченное множество установов:

$$o = \langle y_1, y_2 \dots \rangle. \quad (3.4)$$

Технологический процесс – упорядоченное множество технологических операций:

$$\text{ТП} = \langle o_1 - o_2 - \dots \rangle. \quad (3.5)$$

Вообще говоря, технологический процесс состоит не только из технологических операций, но и из других действий, например, контрольные операции, транспортировка деталей и т.п., но для наших целей вполне достаточно вышеприведенного определения.

Определения (3.2)–(3.5) можно записать в несколько ином виде:

$$\begin{aligned} \text{ТП} &= \langle O_{\text{ТП}}, R_1 \rangle; \\ O &= \langle Y_{\text{отп}}, R_2 \rangle; \\ Y &= \langle \Pi_{\text{уотп}}, R_3 \rangle; \\ n &= \langle PX_{\text{пуотп}}, R_4 \rangle, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $O_{\text{ТП}}$ – множество операций данного технологического процесса; $Y_{\text{отп}}$ – множество установов данной операции; $\Pi_{\text{уотп}}$ – мно-

жество переходов данного установа; $PX_{\text{пюотп}}$ – множество рабочих ходов данного перехода; R_1, R_2, R_3, R_4 – отношения порядка следования операций, установов, переходов и рабочих ходов соответственно в технологическом процессе, операции, установе, переходе.

Теперь естественным образом можно внести понятие структуры технологического процесса:

$$\text{СТП} = \langle \langle \langle \langle \langle PX_{\text{пюотп}}, R_4 \rangle, R_3 \rangle, R_2 \rangle, R_1 \rangle \rangle, \quad (3.7)$$

где $\Pi \in \Pi_{\text{юотп}}$; $Y \in Y_{\text{отп}}$; $O \in O_{\text{тп}}$.

Определение (3.7) структуры технологического процесса совпадает с известным определением структуры и с определением модели в теории алгебраических систем.

Чтобы определить элементы индексированных множеств $PX_{\text{пюотп}}$, необходимо установить следующие соответствия:

$$\begin{aligned} A: N &\rightarrow J, \\ B: J_n &\rightarrow I, \\ C: \bigcup_{J_n} I_{j_n} &\rightarrow K_n, \\ D: K_n &\rightarrow L, \\ E: L &\rightarrow M, \\ F: \bigcup_{J_n} I_{j_n} &\rightarrow \bigcup_L M_l. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отображение A показывает разбиение технологических комплексов поверхностей по деталям;

B представляет собой план обработки поверхностей;

D, C ставят в соответствие поверхностям технологические комплексы баз, у которых они обрабатываются, и станки;

E производит упорядочение инструмента по станкам;

F каждой обрабатываемой поверхности ставит в соответствие инструмент и станок.

Соответствия (отображения) B, C, D, F и отношения R_1, R_2, R_3, R_4 суть законы или правила технологического проектирования.

Последовательность рабочих ходов по всему технологическому процессу, определенную структурой (3.8), будем в дальнейшем называть технологическим маршрутом, в отличие от понятия «технологический процесс», который будем считать содержащим как структурную, так и параметрическую части.

Существующие правила технологического проектирования не дают однозначного решения в вопросах выбора. Но это вполне объяснимо сложностью системы технологического проекти-

рования и согласуется с одним из основных кибернетических законов – законом необходимого разнообразия, указывающим на необходимость вариантности при выборе плана и принятии решения.

После построения множества вариантов необходимо выбрать оптимальный на основе некоторого критерия. Критерием оптимальности будем считать приведенные затраты или их часть, существенным образом зависящую от управляемых переменных рассматриваемого процесса.

В случае когда обрабатываются N деталей на L станках M инструментами, затраты времени на обработку состоят из следующих существенных слагаемых: t^M – машинное время; t^n – время настройки станка; t^y – время установки детали на станок; $t^{см.и}$ – время смены инструмента.

Часть затрат, связанная с этими временами, на обработку одной поверхности у одной детали запишется следующим образом:

$$\Theta = E^c(t^M + t^n + t^y) + E^c \frac{t^M}{T} t^{см.и} + E^n \frac{t^M}{T}, \quad (3.9)$$

где E^c – стоимость станкоминуты; E^n – стоимость работы инструмента за период стойкости; T – период стойкости инструмента.

Нам необходимо определить затраты на обработку всех поверхностей у N деталей, так как затраты более низкого уровня (на обработку одной поверхности, на обработку одной детали) не могут служить критерием в силу своей локальности. Кибернетический принцип эмерджентности обращает наше внимание на несовпадение локальных и глобальных оптимумов, т.е. частных и общих результатов.

Необходимость системного подхода в нашем случае обусловлена взаимосвязью не только между операциями обработки одной детали, но и между операциями обработки разных деталей.

Общие затраты с учетом рассмотренной выше системы отображений и формулы (3.9) могут быть описаны следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Theta = & \sum_{n=1}^N \sum_{l \in L_n} E_l^c \sum_{m \in M_{ln}} \sum_{j \in J_{mnl}} (t_{ijnml}^M + t_{ijnml}^n) + \sum_{n=1}^N \sum_{l \in L_n} E_l^c \sum_{k \in K_{nl}} t_{nkl}^y + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{l \in L_n} E_l^c \sum_{m \in M_{ln}} \frac{\sum_{j \in J_{mnl}} t_{ijnml}^M}{T_m} t_{ml}^{см.и} + \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$+ \sum_{n=1}^N \sum_{l \in L_n} \sum_{m \in M_{ln}} E_m^u \frac{\sum_{j \in J_{lmnl}} t_{ijmnl}^M}{T_m} + \sum_{n=1}^N \Theta_{\text{заг. } n},$$

где L_n – множество станков, на которых обрабатывается деталь; M_{ln} – множество инструментов, которыми обрабатывается деталь; J_{lmnl} – множество поверхностей n -й детали, которые обрабатываются m -м инструментом на l -м станке; K_{ln} – множество технологических комплексов баз n -й детали, которым она базируется при обработке на l -м станке; T_m – период стойкости m -го инструмента (точнее говорить о периоде стойкости пары: инструмент–деталь, но мы будем считать, что для обработки каждого материала используется рекомендованный инструмент); $\Theta_{\text{заг. } n}$ – стоимость заготовки n -й детали; индексы у времен означают, что обрабатывается i -я поверхность j -го технологического комплекса n -й детали от k -го технологического комплекса баз m -м инструментом на l -м станке.

Целью технологического проектирования является разработка такой совокупности технологических процессов изготовления деталей, отвечающих своему служебному назначению, которая составляла бы минимальное значение выражения (3.10), т.е. изготовление должно идти с минимальными затратами.

Выражение (3.10), являясь функцией совокупности технологических процессов, зависит как от структурной, так и от параметрической части наладок.

Структурная часть влияет непосредственно через планы обработки поверхностей (семейство множеств J_{lmnl}), через количество технологических комплексов баз или переустановок (семейство множеств K_{ln}) и косвенно через величину припусков на режимы резания, следовательно, на машинное время.

Параметрическая часть наладки влияет через режимы резания на машинные времена, стойкость инструмента и на затраты, связанные со сменой инструмента и его количеством, а также через точность обработки на планы обработки поверхностей, на количество комплексов баз.

3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Технологический процесс механической обработки по аналогии с определением маршрута представляет собой совокупность последовательных обработок поверхностей, составляющих технологические комплексы, и заключается в том, что заготовка пре-

терпевает ряд последовательных превращений, в результате чего получается готовая деталь.

Положения элементов формы заготовки, полуфабриката и готовой детали характеризуются наборами переменных \bar{x}_{ji} (величины \bar{x}_{ji} случайные и являются точностными параметрами детали как геометрического объекта). Здесь j – номер технологического комплекса поверхностей, i – номер поверхности в технологическом комплексе, начиная с нулевой поверхности заготовки.

Поверхности детали характеризуются также шероховатостью, твердостью, глубиной наклепанного слоя и т.п. Вектор этих параметров обозначим $\overline{ПС}_{ji}$ – вектор показателей поверхностного слоя.

Технологические системы, формирующие поверхности каждого технологического комплекса, по отношению к векторам $\overline{ПС}_{j0}$, $\overline{ПС}_{j1}$, $\overline{ПС}_{j2}$, ... включены последовательно.

Совокупность технологических систем по отношению к переменным (размерным характеристикам) образует сложную структуру [19].

Каждая технологическая система характеризуется набором входных переменных $\bar{x}_{ji}^{вх}$, $\overline{ПС}_{ji-1}$, выходных – $\bar{x}_{ji}^{вых}$, $\overline{ПС}_{ji}$, вектором управляющих воздействий \bar{y}_{ji} (например, скорости резания и подачи); вектором показателей процесса обработки $\overline{П}_{ji}$ (например, силы резания, мощности, скорости износа инструмента и т.п.); скаляром Θ_{ji} – критерием оптимальности (затраты или их доля, существенным образом зависящая от управляющих переменных процесса). Переменные \bar{x}_{ji} будем называть внешними переменными, а \bar{y}_{ji} – внутренними. Затраты $\Theta_{общ}$ по технологическому процессу будут равняться сумме затрат на отдельные операции. Затраты на отдельную операцию (обработку) Θ_{ji} являются функцией внешних и внутренних переменных. Например, затраты зависят от колебаний твердости, шероховатости, точности входного и выходного положения элементов формы – внешние переменные, от режима обработки – внутренние переменные.

Возможны следующие два метода решения оптимальной задачи. Первым методом минимизируются общие затраты по технологическому процессу. Ограничения накладываются как на внешние, так и на внутренние переменные. В общем виде задача формулируется следующим образом:

$$\min_{\overline{PC}_{ji}, x_{ji}, y_{ji}} \Theta_{\text{общ}} = \sum_j \sum_i \Theta_{ji}; \quad \overline{PC}_{jmi} \in \Delta \overline{PC}_{jmi}; \quad P_d \in \Delta P_d; \quad (3.11)$$

$$\bar{y}_{ji} \in \Omega \bar{y}_{ji},$$

где m_j – количество поверхностей j -го технологического комплекса (поверхность m_j принадлежит готовой детали); $\Delta \overline{PC}_{jmi}$ – множество допусков на характеристики поверхностного слоя поверхности, принадлежащей готовой детали j -го технологического комплекса; P_d – множества размеров чертежа детали; ΔP_d – множество допусков на размеры готовой детали; $\Omega \bar{y}_{ji}$ – область допустимых управляющих воздействий.

Первое и второе ограничения оптимальной задачи (3.11) указывают на то, что мы ограничиваемся допусками на характеристики поверхностного слоя и размерные погрешности только у готовой детали.

Промежуточные характеристики и размеры суть оптимизируемые величины, они находятся в результате решения оптимальной задачи.

Четвертое ограничение на внутренние переменные накладывается соответствующими технологическими системами. Это ограничение образует области допустимых режимов обработки.

По второму методу вначале проводится условная минимизация каждого значения Θ_{ji} по внутренним переменным \bar{y}_{ji} , при этом внешние переменные считаются параметрами, т.е.

$$\min_{\bar{y}_{ji}} \Theta_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{PC}_{ji-1}, \overline{PC}_{ji}) = \varphi_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{PC}_{ji-1}, \overline{PC}_{ji}).$$

При этом оптимальные значения внутренних переменных становятся функциями внешних переменных:

$$\bar{y}_{ji\text{опт}} = \bar{\Psi}_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{PC}_{ji-1}, \overline{PC}_{ji}).$$

Например, оптимальные значения режима обработки становятся зависящими от колебания припуска и от требуемой точности.

На следующем этапе проводится безусловная оптимизация, т.е. минимизируется величина $\Theta_{\text{общ}}$ по внешним переменным:

$$\min_{\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{PC}_{ji-1}, \overline{PC}_{ji}} \Theta_{\text{общ}} = \sum_{j,i} \varphi_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{PC}_{ji-1}, \overline{PC}_{ji}).$$

При этом находятся оптимальные значения внешних переменных и благодаря уравнениям связи – оптимальные значения внутренних переменных.

Запись оптимальной задачи в этом случае выглядит следующим образом:

первый уровень:

$$\min_{\bar{y}_{ji}} \Theta_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \overline{\text{ПС}}_{ji}),$$

$$\bar{x}_{ji}^{\text{вых}} = \bar{f}_1(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \bar{y}_{ji}),$$

$$\overline{\text{ПС}}_{ji} = \bar{f}_2(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \bar{y}_{ji}),$$

$$\bar{P}_{ji} = \bar{f}_3(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \bar{y}_{ji}) \in \Delta \bar{P}_{ji},$$

$$\bar{x}_{jmj}^{\text{вх}} = P_{\text{д}} \in \Delta P_{\text{д}},$$

$$\overline{\text{ПС}}_{jmj} \in \Delta \overline{\text{ПС}}_{jmj},$$

$$\bar{y}_{ji} \in \Omega \bar{y}_{ji};$$

второй уровень:

$$\min_{\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \overline{\text{ПС}}_{ji}} \Theta_{\text{общ}} = \sum_{j,i} \varphi_{ji}(\bar{x}_{ji}^{\text{вх}}, \bar{x}_{ji}^{\text{вых}}, \overline{\text{ПС}}_{ji-1}, \overline{\text{ПС}}_{ji}).$$

Здесь $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_3$ – математические модели технологической системы.

Рассмотренный метод несколько напоминает метод параметрической декомпозиции и позволяет свести задачу большой размерности к последовательности задач меньшей размерности. Благодаря такому приему проводится также подробный технико-экономический анализ каждой операции (перехода) технологического процесса, который позволяет сделать некоторые выводы относительно возможностей дальнейшего совершенствования процесса обработки.

В результате решения оптимальной задачи находятся оптимальное распределение положений элементов формы между отдельными переходами и оптимальный режим на каждом переходе.

3.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА

В разд. 3.2 приведена в общем виде постановка задачи внутриструктурной (параметрической) оптимизации технологического процесса (см. уравнения (3.10), (3.11)). Рассмотрим постановку решения задачи параметрической оптимизации технологического перехода на примерах фрезерования и расточки.

В случае обработки плоской поверхности фрезерованием переменные, характеризующие процесс, определяются следующими конкретными выражениями:

$$\bar{x}^{\text{вх}} = \begin{pmatrix} y_0^{\pi_0} \\ \theta_0^{\pi_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{x}^{\text{вых}} = \begin{pmatrix} y_0^{\pi_1} \\ \theta^{\pi_1} \end{pmatrix}; \quad \bar{\Pi} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ q \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} v_{\text{ф}} \\ S_z \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор показателей процесса состоит из сил фрезерования и величины q – скорости износа инструмента по задней грани. Скорость и величина износа за определенный промежуток времени зависят для данной пары инструмент–деталь от режима обработки, припуска и твердости обрабатываемого материала. Поскольку изучению стойкости режущего инструмента, в том числе торцевых фрез, посвящено большое количество исследований [4, 9, 13, 14, 17, 22], построение математической модели по стойкости торцевой фрезы (и расточного резца) в настоящей работе не проводилось. Это построение может быть выполнено методами, изложенными в разд. 1.2.1 при определении зависимостей для сил фрезерования. Данные по стойкости были взяты из литературных источников. Критерием оптимальности технологического перехода является выражение (3.9) с учетом того, что машинное время при фрезеровании подсчитывается по следующей формуле:

$$t_{\text{м}} = \frac{\pi d_{\text{ф}} l}{1000 z_{\text{ф}} S_z v_{\text{ф}}}, \quad (3.12)$$

где $d_{\text{ф}}$ – диаметр фрезы; l – путь фрезерования.

Рассмотрим ограничения оптимальной задачи:

$$y_{0\text{min}}^{\pi_1} \leq y_0^{\pi_1} \leq y_{0\text{max}}^{\pi_1}, \quad (3.13)$$

$$0 \leq \theta^{\pi_1} \leq \theta_{\text{max}}^{\pi_1};$$

$$P_{x\text{max}} \leq P_{\text{здоп}},$$

$$P_{y\text{max}} \leq P_{\text{удоп}}, \quad (3.14)$$

$$P_{z\text{max}} \leq P_{\text{здоп}}.$$

Мы записали ограничения прямо на силы резания, так как все ограничения силового характера (например, мощность или прочность какой-либо детали станка) функционально выражаются через ограничения силы.

Ограничение по стойкости режущего инструмента запишется с учетом (3.8) следующим образом:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{l \in L_n} \sum_{m \in M_{ln}} \sum_{j \in J_{lm}} \int_0^{t_{jlmn}^M} q_{jlmn} dt \leq h_{\text{доп}} \cdot M_{\Phi}, \quad (3.15)$$

где $h_{\text{доп}}$ – допускаемый износ по задней грани инструмента; q_{jlmn} – скорость износа инструмента; M_{Φ} – количество инструмента (фрез) данного типоразмера, имеющегося в распоряжении.

Мы видим, что ограничение по стойкости, записанное в форме (3.15), надо проверять для всего множества переходов, реализуемых фрезами данного типоразмера. В предположении о стационарности скорости износа инструмента ограничение (3.15) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Sigma t^M \cdot q \leq h_{\text{доп}} \cdot M_{\Phi},$$

где знаком Σ обозначены все суммы, фигурирующие в (3.15), а индексы у t^M и q опущены.

Очевидно, что период стойкости как время работы инструмента до износа, равного допустимому, зависит от режима обработки каждой ji поверхности n -й детали. Поэтому определим некоторый средний период стойкости как отношение

$$T_{\text{ср}} = \frac{\Sigma t^M}{M_{\Phi}}.$$

С учетом последнего ограничение по стойкости будет

$$\frac{\Sigma t^M \cdot q}{\Sigma t^M} T_{\text{ср}} \leq h_{\text{доп}}.$$

Выражение $\Sigma t^M \cdot q / \Sigma t^M$ есть не что иное, как средневзвешенная (по времени) скорость износа. Обозначив ее через $q_{\text{ср}}$, окончательно получим выражение для ограничения по стойкости инструмента

$$q_{\text{ср}} T_{\text{ср}} \leq h_{\text{доп}}. \quad (3.16)$$

Для конкретных условий примем зависимость для q вида

$$q = \beta_q v^{\beta_{q1}} S^{\beta_{q2}} z^{\beta_{q3}} H^{\beta_{q4}}. \quad (3.17)$$

В дальнейшем будем считать, что усреднение по времени и по случайным величинам z и H приводит к одинаковым результатам в отношении скорости износа.

Значения управляющих переменных v_ϕ и S_z можно выбирать при фрезеровании из следующего диапазона, обусловленного кинематикой станка:

$$n_{\phi_{\min}} \leq \frac{1000v_\phi}{\pi d_\phi} \leq n_{\phi_{\max}}, \quad S_{z_{\min}} \leq S_z \leq S_{z_{\max}}, \quad (3.18)$$

где $n_{\phi_{\min}}$ и $n_{\phi_{\max}}$ – минимальная и максимальная частота вращения шпинделя фрезы.

Для получения зависимости критерия оптимальности от входных и выходных параметров детали необходимо определить диапазон входных воздействий заготовки:

$$y_{0_{\min}}^{\pi_0} \leq y_0^{\pi_0} \leq y_{0_{\max}}^{\pi_0}, \quad 0 \leq \theta^{\pi_0} \leq \theta_{\max}^{\pi_0}. \quad (3.19)$$

Необходимо отметить следующую особенность задачи (3.11), (3.13)–(3.19). Величины $y_0^{\pi_1}$, θ^{π_1} , q , P_x , P_y , P_z являются функциями случайных аргументов $y_0^{\pi_0}$, θ^{π_0} , H , т.е. они сами случайны. Поэтому рассматриваемая задача является задачей управления в условиях неполной информации или задачей стохастического программирования [6, 21]. Запись (3.11), (3.13)–(3.19), вполне определенная при детерминированных значениях параметров условий задачи, теряет определенность и требует дополнительных разъяснений при случайных значениях параметров исходной информации. Естественный, на первый взгляд, путь анализа стохастических задач – замена случайных параметров их средними значениями и вычисление оптимальных планов полученных таким образом детерминированных задач – не всегда оправдан. При усреднении параметров условий задачи может быть нарушена адекватность модели изучаемому явлению. Решение детерминированной задачи с усредненными параметрами может не удовлетворять условию задачи при различных реализациях коэффициентов модели и вектора ограничений.

В тех случаях, когда ограничения задачи должны удовлетворяться при всех реализациях случайных параметров, соответствующие постановки задач стохастического программирования называются жесткими постановками (как бы полная взаимозаменяемость). Жесткие постановки естественны в тех ситуациях, когда каждое (или почти каждое) появление невязки в условиях задачи грозит чрезмерно большими штрафами и сводит на нет эффект от оптимизации целевой функции. Следует, однако, иметь в виду, что задача (3.11), (3.13)–(3.19) в жесткой постановке может не иметь планов. Область определения задачи

стохастического программирования в жесткой постановке представляет собой пересечение множеств, отвечающих каждой реализации параметров условий задачи. Это пересечение может оказаться пустым. Жесткая постановка задачи стохастического программирования в данном случае теряет смысл.

Таким образом, простейшие пути учета случайного характера условий задачи математического программирования – замена случайных переменных их средними значениями или переход к жесткой постановке – не всегда приводят к осмысленному решению задачи стохастического программирования.

В нашем случае жесткая постановка задачи возникает при замене случайных величин z и H их максимальными значениями z_{\max} и H_{\max} .

Недостатки жесткой постановки задачи приводят к более сложным моделям управления в условиях неполной информации. Каждая из них имеет свои недостатки и достоинства и свою, как правило, ограниченную область применения. Соответствие той или иной модели конкретной задаче определяется многими факторами, связанными с особенностями обстановки, в которой приходится принимать решение. Среди этих факторов важную роль играют априорные характеристики информации, которые можно полагать заданными, время и затраты на накопление информации, ущерб от возможных невязок в условиях задачи и др.

В задачах управления в условиях неполной информации, связанных с повторяющимися ситуациями, нет необходимости в том, чтобы ограничения задачи удовлетворялись при каждой реализации случая (на каждой детали или поверхности детали). Затраты на накопление информации или другие затраты, обеспечивающие исключение невязок в условиях задачи, могут превышать достигаемый при этом эффект. Часто конкретное содержание задачи требует лишь того, чтобы вероятность попадания решения в допустимую область превышала некоторое заранее заданное число $\alpha > 0$. Подобные постановки задач стохастического программирования называются моделями с вероятностными ограничениями.

В нашем случае целесообразно жесткие ограничения систем (3.13)–(3.14) заменить на вероятностные, т.е.

$$P\left[y_{0_{\min}}^{\pi_1} \leq y_0^{\pi_1} \leq y_{0_{\max}}^{\pi_1}\right] \geq \alpha_1,$$

$$P\left[0 \leq \theta^{\pi_1} \leq \theta_{\max}^{\pi_1}\right] \geq \alpha_2,$$

$$P\left[P_x \leq P_{\text{хдоп}}\right] \geq \alpha_3,$$

$$P[P_y \leq P_{удоп}] \geq \alpha_4, \quad (3.20)$$

$$P[P_z \leq P_{здоп}] \geq \alpha_5,$$

Уже указывалось, что замена случайных параметров условий задачи их средними значениями (первыми моментами распределения) не всегда приводит к осмысленному решению стохастической задачи. Однако в нашем случае, хотя износ инструмента на каждой детали различен и определяется случайными значениями припуска и твердости, суммарный износ за период стойкости колеблется уже значительно меньше. Нас интересует именно этот суммарный износ. Поэтому содержательная постановка задачи позволяет заменить ограничения со случайными параметрами неравенствами, ограничивающими первые моменты распределения левых частей условий. Таким образом, ограничение по износу примет вид

$$M[q] \leq \frac{h_{доп} M_{\Phi}}{\sum t^m}. \quad (3.21)$$

Такие постановки задач стохастического программирования называются моделями со статистическими условиями. Заметим, что в задачах стохастического программирования со статистическими условиями невязка в ограничениях исключена не во всех случаях, как в жестких постановках, и не в большинстве случаев, как в задачах с вероятностными ограничениями (при $\alpha > \frac{1}{2}$), а в среднем. Это значит, что невязки могут возникать при каждой реализации условий. Однако невязки условий, отвечающие различным реализациям состояния процесса, компенсируют друг друга так, что средняя невязка условий равна нулю.

Мы видим, что в нашей задаче присутствуют вероятностные, статистические и детерминированные ограничения. Такие модели стохастического программирования называются моделями со смешанными условиями.

При детерминированных коэффициентах моделей и случайном векторе ограничений наша задача, решением которой является детерминированный вектор, т.е. решение определяется в решающих правилах нулевого порядка, сводится к детерминированной задаче математического программирования.

Покажем, как это сделать в нашем случае для ограничений (3.20).

Рассмотрим третье ограничение в системе (3.20)

$$P[P_x(v, S, z, H) \leq P_{\text{доп}}] \geq \alpha_3.$$

Преобразуем внутреннее неравенство так, чтобы слева остались контролируемые переменные v и S , а справа – функция от случайных аргументов z и H :

$$P[\psi_3(v, S) \leq b_3(z, H)] \geq \alpha_3. \quad (3.22)$$

Случайные величины z и H характеризуются совместной плотностью распределения $f(z, H)$, которую будем считать заданной. Отсюда можно вычислять функцию распределения случайных аргументов $b_3(z, H)$ по формуле

$$F_3(b_3) = P[B_2 < b_2] = \iint_{b_3(z, H) < b_3} f(z, H) dz dH. \quad (3.23)$$

Теперь выражение (3.22) можно переписать следующим образом:

$$P[\tilde{b}_3 \geq \psi_3(v, S)] = 1 - F_3(\tilde{b}_3) \geq \alpha_3, \quad (3.24)$$

где \tilde{b}_3 – наибольшее число, удовлетворяющее неравенству.

Если $F_3(b_3)$ – непрерывная строго монотонная функция, последнее неравенство эквивалентно уравнению

$$1 - F_3(\tilde{b}_3) = \alpha_3. \quad (3.25)$$

Решение уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\tilde{b}_3 = F_3^{-1}(1 - \alpha_3). \quad (3.26)$$

Отсюда детерминированное ограничение, эквивалентное вероятностному (3.22), будет

$$\psi_3(v, S) \leq \tilde{b}_3. \quad (3.27)$$

К сожалению, даже в случаях трех последних ограничений системы (3.20) весьма затруднительно получить аналитическое выражение для совместной плотности распределения случайных величин z и H . Переменные же первых двух ограничений (3.20) получаются из исходных данных – случайных величин, характеризующих положение поверхности заготовки, алгоритмическим путем. Поэтому приведенные рассуждения позволяют только построить некоторый численный аналог решения задачи стохастического программирования, представляющий собой сочетание моделирующего процесса обработки алгоритма с методом Монте-Карло [18].

Наша задача согласно (3.11) – построить зависимость между входными и выходными характеристиками детали, с одной стороны, и оптимальным значением критерия по управлению переменными – с другой. Входные $\bar{x}^{\text{вх}}$ и выходные $\bar{x}^{\text{вых}}$ характеристики детали суть случайные величины, поэтому целесообразно пользоваться некоторыми их характеристиками. Введем следующие характеристики входных и выходных величин:

- $m_{y_0}^{\pi_0}$ – математическое ожидание $y_0^{\pi_0}$;
- $\sigma_{y_0}^{\pi_0}$ – среднеквадратическое отклонение $y_0^{\pi_0}$;
- $m_{\theta}^{\pi_0}$ – математическое ожидание θ^{π_0} ;
- $\sigma_{\theta}^{\pi_0}$ – среднеквадратическое отклонение θ^{π_0} ;
- $y_{0\text{ср}}^{\pi_1}$ – среднеарифметическое $y_0^{\pi_1}$;
- $\omega_{y_0}^{\pi_1}$ – поле рассеяния $y_0^{\pi_1}$;
- $\theta_{\text{ср}}^{\pi_1}$ – среднеарифметическое θ^{π_1} ;
- $\omega_{\theta}^{\pi_1}$ – поле рассеяния θ^{π_1} .

Мы считали, что на входе действуют случайные величины, а на выходе появляются статистики. Можно и вход оценивать статистически, это следует делать при повторных обработках одной и той же поверхности.

Критерий оптимальности (3.9) зависит от трех переменных – v_{ϕ} , S_z и T . Вообще говоря, v_{ϕ} и S_z при заданном припуске (в среднем) определяют период стойкости T инструмента. Но это справедливо, если обработка всех деталей ведется на одном режиме. Поэтому будем считать период стойкости независимой переменной, удовлетворяющей дополнительному неравенству

$$\Sigma t^M \leq T \cdot M_{\phi}, \quad (3.28)$$

т.е. суммарная стойкость имеющегося инструмента должна быть не меньше времени его работы.

Ограничения оптимальной задачи зависят от двух переменных (за исключением (3.28)) – v_{ϕ} и S_z .

Следует отметить, что погрешность расстояния и непараллельность одной поверхности относительно другой не являются независимыми величинами. Связь между ними обусловлена наличием общих воздействующих факторов. Если считать, как это принято, что максимальное отклонение от параллельности равно половине допуска на размер, то между среднеквадратическими отклонениями будет отношение

$$\sigma_{\theta}^{\pi_0} = \frac{1}{2l} \sigma_{y_0}^{\pi_0}, \quad (3.29)$$

где l – длина детали.

Наметим общую схему решения оптимальной задачи. Будем менять входные и выходные переменные в соответствии с матрицей

$$x_{\text{вх}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Здесь числами -1 и 1 обозначены минимальные и максимальные значения математического ожидания размера $y_0^{\pi_0}$ и его среднеквадратическое отклонение $\sigma_{y_0}^{\pi_0}$.

Строки матрицы (3.30) задают параметры распределения величины θ^{π_0} в соответствии с (3.29).

Далее в соответствии с алгоритмом Монте-Карло генерируется случайная тройка v_{ϕ} , S_z и T внутри некоторого объема, задаваемого неравенствами (3.18) и неравенством

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max}. \quad (3.31)$$

Нижний предел последнего неравенства следует из (3.28), верхний – принимается превышающим нижний не более чем на 50 %.

Следующим этапом являются работа моделирующего процесс фрезерования алгоритма и проверка ограничений по силам резания и стойкости инструмента, причем для одного значения случайной тройки v_{ϕ} , S_z и T случайные параметры, характеризующие положение заготовки – $y_0^{\pi_0}$, θ^{π_0} , ψ^{π_0} , генерируются несколько раз. В этом как раз проявляется аналогия со стохастическим программированием. Если для всех случайных значений $y_0^{\pi_0}$, θ^{π_0} , ψ^{π_0} все ограничения удовлетворяются, то вычисляется значение критерия оптимальности. В противном случае генерируется новая случайная тройка v_{ϕ} , S_z и T и процесс повторяется. Далее вычисляется минимальное значение критерия оптимальности $\theta_{\text{опт}}$ и соответствующая тройка $v_{\phi_{\text{опт}}}$, $S_{z_{\text{опт}}}$ и $T_{\text{опт}}$ называется оптимальным режимом. Для этого режима вычисляются при помощи моделирующего алгоритма пара-

метры распределения обработанной поверхности $y_{0cp}^{\pi_0}$, $\omega_{y_0}^{\pi_1}$, $\theta_{cp}^{\pi_1}$, $\omega_{\theta}^{\pi_1}$. Таким образом, у нас возникает следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} m_{y_0}^{\pi_0} & \sigma_{y_0}^{\pi_0} & y_{0cp}^{\pi_1} & \omega_{y_0}^{\pi_1} & \theta_{cp}^{\pi_1} & \omega_{\theta}^{\pi_1} & \theta_{opt} & v_{opt} & S_{opt} & T_{opt} \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Первые два столбца матрицы (3.32) повторяют матрицу (3.30). Цифры в остальных столбцах – значения соответствующих переменных для каждой строки матрицы (3.30). Матрицу, состоящую из первых шести столбцов (3.32), можно считать матрицей некоторого плана изменения входных и выходных переменных, которой отвечают столбцы оптимальных значений критерия оптимальности и внутренних переменных (т.е. теперь можно провести следующую аппроксимацию):

$$\theta_{opt} = \varphi(m_{y_0}^{\pi_0}, \sigma_{y_0}^{\pi_0}, y_{0cp}^{\pi_1}, \omega_{0cp}^{\pi_1}, \theta_{cp}^{\pi_1}, \omega_{\theta}^{\pi_1}),$$

$$v_{opt} = \psi^1(m_{y_0}^{\pi_0}, \sigma_{y_0}^{\pi_0}, y_{0cp}^{\pi_1}, \omega_{0cp}^{\pi_1}, \theta_{cp}^{\pi_1}, \omega_{\theta}^{\pi_1}),$$

$$S_{zopt} = \psi^2(m_{y_0}^{\pi_0}, \sigma_{y_0}^{\pi_0}, y_{0cp}^{\pi_1}, \omega_{0cp}^{\pi_1}, \theta_{cp}^{\pi_1}, \omega_{\theta}^{\pi_1}),$$

$$T_{opt} = \psi^3(m_{y_0}^{\pi_0}, \sigma_{y_0}^{\pi_0}, y_{0cp}^{\pi_1}, \omega_{0cp}^{\pi_1}, \theta_{cp}^{\pi_1}, \omega_{\theta}^{\pi_1}).$$

Подбор соответствующих функциональных зависимостей φ , ψ^1 , ψ^2 , ψ^3 может быть сделан при наличии конкретных сведений о матрице (3.32).

В случае обработки отверстия на многоцелевом станке переменные, характеризующие процесс, записываются следующими конкретными выражениями:

$$\bar{x}^{BK} = \begin{pmatrix} y_0^{\Delta_0} \\ z_0^{\Delta_0} \\ \xi^{x_0} \\ R_3 \\ k \end{pmatrix}; \quad x^{BVK} = \begin{pmatrix} y_0^{\Delta_0} \\ z_0^{\Delta_1} \\ \xi^{\Delta_1} \\ R \end{pmatrix}; \quad \bar{\Pi} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ q \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} v \\ S_0 \\ T \end{pmatrix}.$$

Ограничения на переменные оптимальной задачи точно такие же, как и в рассмотренном случае фрезерования. Характеристиками случайных величин служат математические ожидания, среднеквадратические отклонения, среднеарифметические и поля рассеяния.

Входные переменные меняются в соответствии с матрицей

$$x_{\text{вх}} = \begin{pmatrix} m_{y_0}^{\Delta_0} & \sigma_{y_0}^{\Delta_0} & m_{z_0}^{\Delta_0} & \sigma_{z_0}^{\Delta_0} & m_{R_3} & \sigma_{R_3} \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Как и в предыдущем случае, мы считаем, что характеристики непараллельности и конусности связаны с характеристиками размера отношениями

$$\sigma_{\xi}^{\Delta_0} = \frac{1}{2l} \sigma_{y_0}^{\Delta_0}, \quad \sigma_k = \frac{1}{2l} \sigma_{y_0}^{\Delta_0}.$$

Матрица (3.33) есть 1/8 реплики типа 2^{6-3} . Вычислительный процесс организован аналогично рассмотренному случаю. Для оптимальной тройки $v_{\text{опт}}$, $S_{\text{опт}}$, $T_{\text{опт}}$ вычисляются параметры распределения характеристик обработанной поверхности $y_{\text{ср}}^{\Delta_1}$, $\omega_{y_0}^{\Delta_1}$, $z_{\text{ср}}^{\Delta_1}$, $\omega_{z_0}^{\Delta_1}$, $\xi_{\text{ср}}^{\Delta_1}$, $\omega_{\xi}^{\Delta_1}$, $R_{\text{ср}}$, ω_R . Далее проводится аппроксимация зависимостей критерия оптимальности и режима от входных и выходных переменных.

Получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{опт}} &= 10,2 \cdot z_{y_0}^{-0,32} \cdot \sigma_{y_0}^{\Delta_0^{0,74}} \cdot z_{z_0}^{-0,21} \cdot \sigma_{z_0}^{\Delta_0^{-0,38}} \cdot z_R^{0,12} \cdot \sigma_{R_3}^{-0,49} \omega_{y_0}^{\Delta_1^{-0,3}} \times \\ &\times \xi_{\text{ср}}^{\Delta_1^{-0,26}} \omega_R^{0,25}, \\ v_{\text{опт}} &= 1,05 \cdot z_{y_0}^{-0,33} \cdot \sigma_{y_0}^{\Delta_0^{0,004}} \cdot z_{z_0}^{0,042} \cdot \sigma_{z_0}^{\Delta_0^{-0,44}} \cdot z_R^{0,24} \cdot \sigma_{R_3}^{-0,42} \omega_{y_0}^{\Delta_1^{-0,3}} \times \\ &\times \xi_{\text{ср}}^{\Delta_1} \omega_R^{0,28}, \end{aligned}$$

$$S_{0\text{опт}} = 0,98 \cdot z_{y_0}^{0,014} \cdot \sigma_{y_0}^{\Delta_0^{0,14}} \cdot z_{z_0}^{0,13} \cdot \sigma_{z_0}^{\Delta_0^{-0,18}} \cdot z_R^{0,28} \cdot \sigma_{R_3}^{0,18} \omega_{y_0}^{\Delta_1^{0,11}} \times \\ \times \xi_{\text{ср}}^{\Delta_1^{-0,006}} \omega_R^{-0,1},$$

$$T_{\text{опт}} = 0,95 \cdot z_{y_0}^{-0,15} \cdot \sigma_{y_0}^{\Delta_0^{0,47}} \cdot z_{z_0}^{0,32} \cdot \sigma_{z_0}^{\Delta_0^{-0,088}} \cdot z_R^{0,446} \cdot \sigma_{R_3}^{-0,42} \omega_{y_0}^{\Delta_1^{-0,14}} \times \\ \times \xi_{\text{ср}}^{\Delta_1^{-0,43}} \omega_R^{0,012},$$

где $z_{y_0} = m_{y_0}^{\Delta_0} - y_{0\text{ср}}^{\Delta_1}$, $z_{z_0} = m_{z_0}^{\Delta_0} - z_{0\text{ср}}^{\Delta_1}$, $z_R = m_{R_3} - R_{\text{ср}}$.

Для растачивания оптимальные значения следующие:

$$\theta_{\text{опт}} = 108;$$

$$V_{\text{опт}} = 74;$$

$$S_{0\text{опт}} = 0,34;$$

$$T_{\text{опт}} = 101.$$

1. *Базров Б.М.* Основы технологии машиностроения. – М.: Машиностроение, 2005. – 266 с.
2. *Балакишин Б.С.* Теория и практика машиностроения. – М.: Машиностроение, 1992. – 239 с.
3. *Грановский В.А., Сирая Т.Н.* Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 287 с.
4. *Гузев В.И.* и др. Режимы резания для токарных и сверлильно-фрезерно-расточных станков с ЧПУ: Справочник. – М.: Машиностроение, 2005. – 363 с.
5. *Диментберг Ф.М.* Винтовое исчисление и его приложения в механике. – М.: Наука, 1965. – 200 с.
6. *Ермольев Б.М.* Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
7. *Ефимова М.Р.* и др. Общая теория статистики: Учеб. для вузов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 412 с.
8. *Искра Д.Е.* Высокоточная обработка на токарных станках с использованием диагностической системы // Конструкторско-технологическая информатика – 2000: Тр. конгр.: В 2 т. – М.: Изд-во «Станкин», 2000. – Т. 1: VI Междунар. конгр. – С. 233–236.
9. Машиностроение: Энциклопедия: В 40 т. – М.: Машиностроение, 2005. – Т. 3–1: Технологическая подготовка производства. Проектирование и обеспечение деятельности предприятия, разд. 3: Технология производства машин. – 575 с.
10. *Митрофанов В.Г.* Анализ оптимального режима обработки // Адаптивное управление технологическими процессами на станках / Ю.М. Соломенцев, В.Г. Митрофанов, С.П. Протополов и др. – М.: Машиностроение, 1980а.
11. *Митрофанов В.Г.* Особенности решения задач оптимизации для массового и мелкосерийного производства // Там же. – 1980б.
12. *Налимов В.В.* Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
13. Направленное формирование свойств изделий машиностроения / Под ред. А.И. Кондакова. – М.: Машиностроение, 2005. – 351 с.
14. Обработка металлов резанием: Справ. технолога. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 2004. – 784 с.
15. *Абакумов А.М.* Способ механической обработки. Пат. RU 2086385, В 23 Q 15/00. Оpubл. 1997, Бюл. № 22.
16. *Юркевич В.В., Кутин А.А.* Устройство автоматического управления точностного токарного станка. Пат. RU 2130826, В 23 Q 15/007.
17. Справочник технолога-машиностроителя: В 2 т. / Под ред. А.М. Дальского, А.С. Косиловой и др. – 5-е изд., испр. – М.: Машиностроение, 2003.

18. *Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 64 с.
19. *Соломенцев Ю.М., Митрофанов В.Г., Павлов В.В., Рыбаков А.В.* Информационно-вычислительные системы в машиностроении. CALS-технологии. – М.: Наука, 2003. – 292 с.
20. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
21. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. радио, 1979. – 392 с.
22. *Яцерицын П.И.* и др. Теория резания: Учеб. для вузов. – М.: Новое знание, 2005. – 511 с.

Научное издание

Искра Дмитрий Евгеньевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ
ДВИЖЕНИЯМИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ**

Зав. редакцией *М.В. Грачева*

Редактор *Л.В. Филиппова*

Художник *Е.А. Швейко*

Художественный редактор *Ю.И. Духовская*

Технический редактор *М.К. Зарайская*

Корректор *А.В. Морозова*

Подписано к печати 01.11.2006
Формат 60 × 90^{1/16}. Гарнитура Таймс
Печать офсетная

Усл.печ.л. 7,0. Усл.кр.-отг. 7,5. Уч.-изд.л. 6,0
Тираж 400 экз. Тип. зак. 4696. Заказное

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: secret@naukarun.ru
www.naukarun.ru

ППП "Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6