ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АЛГЕБРА фанидан

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Мазкур мажмуада “Математик анализ” фанидан ишчи ўқув дастури, таълим технологияси, назорат турлари учун тайёрланган топшириқлар вариантлари, тест саволари, фандан умумий назорат саволлари ва изоҳли луғат жамланган.

Ушбу ўқув-услубий мажмуа олий ўқув юртлари профессор-ўқитувчилари учун тавсия этилади. Шу билан бирга ўқув-услубий мажмуадан илмий ходимлар, аспирант ва тадқиқотчилар ҳамда “Математик анализ” фанига қизиқувчилар фойдаланишлари мумкин.

Масъул муҳаррир: ф.-м.ф.н., Худойберганов М.Ў.

Тузувчилар: ф.-м.ф.н., доц. Файзиев Ю.Э.
ф.-м.ф.н., Қўчқоров Э.И.
ф.-м. ф.н., Алиқулов Т.Н.

Тақризчи: ф.-м.ф.н., Жўраев Ғ.У.

Ўқув-услубий мажмуа Ўзбекистон Миллий университети Илмий техник кенгашининг қарорига мувофиқ ўқув жараёнига тадбиқ этиш учун тавсия этилган.

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА МУНДАРИЖАСИ

1. Фан дастури

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Руйхатга олинди	Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг
№БД5480100-31.02	2008 йил “23” августдаги “263”- сонли буйруғи билан тасдиқланган
2008 йил “23”август	

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

фанининг

ЎҚУВ ДАСТУРИ

Билим соҳаси:	400 000 - Фан
Таълим соҳаси:	480 000 - Амалий математика ва информатика
Таълим йўналиши:	5480100 - Амалий математика ва информатика

Тошкент - 2011

Фаннинг ўқув дастури Олий ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими ўқув-методик бирлашмалари фаолиятини Мувофиқлаштирувчи Кенгашнинг 2008 йил “20” августдаги “4” – сон мажлис баёни билан маъқулланган.

Фаннинг ўқув дастури Ўзбекистон Миллий университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчилар:

Холмухамедов О.Р. - ЎзМУ “Математик физика” кафедраси мудири, профессор, ф.-м. ф.д.
Файзиев Ю.Э. - ЎзМУ “Математик физика” кафедраси доценти, ф.-м. ф.н.
Қўчқоров Э. И. - ЎзМУ “Математик физика” кафедраси катта ўқитувчиси, ф.-м. ф.н.
Аликулов Т.Н. - ЎзМУ “Математик физика” кафедраси ассистенти

Тақризчилар:

Нармонов А.Я. - ЎзМУ “Геометрия ва амалий математика” кафедраси мудири, профессор, ф.-м. ф.д.
Абдурахимов А.А. - Тошкент архитектура ва қурилиш институти доценти, ф.-м. ф.н.

Фаннинг ўқув дастури Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети Илмий – услубий кенгашида тавсия қилинган (2008 йил «27 » июндаги «9» – сонли баённома)

Кириш

Ушбу дастур Республика Олий ўқув юртлари бакалавриатининг «Амалий математика ва информатика» йўналиши бўйича таҳсил олаётган 1-курс талабаларига мўлжалланган.

Ўқув фанининг мақсади ва вазифалари

Фанни ўқитишдан мақсад – талабаларнинг математик билимларини оширишга мўлжалланган. Бу фан бакалаврлар тайёрлашнинг ўқув жараёнида талабаларнинг юқори даражадаги умумматематик тайёргарлиги ва кўпгина махсус фанлар бўйича чуқур билимлар эгаси бўлишида асосий ўрин тутади.

Фаннинг вазифаси – талабаларга векторлар устида амаллар бажариш, матрицалар устида амаллар бажариш, детерминантларни ҳисоблаш, чизиқли тенгламалар системасини ечиш, чизиқли фазолар ҳақида тушунча бериш ва ушбу мавзуларга оид масалаларни MATHEMATIKA, MATCAD, MATLAB, MATPROF, MAPLE каби дастурларида ечишни ўргатишдан иборат.

Фан бўйича талабаларнинг билимига, кўникма ва малакасига қуйиладиган талаблар

“Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида бакалавр:

- матрицалар ҳақидаги тушунчани, матрицалар устида амаллар бажаришни, детерминантлар ҳақидаги тушунчани, тўғри чизиқ, текислик, фазода декарт координаталар системасини, аффин, қутб, цилиндрик ва сферик координаталар системасини кирита билиши, векторлар ҳақида тушунчага эга бўлиши, векторлар устида амаллар бажаришни, скаляр кўпайтма, вектор кўпайтма, аралаш кўпайтма, икки каррали вектор кўпайтма тушунчаларини, тўғри чизиқ, текислик тушунчаларини, эллипс, гипербола, парабола ҳақида тушунчаларни, каноник тенгламаларини, иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламасини, иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламасини, эллипсоид, гиперболоид, параболоидлар ҳақида тушунчани, чизиқли фазо тушунчасини, чизиқли тенгламалар сиситемаси ҳақида тушунчани, чизиқли операторлар ҳақида тушунчани, квадратик формалар ҳақида тушунчаларини ***билиши керак***;

- матрицалар устида амаллар бажариш, детерминантлар ҳисоблай олиш, тўғри чизиқ, текислик, фазода декарт координаталар системасини, аффин, қутб, цилиндрик ва сферик координаталар системасини кирита билиш, аналитик геометриянинг содда масалаларини еча олиш, векторлар устида амаллар бажара олиш, скаляр кўпайтма, вектор кўпайтма, аралаш кўпайтма, икки каррали вектор кўпайтмаларни ҳисоблай олиш, тўғри чизиқ, текисликларга оид масалаларни еча билиш, эллипс, гипербола, параболанинг каноник тенгламаларин келтириб чиқара билиш, иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламасини, иккинчи тартибли сиртларнинг умумий тенгламасини содда стандарт шаклга келтира билиш, эллипсоид, гиперболоид, параболоидларни тасаввур қилиш, чизиқли фазо тушунча содда хоссаларини қўллай билиш, чизиқли тенгламалар сиситемасини еча билиш, чизиқли операторнинг хос сонлари ва хос элементларини топа билиш, квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш ***кўникмаларига эга бўлиш керак***;

- талаба олган назарий билимларини мисол ва масалаларни ечишга қўллай билиш ***малакасига эга бўлиши керак***.

Фаннинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

“Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фанини асосий ихтисослик фани бўлиб, 1 ва 2-семестрларда ўқитилади. Бу фан умумматематик ва информатика фанларида дастурлар тузушда асос бўлиб ҳисобланади.

Фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни

“Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фани асосан назарий характерга эга бўлиб, ҳозирги кундаги кўпгина амалий дастурларни вужудга келишига ушбу фаннинг ўрни муҳим ҳисобланади. Бундан ташқари мазкур фан “Амалий математика ва информатика” йўналишида мутахассислар тайёрлашнинг ўқув жараёнида бакалаврларнинг юқори даражадаги математик тайёргарлиги ва кўпгина махсус фанлар бўйича чуқур билимлар эгаси бўлишида асосий ўрин тутади.

Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педогогик технологиялар

Талабаларнинг“Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг илғор ва замонавий усуллардан фойдаланиш, янги информацион технологияларни тадбиқ қилиш муҳим аҳамиятга эгадир. “Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фанини ўқитишда дарслик, ўқув ва услубий қўлланмалар, маърузалар матнлари, тарқатма материаллар, электрон материаллар, маърузалар ўқиш вақтида компьютер ва проекторлардан фойдаланилади.

Асосий қисм

Фаннинг назарий машғулотлари мазмуни

Матрицалар ва детерминантлар. Аналитик геометриянинг содда масалалари. Векторлар алгебраси. Текислик ва фазода Декарт координаталар системасини алмаштириш. Текисликда тўғри чизиқ тенгламалари. Фазода текислик ва тўғри чизиқлар тенгламалари. Иккинчи тартибли эгри чизиқлар. Иккинчи тартибли сиртлар. Чизиқли фазо. Чизиқли тенгламалар системалари назарияси. Чизиқли операторлар назариясига кириш, квадратик формалар.

Матрицалар ва детерминантлар

Матрицалар тушунчаси. Матрицалар устида бажариладиган асосий амаллар ва уларнинг хоссалари. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш. Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари. Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Тескари матрица. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги. Матрицанинг ранги. Базис минор ҳақида теорема. Детерминант нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шарти.

Аналитик геометриянинг содда масалалари

Тўғри чизикда Декарт координаталар системаси. Ўқда йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният. Тўғри чизиқда декарт координаталари. Фазода ва текисликда декарт координаталари. Аналитик геометриянинг содда масалалари. Фазода йўналтирилган кесма ва унинг проекцияси. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси. Фазода цилиндрик ва сферик координаталар системаси. Иккинчи ва учинчи тартибли матрица ва детерминантлар.

Векторлар алгебраси

Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Икки векторнинг чизиқли комбинацияси. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғланганлиги. Базис тушунчаси. Векторнинг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скаляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси.

Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.

Текислик ва фазода Декарт координаталар системасини алмаштириш

Текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасини алмаштириш. Фазода Декарт координаталар системасини алмаштириш. Эйлер бурчаклари.

Текисликда тўғри чизиқ

Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Тўғри чизиқлар дастаси. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар.

Фазода текислик ва тўғри чизиқлар

Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуктадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа. Текисликлар дастаси ва боғлами. Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар

Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари. Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси. Декарт координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши. Иккинчи тартибли эгри чизиқ инвариантлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ турлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази. Координаталар системасини буриш орқали иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаларини соддалаштириш. Иккинчи тартибли эгри чизиқларни инвариантлар ёрдамида синфларга ажратиш.

Иккинчи тартибли сиртлар

Иккинчи тартибли сирт тенгламалари. Эллипсоид. Гиперболоидлар. Параболоидлар. Иккинчи тартибли конус ва цилиндрлар.

Чизиқли фазо

Чизиқли фазо тушунчаси. Ихтиёрий чизиқли фазоларнинг хоссалари. Чизиқли фазода элементларнинг чизиқли боғланганлиги тушунчаси. Базис ва координаталар. Чизиқли фазонинг ўлчами. Изоморф чизиқли фазолар. Чизиқли қобиқ ва қисм фазолар тушунчаси. Қисм фазоларнинг йиғиндиси, кесишмаси. Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.

Чизиқли тенгламалар системалари назарияси

Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари. Бир жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.

Чизиқли операторлар

Чизиқли оператор назариясига кириш. Чизиқли операторлар устида амаллар. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари. Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши. Чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади. Чизиқли операторнинг хос қиймати ва хос векторлари. Квадратик форма тушунчаси. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули. Квадратик форма учун инерция қонуни. Квадратик формаларни синфларга ажратиш. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.

Амалий машғулотларни ташкил этиш бўйича кўрсатмалар ва тавсиялар

Амалий машғулотлардан мақсад маъруза материаллари бўйича талабаларнинг билим ва кўникмаларини чуқурлаштириш ва кенгайтиришдан иборат. Бунда талабалар амалий машғулотларда мисол ва масалаларни ечишда, ечимларни таҳлил қилишда олган назарий билимларини қўллай олишлари назарда тутилади.

Амалий машғулотларда тахминий тавсия этиладиган мавзулар:

1. Матрицалар устида амаллар бажаришга оид мисоллар ечиш.
2. Детерминантларни ҳисоблашга оид мисоллар ечиш. Тескари матрицани топишга оид мисоллар ечиш.
3. Тўғри чизиқ, текислик, фазода декарт координаталар системасини киритишга, ўқда йўналтирилган кесмага, йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар бажариш. Аналитик геометриянинг содда масалалари. Фазода йўналтирилган кесма ва унинг проекцияси. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси. Фазода цилиндрик ва сферик координаталар системасига оид мисоллар ечиш.
4. Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Икки векторнинг чизиқли комбинацияси. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғланганлиги. Базис тушунчаси. Векторниг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скяляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси. Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Вектор

кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтмага оид мисоллар ечиш.

5. Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган масофа. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалаларга оид мисоллар ечиш.
6. Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа. Текисликлар дастаси ва боғлами. Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалаларга оид мисоллар ечиш.
7. Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари. Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламаларига оид мисоллар ечиш.
8. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг тенгламаларига оид мисоллар ечиш.
9. Чизиқли фазоларга оид мисоллар ечиш.
10. Чизиқли тенгламалар сиситемасига оид мисоллар ечиш.
11. Чизиқли операторларнинг хос сонлари ва хос элементларини ҳисоблаш.
12. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш.

Лаборатория ишларини ташкил этиш бўйича кўрсатмалар

Лаборатория ишлари талабаларда “Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра” фани бўйича баъзи боблардаги масалалр учун дастурлар тузишга мўлжалланган.

Лаборатория ишларига тавсия этиладиган мавзулар:

1. Матрицалар устида амаллар бажариш ва детерминантларни ҳисоблаш.
2. Векторлар устида амаллар.
3. Текисликда тўғри чизиқ.

4. Фазода тўғри чизиқ ва текислик.
5. Қуйидаги чизиқларни каноник шаклга келтиринг ва графигини ясаш дастурини тузинг.
6. Тенгламалар системасмни ечиш.
7. Чизиқли операторларнинг хос сонлари ва хос элементларини топиш, квадратик формани каноник кўринишга келтириш.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

Талаба мустакил ишни тайёрлашда муайян фаннинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиш тавсия этилади:

- Дарслик ва ўқув қўлланмалар бўйича фан боблари ва мавзуларини ўрганиш;
- Тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- Махсус адаибётлар бўйича фанлар бўлимлари ёки мавзулар устида ишлаш;
- Замонавий компьютер технологияларидан фойдаланиш;

Тавсия этилаётган мустақил ишларнинг мавзулари:

1. Матрицалар.
2. Детерминантлар.
3. Координаталар системаси.
4. Векторлар назарияси.
5. Декарт координаталар системасини алмаштириш.
6. Чизиқ ва сирт тенгламаси.
7. Фазода тўғри чизиқ ва текислик.
8. Иккинчи тартибли чизиқлар.
9. Иккинчи тартибли сиртлар.
10. Алгебраик кўпҳадлар.
11. Чизиқли фазолар
12. Чизиқли тенгламалар системаси.
13. Чизиқли операторлар.
14. Квадратик формалар.

Фойдаланиладиган асосий дарслик ва ўқув қўлланмалар рўйхати

Асосий дарслик ва ўқув қўлланмалар

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Москва, 1983г.
2. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент, «Ўқитувчи» , 1975й.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линеная алгебра. Москва, 1983г.
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебрў. Москва, 1980г.
5. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001й.

Қўшимча адабиётлар

6. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964й.
7. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1964г.
8. И.В.Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, 1972г.
9. Д.К.Фадеев и И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1954г.
10. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1972г.
11. О.Н.Цубервиллер Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии.
12. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебре, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru

2. Ишчи фан дастур.

“ТАСДИҚЛАЙМАН”
Механика-математика
факультети декани
___________ Б А Шоимкулов

2011 йил 28 август.

Алгебра ва геометрия фани бўйича

5480100 – Амалий математика ва информатика

йўналиши учун

ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Умумий ўқув соати	**– 266 с.**
Шу жумладан:	
Маъруза	– 76 с.
Амалий машғулотлар	– 76 с.
Мустақил таълим соати	– 114 с.

Фаннинг ишчи ўқув дастури М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети Механика-математика факультети математик физика кафедрасининг 2011 йил 28 августдаги № 1–сонли мажлисида муҳокама этилди ва маъқулланди.

“Амалий математика ва информатика” таълим йўналиши намунавий ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилди.

Тузувчи: ф-м.ф.н., доцент в.б. **Файзиев Ю.Э.** __________
(имзо)

ф-м.ф.н ., доцент в.б **Аликулов Т.Н.** __________
(имзо)

Тақризчи: ф-м.ф.д. **Тўхтасинов М.Т.** __________
(имзо)

Кафедра мудири: ф-м.ф.д. **Касимов Ш.Г** __________
(имзо)

Фаннинг ишчи ўқув дастури Механика-математика факультети Илмий Кенгашининг 2011 йил 28 августдаги 1 – сонли қарори билан тасдиқланди.

Илмий Кенгаш раиси:
2008 йил 28 август ______________ **Б А Шоимкулов**
(имзо)

Алебра ва геометрия

Кириш. Мазкур курс олий таълим бўйича кадрлар тайёрлаш муаммоларини хал этиш борасида, талабаларнинг математик анализ фани бўйича чуқур билим эгаси бўлишида муҳим аҳамият касб этади.

Ушбу дастур Республика Олий ўқув юртлари бакалавриатининг «Информацион технологиялари» йўналиши бўйича таҳсил олаётган 1-курс талабаларига мўлжалланган.

Фаннинг асосий мақсади талабаларнинг математик билимларини оширишга мўлжалланган. Бу фан бакалаврлар тайёрлашнинг ўқув жараёнида талабаларнинг юқори даражадаги умумматематик тайёргарлиги ва кўпгина махсус фанлар бўйича чуқур билимлар эгаси бўлишида асосий ўрин тутади.

Талабаларнинг фанни назарий ва амалий ўзлаштиришлари ҳозирги замон компьютер технологияларини жалб қилиш билан бирга олиб борилади. Хусусан, векторлар устида амаллар бажариш, текисликда тўғри чизиқларга, фазода тўғри чизиқ ва текисликларга, иккинчи тартибли чизиқларга оид масалаларни ечиш, матрицалар устида амаллар бажариш, детерминантларни ҳисоблаш, чизиқли тенгламалар системасини ечиш, чизиқли тенгламалар системасини итерацион усуллар ёрдамида ечиш масалаларини MATCAD, MATLAB, MATPROF, MAPLE дастурларида ечишни ўрганишади ва лаборатория ишларида юқоридаги масалаларни ечишнинг алгоритми, ҳамда дастурларини тузишади.

Маъруза мавзулари (76 соат).

Матрицалар тушунчаси. Матрицалар устида бажариладиган асосий амаллар ва уларнинг хоссалари. Блок матрицалар. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш. Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари. Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Матрицанинг ранги ткшкнчаси. Базис минор ҳақида теорема. Тескари матрица. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги. Детерминант нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шарти.

Тўғри чизиқда Декарт координаталар системаси. Ўқда йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният. Тўғри чизиқда декарт координаталари. Фазода ва текисликда декарт координаталари. Аналитик геометриянинг содда масалалари. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Қутб координаталар системаси. Фазода цилиндрик ва сферик координаталар системаси. Фазода йўналтирилган кесма.

Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Икки векторнинг чизиқли комбинацияси. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғланганлиги. Базис тушунчаси. Афин координаталари. Векторниг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси. Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.

Чизиқли фазо тушунчаси. Ихтиёрий чизиқли фазоларнинг хоссалари. Чизиқли фазода элементларнинг чизиқли боғланганлиги тушунчаси. Базис ва координаталар. Чизиқли фазонинг ўлчами. Изоморф чизиқли фазолар. Чизиқли қобиқ ва қисм фазолар тушунчаси. Матрица рангининг иккинчи таърифи. қисм фазоларнинг йиғиндиси, кесишмаси. Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.

Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари. Бир жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.

Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган масофа. Тўғри чизиқлар дастаси. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар.

Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа. Текисликлар дастаси ва боғлами. Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.

Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари. Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эл координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши. Иккинчи тартибли эгри чизиқ инвариантлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ турлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази. Координаталар системасини буриш орқали иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаларини соддалаштириш. Иккинчи тартибли эгри чизиқларни инвариантлар ёрдамида синфларга ажратиш.

Чизиқли оператор тушунчаси. Чизиқли операторлар устида амаллар. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари. Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши. Чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади. Чизиқли операторнинг хос қиймати ва хос векторлари.

Квадратик формалар. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули. Квадратик форма учун инерция қонуни. Квадратик формаларни синфларга ажратиш. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.

Амалий машғулотлар мавзулари (76 соат)

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар бўйича мисоллар ечилади:

Матрицалар тушунчаси. Матрицалар устида амаллар бажариш. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш. Детерминантнинг хоссаларидан фойдаланиб детерминантни ҳисоблаш. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари. Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Тескари матрица. Матрицанинг сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги. Матрицанинг ранги тушунчаси. Базис минор ҳақида теорема.

Тўғри чизиқ, текислик ва фазода декарт координаталар системасига оид мисоллар ечиш. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин, қутб координаталар системаси. Фазода цилиндрик ва сферик координаталар системаси.

Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги. Базис тушунчаси. Векторниг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Векторларнинг скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скяляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Координаталари билан берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.

Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари.

Бир жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.

Чизиқли фазоларга оид мисоллар ечиш. Чизиқли фазода элементларнинг чизиқли боғланганлиги тушунчаси. Базис ва координаталар. Чизиқли фазонинг ўлчами. Изоморф чизиқли фазолар. Чизиқли қобиқ ва қисм фазолар тушунчаси. Қисм фазоларнинг йиғиндиси, кесишмаси. Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.

Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган масофа. Тўғри чизиқлар дастаси. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар.

Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа. Текисликлар дастаси ва боғлами. Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.

Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари. Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси. Иккинчи тартибли эгри чизиқ инвариантлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ турлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази. Иккинчи тартибли эгри чизиқларни инвариантлар ёрдамида синфларга ажратиш. Декарт координаталар системасини алмаштириш ёрдамида иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси каноник кўринишга келтириш.

Чизиқли оператор тушунчаси. Чизиқли операторлар устида амаллар. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари. Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши. Чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади. Чизиқли операторнинг хос қиймати ва хос векторлари.

Квадратик формалар. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари.

Лагранж усули. Якоби усули. Квадратик форма учун инерция қонуни. Квадратик формаларни синфларга ажратиш. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.

Аудитория соатларининг мавзулар бўйича тақсимланиши

	1-семестр	2-семестр	Жами
Маъруза	38	38	76
Амалий машғулот	38	38	76
Мустақил таълим	57	57	114
Жами соат	**133**	**133**	**266**

№	**Мавзу**	**Соатлар**		
		Жами	**Маъруза**	**Амалий машғулот**
	1 - семестр			
1.	Кириш. Матрицалар тушунчаси. Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш, айириш ва уларнинг хоссалари.	4	2	2
2.	Матрицаларни кўпайтириш ва уларнинг хоссалари. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш.	8	4	4
3.	Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари.	6	2	4
4.	Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Тескари матрица. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги. Матрицанинг ранги. Базис минор ҳақида теорема. Детерминант нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шарти.	4	2	2
5.	Тўғри чизиқда Декарт координаталар системаси. Ўқда йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният. Тўғри чизиқда декарт координаталари. Текислик ва фазода декарт координаталари.	4	2	2
6.	Аналитик геометриянинг содда масалалари. Фазода	6	2	4

	йўналтирилган кесма ва унинг проекцияси. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси.			
7.	Оралиқ назорат	2	2	
8.	Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторлар устида амаллар бажаришга оид дастурлар чизиш.	4	2	2
9.	Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Икки векторнинг чизиқли комбинацияси. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғланганлиги.	4	2	2
10.	Базис тушунчаси. Векторниг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скяляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси. Скаляр кўпайтмани ҳисоблашга оид дастурлар тузиш.	4	2	2
11.	Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Вектор кўпайтмани ҳисоблашга оид дастурлар тузиш. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.	8	4	4
12.	Чизиқли фазо тушунчаси. Ихтиёрий чизиқли фазоларнинг хоссалари. Чизиқли фазода элементларнинг чизиқли боғланганлиги тушунчаси.	4	2	2
13.	Базис ва координаталар. Чизиқли фазонинг ўлчами. Изоморф чизиқли фазолар. Чизиқли қобиқ ва қисм фазолар тушунчаси. Матрица рангининг иккинчи таърифи. қисм фазоларнинг йиғиндиси, кесишмаси.	4	2	2
14.	Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.	4	2	2
15.	Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари. Бир	4	2	2

	жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари.			
16.	Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.	8	4	4
17.	Оралиқ назорат	2	2	
18.	**Якуний назорат**	2	2	
2 – семестр				
19.	Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар. Тўғри чизиқларни чизишга оид дастурлар тузиш.	8	4	4
20.	Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа.	4	2	2
21.	Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизикнинг каноник тенгламаси Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти.	4	2	2
22.	Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.	10	4	6
23.	Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари.	4	2	2
24.	Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари.	6	2	4
25.	Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий	8	4	4

	тенгламаси. Декарт координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши.			
26.	Оралиқ назорат	2	2	
27.	Чизиқли оператор тушунчаси. Чизиқли операторлар устида амаллар. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари.	4	2	2
28.	Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши. Чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади. Чизиқли операторнинг хос қиймати ва хос векторлари.	6	2	4
29.	Квадратик форма тушунчаси. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули.	4	2	2
30.	Оралиқ назорат	2	2	
31.	Квадратик форма учун инерция қонуни. Квадратик формаларни синфларга ажратиш. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.	6	2	4
32.	**Якуний назорат**	2	2	
	Жами:	**152**	**76**	**76**

Мустақил таълим мавзулари

Ишчи ўқув дастурининг мустақил таълимга оид бўлим ва мавзулари	**Мустақил таълимга оид топширик ва тавсиялар**	**Ҳажми (соатда)**
Координаталар системаси	Турли координаталар системасида аналитик геометриянинг содда масалалари орасида боғланиш. Бицентрик координаталар системаси.	6
Векторлар назарияси	Берилган учта векторни битта нуқтага келтириб ясалган параллелипепид ва пирамиданинг ҳажмини векторларнинг аралаш кўпайтмаси орқали топиш	6
Декарт координаталар системасини алмаштириш	Текислик ва фазода декарт координаталар системасини алмаштириш.	6
Чизиқ ва сирт тенгламаси	Чизиқ ва сирт тенгламалари. Декарт координаталар системасини алмаштириш	8

	натижасида чизиқ ва сирт тенгламалари ўзгариши.	
Фазода тўғри чизиқ ва текислик	Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.	8
Иккинчи тартибли чизиқлар	Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ инвариантлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ турлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази. Координаталар системасини буриш орқали иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаларини соддалаштириш. Иккинчи тартибли эгри чизиқларни инвариантлар ёрдамида синфларга ажратиш.	10
Комплекс сонлар	Комплекс сонлар устида амаллар бажариш	6
Алгебраик кўпҳадлар	Алгебраик кўпҳадлар. Алгебраик кўпҳадлар устида амаллар бажариш: қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш. Кўпҳадларнинг ЭКУБ ини топишнинг Евклид алгоритми. Безу теоремаси. Горнер схемаси.	8
Матрицалар	Блок матрицалар улар устида амаллар бажариш	4
Детерминантлар	Лаплас теоремаси ва унинг татбики.	6
Чизиқли тенгламалар системаси	Чизиқли тенгламалар системасининг	8
Чизиқли фазолар оид масалалар	Қисм фазоларга оид баъзи масалалар	6
Евклид фазоси	Евклид фазоси ва хоссалари	8
Чизиқли операторлар	Базис алмашганда чизиқли операторнинг матрицасининг ўзгариши	8
Бичизиқли формалар	Бичизиқли формалар ва уларнинг хоссалари	8
Итарацион усуллар	Итерацион усулларнинг тадбиқи	8
Жами		114

Ўзлаштириш назароти.

ОН № 1	**ОН №2**	**ЯН**	**ЖН**				**Жами**
			Уй топшириқлари	1 - ЖН	2 - ЖН	Дарслардаги иштироки ва фаоллиги	
17	18	30	8	10	10	7	100

Баҳолаш мезони

Балл	**Баҳо**	**Талабанинг билим даражаси**
86 – 100	Аъло	Хулоса ва қарор қабул қилиш; Ижодий фикрлай олиш; Мустақил мушоҳада юритиш; Амалда қуллай олиш; Моҳиятини тушунтириш; Билиш, айтиб бериш; Тассавурга эга бўлиш.
71 – 85	Яхши	Мустақил мушоҳада юритиш; Амалда қуллай олиш; Моҳиятини тушунтириш; Билиш, айтиб бериш; Тассавурга эга бўлиш.
55 – 70	Қониқарли	Моҳиятини тушунтириш; Билиш, айтиб бериш; Тассавурга эга бўлиш.
0 – 54	Қониқарсиз	Аниқ тассавурга эга эмаслик; Билмаслик.

Адабиётлар

14. Каримов И. А. Юксак маънавият енгилмас куч. Т. : Маънавият, 2008 й.
15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Москва, 1983г.
16. Курош А.Г. Олий алгебра курси. Тошкент, «Ўқитувчи» , 1975й.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линеная алгебра. Москва, 1983г.
18. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебрў. Москва, 1980г.
19. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001й.

Қўшимча адабиётлар

1. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964й.
2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1964г.
3. И.В.Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, 1972г.
4. Д.К.Фадеев и И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1954г.
5. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1972г.

3. Календар иш режаси.

Алгебра ва геометрия фани бўйича 1-курс

5480100 – Амалий математика ва информатика

йўналиши учун

Календар иш режаси

№	Мавзу	Соатлар		
		Жами	Маъруза	Амалий машғулот
	1 - семестр			
33.	Кириш. Матрицалар тушунчаси. Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш, айириш ва уларнинг хоссалари.	4	2	2
34.	Матрицаларни кўпайтириш ва уларнинг хоссалари. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш.	8	4	4
35.	Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари.	6	2	4
36.	Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Тескари матрица. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги. Матрицанинг ранги. Базис минор ҳақида теорема. Детерминант нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шарти.	4	2	2
37.	Тўғри чизиқда Декарт координаталар системаси. Ўқда йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният. Тўғри чизиқда декарт координаталари. Текислик ва фазода декарт координаталари.	4	2	2
38.	Аналитик геометриянинг содда масалалари. Фазода йўналтирилган кесма ва унинг проекцияси. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси.	6	2	4
39.	Оралиқ назорат	2	2	
40.	Вектор тушунчаси ва улар устида чизиқли амаллар. Векторлар устида амаллар бажаришга	4	2	2

	оид дастурлар чизиш.			
41.	Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Икки векторнинг чизиқли комбинацияси. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғланганлиги.	4	2	2
42.	Базис тушунчаси. Векторниг ўқлардаги проекцияси ва хоссалари. Декарт координаталар системаси Афин координаталар системасининг хусусий холи сифатида. Скаляр кўпайтма тушунчаси. Скаляр кўпайтманинг геометрик мазмуни. Скяляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси. Скаляр кўпайтмани ҳисоблашга оид дастурлар тузиш.	4	2	2
43.	Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Вектор кўпайтмани ҳисоблашга оид дастурлар тузиш. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Вектор ва аралаш кўпайтманинг хоссалари. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.	8	4	4
44.	Чизиқли фазо тушунчаси. Ихтиёрий чизиқли фазоларнинг хоссалари. Чизиқли фазода элементларнинг чизиқли боғланганлиги тушунчаси.	4	2	2
45.	Базис ва координаталар. Чизиқли фазонинг ўлчами. Изоморф чизиқли фазолар. Чизиқли қобиқ ва қисм фазолар тушунчаси. Матрица рангининг иккинчи таърифи. қисм фазоларнинг йиғиндиси, кесишмаси.	4	2	2
46.	Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.	4	2	2
47.	Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари. Бир жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари.	4	2	2

48.	Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.	8	4	4
49.	Оралиқ назорат	2	2	
50.	**Якуний назорат**	2	2	
2 – семестр				
51.	Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари, кесмалардаги ва каноник тенгламалари. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари. Тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган масофа. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар. Тўғри чизиқларни чизишга оид дастурлар тузиш.	8	4	4
52.	Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа.	4	2	2
53.	Фазода тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Параметрик тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти.	4	2	2
54.	Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.	10	4	6
55.	Эллипс, гипербола, парабола. Эллипс, гипербола, парабола чизиқлари шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс ва гиперболанинг экцентриситети ва директрисалари.	4	2	2
56.	Эллипс, гипербола, параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари.	6	2	4

57.	Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг умумий тенгламаси. Декарт координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши.	8	4	4
58.	Оралиқ назорат	2	2	
59.	Чизиқли оператор тушунчаси. Чизиқли операторлар устида амаллар. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари.	4	2	2
60.	Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши. Чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади. Чизиқли операторнинг хос қиймати ва хос векторлари.	6	2	4
61.	Квадратик форма тушунчаси. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули.	4	2	2
62.	Оралиқ назорат	2	2	
63.	Квадратик форма учун инерция қонуни. Квадратик формаларни синфларга ажратиш. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.	6	2	4
64.	**Якуний назорат**	2	2	
	Жами:	**152**	**76**	**76**

4. Рейтинг тизими асосида талабалар билимини баҳолаш мезонлари.

№	**Назорат тури**	**Максимал балл**	**Саралаш бали**	**Ўтказилиш вақти**
1.	1-жорий назорат	17	9	4-хафта
2.	2-жорий назорат	18	10	8-хафта
4.	1-оралиқ назорат	17	9	10-хафта
5.	2-оралиқ назорат	18	10	18-хафта
6.	Якуний назорат	30	16	20-хафта
	Жами	100	55	

а) **86-100** балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

- Ҳулоса ва қарор қабул қилиш;
- Ижодий фикрлай олиш;
- Мустақил мушоҳада юрита олиш;
- Олган билимларини амалда қўллай олиш;
- Моҳиятини тушуниш;
- Билиш, айтиб бериш;
- Тасаввурга эга бўлиш;

б) **75-85** балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

- Мустақил мушоҳада юрита олиш;
- Олган билимларини амалда қўллай олиш;
- Моҳиятини тушуниш;
- Билиш, айтиб бериш;
- Тасаввурга эга бўлиш;

в) **56-70** балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

- Моҳиятини тушуниш;
- Билиш, айтиб бериш;
- Тасаввурга эга бўлиш;

г) талабанинг билим даражаси 0-55 балл билан қуйидаги ҳолларда баҳоланади:

- Аниқ тасаввурга эга бўлмаслик;
- Жавобларда хатоликларга йўл қўйилганлик;
- Билмаслик.

Аъло (86-100)	28-33 балл	14-16 балл	15-17 балл
• Яхши (71-85)	• 23-27 балл	• 11-13 балл	• 12-14 балл
• Ўрта (55-70)	• 18-22 балл	• 9-10 балл	• 9-11 балл
• Қониқарсиз (0-54)	• 0-17 балл	• 0-8 балл	• 0-8 балл

5. Таълим технологиялар.

Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида илғор педагогик технологияларни жорий қилиш ва ўзлаштириш зарурлиги кўп карра такрорланади. Педагогик назариялар жамланмаси бўлган педагогикда катта ҳажмдаги назарий билим ва амалий тажриба тўпланган. Муқобилли амалиёт қоидаси педагог фаолиятига йўналтирилган. У қоида педагогдан ўқув жараёнини ҳамма ўқувчиларнинг режалаштирилган ўқув натижаларга кафолатланган ҳолда эришишни талаб қилади. Ҳар бир мавзу бўйича ўқув мақсадига мос келувчи таянч ўқув саволини аниқлаш ва диққат марказини ана шу саволни ҳал этишга қаратиш зарур. Ўқувчилар билиш фаолиятини фаоллаштиришда ўқитувчининг саволлари билан биргаликда талабаларнинг ўқитувчига ва курсдошларига берган саволлари ҳам муҳим аҳамиятга эга бўлиб, улар ҳам қўллаб-қувватланади.Ўқув мақсадларни фақат ўқитувчи фаолияти орқали ифодаламасдан ўқувчи вазифалари орқали ифодалаш мақсадга мувофиқ. Бундай ҳолда синквейн (французча-беш) услубини қўллаш фойдали. Синквейн беш қатордан иборат ўзига хос ҳодиса, воқеа, мавзу тўғрисида ахборот йиғилган ҳолда, талаба сўзи билан турли вариантларда ва турли нуқтаи назар орқали ифодаланади. Синквейн тузиш- мураккаб ғоя, сезги ва ҳиссиётларни бир неча сўзлар билан ифодалаш муҳим бўлган малакадир. Бу усул мавзуни яхшироқ англашга ёрдам беради.

Кластер ахборотни ёйиш усули фикрлашни ўрганилаётган тушунчалар ўртасида алоқа ўрнатиш малакаларини ривожлантиради, бирор мавзу бўйича талабаларни эркин ва очиқдан- очиқ фикрлашга ёрдам беради. Кластер- ғунча, боғлам маъносини англатади. Кластерларга ажратиш даъват, англаш ва мулоҳаза қилиш босқичларидаги фикрлашни рағбатлантириш учун қўллаш мумкин. Бирор мавзу бўйича кластерлар тузиш бу мавзуни мукаммал ўрганмасдан олдин фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Кластер тузишда гуруҳдаги барча талабаларнинг иштирок этиши, шу гуруҳ учун ғоялар ўзаги бўлиб хизмат қилади. Мунозарали дарслар ўтказиш орқали ўқитувчи ёки айрим талабаларнинг монологларидан қочиш мумкин.Дарсларда “инсерт” усулини қўллаш ўз фикр юритишини кузатиб бориш учун фойдали ҳисобланади. Талаба янги ахборотни номаълум ёки янги, тушунарсиз ёки эътироз билдириш лозим бўлганларга ажратиб баҳолаш имконини беради.

6. Маъруза матнлари.

I БОБ

КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ. АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ СОДДА МАСАЛАЛАРИ

Тўғри чизиқда декарт координаталар системаси

1. Ўқда йўналтирилган кесма.

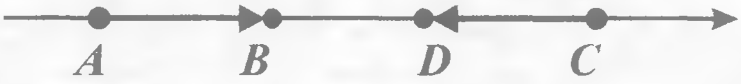
Йўналиши курсатилган тўғри чизиққа *ўқ* деб аталади. Ўқдаги боши ва охири кўрсатилган кесмага **йўналтирилган кесма** дейилади. Боши *A* охири *B* нуқтада бўлган йўналтирилган кесмани $\overline{AB}$ белги орқали белгилаймиз.

Боши ва охири устма-уст тушган йўналтирилган кесмага нол йўналтирилган кесма дейилади.

$\overline{AB}$ йўналтирилган кесманинг узунлиги деб, *AB* кесманинг узунлигига айтилади ва $|\overrightarrow{AB}|$ каби белгиланади.

Ҳар- бир йўналтирилган кесма бирор сон билан характерланади ва бу сонга йўналтирилган кесманинг катталиги дейилади.

$\overline{AB}$ йўналтирилган кесманинг *AB* сон катталиги агар $\overline{AB}$ нинг йўналиши ўқнинг йўналиши билан бир-хил бўлса $|\overline{AB}|$ сонига, агар $\overline{AB}$ нинг йўналиши ўқнинг йўналиши билан ҳар-хил бўлса $-|\overline{AB}|$ сонига тенг.



Нол йўналишли ҳар қандай кесманинг катталиги нолга тенг бўлади.

2. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният.

Иккита нолдан фарқли йўналтирилган кесмалар тенг дейилади, агар уларнинг бошлари устма-уст қуйилганда охирлари ҳам устма-уст тушса.

- Иккита нол йўналишли кесмалар тенг.

- Иккита йўналишли кесманинг тенг бўлиши учун шу йўналишли кесма катталиклари тенг бўлиши зарур ва етарли.

- Йўналишли кесма устида чизиқли амаллар бажариш деб, йўналишли кесмаларни қўшиш ва бирор сонга кўпайтиришга айтилади.

$\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналишли кесмаларни қўшиш учун $\overrightarrow{CD}$ нинг C боши $\overrightarrow{AB}$ нинг B охирига устма-уст қуйилади. Ҳосил бўлган $\overrightarrow{AD}$ йўналишли кесма $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналишли кесмаларнинг йиғиндиси дейилади ва $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ символ билан белгиланади.

1.1 - теорема. Иккита йўналишли кесмаларнинг йиғиндисининг катталиги ҳар бир қўшилувчи йўналишли кесмаларнинг катталиклари йиғиндисига тенг.

Исбот. *Теоремани икки ҳол учун исботлаймиз.*

1-ҳол. Йўналтирилган кесмалардан бироратаси нол йўналтирилган кесма бўлсин, масалан $\overline{AB}\neq 0$, $\overline{CD}=0$ у ҳолда $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AB}$ бундан $AB+CD=AB+0=AB$.

2-ҳол. $\overline{AB}\neq 0$, $\overline{CD}\neq 0$ $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}$ берилган $AB+CD=AD$ ни исботлаймиз.

а) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналтирилган кесмалар бир-хил йўналишга эга бўлса, $|\overline{AD}|=|\overline{AB}|+|\overline{CD}|$ у ҳолда $AB+CD=AD$.

б) $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналтирилган кесмалар ҳар-хил йўналишга эга бўлса, у ҳолда уларнинг катталиклари турли ишорали бўлади. Шунинг учун $\overrightarrow{AD}$ йўналтирилган кесманинг узунлиги $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ га тенг ва $\overrightarrow{AD}$ йўналтирилган кесманинг йўналиши $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналтирилган кесмаларларнинг узунининг йўналиши билан бир-хил, у ҳолда $\overrightarrow{AD}$ нинг катталигининг ишораси $AB+CD$ нинг ишораси билан бир-хил бўлади. Демак, $AD=AB+CD$. Теорема исботланди.

Асосий айният: сонлар ўқида олинган ҳар-қандай A, B, C нуқталар учун $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ йўналишли кесмаларнинг катталиклари қуйидаги тенгликни қаноатлантиради $AB+BC=AC$.

Таъриф: $\overrightarrow{AB}$ йўналишли кесманинг $к$ сонга кўпайтмаси деб, узунлиги $|к|\cdot|\overrightarrow{AB}|$ га тенг ва йўналиши агар $к>0$ бўлса $\overrightarrow{AB}$ билан бир-хил, агар $к<0$ бўлса йўналиши $\overrightarrow{AB}$ билан қарама-қарши йўналишга эга бўлган йўналтирилган кесмага айтилади ва $к\cdot\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади.

$к\cdot\overrightarrow{AB}$ йўналишли кесманинг катталиги $к\cdot AB$ га тенг.

3. Тўғри чизиқларда декарт координаталар.

Тўғри чизиқларда декарт координаталари қуйидагича киритилади. Йўналиши аниқланган тўғри чизиқ ва шу ўқда O (координата боши) нуқта оламиз. Бундан ташқари бирлик масштабини кўрсатамиз. Ўқдан ихтиёрий A нуқта оламиз. A нуқтанинг x декарт координатаси деб $\overline{OA}$ йўналишли кесманинг катталигига айтилади. x координатали A нуқтани $A(x)$ каби белгиланади. Демак, тўғри чизиқда ҳар қандай A нуқта x ҳақиқий сон билан тўла аниқланади.

1.2 - теорема. Тўғри чизиқда $A(x_1)$, $B(x_2)$ нуқталар берилган бўлсин. У холда $\overline{AB}$ йўналтирилган кесманинг катталиги $x_2 - x_1$ тенг.

Исбот. $OA+AB=OB$, $x_1+AB=x_2$, $AB= x_2 - x_1$.

Натижа. $A(x_1)$, $B(x_2)$ нуқталар орасидаги масофа $\rho(A,B)=|x_2-x_1|$ га тенг.

Текислик ва фазода декарт координаталар системаси

1. Текисликда декарт координаталар системаси қуйидагича киритилади.

Текисликда умумий бошланғич O нуқтали ва бир-хил бирлик масштабли иккита перпендикуляр Ox ва Oy ўқлар тўғри бурчакли декарт координаталар системасини ташкил этади. O нуқтага координата боши, Ox ва Oy ўқларига координата ўқлари дейилади. Ox га абцисса, Oy га ордината ўқи дейилади.

Текисликда А нуқта оламиз, унинг Ox ва Oy ўқларидаги проекцияларини мос равишда A_x , A_y орқали белгилайлик.

A нуқтанинг тўғри бурчакли x ва y декарт координаталари деб, мос равишда $\overline{OA_x}$ ва $\overline{OA_y}$ йўналтирилган кесмаларнинг катталикларига айтилади ва $A(x,y)$ каби белгиланади.

2. Фазода декарт координаталар системаси қуйидагича киритилади.

Фазода умумий бошлангич O нуқтали ва бир-хил бирлик масштабли учта ўзаро перпендикуляр Ox, Oy ва Oz ўқлар декарт координаталар системасини ташкил этади. O нуқтага координата боши, Ox, Oy ва Oz ўқларига координата ўқлари дейилади.

Ox га абцисса, Oy га ордината, Oz га апликат ўқи дейилади.

Фазода A нуқта оламиз, унинг Ox, Oy ва Oz ўқларидаги проекцияларини мос равишда A_x, A_y, A_z орқали белгилайлик.

A нуқтанинг тўғри бурчакли x, y, z декарт координаталари деб, мос равишда $\overline{OA_x}$, $\overline{OA_y}$, $\overline{OA_z}$ йўналтирилган кесмаларнинг катталикларига айтилади ва $A(x, y ,z)$ каби белгиланади.

Аналитик геометриянинг баъзи содда масалалари

1. Фазода йўналтирилган кесманинг ўқдаги проекцияси.

Фазода боши ва охири кўрсатилган кесмага йўналтирилган кесма дейилади. Фазода $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесма ва y ўқ берилган. A ва B нуқталарнинг y ўқдаги проекциялари мос равишда A_y ва B_y нуқталар бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ йўналишли кесманинг y ўқдаги проекцияси деб, $\mathrm{pr}_u\overrightarrow{AB}$ йўналишли кесманинг катталигига айтилади ва $\mathrm{pr}_y\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади, яъни $\mathrm{pr}_y\overrightarrow{AB}=A_yB_y$.

$\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесма ва y ўқ орасидаги бурчакни тушунасини киритиш учун $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг боши y ўқнинг бирор нуқтаси билан устма-уст тушгунча параллел кучирилади ва ҳосил бўлган векторни $\overline{A_uB_1}$ каби белгилайлик. $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесма ва y ўқ орасидаги бурчакни деб, y ўқнинг мусбат йўналиши билан $\overline{A_uB_1}$ йўналтирилган кесма орасидаги φ $(0<\varphi<180^0)$ бурчакка айтилади.

Тасдиқ. $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесма ва y ўқ орасидаги бурчак φ га тенг бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг проекцияси қуйидагича аниқланади

$$\mathrm{pr}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

2. Текислик ва фазода иккита нуқта орасидаги масофани топиш.

Фазода $Oxyz$ декарт координиталар системаси ва $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарни қарайлик. Бизга маълумки A ва B нуқталар орасидаги масофа $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг $\rho(A,B)$ узунлигига тенг. $\rho(A,B)$ координата текисликларига параллел A ва B нуқталардан ўтувчи параллелепипеднинг диоганалининг узунлигига тенг. Параллелепипеднинг Ox, Oy, Oz ўқига параллел қирраларининг узунлиги мос равишда $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг Ox, Oy, Oz ўқдаги проекциясилари $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$ ларга тенг. У ҳолда Пифогор теоремасига кура

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Еслатма: Oxy Текисликда $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидагача аниқланади

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

3. *Кесмани берилган нисбатда бўлиш.*

Фазода A, B нуқталарни оламиз ва улар орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. Тўғри чизиқда йўналиш аниқлаймиз. Шу тўғри чизиқда C нуқта олайлик.

C нуқта $\overline{AB}$ йўналтирилган кесмани λ нисбатта бўлади дейилади, агар қуйидаги тенглик ўринли бўлса

$$\lambda = \frac{AC}{CB}.$$

Эслатма: Агар *A* ва *B* нуқталардан ўтувчи ўқнинг йўналишини ўзгартирсак барча йўналтирилган кесмаларнинг катталиклари ишорасини ўзгартиради, шунинг учун $\frac{AC}{CB}$ Тўғри чизиқнинг йўналишини танланишига боғлиқ эмас.

Фазода *Oxyz* декарт коордиониталари системаси ва $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарни олайлик, $\overline{AB}$ йўналтирилган кесмани λ ($\lambda \neq -1$) нисбатта бўлувчи $C(x, y, z)$ нуқтанинг *x, y, z* декарт координаталарини топиш масаласи билан шуғилланайлик. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x, y, z)$ нуқталарнинг *Ox* ўқдаги проекцияларини мос равишда A_x, B_x, C_x нуқталар бўлсин. У ҳолда

$$\frac{A_x C_x}{C_x B_x} = \lambda \qquad (1.1)$$

тенглик ўринли бўлади. Теорема 1.2 га асосан $A_x C_x = x - x_1$, $C_x B_x = x_2 - x$ бу тенгликларни (1.1) га олиб бориб қўйсак

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

тенгликка эга бўламиз. Худди шунга ўхшаш *y* ва *z* координаталар учун ҳам формулалар келтириб чиқарилади. Демак, *C* нуқтанинг *x, y, z* декарт координаталарини ториш учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (1.2)$$

Мисол. 1) $H_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $H_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарда массалари мос равишда $м_1$ ва $м_2$ бўлган H_1H_2 кесманинг оғирлик маркази $H(x,y,z)$ шу кесмани $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ нисбатда бўлади. (1.2) формулада деб олсак, *H* нуқтанинг координаталари қуйидагича ҳисобланишини келтириб $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ чиқариш мумкин:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

2) $H_1(x_1, y_1, z_1)$, $H_2(x_2, y_2, z_2)$, . . . $H_n(x_n, y_n, z_n)$ нуқталарда массалари мос равишда m_1, m_2, . . . m_n нуқталар тўпламининг оғирлик маркази $M(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари қуйидагича топилади:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Исботлаш учун математик индикция усулидан фойдаланамиз.

n=2 да формула ўринли, n-1 да тўғри деб фараз қиламиз, n учун исботлаймиз. H_1 , H_2, . . . $H_{н-1}$ нуқталарнинг оғирлик маркази $N(x', y', z')$ нуқтанинг координаталари ( ) формуладаги каби аниқланади, яъни

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}},$$

$$y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_{n-1} y_{n-1}}{m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}},$$

$$z' = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_{n-1} z_{n-1}}{m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}}$$

ва бу нуқтага тушувчи оғирлик $m_1 + m_2 + . . . + m_{n-1}$ га тенг. $N(x', y', z')$ ва $H_n(x_n, y_n, z_n)$ нуқталарнинғ оғирлик маркази M$(x$, y, z$)$ топамиз

$$x = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1})x' + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}) \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}} + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} =$$

$$= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Худди шунга ўхшаш $y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$, $z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$

эканлигини ҳам исботлаш мумкин.

Қутб, аффин, цилиндрик ва сферик координаталар систэмаси

Қутб координаталари системаси

Текисликда бирор O нуқта ва ундан чиқувчи бирлик масштаби Ox нур қутб координаталар систэмасини ташкил этади.

O нуқта қутб , Ox нур қутб ўқи дейилади.

H нуқтанинг ρ ва φ қутб координаталари деб шу нуқтанинг O қутб ва Ox қутб ўқига нисбатан жойлашувини аниқловчи икки сон ρ — O ва H нуқталар орасидаги масофа ва Ox қутб ўқини $\overline{ON}$ йўналтирилган кесма билан устма-уст тушиши учун соат стрелкасига қарама-қарши буриш керак бўлган бурчакка айтилади ва $H(\rho,\varphi)$ каби белгиланади.

ρ - қутб радиуси, φ - қутб бурчаги, $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Агар қутб ва декарт координаталар боши устма-устма қўйилса қутб координаталари ва декарт координаталари орасидаги қуйидагича боғланиш мавжуд:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \qquad (1.3)$$

$A(\rho_1,\varphi_1)$ ва $B(\rho_2,\varphi_2)$ қутб координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\rho(A,B) = \sqrt{(\rho_1^{\ 2} + \rho_2^{\ 2} - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (1.4)$$

(исботи косинуслар теорэмасидан келиб чиқади).

Аффин координаталар систэмаси

Текисликда кесишувчи бир-хил масштаб киритилган иккита ўқ *аффин координаталар* систэмасини ташкил етади.

Агар кесишиш нуқтасини O деб белгиласак O нуқтага – координата боши, Ox ва Оy ўқларига координата ўқлари дейилади, ω – Ox ва Оу ўқларнинг мусбат йўналишлари орасидаги бурчак координата бурчаги дейилади.

Текисликда A нуқта оламиз, унинг Ox ва Оy ўқларидаги pгоекцияларини мос равишда A_x , A_y орқали белгилайлик. A нуқтанинг x ва y аффин координаталари деб, мос равишда $\overline{OA_x}$ ва $\overline{OA_y}$ йўналтирилган кесмаларнинг катталикларига айтилади ва $A(x,y)$ каби белгиланади.

Текисликда $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,\ y_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидағача аниқланади:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2|x_2-x_1||y_2-y_1|\cos\omega}\ . \qquad (1.5)$$

Агар *Oxy* декарт координаталар систэмаси қуйидагича танланса, уани *O* координата боши *O* координата боши билан, *Ox* эса *Ox ўқ* билан устма-уст қўйилса *A* нуқтанинг *x, y* декарт координаталари билан *x', y'* афин координаталари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x = x'+y'\cos\omega \\ y = y'\sin\omega \end{cases} \qquad (1.6)$$

Цилиндрик координаталар систэмаси

Фазода цилиндрик координаталар систэмаси қуйидагича киритилади. Фазодаги Т текисликдан бирор *O* нуқта ва ундан чиқувчи *Ox* нур, ҳамда *O* нуқтадан утувчи Т текисликка перпендикуляр *Oz* ўқ оламиз. Фазода ихтиёрий *H* нуқта оламиз, унинг Т текисликдаги проекциясини H_T , *Oz* ўқдаги проекциясини эса H_z каби белгилайлик.

H нуқтанинг *ρ, φ, z* цилиндрик координаталари деб, H_T нуқтанинг Т текисликдаги *ρ, φ* қутб координаталари ва $\overline{ON_z}$ йўналтирилган кесманинг *z* катталигига айтилади ва *H(ρ, φ, z)* каби белгиланади.

Агар *Oxyz* декарт координаталар систэмаси қуйидагича танланса, уани *O* координата боши қутб билан, *Ox* қутб ўқи билан, *Oz* эса *Oz* ўқ устма-уст қууилса *H* нуқтанинг *x,y,z* декарт координаталари билан *ρ, φ, z* қутб координаталари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (1.7)$$

Сферик координаталар систэмаси

Фазода сферик координаталар систэмаси қууидагича киритилади. Фазода ўзаро перпендикуляр умумий *O* координата бошига эга, учта *Ox, Oy, Oz* ўқларини ўтказамиз. Фазодан ихтиёрий *H* нуқта оламиз ва унинг *Oxy* текисликдаги проекциясини H_T каби белгилайлик. *O* ва *H* нуқталар орасидаги масофани *ρ*, $\overrightarrow{ON}$ йўналтирилган кесма билан *Oz* ўқ орасидаги бурчакни θ , *Ox* ўқ $\overline{ON_T}$ $\overrightarrow{ON}$ йўналтирилган кесма билан устма-уст тушуши учун *Ox* ўқни соат стрелкасига қарама-қарши буриш керак бўлган бурчакни *φ* деб белгиласак,

$\rho,\ \varphi,\ \theta$ сонларига H нуқтанинг сферик координаталари дейилади ва $H(\rho,\ \varphi,\ \theta\ )$ каби белгиланади, бу уерда $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Агар фазода декарт координаталар систэмасини қуйдагича киритсак, яъни координата боши билан O нуқтани координата ўқлари билан Ox, Oy, Oz ўқларини устма-уст қўйсак H нуқтанинг x,y,z декарт координаталари ва $\rho,\ \varphi,\ \theta$ қутб координаталари орасида боғланиш формуласини topиш мумкин. Бунинг учун H нуқтанинг Oz ўқдаги проекциясини H_{z} каби белгиласак $OH_{\mathrm{z}}\,H$ тўғри бурчакли учбурчакдан $z = \rho\cos\theta$, $OH_{\mathrm{T}}\ H$ тўғри бурчакли учбурчакдан $|\overline{ON_T}| = \rho\sin\theta$, H_{T} нуқтанинг Oxy текисликдаги қутб координаталарига кўра $x = |\overline{ON_T}|\cos\varphi$, $y = |\overline{ON_T}|\sin\varphi$. $|\overline{ON_T}| = \rho\sin\theta$ эканлигини ҳисобга олсак қууидаги формулага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \tag{1.8}$$

II БОБ

МАТРИЦАЛАР ВА ДЕТЕРМИНАНТЛАР

Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар. Матрицалар устида бажариладиган асосий амаллар ва уларнинг хоссалалари

Таъриф. m *та сатр ва* n *та устундан иборат сонлар жадвалига матрица дейилади.*

m ва n сонларга матриканинг тартиби дейилади ва (m x n) каби белгиланади

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

ёки қисқача $A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$ каби ёзилади.

a_{ij} - матриканинг i-сатр, j-устуни элементи дейилади.

Таъриф. *Агар матриканинг сатрлари сони устунлар сонига тенг* (m=n) *бўлса,* (2.1) *матрицага квадрат матрица дейилади, яъни*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ - *бош диагонал элементлари дейилади.*

$a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ - *ёрдамчи диагонал элементлари дейилади.*

Таъриф. *Барча элементлари нолдан иборат матрицага нол матрица дейилади.*

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (m \times n)$$

Таъриф. *Фақат бош диоганал элементлари нолдан фарқли бўлган квадрат матрицага диагонал матрица дейилади.*

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \qquad (n \times n) \quad d_i \neq 0,\ i=\overline{1,n}$$

Таъриф. *Бош диагонал элементлари бирдан иборат бўлган диагонал матрицага бирлик матрица дейилади.*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (n \times n)$$

Матрицаларни қўшиш

Таъриф. A=(a_{ij}), (m x n) ва B=(b_{ij}) , (m x n) *матрицаларнинг йиғиндиси деб, элементлари* A *ва* B *матрицанинг мос элементлари йиғиндисидан ташкил торган* $C=(c_{ij})$ *матрицага айтилади, яъни*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ .$$

Эслатма: Матрицаларни қўшиш амали фақат матрицаларнинг тартиблари тенг бўлгандагина бажарилади.

Мисол: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+4 & 3+(-2) & 4+5 \\ 2+6 & 5+(-3) & 0+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Қўшиш амалининг хоссалари:

Агар $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$ матрицалар m x n матрицалар бўлса қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

1-хосса. $A+B=B+A$

2-хосса. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3-хосса. $A+0=A$

2-хоссанинг исботи. $(A+B)+C=D=(d_{ij})$, $A+(B+C)=E=(e_{ij})$ бўлсин , у ҳолда

$d_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})=e_{ij}$

Хосса исботланди.

Қолган хоссалар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Матрицанинг сонга кўпайтмаси

Таъриф. $A=(a_{ij})$ (m x n) *матрицани* λ *ҳақиқий сонга кўпайтмаси деб,* A *матрицанинг барча элементларини* λ *сонга кўпайтмасидан ҳосил бўлган матрицага айтилади.*

$$C=\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$$

Мисол:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C=2\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрицани сонга кўпайтириш нинг хоссалари:

1) $(\mu\lambda)A=\lambda(\mu A)$;
2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Матрицаларнинг айириш

Таъриф. *А ва В матрицаларнинг айирмаси деб, В матрица билан йиғиндиси А матрицага тенг бўлган С матрицага айтилади, яъни*

C+B=A ёки C=A-B=A+(-1)Б

Мисол:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad Б=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix},\qquad C=A-Б=\begin{pmatrix}1-2 & 3-6\\ 2-1 & 5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Матрицаларнинг кўпайтмаси

$A=(a_{ij})$ (m x p) , $B=(b_{ij})$ (p x n) бўлсин.

Таъриф. *А ва В матрицалар кўпайтмаси деб, шундай $C=(c_{ij})$ матрицага айтиладики, c_{ij} лар қуйидаги формула орқали аниқланади:*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

ва $C=A\cdot B$ каби белгиланади.

Эслатма. *A* матрицани *B* матрицага кўпайтириш учун *A* матрицанинг устунлари сони *B* матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши керак.

Мисол:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \text{ бўлса}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 8+3\cdot 3+2\cdot 1\\ 2\cdot 2+5\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 8+5\cdot 3+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 16\\ 11 & 32\end{pmatrix}$$

Эслатма. $A\cdot B$ матрица $B\cdot A$ матрицага ҳар доим ҳам тенг бўлмаслиги мумкин, ҳатто *A* матрицани *B* матрицага кўпайтириш мумкин бўлиб, *B* матрицани *A* матрицага кўпайтириб бўлмаслиги ҳам мумкин.

Мисол сифатида йуқоридаги мисолни қараш мумкин.

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot 1+8\cdot 2 & 2\cdot 3+8\cdot 5 & 2\cdot 2+8\cdot 1\\ 1\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot 5 & 1\cdot 2+3\cdot 1\\ 2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 3+1\cdot 5 & 2\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 46 & 12\\ 7 & 18 & 5\\ 4 & 11 & 5\end{pmatrix}$$

Бундан кўриниб турибдики AB матрица BA матрицага ҳар доим ҳам тенг бўлавермайди.

Теорема. *Агар A ва D бир-хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб, D бош диагонал элементлари бир-хил сонлардан иборат диагонал матрица бўлса, у ҳолда $A\cdot D=D\cdot A$ тенглик ўринли бўлади.*

Исбот. $A\cdot D=C=(c_{ij})$, $D\cdot A=E=(e_{ij})$, $D=(d_{ij})$, $d_{ij}=d$ агар $i=j$, $d_{ij}=0$ агар $i\neq j$ бўлсин, у ҳолда

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}d_{kj}=a_{i1}d_{1j}+a_{i2}d_{2j}+...+a_{ij}d_{jj}+...+a_{in}d_{1n}=a_{ij}d_{jj}=a_{ij}d\ ,$$

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}a_{kj}=d_{i1}a_{1j}+d_{i2}a_{2j}+...+d_{ii}a_{ij}+...+d_{in}a_{1n}=d_{ij}a_{ij}=da_{ij}$$

Бундан эса, $A\cdot D=D\cdot A$ тенглик келиб чиқади.

Натижа 1. $A\cdot E=E\cdot A=A$ бу ерда E бирлик матрица.

Натижа 1. $A\cdot O=O\cdot A=O$ бу ерда O нол матрица.

Кўпайтириш хоссалари:

1-хосса. $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ m x r тартибли матрицалар, $C=(c_{ij})$, r x n тартибли матрица бўлса, қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Исбот. $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ (m x r), $\underline{(A+B)C=(d_{ij})}$ (m x n) бўлсин, у ҳолда

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})=d_{ij}^{I}+d_{ij}^{II}$$

$AC+BC=(e_{ij})$ (m x n) бўсин, у ҳолда

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{p}b_{ik}c_{kj}=d_{ij}^{I}+d_{ij}^{II}$$

Демак, $(A+B)C=AC+BC$;

2-хосса. $A=(a_{ij})$, $b=(B_{ij})$, $C=(c_{ij})$ маритцалар мос равишда m x r, r x l, l x n тартибли матрицалар бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$(AB)C=A(BC)$$

Исбот. $(AB)C=(d_{ij})$ (m x n), $AB=(e_{ij})$ (m x l) бўлсин, у ҳолда

$$e_{is}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

ва

$$d_{ij}=\sum_{s=1}^{l}e_{is}c_{sj}=\sum_{s=1}^{l}c_{sj}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{ks}=\sum_{s=1}^{l}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{ks}c_{sj}$$

$A(BC)=(r_{ij})$, (m x n) ва $BC=(m_{kj})$, (r x n) бўлсин, у ҳолда

$$t_{kj} = \sum_{s=1}^{l} b_{ks} c_{sj}$$

ва

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ij} t_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{l} a_{ik} b_{ks} c_{sj} = \sum_{s=1}^{l} \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{ks} c_{sj}$$

$d_{ij} = r_{ij}$ тенгликдан $(AB)C=A(BC)$ келиб чиқади.

Детерминантлар. Детерминантларни унинг бевосита элементлари орқалаи ифодалаш

Детерминант тушунчасини $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ n-тартибли квадрат матрицалар учун аниқлаш мумкин.

Агар $n=1$ бўлса $A=(a_{11})$ бўлади, у ҳолда $det\, A=a_{11}$ тенглик билан аниқланади.

Агар $n=2$ бўлса $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ бўлади, у ҳолда $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ тенглик билан аниқланади.

Агар $n=3$ бўлса $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ бўлади, у ҳолда $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$

$$a_{33}+ a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

тенглик билан аниқланади.

n-1 тартибли матрица учун детерминант тушунчаси аниқланган деб фараз қилиб n-тартибли матрицанинг детерминанти тушунчасини аниқлаймиз.

n-тартибли детерминант тушунчасини киритиш учун бизга минор тушунчаси керак бўлади.

Таъриф. (2.2) *матрицанинг* $\overline{M}^{i}_{j}$ *минори деб, А матрицанинг i-сатр, j – устунини ўчиришдан ҳосил бўлган n-1 тартибли матрицанинг детерминантига айтилади.*

Таъриф. (2.2) *матрицанинг детерминанти деб, қуйидаги формула билан аниланувчи сонга айтилади:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \overline{M}_j^1$$

Бу формулага детерминантни i-сатр бўйича ёйиш формуласи дейилади.
Мисол.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -86$$

Детерминант тушунчаси фақат квадрат матрицаларга ўринли ва ундан сон чиқади. Шунингдек,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \overline{M}_1^1 + (-1)^{1+1} a_{12} \overline{M}_2^1 + (-1)^{1+3} a_{13} \overline{M}_3^1 + (-1)^{1+4} a_{14} \overline{M}_4^1 =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Теорема: (2.1) *матрицанинг ихтиёрий сатри бўлсин, у ҳолда* (2.1) *матрицанинг детерминанти учун қуйдаги формула ўринлидир:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}_j^{i} \qquad (2.3)$$

(2.3) формулага n-тартибли детерминантни n-сатр бўйича ёйиш формуласидир.

Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

i=2,3,4…n га тенг.

n=2 тартибли детерминант.

Таъриф бўйича:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \overline{M}_1^1 + (-1)^{1+2} a_{12} \overline{M}_2^1 = a_{11}a_{22}\text{-}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_{21} \overline{M}_1^2 + (-1)^{2+2} a_{22} \overline{M}_2^2 = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$$

n-1- тартибли детерминантни ихтиёрий сатр бўйича ёзиш мумкин.

$\overline{M}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$ минори деб, (2.1) матрицанинг i_1, i_2 – сатри, j_1, j_2 – устунларни ўчиришдан ҳосил бўлган (*n*-2) -тартибли матрицанинг детерминантига айтилади.

$$\det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j} \theta_{jk} \overline{M}_{jk}^{1i}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1k} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{ik} \ldots a_{ij} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nk} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \ldots + (-1)^{1+k} a_{1k} \overline{M}_k^1 + \ldots (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1 + \ldots = \ldots + (-1)^{1+k} a_{1k} (-1)^{i-1+j-1} a_{ij} \overline{M}_{kj}^{1i} +$$

$$+ \ldots (-1)^{1+j} a_{ij} (-1)^{i-1+k} a_{ik} \overline{M}_{jk}^{1i} + \ldots = \ldots + \left[(-1)^{i+k+j-1} a_{1k} a_{ij} + (-1)^{i+k+j} a_{1j} a_{ik}\right] \overline{M}_{jk}^{1i} + \ldots =$$

$$= \ldots + (-1)^{i+k+j} \left[a_{1j} a_{ik} - a_{1k} a_{ij}\right] \overline{M}_{jk}^{1i} + \ldots .$$

k < j бўлганда.

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}^{i}_{j}=\ldots(-1)^{i+k}a_{ik}\overline{M}^{i}_{k}+\ldots+(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}^{i}_{j}\ldots.=\ldots(-1)^{i+k}a_{ik}(-1)^{1+j-1}a_{1j}\overline{M}^{1i}_{jk}+$$

$$+\ldots+(-1)^{i+k}a_{ij}(-1)^{1+k}a_{1k}\overline{M}^{1i}_{jk}+\ldots=\ldots+\left[(-1)^{i+k+j}a_{1j}a_{ik}+(-1)^{i+k+j+1}a_{1k}a_{ij}\right]\overline{M}^{1i}_{jk}+\ldots=$$

$$=\ldots+(-1)^{i+k+j}\left[a_{1j}a_{ik}-a_{1k}a_{ij}\right]\overline{M}^{1i}_{jk}+\ldots$$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}^{1}_{j}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}^{i}_{j}$$

Теорема: $j\left(j=\overline{1,n}\right)$ (2.1) *матрицанинг ихтиёрий устуни бўлсин, у ҳолда* (2.1) *матрицанинг детерминанти учун қуйидаги формула ўринли:*

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}^{i}_{j}$$

Мисол:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}a_{13}\overline{M}^{1}_{3}+(-1)^{2+3}a_{23}\overline{M}^{2}_{3}+(-1)^{3+3}a_{33}\overline{M}^{3}_{3}$$

Лаплас теорэмаси. Детерминантнинг хоссалари. Детерминантнинг ҳисоблаш усуллари

Сатр $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$ $1\le i_1< i_2< i_3<\ldots< i_k\le n,$ $k<n$

Устун $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_k$ $1\le j_1< j_2< j_3<\ldots<j_k\le n$

$\overline{M}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$ n-k тартибли детерминант. (2.1) матрицанинг $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$ сатрлари $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_k$ устунларини ўчиришдан ҳосил бўлган $n-k$ - тартибли матрицанинг детерминантини белгилаймиз.

$M^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}$ k – инчи тартибли детерминант.

(2.1) матрицанинг $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$ сатрлари $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_k$ устунларида жойлашган элементларидан тузилган k - тартибли матрицанинг детерминанти.

Теорема (Лаплас теорэмаси):

$i_1,$ $i_2,$ $i_3, \ldots,$ i_k $1\le i_1< i_2< i_3<\ldots< i_k\le n,$ $k<n$ (6.1) *матрицанинг k та сатри* $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_k$ $1\le j_1< j_2< j_3<\ldots< j_k\le n$ *k та устуни бўлсин, у ҳолда* (6.1) *матрицанинг детерминанти учун қуйидаги формула ўринли:*

$$\det A=\sum_{j_1,j_2,\ldots j_k}(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots j_k}M^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}\cdot\overline{M}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k} \qquad (2.4)$$

формула ўринли.

Детерминантнинг хоссалари

(2.1) формула билан берилган *A* матрица берилган бўлсин. *A* матрицани транспонирлашдан ҳасил бўлган матрица деб, *A* матрицанинг сатрларини устунлар шаклида ва устунларини сатр шаклида ёзишдан ҳосил бўлган *A'* матрицага айтилади.

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{n2} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{1n} & a_{2n} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1-хосса. *Детерминант транспонирлаш натижасида унинг детерминанти ўзгармайди. detA=detA'*

Исбот: Матрицанинг детерминант таърифидан ва 2-теоремадан келиб чиқади.

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\overline{M}_j^1$$

$$\det A'=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}\overline{M}_i^1$$

2-хосса. *Детерминантнинг 2 та сатри (устун) ўринлари алмаштирилса, детерминантнинг абсолют қиймати ўзгармайди, ишораси эса қарама-қаршисига ўзгаради.*

Исбот. *n=2* бўлганда, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$

$$\tilde{\mathrm{A}}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$

$$|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|=|a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}|$$

$$\det A=\sum_{j_1j_2}(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}\overline{M}_{j_1j_2}^{i_1i_2}\overline{M}_{j_1j_2}^{i_1i_2}$$

$$\det\tilde{A}=\sum(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}(-\overline{M}_{j_1j_2}^{i_1i_2}\quad)\overline{M}_{j_1j_2}^{i_1i_2}=-\det A$$

3-хосса. *Иккита бир хил сатр (устун) га эга детерминант нолга тенг.*

Исбот. *A* матрица i_1, i_2 сатрдаги элементлари бир хил бўлсин, у ҳолда *det* $A=\Delta$ $\det\tilde{A}=-\Delta$ бўлсин, лекин $i_1=i_2$ бўлса, уларни ўрнини алмаштирсак, $\det A=\det\tilde{A}$ га тенг.

i_1, i_2 -бир хил.

$\tilde{A}=A$

$|\tilde{A}|=|A|$

-Δ=Δ

2Δ=0

Δ=0 лиги келиб чиқади.

4-хосса. *Детерминантнинг бирор сатр (устун) λ сонига кўпайтирилса, детерминантнинг ўзи ҳам λ сонига кўпайтирилади.*

i – сатри бўйича ёзадиган бўлсак.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \lambda a_{ij} \overline{M}^{i}_{j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}^{i}_{j} = \lambda \det A$$

5-хосса. *Детерминантнинг бирор сатр (устуни) элементлари нолдан иборат бўлса, детерминант нолга тенг.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} 0 \overline{M}^{i}_{j} = 0$$

6-хосса. *Агар т-тартибли детерминантнинг і-сатр элементлари* $a_{ij} = b_j + c_j$ $j = \overline{1,n}$ *кўринишида бўлса, у холда детерминантни шундай иккита детерминант йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкинки, бу детерминантларда і-сатридан бошқа элементлари берилган детерминантники каби і-сатридан бирида* b_j *лар иккинчисида эса* c_j *лар* $\left(j = \overline{1,n}\right)$ *бўлади.*

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

Исботи:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \left(b_j + c_j\right) \overline{M}^{i}_{j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \overline{M}^{i}_{j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} C_j \overline{M}^{i}_{j} = \Delta_1 + \Delta_2$$

7-хосса. *Агар детерминант иккита пропорционал сатр (устун) га эга бўлса, детерминант нолга тенг.*

$$\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \dots & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Чунки иккита сатр бир хил бўлса, детерминант нолга тенг.

8-хосса. *Детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларини λ сонига кўпайтириб, бошқа бир сатр (устун) нинг мос элементларига қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Исботи: Фараз қилайлик, i-сатрнинг элементлари λ сонига кўпайтирилиб, k –сатр элементларига мос равишда қўйилган бўлсин.

$$\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & a_{k3}+\lambda a_{i3} & \dots & \dots & \dots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Сатрлар $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots$, $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ сатрларнинг чизиқли комбинацияларидан иборат дейилади, агар $(a_1a_2\dots a_n)$ сатрнинг ҳар бир a_j элементлари қуйидаги кўринишда бўлса, $a_j=\alpha b_j+\beta c_j+\dots+\gamma d_j$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$

9-хосса. *A<p Детерминантнинг бирор сатри (устуни) бошқа сатр (устун) ларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, у ҳолда 0 га тенг.*

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + .. \alpha_{i-1} a_{i-11} + \alpha_{i+11} a_{i+11} .. \alpha_n a_n .. \alpha_1 a_{in} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_n a_{nn} \\ a_{n1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

a_{ij}

$$= i\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 a_{11} & \cdots & \alpha_1 a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \end{vmatrix} + \left|\alpha_2 a_{21} \ldots \alpha_2 a_{nn}\right| + \ldots + i\left|\alpha_n a_{n1} \ldots \alpha_n a_{nn}\right|$$

нинг алгебраик тўлдирувчиси деб, $(-1)^{i+j}\overline{M}^{i}_{j}$ сонига айтилади ва A_{ij} каби белгиланади.

$$\Delta = \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}^{i}_{j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \overline{M}^{i}_{j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

10-хосса. *Детерминантнинг ихтиёрий сатри элементларини бошқа бир сатрнинг мос алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенгдир.*

$$i\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

Фараз қилайлик, шуларнинг ўрнига бошқа сон олайлик.

$$b_{i1} A_{i1} + b_{i2} A_{i2} + \ldots + b_{in} A_{in} = i\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} = i\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

$k \neq i$ бўлади.

Учбурчак кўринишдаги детерминантларни ҳисоблаш:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Агар детерминанти учбурчак шаклида бўлса детерминант бош диогонал элементлари кўпайтмасига тенг.

Мисол. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 3 = -9$$

Мисол. $\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$ 2 – тартибли детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & 0 & 0\dots & 0 \\ \dots\dots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & 0 & 0\dots & 0 \\ b_{n} & b_{12} & b_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\dots+n+1+2+\dots+n} \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{1n}\dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}\dots c_{1n} \\ \dots\dots \\ c_{1n}\dots c_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot |C||$$

Мисол. $\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^n |B| \cdot |C|$

$$\begin{matrix} n+1 \\ 2n \end{matrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \\ c_{11} & c_{12} \ldots\ c_{1n} & 0 & 0 \ldots\ 0 \\ \multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} & 0 & 0 \ldots\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{n+1+n+2+\ldots+2n+(1+2+\ldots+n)} \cdot |C| \cdot |B| = (-1)^{\frac{1+2n}{2}2n} |B||C| = (-1)^{n+2n^2} |B||C| =$$

$$=(-1)^{n} \cdot (-1)^{2n2} |B||C| = (-1)^{n} |B| \cdot |C|$$

Вандермонда детерминанти ҳисоблаш

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ x_1 & x_2 \ldots\ldots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 \ldots\ldots x_n^2 \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \ldots\ z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ x_1 & (x_1 - x_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n - x_1) \\ x_1^2 & (x_2^2 - x_1^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (x_n^2 - x_1^2) \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x^{n-1} & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) \ldots\ (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n^2 - x_1^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \ldots\ldots x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n - x_1 \\ x_2 (x_2 - x_1) \ldots\ldots\ldots x_n (x_n - x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_2^{n-2} (x_2 - x_1) \ldots\ldots x_n^{n-2} (x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ x_2 & x_3 & \ldots x_n \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \ldots x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) * \Delta(x_2 x_3 \ldots x_n) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_2) * \ \Delta(x_3 x_4 \ldots x_n) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots.(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\ldots(x_n - x_2)(x_4 - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Мисол. $\begin{vmatrix} 1 & 1\dots1 \\ 1 & 0\dots1 \\ 1 & 1\ 0..1 \\ \dots\dots\dots & \\ 1 & 1\dots0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\dots1 \\ 0- & 1\dots0 \\ 0 & 0..-1 \\ \dots\dots\dots & \\ 0 & 0..-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$

Мисол. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x\dots x \\ x & a_2 & x\dots x \\ x & x & a_3\dots x \\ \dots\dots\dots & & \\ x & x & x\dots a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x\dots\dots\dots\dots x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 \qquad 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x\dots\dots\dots0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ x-a_1 & 0 & 0\dots\dots\dots a_n-x \end{vmatrix} = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\dots(a_4-x)*$

$$*\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} & \dfrac{x}{a_2-x} & \dfrac{x}{a_3-x} & \dots & \dfrac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots. & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots.. & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots.. & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-x} + \dfrac{x}{a_2-x} + \dfrac{x}{a_3-x} + \dots. + \dfrac{x}{a_n-x} & \dfrac{x}{a_2-x} \dots\dots \dfrac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1\dots\dots\dots\dots0 \\ 0 & 0\dots\dots\dots\dots0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 & 0\dots\dots\dots\dots1 \end{vmatrix}$$

$$*(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\dots(a_n-x) = \Delta_1 \cdot \left(\frac{a_1}{a_1-x} + \frac{x}{a_2-x} + \dots + \frac{x}{a_4-x} \right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 1 & 0\dots0 \\ \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0\dots1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left(\frac{a_1}{a_1-x} + \frac{x}{a_2-x} + \dots + \frac{x}{a_4-x} \right)$$

Рекуррент формулалар ёрдамида детерминантлар ҳисоблаш.

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2} \qquad x^2 - px + q = 0 \begin{cases} a + \beta = p \\ \alpha \cdot \beta = -q \end{cases}$$

$$D_n = (a+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} <=> D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$$

$$<=> D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2})$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta \cdot \beta \cdot (D_{n-2} - \alpha_{n-3}) = \ldots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) = \alpha \cdot d \circ (D_{n-2} - \beta D_{n-3}) = .. = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1)$$

$$\alpha D_n - \beta D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)$$

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D\ \ - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta} = \alpha^n \cdot \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(d - \beta)} + \beta^n\left(-\frac{D_2 - xD_1}{\beta(\alpha - \beta)}\right)$$

$$C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)} \qquad C_2 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\beta(\alpha - \beta)} => \quad D_n = C_1\alpha^n + C = \beta|$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 5\ 3\ 0 \ldots 0 \\ 2\ 5\ 3\ \ldots 0 \\ 0\ 2\ 5 \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ \ldots 5 \end{vmatrix} = 5 - \begin{vmatrix} 5\ 3\ 0 \ldots 0 \\ 2\ 5\ 3 \ldots 0 \\ 0\ 2\ 5 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 2\ 5\ 3 \ldots 0 \\ 0\ 2\ 5 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 0 \ldots 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 2 \cdot 3\begin{vmatrix} 2\ 5\ 3 \ldots 0 \\ 0\ 2\ 5 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 0 \ldots 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad D_1 = 5 \qquad C_1 = \frac{19 - 3 \cdot 5}{2(2-3)} = -2$$

$$\alpha = 2 + \beta = 3 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 6 = 19 \qquad C_2 = \frac{19 - 2 \cdot 5}{3(2-3)} = 3$$

$$x \neq \beta \qquad D_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n = 3^{n+2} - 2^{n+1}$$

Матрицаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасининг детерминанти. Тескари матрица. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги.

Матрицанинг кўпайтмаси детерминанти

Теорема. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти уларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенг, яъни

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

Исбот. n – чи тартибли E – бирлик матрицани қараймиз, Маълумки бу матрица учун

$$|-E| = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ .0 & 0 & . & . & -1 \end{pmatrix} = (-1)^n$$

муносабат ўринли бўлади. Шунингдек блок матрицанинг детерминанти тушунчасига кўра қуйидаги тенгликлар ҳам ўринли бўлади:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B| \qquad \left\|\begin{matrix} A & C \\ -E & 0 \end{matrix}\right\| = (-1)^n|-E||C| = (-1)^n(-1)^n(C) = |C|$$

Шу тенгликларнинг ўнг қисмларини бир – бирига тенглигини исботлаймиз. Детерминантнинг хоссаларига кўра

$$|A||B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & 0 & . & . & . & 0 & b_{11} & b_{12} & . & b_{1n} \\ 0 & -1 & . & . & . & 0 & b_{21} & b_{22} & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -1 & b_{1n} & b_{2n} & . & b_{nn} \end{vmatrix}. =$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}\dots.a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots a_{1n}b_{n1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{1k}\dots. & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn} \\ a_{21}\dots a_{2n} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots a_{2n}b_{n1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2}\dots & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kn} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\dots.a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\dots a_{nn}b_{1n} & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k2}\dots. & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn} \\ -1\ 0\dots..0 & 0 & 0 & 0 \\ 0\ -1\dots..0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0\ 0\dots..-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}=|C|$$

бўлади, бунда $C_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

Иккита матрицалар йиғиндисининг детерминанти уларнинг детерминантлари йиғиндисига тенг эмас.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{11}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Тескари матрица

n-тартибли матрица берилган бўлсин *C* матрицага *A* матрицага *ўнгдан тескари матрица* дейилади, агар

$$AC=E$$

бўлса.

B матрицага *A* матрицага *чапдан тескари матрица* дейилади, агар

$$BA=E$$

бўлса.

E ҳар доим бирлик матрица.

Агар B матрица ўнгдан, C матрица эса чапдан A матрица тескари бўлса, унда улар тенг бўлади ва қуйидагича ёзилади:

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C.$$

Теорема. *A* *n*–тартибли квадрат матрица *A* матрицанинг *тескариси* мавжуд бўлиши учун , *detA≠0* бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. Зарурлиги. *A* матрицанинг *тескариси* мавжуд бўлсин, уни *B* деб белгилаймиз

$AB=E$ унда

$det(AB)=detA*detB=detE$

$detA*detB=1$

$detA\neq 0$ бўлади.

Етарлиги. $detA=\Delta\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}=A^{-1}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{matrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+ \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\ldots+ \\ . \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\ldots+ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} +a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n} & \cdots & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn} \\ +a_{2n}A_{2n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\ldots+a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{21}A_{n2}+a_{22}A_{n2}+\ldots+a_{2n}A_{nn} \\ . & . & \cdots & . \\ +a_{nn}A_{1n} & a_{n1}A_{21}+a_{n2}A_{22}+\ldots+a_{nn}A_{1n} & \cdots & a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\ldots+a_{nn}A_{nn} \end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E$$

Квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у *махсус*, акс ҳолда *махсусмас* матрица дейилади. Бунга мос ҳолда номаълумларнинг чизиқли алмаштирилиши ҳам бу алмаштиришнинг коэффициентларидан тузилган детерминантнинг нолга тенг ёки тенг эмаслигига қараб, махсус ёки махсусмас дейилади.

Ҳеч бўлмаганда биттаси махсус бўлган матрицаларнинг кўпайтмаси махсус матрица бўлади.

Исталган махсусмас матрицаларнинг кўпайтмаси махсусмас матрица бўлади.

Бу ерда матрицаларни кўпайтириш билан чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш орасидаги боғланишга кўра қуйидаги даъво келиб чиқади: *бир нечта чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажаришнинг натижаси берилган барча алмаштиришлар махсусмас бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда махсусмас алмаштириш бўлади.*

Матрицаларни кўпайтиришда бу ролни ушбу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

бирлик матрица бажаради, шу билан бирга у берилган тартибли ихтиёрий A матрица билан ўрин алмашиш хоссасига эга:

$$AE=EA=A$$

Бу тенгликлар ё матрицаларни кўпайтириш қоидаларини бевосита қўлланиш орқали ёки бирлик матрица номаълумларни *айнан* чизиқли алмаштирилиши

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ &\dots \\ x_n &= y_n, \end{aligned}$$

га мос келади деган изоҳ асосида исботланади (айнан чизиқли алмаштиришни ихтиёрий бошқа бир чизиқли алмаштиришдан олдин ёки кейин бажарилиши, равшанки, бу алмаштиришни ўзгартирмайди).

E матрица A - исталган матрица бўлганда (2.1) *шартни қаноатлантирувчи ягона матрица эканлигини* қайд қилиб ўтайлик. Ҳақиқатан ҳам, агар шундай хоссага эга бўлган йана бир E' матрица мавжуд бўлганда эди, у ҳолда қуйидагига эга бўлар эдик:

$$E'E=E', \qquad E'E=E,$$

бу ердан

$$E'=E$$

Берилган A^{-1} матрица учун *тескари матрицанинг* мавжуд бўлиши ҳақидаги масала анчагина мураккабдир. Матрицаларни кўпайтириш нокоммутатив бўлганлиги сабабли ҳозирча *ўнг* тескари матрица ҳақида сўз юритамиз, яъни шундай A^{-1} матрица ҳақидаки, A матрицани ўнг томондан унга кўпайтмаси бирлик матрицани беради :

$$AA^{-1}=E \tag{2.4}$$

Агар А матрица махсус бўлса, у ҳолда – агар A^{-1} матрица мавжуд бўлганда эди – (2.4) тенгликнинг чап томонида турган кўпайтма, бизга маълумки ,махсус матрица бўлар эди, бу тенгликнинг ўнг томонида турган E матрица аслида махсйсмас бўлади, чунки унинг детерминанти бирга тенг. Шундай қилиб махсус матрица ўнг тескари матрицага эга бўла олмайди. Худди шундай мулоҳазалар у чап тескари матрицага ҳам эга эмаслигини кўрсатади ва шунинг учун *махсус матрица учун тескари матрица умуман мавжуд эмас.*

Махсусмас матрица бўлган ҳолга ўтишдан олдин дастлаб қуйидаги ёрдамчи тушунчани киритамиз. n- тартибли

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ an1 & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин .

A матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчиларидан (бунда a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси j-сатр ва i-устун кесишган жойда туради) тузилади

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицага A матрицага *бириктирилган* (ёки *ўзаро*) матрица дейилади .

AA^* ва A^*A кўпайтмаларни топайлик . A матрицанинг детерминантини d орқали белгилаб, $(d=|A|)$, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$A^*A = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & d & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & d \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

Бу ердан, агар *А матрица махсусмас бўла, у ҳолда унинг бириктирилган матрицаси* A^* *ҳам махсусмас бўлиши ва шу билан бирга* A^* *матрицанинг* d^* *детерминанти А матрицанинг детерминанти d нинг* n-1 *даражасига тенг бўлиши келиб чиқади.*

Ҳақиқатан ҳам, (2.5) тенгликлардан детерминантлар орасидаги тенгликга ўтиб,

$$dd^* = d^n$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда $d \neq 0$ бўлганлиги учун

$$d^n = d^{n-1}$$

Энди ҳар қандай махсусмас A матрица учун тескари матрицанингмавжудлигини исботлаш ва унинг кўринишини topиш мумкин. Агар иккита матрицанинг AB кўпайтмасини қараётган ва кўпайтувчилардан бирининг, масалан, B нинг барча элементларини ўзгармас d сонга бўлсак, у ҳолда AB кўпайтманинг барча элементлари ҳам шу сонга бўлинади. Шундай

$$d = |A| \neq 0$$

бўлса, (2.5) тенгликлардан *А матрица учун тескари матрица бўлиб, бириктирилган А матрицанинг барча элементларини d сонга бўлишдан ҳосил бўлган ушбу*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{12}}{d} & . & . & . & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & . & . & . & \frac{A_{1n}}{d} \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & . & . & . & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}$$

матрица хизмат қилиши келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, (2.5)дан |A|

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \tag{2.6}$$

тенгликлар келиб чиқади .

Яна бир бор таъкидлаймизки, A^{-1} матрицанинг i - сатрида $\left|A\right|$ детерминантнинг i-устуни элементларининг $d=\left|A\right|$ га бўлинган алгебраик тўлдирувчилар туради.

A^{-1} *матрица берилган махсусмас A матрица учун* (2.6) *шартни қаноатлантирувчи йагона матрица* эканлигини исботлаш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар С матрица шундай бўлсаки, унинг учун

$$AC=CA=E$$

бўлса, у ҳолда

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$

$$CAA^{-1}=(CA)A^{-1}=EA^{-1}=A^{-1}$$

бу ердан $C=A^{-1}$

(2.6) дан ва детерминантнинг кўпайтириш ҳақидаги теоремадан A^{-1} *матрицанинг детерминанти* $\frac{1}{|A|}$ *га тенглиги келиб чиқади, бинобарин, бу матрица ҳам махсусмас бўлади, унинг учун A матрица тескари матрица бўлиб хизмат қилади.*

Энди агар n-тартибли A ва B квадрат матрицалар берилган бўлиб, A махсусмас, B эса ихтиёрий бўлса, у ҳолда B ни A га *ўндан (ўнг) ва чапдан (чап) бўлишини* бажаришимиз, яъни ушбу

$$AX=B, \quad YA=B \tag{2.7}$$

матрицавий тенгликларни ечишимиз мумкин .

Бунинг учун матрицаларни кўпайтириш нинг ассоциативлик хоссасига кўра

$$X=A^{-1}B, \qquad Y=BA^{-1}$$

деб олиш ейарли, шу билан бирга матрицаларни кўпайтириш нокоммутатив бўлгани сабабли (2.7) тенгламаларнинг бу ечимлари турлича бўлади.

Мисоллар . 1) қуйидаги матрица берилган :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Унинг детерминанти $|A| = 5$ шунинг учун тескари матрица A^{-1} мавжуд, ва

2) қуйидаги матрицалар берилган:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

A матрица махсусмас, шу билан бирга

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Шунинг учун $AX=B$, $YA=B$ тенгламаларнинг ечимлари қуйидаги матрицалардан иборат бўлади:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги

$A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ сатр $B=(b_1, b_2,\ldots,b_n)$, . . . , $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ сатрларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади, агар шундай $\gamma\ldots\mu$ ҳақиқий сонлар топилсаки, қуйидаги тенглик ўринли бўлса: $a_i=\gamma b_j+\ldots+\mu c_j$, $(j=\overline{1.n})$ $A=\gamma B+\ldots+\mu C$

Таъриф: A,B,…,C *чизиқли боғлиқли* дейилади, агар шундай $\alpha,\beta,\ldots,\gamma$ бирортаси нолдан фарқли сонлар топилсаки, қуйидаги тенглик ўринли бўлса

$$\alpha A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$$

чизиқли боғлиқли бўлмаган сатрларга *чизиқли эркли* дейилади.

Таъриф: A, B,…, C сатрлар *чизиқли эркли* дейилади, $\alpha A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$ тенглик фақат $\alpha=\beta=\ldots=\gamma=0$ бўлганда ўринли бўлса .

Теорема: A, B,…,C *сатрлар чизиқли эркли сатрлар бўлиши учун улардан бири қолганлардан чизиқли комбинациясидан иборат бўлиши зарур ва етарли*

Исбот. Зарурлиги: A, B,…, C сатрлар чизиқли эркли бўлсин. Унда сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги тўғрисидаги таърифга кўра, шундай α, $\beta,\ldots,\gamma$ ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли сонлар топиладики, $\alpha A+\beta B+\ldots+\gamma=0$ тенглик ўринли бўлади. Қулайлик учун α нолдан фарқли бўлсин дейлик. У ҳолда $A=-\frac{\beta}{\alpha}B-.\ .\ .-\frac{\gamma}{\alpha}C$ бўлади. Бунинг учун $\alpha_B=-\frac{\beta}{\alpha},\ldots,\alpha_C=-\frac{\gamma}{\alpha}$ деб белгилаш киритсак, унда $A=\alpha_B B+\ldots+\alpha_C C$ бўлади. Бу эса қаралаётган сатрлардан бири қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат эканлигини билдиради.

Етарлилиги. Берилган сатрлардан бири қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлсин. Қулайлик учун A – сатр $A=\beta B+\ldots+\gamma C$ кўринишда ифодалансин. Охитрги тенгликнинг коэффициентларидан α, $\beta,..,\gamma$ лардан бирортаси нолдан фарқли бўлсин.

$$(-1)A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$$

$$\alpha=-1\neq 0$$

Теорема. *Агар $A, B,\ldots,C$ сатрланинг бирор қисми чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда шу $A, B,\ldots,C$ сатрлар чизиқли боғлиқ бўлади.*

Исботи. Шартга $A, B,\ldots,C$ сатрлардан $B,\ldots,C$ қисми чизиқли боғлиқ бўлсин, яъни шундай камида биттаси нолдан фарқли $\beta,\ldots,\gamma$ сонлар топиладики $\beta B+\ldots+\gamma C=0$ тенглик ўринли бўлади. Агар $\alpha=0$ десак, унда $0A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$ тенглик ўринли бўлади. Демак, α, β, γ – сонлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлганда ҳам шу $A, B,\ldots,C$ сатрларнинг чизиқли комбанцияси нолга тенг бўляпти. Бу эса шу $A, B,\ldots,C$ сатрларнинг чизиқли боғлиқ эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

Теорема. *Агар $A, B,\ldots,C$ сатрлардан биронтасиноллардан иборат бўлса, у ҳолда шу $A, B,\ldots,C$ сатрлар чизиқли боғлиқ бўлади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра шу $A, B, ..., C$ сатрлардан бири, қулайлик учун $A=(0, 0, 0,...,0)$ бўлсин. У ҳолда $\alpha \neq 0, \beta = 0,...,\gamma = 0$ деб олсак ҳам $\alpha A+\beta B+...+\gamma C=0$ тенглик ўринли бўлади. Демак, $A, B, ..., C$ сатрлар $\alpha, \beta, ..., \gamma$ сонлардан бирортаси нолдан фарқли бўлганда ҳам уларнинг чизиқли комбинацияси нолга тенг бўляпти. Бу эса шу $A, B, ..., C$ сатрларнинг чизиқли боғлиқлигини билдиради. Теорема исботланди.

Матриканинг ранги тушунчаси. Базис минор ҳақидаги теорема. Детерминантнинг нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шарти

Қуйидаги $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица берилган бўлсин.

Таъриф. А – матриканинг r – чи тартибли минори деб, А – матриканинг r та сатри ва r та устунидан ташкил топган r – чи тартибли детерминантга айтилади, бунда r = min(m, n).

1. А матрицада r – чи тартибли нолдан фарқли минорлар мавжуд бўлсин.
2. Барча (r + 1) – чи тартибли ва ундан юқори тартибли минорлар нолга тенг бўлсин.

Таъриф. Юқоридаги иккита шартни қаноатлантирувчи r сонига А матриканинг ранги дейилади ва rang A = r деб ёзилади.

Агар А матрицада юқоридаги икки шартни қаноатлантирса, унда нолдан фарқли r – чи тартибли минорга базис минор дейилади.

Одатда базис минордаги сатрлар ва устунлар базис сатрлари ҳамда базис устунлари дейилади.

Теорема (Базис минор ҳақидаги теорема). *Базис сатр (устун)лар чизиқли эрклидир. Матриканинг ихтёрий сатри (устуни) базис сатр (устун) ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади.*

Исбот. Теоремани фақат сатрлар учун исботлаймиз (устунлар учун худди шунингдек исботланади). Тескарисидан фараз қилайлик, яъни базис сатрлар чизиқли боғлиқ бўлсин. Маълум таърифга кўра, улардан бири қолганларининг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади. Агар шу сатрдан қолган сатрларнинг чизиқли комбинациясини айирсак, унда базис сатрнинг битта сатри ноллардан иборат бўлиб қолади. У ҳолда қаралаётган детерминант нолга тенг. Бу эса базис минорнинг таърифига зид. Демак қилган фаразимиз нотўғри бўлиб, бундан базис сатрларнинг чизиқли эркли бўлиши келиб чиқади.

Энди теоремани иккинчи қисмини исботлаймиз. Қулайлик учун А – матриканинг базис минори унинг чап йўқори қисмига жойлашган бўлсин деб фараз қиламиз. Яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Маълумки, барча $(r+1)$ тартибли детерминантлар учун

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0$$

тенглик ўринли бўлади, чунки агар $k \le r$ ёки $j \le r$ бўлса, детерминант иккита бир хил сатр ёки устунга эга бўлиб қолади, агар k ва j – ларнинг иккаласи ҳам r дан катта бўлса, базис минорнинг таърифига кўра барча $(r+1)$ – тартибли детерминантлар нолга тенг. Охирги детерминантни j устун бўйича ёямиз:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{kj}A_{kj} = 0.$$

A_{kj} базис минорга мос алгебраик тўлдирувчи бўлганлиги учун нолдан фарқлидир. Шунинг кўра

$$a_{kj} = -\frac{A_{1j}}{A_{kj}}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{kj}}a_{2j} - \ldots - \frac{A_{rj}}{A_{kj}}a_{rj}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $\lambda_i = -\frac{A_{ij}}{A_{kj}}$, $i = \overline{1, r}$ деб белгилаш киритсак, унда

$$a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \ldots + \lambda_\kappa a_{rj}$$

тенглик ҳосил бўлади. Охирги тенгликдан А – матрицанинг ихтиёрий k – сатри дастлабки r – та сатрининг чизиқли комбинациясидан иборат эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

Таъриф. Берилган матрицада элементар алмаштириш деб, матрицанинг бирор сатри (устуни) элементларини ихтиёрий нолдан фарқли ҳақиқий сонга кўпайтириш, бирор ҳақиқий сонга кўпайтириб бошқа бир сатр (устун)га қўшишга айтилади.

Теорема. *Матрицада элементар алмаштириш натижасида ранги ўзгармайди.*

Теореманинг исботи детерминантнинг хоссаларидан келиб чиқади.

Теорема: *n- чи тартибли детерминант нолга тенг булишлиги учун, унинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғлиқли булиши зарур ва этарли.*

Исбот. Зарурлиги. Шартга кўра n- чи тартибли детерминант нолга тенг бўлсин. Унда берилган n- чи тартибли А – матрицанинг ранги $r < n$ га тенг. У ҳолда битта сатр мавжудки у А – матрицанинг базис сатри бўлмайди. Базис минор ҳақидаги теоремага кўра бу сатр қолган сатрларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги ҳақидаги теоремага кўра А – матрицанинг сатрлари чизиқли боғликдир.

Етарлилиги. Детерминантнинг сатрлари чизикли боғлиқ бўлсин. У ҳолда сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги тўғрисидаги теоремага кўра савтрлардан бири қолганларининг чизиқли комбанацияси орқали ифодаланади. Шу сатрдан қолган сатрларнинг чизиқли комбинациясини айирсак, у ҳолда детерминантнинг битта сатриноллардан иборат бўлади. Детерминантнинг маълум хоссасига кўра детерминант нолга тенг. Теорема исботланди.

III БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ

Вектор тушунчаси ва векторлар устида чизиқли амаллар

Физикада шундай катталиклар борки, улар бирор сон билан характерлаш мумкин: температура, оғирлик, узунлик, масса, ҳажм, юза.

Шундай катталиклар мавжудки, фақат сон қиймат билан характерлаб бўлмайди. Сон ва йўналиши билан аниқланадиган катталикларга вектор катталиклар дейилади. Маслан: тезлик, тезланиш, куч.

Таъриф. *Йўналтиригган кесмага вектор дейилади.*

Боши A охири B нуқтада бўлган векторни $\overrightarrow{AB}$ символ орқали белгилаймиз. Векторларни лотин алифбосининг кичик ҳарфлари билан ҳам белгилаш мумкин. Масалан: $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва ҳакозо.

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторга A нуқтадан чиқувчи вектор дейилади.

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги деб, AB кесманинг узунлигига айтилади ва $|\overrightarrow{AB}|$ каби белгиланади.

Боши ва охири устма-уст тушган кесмага нол вектор дейилади.

Битта тўқри чизиқ ёки раралпел тўқри чизиқларда ётувчи векторларга коллинеар векторлар дейилади.

Бир-хил йуналиш ва тенг узунликка эга векторларга тенг векторлар дейилади.

Қарама-қарши векторлар деб, қарама-қарши йўналишли тенг узунликка эга векторларга айтилади. $\vec{a}$ векторга қарама-қарши вектор $-\vec{a}$ каби белгиланади.

$\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналишли кесмаларни қўшиш учун $\overrightarrow{CD}$ векторни шундай параллел кўчирамизки $\overrightarrow{CD}$ векторнинг С боши $\overrightarrow{AB}$ нинг B охирига устма-уст қўйилади. Ҳосил бўлган $\overrightarrow{AD}$ йўналишли кесма $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналишли кесмаларнинг йиғиндиси дейилади ва $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ символ билан белгиланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси деб, агар $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ векторнинг охиридан чиқувчи бўлса, $\vec{a}$ векторнинг бошидан $\vec{b}$ векторнинг охирига йўналтирилган векторга айтилади ва $\vec{a}+\vec{b}$ каби белгиланади. Бу қоидага векторларни қўшишнинг учбурчак қоидаси дейилади.

Векторларни қўшишнинг хоссалари:

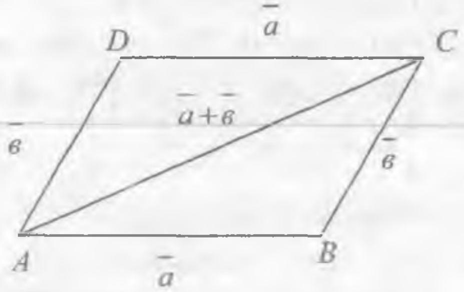
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (ўрин алмаштириш)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (гуруҳлаш)
3. $\vec{a}+0=\vec{a}$, бу ерда 0 символ ёрдамида нол вектор белгиланган.
4. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун қарама-қарши вектор мавжуд ва

$\vec{a}+(-\vec{a})=0$

3-хоссаниниг исботи векторларни қўшишнинг таърифидан келиб чиқади.

4-хоссаниниг исботи. $\vec{a}$ векторга қарама-қарши элемент сифатида $\vec{a}$ вектор билан бир-хил узункка ва қарама-қарши йўналишга эга соллинеар векторни олсак, векторларни қўшишнинг таърифига асосан танланган вектор билан $\vec{a}$ векторнинг йиғиндиси нолга тенг эканлиги келиб чиқади.

1-хоссаниниг исботи

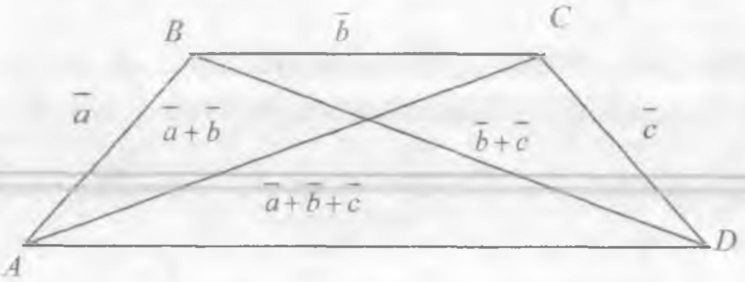


$\bar{a}+\bar{в}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overline{AC}$

$\bar{b}+\bar{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overline{AC}$

Бундан эса, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ келиб чиқади.

2-хоссаниниг исботи



$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$

Бундан эса, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ келиб чиқади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб, $\vec{b}$ вектор билан йиғиндиси $\vec{a}$ векторга тенг $\vec{c}$ векторга айтилади ва $\vec{a}-\vec{b}$ каби белгиланади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларлар битта нуқтадан чиқувчи бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб, $\vec{b}$ векторнинг охиридан $\vec{a}$ векторнинг охирига йўналтирилган векторга айтилади.

$\vec{a}$ векторнинг $к$ сонга кўпайтмаси деб узунлиги $|к||\vec{a}|$ га тенг ва йўналиши агар $к>0$ бўлса $\vec{a}$ билан бир-хил, агар $к<0$ бўлса йўналиши $\vec{a}$ билан қарама-қарши бўлган векторга айтилади ва $к\vec{a}$ каби белгиланади.

Векторларни сонга кўпайтиришнинг хоссалари

5. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
6. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
7. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

3.1 – теорема. Агар $\vec{b}$ вектор нолдан фарқли $\vec{a}$ векторга коллинеар бўлса, у ҳолда шундай λ сони топиладики $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Агар $\vec{b}$ вектор нол вектор бўлса $\lambda=0$ деб олсак $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли бўлади. Агар $\vec{b}$ вектор нолдан фарқли вектор бўлса $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни бошларини битта нуқтага келтирамиз, натижада улар битта тўғри чизиқда ётади. У ҳолда икки ҳол бўлиши мумкин.

а) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир-хил йўналишга эга бўлса $\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деб олсак, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли бўлади. Чунки $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналишга эга, яъни $|\lambda\vec{a}|=\left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|\right|=\left|\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ва $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар $\vec{a}$ вектор билан бир-хил йўналишга эга бўлгани учун ўзаро ҳам бир-хил йўналишга эга.

б) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қарама-қарши йўналишга эга бўлса $\lambda=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деб олсак, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли бўлади. Чунки $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналишга эга, яъни $|\lambda\vec{a}|=\left|-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|\right|=\left|-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right||\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ва $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар $\vec{a}$ вектор билан қарама-қарши йўналишга эга бўлгани учун ўзаро бир-хил йўналишга эга.

Демак, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли. Теорема исботланди.

Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси деб, шу векторларнинг ихтиёрий ҳақиқий сонларга кўпайтмаларининг йуғиндисига айтилади, яъни

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$$

бу ерда $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ҳақиқий сонлар.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ векторларга чизиқли боғлиқли дейилади, агар бирортаси нолдан фарқли $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ сонлар билан чизиқли комбинацияси нолга тенг бўлса, яъни

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$$

бу ерда $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ сонлардан бирортаси нолдан фарқли.

Чизиқли боғлиқли бўлмаган векторларга чизиқли эркли векторлар дейилади.

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторларга чизиқли эркли дейилади, агар $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ тенглик фақат $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ шарт бажарилгандагина ўринли бўлса.

3.2 – теорема. Агар $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлардан бирортаси нол вектор бўлса, у ҳолда бу векторлар чизиқли боғлиқлидир.

Исбот. Фараз қилайлик $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлардан бирортаси нолга тенг бўлсин. Аниқлик учун $\vec{a}_1=0$ деб олайлик. У ҳолда бу векторларнинг биттаси нолдан фарқли $\alpha_1=1,\quad \alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ сонлар билан чизиқли комбинацияси нолга тенг. Бундан эса $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

3.3 – теорема. Агар $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлардан n-1 таси чизиқли боғлиқли бўлса, улар чизиқли боғлиқлидир.

Исбот. Фараз қилайлик $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлардан n-1 таси чизиқли боғлиқли, аниқлик учун $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_{n-1}$ векторлар чизиқли боғлиқли деб олайлик. У ҳолда бирортаси нолдан фарқли $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ сонлар билан чизиқли комбинацияси нолга тенг, яъни $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1}=0$. Агар $\alpha_n=0$ деб олсак, $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_{n-1}\vec{a}_{n-1}+0\cdot\vec{a}_n=0$ тенглик ўринли. Бу ерда $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ сонларнинг бирортаси нолдан фарқли бўлганлиги учун, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторлар чизиқли боғлиқли. Теорема исботланди.

Иккита векторларнинг чизиқлилиги боғлиқлиги

3.4 – теорема. Иккита вектор чизиқли боғлиқли бўлишлиги учун улар коллинеар бўлишлиги зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* Иккита вектор чизиқли боғлиқли бўлсин, яъни $\beta\neq0$ бўлиб $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=0$. У ҳолда $\beta\vec{b}=-\alpha\vec{a}$, $\vec{b}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\vec{a}$. Векторни сонга кўпайтириш нинг хоссасига кўра $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлади.

Етарлилиги. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлсин. Бу векторларнинг чизиқли боғлиқлигини исботлаймиз. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда 3.1 – теоремага кўра шундай λ сони топиладики $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ тенглик ўринли бўлади. Бундан эса $\lambda\vec{a}+(-1)\vec{b}=0$. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг λ, -1 (-1 нолдан фарқли) сонлари билан чизиқли комбинацияси нолга тенг бўлгани учун бу векторлар чизиқли боғлиқлидир.

1 –натижа. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколлинеар бўлса, у ҳолда улар чизиқли эрклидир.

2 –натижа. Иккита ноколлинеар векторлар нолдан фарқлидир.

Учта векторларнинг чизиқлилиги боғлиқлиги

Битта текислик ёки рараллел текисликларда ётувчи векторларга комрланар векторлар дейилади.

3.5 – теорема. Учта вектор чизиқли боғлиқли бўлишлиги учун улар компланар бўлишлиги зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* Учта вектор чизиқли боғлиқли бўлсин. Уларнинг компланар бўлишлигини исботлаймиз.

Учта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқли бўлсин, яъни бирортаси нолдан фарқли α, β, γ сонлари мавжудки $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ тенглик ўринли бўлади. Аниқлик учун $\gamma\neq 0$ деб фараз қилайлик. У ҳолда $\gamma\vec{c}=-\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$, бундан эса $\vec{c}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$ тенгликка эга бўламиз. Агар $\lambda=-\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu=-\frac{\beta}{\gamma}$ деб олсак $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ тенгликка эга бўламиз.

Агар биз $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтирсак. $\vec{c}$ вектор $\lambda\vec{a}$, $\mu\vec{b}$ векторлардан ясалган параллелограммнинг диоганалидан иборат бўлади. Бу эса $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ векторлар битта текисликда ётишини англатади.

Етарлилиги. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлсин. У ҳолда уларнинг чизиқли боғлиқлигини исботлаймиз.

Агар бу векторлардан иккитаси коллинеар бўлса, шу икки вектор чизиқли боғлиқли, Теорема 2.3. га кўра $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқли бўлади.

Энди эса векторлардан ихтиёрий иккитаси коллинеар бўлмаган ва $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан бирортаси нолга тенг бўлмаган ҳолни қарайлик. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларни битта текислик ва умумий бошланғич *O* нуқтага келтирамиз. $\vec{c}$ векторнинг *C* охиридан $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларга рараллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва мос равишда $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар ётган тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини *A, B* каби белгилайлик. У ҳолда параллелограмм қоидасига кўра

$$\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

$\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлар мос равишда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан битта тўғри чизиқларда ётгани учун $\overrightarrow{OA}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан, $\overrightarrow{OB}$ вектор $\vec{b}$ вектор билан коллинеар. Шунинг учун λ,μ сонлари топиладики $\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$. У ҳолда $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, бундан эса $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ +(-1) $\vec{c}$=0. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг λ, μ, -1 сонлари билан чизиқли комбинацияси нолга тенг. -1 нолдан фарқли бўлгани учун $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқлидир.

Тўртда векторнинг чизиқли боғлиқлиги.

3.6 – теорема. Ихтиёрий 4 та вектор чизиқли боғлиқлидир.

а) Учтаси компланар бўлсин у ҳолда улар чизиқли боғлиқ. Теорема 3.3.га кўра 4 та вектор ҳам чизиқли боғлиқ бўлади.

б) 4 та вектордан ихтиёрий 3 таси компланар бўлмасин. У ҳолда уларни умумий *O* бошланғич нуқтага келтирамиз. $\vec{d}$ векторнинг D охиридан $\vec{ab}$, $\vec{bc}$,

$\vec{a}\vec{c}$ текистликларга параллел текисликлар ўтказамиз ва $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар ётган тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини мос равишда A, B, C каби белгилайлик. У ҳолда

$$\vec{d}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\,.$$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ векторлар мос равишда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларга коллинеар бўлганлиги учун, λ, μ, γ сонлари топиладики

$$\vec{d}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}$$

тенгликка эга бўламиз, бундан эса $\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}+(-1)\,\vec{d}=0$ ўринли бўлади. Демак, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлар чизиқли боғлиқли.

Натижа. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нокомпланар векторлар бўлса, ихтиёрий $\vec{d}$ вектор учун λ, μ, γ сонлар топиладики, қуйидаги тенглик ўринли

$$\vec{d}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}\,.$$

Базис тушунчаси

Тариф. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *чизиқли эркли векторлар фазода базис ташкил этади дейилади, агар ихтиёрий* $\vec{d}$ *векторни уларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, яъни*

$$\vec{d} = \lambda\ \vec{a} + \mu\ \vec{b} + \gamma\ \vec{c}\,. \qquad (3.1)$$

(3.1) *ёйилмага* $\vec{d}$ *векторнинг* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *базис бўйича ёйилмаси* λ, μ, γ *- сонларга* $\vec{d}$ *векторнинг* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *базисдаги координаталари дейилади ва* $\vec{d} = \{\ \lambda,\ \mu,\ \gamma\ \}$ *каби белгиланади.*

Тасдиқ. $\vec{d}$ *векторни* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторлар ёрдамида* (3.1) *шаклда ягона кўринишда ёзиш мумкин.*

Исбот. Фараз қилайлик (3.1) шаклда икки хил кўринишда ёзиш мумкин бўлсин. Яъни (3.1) дан бошқа қуйидагича кўринишда ҳам ёзиш мумкин бўлсин

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}\,. \qquad (3.2)$$

(3.1) дан (3.2) ни айирамиз ва қуйидаги тенгликка эга бўламиз

$$(\lambda - \lambda_1)\vec{a} + (\mu - \mu_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} = 0.$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқли бўлгани учун $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, $\gamma = \gamma_1$ келиб чиқади. Бу эса зиддият. Демак, (3.1) шаклда ягона кўринишда ифодаланади. Тасдиқ исботланди.

Теорема. $\vec{d}_1$ *ва* $\vec{d}_2$ *векторни қўшиш учун уларнинг* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *базисдаги мос координаталари қўшилади.* $\vec{d}_1$ *векторни бирор* α *сонга кўпайтириш учун унинг барча координаталари* α *сонга кўпайтирилади.*

Исбот. $\vec{d}_1 = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$ ва $\vec{d}_2 = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c}$ векторлар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардаги ёйулмалари билан берилган бўлсин. У ҳолда векторларни қўшиш ва сонга кўпайтиришнинг хоссаларига кўра:

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{c}\,,\ \vec{d}_1 = (\alpha\lambda_1)\vec{a} + (\alpha\ \mu_1)\vec{b} + (\alpha\gamma_1)\vec{c}\,.$$

Бундан ва векторларнинг басизда ёгона кўринишда ёйилишидан теореманинг исботи келиб чиқади.

Тасдиқ. Фазода учта нокомпланар векторлар базис ташкил этади.

Тасдиқ. Текисликда иккита ноколлинеар векторлар базис ташкил этади.

Векторнинг ўқдаги проекцияси ва унинг хоссалари.

Фазода $\overrightarrow{AB}$ вектор ва у ўқ берилган. А ва В нуқталарнинг у ўқдаги проекциялари мос равишда A_y ва B_y нуқталар бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг y ўқдаги проекцияси деб, $\text{pr}_u\overrightarrow{AB}$ йўналитирилган кесманинг катталигига айтилади ва $\text{pr}_y\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади, яни $\text{pr}_y\overrightarrow{AB} = A_yB_y$.

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг y ўқга оғиш бурчаги деб, бирор H нуқтадан чиқувчи йўналиши $\overrightarrow{AB}$ ва y ўқ йўналиши билан бир хил нурлар орасидаги бурчакка айтилади.

Тасдиқ. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг y ўқга оғиш бурчакги φ га тенг бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ векторнинг проекцияси қуйидагича аниқланади

$$\mathrm{pr}_y \overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

Исбот. Фазода $\overrightarrow{AB}$ вектор ва y ўқ берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг A бошидан ўтувчи у ўқ билан бир-хил йўналишга эга $в$ ўқни ўтказамиз. B нуқтанинг $в$ ўқдаги proекцияси C деб белгилайлик. У ҳолда $\angle BAC$ бурчак φ га тенг бўлади. $A_yB_y=AC$ чунки у ва $в$ ўқлар бир хил йўналган, параллел у ҳолда параллел текисликлар орасидаги қисмлари тенг. АС эса $\overrightarrow{AB}$ йўналтирилган кесманинг $в$ ўқдаги proекцияси, яни $AC=\mathrm{pr}_в\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$. Демак, $A_yB_y=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$. Тасдиқ исботланди.

Хоссалари.

1. Иккита вектор йиғиндисининг проекцияси шу векторлар проекциялари йиғиндисига тенг, яъни

$$\mathrm{pr}_y(\vec a+\vec b)=\mathrm{pr}_y\vec a+\mathrm{pr}_y\vec b$$

2. $\vec a$ векторнинг бирор α сонга кўпайтмасининг проекцияси шу векторнинг проекциясининг α сонга кўпайтмасига тенг, яъни

$$\mathrm{pr}_y(\alpha\vec a)=\alpha\,\mathrm{pr}_y\vec a.$$

Векторнинг тўқри бурчакли декарт координаталари.

Фазода $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ ўзаро перпендикуляр, бирлик ва йўналишлари мос равишда Ox, Oy, Oz ўқлари билан устма-уст тушувчи векторларни олайлик. Улар фазода базис ташкил этади. У ҳолда ҳар қандай $\vec d$ векторни ягона равишда уларни чизиқли комбинасияси орқали ифодалаш мумкин, яни шундай x, y, z сонлари мавжудки, $\vec d=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ тенглик ўринли. x, y, z сонларига $\vec d$ векторнинг тўғри бурчакли декарт координати дейилади ва $\vec d\,(x, y, z)$ ёки $\vec d=\{x, y, z\}$ каби бэлгиланади.

Теорема. *$\vec d$ векторнинг x, y, z тўғри бурчакли декарт координаталар мос равишда шу векторнинг Ox, Oy, Oz ўқлардаги проекцияларига тенг.*

Исбот. $\vec d$ векторни бошини O координата бошига келтирамиз. $\vec d$ векторнинг охиридан Oyz, Oxz, Oxy текисликларига параллел текисликлар ўтказамиз ва мос равишда Ox, Oy, Oz ўқлари билан кэсишиш нуқталарини A, B, C каби белгилайлик. У ҳолда $\vec d$ вектор $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ базис векторлардан ясалган тўғри бурчакли параллелипипеднинг диагонали бўлгани учун $\vec d=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Бундан эса $\overrightarrow{OA}=x\vec i$, $\overrightarrow{OB}=y\vec j$, $\overrightarrow{OC}=z\vec k$.

$\vec d$ векторнинг ўқлардаги проекциялари OA, OB ва OC катталикларга тенг. $OA=x$ эканлигини исботлаймиз. $|\overrightarrow{OA}|=|x\vec i|=|x|$. Агар $\overrightarrow{OA}$ ва $\vec i$ бир хил йўналишли бўлса OA ва x мусбат ишорали, агар $\overrightarrow{OA}$ ва $\vec i$ қарама-қарши йўналган бўлса иккаласи ҳам манфий ишорали бўлади. Шунинг учун $OA=x$. Худди шунга ўхшаш $OB=y$ ва $OC=z$ эканлиги исботланади.

α, β, γ лар $\vec{d}$ векторни координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари бўлсин.
$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ сонларига $\vec{d}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

Ҳар қандай векторнинг йўналтирувчи косинуслари квадратларининг йиғиндиси 1 га тенг, яъни

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси.

Тариф. ***Иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, шу векторлар узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига айтилади ва*** $\vec{a}\,\vec{b}$ ***ёки*** $(\vec{a}\,,\vec{b}\,)$ ***каби белгиланади.***

Демак

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\varphi$$

$\vec{b}$ **векторнинг** $\vec{a}$ **вектордаги проекцияси** $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}\,|\cos\varphi$ **бўлгани учун**

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}\,|\,\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} \quad (\text{ёки } \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{b}\,|\,\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,)\,.$$

Яни скаляр кўпайтманинг бошқача таърифи келиб чиқади.

Тариф. $\vec{a}$ ***ва*** $\vec{b}$ ***векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб,*** $\vec{a}$ ***вектор узунлигини*** $\vec{b}$ ***векторнинг*** $\vec{a}$ ***вектордаги проекциясига кўпайтмасига айтилади.***

Векторларнинг скаляр кўпайтма геометрик хоссаси

Теорема. ***Иккита вектор перпендикуляр бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.***

Исбот. ***Зарурлиги.*** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар перпендикуляр бўлсин, яни** $\varphi = 90^0$ **у ҳолда** $\cos\varphi = 0$. **Бундан эса** $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\varphi = 0$

Етарлилиги. **а)** $\vec{a}\,\vec{b} = 0$, $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлардан бирортаси нол бўлсин, у ҳолда** $\vec{0}$ **векторга ҳар қандай вектор перпендикуляр бўлгани учун** $\vec{a} \perp \vec{b}$ **бўлади.**

б) $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ **у ҳолда** $|\vec{a}\,|>0$, $|\vec{b}\,|>0$, $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\varphi = 0$ **дан** $\cos\varphi = 0$. **Бундан эса** $\varphi = 90^0$. **Демак,** $\vec{a} \perp \vec{b}$ **бўлади. Теорема исботланди.**

Теорема. ***Агар иккита нолдан фарқли векторнинг скаляр кўпайтмаси мусбат (манфий) сон бўлса, улар орасидаги бурчаи ўткир (ўтмас) бурчак бўлади.***

Исбот. $\vec{a}\,\vec{b} > 0$ $(\vec{a}\,\vec{b} < 0\ )$ **бўлсин.** $|\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\varphi > 0$ $(|\vec{a}\,||\vec{b}\,|\cos\varphi < 0)$ **ва** $|\vec{a}\,|>0$, $|\vec{b}\,|>0$ **бўлгани учун** $\cos\varphi > 0$ $(\cos\varphi < 0)$. **Бундан эса** φ **ўткир (ўтмас) бурчак эканлиги келиб чиқади.**

Скаляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари

1. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\,\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$
4. $\vec{a}\,\vec{a}>0$ агар $\vec{a}\neq 0$, $\vec{a}\,\vec{a}=0$ агар $\vec{a}=0$ бўлса.

1–хоссанинг исботи скаляр кўпайтманинг таърифидан келиб чиқади, яни $\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ $\vec{b}\,\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi$. Бу икки тенгликнинг ўнг томонлари тенг бўлгани учун чап қисмлари ҳам тенг бўлади.

2–хоссанинг исботи. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\,\mathrm{pr}_{\vec{b}}(\alpha\vec{a})=\alpha\,|\vec{b}|\,\mathrm{pr}_{\vec{b}}(\vec{a})=\alpha(\vec{a}\,\vec{b})$

3–хоссанинг исботи. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=|\vec{c}|\mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{a}+|\vec{c}|\mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$

4–хоссанинг исботи. $\vec{a}\,\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2>0$ агар $\vec{a}\neq 0$, $\vec{a}\,\vec{a}=0$ агар $\vec{a}=0$ бўлса.

Декарт координаталари берилган векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Теорема. ***$\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ва $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторлар ўзининг декарт координаталари билан берилган бўлсин. У ҳолда уларнинг скаляр кўпайтмаси мос координаси кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг, яъни $\bar{a}\,\bar{b}=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$.***

Исбот. $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ ва $\vec{i}\,\vec{i}=1$, $\vec{i}\,\vec{j}=0$, $\vec{i}\,\vec{k}=0$, $\vec{j}\,\vec{j}=1$, $\vec{j}\,\vec{k}=0$, $\vec{k}\,\vec{k}=1$ дан, ҳамда скаляр кўпайтманинг хоссаларидан фойдалансак $\vec{a}\,\vec{b}=x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2$ келиб чиқади.

Натижа 1 $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторларнинг перпендикуляр бўлиши учун $x_1 x_2+y_1 y_2+z_1 z_2=0$ бўлиши зарур ва етарли.

Натижа 2. $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ бўлсин. У ҳолда улар орасидаги бурчак қуйидаги формула орқали аниқланади

$$\cos\phi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

$\cos\phi=\dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ орқали келиб чикади.

Векторларнинг вектор кўпайтмаси

Тариф. Учта вектор тартибланган учлик ташкил этади дейилади, агар уларнинг қайси бири биринчи, қайси бири иккинчи, қайси бири 3-эканлиги кўрсатилган бўлса.

Ёзувда учлик векторларни тартибига қараб ёзамиз.

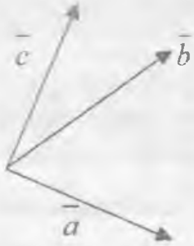
$$\bar a\,\bar b\,\bar c \quad 1\text{-}\bar a,\ 2\text{-}\bar b,\ 3\text{-}\bar c$$
$$\bar c\,\bar a\,\bar b \quad 1\text{-}\bar c,\ 2\text{-}\bar a,\ 3\text{-}\bar b\,.$$

Тариф. **Нокомпланар $\bar a\bar b\bar c$ учлик векторлар ўнг (чап) учлик ташкил қилади дейилади, агар қуйидаги шартлардан бирортаси бажарилган бўлса:**

1°. $\bar a, \bar b, \bar c$ векторлар умумий бошланғич нуқтага келтирилиб $\bar c$ векторнинг учидан қараганда $\bar a$ вектордан $\bar b$ векторга қисқа бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши (соат стрелкаси бўйича) бўлса.

2°. Агар векторлар битта бошланғич нуқтага келтирилганда улар мос равишда ўнг (чап) қўлнинг бош, кўрсаткич ва ўрта бармоғлари жойлашгандек жойлашса.

3°. $\bar a, \bar b, \bar c$ векторлар бошланғич нуқтага келтирилганда $\bar a$ дан $\bar b$ векторга, $\bar b$ дан $\bar c$ векторга бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши (соат стрелкаси бўйича) бўлса.

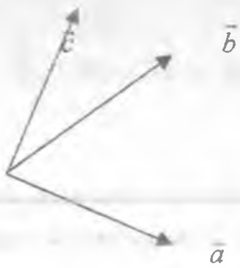


Бир-хил учлик ташкил этувчи иккита учлик векторлар бир хил ориентацияли, ҳар хил учлик ташкил этса ҳар хил ориентацияли бўлади.

$\bar a\,\bar b\,\bar c$ векторлардан 6 та учлик ясаш мумкин.

$\bar a\,\bar b\,\bar c$, $\bar b\,\bar c\,\bar a$ $\bar c\,\bar a\,\bar b$ ҳамда $\bar b\,\bar a\,\bar c$, $\bar a\,\bar c\,\bar b$, $\bar c\,\bar b\,\bar a$ бир хил учлик ташкил қилади.

$\bar a\,\bar b\,\bar c$ $\bar b\,\bar a\,\bar c$



2. Иккита векторнинг вектор кўпайтмаси.

Тариф. ***$\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб шундай $\vec c$ векторга айтиладики, у $\vec c=[\vec a\ \vec b]$ каби белгиланади ва қуйидаги шартларни қаноатлантиради:***

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

2) $\vec{c}$ *вектор* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторларнинг ҳар бирига перпендикуляр.*

3) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ *ўнг учлик ташкил қилади.*

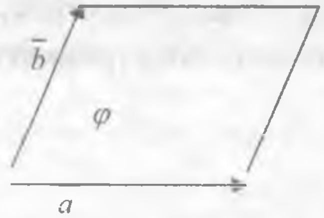
Вектор кўпайтманинг геометрик маноси.

Теорема 2.13. ***Иккина вектор коллинеар бўлиши учун уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.***

Зарурлилиги. $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар коллинеар,** $\varphi=0^0$ **ёки** $\varphi=180^0$ **шунинг учун** $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$ **дан** $|[\vec{a}\,\vec{b}]|=0$**. Бундан эса** $[\vec{a}\,\vec{b}]=0$ **келиб чиқади.**

Етарлилиги. $[\vec{a}\,\vec{b}]=0$ **бўлсин. Агар** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлардан бироратаси нол вектор бўлса,** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **коллинеар бўлади.** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар нолдан фарқли векторлар бўлсин, у ҳолда** $|\vec{a}|>0$, $|\vec{b}|>0$. $[\vec{a}\,\vec{b}]=0$ **дан** $|[\vec{a}\,\vec{b}]|=0$, $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$, $\sin\varphi=0$**. Бундан эса,** $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар коллинеар эканлиги келиб чиқади.**

Теорема 2.14. $\overline{a}$ *ва* $\overline{b}$ *векторларнинг вектор кўпайтмасининг модули,* $\overline{a}$ *ва* $\overline{b}$ *векторларнинг бошлари умумий нуқтага келтириб улардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг.*



$$C=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|[\vec{a}\,\vec{b}]|$$

Тариф. ***Ихтиёрий нолдан фарқли*** $\overline{c}$ ***векторнинг орт вектори деб,*** $\overline{c}$ ***вектор билан бир хил йўналишга эга бирлик векторга айтилади.***

Натижа. **Агар** $[\vec{a}\,\vec{b}]$ **векторнинг орти** $\overline{e}$, $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар бошлари умумий бошланғич нуқтага келтирилган векторлардан ясалган параллелограммнинг юзи C бўлса, у ҳолда** $[\vec{a}\,\overline{b}]=C\overline{e}$ **тенглик ўринли бўлади.**

Эслатма. **Ортнинг тарифидан** $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{e}$ **векторлар ўнг учлик ташкил этади.**

Теорема 2.15. $\overline{c}$ ***вектор T текисликда ётувчи бирор вектор,*** $\vec{e}$ ***шу текисликда ётувчи*** $\overline{c}$ ***га перпендикуляр, бирлик вектор,*** $\vec{g}$***- бирлик, T текисликка перпендикуляр ва шундай йўналиганки,*** $\vec{e}\,\vec{c}\,\vec{g}$ ***ўнг учлик ташкил қилган бўлсин. У ҳолда T текисликдаги ихтиёрий*** $\vec{a}$ ***вектор учун қуйидаги формула ўринли:***

$$[\vec{a}\,\vec{c}]=\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}\,|\vec{c}|\,\vec{g}.$$

Исбот . **Теоремани исботлаш учун охирги тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги векторларнинг 1) бир хил узунликка, 2) коллинеарлиги 3) бир хил йўналишли эканлигини исботлаш керак.**

1) Теорема 2.14 га асосан $|[\vec{a}\,\vec{c}]|=C$, $|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}\,|\vec{c}|\,\vec{g}|=|\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}\,||\vec{c}||\vec{g}|=$ҳ$|\vec{c}|=C$ бир хил узунликка эканлиги исботланди.

2) $[\vec{a}\,\vec{c}]$ ва $\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}\,|\vec{c}|\,\vec{g}$ векторларнинг ҳар бири T текисликка перпендикуляр бўлгани учун улар коллинеар бўлади.

3) $[\vec a\ \vec c]$ ва $\vec g$ векторлар бир хил йўналган бўлади, $\vec a\ \vec c\ \vec g$ ўнг учлик ташкил этса, яни $\vec a$ ва $\overline{e}$ векторлар $\vec c$ вектордан бир томонда ётса ва $pr_{\vec e}\,\vec a>0$ бўлади.

$[\vec a\ \vec c]$ ва $\vec g$ векторлар қарама-қарши бўлади, агар $\vec a\ \vec c\ \vec g$ чап учлик ташкил этса, яни $\vec a$ ва $\overline{e}$ векторлар $\vec c$ вектордан ҳар хил томонда ётса ва $pr_{\vec e}\,\vec a<0$ бўлади.

Демак икки ҳолда ҳам $[\vec a\ \vec c]$ ва $pr_{\vec e}\,\vec a\ |\vec c|\vec g$ векторлар бир хил йўналган бўлади. Теорема исботланди.

Векторларнинг аралаш кўпайтмаси

$\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар берилган бўлсин.

Таъриф. *$\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $[\vec a\,\vec b]$ ни $\vec c$ векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил бўлган $[\vec a\,\vec b]\vec c$ сонга $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси дейилади.*

Теорема. *$[\vec a\,\vec b]\vec c$ аралаш кўпайтма $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтирилиб, шу векторлардан ясалган параллелепипеднинг ҳажми В га тенг, агар $\vec a\,\vec b\,\vec c$ ўнг учлик ташкил этса, – В га тенг агар $\vec a\,\vec b\,\vec c$ чап учлик ташкил этса. Агар $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар компланар бўлса нолга тенг бўлади.*

Исбот. Теоремани аввал $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар коллинеар бўлган ҳол учун исботлаймиз. $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар коллинеар бўлсин, у ҳолда $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ компланар, демак $[\vec a\,\vec b]\vec c=0$ эканлигини исботлаш керак бўлади. $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар коллинеар бўлгани учун $[\vec a\,\vec b]=0$. Бундан эса $[\vec a\,\vec b]\vec c=0$ келиб чиқади.

$\vec a$ ва $\vec b$ векторлар ноколлинеар бўлсин. С орқали $\vec a$ ва $\vec b$ векторларни умумий нуқтага келтирилиб ясалган параллелограммнинг уузини, $\vec e$ орқали $[\vec a\,\vec b]$ векторнинг ортини белгилайлик. У ҳолда

$$[\vec a\,\vec b]\vec c=(\mathrm{C}\,\vec e\,)\vec c=\mathrm{C}(\vec e\ \vec c\,)=\mathrm{C}|\vec e|\,pr_{\vec e}\,\vec c=\mathrm{C}\cdot pr_{\vec e}\,\vec c=\mathrm{C}\cdot pr_{\vec e}\,\vec c\,.$$

Аввал $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторлар нокомпланар бўлган ҳолни қарайлик. $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтирилиб, асоси $\vec a$, $\vec b$ векторлардан иборат паралеллопипеднинг баландлиги h га тенг бўлсин. $pr_{\vec e}\,\vec c=h$ агар $\vec c$ ва $\vec e$ векторлар $\vec a$ ва $\vec b$ вектор ётган текисликка нисбатан бир томонда ётса, яъни $\vec a\,\vec b\,\vec c$ ва $\vec a\,\vec b\,\vec e$ бир-хил орийентацияли бўлса. $\vec a\,\vec b\,\vec e$ ўнг учлик ташкил этгани учун $\vec a\,\vec b\,\vec c$ ҳам ўнг учлик ташкил этади. $pr_{\vec e}\,\vec c=-h$ агар $\vec c$ ва $\vec e$ векторлар $\vec a$ ва $\vec b$ вектор ётган текисликка нисбатан ҳар-хил томонда ётса, яъни $\vec a\,\vec b\,\vec c$ ва $\vec a\,\vec b\,\vec e$ ҳар-хил орийентацияли бўлса. $\vec a\,\vec b\,\vec e$ ўнг учлик ташкил этгани учун $\vec a\,\vec b\,\vec c$ чап учлик ташкил этади.

$$pr_{\vec e}\,\vec c=\begin{cases} h \quad \text{агар } \vec a\vec b\vec c \text{ ўнг учлик ташкил ээтс} \\ -\,h\,\text{агар } \vec a\vec b\vec c \text{ чап учлик ташкил ээтс} \end{cases}.$$

(1)га олиб бориб қўйсак

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}=\begin{cases} V \quad \textit{агар } \vec{a}\vec{b}\vec{c} \textit{ ўнг учлик ташкил} \quad э \\ -V \textit{ агар } \vec{a}\vec{b}\vec{c} \textit{ чап учлик ташкил} \quad э \end{cases}$$

Агар $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ компланар бўлса, уларни битта текисликка келтириш мумкин, у ҳолда $pr_{\vec{e}}\,\vec{c}=0$ чунки $\vec{e}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор ётган текисликка перпендикуляр. Бундан эса, учта вектор компланар бўлса $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}=0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

1 – натижа. $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}=[\vec{b}\,\vec{c}\,]\vec{a}$

Исбот. $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}$ ва $[\vec{b}\,\vec{c}\,]\vec{a}$ аралаш кўпайтмалар битта параллелепипеднинг ҳажмига тенг, ҳамда бир хил ишорали, чунки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ва $\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$ бир хил орийентацияли.

Демак, бундан $[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}$ аралаш кўпайтмани $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ шаклда ёзиш мумкин эканлиги келиб чиқади.

1 – натижа. Учта векторни комланар бўлиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

1 – натижа. Агар учта вектордан иккитаси устма-уст тушса у ҳолда уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.

1 – натижа. $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\,\vec{c}$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтирилиб, шу векторлардан ясалган пирамиданинг ҳажми шу векторларнинг аралаш кўпайтмасининг модулининг олтидан бир қисмига тенг.

Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари

Вектор кўпайтманинг қуйдаги хоссалари мавжуд:

1°. $[\vec{a}\,\vec{b}\,]=-[\vec{b}\,\vec{a}\,]$

2° . $[(\alpha\vec{a}\,)\vec{b}\,]=\alpha\,[\vec{a}\,\vec{b}\,]$

3°. $[(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}\,]=[\vec{a}\,\vec{c}\,]+[\vec{b}\,\vec{c}\,]$

4°. $[\vec{a}\,\vec{a}\,]=0$, $\vec{a}$ ихтиёрий вектор.

1° хоссанинг исботи. $\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}\,]$, $\vec{d}=[\vec{b}\,\vec{a}\,]$ бўлсин. а) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлсин, у ҳолда 2.13 теоремага кўра $[\vec{a}\,\vec{b}\,]=0$ ва $[\vec{b}\,\vec{a}\,]=0$. Бундан эса $[\vec{a}\,\vec{b}\,]=[\vec{b}\,\vec{a}\,]$ келиб чиқади.

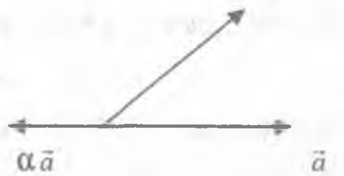
б) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколинеар бўлсин, у ҳолда $|\vec{c}\,|=|\vec{d}\,|$ ва $\vec{c}$, $\vec{d}$ коллинеар чунки иккаласи ҳам $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр. Агар $\vec{c}=\vec{d}$ бўла олмайди, чунки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ва $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{d}$ бир-хил орийентацияли эмас. Демак, $\vec{c}=-\vec{d}$ яъни $[\vec{a}\,\vec{b}\,]=[\vec{b}\,\vec{a}\,]$

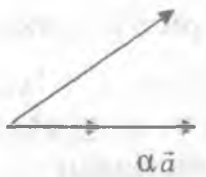
2° хоссанинг исботи. $\vec{c}=[(\alpha\vec{a}\,)\vec{b}\,]$, $\vec{d}=\alpha\,[\vec{a}\,\vec{b}\,]$ бўлсин.

а) $\alpha=0$ ёки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар бўлса, $\vec{c}=\vec{d}$

б) $\alpha\neq 0$ $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноколлинеар бўлиб, $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b}\,)$, $\psi=\angle(\,\alpha\vec{a},\vec{b}\,)$ бўлсин.

$|\vec{c}\,|=|\alpha||\vec{a}\,||\vec{b}\,|\sin\psi$, $|\vec{d}\,|=|\alpha||\vec{a}\,||\vec{b}\,|\sin\varphi$ агар $\alpha>0$ бўлса $\psi=\varphi$, агар $\alpha<0$ бўлса $\psi=\pi-\varphi$, $\sin\varphi=\sin\psi$ бундан эса $|\vec{c}\,|=|\vec{d}\,|$ эканлиги келиб чиқади.





$\vec{c}$ ва $\overline{d}$ векторлар $\alpha\vec{a}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$векторлар ётган текисликка перпендикуляр бўлгани учун $\vec{c}$ ва $\overline{d}$ коллинеар

$\alpha>0$ ($\alpha<0$) бўлса $\vec{a}$ва $\alpha\vec{a}$ векторлар бир-хил (қарама-қарши) йўналган бўлади, ҳамда $[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ ва $[\vec{a},\vec{b}]$ бир хил (қарама-қарши) йўналган бўлади. Бундан эса $\vec{c}=[\alpha\vec{a},\vec{b}]$ ва $\vec{d}=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ векторлар ҳар доим бир-хил йўналган эканлиги келиб чиқади. Демак, $[\alpha\vec{a},\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$

3° хоссанинг исботи.

1) $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$ - компланар бўлсин.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларни битта умумий бошланғич нуқтага келтирамиз ва улар ётган текисликни Т билан, $\vec{c}$векторга перпендикуляр бирлик векторни $\vec{e}$ билан, Т текисликка ортогонал бирлик векторни $\overline{g}$ билан белгилайлик $\overline{g}$ нинг йўналиши шундаки, $\vec{e}\ \vec{c}\ \vec{g}$ ўнг учлик ташкил этсин. Теорема 2.15 га кўра $[\vec{a}\ \vec{c}]=\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}|\vec{c}|\vec{g}$, $[\vec{b}\ \vec{c}]=\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}|\vec{c}|\vec{g}$ ва $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=\mathrm{pr}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b})|\vec{c}|\vec{g}=\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{a}|\vec{c}|\vec{g}+\mathrm{pr}_{\vec{e}}\,\vec{b}|\vec{c}|\vec{g}$ дан $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=[\vec{a}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{c}]$ келиб чиқади.

2) $\vec{a}$, $\vec{b},\vec{c}$нокомпланар бўлсин. $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]$, $[\vec{a}\ \vec{c}]$, $[\vec{b}\ \vec{c}]$ векторлар $\vec{c}$векторга перпендикуляр бўлгани учун улар компланар бўлади, у ҳолда λ, μ, ν сонлари мавжудки,

$$\lambda[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=\mu[\vec{a}\ \vec{c}]+\nu[\vec{b}\ \vec{c}]$$

тенглик ўринли. 3° хоссани исботлаш учун $\lambda=\mu=\nu$ ни исботлашимиз керак. Аввал $\lambda=\mu$ эканини исботлаймиз. Бунинг учун охирги тенгликнинг икки томонини $\vec{b}$ векторга скаляр кўпайтирамиз. Вектор кўпайтманинг хоссасига кўра $[\vec{b}\ \vec{c}]\vec{b}=0$. Шунинг учун $\lambda[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]\vec{b}=\mu[\vec{a}\ \vec{c}]\vec{b}$. $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]\vec{b}=[\vec{a}\ \vec{c}]\vec{b}$ чунки уларнинг абсалют қийматлари асосларининг юзлари тенг (чунки асосларидаги параллелограммларнинг $\vec{b}$ томони умумий $\vec{a}$ ва $\vec{a}+\vec{b}$ учларидан тушган баландликлари тенг.), умумий h баландликка эга параллелепипедларнинг ҳажмлари тенг ва $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\ \vec{b}$ ва $\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}$ бир-хил орийентатцияли учлик ташкил этади, чунки $\vec{a}+\vec{b}$ва $\vec{a}$ векторлар $\vec{b}$векторлардан бир томонда ётади. 3° хосса исботланди.

4° хоссанинг исботи. 2.13 теоремадан келиб чиқади.

Натижа. Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1) $[\vec{a}\ (\alpha\vec{b})]=\alpha[\vec{a}\ \vec{b}]$

2) $[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})]=[\vec{a}\ \vec{b}]+[\vec{a}\ \vec{c}]$

Исбот. $[\vec{a}\ (\alpha\vec{b})]=-[(\alpha\vec{b})\vec{a}]=-\alpha[\vec{b}\ \vec{a}]=\alpha[\vec{a}\ \vec{b}]$,
$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})]=-[(\vec{b}+\vec{c})\vec{a}]=-[\vec{b}\ \vec{a}]-[\vec{c}\ \vec{a}]=[\vec{a}\ \vec{b}]+[\vec{a}\ \vec{c}]$.

Координаталари берилган векторларнинг вектор кўпайтмаси

Теорема 2.17. Агар иккита $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ва $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторлар ўзининг тўғри бурчакли декарт координаталари билан берилган бўлса, у ҳолда вектор кўпайтма қуйидагича аниқланади

$$[\bar{a}\,\bar{b}]=\{y_1 z_2-y_2 z_1,\ \ z_1 x_2-z_2 x_1,\ \ x_1 y_2-x_2 y_1\}.$$

$$\left(yoki\ \ \left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}\right)$$

Исбот. $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторлар ўзининг тўғри бурчакли декарт координаталари билан берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Вектор кўпайтманинг хоссалари ва

$$[\vec{i}\ \vec{i}]=0, \qquad [\vec{i}\ \vec{j}]=\vec{k}, \qquad [\vec{i}\ \vec{k}]=-\vec{j},$$

$$[\vec{j}\ \vec{i}]=-\vec{k}, \qquad [\vec{j}\ \vec{j}]=0, \qquad [\vec{j}\ \vec{k}]=\vec{i},$$

$$[\vec{k}\ \vec{i}]=\vec{j}, \qquad [\vec{k}\ \vec{j}]=-\vec{i}, \qquad [\vec{k}\ \vec{k}]=0$$

эканликларини ҳисобга олсак

$[\vec{a}\,\vec{b}]=x_1 x_2[\vec{i}\ \vec{i}] + x_1 y_2[\vec{i}\ \vec{j}] + x_1 z_2[\vec{i}\ \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}\ \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}\ \vec{j}] + y_1 z_2[\vec{j}\ \vec{k}] + z_1 x_2[\vec{k}\ \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}\ \vec{j}] + z_1 z_2[\vec{k}\ \vec{k}]=x_1 y_2\vec{k} - x_1 z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1 z_2\vec{i} + z_1 x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} =(y_1 z_2- z_1y_2)\vec{i} +(z_1 x_2- x_1 z_2)\vec{j}$

Векторнинг базисдаги ёйилмаси ягоналигидан $[\vec{a}\,\vec{b}]=\{y_1 z_2-y_2 z_1,\ \ z_1 x_2-z_2 x_1,\ \ x_1 y_2-x_2 y_1\}$ эканлиги келиб чиқади.

Натижа. Агар иккита $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ва $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда уларнинг координаталари prопорционалдир, яъни

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Агар $\bar{b}$ векторнинг координаталаридан бирортаси нолга тенг бўлса, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ prопорцияни $ad=bc$ каби тушунамиз.

Координаталари берилган векторларнинг аралаш кўпайтмаси

Теорема. Агар $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$ векторлар ўзининг тўғри бурчакли декарт координаталари билан берилган бўлса, у ҳолда бу векторларнинг аралаш кўпайтма қуйидагича аниқланади

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Исбот. $[\vec{a}\,\vec{b}]=\{y_1 z_2- y_2 z_1,\ \ z_1 x_2- z_2 x_1,\ \ x_1 y_2- x_2 y_1\}$ ва $\vec{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$ векторларни скаляр кўпайтирамиз: $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=(y_1 z_2- y_2 z_1)x_3+(z_1 x_2- z_2 x_1) y_3+(x_1 y_2- x_2 y_1) z_3= x_1 y_2 z_3+ x_3y_1z_2+ x_2 y_3 z_1- x_3y_2 z_1- x_1y_3 z_2- x_2 y_1z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Натижа. Учта $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c}=\{x_3, y_3, z_3\}$ векторлар компланар бўлишлиги учун

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

шарт бажарилиши зарур ва етарли.

Векторларнинг икки каррали кўпайтмаси

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар берилган бўлсин.

Таъриф. $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг $[\vec{b}\,\vec{c}\,]$ вектор кўпайтмасини, $\vec{a}$ векторга вектор кўпайтиришдан ҳосил бўлган $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]$ векторга $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг икки каррали вектор кўпайтмаси дейилади.

Теорема. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун қуйидаги формула ўринли:

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]=(\vec{a}\,\vec{c}\,)\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b}\,)\vec{c} \qquad (3.3)$$

Исбот. *1-ҳол.* $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ коллиниар бўлсин. $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]$ Агар $\vec{c}$ векторнинг ортини $\vec{c}_0$ билан белгиласак $\vec{c}=|\vec{c}\,|\vec{c}_0$, $\vec{b}=\pm|\vec{b}\,|\vec{c}_0$ у ҳолда $(\vec{a}\,\vec{c}\,)\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b}\,)\vec{c}=\pm|\vec{b}\,||\vec{c}\,|(\vec{a}\,\vec{c}_0)\vec{c}_0\mp|\vec{b}\,||\vec{c}\,|(\vec{a}\,\vec{c}_0)\vec{c}_0=0$. 1-ҳол учун теорема исботланди.

2-ҳол. $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ ноколлиниар бўлсин. $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]\perp[\vec{b}\,\vec{c}\,]$, $[\vec{b}\,\vec{c}\,]$ вектор $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ ётган текислик ортогонал бўлгани учун $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ компланар, яъни битта текисликда ётади. У ҳолда

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]=\alpha\,\vec{b}+\beta\vec{c}\,. \qquad (3.4)$$

$\alpha=(\vec{a}\,\vec{c}\,)$, $\beta=-(\vec{a}\,\vec{b}\,)$ эканлигини исботлаш қолди. $\alpha=(\vec{a}\,\vec{c}\,)$ ни исботлаймиз.

$\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар ётган текисликни Т билан, $\vec{c}$ векторга перпендикуляр Т да ётувчи бирлик векторни $\vec{e}$ билан $\vec{g}$ – орқали Т га перпендикуляр $\vec{e}\,\vec{c}\,\vec{g}$ ўнг учлик ташкил ётувчи бирлик векторни белгилайлик у ҳолда маълум теоремага кўра

$$[\vec{b}\,\vec{c}\,]=pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|\vec{g} \qquad (3.5)$$

$\vec{c}_0$ — $\vec{c}$ векторнинг орти бўлсин. $\vec{e}\,\vec{c}_0\,\vec{g}$ векторлар тўғри бурчакли декарт координата ташкил этади. У ҳолда $\vec{a}$ векторни $\vec{e}$, $\vec{c}_0$, $\vec{g}$ векторлар орқали ёйиш мумкин. $\vec{a}=pr_{\vec{e}}\,\vec{a}\,\vec{e}+pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\,\vec{c}_0+pr_{\vec{g}}\,\vec{a}\,\vec{g}$ ни (3.5) га кўпайтирамиз ва $[\vec{e}\,\vec{g}\,]=-\vec{c}_0$, $[\vec{g}\,\vec{g}\,]=0$, $[\vec{c}_0\,\vec{g}\,]=\vec{e}$ эканлигини ҳисобга олсак $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}\,]]=-\vec{c}_0\;pr_{\vec{e}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|+pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|\vec{e}$. (3.4) олиб бориб қўямиз

$$\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}=-\vec{c}_0\;pr_{\vec{e}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|+pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|\vec{e} \qquad (3.6)$$

(3.6) ни $\vec{e}$ векторга скаляр кўпайтирамиз

$$\alpha\,(\vec{b}\,\vec{e}\,)+\beta(\vec{c}\,\vec{e}\,)=-(\vec{c}_0\,\vec{e}\,)\,pr_{\vec{e}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|+pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\;pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|(\vec{e}\,\vec{e}\,)$$

ва $(\vec{c}\,\vec{e})=0$, $(\vec{c}_0\,\vec{e})=0$, $(\vec{e}\,\vec{e})=1$ дан фойдалансак
$\alpha\,(\vec{b}\,\vec{e})= pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\ pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|$ бундан $\alpha|\vec{e}\,|\,pr_{\vec{e}}\,\vec{b}= pr_{\vec{c}}\,\vec{a}\ pr_{\vec{e}}\,\vec{b}\,|\vec{c}\,|$ ва қуйидаги тенгликка эга бўламиз
$\alpha=|\vec{c}\,|\,pr_{\vec{c}}\,\vec{a}=(\vec{a}\,\vec{c}\,)$

Худди шундау $\vec{c}$ ва $\vec{b}$ ларнинг ўрнини алмаштириб $[\vec{a}\,[\vec{c}\,\vec{b}\,]]=-[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]]$ ни ҳисобга олиб юқоридаги мулоҳазаларни қайтариб $\beta=-(\vec{a}\,\vec{b}\,)$ эканлигини исботлаш мумкин. Теорема исботланди.

IV БОБ.

ТЕКИСЛИКДА ВА ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

T текисликда декарт координаталар системаси киритилган бўлиб, L чизиқ берилган бўлсин. Қуйидаги тенгликни қарайлик:

$$F(x, y)=0 \qquad (4.1)$$

Таъриф: (4.1) тенглама L чизиқнинг тенгламаси дейилади, агар L чизиқдан олинган ҳар бир нуқтанинг координаталари (4.1) тенгламани қаноатлантирса ва L чизиқдан ташқаридан олинган бирорта ҳам нуқтанинг координаталари шу тенгламани қаноатлантирмаса.

Агар (4.1) тенглама L чизиқнинг тенгламаси бўлса, L чизиқ шу тенглама билан аниқланади деймиз. Шундай тенгламалар мавжудки улар ҳеч қандай нуқталарнинг геометрик ўрнини аниқламайди.

М: 1) $x_2+y_2=0$, $x=0$, $y=0$ O (0,0) нуқтани аниқлайди

2) $x_2+\text{й}_2+1=0$ ҳеч бир нуқтани ҳам аниқламайди.

Текисликда аналитик усулда берилган чизиқларни бир нечта грухларга ажратилади:

Таъриф: L чизиқ алгебраик дейилади, агар унинг тенгламаси F(x, y)=0 бўлиб Ф(x, y) алгебраик кўпҳад бўлса, Ф(x, y) алгебраик кўпҳад бўлмаса L чизиқ трансендент дейилади.

Таъриф: Алгебраик чизиқ n – тартибли чизиқ дейилади агар F(x, y) n – тартибли кўпҳад бўлса.

Биз аналитик геометрия курсида 1 ва 2-тартибли алгебраик чизиқларни ўрганамиз.

Тўғри чизиқнинг текисликдаги тенгламалари.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси .

Теорема: Текисликда L тўғри чизиқ ва Oxy фиксирланган декарт координаталари берилган бўлсин. У холда L тўғри чизиқ шу системадаги 1-тартибли тенглама ёрдамида аниқланади.

Исбот: Агар Oxy координаталар системаси фиксирланган бўлмаса уни биз шундай танлашимиз мумкин Ox *L* тўғри чизиқ билан устма-уст, Oy ўнга перпендикуляр қилиб, у ҳолда $y=0$ *L* тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

Oxy фиксирланган декарт координаталар системаси бўлсин.

$$Ax+By+C=0 \qquad (4.2)$$

тўғри чизиқ тенгламаси эканлигини исботлаймиз.

A, B, C-сонлар бирортаси нолдан фарқли. Бирор $N_0(x_0,\breve{u}_0)$ нуқта тенгламани қаноатлантирсин, яъни

$$Ax_0+By_0+C=0 \qquad (4.3)$$

(4.2) тенгламадан (4.3) ни айриймиз

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (4.4)$$

(4.4) тенглама бирор тўғри чизиқ тенгламаси эканлигини исботлаш етарли. (4.4) тенглама N_0 нуқтадан ўтувчи $\overline{q}\{A;\ B\}$ нолдан фарқли векторга перпендикуляр тўғри чизиқ бўлади, чунки ихтиёрий $N(x,\ y)$ тўғри чизиқда ётса $\overline{N_0N}\ (x-x_0,\ y-y_0)$ ва $\overline{q}\{A;\ B\}$ перпендикуляр бўлиши учун скаляр кўрайтма нолга тенг.

Агар $N(x,\ y)$ тўғри чизиқда ётмаса (4.4) тенгламани қаноатлантирмайди.

4.4) тенлама тўғри чизиқнинг бирортаси нолдан фарқли $\overline{q}\{A;\ B\}$ перпендикуляр ихтиёрий коэффициентли умумий тенгламаси дейилади.

$\overline{q}\{A;\ B\}$ векторга тўғри чизиқнинг нормал вектори дейилади.

Тўғри чизиқнинг тўла тенгламаси. Кесмада тўғри чизиқ тенгламаси

(4.4) тенгламанинг барча коэффициентлар A, B, C нолдан фарқли бўлса, (4.4) тенгламага тўғри чизиқнинг тўла тенгламаси дейилади, агар бирортаси нол бўлса тўла бўлмаган тенламаси дейилади.

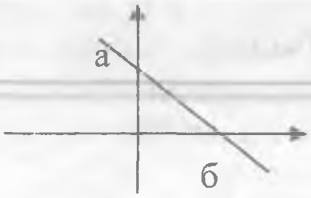
Тўла бўлмаган тенгламаларнинг ҳар хил ҳолларини ҳараб чиқайлик:

1) $C=0$, $Ax+By=0$ тенглама координата бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар.
2) $B=0$, $Ax+C=0$ Оy ўқига параллел тўғри чизиқ.
3) $A=0$, $By+C=0$ Оx ўқига параллел чизиқ.
4) $B=0$, $C=0$, $Ax=0$ тенглама Оy ўқини аниқлайди.
5) $A=0$, $C=0$, $By=0$ тенглама Оx ўқини аниқлайди.

$$Ax+Бy=-C$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4.5)$$



(4.5) тенгламага тўғри чизиқнинг кесмадаги тенгламаси дейилади.

Агар тўғри чизиқнинг кесмадаги тенгламаси берилган бўлса уни графигини чизиш осонлашади.

Тўгри чизиқнинг каноник тенгламаси

Ҳар қандай нолдан фарқли берилган тўғри чизиққа параллел векторга, шу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

Қуйидагича масалани йечайлик: $N_1(x_1,\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\overline{q}\{l,\ m\}$ йўналтирувчи векторли тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

Ихтиёрий $N(x,\ y)$ тўғри чизиқда ётувчи (1). У ҳолда $\overline{q}\{x-x_1,\ y-y_1\}$ вектор ва $\overline{q}\{l,\ m\}$ векторлар коллинеар, яъни

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m} \qquad (4.6)$$

(4.6) тенгламага тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси дейилади.

Еслатма. l ва m лардан бирортаси нолга тенг бўлса у ҳолда (4.6)ни $m(x-x_1)=l(y-y_1)$ каби деб олиш керак, яъни N: $l=0$ бўлса $x-x_1=0$, $x=x_1$

Иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$N_1(x_0, x_1)$ ва $N_2(x_2, x_2)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси тузамиз. У ҳолда $\overline{q}\,\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади у ҳолда иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

бўлади.

Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=t \qquad x-x_1=lt, \quad y-y_1=mt$$

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \qquad (4.7)$$

(4.7) тенглама тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади.

Агар ϑ ни бирор бошланғич даки?адан кейин ўтган вақт деб олсак, (4.7) тенглама материал нуқтанинг ҳаракатини беради, яъни тўғри чизиқ бўйлаб $\vartheta=\sqrt{l^2+m^2}$ ўзгармас тезлик бўлади.

Бурчак коэффициентли тўғри чизиқ

Ох ўқига параллел бўлмаган тўғри чизиқни ҳарайлик
А-тўғри чизиқнинг Ох ўқи билан кесишиш нуқтаси
N-Ох ўқида А нуқтадаги Ох ўқи йўналиши томондан олинган нуқта.

Р-тўғри чизиқдаги Ой ўқ йўналиши томондан олинган нуқта.

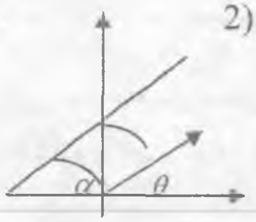
α-тўғри чизиқнинг Ох ўқига егилиш бурчаги.

Агар тўғри чизиқ Ох ўқига параллел бўлса у ҳолда $\alpha=0$ бўлади.

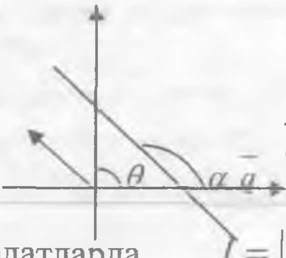
Тўғри чизиқнинг Ох ўқига егилиш бурчагининг тангенсига тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти дейилади. Агар бурчак коэффициенти к билан белгиласак $k=tg\alpha$ бўлади.

Агар тўғри чизиқ Ох ўқига параллел бўлса ва $\bar{q}=\{l,m\}$ йўналтирувчи вектори бўлса, у ҳолда унинг бурчак коэффициенти $k=\frac{m}{l}$ бўлади. α-тўғри чизиқнинг Ох ўқига эгилиш бурчаги, θ - $\bar{q}$ нинг эгилиш бурчаги бўлсин.

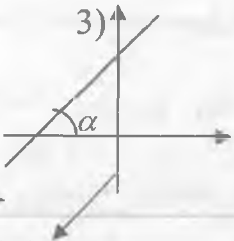
1)



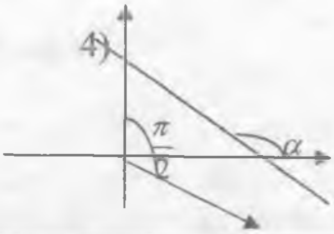
2)



3)



4)



1) ва 2) ҳолатларда $l=|q|\cos\theta$, $m=|\bar{q}|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=|\bar{q}|\sin\theta$

$$k=tg\alpha=tg\theta=\frac{m}{l}$$

3) ва 4) ҳолатларда $\theta=\pi-\alpha$, $l=|\bar{q}|\cos\theta$, $m=-|\bar{q}|\sin\theta$ ва

$$k=tg\alpha=-tg\theta={}^{m}\!/_{l} \qquad m=|\bar{q}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-|q|\sin\theta$$

$N_1(x_1,\ y_1)$ нуқтадан ўтувчи бурчак коэффициенти k га тенг тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}\Rightarrow y-y_1=\frac{m}{l}(x-x_1)\Rightarrow y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow \qquad (4.8)$$

$$\Rightarrow y=kx+y_1-kx_1\Rightarrow y=kx+b,\quad b=y_1-kx_1,\ y=kx+b$$

(4.8) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

а) L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар умумий тенгламаси билан берилган бўлсин, яъни $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ уларнинг нормал векторлари $\bar{n}_1=\{A_1,B_1\}$ $\bar{n}_2=\{A_2,B_2\}$ *L_1* ва *L_2* тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $\bar{n}_1$ ва $\bar{n}_2$ векторлар орасидаги бурчакка тенг. У ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ деб белгиласак:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{n_1n_2}\right)}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

***L_1* ва *L_2* тўғри чизиқлар параллел бўлса $\bar{n}_1$ ва $\bar{n}_2$ векторлар коллинеар бўлади:** $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлиши учун $\bar{n}_1$ ва $\bar{n}_2$ перпендикуляр бўлиши керак, яъни $A_1A_2+B_1B_2=0$

б) L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар

$\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$ ва $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$ каноник тенгламалар билан берилган бўлсин.

$\overline{q}_1=\{l,m\}$ ва $\overline{q_2}=\{l_2,m_2\}$ векторлар L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари бўлади.

1) φ - L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак бўлсин

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

2) L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

2) L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти

$$l_1l_2+m_1m_2=0$$

в) L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг

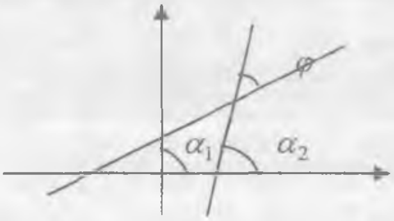
$y=k_1x+b_1$ ва $y=k_2x+b_2$

тенгламалар бурчак коэффициентли тенгламалари бўлсин.

α_1 ва α_2 бурчаклар мос равишда L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг егилиш бурчаклари бўлсин.

$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ у ҳолда

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$



$tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ формула иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчакни topиш формуласи.

Параллеллик шарти: $\varphi=0\Rightarrow tg\varphi=0\Rightarrow x_1=x_2$

Перпендикулярлик шарти: □-мавжуд емас $\Rightarrow 1+k_1k_2=0$

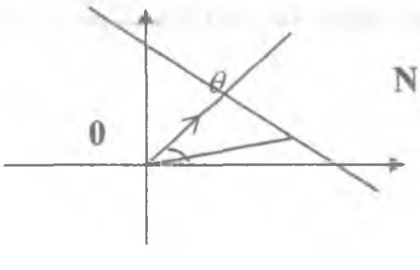
$k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ - перпендикулярлик шарти.

Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

L тўғри чизиқ оламиз п – О нуқтада ўтувчи L перпендикуляр тўғри чизиқ бўлиб. Р L ва п ларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин.

$\overline{n}$ - н тўғри чизиқдаги бирлик P вектор, йўналиши $\overline{OP}$ бўлсин бир ҳил бўлсин.

(агар О ва P устма-уст тушса $\overline{n}$ векторни йўналишини ихтиёрий танлаймиз)



Масала: L тўғри чизиқ тенгламасини 1) $\left|\overline{OP}\right| = p$ ва 2) $\theta(\vec{u},\vec{i}\,) = \theta$ оркали ифодалаймиз.

$\overline{n}$ векторнинг координата ўқидаги проекциялари $\{\cos\theta;\sin\theta\}$

L тўғри чизиқдан N нуқтани оламиз. N нуқта L чизиқда ётиши учун $\overline{ON}$ векторни n ўқидаги проекцияси пр$_n\overline{ON}$ скаляр кўрайтманинг таърифиги кўра $\overline{n}\cdot\overline{ON} = np_{\overline{n}}\overline{ON}\cdot\left|\overline{n}\right| = np_{\overline{n}}\overline{ON}$,

$\overline{ON} = \{x, y\}$ эканлигини ҳисобга олсак

$$x\cos\theta + y\sin\theta = np_{\overline{n}}\overline{ON}$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0 \qquad (4.9)$$

(4.9) тенгламага тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади.

d сони N нуқтадан L тўғри чизиқгача масофа бўлсин.

Таъриф. N нуқтанинг L тўғри чизиққа δ четланиши деб, агар N ва О нуқта L тўғри чизиқдан ҳар-хил томонда ётса d сонига, агар бир томонда ётса- d сонига айтилади.

Агар О координата боши L тўғри чизиқда ётса δ +d га тенг бўлади, агар N нуқта $\overline{n}$ вектор йўналган томонда ётса, акс ҳолда $-d$ га тенг.

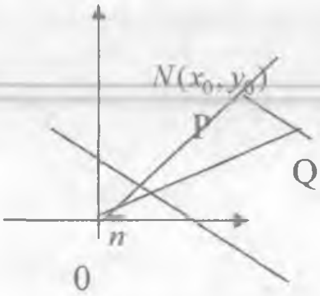
Теорема: Агар L тўғри чизиқ $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ тенглама билан берилган бўлса, N(x_0, y_0) нуктанинг δ учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\delta = x_0\cos\theta + y\sin\theta - p$$

Исботи. $\overline{OQ} - \overline{ON}$ векторнинг н-даги проексияци бўлсин.

PQ – PQ векторнинг катталигига тенг.

δ = PQ=OQ-OP=OQ-p



2 томондан OQ =пр$_n$ $\overline{ON}$ =

$$\overline{n}\cdot\overline{ON} = x_0\cos\theta = y_0\sin\theta$$

$$\delta = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p$$

Натижа: N нуқтадан L тўғри чизиқгача масофа $d = \left|x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p\right|$.

Умумий тенглама билан берилган тўғри чизиқ учун нормал тенгламани келтириб чиҳарайлик. L тўғри чизиқ Ax+By+C=0 тенглама билан берилган бўлсин. Ax+By+C=0 ва $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ тенглама битта тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлса унинг шундай т сони мавжудки: $At = \cos\theta$, $Bt = \sin\theta$, $tC = -p$ $t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Энди еса t ни қандай ишора билан олишини аниқлаб олайлик, $p>0$ бўлгани учун агар $C<0$ бўлса $t=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $C>0$ бўлса $t=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ бўлади.

$t=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ га нормалаштирувчи кўпайтувчи дейилади.

Демак. $Ax+By+C=0$ тўғри чизиқ тенгламасини нормал тенгламага келтириш учун C га қарама-қарши ишора билан олинган нормалаштирувчи кўрайтувчига кўрайтириш керак экан, яъни

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \quad C<0 \text{ бўлса.}$$

Тўғри чизиқлар дастаси

Таъриф._Бир текисликда ётувчи ва битта C нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқларга, маркази C нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастаси дейилади. C нуқтани шу дастани ташкил етувчи ихтиёрий иккита тўғри чизиқ орқали ҳар доим топиш мумкин.

Бу нуқтада маркази $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ тўғри чизиқнинг кесишиши нуқтасида ётувчи тўғри чизиқлар дастасини топиш.

Теорема. $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$ тўғри чизиқлар ҳар-хил C нуқтада кесишувчи тўғри чизиқлар, α ва β -бир вақтда нолга тенг бўлмаган сонлар. У холда

$$\alpha\,(A_1x+B_1y+C_1)+\beta\,(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (3^*)$$

тенглама C нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Бундан ташқари C нуктадан ўтувчи олдиндан берилган ҳар-қандай тўғри чизиқ α ва β ларнинг бирор қийматида (3*) тенглама билан аниқланади.

Исбот. α ва β бир вақтда нолга тенг бўлсин, (3*) тенглама тўғри чизиқ тенгламаси эканлигини аниқлайлик, яъни x ва y олдидаги коеффициент бир вақтда нолга тенг бўла олмаслигини эътиборга олиб топамиз. Шунга кўра

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0$$

бўлади.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\alpha A_1+\beta A_2=0$, $\alpha B_1+\beta B2=0$, $\alpha\neq 0$ деб олсак, у ҳолда $\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\Rightarrow$ $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ тўғри чизиқлар параллел бўлади. Бу еса тўғри чизиқлар кесишади ва устма-уст тушмайди деганидир. Демак $\alpha A_1+\beta A_2$ ёки $\alpha B_1+\beta B_2$ коэффициент бир вақтда нолга тенг емас $\Rightarrow$ (3*) тўғри чизиқ тенгламаси .

$C(x_0,й_0)$ нукта иккита тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси бўлганлиги учун $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_1=0$ $\Rightarrow\alpha\,(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta\,(A_2x_0+B_2y_0+C_1)=0$ $\Rightarrow$ C нуқтанинг координата (3*) тенгламани қаноатлантиради. (3*) тўғри чизиқ билан берилган тенглама С нуқтадан ўтади. С нуқтадан ўтувчи олдиндан берилган тўғри чизиқ α ва β ларнинг бирор қийматида (3*) тенглама билан аниқланишини кўрсатамиз.

М(x^*, y^*) нуқта олдиндан берилган тўғри чизиқдаги С дан фарқли нуқта берилсин. У холда α ва β бир вақтда нолга тенг емаслигини исботлаш етарли М(x^*, y^*) (3*) тенгламани қаноатлантиради, яъни

$$\alpha\,(A_1x^*+B_1y^*+C_1)+\beta\,(A_2x^*+B_2y^*+C_2)=0 \qquad (3^{**})$$

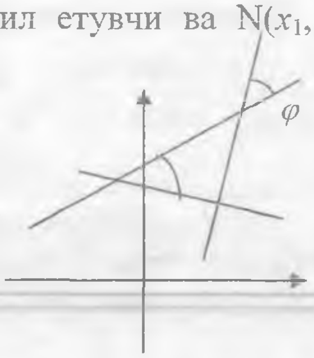
Шу тенгликдаги қавс ичидаги сонлар бир вақтда нол бўла олмайди, чунки бир вақтда нол бўлса $A_1x+B_1y+C_2=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ тўғри чизиқлар М(x^*, y^*) нуқтада кесишиб қолади бундай бўлиши мумкин емас. $A_1x^*=B_1y^*+C_1\neq 0$. У ҳолда берилган $\beta\neq 0$ да, (3) тенгламанинг α коэффициенти:**

$$\alpha=-\frac{A_2x^*+B_2y^*+C_2}{A_1x^*+B_1y^*+C_1}\beta$$

Демак, йўқорида аниқланган α ва β ларда (3*) тенглама М(x^*, y^*) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Текисликда берилган тўғри чизиққа боғлиқ баъзи масалалар

1. Берилган тўғри чизиқ билан φ бурчак ташкил етувчи ва N(x_1, y_1) нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ
$y-y_1=k(x-x_1)$, $x\neq x_1$, $y=kx+(y_1-k_1x_1)$



$$\pm tg\varphi=\frac{k-k_1}{1+kk_1}\Rightarrow k-k_1=\pm tg\varphi\pm kk_1tg\varphi\Rightarrow k=\frac{k_1\pm tg\varphi}{1\mp k_1tg\varphi}$$

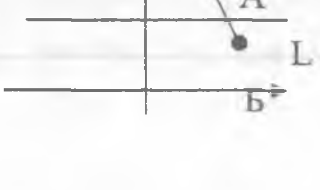
1) $y-y_1=\dfrac{k_1+tg\varphi}{1-k_1tg\varphi}(x-x_1)$ ва $y-y_1=\dfrac{k_1-tg\varphi}{1+k\ tg\varphi}$ агар $k_1tg\varphi\neq\pm 1$

2) $y-y_1=\dfrac{k_1+tg\varphi}{2}(x-x_1)$ ва $x=x_1$ агар $k_1tg\varphi=-1$

3) $x=x_1$ ва $y-y_1=\dfrac{k_1-tg\varphi}{2}(x-x_1)$ агар $k_1tg\varphi=1$

2. Берилган тўғри чизиқлар биссектрисаси тенгламаси.
$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ ва $x\cos\theta_1+y\sin\theta_2-p_1=0$ Бу тенгламаларнинг чар қисимдаги М(х,й) нуқтанинг δ_1 ва δ_2 егилишлари бўлади, у холда М нуқтани биссиктриса деб олсак
$|\delta_1|=|\delta_2|\Rightarrow(x\cos\theta+y\sin\theta-p)\pm(x\cos\theta_1+y\sin\theta_2-p_1)=0$ тенгламалар биссектриссаларнинг тенгламалари бўлади.

3. Тўғри чизиқнинг АВ кесмани кесиш шарти:
δ_A ва δ_B ҳар-хил ишорали бўлиши керак.



4. Учта тўғри чизиқнинг битта нуқтада кесишиши шарти.

$A_1x + B_1x + C_1x = 0$ (1) $\quad$ $A_2x + B_2x + C_2x = 0$ (2) $\quad$ $A_3x + B_3x + C_3x = 0$ (3)

тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишган бўлсин. (1), (2), (3) тўғри чизиқлар кесиши учун.

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_3 B_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_2 B_2 \\ A_3 B_3 \end{vmatrix} \qquad (!)$$

бирортаси нолдан фарқли бўлиши учун $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ тўғри чизиқ, 2-та тўғри чизиқ орқали ифодалаш мумкин, яъни α ва β бирортаси нолдан фарқли сонлар мавжудки

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

$$\begin{array}{lll} & \alpha A_1 + \beta B_1 = -\gamma A_3 & \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma A_3 = 0 \\ \exists\gamma & \alpha B_2 + \beta B_2 = -\gamma B_3 \Rightarrow & \alpha B_2 + \beta B_2 + \gamma B_3 = 0 \Rightarrow \alpha\beta\gamma \\ & \alpha C_1 + \alpha B_2 = -\gamma C_3 & \alpha C_1 + \alpha B_2 + \gamma C_3 = 0 \end{array}$$

лардан барчаси нолдан фарқли бўлганлиги учун

$$\begin{vmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \\ C_1C_2C \end{vmatrix}_3 = 0$$

Демак 3та тўғри чизиқ битта нуқтада кесишиши учун

$$\begin{vmatrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_2B_3 \\ C_1C_2C \end{vmatrix}_3 = 0$$

ва (!) детерменантларнинг бирортаси нолдан фарқли бўлиши зарур ва етарли.

Текисликнинг ҳар хил кўринишдаги тенгламалари

Текисликнинг умумий тенгламаси

1°. Агар фазода ихтиёрий Т текислик ва фиксирланган ихтиёрий Oxyz декарт координаталар системаси берилган бўлса, у ҳолда Т текислик бу системада биринчи тартибли тенглама билан аниқланади.

2°. Агар фазода фиксирланган ихтиёрий Oxyz декарт координаталар системаси бўлса, у ҳолда x, y, z га боғлиқ уч ўзгарувчили биринчи тартибли тенглама текислик тенгламаси бўлади.

1° тасдиқни исботлаймиз. Бу тасдиқни исботлаш учун Т текислик бирор координата системасида 1-даражали тенглама билан аниқланишини исботлашимиз йетарли, чунки агар текислик бирор координаталар системасида биринчи тартибли алгебраик тенглама билан аниқланса, у ихтиёрий координата системасида ҳам биринчи тартибли алгебраик тенглама билан аниқланади. Демак, Ох ва Оу ўзларини Т текисликда, Oz ўқини текисликка перпендикуляр қилиб танлаймиз. У ҳолда Т текислик тенгламаси биринчи даражали z = 0 тенглама бўлади. Т текисликнинг ҳар бир нуқтаси шу тенгламани қаноатлантиради ва Т текисликдан ташқаридаги бирор нуқта шу тенгламани қаноатлантирмайди.

2° тасдиқни исботи. Ихтиёрий Oxyz координаталар системасини оламиз ва қуйидаги тенгламани қараймиз.

$$Ax + Bx + Cz + D = 0. \tag{4.10}$$

A, B, C бирортаси нолдан фарқли сонлар тенгламани бирорта x_0, y_0, z_0 – ечими мавжуд, яъни $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг координаталари (4.10) тенгламани қаноатлантиради:

$$Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$A(x\text{-}x_0) + B(x\text{-}x_0) + C(z\text{-}z_0) = 0 \tag{4.11}$$

(4.11) тенглама бирор текисликнинг тенгламаси эканлигини исботлаймиз (4.11) тенглама $M0$ нуқтадан ўтувчи $\overline{n}(A;B;C)$ векторга перпендикуляр Т текислик тенгламаси эканлигини исботлаймиз.

$M(x, y, z)$ нуқта Т текисликда ётсин, у ҳолда бу нуқтанинг координаталари (4.11) тенгламани қаноатлантиради, чунки $\overline{n}(A;B;C)$ ва $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ векторлар перпендикуляр бўлади, яъни уларнинг

$$Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 = 0$$

(4.11) скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Агар $M(x,y,z)$ нуқта Т текисликда ётмаса, у ҳолда бу нуқтанинг коодинаталари (4.11) тенгламани қаноатлантирмайди, чунки $\bar{n}$ ва $\overline{M_0M}$ векторлар перпендикуляр бўлмайди, яъни (4.11) скалярр кўрайтма нолга тенг бўлмайди.

Таъриф. *A, B, C* сонларидан бирортаси нолдан фарқли (4.11) тенгламага, Т текисликнинг ихтиёрий *A, B, C* ва D коэффициентли умумий тенгламаси дейилади. (4.11) тенглама билан аниқланган текислик $\bar{n}(A;B;C)$ векторга перпендикуляр экан. Бу векторга (4.11) тенглама билан аниқланган текисликнинг нормал вектори дейилади.

Агар $Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$ ва $Ax_1 + Bx_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ тенгламага битта текисликнинг тенгламаси бўлса, у ҳолда шундай t сони мавжудки, $A_1 = At$, $B_1 = Bt$, $C_1 = Ct$, $D_1 = Dt$ бўлади. $\bar{n}(A;B;C)$ ва $\bar{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ векторлар коллениар бўлади, яъни $\exists\ t\ .\ \bar{n}_1 = t\bar{n}$ => $A_1 = At$, $B_1 = Bt$, $C_1 = Ct$. Бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта текисликда ётсин. У ҳолда қуйидаги тенгламаларни t – га кўпайтирамиз ва биринчисидан иккинчиси айириб топамиз.

$$Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$Ax_1 + Bx_1 + Cz_1 + D_1 = 0$$

$$(A_1 - At)x_0 + (B_1 - Bt)y_0 + (C_1 - Ct)z_0 + (D_1 - Dt) = 0 \quad => \quad D_1 = Dt$$

Текисликнинг тўла тенгламаси. Текисликнинг кесмадаги тенгламаси

Агар (4.11) текисликнинг умумий тенгламасининг барча коэффициентлар нолдан фарқли бўлса, (4.11) тенгламага текисликнинг тўла тенгламаси, акс ҳолда чала тенгламаси дейилади.

Чала тенгламаларни ўрганиб чиқайлик.

1. $D = 0$ $Ax + By + Cz = 0$ координата бошдан ўтувчи текислик тенгламаси.
2. $A = 0$ $By + Cz + D = 0$ Ox ўқига параллел текислик тенгламаси.
3. $B = 0$ $Ax + Cz + D = 0$ Oy ўқига параллел текислик тенгламаси.
4. $C = 0$ $Ax + By + D = 0$ Oz ўқига параллел текислик тенгламаси.
5. $A = 0, B = 0$ $Cz + D = 0$ Oxy текисликка параллел текислик тенгламаси.
6. $A = 0, C = 0$ $By + D = 0$ Oxz текисликка параллел тенгламаси.
7. $B = 0, C = 0$ $Ax + D = 0$ Oyz текисликка параллел тенгламаси.
8. $A = 0, B = 0, D = 0$ $Cz = 0$ Oxy текислик тенгламаси.
9. $A = 0, C = 0, D = 0$ $By = 0$ Oxz текислик тенгламаси.
10. Â = 0, C = 0, D = 0 Àõ = 0 Oyz текислик тенгламаси.

$Ax + Bx + Cz + D = 0$ текисликнинг тўла тенгламасини қарайлик.

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1 \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Охирги тенгламага текисликнинг кесмадаги тенгламаси дейилади.

Текисликлар орасидаги бурчакни топиш. Текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

T_1 ва T_2 текисликлар қуйидагича умумий кўринишда берилган бўлсин:

$$T_1:\ Ax_1 + Bx_1 + Cz_1 + D_1 = 0$$

$$T_2:\ Ax_2 + Bx_2 + Cz_2 + D_2 = 0$$

Улар орасидаги бурчак шу текисликларнинг $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ ва $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ нормал векторлар орасидаги бурчакка тенг.

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (4.12).$$

T_1 ва T_2 текисликлар орасидаги бурчак (4.12) формула билан аниқланади.

T_1 ва T_2 текисликларнинг параллелик шарт $\overline{n_1}$ ва $\overline{n_2}$ векторларнинг параллелик шарти билан устма-уст тушади, яъни

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\ .$$

T_1 ва T_2 текисликлар перпендикуляр бўлса, яъни $\varphi = 90^0$ =>
$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \perp$ шарти.

Битта тўғри чизиқда ётмайдиган 3 та нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2\ ;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3\ ;\ z_3)$ нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайдигани учун $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ векторлар ноколлениар бўлади $M(x;\ y;\ z)$ нуқта M_1, M_2, M_3 нуқталар билан битта текисликда ётиши учун $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ векторлар компланар бўлиши зарур, яъни шу векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Текисликнинг нормал тенгламаси. Нуқтанинг текисликдан узоқлашиши(четлашиши)

Бирор Т текисликни қарайлик. Координата бошидан чиқувчи Т текисликка перпендикуляр $\perp$ n тўғри чизиқни ўтказамиз. Р орқали Т ва n тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини белгилаймиз, $\overline{n}$ орқали n тўғри чизиқдаги бирлик вектор белгилаймиз. $\overline{n}$ нинг йўналишини $\overline{OP}$ нинг йўналиши билан бир-хил қилиб танлаймиз. Т текислик тенгламасини : 1) $\overline{OP}$ кесманинг узилиши Р; 2) α, β, γ

$\overline{n}$ векторнинг Ox, Ой, Oz ўқлари билан ҳосил қилган бурчаги орқали ифодалайлик.

$\overline{n}(\cos\alpha;\cos\beta,\cos\gamma)$ N(x; y; z) нуқтанинг T текисликдаги ихтиёрий нуқта берилсин. $\overline{ON}$ векторнинг $\overline{n}$ даги проекцияси p – га тенг

$$pr_n\overline{ON} = \overline{n}*\overline{ON} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

$$x\cos\alpha + \text{й}\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (4.13)$$

(4.13) тенгламага текисликнинг нормал тенгламаси дейилади.

d сони деб N нуқтадан T текисликкача бўлган масофани белгилайлик. N нуқтаннинг T текисликдан δ четлашиши деб, агар N нуқта ва O координаталар боши T текисликдан ҳар-ҳил томонда ётса d сонига, агар бир томонда ётса $-d$ сонига айтилади.

Агар координаталар боши OT текисликда ётса, четланиш d га тенг , агар N нуқта $\overline{n}$ векторнинг йўналиши томонда ётган бўлса, акс ҳолда $-d$ га тенг .

Теорема 3. Агар (4.13) T текисликнинг нормал тенгламаси бўлса, $N(x_0, y_0, z_0)$ нуқтанинг T текисликдан δ четланиши қуйидагича аниқланади:

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p = 0$$

δ = PQ PQ — $\overline{PQ}$ векторнинг катталиги δ = PQ = OQ – OP=OQ – p

$$OQ = pr_n\overline{ON} = \overline{n}*\overline{ON} = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$$

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + y_0\cos\gamma - p$$

$N(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан (3.) тенглама билан берилган текисликкача масофа
$d = |\delta| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$га тенг бўлади.

Текисликнинг умумий тенгламаси нормал тенгламага келтириш.

$Ax + Bx + Cz + D = 0$ текисликнинг умумий тенгламаси ва x $\cos\alpha$ + й $\cos\beta$ + z $\cos\gamma$ – p = 0 нормал тенгламаси берилган бўлсин. Бизга маълумки, агар иккита тенглама битта тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлса, шундай t сони топиладики, $\cos\alpha$ = At , $\cos\beta$ = Bt, $\cos\gamma$ = Ct, p = – Dt бўлади. $t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (3) p>0 бўлгани учун t нинг ишораси D нинг ишорасига қарама – қарши олинади. $Ax + Bx + Cz + D = 0$ текисликнинг умумий тенгламаси (4.13) нормал тенгламага келтириш учун D нинг ишорасига қарама – қарши нормаллаштирувчи (4.13) кўпайтувчига кўпайтирилади.

L тўғр чизиқдан ўтувчи барча текисликларга L марказли текисликлар дастаси дейилади.

Теорема. Агар $Ax_1 + Bx_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ ва $Ax_2 + Bx_2 + Cz_2 + D_2 = 0$ тенгламалар ҳар – хил параллел бўлмаган L тўғри чизиқдан ўтувчи текисликларнинг тенгламаси, α ва β — бир вақтда нолга тенг бўлмаган сонлар бўлса, у ҳолда

$$\alpha\ (Ax_1 + Bx_1 + Cz_1 + D_1\ ) + \beta\ Ax_2 + Bx_2 + Cz_2 + D_2\ ) = 0 \quad (4.14)$$

тенглама L тўғр чизиқдан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади. Бундан ташқари олдиндан берилган L тўғр чизиқдан ўтувчи ҳар қандай текислик α ва β ларнинг бирор қийматида (4.14) тенглама билан аниқланади. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи барча текисликларга маркази M_0 нуқтада бўлган текисликлар оиласи дейилади.

Маркази M_0 нуқтада бўлган текисликлар оиласининг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

бунда, A, B, C — ихтиёрий сонлар. Бу тасдиқнинг исботи текисликнинг $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтадан ўтиши ва $\overline{n}(A;B;C)$ векторга перпендикуляр $\perp$ бўлишидан келиб чиқади.

Фазода тўғри чизиқ тенгламаси

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтувчи ва йўналтирувчиси $\overline{q}=\{l, m, n\}$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузамиз. $M(x, y, z)$ нуқта шу қаралаётган тўғри чизиқда ётиши учун $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$ вектор билан $\overline{q}=\{l, m, n\}$ вектор коллинеар бўлиши керак. Шу векторларнинг коллинеарлик шартидан қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}. \qquad (4.15)$$

Одатда (4.15) тенглама тўғри чизиқнинг фазодаги каноник тенгламаси дейилади.

Шунингдек фазода параллел бўлмаган иккита текислик тенгламасидан ташкил топган

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4.16)$$

тенглама ҳам фазода тўғри чизиқ тенгламасини ифодалайди. Текисликлар параллел бўлмаганлиги учун шу текисликларнинг нормал векторлари $\overline{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\overline{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ векторлар коллинеар бўлмайди. Шунинг учун $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлади. Шу детерминантлардан $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ детерминантни нолдан фарқли деб, $z-$нинг ўрнига ихтиёрий z_1- ни қўйиб, (4.16) ни икки ўзгарувчили тенгламалар системасига келтирамиз. Ушбу тенгламалар системасини ечиб,

$$x_1=\frac{B_1(C_2z_1+D_2)-B_2(C_1z_1+D_1)}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$(4.17)$$

$$y_1=\frac{A_2(C_1z_1+D_1)-A_1(C_2z_1+D_2)}{A_1B_2-A_2B_1}$$

ечимларини топамиз. Қулайлик учун $z_1=0$ десак, у ҳолда шу тўғри чизиқда ётган $M_1\left(\frac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \frac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1}, 0\right)$ нуқтани аниқлаймиз. Энди (4.16) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\overline{q}=\{l, m, n\}$ – векторни координаталарини аниқлаймиз. Маълумки $\overline{q}=\{l, m, n\}$ вектор текисликларнинг $\overline{n}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\overline{n}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ нормал векторларига перпендикуляр бўлади. Демак, $\overline{q}=[\overline{n}_1, \overline{n}_2]$. Векторлар вектор кўпайтмасининг хоссаларига кўра,

$$l=B_1C_2-C_2B_1,\ m=C_1A_2-C_2A_1,\ n=A_1B_2-A_2B_1$$

Шунга кўра (4.16) тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси қуйидагича аниқланади:

$$\frac{x-\dfrac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}}{B_1C_2-C_2B_1}=\frac{y-\dfrac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1}}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{z}{A_1B_2-A_2B_1}$$

Иккита ҳар хил $M_1(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ ва $M_2(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Қидиралаётган L тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\overline{q}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1\,,\,y_2-y_1\,,\,z_2-z_1\}$ га тенг бўлади. $M_1(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа чексиз кўп нуқта ётади. Шу нуқталардан ихтёрий $M(x,\,y,\,z)$ нуқтани оламиз. Унда $\overline{M_1M}=\{x-x_1\,,\,y-y_1\,,\,z-z_1\}$ бўлиб, бу $\overline{M_1M}=\{x-x_1\,,\,y-y_1\,,\,z-z_1\}$ вектор билан $\overline{q}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1\,,\,y_2-y_1\,,\,z_2-z_1\}$ вектор коллинеардир. Шунга кўра, векторларнинг коллинеарлигидан L тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини топамиз

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Фазода берилган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси

L тўғри чизиқ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ каноник тенглама билан берилган бўлсин. Унда

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t\Rightarrow\begin{cases}x=x_1+lt\,,\\ y=y_1+mt\,,\\ z=z_1+nt\,.\end{cases}\qquad(4.18)$$

бунда t – параметр бўлиб, $-\infty<t<+\infty$ бўлади. Одатда (4.18) тенгламага фазода берилган L – тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади. Борди – ю, t – параметрни вақт деб олинса, унда маълум t – вақтдан кейин моддий нуқта шу L – тўғри чизиғи бўйича ҳаракатланиб, $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ тезликка эришади.

Фазода берилған тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топиш. Тўғри чизиқларнинг параллелик ва перпендикулярлик шартлари

Фазода иккита тўғри чизиқ ўзларининг каноник тенгламалари билан берилган бўлсин. Яъни

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ ва } L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари мос равишда $q_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ ва $q_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ га тенг. Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг таърифига кўра $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = |\bar{q}| \cdot |\bar{q}| \cos\varphi$ бўлиб, бундан

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{q}_1, \bar{q}_2)}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_1|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + m_2^2}} \tag{4.19}$$

бўлишини топамиз. Ушбу (4.19) формулага фозада берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топиш формуласи дейилади.

Тўғри чизиқларнинг параллелик шарти:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{4.20}$$

Перпендикулярлик шарти:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{4.21}$$

Иккита тўғри чизиқнинг битта текисликка тегишли бўлиш шарти

Иккита тўғри чизиқ ўзининг каноник тенгламаларибилан берилган бўлсин:

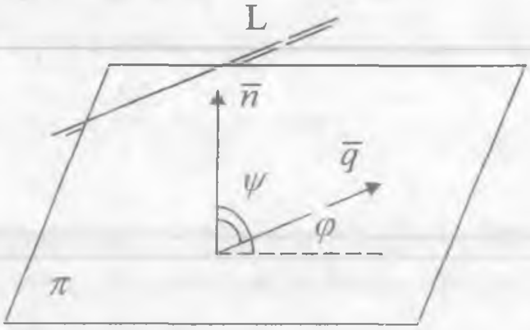
$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ ва } L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Шу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи $\bar{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$ ва $\bar{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ векторлари ҳамда шу тўғри чизиқлар ўтадиган нуқталар орқали ўтувчи $\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ векторларни қараймиз. Бу векторлар битта текисликка ётиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Векторлар ўзларининг координаталари билан берилганда векторлар аралаш кўпайтмасининг декарт координаталар системасидаги ёйилмаси тушунчасидан фойдаланиб, топамиз

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.22}$$

Бу (4.22) шарт берилган L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг битта текисликка тегишли бўлиш шартидир. Агар L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар (4.22) шартни қаноатлантирса, унда улар ё кесишади, ёки параллел бўлади. L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар битта нуқтада кесишиши учун $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ тенгликлардан бирининг бузулиши зарур ва етарлидир.

Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак. Тўғри чизиқнинг текисликка параллел ва перпендикуляр бўлиш шарти



Фазода $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ текислик ва $L : \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Чизмадаги $\varphi-$бурчак текислик ва тўғри чизиқ орасидаги бурчак, $\psi-$бурчак эса қаралаётган $\pi-$текисликнинг $\overline{n}=\{A, B, C\}$ нормал вектори билан $L-$тўғри чизиқнинг $\overline{q}=\{l, m, n\}$ йўналтирувчи вектори орасидаги бурчак. Шунга кўра $(\overline{q}, \overline{n})=|\overline{q}|\cdot|\overline{n}|\cos\psi$ бўлиб, бунда $\cos\psi=\sin\varphi$. Демак,

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

формула текислик ва тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласи.

Параллелик шарти: $Al+Bm+Cn=0$.

Перпендикулярлик шарти: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

$L : \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиқнинг $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ текисликка тегишли бўлиш шарти

Қаралаётган шарт қуйидаги иккита шарт орқали аниқланади:

$$\begin{aligned} &Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ &Al+Bm+Cn=0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Биринчи тенглик $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтанинг текисликка ётиш шарти, иккинчи тенглик эса тўғри чизиқнинг текисликка параллелик шарти.

Тўғри чизиқлар дастаси

Таъриф. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар тўпламига шу $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар дастаси дейилади (бунда $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта тўғри чизиқларнинг маркази).

Шу $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқларнинг дастасининг умумий тенгламаси қуйидагича аниқланади:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \qquad (4.24)$$

бунда $l, m, n -$сонлар ихтиёрий сонлар

Фазода тўғри чизиқ ва текисликларга оид баъзи бир масалалар

1. **Фазода берилган учта текисликнинг битта ва фақат битта нуқтада кесишиш шарти.**

Фазода $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ва $\pi_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ текислик берилган бўлсин. Ушбу текисликлар битта нуқтада кесишиши учун шу текислик тенгламаларидан тузилган

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиши, яъни

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

2. Кесушувчи иккита текисликларнинг биссектриса тенгламаси .

Иккита текислик ўзларининг қуйидаги кўринишдаги нормал тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\pi_1: x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0,$$
$$\pi_1: x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0.$$

Ихтиёрий берилган $M(x, y, z)$ нуқтанинг биринчи текисликдан четланишини δ_1 деб, иккинчи текисликдан четланишини δ_2 деб белгилайлик. У ҳолда мос равишда $\delta_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1$ ҳамда $\delta_2 = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2$ бўлади. Шунингдек $M(x, y, z)$ нуқта қаралаётган икки текисликларнинг биссектриса текислигига ётиши учун δ_1 ва δ_2 - ларнинг модуллари тенг ишоралари қарама – қарши бўлиши керак. Шунга кўра $|\delta_1| = |\delta_2|$ муносабатдан фойдаланиб, қидирилаётган текисликларнинг бессектриса тенгламаси қуйидагича аниқлаймиз:

$$(x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1) \pm (x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2) = 0$$

3. Берилган текисликнинг АВ кесмани кесиш шарти.

Берилган текисликнинг АВ кесмани кесиш шарти нуқтанинг текисликдан четланишидан фойдаланиб аниқланади. Шу сабабли агар А нуқтанинг текисликдан четланиши δ_A, В нуқтанинг текисликдан четланишини δ_B дейилса, унда δ_A ва δ_B - лар турли хил ишорали бўлса, текислик АВ кесма билан кесишади, бир хил ишорали бўлса кесишмайди.

4. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуктадан ўтувчи $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламаси.

Масаланинг ечими $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$ тенгламадан иборат бўлади. . Чунки тўғри чизиқ нинг йўналтирувчи вектори текисликнинг $\bar{n} = \{A, B, C\}$ нормал вектор билан параллел бўлади. Хусусан тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида текисликнинг нормал вектори олинади.

5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтувчи $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси.

Қидирилаётган текислик тенгламаси қуйидаги тенглама орқали аниқланади:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

6. $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.

Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини қидирилаётган текисликнинг нормал вектори сифатида олиш мумкин. Шунга кўра текислик тенгламаси қуйидаги тенглама орқали аниқланади:

$$l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0$$

7. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ **тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиққа ётмаган** $M(x_0, y_0, z_0)$ **нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси.**

Текислик $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқта орқали ўтганлиги учун текислик тенгламасини $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ кўринишда қидирамиз. Шунингдек текислик берилган тўғри чизиқ орқали ўтганлиги учун шу тўғри чизиқдаги ётган нуқтанинг координаталари ҳам шу текислик тенгламасини қаноатлантиради. Яъни $A(x_1-x_0) + B(y_1-y_0) + C(z_1-z_0) = 0$ бўлади. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори текисликнинг нормал векторига перпендикуляр бўлади. Шунга кўра $Al + Bm + Cn = 0$ тенглик ўринлидир. Демак

$$\begin{cases} A(x_1-x_0) + B(y_1-y_0) + C(z_1-z_0) = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$$

Тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Тенгламалар системасида учта номаълум иккита тенглама. Шунинг учун битта номаълумни бир деб олиб, иккита номаълумли иккита тенгламадан иборат тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечиб номаълумларни топамиз. Топилган номаълумларни дастлабки текислик тенгламасига қўйсак масаланинг ечими келиб чиқади.

8. $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ **тўғри чизиқдан ўтувчи** $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ **тўғри чизиққа параллел текислик тенғламаси.**

Берилган шартларни қаноатлантирувчи текислик тенгламасини $Ax + By + Cz + D = 0$ кўринишда қидирамиз. Биринчи тўғри чизиқ текисликка ётганлиги учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0.$$

Иккинчи тўғри чизиқ текисликка параллел бўлганлиги учун $Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$ тенглик ўринлидир Топилган тенгликлардан

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0, \\ Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Тенгламалар системаси тўртта номаълум учта тенглама бўлганлиги учун қулайлик учун $D = 1$ деймиз ва ечимини топамиз. Топилган номаълумларни $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик тенгламасига қўйиб, масалани ечимини топамиз.

9. $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ **тўғри чизиқ орқали ўтувчи ва** $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ **текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси.**

Текислик тенгламасини $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда қидирамиз. Текислик берилган тўғри чизиқ орқали ўтганлиги учун $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ тенглик ўринли бўлади. Шунингдек тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори текисликнинг нормал векторига перпендикуляр бўлади. Шунинг учун $Al+Bm+Cn+D=0$ бўлади. Қидирилаётган $Ax+By+Cz+D=0$ текислик $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ текисликка перпендикуляр бўлганлиги учун текисликларнинг мос нормал векторлари перпендикуляр бўлади. Шу сабабли $AA_1+BB_1+CC_1=0$ тенглик бажарилади. Топилган тенгликлардан қуйидаги тенгламалар системасини

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ Al+Bm+Cn+D=0 \\ AA_1+BB_1+CC_1=0 \end{cases}$$

тузамиз. Тенгламалар системасида тўртта номаълум учта тенглама бўлганлиги учун $D=1$ деймиз ва тенгламлар системасини ечамиз. Топилган $A, B, C-$ларни $Ax+By+Cz+D=0$ текислик тенгламасига қўйиб, масаланинг ечимини топамиз.

10. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **нуқтадан ўтувчи ва** $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ **тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.**

Масаланинг ечими қуйидагича аниқланадиган текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ бўлади: 1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ва $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламаси (бу текислик тенгламаси 7 – масаланинг ечими); 2) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик тенгламаси (бу текислик 6 – масаланинг ечими).

11. Берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **нуқтадан** $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ **тўғри чизиқгача бўлган масофани топиш.**

Масала қуйидагича ечилади: 1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузилади; 2) топилган тўғри чизиқ тенгламаси билан $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиқнинг кесишган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтаси аниқланади; 3) M_0M_1 кесманинг узунлиги икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи орқали топилади.

12. Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий перпендикулярини топиш.

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}\qquad N_1(x_1,y_1,z_1)$$

8-масалага кўра L_1 тўғри чизиқдан ўтувчи L_2 тўғри чизиққа параллел α текисликнинг тенгламасини тузамиз.

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 => Ax+By+Cz+D=0$$

У ҳолда 9-масалага кўра α текисликка перпендикуляр L_1 тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузамиз.

$$\beta:\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$

$$L:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad L:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

α текисликка перпендикуляр L_2 тўғри чизиқдан ўтувчи текислик тенгламасини тузамиз. $\alpha\perp\gamma, L_2\in\gamma$

$$\gamma:\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0\qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}\qquad L\perp L_1,\ L\perp L_2$$

13. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофани топиш.

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

9-масалага кўра L_1 тўғри чизиқ орқали ўтувчи L_2 тўғри чизиққа параллел α текислик тенгламасини тузамиз.

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 => Ax+By+Cz+D=0$$

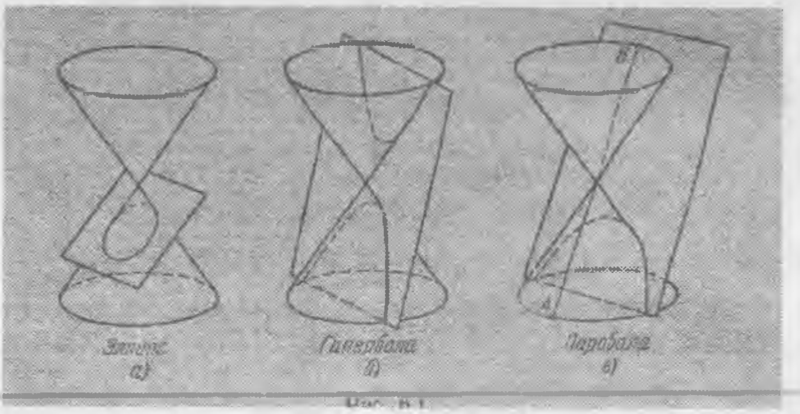
$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$$

V БОБ.

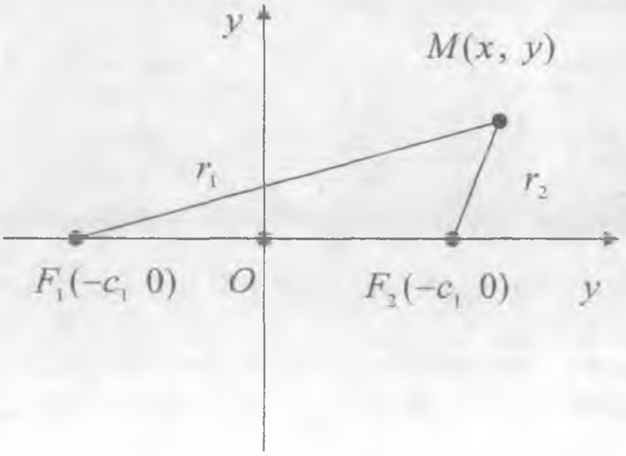
ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

Конус кесимлари. Эллипс. Эллипс шаклини текшириш. Эллипснинг эксцентриситети ва директрисаси

Конусни текисликлар билан турли хил кесиш натижасида кесимда эллипс, гипербола ва парабола ҳосил бўлади.



Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқталари деб аталувчи* F_1 *ва* F_2 *нуқталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига эллипс дейилади.*



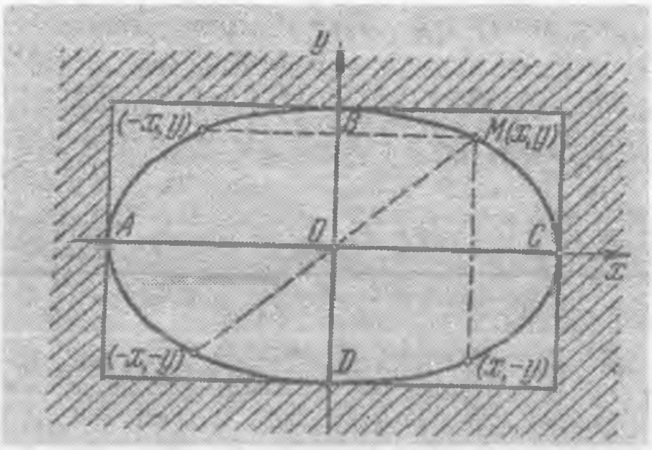
Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ бўлиб, келтирилган таърифга кўра $r_1 + r_2 = 2a$ бўлади. Шунга кўра $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ бўлади. Тенгликнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтариб, ҳосил бўлган тенгликни соддалаштирсак, унда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.1)$$

тенглама ҳосил бўлади. Одатда бу тенгламага эллипснинг каноник тенгламаси дейилади, бунда $b^2 = a^2 - c^2$. Бунда $a-$эллипснинг катта ярим ўқи, $b-$га эса унинг кичик ярим ўқи дейилади.

Изоҳ. Агар эллипсда $a = b$ бўлса, унда эллипс айлани бўлиб қолади, бунинг учун $a = b = R$ бўлади.

Эллипс шаклини текшириш.



1^0. Эллипс ўзаро перпендикуляр ва координата бошига нисбатан симметрик бўлган ўқларга эга.

2^0. Эллипс бутунлигича $|x| \le a$, $\|y\| \le b$ тўғри тўртбурчакка жойлашади.

3^0. Эллипс айланани бир хил сиқиш натижасида ҳосил бўлади.

Элипс эксцентриситети ва директрисаси.

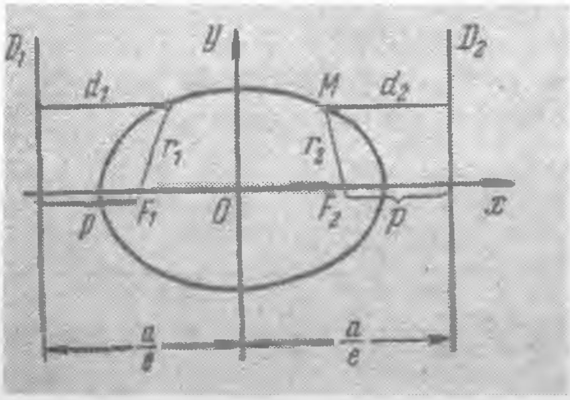
Таъриф. *Қуйидаги катталикка*

$$e = \frac{c}{a} \tag{5.2}$$

эллипснинг эксцентриситети дейилади.

Эллипс учун $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ муносабат ўринли бўлади. Демак, эллипс учун эксцентриситет бирдан кичик бўлади. Шуни таъкидлаш керакки, айлана учун эксцентриситет нолга тенгдир. Чунки айланада $a = b$.

Таъриф. *Эллипс марказидан* $\frac{a}{e}$ *масофадан ўтувчи ва унинг катта ярим ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларга эллипснинг директрисаси дейилади.*



Қуйидаги тенгламалар эллипснинг директриса тенгламалари бўлади:

$$D_1: \qquad x = -\frac{a}{e}, \quad D_2: \qquad x = \frac{a}{e} \tag{5.3}$$

1 - изоҳ. Эллипснинг директрисалари эллипсдан ташқарида жойлашган бўлади.

2 - изоҳ. Агар $p-$орқали эллипснинг фокуси ва директрисаси орасидаги масофани белгиласак, унда $p = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = a\left(\frac{1}{e} - e\right) = a\frac{1-e^2}{e}$ бўлади.

Теорема. *Эллипснинг ихтиёрий M нуқтасидан унинг F_i фокус нуқталаригача бўлган r_i масофанинг шу M нуқтадан директрисаларигача бўлган d_i масофаларга нисбати эллипс эксцентриситетига тенг.*

Исбот. F_1 ва F_2 эллипснинг фокус нуқталари бўлсин. Эллипс тенгламасидан $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ бўлишини топамиз. Унда

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = a + \frac{c}{a} = a + ex$$

$$(5.4)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = a - \frac{c}{a}x = a - ex$$

бўлади. Энди M нуқтадан директрисаларигача бўлган d_i масофаларни топамиз. Бунинг учун директрисаларни нормал тенгламасини тузамиз.

$$D_1: \qquad -x - \frac{a}{e} = 0,$$

$$D_2: \qquad x - \frac{a}{e} = 0.$$

Нуқтанинг тўғри чизиқдан четланиши тўғрисидаги маълум тушунчаларга кўра d_i - масофа M нуқтанинг директрисалардан четланишидир. Шунга кўра

$$d_1 = x + \frac{a}{e} = \frac{a + xe}{e}, \quad d_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e} \qquad (5.5)$$

бўлади. (5.4) ва (5.5) тенгликлардан фойдаланиб,

$$\frac{r_i}{d_i} = e, \; i = 1, \, 2$$

бўлишини топамиз. Теорема исботланди.

Гипербола. Гипербола шаклини текшириш. Гиперболанинг эксцентриситети ва директрисаси

Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқталари деб аталувчи* F_1 *ва* F_2 *нуқталаргача бўлган масофаларнинг айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига гипербола дейилади.*

Келтирилган таърифга кўра $|r_1 - r_2| = 2a$ бўлади. Бунда $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Демак,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

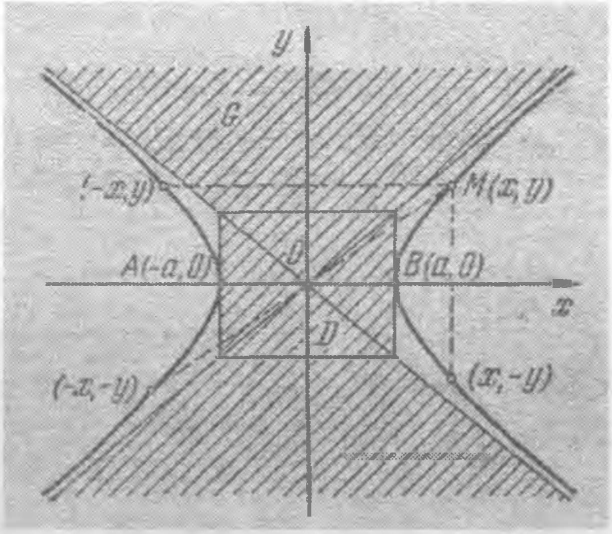
Тенгликнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтариб, ҳосил бўлган тенгликни каноник кўринишга келтириб

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.6)$$

тенгламани топамиз. Бунда $b^2 = c^2 - a^2$ бўлиб, $a -$эллипснинг ҳақиқий ярим ўқи, $b -$га эса эллипснинг мавҳум ярим ўқи дейилади.

$M(x, \, y)$ нуқтанинг гиперболага ётиши учун унинг координаталари $|r_1 - r_2| = 2a$ тенгликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Гипербола шаклини текшириш.



1^0. Гипербола иккита симметрик ўқларга эга бўлиб, ўқларнинг кесишган нуқтаси гиперболанинг марказидир.

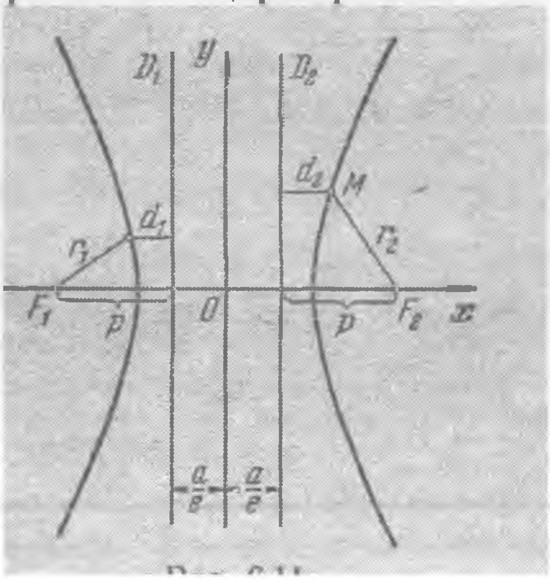
2^0. G соҳада гиперболанинг нуқталари ётмайди.

3^0. Гипербола иккита $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ асмптота тенгламаларга эга.

4^0. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ гипербола тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола тенгламасига қўшма тенгламадир.

Изоҳ. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ гиперболада $b-$ ҳақиқий ярим ўқ бўлиб, $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ тенгламалар унинг асимптота тенгламалари бўлади.

Гипербола эксцентриситети ва директрисаси.



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола тенгламаси берилган бўлсин.

Таъриф. *Қуйидаги катталикка*

$$e = \frac{c}{a} \qquad (5.7)$$

гиперболанинг эксцентриситети дейилади.

Эллипс учун $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ муносабат ўринли бўлади. Демак, эллипс учун эксцентриситет бирдан кичик бўлади.

Таъриф. *Гипербола марказидан* $\frac{a}{e}$ *масофадан ўтувчи ва унинг катта ярим ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларга эллипснинг директрисаси дейилади.*

Худди эллипс сингари қуйидаги тенгламалар гиперболанинг директриса тенгламалари бўлади:

$$D_1: \qquad x = -\frac{a}{e}, \quad D_2: \qquad x = \frac{a}{e} \qquad (5.8)$$

1 - изоҳ. Гиперболанинг директрисалари G – соҳада батамом жойлашади.

2 - изоҳ. Агар p – орқали гиперболанинг фокуси ва директрисаси орасидаги масофани белгиласак, унда $p = c - \frac{a}{e} = ae - \frac{a}{e} = a\left(e - \frac{1}{e}\right) = a\frac{e^2 - 1}{e}$ бўлади.

Теорема. *Гиперболанинг ихтиёрий* M *нуқтасидан унинг* F_i *фокус нуқталаригача бўлган* r_i *масофанинг шу* M *нуқтадан директрисаларигача бўлган* d_i *масофаларга нисбати гипербола эксцентриситетига тенг.*

Исботи. Теоремани исботлаш учун қуйидаги 4 та ҳолга қараш керак: 1) M нуқта гиперболанинг чап қисмида чойлашган бўлиб, F_1 фокуси ва D_1 директрисаси қаралади; 2) M нуқта гиперболанинг ўнг қисмида чойлашган бўлиб, F_1 фокуси ва D_1 директрисаси қаралади; 3) M нуқта гиперболанинг чап қисмида чойлашган бўлиб, F_2 фокуси ва D_2 директрисаси қаралади; 4) M нуқта гиперболанинг ўнг қисмида чойлашган бўлиб, F_2 фокуси ва D_2 директрисаси қаралади.

M нуқта гиперболанинг чап қисмида чойлашган бўлсин. Унда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола тенгламасидан $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ топиб, унинг қийматини $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ тенгликларга қўйиб топамиз. Шунга кўра

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a+ex| = \begin{cases} a+ex, \text{ агар } x>0 \text{ булса} \\ -a-ex, \text{ агар } x<0 \text{ булса} \end{cases}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a-ex| = \begin{cases} -a+ex, \text{ агар } x>0 \text{ булса} \\ a-ex, \text{ агар } x<0 \text{ булса} \end{cases} \tag{5.9}$$

бўлади. Шунга мос директриса тенгламаси қуйидаги нормал кўринишга бўлади: $D_1: \; -x - \frac{a}{e} = 0$. Нуқтанинг тўғри чизиқдан четланиши тўғрисидаги маълум тушунчаларга кўра

$$d_1 = \frac{-a-ex}{e} \tag{5.10}$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a-ex}{\frac{-a-ex}{e}} = e$. Қолган ҳоллар ҳам худди шунингдек исботланади.

Парабола. Парабола шаклини текшириш

Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқтаси деб аталувчи нуқтадан текисликда фиксирланган тўғри чизиқгача бўлган масофалар ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига парабола дейилади.*

Таърифдаги фиксирланган $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ – нуқта параболанинг фокус нуқтаси, фиксирланган тўғри чизиқ эса унинг директрисаси дейилади.

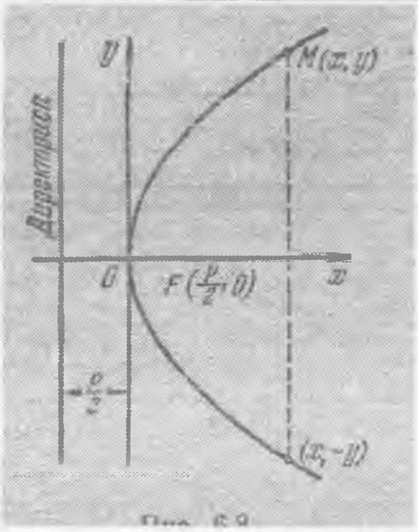


Рис. 6.9

Таърифга кўра $r = d$ бўлиб, бунда $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $d = \frac{p}{2} + x$. Шунга кўра $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$ бўлиб, охирги тенгликни квадратга кўтариб, каноник кўринишга келтирсак, унда

$$y^2 = 2px \qquad (5.11)$$

тенглама келиб чиқади. Ушбу тенглама параболанинг каноник тенгламаси дейилади, бунда p – параметр дейилади.

$M(x,\ y)$ – нуқтанинг параболага ётиши учун шу M – нуқтанинг координаталари учун (5.11) тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Гипербола шаклини текшириш.

1^0. Парабола симметрик ўққа эга.

2^0. Агар $p > 0$ бўлса, парабола Oxy текисликнинг ўнг ярим қисмида, $p < 0$ бўлса Oxy текисликнинг чап ярим қисмида жойлашади.

3^0. $x=-\frac{p}{2}$ тенглама парабола директриса тенгламаси.

4^0. Ихтиёрий иккита парабола бир – бирига ўхшашдир.

Ҳақиқатан ҳам $y^2=2px$ ва $y^2=2p^*x$ тенгламалар иккита парабола тенгламаси бўлсин. $y=kx$ координата бошидан ўтадиган тўғри чизиқ параболаларни (x, y) ва (x^*, y^*) нуқталарда кесиб ўтсин. $y^2=2px$ парабола $y=kx$ тўғри чизиғи билан $x=\frac{2p}{k^2}$, $y=\pm\frac{2p}{k}$ нуқтада, $y^2=2p^*x$ парабола эса $y=kx$ тўғри чизиғи билан $x^*=\frac{2p^*}{k^2}$, $y^*=\pm\frac{2p^*}{k}$ нуқтада кесишади. Охирги тенгликлардан $\frac{x}{x^*}=\frac{p}{p^*}$, $\frac{y}{y^*}=\frac{p}{p^*}$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса параболалар координата бошига нисбатан ўхшаш эканлигини билдиради.

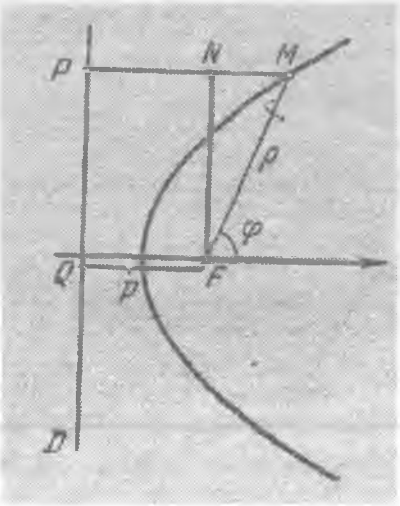
Эллипс, гипербола ва параболаларнинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари

Маълумки, текисликда $x^2+y^2=R^2$ тенглама айлананинг тенгламаси. Бу тенгламага $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ тенгликлар қўйсак, натижада

$$\rho=R \tag{5.12}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Энди $L-$ эгри чизиқ эллипс ёки парабола бўлсин. $F-$орқали $L-$эгри чизиқнинг фокус нуқтасини, $D-$орқали директрисасини, $p-$орқали $L-$эгри чизиқнинг фокус нуқтасидан директрисасигача масофани ҳамда $e-$ орқали эса эксцентриситетини белгилаймиз.

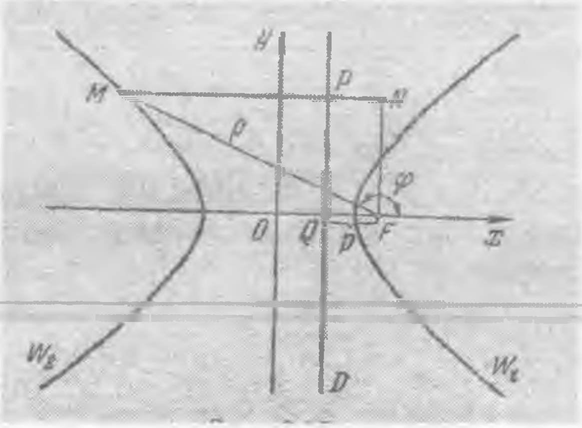


Шунга кўра $\frac{r_1}{d_1} = e$ тенгликка асосан $\frac{|FM|}{|MP|} = e$ бўлишини топамиз. Бунда чизмадаги схемага кўра $|FM| = \rho$, $|MP| = |PN + NM| = p + \rho\cos\varphi$ бўлади. Демак, топилган тенгликларни $\frac{|FM|}{|MP|} = e$ тенгликка қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликни каноник кўринишга келтирсак, унда

$$\rho = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi} \tag{5.13}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула эллипс ёки параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси дейилади.

Энди гиперболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз. F – орқали гиперболанинг фокус нуқтасини, D – орқали директрисасини, p – орқали гиперболанинг фокус нуқтасидан директрисасигача масофани ҳамда e – орқали эса эксцентриситетини белгилаймиз. Шунинг билан биргаликда W_1 F – фокусга мос гиперболанинг шохчаси ҳамда W_2 – иккинчи шохчаси бўлсин.



Гипербола учун ҳам $\frac{|FM|}{|MP|} = e$ тенглик ўринли бўлади. Чизмага кўра M нуқта гиперболанинг иккинчи W_2 – шохчасида ётибди. Бунда $|FM| = \rho$, $|MP| = |MN - PN| = -\rho\cos\varphi - p$ бўлади. Чунки φ – бурчак ўтмас, шунинг учун $\cos\varphi < 0$ бўлиб, $MN = -\rho\cos\varphi$ бўлади. Топилган қийматларни $\frac{|FM|}{|MP|} = e$ тенгликка қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликни каноник кўринишга келтирсак, унда гиперболанинг W_2 – шохчаси учун

$$\rho = \frac{-pe}{1 - e\cos\varphi}$$

тенгликни топамиз. Борди – ю, M нуқта гиперболанинг W_1 - шохчасида ётса, унда эллипс ёки параболаларнинг қутб координаталар системасидаги тенгламалари сингари мулоҳазалар орқали

$$\rho = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi}$$

формула келиб чиқади. Демак, гиперболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{pe}{1 - e\cos\varphi} & W_1 \text{ шохчаси учун}_1 \\ \dfrac{-pe}{1 + e\cos\varphi} & W_2 \text{ шохчаси учун}_1 \end{cases} \tag{5.14}$$

Эллипс, гипербола ва параболаларнинг урунма тенгламамаси

Айтайлик, $(x_0\,,\ y_0)$ – эллипс нуқтаси бўлиб, $y_0 \neq 0$ бўлсин. Бу нуқта атрофида эллипсни

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

тенглама билан бериш мумкин, бунда квадрат илдиз олдидаги ишора y_0 ишораси билан бир хил. Урунманинг $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ кўринишдаги тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0),$$

ёки

$$y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x - x_0)\,.$$

Бу тенгламани $\frac{y_0}{b^2}$ га кўпайтириб ва ҳамма ҳадларни тенгликнинг чап томонига ўтказиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

Бундан эллипснинг қуйидаги урунма тенгламасини топамиз:

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

Худди шунингдек, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг

$$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

урунма тенгламаси топилади.

$y^2=2px$ параболанинг урунма тенгламасини тузайлик. Бунинг учун парабола тенгламасини $x=\frac{y^2}{2p}$ кўринишга келтириб оламиз. Маълумки, агар эгри чизиқ $x=\varphi(y)$ тенглама билан берилса, $(x_0, y_0)-$нуқтадаги урунма тенгламаси $x-x_0=\varphi'(y_0)(x-x_0)$ кўринишда бўлади. Шунга кўра

$$x-x_0=\frac{y_0}{p}(y-y_0),$$

ёки

$$y_0 y-y_0^2+px_0-px=0$$

бўлади. Аммо $(x_0, y_0)-$ нуқта гирперболага ётганлиги учун $y_0^2-2px_0=0$. Шунинг учун урунма тенгламаси охирида ушбу кўринишни қабул қилади:

$$y_0 y-p(x+x_0)=0.$$

Иккинчи тартибли эгри чизиқлар

Таъриф. $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$ *тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнига иккинчи тартибли эгри чизиқ дейилади.*

Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} −коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқлидир. Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси координаталар системасини танлашга нисбатан инвариантдир. Чунки нуқтанинг исталган бошқа системадаги координаталари унинг xy системадаги координаталари билан чизиқли формулалар билан боғлангандир: демак, тенглама координаталарнинг исталган бошқа системасида ҳам $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$ кўринишга эгадир.

Эгри чизиқ учун координаталарнинг xy система билан ушбу

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$$
$$y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

формулалар воситасида боғланган координаталарнинг яъни $x'\,y'$ системасига ўтайлик.

Эгри чизиқнинг $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$ кўринишини сақлаган тенгламасида $x'\,y'$ кўпайтма олдидаги коэффициент қуйидагича бўлади:

$$2a'_{12} = 2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha - 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha\,.$$

$\alpha -$бурчакни шундай танлаб олиш мумкинки, бу коэффициент нолга тенг бўлади. Шунга асосан умумийликка зарар келтирмасдан дастлабки $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$ тенгламада $a_{12} = 0$ деб ҳисоблаш мумкин.

Энди икки ҳолни қарайлик.

А ҳол.: a_{11} , a_{22} коэффицентларнинг иккаласи ҳам нолдан фарқли.

В ҳол: a_{11} , a_{22} коэффициентлардан бири нолга тенг, умумийликни чегараланмасдан $a_{11} = 0$ деб ҳисоблаймиз.

А ҳолда ушбу алмаштириш воситасида

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}},\quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}},$$

координаталарнинг янги $x'\,y'$ системасига ўтамиз. Натижада иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c = 0\,.$$

Энди бу ерда рўй берадиган хусусий ҳолларни кўздан кечирамиз:

$A_1 : c \neq 0$, a_{11} , a_{22} ларнинг ишоралари бир хил, лекин $c -$нинг ишорасига қарама – қарши.. Бунда эгри чизиқнинг эллипс тенгламасилиги равшан.

$A_2 : c \neq 0$, a_{11} , a_{22} ларнинг ишоралари қарама – қарши. Эгри чизиқ – гиперболадир.

$A_3 : c \neq 0$ бўлиб, a_{11} , a_{22} , $c -$ларнинг ишоралари бир хил. Тенгламани битта ҳам ҳақиқий нуқта қаноатлантирмайди. Эгри чизиқ мавҳум деб аталади.

$A_4 :$ $c = 0$, a_{11} ва a_{22} нинг ишоралари турли. Эгри чизиқ иккита тўғри чизиққа ажралади, чунки $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c = 0$ тенгламани ушбу кўринишга ёзиш мумкин:

$$\left(x' - \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right)\left(x' + \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\,y'\right) = 0\,.$$

A_5: $c=0$, a_{11} билан a_{22} ларнинг ишоралари бир хил. Тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left(x'-i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)\left(x'+i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}y'\right)=0.$$

Эгри чизиқ ҳақиқий (0 , 0) нуқтада кесишадиган иккита мавҳум тўғри чизиққа ажралади.

Энди В ҳолни қарайлик. Бу ҳолда янги $x'\,y'$ системага ушбу

$$x'=x\,,\ y'=y+\frac{a_2}{a_{22}}$$

Алмаштириш ёрдамида ўтиб, эгри чизиқ тенгламасини қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$2a_1x'+a_{22}y'^2+c=0.$$

Энди ўз навбатида қуйидагича учта ҳолни ажратайлик:

B_1 : $a_1\neq 0$. Эгри чизиқ – параболадир, чунки янги

$$x''=x+\frac{c}{2a_1},\quad y''=y'$$

Координатала ёрдамида $2a_1x'+a_{22}y'^2+c=0$ тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$2a_1x''+a_{22}y''^2=0.$$

B_2 : $a_1=0$, a_{22} ва $c-$ларнинг ишоралари қарама – қарши. Эгри чизиқ иккита параллел тўғри чизиққа ажралади.

$$y\pm\sqrt{-\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

B_3: $a_1=0$, a_{22} ва $c-$ларнинг ишоралари бир хил. Эгри чизиқ кесишмайдиган иккита мавҳум тўғри чизиққа ажралади:

$$y\pm i\sqrt{-\frac{c}{a_{22}}}=0.$$

B_4 : $a_1=0$, $c=0$. Эгри чизиқ устма – уст тушган иккита тўғри чизиқдан иборат.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли ҳақиқий эгри чизиқ ё конус (эллипс, гипербола, парабола)дан ёки бир жуфт тўғри чизиқдан иборат (бу тўғри чизиқлар устма – уст тушиши ҳам мумкин).

VI БОБ.

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

Чизиқли тенгламалар системаси ва унинг ечими тушунчаси.

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (6.1)$$

тенгламалар системасига n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси дейилади.

Бу ерда a_{ij} (i=1, m, j=1, … , n) тенгламалар системасининг коэффицентлар дейилади. x_1, x_2,…, x_n – номаълумлар; b_1, b_2,…, b_m – озод ҳадлар дейилади.

Агар озод ҳадлар нолга тенг бўлса, у ҳолда (6.1) системага бир жинсли чизикли тенгламалар системаси дейилади, яъни:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (6.2)$$

Агар тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда (6.1) системага квадрат чизиқли тенгламалар системаси дейилади, яъни қуйидаги кўринишда бўлса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (6.3)$$

c_1, c_2,…, c_n сонлар тўплами (6.1) системанинг ечими дейилади, агар шу сонларни мос равишда (6.1) системадаги x_1, x_2,…, x_n номаълумларнинг ўрнига олиб бориб қўйганда ҳар бир тенглама айниятга айланса.

c_1, c_2,…,c_n ва $c_1^{'}, c_2^{'},..., c_n^{'}$ сонлар тўрламлари (6.1) системанинг турли ечималри дейилади, агар $c_1 = c_1^{'}, c_2 = c_2^{'},..., c_n = c_n^{'}$ тенгликлардан бирортаси бузилса.

(6.1) тенгламалар системаси биргаликда дейилади, агар у камида битта ечимга эга бўлса, акс ҳолда (бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса) биргаликда бўлмаган тенгламалар системаси дейилади.

(6.1) чизиқли тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлса, у ҳолда (6.1) системага аниқ система дейлади, биттадан ортиқ ечимга эга бўлса ноаниқ система дейилади.

(6.1) чизиқли тенгламалар системасининг коэффицентларидан тузилган матрицага (6.1) системанинг асосий матрицаси дейилади, яъни

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Агар $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ деб олсак, (6.1) чизиқли тенгламалар системасини қуйидагича матрица кўринишда ёзиш мумкин:

$$AX=B \qquad (6.5)$$

Ҳақиқатан ҳам:

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}=B \qquad (6.6)$$

Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нотривиал ечими

(6.2) бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси ҳар доим биргаликда бўлади, чунки $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ сонлар (6.2) бир жинсли чизиқли тенгламалар системанинг ечими бўлади.

(6.2) бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг фақат ноллардан иборат ечимига тривиал (нол) ечим дейилади, акс ҳолда нотривиал ечим дейилади. Яъни x_i лардан камида биттаси нолдан фарқли ($x_i \neq 0$).

(6.2) бир жинсли системани нотривиал ечимга эга бўлиш шартини излайлик. (6.2) чизиқли тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=0 \qquad (6.7)$$

(6.7) тенглик бирортаси нолдан фарқли $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонларда ўринли бўлишлиги учун А матрицанинг устунлари чизиқли боғлиқли бўлиши керак. Устунлар чизиқли боғлиқли бўлиши учун базис минорининг устунлар сони устунлар сони n дан кичик бўлиши керак. Яъни $rangA=r < n$ бўлиши керак. Демак, йўқорида биз қуйидаги теоремани исботладик

***Теорема* 5.1**. (6.2) бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси нотривиал ечимга эга бўлади, фақат ва фақат асосий матрицанинг ранги устунлар сонидан кичик бўлса.

Натижа. Бир жинсли квадрат чизиқли тенгламалар системаси нотривиал ечимга эга бўлади, фақат ва фақат асосий матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса.

Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш шарти.
Кронекр–Карелли теоремаси

Ихтиёрий (6.1) чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлиб, (6.4) унинг асоси матрицаси ва

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (6.8)$$

мартица кенгайтирилган матрицаси бўлсин.

Теорема. (6.1) чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун асосий ва кенгайтирилган матрицаларининг ранглари тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* c_1, $c_2,\dots$, c_n сонлар (6.1) чизиқли тенгламалар системасинг ечими бўлсин, яъни

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + a_{nn}c_n = b_n \end{cases} \qquad (6.9)$$

Асоси матрица A ва $rangA=k$, ($k\leq min(m,\ n)$) бўлсин. У ҳолда A матрицада k тартибли базис минор мавжуд. Шу минор $\widetilde{A}$ да ҳам базис минор эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун A матрицанинг k та базис устуни $\widetilde{A}$ да базис устун бўлишини кўсатамиз. $\widetilde{A}$ матрицанинг охирги устунидан бошқа барча устунлари A матрицаники каби бўлгани учун шу базис устунлар ёрдамида бошқа устунларни ифодалаш мумкин. Охирги устунни шу базис устунлар ёрдамида ифодаланиши эса, $\widetilde{A}$ матрицанинг охирги устундан бошқа барча устунлари базис устунлар ёрдамида ифодалаши ва (6.9) системадан келиб чиқади. A

матрицанинг базис минори $\widetilde{A}$ матрицанинг ҳам базис минори бўлар экан, яъни $rang\widetilde{A}=k$. Демак, $rangA= rang\widetilde{A}$.

Етарлилиги. $rangA= rang\widetilde{A} =k$ бўлсин. У ҳолда A матрицанинг базис устунлари $\widetilde{A}$ матрицанинг ҳам базис устунлари бўлади. Базис минор ҳақидаги теоремага асосан $\widetilde{A}$ матрицанинг охирги устунини шу базис устунлар ёрдамида ифодалаш мумкин. Бундан эса, $\widetilde{A}$ матрицанинг охирги устунини қолган устунларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин, яъни шундай бирортаси нолдан фарқли $c_1, c_2,..., c_n$ сонлар топиладики

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (6.10)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан эса (6.9) ни ҳосил қиламиз. (6.9) дан эса, c_1, $c_2,..., c_n$ сонлар (6.1) чизиқли тенгламалар системасинг ечими эканилиги келиб чиқади. Демак, (6.1) система биргаликда экан. Теорема исботланди.

Чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш

I. Асосий матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлган квадрат чизиқли тенгламалар системасини ечимини топиш.

(3) квадрат чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлиб, асосий матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6.11)$$

ва $detA=\Delta \neq 0$ бўлсин.

(3) квадрат чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг баъзи усулларини қараб чиқайлик.

Аввал (3) квадрат чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини исботлаймиз. Бунинг учун $rangA = rang\tilde{A}$ эканлигини кўрсатамиз. $detA = \Delta \neq 0$ бўлгани учун $rangA = n$. $\tilde{A}$ матрицанинг тартиби *нх*(*н*+1) каби бўлгани учун $\tilde{A}$ матрицада $n+1$ тартибли минор мавжуд эмас. Нолдан фарқли n – тартибли минор эса мавжуд. Шунинг учун $rang\tilde{A} = n$. (6.3) квадрат чизиқли тенгламалар системаси биргаликда экан.

1. Асосий матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлган (6.3) квадрат чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг *Крамер* усули.

(3) тенгламалар системасини $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ ларга кўпайтириб қўшамиз.

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\dots+a_{n1}A_{nj})x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\dots+a_{n2}A_{nj})x_2+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\dots+a_{nj}A_{nj})x_{j+}\dots+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\dots+a_{nn}A_{nj})x_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}.$$

Бундан эса $\Delta \cdot x_j = b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}$, ($j=1, 2, \dots, n$) тенгликларга эга бўламиз. $\Delta_j = b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\dots+b_nA_{nj}$ деб белгиласак, $\Delta \cdot x_j\ \Delta_j = \Delta_j$ ва $\Delta \neq 0$ бўлгани учун

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (j=1, 2, \dots, n) \tag{6.12}$$

формулага эга бўламиз. Δ_j – A матрицада j - устун элементларининг $b_1, b_2, \dots, b_n$ озод ҳадлар билан алмаштирилиб ҳосил қилиинган матрицанинг детерминанти. (6.12) формулага *Крамер* формуласи дейилади. Номълум x_j, ($j=1, 2, \dots, n$) ларни (6.12) формула ёрдамида топишга *Крамер* усули дейилади.

Мисол: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + bx_2 = 5 \end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечайлик.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18-10 = 8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-6 = -1$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{2} = 4, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2},$$

2. Асосий матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлган (6.3) квадрат чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг *матрицалар* усули.

Бизга маълумки, агар (6.3) квадрат чизиқли тенгламалар системасининг асосий матрицасини (6.11) ва $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\...\\b_n\end{pmatrix}$ деб олсак, (6.3) чизиқли тенгламалар системасини қуйидагича матрица кўринишда ёзиш мумкин:

$$AX=B \tag{6.13}$$

$detA=\Delta\neq 0$ бўлани учун A матрицага тескариси A^{-1} матрица мавжуд. (6.13) тенгликнинг икки томонига A^{-1} матрицани кўпайтирамиз: $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$. Матрицаларни кўпайтиришнинг гуруҳлаш қонунига асосан $A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=EX=X$. Бундан эса, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$X=A^{-1}B. \tag{6.14}$$

Мисол: $\begin{cases}x_1+2x_2=3\\2x_1+bx_2=5\end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасини матрицалар усули билан Ечайлик.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 6\end{vmatrix}=6-4=2\neq 0,\quad A_{11}=6,\quad A_{12}=-2,\quad A_{21}=-2,\quad A_{22}=1,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 3-1\cdot 5\\-1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-0{,}5\end{pmatrix}.$$

Бундан эса, $x_1=4$ ва $x_2=-0{,}5$ эканлиги келиб чиқади.

Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш

Қуйида ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{6.15}$$

(6.15) системанинг асосий матрицаси ва кенгайтирилган матрицасининг ранги r га тенг бўлсин, у ҳолда (6.15) тенгламалар системасида r та тенгламалар системаси чизиқли еркли. қолган тенгламалар эса r та тенгламанинг чизиқли кобинациясидан иборат бўлади.

Фараз қилайлик. асосий матрицада базис минор матриканинг чар йўқори бурчагида бўлсин (агар чар бурчагида бўлмаса тенгламалар ва номаълумларни алмаштириб бунга эришиш мумкин). Қуйидаги матрица ҳосил бўлган тенгламалар системасининг матрицаси бўлсин.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2r} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} \ldots a_{rn} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ушбу матриканинг чар йўқори бурчагидаги минор базис минор бўлсин. Базис минордаги коэффициентлар олдидаги номаълумларни тенгликларнинг чар қисмида олиб қолиб қолган номаълумларни ўнг томонга олиб ўтиб қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - a_{1(r+2)}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - a_{2(r+2)}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - a_{r(r+2)}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (6.16)$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ номаълумлар ўрнига c_{r+1}, $c_{r+2}, \ldots, c_n$ сонларни оламиз ва қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}c_{r+1} - a_{1(r+2)}c_{r+2} - \ldots - a_{1n}c_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}c_{r+1} - a_{2(r+2)}c_{r+2} - \ldots - a_{2n}c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}c_{r+1} - a_{r(r+2)}c_{r+2} - \ldots - a_{m}c_n \end{cases} \qquad (6.17)$$

Базис минор $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ бўлгани учун (6.17) тенгламалар

системасини Крамер усули бўйича ечсак,

$$x_j = \frac{M_j(b_i - a_{i(r+1)}C_{r+1} - a_{i(r+2)}C_{r+2} - \ldots - a_{in}C_n)}{M} = \frac{1}{M}\left(M_j(b_i) - c_{r+1}M_j(a_{i(r+1)}) - \ldots - c_nM_j(a_{in})\right), \qquad (6.18)$$

бу ерда $j=1,2, \ldots, r$. $M_j(d_i)$— M минордаги j - устунда $d_1, d_2, \ldots, d_r$ элементлар турган детерминантни тушунамиз. Демак, $x_j=c_j$ ($j=1,2, \ldots, r$) деб олсак, унда $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{p+1}, \ldots, c_n)$ лар (3) ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг ечими бўлади.

(6.18) формула (6.15) чизиқли тенгламалар системасининг ихтиёрий ечимини ўз ичига олишини исботлайлик. $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_r^0, c_{r+1}^0, \ldots, c_n^0)$ лар (6.15) нинг ихтиёрий ечими бўлсин. У ҳолда (6.16) тенгламалар системасининг ечими бўлади. (6.16) системанинг $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_r^0$ ечимлари $c_{r+1}^0, \ldots, c_n^0$ сонлар орқали Крамер формуласига кўра (6.18) формула ёрдамида бир қийматли аниқланади. Агар $c_{r+1}=c_{r+1}^0, \ldots, c_n=c_n^0$ деб олсак, (6.15) нинг ихтиёрий $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_r^0, c_{r+1}^0, \ldots, c_n^0$ ечими (6.18) формула билан аниқланиши келиб чиқади.

Мисол: Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

Чизиқли тенгламалар системаси биргаликда эканлигини текширайлик, бунинг учун Кронекр–Карелли теоремасидан фойдаланамиз, яъни асосий матрицаси ва кенгайтирилган матрицасининг ранглари тенглигини кўрсатамиз:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

бўлгани учун $rangA = rang\,\tilde{A} = 2$ ва M базис минор бўлади. Энди эса, тенгламалар системасини ечайлик. Шу ерда қуйидаги нарсага эътибор бермоғлигимиз зарур, базис минордаги коэффициентлар олдидаги номаълумларни тенгликларнинг чар қисмида олиб қолиб қолган номаълумларни ўнг томонга олиб ўтамиз

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 - x_1 - x_4 - x_5 \\ x_2 + 2x_3 = 5 - x_1 + x_4 - x_5 \end{cases}$$

ва $x_1=c_1$, $x_4=c_4$, $x_5=c_5$ деб олсак

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 - c_1 - c_4 - c_5 \\ x_2 + 2x_3 = 5 - c_1 + c_4 - c_5 \end{cases}$$

ни ҳосил киламиз ва бу тенгламалар системасини ечамиз $x_3=2+2c_4$, $x_2=1-c_4-3c_4-c_5$.Демак, $(c_1,\ 1-c_4-3c_4-c_5,\ 2+2c_4,\ c_4,\ c_5\ )$ умумий ечим бўлади. Агар $x_1=1$, $x_4=1$, $x_5=1$ деб олсак $x_3=4$, $x_2=-4$ бўлади, яъни $(1,-4,4,1,1)$ хусусий ечим бўлади.

Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаларининг ечимлари тўпламининг хоссалари

Қуйидаги бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \qquad (6.19)$$

Агар асосий матрицанинг ранги r га тенг бўлиб, базис минор асосий матрицанинг чар йуқори бурчагида бўлса, у ҳолда аввалги рараграфда ҳосил қилинган натижаларни бир жинсли чизиқли тенгламалар системалари учун татбиқ қилсак, (17) формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_j = -\frac{1}{M}\left(c_{r+1}M_j(a_{i(r+1)}) + \ldots + c_nM_j(a_{in})\right). \qquad (6.20)$$

Чизиқли бир жинсли тенгламалар системаларининг ечимлари қуйидаги хоссаларга эга.

1) Агар $B=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вектор (6.19) системанинг ечими бўлса, у ҳолда k ҳар қандай сон учун $kB=(kb_1, kb_2, \ldots kb_n)$ вектор ҳам бу системанинг ечими бўлади, бунга шу ечимни (6.19) тенгламаларнинг иҳтиёрийсига қўйиб, ишонч ҳосил қилиш мумкин. Агар $C=(c_1, c_2 \ldots\ c_n)$ вектор системанинг яна бир ечими бўлса, у ҳолда $B+C=(b_1+c_1,\ b_2+c_2, \ldots,\ b_n+c_n)$ вектор ҳам (6.19) системанинг ечими бўлади, чунки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j + c_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

тенглик ўринлидир.

Шунинг учун, умуман, бир жинсли (6.19) система ечимларининг чизиқли комбинацияси ҳам шу системанинг ечими бўлади.

Тасдиқ. (6.19) бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг тўплами чизиқли фазони ташкил етади.

Исбот. (6.19) бир жинсли тенгламалар системаси ечимлари тўпламида қўшиш ва сонга кўпайтириш амали аниқланганлигини йуқорида кўрдик. 8 та аксиомани қаноатлантириши эса, R^n чизиқли фазо элементлари 8 та аксиомани қаноатлантириши каби исботланади.

Тасдиқ. (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг асосий матрицасининг ранги r га тенг бўлса, у ҳолда унинг L барча ечимлари тўплами R^{n-r} чизиқли фазога изоморфдир.

Исбот. (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг ҳар бир $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ ечимига R^{n-r} чизиқли фазонинг $(c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n)$ элементини мос қуямиз. $(c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n)$ ҳар қандай танламайлик, (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг $(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ ечими (6.20)формула билан бир қийматли аниқланади, бундан эса ўрнатилган мослик бир қийматли эканлиги келиб чиқади. Энди эса, ўрнатилган мослик чизиқли фазолар изоморфлининг иккита шартини қаноатлантиришини текширамиз: R^{n-r} чизиқли фазонинг $C_1=\left(c_{r+1}^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}\right)$, $C_2=\left(c_{r+1}^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}\right)$ элементларига (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг L барча ечимлари тўпламининг $C_1' =\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_r^{(1)}, c_{r+1}^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}\right)$, $C_2'=\left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots, c_r^{(2)}, c_{r+1}^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}\right)$ элементлари мос келсин. У ҳолда $C_1+C_2=\left(c_{r+1}^{(1)}+c_{r+1}^{(2)}, \ldots, c_n^{(1)}+c_n^{(2)}\right)$ бўлиб, унга $\left(c_1^{(1)}+c_1^{(2)}, c_2^{(1)}+c_2^{(2)}, \ldots, c_r^{(1)}+c_r^{(2)}, c_{r+1}^{(1)}+c_{r+1}^{(2)}, \ldots, c_n^{(1)}+c_n^{(2)}\right)$ элемент мос келади. $\left(c_1^{(1)}+c_1^{(2)}, c_2^{(1)}+c_2^{(2)}, \ldots, c_r^{(1)}+c_r^{(2)}, c_{r+1}^{(1)}+c_{r+1}^{(2)}, \ldots, c_n^{(1)}+c_n^{(2)}\right)=C_1'+C_2'$ дан L тўрламнинг C_1+C_2 элементига R^{n-r} чизиқли фазонинг $C_1'+C_2'$ элементи ва R^{n-r} чизиқли фазонинг $\lambda C_1=\left(\lambda c_{r+1}^{(1)}, \ldots, \lambda c_n^{(1)}\right)$ элементга L тўрламнинг $\left(\lambda c_1^{(1)}, \lambda c_2^{(1)}, \ldots, \lambda c_r^{(1)}, \lambda c_{r+1}^{(1)}, \ldots, \lambda c_n^{(1)}\right)= =\lambda\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_r^{(1)}, c_{r+1}^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}\right)=\lambda C_1'$ элемент мос келади. Демак, (2) бир жинсли тенгламалар системасининг барча ечимлари тўплами L ва R^{n-r} чизиқли фазога изоморф экан.

Натижа. (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг асосий матрицасининг ранги r га тенг бўлса, у ҳолда унинг L барча ечимлари тўпламининг ўлчови $n-r$ га тенгдир.

Асосий матрицасининг rangi r га тенг бўлган (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг ихтиёрий $n-r$ та чизиқли еркли ечимлари мажмуаси барча ечимлари тўплами L да базис ташкил етади ва шу ечимлар мажмуасига *фундаментал ечимлар тўплами* дейилади.

(6.19) бир жинсли тенгламалар системасида $(c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n)$ лар ўрнига кетма-кет равишда $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $e_2=(0,1,0,\ldots,0)$, …, $e_{n-r}=(0,0,0,\ldots,1)$ ларни танлашдан ҳосил қилинган фундаментал ечимлар тўпламига *нормал фундаментал ечимлар тўплами* дейилади, яъни қуйидаги ечимлар:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1=\left(-\dfrac{M_1(a_{i(r+1)})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+1)})}{M}, 1, 0, \ldots, 0\right) \\ X_2=\left(-\dfrac{M_1(a_{i(r+2)})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+2)})}{M}, 0, 1, \ldots, 0\right). \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n-r}=\left(-\dfrac{M_1(a_{in})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{in})}{M}, 1, 0, \ldots, 0\right) \end{array}\right. \qquad (6.21)$$

Базиснинг таърифига кўра (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг ихтиёрий $X=(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ ечими $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ орқали қуйидагича ифодаланади:

$$X=c_{r+1}X_1+c_{r+2}X_2+\ldots+c_nX_{n-r}. \qquad (6.22)$$

(6.22) формула (6.19) бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечими формуласидир.

Равшанки, (6.19) система нол бўлмаган ечимларга эга бўлган ҳолда, яъни унинг коэффицентларидан тузилган матрицанинг ранги номаълумлар сонидан кичик бўлган ҳолдагини фундаментал ечимлар системасига эга бўлади. Бунга (6.19)система кўргина турли фундаментал ечимлар системаларига эга бўлиши мумкин. Бироқ бу системалар ўзаро эквивалент, чунки ҳар қайси системанинг ҳар бир ечими бошқа исталган система орқали чизиқли ифодаланади ва шунинг учун бу системалар бир хил сондаги ечимлардан иборат бўлади.

Асосий матрицаси бир хил бир жинсли бўлмаган ва бир жинсли чизиқли тенгламалар системаларининг ечимлари орасида мавжуд бўлган боғланишларни қараб чиқиш билан ушбу бобни тугаллаймиз. Бизга бир жинсли бўлмаган (6.15) ва (6.19) бир жинсли чизиқли тенгламалар системалари берилган бўлсин.

Тасдиқ. (6.15) системанинг ихтиёрий ечими билан (6.19)системанинг ихтиёрий ечими йиғиндиси яна (6.15) системанинг ечими бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $(c_1,\ c_2 \ldots\ c_n)$ (6.15) системанинг ечими, $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ (6.19) системанинг ечими бўлсин. (6.15) системанинг ихтиёрий тенгламасини, масалан k – тенгламасини оламиз ва ундаги номаълумлар ўрнига $c_1+d_1,\ c_2+d_2, \ldots,\ c_n+d_n$ сонларни қўямиз. У ҳолда :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + 0 = b_k$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса, $(c_1+d_1,\ c_2+d_2, \ldots, c_n+d_n)$ (6.15) системанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Тасдиқ. (6.15) системанинг ихтиёрий иккита ечимининг айирмаси (6.19) системанинг ечими бўлади.

Исбот. $(c_1,\ c_2 \ldots c_n)$ ва $(c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)$ (6.15)системанинг иккита ечимлари бўлсин. $(c_1-c'_1,\ c_2-c'_2 \ldots c_n-c'_n)$ (6.19) системанинг ечими экаканлигини исботлайлик. Бунинг учун (6.19) системанинг тенгламаларидан исталган k – тенгламани оламиз ва унга $(c_1-c'_1, c_2-c_2 \ldots c_n-c'_n)$ ни олиб бориб қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{j-1}^{n} a_{kj}(c_j - c'_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c'_j = b_k - b_k = 0$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан эса, $(c_1-c'_1,\ c_2-c_2 \ldots c_n-c'_n)$ (6.19) системанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Бу тасдиқлардан, чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси (6.15) нинг битта ечимини топиб ва уни келтирилган (6.19) системанинг c'_1, c_2 ,..., c'_n ҳар бир ечими билан қўшиб, (6.19) системанинг барча ечимларини топиш мумкинлиги келиб чиқади.

VII БОБ.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

Координаталарнинг махсус системаси

Таъриф.

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{23}z+a_{44}=0 \quad (7.1)$$

Тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнига иккинчи тартибли сирт дейилади.

Бу таърифнинг координаталар системасини танлаб олишга нисбатан инвариантлиги равшан. Ҳақиқатан ҳам, координаталарнинг исталган бошқа бирор $x'y'z'$ системасига нисбатан сирт тенгламаси x, y, z ўрнига x', y', z' нинг чизикли ифодаларини қўйиш натижасида ҳосил қилинади, бинобарин, у тенглама x', y', z' га нисбатан ҳам (7.1)кўринишга эга бўлади.

Исталган текислик иккинчи тартибли сиртни иккинчи тартибли эгри чизиқ бўйича кесади. Ҳақиқатан ҳам, сирт таърифи координаталар системасининг танлаб олишига нисбатан инвариантлиги сабабли, кесувчи текислик xy $(z=0)$ текисликдан иборат деб ҳисоблаш мумкин. Бу текисликнинг эса сирт иккинчи тартибли

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{24}y+a_{44}=0$$

Эгри чизиқ бўйича кесиши аён.

Иккинчи тартибли сиртнинг геометрик хоссаларини текшириш учун унинг тенгламасини шундай координаталар системасида ёзиш табиийки, натижада тенглама иложи борича содда бўлади.

Биз ҳозир координаталарнинг шундай системасини кўрсатамизки, унда сиртнинг тенгламаси анча соддалашади, яъни сирт тенгламасида yz, xz ва xy олдидаги коэффициентлар нолга айланади.

Фазонинг координаталари бошидан фарқли ҳамма нуқталарида

$$F(A)=\frac{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz}{x^2+y^2+z^2} \qquad (7.2)$$

тенглик ёрдамида аниқланган $F(A)$ функцияни кўздан кечирайлик.

Бирлик сферада $(x^2+y^2+z^2=1)$ бу функция чегаралангандир, бинобарин, у бирор A_0 нуқтада абсолют минимумга эришади. Лекин у координаталар бошидан чиқадиган исталган нур бўйлаб ўзгармас қийматга эга $\left(F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=F(x, y, z)\right)$, шу сабабдан F функция A_0 нуқтада қийматларининг абсолют минимумга бирлик сферадагина эмас, балки бутун фазога нисбатан эришади.

O нуқтани координаталар боши сифатида сақлаб ва OA_0 нурни z ярим тўғри чизиқ сифатида қабул қилиб, янги декарт координаталари x' y' z' ни киритамиз. Маълумки, x, y, z ўрнига x', y', z' координаталар орасидаги боғланиш ушбу

$$\begin{cases} x = a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z', \\ y = a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z' \\ z = a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z' \end{cases}$$

кўринишдаги формулалар билан ифодаланади.

Сиртнинг янги x', y', z' координаталаридаги тенгламаси x, y, z ни (7.1) формулалар бўйича x', y', z' га алмаштириш натижасида ҳосил бўлади ва бу тенглама ушбу кўринишга эгадир:

$$a'_{11}\,x'^2+a'_{22}\,y'^2+a'_{33}\,z'^2+2a'_{12}\,x'y'+2a'_{23}\,y'z'+2a'_{13}\,x'z'+2a'_{14}\,x'+2a'_{24}\,y'+2a'_{23}\,z'+a'_{44}=0$$

Янги координаталарга нисбатан F функция қуйидаги

$$F(A)=\frac{a'_{11}\,x'^2+a'_{22}\,y'^2+a'_{33}\,z'^2+2a'_{12}\,x'y'+2a'_{23}\,y'z'+2a'_{13}\,x'z'}{x'^2+y'^2+z'^2}$$

кўринига эга бўлиб, F нинг эски ифодасидаги x, y, z ни x', y', z' га (7.2) формулалар бўйича алмаштириш натижасида ҳосил қилинади. Махражи шакл ~~жиҳатдан ўзгармайди,~~ чунки у А нуқтанинг координаталар бошигача масофанинг квадратини билдиради, бу масофа эса иккала системада ҳам бир хил ифода қилинади.

x' y' z' координаталар системасининг танлаб олинишига биноан F нинг ифодасида $x'=0$, $z'=1$ деб фараз қилсак, битта ўзгарувчининг функцияси ҳосил бўлади:

$$f(y')=\frac{a'_{2}\,y'^2+2a'_{23}y'+a'_{33}}{1+y'^2},$$

бу эса $y'=0$ қийматида минимумга эришади. Демак, $y'=0$ бўлганда

$$\frac{df(y')}{dy'}=0.$$

Аммо:

$$\left.\frac{df(y')}{dy'}\right|_{y'=0}=2a'_{23}\,.$$

Шундай қилиб, сирт тенгламасида $y'z'$ олдидаги коэффициент нолга тенг, $x'z'$ олдидаги коэффициентнинг нолга тенглиги шунга ўхшаш кўрсатилади.

Демак, координаталарининг x' y' z' системасида сиртнинг тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$a'_{11}\,x'^2+2a'_{12}\,x'y'+a'_{22}\,y'^2+2a'_{14}\,x'+2a'_{24}\,y'+2a'_{34}\,z'+a'_{33}\,z'^2+|\,a'_{44}=0$$

Энди янги x'', y'', z'' координаталарни

$$x' = x''\cos\theta + y''\sin\theta$$
$$y' = -x''\sin\theta + y''\cos\theta$$
$$z' = z''$$

формулалар бўйича киритсак, иккинчи тартибли эгри чизиқларни текширган ҳолдаги θ – бурчакни хоҳлаганча равишда танлаб олиш йўли билан $x''y''$ олдидаги коэффициентни ҳам нолга айлантириб юришга эришиш мумкин.

Шундай қилиб, шундай тўғри бурчакли декарт координаталари системаси мавжудки, сиртнинг унга нисбатан тенгламаси ушбу кўринишга эгадир:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0.$$

Иккинчи тартибли сиртларни синфларга ажратиш

Олдинги мавзуга кўрганимиздек, тўғри бурчакли декарт координаталарининг тегишли системасига ўтиш йўли билан иккинчи тартибли сирт тенгламасини ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \qquad (7.3)$$

Учта ҳолни ажратамиз:

А: (7.3) тенгламада координаталар квадратлари олдидаги учала коэффициент ҳам нолдан фарқли;

В: икки коэффициент нолдан фарқли, учинчиси, масалан $a_{33} = 0$.

С: битта коэффициент, масалан, a_{33} нолдан фарқли, қолган иккитаси нолга тенг.

А ҳолда координаталарнинг янги

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}}, \; z' = z + \frac{a_3}{a_{33}},$$

Системасига ўтамиз, бу координаталар юошини кўчиришга мос келади. Сўнгар формулалар бўйича сирт тенгламасини

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + \delta = 0$$

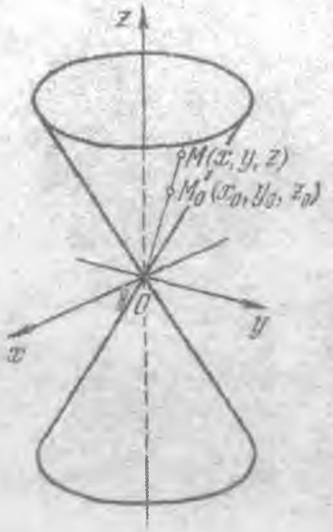
кўринишга келтирамиз.

А ҳол ўз навбатида тўртта хусусий ҳолга бўлинади:

A_1: $\delta = 0$. Сирт конусдан иборат бўлиб, α, β, ν – бир хил ишорали бўлганда бу ***конус мавҳум*** ва δ – нинг ишораси α, β, ν – сонлар ичида турли ишоралилари мавжуд бўлган ҳолда бу ***конус ҳақиқийдир***. Хусий ҳолда ҳақиқий конуснинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

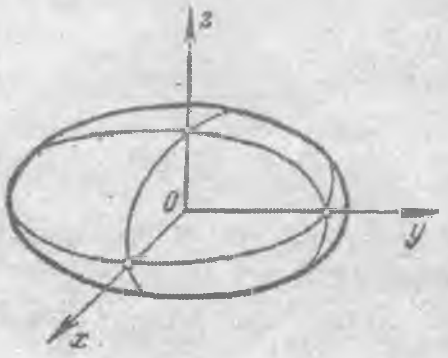
тенгламадан иборат бўлиб, шакли қуйидаги расмдан иборат:



$A_2 : \delta \neq 0$, α, β, $\nu -$ бир хил ишорали. Сирт эллипсоиддан иборат бўлиб, α, β, ν, $\delta -$бир хил ишорали бўлган ҳолда у *мавҳум* ва $\delta -$нинг ишораси α, β, $\nu -$нинг ишорасиша тескари бўлган ҳолда у ҳақиқий ***эллипсоиддир.*** Ҳақиқий эллипсоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

бўлиб, эллипсоиднинг шакли қуйидаги расмдан иборатдир:



$A_3 : \delta \neq 0$ тўртта α, β, ν, $\delta -$коэффициентдан иккитаси бир хил ишорали, қолган иккитаси эса тескари ишорали бўлса, сирт ***бир паллали гиперболиод***.

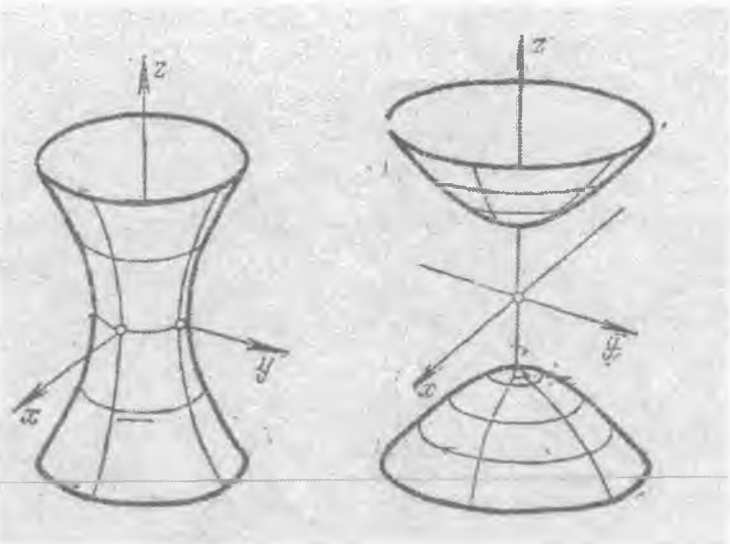
$A_4 : \delta \neq 0$, олдинги учта коэффициентдан бирининг ишораси қолганлари ишораларига тескари. Сирт – ***икки паллали гиперболид***. Бир паллаи гиперболоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

тенгламадан иборат бўлса, икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

генгламадан иборатдир. Гиперболоидларнинг шакллари қуйидагича бўлади:



бир паллали   икки паллли гиперболиод

В ҳолда сирт тенгламасини

$$x'=x+\frac{a_1}{a_{11}},\ y'=y+\frac{a_2}{a_{22}},\ z'=z$$

формулалар бўйича янги координаталарга ўтиб тенгламани

$$\alpha x'^2+\beta y'^2+2pz'+q=0$$

кўринишга келамиз.

Бу ҳол ўз навбатида учта хусусий ҳолга бўлинади.

$B_1:\ p=0,\ q=0$. Сирт бир жуфт текисликка ажралади:

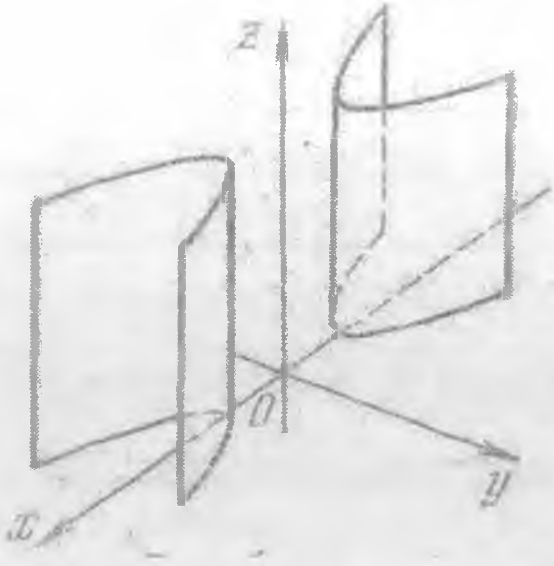
$$x'\pm\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}y'=0;$$

α ва β сонлар бир хил бўлганда текисликлар мавҳум ва α ва β турли ишорали бўлган ҳолда – ***ҳақиқий.***

$B_2:\ p=0,\ q\neq0$. Сирт цилиндрдан иборат бўлиб, α ва β ва q бир хил ишорали бўлганда бу цилиндр ***мавҳум*** ва турли ишорали коэффициентлар мавжуд ҳолда ***ҳақиқийдир***. Жумладан, α ва β бир хил ишорали бўлса, ***гиперболик цилиндр*** ҳосил бўлади. Гиперболик цилиндрнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$$

тенгламадан иборат бўлиб, шакли қуйидагича бўлади:



C ҳолда янги x', y', z' координаталарга ўтамиз. Бунда сирт тенгламаси

$$\nu' z'^2 + px + qy + r = 0$$

кўринишни олади ва қуйидаги хусусий ҳолларни ажратиш мумкин.

$C_1 : p = 0,\ q = 0$. Сирт ўзаро параллел бир жуфт параллел текисликка ажралиб, ν ва r бир хил ишорали бўлганда бу текисликлар ***мавҳум***, ν ва r - турли ишорали бўлган ҳолда эса ҳақиқий ва ниҳоят, $r = 0$ бўлганда текисликлар устма – уст тушади.

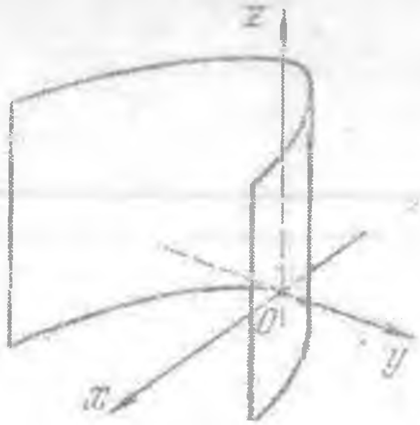
$C_2 : p$ ёки q коэффициентлардан камида биттаси нолдан фаркли. z – ўқининг йўналишини сақлаган ҳолда $px + qy + r = 0$ текисликни $y'z'$ текислиги сифатида қабул қиламиз. Бу тенглама

$$\nu z'^2 + \delta x' = 0$$

Кўринишни қабул қилади. ***Сирт параболик цилиндрдан*** иборат. Параболик цилиндрнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - py = 0$$

Тенгламадан иборат бўлиб, сиртнинг шакли қуйидагича бўлади:



7. Тест топшириқлари.

Қуйидаги	*Текисликда	Текисликда	Текисликда умумий	Фазода умумий
мулоҳазалардан қайси бири тўғри?	нуқта ва ундан чиқувчи бирлик масштаб аниқланган нур қутб координаталар системасини ташкил этади.	кесишувчи иккита тўғри чизиқ аффин координаталар системасини ташкил этади.	бошланғич нуқтага эга бир хил масштабли иккита ўқ тўғри бурчакли декарт координаталар системасини ташкил этади.	бошланғич нуқтага эга ўзаро перпендикуляр учта ўқ тўғри бурчакли декарт координаталар системасини ташкил этади
Қутб координаталари билан берилган иккита нуқта орасидаги масофани топиш формуласини топинг	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1}$	* $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$	$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\omega}$	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1}$
Аффин координаталари билан берилган иккита нуқта орасидаги масофани топиш формуласини топинг	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1}$	$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$	$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\omega}$	* $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-}$
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири тўғри?	$\bar{a}$ векторни к сониги кўпайтириш учун унинг узунлиги к сонига кўпайтирилади .	$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларни йиғиндиси деб, $\bar{a}$ векторнинг бошидан $\bar{b}$ векторнинг охирига йўналтирилган векторга айтилади.	$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпаймаси деб, мос координаталарини кўпайтиришга айтилади.	* $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларни айирмаси деб, $\bar{b}$ вектор билан йиғиндиси $\bar{a}$ векторга тенг $\bar{c}$ векторга айтилади.
Векторларнинг таърифига асосланиб ушбу тушунчалардан қайси бири тўғрилигини аниқланг.	Фақат сон қиймати билан аниқланган катталик вектор катталикдир.	Фақат йўналиш билан аниқланган катталик вектор катталикдир.	*Хам сон қиймати, хам йўналиши билан аниқланган катталик вектор катталикдир.	Ихтиёрий жисмнинг хажми вектор катталикдир.
Бир текисликда ёки паралел текисликларда ётувчи векторларга	ортогонал дейилади	* Компланар дейилади	Коллинеар дейилади	тенг дейилади.
Ўзаро перпендикуляр векторларга	*ортогонал дейилади	Компланар дейилади	Коллинеар дейилади	тенг дейилади.
Узунликлари тенг, бир хил йўналишга эга иккита векторларға	бирлик векторлар дейилади;	Қарама-қарши векторлар дейилади;	ортогонал векторлар дейилади:	* ўзаро тенг векторлар дейилади.
Узунликлари бирга	бирлик	*ортонормал	ортогонал векторлар	ўзаро тенг

тенг, ўзаро перпендикуляр векторларга	векторлар дейилади;	векторлар дейилади;	дейилади;	векторлар дейилади.
Орасидаги бурчак φ га тенг бўлган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасидан ҳосил бўлган векторнинг узунлиги қуйидаги формулалардан қайси бири билан аниқланади?	$\mid[\vec{a},\vec{b}]\mid=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}$	* $\mid[\vec{a},\vec{b}]\mid=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}\mid \sin$	$\mid[\vec{a},\vec{b}]\mid=\mid\vec{a}\mid^2 \sin\varphi$	$[\vec{a},\vec{b}]=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}\mid \sin$
$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб,	Уларнинг узунликлари кўпайтмасига айтилади.	шу векторларнинг узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак синусига кўпайтмасига айтилади.	*шу векторларнинг узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига айтилади.	$\vec{a}$ вектор узунлигини $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектордаги проекциясига кўпайтмасига айтилади.
Бошлари бир нуқтага келтирилган нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар охирларини бирлаштириш натижасида хосил бўлган учбурчак юзи:	Шу векторлар модуллари кўпайтмасига тенг.	Шу векторлар модуллари кўпайтмасининг ярмига тенг.	Уларнинг скаляр кўпайтмаси модулини ярмига тенг.	*Уларнинг вектор кўпайтмаси модулини ярмига тенг.
Бошлари бир нуқтага келтирилган нолдан фарқли $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларлардан ясалган параллелограмнинг юзи.	Шу векторлар узунликлари кўпайтмасига тенг.	Шу векторлар кўпайтмасининг ярмига тенг.	Уларнинг скаляр кўпайтмасининг модулига тенг.	*Уларнинг вектор кўпайтмасидан ҳосил бўлган векторнинг узунлигига тенг.
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	Иккита вектор чизиқли боғлиқли бўлишлиги учун улар коллинеар бўлишлиги зарур ва етарли	Агар n та вектордан бирортаси нол вектор бўлса, у ҳолда улар чизиқли боғлиқлидир.	Агар n вектордан n–1 таси чизиқли боғлиқли бўлса, у ҳолда улар чизиқли боғлиқлидир.	* Битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётувчи векторларга компланар векторлар дейилади.
$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг	1) $\mid\vec{c}\mid=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}\mid\cos\varphi$	*1) $\mid\vec{c}\mid=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}\mid\sin\varphi$ 2) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$	шу векторларнинг узунликлари кўпайтмасини улар	1) $\mid\vec{c}\mid=\mid\vec{a}\mid\mid\vec{b}\mid\sin\varphi$ 2) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$

вектор кўпайтмаси деб, шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, у қуйидаги шартлари қаноатлантиради	2) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр 3) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ ўнг учлик ташкил қилади.	векторларга перпендикуляр 3) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ ўнг учлик ташкил қилади.	орасидаги бурчак синусига кўпайтмасига айтилади.	векторларга перпендикуляр 3) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ чап учлик ташкил қилади.
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмасининг таърифини аниқланг	$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини $\vec{c}$ векторга вектор кўпайтиришдан ҳосил қилинган векторга айтилади.	$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини $\vec{c}$ векторга қўшишдан ҳосил қилинган векторга айтилади.	$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини $\vec{c}$ векторга вектор кўпайтиришдан ҳосил қилинган векторга айтилади.	*$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил қилинган сонга айтилади.
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтириб ясалган параллелепипеднинг ҳажми	уларнинг аралаш кўпайтмасига тенг.	*уларнинг аралаш кўпайтмасининг модулига тенг.	уларнинг икки каррали вектор кўпайтмасининг модулига тенг.	уларнинг узунликлари кўпайтмасига тенг.
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторларни умумий бошланғич нуқтага келтириб ясалган пирамиданингҳажми	уларнинг аралаш кўпайтмасининг 1/6 қисмига тенг.	*уларнинг аралаш кўпайтмаси модулининг 1/6 қисмига тенг.	уларнинг икки каррали вектор кўпайтмаси модулининг 1/12 қисмига тенг.	уларнинг узунликлари кўпайтмасининг 1/3 қисмига тенг.
$ax+by+c=0$ тенглама билан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини аниқланг	$ax+by+c=0$	$ax-by+c=0$	$bx+ay-c=0$	*$bx-ay+c=0$
Текисликда $\vec{q}\,(a,b)$ вектор билан бир хил йўналишга эга ва $N(x_0,y_0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини аниқланг	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$	*$\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}$	$y=k(x-x_0)+y_0$	$\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \end{cases}$

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизиқ ва Ax+By+Cz+D=0 текислик орасидаги бурчакни топиш формуласини аниқланг	$\cos\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+}}$	$\sin\varphi=\frac{\|Al+Bm+Cn\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$	$tg\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$	* $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n}}$
Текисликда $\bar{q}\,(a,b)$ вектор билан бир хил йўналишга эга ва $N(x_0,y_0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини аниқланг	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$	$\frac{x-x_o}{a}=\frac{y-y_o}{b}$	$y=k(x-x_0)+y_0$	* $\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \end{cases}$
Тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламасини аниқланг	$ax+by+c=0$	* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	$y=kx+l$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
$Ax+By+Cz+D=0$ ва $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топиш формуласини аниқланг	* $\cos\varphi=\frac{AA_1+B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot}$	$\cos\varphi=\frac{\|AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+}}$	$tg\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$	$\sin\varphi=\frac{AA_1+BB_1+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2}}$
$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизиқ ва $Ax+By+Cz+D=0$ текислик учун параллеллик шартини аниқланг	$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$	$*Al+Bm+Cn=0$	$Al-Bm-Cn=0$	$\frac{A}{l}=-\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$
$Ax+By+Cz+D=0$ ва $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ текисликлар учун перпендикулярлик шартини аниқланг	$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$	$*AA_1+BB_1+CC_1=0$	$AA_1-BB_1-CC_1=0$	$\frac{A}{A_1}=-\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$
Қуйидаги тенгламалардан қайси бири эллипснинг каноник тенгламаси?	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
Эллипс деб нимага айтилади?	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталардан бир хил	Текисликда фиксирланган нукта ва фиксирланган тўғри чизиқдан бир хил узоқликдаги	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофаларининг айирмасининг модули	*Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофалари

	узоқликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	йиғиндиси ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.
Гипербола деб нимага айтилади?	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталардан бир хил узоқликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	Текисликда фиксирланган нуқта ва фиксирланган тўғри чизиқдан бир хил узоқликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	*Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофаларининг айирмасининг модули ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофалари йиғиндиси ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.
Парабола деб нимага айтилади?	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталардан бир хил узоқликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	*Текисликда фиксирланган нуқта ва фиксирланган тўғри чизиқдан бир хил узоқликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофаларининг айирмасининг модули ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.	Текисликда фиксирланган F_1 ва F_2 нуқталаргача масофалари йиғиндиси ўзгармас бўлган текисликдаги барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ каноник тенглама билан берилган эллипснинг эксцентриситети деб қандай сонга айтилади?	*$e=c/a$, бу ерда $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$e=a/c$, бу ерда $c=\sqrt{a^2-b^2}$	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=b/a$
Гиперболанинг F_i фокусига мос D_i директрисаси деб	F_i нуқта билан битта ярим текисликда ётувчи ихтиёрий тўғри чизиққа айтилади.	*F_i нуқта билан битта ярим текисликда ётувчи, гипербола марказидан a/e масофадан ўтувчи, ҳақиқий ўққа перпендикуляр тўғри чизиққа айтилади.	F_i нуқта билан битта ярим текисликда ётувчи, гипербола марказидан e/a масофадан ўтувчи, ҳақиқий ўққа перпендикуляр тўғри чизиққа айтилади.	F_i нуқта билан битта ярим текисликда ётувчи, гипербола марказидан e/a масофадан ўтувчи, тўғри чизиққа айтилади.
m x n матрица деб	m та устун n та сатрдан иборат	*m та сатр n та устундан иборат	m та сатр n та устундан иборат	m та сатр n та устундан иборат

	сонлар жадвалига айтилади.	сонлар жадвалига айтилади	сонлар кўпайтмасига айтилади	сонлар кўпайтмаларининг йиғиндисига айтилади
A=(a_{ij}), (m x n) матрицанинг a_{ij}	* i –сатр j–устун элементи	i – устун j – сатр элементи	i – устун j – сатр элементлари йиғиндиси	i –сатр j–устун элементилари кўпайтмаси
Иккита бир хил тартибли матрицаларнинг йиғиндиси деб	*мос элементларини қўшишдан ҳосил қилинган матрицага айтилади.	мос элементларини кўпайтиришдан ҳосил қилинган матрицага айтилади.	Биринчи матрицанинг сатри элементларини иккинчи матрицанинг устуни элементларига кўпайтириб қўшишдан ҳосил қилинган матрицага айтилади.	Биринчи матрицанинг сатри элементларини иккинчи матрицанинг устуни элементларига қўшишдан ҳосил қилинган матрицага айтилади.
Учинчи тартибли детерминантни қайси элементининг минори $M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ кўринишда бўлади?	a_{11}	a_{21}	a_{31}	* a_{32}
Учинчи тартибли детерминантнинг A_{23} алгебраик тўлдирувчиси қуйидагиларнинг қайси бирига тенг?	M_{23}	$(-1)^3 M_{32}$	M_{33}	$*(-1)^5 M_{23}$
Агар детерминантнинг иккита сатри элементлари бир хил бўлса унинг қиймати :	манфий бўлади	мусбат бўлади	*нолга тенг бўлади	нолдан фарқли бўлади.
Агар детерминантнинг бирор сатри (устуни)нинг элементларни бирор сонга кўпайтириб бошқа бир сатр (устун)нинг мос элементларига қўшилса,	ўзгармайди	нолга тенг бўлади	ишорасига ўзгаради	ўзгаради.

детерминантнинг қиймати				
det$A$= $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i$ формулага детерминантни	i сатр бўйича ёйиш формуласи дейилади.	i сатр, j устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.	биринчи устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.	* j устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.
det$A$= $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i$ формулага детерминантни	* i сатр бўйича ёйиш формуласи дейилади.	i сатр, j устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.	биринчи устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.	j устун бўйича ёйиш формуласи дейилади.
a_{11} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси	A_{12}	* A_{11}	A_{22}	A_{23}
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	Агар детерминантнинг иккита сатрини ўрни алмаштирилса унинг абсалют қиймати ўзгармайди, ишораси эса қарама қаршисига ўзгаради.	Детерминантни транспонирлаш натижасида унинг қиймати ўзгармайди.	Иккита бир хил сатрга эга детерминант нолга тенгдир.	*Агар n-тартибли детерминантнинг i-сатри элементлари $a_{ij}=b_j+c_j$, $j=\overline{1,n}$ кўринишда бўлса, у ҳолда детерминантни шундай иккита детерминантнинг кўпайтмаси кўринишда ёзиш мумкин-ки, бу детерминантларда i–сатрдан бошқа элементлар берилган матрицаники каби, 1-детермингантнинг i-сатрида b_j лар, 2-детерминантнинг i-сатрида эса c_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ лар бўлади.
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	m x n тартибли матрицага n x p тартибли матрицани кўпайтирса, m x p тартибли матрица ҳосил бўлади.	m x n тартибли матрицага m x n тартибли матрицани қўшса, m x n тартибли матрица ҳосил бўлади.	*Матрицалар учун қуйидаги тенглик ҳар доим ўринли: $AB=BA$	Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти, уларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенгдир.
Қуйидаги мулоҳазалардан	m x n тартибли матрицага m x	Иккита матрицалар йиғиндисининг	Исталган матрица учун тескари	*Детерминантнинг исталган сатри

қайси бири тўғри?	n тартибли матрицани кўпайтирса, m x n тартибли матрица ҳосил бўлади.	детерминанти, уларнинг детерминантлари йиғиндисига тенгдир.	матрицани топиш мумкин	элементларини ўзининг алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтмаларининг йиғиндиси детерминантнинг қийматига тенгдир
Бирлик матрица деб,	барча элементлари бирга тенг матрицага айтилади.	ёрдамчи диагонал элементлари бирга тенг бўлиб, қолган элементлари ноллардан иборат матрицага айтилади.	*бош диагонал элементлари бирга тенг бўлиб, қолган элементлари ноллардан иборат матрицага айтилади.	диагонал матрицага айтилади.
Матрицанинг тескариси мавжуд бўлишлиги учун	*детерминанти нолдан фарқли бўлишлиги зарур ва етарли	детерминанти нолга тенг бўлишлиги зарур ва етарли	Квадрат матрица бўлишлиги зарур ва етарли	диагонал матрица бўлишлиги зарур ва етарли.
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	Матрицанинг сатрлари чизиқли боғлиқли бўлишлиги учун улардан бири колганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлишлиги зарур ва етарлиги.	Базис сатрлар чизиқли эрклидир. Матирцанинг ихтиёрий сатрини базис сатрларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин	*Матрицанинг сатрлари чизиқли боғлиқли дейилади, агар бирор сонлар билан чизиқли комбинацияси нолга тенг бўлса.	Детерминант нолга тенг бўлишлиги учун унинг сатрлари чизиқли боғлиқли бўлишлиги зарур ва етарли.

V фазода $e_1, e_2, \ldots e_n$ базис ташкил этади дейилади, агар	улар орқали фазонинг ҳар бир элементини ифодалаш мумкин бўлса	* улар чизиқли эркли бўлиб, улар орқали фазонинг ҳар бир элементини ифодалаш мумкин бўлса	улар чизиқли эркли бўлса.	улар чизиқли боғлиқли бўлиб, улар орқали фазонинг ҳар бир элементини ифодалаш мумкин бўлса
Чизиқли фазонинг ўлчови n га тенг дейилади, агар	n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлса.	n та чизиқли боғлиқли элемент мавжуд бўлса.	* n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлиб, ихтиёрий $n+1$ та элемент чизиқли боғлиқли бўлса.	n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлиб, ихтиёрий $n+1$ та элемент чизиқли эркли бўлса.
Чизиқли фазога чексиз ўлчовли дейилади, агар	унинг ўлчови жуда катта сон бўлса.	Ҳар доим n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлса.	* Ихтиёрий сондаги чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлса	чексиз кўп элементлар мавжуд бўлса.
V ва W чизиқли фазоларга изоморф дейилади, агар улар	чекли ўлчовли фазолар бўлса.	* Орасида бир қийматли мослик ўрнатилган ва ўрнатилган мослик қуйидаги шартларни қаноатлантирса: Агар V фазодан олинган x ва y элементларга W фазонинг x’ ва y элементлари мос қуйилган бўлса, x+y элементга x’+y элементни, λx элементга λx` элементни мос қуйса, бу ерда λ бирор сон.	ҳар хил ўлчовли бўлса	Орасида тўғри мослик ўрнатилган бўлса
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	Ҳар қандай n ўлчовли Евклид фазосида ортонормал базис мавжуд	Барча n ўлчовли Евклид фазосилари изоморфдир	Ҳар қандай Евклид фазоси нормалланган фазо бўлади.	*Ҳар қандай n ўлчовли Евклид фазосида ягона базис мавжуд
Чизиқли фазода скаляр кўпайтма	Кўпайтмаси деб аталувчи	*Скаляр кўпайтмаси деб (x,y) аталувчи	йиғиндиси деб аталувчи $x+y$ бирор	Кўпайтмаси деб аталувчи (x,y)

аниқланган дейилади, агар ихтиёрий иккита x ва y элементлар учун уларнинг	(x,y) бирор сон мос қуйилган бўлса	бирор сон мос қуйилган бўлса.	элемент мос қуйилган бўлса	бирор элемент мос қуйилган бўлса
Узунликлари бирга тенг, ўзаро перпендикуляр элементларга	ортогонал элементлар дейилади	перпендикуляр элементлар дейилади	*ортонормал элементлар дейилади	тенг элементлар дейилади.
Коши Буняковский тенгсизлигини аниқланг	$\lVert x+y\rVert\leq\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$	$(x,y)\leq (x,x)\cdot(y,y)$	$*(x,y)^2\leq (x,x)\cdot(y,y)$	$(x,y)^2< (x,x)\cdot(y,y)$
Минковский тенгсизлигини аниқланг	$*\lVert x+y\rVert\leq\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$	$(x,y)\leq (x,x)\cdot(y,y)$	$\lVert x+y\rVert<\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$	$(x,y)^2< (x,x)\cdot(y,y)$
$A:V\to W$ операторга, чизиқли оператор дейилади, агар V чизиқли фазонинг барча x, y элементлари ва ихтиёрий λ сон учун қуйидаги шартларни қаноатлантирса	*1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$ 2) $A(\lambda x)= \lambda A(x)$	1) $A(xy)=A(x)A(y)$ 2) $A(\lambda x)= \lambda A(x)$	1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$ 2) $A(\lambda x)= A(x)$	1)$A(x+y)=A(x)+A(y)$ 2) $A(\lambda x)= \bar{\lambda}\, A(x)$ бу ерда $\bar{\lambda}$ сони λ соннинг қўшмаси
V чизиқли фазонинг хар бир x элементига W чизиқли фазониг бирор y элементини мос қуйувчи акслантиришга	чизиқли оператор дейилади	функция дейилади.	*оператор дейилади.	чизиқли форма дейилади
A операторнинг ядроси деб, қуйидаги шартни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламига айтилади	$y=Ax$	$*Ax=0$	$A^2x=0$	1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$ 2) $A(\lambda x)= \lambda A(x)$
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири нотўғри?	Операторнинг тескари мавжуд бўлишлиги учун бир қийматли бўлишлиги зарур ва етарли	V чизиқли фазо n ўлчовли бўлиб, $A:V\to V$ чизиқли оператор бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенглик ўринли: $\dim(\mathrm{im}A)+\dim(\ker A)=n$	*A, $B\in L(V,V)$ чизиқли операторлар бўлсин, у ҳолда $\mathrm{rang}AB\geq\mathrm{rang}A$, $\mathrm{rang}AB\geq\mathrm{rang}B$	$A.B\in L(V,V)$ чизиқли операторлар бўлсин, у ҳолда $\mathrm{rang}AB\geq\mathrm{rang}A+\mathrm{rang}B-n$.
Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири тўғри?	Чизиқли операторнинг турли хос	*λ сони A чизиқли операторнинг хос сони бўлишлиги	Чизиқли операторнинг турли базислардаги	Барча Евклид фазолари изоморфдир.

	сонларига мос хос элементлари чизиқли боғлиқлидир	учун шу операторнинг характеристик тенгламасининг ечими бўлишлиги зарур ва етарли.	матрицаларининг детерминантлари тенг эмас.	
Чизиқли тенгламалар системасини ечинг. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+2y-z=-2 \\ y+z=-2 \end{cases}$	* $x=y=z=-1$	$x=y=z=0$	$x=y=z=-2$	$x=y=z=1$
$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ ва $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ векторлар орасидаги бурчакни аниқланг.	30^0	45^0	60^0	135^0
$\overrightarrow{OA}=\{-5;1;0\}$,	$S=-11$	$S=22$	$S=11$	$S=-22$
$\overrightarrow{OB}=\{-3;5;0\}$ векторларга қурилган учбурчак юзини топинг.				
$\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$, $\vec{b}=\alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ векторлар α ва β нинг қандай қийматларида коллинеар бўлади.	$\alpha=1;\beta=2$	$\alpha=4;\beta=-1$	$\alpha=0;\beta=1$	$\alpha=5;\beta=3$
$9x^2+25y^2=225$ эллипс тенгламасидан фокуслари координатасини кўрсатинг.	$F_1(-2;0);F_2(2;0)$	$F_1(-4;0);F_2(4;0)$	$F_1(-1;0);F_2(1;0)$	$F_1(-3;0);F_2(3;0)$
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипс тенгламасидан ε эксцентриситет қийматини аниқланг.	$\frac{5}{4}$	* $\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$
$\overrightarrow{OA}=\{5;2;0\}$, $\overrightarrow{OB}=\{2;5;0\}$, $\overrightarrow{OC}=\{1;2;4\}$	84	14	24	-21

векторларга қурилган пирамида ҳажмини аниқланг.				
$M(-2;1;4)$ нуқтадан ўтувчи $3x+2y-7z+8=0$ текисликка паралел текислик тенгламасини тузинг.	$3x+2y-7z+32$	$2x-3y+7z-17=0$	$3x+2y-7z=0$	$3x+2y-7z-32=0$
$\frac{(x-1)}{3}=\frac{(y+2)}{-2}=\frac{z}{1}$ тенглама билан аниқлкнган тўғри чизиқ ётувчи текислик тенгламасини кўрсатинг.	$3x-2y+z-1=0$	$x+2y+z-+3=0$	$3x-2y+z+2=0$	$x-2y-z-3=0$
$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ гипербола тенгламасидан ҳақиқий ва мавхум ярим ўқлари қийматлари кўрсатилсин.	$a=4;b=5$	$a=5;b=4$	$a=2;b=3$	$a=3;b=2$
$16x^2-9y^2=144$ гипербола тенгламасидан фокуслари координатасини кўрсатинг.	$F_1(-3;0);F_2(3;0)$	$F_1(-5;0);F_2(5;0)$	$F_1(-1;0);F_2(1;0)$	$F_1(-2;0);F_2(2;0)$
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ гипербола тенгламасидан ε эксцентриситет қийматини аниқланг.	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$16x^2-9y^2=144$ гипербола тенгламасидан асимптота тенгламаларини аниқланг.	$y=\pm\frac{3}{4}x$	$y=\pm\frac{4}{3}x$	$y=\pm\frac{1}{2}x$	$y=\pm\frac{3}{2}x$
$A(9;6)$ нуқтадан ўтувчи $y^2=2px$ параболанинг p параметр қийматини	1	2	3	5

аниқланг.				
Қуйидаги векторларнинг қайси бири бирлик вектор 1) $\vec{a}\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ 2) $\vec{b}\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ 3) $\vec{c}(0,-1)$ 4) $\vec{a}\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$	1 ва 2	*1,3 ва 4	3,4	бирлик вектор йўқ
$\left\|\vec{a}\right\|=6.\left\|\vec{b}\right\|=5$ ва улар орасидаги бурчак 30^0 эканлиги маълум бўлса уларнинг вектор кўпайтмасини модулини аниқланг.	5	*15	10	12
$y^2=18x$ парабола ва $6x+y-6=0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топинг	*(2;-6) ва (0.5;3)	Улар кесишмайди	Улар устма уст тушади	(1.5;2.5)
(2;-5;3) нуктадан утувчи $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+}{9}$ тугри чизикка паралел тугри чизик тенгламасини тузинг	* $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=$	Бундай тугри чизик йук	$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$ ни узи булади	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-5}=z$
$\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ ва $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ векторлардан ясалган паралелограммнинг диоганаллари узунлигини топинг	* $\sqrt{5}$ ва $\sqrt{17}$	1 ва 4	$\sqrt{10}$ ва 4	Диоганалларини топиб булмайди

Катта ярим уки 10 ва $e=0.8$ булган эллипс тенгламасини тузинг	* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	Бундай эллипс йук	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$
(3;1;-1) нуктадан $22x+4y-20z-4$ текисликкача масофани топинг	*$\frac{3}{2}$	1	10	11
$4x-5y+3z-1=$ ва $x-4y-z+9=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг	* $\arccos 0.7$	$\arccos 0.3$	Текисликлар паралел	Текисликлар перпендикуляр
$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z}{}$ тугри чизик ва $3x+5y-z-2=0$ текисликнинг кесишиш нуктасини топинг	*(0;0;-2)	(1;2;3)	Улар кесишмайди	(0;1;0.5)
Детерминатни хисобланг $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}$	*-9	10	1	0
Детерминатни хисобланг $\begin{vmatrix}a & c & -b\\ a & 0 & b\\ b & a & -c\end{vmatrix}$	* b^2c-2a^2b+c	0	b^2c	$-2a^2b+c^2a$
Матрицани матрицага купайтиринг $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	*$\begin{pmatrix}4 & 5\\ -1 & 11\end{pmatrix}$	Матрицаларни купайтириб булмайди	$\begin{pmatrix}3 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$
Матрицани матрицага купайтиринг	* $\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 11 & 9 & -8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 8\\ 10 & 8 & -9\end{pmatrix}$	Матрицаларни купайтириб булмайди	Тугри жавоб йук

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$				
Тескари матрица топинг $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$*\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$	Тескари матрица мавжуд эмас	Узи тескари $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	Тугри жавоб йук
Матрица рангини топинг $\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{matrix}\right.$	*2	3	1	Матрицани ранги йук
Тенгламалар системасини ечинг $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = - \end{cases}$	*(2;-1;1)	Ечимга эга эмас	(0.5;5;4)	(1.5;2;-3)
Тескари матрица топинг $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	* $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{matrix} d \\ -c \end{matrix}\right.$	Тескари матрица мавжуд эмас	Узи тескари	Тугри жавоб йук
Квадратик формани каноник куринишга келтиринг $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x$	* $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$	Каноник куринишга келмайди	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$	$-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$
матрицали тенгламани ечинг $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	Ечими йук	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	Тугри жавоб йук
$5x - y + 7 = 0$ ва $3x + 2y = 0$ туғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.	30^0	45^0	60^0	90^0

Қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири тўғри?	Ҳар қандай чизиқли фазо Евклид фазоси бўлади.	Ҳар қандай чизиқли фазо нормалланган фазо бўлади.	*Ҳар қандай Евклид фазоси нормалланган фазо бўлади.	Ҳар қандай нормалланган фазо Евклид фазоси бўлади.
Тўпламда қўшиш амали аниқланган дейилади,	*агар ихтиёрий иккита элементининг йиғиндиси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	агар иккита элементининг йиғиндиси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	агар ихтиёрий иккита элементининг йиғиндиси ва кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	агар ихтиёрий элементини ҳар қандай сон билан кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса.
Тўпламда сонга кўпайтириш амали аниқланган дейилади,	агар ихтиёрий иккита элементининг кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	агар ихтиёрий иккита элементининг йиғиндиси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	агар ихтиёрий иккита элементининг йиғиндиси ва кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса.	*агар ихтиёрий x элементни ҳар қандай λ сон билан кўпайтмаси яна шу тўпламга тегишли бўлса.
Тўпламга чизиқли фазо дейилади, агар шу тўпламда қўшиш ва сонга кўпайтириш амали аниқланган бўлиб, қуйидаги аксиомалар ўринли бўлса:	* 1) $x+y=y+x$ 2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ 3) $x+0=x$ 4) $x+(-x)=0$ 5) $x\cdot 1=x$ 6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ 7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ 8) $\alpha(x+y)=\alpha x-\alpha y$	1) $xy=yx$ 2) $(xy)z=x(yz)$ 3) $x0=0$ 4) $x+(-x)=0$ 5) $x\cdot 1=x$ 6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ 7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ 8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$	1) $(x,y)=(y,x)$ 2) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ 3) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$ 4) $(x,x)\geq 0$, барча x лар учун, $(x,x)>0$ агар $x\neq 0$, $(x,x)=0$ агар $x=0$.	1) $\lVert x-y\rVert=\lVert y-x\rVert$ 2) $\lVert\lambda x\rVert=\lvert\lambda\rvert\lVert x\rVert$ 3) $\lVert x+y\rVert\leq\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$

8. Назорат саволлари.

ЖОРИЙ НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Қуйида келтирилган A ва B матрицалар учун мос матрицали кўпҳадларни ҳисобланг:

1. $$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -4\end{pmatrix};\quad A^2-2BA+A \text{ - ?}$$

2. $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7 & 1 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix};\quad B^2+BA+2A \text{ - ?}$$

3. $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad A^2-BA+3A \text{ - ?}$$

4. $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ -3 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix};\quad 2A^2+BA+3A \text{ - ?}$$

5. $$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-BA+4A \text{ - ?}$$

6. $$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -3\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 5 & -5 & 0\end{pmatrix};\quad A^2+BA+3B \text{ - ?}$$

7. $$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4\\ -2 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad A^2-BA+4B \text{ - ?}$$

8. $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & -7 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-BA+3A \text{ - ?}$$

9. $$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -4 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 3\end{pmatrix};\quad A^2+3BA+2B \text{ - ?}$$

10. $$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 6 & -2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix};\quad A^2-BA+3A \text{ - ?}$$

11. $$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix};\quad B^2-BA+2A \text{ - ?}$$

12. $$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad 3A^2-BA+B \text{ - ?}$$

13. $$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4\\ -2 & -4 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix};\quad A^2+4BA+B \text{ - ?}$$

14. $$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix};\quad A^2-BA+2B \text{ - ?}$$

15. $$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-BA+5A \text{ - ?}$$

16. $$A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -4\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 7\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad A^2-BA+3A \text{ - ?}$$

17. $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 3\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix};\quad A^2-BA+2B \text{ - ?}$$

18. $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & -4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad A^2-2BA+3B \text{ - ?}$$

19. $$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-BA+3A \text{ - ?}$$

20. $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-BA+4B \text{ - ?}$$

21. $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad B^2+BA+3B\text{ - ?}$$

22. $$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-2BA+4A\text{ - ?}$$

23. $$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad B^2+2BA+A\text{ - ?}$$

24. $$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 3 & 4 & 5\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix};\quad B^2+BA+4A\text{ - ?}$$

25. $$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad B^2-5BA+2A\text{ - ?}$$

2. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

1. $$\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ 6 & -2 & 9 & 8\end{vmatrix}.$$

2. $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

3. $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}.$$

4. $$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}.$$

5. $$\begin{vmatrix}8 & 1 & 9 & 0\\ 6 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\end{vmatrix}.$$

6. $$\begin{vmatrix}5 & 6 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5\end{vmatrix}.$$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 9 \\ -9 & 1 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$

17. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 14 & 0 \\ 4 & 2 & 13 & -1 \\ 3 & 5 & 26 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$ **22.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$ **24.** $\begin{vmatrix} 12 & 13 & -10 & -11 \\ 10 & -5 & 7 & -3 \\ 11 & -5 & 10 & -5 \\ 7 & 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 & -15 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

3. Қуйидаги матрицалар учун тескари матрицаларни топинг:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 12 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$ **2.** $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 14 \\ 4 & 2 & 13 \\ 3 & 5 & 26 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$ **4.** $\begin{pmatrix} 8 & 5 & -46 \\ 2 & 1 & -12 \\ 3 & 2 & 25 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 27 \\ 4 & -1 & 35 \\ 5 & -2 & 43 \end{pmatrix}.$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$ **8.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$ **10.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$ **12.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 13 & -5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 17 & 4 \\ 5 & 16 & 3 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 28 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & -1 \\ 14 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 10 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 10 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Қуйидаги матрицаларнинг рангини ҳисобланг:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -9 & 8 \\ 5 & 18 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

10. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$

13. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

16. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & -20 \\ -4 & -2 & 1 & -18 \end{pmatrix}.$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -9 & -24 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 8 & -7 & 10 & 18 & 17 \\ 3 & 4 & 9 & -10 & 7 \\ 2 & -5 & 7 & -10 & 11 \\ 9 & 8 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ -7 & -10 & -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системаларининг ечимларини ягоналикка текширинг ва ушбу ечимларни Гаусс, Крамер ҳамда тескари матрица усуллари ёрдамида топинг:

1. $\begin{cases} 7x-2y+4z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$. **2.** $\begin{cases} x-3z+4t=-4 \\ 2x+y+10z-15t=10 \\ 2y+3z-6t=7 \\ 3x+4y-z+2t=4 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} 2x-y+5t=6 \\ 3x+2y-z=3 \\ -x+2y+4z+t=10 \\ -y-z+3t=0 \end{cases}$. **4.** $\begin{cases} 4x+4y-5z=-2 \\ 3x+2y+z=7 \\ x-y+10z=20 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=4 \\ -x_1+2x_2-x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3+4x_4=1. \\ x_1+x_2+x_3+x_4=7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 4x-y+10z=11 \\ 5x+3y-5z=9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-y+5t=6 \\ 3x+2y-z=3 \\ -x+2y+4z+t=10. \\ -y-z+3t=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5t=3 \\ -y-t=-1 \\ x-3z+8t=-1 \\ x+2y-4z+3t=0 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=4. \\ x+z=6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-z=-2 \\ 2x-y-z=4. \\ y-z=-6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-2y+z+3t=-6 \\ -10z+2t=-2 \\ 2x+2y-5z-2t=8. \\ x+y-z=3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-2z=-1. \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x-y-z=1 \\ 2x+2y-z=2. \\ -y+4z=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+3z=3. \\ 4x-y=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 12x_1+13x_2-10x_3-11x_4=6 \\ 10x_1-5x_2+7x_3-3x_4=1 \\ 11x_1-5x_2+10x_3-5x_4=1 \\ 7x_1+x_2-6x_3+2x_4=7 \end{cases}.$

17. $\begin{cases} x-2y+5z=20 \\ 3x+4y+4z=-13. \\ x+2y+z=-8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 4x+y+5z=10. \\ -x+10y-z=8 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-2y+3z=-2 \\ -4x+5y+6z=-10. \\ x-y+z=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y-z=2. \\ 2x+z=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 8x-7y+10z-18t=17 \\ 3x+4y+9z-10t=7 \\ 2x-5y+7z-10t=11. \\ 9x+8y+4z-7t=2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x+3y-4z=3. \\ -x+2y-2z=1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+2y-4z=-9 \\ -x-3y+6z=13. \\ 2x+5y-z=-4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x-3z+4t=-4 \\ 2x+y+10z-15t=10 \\ 2y+3z-6t=7 \\ 3x+4y-z+2t=4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+3z=3. \\ 4x-y=0 \end{cases}$

6. Қуйидаги бир жинсли тенгламалар системаларининг фундаментал ечимлар системаси ва умумий ечимларини топинг:

1. $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-17x_3-13x_4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x_1+2x_2+2x_3+5x_4=0 \\ -4x_1-x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_1+5x_2+x_3-12x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+7x_3+20x_4=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-x_2-15x_3+4x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+13x_4=0\ . \\ 3x_2+2x_2-6x_3+19x_4=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x_1+3x_2-9x_3-24x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3-8x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1+2x_2+2x_3+12x_4-43x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3-4x_4-4x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+30x_4-22x_5=0 \\ 6x_1+x_2+x_3+20x_4-39x_5=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y-3z+t=0 \\ 2x-y-z-3t=0\ . \\ 4x+y-5z-3t=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1+x_2-24x_3-15x_4=0 \\ 2x_1-x_2-6x_3-3x_4=0 \\ 2x_1+x_2-14x_3-9x_4=0 \\ x_1+6x_2-29x_3-21x_4=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1+x_2-8x_3-10x_4=0 \\ x_1+3x_2+4x_3+12x_4=0. \\ 3x_1+x_2-4x_3-4x_4=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+x_4-6x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4+25x_5=0 \\ -5x_1-x_2-x_3-x_4+16x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4+12x_5=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+6x_2+x_3+x_4+25x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4-6x_5=0 \end{cases}$

11. $$\begin{cases} x_1+6x_2+x_3+x_4+25x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+2x_4+5x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3-x_4+10x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \end{cases}.$$

12. $$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3-3x_4-7x_5=0 \\ x_1+4x_2+x_3+12x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3+6x_4-10x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4-14x_5=0 \end{cases}.$$

13. $$\begin{cases} x+2y-3z+t=0 \\ 2x-y-z-3t=0 \\ 4x+y-5z-3t=0 \end{cases}.$$

14. $$\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3-3x_4-7x_5=0 \\ x_1+4x_2+x_3+12x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3+6x_4-10x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4-14x_5=0 \end{cases}.$$

15. $$\begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3+12x_4+7x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3+12x_4+4x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+2x_3-7x_4+20x_5=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4+11x_5=0 \end{cases}.$$

16. $$\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ x-y-z+2t=0 \\ x-2y-4z+7t=0 \end{cases}.$$

17. $$\begin{cases} 4x+y+17z+t=0 \\ x+3y+7z-8t=0 \\ x-2y+2z+7t=0 \end{cases}.$$

18. $$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-10x_4+7x_5=0 \\ x_1-3x_2+x_3+16x_4-11x_5=0 \\ 3x_1+3x_2+7x_3+36x_4+47x_5=0 \\ 3x_1-x_2-x_3-20x_4-13x_5=0 \end{cases}.$$

19. $$\begin{cases} 2x-y+13z+11t=0 \\ x-y+9z+8t=0 \\ 2x+y+3z+t=0 \end{cases}.$$

20. $$\begin{cases} 3x+y-17z-8t=0 \\ 2x+y-12z-5t=0 \\ 3x+2y-19z-7t=0 \end{cases}.$$

21. $$\begin{cases} 4x+3y-7z-t=0 \\ -2x-y+3z+t=0 \\ 3x+y-4z-2t=0 \end{cases}.$$

22. $$\begin{cases} 6x+y+34z+32t=0 \\ 2x+5y+30z+20t=0 \\ x-2y-3z+t=0 \end{cases}.$$

23. $$\begin{cases} -3x+y-18z-11t=0 \\ 2x-3y+19z+12t=0 \\ 3x-2y+21z+13t=0 \end{cases}.$$

24. $$\begin{cases} 5x_1+x_2-23x_3+16x_4=0 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 6x_1-24x_3+18x_4=0 \end{cases}.$$

25. $$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}.$$

7. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системаларини ечинг:

1. $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y-3z=3\ . \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y-3z=5 \\ x-y+2z-2t=-4. \\ 2y-z-t=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+2y-3z=1. \\ 5x+y-6z=5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ x+2y+z=1\ . \\ x+4y-3z=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+2y-3z=1 \\ 5x+y-6z=5 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x-3y+2z=2 \\ x+y-5z=7\ . \\ 3x-y-8z=16 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=2 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4-2x_5=-1 \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4-3x_5=2 \end{cases}.$

9. $\begin{cases} x-2y-z=2 \\ -2x+4y+2z=-4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x-y+z=1 \\ -3x+2y+5z=-20. \\ -4x-2y+z=-18 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x+y-4z=2 \\ x+2y-z=1\ . \\ 3x-3y-2z=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ z-y-z+t=1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+2y-z-2t=5 \\ -2x-y+2z+t=-4 \\ -x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=-1 \end{cases}.$

16. $\begin{cases} 2x+y-5z-t=2 \\ x-2y+2t=1 \\ -x+3y-z-3t=-1 \\ x-y-z+t=1 \end{cases}$

17. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases}.$$

18. $$\begin{cases} 2x + y - 5z - t = 2 \\ x - 2y + 2t = 1 \\ -x + 3y - z - 3t = -1 \\ x - y - z + t = 1 \end{cases}.$$

19. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

20. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

21. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 8x_3 + 10x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8 \end{cases}.$$

22. $$\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 24x_4 + 27x_5 = 5 \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8 \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9 \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4 \end{cases}.$$

23. $$\begin{cases} x + 2y - z - 2t = 5 \\ -2x - y + 2z + t = -4 \\ -x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = -1 \end{cases}.$$

24. $$\begin{cases} -3x + y + z + 8t = 14 \\ 2x + 7y + 30z - 36t = 29 \\ -5x - 2y - 13z + 28t = 5 \end{cases}.$$

25. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}.$$

8. Қуйидаги векторларга қурилган параллепипеднинг ҳажмини топинг:

$$\overline{P} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}, \quad \overline{Q} = \overline{A} + \overline{B} - \overline{C}, \quad \overline{R} = \overline{A} - \overline{B} + \overline{C}$$

9. Учта берилган векторлар компланар векторлар бўлса, унда уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлишини алгебра нуқтаи – назардан исботланг.

10. Агар $\overline{A} \perp \overline{B}$ ва $\overline{A} \perp \overline{C}$ бўлса, унда $\overline{A}\left[\left[\overline{B}, \overline{C}\right]\right] = 0$ бўлишини исботланг.

11. Агар $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] + \left[\overline{b}, \overline{c}\right] + \left[\overline{c}, \overline{a}\right] = 0$ бўлса, унда шу $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторларнинг компланар векторлар бўлишини исботалнг.

12. Қуйидаги иккита

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

13. Координата бошидан ўтувчи, $X0Z$ – текисликка ётувчи ҳамда $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

14. А(2 , 3, 1) нуқтадан ўтувчи $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

15. $2x+y-3z+1=0$ текислик билан $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ ва $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

16. А ва В ларнинг қандай қийматида $Ax+By+6z-7=0$ текислик билан $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$ тўғри чизиқ перпендикуляр бўлади.

17. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи ва $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ тўғри чизиққа параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

18. Агар эллипснинг тенгламаси $25x^2+169y^2=4225$ бўлса, унда эллипснинг ўқларини, фокус нуқтасининг координатасини ҳамда эксцентриситетини топинг.

19. Агар эллипснинг директриссалари орасидаги масофа фокуслари орасидаги масофага нисбатан 4 марта катта бўлса, у ҳолда эллипс эксцентриситетини топинг.

20. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ эллипсда унинг кичик ўқидан 5 бирлик масофада ётувчи нуқтанинг координаталарини топинг.

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг $F(c,0)$ фокус нуқтаси орқали унинг катта ярим ўқига перпендикуляр равишда ватар ўтказилган. Шу ватарнинг узунлигини топинг.

22. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипсга $13x+12y-115=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган урунма тўғри чизиғи ўтказилган. Шу урунма тўғри чизиғининг тенгламасини топинг.

23. Агар гиперболанинг ҳақиқий ўқи 6 га ва гипербола (9, - 4) нуқта орқали ўтса, унда гиперболанинг тенгламасини топинг.

24. Гипербола $A(-5,2)$ ва $B(2\sqrt{5},\sqrt{2})$ нуқталардан ўтса, унда гиперболанинг тенгламасини топинг.

25. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ эллипс билан умумий фокусга ва умумий қиррага эга бўлган гиперболанинг тенгламасини топинг.

26. Агар гиперболанинг директриссаси тенгламаси $x=\pm 3\sqrt{2}$ бўлиб, асимптоталари орасидаги бурчак 90^0 бўлса, унда гипербола тенгламасини топинг.

27. Агар гиперболанинг асимптоталарининг тенгламаси $y=\pm 2x$ бўлиб, фокуси координата бошидан 5 бирлик масофада ётса, унда гиперболанинг тенгламасини тузинг.

28. Агар гиперболанинг асимптоталарининг тенгламаси $y=\pm\frac{5}{3}x$ дан иборат бўлиб, гипербола $N(6,9)$ нуқтадан ўтиши маълум бўлса, у ҳолда гиперболанинг тенгламасини тузинг.

29. Детерминантни реккуриент формула ёрдамида ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3\ 2\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ 1\ 3\ 2\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 3\ 5 \end{vmatrix}$$

30. a(2;–3;4) , b(1;0;–3) va c(7; –6; –1) векторларни чизиқли боғлиқга текширинг.

31. A(3;–2) , B(–3;4) ва координита бурчаги 60^0 бўлса, аффин координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофани топинг.

32. Векторларни чизиқли боғлиқликка текширинг.

$a_1 = (49, 40, 73, 147, -80)$, $a_2 = (24, 19, 36, 72, -38)$, $a_3 = (73, 59, 98, 219, -118)$, $a_4 = (47, 36, 71, 141, -72)$

33. *Ox* ўқда ётувчи *A*(3;–2) va *B*(–3;4) нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқтани топинг.

34. *a* ва *b* векторлар узунликлари мос равишда 2 ва 3 га тенг бўлиб, улар орасидаги бурчак 60^0 бўлса, |3a-2b| ни ҳисобланг.

35. Детерминантни реккуриент формула ёрдамида ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

36. a(2;–3;4) , b(1;0;–3) va c(7; –6; –1) векторларни чизиқли боғлиқга текширинг.

37. A(3;–2) , B(–3;4) ва координита бурчаги 60^o бўлса, аффин координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофани топинг.

38. Векторларни чизиқли боғлиқликка текширинг.

$a_1 = (49, 40, 73, 147, -80)$, $a_2 = (24, 19, 36, 72, -38)$, $a_3 = (73, 59, 98, 219, -118)$, $a_4 = (47, 36, 71, 141, -72)$

39. *Ox* ўқда ётувчи *A*(3;–2) va *B*(–3;4) нуқталардан танг узоқликда ётган нуқтани топинг.

40. *a* ва *b* векторлар узунликлари мос равишда 2 ва 3 га тенг бўлиб, улар орасидаги бурчак 60^0 бўлса, |3a-2b| ни ҳисобланг.

41. Квадратик формани каноник кўринишга келтиринг.

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

42. Квадратик формани рационал коэффициентли чизиқли алмаштиришлар ёрдамида, бутун коффициентли каноник кўринишга келтиринг.

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$$

43. Квадратик формани каноник кўринишга келтиринг. $4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$

44. Квадратик формани каноник кўринишга келтиринг.

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

45. Квадратик формани рационал коэффициентли чизиқли алмаштиришлар ёрдамида, бутун коффициентли каноник кўринишга келтиринг.

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$$

46. Квадратик формани рационал коэффициентли чизиқли алмаштиришлар ёрдамида, бутун коффициентли каноник кўринишга келтиринг.

$$3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$$

ОРАЛИҚ НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1 – оралиқ назорат учун вариантлар

1 – вариант

1. Матрица тушунчаси. Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш, айириш ва уларнинг хоссалари.
2. Дитерминантнинг 1- чи, 2- чи, 3 – чи хоссаси.
3. Агар учбурчакнинг учлари $A(-2, 1), B(-5, 1)$ ва $C(3, -5)$ бўлса, шу учбурчакнинг периметрини ва юзасини топинг.

2 – вариант

1. Матрицани матрицага кўпайтириш. Матрицани матрицага кўпайтиришнинг хоссалари.
2. Икки нуқта орасидаги масофани топиш. Кесмани берилган нисбатда бўлиш.
3. Детерминантни ҳисобламасдан унинг қийматини топинг:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

3 – вариант

1. Детерминантни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш тўғрисидаги теорема.
2. Афин координаталар системаси.
3. Агар $A(10, -4)$ нуқтадан $B(7, -1)$ нуқтагача масофа 3 бирликка тенг бўлса, унда координата ўқлари орасидаги ω бурчакни топинг.

4 – вариант

1. Детерминантнинг 4- чи, 5 – чи, 6 – чи хоссалари.
2. Ўқда йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар. Асосий айният.
3. Агар $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ бўлса, унда шу матрицанинг тескарисини топинг.

5 – вариант

1. Детерминантнинг 7 – чи, 8 – чи, 9 – чи хоссалари.
2. Цилиндрик координаталар системаси.
3. Агар учбурчакнинг учлари $A(4,1), B(7,5)$ ва $C(-4,7)$ бўлса, шу учбурчакнинг $A-$учидан BC томонига ўтказилган биссектрисанинг BC томон билан кесишган нуқтанинг координаталарини топинг.

6 – вариант

1. Тескари матрица. Тескари матрицанинг мавжудлиги ҳақидаги теорема.
2. Сферик координаталар системаси.
3. Детерминантни ҳисобламасдан қуйидаги тенгликни исботланг:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

7 – вариант

1. Сатр ва устунларнинг чизиқли боғлиқлиги.
2. Фазода йўналтирилган кесма. Йўналтирилган кесмалар устида чизиқли амаллар.
3. Детерминантни реккуриент формула ёрдамида ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

8 – вариант

1. Матрицанинг ранги тушунчаси. Базис минор ҳақидаги теорема.
2. Қутб координаталар системаси. Қутб координаталар системасида икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи.
3. Детерминантни учбурчак шаклида келтириб ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & .... & 2 \\ 2 & 3 & 2 & .... & 2 \\ 2 & 2 & 3 & .... & 2 \\ .... & .... & .... & ..... & ..... \\ 2 & 2 & 2 & ..... & 3 \end{vmatrix}$$

2 – оралиқ назорат учун вариантлар

1 – вариант

1. Вектор тушунчаси ва векторлар устида чизиқли амаллар ва чизиқли амалларнинг хоссалари.
2. Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси.
3. Агар учбурчак $\overline{AB}=2\overline{a}-6\overline{b}$, $\overline{BC}=\overline{a}+7\overline{b}$ ва $\overline{CA}=-3\overline{a}-\overline{b}$ векторларга қурилган бўлиб, $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ – векторлар ўзаро перпендикуляр орт векторлар бўлса, унда шу учбурчакнинг бурчакларини топинг.

2 – вариант

1. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Иккита векторнинг чизиқли комбинацияси.
2. Текисликдаги тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган, кесмалардаги ва каноник тенгламалари.
3. Агар $\overline{AB}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{AD}=\overline{m}-3\overline{n}$ бўлиб, $|\overline{m}|=5$, $|\overline{n}|=3$ ва $(\widehat{mn})=\frac{\pi}{6}$ бўлса, шу векторларга қурилган параллелограммнинг юзасини топинг.

3 – вариант

1. Учта векторнинг чизиқли комбинацияси. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
2. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.

3. Мунтазам $ABCDEF$ бешбурчакка $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{AE}=\overline{n}$ бўлса, унда шу векторлар орқали $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{EF}$ векторларни ифодаланг.

4 – вариант

1. Базис тушунчаси. Векторнинг ўқдаги проекцияси ва унинг хоссалари.
2. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.
3. Ихтиёрий $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ векторлар учун $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$ тенглик ўринли бўлса, унда қуйидаги муносабатларни ўринли бўлишини текширинг:

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\left[\overline{b},\overline{c}\right]=\left[\overline{c},\overline{a}\right].$$

5 – вариант

1. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Скаляр кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
2. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи бир масалалар.
3. $3x-4y+10=0$ тўғри чизиғи билан $6x-8y+15=0$ тўғри чизиқнинг параллеллигини исботланг. Улар орасидаги масофани топинг, бунда $\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

6 – вариант

1. Векторлар скаляр кўпайтмасининг геометрик хоссалари.
2. Тўғри чизиқнинг параметрик ва бурчак коэффициентли тенгламалари.
3. Агар $ABCD$ ромбнинг диогоналлари $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$ бўлса, у ҳолда ромбнинг $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ва $\overline{DA}$ томонларини шу $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ - векторлар орқали ифодаланг.

7 – вариант

1. Декарт координаталар системасида векторлар скаляр кўпайтмасининг ифодаси.
2. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.
3. Агар учбурчакнинг $A(-4,2)$ учи бўлиб, иккита медеаналарининг тенгламалари $3x-2y+2=0$, $3x+5y-12=0$ бўлса, унда шу учбурчакнинг томонларини тенгламаларини топинг.

8 – вариант

1. Вектрларнинг вектор кўпайтмаси. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
2. Нуктадан тўғри чизиққача бўлган масофани топиш.
3. Агар ромбнинг диогоналлари 10 ва 4 бирликка тенг бўлса, унда ромбнинг томонларини тенгламаларини тузинг.

3 – чи оралиқ назорат вариантлари

1 – вариант

1. Векторлар вектор кўпайтмасининг геометрик хоссалари.
2. Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликларнинг тўла бўлмаган тенгламалари.
3. Агар $\overline{a} = 3\overline{m} + 5\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, $\overline{c} = 2\overline{m} + 7\overline{n}$ бўлиб, $|\overline{m}| = \frac{1}{2}$, $|\overline{n}| = 3$, $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = 135^0$ бўлса шу векторларга қурилган паралелепипеднинг ҳажмини топинг.

2 – вариант

1. Вектор кўпайтманинг декарт координаталар системасидаги ифодаси.
2. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг параллеллиги ва перпендикулярлик шартлари.
3. Агар учта вектордан ихтиёрий иккитаси коллинеар бўлса, унда уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлишини исботланг.

3 – вариант

1. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
2. Текисликнинг нормал тенгламаси.
3. Агар учбурчакнинг иккита томони $\overline{AB} = 3\overline{p} + 5\overline{q}$ ва $\overline{BC} = \overline{p} + 5\overline{q}$ векторлар орқали ифодаланса, у ҳолда $|\overline{CD}|$ – баландлигининг узунлигини топинг, бунда $\overline{p}$ ва $\overline{q}$ – векторлар ўзаро перпендикуляр орт векторлар.

4– вариант

1. Векторлар аралаш кўпайтмасининг декарт координаталар системасидаги ифодаси.
2. Фазода тўғри чизиқнинг нормал ва параметрик тенгламаси.
3. Агар $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ – векторлар ўзаро перпендикуляр орт векторлар бўлиб, бу учлик чап учлик бўлса, у ҳолда $\overline{Q}=\left[(3\overline{m}+4\overline{n}+5\overline{p})(\overline{m}+6\overline{n}+4\overline{p})\right]$ векторнинг узунлигини топинг.

5 – вариант

1. Векторлар аралаш кўпайтмасининг геометрик хоссалари.
2. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.
3. $A(3,\,1,\,-2)$ нуқта ва $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

6 – вариант

1. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси. Нуқтадан текисликкача масофа.
2. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш.
3. $\overline{A}=3\overline{P}+2\overline{Q}-5\overline{R}$, $\overline{B}=\overline{P}-\overline{Q}+4\overline{R}$, $\overline{C}=\overline{P}-3\overline{Q}+\overline{R}$ векторларга параллелепипед қурилган. Агар паралелепипеднинг асоси $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ векторларга қурилган параллелограмм бўлса, шу паралелепипеднинг баландлигини топинг. Бунда $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ва $\overline{R}$ ўзаро перпендикуляр орт векторлар.

7– вариант

1. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.
2. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа.
3. $A(4,\,-3,\,1)$ нуқтанинг $x+2y-z-3=0$ текисликдаги проекциясини топинг.

8 – вариант

1. Вектор кўпайтманинг таърифи. Векторлар вектор кўпайтмасининг геометрик хоссалари.
2. Текисликнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан текисликкача масофа.

3. $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ тўғри чизиқнинг $x-y+3z+8=0$ текисликдаги проекциясини топинг.

4 – чи оралиқ назорат вариантлари

1 – вариант

1. Эллипс, эллипс шаклини текшириш.
2. Чизиқли тенгламалар системаси ва унинг ечими тушунчаси.
3. Агар гипербола $N(6,\ 9)$ нуқта орқали ўтиб, $y=\pm\frac{5}{3}x$ тўғри чизиқ тенгламалари унинг асмптотаси бўлса, унда гиперболанинг ярим ўқларини топинг.

2 – вариант

1. Гипербола, гипербола шаклни текшириш.
2. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари.
3. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ эллипсга тўғри тўртбурчак ички чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг иккита томони унинг фокус нуқтаси орқали ўтади. Шу тўғри тўртбурчакнинг юзасини топинг.

3 – вариант

1. Парабола. Парабола шаклини текшириш.
2. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси ечимлари тўпламининг хоссалари.
3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипснинг Ох ва Оу ўқларининг бессектрисаси билан устма – уст тушган деметрини узунлигини топинг.

4 – вариант

1. Эллипснинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси.
2. Кронекер – Капелли теоремаси.
3. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ эллипс билан умумий фокусга эга бўлган гипербола тенгламасини тузинг, бунда гипербола эксцентриситети $e=1{,}25$.

5 – вариант

1. Гиперболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси.
2. Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш шарти. Крамер усули.
3. Агар $x-2y+5=0$ тўғри чизиқ $y^2=2px$ параболанинг урунма тенгламаси бўлса, унда параболанинг p – параметрини топинг.

6 – вариант

1. Параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси.
2. Ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг ечимини топиш.
3. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболанинг Ох ўқи билан $\frac{\pi}{3}$ бурчак остида кесишадиган урунма тенгламасини тузинг.

7 – вариант

1. Эллипснинг урунма тенгламаси.
2. Икккинчи тартибли сиртларни синфларга ажратишнинг А – ҳоли.
3. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ гиперболанинг $A(5\,,\,-4)$ нуқтасидан ўтказилган урунма тенгламасини тузинг.

8 – вариант

1. Параболанинг урунма тенгламаси.
2. Иккинчи тартибли сиртларни синфларга ажратишнинг В – ҳоли.
3. $A(2\,,\,-5)$ нуқтадан $x^2-4y^2=4$ гиперболанинг асимптотасига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Шу тўғри чизиқларнинг тенгламасини тузинг.

ЯКУНИЙ НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

(1 семестр)

1 - билет

1. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти ҳақидаги теорема.
2. Векторларнинг вектор кўпайтмаси. Векторлар вектор кўпайтмасининг геометрик хоссалари
3. A(3, 2) ва B(15, 6) бўлиб, шу $\left|AB\right|-$кесма бешта тенг бўлакка бўлинган бўлса, унда шу бўлакка бўлувчи нуқталарнинг координаталарини топинг.

2 - билет

1. Тескари матрица. Тескари матрицанинг мавжудлиги ҳақидаги теорема.
2. Вектрларнинг скаляр кўпайтмаси. Векторлар скаляр кўпайтмасининг алгебраик ва геометрик хоссалари.
3. Агар қийшиқ бурчакли координаталар системасида ABC – учбурчакнинг учлари $A(-5,-1)$, $B(3,-2)$ ва $C(1,4)$ бўлиб, юзаси 11,5 $м^2$ бўлса, унда координата ўқлари орасидаги $\omega-$ бурчакни топинг.

3 - билет

1. Матрицанинг ранги тушунчаси. Базис минор ҳақидаги теорема.
2. Аналитик геометриянинг содда масалалари (икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш).
3. Агар $\overline{A}=5\overline{p}+2\overline{q}$ ва $\overline{B}=\overline{p}-3\overline{q}$ бўлиб, $\left|\overline{p}\right|=2\sqrt{2}$, $\left|\overline{q}\right|=3$, $\overline{p}$ ва $\overline{q}$ векторлар орасидаги бурчак $\dfrac{\pi}{4}$ га тенг бўлса, унда шу $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ вектрларга қурилган параллелограммнинг диогоналлари узунликларини топинг.

4 - билет

1. Матрицаларни матрицаларга қўшиш, матрицани сонга кўпайтириш, матрицадан матрицани айириш амаллари ва уларнинг хоссалари.
2. Агар A – матрица n – чи тартибли матрица бўлиб, j – (j=1, 2, … , n) A – матрицанинг ихтиёрий устуни бўлса, унда қуйидагини исботланг:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i$$

3. Агар $\overline{a}=4\overline{m}-\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{c}=2\overline{m}-3\overline{n}$ бўлиб, $m^2=4$, $n^2=1$, $\overline{m}$ ва $\overline{n}$ векторлар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ бўлса, унда қуйидаги ифодани қийматини топинг: $a^2+3(\overline{a},\ \overline{b})-2(\overline{b},\overline{c})+1$

5 - билет

1. Қутб, аффин координаталар системаси. Қутб ва аффин координаталар системасида икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи.
2. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги. Иккита ва учта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
3. Қуйидаги n – чи тартибли детерминантни реккуриент формула ёрдамида ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

6 - билет

1. Цилиндрик координаталар системаси.
2. Агар А – матрица n – чи тартибли матрица бўлиб, i – (i=1, 2, … , n) А – матрицанинг ихтиёрий сатри бўлса, унда қуйидагини исботланг:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\overline{M}_j^i$$

3. Агар параллелограмм $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}$ ва $\overline{b}=\overline{m}-3\overline{n}+\overline{p}$ векторларга қурилган бўлиб, бунда $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ - векторлар ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар бўлса, унда шу параллелограммнинг юзасини топинг.

7 - билет

1. Сферик координаталар системаси.
2. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
3. Лаплас теоремасидан фойдаланиб, детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

8 - билет

1. Детерминантнинг биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи хоссалари.
2. Декарт координаталар системасида ўзининг координаталари билан берилган векторлар орасидаги бурчакни топиш формуласи.
3. Агар қийшиқ бурчакли координаталар системасининг ўқлари орсидаги бурчаги $\omega = 150^0$ бўлиб, шу координаталар системасида учбурчакнинг учлари A(3, 1) , B(-1, 4) ва C(0, 0) бўлса, шу учбурчакни юзасини топинг.

9 - билет

1. Базис тушунчаси. Векторларнинг ўқлардаги проекцияси ва унинг хоссалари.
2. Детерминантнинг бешинчи, олтинчи, еттинчи хоссалари.
3. Агар қутб координаталар системасида $ABC-$учбурчакнинг учлари $A\left(9, \frac{\pi}{10}\right)$, $B\left(12, \frac{\pi}{3}\right)$ ва $C\left(10, \frac{3\pi}{5}\right)$ бўлса, унда шу $ABC-$учбурчакнинг юзасини топинг

10 - билет

1. Аффин ва қутб координаталар системаси.
2. Детерминантнинг саккизинчи ва тўққизинчи хосслари. Лаплас теоремаси.

3. Агар ромбнинг диогоналлари $\overline{AC} = a$ ва $\overline{BD} = b$ бўлса, унда $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ва $\overline{DA}-$ векторларни топинг.

11 - билет

1. Матрицаларни кўпайтириш, сонга кўпайтириш ва уларнинг хоссалари.
2. Вектор кўпайтма ва унинг геометрик маъноси.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ бўлса, 2A – 3B ни ҳисобланг

12 - билет

1. Детерминант ва уни ихтиёрий сатр бўйича ёйиш ҳақидаги теоремани исботланг.
2. Аналитик геометриянинг содда масалалари.
3. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x \\ x & 2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & n \end{vmatrix}$.

13 – билет

1. Тескари матрица.
2. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
3. A(3;–2) , B(–3;4) ва координита бурчаги 60^{o} бўлса, аффин координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофани топинг.

14 – билет

1. Базис минор ҳақидаги теорема.
2. Координаталари берилган векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмаси.
3. Матрицаларни кўпайтиринг: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

15 – билет

1. Детерминантнинг ихтиёрий иккита сатрини алмаштириш ҳақидаги теоремани исботланг.
2. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
3. Ox ўқда ётувчи $A(3;-2)$ va $B(-3;4)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқтани топинг.

16 – билет

1. Матрицалар йиғиндисининг детерминанти.
2. Вектор кўпайтма ва унинг алгебраик хоссалари.
3. a ва b векторлар узунликлари мос равишда 2 ва 3 га тенг бўлиб, улар орасидаги бурчак 60^{0} бўлса, |3a-2b| ни ҳисобланг.

17 – билет

1. Детерминантни ихтиёрий устуни бўйича ёйиш ҳақидаги теоремани исботланг.
2. Текислик ва фазода декарт координаталар системаси.
3. Детерминантларни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3\ 2\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ 1\ 3\ 2\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 3\ 5 \end{vmatrix}$$

18 – билет

1. Матрицанинг ранги тушунчаси.
2. Учта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
3. *Ox* ўқда ётувчи $A(3;-2)$ va $B(-3;4)$ нуқталардан танг узоқликда ётган нуқтани топинг.

19 – билет

1. Матрицани транспонирлаш, хоссалари ва унинг детерминанти ҳақидаги теорема.
2. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва унинг геометрик хоссалари.
3. Детерминантни ҳисобланг: $\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x \\ x & 2 & \ldots & x \\ . & . & \ldots & . \\ x & x & \ldots & n \end{vmatrix}$

20 – билет

1. Матрица тушунчаси, уларни қўшиш ва унинг хоссалари.
2. Векторлар аралаш кўпайтмаси ва унинг геометрик маъноси.
3. Детерминантларни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 3\ 2\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ 1\ 3\ 2\ 0 \ldots 0\ 0\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 3\ 5 \end{vmatrix}$$

(2 – семестр)

1 – билет

1. Вектор кўпайтма. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
2. Битта тўғри чизиққа тегишли бўлмаган учта нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликнинг нормалланган тенгламаси.
3. Системанинг биргаликда эканлигини текширинг, умумий ва хусусий ечимини топинг:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

2 – билет

1. Вектор кўпайтмасининг геометрик мазмуни.
2. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.
3. Фундаментал ечимлар системасини топинг:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

3 – билет

1. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси. Учта векторнинг аралаш кўпайтмаси.
2. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси.
3. Системанинг биргаликда эканлигини текширинг, умумий ва хусусий ечимини топинг:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

4 – билет

1. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси.
2. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази. Координаталар системасини буриш орқали иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаларини соддалаштириш.
3. Қуйидаги векторларга қурилган параллепипеднинг ҳажмини топинг:

$$\overline{P} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}, \;\; \overline{Q} = \overline{A} + \overline{B} - \overline{C}, \;\; \overline{R} = \overline{A} - \overline{B} + \overline{C}$$

5 – билет

1. Чизиқли тенгламалар сиситемаси ва унинг ечими тушунчаси.
2. Эллипс. Эллипснинг эксцентриситети ва директирисаси.
3. Учта берилган векторлар компланар векторлар бўлса, унда уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлишини алгебра нуқтаи – назардан исботланг.

6 – билет

1. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули.
2. Гипербола. Гиперболанинг эксцентриситети ва директирисаси.
3. Агар $\overline{A} \perp \overline{B}$ ва $\overline{A} \perp \overline{C}$ бўлса, унда $\overline{A}\left[\left[\overline{B}, \overline{C}\right]\right] = 0$ бўлишини исботланг.

7 – билет

1. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган ечимлари. Бир жинсли системаларнинг ечимлари тўпламининг хоссалари.
2. Эллипс шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш.
3. Қуйидаги иккита

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

8 – билет

1. Текисликда тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг тўла бўлмаган тенгламалари.
2. Гипербола шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш.
3. Агар $\overline{A} \perp \overline{B}$ ва $\overline{A} \perp \overline{C}$ бўлса, унда $\left[\overline{A}\left[\overline{B}, \overline{C}\right]\right]=0$ бўлишини исботланг.

9 – билет

1. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси, бурчак коэффициентли тенгламаси. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак.
2. Парабола шаклини уларнинг каноник тенгламалари орқали текшириш. Эллипс, гипербола ва параболаларнинг урунма тенгламалари.
3. Координата бошидан ўтувчи, $X0Z-$текисликка ётувчи ҳамда $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

10 – билет

1. Текисликда тўғри чизиқларнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан тўғри чизиқгача бўлган масофа.
2. Чизиқли фазо тушунчаси. мисоллар
3. A(2 , 3, 1) нуқтадан ўтувчи $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

11 – билет

1. Текисликнинг кесмалардаги тенгламаси. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.
2. Иккинчи тартибли эгри чизиқ инвариантлари. Иккинчи тартибли эгри чизиқ турлари.

3. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи ва $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$ тўғри чизиққа параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

12 – билет

1. Нуқтадан текисликгача бўлган масофа. Текисликлар дастаси. Тўғри чизиқнинг текисликка тегишлилик шарти.
2. Нормалланган фазо. Мисоллар.
3. Агар эллипснинг тенгламаси $25x^2+169y^2=4225$ бўлса, унда эллипснинг ўқларини, фокус нуқтасининг координатасини ҳамда эксцентриситетини топинг.

14 – билет

1. Текисликда тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартлари.
2. Евклид фазоси. Мисоллар. Коши - Буняковский тенгсизлиги.
3. Агар эллипснинг директриссалари орасидаги масофа фокуслари орасидаги масофаға нисбатан 4 марта катта бўлса, у ҳолда эллипс эксцентриситетини топинг.

15 – билет

1. Текисликнинг умумий тенгламаси. Текисликнинг тўла бўлмаган тенгламалари.
2. Евклид фазосининг нормалланган фазолигини таъминлайдиган теорема.
3. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ эллипсда унинг кичик ўқидан 5 бирлик масофада ётувчи нуқтанинг координаталарини топинг.

16 – билет

1. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси. Икки каррали вектор кўпайтма
2. Иккинчи тартибли сирт тенгламаси ва иккинчи тартибли сирт турлари.
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг $F(c,0)$ фокус нуқтаси орқали унинг катта ярим ўқига перпендикуляр равишда ватар ўтказилган. Шу ватарнинг узунлигини топинг.

17 – билет

1. Аралаш кўпайтманинг алгебраик хоссалари. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси.
2. Евклид фазоси. Мисоллар. Коши - Буняковский тенгсизлиги.

3. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ эллипсга $13x+12y-115=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган урунма тўғри чизиғи ўтказилган. Шу урунма тўғри чизиғининг тенгламасини топинг.

18 – билет

1. Бичизиқли форма. Бичизиқли форманинг матрицаси. Бичизиқли форма иккита базисдаги матрицалари орасидаги боғланиш.

2. Крамер формуласи. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар усули билан ечиш.

3. Агар гиперболанинг асимптоталарининг тенгламаси $y=\pm 2x$ бўлиб, фокуси координата бошидан 5 бирлик масофада ётса, унда гиперболанинг тенгламасини тузинг

19 – билет

1. Чизиқли операторлар улар устида амаллар. L(V,V) чизиқли операторлар фазосининг хоссалари.

2. Квадратик формани Лангранж усулида каноник кўринишга келтириш.

3. $2x+y-3z+1=0$ текислик билан $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$ ва $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

20 – билет

1. Чизиқли операторлар улар устида амаллар. L(V,V) чизиқли операторлар фазосининг хоссалари.

2. Квадратик формани Лангранж усулида каноник кўринишга келтириш.

3. Агар гиперболанинг асимптоталарининг тенгламаси $y=\pm\frac{5}{3}x$ дан иборат бўлиб, гипербола $N(6,\,9)$ нуқтадан ўтиши маълум бўлса, у ҳолда гиперболанинг тенгламасини тузинг.

21 – билет

1. Квадратик форма ва уни Якоби усулида каноник кўринишга келтириш.

2. Чизиқли операторнинг иккита базисдаги матрицалари орасидаги боғланиш

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг $F(c, 0)$ фокус нуқтаси орқали унинг катта ярим ўқига перпендикуляр равишда ватар ўтказилган. Шу ватарнинг узунлигини топинг.

22 – билет

1. Чизиқли операторнинг ядроси ва образи, уларнинг ўлчовлври йиғиндиси ҳақидаги теорема.
2. Кронекер-Капелли теоремаси.
3. Квадратик формани каноник кўринишга келтиринг.

$$x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

9. Реферат мавзулари.

Алгебра фанидан реферат мавзулари

1. Детерминантлар. Детерминантларни бевосита унинг элементлари орқали ифодалаш.
2. Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари.
3. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси.
4. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.
5. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.
6. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари.
7. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари.
8. Координаталари берилган векторларнинг скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмаси.
9. Детерминантнинг ихтиёрий иккита сатрини алмаштириш ҳақидаги теоремани исботланг.
10. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.
11. Матрицалар йиғиндисининг детерминанти.
12. Вектор кўпайтма ва унинг алгебраик хоссалари.
13. Детерминантни ихтиёрий устуни бўйича ёйиш ҳақидаги теоремани исботланг.
14. Текислик ва фазода декарт координаталар системаси.
15. Матрицанинг ранги тушунчаси.
16. Учта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
17. Матрицани транспонирлаш, хоссалари ва унинг детерминанти ҳақидаги теорема.
18. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва унинг геометрик хоссалари.
19. Матрица тушунчаси, уларни қўшиш ва унинг хоссалари.

10.Курс ишлари мавзулари.

Алгебра фанидан курс иши мавзулари

1. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.
2. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар.
3. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.
4. Фазода икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.
5. Фазода тўғри чизиқ ва текисликка оид баъзи масалалар.
6. Эллипс, гипербола, параболанинг уринма тенгламалари.
7. Эллипс, гипербола, параболанинг оптик хоссалари.
8. Декарт координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши.
9. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари.
10. Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши.
11. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули.
12. Квадратик формаларни синфларга ажратиш.
13. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.
14. Детерминантнинг хоссалари. Лаплас теоремаси. Детерминантларни ҳисоблаш усуллари.
15. Кесмани берилган нисбатда бўлиш. Афин координаталари. Қутб координаталар системаси.
16. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси.

11. Малакавий-битирув ишлари мавзулари.

Алгебра фанидан малакавий-битирув ишлари мавзулари

1. Декарт координаталар системасини алмаштиришда иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси коэффицентларининг ўзгариши.
2. Чизиқли операторлар фазоси ва уларнинг хоссалари.
3. Чизиқли операторнинг матрицаси. Базис алмашганда чизиқли оператор матрицасининг ўзгариши.
4. Квадратик формаларни квадратлар йиғиндисига келтириш усуллари. Лагранж усули. Якоби усули.
5. Квадратик формаларни синфларга ажратиш.
6. Ишораси аниқланган квадратик формалар. Сильвестер критерийси.
7. Декарт координаталар системасида скаляр кўпайтманинг ифодаси.
8. Вектор кўпайтмасининг Декарт координаталар системасидаги ифодаси.
9. Аралаш кўпайтманинг декарт координаталардаги ифодаси.
10. Икки каррали вектор кўпайтма ва унинг хоссалари.
11. Чизиқли фазо тушунчаси. Ихтиёрий чизиқли фазоларнинг хоссалари.
12. Чизиқли фазони қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси кўринишда ёйиш. n-ўлчовли чизиқли фазода базис алмаштирилганда координаталарнинг ўзгариши.
13. Ихтиёрий чизиқли системанинг биргаликда бўлиши шарти. Крамер усули. Ихтиёрий чизиқли системанинг ечимларини топиш.
14. Текисликда тўғри чизиқларга доир баъзи масалалар.
15. Икки текислик орасидаги бурчак. Текисликларнинг паралеллик ва перпендикулярлик шартлари.

12.Мустақил таълим учун саволлар.

Алгебра фанидан мустақил таълим учун саволлар

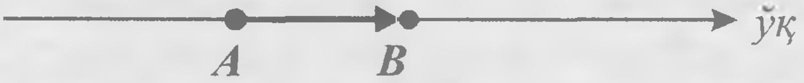
1. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти ҳақидаги теорема.
2. Векторларнинг вектор кўпайтмаси. Векторлар вектор кўпайтмасининг геометрик хоссалари
3. Тескари матрица. Тескари матрицанинг мавжудлиги ҳақидаги теорема.
4. Вектрларнинг скаляр кўпайтмаси. Векторлар скаляр кўпайтмасининг алгебраик ва геометрик хоссалари.
5. Матрицанинг ранги тушунчаси. Базис минор ҳақидаги теорема.
6. Аналитик геометриянинг содда масалалари (икки нуқта орасидаги масофа, кесмани берилган нисбатда бўлиш).
7. Матрицаларни матрицаларга қўшиш, матрицани сонга кўпайтириш, матрицадан матрицани айириш амаллари ва уларнинг хоссалари.
8. Агар А – матрица n – чи тартибли матрица бўлиб, j – (j=1, 2, … , n) А – матрицанинг ихтиёрий устуни бўлса, унда қуйидагини исботланг:
9. $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}^{i}_{j}$
10. Қутб, аффин координаталар системаси. Қутб ва аффин координаталар системасида икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи.
11. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги. Иккита ва учта векторнинг чизиқли боғлиқлиги.
12. Цилиндрик координаталар системаси.
13. Агар А – матрица n – чи тартибли матрица бўлиб, i – (i=1, 2, … , n) А – матрицанинг ихтиёрий сатри бўлса, унда қуйидагини исботланг:
14. $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M}^{i}_{j}$
15. Сферик координаталар системаси.
16. Фазода тўртта векторнинг чизиқли боғликлиги.
17. Детерминантнинг биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи хоссалари.
18. Декарт координаталар системасида ўзининг координаталари билан берилган векторлар орасидаги бурчакни топиш формуласи.
19. Базис тушунчаси. Векторларнинг ўқлардаги проекцияси ва унинг хоссалари.
20. Детерминантнинг бешинчи, олтинчи, еттинчи хоссалари.
21. Аффин ва қутб координаталар системаси.
22. Детерминантнинг саккизинчи ва тўққизинчи хосслари. Лаплас теоремаси.
23. Матрицаларни кўпайтириш, сонга кўпайтириш ва уларнинг хоссалари.
24. Вектор кўпайтма ва унинг геометрик маъноси.
25. Детерминант ва уни ихтиёрий сатр бўйича ёйиш ҳақидаги теоремани исботланг.
26. Аналитик геометриянинг содда масалалари.
27. Тескари матрица.
28. Вектор кўпайтманинг алгебраик хоссалари.

13. Глоссарий(Изоҳли луғат).

Глоссарий
(Изоҳли луғат).

Йўналиши курсатилган тўғри чизиққа *ўқ* деб аталади. Ўқдаги боши ва охири кўрсатилган кесмага *йўналтирилган кесма* дейилади. Боши *A* охири *B* нуқтада бўлган йўналтирилган кесмани $\overline{AB}$ белги орқали белгилаймиз.

Боши ва охири устма-уст тушган йўналтирилган кесмага нол йўналтирилган кесма дейилади.



$\overline{AB}$ йўналтирилган кесманинг узунлиги деб, *AB* кесманинг узунлигига айтилади ва $|\overrightarrow{AB}|$ каби белгиланади.

Ҳар- бир йўналтирилган кесма бирор сон билан характерланади ва бу сонга йўналтирилган кесманинг катталиги дейилади.

$\overrightarrow{AB}$ Йўналишли кесманинг к сонга кўпайтмаси деб, узунлиги |к|·$|\overrightarrow{AB}|$ га тенг ва йўналиши агар к>0 бўлса $\overrightarrow{AB}$ билан бир-хил, агар к<0 бўлса йўналиши $\overrightarrow{AB}$ билан қарама-қарши йўналишга эга бўлган йўналтирилган кесмага айтилади ва к · $\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади.

Берилган AB кесмани λ – нисбатда бўлиш формуласи қуйидагича аниқланади:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\; z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}, \qquad (1)$$

бунда $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Агар қутб ва декарт координаталар боши устма-устма қўйилса қутб координаталари ва декарт координаталари орасидаги қуйидагича боғланиш мавжуд:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

бунда ρ - қутб радиуси, φ - қутб бурчаги, $0\le\rho<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$.

$A(\rho_1,\varphi_1)$ ва $B(\rho_2,\varphi_2)$ қутб координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофа қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(\rho_1^{\ 2}+\rho_2^{\ 2}-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (3)$$

(исботи косинуслар теоремасидан келиб чиқади).

Текисликда *A* нуқта оламиз, унинг *Ox* ва *Oy* ўқларидаги проекцияларини мос равишда A_x , A_y орқали белгилайлик. *A* нуқтанинг *x* ва *y* аффин координаталари деб, мос равишда $\overline{OA_x}$ ва $\overline{OA_y}$ йўналтирилган кесмаларнинг катталикларига айтилади ва $A(x,y)$ каби белгиланади.

Текисликда $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа қуйидагача аниқланади:

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2|x_2-x_1||y_2-y_1|\cos\omega}\,. \qquad (4)$$

Агар Oxy декарт координаталар системаси қуйидагича танланса, уани O координата боши O координата боши билан, Ox эса Ox ўқ билан устма-уст қўйилса A нуқтанинг x, y декарт координаталари билан x', y' афин координаталари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x = x' + y'\cos\omega \\ y = y'\sin\omega \end{cases} \qquad (5)$$

H нуқтанинг ρ, φ, z цилиндрик координаталари деб, H_T нуқтанинг Т текисликдаги ρ, φ қутб координаталари ва $\overline{ON_z}$ йўналтирилган кесманинг z катталигига айтилади ва $H(\rho, \varphi, z)$ каби белгиланади.

Агар $Oxyz$ декарт координаталар системаси қуйидагича танланса, уани O координата боши қутб билан, Ox қутб ўқи билан, Oz эса Oz ўқ устма-уст қууилса H нуқтанинг x,y,z декарт координаталари билан ρ. φ, z қутб координаталари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad (6)$$

Агар фазода декарт координаталар системасини қуйдагича киритсак, яъни координата боши билан O нуқтани координата ўқлари билан Ox, Oy, Oz ўқларини устма-уст қўйсак H нуқтанинг x,y,z декарт координаталари ва ρ, φ, θ қутб координаталари орасида боғланиш формуласини topиш мумкин. Бунинг учун H нуқтанинг Oz ўқдаги проекциясини H_Z каби белгиласак $OH_Z\,H$ тўғри бурчакли учбурчакдан $z=\rho\cos\theta$, $OH_T\ H$ тўғри бурчакли учбурчакдан $|\overline{ON_T}| = \rho\sin\theta$, H_T нуқтанинг Oxy текисликдаги қутб координаталарига кўра $x = |\overline{ON_T}|\cos\varphi$, $y = |\overline{ON_T}|\sin\varphi$. $|\overline{ON_T}| = \rho\sin\theta$ эканлигини ҳисобга олсак қууидаги формулага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad (7)$$

Таъриф. m *та сатр ва* n *та устундан иборат сонлар жадвалига матрица дейилади.*

m ва n сонларга матрицанинг тартиби дейилади ва (m x n) каби белгиланади

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

ёки қисқача $A=(a_{ij})$ $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$ каби ёзилади.

a_{ij} - матрицанинг i-сатр, j-устуни элементи дейилади.

Таъриф. *Агар матрицанинг сатрлари сони устунлар сонига тенг* (m=n) *бўлса,* (2.1) *матрицага квадрат матрица дейилади, яъни*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ - *бош диагонал элементлари дейилади.*

$a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ - *ёрдамчи диагонал элементлари дейилади.*

Таъриф. *Барча элементлари нолдан иборат матрицага нол матрица дейилади.*

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (m \times n)$$

Таъриф. *Фақат бош диоганал элементлари нолдан фарқли бўлган квадрат матрицага диагонал матрица дейилади.*

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \qquad (n \times n) \quad d_i \neq 0, \ i=\overline{1,n}$$

Таъриф. *Бош диагонал элементлари бирдан иборат бўлган диагонал матрицага бирлик матрица дейилади.*

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (n \times n)$$

Таъриф. $A=(a_{ij})$, $(m \times n)$ ва $B=(b_{ij})$, $(m \times n)$ *матрицаларнинг йиғиндиси деб, элементлари A ва B матрицанинг мос элементлари йиғиндисидан ташкил торган* $C=(c_{ij})$ *матрицага айтилади, яъни*

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ .$$

Таъриф. $A=(a_{ij})$ $(m \times n)$ *матрицани* λ *ҳақиқий сонга кўпайтмаси деб, A матрицанинг барча элементларини* λ *сонга кўпайтмасидан ҳосил бўлган матрицага айтилади.*

$$C=\lambda \cdot A=(\lambda \cdot a_{ij})$$

Таъриф. *A ва B матрицаларнинг айирмаси деб, B матрица билан йиғиндиси A матрицага тенг бўлган C матрицага айтилади, яъни*

$A=(a_{ij})$ $(m \times p)$, $B=(b_{ij})$ $(p \times n)$ бўлсин.

Таъриф. *A ва B матрицалар кўпайтмаси деб, шундай* $C=(c_{ij})$ *матрицага айтиладики,* c_{ij} *лар қуйидаги формула орқали аниқланади:*

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

ва $C=A\cdot B$ каби белгиланади.

Таъриф. (8) *матрицанинг* $\overline{M}_j^i$ *минори деб, A матрицанинг i-сатр, j – устунини ўчиришдан ҳосил бўлган n-1 тартибли матрицанинг детерминантига айтилади.*

Таъриф. (8) *матрицанинг детерминанти деб, қуйидаги формула билан аниланувчи сонга айтилади:*

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{ij}\overline{M}_j^1$$

Бу формулага детерминантни *i*-сатр бўйича ёйиш формуласи дейилади.

n-тартибли матрица берилган бўлсин *C* матрицага *A* матрицага *ўнгдан тескари матрица* дейилади, агар

$$AC=E$$

бўлса.

B матрицага *A* матрицага *чапдан тескари матрица* дейилади, агар

$$BA=E$$

бўлса.

E ҳар доим бирлик матрица.

Агар В матрица ўнгдан, С матрица эса чапдан А матрица тескари бўлса, унда улар тенг бўлади ва қуйидагича ёзилади:

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C.$$

Квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у *махсус*, акс ҳолда *махсусмас* матрица дейилади.

Ҳеч бўлмаганда биттаси махсус бўлган матрицаларнинг кўпайтмаси махсус матрица бўлади.

Исталган махсусмас матрицаларнинг кўпайтмаси махсусмас матрица бўлади.

Бу ерда матрицаларни кўрайтириш билан чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш орасидаги боғланишга кўра қуйидаги даъво келиб чиқади: *бир нечта чизиқли алмаштиришни кетма-кет бажаришнинг натижаси берилган барча алмаштиришлар махсусмас бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда махсусмас алмаштириш бўлади.*

Матрицаларни кўпайтиришда бу ролни ушбу

$$E=\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

бирлик матрица бажаради, шу билан бирга у берилган тартибли ихтиёрий *А* матрица билан ўрин алмашиш хоссасига эга:

$$AE=EA=A$$

Матрицаларни кўрайтириш нокоммутатив бўлганлиги сабабли ҳозирча *ўнг* тескари матрица ҳақида сўз киритамиз, яъни шундай A^{-1} матрица ҳақидаки, *А* матрицани ўнг томондан унга кўпайтмаси бирлик матрицани беради :

$$AA^{-1}=E \qquad (10)$$

$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ сатр $B=(b_1, b_2,\dots,b_n)$, . . . , $C=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ сатрларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади, агар шундай $\gamma\dots\mu$ ҳақиқий сонлар топилсаки, қуйидаги тенглик ўринли бўлса: $a_i=\gamma b_j+\dots+\mu c_j$, $(j=\overline{1.n})$ $A=\gamma B+\dots+\mu C$

Таъриф: *A,B,...,C чизиқли боғлиқли дейилади, агар шундай* $\alpha,\beta,\dots,\gamma$ *бирортаси нолдан фарқли сонлар топилсаки, қуйидаги тенглик ўринли бўлса*

$$\alpha A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$$

чизиқли боғлиқли бўлмаган сатрларга чизиқли эркли дейилади.

Таъриф: *A, B,..., C сатрлар чизиқли эркли дейилади,* $\alpha A+\beta B+\ldots+\gamma C=0$ *тенглик фақат* $\alpha=\beta=\ldots=\gamma=0$ *бўлганда ўринли бўлса .*

Таъриф. *A – матрицанинг r – чи тартибли минори деб, A – матрицанинг r та сатри ва r та устунидан ташкил топган r – чи тартибли детерминантга айтилади, бунда r = min(m, n).*

3. *A матрицада r – чи тартибли нолдан фарқли минорлар мавжуд бўлсин.*
4. *Барча (r + 1) – чи тартибли ва ундан юқори тартибли минорлар нолга тенг бўлсин.*

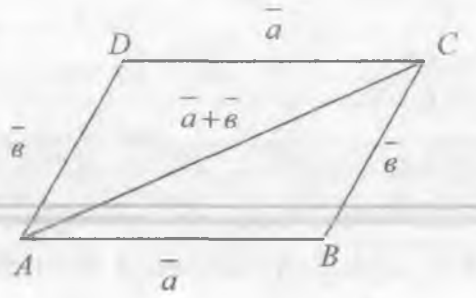
Таъриф. *Юқоридаги иккита шартни қаноатлантирувчи r сонига A матрицанинг ранги дейилади ва rang A = r деб ёзилади.*

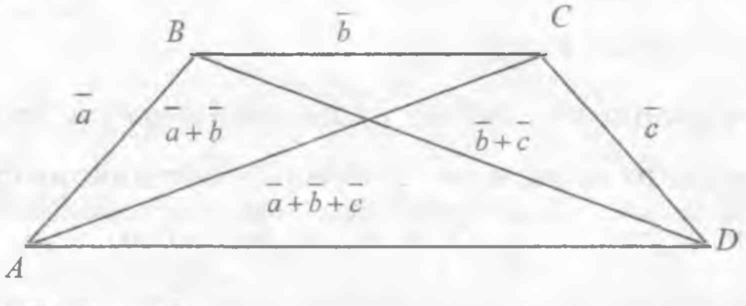
Агар A матрицада юқоридаги икки шартни қаноатлантирса, унда нолдан фарқли r – чи тартибли минорга базис минор дейилади.

Одатда базис минордаги сатрлар ва устунлар базис сатрлари ҳамда базис устунлари дейилади.

Таъриф. *Берилган матрицада элементар алмаштириш деб, матрицанинг бирор сатри (устуни) элементларини ихтиёрий нолдан фарқли ҳақиқий сонга кўпайтириш, бирор ҳақиқий сонга кўпайтириб бошқа бир сатр (устун)га қўшишга айтилади.*

Таъриф. *Йўналтирилган кесмага вектор дейилади.*





$\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси деб, шу векторларнинг ихтиёрий ҳақиқий сонларга кўпайтмаларининг йуғиндисига айтилади, яъни

$$\alpha_1\bar a_1+\alpha_2\bar a_2+\ldots+\alpha_n\bar a_n$$

бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ҳақиқий сонлар.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторларга чизиқли боғлиқли дейилади, агар бирортаси нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар билан чизиқли комбинацияси нолга тенг бўлса, яъни

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = 0$$

бу ерда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлардан бирортаси нолдан фарқли.

Чизиқли боғлиқли бўлмаган векторларга чизиқли эркли векторлар дейилади.

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ векторларга чизиқли эркли дейилади, агар $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = 0$ тенглик фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ шарт бажарилгандагина ўринли бўлса.

Тариф. *$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ чизиқли эркли векторлар фазода базис ташкил этади дейилади, агар ихтиёрий $\bar{d}$ векторни уларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, яъни*

$$\bar{d} = \lambda\ \bar{a} + \mu\ \bar{b} + \gamma\ \bar{c}. \qquad (11)$$

(11) *ёйилмага $\bar{d}$ векторнинг $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базис бўйича ёйилмаси λ, μ, γ - сонларга $\bar{d}$ векторнинг $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ базисдаги координаталари дейилади ва $\bar{d} = \{ \lambda, \mu, \gamma \}$ каби белгиланади.*

Тасдиқ. $\overline{AB}$ векторнинг y ўқга оғиш бурчакги φ га тенг бўлса, у ҳолда $\overline{AB}$ векторнинг проекцияси қуйидагича аниқланади

$$\text{pr}_y \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi.$$

Тариф. ***Иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, шу векторлар узунликлари кўпайтмасини улар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига айтилади ва $\bar{a}\,\bar{b}$ ёки ($\bar{a}, \bar{b}$) каби белгиланади.***

Тариф. ***$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб, $\bar{a}$ вектор узунлигини $\bar{b}$ векторнинг $\bar{a}$ вектордаги проекциясига кўпайтмасига айтилади.***

Тариф. *Учта вектор тартибланган учлик ташкил этади дейилади, агар уларнинг қайси бири биринчи, қайси бири иккинчи, қайси бири 3-эканлиги кўрсатилган бўлса.*

Ёзувда учлик векторларни тартибига қараб ёзамиз.

$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ 1-$\bar{a}$, 2-$\bar{b}$, 3-$\bar{c}$

$\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$ 1-$\bar{c}$, 2-$\bar{a}$, 3-$\bar{b}$.

Тариф. **Нокомпланар $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ учлик векторлар ўнг (чап) учлик ташкил қилади дейилади, агар қуйидаги шартлардан бирортаси бажарилган бўлса:**

1°. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлар умумий бошланғич нуқтага келтирилиб $\bar{c}$ векторнинг учидан қараганда $\bar{a}$ вектордан $\bar{b}$ векторга қисқа бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши (соат стрелкаси бўйича) бўлса.

2°. Агар векторлар битта бошланғич нуқтага келтирилганда улар мос равишда ўнг (чап) қўлнинг бош, кўрсаткич ва ўрта бармоғлари жойлашгандек жойлашса.

3°. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторлар бошланғич нуқтага келтирилганда $\bar{a}$ дан $\bar{b}$ векторга, $\bar{b}$ дан $\bar{c}$ векторга бурилиш соат стрелкасига қарама-қарши (соат стрелкаси бўйича) бўлса.

Тариф. ***$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, у $\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}]$ каби белгиланади ва қуйидаги шартларни қаноатлантиради:***

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi$

2) $\vec{c}$ *вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг ҳар бирига перпендикуляр.*

3) $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ *ўнг учлик ташкил қилади.*

Тариф. ***Ихтиёрий нолдан фарқли $\bar{c}$ векторнинг орт вектори деб, $\bar{c}$ вектор билан бир хил йўналишга эга бирлик векторга айтилади.***

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлар берилган бўлсин.

Таъриф. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $[\vec{a}\,\vec{b}]$ ни $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил бўлган $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ сонга $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси дейилади.*

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар берилган бўлсин.

Таъриф. *$\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг $[\vec{b}\,\vec{c}]$ вектор кўпайтмасини, $\vec{a}$ векторга вектор кўпайтиришдан ҳосил бўлган $[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]]$ векторга $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг икки каррали вектор кўпайтмаси дейилади.*

Қуйидаги формула икки каррали вектор кўпайтма тўғрисидаги формуладир:

$$[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]]=(\vec{a}\,\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c} \tag{12}$$

Оху фиксирланган декарт координаталар системаси бўлсин.

$$Ax+By+C=0 \tag{13}$$

текисликда тўғри чизиқ тенгламасидир.

(13) тенлама тўғри чизиқнинг бирортаси нолдан фарқли $\bar{q}\{A;\ B\}$ перпендикуляр ихтиёрий коэффициентли умумий тенгламаси дейилади.

$\bar{q}\{A; B\}$ векторга тўғри чизиқнинг нормал вектори дейилади.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m} \tag{14}$$

(14) тенгламага тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси дейилади.

Иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги формула орқали топилади:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=t \qquad x-x_1=lt, \quad y-y_1=mt$$

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \tag{15}$$

(15) тенглама тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}\Rightarrow y-y_1=\frac{m}{l}(x-x_1)\Rightarrow y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow \qquad (16)$$

$$\Rightarrow y=kx+y_1-kx_1\Rightarrow y=kx+b, \quad b=y_1-kx_1, \ y=kx+b$$

(16) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

а) L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар умумий тенгламаси билан берилган бўлсин, яъни $A_1x+B_1y+C_1=0$ ва $A_2x+B_2y+C_2=0$ уларнинг нормал векторлари $\overline{n_1}=\{A_1,B_1\}$ $\overline{n_2}=\{A_2,B_2\}$ L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $\overline{n_1}$ ва $\overline{n_2}$ векторлар орасидаги бурчакка тенг. У ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ деб белгиласак:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{n_1 n_2}\right)}{\left|\overline{n_1}\right|\left|\overline{n_2}\right|}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

***L_1* ва *L_2* тўғри чизиқлар параллел бўлса $\overline{n_1}$ ва $\overline{n_2}$ векторлар коллинеар бўлади:** $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлиши учун $\overline{n_1}$ ва $\overline{n_2}$ перпендикуляр бўлиши керак, яъни $A_1A_2+B_1B_2=0$

б) L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1} \quad \text{ва} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$$

каноник тенгламалар билан берилган бўлсин.

$\overline{q_1}=\{l,m\}$ **ва** $\overline{q_2}=\{l_2,m_2\}$ **векторлар *L_1* ва *L_2* тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари бўлади.**

3) φ - L_1 ва L_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак бўлсин

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

2) L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

4) L_1 ва L_2 тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шарти

$$l_1l_2+m_1m_2=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=np_{\bar{n}}\overline{ON}$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \qquad (17)$$

(17) тенгламага тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади.

d сони N нуқтадан L тўғри чизиқгача масофа бўлсин.

Таъриф. N нуктанинг L тўғри чизиққа δ четланиши деб, агар N ва О нуқта L тўғри чизиқдан ҳар-хил томонда ётса d сонига, агар бир томонда ётса- d сонига айтилади.

Агар О координата боши L тўғри чизиқда ётса δ +d га тенг бўлади, агар N нуқта $\overline{n}$ вектор йўналган томонда ётса, акс ҳолда $-d$ га тенг.

Таъриф._Бир текисликда ётувчи ва битта С нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқларга, маркази С нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастаси дейилади. С нуқтани шу дастани ташкил етувчи ихтиёрий иккита тўғри чизиқ орқали ҳар доим ториш мумкин.

$$Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$A(x-x_0) + B(x-x_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (18)$$

(18) тенглама бирор текисликнинг тенгламасидир.

Таъриф. A, B, C сонларидан бирортаси нолдан фарқли (18) тенгламага, Т текисликнинг ихтиёрий A, B, C ва D коэффициентли умумий тенгламаси дейилади.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

(19) тенглик битта тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси.

$$\mathrm{pr}_n \overline{ON} = \overline{n} * \overline{ON} = \text{x} \cos\alpha + \text{y} \cos\beta + \text{z} \cos\gamma$$

$$\text{x} \cos\alpha + \text{й} \cos\beta + \text{z} \cos\gamma - \text{p} = 0 \qquad (20)$$

(20) тенгламага текисликнинг нормал тенгламаси дейилади.

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}. \qquad (21)$$

(21) тенглама тўғри чизиқнинг фазодаги каноник тенгламаси дейилади.

Шунингдек фазода параллел бўлмаган иккита текислик тенгламасидан ташкил топган

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

тенглама ҳам фазода тўғри чизиқ тенгламасини ифодалайди. Текисликлар параллел бўлмаганлиги учун шу текисликларнинг нормал векторлари $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ векторлар коллинеар бўлмайди. Шунинг учун $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ детерминантлардан хеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли бўлади. Шу детерминантлардан $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ детерминантни нолдан фарқли деб, $z-$нинг ўрнига ихтиёрий z_1- ни қўйиб, (22) ни икки ўзгарувчили тенгламалар системасига келтирамиз. Ушбу тенгламалар системасини ечиб,

$$x_1=\frac{B_1(C_2z_1+D_2)-B_2(C_1z_1+D_1)}{A_1B_2-A_2B_1},$$

$$y_1=\frac{A_2(C_1z_1+D_1)-A_1(C_2z_1+D_2)}{A_1B_2-A_2B_1} \tag{23}$$

ечимларини топамиз. Қулайлик учун $z_1=0$ десак, у ҳолда шу тўғри чизиқда ётган $M_1\left(\frac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1},\ \frac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1},\ 0\right)$ нуқтани аниқлаймиз. Энди (22) тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\overline{q}=\{l\,,\ m\,,\ n\}$ – векторни координаталарини аниқлаймиз. Маълумки $\overline{q}=\{l\,,\ m\,,\ n\}$ вектор текисликларнинг $\overline{n}_1=\{A_1\,,\ B_1\,,\ C_1\}$ ва $\overline{n}_2=\{A_2\,,\ B_2\,,\ C_2\}$ нормал векторларига перпендикуляр бўлади. Демак, $\overline{q}=[\overline{n}_1\,,\overline{n}_2]$. Векторлар вектор кўпайтмасининг хоссаларига кўра,

$$l=B_1C_2-C_2B_1\,,\ m=C_1A_2-C_2A_1\,,\ n=A_1B_2-A_2B_1$$

Шунга кўра (22) тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси қуйидагича аниқланади:

$$\frac{x-\dfrac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}}{B_1C_2-C_2B_1}=\frac{y-\dfrac{A_2D_1-A_1D_2}{A_1B_2-A_2B_1}}{C_1A_2-C_2A_1}=\frac{z}{A_1B_2-A_2B_1}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Иккита ҳар хил $M_1(x_1\,,\ y_1\,,\ z_1)$ ва $M_2(x_2\,,y_2\,,z_2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

L тўғри чизиқ $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ каноник тенглама билан берилган бўлсин. Унда

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=t\Rightarrow\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt. \end{cases} \tag{24}$$

бунда $t-$параметр бўлиб, $-\infty<t<+\infty$ бўлади. Одатда (24) тенгламага фазода берилган L – тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси дейилади.

Фазода иккита тўғри чизиқ ўзларининг каноник тенгламалари билан берилган бўлсин. Яъни

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ ва } L_2 : \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари мос равишда $q_1=\{l_1, m_1, n_1\}$ ва $q_2=\{l_2, m_2, n_2\}$ га тенг. Векторларнинг скаляр кўпайтмасининг таърифига кўра $(\overline{q}_1, \overline{q}_2)=|\overline{q}|\cdot|\overline{q}|\cos\varphi$ бўлиб, бунда

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{q}_1, \overline{q}_2)}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_1|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+m_2^2}} \qquad (25)$$

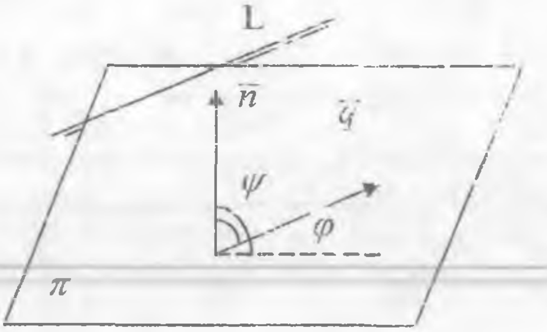
бўлишини топамиз. Ушбу (25) формулага фозада берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топиш формуласи дейилади.

Тўғри чизиқларнинг параллелик шарти:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \qquad (26)$$

Перпендикулярлик шарти:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \qquad (27)$$



Фазода $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ текислик ва $L: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Чизмадаги $\varphi-$бурчак текислик ва тўғри чизиқ орасидаги бурчак, $\psi-$бурчак эса қаралаётган $\pi-$текисликнинг $\overline{n}=\{A, B, C\}$ нормал вектори билан $L-$тўғри чизиқнинг $\overline{q}=\{l, m, n\}$ йўналтирувчи вектори орасидаги бурчак. Шунга кўра $(\overline{q}, \overline{n})=|\overline{q}|\cdot|\overline{n}|\cos\psi$ бўлиб, бунда $\cos\psi=\sin\varphi$. Демак,

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

формула текислик ва тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласи.

Параллелик шарти: $Al+Bm+Cn=0$.

Перпендикулярлик шарти: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

Конусни текисликлар билан турли хил кесиш натижасида кесимда эллипс, гипербола ва парабола ҳосил бўлади.

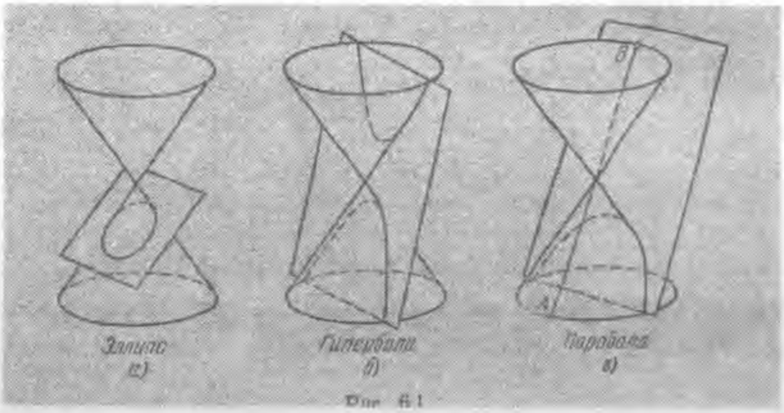


Рис. 6.1

Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқталари деб аталувчи F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига эллипс дейилади.*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{28}$$

тенглама эллипс тенгламаси бўлиб, бунда $b^2=a^2-c^2$. Бунда $a-$эллипснинг катта ярим ўқи, $b-$га эса унинг кичик ярим ўқи дейилади.

Изоҳ. Агар эллипсда $a=b$ бўлса, унда эллипс айлани бўлиб қолади, бунинг учун $a=b=R$ бўлади.

Таъриф. *Қуйидаги катталикка*

$$e=\frac{c}{a} \tag{29}$$

эллипснинг эксцентриситети дейилади.

Эллипс учун $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}<1$ муносабат ўринли бўлади. Демак, эллипс учун эксцентриситет бирдан кичик бўлади. Шуни таъкидлаш керакки, айлана учун эксцентриситет нолга тенгдир. Чунки айланада $a=b$.

Таъриф. *Эллипс марказидан $\frac{a}{e}$ масофадан ўтувчи ва унинг катта ярим ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларга эллипснинг директрисаси дейилади.*

Қуйидаги тенгламалар эллипснинг директриса тенгламалари бўлади:

$$D_1: \qquad x=-\frac{a}{e}, \quad D_2: \qquad x=\frac{a}{e} \tag{30}$$

Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқталари деб аталувчи F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига гипербола дейилади.*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (31)$$

тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси бўлиб, бунда $b^2=c^2-a^2$. a – гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи, b – га эса гиперболанинг мавҳум ярим ўқи дейилади.

Таъриф. *Қуйидаги катталикка*

$$e=\frac{c}{a} \qquad (32)$$

гиперболанинг эксцентриситети дейилади.

Эллипс учун $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>1$ муносабат ўринли бўлади. Демак, эллипс учун эксцентриситет бирдан кичик бўлади.

Таъриф. *Гипербола марказидан* $\frac{a}{e}$ *масофадан ўтувчи ва унинг катта ярим ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларга эллипснинг директрисаси дейилади.*

Худди эллипс сингари қуйидаги тенгламалар гиперболанинг директриса тенгламалари бўлади:

$$D_1: \quad x=-\frac{a}{e}, \quad D_2: \quad x=\frac{a}{e} \qquad (33)$$

Таъриф. *Текисликда фиксирланган ва фокус нуқтаси деб аталувчи нуқтадан текисликда фиксирланган тўғри чизиқгача бўлган масофалар ўзгармас сонга тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига парабола дейилади.*

Таърифдаги фиксирланган $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ – нуқта параболанинг фокус нуқтаси, фиксирланган тўғри чизиқ эса унинг директрисаси дейилади.

$$y^2=2px \qquad (34)$$

тенглама параболанинг каноник тенгламаси. Бунда p – параметр дейилади.

$$\rho = \frac{pe}{1 - e\cos\varphi} \qquad (35)$$

формулага эллипс ёки параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси дейилади.

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{pe}{1 - e\cos\varphi} & W_1 \text{ шохчаси учун}_1 \\ \dfrac{-pe}{1 + e\cos\varphi} & W_2 \text{ шохчаси учун}_1 \end{cases} \qquad (36)$$

тенгламага гиперболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси дейилади.

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

тенгликлар эллипс ва гиперболаларга ўтказилган урунмани топиш формуласидир.

$$y_0 y - p(x + x_0) = 0.$$

формула параболанинг урунмасини топиш формуласи дейилади.

Таъриф. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0$ *тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнига иккинчи тартибли эгри чизиқ дейилади.*

Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22} – коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқлидир.

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (36)$$

тенгламалар системасига n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси дейилади.

Бу ерда a_{ij} (i=1, m. j=1, … , n) тенгламалар системасининг коэффицентлар дейилади. x_1, x_2,..., x_n – номаълумлар; b_1, b_2,…, b_m – озод ҳадлар дейилади.

Агар озод ҳадлар нолга тенг бўлса, у ҳолда (36) системага бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси дейилади, яъни:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (37)$$

Агар тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда (36) системага квадрат чизиқли тенгламалар системаси дейилади, яъни қуйидаги кўринишда бўлса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (38)$$

c_1, $c_2,\ldots$, c_n сонлар тўплами (36) системанинг ечими дейилади, агар шу сонларни мос равишда (36) системадаги x_1, $x_2,\ldots$, x_n номаълумларнинг ўрнига олиб бориб қўйганда ҳар бир тенглама айниятга айланса.

Бир жинсли тенгламалар системасининг ихтиёрий $n–r$ та чизиқли еркли ечимларига шу тенгламалар системасининг *фундаментал ечимлар тўплами* дейилади.

Бир жинсли тенгламалар системасида (c_{r+1}, $c_{r+2},\ldots,c_n$) лар ўрнига кетма-кет равишда e_1=(1,0,0,…,0), e_2=(0,1,0,…,0), …, e_{n-r}=(0,0,0,…,1) ларни танлашдан ҳосил қилинган фундаментал ечимлар тўпламига *нормал фундаментал ечимлар тўплами* дейилади, яъни қуйидаги ечимлар:

$$\begin{cases} X_1 = \left(-\dfrac{M_1(a_{i(r+1)})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+1)})}{M}, 1, 0, \ldots, 0 \right) \\ X_2 = \left(-\dfrac{M_1(a_{i(r+2)})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{i(r+2)})}{M}, 0, 1, \ldots, 0 \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-r} = \left(-\dfrac{M_1(a_{in})}{M}, \ldots, -\dfrac{M_r(a_{in})}{M}, 1, 0, \ldots, 0 \right) \end{cases}. \qquad (39)$$

Базиснинг таърифига кўра (37) бир жинсли тенгламалар системасининг ихтиёрий $X=(c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ ечими X_1, X_2, …, X_{n-r} орқали қуйидагича ифодаланади:

$$X = c_{r+1}X_1 + c_{r+2}X_2 + \ldots + c_n X_{n-r}. \qquad (40)$$

(40) формула (37) бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечими формуласидир.

Таъриф.

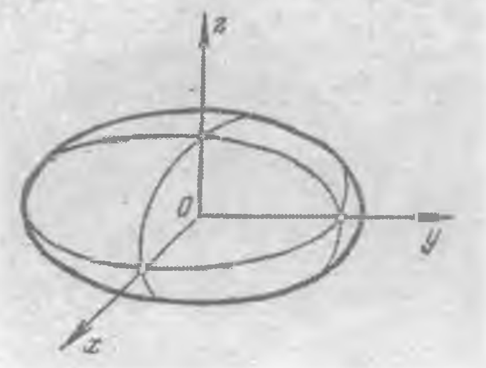
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{23}z + a_{44} = 0 \quad (7.1)$$

Тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрнига иккинчи тартибли сирт дейилади.

Ҳақиқий эллипсоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

бўлиб, эллипсоиднинг шакли қуйидаги расмдан иборатдир:



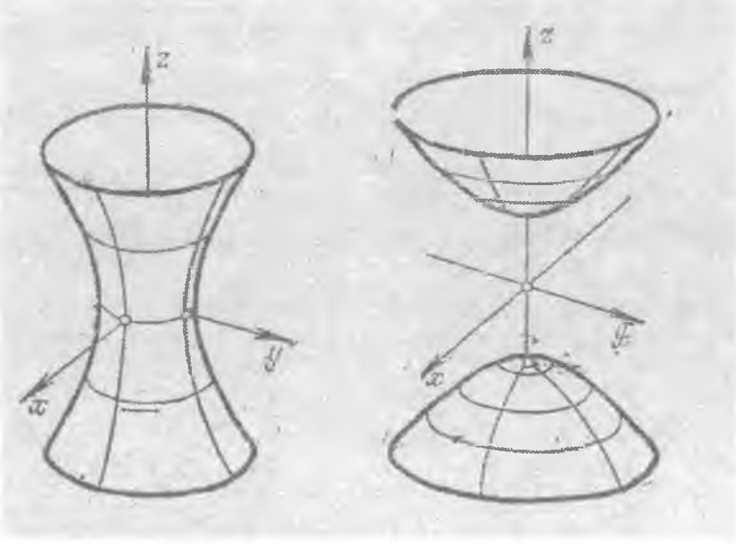
Б***ир паллали гиперболиод*** ва – ***икки паллали гиперболидлар***.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

тенгламадан иборат бўлса, икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

генгламадан иборатдир. Гиперболоидларнинг шакллари қуйидагича бўлади:

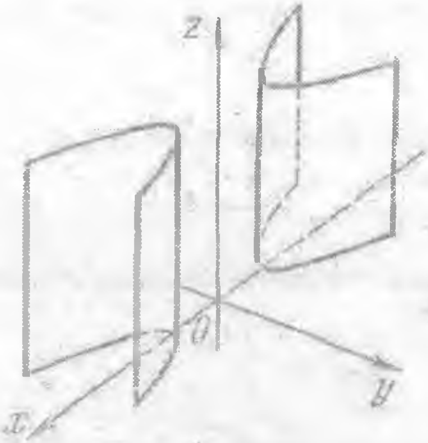


бир паллали икки паллли гиперболиод

Гиперболик цилиндрнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$$

тенгламадан иборат бўлиб, шакли қуйидагича бўлади:

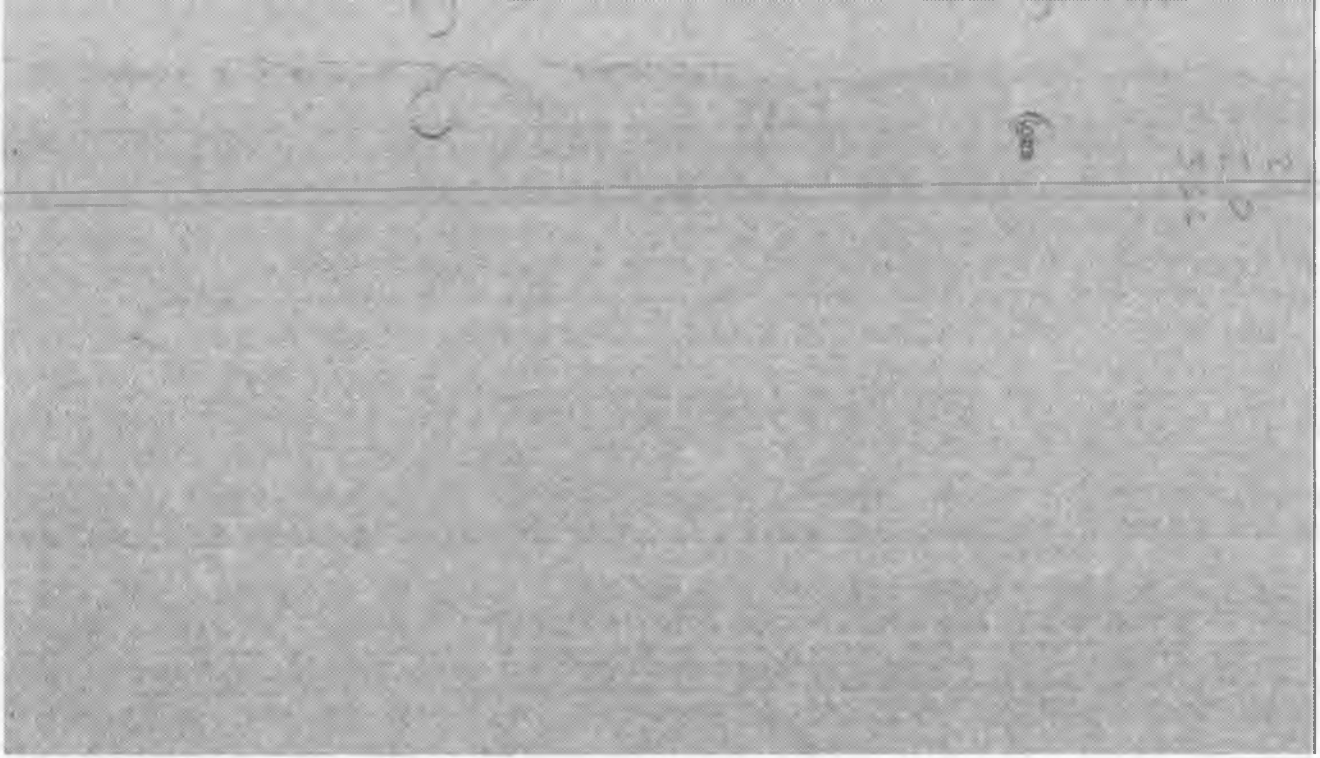


Параболик цилиндрнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - py = 0$$

Тенгламадан иборат бўлиб, сиртнинг шакли қуйидагича бўлади:

14. Норматив ҳужжатлар



Олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизими тўғрисида

НИЗОМ

(Ушбу Низом Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2009 йил 11 июндаги 204-сон буйруғи билан тасдиқланган ва Ўзбекистон Республикаси Адлия вазирлигида 2009 йил 10 июлда 1981-сон билан давлат рўйхатидан ўтказилган.

Топшириққа мувофиқ Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2010 йил 25 августдаги 333-сон буйруғи билан Низомга ўзгартириш ва қўшимчалар киритилган ҳамда Ўзбекистон Республикаси Адлия вазирлигида 2010 йил 26 августда 1981-1-сон билан давлат рўйхатидан қайта ўтказилган.)

Мазкур Низом Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги (Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 й., 9-сон, 225-модда) ва “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури тўғрисида”ги (Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 й., 11-12-сон, 295-модда) қонунларига ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2001 йил 16 августдаги 343-сон “Олий таълимнинг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида” қарорига (Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари тўплами, 2001 й., 15-16-сон, 104-модда) мувофиқ олий таълим муассасаларида талабалар билимини назорат қилиш ва баҳолашнинг рейтинг тизимини тартибга солади.

I. Умумий қоидалар

1. Талабалар билимини назорат қилиш ва рейтинг тизими орқали баҳолашдан мақсад таълим сифатини бошқариш орқали рақобатбардош кадрлар тайёрлашга эришиш, талабаларнинг фанларни ўзлаштиришида бўшлиқлар ҳосил бўлишининг олдини олиш, уларни аниқлаш ва бартараф этишдан иборат.

2. Рейтинг тизимининг асосий вазифалари қуйидагилардан иборат:

а) талабаларда Давлат таълим стандартларига мувофиқ тегишли билим, кўникма ва малакалар шаклланганлиги даражасини назорат қилиш ва таҳлил қилиб бориш;

б) талабалар билими, кўникма ва малакаларини баҳолашнинг асосий тамойиллари: Давлат таълим стандартларига асосланганлик, аниқлик, ҳаққонийлик, ишончлилик ва қулай шаклда баҳолашни таъминлаш;

в) фанларнинг талабалар томонидан тизимли тарзда ва белгиланган муддатларда ўзлаштирилишини ташкил этиш ва таҳлил қилиш;

г) талабаларда мустақил ишлаш кўникмаларини ривожлантириш, ахборот ресурслари манбаларидан самарали фойдаланишни ташкил этиш;

д) талабалар билимини холис ва адолатли баҳолаш ҳамда унинг натижаларини вақтида маълум қилиш;

е) талабаларнинг фанлар бўйича комплекс ҳамда узлуксиз тайёргарлигини таъминлаш;

ж) ўқув жараёнининг ташкилий ишларини компьютерлаштиришга шароит яратиш.

3. Фанлар бўйича талабалар билимини семестрда баҳолаб бориш рейтинг назорати жадваллари ва баҳолаш мезонлари асосида амалга оширилади.

II. Назорат турлари ва уни амалга ошириш тартиби

4. Назорат турлари, уни ўтказиш тартиби ва мезонлари кафедра мудири тавсияси билан олий таълим муассасасининг (факультет) ўқув-услубий кенгашида муҳокама қилинади ва тасдиқланади ҳамда ҳар бир фаннинг ишчи ўқув дастурида машғулот турлари билан биргаликда кўрсатилади.

5. Рейтинг назорати жадваллари, назорат тури, шакли, сони ҳамда ҳар бир назоратга ажратилган максимал балл, шунингдек жорий ва оралиқ назоратларнинг саралаш баллари ҳақидаги маълумотлар фан бўйича биринчи машғулотда талабаларга эълон қилинади.

6. Талабаларнинг билим савияси ва ўзлаштириш даражасининг Давлат таълим стандартларига мувофиқлигини таъминлаш учун қуйидаги назорат турларини ўтказиш назарда тутилади:

жорий назорат – талабанинг фан мавзулари бўйича билим ва амалий кўникма даражасини аниқлаш ва баҳолаш усули. Жорий назорат фаннинг хусусиятидан келиб чиққан ҳолда, семинар, лаборатория ва амалий машғулотларида оғзаки сўров, тест ўтказиш, суҳбат, назорат иши, коллоквиум, уй вазифаларини текшириш ва шу каби бошқа шаклларда ўтказилиши мумкин;

оралиқ назорат – семестр давомида ўқув дастурининг тегишли (фаннинг бир неча мавзуларини ўз ичига олган) бўлими тугаллангандан кейин талабанинг билим ва амалий кўникма даражасини аниқлаш ва баҳолаш усули. Оралиқ назоратнинг сони (бир семестрда икки мартадан кўп ўтказилмаслиги лозим) ва шакли (ёзма, оғзаки, тест ва ҳоказо) ўқув фанига ажратилган умумий соатлар ҳажмидан келиб чиққан ҳолда белгиланади;

якуний назорат – семестр якунида муайян фан бўйича назарий билим ва амалий кўникмаларни талабалар томонидан ўзлаштириш даражасини баҳолаш усули. Якуний назорат асосан таянч тушунча ва иборaларга асосланган "Ёзма иш" (тиббиёт олий таълим муассасалари учун "Ёзма иш" ёки ОТКС (объектив тизимлаштирилган клиник синов)) шаклида ўтказилади.

Таълим йўналиши ва мутахассисликлари айрим фанларининг хусусиятларидан келиб чиққан ҳолда факультет Илмий кенгаши қарори асосида кўпи билан 40% фанлардан якуний назоратлар бошқа шаклларда (оғзаки, тест ва ҳоказо) ўтказилиши мумкин.

7. Оралиқ назоратни ўтказиш жараёни кафедра мудири томонидан тузилган комиссия иштирокида даврий равишда ўрганиб борилади ва уни ўтказиш тартиблари бузилган ҳолларда, оралиқ назорат натижалари бекор қилинади ҳамда оралиқ назорат қайта ўтказилади.

8. Олий таълим муассасаси раҳбарининг буйруғи билан ички назорат ва мониторинг бўлими раҳбарлигида тузилган комиссия иштирокида якуний назоратни ўтказиш жараёни даврий равишда ўрганиб борилади ва уни ўтказиш тартиблари бузилган ҳолларда, якуний назорат натижалари бекор қилинади ҳамда якуний назорат қайта ўтказилади.

9. Ўқув йили тугагандан кейин рейтинг назорати натижаларига кўра талабаларни кейинги курсга ўтказиш тўғрисида белгиланган тартибда қарор қабул қилинади.

III. Баҳолаш тартиби ва мезонлари

10. Талабаларнинг билим савияси, кўникма ва малакаларини назорат қилишнинг рейтинг тизими асосида талабанинг ҳар бир фан бўйича ўзлаштириш даражаси баллар орқали ифодаланади.

11. Ҳар бир фан бўйича талабанинг семестр давомидаги ўзлаштириш кўрсаткичи 100 баллик тизимда бутун сонлар билан баҳоланади.

Ушбу 100 балл назорат турлари бўйича қуйидагича тақсимланади:

якуний назоратга – 30 балл;

жорий ва оралиқ назоратларга – 70 балл (фаннинг хусусиятидан келиб чиққан ҳолда 70 балл кафедра томонидан жорий ва оралиқ назоратларга тақсимланади).

12.

13. Талабанинг рейтинг дафтарчасига алоҳида қайд қилинадиган курс иши (лойиҳаси, ҳисоб-график ишлари), малакавий амалиёт, фан (фанлараро) бўйича якуний давлат аттестацияси, битирув малакавий иши ва магистратура талабаларининг илмий-тадқиқот ва илмий-педагогик ишлари, магистрлик диссертацияси бўйича ўзлаштириш даражаси – 100 баллик тизимда баҳоланади.

14. Талабанинг фан бўйича ўзлаштириш кўрсаткичини назорат қилишда қуйидаги намунавий мезонлар (кейинги ўринларда намунавий мезонлар деб юритилади) тавсия этилади:

а) 86-100 балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

хулоса ва қарор қабул қилиш;
ижодий фикрлай олиш;
мустақил мушоҳада юрита олиш;
олган билимларини амалда қўллай олиш;
моҳиятини тушуниш;
билиш, айтиб бериш;
тасаввурга эга бўлиш.

б) 71-85 балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

мустақил мушоҳада юрита олиш;

олган билимларини амалда қўллай олиш;

моҳиятини тушуниш;

билиш, айтиб бериш;

тасаввурга эга бўлиш.

в) 55-70 балл учун талабанинг билим даражаси қуйидагиларга жавоб бериши лозим:

моҳиятини тушуниш;

билиш, айтиб бериш;

тасаввурга эга бўлиш.

г) қуйидаги ҳолларда талабанинг билим даражаси 0-54 балл билан баҳоланиши мумкин:

аниқ тасаввурга эга бўлмаслик;

билмаслик.

15. Намунавий мезонлар асосида муайян фандан жорий ва оралиқ назоратлар бўйича аниқ мезонлар ишлаб чиқилиб, кафедра мудири томонидан тасдиқланади ва талабаларга эълон қилинади.

16. Намунавий мезонларга мувофиқ мутахассислик фанлар бўйича таянч олий таълим муассасалари томонидан якуний назорат учун баҳолаш мезонлари
ишлаб чиқилиб, олий таълим муассасаси Илмий-услубий кенгаши томонидан тасдиқланади ва турдош олий таълим муассасаларига етказилади.

17. Талабаларнинг ўқув фани бўйича мустақил иши жорий, оралиқ ва якуний назоратлар жараёнида тегишли топшириқларни бажариши ва унга ажратилган баллардан келиб чиққан ҳолда баҳоланади.

18. Талабанинг фан бўйича бир семестрдаги рейтинги қуйидагича аниқланади:

$$R_i = \frac{V \cdot O'}{100}$$

бу ерда:

V – семестрда фанга ажратилган умумий ўқув юкламаси (соатларда);

O' –фан бўйича ўзлаштириш даражаси (балларда).

19. Фан бўйича жорий ва оралиқ назоратларга ажратилган умумий баллнинг 55 фоизи саралаш балл ҳисобланиб, ушбу фоиздан кам балл тўплаган талабалар якуний назоратга киритилмайди.

Жорий ва оралиқ назорат турлари бўйича 55 ва ундан юқори баллни тўплаган талаба фанни ўзлаштирган деб ҳисобланади ва ушбу фан бўйича якуний назоратга кирмаслигига йўл қўйилади.

Тиббиёт олий таълим муассасаларида фан бўйича жорий, оралиқ ва якуний назоратларнинг ҳар бирига ажратилган баллнинг 55 фоизи саралаш балл этиб белгиланади ва бунда жорий ва оралиқ назоратларнинг ҳар бирига ажратилган баллнинг 55 ва ундан юқори фоизидаги баллни тўплаган талабалар ушбу фан бўйича якуний назоратга киритилади.

20. Талабанинг семестр давомида фан бўйича тўплаган умумий балли ҳар бир назорат туридан белгиланган қоидаларга мувофиқ тўплаган баллари йиғиндисига тенг.

IV. Назорат турларини ўтказиш муддати

21. Оралиқ ва якуний назорат турлари календарь тематик режага мувофиқ деканат томонидан тузилган рейтинг назорат жадваллари асосида ўтказилади. Якуний назорат семестрнинг охирги 2 ҳафтаси мобайнида ўтказилади.

22. Талаба фан бўйича курс лойиҳаси (иши)ни ушбу фан бўйича тўплаган баллари умумлаштирилишига қадар топшириши шарт.

23. Жорий ва оралиқ назоратларда саралаш баллидан кам балл тўплаган ва узрли сабабларга кўра назоратларда қатнаша олмаган талабага қайта топшириш учун, навбатдаги шу назорат туригача, сўнгги жорий ва оралиқ назоратлар учун якуний назоратгача бўлган муддат берилади.

Касаллиги сабабли дарсларга қатнашмаган ҳамда белгиланган муддатларда жорий, оралиқ ва якуний назоратларни топшира олмаган талабаларга факультет декани фармойиши асосида, ўқишни бошлаганидан сўнг икки ҳафта муддатда топширишга рухсат берилади.

24. Талабанинг семестрда жорий ва оралиқ назорат турлари бўйича тўплаган баллари ушбу назорат турлари умумий баллининг 55 фоизидан кам бўлса ёки семестр якунида жорий, оралиқ ва якуний назорат турлари бўйича тўплаган баллари йиғиндиси 55 балдан кам бўлса, у академик қарздор ҳисобланади.

Тиббиёт олий таълим муассасаларида семестр якунида фан бўйича жорий, оралиқ ёки якуний назорат турларини ҳар бири бўйича саралаш баллидан кам балл тўплаган талаба академик қарздор ҳисобланади.

Академик қарздор талабаларга семестр тугаганидан кейин қайта ўзлаштириш учун бир ой муддат берилади. Шу муддат давомида фанни ўзлаштира олмаган талаба, факультет декани тавсиясига кўра белгиланган тартибда ректорнинг буйруғи билан талабалар сафидан четлаштирилади.

25. Талаба назорат натижаларидан норози бўлса, фан бўйича назорат тури натижалари эълон қилинган вақтдан бошлаб бир кун мобайнида факультет деканига ариза билан мурожаат этиши мумкин. Бундай ҳолда факультет деканининг тақдимномасига кўра ректор буйруғи билан 3 (уч) аъзодан кам бўлмаган таркибда апелляция комиссияси ташкил этилади.

Апелляция комиссияси талабаларнинг аризаларини кўриб чиқиб, шу куннинг ўзида хулосасини билдиради.

26. Баҳолашнинг ўрнатилган талаблар асосида белгиланган муддатларда ўтказилиши ҳамда расмийлаштирилиши факультет декани,

кафедра мудири, ўқув бўлими ҳамда ички назорат ва мониторинг бўлими томонидан назорат қилинади.

V. Рейтинг натижаларини қайд қилиш ва таҳлил этиш тартиби

27. Талабанинг фан бўйича назорат турларида тўплаган баллари семестр якунида рейтинг қайдномасига бутун сонлар билан қайд қилинади. Рейтинг дафтарчасининг "Ўқув режасида ажратилган соат" устунига семестр учун фанга ажратилган умумий ўқув юкламаси соатлари, "Фандан олинган баҳо" устунига эса 100 балли тизимдаги ўзлаштириш бали қўйилади.

Талабанинг саралаш баллидан паст бўлган ўзлаштиришлари рейтинг дафтарчасига қайд этилмайди.

28. Ҳар бир фан бўйича ўтказилаётган назорат турларининг натижалари гуруҳ журнали ҳамда қайдномада қайд этилади ва шу куннинг ўзида (назорат тури ёзма иш шаклида ўтказилган бўлса, 2 (икки) кун муддат ичида) талабалар эътиборига етказилади.

29. Якуний назорат натижаларига кўра фан ўқитувчиси талабаларнинг фан бўйича рейтингини аниқлайди ҳамда рейтинг дафтарча ва қайдноманинг тегишли қисмини тўлдиради.

30. Талабанинг рейтинги унинг билими, кўникмаси ва малакалари даражасини белгилайди. Талабанинг семестр (йил) бўйича умумий рейтинги барча фанлардан тўпланган рейтинг баллари йиғиндиси орқали аниқланади.

31. Талабалар умумий рейтинги ҳар бир семестр ва ўқув йили якунлангандан сўнг эълон қилинади.

32. Диплом иловаси ёки академик маълумотномани давлат тилидан расмийлаштиришда фан бир неча семестр давом этган бўлса, рейтинглар йиғиндиси олинади.

Талаба эътиборли диплом белгилашда унинг ҳар бир семестр якунидаги фанлар бўйича ўзлаштириш кўрсаткичи ҳисобга олинади.

33. Талабаларнинг назорат турлари бўйича баҳолаш натижалари кафедралар, деканатлар ва ўқув-услубий бўлинмаларнинг компьютер базасига киритилиб, мунтазам равишда таҳлил қилиб борилади.

34. Жорий, оралиқ ва якуний назорат натижалари кафедра йиғилишлари, факультет ва олий таълим муассасаси Илмий кенгашларида мунтазам равишда муҳокама этиб борилади ва тегишли қарорлар қабул қилинади.

VI. Якуний қоидалар

35. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Давлат тест маркази тест баҳолари ва рейтинг баҳоларининг мослигини текширишни ташкил этади ва назорат қилади.

36. Ушбу Низомда белгиланган масалалар бўйича келиб чиққан низолар қонун ҳужжатлари асосида ҳал қилинади.

37. Ушбу Низом Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Давлат тест маркази, Халқ таълими вазирлиги, Соғлиқни сақлаш вазирлиги, Қишлоқ ва сув хўжалиги вазирлиги, Маданият ва спорт ишлари вазирлиги, Ўзбекистон Бадиий академияси, Ташқи ишлар вазирлиги, Ўзбекистон алоқа ва ахборотлаштириш агентлиги, "Ўзбекистон темир йўллари" давлат-акциядорлик компанияси, Давлат солиқ қўмитаси ва Навоий кон-металлургия комбинати билан келишилган.

15 Муаллифлар ҳақида маълумот

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

“МАТЕМАТИК ФИЗИКА” КАФЕДРАСИ

Юсуф Эргашевич Файзиев, физика-математика фанлари номзоди, доцент,

Эркин Иброхимович Қўчқоров физика-математика фанлари номзоди,

Толибжон НорташевичАлиқулов физика-математика фанлари номзоди

16 Адабиётлар.

Адабиётлар

1. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001й.
2. Назаров Р. Алгебра ва сонлар назарияси. 1, 2 қисм.Тошкент.

Хорижий манбалар

1. Гельфанд И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. «Олий ва ўрта мактаб». 1964й.
2. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1964г.
3. И.В.Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, 1972г.
4. Д.К.Фадеев и И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1954г.
5. Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, 1972г.
6. О.Н.Цубервиллер Сборник задач и упражнений по аналитической геометрии.
7. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебре, http://www.mcmee.ru, http://lib.mexmat.ru

Босишга рухсат этилди.
12.12.11 Адади. 30.

Тошкент шаҳар, Боғишамол 57 б.

«Extremum press» босмахонасида
чоп этилди.