И. Я. БАКЕЛЬМАН

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

СССР Маориф Министрлиги педагогика институтлари физика факультетлари студентлари учун 2105-номерли «Физика» ихтисоси бўйича ўқув қўлланма сифатида рухсат этган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1978

Қўлланманинг биринчи қисмига аналитик геометриядан асосий маълумотлар—тўғри чизиқлар ва текисликлар тенгламалари, иккинчи тартибли эгри чизиқлар ва сиртлар, векториал алгебра элементлари киритилган. Иккинчи қисм чизиқли алгебранинг традицион масалалари—матрицалар ва детерминантлар, чизиқли (ҳақиқий ва комплекс) фазолар, чизиқли операторлар, бичизиқли формалар ва ҳоказоларни ўз ичига олади.

Б $\frac{60602-138}{353(06)-78}$ 114 — 78

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб педагогика институтларининг физика ихтисосликларига мўлжалланган олий математика курсининг «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра элементлари» бўлимининг амалдаги программасига мослаб ёзилган. Китоб икки қисмдан иборат: I қисм — «Аналитик геометрия» ва II қисм — «Чизиқли алгебра элементлари». Маълумки, чизиқли алгебра уч ўлчовли Евклид фазосидаги аналитик геометрияни кўп ўлчовли чизиқли вектор фазоларга кенг маънода ва турли-туман умумлаштирилишидан иборатдир. Шу сабабли I ва II қисмлар шундай ёзилганки, иккинчи қисм тегишли тушунчалар ва тузишларда биринчи қисм материалларини анча мураккаб ва абстракт ҳолларда умумлаштиради ҳамда ривожлантиради. Иккала қисм орасида бир қатор чуқур боғланишлар мавжуд. Бу гаплар аввало ўқув материалини китобнинг II қисмида баён этилиш характерига тааллуқли бўлиб, ўқув материали чизиқли структурага эга бўлган тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси тушунчаси ва бу структурани сақлаб қоладиган акслантишлар тушунчаси ёрдамида геометрик инвариантлар (базиснинг танланишига боғлиқ бўлмаган) тилида баён этилади.

Математикани физика ихтисосликларига мослаб ўқитиш хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда китобнинг иккинчи қисмида материалнинг баён қилиниши абстракт характердаги тушунчаларнинг киритилишига мувофиқ равишда икки босқичда амалга оширилади.

Биринчи босқич (IV боб) матрицалар, детерминантлар ва чизиқли тенгламалар системалари назариялари асосларига бағишланган. Биринчи босқич элементлари n та ҳақиқий сондан тузилган тартибланган тўда бўлган конкрет чизиқли R^n фазолар ва бу фазолар тўғри кўпайтмаларининг чизиқли акслантишлари воситасида тавсифланади.

Иккинчи босқич (V, VI, VII боблар) чизиқли алгебра асосий объектларининг (векторларнинг координаталари, чизиқли акслантишларнинг матрицалари, бичизиқли формалар ва ш. ў.) бир базисдан иккинчи базисга ўтишдаги ўзаро боғланишларига, Евклид фазолари назариясига ва бу фазолардаги чизиқли операторларнинг (бу операторлар математика ва физиканинг кўпгина бўлимларида муҳим роль ўйнайди) махсус синфларига бағишланади. Бунда масалаларни умумий чизиқли ва Евклид фазоларида қараш (бу китобда шундай қилинади ҳам) мақсадга мувофиқ.

V ва VI бобларнинг баёни шундай тузилганки, бунда умумий чизиқли ва Евклид фазолари тушунчалари ҳамма жойда каноник Евклид метрикали R^n фазолар тушунчаси билан алмаштирилиши мумкин. Бу ҳол мазкур курсни ўқитишда вақтни маълум миқдорда қисқартиришга имкон беради. Тўғри, бунда қаралаётган масалаларнинг умумийлиги кучини бирмунча йўқотади.

Аналитик геометрияни текисликда ва уч ўлчовли фазода ўрганишда тушунчалар, исботлаш усуллари баёни характери китобнинг иккинчи қисми материаллари билан узвий боғлиқ бўлишига асосий эътибор берилди.

Муаллиф бу китобда, биринчидан, аналитик геометрия ва чизиқли алгебрадан физиклар учун зарур бўладиган маълумотларни имкони борича кўпроқ беришга, иккинчидан, қаралаётган масалаларни ихчам баён қилишга ҳаракат қилди. Китобга физикадан бир қатор масалалар, иллюстрациялар киритилган. Педагогика институтларининг физика ихтисослиги бўйича таълим олувчи студентлари учун тегишли адабиёт йўқлигини эътиборга олган ҳолда чизиқли алгебра бобларига масалалар ва машқлар тузилди.

Китоб физикларга аналитик геометрия ва чизиқли алгебрани ўқитиш учун мослаб ёзилган бўлса ҳам, ундан математикларга алгебра ва геометрия курсларининг бир қатор темаларини ўқитишда фойдаланиш мумкин.

Муаллиф, китобнинг қўл ёзмасини диққат билан ўқиб чиққанлари, бир қатор фойдали маслаҳатлар ва тузатишлар берганликлари учун Б. И. Аргунов, А. М. Березманга миннатдорчилик билдиради.

I ҚИСМ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

I боб. АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. Кириш

Аналитик геометрия заминида алгебра воситалари билан геометрик масалаларни ечиш имконини берувчи координаталар методи ётади. Бу метод биринчи марта XVII асрнинг машҳур француз математиги Р. Декарт томонидан ифодалаб берилган ва систематик равишда геометрияга қўлланилган. Бу методнинг моҳияти шундан иборатки, текисликда ёки фазода исталган нуқтага сонларнинг бирор системасини мос келтириш имконини берадиган ёрдамчи геометрик фигура олинади. Бу сонлар нуқтанинг координаталари дейилади. Кўпчилик ҳолларда бошланғич ёрдамчи фигура бир ёки бир нечта ўқдан иборат бўлади (тайин йўналиш танланган тўғри чизиқ ўқ дейилади). Бундай ўқлар координата ўқлари дейилади. Координаталар системаси дейилганда одатда шундай акслантириш тушуниладики, ёрдамчи фигура воситасида бу акслантириш текислик нуқталарига ёки фазога тайинланган сонлар системасини мос келтиради, бу сонлар системаси нуқтанинг бу фигурага нисбатан ҳолатини бир қийматли аниқлайди. Энг муҳим координаталар системалари 3, 4- § ларда тавсифланган.

Ҳар қандай геометрик фигурани доим маълум хоссаларга эга бўлган нуқталар тўплами сифатида қаралади, бу хоссалар бошқа фигурага эмас, балки фақат шу фигурага тегишли бўлади. Бу Ф геометрик фигурага тегишли нуқталарнинг координаталарига маълум чекланишлар қўяди, бу чекланишлар алгебра тилида бундай ифодаланади: Ф геометрик фигура нуқталарининг координаталари тўла аниқланган бирор тенгламани ёки тенгламалар системасини қаноатлантиради.

Шундай қилиб, агар текислик ёки фазода бирор координаталар системаси тайинланган бўлса, у ҳолда нуқтага сонлар тўплами— унинг координаталари, чизиқ ва сиртларга эса тенгламалар ёки тенгламалар системаси жавоб беради, бу тенглама ёки тенгламалар системасини шу геометрик фигуралар нуқталарининг координаталари қаноатлантиради.

Ҳозирги вақтда аналитик геометрияда координата методи билан бир қаторда векториал алгебра методлари ҳам муҳим роль ўйнамоқда. Векториал алгебранинг, бир оз кейинроқ эса вектор ва тензор анализининг ривожланишига механика ва физиканинг талаблари сабаб бўлди. Кўпгина муҳим тушунчалар (тезлик, тезланиш, куч каби) биргина сон катталикнинг ўзи билан тавсифлана олмайди. Бунинг учун вектор тушунчасини (йўналтирилган кесма тушунчасини) киритиш ва векторлар устида бир қатор амаллар бажаришни ўрганиш талаб қилинди. Векторлар устида амаллар бажаришнинг таърифлари физикавий қонуниятларни умумлаштириш асосида ифодаланди. Масалан, тезликлар ва кучларни параллелограмм қоидаси асосида қўшиш вектор йиғиндини шу векторларга ясалган параллелограмм диагонали сифатида таърифлашга олиб келди, векторларнинг скаляр кўпайтмаси тушунчаси эса иш тушунчасининг табиий умумлаштирилишидан иборатдир.

Аналитик геометрия геометрияни алгебра ва математик анализ билан узвий боғлади, бу эса кейинчалик математиканинг ривожланишида ва уни табиий фанларга татбиқ қилишда улкан прогрессга олиб келди.

Қуйида аналитик геометрияни баён қилишда биз ўрта мактаб геометрия курсига таянамиз.

2- §. Векторлар. Векторлар устида амаллар

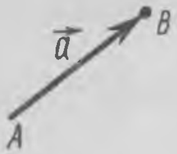
2. 1. Асосий тушунчалар. Таъриф. *Йўналтирилган кесма, яъни чекловчи нуқталари маълум тартибда олинган кесма вектор дейилади: одатда биринчи нуқтани векторнинг боши, иккинчи нуқтани эса унинг охири дейилади.*

Агар векторнинг боши A нуқтада, охири B нуқтада бўлса, у ҳолда вектор $\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади (A ҳарфи—векторнинг боши ҳар доим биринчи ўринга ёзилади). Чизмаларда векторлар (1- расм) стрелкалар билан тасвирланади. Шунингдек, кўпинча векторларни битта ҳарф билан белгилаш ҳам қулай, масалан: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Устма-уст тушадиган нуқталар жуфти *ноль-вектор* дейилади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бу ҳолда векторнинг боши билан охири устма-уст тушади. Равшанки, ноль-вектор учун йўналиш тушунчаси маънога эга эмас.

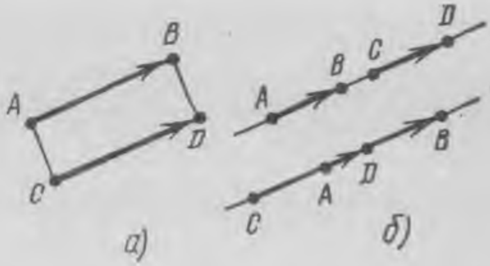
AB кесманинг узунлиги ёки A ва B нуқталар орасидаги масофа *$\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги* дейилади. Векторнинг узунлиги бундай белгиланади: $|\overrightarrow{AB}|$ ёки $|\vec{a}|$ сўнгра $|\vec{0}| = 0$ экани равшан.

Таъриф. *Агар икки вектордан бирини иккинчисидан параллел кўчириш натижасида ҳосил қилиш мумкин бўлса, бундай векторлар тенг дейилади.*

Равшанки, агар $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар тенг бўлиб, бир тўғри чизиқда ётмаса, у ҳолда $ABCD$ тўртбурчак (2-*а* расм) параллелограмм бўлади. 2-*б* расмда бир тўғри чизиқда ётувчи тенг $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторларнинг жойлашиш ҳоллари кўрсатилган.



1- расм.



2- расм.

Векторлар тенглигининг таърифидан ушбу фикрлар бевосита келиб чиқади:

1. *Агар A'—ихтиёрий нуқта ва $\overrightarrow{AB}$—берилган вектор бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}$ векторга тенг $\overrightarrow{A'B'}$ вектор мавжуд ва ягонадир.*

Бошқа сўзлар билан айтганда, бошланиши ихтиёрий A' нуқтада бўлган ва берилган $\overrightarrow{AB}$ векторга тенг бирдан-бир $\overrightarrow{A'B'}$ векторни ҳар доим ҳам ясаш мумкин.

2. *Агар $\vec{a} = \vec{b}$ бўлса, у ҳолда $\vec{b} = \vec{a}$ бўлади.*

3. *Агар $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} = \vec{c}$ бўлади.*

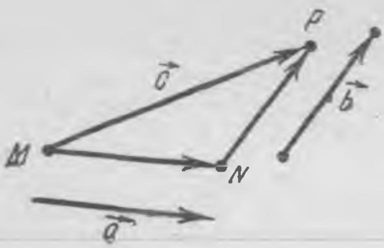
Таърифлар. *Параллел тўғри чизиқларда ётувчи векторлар ёки бир тўғри чизиқда ётувчи векторлар коллинеар векторлар дейилади.*

Бирдан-бир текисликка параллел тўғри чизиқларда ёки шу текисликда ётувчи векторлар компланар векторлар дейилади.

Агар иккита нолмас (нолдан фарқли) векторлар коллинеар бўлса ва уларга тенг бўлиб, умумий учга эга бўлган векторларнинг охирлари умумий бошдан бир хил (ҳар хил) *томонда ётса, бундай векторлар бир хил (қарама-қарши) йўналган векторлар дейилади.*

Ушбуларни шартлашиб оламиз: а) ноль-вектор исталган векторга коллинеар; б) ноль-вектор ва исталган иккита бошқа вектор компланар; в) ноль-вектор бир вақтнинг ўзида исталган бошқа векторга нисбатан бир хил ва қарама-қарши йўналган вектордир.

2.2. **Векторларни қўшиш.** Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг йиғиндиси деб шундай $\vec{c}$ векторни айтиладики, у қуйидагича ясалади: ихтиёрий M нуқтадан бошлаб $\vec{a}$ га тенг бўлган $\overrightarrow{MN}$ ни қўямиз (3-расм), сўнгра $\vec{b}$ га тенг $\overrightarrow{NP}$ векторни ясаймиз. $\vec{c} = \overrightarrow{MP}$ деб фараз қиламиз; $\vec{c}$ вектор одатда $\vec{a} + \vec{b}$ каби белгиланади. Векторлар йиғиндиси



3- расм.

M нуқтани танлашга боғлиқ эмас эканини осонгина исботлаш мумкин, яъни бошланғич нуқта сифатида исталган бошқа M' нуқтани олиб, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси ясалса, $\overrightarrow{M'P'}$ вектор ҳосил бўлади, бу вектор $\overrightarrow{MP}$ га тенг.

Векторлар йиғиндисининг таърифидан ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ экани келиб чиқади.

Бундан кейин ўзаро тенг векторларни битта ҳарфнинг ўзи билан белгилашга келишамиз, бу векторларнинг учлари ҳар хил бўлиши ҳам мумкин. $\vec{a}$, $\vec{b}$ — ихтиёрий ноколлинеар векторлар, M ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$ бўлади, бунда MP — «томонлари» M нуқтадан бошлаб қўйилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўлган параллелограммнинг диагонали (4-расм). Векторлар йиғиндисини бундай геометрик ясашни одатда параллелограмм қоидаси дейилади.

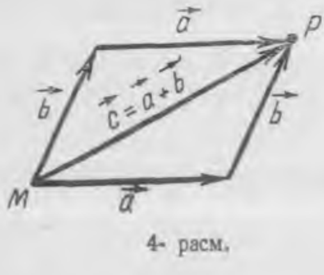
Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар векторлар бўлса, у ҳолда $\vec{a} + \vec{b}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга коллинеар бўлади, шу билан бирга бу вектор узунлиги бўйича катта бўлган вектор билан бир хил йўналган бўлади. $\vec{a} + \vec{b}$ векторнинг узунлиги, агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир хил йўналган бўлса $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ га, агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қарама-қарши йўналган бўлса, $||\vec{a}| - |\vec{b}||$ га тенг бўлади.

1-теорема. *Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли.*

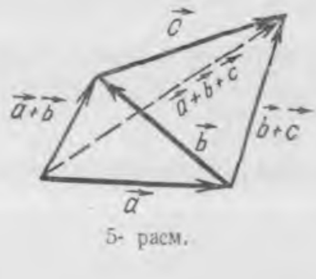
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативлик қонуни).

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативлик қонуни).

Иккала қонуннинг исботи векторларни қўшиш таърифидан келиб чиқади (4, 5-расмлар).



4- расм.



5- расм.

Узунлиги бўйича берилган $\vec{a}$ векторга тенг, йўналиши бу векторга қарама-қарши бўлган вектор $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши вектор* дейилади ва $-\vec{a}$ кўринишида белгиланади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг $\vec{b}-\vec{a}$ *айирмаси* деб $\vec{b}$ ва $-\vec{a}$ векторларнинг йиғиндисига айтилади, яъни

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a}).$$

Демак, векторларни айириш векторларни қўшишга нисбатан тескари амал экан. Равшанки, ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун ушбу тенгликка эгамиз.

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар умумий учга эга бўлса, у ҳолда $\vec{b}-\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг охирларини бирлаштиради ҳамда $\vec{a}$ нинг охиридан $\vec{b}$ нинг охирига қараб йўналган бўлади (6- расм). $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$ эканини кўриш осон.

Учбурчак икки томони узунлигининг йиғиндиси учинчи томонининг узунлигидан кичик бўлганидан иккита исталган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун

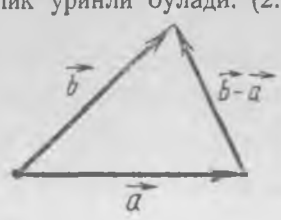
$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}| \tag{2.1}$$

тенгсизлик ўринли (7, *а*- расм). Бу тенгсизлик $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир хил йўналишга эга бўлгандагина ва фақат шундагина тенгликка айланади.

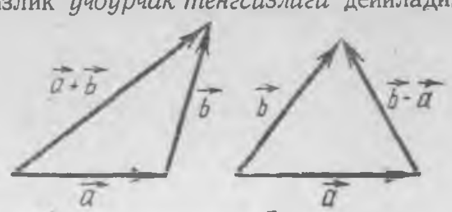
Худди шунга ўхшаш

$$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{b}-\vec{a}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

тенгликни ҳосил қиламиз (7, *б*- расм), бунда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қарама-қарши томонга йўналган бўлгандагина ва фақат шундагина тенглик ўринли бўлади. (2.1) тенгсизлик *учбурчак тенгсизлиги* дейилади.



6- расм.



а) б)

7- расм.

2.3. Векторни сонга кўпайтириш. $\vec{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб шундай $\vec{b}$ векторга айтиладики, бу вектор ушбу шартларни қаноатлантиради: 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ га коллинеар, шу билан бирга, агар $\lambda > 0$ бўлса, $\vec{b}$ ва $\vec{a}$ бир хил йўналган, агар $\lambda < 0$ бўлса, қарама-қарши йўналган бўлади.

Биринчи шартдан агар $\lambda = 0$ ёки $\vec{a} = \vec{0}$ бўлса, $\vec{b} = \vec{0}$ га эга бўламиз. Агар $\vec{a}$ вектор ва λ сон берилган бўлса, 1) ва 2) шартлар $\vec{b}$ векторни бир қийматли аниқлайди. Бундан кейин $\vec{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмасини $\lambda\vec{a}$ билан белгилаймиз. $\lambda\vec{a}$ векторнинг таърифидан ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $(-1)\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторга қарама-қарши бўлган векторга тенг, яъни $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ экани келиб чиқади. Равшанки, иккита коллинеар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ $(\vec{a} \neq 0)$ вектор учун $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона λ сон мавжуд. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lambda = \begin{cases} \text{агар } \vec{a} \text{ ва } \vec{b} \text{ бир хил йўналишли бўлса, } \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}; \\ \text{агар } \vec{a} \text{ ва } \vec{b} \text{ қарама-қарши йўналишли бўлса, } -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}. \end{cases}$$

2-теорема. *Ихтиёрий λ, μ сонлар ва ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар учун*

$$1.\ \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a},$$

$$2.\ \text{а)}\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a},$$

$$\text{б)}\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

тенгликлар ўринли.

Исбот. 1. Равшанки, $\lambda(\mu\vec{a})$ ва $(\lambda\mu)\vec{a}$ векторлар бир хил $|\lambda|\,|\mu|\,|\vec{a}|$ узунликка эга. Векторни сонга кўпайтириш амалининг таърифига биноан, агар $\lambda\mu > 0$ бўлса, $\lambda(\mu\vec{a})$ ва $(\lambda\mu)\vec{a}$ векторлар бир хил йўналган; агар $\lambda\mu < 0$ бўлса, бу векторлар $\vec{a}$ га қарама-қарши йўналган бўлади. Шундай қилиб, агар $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$. Агарда $\lambda = 0$, $\mu = 0$ ёки $\vec{a} = 0$ бўлса, у ҳолда равшанки $\lambda(\mu\vec{a}) = \vec{0}$ ва $(\lambda\mu)\vec{a} = 0$ бўлади.

2 а) Агар $\mu = 0$ ёки $\vec{a} = \vec{0}$ бўлса, 2 а) тенглик тривиалдир. 2 а) тенглик тривиал бўлмасин. Равшанки, $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ вектор-

лар коллинеардир. Агар λ ва μ сонлар бир хил ишорали бўлса, у ҳолда $\lambda\vec{a}$ ва $\mu\vec{a}$ векторлар бир хил йўналган бўлади, ана шунинг учун улар йиғиндисининг узунлиги узунликлар йиғиндисига тенг, яъни $|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}|$. λ ва μ бир хил ишорали бўлгани учун

$$|\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|+|\mu||\vec{a}|=(|\lambda|+|\mu|)\vec{a}=$$
$$=|\lambda+\mu||\vec{a}|=|(\lambda+\mu)\vec{a}|, \tag{2.2}$$

яъни $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ва $(\lambda+\mu)\vec{a}$ векторларнинг узунликлари бир хил. $\lambda+\mu$ нинг ишораси λ ва μ ларнинг ишораси билан бир хил бўлгани учун $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ва $(\lambda+\mu)\vec{a}$ векторлар бир хил йўналган, бу ҳол (2.2) билан бирликда ушбу тенгликка олиб келади:

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

Энди λ ва μ ҳар хил ишорали ва аниқлик учун $|\lambda|>|\mu|$ бўлсин. У ҳолда, равшанки, $\lambda\vec{a}$ ва $\mu\vec{a}$ қарама-қарши йўналган ҳамда

$$|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|-|\mu\vec{a}|$$

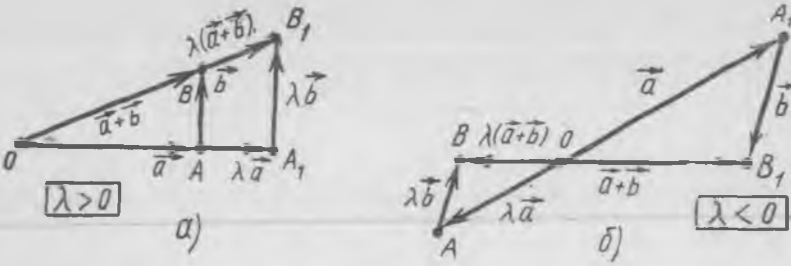
бўлади. Аммо

$$|(\lambda+\mu)\vec{a}|=|\lambda+\mu|\cdot|\vec{a}|=(|\lambda|-|\mu|)|\vec{a}|=|\lambda\vec{a}|-|\mu\vec{a}|.$$

Демак, $(\lambda+\mu)\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ векторлар бир хил узунликка эга. $|\lambda|>|\mu|$ бўлгани учун $(\lambda+\mu)\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ векторларнинг йўналиши $\lambda\vec{a}$ нинг йўналиши билан бир хил бўлади. Демак, $(\lambda+\mu)\vec{a}=$ $=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$. Агар $\lambda=-\mu$ ва $|\lambda|=|\mu|$ бўлса, у ҳолда: $(\lambda+\mu)\vec{a}=0$ ва $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}=0$.

2 б) Агар $\lambda=0$ ёки $\vec{a}=0$ ёки $\vec{b}=\vec{0}$ бўлса, 2б) тенглик ўринли бўлиши равшан. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар нолдан фарқли ва коллинеар бўлса, у ҳолда $\vec{b}=\mu\vec{a}$, бунда $\mu=|\vec{b}|/|\vec{a}|$ ($\vec{a}$ ва $\vec{b}$ бир хил йўналган) ёки $\mu=-|\vec{b}|/|\vec{a}|$ ($\vec{a}$ ва $\vec{b}$ қарама-қарши йўналган). Шундан кейин 2б) тенглик 2а) тенгликка келтирилади.

Охирида, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноколлинеар векторлар ва $\lambda>0$ бўлсин (8, *а*-расм). Олдин шуни таъкидлаймизки, OAB ва OA_1B_1 учбурчаклар ўхшаш. Бу $\vec{a}+\vec{b}$ ва $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ векторларнинг таърифидан келиб чиқади. У ҳолда О, B ва B_1 нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. OAB ва OA_1B_1 учбурчакларнинг ўхшашлигидан OB_1 кесманинг узунлиги λ билан $\overrightarrow{OB}$ кесма узунлиги кўпайтмасига тенг. Шунинг учун



8- расм.

$\overrightarrow{OB_1} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ ва ясашга кўра $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ бўлгани учун $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

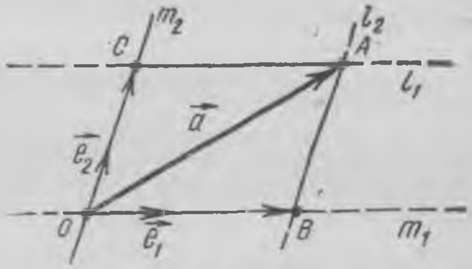
Биз $\lambda < 0$ бўлган ҳолни ўқувчининг мустақил ҳал қилиши учун қолдирамиз (8, б- расм).

2.4. Чизиқли комбинация. Базис. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторлар берилган бўлсин. $\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k$ ифода $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_k$ *векторларнинг* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *коэффициентли чизиқли комбинацияси* дейилади, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — бирор ҳақиқий сонлар. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодаланган бўлса, $\vec{a}$ вектор шу векторлар бўйича *ёйилган* дейилади.

3-теорема. *$\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ — иккита ноколлинеар векторлар бўлсин. У ҳолда бу векторларга компланар ҳар қандай $\vec{a}$ вектор шу векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, бунда $\vec{a}$ нинг $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар бўйича ёйилмасининг коэффициентлари ягона йўл билан топилади.*

Исбот. $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар ноколлинеар бўлганликлари учун улар ноль-векторлар эмас. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1$ ёки $\vec{e}_2$ га коллинеар бўлса, у ҳолда векторнинг сонга кўпайтмасининг таърифидан қаралаётган тасдиқнинг тўғрилиги бевосита келиб чиқади. Энди $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1$ га ҳам, $\vec{e}_2$ га ҳам ноколлинеар бўлсин. Умумийликка зарар келтирмасдан, бу векторларнинг ҳаммаси битта умумий уч—O нуқтага эга дейишимиз мумкин. У ҳолда $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (9- расм) вектор $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар орқали ўтувчи текисликда ётади, чунки $\vec{a}$, $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар компланар эди. A нуқтадан $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларга параллел l_1

ва l_2 тўғри чизиқларни ўтказамиз. m_1 ва m_2 тўғри чизиқлар мос равишда $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар ётган тўғри чизиқлар бўлсин. m_1 ва l_2 кесишган нуқтани B билан, m_2 ва l_1 кесишган нуқтани C билан белгилаймиз.



9-расм.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

экани равшан. $\overrightarrow{OB}$ ва $\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OC}$ ва $\vec{e}_2$ векторлар коллинеар бўлгани учун шундай λ_1 ва λ_2 сонлар мавжудки, ушбу $\overrightarrow{OB} = \lambda_1\vec{e}_1$ ва $\overrightarrow{OC} = \lambda_2\vec{e}_2$ тенгликлар ўринли бўлади. Шунинг учун: $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

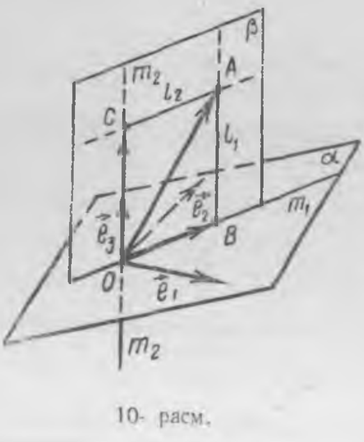
Энди $\vec{a} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{e} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$$

Агар $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{e}_1 = \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1}\vec{e}_2$. Бундан $\vec{e}_1$ вектор $\vec{e}_2$ векторга коллинеар эканлиги келиб чиқади, бу эса теореманинг шартига зидлик қилади. Шундай қилиб, $\lambda_1 = \mu_1$. $\lambda_2 = \mu_2$ экани ҳам шунга ўхшаш исботланади. Теорема исботланди.

4-теорема. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — *учта нокомпланар векторлар бўлсин. У ҳолда исталган $\vec{a}$ вектор бу векторларнинг чизиқли комбинациясига ягона равишда ёйилади.*

Исбот. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ —векторлар — иккитадан олганда ноколлинеар векторлар, акс ҳолда улар компланар бўлар эди. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлардан бирор иккитасига компланар бўлса, у ҳолда теореманинг тасдиғи бевосита 1- теоремадан келиб чиқади.



10- расм.

Теоремани умумий ҳол учун исботлаймиз. Умумийликни бузмасдан, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар умумий уч — O нуқтага эга дейиш мумкин. $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар орқали ўтувчи текисликни α билан, $\vec{e}_3$ ва $\overrightarrow{OA}$ векторлар орқали ўтувчи текисликни β билан белгилаймиз (10- расмга қаранг). Сўнгра m_1 — α ва β текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғи, m_2 эса $\vec{e}_3$ ётган тўғри чизиқ бўлсин. β текисликда A нуқтадан l_1 тўғри чизиқни $\vec{e_3}$ га паралл[ел] қилиб, l_2 тўғри чизиқни m_1 га параллел қилиб ўтказамиз. l_1 [ва] m_1 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини B билан, l_2 ва m_2 тўғ[ри] чизиқларнинг кесишган нуқтасини C билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{2.3}$$

$\overrightarrow{OC}$ вектор $\vec{e_3}$ га коллинеар, шу сабабли

$$\overrightarrow{OC} = \lambda_3 \vec{e_3} \tag{2.4}$$

тенгликни қаноатлантирувчи λ_3 сон мавжуд.

$\overrightarrow{OB}$ вектор $\vec{e_1}$ ва $\vec{e_2}$ векторлардан ўтувчи α текисликда ётади. 1-теоремага биноан

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} \tag{2.5}$$

тенгликни қаноатлантирувчи λ_1 ва λ_2 сонлар топилади.

(2.3), (2.4), (2.5) муносабатлардан $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$ экани келиб чиқади. $\vec{a} = \mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} + \mu_3 \vec{e_3}$ ва $\lambda_1 \neq \mu_1$ деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{e_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e_2} + (\lambda_3 - \mu_3)\vec{e_3} = \vec{0}.$$

$\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ бўлгани учун $\vec{e_1} = -\frac{\lambda_2 - \mu_2}{\lambda_1 - \mu_1}\vec{e_1} - \frac{\lambda_3 - \mu_3}{\lambda_1 - \mu_1}\vec{e_1}$. Бундан $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ векторлар компланар эканлиги келиб чиқади, бу эса теореманинг шартига зидлик қилади. $\lambda_2 = \mu_2$ ва $\lambda_3 = \mu_3$ эканлиги ҳам шунга ўхшаш аниқланади. Теорема исботланди.

Текисликнинг маълум тартибда олинган ноколлинеар иккита вектори *текисликдаги базис* дейилади. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ ва $\vec{e_2}$, $\vec{e_1}$ векторлар иккита *бошқа-бошқа* базисни ташкил қилишини таъкидлаб ўтамиз, бунда $\vec{e_1}$ ва $\vec{e_2}$ — бирор текисликдаги ноколлинеар векторлар.

Шунга ўхшаш маълум тартибда олинган нокомпланар векторлар учлиги ҳам *фазодаги базис* дейилади.

Агар текисликда ёки фазода бирор базис танланган бўлса, у ҳолда текисликдаги (ёки фазодаги) ҳар бир векторга тўла аниқланган тартибланган сонлар жуфти (ёки тартибланган сонлар учлиги) мос келтирилади, бу сонлар векторни базис бўйича ёйилмасининг коэффициентлари тўпламидан иборат.

Бу мосликни фазо учун тўлароқ тавсифлаймиз. $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ — бирор тайин базис бўлсин. Бу ҳолда 4-теоремадан ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$$

йилма ўринли экани келиб чиқади, бунда $\vec{a}$ вектор учун $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонлар бир қийматли аниқланган. Равшанки, аксинча $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонларнинг тартибланган ҳар бир учлигига фазода

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$$

вектор бир қийматли жавоб беради.

Тайин $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базисда $\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$ векторни тўла аниқловчи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонлар *$\vec{a}$ векторнинг $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базисдаги компонентлари дейилади.*

$\vec{a}$ векторнинг $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ компонентлари содда геометрик маънога эга. Битта O учидан чиқувчи қирралари $\lambda_1\vec{e_1}, \lambda_2\vec{e_2}, \lambda_3\vec{e_3}$ векторлардан иборат бўлган Q параллелепипедни қараймиз. Бу ҳолда $\vec{a}$ вектор Q параллелепипеднинг O нуқтасидан чиқувчи диагонали бўлади.

Векторлар устида амаллар бажариш хоссаларидан ва векторнинг базис бўйича ёйилмаси ягоналигидан келиб чиқадиган қуйидаги фикрлар ўринлидир.

5-теорема. *Векторни сонга кўпайтиришда унинг барча компонентлари шу сонга кўпайтирилади.*

Исбот. $\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$ бўлсин. У ҳолда

$$\mu\vec{a} = \mu(\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}) = (\mu\lambda_1)\vec{e_1} + (\mu\lambda_2)\vec{e_2} + (\mu\lambda_3)\vec{e_3},$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

6-теорема. *Векторларни қўшишда уларнинг мос компонентлари ҳам шундай қўшилади.*

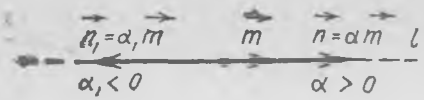
Исбот. $\vec{a} = \lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}$, $\vec{b} = \mu_1\vec{e_1} + \mu_2\vec{e_2} + \mu_3\vec{e_3}$ бўлсин, у ҳолда

$$\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1\vec{e_1} + \lambda_2\vec{e_2} + \lambda_3\vec{e_3}) + (\mu_1\vec{e_1} + \mu_2\vec{e_2} + \mu_3\vec{e_3}) = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{e_1} +$$
$$+ (\lambda_2 + \mu_2)\vec{e_2} + (\lambda_3 + \mu_3)\vec{e_3}.$$

Теорема исботланди.

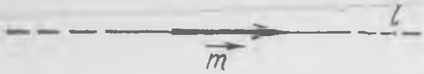
3- §. Декарт координаталар системаси

3.1. Тўғри чизиқдаги йўналиш. **Ўқ.** l — ихтиёрий тўғри чизиқ, $\vec{m}$ — шу l да ётувчи нолмас вектор бўлсин. У ҳолда l да ётувчи ихтиёрий бошқа $\vec{n}$ вектор учун $\vec{n} = \alpha\vec{m}$ муносабат ўринли бўлади. l да ётувчи нолмас $\vec{n}$ векторлар тўпламини $\vec{m}$ вектор ёрдамида икки синфга ажратиш мумкин. Биринчи синфга шундай $\vec{n}$ векторларни киритамизки, бу векторлар учун $\alpha > 0$ бўлади, иккинчи синфга эса



11- расм.

шундай $\vec{n}$ векторларни киритамизки, улар учун $\alpha < 0$ бўлади (11- расм). Одатда l да ётувчи векторларни бундай ажратиш l да $\vec{m} \neq \vec{0}$ векторга мос келувчи *йўналишни* аниқлайди дейилади. Равшанки, биринчи синфга тегишли исталган $\vec{m}_1 \neq \vec{0}$ вектор (яъни $\vec{m}_1 = \alpha\vec{m}$, бунда $\alpha > 0$) l да ётувчи векторларни $\vec{m}$ вектор каби си-



12- расм.

нфларга ажратади, шунинг учун l даги $\vec{m}$ векторга мос келувчи йўналиш l даги $\vec{m}_1$ векторга мос йўналиш билан бир хил бўлади. Бундан кейин l даги векторларни синфларга ажратишда—$\vec{m}$ вектордан ёки иккинчи синфга тегишли исталган вектордан фойдаланилса, синфларнинг номерланиши ўзгаради: биринчи синф иккинчи синфга, иккинчи синф биринчи синфга айланади. Шунинг учун l даги $\vec{m}$ ва— $\vec{m}$ векторларга мос йўналишлар қарама-қарши йўналишлар дейилади.

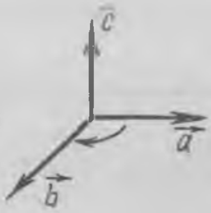
Юқорида айтилганлардан тушунарлики, ҳар қандай тўғри чизиқда кўрсатилган усул билан фақат иккита ҳар хил йўналиш аниқланади ва бу йўналишлар қарама-қарши бўлади.

Йўналиши аниқланган l тўғри чизик *ўқ* деб аталади. Ўқни расмларда стрелкалар билан кўрсатилади $\rightarrow$(12- расм), бу стрелка l тўғри чизиқдаги йўналишни аниқловчи $\vec{m}$ вектор йўналишида кетган (йўналган) бўлади. Ўқнинг йўналишини берувчи бирлик узунликдаги вектор шу ўқнинг *орти* дейилади.

3.2. Векторларнинг ўнг ва чап учликлари. Маълум тартибда қаралаётган учта ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор *тартибланган учлик* дейилади. Агар a, b, c нокомпланар векторлар одам ўнг қўлининг катта, кўрсаткич ва ўрта бармоқлари каби жойлашган бўлса, бу учлик векторларнинг *ўнг учлиги* дейилади. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чап қўлнинг юқорида айтилган бармоқлари каби жойлашган бўлса, бу учлик векторларнинг *чап учлиги* дейилади. (Бу тушунчалар ўрта мактабнинг физика курсида учрайди.)

Векторларнинг ўнг ва чап учлигини бошқача тавсифлаш ҳам мумкин: агар $\vec{c}$ векторнинг учидан қараб турилганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга қараб буриш соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда амалга оширилса, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг тартибланган учлиги ўнг учлик бўлади (13- расм). Агар $\vec{c}$ вектор учидан қараб турилганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга қараб буриш соат стрелкаси йўналиши бўйича амалга оширилса, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг тартибланган учлиги чап учлик бўлади (14- расм).

13- расм.



14- расм.

3.3. Декарт координаталар системаси. Фазода O нуқтани белгилаймиз. M — фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overrightarrow{OM}$ векторни M нуқтанинг *радиус-вектори* дейилади. Агар $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар иккитадан перпендикуляр ва уларнинг узунликлари бирга тенг бўлса (яъни $|\vec{e}| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ бўлса), у ҳолда фазода $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлардан иборат базис *ортонормаланган* базис дейилади.

Декарт координаталари системаси фазода бундай тузилади: бирор ихтиёрий O нуқта ва $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортонормаланган базис белгиланади (бу учликни ўнг учлик деб фараз қиламиз). O нуқта координаталар боши, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар орқали ўтувчи, йўналиши шу векторларга мос равишда киритилган тўғри чизиқлар *координата ўқлари* дейилади. Бунда биринчи ўқ *абсциссалар ўқи*, иккинчи ўқ ординаталар ўқи, учинчи ўқ *аппликаталар ўқи* дейилади. Координата ўқларининг бирор жуфти орқали ўтувчи текислик *координаталар текислиги* дейилади.

M нуқтанинг Декарт координаталари (ёки оддий қилиб айтганда координаталари) деб $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисга нисбатан компонентларига айтилади. Биринчи координатани одатда *абсцисса*, иккинчисини *ордината*, учинчисини *аппликата* дейилади.

Текисликдаги Декарт координаталари ҳам шунга ўхшаш аниқланади; нуқта текисликда иккита координатага — абсцисса ва ординатага эга бўлади.

Нуқтанинг координаталари шу нуқтани белгиловчи ҳарфдан кейин қавс ичида ёзилади. Масалан, текислик нуқтаси учун ёзув M (1, 2), фазо нуқтаси учун эса M (— 3, 1, 0) кўринишда бўлади.

Равшанки, координаталарнинг берилган системасида (яъни координаталар боши ва ортонормалланган базис берилганда) исталган нуқтанинг координаталари бир қийматли аниқланган. Бошқа томондан, худди шу шартларда сонларнинг тартибланган ҳар бир учлиги учун фазода биттагина шундай нуқта топиладики, бу нуқтанинг биринчи сон абсциссаси, иккинчи сон ординатаси, учинчи сон аппликатаси бўлади. (Текисликда Декарт координаталари системаси текислик нуқталари билан тартибланган сонлар жуфти орасида фазо ҳолидагига ўхшаш мосликни беради.)

Бундан кейин M нуқтанинг абсциссасини x ҳарфи билан, ординатасини y ҳарфи билан, аппликатасини эса z ҳарфи билан белгилаймиз.

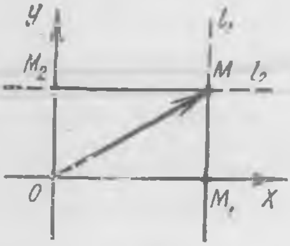
Абсциссалар, ординаталар ва аппликаталар ўқларининг ортлари-ни $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан белгилаш қабул қилинган. Шундай қилиб, $M(x; y;$ нуқтанинг радиус-вектори учун

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

формула ўринли.

Кўпинча абсциссалар, ординаталар ва аппликаталар ўқларини мос равишда x лар, y лар, z лар ўқи дейилиб, Ox, Oy, Oz каби белгиланади.

Нуқтанинг Декарт координаталари содда геометрик маънога эга. Олдин текислик ҳолини қараб чиқамиз. Абсциссалар ўқини горизонтал тўғри чизиқ билан, ординаталар ўқини эса вертикал тўғри чизиқ билан белгилаш қабул қилинган (15- расм). $M(x; y)$ — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқта орқали мос равишда y лар ва x лар ўқига параллел қилиб l_1 ва l_2 тўғри чизиқларни ўтказамиз. x лар ва y лар ўқи ўзаро перпендикуляр бўлгани учун Ox ва l_1, Oy ва l_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади. M_1 нуқта Ox билан l_1 нинг кесишиш нуқтаси, M_2 нуқта Oy билан l_2 нинг кесишиш нуқтаси бўлсин. Бир томондан,



15- расм.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

иккинчи томондан,

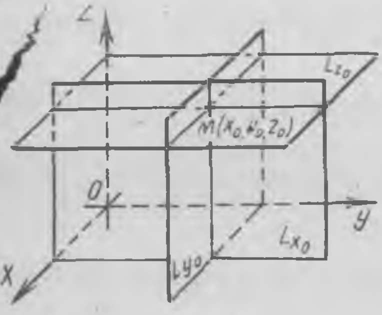
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

бўлгани учун ва M_1 нуқта x лар ўқида, M_2 нуқта y лар ўқида ётгани учун 2- § даги 3-теоремага кўра $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$ тенгликларга эга бўламиз. Бундан, биринчидан, M_1 нуқта $(x, 0)$, M_2 нуқта эса $(0, y)$ координаталарга эга бўлиши, иккинчидан, $x = \pm|\overrightarrow{OM_1}|$, $y = \pm|\overrightarrow{OM_2}|$ экани келиб чиқади (бунда плюс ишора $\overrightarrow{OM_1}$ ва $\vec{i}$ ёки $\overrightarrow{OM_2}$ ва $\vec{j}$ векторлар бир хил йўналганда, минус ишора эса бу векторлар қарама-қарши йўналган ҳолда қўйилади).

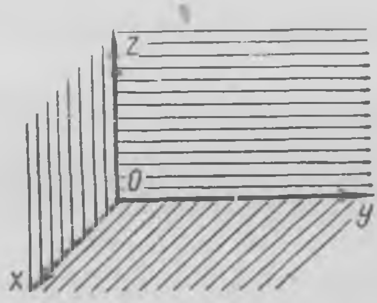
Юқорида қараб ўтилган ҳоллардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Абсциссалар ўқида ётган нуқталар $(x, 0)$ координаталарга, ординаталар ўқида ётган нуқталар эса $(0, y)$ координаталарга эга бўлади.

2. Текисликда ётган ҳар қандай M нуқтанинг абсциссаси M нуқтанинг x лар ўқига туширилган проекциясининг абсциссаси билан бир хил бўлади, ординатаси эса M нуқтанинг y лар ўқидаги проекциясининг ординатаси билан бир хил бўлади.



16- расм.



17- расм.

3. Агар M_1 ва M_2 лар M (x_0, y_0) нуқтанинг x ва y лар ўқларидаги проекциялари бўлса, у ҳолда $x_0 = \pm |\overrightarrow{OM_1}|$, $y_0 = \pm |\overrightarrow{OM_2}|$ бўлади, бунда $+$ $(-)$ ишораларга $\overrightarrow{OM_i}$ $(i = 1, 2)$ векторнинг тегишли координаталар ўқи ортининг йўналиши билан бир хил (ҳар хил) йўналиши мос келади.

Координаталаридан бири ўзгармас бўлган нуқталар тўпламлари *координата чизиқлари* дейилади. (x, y) нуқталари учун $x = x_0 = \text{const}$ бўлган координата чизиғи x лар ўқига перпендикуляр ва шу ўқнинг $(x_0, 0)$ нуқтасидан ўтувчи l_{x_0} тўғри чизиқдан иборат бўлади. Шунга ўхшаш, (x, y) нуқталари учун $y = y_0 = \text{const}$ бўлган координата чизиғи y лар ўқига перпендикуляр равишда унинг $(0, y_0)$ нуқтасидан ўтувчи l_{y_0} тўғри чизиқ бўлади. Шундай қилиб, $M(x_0, y_0)$ нуқта l_{x_0} ва l_{y_0} перпендикуляр тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси (15- расм). Бундан, Пифагор теоремасидан фойдаланиб, топамиз:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Худди шунга ўхшаш гаплар фазо нуқталари учун ҳам ўринли. Биз тасдиқларнинг ифодаларини бериш билан чекланамиз, бу тасдиқларнинг исботини ўқувчининг ўзи осонгина амалга ошира олади.

1. Абсциссалар ўқининг нуқтаси $(x, 0, 0)$, ординаталар ўқининг нуқтаси $(0, y, 0)$ ва аппликаталар ўқининг нуқтаси $(0, 0, z)$ координаталарга эга бўлади.

2. Ҳар қандай M нуқтанинг абсциссаси шу нуқтанинг x лар ўқидаги проекциясининг абсциссаси билан, ординатаси y лар ўқидаги проекциясининг ординатаси билан, ва ниҳоят, аппликатаси эса z лар ўқидаги проекциясининг аппликатаси билан устма-уст тушади.

3. Агар M_1, M_2, M_3 нуқталар M (x_0, y_0, z_0) нуқтанинг x, y, z ўқлардаги проекциялари бўлса, у ҳолда: $x_0 = \pm |\overrightarrow{OM_1}|$, $y_0 = \pm |\overrightarrow{OM_2}|$, $z_0 = \pm |\overrightarrow{OM_3}|$, бунда плюс ишорага (минус ишорага) $\overrightarrow{OM_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ векторнинг тегишли координаталар ўқининг орти билан бир хил (қарама-қарши) йўналиши мос келади.

Фазонинг координаталаридан бири ўзгармас бўлган нуқталарнинг тўплами *координат сиртлар* дейилади, $x = x_0 = \text{const}$ бўлганда L_{x_0} координат сирт x лар ўқидан ўтиб, бу ўқни $(x_0, 0, 0)$ нуқтада кесиб ўтувчи текисликни тасвирлайди. Шунга ўхшаш $y = y_0 = \text{const}$, $z = z_0 = \text{const}$ шартлар билан бериладиган L_{y_0} ва L_{z_0} координат сиртлар ҳам текисликлардир, бунда L_{y_0} сирт y лар ўқига перпендикуляр ва $(0, y_0, 0)$ нуқтадан ўтади, L_{z_0} сирт эса z лар ўқига перпендикуляр ва $(0, 0, z_0)$ нуқтадан ўтади (16- расм).

$x_0 = y_0 = z_0 = 0$ бўлганда L_{x_0}, L_{y_0}, L_{z_0} текисликларни одатда *координат текисликлар* дейилади ва мос равишда yOz, xOz, xOy каби белгиланади, яъни уларнинг белгиланишида шу координат текисликларида ётувчи координаталар ўқлари кўрсатилган (17- расм).

Ниҳоят, ҳар қандай $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани иккитадан перпендикуляр бўлган учта L_{x_0}, L_{y_0}, L_{z_0} текисликларнинг кесишиш нуқтаси деб қараш мумкин. Бундан, Пифагор теоремасидан фойдаланиб, топамиз:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

3.4. Вектор компонентлари ва вектор узунлиги учун формулалар. $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ — фазодаги иккита ихтиёрий нуқта бўлсин. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (18- расм), $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ радиус-векторларнинг компонентлари мос равишда $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ бўлгани учун 5, 6-теоремалардан (2.4- пункт) $\overrightarrow{AB}$ векторнинг $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базисга нисбатан компонентлари (ёки бошқача айтганда шу базис ва 0 нуқта ҳосил қилган Декарт координаталар системасига нисбатан компонентлари) қуйидагича бўлади.

$$\{ x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1 \}.$$

Шундай қилиб, *$\overrightarrow{AB}$ векторнинг компонентларини топиш учун унинг охири B нинг координаталаридан унинг боши A нинг координаталарини айириш керак.*

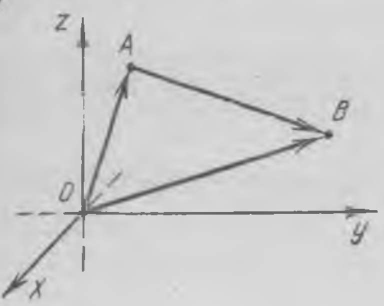
Томонлари координат ўқларига параллел, диагонали AB бўлган параллелепипедга Пифагор теоремасини қўллаб, ушбуга эга бўламиз (19- расм):

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

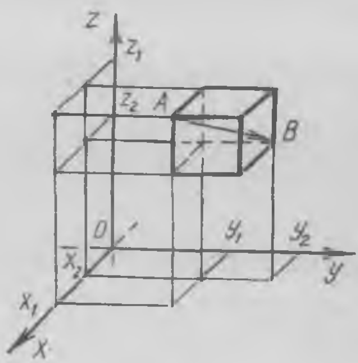
$|\overrightarrow{AB}|$ эса A ва B нуқталар орасидаги $r(A; B)$ масофа бўлгани учун:

$$r(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.5 Кесмани берилган нисбатда бўлиш Массалар системасининг оғирлик маркази $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ — фазодаги иккита ихтиёрий ҳар хил нуқта бўлсин. Сўнгра P нуқта AB тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Агар P нуқта AB кесма ичида ётса, у ҳолда $\overrightarrow{AP}$ ва $\overrightarrow{PB}$ коллинеар векторлар бир хил йўналган,



18- расм.



19- расм.

агар P нуқта AB кесмада ётмаса, у ҳолда қаралаётган векторлар қарама-қарши йўналган бўлади. Шунинг учун

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB} \qquad (3.1)$$

тенгликда P нуқта AB кесманинг ички нуқтаси бўлса, $\lambda > 0$, P нуқта AB кесманинг ташқи нуқтаси бўлса, $\lambda < 0$ бўлади.

AB кесмани берилган нисбатда бўлиш масаласи қуйидагича ифодаланиши мумкин: *$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар ва λ сон берилган; AB тўғри чизиқда ётувчи ва (3.1) тенгликни қаноатлантирувчи P нуқтанинг координаталарини топиш талаб қилинади.* $|\overrightarrow{AP}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{MB}|$ бўлгани учун, яъни

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{BP}|} = \frac{|AP|}{|BP|} = |\lambda| \qquad (3.2)$$

бўлгани учун биз қараётган масала AB тўғри чизиқда ётиб, бу тўғри чизиқни $\lambda > 0$ бўлса, ичкаридан, $\lambda < 0$ бўлса, ташқаридан λ нисбатда бўлувчи P нуқтанинг координаталарини топишга эквивалент бўлади. $\lambda \neq -1$, чунки P нуқта AB кесмадан ташқарида ётса, у ҳолда ҳар доим ё $|AP| > |BP|$, ёки $|AP| < |BP|$ бўлади.

M нуқтанинг Декарт координаталарини x, y, z билан белгилаймиз. У ҳолда (3.1) тенглик векторларнинг компонентлари учун ушбу тенгликлар системасига келтиради:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \qquad (3.3)$$

$\lambda \neq -1$ эканини ҳисобга олиб, P нуқтанинг координаталари учун (3.3) дан қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.4)$$

P нуқтанинг радиус-вектори учун қуйидаги формуланинг тўғрилиги (3.4) дан келиб чиқади:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}. \qquad (3.5)$$

Энди массалар системасининг оғирлик маркази ҳақидаги масалани кўриб чиқамиз:

Берилган $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ *нуқталарга мос равишда* m_1 *ва* m_2 *массалар жойлаштирилган бўлсин. Массаларнинг бу системасининг оғирлик маркази* M *нинг координаталарини топиш талаб қилинади.* Физикадан маълумки, M нуқта AB кесма ичида ётади ва бу кесмани узунликлари кесма учларига жойлаштирилган массаларга тескари пропорционал қисмларга ажратади. Қабул қилинган белгилашларга кўра, λ сон бизнинг ҳолда мусбат ва $\frac{m_2}{m_1}$ га тенг. Шунинг учун (3.4) дан A ва B нуқталарга жойлаштирилган m_1, m_2 массалар системаси оғирлик марказининг координаталари бундай экани келиб чиқади:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.6)$$

Шунинг учун

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{OB}.$$

Агар m_1 ва m_2 ноль қийматларни айрим-айрим қабул қилади деб фараз қилсак, яъни массалар системаси B нуқтага жойлаштирилган массага ($m_1 = 0$) ёки A нуқтага жойлаштирилган ($m_2 = 0$) битта массага келтирилса, M оғирлик маркази бу ҳолларда ё B нуқта билан, ёки A нуқта билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, массаларнинг $\frac{m_2}{m_1}$ нисбати нолдан то $+\infty$ гача бўлган қийматларни кетма-кет қабул қилса, у ҳолда M оғирлик маркази A нуқтадан бошлаб B нуқтагача бўлган AB кесмадаги барча қийматларни қабул қилади.

Энди $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ нуқталар берилган бўлиб, уларга m_1, m_2, m_3 массалар жойлаштирилган ва бунда $m_1 + m_2 + m_3 > 0$ бўлсин. Массаларнинг шу системасининг оғирлик марказини топамиз. Аниқлик учун $m_1+m_2>0$ деб фараз қиламиз. Агар $m_3 = 0$ бўлса, масала иккита A ва B нуқтага жойлаштирилган массалар системасига келтирилади, бу ҳолни эса ҳозиргина қараб чиқдик. Шунинг учун $m_3 > 0$ бўлган ҳол қизиқарлидир. Физикадан маълумки, бу масалани икки босқичда ҳал қилиш мумкин. Олдин A ва B нуқталарга жойлаштирилган m_1 ва m_2 массалар оғирлик маркази M_1 нинг координатасини топамиз; шундан кейин изланаётган оғирлик маркази M мос равишда M_1 ва C нуқталарга жойлаштирилган $m_1 + m_2$ ва m_3 массалар системасининг оғирлик маркази сифатида топилади. (3.6) дан қуйидагилар келиб чиқади:

$$x_{M_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{M_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_{M_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.7)$$

Сўнгра M_1 ва C нуқталарга жойлаштирилган $m_1 + m_2$ ва m_3 массалар системаси учун $\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$ га эгамиз. Шунинг учун (3.7) дан фойдаланиб, (3.4) дан топамиз:

$$x_M = \frac{x_{M_1} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (3.8\text{ а})$$

Шунга ўхшаш:

$$y_M = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z_M = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (3.8\text{ б})$$

(3.8 а, б) дан

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\overrightarrow{OB} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\overrightarrow{OC} \qquad (3.9)$$

экани келиб чиқади.

(3.9) дан, агар A, B, C нуқталарга $m_1 + m_2 + m_3 > 0$ шартда ҳар хил $m_1 \geqslant 0, m_2 \geqslant 0, m_3 \geqslant 0$ массалар жойлаштирилса, бу массалар системасининг M оғирлик марказлари тўплами ABC учбурчакдан иборат бўлишини осонгина аниқлаш мумкин.

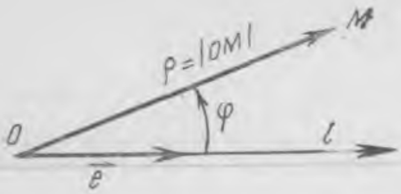
Агар бу A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётса ҳамда (аниқлик учун) C нуқта AB кесма ичида ётса, у ҳолда қаралаётган оғирлик марказларининг тўплами AB кесмадан иборат бўлади.

Фойдали масала сифатида тўртта ва ундан ортиқ нуқталарга жойлаштирилган массалар системасини қарашни ва бундай ҳоллар учун юқорида кўриб чиқилган масалаларни ўрганишни тавсия қиламиз.

4- §. Бошқа координаталар системалари

Декарт координаталари системасидан ташқари кўпинча бошқа координаталар системасидан ҳам фойдаланилади. Шу системалардан баъзиларини кўриб чиқамиз.

4.1. Текисликда қутб координаталар системаси. Текисликда бирор O нуқтани ва боши шу O нуқтада бўлган l нурни белгилаймиз. l нурда ётувчи боши O нуқтада бўлган бирлик векторни $\vec{e}$ билан белгилаймиз. У ҳолда $\vec{e}$ вектор l да йўналиш ҳосил қилади. O нуқтани *қутб*, l нурни киритилган йўналиш билан бирга *қутб ўқи* дейилади. M нуқтанинг текисликдаги ҳолати (20- расм) иккита сон билан, яъни $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ ва қутб ўқи билан $\overrightarrow{OM}$ вектор орасидаги φ бурчак билан тўла аниқланади, бу бурчак соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда ҳисобланади. $\rho \geqslant 0$ сонини *қутбий масофа*, φ бурчак эса *қутбий бурчак* дейилади. (Одатда φ бурчак радианларда ўлчанади.) Қутб учун $\rho = 0$, φ эса бир қийматли аниқланмайди, яъни $[0, 2\pi]$ оралиқдан олинган ихтиёрий сон бўлиши



20- расм.

21- расм.

мумкин. Текисликнинг қолган нуқталари учун $\rho > 0$, φ бурчак эса $[0, 2\pi]$ *ораликқа тегишли булади.*

Равшанки, сонларнинг ҳар қандай (ρ, φ) жуфти учун (бунда $\rho > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$) текисликнинг битта нуқтаси мавжуд бўлиб, сонларнинг бу жуфти шу нуқта учун қутб координаталари бўлади.

$\rho = \mathrm{const} > 0$ координат чизиқлар радиуси ρ ва маркази O нуқтада бўлган айланалардир, $\varphi = \mathrm{const}$ $(\varphi \in [0, 2\pi])$ чизиқлар эса боши O нуқтада бўлган нурлардир (21- расм).

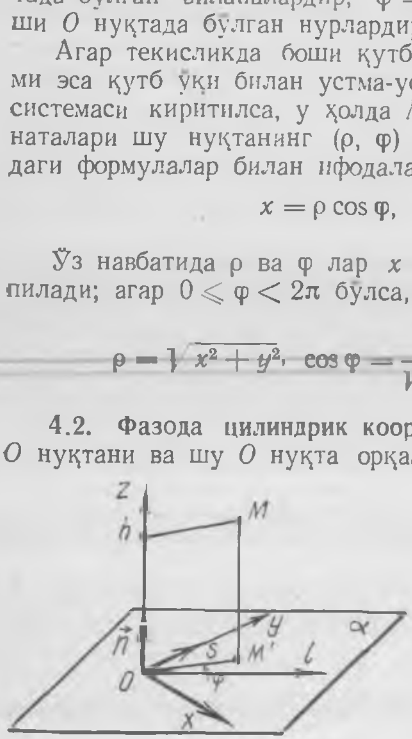
Агар текисликда боши қутб билан, x лар ўқининг мусбат қисми эса қутб ўқи билан устма-уст тушадиган Декарт координаталар системаси киритилса, у ҳолда M нуқтанинг (x, y) Декарт координаталари шу нуқтанинг (ρ, φ) қутб координаталари орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Ўз навбатида ρ ва φ лар x ва y лар орқали бир қийматли топилади; агар $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ бўлса, у ҳолда:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4.2. Фазода цилиндрик координаталар системаси. Фазода бирор O нуқтани ва шу O нуқта орқали ўтувчи бирор α текисликни белгилаймиз (22- расм). α текисликда бирор l нурни белгилаймиз. $\vec{n}$ вектор α текисликка перпендикуляр ва боши O нуқтада бўлган бирлик вектор бўлсин. α текисликнинг O нуқта атрофида айланишини $\vec{n}$ вектор учидан қаралганда соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда содир булади деб ҳисоблаймиз.



22- расм.

Энди M нуқта фазонинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса унинг α текисликка проекцияси бўлсин. У ҳолда $\overline{MM'}$ вектор $\vec{n}$ векторга коллинеар бўлади. M нуқтанинг *цилиндрик координаталари* деб сонларнинг тартибланган (ρ, φ, h) учлигини айтилади, бунда (ρ, φ) M нуқтанинг α текисликдаги O кутбга ва l кутбий ўққа нисбатан қутб координаталари, h эса $\overrightarrow{MM}$ векторнинг $\vec{n}$ бирлик векторга нисбатан компоненти.

Энди боши O нуқтада, x лар ўқининг мусбат қисми l нур билан, z лар ўқининг орти $\vec{n}$ вектор билан устма-уст тушадиган Декарт координаталар системаси киритилса, у ҳолда ихтиёрий M нуқтанинг x, y, z Декарт координаталари шу нуқтанинг (ρ, φ, h) цилиндрик координаталари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = h.$$

4.3. Сферик координаталар системаси. Цилиндрик координаталар ҳолидагидек (4.2-п), O нуқта, α текислик, шу текисликда l нур ва α текисликка перпендикуляр $\vec{n}$ бирлик вектор белгиланади. M — фазонинг ихтиёрий нуқтаси ва M' эса M нинг α текисликдаги проекцияси бўлсин. Сонларнинг тартибланган (ρ, φ, θ) учлиги M нуқтанинг *сферик координаталари* дейилади, бунда $\rho = |\overrightarrow{OM}|$, φ — $|\overrightarrow{OM}|$ вектор билан l нур орасидаги бурчак, бу бурчак φ дан бошлаб соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда ҳисобланади, ва ниҳоят, θ — $\overrightarrow{OM}$ вектор билан α текислик орасидаги бурчак. Агар M нуқта ярим фазонинг $\vec{n}$ векторнинг охири ётган қисмида ётса, $\theta \geqslant 0$, акс ҳолда $\theta \leqslant 0$ бўлади. Равшанки, θ координата— $\frac{\pi}{2}$ дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради.

Агар фазода (4.2-пункт) қилинганидек, O нуқта, α текислик, l нур ва $\vec{n}$ вектор билан боғлиқ Декарт координаталари системаси киритилса, у ҳолда M нуқтанинг x, y, z Декарт координаталари шу M нуқтанинг сферик координаталари орқали ушбу формулалар билан ифодаланади:

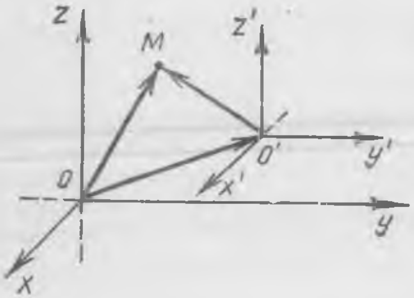
$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \rho\sin\theta.$$

Машқ. Цилиндрик ва сферик координаталар системаларида координат сиртларни тасвирланг.

5- §. Параллел кўчиришда, симметрияда ва буришда Декарт координаталарини алмаштириш

5.1. Ўқларни параллел кўчиришда Декарт координаталарини алмаштириш. Геометрик образларни текширишни соддалаштириш учун кўпинча Декарт координаталарининг бир системасидан бошқа системасига ўтишга тўғри келади. Шунинг учун битта нуқтанинг ҳар хил системалардаги координаталарини боғловчи формулаларни топиш масаласи вужудга келади.

Боши O нуқтада бўлган Декарт координаталари системаси берилган бўлсин ва $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лар x, y, z координата ўқларнинг ортлари бўлсин. Сўнгра O' (a; b; c) — ўқлари x', y', z' бўлган Декарт координаталар системасининг боши бўлсин. Бу ўқларнинг ортларини мос равишда $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ билан белгилаймиз ва $\vec{i'}=\vec{i}$, $\vec{j'}=\vec{j}$, $\vec{k'}=\vec{k}$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда $O'x'y'z'$ Декарт координаталари системаси $Oxyz$ Декарт координаталари системасидан параллел кўчириш йўли билан ҳосил қилинган дейиш мумкин. Равшанки, ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг компонентлари x ва x', y ва y', z ва z' ўқларга нисбатан бир хил.



23- расм.

Энди M нуқта $Oxyz$ координаталар системасида (x, y, z) координаталарга ва $O'x'y'z'$ координаталар системасида (x', y', z') координаталарга эга бўлган нуқта бўлсин. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$ (23- расм) ва

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k},\quad \overrightarrow{OO'}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k},$$

$$\overrightarrow{O'M}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

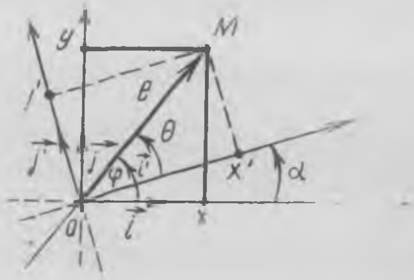
бўлгани учун векторнинг базисига нисбатан ёйилмаси битта бўлишига кўра ушбуга эга бўламиз:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,\quad z=z'+c. \tag{5.1}$$

(5.1) формулалар ихтиёрий M нуқтанинг бир-биридан параллел кўчиришдан ҳосил бўлган координаталар системаларидаги координаталарини ўзаро боғлайди.

5.2. Текисликда координата ўқларини буришда Декарт координаталарини алмаштириш. Oxy ва $Ox'y'$ — умумий учга эга бўлган иккита Декарт координаталар системаси бўлсин. Сўнгра $\vec{i}$, $\vec{j}$ лар x ва y ўқларининг ортлари, $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ эса x' ва y' ларнинг ортлари ва α бурчак 0 дан 2π гача оралиқдаги бурчак бўлиб, у $\vec{i}$ векторни O нуқта атрофида $\vec{i'}$ вектор билан устма-уст тушгунча соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда шу бурчак қадар бурилади (24-расм). Равшанки, бу вақтда $\vec{j}$ вектор ҳам соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда шу бурчак қадар буриш натижасида (O нуқта атрофида) $\vec{j'}$ вектор билан устма-уст тушади.

Текисликда иккита қутб координаталар системасини киритамиз. бу системаларнинг учи O нуқтада, бу системаларнинг қутб ўқлари эса x ва x' лар ўқларининг мусбат қисми билан устма-уст тушади.



24- расм.

M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Унинг Oxy Декарт координаталар системасидаги координаталарини x, y билан, биринчи қутб координаталар системасидаги қутб координаталарини (ρ, φ) билан белгилаймиз. У ҳолда: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Шунга ўхшаш (x', y') — M нуқтанинг $Ox'y'$ координаталар системасидаги координаталари ва (ρ, θ) M нуқтанинг иккинчи қутб системасидаги қутб координаталари бўлсин, у ҳолда $x' = \rho\cos\theta$, $y' = \rho\sin\theta$. $\varphi + 2k\pi = \alpha + \theta$ эканини таъкидлаймиз, бунда k нолга ёки бирга тенг. Бундан қуйидагиларга эгамиз:

$$x = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\varphi + 2k\pi) = \rho\cos(\alpha + \theta) =$$
$$= \rho\cos\alpha\cos\theta - \rho\sin\alpha\sin\theta = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = \rho\sin\varphi = \rho\sin(\varphi + 2k\pi) = \rho\sin(\alpha + \theta) =$$
$$= \rho\sin\alpha\cos\theta + \rho\cos\alpha\sin\theta = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

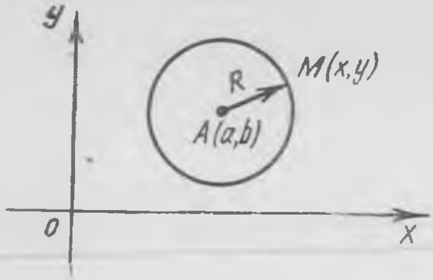
Шундай қилиб, координаталар ўқларини координаталар боши атрофида буриш ҳолида координаталарни алмаштириш формуласи қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3. Симметрияда Декарт координаталарини алмаштириш. Агар биз x лар ўқига нисбатан симметрик алмаштириш бажарсак, яъни $M(x, y)$ нуқта учун унга x лар ўқига нисбатан симметрик бўлган $M'(x', y')$ нуқтани мос келтирсак, у ҳолда $x' = x$, $y' = -y$. Шунга ўхшаш, $M''(x'', y'')$ нуқта M нуқтага y лар ўқига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда $x'' = -x$, $y = y''$ бўлади.

6- §. Нуқталар тўпламларининг тенгламалар ва тенгсизликлар билан берилиши

6.1. Тўпламларнинг текисликда берилиши. Текисликда ёки фазода Декарт координаталари системасини киритилгандан кейин нуқтанинг ҳолати шу нуқта координаталари билан бир қийматли аниқланади. Шунинг учун у ёки бу нуқталар тўпламини характерловчи хосса шу тўплам нуқталарининг координаталари орасидаги муносабатлар орқали ёзилиши мумкин.



25- расм.

Ушбу мисолдан бошлаймиз. L — текисликдаги айлана бўлиб, унинг маркази $A(a, b)$ нуқтада ва радиуси R га тенг бўлсин (25-расм). $M(x, y)$ нуқта L айлана

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

ёки

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \quad (6.1)$$

бўлгандагина тегишли бўлади.

Шундай қилиб, L айлананинг ихтиёрий M нуқтасининг координаталари (6.1) тенгламани қаноатлантиради. Иккинчи томондан, равшанки, агар $M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг координаталари (6.1) тенгламани қаноатлантирса, M_0 нуқта L айланада ётади. Демак, (6.1) тенглама L айланани тўла характерлайди.

Агар биз L нинг ичида ва L нинг ташқарисида ётган текислик бўлакларини мос равишда K ва Q орқали белгиласак, улар

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 < 0$$

ёки

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 > 0$$

тенгсизликлар орқали тўла аниқланади.

Текисликдаги нуқталарнинг Ф тўпламини одатда тенглама ёки тенгсизлик билан бериш мумкин: чунончи, агар $F(x, y) = 0$ (ёки $F(x, y) \geqslant 0$) бўлса, $M(x, y) \in Ф$ бўлади.

Ҳозиргина кўриб чиқилган мисолда $F(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$.

Агар: 1) L тўпламнинг исталган $M(x_0, y_0)$ нуқтаси учун $F(x_0, y_0) = 0$ бўлса; 2) ҳар қандай $N(x^*, y^*)$ нуқта $F(x^*, y^*) = 0$ тенгликни қаноатлантириб, L нинг нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$F(x, y) = 0 \quad (6.2)$$

тенглама L *тўпламнинг тенгламаси* дейилади.

Масалан, ушбу тенгламалар:

а) $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} - 2 = 0,$

б) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0,$

в) $[(x-a)^2 + (y-b)^2](x^2 + y^2) = 0,$

г) $(x-a)^2 + (y-b)^2 + 1 = 0$

мос равишда: а) биринчи квадрантнинг (ўқлар кирмайди); б) (a, b) нуқтанинг; г) $(0, 0)$, (a, b) нуқталар жуфтининг; в) $\varnothing$ бўш тўпламнинг (ҳеч қандай нуқтаси бўлмаган тўпламни бўш тўплам дейилади) тенгламаларидир.

Шунга ўхшаш, агар Ф тўпламнинг 1) ихтиёрий $M(x_0, y_0)$ нуқтаси учун $F(x_0, y_0) \geqslant 0$ бўлса; 2) ҳар қандай $N(x^*, y^*)$ нуқта

$F(x^*, y^*) \geqslant 0$ тенгсизликни қаноатлантириб, Ф нинг нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$F(x, y) \geqslant 0 \tag{6.3}$$

тенгсизликни Ф ни берувчи тенгсизлик дейилади.

Маълумки, иккита $F(x, y) = 0$ ва $F_2(x, y) = 0$ тенгламадан (ёки икки $F_1(x, y) \geqslant 0$ ва $F_2(x, y) \geqslant 0$ тенгсизликдан) биринчисининг ҳар бир ечими иккинчисининг ҳам ечими бўлса, ва аксинча, иккинчисининг ҳар бир ечими биринчисининг ҳам ечими бўлса, у ҳолда бу тенгламалар (тенгсизликлар) эквивалент дейилади. Бу иккала тенгламанинг (тенгсизликнинг) ечимлари бир хил эканини билдиради.

6.2. Тўпламларнинг фазода берилиши. S — маркази $A(a, b, c)$ нуқтада бўлиб, радиуси R га тенг сфера бўлсин. $M(x, y, z)$ нуқта S сферага

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина тегишли бўлади. Бундан

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

тенглама S сферанинг тенгламаси эканини кўрамиз. Агар U — S сфера билан чегараланган шар, V эса S дан ташқарида ётган нуқталар тўплами бўлса, у ҳолда U ва V мос равишда ушбу тенгламалар билан берилади:

$$U: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 \leqslant 0,$$
$$V: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 > 0.$$

Агар S тўпламнинг 1) ҳар бир $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқтаси учун $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ бўлса; 2) $F(x^*, y^*, z^*) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи $N(x^*, y^*, z^*)$ нуқта S нинг нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$F(x, y, z) = 0 \tag{6.4}$$

тенглама S тўпламнинг тенгламаси дейилади.

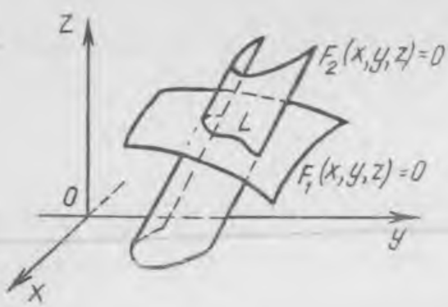
Ушбу $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$ ва $(x-a)^2 + 1 = 0$ мисоллар (6.4) тенглама бир нуқтали тўпламларни ҳам, бўш тўпламларни ҳам бериши мумкин эканлигини кўрсатади.

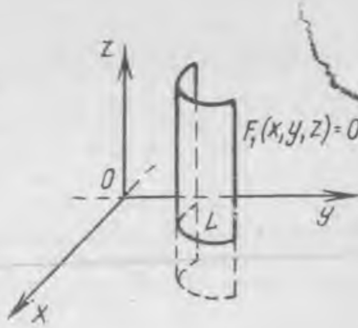
Шунга ўхшаш, $F(x, y, z) \geqslant 0$ тенгсизлик Ф тўпламни беришини аниқлаш мумкин.

6.3. Координат текисликларда ётувчи тўпламларнинг берилиши. L тўплам мос равишда $F_1(x, y, z) = 0$ ва $F_2(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилган Φ_1 ва Φ_2 тўпламларнинг умумий нуқталари тўплами бўлсин (26- расм). У ҳолда L қуйидаги тенгламалар системаси билан берилади:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Ҳақиқатан, агар $M(x, y, z)$ нуқта L тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда M бир вақтнинг ўзида иккала Φ_1 ва Φ_2 тўпламларнинг





26- расм. 27- расм.

нуқтаси бўлади, ва демак, M нинг координаталари (6.5) тенгламаларни қаноатлантиради. Иккинчи томондан, агар бирор $M^*(x^*, y^*, z^*)$ нуқта учун сонларнинг (x^*, y^*, z^*) учлиги (6.6) системанинг ечими бўлса, у ҳолда M^* нуқта бир вақтнинг ўзида иккала Φ_1 ва Φ_2 тўпламга тегишли бўлади, шунинг учун ҳам M^* нуқта L тўпламнинг нуқтасидир.

Агар L тўплам Oxy координат текисликда ётувчи тўплам бўлса (27- расм), у ҳолда тўпламлардан бири сифатида, масалан, Φ_2 тўплам сифатида Oxy текисликни олиш мумкин, бу текисликнинг тенгламаси $z = 0$ дан иборат. Шундай қилиб, Oxy текисликда ётувчи нуқталар тўпламлари

$$F_1(x, y, z) = 0, \tag{6.6}$$

$$z = 0 \tag{6.7}$$

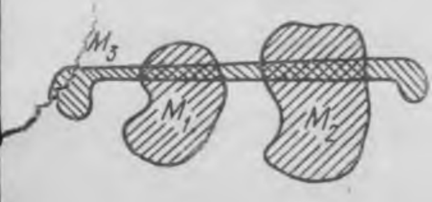
тенгламалар системаси билан берилади. $F(x, y) = F_1(x, y, 0)$ деб оламиз. У ҳолда Oxy текисликнинг нуқталари тўплами деб қаралаётган L

$$F(x, y) = 0$$

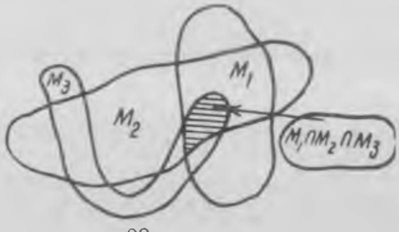
тенглама билан берилади. (6.7) тенгламани бу ҳолда ёзмаслик мумкин.

6.4. Тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси. Бундан кейин тўпламлар назариясининг тушунча ва белгилашларидан кенг фойдаланилади.

M — бирор тўплам, a эса унинг ихтиёрий элементи бўлсин. a элемент M тўпламга тегишли деган факт бундай белгиланади: $a \in M$. Агар b элемент M тўпламга тегишли бўлмаса, $b \overline{\in} M$ каби ёзилади. M ва N — иккита тўплам бўлсин. Агар тўпламнинг барча элементлари шу вақтнинг ўзида N нинг ҳам элементлари бўлса, у ҳолда M тўплам N тўплам *таркибига киради* дейилади ва $M \subseteq N$ каби белгилашдан фойдаланилади. Агар икки тўплам бир хил элементлардангина ташкил топган бўлса, бундай тўпламлар *тенг* дейилади. Бу ҳолда $M = N$ ёзувдан фойдаланилади. M ва N тўпламлар их-



28- расм.



29- расм.

тиёрий тўпламлар бўлсин, у ҳолда $M = N$ муносабат $M \subset N$ ва $N \subset M$ муносабатларнинг бажарилишига тенг кучлидир. Бундан кўпинча иккита тўпламнинг тенглигини исботлашда фойдаланилади.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламлар берилган бўлсин. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *тўпламларнинг бирлашмаси деб ҳар бир элементи M_i тўпламдан бирортасининг элементи бўлган M тўпламга айтилади, бунда i 1, 2, ..., n сонлардан бири.* Бошқача айтганда, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламларнинг бирлашмаси шундай M тўпламки, $a \in M$ эканидан 1, 2, ..., n сонлар тўпламидан ақалли биттаси бўлган i учун $a \in M_i$ экани келиб чиқади. Тўпламларнинг бирлашмаси учун ушбу ёзув қабул қилинган:

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \quad \text{ёки} \quad M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n.$$

Агар $n = 2$ ёки $n = 3$ бўлса, одатда ёзувнинг иккинчи шакли ишлатилади. 28- расмда тўпламларнинг бирлашмаси штрихланган.

M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ тўпламлар $F_i(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилган бўлсин. У ҳолда $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$

$$F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z) \cdot \ldots \cdot F_n(x, y, z) = 0 \qquad (6.8)$$

тенглама билан берилади.

Тенгсизликлар билан берилган тўпламларнинг бирлашмалари ҳам шунга ўхшаш аналитик тавсифланади. Бунга биз мукаммал тўхтаб ўтирмаймиз.

$M_1, M_2, \ldots, M_n$ *тўпламларнинг кесишмаси деб бу тўпламлар умумий элементларининг ҳаммасидан иборат P тўпламга айтилади.* Тўпламларнинг кесишмалари учун ушбу ёзувдан фойдаланилади:

$$P = \bigcap_{i=1}^{n} M_i \quad \text{ёки} \quad P = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n.$$

Тўпламларнинг кесишмаси тасвирини 29- расмдан қаранг. $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, ..., $F_n(x, y, z) = 0$ тенгламалар билан берилган $M_1, M_2, \ldots, M_n$ тўпламлар ва $G_1(x, y, z) \geqslant 0$, $G_2(x, y, z) \geqslant 0$, ..., $G_m(x, y, z) \geqslant 0$ тенгсизликлар билан берилган $N_1, N_2, \ldots, N_m$ тўпламлар берилган бўлсин. У ҳолда бу тўпламларнинг ҳаммасининг кесишмаси P қуйидаги тенгламалар ва тенгсизликлар системалари билан берилади:

$$
\begin{array}{ll}
F_1(x, y, z) = 0, & G_1(x, y, z) \geqslant 0, \\
F_2(x, y, z) = 0. & G_2(x, y, z) \geqslant 0, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
F_n(x, y, z) = 0, & G_m(x, y, z) \geqslant 0.
\end{array} \qquad (6.9)
$$

Агар $m = 0$ бўлса, яъни P тўпламнинг тузилишида фақат M_1, M_2, ..., M_n тўпламлар қатнашса, у ҳолда P тўплам $F_i(x, y, z) = 0$ тенгламалар системаси билан берилади, бунда ($i = 1, 2, ..., n$). Агарда $n = 0$ ва P тўплам $N_1, N_2, \dots, N_m$ тўпламларнинг кесишмасидангина иборат бўлса, у ҳолда P ушбу $G_i(x, y, z) \geqslant 0$ ($i = 1, 2, ..., m$) тенгсизликлар системаси билан берилади.

Бир қатор содда мисоллар келтирамиз.

1. Текисликда

$$
\begin{array}{ll}
a - x \geqslant 0, & x \geqslant 0, \\
b - y \geqslant 0, & y \geqslant 0
\end{array}
$$

тенгсизликлар системаси учлари (0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b) нуқталарда бўлган тўғри тўртбурчакни беради (30- расм), бунда a ва b — мусбат сонлар.

2. Томонлари координаталар ўқларига параллел бўлган, текисликдаги ҳар қандай тўғри тўртбурчак

$$
a_1 - x \geqslant 0, \quad b_1 - y \geqslant 0, \quad x - a_2 \geqslant 0 \quad y - b_2 \geqslant 0
$$

тенгсизликлар системаси билан берилишини исботланг, бунда $a_2 < a_1$ ва $b_2 < b_1$ — бирор сонлар.

3. Фазода

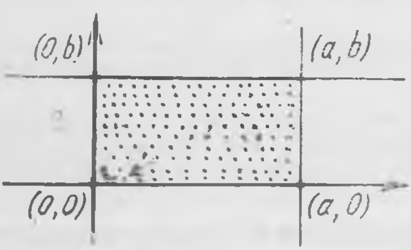
$$
\begin{array}{lll}
a - x \geqslant 0, & b - y \geqslant 0, & c - z \geqslant 0, \\
x \geqslant 0, & y \geqslant 0 & z \geqslant 0
\end{array}
$$

тенгсизликлар системаси қирралари координаталар ўқларига параллел бўлган параллелепипедни беради, бунда a, b, c — мусбат сонлар.

4. Қирралари координаталар ўқларига параллел бўлган ҳар қандай параллелепипед қуйидаги тенгсизликлар системаси билан берилишини исботланг:

$$
\begin{array}{lll}
a_1 - x \geqslant 0, & b_1 - y \geqslant 0, & c_1 - z \geqslant 0, \\
x - a_2 \geqslant 0, & y - b_2 \geqslant 0, & z - c_2 \geqslant 0,
\end{array}
$$

бунда $a_2 < a_1$, $b_2 < b_1$, $c_2 < c_1$— бирор сонлар.



30- расм.

6.5. Биринчи ва иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар. Координаталари бирор Декарт координаталар системасида

$$
Ax + By + C = 0 \qquad (6.1^1)
$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами *текисликда би-*

ринчи тартибли чизиқ дейилади, бунда $A^2+B^2\neq 0$.

Келтирилган таъриф баъзи камчиликларга эга. Биринчи тартибли чизиқни таърифлашда тасодифий Декарт координаталари системаси учраяпти. Шунинг учун (6.11) тенглама бошқа Декарт координаталари системаларида ўз кўринишини сақлаб қолиш-қолмаслиги тушунарсиз бўлиб қоляпти. Декарт координаталарининг бир системасидан бошқасига ўтиш координаталар ўкларини координаталар боши атрофида айлантириш билан, унинг кетидан параллел кўчиришни, ҳатто симметрик алмаштиришни бажариш билан амалга оширилади. Бир системадан иккинчи системага ўтишнинг буриш ва параллел кўчириш ҳоллари

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b \end{aligned} \tag{6.12}$$

формулалар ёрдамида амалга оширилади.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, $\varphi=0$ бурчак қадар айлантириш ва $\vec{0}$ вектор қадар параллел кўчиришга йўл қўйилади. Шунинг учун (6.11) тенглама x', y' координаталар системасида ушбу

$$A'x'+B'y'+C'=0$$

кўринишга эга, бу ерда

$$A'=A\cos\varphi+B\sin\varphi,\ B'=-A\sin\varphi+B\cos\varphi \text{ ва}$$
$$C'=Aa+Bb+C.$$

Бундан

$$A'^2+B'^2=(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2+(-A\sin\varphi+B\cos\varphi)^2=$$
$$=A^2+B^2\neq 0$$

бўлгани учун тўпламнинг биринчи тартибли чизиқ бўлиш хоссаси Декарт координаталари системасига боғлиқ эмаслиги келиб чиқади.

Умумий ҳолни, яъни бир координаталардан бошқа координаталарга ўтишда симметрияга ҳам йўл қўйиладиган ҳолни текширишни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

Координаталари бирор Декарт координаталари системасида

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{6.13}$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами *текисликда иккинчи тартибли чизиқ* дейилади, бунда A, B, C коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли.

Тўпламнинг иккинчи тартибли чизиқ бўлиш хоссаси бу тўпламнинг тенгламаси қаралаётган Декарт координаталари системасини танлашга боғлиқ эмас.

Бу фактни бир ҳолдагина, яъни x, y Декарт координаталари системасидан x', y' Декарт координаталари системасига (6.12) формулалар бўйича ўтиш ҳолини текшириш билан чекланамиз. У ҳолда (6.13) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0,$$

бунда

$$A' = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi,$$
$$B' = -A\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$C' = A\sin^2\varphi - 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi.$$

Ушбу тенглик тўғри эканини текшириш осон:

$$A'^2 + 2B'^2 + C'^2 = A^2 + 2B^2 + C.$$

Бундан айтилган тасдиқ келиб чиқади.

Координаталари бирор Декарт координаталари системасида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.14}$$

тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами *биринчи тартибли сирт* дейилади, бунда $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Шунга ўхшаш, бирор Декарт координаталари системасида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz +$$
$$+ Gx + Hy + Kz + L = 0$$

тенглама билан аниқланувчи тўплам *иккинчи тартибли сирт* дейилади, бунда A, B, C, D, E, F коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли.

Бу таърифларнинг тўғрилиги юқорида текислик учун киритилган тушунчаларнинг тўғрилигини аниқлагандек ўрнатилади.

6.6. Тўпламларнинг симметрия маркази, ўқлари ва текисликлари ҳақида.

Текисликда тенгламаси

$$F(x, y) = 0 \tag{6.15}$$

бўлган L тўплам берилган бўлсин.

Ҳар қандай (x, y) нуқта учун координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқта $(-x, -y)$ координаталарга эга бўлади. Шунинг учун $(x, y) \in L$ шартдан $F(-x, -y) = 0$ экани келиб чиққандагина ва фақат шу ҳолдагина координаталар боши L нинг симметрия маркази бўлади.

Шу сабабли, $F(x, y)$ шундай функция бўлсаки, исталган x ва y лар учун

$$F(-x, -y) = F(x, y)$$

бўлса, координаталар боши L нинг симметрия маркази булади.

(x, y) нуқтага x лар ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқта $(x, -y)$ нуқтадан, y лар ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқта $(-x, y)$ нуқтадан иборат бўлади. Шунинг учун барча x, y ларда $F(x, y)$ функция

$$F(x, -y) = F(x, y) \tag{6.16}$$

ёки

$$F(-x, y) = F(x, y) \tag{6.17}$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда L тўплам x лар ўқига ёки y лар ўқига мос равишда симметрик бўлади.

M тўплам

$$F(x, y, z) = 0$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар исталган x, y, z лар учун

$$F(-x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

бўлса, у ҳолда координаталар боши M тўпламнинг симметрия маркази бўлади, агарда

$$F(-x, y, z) = F(x, y, z)$$

ёки

$$F(x, -y, z) = F(x, y, z),$$

ёки

$$F(x, y, -z) = F(x, y, z)$$

бўлса, у ҳолда Oyz текислик, ёки Oxz текислик, ёки Oxy текислик мос равишда M тўпламнинг симметрия текисликлари бўлади. Ниҳоят, агар барча x, y, z ларда

$$F(-x, -y, z) = F(x, y, z),$$

ёки

$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z),$$

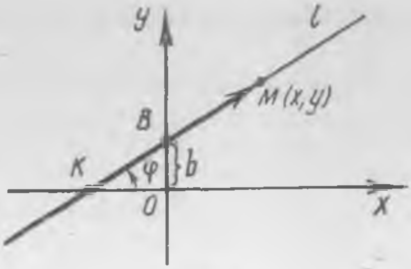
ёки

$$F(-x, y, -z) = F(x, y, z)$$

бўлса, у ҳолда мос равишда z лар ўқи, ёки x лар ўқи, ёки y лар ўқи M тўпламнинг симметрия ўқлари бўлади.

7- §. Текисликдаги биринчи тартибли чизиқлар. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

7.1. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси. Текисликда боши O нуқтада бўлган ва координата ўқлари x ва y дан иборат бўлган Декарт координаталари системаси берилган бўлсин, l эса x лар ўқини K нуқтада кесиб ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин (31- расм). x лар ўқини K нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда l тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча айлантиришдан ҳосил бўладиган φ $(0 < \varphi < \pi)$ бурчак l тўғри чизиқ билан x лар ўқи орасидаги бурчак дейилади. Агар l тўғри чизиқ x лар ўқига параллел бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқнинг x лар ўқига нисбатан қиялиги нолга тенг деб ҳисобланади.



31- расм.

Олдин $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ бўлган ҳолни караб чиқамиз. Агар l билан x лар ўқи орасидаги φ бурчак ва l тўғри чизиқнинг y лар ўқи билан кесишиш нуқтасининг ординатаси b маълум бўлса, у ҳолда l тўғри чизиқ текисликда бир қийматли аниқланган бўлади. $M(x, y)$ — l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{BM} = x\vec{i} + (y - b)\vec{j}$ вектор l да ётади ва $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун тангенснинг таърифига кўра:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Бундан:

$$y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + b. \tag{7.1}$$

$k = \operatorname{tg}\varphi$ деб оламиз. У ҳолда (7.1) бундай ёзилади:

$$y = kx + b \tag{7.2}$$

Шундай қилиб, l тўғри чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасининг координаталари

$$y = kx + b \tag{7.3}$$

тенгламани қаноатлантиради.

(7.3) тенглама текисликда биринчи тартибли m тўғри чизиқни аниқлайди. Биз кўриб чиққанлардан $l \subseteq m$ экани келиб чиқади. Шуни таъкидлаймизки, $B(0, b)$ нуқта l га тегишли, ва демак, m га ҳам тегишли.

$l \supseteq m$ тескари муносабатни исботлаймиз. (x^*, y^*) (7.3) тенгламанинг $(0, b)$ ечимидан фарқли ечими бўлсин. У ҳолда $x^* \neq 0$. Текисликда $\overrightarrow{BM^*}$ векторни қараймиз, бунда M^* координаталари (x^*, y^*) бўлган нуқта. У ҳолда: $\overrightarrow{BM^*} = x^*\vec{i} + (y^* - b)\vec{j}$. B нуқтадан ўтиб x лар ўқи билан φ бурчак ҳосил қилувчи ягона тўғри чизиқ мавжуд. Равшанки, агар

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y^* - b}{x^*}$$

бўлса, M^* нуқта l да ётади, бунда $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ тўғри чизиқ билан x ўқи орасидаги бурчак. (x^*, y^*) (7.3) тенгламанинг ечими бўлгани учун $y^* = kx^* + b$, бундан $k = \frac{y^* - b}{x^*}$. Аммо $k = \operatorname{tg}\varphi$. Шунинг учун $M^* \in l$. M^* нуқта m нинг ихтиёрий нуқтаси бўлгани учун $m \subseteq l$. Демак, $l = m$, ва шундай қилиб, $y = kx + b$ тенглама l тўғри чизиқнинг тенгламасидир. $k = \operatorname{tg}\varphi$ миқдорни l тўғри чизиқнинг *бурчак коэффициенти*, (7.3) тенгламани эса *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади*.

---

* 6- § даги белгилашларга биноан, (7.3) тенглама бундай ёзилиши керак эди; $-kx + y - b = 0$, аммо биз традицияга амал қилиб, (7.3) ёзувдан фойдаланамиз.

x лар ўқига параллел тўғри чизиқлар учун бурчак коэффициентлар нолга тенг, бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари шунинг учун

$$y = b$$

кўринишга эга.

Энди $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлган ҳолни қараб чиқамиз. Бу ҳолда $k = \operatorname{tg} \varphi$ сон аниқланмаган бўлади. Бундан y лар ўқига параллел бўлган тўғри чизиқни бурчак коэффициентли тенглама билан бериб бўлмаслиги келиб чиқади, y лар ўқига параллел бўлган l_1 тўғри чизиқнинг барча нуқталари учун абсцисса ўзгармас бўлиб, бу тўғри чизиқнинг x лар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси a га тенг бўлгани учун l_1 нинг тенгламаси

$$x = a$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, y лар ўқига параллел бўлмаган ҳар қандай тўғри чизиқ

$$y = kx + b \tag{7.4}$$

тенгламага эга, y лар ўқига параллел тўғри чизиқ эса

$$x = a \tag{7.5}$$

тенгламага эга, бунда иккала тенгламада x ва y лар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли.

Шундай қилиб, (7.4) ва (7.5) лардан, текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ биринчи тартибли чизиқ экани келиб чиқади.

7.2. Биринчи тартибли чизиқлар ҳақидаги асосий теорема.

Теорема. *Текисликдаги ҳар қандай биринчи тартибли чизиқ тўғри чизиқдир.*

Исбот. Биринчи тартибли m чизиқ

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{7.6}$$

тенглама билан аниқлансин.

Икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $B = 0$, у ҳолда $A \neq 0$, шунинг учун (7.6) тенглама

$$x = -\frac{C}{A}$$

тенгламага эквивалент бўлади.

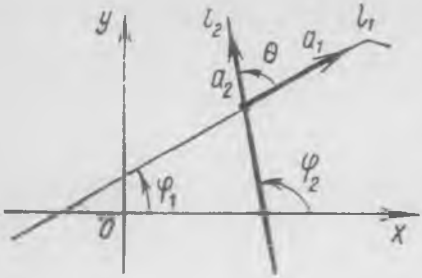
Бу ҳолда m чизиқ y лар ўқига параллел тўғри чизиқ бўлади.

б) $B \neq 0$, у ҳолда (7.6) тенглама

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{7.7}$$

тенгламага эквивалент бўлади. $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ деб оламиз. Бу ҳолда (7.7) қуйидагича ёзилади:

$$y = kx + b$$



32- расм.

Бундан m чизиқ x лар ўқи билан $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right)$ бурчак ташкил қилувчи ва $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ экани келиб чиқади.

Шу билан теорема исботланди.

7.3. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари. y лар ўқига параллел бўлмаган иккита l_1 ва l_2 тўғри чизиқ берилган бўлсин. $y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ мос равишда бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари бўлсин. l_1 ва l_2 орасидаги бурчакни топиш учун формула чиқарамиз. Берилган тўғри чизиқларда $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторларни оламиз; θ бурчак $\vec{a}_1$ дан $\vec{a}_2$ га қараб соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда ҳисобланадиган бурчак бўлсин (32-расм). У ҳолда $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ ва шунинг учун

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Аммо $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, шунинг учун

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (7.8)$$

Агар энди l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг роллари алмаштирилса, θ бурчак $\theta_1 = \pi - \theta$ бурчак билан алмашинади ва $\operatorname{tg}\theta_1 = -\operatorname{tg}\theta$ бўлгани учун

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (7.9)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар конкрет масалаларни ечишда иккала бурчакни билиш талаб қилинса, у ҳолда (7.8) ва (7.9) формулалар битта

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

формулага бирлаштирилади.

$\operatorname{tg}\theta$ нинг ишорасига қараб, l_1 ва l_2 орасида ўткир ёки ўтмас бурчак ҳосил бўлади.

(7.8) формуладан икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини осонгина келтириб чиқарамиз. Агар l_1 ва l_2 параллел бўлса, $\operatorname{tg}\theta = 0$ бўлади ва, демак, $k_2 - k_1 = 0$ бўлади. Шу сабабли l_1 ва l_2 нинг параллеллик шарти

$$k_1 = k_2$$

кўринишга эга бўлади.

Агар l_1 ва l_2 перпендикуляр бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1+k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$$

ва l_1 ҳамда l_2 ларнинг перпендикулярлик шарти

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{ёки} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

дан иборат бўлади.

8- §. Айлананинг тенгламаси

кўринишга эга бўлади. Қавсларни очиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Ушбу белгилашларни киритамиз: $-2a = D$, $-2b = E$, $a^2+b^2-R^2=$ $=F$. У ҳолда K айлананинг тенгламасини

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{8.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан айлана иккинчи тартибли чизиқ экани келиб чиқади. (8.2) тенгламани иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{8.3}$$

билан таққослаймиз.

(8.2) тенгламадан, унинг иккала қисмини $\lambda \neq 0$ ўзгармас кўпайтувчига кўпайтириш билан

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda Dx + \lambda Ey + \lambda F = 0$$

эквивалент тенгламага ўтиш мумкин.

Шундан сўнг, олдингидек xy олдидаги коэффициент нолга тенг, x^2 ва y^2 олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг эканини кўрамиз. Бундан, (8.3) тенглама айлананинг тенгламаси бўлиши учун зарур шартлар

$$A = C \neq 0, \ B = 0 \tag{8.4}$$

муносабатлардан иборат эканлиги келиб чиқади.

Бу шартлар етарли бўла олмайди. Бу шартларга

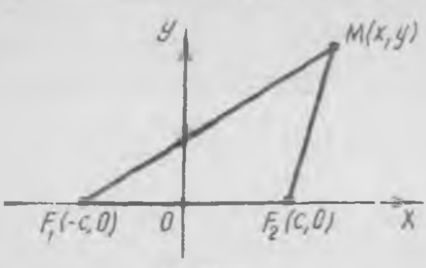
$$\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} > 0 \tag{8.5}$$

шарт қўшилса, улар етарли шартлар бўлади.

Ҳақиқатан, (8.4) шартларнинг бажарилишида (8.3) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2-\left(\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}\right)=0.$$

Бундан (8.3) тенглама маркази $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ нуқтада, радиуси эса $\sqrt{\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}}$ га тенг бўлган айлананинг тенгламаси экани кўриниб турибди ((8.5) шартнинг бажарилишида радиус ҳақиқий сондир).



33- расм.

Қуйида Декарт координаталари системасида эллипс тенгламасини келтириб чиқариш берилади, бу Декарт координаталари системаси эллипс тенгламаси энг содда бўлишига имкон берадиган қилиб танлаб олинади. Чунончи, эллипс фокусларини F_1 ва F_2 билан белгилаймиз. Декарт координаталари системасини x лар ўқи фокуслардан ўтадиган, y лар ўқи эса F_1F_2 кесмани тенг иккига бўладиган қилиб киритамиз (33-расм). Фокуслар орасидаги масофани $2c$ орқали белгилаймиз. У ҳолда F_1 ва F_2 нуқталарнинг координаталари мос равишда $(-c, 0)$ ва $(c, 0)$ га тенг бўлади.

$M(x, y)$ — эллипснинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. F_1M ва F_2M кесмаларнинг узунликларини мос равишда r_1 ва r_2 билан белгилаймиз. Бу масофаларнинг йиғиндиси берилган эллипсни характерловчи бирор ўзгармасга тенг. Бу ўзгармасни $2a$ билан белгилаймиз. Эллипснинг таърифидан $a>c$ экани келиб чиқади.

Ушбуларга эгамиз:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \qquad (9.1)$$
$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Эллипснинг таърифига кўра:

$$r_1+r_2=2a.$$

(9.1) формулаларга r_1 ва r_2 ифодаларини қўйиб, эллипснинг ихтиёрий нуқтаси учун

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (9.2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Ҳосил бўлган тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтариб, ушбуга эга бўламиз:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Бундан эса

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

экани келиб чиқади. Охирги тенгликнинг иккала қисмини яна квадратга кўтарамиз:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Содда алмаштиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (9.3)$$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ деб оламиз. Бундай олиш мумкин, чунки $a > c$. Равшанки, $a > b > 0$. Энди (9.3) тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.4)$$

(9.2) тенгламани соддалаштиришда уни икки марта квадратга кўтардик, бунинг натижасида берилган тенгламага эквивалент бўлмаган тенгламага эга бўлишимиз мумкин, бошқача айтганда, (9.4) тенгламани эллипсда ётмаган нуқталар ҳам қаноатлантириши мумкин. (9.2) ва (9.4) тенгламалар эквивалент эканини, ва демак, (9.4) тенглама эллипсда ётмаган бирорта ҳам нуқтани аниқламаслигини исботлаш мумкин. Шу фактни мустақил исботланг.

(9.4) тенглама эллипснинг *каноник тенгламаси* дейилади. Шуни таъкидлаб ўтамизки, эллипснинг каноник тенгламаси махсус танланган Декарт координаталар системасида ҳосил қилинади. Эллипснинг каноник тенгламасидаги a ва b сонлар ҳар доим $a > b$ тенгсизликни қаноатлантиради.

Шунинг учун $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ тенглама эллипснинг каноник тенгламаси бўлади, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ тенглама эса каноник тенглама бўла олмайди.

9.2. Каноник тенгламаси бўйича эллипс шаклини текшириш. Эллипснинг каноник тенгламасини ушбу

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (9.5)$$

эквивалент шаклда ёзамиз. Равшанки, x ва y нинг исталган қийматлари учун ушбуга эгамиз:

$$F(-x,-y) = F(x,y),\ F(-x,y) = F(x,y),\ F(x,-y) = F(x,y).$$

Шу сабабли, 6-§ нинг 6-пунктида чиқарилган хулосаларга биноан эллипснинг симметрия маркази координаталар бошида, x ва y лар ўқлари эса унинг симметрия ўқларидир дея оламиз.

Эллипснинг каноник тенгламасини эквивалент шаклда бундай ёзиш мумкин:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (9.6)$$

Эллипс иккала координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани сабабли унинг шаклини аниқлаш учун биринчи квадрантдаги қисмини қарашнинг ўзи кифоя. Биринчи квадрантдаги нуқталар учун: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, шу сабабли (9.6) тенглама

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

кўринишни олади.

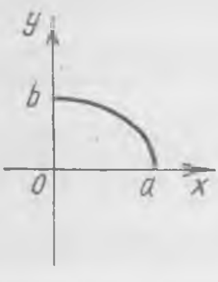
Бу формуладан кўринадики, $x = 0$ да эллипс нуқтасининг ординатаси энг катта қийматга эга бўлади: $y = b$. x нинг 0 дан a гача ўсишида илдиз остидаги ифода камаяди, демак, y ордината ҳам b дан 0 гача камаяди (34-расм). x нинг бундан кейинги ўсишида, яъни $x > a$ да илдиз остидаги ифода манфий бўлиб қолади, шу билан бирга y ордината ҳақиқий қийматга эга бўлмайди. Бу эса эллипсда абсциссаси a дан катта бўлган нуқта йўқлигини билдиради.

Эллипс x ва y координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун унинг биринчи квадрантдаги қисмининг симметриясини текшириш билан эллипснинг бутунича тиклаш мумкин (35- расм).

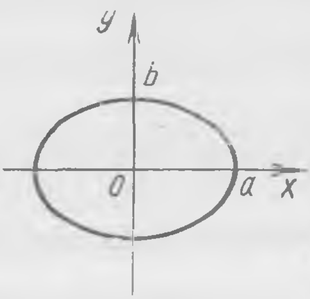
AA_1 ва BB_1 кесмаларни, шунингдек, уларнинг $2a$ ва $2b$ узунликларини ($a > b$) мос равишда эллипснинг катта ёки кичик ўқи дейилади, a ва b сонларни эса эллипснинг катта ёки кичик ярим ўқлари дейилади.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ миқдорни эса *эллипснинг эксцентриситети* дейилади. Равшанки, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Эксцентриситет эллипснинг чўзиқлик даражасини характерлайди. Эксцентриситет қанча катта бўлса, эллипс шунча чўзиқ бўлади. $\varepsilon = 0$ да фокуслар устма-уст тушади, ярим ўқлар тенг бўлиб қолади, ва демак, бу хусусий ҳолда эллипс айланага ўтади:

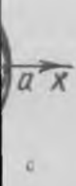
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0 \text{ ёки } x^2 + y^2 = a^2.$$



34- расм.



35- расм.

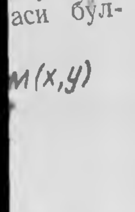


а). Кўр-
6- расм);

эса 2с

от коор-
дак тан-

фокуслари
г ўртаси-
аси бўл-



(бу ер

Бу
таганч

M
ни P
чакли
учун |
да) да

l_1
Шунда

гиперб
икки қ
лари ҳ

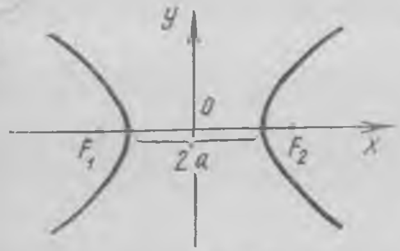
қуйидаг

Шунинг

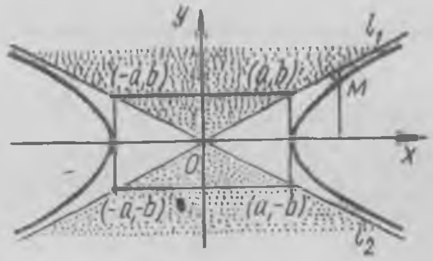
тенглама

Бу тенгл

Гипер
сида қар



38- расм.



39- расм.

масофа, яъни $2a$ сон унинг *ҳақиқий ўқи*, $2b$ сон эса *мавҳум ўқи* дейилади. a ва b сонлар мос равишда *ҳақиқий* ва *мавҳум ярим ўқлар* дейилади. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ миқдорни *гиперболанинг эксцентриситети* дейилади. Равшанки, гипербола учун $\varepsilon > 1$.

10.3. Гиперболанинг асимптоталари. Учлари (a,b),$(-a, b)$, $(-a,-b)$, $(a,-b)$ нуқталарда бўлган Q тўғри тўртбурчакни қараймиз (39- расм). Q нинг диагоналлари ётган l_1 ва l_2 тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу ҳолда иккита штрихланган вертикал бурчакларда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг нуқталари бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, l_1 нинг тенгламаси $y = \frac{b}{a} x$ дан, l_2 нинг тенгламаси $y = -\frac{b}{a} x$ дан иборат. Шу сабабли ҳар қандай $M(x,y)$ нуқта учун штрихланган соҳада тенг-

$$\frac{|y|}{|x|} > \frac{b}{a}$$

сизлик бажарилади. Бундан M нуқта учун

$$\frac{|x|}{a} < \frac{|y|}{b}$$

га эгамиз, ва демак,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0 < 1,$$

бу эса даъвонинг тўғрилигини исбот қилади.

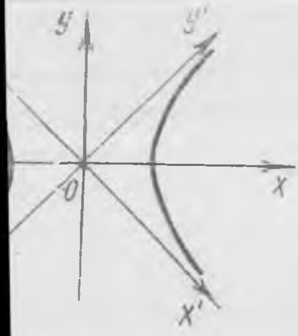
$M(x, y)$ нуқта гипербола бўйлаб ҳаракатланиб, координаталар бошидан чексиз узоқлашсин, яъни $x^2 + y^2 \to \infty$. У ҳолда бу нуқтанинг l_1 ва l_2 тўғри чизиқлардан биригача бўлган масофаси нолга интилади. Бу тасдиқни гиперболанинг биринчи квадрантда ётган тармоғи учун тўғрилигини текшириш етарли, чунки гипербола иккала координата ўқларига нисбатан симметрик. Гиперболада мусбат координатали $M(x, y)$ нуқтани оламиз ва l_1 тўғри чизиқда $M'\left(x, \frac{b}{a} x\right)$ нуқтани оламиз. Равшанки,

$$|MM'| = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \frac{a}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ гиперболада ётувчи M нуқтанинг ординатаси)
н x чексиз катталашганда MM' кесманинг уз унлиги ис-
ичик бўлади.
қтадан l_1 тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр асоси-
ан белгилаймиз. У ҳолда MM' кесма MPM' тўғри бур-
бурчакнинг гипотенузаси, MP эса унинг катети. Шунинг
$|<|MM'|$. Бундан, $x\to+\infty$ (бундан ҳам кўра $x^2+y^2\to\infty$
P кесманинг узунлиги нолга интилади.
l_2 тўғри чизиқлар *гиперболанинг асимптоталари* дейилади.
қилиб,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган
дан иборат, шу билан бирга бу гипербола ўз асимптота-
л қилган вертикал бурчаклар орасида тўла ётади.



40- расм.

10.4. Тенг ёнли гипербола. Ҳақиқий ўқи билан мавҳум ўқи тенг, яъни $a=b$ бўлган гипербола *тенг ёнли гипербола* дейилади. Тенг ёнли гипербола асимптоталарининг тенгламаси $y=x$, $y=-x$ дан иборат, ва демак, бу асимптоталар ўзаро тўғри бурчак ҳосил қилади. Янги Декарт координаталари системасини шундай танлаймизки, x' лар ўқи l_2 асимптота билан, y' лар ўқи эса l_1 асимптота билан устма-уст тушсин (40- расм). 5- § га биноан янги системага ўтиш формулалари
бўлади:

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

ун гиперболанинг

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

янги системада ушбу кўринишни олади:

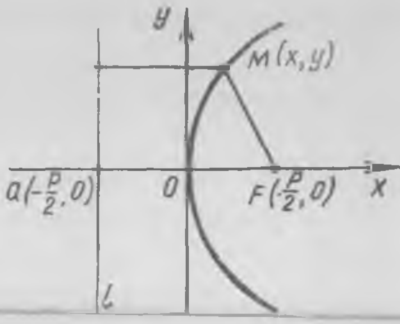
$$x'y'=\frac{a^2}{2}.$$

ани бундай ёзиш мумкин:

$$y'=\frac{a^2}{2x'}.$$

ланинг бу тенгламаси кўпинча мактаб математика кур-
ди.

Параболанинг содда тенгламасини чиқариш учун, эллипс ва гипербола тенгламаларини чиқаришда қилинганидек, Декарт координаталари системаси махсус танланади. Чунончи, m тўғри чизиқни F нуқта орқали l директрисага перпендикуляр қилиб ўтказамиз, Q нуқта l ва m тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. m да масштаб бирлигини танлаймиз ва $\overrightarrow{QF}$ вектор ёрдамида m нинг йўналишини аниқлаймиз. Сўнгра Декарт координаталари системасини шундай танлаймизки, бунда ҳозиргина ясалган ўқ абсциссалар ўқи, координаталар боши эса QF кесманинг ўртаси бўлган O нуқтада бўлсин (41-расм). Фокусдан директрисагача бўлган масофа одатда p билан белгиланади ва параболанинг параметри дейилади. Танланган системада F нуқта $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ координатага эга, директрисанинг тенгламаси эса $x + \frac{p}{2} = 0$ кўринишда бўлади.



41- расм.

Параболанинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтаси учун бу чизиқнинг таърифига биноан

$$|MP| = |MF|$$

тенгликка эгамиз, бу тенгликни бошқача ҳам ёзиш мумкин:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтариб ва содда ўзгартиришларни бажариб, бошланғич тенгламага эквивалент бўлган

$$y^2 = 2px \qquad (11.1)$$

тенгламага эга бўламиз. (11.1) тенглама параболанинг *каноник тенгламаси* дейилади.

Бу тенгламадан парабола x лар ўқига симметрик экани кўриниб турибди. Бундан ташқари (11.1) тенгламадан парабола $x \geqslant 0$ ярим текисликда жойлашганлиги келиб чиқади.

[redacted]
рия нуқтаи назаридан бирор иккинчи тартибли чизиқ. Шу иккинчи тартибли чизиқ парабола эканини кўрсатамиз.

(11.2) тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{11.3}$$

Энди координата ўқларини параллел кўчиришни қараймиз, бунда янги координаталар боши учун $O_1\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ нуқтани оламиз. У ҳолда, 5- § га асосан, координаталарни алмаштириш формулалари ушбу кўринишда бўлади:

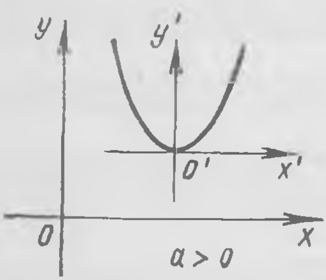
$$x = x' - \frac{b}{2a},$$

$$y = y' + c - \frac{b^2}{4a}.$$

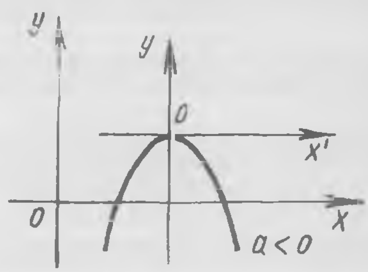
Шу формулаларни қўлланиб, топамиз:

$$y' = ax'^2. \tag{11.4}$$

[illegible] 4) тенглама параболанинг тенгламасидир. Агар a [illegible] у ҳолда директриса янги x' абсциссалар ўқидан пастда ётади, фокус эса бу ўқдан юқорида жойлашади (42-расм). Агар $a<0$ бўлса, у ҳолда директриса x' лар ўқидан юқорида, фокус эса бу ўқдан пастда ётади (43-расм). Ҳамма ҳолларда параболанинг p параметри $\frac{1}{2|a|}$ га тенг.



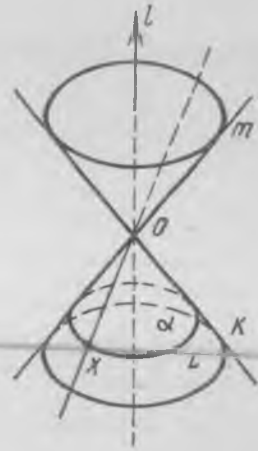
42- расм.



43- расм.

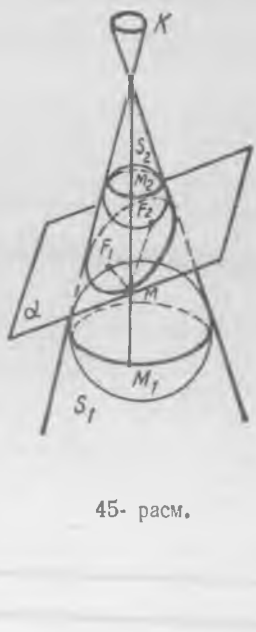
13-§. Конус кесимлар. Эллипснинг, гиперболанинг ва параболанинг қутб тенгламалари

13.1. Конус кесимлар. O — бирор нуқта, l — шу O нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин (44-расм). Сўнгра, m тўғри чизиқ ҳам O нуқтадан ўтувчи ва l дан фарқли тўғри чизиқ бўлсин. m тўғри чизиқнинг l тўғри чизиқ атрофида ўзгармас бурчак остида айланишидан ҳосил бўлган K сирт доиравий конус дейилади. O нуқта K конуснинг учи, l тўғри чизиқ эса унинг ўқи дейилади. Агар K ни унинг ўқига перпендикуляр бўлиб, K нинг учидан ўтмайдиган текислик билан кесилса, у ҳолда кесимда маркази конус ўқида ётган L айлана ҳосил бўлади (44-расм). Равшанки, OX тўғри чизиқ (бунда X нуқта L айлананинг ихтиёрий нуқтаси) бутунлигича K конусда ётади. OX тўғри чизиқлар конуснинг ясовчилари дейилади. Равшанки, $K = \bigcup_{X \in L} OX$, яъни K ўзининг барча OX ясовчиларининг бирлашмасидан иборат. L айлана одатда K конуснинг йўналтирувчиси дейилади. Равшанки, агар α текислик K конуснинг учидан ўтса, у ҳолда конуснинг бу текислик билан кесими ё нуқта, ёки баъзан устма-уст тушадиган иккита тўғри чизиқ бўлиши мумкин.



44- расм.

α текислик K конуснинг учидан ўтмасин. K конус билан α текислик кесимини *конус кесим* дейилади. Агар α текислик K конус ўқига перпендикуляр бўлса, L — айлана бўлади. Агар α текислик етарлича кичик қиялантирилса, у ҳолда α текислик K конуснинг фақат битта ярми билан умумий нуқталарга эга бўлади ва K конуснинг ҳамма ясовчиларини кесади. Бу ҳолда конус кесим L эллипс эканини исботлаймиз. α текислик конуснинг L чизиқ ётган ярмини икки қисмга ажратади (45-расм). Бу қисмларнинг ҳар бирига K конус ва α текислик билан уринадиган қилиб ички сфера чизамиз. Бу сфераларни S_1 ва S_2 билан, бу сфераларнинг α текислик билан уриниш нуқталарини F_1 ва F_2 билан белгилаймиз (45-расм). M нуқта L конус кесимнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M



45- расм.

нуқта орқали K конус ясовчисини ўтказамиз, M_1, M_2 — бу ясовчининг мос равишда L_1 ва L_2 билан кесишиш нуқталари бўлсин.

46- расм.

$M_1 M_2$ кесма узунлиги барча $M \in L$ лар учун ўзгармас. MF_1 ва MM_1 — битта M нуқтадан S га ўтказилган уринмалар бўлгани учун MF_1 ва MM_1 кесмалар бир хил узунликка эга бўлади. Шунга ўхшаш сабабга кўра MF_2 ва MM_2 кесмалар ҳам бир хил узунликка эга бўлади. Демак, ҳар қандай $M \in L$ нуқта учун: $|MF_1| + |MF_2| = \text{const}$. У холда таърифга биноан L конус кесим фокуслари F_1 ва F_2 бўлган эллипс бўлади.

Агар кесувчи текислик α нинг киялигини катталаштирилса, эллипс кўпроқ чўзила боради, охири кесувчи текислик конуснинг ясовчиларидан бирига параллел бўлиб қолганда L конус кесим энди α текисликнинг чекли қисмида жойлашмай қолади. Бу ҳолда, биз буни қуйироқда кўрамиз (шу пунктда келадиган теоремага қаранг), L конус кесим парабола бўлади. Агар α текисликнинг киялигини яна катталаштирилса, у K конуснинг илгари кесиб ўтмаган иккинчи қисмини ҳам кесиб ўта бошлайди. Бу ҳолда L конус кесим энди гипербола бўлади. Бу охирги тасдиқнинг исботи ҳам тахминан эллипс ҳолида қилингандек амалга оширилади. Чунончи, олдинги белгилашларни сақлаган ҳолда, K конуснинг иккала қисмига α текисликка уринувчи S_1 ва S_2 сфераларни чизамиз (46- расм). Бу ҳолда: $|MF_1| = |MM_1|$, $|MF_2| = |MM_2|$, шунинг учун:

$$||MF_2| - |MF_1|| = ||MM_1| - |MM_2|| = |M_1M_2| = \text{const}.$$

Демак, L фокуслари F_1 ва F_2 дан иборат гиперболадир.

Энди конус кесимларнинг хоссалари ҳақидаги ушбу теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Айланадан ташқари, исталган L конус кесим кесувчи α текисликдаги нуқталар тўпламидан иборат бўлиб, бу нуқталардан бирор F нуқтагача ва бирор d тўғри чизиққача бўлган масофалар нисбати ўзгармасдир; шу билан бирга F нуқта ва d тўғри чизиқ α текисликда ётади.*

47- расм.

Исбот. K конусга S сферани ички чизамиз. Бу сфера α текисликка бирор F нуқтада уринади (47- расм, расмда эллипс келтирилган ҳол берилган, бу умумийликни бузмайди). β — шундай текисликки, унда S сферанинг K конус билан уриниш айланаси ётади. M нуқта L нинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқта орқали K конуснинг ясовчисини ўтказамиз ва бу ясовчининг β текислик билан кесишиш нуқтасини M_1 билан белгилаймиз. M нуқтадан d тўғри чизиққа MA перпендикулярни туширамиз, α ва β текисликлар бу d тўғри чизиқ бўйича кесишади (α ва β текисликлар теорема шарти бўйича кесишади).

L конус кесим F нуқтага ва d тўғри чизиққа нисбатан талаб қилинган хоссаларга эга эканини исботлаймиз. Шуни таъкидлаймизки, агар L эллипс ёки гипербола бўлса, F нуқта бу чизиқларнинг фокусларидан бири экани юқорида кўрсатилган эди.

Сўнгра, $|MF| = |MM_1|$, чунки MF ва MM_1 лар S сферага бир нуқтадан чиққан уринмалардир. M нуқтадан β текисликкача бўлган масофа h бўлсин. У ҳолда:

$$|NM| = \frac{h}{\sin\varphi}, \quad |MM_1| = \frac{h}{\sin\psi}$$

бунда φ бурчак α ва β текисликлар орасидаги бурчак, ψ эса K конус ясовчилари билан β текислик орасидаги бурчак бўлсин. Бундан ушбу

$$\frac{|FM|}{|NM|} = \frac{|MM_1|}{|NM|} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

муносабат L конус кесимнинг M нуқтаси вазиятига боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

1-эслатма. Эллипс учун $\varphi < \psi$, текислиги K конус кесимнинг бирор ясовчисига параллел бўлган L конус кесим учун $\varphi = \psi$, ва ниҳоят, гипербола учун $\varphi > \psi$.

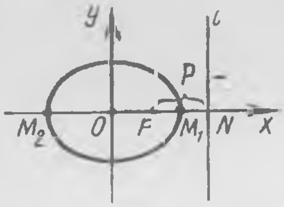
Бундан, бирор ясовчига параллел текислик ҳосил қиладиган L конус кесим фокуси F ва директрисаси d дан иборат парабола экани келиб чиқади. Шундай қилиб, конус кесимлар эллипслар, параболалар ва гиперболалардан иборат экан.

2-эслатма. Теоремада қатнашаётган d тўғри чизиқ L конус кесимнинг *директрисаси* дейилади. Теореманинг исботидан ва 2-эслатмадан F нуқта ҳар доим конус кесимнинг фокуси эканлиги келиб чиқади.

Шунинг учун теоремага эквивалент бўлган ушбу формулировка мавжуд: *конус кесимнинг ихтиёрий нуқтасидан фокусгача ва директрисагача бўлган масофаларнинг нисбати ўзгармас миқдордир.*

Директриса α ва β текисликларнинг кесишиш чизиғи бўлгани учун теоремада бажарилган ясашдан кўриниб турибдики, эллипс ва гипербола ўз фокуслари билан биргаликда директрисадан бир томонда, гиперболанинг тармоқлари эса турли томонларда ётади.

3-эслатма. $\lambda = \frac{|FM|}{|NM|}$ деб оламиз. Бу ҳолда $\lambda = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$ муносабатдан эллипс учун $0 \leqslant \lambda < 1$ ($\lambda = 0$ айлана ҳолига тўғри келади), парабола учун $\lambda = 1$, гипербола учун $\lambda > 1$ экани келиб чиқади. Маълум бўлишича, λ сон эллипс ва гипербола учун эксцентриситет экан. Бу тасдиқни эллипс учун исботлаймиз. Ўнг фокус F дан директрисагача бўлган масофани p билан белгилаймиз



48- расм.

(48- расм). $2a$ — эллипснинг катта ўқи, $2c$ — фокуслар орасидаги масофа бўлсин. Сўнгра M_1 ва M_2 эллипс катта ўқининг мос равишда ўнг ва чап охирлари бўлсин, у ҳолда

$$|FM_1| = a - c, \qquad |NM_1| = p - (a - c);$$
$$|FM_2| = a + c, \qquad |NM_2| = p + (a + c).$$

Бундан:

$$\frac{a - c}{p - (a - c)} = \frac{a + c}{p + (a + c)}.$$

Бу тенгламани p га нисбатан ечиб, топамиз:

$$p = \frac{a^2 - c^2}{c}.$$

Шунинг сабабли эллипс учун λ сон ушбуга тенг:

$$\lambda = \frac{|FM_2|}{|NM_2|} = \frac{a+c}{\frac{a^2 - c^2}{c} + a + c} = \frac{(a + c)\,c}{(a + c)\,[(a - c) + c]} = \frac{c}{a} = \varepsilon,$$

бунда ε — эллипс эксцентриситети.

Гипербола учун $\lambda = \varepsilon$ тенглик шунга ўхшаш исботланади.

13 2. Қонус кесимларнинг қутб тенгламалари. L конус кесим ётган α текисликда қутб координаталар системасини киритамиз (4- §), бунда конус кесимнинг F фокусини қутб учун қабул қиламиз, қутб ўқини d директрисага перпендикуляр ҳолда уни кесиб ўтадиган қилиб ўтказамиз (49- расм). p — фокусдан директрисагача бўлган масофа бўлсин. p сонни одатда конус кесим L нинг параметри дейилади. M нуқта L конус кесимнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда M дан F фокусгача бўлган масофа ρ га, ундан директрисагача бўлган масофа эса M ва F нуқталарнинг директрисадан бир томонда ёки турли томонда ётишига қараб $p - \rho\cos\varphi$ ёки $\rho\cos\varphi - p$ га тенг бўлади. Бундан, 13.1- пунктдаги 2, 3-эслатмаларга биноан конус кесим тенгламаси эллипс ва парабола учун парабола учун $\varepsilon = 1$)

$$\frac{\rho}{p - \rho\cos\varphi} = \varepsilon \tag{13.1}$$

кўринишга эгалиги, ва гипербола учун

$$\frac{\rho}{p - \rho\cos\varphi} = \pm\,\varepsilon \tag{13.2}$$

кўринишга эгалиги келиб чиқади (плюс ишора гиперболанинг бир тармоғига, минус ишора эса иккинчи тармоғига тўғри келади).

(13.1) ва (13.2) дан эллипс ва параболанинг ρ га нисбатан ечилган

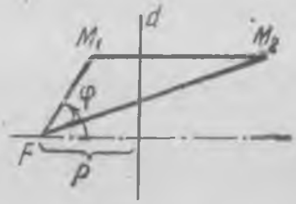
$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \tag{13.3}$$

тенгламасини ва гиперболанинг

$$\rho = \frac{\pm \varepsilon p}{1+\varepsilon \cos \varphi} \qquad (13.4)$$

тенгламасини ҳосил қиламиз.

50- расмда ε эксцентриситетнинг қийматига қараб, конус кесим шаклининг қандай ўзгариши кўрсатилган.

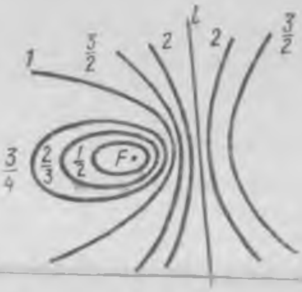


49- расм.

13.3 Параметрик чизиқлар ҳаракатланаётган нуқтанинг траекторияси сифатида. M моддий нуқта вақт ўтиши билан текисликда ёки фазода ҳаракат қилсин. Одатда бундай нуқта ҳаракатининг изини физикада *траектория* дейилади. M нуқта траекторияси математик нуқтаи назардан координаталари ихтиёрий Декарт координаталари системасида t вақтнинг

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t) \quad (13.5)$$

функциялари сифатида бериладиган нуқталар тўпламидан иборат. (Агар ҳаракат вақтида M нуқта ҳар доим xy текисликда бўлса, у ҳолда $f_3(t) \equiv 0$.)



50- расм.

(13.5) формулалар *траекториянинг параметрик тенгламалари* дейилади. Физикавий масалаларда t параметр кўпинча вақтдан иборат бўлади.

Бир қатор мисоллар қараймиз:

1) планеталар Қуёш атрофида ҳаракат қиладиган орбиталар (траекториялар) эллипс шаклида бўлади, бунда Қуёш мос эллипс фокусларидан бирида туради. Планеталардан бири ҳаракат қилаётган эллипснинг катта ярим ўқи a га ва кичик ярим ўқи b га тенг бўлсин. Бу ҳолда орбитанинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишда бўлади.

Планетанинг кўрсатилган орбита бўйича ҳаракатини

$$x = a \cos \omega t, \qquad y = b \sin \omega t \qquad (13.6)$$

параметрик тенгламалар билан тавсифлаш қулай, бунда t параметр — вақт. ω — ўзгармас бундай танланади:

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t},$$

бунда Δt — планета Қуёш атрофида орбита бўйлаб тўла айланиб чиқишга сарф бўлган вақт. Масалан, Ер учун Δt бир йилга тенг.

Электронлар атом ядроси атрофида эллиптик орбиталар бўйлаб юқоридагига ўхшаш ҳаракат қилади. Шунингдек, механика ва астрономиянинг турли масалаларида жисмларнинг гиперболик ёки параболик траекториялар бўйлаб қилган ҳаракатларини қарашга тўғри келади. Масалан, артиллерия снарядларининг ҳаракати параболик траектория бўйлаб содир бўлади; кометаларнинг орбиталари ҳам параболик траекториядан иборат.

Анча мураккаб траекторияларга доир мисолларни қараб чиқамиз;

2) r радиусли айлана l тўғри чизиқ бўйлаб сирпанмасдан ω бурчак тезлик билан ҳаракат қилсин. Шу айлананинг тайинланган M нуқтаси чизган траекториясининг параметрик тенгламасини топамиз.

Вақтнинг бошланғич моменти $t=0$ да M нуқта l тўғри чизиқда ётади деб қўшимча фараз қиламиз. Координаталар боши ва абсциссалар ўқи тайинланса, текисликда Декарт координаталар системаси киритилган бўлади. l тўғри чизиқда айлана ҳаракати йўналиши билан бир хил бўлган йўналиш киритамиз, шундай қилиб ҳосил қилинган ўқни абсциссалар ўқи деб оламиз, M нуқтанинг бошланғич ҳолатини (M_0 нуқтани) координаталар боши учун қабул қиламиз.

$M(x, y)$ — траекториянинг t вақт моментига тўғри келувчи нуқтаси, S — шу моментдаги айлана марказининг ҳолати, S нинг абсциссалар ўқидаги проекцияси H бўлсин. У ҳолда SM ва SH кесмалар орасидаги φ бурчак ωt га тенг экани равшан. Агар M нуқтанинг x лар ва y лар ўқидаги ортогонал проекцияларини мос равишда M_1 ва M_2 десак, у ҳолда:

$$x = |OM_1| = |OH| - |M_1H| = r\omega t - r\sin\omega t = r(\omega t - \sin\omega t),$$
$$y = |OM_2| = r - r\cos\omega t = r\,(1-\cos\omega t). \tag{13.7}$$

$t \geqslant 0$ бўлгани учун бутун траектория y лар ўқидан ўнг томонда жойлашган бўлиб, чексиз кўп ёйлардан иборат, бу ёйларнинг учлари орасидаги масофа $2\pi r$ га тенг. M нуқтанинг бундай ёйни ўтиши учун кетган Δt вақт $\frac{2\pi r}{\omega}$ га тенг.

$-\infty < t < +\infty$ оралиқда қаралувчи

$$x = r(\omega t - \sin\omega t),\ \ y = r(1-\cos\omega t) \tag{13.8}$$

формулалар *циклоида* деб аталувчи чизиқни аниқлайди. Циклоида y лар ўқига нисбатан симметрик экани равшан. Циклоиданинг биринчи квадрантда ётувчи бир қисми M нуқта ҳаракатининг траекторияси бўлади.

(13.8) даги иккинчи формуладан ушбуга эгамиз:

$$\cos\omega t = \frac{r-y}{r}$$

ва шунинг учун:

$$\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \frac{\sqrt{y(2r-y)}}{r}.$$

Бу муносабатларни (13.8) нинг биринчи формуласига қўйиб, циклоиданинг параметрик бўлмаган тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x = \sqrt{y(2r-y)} = r\arccos\frac{r-y}{y}.$$

3) текисликда маркази O нуқтада, радиуси эса R га тенг бўлган K айланани белгилаймиз. Энди K айлана бўйлаб унинг ташқи томонидан бошқа r радиусли айлана сирпанмасдан ҳаракат қилсин. Бу ҳолда иккинчи айлананинг тайинланган M нуқтаси чизган траектория *эпициклоида* дейилади.

Агар Декарт координаталари системасининг боши учун O нуқтани, координаталар ўқи учун O нуқтадан ўтувчи ихтиёрий перпендикуляр иккита ўқ олинса, шу билан бирга параметр учун x лар ўқи билан $\overrightarrow{OS}$ вектор орасидаги φ бурчак олинса, бунда S — ҳаракатланаётган айлананинг маркази, у ҳолда эпициклоиданинг параметрик тенгламалари ушбу кўринишга эга бўлади:

$$x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi,\quad y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi. \tag{13.9}$$

(13.9) формулани чиқаришни ва $r = R$ ҳол учун эпициклоида расмини чизишни фойдали машқ сифатида тавсия қиламиз.

4) M нуқта ҳаракатига доир юқорида ифодаланган шартларнинг, r радиусли айлана K бўйлаб K нинг ичидан ҳаракат қилади, деган шартдан бошқа ҳаммаси бажарилсин, дейлик. Илгаридек, ўша Декарт координаталари системасини ва ўша φ параметрни танлаб, параметрик тенгламалари

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi,\quad y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi$$

бўлган траекторияни ҳосил қиламиз, бу траектория *гипоциклоида* дейилади.

Гипоциклоиданинг тенгламасини мустақил келтириб чиқаришни ва $r = \frac{1}{4}R$ бўлган ҳол учун унинг расмини чизишда тавсия қиламиз. $r = \frac{1}{4}R$ бўлганда гипоциклоида одатда *астроида* деб аталади.

5) Z радиуси R бўлган тўғри доиравий цилиндр бўлсин. Z цилиндрда M нуқта шундай ҳаракат қиладики, бу M нуқтанинг Z цилиндрнинг йўналтирувчи айланаси K даги проекцияси K бўйлаб ўзгармас ω бурчак тезлик билан ҳаракат қилади. M нуқтанинг ўзи эса яна Z нинг ясовчилари йўналишида ўзгармас $\vec{a}$ тезлик билан ҳаракат қилади.

Фазода Декарт координаталари системасини шундай танлаб оламизки, бунда Z лар ўқи Z цилиндрнинг ўқи бўйлаб $\vec{a}$ вектор йўналишида йўналсин, x лар ва y лар ўқлари эса K айлана текислигида ётсин. Параметр сифатида вақт қабул қилинса ва $t = 0$ да M нуқта (R, 0,0) координаталарга эга деб ҳисобланса, M нуқта траекториясининг параметрик тенгламалари ушбу кўринишга эга бўлади:

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t,\ z = |\vec{a}|\,t. \qquad (13.10)$$

Бу траектория *винт чизиқ* дейилади. (13.10) тенгламалар винт чизиқнинг тенгламаси эканини мустақил исботлашни ва унинг расмини чизишни тавсия қиламиз.

II боб. ВЕКТОРИАЛ АЛГЕБРА АСОСЛАРИ. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИК

14-§. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

14.1. Векторлар орасидаги бурчак. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ — фазонинг нолга тенг бўлмаган ихтиёрий иккита вектори бўлсин. Бу векторлар умумий уч — O нуқтага эга. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторлар орасидаги бурчак* деб, $\vec{a}$ вектор орқали ўтувчи нурни $\vec{b}$ вектор орқали ўтувчи нур билан устма-уст тушгунча буриш керак бўлган энг кичик φ бурчакни атаймиз. Бунда айланишнинг йўналиши ҳисобга олинмайди ва қаралаётган нурлар O нуқтада умумий учга эга деб фараз қилинади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар турли нуқталардан чиқса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак деб $\vec{a}$ ва $\vec{b'}$ векторлар орасидаги бурчакни айтилади, бунда $\vec{b'} = \vec{b}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан умумий учга эга бўлади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги φ бурчакни $\angle \vec{a}, \vec{b}$ кўринишда белгилаймиз. Равшанки, $\varphi = \angle\ \vec{a}, \vec{b} = \angle\ \vec{b}, \vec{a}$ ва φ бурчак 0 дан π гача ўзгаради.

Юқорида нолга тенг бўлмаган икки вектор орасидаги бурчак аниқланди. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда φ бурчак аниқланмаган.

14.2. Скаляр кўпайтманинг таърифи ва унинг энг содда хоссалари. *Нолга тенг бўлмаган икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб шундай сонга айтиладики, бу сон шу векторлар узунликлари билан улар орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига тенг.* Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ақалли биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Скаляр кўпайтма одатда бундай белгиланади: $(\vec{a}, \vec{b})$.

Бу белгилашларда ушбуларга эгамиз:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle\ \vec{a}, \vec{b}. \qquad (14.1)$$

Скаляр кўпайтманинг бир қатор энг содда хоссаларини айтиб ўтамиз.

1. *Исталган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун:* $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ақалли биттаси ноль вектор бўлса, у ҳолда $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ва $(\vec{b}, \vec{a}) = 0$, шунинг учун $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Нолга тенг бўлмаган векторлар учун ушбуга эгамиз:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle \vec{a}, \vec{b} = |\vec{b}||\vec{a}| \cos \angle \vec{b}, \vec{a} = (\vec{b}, \vec{a}).$$

2. *Агар $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал векторлар дейилади.*

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал бўлиши учун бу векторлардан бири ноль вектор ёки $\angle \vec{a}, \vec{b} = \frac{\pi}{2}$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу тасдиқнинг исботи векторлар скаляр кўпайтмасининг таърифидан бевосита келиб чиқади.

3. *Векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси шу вектор узунлигининг квадратига тенг:*

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

Ҳақиқатан, $\vec{a} \neq \vec{0}$ учун

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2.$$

Агар $\vec{a} = \vec{a}$ бўлса, у ҳолда $|\vec{a}| = 0$ ва

$$(\vec{a}, \vec{a}) = 0 = |\vec{a}|^2.$$

4. *$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — Декарт координаталар системасининг координата ўқларидаги ортлар (бирлик векторлар) бўлсин. У ҳолда 1 — 3-хоссалардан ушбулар келиб чиқади:*

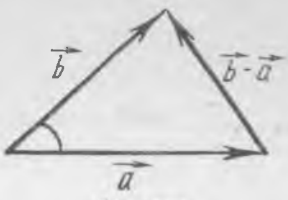
$$(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}|^2 = 1, \quad (\vec{j}, \vec{j}) = |\vec{j}|^2 = 1, \quad (\vec{k}, \vec{k}) = |\vec{k}|^2 = 1,$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = 0.$$

14.3. Скаляр кўпайтманинг Декарт координаталари системасидаги формуласи. Фазода ихтиёрий Декарт координаталари системаси берилган бўлсин. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар эса коллинеар бўлмаган ихтиёрий векторлар бўлсин. Умумийликни бузмасдан, бу векторлар умумий учга эга дейиш мумкин.

У ҳолда (51-расм) косинуслар теоремасидан ушбуга эга бўламиз:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle \vec{a}, \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}). \quad (14.2)$$



51- расм.

Энда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар юқорида тайинланган Декарт координаталари системасига нисбатан $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ компонентларга эга бўлсин. У ҳолда $\vec{b} - \vec{a}$ вектор айтилган системага нисбатан ушбу компоненталарга эга: $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Чунки $|\vec{b} - \vec{a}|^2 =$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \ |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \text{ у ҳолда}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) +$$

$$+ (z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2). \tag{14.3}$$

(14.2) ва (14.3) муносабатлардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{14.4}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар ва $\vec{0}$ дан фарқли бўлса, у ҳолда $\vec{b} = \mu \vec{a}$ ва, демак, $x_2 = \mu x_1$, $y_2 = \mu y_1$, $z_2 = \mu z_1$. Шунинг учун $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle \vec{a}, \vec{b}$. Агар $\mu > 0$ бўлса, у ҳолда $\angle \vec{a}, \vec{b} = 0$, агар $\mu < 0$ бўлса, у ҳолда $\angle \vec{a}, \vec{b} = \pi$. Юқорида айтилганлардан

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{\mu^2 x_1^2 + \mu y_1^2 + \mu z_1^2} \cos \angle \vec{a}, \vec{b} =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

экани келиб чиқади. Агар $\vec{a} = \vec{0}$ ёки $\vec{b} = \vec{0}$ бўлса, у ҳолда (14.4) формула тривиалдир.

Декарт координаталари системаси ихтиёрий танлангани учун биз ушбу теоремага келамиз.

Теорема. *Охуz ихтиёрий Декарт координаталари системасида векторларнинг скаляр кўпайтмаси учун*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

формула ўринли, бунда $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ векторларнинг Охуz Декарт координаталар системасига нисбатан компонентлари.

Бундан, агар берилган векторларнинг бирор Декарт координаталари системасидаги компонентлари маълум бўлса, у ҳолда бу векторлар орасидаги бурчак косинусини ҳисоблаш формуласи осонгина келиб чиқади:

$$\cos \angle \vec{a}, \vec{b} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{14.5}$$

14.4. Скаляр кўпайтманинг бир жинслилиги ва аддитивлиги. Векторалрнинг скаляр кўпайтмаси иккита муҳим хоссага эга. Чунончи:

а) *иккита ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор ва исталган λ ҳақиқий сон учун ушбу формула ўринли:*

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}). \tag{14.6}$$

Ҳақиқатан, бирор ихтиёрий Декарт координаталар системасини тайинлаймиз. $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ лар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг шу системага нисбатан компоненталари бўлсин. У ҳолда, маълумки, $\lambda\vec{a}$ ва $\lambda\vec{b}$ векторлар шу тайинланган системада $\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$ ва $\{\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2\}$ компоненталарга эга бўлади.

1- теоремадан фойдаланиб, топамиз:

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda x_1) x_2 + (\lambda y_1) y_2 + (\lambda z_1) z_2 =$$

$$= \lambda (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}),$$

$$(\vec{a}, \lambda\vec{b}) = x_1 (\lambda x_2) + y_1 (\lambda y_2) + z_1 (\lambda z_2) =$$

$$= \lambda (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}).$$

Бундан (14.6) муносабатларнинг ўринли экани келиб чиқади.

Одатда (14.6) муносабатлар ҳақида бундай дейишади: скаляр кўпайтма ҳар қайси кўпайтувчи бўйича бир жинслилик хоссасига эга;

б) *исталган $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ва $\vec{b}$ векторлар учун*

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b}) \tag{14.7}$$

муносабат ўринли.

Ҳақиқатан, агар $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x_2, y_2, z_2\}$ ва $\{u, v, w\}$ лар $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ва $\vec{b}$ векторларнинг Декарт координаталари системасидаги компоненталари бўлса, у ҳолда, 4- теоремани (2- § даги) қўлланиб топамиз:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}_2) = (x_1 + x_2) u + (y_1 + y_2) v + (z_1 + z_2) w =$$

$$= (x_1u + y_1v + z_1w) + (x_2u + y_2v + z_2w) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b}).$$

Шунга ўхшаш, исталган $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ ва $\vec{b}_2$ векторлар учун ҳам

$$(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2) = (\vec{a}, \vec{b}_1) + (\vec{a}, \vec{b}_2) \tag{14.8}$$

муносабат ўринли.

(14.7) ва (14.8) муносабатлар скаляр кўпайтманинг ҳар бир кўпайтувчига нисбатан аддитивлигини ифодалайди.

14.5. Векторнинг ўққа проекцияси. l — бирор ўқ, $\vec{e}$ эса l ўқнинг орти бўлсин. Ушбу

$$Pr_{\vec{e}}\, \vec{a} = (\vec{a}, \vec{e}) \tag{14.9}$$

сонни $\vec{a}$ *векторнинг* $\vec{l}$ *ўқдаги проекцияси* дейилади. $|\vec{e}| = 1$, шунинг учун:

$$Pr_l\, \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \quad \cos \angle\, \vec{a},\ \vec{e} = |\vec{a}| \cos \angle\, \vec{a},\ l, \tag{14.10}$$

бунда

$$\angle\, \vec{a},\ l = \angle\, \vec{a},\ \vec{e}.$$

Бундан векторнинг ўқдаги проекцияси вектор узунлигини вектор билан ўқ орасидаги бурчак косинусига кўпайтирилганига тенг экани келиб чиқади.

Векторларни қўшишда уларнинг исталган ўқдаги проекциялари ҳам қўшилади, яъни

$$Pr_l\, (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) = Pr_l\, \vec{a}_1 + Pr_l\, \vec{a}_2 + \dots + Pr_l\, \vec{a}_m). \tag{14.11}$$

Ҳақиқатан, агар l ўқнинг орти $\vec{e}$ бўлса, у ҳолда (14.9) ва (14.7) муносабатларга биноан қуйидагига эгамиз:

$$Pr_l\, (\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_m) = (\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_m,\ \vec{e}) = (\vec{a}_1,\ \vec{e}) + \dots +$$
$$+ (\vec{a}_m,\ \vec{e}) = Pr_l\, \vec{a}_1 + \dots + Pr_l\, \vec{a}_m.$$

Бу пунктнинг охирида, агар вектор ва ўқнинг орти ўзларининг бирор ихтиёрий Декарт координаталари системасига нисбатан компоненталари билан берилган бўлса, шундай векторларнинг ўқдаги проекциясининг формуласини келтириб чиқарамиз: $\vec{a} = \{x,\ y,\ z\}$, $\vec{e} = \{\lambda,\ \mu,\ \nu\}$ бўлсин. $|\vec{e}| = 1$ ($\vec{e}$ — қаралаётган ўқнинг орти) бўлгани учун:

$$\lambda = \cos \alpha, \qquad \mu = \cos \beta, \qquad \nu = \cos \gamma,$$

бунда α, β, γ — лар $\vec{e}$ орт билан x, y, z координата ўқлари ортлари орасидаги бурчаклар. Сўнгра:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = |\vec{e}|^2 = 1.$$

Шунинг учун қаралаётган ўқни l билан белгилаб, ушбуга эга бўламиз:

$$Pr_l\, \vec{a} = (\vec{a},\ \vec{e}) = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma. \tag{14.12}$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ сонларни l ўқнинг x, y, z Декарт координаталар системасига нисбатан йўналтирувчи косинуслари дейилади.

Агар l ўқ x лар ўқи билан устма-уст тушса, у ҳолда $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = \cos \gamma = 0$ ва (14.12) дан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Pr_{ox}\, \vec{a} = x,$$

бошқача айтганда, $\vec{a}$ векторнинг x лар ўқига нисбатан компонентаси шу векторнинг x лар ўқидаги проекцияси билан устма-уст тушади. Худди шунга ўхшаш, $\vec{a}$ векторнинг y лар ва z лар ўқларига нисбатан компоненталари мос равишда $\vec{a}$ векторнинг y лар ва z лар ўқларидаги проекциялари билан устма-уст тушади.

14.6. Куч таъсирида иш бажариш. Моддий нуқта $\vec{F}$ куч таъсирида O нуқтадан O_1 нуқтага ўтсин. Агар OO_1 кесма узунлиги s га тенг, $\vec{F}$ ва $\vec{OO_1}$ векторлар орасидаги бурчак эса φ га тенг бўлса, у ҳолда физикадан маълумки, бу ҳаракатда $\vec{F}$ куч бажарадиган иш

$$A = |\vec{F}|\ s\ \cos\varphi = |\vec{F}|\cdot|\vec{OO_1}|\cos\varphi = (\vec{F},\ \vec{OO_1})$$

формула бўйича топилади. Бошқача айтганда, *иш куч билан кўчириш векторининг скаляр кўпайтмасига тенг.*

15-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар

Бу параграфда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар назариясига оид асосий маълумотлар ва бу детерминантлар билан боғлиқ бўлган икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаларини ечиш масалалари қисқача баён қилинади. n-тартибли детерминантларнинг умумий назарияси ва унинг чизиқли тенгламалар системаларини ечишга татбиқи IV бобда қаралади.

15.1. Иккинчи тартибли детерминантлар. Ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (15.1)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин, бунда номаълумлар олдидаги коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли.

Бу система x, y ечимга эга деб фараз қилайлик. Бу ечимни (15.1) га қўйиб, иккита тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликлардан биринчисини b_2 га, иккинчисини $(-b_1)$ га кўпайтирамиз ва топилган натижаларни қўшиб, топамиз:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\ x = c_1b_2 - c_2b_1. \qquad (15.2)$$

Шунга ўхшаш, биринчи тенгликнинг иккала қисмини $(-a_2)$ га, иккинчи тенгламанинг иккала қисмини эса a_1 га кўпайтириб ва топилган натижаларни қўшиб, топамиз:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (15.3)$$

Агар $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда (15.1) системанинг x, y ечимлари мавжуд ва ушбу формулалар бўйича топилади:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (15.4)$$

$\Delta = 0$ бўлган ҳол қуйида текширилади.

Номаълумларнинг сони ихтиёрий бўлган тенгламалар системасига ўтишда (IV боб, 33- § га қаранг) бу системаларни ечиш учун топилган формулаларга ўхшаш формулаларни чиқариш анча қийинлашади.

(15.1) системада x ва y лар олдидаги коэффициентлар ушбу жадвални ташкил қилади:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|, \tag{15.5}$$

буни одатда матрица деб аталади (айни ҳолда биз *иккинчи тартибли квадрат матрицага* эгамиз).

Бу матрицанинг детерминанти деб

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

сонни айтилади, бу сон қуйидагича махсус белгиланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ёки} \quad \Delta = \det \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|. \tag{15.6}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар (15.6) детерминантнинг элементлари дейилади. Детерминант иккита сатр ва иккита устунга эга: a_1, b_1 сонлар биринчи сатрни, a_2, b_2 сонлар эса иккинчи сатрни; a_1, a_2 сонлар биринчи устунни, b_1, b_2 сонлар эса иккинчи устунни ташкил қилади.

(15.5) матрица учун ҳам элементлар, сатр ва устун тушунчалари худди шундай киритилади.

a_1 ва b_2 элементлар жойлашган диагонал *бош диагональ*, a_2 ва b_1 элементлар жойлашган диагональ эса *ёрдамчи диагональ* дейилади.

Шундай қилиб, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ детерминант мос равишда бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасидан ёрдамчи диагоналда турган элементлар кўпайтмасини айирилганига тенг.

15.2. Икки номаълумли икки тенглама системасини текшириш. Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \tag{15.7}$$

бунда номаълумлар олдидаги коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли.

(15.7) система (x, y) ечимга эга деб фараз қиламиз. 15.1- пунктда

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1, \tag{15.8}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1 \tag{15.9}$$

муносабатлар топилган эди. Қуйидагига эгамиз:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ёзувни қисқартириш учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

деб оламиз. У ҳолда (15.8 — 9) муносабатлар ушбу кўринишни олади:

$$x \cdot \Delta = \Delta_x, \quad y \cdot \Delta = \Delta_y. \tag{15.10}$$

Δ детерминант (15.7) системанинг детерминанти дейилади. Δ_x детерминант бундан биринчи устун элементларини озод ҳадлар устуни билан алмаштиришдан, Δ_y эса иккинчи устун элементларини озод ҳадлар устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлади.

(15.7) системани текширишга ўтамиз.

1. $\Delta \neq 0$. Бу ҳолда (15.7) система ҳар доим ечимга эга эканини ва бу ечимнинг ягона эканини исботлаймиз. Агар (15.7) система камида битта (x, y) ечимга эга десак, у ҳолда $\Delta \neq 0$ шартда (15.10) дан

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

экани келиб чиқади.

Бундан, $\Delta \neq 0$ шартда (15.7) система биттадан ортиқ ечимга эга эмаслиги келиб чиқади. Энди биз бу система камида битта ечимга эга эканлигини кўрсатишимиз қолди. Чунончи сонларнинг

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{15.11}$$

жуфти шундай ечим бўлади. Ҳақиқатан,

$$a_1 \frac{\Delta x}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(a_1 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{\Delta}(a_1c_1b_2 - a_1c_2b_1 +$$

$$+ b_1a_1c_2 - b_1a_2c_1) = \frac{1}{\Delta} c_1 (a_1b_2 - a_2 b_1) = \frac{1}{\Delta} c_1\Delta = c.$$

Сонларнинг $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ жуфти (15.7) системанинг иккинчи тенгламасини қаноатлантириши ҳам шунга ўхшаш текширилади.

Шундай қилиб, агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (15.7) система ҳар доим ягона ечимга эга бўлади, бу ечим (15.11) формулалар бўйича топилади.

2. $\Delta = 0$, аммо Δ_x ёки Δ_y детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (15.7) система ечимга эга бўлмайди. Бу вақтда (15.10) даги икки тенгликнинг камида бири ўринли бўлмайди.

Демак, $\Delta = 0$ ва Δ_x ёки Δ_y детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (15.7) система ечимга эга бўлмайди. Бу ҳолда (15.7) системанинг тенгламалари биргаликда эмас дейилади.

3. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Бу ҳолда биринчи тенгламанинг коэффициентлари иккинчи тенгламанинг коэффициентларига пропорционал.

Ҳақиқатан, $a_1 \neq 0$ бўлсин дейлик. $m = \frac{a_2}{a_1}$ деб оламиз. У ҳолда

$a_2 = ma_1$ ва $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ муносабатлардан $b_2 = mb_1$, $c_2 = mc_1$ ни топамиз. Шундай қилиб, (15.7) система ушбу кўринишни олади:

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$ma_1x + mb_1y = mc_1.$$

Бу система чексиз кўп ечимга эга бўлган битта

$$a_1x + b_1y = c_1$$

тенгламага эквивалент.

Шундай қилиб, агар $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

(15.7) системани юқорида келтирилган текшириш содда геометрик интерпретацияга эга. Текисликда Декарт координаталар системаси киритилган бўлсин. У ҳолда (15.7) системанинг ечими $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_1y + c_2 = 0$ тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасининг координаталаридан иборат бўлади. Учта ҳол бўлиши мумкин:

1) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тўғри чизиқлар параллел эмас. У ҳолда бу тўғри чизиқлар битта кесишиш нуқтасига эга бўлади, бу ҳолда (15.7) система ягона ечимга эга бўлади. Агар тўғри чизиқлар параллел бўлмаса, у ҳолда уларнинг бурчак коэффициентлари $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ва $k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ҳар хил, яъни $k_2 - k_1 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_1b_2} = \frac{\Delta}{b_1b_2} \neq 0$. Шундай қилиб, тўғри чизиқлар параллел бўлмаган ҳолга $\Delta \neq 0$ тенгсизлик мос келади, бунда тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталари (15.11) формуладан топилади.

2) тўғри чизиқлар параллел ва ҳар хил. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тўғри чизиқларнинг параллеллик шарти шундан иборатки, бунда $\Delta = 0$, чунки шу ҳолдагина бу тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг бўлади. Агар тўғри чизиқлар параллел ва устма-уст тушмаса, уларнинг тенгламалари эквивалент бўлмайди юқорида қаралгандан келиб чиқадики, Δ_x ёки Δ_y детерминантлардан бири нолдан фарқли. (15.7) система ечимга эга эмаслиги геометрик бундай интерпретацияланади: параллел тўғри чизиқлар кесишиш нуқтасига эга эмас.

3) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

Бу ҳолда (15.7) даги тенгламалар ўзаро эквивалент бўлади. (15.7) система чексиз кўп ечимга эга экани геометрик бундай интерпретацияланади: ҳар қандай тўғри чизиқда чексиз кўп нуқталар мавжуд.

Маълум бўлишича, юқорида ўтказилган (15.7) системани текшириш моҳияти жиҳатдан умумий характерга эга бўлиб, кўп ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системаларига қўлланиб бўлар экан. Бунда текширишнинг асосий аппарати ихтиёрий тартибли детерминантлар назарияси бўлади. Масалаларнинг бу туркуми IV бобда қаралади. Қуйида, шу параграфнинг ўзида учинчи тартибли детерминант тушунчасига ва уч ўзгарувчили чизиқли тенгламалар системасини текширишнинг қисқа схемасига тўхталамиз.

15.3. Учинчи тартибли детерминантлар. Ушбу

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \qquad (15.12)$$

кўринишдаги жадвални *учинчи тартибли квадрат матрица* дейилади. Худди иккинчи тартибли матрицалардагидек, бунда ҳам бу жадвални ташкил қилувчи сонлар учинчи тартибли детерминантнинг элементлари дейилади. Бу матрицалар учун ҳам, иккинчи тартибли матрицалар учун киритилган сатр, устун, бош ва ёрдамчи диагоналлар тушунчалари киритилади. (15.12) матрицанинг детерминанти (учинчи тартибли) деб

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \qquad (15.13)$$

сонга айтилади. Бу детерминант кўпинча бундай белгиланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}. \qquad (15.14)$$

Бундан кейин детерминантнинг элементларини иккита индексли битта ҳарф билан белгилаш қулай, бу индекслар бу элемент тегишли бўлган сатр ва устунларнинг номерларини кўрсатади. Биринчи индекс ҳар доим сатр номерини, иккинчи индекс эса устун номерини билдиради. Масалан, a_{31} — биринчи устуннинг учинчи сатри элементи. Бу белгилашлардан фойдалансак, детерминантнинг ўзи бундай кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (15.15)$$

15.4. Детерминантни берилган устуни ёки сатри элементлари бўйича ёйиш. Олдин детерминант элементининг алгебраик тўлдирувчисининг таърифини берамиз.

$$\begin{vmatrix} -a_{11}- & -a_{12}- & -a_{13}- \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (15.16)$$

детерминант a_{ik} *элементининг алгебраик тўлдирувчиси* деб

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\,\Delta_{ik}. \qquad (15.17)$$

сонни айтамиз. Бунда Δ_{ik} — иккинчи тартибли детерминант бўлиб, у бошланғич детерминантдан i- сатр ва k- устунни ўчириш билан ҳосил бўлади. *Δ_{ik} детерминант a_{ik} элементнинг минори дейилади.* Масалан, a_{13} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бундай бўлади:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

бунда

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad \text{(15.16 га қаранг).}$$

a_{23} нинг алгебраик тўлдирувчиси эса ушбу кўринишга эга:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Детерминантни берилган сатри ёки устуни элементи бўйича ёйилмаси ҳақидаги асосий теорема бундай ифодаланади.

Теорема. *Детерминант исталган сатри (ёки устуни) элементлари билан шу элементлар алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.*

Умумийликни бузмасдан, бу теоремани детерминантнинг аниқ бир устуни ёки сатри учун исботлаш мумкин. Масалан, иккинчи устунни танлаб оламиз. Ушбу

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{32} \qquad (15.18)$$

тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш керак.

(15.13) формулага асосан қуйидагига эгамиз:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$
$$- a_{11}a_{32}a_{23} = a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{32}(a_{21}a_{13} -$$
$$- a_{11}a_{23}) = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\Delta_{12} +$$
$$+ a_{22}(-1)^{2+2}\Delta_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}\Delta_{32} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Шундай қилиб, (15.8) тенглик ўрнатилди ва теорема исботланди.

Кўпинча бу теоремадан фойдаланиб, детерминантларни ҳисоблашади. Шуни таъкидлаб ўтамизки, ёйилмани ноллари кўп бўлган сатр ёки устун бўйича бажариш мақсадга мувофиқдир.

15.5. Детерминантларнинг хоссалари.

1°. *Агар детерминантнинг устунлари ва сатрларининг тартибини ўзгартирмаган ҳолда сатрларини устунлари билан ёки устунларини сатрлари билан алмаштиришдан детерминант ўзгармайди, яъни:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Исботи. Δ — дастлабки детерминант, $\bar{\Delta}$ эса Δ дан сатрларни устунлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант бўлсин.

Δ ни биринчи сатр бўйича ёямиз:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Сўнгра $\overline{\Delta}$ ни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\overline{\Delta} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Бундан: $\Delta = \overline{\Delta}$.

2°. *Икки сатрининг (ёки икки устунининг) ўринларини алмаштиришдан детерминантнинг ишораси ўзгаради.*

Масалан, биринчи ва учинчи сатрларнинг ўринларини алмаштириб, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}. \qquad (15.19)$$

(15.19) формулани исботлаш билан чекланамиз, чунки кўриб чиқиш умумий характерга эга.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \overline{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

деб белгилаб оламиз. $\overline{\Delta}$ ни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\overline{\Delta} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= - a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= - a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (15.20)$$

Энди Δ ни учинчи сатр элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (15.21)$$

(15.20) ва (15.21) дан $\overline{\Delta} = \Delta$ эканини ҳосил қиламиз.

3°. *Иккита сатри ёки иккита устуни бир хил бўлган детерминант нолга тенг.*

Ҳақиқатан, агар Δ да иккита сатр бир хил бўлса (тенг бўлса), уларнинг ўринларини алмаштириш билан детерминант ўзгармайди. Иккинчи томондан, 2° хоссага кўра Δ детерминант бунда ишорасини ўзгартириши керак. Шунинг учун $\Delta = -\Delta$ ёки $2\Delta = 0$. Бундан $\Delta = 0$.

4°. *Исталган сатр (ёки устун) нинг умумий элементини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.*

Исботлаш учун элементларининг умумий кўпайтувчиси бўлган сатр ёки устун бўйича детерминантни ёйиш етарли.

5°. *Агар детерминант бирор сатри (устуни) нинг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, детерминант икки детерминантнинг йиғиндиси шаклида ифодаланиши мумкин. Бунда бу детерминантлар бошланғич детерминант элементларидан иборат бўлиб, фақат кўрсатилган сатр (устун) элементлари бошқадир. Биринчи детерминантда кўрсатилган сатр (устун) биринчи қўшилувчилардан, иккинчи детерминантда эса иккинчи қўшилувчилардан иборат.* Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_1+m_1 & a_2+m_2 & a_3+m_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Исботлаш учун дастлабки детерминантни тегишли сатр (устун) бўйича ёйиш етарли.

6°. *Бирор устун (сатр) элементларига бошқа устуннинг (сатрнинг) бир хил кўпайтувчига кўпайтирилган мос элементларини қўшишдан детерминант ўзгармайди.*

Исботи. 5°, 4°, 3° хоссалардан кетма-кет фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7°. *Детерминантнинг бирор устуни (сатри) элементларининг бошқа устуни (сатри) элементлари алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмасининг йиғиндиси нолга тенг.*

Исботи. Аниқлик учун иккинчи устун элементлари биринчи устун элементларининг алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтирилсин У вақтда

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0$$

бўлишини кўрсатиш керак.

Биринчи устун элементларининг алгебраик тўлдирувчилари шу устун элементларининг иштирокисиз тузилгани сабабли исталган x, y, z сонлар учун ушбу

$$\begin{vmatrix} y & a_{12} & a_{13} \\ x & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{11} + yA_{21} + zA_{31}$$

айният ўринли бўлади. $x = a_{12}$, $y = a_{22}$, $z = a_{32}$ деб оламиз. У ҳолда:

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{32}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

15. 6. Уч номаълумли учта тенгламанинг чизиқли системаси. Чизиқли тенгламаларнинг

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned} \tag{15.22}$$

системаси берилган бўлсин. x, y, z ларнинг коэффициентларидан тузилган матрицанинг детерминантини Δ билан белгилаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{15.23}$$

A_{11}, A_{21}, A_{31} — мос равишда a_{11}, a_{21}, a_{31} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари бўлсин. (15.22) система (x, y, z) ечимга эга деб фараз қиламиз, бу ечим (15.22) га қўйилган бўлсин. Ҳосил бўлган тенгликлардан биринчисини A_{11} га, иккинчисини A_{21} га, учинчисини A_{31} га кўпайтирамиз ва қўшамиз. У ҳолда ушбуга эга бўламиз:

$$x(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + y(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) + z(a_{13}A_{11} + \\ + a_{23}A_{31} + a_{33}A_{31}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Детерминантларнинг хсссаларидан фойдаланиб, ушбуга эгамиз:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} &= \Delta, \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} &= 0, \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} &= 0, \end{aligned}$$

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \left|\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right|.$$

Қисқалик учун охирги тенгликнинг ўнг қисмидаги детерминантни Δ_x билан белгилаймиз. Шундай қилиб, ушбу муносабатга келамиз:

$$x \cdot \Delta = \Delta_x.$$

Шунга ўхшаш, ўша айниятларни Δ детерминантнинг иккинчи сатри элементлари алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб ва ҳосил бўлган натижаларни қўшиб, $y \cdot \Delta = \Delta_y$ муносабатга келамиз, бунда

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Энди ўша айниятларнинг ўзини учинчи устун элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб ва чиққан натижаларни қўшиб, ушбу муносабатга эга бўламиз:

$$z \cdot \Delta = \Delta_z,$$

бунда

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб, агар x, y, z сонлар (15.22) системанинг ечими бўлса, у ҳолда ушбуларга эгамиз:

$$x\cdot\Delta=\Delta_x,$$
$$y\cdot\Delta=\Delta_y,$$
$$z\cdot\Delta=\Delta_z \qquad (15.24)$$

Энди бу системани текширишга киришамиз.

1°. $\Delta\neq 0$. Бу ҳолда (15.24) формулалардан (15.24) система битгадан ортиқ бўлмаган ечимга эга экани келиб чиқади. Бу система аниқ битта ечимга эга эканини исботлаш учун $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ сонлар учлиги системанинг ечими эканини кўрсатиш керак. Ушбуларга эгамиз:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=\frac{1}{\Delta}(a_{11}\Delta_x+a_{12}\Delta_y+a_{13}\Delta_z)=$$
$$=\frac{1}{\Delta}[a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31})+a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32})+$$
$$+a_{13}(b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33})]=\frac{1}{\Delta}[b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13})+$$
$$+b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})+b_3(a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33})]=$$
$$=\frac{1}{\Delta}\,b_1\Delta=b_1.$$

Келтириб чиқаришнинг якуний қисмида детерминантни ёйиш ҳақидаги теорема ва 7-хоссадан фойдаланилди, яна шуларга биноан ушбуларга эгамиз.

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\Delta,$$
$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0,$$
$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0.$$

Шу x, y, z сонларнинг ўзи (15.22) системанинг иккинчи ва учинчи тенгламаларини айниятга айлантириши ҳам юқоридагидек текширилади.

Шундай қилиб, агар $\Delta\neq 0$ бўлса, у ҳолда (15.22) система ягона ечимга эга:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2°. $\Delta=0$ ва Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантлардан ақалли биттаси нолдан фарқли. Бу ҳолда *муносабатларнинг*

$$x\cdot 0=\Delta_x,$$
$$y\cdot 0=\Delta_y,$$
$$z\cdot 0=\Delta_z$$

системаси мавжуд бўлмайди. Шунинг учун (15.22) система кўрсатилган ҳолда ечимга эга бўлмайди.

3°. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Бу ҳолда (15.22) система ё чексиз кўп ечимга эга бўлади, ёки умуман ечимга эга бўлмайди. Биз бу тасдиқнинг исботини келтирмасдан, қуйидаги мисолларни разбор қилиш билан чекланамиз.

а) $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ 2x - 6y + 4z = -9, \\ 6x - 18y + 12z = 5. \end{cases}$$

Бевосита текшириш йўли билан $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ эканига ишонч ҳосил қилиш осон. Ҳар қайси жуфтдаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар пропорционал, эркин ҳадлар эса номаълумлар олдидаги коэффициентларга пропорционал эмас. Шу сабабли система ечимга эга эмас.

б) $$\begin{cases} 2x + 5y - 7z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 3x + 8y - 6z = 5. \end{cases}$$

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ га эгамиз. Учинчи тенглик биринчи икки тенгликнинг ўзаро қўшилишидан келиб чиқишини кўриш осон. Шундай қилиб, система иккита тенгламага келтирилади:

$$2x + 5y = 7z + 3,$$
$$x + 3y = 2 - z.$$

Бу системанинг детерминанти $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ва шунинг учун:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7z+3 & 5 \\ 2-z & 3 \end{vmatrix}}{\sigma} = 26z - 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7z+3 \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{\sigma} = -9z + 1.$$

Бундан дастлабки система чексиз кўп ечимга эга экани келиб чиқади, чунки z ни ихтиёрий олиб, z бўйича x ва y ни бир қийматли топамиз. Масалан,

$z = 1$ деб олиб, $x = 25$, $y = 8$ ни,
$z = 2$ деб олиб, $x = 51$, $y = -17$ ни

топамиз ва ҳоказо.

15.7. Уч номаълумли учта тенгламанинг бир жинсли системаси. Агар чизиқли тенгламалар системасининг барча озод ҳадлари нолга тенг бўлса, бундай система *бир жинсли* дейилади. Бир жинсли система ушбу кўринишга эга:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \qquad (15.25)$$

Исталган бир жинсли (15.25) система ҳар доим ноль ёки тривиал ечимга эга: $x = y = z = 0$. Система қачон нолмас ечимга эга бўлади, деган савол қизиқарлидир. Иккита ҳолни қараб чиқамиз.

1. $\Delta \neq 0$. Бу ҳолда (15.6-пункт). (15.25) система ноль ечимгагина эга бўлади: $x = y = z = 0$.

Бундан $\Delta = 0$ шарт (15.25) системанинг ноль ечими мавжуд бўлиши учун зарур экани келиб чиқади. Бу шарт етарли шарт ҳам эканлигини кўрсатамиз.

2. $\Delta = 0$ бўлсин.

а) дастлаб Δ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларидан ақалли биттаси нолдан фарқли деб фараз қиламиз. Аниқлик учун

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

деб ҳисоблаймиз.

(15.25) системанинг биринчи иккита тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \tag{15.26}$$

Сўнгра

$$\sigma = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлгани учун ҳар қандай z да (15.25) система ушбу ечимга эга:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{31}}{A_{33}} z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{32}}{A_{33}} z.$$

$k = \frac{z}{A_{33}}$ деб оламиз. У ҳолда (15.26) нинг ечими ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = kA_{31}, \qquad y = kA_{32}, \qquad z = kA_{33},$$

бунда k сон ихтиёрий қийматларни қабул қилиши мумкин.

Шундай қилиб, (15.25) системанинг дастлабки икки тенгламасининг ечими топилди. Ихтиёрий k да сонларнинг бу учлиги (15.25) системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиришини текшириб кўрамиз.

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k\,[a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}] = k \cdot \Delta = 0.$$

k ҳар қандай сон қийматларни қабул қилгани учун (15.25) система чексиз кўп ечимга эга.

б) агар Δ детерминантнинг барча алгебраик тўлдирувчилари нолга тенг бўлса, у ҳолда (15.25) системанинг ҳар қандай иккита тенгламаси пропорционал коэффициентларга эга, ва демак, система битта тенгламага келтирилади — қолган иккита тенглама бу тенгламанинг натижаси бўлади. Бундай система чексиз кўп ечимга эга: иккита номаълумга ихтиёрий қийматлар бериш мумкин, учинчисини эса системанинг бирдан-бир эркли (боғлиқсиз) тенгламасидан топиш мумкин.

16-§. Вектор кўпайтма

16.1. Таъриф. *$\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга вектор кўпайтмаси деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, бу вектор қуйидагича шартларни қаноатлантиради:*

1) *$\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ортогонал,*

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle \vec{a}, \vec{b}.$

3) *векторларнинг тартибланган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ учлиги ўнг учлик бўлади.*

Бу таърифда $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ деб фараз қилинади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ақалли биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда таърифга кўра $\vec{c} = \vec{0}$.

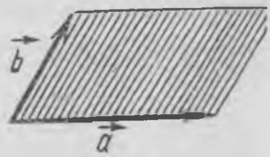
Вектор кўпайтма учун икки хил ёзув шаклидан фойдаланилади:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \qquad \text{ёки} \qquad \vec{a} \times \vec{b}.$$

16.2. Вектор кўпайтманинг хоссалари.

1°. *Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколлинеар бўлса, у ҳолда $|\vec{a} \times \vec{b}|$ сон $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг бўлади* (52- расм).

Ҳақиқатан, мактаб геометрия курсидан маълумки, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг S юзи унинг томонлари узунликларини шу томонлари орасидаги бурчак синуси билан кўпайтмасига тенг. Демак,



52- расм.

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle \vec{a}, \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

2°. *Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$* Ҳақиқатан, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак бу ҳолда 0 га ёки π га тенг. Шунинг учун: $\sin \angle \vec{a}, \vec{b} = 0$. Бундан $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$, ва демак, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Аксинча, агар $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ бўлса, у ҳолда

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle \vec{a}, \vec{b} = 0$$

муносабатдан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан бири нолга тенг, ёки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ орасидаги бурчак 0 ёки π га тенг экани келиб чиқади. Бу ҳолларнинг ҳаммасида $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеардир.

3°. *Декарт координаталар системаси координата ўқларининг $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортлари учун қуйидаги муносабатлар ўринли:*

$$\begin{aligned}
&\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, \qquad &\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \qquad &\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\\
&\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \qquad &\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}, \qquad &\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}.\\
&\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}, \qquad &\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \qquad &\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Бу муносабатлар вектор кўпайтманинг таърифидан бевосита келиб чиқади.

4°. *Кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштиришда вектор кўпайтманинг ишораси ўзгаради:*

$$\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b}). \tag{16.3}$$

Исбот. $\vec{a}\times\vec{b}$ ва $\vec{b}\times\vec{a}$ векторлар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлгани учун бу векторларнинг иккаласи ҳам битта тўғри чизиқда ётади.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ ва $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}\times\vec{a}$ векторлардан иборат учликлар ўнг учликлардир. Шунинг учун $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{a}$ чап учликдир. Демак, $\vec{a}\times\vec{b}$ ва $\vec{b}\times\vec{a}$ векторлар қарама-қарши йўналган векторлардир ва

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle\vec{a},\ \vec{b}=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\angle\vec{b},\ \vec{a}=|\vec{b}\times\vec{a}|$$

бўлгани учун $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$.

5°. *Исталган λ ҳақиқий сон учун ушбу муносабатлар ўринли:*

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times\lambda\vec{b}. \tag{16.4}$$

Исбот. Агар $\lambda=0$ ёки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, (16.4) муносабатларнинг ўринли бўлиши равшан. Шунинг учун $\lambda\neq 0$, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ноколлинеар бўлган умумий ҳол қизиқарлидир. Иккита имкониятни кетма-кет разбор қиламиз:

а) $\lambda>0$. $\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган. Шу сабабли векторларнинг $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ ва $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ тартибланган учликлари ўнг учликлардир. Бундан ва вектор кўпайтманинг таърифидан $\vec{a}\times\vec{b}$, $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ ва $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ векторлар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ўтувчи текисликка перпендикулярлиги ва у текисликдан бир томонда ётиши келиб чиқади. Демак, $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ ва $\lambda\vec{a}\times\vec{b}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган. Бундан ташқари

$$|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})|=\lambda|\vec{a}\times\vec{b}|=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\ \vec{b})=$$

$$= |\lambda \vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \angle \lambda \vec{a}, \vec{b} = |\lambda \vec{a} \times \vec{b}|, \tag{16.5}$$

бўлгани учун $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$.

4° хосса ва (16.5) муносабатдан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\vec{a} \times \lambda \vec{b} = -(\lambda \vec{b} \times \vec{a}) = -\lambda (\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda [-(\vec{b} \times \vec{a})] =$$
$$= \lambda (\vec{a} \times \vec{b}). \tag{16.6}$$

(16.5) ва (16.6) дан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноколлинеар векторлар ва $\lambda > 0$ сон учун (16.4) муносабатларнинг тўғрилиги келиб чиқади.

б) $\lambda < 0$, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ноколлинеар. Юқорида $\vec{a} \times \vec{b}$; $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ ва $\lambda \vec{a} \times \vec{b}$ векторлар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр экани кўрсатилган эди. $\lambda < 0$ бўлгани учун $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ ва $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\lambda \vec{a} \times \vec{b}$ учликлар чап учлик, ва демак, $\lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ ва $\lambda \vec{a} \times \vec{b}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган. Шунингдек, $|\lambda (\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda \vec{a} \times \vec{b}|$ муносабат а) пунктдаги каби исботланади. Шунинг учун

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{a} \times \vec{b}.$$

$\lambda < 0$ да $\vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ муносабат $\lambda > 0$ ҳолидаги каби исботланади. Шундай қилиб, б) пункт шартларида (16.4) нинг тўғрилиги исботланди.

Шу билан (16.4) тенгликларнинг исботи тугалланди.

6°. *Ихтиёрий* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторлар учун*

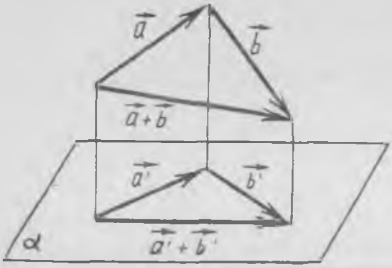
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{16.7}$$

муносабат ўринли. (16.7) муносабат *дистрибутивлик қонуни* дейилади.

Дистрибутивлик қонунини исботлашдан олдин векторнинг тўғри чизиққа нисбатан ва текисликка нисбатан ташкил этувчиси тушунчасини киритамиз.

l — бирор тўғри чизиқ бўлсин. $\vec{a}$ *векторнинг* l *тўғри чизиққа нисбатан ташкил этувчиси* деб шундай $\vec{a}'$ векторни айтиладики, бу векторнинг учи $\vec{a}$ вектор учининг l тўғри чизиққа ортогонал проекциясидан, охири эса $\vec{a}$ вектор охирининг l тўғри чизиқдаги ортогонал проекциясидан иборат бўлади*. Шунга ўхшаш, $\vec{a}$ *вектор-*

* Маълумки, M нуқтанинг l тўғри чизиққа ортогонал проекцияси l га перпендикуляр бўлиб, M нуқтадан ўтувчи α текисликнинг l тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасидир. Қуйида нуқтанинг тўғри чизиққа проекцияси дейилганда ҳар доим унинг ортогонал проекцияси тушунилади.



53- расм.

нинг α текисликка нисбатан ташкил этувчиси деб, шундай $\vec{a}$ векторни айтиладики, бу векторнинг учи $\vec{a}$ вектор учининг α текисликка проекциясидан, охири эса $\vec{a}$ вектор охирининг шу текисликдаги проекциясидан иборат.

1-теорема. *Тенг векторлар тўғри чизиққа ёки текисликка нисбатан тенг ташкил этувчиларга эга, векторлар йиғиндисининг тўғри чизиққа нисбатан ёки текисликка нисбатан ташкил этувчиси мос ташкил этувчиларнинг йиғиндисига тенг* (53- расм).

Бу теореманинг исботини текислик бўлган ҳол учун келтирамиз. α — векторларнинг ташкил этувчилари қаралаётган текислик бўлсин. x ва y лар ўқлари α текисликда ётувчи, ўқи эса шу текисликка перпендикуляр равишда йўналган Декарт координаталар системасини оламиз. У ҳолда ҳар қандай $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ вектор учун унинг α га нисбатан $\vec{a}'$ ташкил этувчиси бундай бўлади: $\vec{a}'=x\vec{i}+y\vec{j}$. Тенг векторларнинг компонентлари тенг ва векторларни қўшишда уларнинг компонентлари қўшилгани учун (2.5-пунктга қаранг), ундан 1-теореманинг тасдиғи бевосита келиб чиқади.

Ташкил этувчилари l тўғри чизиққа нисбатан олинган ҳол учун x лар ўқи l тўғри чизиқда ётган Декарт координаталари системасидан фойдаланиш етарли.

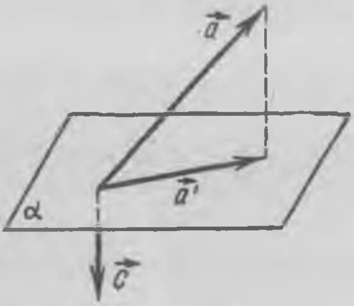
Энди иккита $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ вектор берилган бўлсин. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{c}$ векторга перпендикуляр текисликка нисбатан ташкил этувчисини $\vec{a}'$ билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}'\times\vec{c}. \tag{16.8}$$

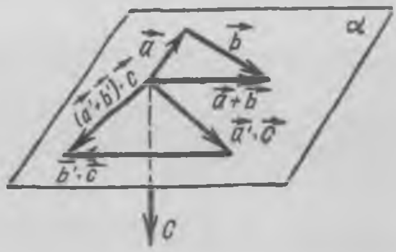
Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}\times\vec{c}$ ва $\vec{a}'\times\vec{c}$ векторларнинг йўналишлари бир хил (54- расм). Бу векторларнинг йўналишлари тенг, чунки $\vec{a}$, $\vec{c}$ ва $\vec{a}'$, $\vec{c}$ векторларга ясалган параллелограммлар тенгдош.

Энди (16.7) дистрибутивлик қонунини исботлашга ўтамиз. Агар $\vec{c}=\vec{0}$ бўлса, (16.7) формула ўринли экани равшан. Сўнгра (16.7) формулани $|\vec{c}|=1$ бўлган ҳол учун исботлаш етарли, чунки ихтиёрий $\vec{c}$ вектор учун исбот (16.4) формуладан келиб чиқади.

Шундай қилиб, $|\vec{c}|=1$ бўлсин. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг $\vec{c}$ векторга перпендикуляр α текисликка нисбатан ташкил этувчиларини мос



54- расм.



55- расм.

равишда $\vec a'$ ва $\vec b'$ билан белгилаймиз (55- расм). У ҳолда $\vec a' \times \vec c$, $\vec b' \times \vec c$ ва $(\vec a' + \vec b') \times \vec c$ векторлар мос равишда $\vec a'$, $\vec b'$ ва $\vec a' + \vec b'$ векторларда α текисликни $\vec c$ вектор атрофида $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриш натижасида ҳосил бўлади (55- расм). Шунинг учун:

$$(\vec a' + \vec b') \times \vec c = (\vec a' \times \vec c) + (\vec b' \times \vec c).$$

Сўнгра

$$\vec a' \times \vec c = \vec a \times \vec c, \quad \vec b' \times \vec c = \vec b \times \vec c,$$

$$(\vec a' + \vec b') \times \vec c' = (\vec a' \times \vec c) + (\vec b' \times \vec c)$$

бўлгани учун

$$(\vec a + \vec b) \times \vec c = (\vec a \times \vec c) + (\vec b \times \vec c),$$

бу эса (16.7) муносабатнинг исботини якунлайди.

16.3. Декарт координаталар системасида вектор кўпайтмани векторларнинг компонентлари орқали ифодалаш. $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар ихтиёрий олинган Декарт координаталари системасида мос равишда $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ компонентларга эга бўлсин. У ҳолда:

$$\vec a = x_1\vec i + y_1\vec j + z_1\vec k, \quad \vec b = x_2\vec i + y_2\vec j + z_2\vec k.$$

Вектор кўпайтманинг хоссаларидан (16.5- пункт) ушбуга эгамиз:

$$\vec a \times \vec b = x_1x_2(\vec i \times \vec i) + y_1x_2(\vec j \times \vec i) + z_1x_2(\vec k \times \vec i) +$$
$$+ x_1y_2(\vec i \times \vec j) + y_1y_2(\vec j \times \vec j) + z_1y_2(\vec k \times \vec j) + x_1z_2(\vec i \times \vec k) +$$
$$+ y_1z_2(\vec j \times \vec k) + z_1z_2(\vec k \times \vec k) = -y_1x_2\vec k + z_1x_2\vec j + x_1y_2\vec k -$$
$$- z_1y_2\vec i - x_1z_2\vec j + y_1z_2\vec i.$$

Бир хил ортларга эга бўлган қўшилувчиларни бирлаштиргандан кейин:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1z_2 - z_2y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Детерминантлар назариясининг формулаларига ўхшаш (15.4) пунктга қаранг) қуйидаги ёзувни киритамиз:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (16.9)$$

(16.9) формуланинг масалалар ечишда жуда фойдали бўладиган иккита натижасини таъкидлаб ўтамиз.

1-натижа. (Икки векторнинг коллинеар бўлиш шарти).

Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор коллинеар бўлиши учун (16.2-пунктга қаранг) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ бўлиши зарур ва етарли. Агар бирор Декарт координаталари системасида $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2\ y_2, z_2\}$ компонентларга эга бўлса, у ҳолда бу векторларнинг коллинеарлик шарти ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{0}. \qquad (16.10)$$

2-натижа. (Учбурчак юзининг формуласи.)

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга учбурчак ясалган бўлсин. У ҳолда бу учбурчакнинг юзини

$$S = \frac{1}{2}\,|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}\right\| \qquad (16.11)$$

формула бўйича топилади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар xOy текисликда ётган хусусий ҳолни алоҳида таъкидлаб ўтамиз. Бу ҳолда $z_1 = z_2 = 0$ ва

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\,|x_1y_2 - x_2y_1|. \qquad (16.12)$$

Қуйидаги содда масалаларни машқ тариқасида ечишни тавсия этамиз.

1. Агар $|\vec{c}| = 1$ ва $\vec{c}$ вектор $\vec{a} = -4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ векторларга перпендикуляр экани маълум бўлса, $\vec{c}$ векторнинг компонентларини Декарт координаталари системасида топинг.

Жавоб: $\vec{c} = \pm \frac{8}{9}\vec{i} \pm \frac{1}{9}\vec{j} \pm \frac{4}{9}\vec{k}$; $\vec{c}$ векторни $\vec{c} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ формула бўйича топиш қулай.

2. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $b = 5\vec{i}$ векторлар берилган. Шу векторларга ясалган параллелограммнинг юзини ва унинг диагоналлари узунлигини топинг.

Жавоб: $S = 5\sqrt{2}$, $l_1 = \sqrt{66}$, $l_2 = \sqrt{6}$.

3. Учлари $A(3, 0, 5)$. $B(3, -2, 2)$, $C(1, 2, 4)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзини топинг.

Жавоб: $S = \sqrt{29}$; ABC учбурчакни томонлари $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлардан иборат учбурчак деб қараш фойдали.

4. Учбурчакнинг учлари $A(1, 1, 1)$, $B(1, 4, 5)$, $C(5, 1, 4)$ нуқталарда. Учбурчак баландликларининг узунликларини топинг.

Жавоб: $h_1 = \frac{2}{5}\sqrt{136}$, $h_2 = \frac{2}{5}\sqrt{136}$, $h_3 = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$.

5. Учбурчакли пирамиданинг учлари $A(1, 1, 1)$, $B(1, 4, 5)$, $C(5, 1, 4)$, $D(-1, -1, -1)$ нуқталарда ётади. Бу пирамиданинг V ҳажмини топинг.

16.4. Механикага татбиқ қилиш. а) Куч моменти. Q қаттиқ жисм берилган бўлсин ва бу жисмнинг битта, масалан, O нуқтаси ҳаракатланмайдиган қилиб маҳкамланган бўлсин. Агар Q жисмнинг бошқа P нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилса, у ҳолда *айлантирувчи момент* ёки *куч моменти* ҳосил бўлади. Механикадан маълум бўлган таърифга кўра куч моменти ($\vec{m}$ вектор) ушбу формула бўйича топилади:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{16.13}$$

бунда $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Энди P нуқтага иккита $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ куч қўйилган бўлсин ва бу кучларнинг йиғиндиси $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ бўлсин. Агар $\vec{m}$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ мос равишда $\vec{F}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ кучларнинг моментлари бўлса, у ҳолда табиий

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

бўлади. Бу гипотезанинг исботи (16.13) формуладан ва вектор кўпайтманинг ҳар қайси вектор бўйича аддитивлигидан осонгина келиб чиқади (16.7 га қаранг):

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2) = \\ = \vec{m}_1 + \vec{m}_2. \tag{16.14}$$

б) тангенциал ва бурчак тезлик. Бирор P нуқта l тўғри чизиқ атрофида узунлик бўйича ўзгармас $\vec{v}(t)$ тангенциал тезлик билан айланма ҳаракат қилаётган бўлсин. (Тангенциал тезлик $\vec{v}(t)$ вектордан иборат бўлиб, бу вектор ҳар бир вақт моментида P нуқта траекториясига уринма бўйлаб йўналган, бизнинг ҳолда $|\vec{v}(t)| = v_0 = \mathrm{const} > 0$) $r_0 = |\vec{r}(t)| \sin \angle \vec{w}, \vec{r}(t)$ (бунда $\vec{w} \neq \vec{0}$ вектор l тўғри чизиқда ётади) P нуқтадан чизиққача бўлган масофа бўлгани учун r_0 миқдор t вақтга ва O нуқтанинг l тўғри чизиқдаги ҳолатига боғлиқ бўлмаган мусбат ўзгармасдир. Энди қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{w}$ векторни қараймиз:

1) $|\vec{w}| = v_0/r_0$;

2) вақтнинг ҳар қандай моментида $\vec{w}$, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ векторлар ўнг учликни ташкил қилади.

Ҳар қандай t да, бундан ташқари, $\vec{v}(t)$ вектор $\vec{w}$, $\vec{r}(t)$ векторларга перпендикуляр ва

$$|\vec{w} \times \vec{r}(t)| = |\vec{w}|\, |\vec{r}(t)| \sin \angle \vec{w}, \vec{r}(t) = \frac{v_0}{r_0} r_0 = v_0 = |\vec{v}(t)|$$

бўлгани учун

$$\vec{v}(t) = \vec{w} \times \vec{r}(t). \qquad (16.15)$$

Шундай қилиб, агар ҳаракатланаётган нуқтанинг тангенциал тезлиги узунлик бўйича ўзгармас бўлса, нуқтанинг l тўғри чизиқ атрофида айланма ҳаракати l да ётувчи бирор ўзгармас $\vec{w}$ вектор билан тўла характерланади. $\vec{w}$ вектор қаралаётган ҳаракатнинг бурчак тезлиги дейилади.

Шу нарса муҳимки, l ўқ атрофида $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$ бурчак тезликлар билан кетма-кет бир қанча айланма ҳаракат бажарилаётган бўлса, у ҳолда натижавий ҳаракат ҳам l ўқ атрофида $\vec{w} = \vec{w}_1 + \ldots + \vec{w}_n$ тезликли айланма ҳаракат бўлади. Бу (16.15) ва (16.17) формулалардан келиб чиқади:

$$\vec{v}(t) = \vec{w} \times \vec{r}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i\right) \times \vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{w}_i \times \vec{r}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(t).$$

17-§. Аралаш ва қўш вектор кўпайтма

17.1. Таъриф. *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар тартибланган учлигининг аралаш кўпайтмаси деб, $\vec{a} \times \vec{b}$ вектор билан $\vec{c}$ векторнинг скаляр кўпайтмасига тенг сонни айтилади.*

Аралаш кўпайтма учун қуйида $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ белгилаш ишлатилади. Юқорида айтилганларга кўра:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}). \qquad (17.1)$$

17.2. Аралаш кўпайтманинг геометрик интерпретацияси. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар ўнг учлик ҳосил қилсин (56-расм). $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларга ясалган параллелепипеднинг ҳажмини V билан белгилаймиз. У ҳолда $V = S \cdot h$ бўлади, бунда S — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзи, h эса шу параллелограмм текислигига перпендикуляр бўлган CD кесманинг узунлиги.

$\vec{g} = \vec{a} \times \vec{b}$ деб оламиз; у ҳолда вектор кўпайтманинг таърифига кўра $|\vec{g}| = S$ га эга бўламиз; $\vec{g}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ўтувчи α текисликка перпендикуляр, ва ниҳоят, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{g}$ векторлар ўнг учлик ҳосил қилади. Бундан $\vec{c}$ ва $\vec{g}$ векторларнинг умумий учга эга эканлиги ва α текисликнинг бир томонига жойлашганлиги келиб чиқади, $\vec{g}$ вектор α текисликка перпендикуляр бўлгани учун $\vec{g}$ ва $\vec{c}$ векторлар орасидаги φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан катта эмас, яъни $\cos\varphi \geqslant 0$.

Шунинг учун

$$h = |c| \cdot \cos \vec{\varphi}$$

ва

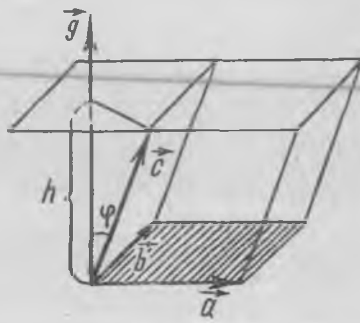
$$(\vec{g}, \vec{c}) = |\vec{g}| \cdot |\vec{c}| \cos\varphi = S \cdot h = V.$$

Бошқа томондан,

$$(\vec{g}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}).$$

Шунинг учун

$$V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$



56- расм.

Шундай қилиб, *агар* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторлар ўнг учлик ташкил қилса, уларнинг аралаш кўпайтмаси шу векторларга ясалган параллелепипеднинг ҳажмига тенг экан.*

Энди $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар чап учлик ташкил қилсин. У ҳолда $\vec{g} = \vec{a} \times \vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар α текисликдан турли томонда ётади ва $\vec{g}$ вектор α текисликка перпендикуляр бўлгани учун $\vec{g}$ ва $\vec{c}$ орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан кичик эмас, яъни $\cos\varphi \leqslant 0$.

Шунинг учун $h = -|\vec{c}| \cos\varphi$ ва

$$(\vec{g}, \vec{c}) = |\vec{g}||\vec{c}| \cos\varphi = -Sh = -V.$$

Бошқа томондан,

$$(\vec{g}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

Бундан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг чап учлиги учун

$$V = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учлиги учун:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

17.3. Аралаш кўпайтманинг хоссалари.

а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторлар компланар бўлиши учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот.

Зарурлиги. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда умумийликни бузмасдан, улар умумий учта эга деб ҳисоблаш мумкин; бу ҳолда улар бир текисликда ётади ва бу векторларга ясалган параллелепипеднинг ҳажми нолга тенг бўлади. 17.2-пунктга биноан: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Етарлилиги. Агар $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ бўлса, яъни $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0$ бўлса, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан бири ноль вектор ёки $\vec{a} \times \vec{c}$ вектор $\vec{c}$ га перпендикуляр (бу ҳолда $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ўтувчи текисликда ётади). Иккала ҳолда ҳам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар.

б) *Ихтиёрий* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторлар учун* ушбуга эгамиз:

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}).$$

Исбот. Энг олдин шуни қайд қиламизки, аралаш кўпайтманинг хоссасига кўра ушбуга эгамиз:

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}).$$

Векторларнинг иккала $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ учлиги бир вақтда ё ўнг, ёки чап учлик ҳосил қилади. Шу сабабли 17.2-пунктга биноан:

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}).$$

17.4. Аралаш кўпайтмани Декарт координаталар системасидаги векторлар компонентлари орқали ифодалаш. Ихтиёрий танлаб олинган Декарт координаталар системасига нисбатан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг ёйилмаси берилган бўлсин:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$
$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}.$$

У ҳолда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

шунинг учун

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб, охирги формула ушбу кўринишда бўлади:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (17.2)$$

(17.2) формуладан келиб чиқадиган бир қатор натижаларни таъкидлаб ўтамиз.

1-натижа. 17.3 пунктдан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг компланарлик шарти ушбу кўринишда эканлиги келиб чиқади:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2-натижа. Иккита кўпайтувчининг ўринларини алмаштиришдан аралаш кўпайтманинг ишораси ўзгаради. Масалан,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}). \qquad (17.3)$$

Ҳақиқатан, детерминантларнинг хоссасига кўра:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}).$$

3-натижа. Ихтиёрий

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг сатрларини бирор Декарт координаталари системасида $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$ векторларнинг компонентлари сифатида қараймиз. У ҳолда:

$$\Delta = \begin{cases} \text{агар } \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3 \text{ учлик ўнг бўлса, } V. \\ \text{агар } \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3 \text{ учлик чап бўлса, } -V, \end{cases}$$

бунда V $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$, $\vec{d}_3$ векторларга ясалган параллелепипеднинг ҳажми (17.2 пунктга қаранг).

Шундай қилиб, учинчи тартибли ихтиёрий детерминантни ишорасигача аниқликда компонентлари детерминантнинг сатрларини ташкил қилувчи векторларга ясалган параллелепипеднинг ҳажми сифатида қараш мумкин.

17.5. Қўш вектор кўпайтма. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ вектор *қўш вектор кўпайтма* деб аталади, бунда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — ихтиёрий векторлар. Қуйидаги теорема қўш вектор кўпайтмани топишнинг энг содда қоидасини беради.

1-теорема. *Ихтиёрий учта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор учун ушбу формула ўринли:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\,\vec{c}. \tag{17.4}$$

Исбот. Фазода ихтиёрий Декарт координаталари системасини оламиз. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — ихтиёрий векторлар бўлсин:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$$

$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}.$$

У ҳолда:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Шунинг учун

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = [(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 -$$

$$- a_3b_3c_1)\vec{i} + (a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2)\vec{j} + (a_1b_3c_1 -$$

$$- a_1b_1c_3 + a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3)\,\vec{k}] = \{b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) -$$

$$- c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\}\vec{i} + \{b_2\,(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2\,(a_1b_1 +$$

$$+a_2b_2+a_3b_3)\}\vec{j}+\{b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_3(a_1b_1+a_2b_2+$$
$$+a_3b_3)\}\vec{k}=(\vec{a},\ \vec{c})\ \vec{b}-(\vec{a},\ \vec{b})\,\vec{c}.$$

Шу билан теорема исботланди.

2-теорема. *Ихтиёрий учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор учун ушбу айният ўринли:*

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}. \qquad (17.5)$$

Исбот. 1-теоремага кўра:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a},\ \vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a},\ \vec{b})\,\vec{c},$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{b},\ \vec{a})\,\vec{c}-(\vec{b},\ \vec{c})\,\vec{a},$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c},\ \vec{b})\,\vec{a}-(\vec{c},\ \vec{a})\vec{b}.$$

Бу тенгликларни қўшиб ва скаляр кўпайтманинг симметриклигидан фойдаланиб, (17.5) айниятга келамиз.

18-§. Текисликда тўғри чизиқ

Бу параграф табиий равишда 7-§ нинг давомидир. 7-§ да тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси чиқарилган эди ва биринчи тартибли чизиқлар фақатгина тўғри чизиқлар бўлиши ҳақидаги асосий теорема исботланган эди. Қуйида тўғри чизиқнинг турли геометрик характеристикаларига боғлиқ равишда тўғри чизиқ тенгламасининг махсус шакллари қаралади. Қуйида бериладиган муҳокамаларда векторларнинг скаляр кўпайтмасидан кенг фойдаланилади.

18.1. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Агар $\vec{m}\neq\vec{0}$ вектор l тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{m}$ *векторни* l *тўғри чизиққа нисбатан нормал вектор* ёки қисқача l *га нормал* дейилади.

Равшанки, тўғри чизиққа нормалнинг берилиши тўғри чизиқнинг йўналишини аниқлайди, яъни орасида изланаётган тўғри чизиқ бўлган параллел тўғри чизиқлар дастасини кўрсатади. Шу сабабли, агар l тўғри чизиқнинг бирор m нормали ва бирор $M_0\in l$ нуқтаси маълум бўлса, у ҳолда текисликда l тўғри чизиқ бир қийматли аниқланади. Текисликда Декарт координаталар системасини тайинлаймиз, $\{A, B\}$— нормалнинг шу системадаги компонентлари, (x_0, y_0) эса M_0 нуқтанинг шу системадаги координаталари бўлсин.

$M(x, y)$ — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқта l тўғри чизиққа тегишли бўлиши учун $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\vec{m}$ векторга перпендикуляр бўлиши, бошқача айтганда $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) = 0$ бўлиши зарур ва етарли.

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} \text{ бўлгани учун}$$

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

ва биз l тўғри чизиқдаги ихтиёрий M нуқтасининг координаталари

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (18.1)$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрамиз.

(18.1) биринчи даражали тенглама ва шартга кўра $A^2 + B^2 \neq 0$, шунинг учун 7.2-пунктга биноан (18.1) тенглама l тўғри чизиқ билан устма-уст тушиши зарур бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасидир. Одатда (18.1) тенгламани *берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, агар l тўғри чизиқ $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ тенгламага эга бўлса, у ҳолда, юқорида кўрсатилганидек, $\vec{m} = A\vec{i} + B\vec{j}$ вектор l га нормал бўлади.

18.2 Тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан жойлашуви. Агар l тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтса, (18.1) дан у

$$Ax + By = 0 \qquad (18.2)$$

тенгламага эга экани келиб чиқади.

Шу сабабли тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтиши учун $C = 0$ шарт бажарилиши зарур ва етарли.

Сўнгра, агар l тўғри чизиқ x лар ўқига параллел бўлса, у ҳолда унинг исталган $\vec{m}$ нормали y лар ўқига параллел бўлади, яъни: $\vec{m} = B\vec{j}$. Шундай қилиб, x лар ўқига параллел тўғри чизиқлар

$$By + C = 0, \qquad B \neq 0 \qquad (18.3)$$

тенгламага эга. Шунга ўхшаш, y лар ўқига параллел тўғри чизиқлар

$$Ax + C = 0, \qquad A \neq 0 \qquad (18.4)$$

тенгламаларга эга.

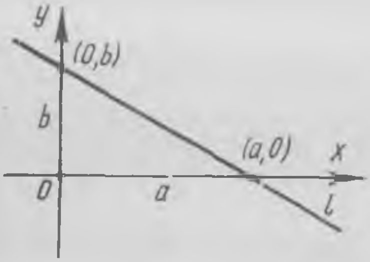
Энди x лар ва y лар ўқларининг иккаласини кесиб ўтувчи тўғри чизиқларни қараймиз.

(18.3) ва (18.4) дан айтилган тўғри чизиқлар

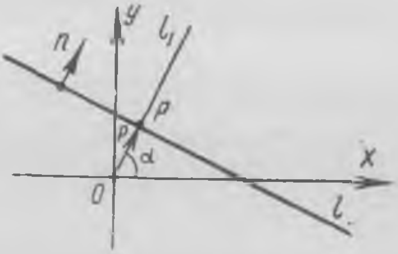
$$Ax + By + C = 0 \qquad (18.5)$$

кўринишидаги тенгламаларга эга экани келиб чиқади, бунда $A \neq 0$, $B \neq 0$. Агар бунинг устига координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқлар билан чекланадиган бўлсак, у ҳолда C ҳам нолга тенг бўлмайди. Бундай тўғри чизиқлар учун (18.5) тенгламани

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \qquad (18.6)$$



57- расм.



58- расм.

кўринишда ёзиш мумкин. $a = -\frac{c}{A}$, $b = -\frac{c}{B}$ деб оламиз. У ҳолда (18.6) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{18.7}$$

a ва b сонлар содда геометрик маънога эга: a сон (18.5) тўғри чизиқнинг x лар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси, b эса шу тўғри чизиқнинг y лар ўқи билан кесишиш нуқтасининг ординатаси (57-расм). (18.7) ни одатда *тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси* дейилади. Шуни эслатиб ўтамизки, тўғри чизиқнинг кесмаларга нисбатан тенгламасидан бу тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтмай, координаталар ўқларининг иккаласини кесиб ўтган ҳолдагина фойдаланиш мумкин.

18 3. **Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси.** Координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқлар учун кўпинча (18.5) тенгламанинг махсус формасидан фойдаланилади, бу форма бундай тўғри чизиқларга нисбатан нормални бундай танлаш билан боғлиқ, l — координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқ бўлсин. Агар $|\vec{n}| = 1$ бўлса, ва $\vec{n}$ нинг боши l тўғри чизиқнинг нуқтаси ва $\vec{n}$ нормаль чегараси l дан иборат ярим текисликнинг координаталар бошини ўз ичига олмайдиган қисмида ётса, n нормаль *ташқи бирлик нормаль* дейилади (58-расм). l_1 — координаталар бошидан ўтувчи ва l га перпендикуляр тўғри чизиқ бўлсин. l ва l_1 ларнинг кесишиш нуқтасини P билан белгилаймиз. У ҳолда $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{OP}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган бўлади. $\overrightarrow{OP}$ вектор билан x лар ўқи орасидаги бурчакни α (58-расм) билан белгилаймиз, бу бурчак x лар ўқидан соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда ҳисобланади, p билан эса координаталар бошидан l тўғри чизиққача бўлган масофани белгилаймиз. У ҳолда $p = |\overrightarrow{OP}| > 0$ ва

$$\vec{n} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}. \tag{18.9}$$

l га нормаль сифатида ташқи бирлик нормаль $\bar{n}$ ни олиб, (18.5) ни l учун ёзамиз. У ҳолда (18.5) ушбу кўринишни олади:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + C \neq 0.$$

Аммо $C = -Ax_0 - By_0$, бунда (x_0, y_0) — l тўғри чизиқнинг бирор нуқтаси. (x_0, y_0) нуқта P нуқта билан устма-уст тушади деб ҳисоблаймиз. У ҳолда:

$$C = -(Ax_0 + By_0) = -(\vec{n}, \overrightarrow{OP}) = -|\vec{n}|\,|\overrightarrow{OP}| \cos \angle \vec{n}, \overrightarrow{OP}.$$

$|\vec{n}| = 1$ ҳамда $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{OP}$ векторлар бир хил йўналганлиги учун:

$$C = -|\overrightarrow{OP}| = -p.$$

Шундай қилиб, (18.9) ушбу кўринишни олади:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \tag{18.10}$$

(18.10) тенгламани одатда тўғри чизиқнинг *нормал тенгламаси* дейилади. Равшанки, тўғри чизиқнинг (18.5) тенгламаси фақат

$$A^2 + B^2 = 1 \text{ ва } C < 0 \tag{18.11}$$

бўлгандагина нормал тенглама бўлади.

Бундан l тўғри чизиқнинг

$$Ax + By + C = 0 \tag{18.12}$$

умумий тенгламасидан l нинг (18.10) нормал тенгламасига ўтиш (18.12) тенглама коэффициентларини бирор $\mu \neq 0$ кўпайтувчига кўпайтириш билан амалга оширилади, одатда бу кўпайтувчини нормалловчи кўпайтувчи дейилади.

Агар (18.12) l нинг нормал тенгламаси бўлса, у ҳолда:

$$\mu A = \cos \alpha, \ \mu B = \sin \alpha, \ \mu C = -p. \tag{18.13}$$

(18.13) дан нормаловчи кўпайтувчи μ ушбу

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{18.14}$$

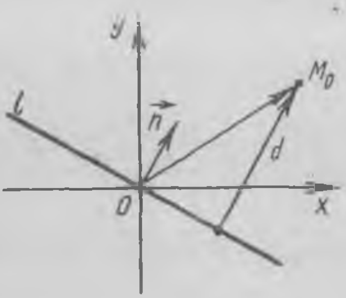
формула бўйича топилиши келиб чиқади, бунда (18.14) нинг ўнг томонидаги ишора C нинг ишорасига тескари қилиб танланади.

$\vec{m} = A\vec{i} + B\vec{j}$ вектор l тўғри чизиққа нормаль бўлса, у ҳолда

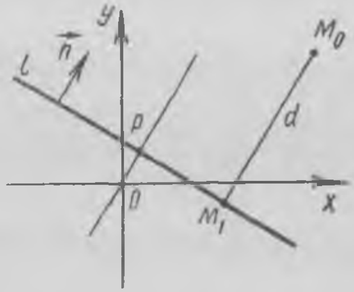
$$\vec{n} = \mu \vec{m}$$

тенгликдан (18.12) тенгламанинг коэффициентларини нормалловчи кўпайтувчи μ га кўпайтириш l нинг шундай тенгламасига олиб келадики, унинг коэффициентлари тўла аниқланган, чунончи l тўғри чизиққа $\vec{n}$ ташқи бирлик нормалнинг компонентларидан иборат.

18.4. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. M_0 ихтиёрий нуқта ва l текисликдаги бирор тўғри чизиқ бўлсин. M_0 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофа учун формула чиқарамиз. Текисликда бирор x, y Декарт координаталар системаси тайинланган бўлсин,



59- расм.



60-расм.

бу системада M_0 нуқта (x_0, y_0) координаталарга, l тўғри чизиқ эса $Ax + By + C = 0$ тенгламага эга бўлсин.

M_0 нуқта ва l тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан мумкин бўлган уч хил жойлашишини бир-биридан фарқ қиламиз:

а) l тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади. Бу ҳолда l тўғри чизиқ $Ax + By = 0$ тенгламага эга бўлади. Агар d M_0 дан l гача бўлган масофа бўлса, равшанки (59- расм):

$$d = \left| |\overrightarrow{OM_0}| \cos \angle \overrightarrow{OM_0}, \vec{n} \right|,$$

бунда $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ вектор l тўғри чизиққа нормаль. Бундан

$$d = \frac{\left| |\overrightarrow{OM_0}| \cdot |\vec{n}| \cos\angle \overrightarrow{OM_0}, \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\overrightarrow{OM_0}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (18.15)$$

б) l тўғри чизиқ O координаталар бошидан ўтмайди ва O нуқта билан M_0 нуқта l тўғри чизиқнинг турли томонида ётади. $\vec{n}$ вектор l га ташқи бирлик нормаль бўлсин ва $M(x_1, y_1)$ нуқта M_0 нуқтанинг l тўғри чизиқдаги проекцияси бўлсин (60- расм). У ҳолда:

$$d = Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_0} - Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_1} = (\overrightarrow{OM_0}, \vec{n}) - (\overrightarrow{OM_1}, \vec{n}). \qquad (18.16)$$

Ушбу

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_0} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \\ \overrightarrow{OM_1} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \\ \vec{n} &= (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j} \end{aligned} \qquad (18.17)$$

тенгликлар ўринли бўлгани учун (18.17) ва (18.18) муносабатлардан ушбуга эга бўламиз:

$$d = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha). \qquad (18.18)$$

$M_1 \in l$ бўлгани учун M_1 нинг координаталари l нинг нормал тенгламасини қаноатлантиради: $x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p = 0$ ва демак, (18.18) дан ушбуга эга бўламиз:

$$d = x\cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

Аммо 18.3- пунктдаги формулалардан ушбуларга эгамиз:

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \sin\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad -p = \pm \frac{C}{\sqrt{B^2+A^2}}.$$

Шунинг учун

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

в) l тўғри чизиқ O координаталар бошидан ўтмайди ҳамда O ва M_0 нуқталар l нинг бир томонида ётади. Бу ҳолни қараб чиқиш б) ҳолни қараб чиққанларимизга ўхшайди, натижада

$$d = p - x_0 \cos\alpha = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

формулага олиб келади.

Шундай қилиб, турли ҳолларни қараб чиқиб,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (18.19)$$

формуланинг ўринли эканини исботладик.

19-§. Фазода текислик

19.1. Берилган нуқтадан берилган йўналишда ўтувчи текислик тенгламаси. Текисликка перпендикуляр бўлган $\vec{m} \neq \vec{0}$ векторни P текисликнинг *нормали* деймиз. Равшанки, текислик нормалининг берилиши изланаётган текисликни ўзига бўлган параллел текисликлар дастасини беради. Шунинг учун, агар P текисликнинг бирор $\vec{m}$ нормали ва бирор $M \in P$ нуқтаси маълум бўлса, P текислик фазода бир қийматли аниқланган бўлади.

Фазода Декарт координаталари системасини тайинлаймиз, $\{A, B, C\}$ $\vec{m}$ нормалнинг шу координаталар системасидаги компонентлари, (x_0, y_0, z_0) эса P текислик M_0 нуқтасининг шу системадаги координаталари бўлсин. $M(x, y, z)$ — фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $M \in P$ бўлиши учун $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\vec{m}$ векторга перпендикуляр бўлиши, яъни $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) = 0$ бўлиши зарур ва етарли.

$\overrightarrow{M_0M}$ вектор $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ компонентларга эга бўлгани учун

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Шунинг учун $By + Cz + D = 0$ текислик x лар ўқига параллел. Шунга ўхшаш, $Ax + By + D = 0$ текислик z лар ўқига, $Ax + Cz + D = 0$ текислик эса y лар ўқига параллел.

Ниҳоят, агар $\vec{m} = \{A, B, C\}$ векторнинг иккита ташкил этувчиси нолга тенг бўлса, у ҳолда бу векторнинг қайси ўқдаги проекцияси нолдан фарқли бўлса, у шу ўққа параллел бўлади. Шундай қилиб, $Ax + D = 0$, $By + D = 0$, $Cz + D = 0$ тенгламалар билан берилган текисликлар мос равишда x лар, y лар ва z лар ўқига параллел.

19.4. Текисликнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа. Координаталар бошидан ўтмайдиган [illegible]

[illegible]

дейилади. Агар $\vec{n}$ вектор x, y, z координаталар ўқлари билан мос равишда α, β, γ бурчаклар ташкил қилса, у ҳолда $\vec{n} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}$ бўлади. Шунинг учун P текисликнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + D = 0. \qquad (19.8)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ — координаталар бошининг P текисликдаги проекцияси бўлсин. У ҳолда $p = |\overrightarrow{OM_0}| > 0$ координаталар бошидан P текисликкача бўлган масофадир. Ташқи бирлик нормаль $\vec{n}$ ни танлаш ҳисобига $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{OM_0}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган бўлади. Шунинг учун

$$(\vec{n}, \overrightarrow{OM_0}) = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OM_0}| \cos 0 = |\overrightarrow{OM_0}| = p. \qquad (19.9)$$

Иккинчи томондан,

$$(\vec{n}, \overrightarrow{OM_0}) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma. \qquad (19.10)$$

(19.9) ва (19.10) дан

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = p \qquad (19.11)$$

экани келиб чиқади. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ бўлгани учун (19.8) дан ушбуга эгамиз:

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma + D = 0. \qquad (19.12)$$

(19.11) ва (19.12) дан $D = -p$ эканини топамиз, демак, P текислик ушбу

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (19.13)$$

тенгламага эга.

(19.13) тенглама *текисликнинг нормал тенгламаси* дейилади.

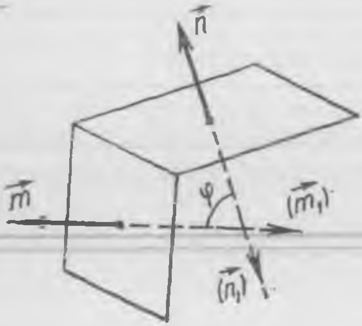
Текисликнинг умумий тенгламасидан нормал тенгламасига ўтиш, худди (18.12) тўғри чизиқ ҳолидагидек, (19.7) тенгламанинг иккала қисмини нормалловчи μ кўпайтувчига кўпайтириш билан амалга оширилади. Текислик $Ax + By + Cz + D = 0$ тенглама билан берилган ҳолда нормалловчи кўпайтувчи

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (19.14)$$

формула билан аниқланади, бунда ишора, агар $D \neq 0$ бўлса, D нинг ишорасига тескари қилиб танланади.

(19.14) ва (19.15) формулаларнинг исботи худди 18.3 ва 18.4-пунктларда текисликдаги тўғри чизиқ учун бажарилганидек амалга оширилади. Шу сабабли исботларни ўқувчига фойдали машқ сифатида ҳавола қиламиз.

19.5. Икки текислик орасидаги бурчак. Ҳар қайси текисликнинг қарама-қарши йўналган нормаллари мавжуд бўлгани учун берилган икки P_1 ва P_2 текисликнинг нормаллари орасидаги бурчак бир қийматли аниқланмайди: бу бурчак ё φ га, ёки $\pi - \varphi$ га тенг бўлиши мумкин (61-расм). Шуни таъкидлаш муҳимки, иккала φ ва $\pi - \varphi$ сон ҳам 0 дан π гача оралиқда ётади. φ ва $\pi - \varphi$ *бурчаклардан энг кичигини* P_1 *ва* P_2 *текисликлар орасидаги* ψ *бурчак деймиз.* Шунинг учун, агар $\vec{m}_1$ ва $\vec{m}_2$ — мос равишда P_1 ва P_2 текисликларнинг нормаллари бўлса, у ҳолда:



61- расм.

$$\cos \psi = \frac{|(\vec{m}_1, \vec{m}_2)|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|} \qquad (19.16)$$

Агар P_1 ва P_2 текисликлар

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда:

$$\cos \psi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Агар P_1 ва P_2 текисликлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\cos\varphi=0$ ҳамда P_1 ва P_2 нинг перпендикулярлик шарти ушбу кўринишни олади:

$$A_1B_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{19.17}$$

Агар P_1 ва P_2 текисликлар параллел бўлса, у ҳолда $\vec{m}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{m}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ векторлар коллинеар ва *параллеллик шарти* ушбу кўринишни олади:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{19.18}$$

A_2, B_2, C_2 сонлардан бирортаси нолга тенг бўлган ҳолда A_1, B_1, C_1 сонлардан тегишлиси ҳам нолга тенг бўлади.

20-§. Фазода тўғри чизиқ

20.1. Тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси. l—ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг фазодаги ҳолати бирор $M_0 \in l$ нуқта ва l да ётувчи $\vec{s}$ вектор билан тўла аниқланади.

Фазода координаталар боши O нуқтада бўлган Декарт координаталари системасини тайинлаймиз. M_0 ва M нуқталарнинг радиус векторларини мос равишда $\vec{r}_0$ ва $\vec{r}$ билан белгилаймиз. (M нуқта l га тегишли ихтиёрий нуқта.) У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ вектор $\vec{s}$ векторга коллинеар бўлади. Шунинг учун: $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}$, бунда t — бирор ҳақиқий сон.

t ҳақиқий сонлар тўпламидаги ҳамма қийматларни қабул қилганда $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг охири бўлган M нуқта l тўғри чизиқдаги ҳамма вазиятларни қабул қилади. Демак, l тўғри чизиқ ўзгарувчи нуқталарининг $\vec{r}$ радиус-вектори учун ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s},$$

буни одатда *тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси* дейилади.

20.2. Тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламалари l тўғри чизиқ ўзининг

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s} \tag{20.1}$$

вектор тенгламаси билан берилган бўлсин. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта $\vec{r}$ радиус-векторнинг охири, $M(x, y, z)$ эса l тўғри чизиқ ўзгарувчи радиус-векторининг охири бўлсин (62-расмга қаранг). $\vec{s}$ векторнинг x, y, z координата ўқларига проекцияларини мос равишда m, n, p билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k},$$

Агар P_1 ва P_2 текисликлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\cos\varphi=0$ ҳамда P_1 ва P_2 нинг перпендикулярлик шарти ушбу кўринишни олади:

$$A_1B_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{19.17}$$

Агар P_1 ва P_2 текисликлар параллел бўлса, у ҳолда $\vec{m}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{m}_2=\{A_2, B_2, C_2\}$ векторлар коллинеар ва *параллеллик шарти* ушбу кўринишни олади:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{19.18}$$

A_2, B_2, C_2 сонлардан бирортаси нолга тенг бўлган ҳолда A_1, B_1, C_1 сонлардан тегишлиси ҳам нолга тенг бўлади.

20-§. Фазода тўғри чизиқ

20.1. Тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси. l—ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг фазодаги ҳолати бирор $M_0 \in l$ нуқта ва l да ётувчи $\vec{s}$ вектор билан тўла аниқланади.

Фазода координаталар боши O нуқтада бўлган Декарт координаталари системасини тайинлаймиз. M_0 ва M нуқталарнинг радиус векторларини мос равишда r_0 ва r билан белгилаймиз. (M нуқта l га тегишли ихтиёрий нуқта.) У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ вектор $\vec{s}$ векторга коллинеар бўлади. Шунинг учун: $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}$, бунда t — бирор ҳақиқий сон.

t ҳақиқий сонлар тўпламидаги ҳамма қийматларни қабул қилганда $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг охири бўлган M нуқта l тўғри чизиқдаги ҳамма вазиятларни қабул қилади. Демак, l тўғри чизиқ ўзгарувчи нуқталарининг $\vec{r}$ радиус-вектори учун ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s},$$

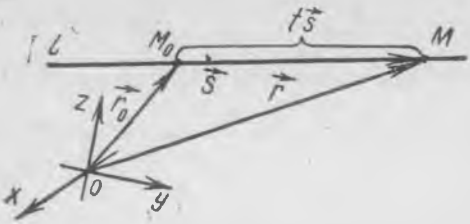
буни одатда *тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси* дейилади.

20.2. Тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламалари l тўғри чизиқ ўзининг

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s} \tag{20.1}$$

вектор тенгламаси билан берилган бўлсин. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта $\vec{r}$ радиус-векторнинг охири, $M(x, y, z)$ эса l тўғри чизиқ ўзгарувчи радиус-векторининг охири бўлсин (62-расмга қаранг). $\vec{s}$ векторнинг x, y, z координата ўқларига проекцияларини мос равишда m, n, p билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k},$$



62- расм.

$$r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

Шунинг учун (20.1) ни бундай кўринишда ёзиш мумкин:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + mt)\vec{i} + (y_0 + nt)\vec{j} + (z_0 + pt)\vec{k}.$$

Бундан l тўғри чизиқ ўзгарувчи нуқтасининг координаталари учун учта тенгламага эга бўламиз:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \qquad (20.2)$$

(20.2) тенгламаларни *тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари* дейилади. M нуқтанинг l тўғри чизиқдаги вазияти $t \in (-\infty, +\infty)$ параметр билан характерланади. Шунинг учун ҳам (20.2) тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.

Кўпинча тўғри чизиқни таркибида параметр қатнашмаган тенгламалар системаси билан бериш фойдали бўлади. (20.2) системадан параметрни йўқотишни бундай амалга ошириш мумкин. Системанинг ҳар бир тенгламасидан t ни топамиз:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n},$$

$$t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Бундан, ҳар қандай $M(x, y, z) \in l$ нуқта учун

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (20.3)$$

муносабатлар ўринли эканини топамиз.

(20.3) тенгламалар системаси *тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари* дейилади. (20.3) тенгламалар коэффициентларининг геометрик маъноси бундай: x_0, y_0, z_0 — тўғри чизиқ бирор нуқтасининг координаталари; m, n, p — тўғри чизиқда ётувчи векторнинг координата ўқларидаги проекциялари.

Баъзи хусусий ҳолларни таъкидлаб ўтамиз.

1. Агар l тўғри чизиқ координата ўқларидан бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда шу l тўғри чизиқда ётувчи исталган векторнинг бу ўқдаги проекцияси нолга тенг. Масалан, агар l тўғри чизиқ x лар ўқига перпендикуляр бўлса, $m = 0$ бўлади. Бу ҳолда l тўғри чизиқнинг тенгламаси бундай ёзилади:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \end{cases} \qquad (20.4)$$

Равшанки, тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача оралиқда ётади.

Тўғри чизиқлар каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Бу тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак $\vec{s}_1=\{m_1,\ n_1,\ p_1\}$ ва $\vec{s}_2=\{m_2,\ n_2,\ p_2\}$ векторлар орасидаги бурчакка тенг ёки бу бурчакни π га тўлдиради. Шунинг учун:

$$\cos\varphi=\frac{|(\vec{s}_1,\ \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса, $\vec{s}_1$ ва $\vec{s}_1$ векторлар коллинеар. Бундан икки *тўғри чизиқнинг параллеллик шарти* ушбу кўринишга эга экани келиб чиқади:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Сўнгра, агар икки тўғри чизиқ перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\cos\varphi=0$ бўлади. Шунинг учун *икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти* ушбу кўринишга эга бўлади:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

муносабатлар текисликларни параллел бўлишининг зарур ва етарли шарти бўлгани сабабли (21.1) тенгламалар системаси фазода тўғри чизиқни ифодалаши учун тегишли ўзгарувчи координаталар олдидаги коэффициентлар пропорционал бўлмаслиги керак.

Агар l (21.1) тенгламалар билан бериладиган тўғри чизиқ бўлса, у ҳолда l да ётувчи ҳар қандай вектор P_1 нинг нормали $\vec{m_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ векторга ва P_2 нинг нормали $\vec{m_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ векторга перпендикуляр бўлади. Шунинг учун $\vec{s} = \vec{m_1} \times \vec{m_2}$ вектор l тўғри чизиқда ётади. Бундан l нинг каноник тенгламалари ушбу кўринишга эга экани келиб чиқади:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (21.2)$$

Энди l тўғри чизиқ ўтадиган M_0 (x_0, y_0, z_0) нуқтанинг координаталарини топамиз. (21.2) тенгламалардаги ўзгарувчи координаталар олдидаги коэффициентлар пропорционал эмаслиги туфайли

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли. Аниқлик учун

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

деб ҳисоблаймиз.

(21.2) системани ушбу кўринишда ёзами:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = D_1 - C_1z, \\ A_2x + B_2y = D_2 - C_2z. \end{cases} \qquad (21.3)$$

Бунда z ни ихтиёрий z_0 сонга тенг деб (масалан, нолга тенг деб), (21.3) системадан x_0 ва y_0 ни топамиз. Сонларнинг (x_0, y_0, z_0) учлиги l да ётувчи M_0 нуқтани аниқлайди. x_0, y_0, z_0 ни (21.2) га қўйиб, l нинг каноник тенгламаларини топамиз.

21.2. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка айтилади. Бу бурчак 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача оралиқда ётади. Бизга

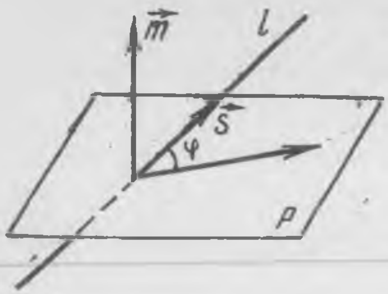
$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

тўғри чизиқ ва

$$P: Ax + By + Cz + D = 0$$

текислик берилган бўлсин.

φ l тўғри чизиқ билан P текислик орасидаги бурчак бўлсин, у ҳолда P текисликнинг $\vec{m} = \{A, B, C\}$ нормали билан l да ётувчи $\vec{s} =$



63- расм.

$=\{m, n, p\}$ вектор орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}\pm\varphi$ га тенг (63- расмга қаранг). $\sin\varphi\geqslant 0$ бўлгани учун

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\varphi\right)\right|=\frac{|(\vec{m}, \vec{s})|}{|\vec{m}|\ |\vec{s}|}=$$

$$=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \quad (21.4)$$

Агар l тўғри чизиқ P текисликка параллел бўлса, у ҳолда $\sin\varphi=0$, ва демак,

$$Am+Bn+Cp=0. \quad (21.5)$$

Равшанки, P текислик ва l тўғри чизиқ учун (21.5) шарт бажарилса, P текислик l тўғри чизиққа параллел бўлади. Демак, (21.5) шарт *тўғри чизиқ билан текисликнинг параллел бўлиш шартидир.* Агар l тўғри чизиқ P текисликка перпендикуляр бўлса, $\vec{m}$ ва $\vec{s}$ векторлар коллинеар бўлади. Тескари тасдиқ ҳам тўғри экани равшан. Шунинг учун *l тўғри чизиқ билан P текисликнинг перпендикуляр бўлиш шарти ушбу* кўринишга эга:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \quad (21.6)$$

Таъкидлаб ўтилганидек, m, n, p сонлардан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда (21.6) даги A, B, C сонлардан тегишлиси ҳам нолга тенг бўлади.

21.3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиши. Ушбу

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad (21.7)$$

тўғри чизиқ билан

$$P: Ax+By+Cz+D=0 \quad (21.8)$$

текисликнинг кесишиш нуқтасини топамиз.

Бу масалани энг осони бундай ечиш керак. l тўғри чизиқнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз:

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt$$

ва l билан P нинг кесишиш нуқтасига тўғри келадиган t нинг қийматини топамиз. Кесишиш нуқтасининг

$$x^*=x_0+mt^*,\ y^*=y_0+nt^*,\ z^*=z_0+pt^* \quad (21.9)$$

координаталари (21.8) тенгламани қаноатлантириши сабабли:

$$A(x_0+mt^*)+B(y_0+nt^*)+C(z_0+pt^*)+D=0.$$

Агар $Am+Bn+Cp\neq0$ (яъни l тўғри чизиқ P текисликка параллел эмас) бўлса, у ҳолда:

$$t^*=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (21.10)$$

t^* нинг (21.10) дан қийматларини (21.9) формулага қўйсак, l билан P нинг кесишиш нуқтасининг x^*, y^*, z^* координаталарини топамиз.

III боб. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

22- §. Иккинчи тартибли сирт тушунчаси. Цилиндрик сиртлар ва айланиш сиртлари

22.1. Иккинчи тартибли сиртлар. *Фазонинг бирор Декарт координаталари системасида A, B, C, D, E, F коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли бўлган*

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Kx+Ly+Mz+N=0 \qquad (22.1)$$

тенглама билан бериладиган нуқталар тўплами иккинчи тартибли сирт дейилади.

Бу бобда асосий эътибор иккинчи тартибли айнимаган сиртлар: конуслар, цилиндрлар, эллипсоидлар, гиперболоидлар ва параболоидларга қаратилади. Иккинчи тартибли сиртлар жумласига бир қатор энг содда геометрик образлар: бўш тўплам, нуқта, текислик, иккита параллел ёки кесишувчи текисликлар ҳам киради. Бундай сиртлар айниган сиртлар дейилади (қуйида бундай сиртларни қарамаймиз).

Юқорида санаб ўтилган сиртлар билан иккинчи тартибли сиртларнинг ҳаммаси тугайди. Буни исботлаш мумкин.

22.2. Цилиндрик сиртлар. L — фазодаги бирор чизиқ бўлсин. L нинг ҳамма нуқталаридан берилган l тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (64- расм). Бу параллел тўғри чизиқларнинг бирлашмасидан иборат тўплам *цилиндрик сирт* дейилади. L чизиқ *цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси* дейилади, l тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар цилиндрик сиртнинг *ясовчилари* дейилади. Бундан кейин бирор Декарт координаталари системаси тайинланган деб ҳисоблаймиз.

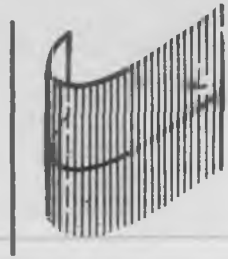
Ясовчилари z лар ўқига параллел, йўналтирувчиси L эса xOy текисликда ётган S цилиндрик сиртни қараймиз (65- расм).

Равшанки, йўналтирувчи L

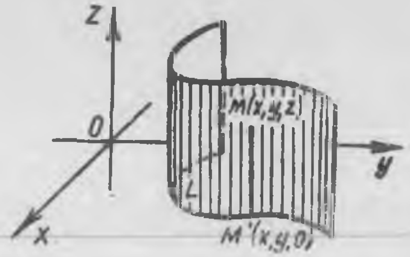
$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases} \qquad (22.2)$$

тенгламалар системаси билан берилади.

Энди S сиртнинг тенгламаси $F(x,y)=0$ дан иборат эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $M(x,y,z)$ нуқта S сиртнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда M нуқтанинг xOy текисликдаги проекцияси бўл-



64- расм.



65- расм.

миш M' нуқта x, y, 0 координаталарга эга бўлади ва L йўналтирувчида ётади. Шу сабабли, M нуқтанинг координаталари $F(x, y)=0$ тенгламани қаноатлантиради. Сўнгра, агар $N(x', y', z') \in S$ бўлса, у ҳолда бу нуқтанинг текисликдаги $N'(x', y', 0)$ проекцияси L га тегишли бўлмайди, ва демак, $F(x', y') \neq 0$.

Шунга ўхшаш, ясовчилари x лар ўқига ёки y лар ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртлар мос равишда $G(y,z) = 0$ ёки $H(x,z)=0$ тенгламалар билан берилиши аниқланади.

Охирида ясовчилари z лар ўқига параллел бўлган энг муҳим цилиндрик сиртларни қайд қилиб ўтамиз:

а) $x^2 + y^2 = a^2$ — тўғри доиравий цилиндр,

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптик цилиндр,

в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболик цилиндр,

г) $y^2 = 2px$ — параболик цилиндр.

Қайд қилинган сиртлар 66- расмда тасвирланган.

22.3. Айланиш сиртлари. Бирор текис L чизиқнинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган нуқталар тўплами *айланиш сирти* дейилади. L чизиқ айланиш сиртининг *меридиани*, l ўқ эса унинг *айланиш ўқи* дейилади.

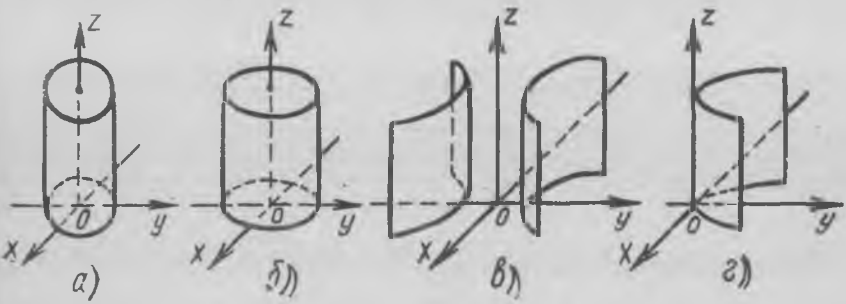
Шуни таъкидлаб ўтамизки, меридианнинг айланиш ўқи атрофида айланишида унинг ҳар бир нуқтаси айлана чизади.

Қуйида айланиш ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушадиган айланиш сиртларининг тенгламалари қаралади.

Ишни айланиш ўқи z лар ўқидан иборат бўлган, L меридиан эса Oyz текисликда ётиб,

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \tag{22.3}$$

тенглама билан берилган ҳолни қарашдан бошлаймиз. S—L нинг z лар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт ва $M(x, y, z) \in S$ бўлсин. M нуқта орқали z лар ўқига перпендикуляр қилиб ўтказилган Q текислик S сиртни маркази z лар ўқида ётувчи Q_1 нуқ-



66- расм.

тада бўлган K айлана бўйича кесади. Шуни қайд қилиб ўтамизки, K айлананинг барча нуқталарининг аппликаталари ва O_1 нуқтанинг аппликатаси M нуқтанинг аппликатаси бўлган z сонга тенг.

K ва L чизиқларни кесишиш нуқтасини P билан белгилаймиз (67- расм). P нуқта $(0, y_1, z)$ координаталарга, O_1 нуқта эса $(0, 0, z)$ координаталарга эга. K айлананинг r радиуси O_1P ва O_1M кесмаларнинг узунликларига тенг. Шунинг учун

$$r = |O_1P| = |y_1|.$$

$$|O_1M| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Бундан

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ёки

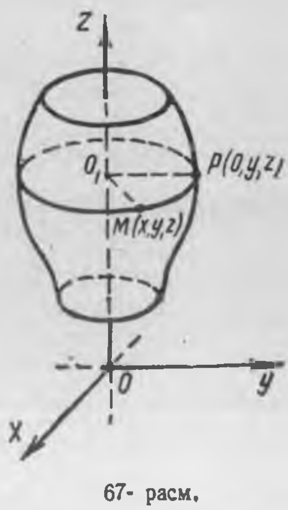
$$y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$P(0, y_1, z)$ нуқта L меридианда ётгани учун $F(y_1, z) = 0$. Бундан

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \qquad (22.4)$$

Шундай қилиб, айланиш сирти S га тегишли ихтиёрий M нуқтанинг координаталари (22.4) тенгламани қаноатлантиради.

Цилиндрик сирт учун исботланганидек (22.2 пунктга қаранг), S да ётмайдиган нуқталар (22.4) тенгламани қаноатлантирмаслигини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, (22.4) тенглама меридианларидан бири Oyz текисликда ётиб, (22.3) тенгламалар билан аниқланувчи, айланиш ўқи эса z лар ўқидан иборат бўлган S айланиш сиртини аниқлайди.



67- расм.

Шунга ўхшаш, агар шу меридианнинг

ўзини y лар ўқи атрофида айлантирилса, ҳосил бўлган айланиш сирти

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0 \tag{22.5}$$

тенгламага эга бўлади.

Агар L меридиан xy текисликда ётса ва

$$\begin{cases} \Phi(x,y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда L ни x лар ўқи ёки y лар ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг тенгламаси мос равишда

$$\Phi(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \tag{22.6}$$

ёки

$$\Phi(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, \ y) = 0 \tag{22.7}$$

кўринишда бўлади.

23- §. Эллипсоид

Декарт координаталар системасини тегишлича танлаганда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{23.1}$$

дан иборат бўлган сирт эллипсоид дейилади, бунда a, b, c — мусбат сонлар.

Эллипсоид ҳақида умумий тасаввурга эга бўлиш учун $a = b$ бўлгандаги хусусий ҳолни қараб чиқамиз. Бу ҳолда (23.1) тенгламани

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, \ z) = \frac{1}{a^2}(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{23.2}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу тенглама қаралаётган ҳолда эллипсоид

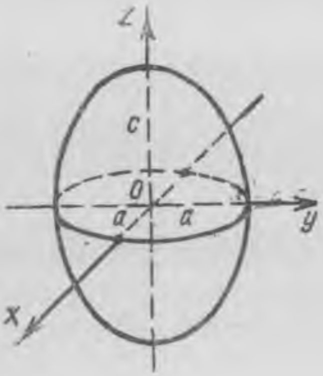
$$L: \begin{cases} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

эллипсни z лар ўқи атрофида айлантиришда ҳосил бўлишини билдиради (68- расмга қаранг).

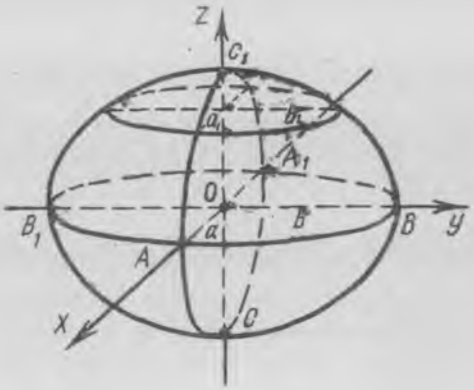
Умумий ҳолда эллипсоиднинг (23.1) формасини текшириш қулай, бунда уни координаталар текисликлари ва координаталар текисликларига параллел текисликлар билан кесиш керак.

1. Эллипсоиднинг $z = 0$ текислик билан кесишиш чизиғи ушбу тенгламалар системаси билан берилади:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$



68- расм.



69- расм.

ёки

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Бу чизиқ ярим ўқлари a ва b дан иборат бўлиб, xy ва xz текисликларига симметрик бўлган ABA_1B_1 эллипсдир (69- расм).

2. (23.1) эллипсоиднинг $y=0$ текислик билан кесими

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$$

ярим ўқлари a ва c бўлиб, xy ва yz текисликларига нисбатан симметрик бўлган ACA_1C_1 эллипсдир.

3. (23.1) эллипсоиднинг $x=0$ текислик билан кесими

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

ярим ўқлари b ва c дан иборат, xy ва xz текисликларига нисбатан симметрик бўлган BCB_1C_1 эллипсдир.

4. Эллипсоиднинг xy текислигига параллел текисликлар билан кесимларини қараймиз. Бундай текисликлар $z=h$ кўринишдаги тенгламага эга, ва, демак, бизни қизиқтираётган кесимлар ушбу тенгламалар билан берилади:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \tag{23.3}$$

Агар $|h|<c$ бўлса, у ҳолда $1-\frac{h^2}{c^2}>0$ бўлиб, кесимда ярим ўқлари $a_h=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, b_h=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ ва маркази z лар ўқидаги $(0, 0, h)$ нуқтада бўлган

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h \end{cases} \quad (23.4)$$

эллипс ҳосил бўлади (69- расм). $|h|$ c дан қанчали кам фарқ қилса, эллипснинг ярим ўқлари шунча кичик бўлади. $|h|=0$ да эллипсоиднинг кесимлари $(0,0, c)$ ва $(0,0,-c)$ нуқталардан иборат. $|h|>c$ да (23.4) тенгламалар бўш тўпламни аниқлайди, чунки $1-\frac{h^2}{c^2}<0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$. Демак, $z=c$ ва $z=-c$ текисликларнинг параллел қаватидан ташқарида эллипсоиднинг нуқталари йўқ.

Эллипсоиднинг xy ва yz координата текисликларига параллел текисликлар билан кесимлари $y=h_1$ ва $x=h_2$ $|h_1|<b$ ва $|h_2|<a$ да мос равишда эллипсларни ифодалашини юқоридагига ўхшаш исботлаш мумкин.

Сўнгра, $|h_1|=b$ ва $|h_2|=a$ да бу кесимлар мос равишда $B(0, b, 0)$, $B_1(0,-b, 0)$; $A(a, 0,0)$ ва $A_1(-a, 0, 0)$ нуқталардан иборат бўлади.

Агар $|h_1|>b$ ва $|h_2|>a$ бўлса, у ҳолда $y=h_1$, $x=h_2$ текисликлар эллипсоид билан умумий нуқтага эга бўлмайди. Шундай қилиб, эллипсоид

$$-a\leqslant x\leqslant a, \quad -b\leqslant y\leqslant b, \quad -c\leqslant z\leqslant c$$

параллелепипед ичида ётади, яъни эллипсоид фазода чегараланган тўплам бўлади. a, b, c миқдорларни эллипсоиднинг ярим ўқлари дейилади. Агар a, b, c лар жуфт-жуфти билан тенг бўлмаса, у ҳолда эллипсоид уч ўқли эллипсоид дейилади. Агар ярим ўқларнинг қандайдир иккитаси тенг бўлса, у ҳолда биз юқорида кўрганимиздек, эллипсоид учинчи ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сирти бўлади. Ниҳоят, агар $a=b=c$ бўлса, эллипсоид

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

сферадан иборат бўлади.

24- §. Гиперболоидлар

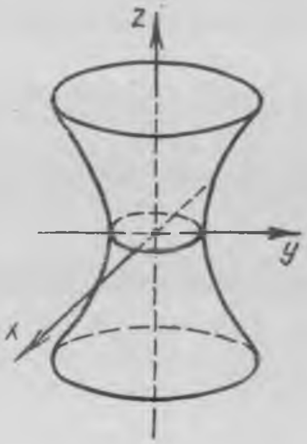
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гиперболани z лар ўқи ёки x лар ўқи атрофида мос равишда айлантириш билан бу сиртлар ҳақида аёний тасаввур олиш мумкин. Биринчи ҳолда сирт

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

тенгламага эга бўлади. Бу *бир паллали гиперболоид* дейилади (70- расм). Иккинчи ҳолда сирт

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

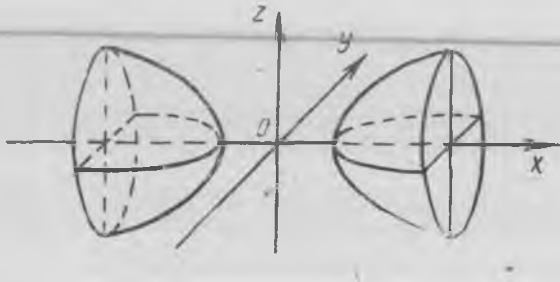
тенгламага эга бўлади. Бу сирт *икки паллали гиперболоид* дейилади (71- расм). Сиртнинг бундай аталишига унинг паллаларининг (қисмларининг) сони сабабчидир.



70- расм.

24.1. Бир паллали гиперболоид. Тегишлича танланган Декарт координаталари системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (24.1)$$



71- расм.

тенгламага эга бўлган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади, бунда a, b, c—мусбат сонлар. (24.1) гиперболоиднинг шаклини текшириш учун унинг текисликлар билан кесимларини қараймиз.

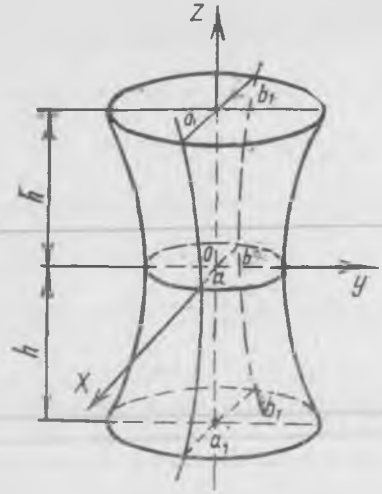
1. xy текислик билан кесим

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{cases} \qquad (24.2)$$

ёки

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases} \qquad (24.3)$$

тенгламалар системаси билан берилади ҳамда ярим ўқлари a ва b дан иборат эллипсни ифодалайди (72- расм).



72- расм.

2. xy текисликка параллел текисликлар билан кесим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h \end{cases} \qquad (24.4)$$

тенгламалар системаси билан берилади.

(24.4) чизиқ ярим ўқлари $a_h = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b_h = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, симметрия маркази z лар ўқидаги $(0, 0, h)$ нуқтада бўлган эллипсдан иборат; эллипснинг ўқлари x ва y координаталар ўқларига параллел (72- расм). $|h|$ нинг чексиз катталашиши билан бу эллипснинг a_h ва b_h ярим ўқлари ҳам чексиз катталашади. $h = 0$ кесимда энг кичик ярим ўқли эллипс ҳосил бўлади.

3. xz текислик билан кесим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \qquad (24.5)$$

гипербола бўлиб, бу гиперболанинг ҳақиқий ўқи x лар ўқида, мавҳум ўқи эса z лар ўқида ётади. Гиперболанинг учлари x лар ўқидаги $(a, 0, 0)$ ва $(-a, 0, 0)$ нуқталарда бўлиб, (24.2) нинг x лар ўқидаги учлари билан устма-уст тушади.

4. yz текислик билан кесим

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \qquad (24.6)$$

гипербола бўлиб, унинг ҳақиқий ўқи y лар ўқи билан, мавҳум ўқи эса z лар ўқи билан устма-уст тушади. Гиперболанинг учлари y лар ўқидаги $(0, b, 0)$ ва $(0, -b, 0)$ нуқталарда ётиб, (24.2) эллипснинг y лар ўқидаги учлари билан устма-уст тушади (72- расм).

Бир паллали гиперболоиднинг тенгламасидан унинг симметрия маркази координаталар бошида ва координата текисликларнинг ҳар бири унинг симметрия текисликлари эканлиги келиб чиқади. Сўнгра, юқорида кўриб чиққанларимиздан, бу гиперболоид z лар ўқи бўйлаб бу ўқни кесмаган ҳолда чексиз чўзилиб кетиши келиб чиқади.

Бир паллали гиперболоид қисмларга бўлинмайдиган сиртдан иборатдир. Шуни қайд қилиб ўтамизки, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ва $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ тенгламалар ҳам бир паллали гиперболоидларни ифодалайди.

24.2. Икки паллали гиперболоид. *Тегишли Декарт координаталар системасида*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{24.7}$$

тенгламага эга бўлган сирт икки паллали гиперболоид дейилади, бунда a, b, c — мусбат сонлар.

Бу сиртнинг турли текисликлар билан кесимларини қараймиз.

1. yz текислик билан кесим

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади. Тенгламаларнинг бу системаси ечимга эга эмас, шунинг учун yz текислик (24.7) сирт билан кесишмайди.

2. yz текисликка параллел текисликлар билан кесимлар

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1, \\ x=h \end{cases} \tag{24.8}$$

тенгламалар системаси билан берилади.

$|h|<a$ да бу система ечимга эга эмас. Демак, $-a<h<a$ да $x=h$ текислик (24.7) гиперболоид билан кесишмайди. Бошқача айтганда $x=-h$ ва $x=h$ параллел текисликларнинг қавати орасида (24.7) гиперболоиднинг нуқталари йўқ.

$|h|=a$ да (24.8) системадан кесимлар $A(a, 0, 0)$ ва $A_1(-a, 0, 0)$ нуқталардан иборат экани келиб чиқади.

Агар $|h|>a$ бўлса, у ҳолда $\frac{h^2}{a^2}-1>0$ ва (24.7) гиперболоиднинг $x=h$ текисликлар билан кесимида ярим ўқлари

$$b_h=b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}, \quad c_h=c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}$$

дан иборат, марказлари эса x лар ўқидаги $(h, 0, 0)$ нуқталардан иборат

$$\begin{cases} \frac{y}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1 \\ z=h \end{cases} \tag{24.9}$$

эллипслар ҳосил бўлади. Бу эллипслар xy ва xz текисликларга нисбатан симметрик. $|h|$ нинг чексиз ўсиши билан b_h ва c_h ярим ўқлар ҳам чексиз ўсади.

3. xy текислик билан кесим

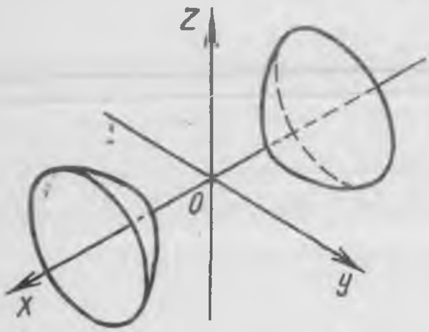
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases} \qquad (24.10)$$

тенгламалар системаси билан берилиб, ҳақиқий ўқи x лар ўқида ётувчи, учлари A $(a,\ 0,\ 0)$ ва $A_1(-a,\ 0,\ 0)$ нуқталарда бўлган гиперболани ифодалайди.

4. xz текислик билан кесим

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases} \qquad (24.11)$$

тенгламалар системаси билан берилиб, ҳақиқий ўқи x лар ўқида, учлари эса A $(a,\ 0,\ 0)$ ва $A_1(-a,\ 0,\ 0)$ нуқталарда ётувчи гиперболани тасвирлайди.



73- расм.

Юқорида ўтказилган текширишлардан шу нарса келиб чиқадики, икки паллали гиперболоид $-a< x <a$ полосадан ҳар хил томонда ётувчи алоҳида икки қисмдан иборат. Бу қисмларнинг ҳар бири x лар ўқи бўйлаб чексиз чўзилувчи паллаларни чеклайди. Икки паллали гиперболоиднинг умумий кўриниши 73- расмда тасвирланган.

(24. 7) тенгламадан барча координата текисликлари икки паллали гиперболоиднинг симметрия текисликлари эканлиги келиб чиқади.

Шуни таъкидлаймизки, $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ва $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ тенгламалар ҳам икки паллали гиперболоидларни аниқлайди.

25- §. Параболоидлар

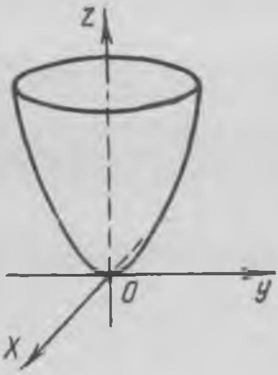
25.1. Эллиптик параболоид. *Тегишлича танланган Декарт координаталар системасида*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (25.1)$$

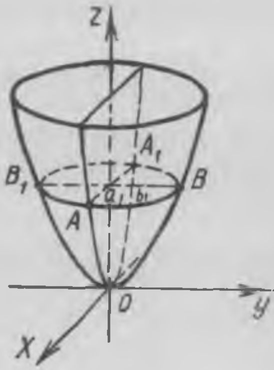
тенгламага эга бўлган сирт эллиптик параболоид дейилади, бунда $p>0,\ q>0$.

Агар $p=q$ бўлса, у ҳолда эллиптик параболоид

$$\begin{cases}x^2=2pz,\\ y=0\end{cases}$$



74- расм.



75 - расм.

параболанинг z лар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланиш сирти бўлади (74- расм).

$p \neq q$ бўлган умумий ҳолда эллиптик параболоид айланиш сирти бўлмайди: унинг z лар ўқига перпендикуляр текисликлар билан кесимлари энди айланалар эмас, балки эллипслар бўлади.

Ҳақиқатан, эллиптик параболоиднинг xy текислигига параллел текисликлар билан кесимлари

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \\ z = h \end{cases} \tag{25.2}$$

тенгламалар системаси билан берилади.

Агар $h < 0$ бўлса, бу система ечимга эга бўлмайди, чунки $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \geqslant 0$. Шунинг учун xy «текислик остида» эллиптик параболоиднинг нуқталари йўқ. $x = 0$ да (22.5) система бирдан бир (0, 0, 0) ечимга эга, яъни эллиптик параболоид xy текислик билан ягона умумий нуқтага эга, бу нуқта координаталар бошидир.

Ниҳоят, $h > 0$ да (22.5) система ярим ўқлари $a_h = \sqrt{2ph}$, $b_h = \sqrt{2qh}$ (75- расм) ва xz ва yz координата текисликларига нисбатан симметрик бўлган

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h \end{cases} \tag{25.3}$$

эллипсни аниқлайди. h нинг ўсиши билан (22.3) эллипснинг ярим ўқлари ҳам ўсади ва

$$\lim_{h \to +\infty} a_h = \lim_{h \to +\infty} b_h = +\infty.$$

Эллиптик параболоиднинг xz ва yz координата текисликлари билан кесимлари мос равишда

$$L_0: \begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \text{ ва } K_0: \begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases} \tag{25.4}$$

тенгламалар системалари билан бериладиган L_0 ва K_0 параболаларни беради (75- расмга қаранг).

Энди эллиптик параболоиднинг y лар ўқига перпендикуляр текисликлар оиласи билан кесимларини қараймиз:

$$L_h: \begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z - \frac{h^2}{q}, \\ y = h. \end{cases} \qquad (25.5)$$

Бундан L_h кесим xz текислигига параллел кўчирилган $L_0: \begin{cases} \frac{x^2}{p} = 2z, \\ y = 0 \end{cases}$ параболани ифодалаши, бунда L_0 нинг учи K_0 параболадаги $(0,\ h,\ \frac{h^2}{2q})$ нуқтадан иборат экани кўринади ((25.4) га қаранг).

Шундай қилиб, эллиптик параболоидни L_0 парабола xz текислигига параллел равишда ҳаракат қилганда босиб ўтган нуқталар тўплами деб қараш мумкин, бунда L_0 нинг учи K_0 парабола бўйлаб сурилади.

Охирида шуни қайд қиламизки, эллиптик параболоид ўзаро перпендикуляр иккита симметрия текисликлари xz ва yz ларга эга. Бу текисликларнинг кесишиш чизиғи — z лар ўқи—эллиптик параболоиднинг симметрия ўқидир. $O(0,\ 0,\ 0)$ нуқта унинг учи, z лар ўқи эса унинг ўқи дейилади. Агар эллиптик параболоиднинг ўқи y лар ўқи ёки z лар ўқи билан устма-уст тушса, у ҳолда эллиптик параболоид мос равишда

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \text{ ёки } \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y$$

тенгламага эга бўлади.

25.2. Гиперболик параболоид. *Тегишлича танланган Декарт координаталар системасида тенгламаси*

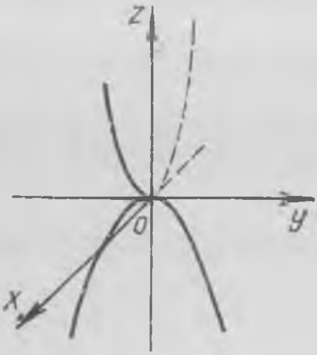
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (25.6)$$

дан иборат бўлган сирт гиперболик параболоид дейилади, бунда p ва q — мусбат сонлар.

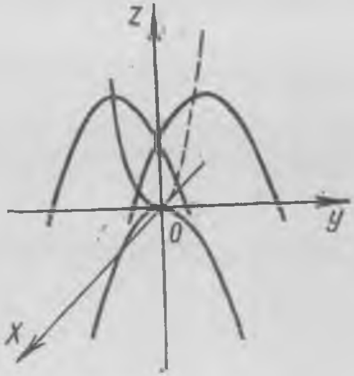
Гиперболик параболоиднинг xz текислик билан кесими $L_0: \begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$ параболадан (76- расм), yz текислик билан кесими ҳам $K_0: \begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0 \end{cases}$ параболадан иборат (76- расмга қаранг). Шуни қайд қиламизки, L_0 ва K_0 параболаларнинг тармоқлари z лар ўқи бўйлаб турли томонга йўналган.

Энди гиперболик параболоиднинг x лар ўқига перпендикуляр текисликлар билан кесимлари оиласи K_h ни текширамиз:

$$K_h: \begin{cases} \frac{y^2}{q} = -2z + \frac{h^2}{p}, \\ x = h \end{cases} \qquad (25.7)$$



76- расм.



77- расм.

(25.7) тенгламалар системасидан бундай хулосага келамиз: K_h кесим K_0 параболадан шундай параллел кўчириш натижасида ҳосил бўладики, бунда L_0 параболанинг $(h, 0, \frac{h^2}{p})$ нуқтаси K_h нинг учи бўлади. Шундай қилиб, гиперболик параболоид K_0 парабола yz текислигига параллел текислик бўйлаб ҳаракат қилганда босиб ўтган нуқталар тўпламидир, бунда K_0 нинг учи L_0 бўйлаб ҳаракат қилади (77-расм). Умуман гиперболик параболоид чегараланмаган эгар шаклидаги сиртдан иборат.

Шуни қайд қиламизки, гиперболик параболоид xz, yz симметрия текисликларига эга ва xy текисликни иккита кесишувчи

$$l_1: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади.

26-§. Иккинчи тартибли конус

Фазода L чизиқ ва бирор $O \overline{\in} L$ нуқта тайинланган бўлсин. *Ҳамма мумкин бўлган OX, $X \in L$ тўғри чизиқларда ётувчи нуқталар тўплами учи O нуқтада ва йўналтирувчиси L бўлган K конус дейилади.* Бошқача айтганда:

$$K = \bigcup_{x \in L} OX.$$

1-теорема. *Тегишли Декарт координаталар системасида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (26.1)$$

тенгламага эга бўлган K сирт учи $O(0,\ 0,\ 0)$ нуқтада ва йўналтирувчиси $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases}$ *эллипсдан иборат бўлган конусни ифодалайди.*

Исбот. Энг олдин шуни қайд қиламизки, (26.1) тенгламадан K сиртнинг симметрия маркази $O(0,\ 0,\ 0)$ нуқтада ва бу нуқта K конусга тегишли экани келиб чиқади.

Сўнгра, K нинг $z=c$ текислик билан кесими

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади, яъни теорема шартида айтилган эллипсни ифодалайди.

Энди l чизиқ $O\ (0,\ 0,\ 0,)$ нуқта ва L эллипснинг ихтиёрий $M(x^*,\ y^*,\ c)$ нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин. Бу ҳолда l нинг параметрик тенгламалари ушбу кўринишда бўлади:

$$x=x^*t;\ y=y^*t;\ z=ct;\ t\in(-\infty,\ +\infty). \tag{26.2}$$

(26.2) тенгламада тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\overrightarrow{OM}=\{x^*,\ y^*,\ c\}$ вектор олинган. Ихтиёрий $t\in(-\infty,\ +\infty)$ да ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=t^2\left(\frac{x^{*2}}{a^2}+\frac{y^{*2}}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}\right)=t^2(1-1)=0.$$

Шундай қилиб, l тўғри чизиқ бутунича K сиртда ётади ва демак,

$$K\supset\bigcup_{M\in L} l_M \tag{26.3}$$

бўлиши керак, бунда l_M — чизиқ O нуқтадан ва L эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ.

Энди $\tilde M(\tilde x,\tilde y,\ \tilde z)$ — K сиртнинг $O(0,\ 0,\ 0)$ нуқтасидан фарқли нуқтаси бўлсин. У ҳолда $\tilde z\neq 0$. $M\left(c\dfrac{\tilde x}{\tilde z},\ c\dfrac{\tilde y}{\tilde z},\ c\right)$ нуқтани қараймиз. M нуқта $z=c$ текисликда ётади, унинг координаталари учун

$$\frac{\left(c\dfrac{\tilde x}{\tilde z}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(c\dfrac{\tilde y}{\tilde z}\right)^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}=\frac{c^2}{\tilde z^2}\left(\frac{\tilde x^2}{a^2}+\frac{\tilde y^2}{b^2}-\frac{\tilde z^2}{c^2}\right)=0$$

муносабат бажарилгани сабабли бу нуқта K сиртга ҳам тегишлидир. Шунинг учун M нуқта L эллипснинг нуқтасидир. $\tilde M$ нуқтанинг координаталари учун

$$\tilde x=\left(c\frac{\tilde x}{\tilde z}\right)t_0,\ \tilde y=\left(c\frac{\tilde y}{\tilde z}\right)t_0,\ \tilde z=ct_0,\ \text{бунда } t_0=\frac{\tilde z}{c}$$

муносабатлар бажарилгани сабабли (26.2) дан $\tilde{M}$ нуқта l_M га тегишли экани келиб чиқади. Шундай қилиб, $K \subset \bigcup\limits_{M \in L} l_M$. (26. 3) билан биргаликда бу

$$K = \bigcup_{M \in L} l_M$$

тенгликка олиб келади.

Шундай қилиб, K учи O нуқтада, йўналтирувчиси L эллипс бўлган конусдир. Теорема исботланди.

1-теоремада қаралган K конус иккинчи тартибли конус дейилади. (26.1) тенгламадан учала координаталар текислиги бу конуснинг симметрия текисликлари бўлиши келиб чиқади. Агар $a = b$ бўлса, у ҳолда K конус айланиш ўқи z лар ўқидан иборат бўлган тўғри доиравий конусга айланади.

$y = \pm \frac{b}{a}$ асимптоталар $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола учун қандай роль ўйнаган бўлса, K конус бир паллали $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоид учун шундай роль ўйнайди. Шунинг учун бу конусни $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболоид учун асимптотик конус дейилади.

Шунга ўхшаш,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{ва} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тенгламалар учлари координаталар бошида ва йўналтирувчилари

$$L_1: \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a \end{cases} \quad \text{ва} \quad L_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = b \end{cases}$$

эллипслардан иборат конусларни ифодалайди.

27-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқли ясовчилари

S — иккинчи тартибли сирт бўлсин. Агар $l \subset S$ бўлса, l тўғри чизиқ *S нинг тўғри чизиқли ясовчиси* дейилади. Равшанки, иккинчи тартибли цилиндрлар ва конуслар тўғри чизиқли ясовчиларга эга. Маълум бўлишича, бу сиртлардан ташқари бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоид ҳам тўғри чизиқли ясовчиларга эга экан.

Ҳақиқатан,

$$z = \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right), \quad 2\lambda = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \tag{27.1}$$

тенгламалар билан бериладиган ҳар қандай l_λ тўғри чизиқ ҳар қандай λ да бутунича

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{27.2}$$

гиперболик параболоидда ётади, чунки (27.1) тенгламани қаноатлантирувчи ҳар бир (x_0, y_0, z_0) нуқта (27.1) тенгламаларнинг чап ва ўнг қисмларини ҳадлаб кўпайтиришдан ҳосил бўладиган (27.2) тенгламани ҳам қаноатлантиради. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ да

$$2\lambda_1 = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \text{ ва } 2\lambda_2 = \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}$$

текисликлар параллел бўлгани учун l_{λ_1} ва l_{λ_2} тўғри чизиқли ясовчилар кесишмайди.

Сўнгра, агар $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (27 2) параболоиднинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, бундай оламиз:

$$\tilde{\lambda} = \begin{cases} \text{Агар } \tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z} = 0 \text{ бўлса, } 0; \\ \text{агар } \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{p}} + \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{q}} \neq 0 \text{ ва } \tilde{M} \text{ нуқта } (0,0,0) \text{ дан фарқли бўлса,} \\ \qquad \dfrac{\tilde{z}}{\dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{p}} + \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{q}}}; \\ \text{агар } \dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{p}} + \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{q}} = 0 \text{ ва } \tilde{M} \text{ нуқта } (0,0,0) \text{ дан фарқли бўлса,} \\ \qquad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\tilde{x}}{\sqrt{p}} - \dfrac{\tilde{y}}{\sqrt{q}}\right). \end{cases}$$

(27.2) параболоиднинг $l_{\tilde{\lambda}}$ тўғри чизиқли ясовчиси $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ нуқтадан ўтишини кўриш осон.

Шундай қилиб, тўғри чизиқли ясовчиларнинг l_λ оиласи шундайки,

1) параболоиднинг ҳар бир нуқтаси орқали бу оиланинг камида битта тўғри чизиқли ясовчиси ўтади:

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ да l_{λ_1} ва l_{λ_2} тўғри чизиқлар кесишмайди.

Бундан шундай натижа келиб чиқади: (27.2) гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан роса битта l_λ тўғри чизиқли ясовчи ўтади ва параболоиднинг ўзи шу тўғри чизиқли ясовчиларнинг бирлашмасидан иборат.

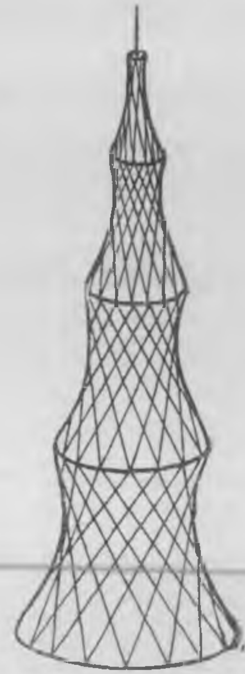
l_λ тўғри чизиқли ясовчиларнинг қайд қилинган оиласидан ташқари (27.2) параболоидда

$$z = \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right), \quad 2\lambda = \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \tag{27.3}$$

тенгламалар билан берилган $l_{\lambda'}$ тўғри чизиқли ясовчилар оиласи ҳам мавжуд бўлиб, бу ясовчилар оиласи ҳам l_λ ясовчилар оиласи эга бўлган хоссаларга эга.

Ҳар қандай икки l_{λ_1} ва l_{λ_2} тўғри чизиқ ҳар доим кесишишини осонгина кўриш мумкин.

78- расм.



79- расм.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ бир паллали гипер-болоидда ҳам тўғри чизиқли ясовчиларнинг иккита оиласи

$$K_\lambda : \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

ва

$$K'_\lambda : \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

мавжуд эканини юқоридагига ўхшаш кўрсатилади.

Бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан ҳар бир оиланинг роса биттадан ясовчиси ўтади, бир оилага тегишли ясовчилар кесишмайди.

Қараб ўтилган иккинчи тартибли сиртлардаги тўғри чизиқли ясовчилардан ташкил топган тўрлар 78-расмда тасвирланган. Шуни қайд қиламизки, бир паллали гиперболоид ва гиперболик параболоидларни уларнинг тўғри чизиқли ясовчилари ёрдамида конструкция қилиш техникада кўп сондаги қўлланишларга эга. 79-расмда айтиб ўтилган усул билан қараб ўтилган ик-

80- расм.

кинчи тартибли сиртлар бўлакларидан ясалган турли системалар тасвирланган. Бу системалардан телевизион станциялар ва радиотелескоплар антенналарини қуришда фойдаланилади.

Техникада кесишмайдиган ўқлар атрофида айланишни тишли узатма усулида узатишдан кенг фойдаланилади. Агар ўқлар айқаш тўғри чизиқлардан иборат бўлса, у ҳолда тегишли техник конструкция бир паллали гиперболоиднинг иккинчи бир паллали гиперболоиднинг устида айланишига асосланган (80- расм).

Сфера бўлаги ёки эллиптик параболоид шаклидаги кўзгулар ёруғлик ёки бошқа нурлар дастасининг хоссасини кучли ўзгартириш хусусиятига эга. Нурлар дастасининг таъсирини бир нуқтага тўплаш ёки параллел нурлар олиш шу тарзда амалга оширилади. Бундан йўналтирилган радио ва телевизион алоқа яратиш масалаларида ва лазер техникасида кенг қўлланилади.

II ҚИСМ

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА АСОСЛАРИ

IV боб. R^n фазо. Матрицалар, детерминантлар, чизиқли тенгламалар системалари

28-§. R^n фазо.

28.1. Асосий тушунчалар ва таърифлар. n та ҳақиқий сондан тузилган тартибланган системаларни қараймиз. n та сондан тузилган система тартибланган деганда бу системани тузувчи сонлар номерланган деб тушунамиз. Агар $\vec{x}$ ушбу $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларнинг тартибланган системаси бўлса, унинг учун бундай белгилаш киритилади: $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Барча $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системалар тўплами, бунда α_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — ихтиёрий ҳақиқий сон, R^n *фазо* дейилади, $\vec{x}$ системаларнинг ўзларини R^n *нинг элементлари* ёки *векторлари* дейилади. R^n фазони кўпинча n *ўлчовли арифметик фазо* ҳам дейилади. Равшанки, R^1 ҳақиқий сонлар тўпламидир.

$\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$ векторни R^n фазонинг *ноль вектори* дейилади. Агар барча $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ларда $\alpha_i = \beta_i$ бўлса, R^n фазода $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ва $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ векторлар *тенг векторлар* дейилади.

Сўнгра $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ лар R^n даги ихтиёрий векторлар, λ эса ихтиёрий мусбат сон бўлсин. R^n *да векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш амалларини* бундай киритамиз:

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n), \tag{28.1}$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n). \tag{28.2}$$

Ихтиёрий $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ вектор учун $\vec{x}' = (-1)\vec{x} = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$ шундай векторки, ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{x} + \vec{x}' = (\alpha_1 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_2, \ldots, \alpha_n - \alpha_n) = \Theta$$

Шунинг учун $\vec{x}'$ векторни $\vec{x}$ векторга *қарама-қарши вектор* дейилади ва $-\vec{x}$ билан белгиланади. $\vec{x}$, $\vec{y}$ *векторларнинг айирмаси* деб $\vec{x}+(-\vec{y})$ векторни айтилади ва $\vec{x}-\vec{y}$ билан белгиланади. Равшанки, $\vec{x}-\vec{y}=(\alpha_1-\beta_1, \ldots, \alpha_n-\beta_n)$. Таърифлардан векторлар устида амаллар бажаришнинг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади.

1. *Ихтиёрий* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$ лар *ва ихтиёрий* λ, μ *ҳақиқий сонлар учун:*

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}, \tag{28.3}$$

$$\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}, \tag{28.4}$$

$$\lambda(\mu\vec{x})=(\lambda\mu)\vec{x}, \tag{28.5}$$

$$\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}, \tag{28.6}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}, \tag{28.7}$$

$$1\cdot\vec{x}=\vec{x}. \tag{28.8}$$

2 $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ *векторлар ҳар қандай бўлганда ҳам*

$$\vec{x}+\vec{z}=\vec{z}+\vec{x}=\vec{y} \tag{28.9}$$

тенгликни қаноатлантирадиган бирдан-бир $\vec{z}\in R^n$ вектор мавжуд, Равшанки, $\vec{z}=\vec{y}-\vec{x}$.

Ушбу

$$\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m$$

вектор $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ векторларнинг $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ коэффициентли *чизиқли комбинацияси* дейилади. Агар

$$\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2+\ldots+\lambda_m\vec{x}_m=\Theta$$

тенгликдан $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ экани келиб чиқса, у ҳолда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ векторлар *чизиқли эркли* дейилади. Акс ҳолда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ векторлар *чизиқли боғлиқ* дейилади. R^n фазода n та чизиқли эркли векторлар системаси мавжуд. Улардан энг соддаси сифатида ушбу системани кўрсатиш мумкин:

$$\begin{array}{l} \vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{e}_n=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1). \end{array} \tag{28.10}$$

Ҳақиқатан,

$$\vec{\Theta} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

тенгликдан $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ экани келиб чиқади. Қуйида, 28-§ да R^n да $n+1$ та вектордан иборат ҳар қандай система чизиқли боғлиқ бўлиши исботланади.

28.2. Метрик тушунчалар. Скаляр кўпайтма $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ R^n даги ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда

$$\vec{x} = (\alpha_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, 0, \ldots, \alpha_n) = \\ = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n. \qquad (28.11)$$

Шундай қилиб, ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ чизиқли эркли векторлар системаси бўйича ёйилади; бу ёйилманинг коэффициентлари бу векторни аниқловчи сонлардир. (28.11) ёйилма векторларни уч ўлчовли фазода бирор базис бўйича ёйилмасининг табиий умумлашмасидир (I боб, 2-§ га қаранг). Шунинг учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ чизиқли эркли векторлар системасини R^n да *базис* деб, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларни эса $\vec{x}$ векторнинг бу базисга нисбатан *компоненталари* деб қараш табиийдир. Бу бобда биз $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни R^n да қараш билан чегараланамиз; базиснинг чизиқли фазодаги аниқ таърифи ва R^n даги бошқа базисларга доир мисоллар V бобда берилади (R^n — чизиқли фазонинг хусусий мисолидир).

R^n да метрик тушунчалар векторларни скаляр кўпайтириш ёрдами билан энг осон киритилади. Тартибланган $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ векторлар жуфтининг *скаляр кўпайтмаси* деб,

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n \qquad (28.12)$$

сонга айтамиз. R^n да скаляр кўпайтманинг бу таърифи табиий равишда уч ўлчовли фазода скаляр кўпайтмани векторларнинг Декарт координаталар системасидаги компоненталари орқали ифодаловчи формулани умумлаштиради (II боб, 14-§ га қаранг).

(28.12) дан скаляр кўпайтманинг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

1. *Ҳар қандай* $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ *учун*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}), \qquad (28.13)$$

яъни векторларнинг скаляр кўпайтмаси симметрикдир.

2. *Ҳар қандай* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in R^n$ *учун*

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}). \qquad (28.14)$$

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z}). \qquad (28.15)$$

3. *Ҳар қандай* $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ *ва ихтиёрий* λ *ҳақиқий сон учун*

$$(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda\vec{y}). \tag{28.16}$$

(28.14—15) муносабатлар скаляр кўпайтманинг аддитивлигини, (28.16) эса унинг бир жинслилигини характерлайди.

4. *Ҳар қандай* $\vec{x} \in R^n$ *учун*

$$(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0 \tag{28.17}$$

шу билан бирга, агар $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ *бўлса, у ҳолда* $\vec{x} = \Theta$. *Бу хосса* $(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2$ формуладан келиб чиқади.

$\vec{x}$ *векторнинг узунлиги деб*

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \tag{28.18}$$

сонни айтамиз.

У ҳолда ҳар қандай $\vec{x} \neq \Theta$ учун $|\vec{x}| > 0$, $\vec{x} = \Theta$ учун эса $|\vec{x}| = 0$. Қуйидагини қайд қилиб ўтамиз:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}. \tag{28.19}$$

(28.18—19) формулалар уч ўлчовли фазо учун ўринли формулаларнинг тўғридан-тўғри умумлашмасидир (I боб, 3-§ га қаранг).

Энди *нолмас* (ноль бўлмаган) $\vec{x}, \vec{y}$ *векторлар орасидаги* φ *бурчакни*

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} \tag{28.20}$$

формула билан аниқлаймиз. Бу таърифнинг тўғрилигини аниқлаш учун ихтиёрий нолмас $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ векторлар учун

$$\frac{|(\vec{x}, \vec{y})|}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} \leqslant 1 \tag{28.21}$$

тенгсизликнинг тўғри эканини кўрсатиш керак. (28.21) тенгсизлик

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant |\vec{x}|^2\,|\vec{y}|^2 \tag{28.22}$$

тенгсизликка эквивалент. Охирги тенгсизликни исботлашга киришамиз. Равшанки, $\vec{x} \neq \Theta$ ва $\vec{y} \neq \Theta$ бўлгандаги умумийҳолгина бизда қизиқиш туғдиради.

Шундай қилиб, $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ ихтиёрий нолмас векторлар, λ эса ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. (28.17) дан:

$$(\vec{x} - \lambda\vec{y}, \vec{x} - \lambda\vec{y}) \geqslant 0. \tag{28.23}$$

Скаляр кўпайтманинг 1—3-хоссаларидан қуйидагига эгамиз:

$$(\vec{x} - \lambda\vec{y}, \vec{x} - \lambda\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) - \lambda(\vec{x}, \vec{y}) - \lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2(\vec{y}, \vec{y}) =$$

$$= (\vec{x}, \vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2(\vec{y}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 - 2\lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \lambda^2|\vec{y}|^2. \qquad (28.24)$$

Энди

$$a = |\vec{y}|^2, \quad b = (\vec{x}, \vec{y}), \quad c = |\vec{x}|^2$$

деб оламиз, у ҳолда (28.23) ва (28.24) дан барча $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ ларда

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c \geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли экани келиб чиқади, бунда $a \geqslant 0$, у ҳолда, маълумки,

$$b^2 - ac \leqslant 0.$$

Шунинг учун

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 = b^2 \leqslant ac = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2,$$

ана шунинг ўзи (28.22) тенгсизликнинг ўринли эканини исботлайди.

Агар $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ бўлса, $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ икки вектор *ортогонал векторлар* дейилади.

Равшанки, Θ ноль вектор ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ векторга ортогонал. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар учун ушбу муносабат ўринли:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} \text{агар } i = k \text{ бўлса, } 1 \\ \text{агар } i \neq 0 \text{ бўлса, } 0. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис жуфт-жуфти билан ортогонал бўлган бирлик векторлардан иборат.

28.3. Қисм фазо. R^n да векторлар системаси. Агар R^n фазонинг P тўплами ушбу хоссаларга эга бўлса, у шу фазонинг *қисм фазоси* дейилади:

1. Ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in P$ векторлар учун $\vec{x} + \vec{y}$ йиғинди ҳам P га тегишли.

2. Ҳар қандай $\vec{x} \in P$ вектор ва ҳар қандай λ ҳақиқий сон учун $\lambda\vec{x}$ вектор P га тегишли.

Бу таърифдан R^n нинг ҳар қандай қисм фазоси $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$ ноль элементга эга экани келиб чиқади, чунки $\vec{x} \in P$ элемент билан биргаликда $0 \cdot \vec{x} = \Theta$ вектор ҳам P қисм фазога тегишли. Сўнгра P да ҳар қандай $\vec{x}$ вектор билан (2- хоссага кўра) бу векторга қарама-қарши $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$ вектор ҳам мавжуд, шунинг учун 1- хоссага кўра P да унинг иккита вектори билан бирликда бу векторларнинг айирмаси ҳам мавжуд.

R^n фазонинг ўзи ва битта ноль вектордан ташкил топган тўплам R^n фазонинг қисм фазоларига энг содда мисол бўлади, ноль вектордан иборат тўпламни R фазонинг *ноль қисм фазоси* дейилади. Қисм фазоларга доир бошқа мисолларни келтиришдан олдин векторлар системасининг чизиқли қобиғи тушунчасини ифодалаймиз.

R^n да векторларнинг ихтиёрий чекли системаси

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \tag{28.25}$$

берилган бўлсин. (28.25) векторлар системасининг *чизиқли қобиғи* деб бу системага кирган векторларнинг мумкин бўлган барча чизиқли комбинациялари тўпламига айтилади. (28.25) векторлар системасининг чизиқли қобиғини $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$ каби белгилаймиз.

Ҳар қандай (28.25) векторлар чекли системасининг чизиқли қобиғи R^n да қисм фазодан иборат эканини осонгина кўриш мумкин. Ҳақиқатан, агар $\vec{y} = \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_m\vec{x}_m$ ва $\vec{z} = \gamma_1\vec{x}_1 + \ldots + \gamma_m\vec{x}_m$ бўлса, у ҳолда $\vec{y} + \vec{z} = (\beta_1 + \gamma_1)\vec{x}_1 + \ldots + (\beta_m + \gamma_m)\ \vec{x}_m$ ва, демак, $\vec{y} + \vec{z} \in l(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$. Шунингдек ҳар қандай ҳақиқий λ ва ҳар қандай $\vec{z} = \gamma\vec{x}_1 + \ldots + \gamma_m\vec{x}_m$ да $\lambda\vec{z} = \lambda(\gamma_1)\vec{x}_1 + \ldots + (\lambda\gamma_m)\vec{x}_m$ вектор ҳам $l(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ га тегишли бўлади. Шунинг учун $l(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m)$ чизиқли қобиқни кўпинча $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ векторлар системаси ҳосил қилган қисм фазо дейишади.

Агар

$$l(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s) \subset l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m) \tag{28.26}$$

бўлса,

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s \tag{28.27}$$

векторлар системаси (28.25) векторлар системаси орқали чизиқли ифодаланади деймиз.

Агар $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s$ векторлар системаси (28.25) система орқали чизиқли ифодаланса, $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_p$ векторлар системаси эса $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s$ векторлар системаси орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_p$ векторлар ҳам (28.25) векторлар системаси орқали чизиқли ифодаланишини кўриш осон.

Агар

$$l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m) = l(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n) \tag{28.28}$$

бўлса, векторларнинг иккита $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ ва $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s$ системасини *эквивалент системалар* деймиз. Векторлар системасининг эквивалентлиги таърифидан, агар

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \tag{28.29}$$

векторлар системаси

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s \tag{28.30}$$

векторлар системасига эквивалент бўлса, (28.30) векторлар системаси эса

$$\vec{z}_1,\ \vec{z}_2,\ \ldots,\ \vec{z}_p \tag{28.31}$$

векторлар системасига эквивалент бўлса, у ҳолда (28.29) векторлар системаси (28.31) векторлар системасига эквивалент бўлиши келиб чиқади. Шуни қайд қиламизки, агар бирор вектор бирор $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_m$ векторлар системаси орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда бу вектор биринчи системага эквивалент ихтиёрий система орқали чизиқли ифодаланади.

1-теорема. *R^n да векторларнинг иккита системаси берилган бўлсин:*

$$\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_m \tag{28.32}$$

$$\vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \ldots,\ \vec{y}_s \tag{28.33}$$

булардан биринчиси чизиқли эркли ва иккинчиси орқали чизиқли ифодаланади. У ҳолда $m \leqslant s$ ва (28.33) *системадан m та векторни шундай танлаш мумкинки, бу танланган векторларни* (28.32) *система векторлари билан алмаштирилгандан кейин* (28.33) *га эквивалент система ҳосил бўлади.*

Исботни m сон бўйича индукция методи билан ўтказамиз.

$m = 0$ да теореманинг тасдиғи (28.33) система ўз-ўзига эквивалент эканини билдиради. Аммо бу юқорида берилган таърифдан бевосита келиб чиқади. Теореманинг тасдиғи $(m - 1)$ та вектордан иборат (28.32) векторлар системаси учун исботланган бўлсин. У ҳолда (28.32) системанинг биринчи $(m - 1)$ та векторидан иборат

$$\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_{m-1} \tag{28.34}$$

система чизиқли эркли ва (28.33) система орқали чизиқли ифодаланади. Бундан ташқари, $m - 1 \leqslant s$ ва (28.33) да $(m - 1)$ та векторни (28.34) система векторлари билан шундай алмаштириш мумкинки, натижада янги ҳосил бўлган система (28.33) системага эквивалент бўлади. Векторларнинг бу янги системаси бундай бўлсин:

$$\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_{m-1},\ \vec{y}_m,\ \vec{y}_{m+1},\ \ldots,\ \vec{y}_s \tag{28.35}$$

$\vec{x}_m$ вектор (28.33) система орқали чизиқли ифодалангани учун бу вектор (28.33) системага эквивалент бўлган (28.35) система билан ҳам чизиқли ифодаланади, яъни

$$\vec{x}_m = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\vec{x}_{m-1} + \mu_m\vec{y}_m + \mu_{m+1}\vec{y}_{m+1} + \\ + \ldots + \mu_s\vec{y}_s.$$

Агар

$$m - 1 > s$$

тенгсизлик бажарилганда эди, $\mu_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_s = 0$ бўлиб, $\vec{x}_m$ вектор (28.34) система орқали чизиқли ифодаланган бўлар эди, бу эса (28.32) системанинг векторлари чизиқли эркли деган фикрга зид бўлар эди. Шунинг учун $m - 1 < s$, яъни $m \leqslant s$ ва μ_m, μ_{m+1}, ..., μ_s коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли. Масалан, $\mu_m \neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\vec{y}_m = -\frac{\lambda_1}{\mu_m}\vec{x}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{m\mu}\vec{x}_{m-1} + \frac{1}{\mu_m}\vec{x}_m - \frac{\mu_{m+1}}{\mu_m}\vec{y}_{m+1} - \ldots - \frac{\mu_s}{\mu_m}\vec{y}_s,$$

яъни $\vec{y}_m$ вектор

$$\vec{x}_1, \ \vec{x}_2, \ \ldots, \ \vec{x}_m, \ \vec{y}_{m+1}, \ \vec{y}_{m+2}, \ \ldots, \ \vec{y}_s \qquad (28.36).$$

система орқали чизиқли ифодаланади. (28.35) системасининг қолган ҳамма векторлари (28.36) системага тегишли бўлгани учун (28.35) ва (28.36) системалар эквивалент бўлади. Бундан ҳамда (28.33) ва (28.35) системаларнинг эквивалентлигидан (28.33) ва (28.36) системаларнинг эквивалентлиги келиб чиқади. (28.36) система 1-теореманинг шартида баён қилинган барча шартларни қаноатлантиради, шу билан бу теореманинг исботи тугайди.

1-натижа. *Ҳар қандай иккита чизиқли эркли векторлар системаси тенг сондаги векторларга эга.*

Бу фикрнинг исботи бундай фактдан келиб чиқади: 28.3-пунктдаги 1-теоремага кўра чизиқли эркли система ўзи чизиқли ифодаланадиган бошқа ҳар қандай системадан кўпроқ сондаги векторларга эга бўлмайди.

Ушбу

$$\vec{x}_1, \ \vec{x}_2, \ \ldots, \ \vec{x}_m \qquad (28.37)$$

векторлар системаси берилган бўлсин. Бу системанинг чизиқли эркли векторларидан иборат қисм системага қаралаётган бу қисм системанинг чизиқли эрклилигини бузмаган ҳолда бошланғич системанинг битта ҳам векторини қўшиш мумкин бўлмаса, бундай қисм система *максимал қисм система* дейилади.

Агар (28.37) система чизиқли эркли бўлса, у ҳолда бу система ўзининг ҳар қандай максимал чизиқли эркли қисм системаси билан бир хил бўлади. Шу сабабли максимал чизиқли эркли қисм системалар тушунчаси векторларнинг чизиқли боғлиқ системалари учун энг кўп қизиқиш туғдиради.

2-теорема. *Ҳар қандай векторлар системасининг барча максимал чизиқли эркли қисм системалари бир хил сондаги векторлардан тузилгандир.*

Исбот. Агар векторларнинг

$$\vec{x}_1, \ \vec{x}_2, \ \ldots, \ \vec{x}_m \qquad (28.38)$$

системасида

$$\vec{x}_1, \ \vec{x}_2, \ \ldots, \ \vec{x}_s \quad (s < m) \qquad (28.39)$$

қисм система максимал чизиқли эркли қисм система бўлса, у ҳолда $\vec{x}_{z+1}+\ldots+\vec{x}_m$ векторлардан ихтиёрийси (28.38) система векторлари орқали чизиқли ифодаланади ва, демак, (28.39) ва (28.38) системалар эквивалентдир. (28.38) система ўзининг ҳар бир максимал чизиқли эркли қисм системасига эквивалент, шу сабабли бу максимал чизиқли эркли қисм системаларнинг ҳаммаси ўзаро эквивалент ва 1- натижага кўра бир хил сондаги векторлардан тузилган.

3-теорема. *R^n фазода n тадан ортиқ векторлардан тузилган ҳар қандай система чизиқли боғлиқ.*

Исбот. 28.1-пунктда аниқланганидек, $\vec{e}_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2=(0, 1, 0 \ldots, 0)$, ..., $\vec{e}_n=(0, 0, \ldots, 1)$ векторлар системаси чизиқли эркли. 28. 1-пунктда R^n даги ҳар қандай вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар бўйича чизиқли ёйилиши кўрсатилган эди. Демак, ҳар қандай чизиқли эркли система n та $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланади ва 1-теоремага (28.3- пункт) биноан n тадан ортиқ векторга эга бўла олмайди.

Маълум бўлишича, векторларнинг чекли системалари вужудга келтирган қисм фазолар тўғридан-тўғри R^n фазонинг қисм фазоларига мисоллар бўлибгина қолмасдан, балки R^n фазонинг ҳар қандай қисм фазосини векторларнинг бирор чекли тўпламининг чизиқли қобиғи сифатида ҳам тасвирлаш мумкин экан. Чунончи ушбу теорема ўринли.

4-теорема. *R^n фазонинг ҳар қандай P қисм фазосини векторларнинг чекли системаси вужудга келтиради.*

Исбот. Ноль қисм фазони ноль вектор вужудга келтиради ва бу қисм фазо учун теореманинг тасдиғи тўғри. P нолмас қисм фазо бўлсин. У ҳолда P да $\vec{x}_1 \neq \Theta$ вектор мавжуд. Агар $P=l(\vec{x}_1)$ бўлса, у ҳолда теорема исботланган бўлади. Агарда $l(\vec{x}_1) \neq P$ бўлса, у ҳолда P шундай $\vec{x}_2 \neq \Theta$ вектор мавжудки, $\vec{x}_1$ ва $\vec{x}_2$ векторлар чизиқли эркли бўлади. $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ни тузамиз. Агар $P=l(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ бўлса, у ҳолда теорема исботланган бўлади; агарда $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq P$ бўлса, у ҳолда P да шундай $\vec{x}_3 \neq \Theta$ вектор мавжудки, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ векторлар чизиқли эркли бўлади. Агар $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)=P$ бўлса, у ҳолда теорема исботланган бўлади, агарда $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq P$ бўлса, у ҳолда юқоридагидек тузилишларни давом эттирамиз. Бу тузишлар натижасида P да шундай чизиқли эркли $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторлар системаси ажраладики, натижада ушбу муносабат қаноатлантирилади:

$$l(\vec{x}_1) \subset l(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \subset \ldots \subset l(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_k) \subseteq P.$$

$P \subset R^n$ ва R^n да 28.3-пунктдаги 3-теоремага кўра чизиқли эркли векторларнинг ҳар бир системаси n тадан кўпмас векторга эга бўлгани сабабли чекли сондаги тузилишлардан сўнг чизиқли эркли векторларнинг чекли $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ $(m \leqslant n)$ системасига келамиз, бу системалар учун $P = l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$ бўлади.

Шу билан теорема исботланди.

Шуни қайд қиламизки, биз 4-теоремада ифодаланган тасдиқдан кучлироқ тасдиқни исботладик. Чунончи, ҳар қандай P қисм фазо векторларнинг чекли чизиқли эркли системалари томонидан вужудга келтирилиши аниқланди.

P тўплам R^n нинг қисм фазоси ва $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ лар

$$l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m) = P$$

тенгликни қаноатлантирувчи чизиқли эркли векторлар системаси бўлсин, у ҳолда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ векторлар системаси *P қисм фазонинг базиси* дейилади. Равшанки, агар $l(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s) = P$ ва $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s$ векторларнинг ҳар қандай максимал чизиқли эркли системаси P учун базис бўлади.

Умуман айтганда, P қисм фазо кўпгина ҳар хил базисларга эга. Аммо бу базисларнинг ҳаммаси ўзаро эквивалент бўлгани учун 28.3-пунктдаги 1-натижага кўра бу базисларнинг ҳаммаси бир хил сондаги векторлардан тузилгандир. Бу сонни *қисм фазонинг ўлчами* дейилади. Шундай қилиб, бир ўлчовли қисм фазо (уч ўлчовли фазодаги тўғри чизиқнинг аналоги) $\lambda \vec{x}_0$ кўринишидаги векторларнинг ҳаммасидан иборат, бунда $\vec{x}_0 \neq \Theta$ R^n да тайинланган вектор, λ эса ҳақиқий сонлар тўпламидаги ҳамма қийматларни қабул қилади; икки ўлчовли қисм фазо (уч ўлчовли фазода текислик аналоги) иккита чизиқли эркли векторларнинг ҳамма чизиқли комбинацияларидан иборат ва ҳ. к. 28.1-пунктда киритилган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системаси бутун R^n учун базис бўлиб хизмат қилади, шунинг учун R^n ни ўзининг n вектордан иборат базисга эга бўлган хусусий қисм фазоси деб қараб, R^n фазо n ўлчамга эга деб хулоса чиқариш мумкин. Ноль қисм фазо базисининг йўқлиги туфайли ўлчамлиликнинг юқорида аниқланган таърифига кирмайди. Бу тўпламга шартли равишда ноль ўлчам берилади.

Энди P қисм фазонинг ўлчами m га тенг бўлсин, у ҳолда P даги ҳар бир чизиқли эркли векторлар системаси m дан ортиқ бўлмаган вектордан иборат бўлади. Равшанки, бу векторлар m та бўлса, улар P да базис ҳосил қилади. Агар системадаги векторлар сони m дан кам бўлса, уни P нинг базисигача тўлдириш мумкин. Ҳақиқатан, P да

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m \tag{28.40}$$

базис ва

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s \tag{28.41}$$

векторларнинг ихтиёрий чизиқли эркли системаси берилган бўлсин, (28.41) система (28.40) система билан чизиқли ифодалангани учун, 28.3-пунктдаги 1-теоремага кўра $s \leqslant m$ ва, бундан ташқари, (28.41) системанинг векторлари билан (28.40) системанинг s та векторини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил бўлган янги

$$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_s, \vec{x}_{s+1}, \ldots, \vec{x}_m \tag{28.42}$$

система (28.40) системага эквивалент, яъни яна P нинг базиси бўлади. Агар $s = m$ бўлса, (28.41) система (28.40) система билан бир хил бўлади ва шунинг учун (28.41) векторлар системаси P нинг базиси бўлади, агарда $s < m$ бўлса, у ҳолда (28.41) система (28.42) базис таркибида мавжуд бўлади.

Қилинган барча хулосаларни R^n нинг ўзига нисбатан татбиқ қилиб, шуни айтиш мумкинки, R^n да базис учун n та вектордан иборат ихтиёрий чизиқли эркли системани олиш мумкин ва фазонинг ҳар қандай вектори берилган базис элементларининг чизиқли комбинацияси сифатида бир қийматли ёзилади, яъни ўз компонентлари билан берилган базисга нисбатан бир қийматли аниқланади.

Бу боб давомида биз кўп марта 28.1-пунктда киритилган R^n фазо ва унда

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\
\vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

векторлар ёрдамида берилган базисдан фойдаланамиз. R^n даги бошқа базислардан V ва VI бобларда фойдаланилади.

29-§. Тўпламлар назариясидан баъзи маълумотлар

29.1. Тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси. Тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси ҳақиқий сонлардан R^n фазони тузиш конструкциясини ихтиёрий тўпламлар учун умумлаштиради. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ тўпламлар берилган бўлсин. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси* ёки *Декарт кўпайтмаси* деб мумкин бўлган барча тартибланган $u_1, u_2, \ldots, u_n$ лар наборига айтилади, бунда u_i $U_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ нинг ихтиёрий элементи. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ тўпламларнинг тўғри кўпайтмаси $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ орқали, бу тўпламнинг элементи эса $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ орқали белгиланади. Равшанки,

$$R^n = \underbrace{R^1 \times R^1 \times \ldots \times R^1}_{n \text{ марта}}. \tag{29.1}$$

Бошқа мисол қуйидаги

$$I^n = \underbrace{I \times I \times \ldots \times I}_{n \text{ марта}}$$

формула билан аниқланадиган *n ўлчовли I^n бирлик кубни* беради, бунда I тўплам $[0, 1]$ сонли сегментдан иборат. Шундай қилиб, n ўлчовли I^n бирлик куб компонентлари учун

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

тенгсизликлар бажариладиган барча $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ векторлар тўпламидан иборат. Сўнгра, агар $U_1 = [a_1, b_1]$, $U_2 = [a_2, b_2]$, $\ldots$, $U_n = [a_n, b_n]$ бўлса, у ҳолда

$$U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$$

тўплам R^n даги *n ўлчовли параллелепипед* дейилади. Агар $\vec{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ вектор U нинг нуқтаси бўлса, у ҳолда барча $i = 1, 2, \ldots, n$ ларда

$$a_i \leqslant \alpha_n \leqslant b_i \tag{29.2}$$

бўлади. R^3 фазода тўғри доиравий цилиндр доира билан тўғри чизиқнинг тўғри кўпайтмасидир, унинг ён сирти эса айлана билан тўғри чизиқнинг тўғри кўпайтмасидир.

29.2. Тўпламларни акслантиришлар. U, V тўпламлар ва ҳар бир $u \in U$ элементга бирор $v \in V$ элементни мос келтирадиган f қонун берилган бўлсин. Бундай ҳолда U нинг V га *акслантириш* берилган дейилади. *U ни f акслантиришнинг аниқланиш соҳаси*, V ни эса *f нинг қийматлари тўплами* дейилади. Акслантиришни бундай белгилашади:

$$f : U \to X. \tag{29.3}$$

Агар V ҳақиқий сонлар тўплами бўлса, у ҳолда f акслантиришни кўпинча *функция* дейишади.

Агар $u \in U$ элемент f акслантириш билан $v \in V$ элементга ўтказилса, у ҳолда бундай ёзишади: $v = f(u)$, v ни u элементнинг *образи*, u ни эса *v элементнинг прообрази* дейишади. $v \in V$ элементнинг f акслантиришга нисбатан тўла образи деб, бу элементнинг барча прообразлари тўпламини, яъни $f(u) = v$ тенгликни қаноатлантирувчи барча $u \in U$ элементлар тўпламини айтишади. $v \in V$ элементнинг тўла прообрази $f^{-1}(v)$ билан белгиланади.

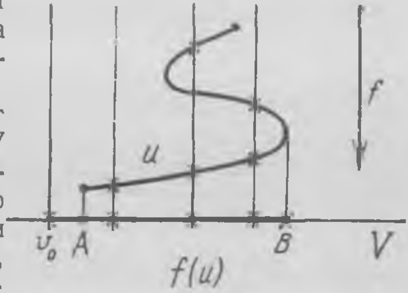
Ниҳоят, $f(W)$ билан барча $f(u)$ элементлар тўпламини белгилаймиз (1-боб, 6-§ га қаранг), бунда u элемент $W \subset U$ даги барча қийматларни қабул қилади. $f^{-1}(Q)$ билан эса $Q \subset V$ тўпламнинг тўла прообразини, яъни барча $v \in Q$ элементлар тўла образлари бирлашмасини белгилаймиз.

Қуйидаги мисолларни қараймиз.

1. U 81-расмда тўлқин чизиқ билан тасвирланган тўплам, V эса тўғри чизиқ билан тасвирланган тўплам бўлсин. Иккала U ва V тўплам ҳам битта α текисликда ётади деб фараз қиламиз. $f: U \to V$

акслантириш U ни V га ортогонал проекциялашдан иборат. 81-расмда бу акслантириш стрелка билан кўрсатилган.

$f(U)$ тўплам V тўғри чизиқнинг AB кесмасидан иборат. Агар $v_0 \in V$ нуқта AB кесмага тегишли бўлмаса, у ҳолда $f^{-1}(v_0) = \varnothing$. Агар $v \in V$ нуқта AB кесмага тегишли бўлса, у ҳолда $f^{-1}(v) \neq \varnothing$ бўлиб, битта, иккита, учта нуқтадан иборат бўлиши мумкин (81-расмга қаранг).



81- расм.

2. α текисликда бирор Oxy Декарт координаталари системасини тайинлаймиз. α текисликнинг ўзини ўзига акслтнтириш синфларига тўхталамиз, бу акслантиришлар қуйида муҳим роль ўйнайди.

а) $f_1: \alpha \to \alpha$ акслантириш

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \tag{29.4}$$

қонун билан берилади, бунда x, y исталган $M \in \alpha$ нуқтанинг, x', y' эса $M' = f_1(M)$ нуқтанинг координаталари. M нуқтадан $f_1(M)$ нуқтага ўтишни $\overrightarrow{OM}$ векторни φ бурчакка буриш сифатида талқин қилиш қулай (82-расм). Шунинг учун f_1 акслантиришни α текисликни O нуқтага нисбатан φ *бурчакка айлантириш* дейилади.

Равшанки, $f_1(\alpha) = \alpha$ ва ҳар қандай $M' \in \alpha$ нуқта учун $f_1^{-1}(M')$ тўплам битта нуқтадан тузилган бўлади. Айлантиришнинг таърифидан унинг нуқталар орасидаги масофани сақлаши бевосита келиб чиқади.

б) $f_2: \alpha \to \alpha$ акслантириш

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b \tag{29.5}$$

қонун билан берилади, бунда a ва b — ўзгармаслар.

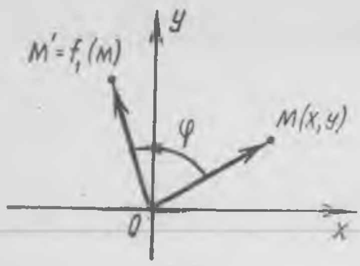
Равшанки, агар $M'f' = f_2(M)$ бўлса, у ҳолда

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{r}$$

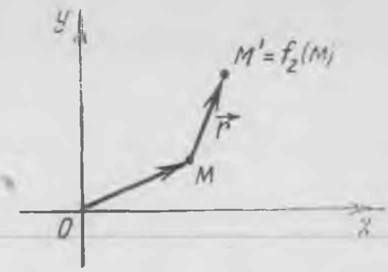
тенглик ўринли бўлади, бунда $\vec{r}$ компонентлари a ва b дан иборат вектор (83-расм). f_2 акслантиришни α текисликни $\vec{r}$ вектор қадар *параллел кўчириш* дейилади. Равшанки, $f_2(\alpha) = \alpha$ ва исталган $M' \in \alpha$ нуқта учун $f_2^{-1}(M')$ тўплам битта нуқтадан иборат бўлади. Параллел кўчириш ҳам нуқталар орасидаги масофани сақлайди.

в) $f_3: \alpha \to \alpha$ акслантириш

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{12}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{29.6}$$



82- расм.



83- расм.

қонун билан берилади, бунда a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — бирор ўзгармас сонлар. f_3 акслантиришни *чизиқли акслантириш* дейилади. 15.2-пунктдан

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \neq 0 \qquad (29.7)$$

шартда ҳар қандай $M'(x', y') \in \alpha$ нуқта учун шундай ягона $M(x, y)$ нуқта мавжудки, ушбу $f_3(M) = M'$ тенглик бажарилиши келиб чиқади. Шунинг учун (29.7) тенглик $f_3(\alpha) = \alpha$ тенглик ўринли бўлишига кафолат беради.

(29.6) даги коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли ва

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} = 0 \qquad (29.8)$$

бўлса, у ҳолда, 15.2-пунктда кўрсатилганидек,

$$\begin{cases} a_{11}\ x + a_{12}\ y = x', \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y = y' \end{cases} \qquad (29.9)$$

тенгламалар системаси

$$\begin{vmatrix} a_{11} & x' \\ a_{21} & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & a_{12} \\ y' & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (29.10)$$

бўлганда ва фақат шу ҳолдагина ечилади.

(29.10) шартни бундай ёзиш мумкин:

$$a_{21}x' - a_{11}y' = 0, \qquad (29.11)$$

$$a_{22}x' - a_{12}y = 0. \qquad (29.12)$$

(29.8) дан $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$ экани келиб чиқади, шунинг учун (29.11) ва (29.12) муносабатлар $M'(x', y')$ нуқта l: $a_{21}x - a_{11}y = 0$ тўғри чизиқда ётиши кераклигини кўрсатади. Шундай қилиб, агар (29.8) шарт бажарилган бўлса, у ҳолда $f_3(\alpha) = l$ ва, демак, ҳар қандай $M' \in \alpha \diagup l$ нуқта учун $f_3^{-1}(M')$ тўла прообраз бўш тўплам, ҳар қандай $M' \in l$ нуқта учун эса $f_3^{-1}(M')$ тўплам чексиздир.

Ниҳоят, агар $a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$ бўлса, у ҳолда $f_3:\alpha\to\alpha$ акслантириш α текисликни битта $O(0,0)$ нуқтага ўтказади.

Текисликнинг (29.7) шартни қаноатлантирувчи чизиқли акслантиришлари *айнимаган акслантиришлар* дейилади. Шуни қайд қиламизки, f_1 айлантириш айнимаган акслантиришдир, чунки

$$\det\begin{Vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix}=1.$$

Қуйидаги акслантиришлар текисликнинг айнимаган чизиқли акслантиришлари жумласига киради:

$f_4:\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\,(k=\text{const}\neq 0)\end{cases}$ — маркази координаталар бошида ва коэффициенти k га тенг гомотетия,

$f_5:\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}$ — y лар ўқига нисбатан симметрия,

$f_6:\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$ — x лар ўқига нисбатан симметрия,

$f_7:\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$ координаталар бошига нисбатан симметрия,

$f_8:\begin{cases}x'=kx\ (k=\text{const})\\ y'=y\end{cases}$ — x лар ўқига қараб сиқиш $(0<k<1)$ ёки x лар ўқига чўзиш $(k>1)$,

$f_9:\begin{cases}x'=x\\ y'=ky\,(k=\text{const})\end{cases}$ — y лар ўқига қараб сиқиш $(0<k<1)$ ёки чўзиш $(k>1)$,

$f_{10}:\begin{cases}x'=x\\ y'=y\end{cases}$ — айний акслантириш.

$f:U\to V$ ва $g:V\to W$ акслантиришлар берилган бўлсин. f ва g акслантиришларнинг *кўпайтмаси* (ёки *композицияси*) деб барча $u\in U$ ларда $h(u)=g(f(u))$ тенглик ўринли бўладиган $h:U\to W$ акслантиришга айтилади. Акслантиришларнинг кўпайтмаси учун ушбу ёзувдан фойдаланилади:

$$h=g\circ f \qquad \text{ёки} \qquad h=gf. \tag{29.13}$$

Акслантиришларнинг кўпайтмаси учун ассоциативлик қонуни ўринли эканини кўриш осон:

$$h\circ(g\circ h)=(h\circ g)\circ f,$$

бунда $f:U\to V$, $g:V\to W$, $h:W\to Z$, чунки ҳар қандай $u\in U$ учун қуйидагиларга эгамиз:

$$(h\circ(g\circ f))(u)=h(g(f(u)))$$

ва

$$((h\circ g)\circ f)(u)=h(g(f(u))).$$

Акслантиришларнинг кўпайтмаси тушунчаси акслантиришларнинг янги синфларини осонгина тузиш имконини беради. Буни α текисликнинг ўзини ўзига акслантириш мисолида кўриб чиқамиз.

Масалан, айлантириш билан параллел кўчиришнинг кўпайтмасидан иборат бўлган $h = f_2 \circ f_1$ акслантириш α текисликнинг *ҳаракати* дейилади. (29.4) ва (29.5) дан $h = f_2 \circ f_1$ ҳаракат қуйидаги формулалар билан берилиши келиб чиқади:

$$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi + a,$$
$$y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi + b, \qquad (29.14)$$

бунда φ, a, b — ўзгармас сонлар. Айлантириш ва параллел кўчиришда нуқталар орасидаги масофа сақлангани учун ҳаракатда ҳам нуқталар орасидаги масофа сақланади.

Агар шундай $h:\alpha \to \alpha$ ҳаракат мавжуд бўлиб, $F_2 = h(F_1)$ тенглик қаноатлантирилса, у ҳолда F_1 ва F_2 тўпламлар текисликда *конгруэнт тўпламлар* дейилади. Конгруэнт тўпламлар тушунчаси геометрияда энг муҳим тушунчалардандир. Биз бунга кейинроқ, VI бобда қайтамиз.

Энди $g = f_2 \circ f_4 \circ f_1$ — айлантириш, маркази координаталар бошида бўлган гомотетия ва параллел кўчиришнинг кўпайтмасидан иборат акслантириш бўлсин. Декарт координаталарида g ушбу формулалар билан берилади:

$$x' = kx \cos\varphi - ky \sin\varphi + a,$$
$$y' = kx \sin\varphi + ky \cos\varphi + b. \qquad (29.15)$$

Агар F_1 тўпламни F_2 тўпламга (29.15) формулалар ёрдамида ўтказиш мумкин бўлса, яъни $F_2 = g\ (F_1)$ бўлса, у ҳолда иккита F_1 ва F_2 тўплам текисликда *ўхшаш тўпламлар* дейилади. Ўхшаш тўпламлар тушунчаси ҳам геометрияда муҳим тушунчалардан биридир.

Бундан кейин акслантиришларнинг бир қатор махсус типлари муҳим роль ўйнайди.

Агар $u_1 \neq u_2$ эканидан $f(u_1) \neq f(u_2)$ экани келиб чиқса, $f:U \to V$ акслантириш *инъектив акслантириш* дейилади. Кўриш осонки, бундай акслантиришда U га қарашли турли элементларни бир образга ёпиштириш содир бўлмайди.

Агар $f(U) = V$ бўлса, $f:U \to V$ акслантириш *сюръектив акслантириш* ёки *(усти) га акслантириш* дейилади.

Ниҳоят, агар $f:U \to V$ акслантириш бир вақтнинг ўзида ҳам инъектив, ҳам сюръектив акслантириш бўлса, у *биектив акслантириш* дейилади.

Агар ҳар қандай $u \in U$ учун $f(u) = u$ бўлса, $f:U \to V$ акслантириш *айний акслантириш* дейилади. Бундан кейин U тўпламнинг айний акслантиришлари 1_U билан белгиланади.

Мисол. Агар $f:R^1 \to R^1$ функция қатъий монотон бўлса, у R^1 ни R^1 га инъектив акслантириш бўлади. Агар $f(R^1) = R^1$ бўлса, худди шу f функциянинг ўзи сюръектив акслантириш бўлади.

Агар

$$f_s: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x = a_{22}y \end{cases}$$

чизиқли акслантириш айнимаган бўлса, у ҳолда у биектив акслантириш бўлади, чунки f_3 бир вақтнинг ўзида ҳам инъектив, ҳам сюръективдир. Агар бу акслантириш учун

$$\det \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| = 0$$

бўлса, у биектив ҳам, сюръектив ҳам бўлмайди.

IV бобнинг кейинги параграфларида R^n ни R^n га чизиқли акслантиришлар қаралади ва текисликнинг қаралган чизиқли акслантиришлари тегишлича умумлаштирилади.

29.3. Тескари акслантириш. $f:U \to V$ сюръектив акслантириш берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $v \in V$ учун $f^{-1}(v)$ тўла прообраз бўш бўлмайди. Агар, бундан ташқари, f акслантириш инъектив акслантириш бўлса, у ҳолда ҳар қандай $v \in V$ да $f^{-1}(v)$ тўплам биттагина $u \in U$ элементдан иборат бўлади. Шу билан ҳар қандай $f:U \to V$ биектив акслантириш учун шундай бир қийматли $g:V \to U$ акслантириш аниқланганки, ҳар қандай $v \in V$ учун $g(v) = f^{-1}(v)$ тенглик ўринли бўлади. $g:V \to U$ акслантириш $f:U \to V$ акслантириш учун *тескари акслантириш* дейилади ва f^{-1} билан белгиланади. Кўриш осонки, f^{-1} биектив акслантириш ва f, $g = f^{-1}$ акслантиришлар учун қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$f \circ g = 1_V, \quad g \circ f = 1_U, \tag{29.16}$$

бу муносабатлардан бошланғич f биектив акслантириш f^{-1} акслантириш учун тескари акслантириш бўлиши келиб чиқади.

Тескари акслантиришни аниқлашда (29.16) формулалардан ҳам фойдаланиш мумкин: агар шундай $g:V \to U$ акслантириш мавжуд бўлиб, (26.16) формулалар ўринли бўлса, $f:U \to V$ акслантиришни *қайтувчи* (тескариланадиган) *акслантириш* дейилади. Бу ҳолда f албатта биектив акслантириш бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, агар f сюръектив акслантириш бўлмаса, $v_0 \in V \setminus f(U)$ мавжуд. $f(g(v_0)) \in f(U)$ бўлгани учун $f(g(v_0)) \neq v_0 = 1_V(v_0)$, яъни $f \circ g = 1_V$ тенглик бузилади, ва шунинг учун f сюръектив акслантиришдир.

Энди f инъектив акслантириш бўлмасин. У ҳолда $f(u_1) = f(u_2) = v$ тенгликларни қаноатлантирувчи u_1 ва $u_2 (u_1 \neq u_2)$ лар мавжуд. $g \circ f = 1_U$ тенгликдан қуйидаги тенгликка эга бўламиз: $u_1 = 1_U(u_1) = g(f(u_1)) = g(v) = g(f(u_2)) = 1_U(u_2) = u_2$.

Бу эса $u_1 \neq u_2$ деб қилган фаразимизга зид келади. Бундан f — инъектив акслантириш экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар $f:U \to V$ — қайтувчи акслантириш бўлса, у ҳолда (29.16) формулаларда қатнашаётган $g:V \to U$ акслантириш f акслантиришга тескари акслантиришдир.

$f:U \to V$ акслантириш ва U тўпламнинг W қисм тўплами берилган бўлсин.

У ҳолда

$$u \in W \text{ учун } f|_W(u) = f(u)$$

формула билан аниқланувчи $\bar{f}|_W:W\to V$ акслантириш f акслантиришнинг W тўпламга *қисилиши* дейилади.

Ниҳоят, агар $f:U\to W$ бўлса, ва $\tilde{f}:U\to f(U)$ акслантириш шундай акслантириш бўлсаки, ҳар қандай $u\in U$ да $\tilde{f}(u)=f(u)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $\tilde{f}$ акслантириш f нинг *келтирилган акслантириши* дейилади.

30-§. Матрицалар ва улар устида амаллар. R^n ни R^m га чизиқли акслантиришлар

30.1. Матрицалар ва векторлар системалари m та сатр ва n та устундан иборат

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{30.1}$$

жадвал *тўғри бурчакли* $m\times n$ *матрица* дейилади; баъзан $m\times n$ матрицани $m\times n$ ўлчамли тўғри бурчакли матрица ҳам дейилади. Матрицани тузувчи сонлар унинг *элементлари* дейилади. Агар матрицанинг сатрлари сони устунлари сонига тенг бўлса, яъни $m=n$ бўлса, матрицани *квадрат матрица* дейилади, сатрлар сонини бунда *матрицанинг тартиби* дейилади.

Умумий ҳолда матрицанинг элементлари, одатда, пастига иккита индекс қўйилиб битта кичик латин ҳарфи билан ёзилади, (30.1) матрица шундай ёзилган. Матрицанинг ўзини кўпинча латин алфавитининг тегишли катта ҳарфи билан белгилаймиз ва матрицаларни қисқа ёзишнинг қуйидаги формаларидан фойдаланамиз:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{30.2}$$

ёки

$$\|a_{ik}\|_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ k=1,2,\dots,n}}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{30.3}$$

Берилган

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицадан сатр ва устунларнинг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўладиган A^* матрицани A га нисбатан *транспонирланган матрица* дейилади. Равшанки,

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (30.4)$$

(30.4) дан, агар A ўлчами $m \times n$ бўлган матрица бўлса, у ҳолда A^* матрица $n \times m$ ўлчамли матрица экани келиб чиқади. Агар A квадрат матрица бўлса, A^* ҳам квадрат матрица бўлади, A ва A^* ларнинг тартиблари ўзаро тенг бўлади.

Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган барча $m \times n$ матрицалар тўпламини $M^{m,n}$ билан белгилаймиз. Квадрат матрицалар ҳолида ($m = n$) энг содда M^n белгилашни қўлланамиз.

A, B лар $M^{m,n}$ тўпламга тегишли матрицалар бўлсин. A ва B матрицаларнинг *йиғиндиси* деб шундай C матрицага айтиладики, унинг исталган $c_{ik}(i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$ элементи $a_{ik} + b_{ik}$ йиғиндисига тенг бўлади. Шунга ўхшаш, агар λ — ҳақиқий сон бўлса, λ сон *билан A матрицанинг кўпайтмаси деб*, шундай D матрицага айтиладики, унинг исталган $d_{ik}(i = 1, 2, \dots m;$ $k = 1, 2, \dots, n)$ элементи λa_{ik} га тенг бўлади. Одатда A ва B матрицаларнинг йиғиндиси учун $A + B$, λ билан A матрицанинг кўпайтмаси учун λA белгилашдан фойдаланилади.

Юқорида киритилган матрицалар устида амаллар қуйидаги қонунларни қаноатлантириши таърифлардан бевосита келиб чиқади:

$$\begin{gathered} A + B = B + A,\ (A + B) + C = A + (B + C), \\ (\lambda\mu) A = \lambda(\mu A), \\ (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A, \\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \end{gathered} \qquad (30.5)$$

Агар θ матрицанинг барча элементлариноллардан иборат бўлса, у *ноль матрица* дейилади:

$$\theta = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \dots, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Баъзан, агар θ нинг $M^{m,n}$ матрицалар тўпламига тегишли эканини махсус кўрсатиш керак бўлса, $\theta_{m,n}$ каби ёзамиз.

Ушбу

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k \tag{30.6}$$

ифодани $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *матрицаларнинг* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ коэффициентли *чизиқли комбинацияси* дейилади, бунда $A_1 A_2, \ldots, A_k \in M^{m,n}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ лар эса ихтиёрий ҳақиқий сонлар. Агар

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = \theta$$

тенгликдан $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_k = 0$ экани келиб чиқса, $A_1 A_2, \ldots, A_k$ матрицалар *чизиқли эркли*, акс ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_k$ матрицалар чизиқли боғлиқ дейилади.

a_{ik} элементи бирга тенг, бошқа барча элементлари эса нолга тенг бўлган

$$E_{ik} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & (k) & & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & \ldots, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \ldots, & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \ldots, & 0 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n, \end{array}$$

матрицалар $M^{m,n}$ да чизиқли эркли матрицаларнинг энг содда системасини ҳосил қилади. E_{ik} матрицалар системаси mn та матрицадан иборат. Қуйида $M^{m,n}$ да $mn+1$ та матрицадан иборат ҳар қандай система чизиқли боғлиқ бўлиши исботланади. Сўнгра, исталган

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

матрица учун

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_{ik} \tag{30.7}$$

айният ўринлидир, бунда (30.7) даги E_{ik} матрицалар олдидаги коэффициентлар A матрица билан бир қийматли аниқланади. Шунинг учун E_{ik} матрицалар системасини $M^{m,n}$ матрицалар тўпламидаги базис, a_{ik} сонларни эса матрицанинг шу базисдаги компонентлари деб қараш табиийдир.

Бундан кейин R^m фазонинг векторларини кўпгина масалаларда $m \times 1$ матрица сифатида қараш қулай бўлади:

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_m \end{Vmatrix}, \qquad (30.8)$$

бу матрицаларни одатда бир устунли матрицалар дейилади. Шуни қайд қиламизки, R^m да базис қуйидаги векторлардан (бир устунли матрицалардан) иборат бўлади:

$$\vec{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \vec{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Энди R^m фазо векторларининг тартибланган $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ системаси берилган бўлиб, улар тўлароқ ёзувда ушбу кўринишга эга бўлсин:

$$\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{Vmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \vec{x}_n = \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad (30.9)$$

Вектор компонентларининг ёзилишидаги қўш индекслар бундай: биринчиси вектор компоненти номерини, иккинчиси эса векторларнинг тартибланган системасида векторнинг номерини билдиради. Векторларнинг тартибланган $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ системасига табиий равишда

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (30.10)$$

$m \times n$ матрица мос қўйилади. Шундай қилиб, R^m даги векторларнинг ҳар бир (30.9) тартибланган системасига $M^{m,n}$ дан (30.10) матрицани мос келтирувчи f акслантириш аниқланади. f акслантириш биектив экани осонгина текширилади. Бу бундан кейин R^m нинг тартибланган векторлари системаси билан $M^{m,n}$ га қарашли матрицаларни фарқ қилмасликка имкон беради. $n = 1$ да f акслантириш R^m га қарашли векторлар билан $M^{m,1}$ га қарашли бир устунли матрицалар орасидаги мосликни тавсифлайди.

30.2 R^n ни R^m га чизиқли акслантиришлар. Агар ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ ва исталган λ, μ ҳақиқий сонлар учун

$$f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \tag{30.11}$$

бўлса, у ҳолда $f: R^n \to R^m$ акслантириш *чизиқли акслантириш* дейилади. Ушбу базис

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1), \end{aligned} \tag{30.12}$$

R^n даги базис,

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \vec{e}'_2 &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \vec{e}'_m &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{30.13}$$

базис эса R^m даги базис бўлсин. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ R^n даги ихтиёрий вектор, $\vec{x}' = f(\vec{x}) = (\alpha'_1, \alpha_2, \ldots, \alpha'_m)$ эса бу векторнинг R^m даги образи бўлсин. У ҳолда

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \tag{30.14}$$

ва

$$\vec{x}' = f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha'_k \vec{e}'_k. \tag{30.15}$$

(30.11) чизиқли акслантириш $\vec{x}$ ва $\vec{f}(x)$ векторларнинг компонентлари орқали қандай берилишини кўриб чиқамиз.

$$\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1), \ \vec{a}_2 = f(\vec{e}_2), \ \ldots, \ a_n = f(\vec{e}_n)$$

деб оламиз.

$\vec{a}_i \in R^m$ бўлгани сабабли $\vec{a}_i$ ни $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_m$ базис бўйича ёйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{11} \vec{e}'_1 + a_{21} \vec{e}'_2 + \ldots + a_{m1} \vec{e}'_m, \\ \vec{a}_2 &= a_{12} \vec{e}'_1 + a_{22} \vec{e}'_2 + \ldots + a_{m2} \vec{e}'_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (30.16)$$
$$\vec{a}_n = a_{1n}\vec{e}_1' + a_{2n}\vec{e}_2' + \dots + a_{mn}\vec{e}_m',$$

Шундай қилиб, $\vec{a}_i = f(\vec{e}_i)$ векторлар системаси ушбу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad (30.17)$$

$n \times m$ матрицанинг берилиши билан бир қийматли тавсифланади.

Энди $\vec{x}$ вектор R^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда (30.14), (30.15) ва f акслантиришнинг чизиқли эканидан ҳамда (30.16) формуладан фойдаланиб, ушбуларга эга бўламиз:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k' \vec{e}_k' \quad (30.18)$$

ва

$$f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \vec{e}_k' =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\,\alpha_i\right) \vec{e}_k. \quad (30.19)$$

(30.15) ва (30.19) дан $\vec{f}(x)$ векторнинг компонентлари учун қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m' &= a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n. \end{aligned} \quad (30.20)$$

Шундай қилиб, $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш (30.19) формулалар билан тўла тавсифланади; бунда

$$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad (30.21)$$

$m \times n$ матрица f чизиқли акслантиришни тўла аниқлайди. A_f матрицанинг устунлари $f(\vec{e}_i)$ векторлардир. Бундан, (30.17) матрица A_f дан транспонирлаш натижасида келиб чиқиши кўринади. A_f матрица *f чизиқли акслантиришнинг матрицаси* дейилади. Агар $m = n$ бўлса, A_f матрица n-тартибли квадрат матрица бўлади.

Юқоридаги кўриб чиққанларимиздан $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш f нинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги қийматлари билан тўла аниқланади, яъни $f/_{U_n}$ сиқиш билан тўла аниқланади, бунда $U_n \subset \subset R^n$ — $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлардан тузилган тўплам.

Энди $\vec{x} \in R^n$ векторни $\vec{x}' = \varphi(\vec{x}) \in R^m$ векторга ўтказувчи $\varphi: R^n \to \to R^m$ акслантириш берилган бўлиб, $\vec{x}'$ векторнинг компонентлари $\vec{x}$ вектор компонентлари орқали (30.20) формулалар бўйича ифодалансин. У ҳолда

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,\alpha_i\right) \vec{e}_k{}'. \tag{30.22}$$

φ чизиқли акслантириш бўлишини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $\vec{x}$, $\vec{y}$ лар R^n нинг ихтиёрий векторлари, λ ва μ эса ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда

$$\varphi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}(\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)\right)\vec{e}_k{}' =$$

$$= \lambda\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\alpha_i\right)\vec{e}_k{}' + \mu\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\,\beta_i\right)\vec{e}_k{}' = \lambda\varphi(\vec{x}) + \mu\varphi(\vec{y}),$$

ана шунинг ўзи φ акслантиришнинг чизиқли эканини исботлайди. Сўнгра, (30.22) га $\vec{e}_i$ векторни қўйиб, топамиз:

$$\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\vec{e}_k{}'. \tag{30.23}$$

(30.23) дан

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицанинг устунлари $\varphi(\vec{e}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ векторлардан иборат экани, яъни бу матрица φ чизиқли акслантиришнинг матрицаси экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, навбатдаги теорема исботланди.

1-теорема. *$f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш берилган бўлсин, у ҳолда $\vec{x}' = f(\vec{x})$ векторнинг $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_m{}'$ базисга нисбатан компонентлари $\vec{x}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m$ базисга нисбатан компонентлари орқали*

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m' &= a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n \end{aligned} \tag{30.24}$$

формулалар бўйича ифодаланади, бунда f чизиқли акслантириш

$$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{30.25}$$

матрицасининг устунлари $f(\vec{e}_i)$ $(i = 1, 2 \dots, n)$ векторлардан иборат.

Аксинча, (20.19) формулалар билан бериладиган $f: R^n \to R^m$ акслантириш чизиқли акслантиришдир ва бу акслантиришни аниқловчи

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрица f чизиқли акслантиришнинг матрицасидир.

Мисоллар. 1. $\theta_{n,m}: R^n \to R^m$ шундай акслантириш бўлсинки, ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$\theta_{n,m}(\vec{x}) = \theta \tag{30.26}$$

тенглик ўринли бўлсин. Равшанки, $\theta_{n\,m}$ — чизиқли акслантириш. Бу ноль акслантириш дейилиб, шунинг учун унга θ ноль матрица, яъни $A_{\theta n,m} = \theta$ мос келади.

2. $n < m$ бўлсин. $P_{n,m}: R^n \to R^m$ — акслантиришни қараймиз. Бу акслантириш $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ векторга

$$P_{n,m}(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots, 0)$$

векторни мос келтиради. $P_{n,m}$ — чизиқли акслантириш ва

$$A_{P_{n,m}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \quad (n \text{ та сатр}) \tag{30.27}$$

эканини кўриш осон. $Ap_{n,m}$ матрицани бундан кейин тўғридан-тўғри $P_{m,n}$ билан белгилаймиз.

Агар $n = m$ бўлса, у ҳолда $P_{n,n}$ акслантириш $\vec{x} \in R^n$ векторга ўша $\vec{x}$ векторнинг ўзини мос келтиради, яъни бу 1_{R^n} айний акслантиришдир. Бу акслантиришнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$P_{n,n} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix} \qquad (30.28)$$

Бу матрицани одатда *бирлик матрица* дейилади ва соддагина қилиб E билан белгиланади.

Охирида, $n > m$ бўлсин. Бу ҳолда $P_{n,m}$ билан $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n)$ векторни $P_{n,m}(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ векторга ўтказувчи акслантириш белгиланади. $P_{n,m}$ — чизиқли акслантириш ва унинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$P_{n,m} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (30.29)$$

30.3. **$R^n \to R^n$ чизиқли акслантиришлар** Татбиқлар учун R^n фазони ўзини ўзига акслантиришлар жуда муҳимдир. Бу ҳолда $R^n \to R^n$ чизиқли акслантиришларни одатда *чизиқли операторлар* дейилади. f чизиқли операторларга ҳар доим A_f квадрат матрицалар жавоб беради. Айний операторга бирлик матрица

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

ноль операторга эса ноль матрица

$$\theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

мос келади.

29.2-пунктда аналитик геометрияда муҳим роль ўйновчи $f_t : R^2 \to R^2$ чизиқли акслантиришлар қаралган эди. R^a ни R^n га чизиқли акслантиришларнинг энг муҳим синфлари қуйида, V ва VI бобларда қаралади.

30.4. **Чизиқли акслантиришларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш. Чизиқли акслантиришларни кўпайтириш ва матрицаларни кўпайтириш.** Баённинг қисқа ва қулай бўлиши мақсадларида умумий қабул қилинган қуйидаги белгилашни киритамиз. $Hom\ (R^n, R^m)$ билан барча $R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришлар тўплами белгиланади, бунда n, m — тайинланган натурал сонлар.

R^n ни R^m га чизиқли акслантиришлар учун қўшиш амали ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амали киритилади. Чунончи, агар f, $g \in Hom(R^n, R^m)$ ва λ — ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда f ва g *акслантиришларнинг йиғиндиси* деб шундай $h: R^n \to R^m$ акслантиришга айтиладики, бунда ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ да

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \tag{30.30}$$

тенглик ўринли бўлади. f акслантиришни λ сонга кўпайтириш шундай $l: R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришдан иборатки, бунда ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$l(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \tag{30.31}$$

тенглик бажарилади. h ва l акслантиришлар чизиқли акслантиришлар эканини кўриш осон. Одатда улар бундай белгиланади:

$$h = f_1 + f_2; \quad l = \lambda f. \tag{30.32}$$

(30.32) белгилашлардан бундан кейин ҳам систематик фойдаланилади.

(30.32) формулалардан ва 1-теоремадан (30.2-пункт) ҳар қандай $f, g \in Hom(R^n, R^m)$ ва ҳар қандай λ сон учун ушбуга эгамиз:

$$A_{f+g} = A_f + A_g; \qquad A_{\lambda f} = \lambda A_f, \tag{30.33}$$

бунда $A_f, A_g, A_{f+g}, A_{\lambda f}$ — тегишли чизиқли акслантиришларнинг матрицалари.

Чизиқли акслантиришлар учун ҳам, матрицалар учун қилинганидек, чизиқли боғлиқлик ва чизиқли эрклилик чизиқли, комбинация, базис тушунчалари киритилади. Ҳар бир $f \in Hom(R^n, R^m)$ га $A_f \in M^{m,n}$ матрицани мос келтирувчи мосликка ва 1-теоремага (30.2-пункт) биноан биектив акслантиришга эга бўламиз:

$$\psi: Hom(R^n, R^m) \to M^{m,n},$$

бу акслантириш (30.33) га биноан акслантиришлар йиғиндисини тегишли матрицалар йиғиндисига ва сон билан акслантириш кўпайтмасини сонлар билан тегишли матрица кўпайтмасига ўтказади. Демак, чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли акслантиришларга чизиқли боғлиқ ёки эркли матрицалар мос келади ва аксинча. Шу сабабли кўп масалаларда $f \in Hom(R^n, R^m)$ чизиқли акслантиришлар ва уларга мос $A_f \in M^{m,n}$ матрицалар ўзаро бир хил бўлади, деб ҳисоблаш фойдалидир.

Юқорида айтилганлардан чизиқли акслантиришлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$\begin{gathered} f + g = g + f, \ (f + g) + h = f + (g + h), \\ (\lambda\mu) f = \lambda(\mu f) = \mu(\lambda f), \\ (\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f, \\ \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g, \end{gathered} \tag{30.34}$$

бунда f, g, h лар $Hom(R^n, R^m)$ га тегишли исталган акслантиришлар, λ ва μ исталган ҳақиқий сонлар, чунки бу муносабатлар $M^{m,n}$ га тегишли матрицалар учун ўринли (30.1-пунктга қаранг).

R^n, R^m, R^l фазолар берилган бўлсин ва $f \in Hom(R^n, R^m)$. $g \in Hom(R^m, R^l)$ бўлсин. 29.2-пунктда аниқланганидек, f ва g акслантиришларнинг кўпайтмаси шундай $h: R^n \to R^l$ акслантиришки, бунда ҳар қандай $x \in R^n$ да

$$h(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \tag{30.35}$$

тенглик бажарилади. Умум қабул қилинган белгилашларга кўра $h = g \circ f$ ёзувдан фойдаланилади. $h = g \circ f \in Hom(R^n, R^l)$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ лар R^n га тегишли ихтиёрий векторлар, λ ва μ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин. У ҳолда, f ва g акслантиришларнинг чизиқли эканидан кетма-кет фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$h(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = g(f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})) = g(\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})) =$$

$$= g(\lambda f(\vec{x})) + g(\mu f(\vec{y})) = \lambda g(f(\vec{x})) + \mu g(f(\vec{y})) = \lambda h(\vec{x}) + \mu h(\vec{y}),$$

ана шунинг ўзи тасдиғимизни исботлайди.

f ва g алмаштиришларнинг матрицалари қуйидагидек бўлсин:

$$A_f = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{Vmatrix} \qquad A_g = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{l1} & g_{l2} & \dots & g_{lm} \end{Vmatrix}$$

$A_{g \circ f}$ матрицанинг кўринишини топамиз. Энг олдин, шуни қайд қиламизки $A_{g \circ f}$ матрица $l \times n$ ўлчамга эга, чунки $g_\circ f \in Hom(R^n, R^l)$ ва, демак, бу матрицанинг тўла ёзилиши бундай:

$$A_{g \circ f} = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{l1} & h_{l2} & \dots & h_{ln} \end{Vmatrix}$$

Ҳар қандай $\vec{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ учун

$$f(\vec{x}) = (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m')$$

векторнинг компонентлари ушбу формулалари бўйича топилади:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= f_{11}\alpha_1 + f_{12}\alpha_2 + \dots f_{1n}\alpha_n. \\ \alpha_2' &= f_{21}\alpha_1 + f_{22}\alpha_2 + \dots + f_{2n}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m' &= f_{m1}\alpha_1 + f_{m2}\alpha_2 + \dots + f_{mn}\alpha_n. \end{aligned} \tag{30.36}$$

Сўнгра ҳар қандай $\vec{y}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ учун $g(\vec{y})$ векторнинг компонентлари қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$\begin{aligned}
\beta_1' &= g_{11}\beta_1 + g_{12}\beta_2 + \ldots g_{1m}\beta_m,\\
\beta_2' &= g_{21}\beta_1 + g_{22}\beta_2 + \ldots + g_{2m}\beta_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_l' &= g_{l1}\beta_1 + g_{l2}\beta_2 + \ldots + g_{lm}\beta_m.
\end{aligned} \tag{30.37}$$

Шу сабабли $\vec{z}=g(f(\vec{x}))$ векторнинг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ компонентлари ушбу формулалар бўйича топилади:

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= g_{i1}(f_{11}\alpha_1 + f_{12}\alpha_2 + \ldots + f_{1n}\alpha_n) + \ldots +\\
&+ g_{im}(f_{m1}\alpha_1 + f_{m2}\alpha_2 + \ldots + f_{mn}\alpha_n) =\\
&= (g_{i1}f_{11} + g_{i2}f_{21} + \ldots g_{im}f_{m1})\alpha_1 +\\
&+ (g_{i1}f_{12} + g_{i2}f_{22} + \ldots + g_{im}f_{m2})\alpha_2 +\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ (g_{i1}f_{1n} + g_{i2}f_{2n} + \ldots + g_{im}f_{mn})\alpha_n,
\end{aligned} \tag{30.38}$$

бунда $i=1,2, \ldots, l$.

(30.38) формулаларни қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{m} g_{ik}f_{kj}\Big)\alpha_j, \qquad i=1,2, \ldots l. \tag{30.39}$$

Бундан A_{gof} матрицанинг h_{ij} элементи учун ушбу формула ўринли экани кўринади:

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik}f_{kj}, \tag{30.40}$$

бунда $i=1,2, \ldots, l;\ j=1,2, \ldots, n$.

Шундай қилиб,

$$A_{gof} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k}f_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k}f_{k2} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k}f_{kn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk}f_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk}f_{k2} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk}f_{kn} \end{Vmatrix}. \tag{30.41}$$

(30.37) ва (30.38) формулаларнинг анализи шуни кўрсатадики, A_{gof} матрица A_g ва A_f матрицалардан ушбу қоида бўйича тузилади: h_{ij} элемент A_{gof} матрицанинг i-сатри билан j-устунининг кесишган жойидаги элемент бўлсин. У ҳолда A_g матрицанинг i-сатри элементларини олиб, A_f матрицанинг j-устунининг мос элементларига кўпайтирамиз ва натижаларни қўшамиз. Бу ерда шуни қайд қилиш муҳимки, A_g матрица сатридаги элементлар сони A_f матрица устунидаги элементлар сонига тенг бўлиши керак (қаралаётган ҳолда бу сонларнинг иккаласи ҳам m га тенг).

(30.41) формулага векторлар нуқтаи назаридан қараш ҳам мумкин. Чунончи, агар A_g матрица сатрларини ва A_f матрица устунларини R^m нинг векторлари деб қаралса, у ҳолда h_{ij} элемент A_g матрицанинг i-сатрини A_f матрицанинг j-устунига скаляр кўпайтмаси бўлади.

Чизиқли акслантиришлар кўпайтмасининг матрицасини тузишнинг юқорида баён қилинган усули матрицаларни кўпайтиришни аниқлашга асос қилиб олинади. Чунончи ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицалар берилган бўлсин, буларнинг ўлчамлари мос равишда $l \times m$ ва $m \times n$ бўлсин (A матрицанинг устунлари сони B матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши муҳимдир). У ҳолда *A матрицанинг B матрицага кўпайтмаси деб ўлчами $l \times m$ га тенг бўлган C матрицага айтилади*, бунинг c_{ij} элементлари

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1,2, \dots, l; \ j = 1,2, \dots n) \tag{30.42}$$

формулалар бўйича топилади.

Биз қуйида A матрицанинг B матрицага кўпайтмасини $A \cdot B$ ёки AB кўринишда ёзамиз.

Мисоллар. 1. A ва B матрицаларнинг кўпайтмасини топинг, бунда:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига биноан ушбуга эга бўламиз:

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 1\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 0+2\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot 5 \\ 0\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 4 & 0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 5 \\ 3\cdot 0-1\cdot 2+0\cdot 4 & 3\cdot 0-1\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1-1\cdot 3+0\cdot 5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

2. $f: R^2 \to R^4$ акслантириш R^2 фазонинг $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ базисини мос равишда $\vec{u}_1 = (1, -1, 0, 2)$ ва $\vec{u}_2 = (0, 1, -2, 3)$ век-

торларга, $g: R^4 \to R^3$ акслантириш эса R^4 фазонинг $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ базисини мос равишда $\vec{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 5)$, $\vec{v}_4 = (-2, -1, 3)$ векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. f, g ва $g \cdot f$: $: R^2 \to R^3$ чизиқли акслантиришларга мос келувчи A_f, A_g, A_{gf} матрицаларни топиш керак.

30.2-пунктдаги 1-теоремадан A_f матрицанинг устунлари $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ векторлардан, A_g матрицанинг устунлари эса $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ векторлардан иборат экани келиб чиқади. Шунинг учун:

$$A_f = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\|, \qquad A_g = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Ниҳоят,

$$A_{gf} = A_g \cdot A_f = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \\ 5 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Шундай қилиб, $R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришлар тўплами билан тўғри бурчакли $M^{m,n}$ матрицалар тўплами орасида биектив мослик ўрнатилди, бунда акслантиришлар йиғиндисига, сон билан акслантиришнинг кўпайтмасига ва акслантиришларни кўпайтиришга матрицалар устида шундай амалларни (матрицалар йиғиндиси, сонни матрицага кўпайтириш ва матрицаларни кўпайтиришни) бажариш мос келади. Бу эса чизиқли акслантиришлар учун кўрсатилган амалларнинг хоссаларини тўғрилиги аниқланган бўлса, у ҳолда бу хоссалар матрицалар устида бажариладигин амаллар учун ҳам ўринли эканини тасдиқлаш имконини беради ва аксинча.

Мисол сифатида матрицалар учун кўпайтиришнинг ассоциативлигини исботлаймиз. Чунончи, агар $A - l \times m$ матрица, $B - m \times n$ матрица, C эса $n \times p$ матрица бўлса, $(AB)\,C$ ва $A\,(BC)$ кўпайтмалар аниқланган бўлади, булар $l \times p$ ўлчамли матрицалардир. Матрицаларни кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни шундан иборатки, бунда

$$(AB)C = A(BC) \tag{30.43}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. 30.2-пунктдаги 1-теоремадан $f \in Hom\,(R^p, R^n)$, $g \in Hom\,(R^n, R^m)$, $h \in Hom\,(R^n, R^l)$ акслантиришлар мавжуд бўлиб, бунда C матрица f акслантиришнинг матрицаси, B эса g акслантиришнинг, A эса h акслантиришнинг матрицаси экани келиб чиқади. Акслантиришларнинг $(hg)f$ ва $h(gf)$ кўпайтмалари аниқланган бўлиб, улар $Hom\,(R^n, R^l)$ га тегишли эканини осонгина кўриш мумкин. Агар биз

$$(hg)f = h(gf)$$

тенгликнинг тўғрилигини ўрнатсак, (30.43) формула исботланган бўлади. Аммо бу охирги тенглик исталган акслантиришларни кўпайтиришнинг ассоциативлик қонунининг хусусий ҳолидир.

Фойдали машқ сифатида чизиқли акслантиришларга мурожаат қилмасдан туриб, матрицаларни бевосита кўпайтиришнинг ассоциативлиги қонунини текширишни тавсия қиламиз.

30.5. Чизиқли операторлар ва квадрат матрицалар. Чизиқли акслантиришларнинг энг муҳим синфларидан бири R^n ни R^n га акслантиришлар синфидир. Шунга мос равишда барча матрицалар орасида квадрат матрицалар синфи муҳим синфлардандир. Чизиқли операторлар ва квадрат матрицалар устида амаллар бажаришнинг бир қатор хоссаларини кўриб чиқамиз. Одатдагидек, баён қилишни квадрат матрицалар учун олиб борамиз. Чизиқли операторлар учун, 30.4- пункт охирида кўрсатилганидек, бу хоссалар бутунлай сақланади.

2-теорема. *n-тартибли квадрат матрицалар учун ушбу муносабатлар ўринли:*

1. $A+B=B+A$,
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$,
3. $A\,(BC)=(AB)\,C$,
4. $(A+B)\,C=AC+BC,\ C\,(A+B)=CA+CB$.

Теоремани исботлашдан олдин, шуни қайд қиламизки, ҳар доим иккита чизиқли операторларнинг (R^n ни R^n га) кўпайтмаси тушунчаси ва n- тартибли иккита квадрат матрица кўпайтмаси тушунчаси аниқланган бўлади. Шунинг учун 1—4- теоремаларнинг муносабатларига кирувчи барча кўпайтмалар маънога эга.

1 ва 2- хоссалар юқорида ҳар қандай $m\times n$ ўлчамли матрицалар учун ўрнатилган эди, 3- хосса эса 30.4- пунктнинг охирида исботланди. Энди

$$(A+B)\,C=AC+BC \tag{30.44}$$

эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, агар h_{ij}, g_{ij}, f_{ij} лар мос равишда $(A+B)\,C$, AC, BC матрицаларнинг бир хил индексли ихтиёрий элементлари бўлса, у ҳолда

$$h_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})\,c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}=g_{ij}+f_{ij},$$

бу эса (30.45) муносабатнинг тўғрилигини исботлайди. $A\,(B+C)=$ $=AB+AC$ муносабатнинг тўғрилиги ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Умумий тўғри бурчакли матрицалар учун матрицаларнинг AB кўпайтмаси аниқлангани билан, ҳали BA кўпайтма мазмунга эга бўлавермайди, чунки B нинг устунлари сони A нинг сатрлари сонига тенг бўлмай қолиши ҳам мумкин. n- тартибли квадрат матрицалар ҳолида ҳар қандай A ва B матрицалар учун ҳар доим AB ва BA кўпайтманинг иккаласи ҳам аниқланган. Шунга қарамай, ҳар доим ҳам $AB=BA$ бўлавермайди, яъни n- тартибли квадрат матрицалар ($n \geqslant 2$) учун коммутативлик қонуни ўринли бўлмайди. Қуйидаги учинчи тартибли матрицалар бунга энг содда мисол бўла олади:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ушбуларга эгамиз:

$$AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad BA = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Бундан $AB \neq BA$ экани кўриниб турибди.

Квадрат матрицаларни ва чизиқли операторларни кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни квадрат матрицаларнинг ва чизиқли операторларнинг натурал кўрсаткичли даражаларини аниқлаш имконини беради. Агар A ихтиёрий n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда:

$$\begin{aligned} &A^1 = A, \\ &A^2 = A \cdot A, \\ &A^3 = A \cdot (A^2) = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot A \cdot A, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A^n = A(A^{n-1}) = \dots = A \cdot A \cdot \dots \cdot A, \end{aligned}$$

бундан ташқари, таърифга кўра $A^0 = E$ га эгамиз, бунда

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

бирлик матрица. Матрица даражаларининг ушбу

$$a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

кўринишдаги чизиқли комбинациялари матрицалардан иборат *n-тартибли полином* дейилади, бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ — ҳақиқий сонлар ва $a_n \neq 0$.

Чизиқли операторларнинг даражалари ва чизиқли операторлардан тузилган полиномлар худди шунга ўхшаш киритилади.

31-§. Поличизиқли (кўпчизиқли) формалар

Шуни эслатиб ўтамизки, ҳар қандай U тўпламнинг ҳақиқий сонлар тўплами R^1 га f аксланишини кўпинча функция дейишади (29.2-пунктга қаранг). Бу термин қуйида систематик қўлланилади.

31.1. Чизиқли формалар. R^n ни R^1 га чизиқли акслантиришни *чизиқли форма* дейилади. Агар $f . R^n \to R^1$ чизиқли форма бўлса, у ҳолда 30.2- пунктга биноан f акслантиришнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A_f = \| a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \|, \tag{31.1}$$

яъни $1 \times n$ матрицадан иборат ва A_f ни R^n даги вектор сифатида қараш мумкин. Ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$f(\vec{x}) = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = (A_f, \vec{x})$$

бўлгани сабабли R даги ҳар қандай f чизиқли форма скаляр кўпайтмадан иборат бўлиб, бунда векторлардан бири A_f тайинланган, иккинчиси $\vec{x}$ эса ўзгарувчидир. $a_{1k} = f(\vec{e}_k)$, $k = 1,2, \cdots, n$ эканини эслатиб ўтамиз.

Ушбу

$$f(\vec{x}) = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4$$

ва

$$g(\vec{x}) = -\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 - 5\alpha_5 + \alpha_6 - 7\alpha_7$$

функциялар, (бунда α_i компонентли $\vec{x}$ ё R^4, ёки R^7 га тегишли ихтиёрий вектор), бу вектор конкрет чизиқли формалар мисолларини беради. Шуни қайд қиламизки,

$$A_f = \| 3 \quad 2 \quad -3 \quad 4 \|$$

ва

$$A_g = \| -1 \quad -1 \quad 3 \quad 2 \quad -5 \quad 1 \quad -7 \|.$$

31.2 Поличизиқли формалар. R^n фазо m та векторининг мумкин бўлган барча тартибланган тўпламида берилган $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..,.\vec{x}_m)$ функция, агар f бир аргумент бўйича бошқа аргументларнинг қийматлари ўзгармас бўлган ҳолда чизиқли форма бўлса, у ҳолда *m- чизиқли форма* дейилади. Бу таърифни қисқача бундай ифодалаймиз: агар

$$f: \underbrace{R^n \times R^n \times \cdots \times R^n}_{m \text{ марта}} \to R^1$$

ҳар бир кўпайтувчиси бўйича чизиқли форма бўлса, у m- чизиқли формадир.

Агар $R^n \times R^n \times \cdots \times R^n$ да кўпайтувчилар сони кўрсатилмаган бўлса, у ҳолда форма тўғридан-тўғри *поличизиқли* (кўпчизиқли) форма дейилади. $\underbrace{R^n \times R^n \times \cdots \times R^n}_{m \text{ марта}}$ фазо билан $m \times n$ матрицаларнинг $M^{n,\, m}$ тўплами орасида ўрнатилган мосликка биноан (30.1- пунктга қаранг) m- чизиқли формани яна бундай аниқлаш ҳам мумкин:

Агар $f: M^{n,m} \to R^1$ функция ҳар бир устуннинг, бошқа устунларнинг тайинланган қийматларида чизиқли формаси бўлса, у ҳолда бу функция m-чизиқли форма дейилади, яъни $k=1,2, \ldots, m$ да ушбу муносабатлар бажарилади:

$$f\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \lambda a'_{1k}+\mu a''_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \lambda a'_{2k}+\mu a''_{2k} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \lambda a'_{nk}+\mu a''_{kn} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \lambda f\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nk} & \cdots & a_{nm} \end{Vmatrix} + \qquad (31.2)$$

$$+ \mu f\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a''_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a''_{2k} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a''_{nk} & \cdots & a_{nm} \end{Vmatrix}.$$

Шуни қайд қиламизки, (31.2) муносабатларга кирган матрицаларда k-устундан бошқа устунларнинг ҳаммаси бир хилдир.

Бундан кейин баённи соддалаштириш мақсадида m-чизиқли форма дейиш ўрнига тўғридан-тўғри m-форма деяверамиз.

Қуйида 2-форма ва n-формаларгина муҳим роль ўйнайди. Бу формаларнинг хоссаларини мукаммалроқ кўриб чиқамиз.

31.3 Бичизиқли ва квадратик формалар. 2-формаларни одатда *бичизиқли формалар* дейишади. $f: R^n \times R^n \to R^1$ — бичизиқли форма ва

$$\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \quad \vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

$R^n \times R^n$ га тегишли векторларнинг тартибланган жуфтлари бўлсин. У ҳолда, f нинг бичизиқлилигидан фойдаланиб, топамиз:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k\right) \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \beta_k f(\vec{e}_i, \vec{e}_k).$$

Бундан ҳар қандай бичизиқли форманинг базис векторлардан иборат мумкин бўлган барча тартибланган $(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ жуфтлардаги қийматлари маълум бўлса, бу форма тўла аниқланган бўлиши кўринади.

$$f_{ik} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_k), \quad i, k = 1, 2, \cdots, n \qquad (31.3)$$

деб оламиз. f_{ik} сонлар ушбу квадрат матрицани ташкил қилади:

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{2n} & \cdots & f_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{31.4}$$

дастлабки f бичизиқли форма бу матрица ёрдамида бундай ёзилади:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\alpha_i\beta_k. \tag{31.5}$$

F матрица *f бичизиқли форманинг матрицаси* дейилади.

Аксинча, агар $F = \| f_{ik} \|$ — ихтиёрий n-тартибли квадрат матрица, $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ бўлса, у ҳолда

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\alpha_i\beta_k \tag{31.6}$$

кўринишдаги функция бирор $f: R^n \times R^n \to R^1$ акслантиришни аниқлайди. (31.6) дан бевосита f — бичизиқли форма ва $f(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = f_{ik}$ экани, яъни F (31.6) бичизиқли форманинг матрицаси экани кўринади.

Шундай қилиб, теорема исботланди.

1-теорема. *Ҳар қандай $f: R^n \times R^n \to R^1$ бичизиқли форма шу форманинг*

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{Vmatrix} \tag{31.7}$$

матрицаси билан тўла аниқланади, бунда $f_{ik} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ базисдаги векторларнинг компонентлари орқали ушбу

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\alpha_i\beta_k$$

формула билан ифодаланади.

Аксинча, агар $F = \| f_{ik} \|$ ихтиёрий n-тартибли матрица бўлса, (31.5) кўринишдаги функция $f: R^n \times R^n \to R^1$ бичизиқли формани аниқлайди, F бу форманинг матрицасидир.

Бичизиқли формалар орасида E бирлик матрицадан иборат бўлган энг содда матрица F_0 матрицадир, яъни

$$f_{ik}^0 = \begin{cases} \text{агар } i = k \text{ бўлса, } 1, \\ \text{агар } i \neq k \text{ бўлса, } 0, \end{cases}$$

Шу сабабли қаралаётган бичизиқли форма ушбу кўринишга эга.

$$f_0(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

28.2-пунктдан бу форма R^n даги скаляр кўпайтмани ифодалаши келиб чиқади. Бичизиқли формалар билан скаляр кўпайтмалар орасидаги боғланиш VI ва VII бобларда тўлароқ ўрганилади.

Агар исталган $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ учун

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}) \tag{31.8}$$

бўлса, у ҳолда f бичизиқли форма *симметрик форма* дейилади. $\vec{e}_i$ ва $\vec{e}_k$ векторлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ базисга қарашли ихтиёрий векторлар бўлсин. У ҳолда (31.8) дан

$$f_{ik} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = f(\vec{e}_k, \vec{e}_i) = f_{ki}$$

экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, бичизиқли симметрик f форманинг

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрицаси шундайки, ҳар қандай i, k да

$$f_{ik} = f_{ki} \tag{31.9}$$

тенглик ўринли бўлади.

(31.9) шартни қаноатлантирувчи матрица *симметрик матрица* дейилади. Бу ном шу фактни таъкидлайдики, F матрицанинг бош диагонали унинг симметрия ўқидир. Равшанки, F симметрик матрица ўзининг транспонирланган матрицаси билан бир хилдир (30.1-пунктга қаранг), яъни $F^* = F$.

Агар бичизиқли f форманинг матрицаси симметрик бўлса, у ҳолда форманинг ўзи симметрик бўлади. Ҳақиқатан,

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\alpha_i\beta_k = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ki}\alpha_i\beta_k = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ki}\beta_k\alpha_i = f(\vec{y}, \vec{x}).$$

D^n орқали $R^n \times R^n$ нинг $(\vec{x}, \vec{x})$ (бунда $\vec{x} \in R^n$) жуфтлардан тузилган қисм тўпламини белгилаймиз, D^n ни $R^n \times R^n$ *тўпламнинг диагонали* дейилади.

$f: R^n \times R^m \to R^1$ — симметрик бичизиқли форма бўлсин. У ҳолда f нинг D^n га сиқилиши, яъни

$$f|_{D^n}: D^n \to R^1$$

квадратик форма дейилади. Ушбу белгилашни киритамиз: $\varphi_f = f|_{D^n}$. φ_f квадратик форма $\vec{x}$ векторнинг компонентлари орқали бундай ёзилади:

$$\varphi_f(\vec{x}, \vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}\alpha_i\alpha_k. \tag{31.10}$$

Шундай қилиб, квадратик формани ёзиш учун ўша F матрицанинг ўзидан, яъни бу квадратик формани пайдо қилган бичизиқли симметрик f форманинг матрицасидан фойдаланилади. Бунда фарқ шундаки, квадратик функция битта $\vec{x}$ векторнинг функцияси, бичизиқли форма эса векторлар тартибланган жуфтининг функциясидир. Бу фарқ квадратик форма $R^n \times R^n$ тўпламнинг D^n диагоналида аниқланганлигидан, f бичизиқли форма эса бутун $R^n \times R^n$ аниқланганлигидан келиб чиқади.

Қуйида, агар англашилмовчилик келиб чиқмайдиган бўлса, квадратик формани бу формани вужудга келтирган бичизиқли симметрик форма белгиланган ҳарф билан белгилаймиз.

31.4. Чизиқли акслантиришларни ва бичизиқли формаларни матрицалар ёрдамида ёзиш. $f: R^n \to R^m$ — чизиқли акслантириш бўлсин. У ҳолда R^n даги $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ базисларга тегишли векторлар ва R^m даги $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \cdots, \vec{e}\,'_m$ базисга тегишли векторлар компонентлари орқали f акслантириш бундай ёзилади:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_m' &= a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n, \end{aligned} \tag{31.11}$$

бунда

$$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицанинг устунлари $f(\vec{e}_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ векторлардан иборат.

Агар R^n ва R^m га тегишли векторлар бир устунли матрицалар тарзида ифодаланган бўлса (30.1-пунктга қаранг), у ҳолда (31.11) формулалар ушбу қулай кўринишни олади:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{Vmatrix} \tag{31.12}$$

Бунда

$$\vec{x}' = \begin{Vmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_m' \end{Vmatrix} \in R^m, \qquad \vec{x} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} \in R^n,$$

деб олиб, $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш векторлар ва матрицалар ёрдамида бундай ёзилишига эга бўламиз:

$$\vec{x}' = A_f \cdot \vec{x}. \tag{31.13}$$

f акслантириш R^n ни R^m га акслантиришдаги чизиқли оператор бўлган ҳолда (31.13) формуладан фойдаланиш айниқса қулай. Бу ҳолда $\vec{x}$ ва $\vec{x}'$ лар R^n га тегишли, A_f эса n-тартибли квадрат матрица бўлади.

Энди a: $R^n \times R^n \to R^1$ бичизиқли форма бўлсин. Бу ҳолда a чизиқли форма $\vec{x}$, $\vec{y} \in R^n$ векторларнинг компонентларига нисбатан (31.3-пунктга қаранг) ушбу кўринишга эга:

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\beta_k, \tag{31.14}$$

бунда $A = \| a_{ik} \|$ бичизиқли a форманинг матрицасидир. $f_a: R^n \to R^n$ чизиқли операторни қараймиз, бу оператор A матрица билан берилади:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n' &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned}$$

Энди A га нисбатан транспонирланган A^* матрица билан бериладиган $f_a^*: R^n \to R^n$ операторни қараймиз.

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{22}\alpha_2 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n' &= a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned}$$

f_a^* операторни одатда f_a операторга *қўшма оператор* дейилади.

(31.14) ва (31.13) формулалардан қуйидаги айниятлар ўринли экани келиб чиқади:

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\beta_k = (\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, f_a^*(\vec{y})) \tag{31.15}$$

ва

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\beta_k = (A^*\vec{x}, \vec{y}) = (f_a^*(\vec{x}), \vec{y}). \tag{31.16}$$

Шундай килиб, қуйидаги теорема ўринлидир.

2-теорема. *Ҳар қандай $a: R^r \times R^n \to R^1$ бичизиқли форма шундай $f_a: R^n \times R^n \to R^n$ чизиқли операторни вужудга келтирадики,*

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \overrightarrow{f_a(y)}) = (f_a^*(\vec{x}), \vec{y})$$

тенглик ўринли бўлади, бунда f_a^* оператор f_a операторга қўшма оператордир.

Шуни қайд қиламизки, кўпинча

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \overrightarrow{Ay}) + (A^*\vec{x}, \vec{y}) \tag{31.17}$$

формулалардан фойдаланиш қулай бўлади. (31.17) муносабатни кўпинча бундай талқин этиш фойдалидир: агар A матрица n-тартибли квадрат матрица, A^* эса унинг транспонирланган матрицаси бўлса, A ни $(\vec{x}, A\vec{y})$ скаляр кўпайтмада $\vec{y}$ вектордан $\vec{x}$ векторга «ташлаш» (ўтказиш) A матрицани A^* матрица билан алмаштиришга олиб келади.

Агар $f: R^n \to R^n$ чизиқли оператор ўзининг қўшмаси билан бир хил, яъни $f = f^*$ бўлса, у ҳолда у ўзига *қўшма оператор* дейилади. Агар A матрица симметрик бўлса, f ўзига қўшма бўлиши равшан, бунинг аксинчаси ҳам тўғри.

$a: R^n \times R^n \to R^1$ симметрик бичизиқли форма учун (31.17) формулалар ушбу кўринишни олади:

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) = (f_a(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, f_a(\vec{y})). \tag{31.18}$$

Хусусан, a симметрик бичизиқли форма вужудга келтирган $\varphi_a(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форма учун ушбуга эгамиз:

$$\varphi_a(\vec{x}, \vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{x}, A\vec{x}). \tag{31.19}$$

3-теорема. *Агар барча $\vec{x}$ ва $\vec{y} \in R^n$ ларда*

$$(A_1\vec{x}, \vec{y}) = (A_2\vec{x}, \vec{y}) \tag{31.20}$$

тенглик ўринли бўлса, иккита n-тартибли A_1 ва A_2 квадрат матрица тенг бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан, ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ учун (31.20) тенгликдан ушбуга эгамиз.

$$0 = (A_1\vec{x}, \vec{y}) - (A_2\vec{x}, \vec{y}) = ((A_1 - A_2)\vec{x}, \vec{y}).$$

Бу айниятда

$$\vec{y} = (A_1 - A_2)\vec{x}$$

деб оламиз, у ҳолда

$$((A_1 - A_2)\vec{x},\ (A_1 - A_2)\vec{x}) = 0$$

ва скаляр кўпайтманинг хоссасига кўра (28.2-пунктга қаранг) ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун ушбу тенгликка эгамиз:

$$(A_1 - A_2)\vec{x} = \Theta$$

Бундан $A_1 - A_2 = \Theta_n$, бунда Θ_n — ноль матрица ва, демак, $A_1 = A_2$.

4-теорема. *Иккита ҳар қандай n-тартибли квадрат матрица учун*

$$(AB)^* = B^*A^*$$

тенглик ўринли.

Исбот. R^n ни R^n га акслантиришдаги A ва B матрицалар вужудга келтирган чизиқли операторларни f_A ва f_B билан белгилаймиз, уларга қўшма операторларни эса f_A^* ва f_B^* орқали белгилаймиз. Шуни эслатиб ўтамизки, f_A^* ва f_B^* операторларни A^* ва B^* матрицалар вужудга келтиради.

(31.17) дан ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ учун

$$(\vec{x},\ AB\vec{y}) = ((AB)^*\vec{x},\ \vec{y}) \qquad (31.21)$$

тенглик ўринли экани келиб чиқади. Бошқа томондан,

$$(\vec{x},\ AB\vec{y}) = (\vec{x},\ (f_A \circ f_B)(\vec{y})) = (\vec{x},\ f_A(f_B(\vec{y}))) = (f_A^*(\vec{x}),\ f_B(\vec{y})) =$$

$$= (f_B^*(f_A^*(\vec{x})),\ (\vec{y}) = ((f_B^* \circ f_A^*)(\vec{x}), \vec{y}) = (B^*A^*\vec{x}, \vec{y}). \qquad (31.22)$$

(31.21), (31.22) дан ва 3-теоремадан

$$(AB)^* = B^*A^*$$

экани келиб чиқади.

31.5. n-формалар. $f : \underbrace{R^n \times R^n \times \ldots \times R^n}_{n \text{ марта}} \to R^1$ n-форма бўлсин. R^n га тегишли n та векторларнинг тартибланган системасини қараймиз:

$$\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{Vmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{Vmatrix}, \ \ldots, \quad \vec{x}_n = \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Бунда, 30.1-пунктга биноан, компонентларнинг ёзилишидаги иккитадан индексларнинг мазмуни бундай: биринчиси вектор компоненти номерини, иккинчиси эса вектор номерини кўрсатади.

n-форманинг таърифига биноан:

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1 1}\vec{e}_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_{i_2 2}\vec{e}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=2}^{n} \alpha_{i_n n}\vec{e}_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} \alpha_{i_1 1}\alpha_{i_2 2} \ldots \alpha_{i_n n} f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}) \alpha_{i_1 1}\alpha_{i_2 2} \ldots \alpha_{i_n n}. \qquad (31.23)$$

(31.23) формуладан ҳар қандай n-форма ўзининг $\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}$ векторлардан олинган тартибланган қийматлари тўплами билан тўла аниқланиши кўринади, бунда бу векторларнинг ўзаро тенглари, яъни бир хиллари бўлиши ҳам мумкин. $\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}$ векторлар ўзининг табиий тартибида ёзилмаган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базиснинг элементлари.

m-форманинг қийшиқ симметриклиги ҳақидаги муҳим тушунчани киритамиз. Агар m-форма f нинг иккита вектор аргументининг ўринларини алмаштирганда форманинг қиймати минус бирга кўпайтирилса, яъни ушбу тенглик ўринли бўлса:

$$f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_k, \vec{x}_{l+1}, \ldots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_l, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_m) =$$

$$= -f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_l, \vec{x}_{l+1}, \ldots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_m) \qquad (31.24)$$

бу форма *қийшиқ симметрик форма* дейилади. Қийшиқ симметрик форма муҳим хоссага эга: *агар вектор аргументларнинг орасида, иккитаси тенг бўлса* ($\vec{x}_l = \vec{x}_k$), *у ҳолда векторларнинг бу системасида f форманинг қиймати нолга тенг бўлади.*

Ҳақиқатан, (31,24) формула ва $\vec{x}_l = \vec{x}_k$ эканидан фойдаланиб, топамиз:

$$2f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{l-1}, \vec{x}_l, \vec{x}_{l+1}, \ldots, \vec{x}_{k-1}, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \ldots, \vec{x}_m) = 0.$$

Шу билан айтилган фикр исботланди.

R^2 даги 2-формаларга қуйидаги формалар мисол бўлади:

$$f_1(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_{11}\alpha_{12} + 2\alpha_{21}\alpha_{22},$$

$$f_2(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \equiv \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}.$$

R^3 даги 3- формаларга

$$f_3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = a_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} + 3\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{33} \quad f_4(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

формалар мисол бўлади; f_2 ва f_4 — қийшиқ симметрик формалар, қолганлари қийшиқ симметрияга эга эмас.

Энди f қийшиқ симметрик n-форма бўлсин. У ҳолда $f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n})$ сон $\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}$ векторларнинг ҳаммаси бир-биридан фарқли бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина нолдан фарқли бўлади. Демак, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ сонлар $1, 2, 3, \ldots, n$ натурал сонларнинг ўрин алмаштиришини ташкил қилади.

$i_1, i_2, \ldots, i_n$ сонларнинг ўрин алмаштиришидан $1, 2, \ldots, n$ сонларнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган ўрин алмаштириши қандай ҳосил бўлишини қараймиз. $i_1, i_2, \ldots, i_n$ сонларнинг ўрин алмаштиришида иккита қандайдир қўшни соннинг ўрнини алмаштириш амалини *транспозиция* деймиз. Масалан, $i_2, i_1, i_3, \ldots, i_n$ ўрин алмаштириш $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришдан транспозиция ёрдамида ҳосил бўлган $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришни $1, 2, \ldots, n$ ўрин алмаштиришга айлантириш учун нечта транспозиция бажариш керак? Агар $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ сонлар орасида i_k сондан катта сонлар бўлса, у ҳолда i_k сон инверсия ҳосил қилади ёки $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришда тартибни бузади дейилади. Масалан, агар $n = 5$ бўлса, у ҳолда 2, 4, 3, 1, 5 ўрин алмаштиришда 1 сони учга инверсия, 3 сони битта инверсия ҳосил қилади, 2, 4, 5 сонлари эса битта ҳам инверсия ҳосил қилмайди.

$i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришнинг сонлари орасида 1 сони бор. 1 сонини, ундан чапда турган сонларнинг ҳаммаси билан транспозиция ёрдамида алмаштириб, биринчи ўринга ёзамиз. Бу сонларнинг ҳаммаси билан 1 сони инверсия ҳосил қилади. Шу сабабли 1 сонини биринчи ўринга ўтказиш учун 1 сони $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришда нечта инверсия ҳосил қилса, шунча транспозиция қилиш керак. Сўнгра 2 сони билан шундай иш бажариб, уни иккинчи ўринга ўтказамиз. Бунда 2 сони $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришда нечта инверсия ҳосил қилса, шунча транспозиция бажариш керак. Бу процессни давом эттириб, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришни $1, 2, 3, \ldots, n$ ўрин алмаштиришга айлантирамиз. Бунда $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришнинг барча элементлари бажарган инверсиялари йиғиндиси нечта бўлса, шунча транспозиция бажариш керак. Инверсияларнинг бу сонини $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ билан белгилаймиз.

$\vec{e}_{i_k}$ ва $\vec{e}_{i_{k+1}}$ векторларнинг ҳар бир транспозициясида $f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n})$ ифода ишорасини ўзгартиргани учун ушбу формула ўринли:

$$f(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}) = (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n). \quad (31.25)$$

(31.24) ва (31.25) формулаларда хулосаланган юқоридаги мулоҳазалардан ушбу теорема келиб чиқади.

5-теорема $f: R^n \times R^n \times \ldots \times R^n \to R^1$ — *қийшиқ симметрик n-форма бўлсин, у ҳолда R^n фазонинг ихтиёрий*

$$\vec{x}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{Vmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{Vmatrix}, \ldots, \quad \vec{x}_n = \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

векторлари учун ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = f_0 \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \alpha_{i_1 1} \alpha_{i_2 2} \ldots \alpha_{i_n n}, \tag{31.26}$$

бунда f_0 — векторларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ тартибланган системасида f нинг қийматига тенг бўлган ўзгармас: $f_0 = f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

32-§. n-тартибли детерминантлар

32.1. Асосий таърифлар. m-форманинг $n \times m$ матрицаларнинг $M^{n,m}$ тўпламидаги функция сифатидаги таърифига биноан (31.2-пунктга қаранг) бундан кейин биз n-формани n-тартибли матрицаларнинг M^n тўпламида берилган функция деб ҳисоблаймиз. Бундай функция матрицанинг ҳар бир устунида, бошқа устунлар ўзгармас бўлганда чизиқли формадир. Бунинг тўла ёзуви (31.2) формулаларда берилган (31.2-пунктга қаранг).

$\det: M^n \to R^1$ n-формани, агар у қийшиқ симметрик ва $\det E = 1$ бўлса, *детерминант форма* деймиз, бунда E — бирлик матрица.

31.5-пунктнинг 5-теоремасига мувофиқ ҳар қандай

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \in M^n$$

матрица учун ушбуга эгамиз:

$$\det A = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}. \tag{32.1}$$

Бундан, n-форма $\det$ нинг қийшиқ симметрик бўлиши талаби ва уни нормалаш шарти ($\det E = 1$) бу формани бир қийматли аниқлаши кўринади. Шуни қайд қиламизки, (32.1) тенгликнинг ўнг қисмидаги ҳар бир қўшилувчига ҳар бир сатрдан биттадан ва ҳар бир устундан биттадан элемент киради.

det детерминант форманинг M^n даги матрицалар орқали ифодаланган қийматлари n-тартибли *аниқловчилар* ёки *детерминантлар* дейилади. n-тартибли детерминантларни det деб белгилашдан ташқари бошқа белгилашларни ҳам ишлатилади:

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{32.2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{32.3}$$

$$|A| \text{ ёки } |a_{ik}|. \tag{32.4}$$

Бунда (32.3) ва (32.4) белгилашлар энг кўп ишлатиладиган белгилашлардир. (32.2) ва (32.3) ёзувларда детерминантни вужудга келтирган матрицаларнинг сатрлари ва устунлари, шунингдек, детерминантнинг ҳам устунлари ва сатрлари дейилади.

(32.1) тенглик детерминантни бевосита ҳисоблаш мумкин бўлган формуладир. Шунга қарамай, бу формуладан амалда кичик тартибли детерминантларни ҳисоблашдагина фойдаланилади, чунки (32.1) нинг ўнг томонидаги қўшилувчилар сони $n!$ га тенг ва, демак, n ўсиши билан фавқулодда тез ўсади.

Бевосита текшириш ёрдамида (32.1) дан II боб, 15-§ да ўрганилган иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларнинг таърифлари келиб чиқишига ишонч ҳосил қилишимиз мумкин. Детерминантларни ҳисоблаш конкрет кўп номаълумли чизиқли тенгламаларнинг системаларини ечишда фундаментал роль ўйнайди, механиканинг, физиканинг ва техниканинг ҳар қандай татбиқий масаласи амалда бу системаларга келтирилади. Шунинг учун n-тартибли детерминантларни ҳисоблашда, (32.1) формуладан бевосита фойдаланишга қараганда, натижаларни топишнинг бирмунча қулай умумий усулларини топиш имкониятини берадиган хоссаларини ўрганиш мустақил қизиқиш туғдиради. Бу усуллар детерминантларнинг хоссаларига асосланади.

32.2. Детерминантларнинг хоссалари. Бундан кейин шу параграф давомида n-тартибли квадрат матрицалар ва n-тартибли детерминантлар қаралади, буни ҳар гал алоҳида қайд қилиб ўтирилмайди.

1-хосса. *Ҳар қандай A матрица учун*

$$\det A = \det A^*. \tag{32.5}$$

Бошқача айтганда, агар A матрицада устунлар сатрлар билан алмаштирилса, ҳосил бўлган A^* матрицанинг детерминанти A матрица детерминантига тенг бўлади

(31.23) формуладан ушбу муносабат келиб чиқади:

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \det (E_{i_1 i_2 \ldots i_n}) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}, \quad (32.6)$$

бунда $E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ — матрица бўлиб, унинг устунлари $\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \ldots, \vec{e}_{i_n}$ векторлардан иборат. Агар энди $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришдан 31.5-пунктда тавсифланганидек транспозиция билан $1, 2, \ldots, n$ ўрин алмаштиришга ўтилса, ушбуга эга бўламиз:

$$\det E_{i_1 i_2 \ldots i_n} = (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)} \det E = (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)}, \quad (32.7)$$

бунда $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ифода $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони. Ана шу соннинг ўзи, яъни $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ сон $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ўрин алмаштиришдан $1, 2, \ldots, n$ ўрин алмаштиришга ўтиш учун бажарилган транспозициялар сонидир. Агар энди ўша транспозициялар ёрдамида $E_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ матрицанинг устунлари билан биргаликда $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$ кўпайтмадаги кўпайтувчиларнинг ўринларини ҳам алмаштирсак, кўпайтма $a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}$ кўринишни олишини кўрамиз. Бунда $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ транспозициялар ёрдамида $1, 2, \ldots, n$ ўрин алмаштиришдан $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ўрин алмаштиришга ўтамиз. Бу $E_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ матрицани, унинг устунларини $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ транспозициялар ёрдамида E бирлик матрицага ўтказиш мумкин деган сўздир. Шунинг учун.

$$\det E_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)} \det E = (-1)^{I(i_1, \ldots, i_n)}. \quad (32.8)$$

Бошқа томондан,

$$(-1)^{I(i_1 i_2, \ldots, i_n)} = (-1)^{I(j_1, j_2, \ldots, j_n)}. \quad (32.9)$$

(32.8) ва (32.9) дан ушбуга эга бўламиз:

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} (-1)^{I(j_1, \ldots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}. \quad (32.10)$$

(32.7) ва (32.10) дан ушбуга эга бўламиз:

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} (-1)^{I(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}, \quad (32.11)$$

аммо (32.1) га биноан

$$\det A^* = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} (-1)^{I(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \ldots a_{n j_n}, \quad (32.12)$$

чунки A^* матрицада a_{ik} элементнинг иккинчи индекси сатр номерини кўрсатади. (32.11) ва (32.12) дан

$$\det A = \det A^*$$

экани келиб чиқади.

Шу билан 1-хосса исботланди.

1-хоссадан детерминантдаги устун ва сатрларнинг роллари бир хил ва агар бирор фикр устунлар учун тўғри бўлса, у фикр сатрлар учун ҳам ўринли бўлиши келиб чиқади.

2-хосса. *Агар детерминантда иккита устун ёки иккита сатрнинг ўринлари алмаштирилса, у ҳолда детерминант минус бирга кўпайтирилади.*

3-хосса. *Агар детерминантда иккита устун ёки иккита сатр ўзаро тенг бўлса, у ҳолда детерминант нолга тенг бўлади.*

Бу хоссаларнинг устунлар учун ўринли экани детерминант форманинг қийшиқ симметриклигидан бевосита келиб чиқади, сатрлар учун эса 1-хоссага биноан ўринли бўлади.

4-хосса. *Исталган устун ёки исталган сатр элементлари учун умумий бўлган кўпайтувчини детерминант белгисидан ташқари чиқариш мумкин.*

5-хосса. *Ҳар қандай детерминант учун ушбу айният ўринли:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a'_{1k}+a''_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a'_{2k}+a''_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a'_{nk}+a''_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a'_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a'_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a'_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a''_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a''_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a''_{kn}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (32.13)$$

сатрлар учун ҳам бу айният ўринли.

4 ва 5-хоссанинг устунлар учун ўринли экани бевосита детерминант форма ҳар бир устун бўйича чизиқли форма эканидан келиб чиқади, сатрлар учун эса бу хоссалар 1-хоссага биноан ўринли.

5 ва 3-хоссалардан бевосита қуйидаги 6-хосса келиб чиқади.

6-хосса. *Агар детерминантнинг исталган устуни (сатри) элементларига бошқа устун (сатр) элементларини бир хил сонга кўпайтириб қўшилса, бундан детерминант ўзгармайди.*

Бу хосса 5 ва 2-хоссалардан бевосита келиб чиқади.

32.3. Детерминантни устуни ёки сатри бўйича ёйиш. Учинчи тартибли детерминантларни ўрганганда (II боб, 15-§ га қаранг) учинчи тартибли детерминантни иккинчи тартибли детерминант орқали ифодаловчи формула муҳим роль ўйнаган эди. Қуйида бу формуланинг n-тартибли детерминантлар учун тўла аналогини чиқарамиз, бу формула n-тартибли детерминантларни топишни $n-1$-тартибли детерминантларни топишга келтиради. Учинчи тартибли детерминантлардан исталган тартибли детерминантларга ўтишда бу формуланинг роли орта боради.

Ҳар бир

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{ik} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (32.14)$$

n-тартибли детерминант n^2 та $(n-1)$-тартибли детерминантларни вужудга келтиради, бу детерминантларнинг ҳаммаси Δ дан i-сатр ва k-устунни, ($i=1, 2, \dots, n$, $k=1, 2, \dots, n$) ўчириш йўли билан ҳосил бўлади. Бу $(n-1)$-тартибли детерминантлар Δ детерминантларнинг *минорлари* дейилади ва Δ_{ik} билан белгиланади. i ва k индекслар мос равишда Δ дан ўчирилувчи сатр ва устун номерларини кўрсатади. Кўпинча Δ_{ik} ни a_{ik} элементнинг минори дейишади, чунки бу элемент Δ дан ўчириладиган устун ва сатр номерларини бир қийматли кўрсатади.

Детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси деб

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik} \qquad (32.15)$$

сонни айтилади. Шуни қайд қиламизки, учинчи тартибли детерминант элементларининг минорлари ва алгебраик тўлдирувчилари (II боб, 15-§ га қаранг) юқоридаги тушунчаларнинг хусусий ҳолларидир.

1-теорема (детерминантни устуни ёки сатри бўйича ёйиш ҳақидаги теорема). Ҳар қандай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант бирор устуни ёки сатри элементлари билан уларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Исбот. 1-хоссадан (32.2-пункт) теореманинг тасдиғини Δ детерминантнинг устунлари учунгина исботлаш етарли экани келиб чиқади.

Дастлаб, Δ детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 \ \ a_{22} a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 \ \ a_{32} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ 0 \ \ a_{n2} a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (32.16)$$

кўринишга эга бўлган ҳолни қараймиз. У ҳолда

$$\Delta = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}. \qquad (32.17)$$

(32.16) детерминантда биринчи устуннинг a_{11} элементидан бошқа барча элементлари нолга тенг, шунинг учун (32.17) тенгликнинг ўнг томонида турган йиғиндида $i_1 \neq 1$ бўлганда $a_{i_1 1}$ элемент қатнашган барча қўшилувчилар йўқолади. Қолган қўшилувчилар учун

$$I(i_1, i_2, \dots, i_n) = I(1, i_2, \dots, i_n) = I(i_2, \dots, i_n),$$

бунда $i_2, \dots, i_n$ ушбу $2, 3, \dots, n$ сонларнинг ўрин алмаштириши.

Шунинг учун:

$$\Delta = \sum_{i_2, i_3, \dots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_2, \dots, i_n)} a_{11} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} =$$

$$= a_{11} \sum_{i_2, \dots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_2, \dots, i_n)} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}. \qquad (32.18)$$

Аммо (32.18) нинг ўнг томонида турган йиғинди ушбу $(n-1)$-тартибли детерминантдир:

$$\begin{vmatrix} a_{22} a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ a_{n2} a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (32.19)$$

бу Δ детерминантнинг a_{11} элементининг Δ_{11} минори эканини кўриш қийин эмас. a_{11} учун $(-1)^{i+k} = (-1)^{1+1} = 1$ га эгамиз, шу сабабли (32.19) детерминант Δ детерминант a_{11} элементининг A_{11} алгебраик тўлдирувчисидир. (32.18) дан у ҳолда (32.16) кўринишдаги детерминант учун

$$\Delta = a_{11} A_{11} \qquad (32.20)$$

формула ўринли экани келиб чиқади.

Энди Δ детерминант қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots 0 \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots 0 \dots a_{2n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{i1} \dots a_{ik} \dots a_{in} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{n1} \dots 0 \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (32.21)$$

яъни k-устуннинг a_{ik} элементидан бошқа ҳамма элементлари нолга тенг. i-сатрни биринчи сатр ўрнига ва k-устунни биринчи устун ўрнига ўтказамиз. Бунда биз сатрларни i марта, устунларни k марта кўчирамиз. Шу сабабли 2-хоссага биноан (32.2-пункт) ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (32.22)$$

(32.22) нинг ўнг қисмида (32.16) кўринишидаги детерминант турибди. Бу детерминантнинг юқори чап бурчагида турган элементининг алгебраик тўлдирувчиси (бизнинг ҳолда Δ детерминантнинг a_{ik} элементи) Δ детерминантнинг Δ_{ik} минорига тенг эканини кўриш осон. Шунинг учун (32.20) дан топамиз:

$$\Delta = (-1)^{i+k} a_{ik}\Delta_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{ik} = a_{ik}A_{ik}. \qquad (32.23)$$

Шундай қилиб, (32.21) кўринишидаги детерминант учун (32.23) формула ўринли. Энди

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2k} \dots a_{2n} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nk} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (32.24)$$

n-тартибли ихтиёрий детерминант бўлсин. (32.24) детерминантнинг k-устунини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{1k} + 0 + 0 \dots + 0 + \\ + 0 + a_{2k} + 0 \dots + 0 + \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ + 0 + 0 + 0 + \dots + a_{nk}, \end{matrix}}_{\text{ҳар бир сатрда } n \text{ тадан қўшилувчи}}$$

У ҳолда 5- хоссадан (32.2- пункт) (32.24) детерминант учун

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \begin{array}{c} \\ \left| \begin{array}{ccccc} & & (k) & & \\ a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & 0 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & 0_{nn} \end{array} \right| \end{array}$$

муносабат ўринли экани келиб чиқади. Охирги тенгликка (32.23) формулани татбиқ қилиб топамиз:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{.k} A_{ik}.$$

Шундай қилиб, бошланғич Δ детерминант k- устун элементлари билан шу элементлар алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмасининг йиғиндисига тенг. Δ детерминантда k- устун ихтиёрий танлангани учун теорема исботланди.

2- теорема. *Δ — ихтиёрий n- тартибли детерминант бўлсин. У ҳолда бирор устун (сатр) элементлари билан бошқа устун (сатр) алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.*

Бу теореманинг исботи унинг учинчи тартибли детерминант бўлган ҳолидаги исботи билан сўзма-сўз бир хилдир (15.5- пунктга қаранг). Бу исботни ўқувчининг ўзи мустақил бажариши учун тавсия қиламиз.

32.4 Детерминантларни ҳисоблаш. Бу пунктда детерминантларни ҳисоблашнинг бир нечта усули кўрсатилади. Энг содда ва энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири детерминантларни берилган устуни ёки сатри бўйича ёйиш теоремасини бир марта ёки кўп марта қўлланишдан иборат. Бунда кўп миқдорда нолга эга бўлган сатр ёки устунни танлаш мақсадга мувофиқ. Кўпинча, детерминантга ёйиш теоремасини қўлланишдан олдин, бошланғич сатрдан кўпроқ ноллар ҳосил қилиш учун олдиндан бирор устунга (сатрга) бошқа устун (сатрлар) нинг чизиқли комбинациялари қўшилади. Детерминантнинг устун ва сатрларини бошқа алмаштиришларидан ҳам фойдаланилади. Буни мисолларда қараймиз.

1. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-a & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3-a \end{vmatrix}.$$

Иккинчи сатрдан биринчи сатрни айириб, топамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3-a \end{vmatrix}.$$

Δ ни иккинчи сатри бўйича ёйиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta = (-1)^{2+2}(1-a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3-a \end{vmatrix} = (1-a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3-a \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган учинчи тартибли детерминантда учинчи сатрдан иккинчи сатрни айириб, детерминантнинг қийматини топамиз:

$$\Delta = (1-a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2-a \end{vmatrix} = -(1-a)(2+a)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-a)(2+a).$$

2. Детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Δ ни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1+0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

ва Δ нинг биринчи сатри бўйича чизиқлилигидан фойдаланамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}. \qquad (32.25)$$

(32.25) тенгликнинг ўнг қисмидаги детерминантларнинг биринчисида бош диагоналдан пастдаги элементлар, агар биринчи сатрни барча қолган сатрлардан айирилса, нолга айланади. Бундай детерминант бош диагоналда турган элементларнинг кўпайтмасига тенг бўлиши қуйидаги мисолда кўрсатилади. Шунинг учун:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120. \qquad (32.26)$$

(32.25) тенгликнинг ўнг қисмидаги иккинчи детерминантнинг биринчи устун бўйича ёямиз ва бошланғич детерминант кўринишидаги тўртинчи тартибли детерминантга эга бўламиз, бунга юқорида тавсифланган усулни қўлланамиз:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 60 + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 214 = 247.$$

Шундай қилиб, $\Delta = 120 + 274 = 394$.

3. Δ — бош диагоналидан бир томонда ётган элементларининг ҳаммаси нолга тенг бўлган n-тартибли детерминант бўлсин. У ҳолда Δ бош диагоналда турган элементларининг кўпайтмасига тенг.

1-хоссага биноан (32.2-пункт), Δ ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

кўринишга эга бўлган ҳолни текшириш етарли. Айтилган фикрни индукция методидан фойдаланиб исботлаймиз. $n=2$ да тасдиқ ўринли экани равшан. Δ ни биринчи устун бўйича ёйиб, топамиз:

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Охирги тенгликнинг ўнг қисмида турган $(n-1)$-тартибли детермиминантга индукцион фаразни қўллаш мумкин, бу фаразга биноан бизнинг тасдиқ $(n-1)$-тартибли детерминантлар учун ўринли. Шунинг учун

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

бу эса тасдиғимиз исботини тугаллайди.

4. Детерминантни топинг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни *Вандермонд детерминанти* дейилади. Δ мумкин бўлган барча $a_i - a_j$ айирмаларнинг кўпайтмасига тенг эканини исботлаймиз, бунда $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Бундай кўпайтмани қисқа белгилаш учун Π символи ёрдамида ёзиладиган ушбу $\Delta = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$ ёзувдан фойдаланилади. Тасдиқни индукция методи билан исботлаймиз. $n=2$ да тасдиқнинг ўринли экани равшан. Айтилган тасдиқ тартиби $\leqslant n-1$ бўлган Вандермонд детерминантлари учун исботланган бўлсин. Δ устида ушбу алмаштиришларни бажарамиз: n-сатрдан a_1 га кўпайтирилган $(n-1)$-сатрни айирамиз, $(n-1)$-сатрдан a_1 га кўпайтирилган $(n-2)$-сатрни айирамиз, ва ҳоказо, охирида иккинчи сатрдан a_1 га кўпайтирилган биринчи сатрни айирамиз. Натижада ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-1} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи устун бўйича ёйиб, биз $(n-1)$-тартибли детерминантга келамиз.

$$\Delta = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Охирги тенгликнинг ўнг қисмида турган $(n-1)$-тартибли детерминантга индукцион фаразни татбиқ қилиш мумкин, ва демак,

$$\Delta = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j),$$

бу эса исботни якунлайди.

32.5. Квадрат матрицалар кўпайтмасининг детерминанти. Ушбу матрицалар n-тартибли квадрат матрицалар бўлсин:

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \ldots & g_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (32.27)$$

$$U = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{Vmatrix} \qquad (32.28)$$

U матрицанинг сатрларини R^n фазонинг векторлари. деб қабул қиламиз ва уларни мос равишда $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ билан белгилаймиз. У ҳолда U матрицани бир устунли матрица шаклида ёзиш қулай, энди унинг элементлари векторлардан иборат бўлади:

$$U = \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix} \qquad (32.29)$$

Агар $V = G \cdot U$ квадрат матрицани ҳам бир устунли матрица

$$V = \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} \qquad G \cdot \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} \qquad (32.30)$$

шаклида тасвирланса, унда ушбу формулалар ўринли бўлишини кўриш осон:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= g_{11}\vec{u}_1 + g_{12}\vec{u}_2 + \dots + g_{1n}\vec{u}_n, \\ \vec{v}_2 &+ g_{21}\vec{u}_1 + g_{22}\vec{u}_2 + \dots + g_{2n}\vec{u}_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \vec{v}_n &= g_{n1}\vec{u}_1 + g_{n2}\vec{u}_2 + \dots + g_{nn}\vec{u}_n. \end{aligned} \qquad (32.31)$$

(32.30) ва (32.31) формулалардан шу нарса келиб чиқадики, n-тартибли, элементлари сонлардан иборат квадрат матрицаларни элементлари векторлардан иборат бўлган $n \times 1$ матрицаларга кўпайтириш элементлари сонлардан иборат матрицаларни кўпайтириш қоидалари каби амалга оширилади.

Детерминант формани бир вақтнинг ўзида сатрлар системасида ва устунлар системасида поли чизиқли форма деб қараш мумкин бўлгани учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\det U = \det \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix}, \quad \det V = \det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix},$$

бунда $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ лар R^n га тегишли векторлар, булар U матрица сатрларидан ҳосил бўлади $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ лар эса V матрицанинг сатрларидан ҳосил бўлган R^n га тегишли векторлардир.

Лемма. *Ушбу*

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{Vmatrix}$$

квадрат матрица ва R^n га тегишли векторларнинг $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ системаси берилган бўлсин. У ҳолда

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \det G \cdot \det \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix}, \qquad (32.32)$$

формула ўринли, бунда

$$\begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = G \cdot \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix}.$$

Исбот. (32.31) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} g_{11}\vec{u}_1 + g_{12}\vec{u}_2 + \ldots + g_{1n}\vec{u}_n \\ g_{21}\vec{u}_1 + g_{22}\vec{u}_2 + \ldots + g_{2n}\vec{u}_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{n1}\vec{u}_1 + g_{n2}\vec{u}_2 + \ldots + g_{nn}\vec{u}_n \end{Vmatrix}.$$

Энди детерминант форманинг ушбу

$$\begin{Vmatrix} g_{11}\vec{u}_1 + g_{12}\vec{u}_2 + \ldots + g_{1n}\vec{u}_n \\ g_{21}\vec{u}_1 + g_{22}\vec{u}_2 + \ldots + g_{2n}\vec{u}_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{n1}\vec{u}_1 + g_{n2}\vec{u}_2 + \ldots + g_{nn}\vec{u}_n \end{Vmatrix}$$

квадрат матрицанинг сатрлари функцияси сифатида поличизиқлилиги ва қийшиқ симметриклигидан фойдаланиб (бундай экани детерминант форманинг таърифидан ва 32.2-пунктдаги 1-хоссадан келиб чиқади), 32.5-пунктдаги каби

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \left(\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} g_{1i_1} g_{2i_2} \cdots g_{ni_n} \right) \cdot \det \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix} \quad (32.33)$$

формулани ҳосил қиламиз. (32.33) нинг ўнг томонида турган йиғинди $\det C^*$ дан бошқа нарса эмас, аммо $\det C^* = \det C$, шунинг учун (32.33) дан топамиз

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \det G \det \begin{Vmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}_n \end{Vmatrix}.$$

Шу билан лемма исботланди.

3-теорема. *A ва B лар n-тартибли квадрат матрицалар бўлсин. У ҳолда* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Исбот. $G = A \cdot B$, $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_2, \ldots, \vec{u}_n = \vec{e}_n$ деб леммани татбиқ қиламиз, бунда $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$ лар R^r даги базис. Равшанки,

$$\begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{Vmatrix} = E,$$

бунда E — бирлик матрица. (32.33) формуладан қуйидагига эгамиз:

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \det(AB) \det \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{Vmatrix} = \det(AB) \cdot \det E = \det(AB). \quad (32.34)$$

Сўнгра матрицаларни кўпайтиришнинг ассоциативлигидан фойдаланиб ва (32.33) формулани икки марта татбиқ қилиб, топамиз:

$$\det \begin{Vmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{Vmatrix} = \det \left[A \left(B \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{e}_n \end{Vmatrix} \right) \right] = \det \left[A \cdot \begin{Vmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{b}_n \end{Vmatrix} \right] =$$

$$=\det A\cdot\det\begin{Vmatrix}\vec{b}_1\\ \vec{b}_2\\ \vdots\\ \vec{b}_n\end{Vmatrix}=\det A\cdot\det B\cdot\det\begin{Vmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vdots\\ \vec{e}_n\end{Vmatrix}=\det A\cdot\det B, \qquad (32.35)$$

бунда биз

$$\begin{Vmatrix}\vec{b}_1\\ \vec{b}_2\\ \vdots\\ \vec{b}_n\end{Vmatrix}=B\cdot\begin{Vmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vdots\\ \vec{e}_n\end{Vmatrix}$$

тенгликдан фойдаландик. (32.34) ва (32.35) дан

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B$$

тенглик келиб чиқади.

Шу билан теорема исботланди.

33- §. Чизиқли тенгламалар системаси. Тескари оператор ва тескари матрица

33.1. Асосий тушунчалар ва таърифлар. Ушбу кўринишдаги

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array} \qquad (33.1)$$

тенгламалар системасини n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ўзгарувчили* m *та чизиқли тенгламалар системаси* дейилади. Бу тенгламалардаги номаълумлар олдидаги коэффициентлар $m\times n$ ўлчовли матрица ҳосил қилади:

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{Vmatrix}, \qquad (33.2)$$

бу матрицани (33.1) *системанинг матрицаси* дейилади. $b_1, b_2, \ldots, b_m$ сонларни системанинг *озод ҳадлари* дейилади. Озод ҳадларни бир устунли матрица шаклида ёзиш ва улар ҳақида озод ҳадлар устуни деб гапириш қулай.

Агар (33.1) системанинг ҳар бир тенгламаси ўзидаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар ўрнига $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ сонларни қўйгандан кейин тенгликка айланса, n та $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ сонларнинг тўплами бу *сис-*

теманинг ечими дейилади. Номаълумлар олдидаги коэффициентларга, озод ҳадларга ва тенгламалар сонига олдиндан ҳеч қандай чекланиш қўйилмаганлиги сабабли (33.1) системанинг ечимлари тўплами учун ҳар хил имконият бўлиши мумкин: у бўш тўплам бўлиши, битта ечимдан иборат бўлиши, ва ниҳоят, бир нечта ечимдан иборат бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда система *биргаликда бўлмаган система*, бошқа ҳолларда эса ечимга эга система дейилади.

Энди (33.1) система ечимлари тўплами тузилишининг тавсифини сифат томондан қараймиз. (33.1) системанинг

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

матрицаси 30.2-пунктдаги 1-теоремага биноан $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришни аниқлайди, бу акслантириш матрицалар ёрдамида бундай ёзилади:

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

бунда

$$\vec{x}' = \left\| \begin{matrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_m \end{matrix} \right\| \in R^m, \ \vec{x} = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix} \right\| \in R^n \text{ (31.4- пунктга қаранг)} \qquad (33.3)$$

(33.1) система матрицалар ёрдамида бундай ёзилади:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

ва равшанки, бу системанинг барча ечимларини излаш R^n да $f^{-1}(\vec{b})$ тўла прообразни топишга эквивалент. Шунинг учун, агар $f^{-1}(\vec{b}) \neq \neq \varnothing$ бўлса, (33.1) система ечимга эга, агар $f^{-1}(\vec{b}) = \varnothing$ бўлса, у ҳолда система биргаликда бўлмайди.

(33.1) тенгламалар системаси камида битта ечимга эга бўлади, деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

1-теорема. *Агар* $\vec{b} = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|$ *вектор* $f(R^n)$ *га тегишли бўлса, у ҳолда (33.1) система камида битта ечимга эга бўлади, агар* $\vec{b} \in \in R^m | f(R^n)$ ва $R^m | f(R^n) \neq \varnothing$ *бўлса, у ҳолда (33.1) система биргаликда бўлмайди.*

Хусусан, агар $f(R^n) = R^m$, яъни агар f — сюрьектив акслантириш бўлса, у ҳолда (33.1) система ихтиёрий $\vec{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$ *вектор учун ечимга эга система бўлади.*

Исбот. Агар $\vec{b} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} \in f(R_n)$ бўлса, у ҳолда $f^{-1}(\vec{b})$ тўла прообраз R^n да бўш бўлмайди, ва демак, $\vec{x}_0 = \begin{Vmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{Vmatrix} \in f^{-1}(\vec{b})$ бўлса, у ҳолда, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 сонлар системаси (33.1) системанинг ечими бўлади.

Агар $\vec{b} \in R^m | f(R^m) \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда $f^{-1}(\vec{b}) = \varnothing$ ва, демак, (33.1) система биргаликда эмас.

Ниҳоят, агар f сюрьектив акслантириш бўлса, $f(R^n) = R^m$ ва шу сабабли ҳар қандай $\vec{b} \in R^m$ да $f^{-1}(\vec{b}) \neq \varnothing$ бўлади. Бу ҳолда ҳар қандай $\vec{b} \in R^m$ да (33.1) система ечимга эга.

Теорема исботланди.

Баъзан (33.1) система қачон ягона ечимга эга бўлишини билиш муҳимдир. Ушбу теорема ўринли.

2-теорема. (33.1) *система ҳар қайси* $\vec{b} \in R^m$ *да биттадан ортиқ бўлмаган ечимга эга бўлиши учун f инъектив акслантириш бўлиши зарур ва етарли. Агар яна бунда f сюрьектив бўлса, у ҳолда* (33.1) *система ҳар қандай* $\vec{b} \in R^m$ *да ягона ечимга эга бўлади.*

Бу теореманинг исботи акслантириш инъектив бўлишининг таърифидан ва 1-теоремадан бевосита келиб чиқади.

Бу параграфда қуйида система матрицаси билан озод ҳадлар устунининг ўзаро хоссалари ёрдамида, (33.1) системани ечмай туриб, у қайси ҳолда ечимга эга ва қайси ҳолда ягона ечимга эга бўлиши ҳақида хулоса чиқаришга имкон берадиган конкрет шартлар берилади.

33.2. **n та номаълумли n та тенглама системаси** Бу пунктда биз

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (33.4)$$

кўринишидаги n та номаълумли n та тенглама системасини қараймиз. Бу ҳолда (33.4) системанинг A матрицаси n- тартибли квадрат матрицадир. Бу матрицанинг детерминантини

$$\Delta = \begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} \cdot \cdot .a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdot \cdot .a_{2n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1}a_{n2} \cdot \cdot .a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{33.5}$$

кўринишда ёзамиз ва (33.4) системанинг детерминанти деймиз.

Қуйидаги асосий теорема ўринли.

3- теорема (Крамер теоремаси). *Агар (33.4) тенгламалар системасининг детерминанти нолдан фарқли бўлса, (33.4) система ечимга эга бўлади ва шу билан бирга бу ечим ягона бўлади. Бу ечим*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{33.6}$$

формулалар бўйича топилади, бунда Δ*—(33.4) системанинг детерминанти,* $\Delta_i (i = 1,2, \ldots, n)$ *эса система матрицасидан унинг* i*- устунини озод ҳадлар устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўладиган матрицанинг детерминанти*.*

Исбот. Энг олдин

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

сонлар (33.4) системанинг ечими эканини исботлаймиз. Агар бу сонларни i- тенгламанинг чап қисмига қўйилса ($i = 1,2, \ldots, n$), ушбуга эга бўламиз:

$$a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta} + \ldots + a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k. \tag{33.7}$$

Ушбу

$$\Delta_k = \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1(k-1)} & b_1 & a_{1(k+1)} & \ldots a_{1n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{n(k-1)} & b_n & a_{n(k+1)} & \ldots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

детерминантларнинг ҳар бирини k- устун ($k=1,2, \ldots, n$) бўйича ёямиз (32.3-пунктга қаранг) ва ёйиш натижаларини (33.7) га қўямиз. У ҳолда:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_j A_{jk}. \tag{33.8}$$

---

*Шуни қайд қиламизки, $n=2$ ва $n=3$ да бу теорема китобнинг биринчи қисмида қаралган эди (15.2, 15,6- пунктларга қаранг).

(33.8) нинг ўнг қисмида жамлаш тартибини ўзгартириб, ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right). \qquad (33.9)$$

Сўнгра:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k = \begin{cases} \text{Агар } j = i \text{ бўлса, у ҳолда } (\Delta \text{ ни } i\text{-сатри бўйича ёйиш теоремасига биноан}),\ \Delta. \\ \text{агар } j \neq i \text{ бўлса, у ҳолда 32.4- пунктга биноан, } 0. \end{cases}$$

Шу сабабли барча $i = 1,2, \ldots, n$ да ушбуга эгамиз:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_k = \frac{1}{\Delta} b_i\Delta = b_i. \qquad (33.10)$$

(33.7) ва (33.10) дан $\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}$ сонлар (33.4) системанинг ечими экани келиб чиқади.

Энди (33.4) система ягона ечимга эга эканини исботлаймиз. x_1, $x_2, \ldots, x_n$ — бу системанинг ихтиёрий ечими бўлсин. Буни (33.4) системанинг ҳамма тенгламасига қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликлар устида ушбу амалларни бажарамиз: k сонлар 1, 2, 3, ..., n тўпламга тегишли ихтиёрий номер бўлсин. Тенгликлардан биринчисини A_{1k} га, иккинчисини A_{2k} га кўпайтирамиз ва ҳоказо ҳамда ҳосил бўлган янги тенгликларни қўшамиз. Натижада ушбуга эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}. \qquad (33.11)$$

Ёйиш ҳақидаги теоремага биноан (32.4- пункт):

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \Delta_k. \qquad (33.12)$$

(33.11) нинг чап қисмида жамлаш тартибини ўзгартиргандан кейин ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}.$$

Ушбу тенгликка эгамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} \text{агар } j=k \text{ бўлса, ёйиш теоремасига асосан, } \Delta \text{ (32.4-пункт)}; \\ \text{агар } j \neq k \text{ бўлса, 2-теоремага биноан (32.4-пункт), } 0. \end{cases}$$

Бундан:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = x_k \cdot \Delta. \qquad (33.13)$$

(33.11—13) тенгликлардан ушбу тенглик келиб чиқади:

$$x_k \cdot \Delta = \Delta_k$$

ва теорема шартига кўра $\Delta \neq 0$ бўлгани учун $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \cdot k$ номер ихтиёрий олингани учун (33.4) системанинг ҳар қандай ечими учун ушбу формулалар ўринли:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

бу эса мазкур система ечими ягоналигини исботлайди.

Теорема исботланди

33.3 Чизиқли айнимаган оператор. Тескари оператор. Тескари матрица. Агар $\det A \neq 0$ бўлса,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

квадрат матрица *махсусмас матрица* дейилади, агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда бу *махсус матрица* дейилади.

Агар $f: R^n \to R^n$ чизиқли операторнинг A_f матрицаси махсусмас матрица бўлса, бу чизиқли оператор *айнимаган оператор* дейилади.

4-теорема. *Ҳар қандай чизиқли айнимаган $f: R^n \to R^n$ оператор биектив акслантиришдир.*

Исбот. $f: R^n \to R^n$ — чизиқли айнимаган оператор бўлсин ва

$$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

унинг матрицаси бўлсин.

f оператор $\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \in R^n$ векторни $\vec{x}' = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{Vmatrix} \in R^n$ векторга ўтказади, бунда:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \qquad (33.14)$$

(30.2- пунктга қаранг). f чизиқли айнимаган оператор бўлгани учун $\det A_f \neq 0$ ва, Крамер теоремасига биноан ҳар бир олдиндан берилгар $\vec{x}' \in R^n$ вектор учун тўла прообраз $f^{-1}(\vec{x}')$ ягона $\vec{x} \in R^n$ вектордан иборат бўла и. Бу эса f оператор биектив акслантириш эканини билдиради.

Теорема исботланди.

4- теоремадан *ҳар қандай чизиқли айнимаган* f $: R^n \to R^n$ *оператор тескари операторга эга* экани келиб чиқади.

5- теорема. *Чизиқли айнимаган f операторга тескари f^{-1} : $R^n \to R^n$ оператор ҳам чизиқли айнимаган оператор бўлади, унинг матрицаси ушбу кўринишда бўлади:*

$$A_{f^{-1}} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{A} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Vmatrix},$$

бунда $\Delta = \det A_f$, *A_{ik} эса Δ детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси.*

Исбот. Энг олдин қуйидаги муносабатлар ўринли эканини қайд қиламиз:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_{R^n}. \qquad (33.15)$$

(33.15) муносабатлар 29.2- пунктда исботланган. Энди

$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot \;\cdot\; \cdot \;\cdot\; \cdot \\ \cdot \;\cdot\; \cdot \;\cdot\; \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}$ матрица f операторнинг матрицаси бўлсин. У

ҳолда $f: R^n \to R^n$ оператор $\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$ векторни $\vec{x}' = f(\vec{x}) = \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{Vmatrix}$

векторга ўтказади, бунда $\vec{x}$ ва $\vec{x}'$ лар ўзаро (33.14) формулалар орқали боғланган. Шартга кўра $\det A_f \neq 0$ бўлгани учун Крамер теоремасига биноан:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (33.16)$$

бунда $\Delta = \det A_f$, Δ_k $(k = 1,2, \dots, n)$ эса Δ детерминантдан k-устунни $\vec{x}$ вектор компонентлари устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. (33.16) формулаларни тўлароқ ёзамиз:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x'_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} x'_1 & a_{13} \cdots a_{1n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x'_n & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n-1} & x'_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} \cdots a_{nn-1} & x'_n \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (33.17)$$

(33.17) формулаларнинг суратларида турган детерминантларни мос равишда биринчи, иккинчи, ... n- устун бўйича ёйиб, топамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta}[A_{11}x'_1 + A_{21}x'_2 + \cdots + A_{n1}x'_n], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta}[A_{1n}x'_1 + A_{2n}x'_2 + \cdots + A_{nn}x'_n], \end{aligned} \quad (33.18)$$

бунда $A_{ik} - \Delta = \det A_f$ детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси.

(33.18) формулалардан f^{-1} оператор R^n ни R^n га ўтказувчи чизиқли оператор экани келиб чиқади ва унинг матрицаси бундай:

$$A_f^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Vmatrix} \quad (33.19)$$

30.4-пунктда барча квадрат матрицаларнинг тўплами M^nда чизиқли операторларнинг $Hom\,(R^n, R^n)$ биектив акслантирилиши тузилган эди, у операторлар кўпайтмасини матрицалар кўпайтмасига, 1_{R^n} айний акслантиришга қуйидаги бирлик матрицани мос келтиради:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \cdots 1 \end{Vmatrix}.$$

Шу сабабли (33. 15) дан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$A_f \cdot A_{f-1} = A_{f-1} \cdot A_f = E. \quad (33.20)$$

$\det A_f \cdot \det A_{f-1} = \det E = 1$ бўлгани учун эса (32.5-пунктга қаранг) A_{f-1} матрица махсусмас матрица бўлади, шу сабабли A_{f-1} оператор чизиқли айнимаган оператор бўлади.

Теорема исботланди.

A матрица n- тартибли квадрат матрица бўлсин. Агар ушбу

$$A \cdot B = B \cdot A = E \quad (33.21)$$

муносабат бажарилса, B матрица A матрица учун *тескари матрица* дейилади. Ҳар қандай матрица ҳам тескари матрицага эга бўлавермайди. Масалан, ноль матрица тескари матрицага эга эмас. 32-§ даги матрицалар кўпайтмасининг детерминанти кўпайтувчи матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг экани ҳақидаги 3-теоремадан ва (33.21) шартдан A махсус матрица учун тескари матрицанинг мавжуд бўлмаслиги осонгина келиб чиқади, чунки $\det A = 0$, $\det E = 1$ ва

$$0 \cdot \det B = 1$$

тенглик ўринли эмас. Махсусмас матрицалар учун тескари матрица ҳар доим мавжуд ва бирдан-бирдир.

6-теорема. *Ушбу*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

махсусмас матрица бўлсин. У ҳолда А ягона A^{-1} *тескари матрицага эга, бу тескари матрица учун*

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \cdots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{Vmatrix} \qquad (33.22)$$

формула ўринли, бунда $\Delta = \det A$.

Исбот. A махсусмас матрица учун A^{-1}(бунда $\det A \neq 0$) матрицани тузиш мумкин, 5- теореманинг исботидан

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

экани келиб чиқади. (Аммо бунга бевосита 32.3-даги 1 ва 2- теоремалардан фойдаланиб, осонгина ишонч ҳосил қилиш ҳам мумкин.) Шундай қилиб, A матрица ақалли битта тескари матрицага эга.

B матрица ҳам A матрицага тескари матрица бўлсин.

$$A \cdot B = E$$

тенгликни чапдан A^{-1} га кўпайтирамиз. У ҳолда ушбуни ҳосил қиламиз:

$$A^{-1} \cdot (AB) = A^{-1}E.$$

Аммо

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1} \cdot A)B = EB = B$$

$$A^{-1}\cdot E=A^{-1}.$$

Шунинг учун $B=A^{-1}$. Демак, A матрица ягона тескари матрицага эга, бу тескари матрица учун (33.22) формула ўринли.

Теорема исботланди.

5 ва 6-теоремалардан, *чизиқли айнимаган $f:R^n\to R^n$ операторга тескари оператор f^{-1} нинг $A_{f^{-1}}$ матрицаси f операторнинг тескари матрицаси билан бир хил бўлиши келиб чиқади*, яъни

$$A_{f^{-1}}=A_f^{-1}. \tag{33.23}$$

Мисоллар. 1. $f:R^3\to R^3$ оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларни $\vec{u}_1= =(2, 1, -1), \vec{u}_2=(2,-1,2), \vec{u}_3=(3, 0, 1)$ векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. f—айнимаган акслантириш эканини исботланг ва A_f^{-1} матрицани топинг.

Масала шартига биноан ушбу га эгамиз.

$$A_f=\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{Vmatrix}$$

ва $\det A_f=-1$ бўлгани учун f — айнимаган акслантириш. (33.22) формулани қўлланиб, топамиз:

$$(A_f)^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{Vmatrix}$$

ва (33.23) га биноан $A_{f^{-1}}=(A_f)^{-1}$, шу сабабли:

$$A_{f^{-1}}=\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{Vmatrix}.$$

2. Агар $AB=BA$ бўлса, $A^{-1}B=BA^{-1}$ бўлишини исботланг, бунда $\det A\neq 0$. $AB=BA$ тенгликнинг иккала қисмини чапдан A^{-1} га кўпайтириб, топамиз: $B=A^{-1}\cdot BA$. Ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини ўнгдан A^{-1} га кўпайтириб, бизга керак бўлган тенгликка келамиз: $BA^{-1}=A^{-1}B$.

33.4. Матрицанинг ранги. $m\times n$ ўлчамли

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{Vmatrix} \tag{33.24}$$

матрица берилган бўлсин. A матрицанинг устунлари R^m фазонинг n та векторидан иборат система ташкил қилади. Бу системанинг максимал чизиқли эркли қисм системаларини қараймиз. 28.3- пунктда исботланганидек, бу максимал чизиқли эркли қисм системаларнинг ҳаммаси бир хил миқдордаги векторлардан тузилган, яъни бошқача айтганда A матрицанинг устунларидан тузилган.

A матрицанинг ранги деб шу матрицанинг чизиқли эркли устунларининг максимал сонига айтилади.

A матрицанинг сатрларини R^n фазонинг m та векторидан тузилган деб қараб, бу матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сони ҳақида гапириш мумкин ва чизиқли эркли сатрларнинг максимал сонидан келиб чиқиб, A матрица рангининг таърифини бериш ҳам мумкин. Қуйида матрица рангини топишнинг иккала усули ҳам бир сонга олиб келишини кўрамиз. Жуда ҳам нотривиал бўлган бу фактнинг исботи матрица рангини аниқлашнинг яна бир усули кўрсатилгандан кейин келиб чиқади, бу усул, бундан ташқари, матрица рангини амалда ҳисоблаш усулини беради.

Энг олдин $m \times n$ матрицалар билан боғлиқ бўлган бир қатор тушунчаларни киритамиз. A матрицада ихтиёрий k та сатрни ($i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) ва k та устунни ($j_1 < j_2 < \ldots < j_k$) танлаб оламиз, бунда $k \leqslant \min(n, m)$. Бу сатр ва устунларнинг кесишган жойларида турган элементлар k-тартибли квадрат матрица ҳосил қилади, бу матрицанинг детерминанти

$$\det \begin{Vmatrix} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} \cdots a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_2 j_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i_k j_1} a_{i_k j_2} \cdots a_{i_k j_k} \end{Vmatrix} \tag{33.25}$$

A матрицанинг *k-тартибли минори* дейилади. Нолдан фарқли ва тартиби энг катта бўлган минорлар алоҳида қизиқиш туғдиради. Шуни қайд қилиш фойдалики, агар *A матрицанинг барча k-тартибли минорлари нолга тенг бўлса, A матрицадан тузиш мумкин бўлган юқорироқ тартибли $k + l$ ($l \geqslant 1$) минорларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг бўлади.* Ҳақиқатан, A матрицанинг минори бўлган ($k+l$)-тартибли детерминантни ёйишни l марта қўлланиб, бу детерминант A матрицанинг k- тартибли минорларининг чизиқли комбинацияси эканини топамиз, ва демак, бу нолга тенг бўлади.

Қуйидаги муҳим теорема ўринли.

7-теорема. *A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби шу матрицанинг рангига тенг.*

Исбот. A нинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби r га тенг бўлсин. Умумийликни бузмаган ҳолда, Δ матрицанинг чап юқори бурчагида турган r тартибли минор нолдан фарқли деб ҳисоблаш мумкин:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \cdots & & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Delta & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdots & & a_{rr} & a_{r(r+1)} & \cdots & & a_{rn} \\ \hline a_{(r+1)1} & \cdots & & a_{(r+1)r} & a_{(r+1)r+1} & \cdots & & a_{(r+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mr} & a_{m(r+1)} & \cdots & & a_{mn} \end{array} \right\|$$

(Ҳақиқатан, Δ минор чап юқори бурчакда бўлиши учун тегишли сатр ва устунларни тегишлича суриб, биз A матрицанинг бирорта ҳам минорининг абсолют қийматини ўзгартирмаймиз ва шу сабабли матрицада Δ минорнинг бизга керакли ўринга жойлашишига эришамиз.) Энг олдин, A матрицанинг биринчи r та устуни R^m да чизиқли эркли векторлар бўлишини исботлаймиз. Агар бу шундай бўлмаганда эди, яъни кўрсатилган устунлар орасида чизикли боғлиқлик бўлганда эди, у ҳолда Δ нинг биринчи r та устунини ташкил қилувчи векторлар компонентлари орасида худди шундай чизикли боғлиқлик мавжуд бўлар эди, у ҳолда эса Δ минор нолга тенг бўлар эди, бундай бўлиши эса мумкин эмас.

Энди A матрицанинг ҳар қандай l-устуни $(r < l < n)$ биринчи r та устунининг чизиқли комбинацияси бўлишини исботлаймиз. Қуйидаги ёрдамчи детерминантни тузамиз:

$$\Delta_{sl} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{s1} & & a_{sr} & a_{sl} \end{vmatrix},$$

бунда $s = 1, 2, \ldots, m \cdot \Delta_{sl}$ детерминант Δ минорни l-устун ва s-сатрнинг мос элементлари билан ўраб олишдан ҳосил бўлади. Ҳар қандай s да Δ_{sl} детерминант нолга тенг. Ҳақиқатан, агар $s > r$ бўлса, у ҳолда Δ_{sl} детерминант A матрицанинг $r + l$ тартибли минори бўлади ва r сонни танлаш ҳисобига нолга тенг бўлади. Агар $s \leqslant r$ бўлса, у ҳолда Δ_{sl} энди A матрицанинг минори бўлмайди, аммо у бари бир нолга тенг бўлади, чунки у иккита бир хил сатрга эга.

Δ_{sl} нинг охирги сатри элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини қараймиз. a_{sl} элемент учун Δ минор алгебраик тўлдирувчи бўлади, a_{sj} элементлар учун эса (бунда $1 \leqslant j \leqslant r$) s га боғлиқ бўлмаган

$$\alpha_j = (-1)^{(r+1)+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \cdots & a_{r(j-1)} & a_{r(j+1)} & \cdots & a_{rr} & a_{rl} \end{vmatrix}$$

сонлар алгебраик тўлдирувчи бўлади. Δ_{sl} ни охирги сатри бўйича ёйиб ва Δ_{sl} нинг нолга тенглигидан фойдаланиб, ушбу муносабатни топамиз:

$$a_{s1}\alpha_1 + a_{s2}\alpha_2 + \ldots + a_{sr}\alpha_r + a_{sl}\Delta = 0. \qquad (33.26)$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун:

$$a_{sl} = -\frac{\alpha_1}{\Delta} a_{s1} - \frac{\alpha_2}{\Delta} a_{s2} - \ldots - \frac{\alpha_r}{\Delta} a_{sr}.$$

Охирги тенглик барча $s = 1, 2, \ldots, m$ ларда ўринли, $-\frac{\alpha_1}{\Delta}$ $-\frac{\alpha_2}{\Delta}, \ldots, -\frac{\alpha_r}{\Delta}$ сонлар s га боғлиқ бўлмагани учун бутун l-устун дастлабки r та устуннинг чизиқли комбинацияси эканига эга бўламиз.

Шундай қилиб, биринчи r та устундан иборат қисм система максимал чизиқли эркли қисм система бўлади, ва шунинг учун r A матрицанинг рангидир.

Теорема исботланди.

1-натижа. A *матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сони унинг чизиқли эркли устунларининг максимал сонига тенг, яъни шу матрицанинг рангига тенг.*

Исбот. A^* матрица A матрицанинг транспонирлашдан ҳосил бўлган матрица бўлсин. Транспонирлашда A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг максимал тартиби ўзгармайди, чунки транспонирлаш детерминантларни ўзгартирмайди. Сўнгра A^* матрицанинг ҳар қандай минори A матрицанинг мос миноридан транспонирлаш билан ҳосил бўлади, ва аксинча. Шунинг учун 7-теоремага биноан A ва A^* матрицаларнинг ранглари бир хил. Аммо A^* матрицанинг ранги A матрица чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг, ача шунинг ўзи 1-натижанинг ўринли эканини исботлайди.

2-натижа. *Агар n-тартибли детерминантнинг устунлари орасида ёки сатрлари орасида чизиқли боғлиқлик мавжуд бўлса, шу ҳолда ва фақат шу ҳолдагина бу детерминант нолга тенг бўлади.*

Исбот. Агар детерминантнинг устунлари орасида нотривиал чизиқли боғлиқлик мавжуд бўлса, у ҳолда устунлардан бири қолганларининг чизиқли комбинацияси бўлади ва 4,5-хоссаларга кўра (32.5-пунктга қаранг) детерминант нолга тенг бўлади.

Энди n-тартибли нолга тенг детерминант берилган бўлсин. У ҳолда бу детерминант ҳосил қилган квадрат матрицанинг тартиби n га тенг бўлади. Бундан биттагина нолга тенг бўлган n-тартибли минор тузилади. Демак, қаралаётган матрицанинг ранги $n-1$ дан катта бўлмайди ва 7-теоремага асосан бу матрицанинг устунлари чизиқли боғлиқ деган хулоса чиқарамиз. 1-натижадан, матрицанинг сатрлари ҳам чизиқли боғлиқ деган хулоса чиқади ва шу билан 2-натижанинг исботи тугалланади.

Матрицанинг рангини ҳисоблаш масаласини қараймиз. Бунинг учун матрицанинг сатрлари ва устунлари устида бир қатор алмаштиришлар бажарилиб, уни энг содда диагонал кўринишга келтирилади; шундан кейин матрицанинг ранги жуда осон топилади.

$m \times n$ ўлчамли A матрицанинг элементар алмаштиришлари деб бу матрицанинг қуйидаги алмаштиришларига айтилади:

1) иккита устунни ёки иккита сатрни транспонирлаш (ўринларини алмаштириш);

2) сатрни (ёки устунни) нолдан фарқли ихтиёрий сонга кўпайтириш;

3) бир устунга (сатрга) қолган устун (сатрлар) нинг чизиқли комбинациясини қўшиш.

Элементар алмаштиришлар матрицанинг рангини ўзгартирмаслигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, агар бу алмаштиришларни, масалан, матрицанинг устунларига татбиқ қилинса, у ҳолда R^m га тегишли векторлар деб қаралаётган устунлар системаси эквивалент система билан алмашади. 1 ва 2 типдаги алмаштиришлар учун бу равшан. Бу фактни 3-кўринишдаги алмаштиришлар учун исботлаш мақсадида i-устунга k-номерли устунни λ сонга кўпайтириб қўшиш ҳолини қараш етарли. Агар алмаштириш бажаришга қадар матрицанинг устунлари бўлиб,

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n \tag{33.27}$$

векторлар хизмат қилган бўлса, алмаштириш бажарилгандан кейин матрицанинг устунлари бўлиб,

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i + \lambda\vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n \tag{33.28}$$

векторлар хизмат қилади. (33.28) система (33.27) система орқали чизиқли ифодаланади;

$$\vec{a}_i = (\vec{a}_i + \lambda\vec{a}_k) - \lambda\vec{a}_k$$

тенглик эса (33.27) система ўз навбатида (33.28) система орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатади. Шу сабабли (33.27) ва (33.28) системалар эквивалент ва, демак, уларнинг максимал чизиқли қисм системалари бир хил сондаги векторлардан тузилган бўлади.

Шундай қилиб, матрицанинг рангини ҳисоблашдан олдин, уни кетма-кет бажариладиган элементар алмаштиришлар ёрдамида соддалаштириш мумкин.

$m \times n$ матрицанинг диагонал формаси деб, бирга тенг a_{11}, a_{22} ..., a_{rr} элементларидан бошқа барча элементлари нолга тенг бўлган матрицани айтамиз, бунда $0 \leqslant r \leqslant \min(m, n)$. Равшанки, бу матрицанинг ранги r га тенг.

8-теорема. *Ҳар қандай $m \times n$ матрицани чекли сондаги элементар алмаштиришлар ёрдамида диагонал формага келтириш мумкин.*

Исбот. Агар A нинг барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда A алмаштиришларсиз диагонал формага эга. Агар унинг нолдан фарқли элементлари бўлса, у ҳолда устун ва сатрларни транспозиция қилиш ҳисобига шунга эришиш мумкинки, a_{11} элемент нолдан фарқли бўлади. Биринчи сатрни $\frac{1}{a_{11}}$ га кўпайтириб, a_{11} элемент бирга тенг бўлишига эришамиз. Энди k-устундан a_{1k} га кўпайтирилган биринчи устунни айирамиз. У ҳолда a_{1k} элемент ноль билан алмаштирилган бўлади. Иккинчи устундан бошлаб бошқа устунлар билан ҳам шундай алмаштиришларни бажариб, шунингдек, барча сатрлар устида ҳам шундай алмаштиришларни бажариб, ушбу кўринишдаги матрицага келамиз:

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Пастки бурчакда турган матрица билан шунга ўхшаш алмаштиришларни бажариб ва ҳоказо, чекли қадамлардан сўнг, ранги бошланғич A матрицанинг рангига тенг бўлган диагонал матрицага келамиз. Шундан кейин диагонал матрицанинг бош диагоналида турган бирларнинг сонини ҳисоблаймиз. Ана шу сон A матрицанинг ранги бўлади.

Теорема исботланди.

33.5. Чизиқли тенгламаларнинг умумий системаси Бу пунктда n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълуми m та чизиқли тенглама умумий системасининг ечилиш шарти берилади:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{33.29}$$

ва бу системанинг барча ечимларини топиш усули берилади.

(33.29) системанинг

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{33.30}$$

матрицаси билан бир қаторда A матрицадан озод ҳадлар устунини қўшиш йўли билан ҳосил бўлган

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix} \tag{33.31}$$

матрицани ҳам қараймиз. Одатда B матрицани (33.29) системанинг *кенгайтирилган матрицаси* дейилади.

Кенгайтирилган B матрицанинг ранги ё A матрицанинг рангига тенг, ёки A матрицанинг рангидан битта ортиқ бўлишини кўриш осон. Ҳақиқатан, A матрицанинг ҳар қандай максимал чизиқли эркли устунлари системаси B матрица устунларининг чизиқли эркли системаси бўлади. Агар бу система B да максималлигича қолса, у ҳолда A ва B матрицаларнинг ранги тенг бўлади, акс ҳолда бу системага озод ҳадлар устуни қўшилиши мумкин, шундан кейингина векторлар системаси B да максимал чизиқли эркли бўлади. Бу ҳолда B нинг ранги A нинг рангидан битта ортиқ бўлади.

Қуйидаги теорема (33.29) системанинг ечилиши масаласига жавоб беради.

9-теорема (Кронекер — Капелли теоремаси). *A матрицанинг ранги кенгайтирилган B матрицанинг рангига тенг бўлгандагина ва фақат шунда (33.29) тенгламалар системаси биргаликда бўлади.*

Агар (33.29) система биргаликда ва A нинг ранги r га тенг бўлса, бу системанинг барча ечимларини топиш бундай амалга оширилади. A да r та чизиқли эркли сатрни танлаймиз ва (33.29) системада танланган сатрларга жавоб берадиган тенгламаларнигина қолдирамиз. Сўнгра бу тенгламаларнинг чап қисмларида шундай r та номаълумларни қолдирамизки, улар олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминант нолдан фарқли бўлади, қолган номаълумларни озод деб ҳисоблаб, тенгламаларнинг ўнг қисмларига ўтказамиз. Озод номаълумларга ихтиёрий қийматлар берамиз, қолган номаълумларнинг қийматларини эса Крамер теоремаси бўйича топамиз. Бу ҳолда биз (33.29) системанинг барча ечимларини топган бўламиз.

Исбот. Бу теоремада бир нечта тасдиқ бор. Уларни кетма-кет исботлаймиз.

а) (33.29) система биргаликда бўлсин ва $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ унинг ечимларидан бири бўлсин. Бу сонларни барча тенгламалардаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумларнинг ўрнига қўйиб, m та тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликлар қаралаётган B матрицанинг охирги устуни матрицанинг қолган устунларининг $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ коэффициентли чизиқли комбинацияси эканини кўрсатади. Бундан A матрицанинг чизиқли эркли устунларининг максимал системаси B матрицада ҳам максималлигича қолиши кўринади, бу ҳолда эса A ва B матрицаларнинг ранги тенг бўлади.

б) энди система A матрицасининг ранги кенгайтирилган B матрицанинг рангига тенг бўлсин. У ҳолда, 33.5-пунктда айтилганидек (9-теореманинг ифодаси олдидан), B матрицанинг охирги устуни A матрицанинг қолган устунларининг чизиқли комбинациясидан иборат. Бу шундай $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ сонлар мавжуд ва A матрицанинг бу коэффициентлар билан устунларининг чизиқли комбинацияси (33.29) системанинг озод ҳадлари устунига тенг эканини билдиради. Мукаммал ёзсак, бу

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1^0 + \ a_{12}x_2^0 + \ . \ . \ . \ a_{1n}x_n^0 \ &= b_1, \\
a_{21}x_1^0 + \ a_{22}x_2^0 + \ . \ . + a_{2n}x_n^0 \ &= b_2, \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ &\cdot \ \cdot \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ &\cdot \ \cdot \\
a_{m1}x_1^0 + \ a_{m2}x_2^0 + . \ . \ + a_{mn}x_n^0 \ &= b_m
\end{aligned}
\qquad (33.32)
$$

кўринишда бўлади. (33.32) дан сонларнинг x_1^0, x_2^0, . . . , x_n^0 системаси (33.29) системанинг ечими экани келиб чиқади. Шундай қилиб, A ва B матрицалар рангларининг бир хил бўлиши (33.29) системани ечилишига олиб келади.

в) энди (33.29) система биргаликда бўлсин ва A матрицанинг ранги r га тенг. Унда 1- натижада исботланганидек (32.4- пункт), r сон А матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сонига тенг. Умумийликни бузмасдан, A матрицанинг биринчи r та сатри чизиқли эркли, қолган сатрлари эса уларнинг чизиқли комбинациясидан иборат деб ҳисоблаймиз Бундан кенгайтирилган B матрицанинг биринчи r та сатри чизиқли эркли бўлиши келиб чиқади, чунки улар орасидаги ҳар қандай чизиқли боғлиқлик A матрицанинг биринчи r та сатрининг ҳам чизиқли боғлиқ бўлишига олиб келади. A ва B матрицалар рангларининг бир хиллигидан B матрицанинг биринчи r та сатри унда сатрларнинг максимал чизиқли эркли системасини ташкил қилиши, яъни бу матрицанинг ҳар қандай бошқа сатри буларнинг чизиқли комбинациясидан иборатлиги келиб чиқади. Шунинг учун (32.29) системанинг ҳар қандай тенгламаси бу системанинг биринчи r та тенгламасининг чизиқли комбинацияси, демак, (33.29) системанинг биринчи r та тенгламасининг ҳар қандай ечими (33.29) системанинг қолган тенгламаларини қаноатлантиради. Шундай қилиб, бошланғич (33.29) системанинг барча ечимларини излаш қуйидаги система тенгламаларининг барча ечимларини топишга келтирилади·

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ . \ . \ . + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ . \ . \ . + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ &\cdot \ \cdot \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ &\cdot \ \cdot \\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ . \quad . + a_{rn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
\qquad (33.33)
$$

(33.33) система матрицасининг сатрлари чизиқли эркли, демак, (33. 33) системани тузиш усулига кўра унинг матрицасининг ранги r га тенг $r \leqslant n$ ва (33.33) система коэффициентлари матрицасининг r-тартибли минорларидан ақалли биттаси нолдан фарқли.

Агар $r = n$ бўлса, (33.33) система Крамер теоремаси шартларини қаноатлантиради ва, демак, бу система, шу сабабли (33.29) система ҳам (33.6) формулалар билан топиладиган ягона ечимга эга бўлади.

Энди $r < n$ ва аниқлик учун биринчи r та номаълум олдидаги коэффициентлардан тузилган минор нолдан фарқли бўлсин. (33.33) системанинг ҳар қайси тенгламасида x_{r+1}, . . . , x_n номаълумли барча ҳадларни ўнг қисмга ўтказамиз ва бу номаълумларга баъзи ихтиёрий $x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$ қийматларни берамиз. Натижада ушбу системага келамиз:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_2 &= b_1 - a_{1(r+1)}\, x_{r+1}^0 - \ldots - a_{1n}x_n^0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_2 &= b_2 - a_{2(r+1)}\, x_{r+1}^0 - \ldots - a_{2n}x_n^0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r(r+1)}\, x_{r+1}^0 - \ldots - a_{rn}x_n^0.
\end{aligned} \tag{33.34}$$

Бу системада r та номаълумли r та тенглама бор.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{Vmatrix} \neq 0$$

бўлгани учун (33.34) системага Крамер теоремасини қўлланиб бўлади, ва демак, у бирдан-бир $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ечимга эга. Равшанки, унда $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$ сонлар системаси (33.33) системанинг ечими бўлса, шу сабабли (33.29) системанинг ҳам ечими бўлади. Озод номаълумлар деб аташ қабул қилинган $x_{r+1}, \ldots, x_n$ номаълумлар учун $x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$ қийматлар мутлақо ихтиёрий танланади, шу сабабли (33.29) система бу ҳолда чексиз кўп ечимга эга бўлади (r ранг n дан кичик).

Теорема тўла исботланди.

Натижа. (33.29) *система ечимга эга бўлсин. У ҳолда бу система, система матрицасининг ранги номаълумлар сонига тенг бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина бирдан-бир ечимга эга бўлади.*

Бу фикр Кронекер — Капелли теоремасини исботлаш давомида аниқланган эди.

Агар (33.29) системанинг барча озод ҳадлари нолга тенг, яъни $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ бўлса, бу чизиқли тенгламалар системасини *бир жинсли система* дейилади. Шундай қилиб, бир жинсли система ушбу кўринишга эга:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned} \tag{33.35}$$

(33.35) система ҳар доим ечимга эга бўлади, чунки $(0, 0, \ldots, 0)$ сонлар системаси унинг ечимидир. $(0, 0, \ldots, 0)$ ечим бир жинсли (33.35) системанинг ноль ёки тривиал ечими дейилади. Шунинг учун бир жинсли система ноль ечимдан бошқа ечимга эга бўлиши ҳақидаги масала қизиқиш туғдиради.

(33.35) системанинг

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матрицасининг ранги r га тенг бўлсин. Биз биламизки, $r \leqslant n$. Агар $r=n$ бўлса, бир жинсли система фақат ноль (тривиал) ечимга эга бўлади. Агар $r < n$ бўлса, бу система нолмас (нотривиал) ечимларга эга бўлади ва бу ечимларни излаш учун 9-теореманинг исботида кўрсатилган усулнинг ўзидан фойдаланилади.

n та номаълумли n та тенгламадан иборат бир жинсли системага махсус тўхталамиз. Бу ҳолда $r < n$ тенгсизлик система детерминантининг нолга тенг бўлишига тенг кучли. Шу сабабли $m=n$ да система детерминанти нолга тенг бўлгандагина ва фақат шундагина (33.35) система нолмас ечимларга эга бўлади.

Ниҳоят, агар $m < n$ бўлса, яъни (33.35) да тенгламалар номаълумлардан кам бўлса, у ҳолда $r \leqslant m < n$ ва (33.35) система ўз-ўзидан нолмас ечимларга эга бўлади.

33.6. Чизиқли тенгламалар системасининг ечимлари тўпламининг геометрик тавсифи. Тенгламаларнинг бир жинслимас

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{33.36}$$

системаси берилган бўлсин. (33.36) системанинг ҳар бир ечими, 33.1-пунктда айтилганидек, бирор

$$\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \in R^n$$

вектордан иборат. (33.36) тенгламалар системасини матрица кўринишида ёзиш ҳам қулай (33.1-пунктга қаранг):

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{33.36a}$$

бунда A — шу системанинг матрицаси. $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ лар R^n га тегишли ихтиёрий векторлар бўлсин, λ ва μ эса ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин, у ҳолда, маълумки,

$$A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y}. \tag{33.37}$$

(33.36) системадан, озод ҳадлар устунини ноллар устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлган бир жинсли тенгламалар системаси

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \ldots \quad a_{1n}x_n = 0,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \ldots + a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}
\tag{33.38}
$$

(33.36) система учун *келтирилган система* дейилади. Матрицали шаклда бу система бундай кўринишга эга:

$$A\vec{x} = \Theta. \tag{33.38a}$$

Қуйидаги теорема бир жинслимас тенгламалар системаси ечимлари тўпламини текшириш аслида бу системанинг бир жинсли келтирилган ечимлари системасининг ечимлари тўпламини текширишга келтирилишини кўрсатади.

10-теорема. $\vec{x}_0 \in R^n$ (33.36) *бир жинслимас системанинг бирор ечими бўлсин. У ҳолда бу системанинг умумий ечими ушбу кўринишга эга бўлади:*

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}, \tag{33.39}$$

бунда $\vec{u} \in R^n$ вектор (33.38) келтирилган системанинг ихтиёрий ечими.

Исбот. (33.37) формуладан ушбуга эгамиз:

$$A(\vec{x}_0 + \vec{u}) = A\vec{x}_0 + A\vec{u} = \vec{b} + \Theta = \vec{b},$$

яъни (33.39) кўринишидаги векторлар (33.36) системанинг ечимидир.

Энди $\vec{x}_1 \in R^n$ (33.36) нинг қандайдир ечими бўлсин. $\vec{u} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$ деб оламиз. Бу ҳолда, яна (33.37) формулани қўлланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$A\vec{u} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \Theta,$$

ва, демак, $\vec{u}$ — келтирилган (33.38) системанинг ечими.

Шундай қилиб, (33.36) системанинг умумий ечими (33.39) формула билан берилади.

Бир жинсли системанинг умумий ечимини текширишга киришамиз. Қуйидаги теорема ўринли.

11-теорема. *Ушбу*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \ldots + a_{1n}x_n = 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &+ \ldots + a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}
\tag{33.40}
$$

чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси берилган бўлсин ва бу система A матрицасининг ранги r га тенг бўлсин. У ҳолда (33.40) системанинг барча ечимлари тўплами R^n фазода ўлчами $n-r$ га тенг бўлган қисм фазо ҳосил қилади.

Исбот. Биз биламизки, A матрицанинг ранги $r \leqslant \min(m, n)$ муносабатни қаноатлантиради. Шунинг учун ҳар доим $n-r \geqslant 0$.

R^n га тегишли $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар (33.40) системанинг ихтиёрий ечимлари бўлсин, λ ва μ — ихтиёрий сонлар бўлсин. У ҳолда (33.37) дан

$$A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} = \lambda\Theta + \mu\Theta = \Theta$$

экани келиб чиқади ва, демак, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ (33.40) системанинг ечимидир. Қисм фазонинг таърифига биноан (28.4-пунктга қаранг), (33.40) бир жинсли системанинг ечимлари тўплами R^n — фазонинг P қисм фазоси бўлади. Бу қисм фазонинг ўлчамини топамиз. Аниқлик учун A матрицанинг ушбу r-тартибли минори нолдан фарқли деб фараз қиламиз:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (33.41)$$

акс ҳолда тенгламаларнинг ва номаълумларнинг номерларини ўзгартириш ҳисобига бунга эришиш мумкин.

33.5-пунктдаги 9-теоремада исботланганидек, бу ҳолда (33.40) система

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r(r+1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0. \end{gathered} \qquad (33.42)$$

системага тенг кучли бўлади. Сўнгра $x_{r+1}, \ldots, x_n$ номаълумлар сифатида $x^0_{r+1}, \ldots x^0_n$ ҳақиқий сонларни олиб ва

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}x^0_{r+1} - \ldots - a_{1n}x^0_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}x^0_{r+1} - \ldots - a_{rn}x^0_n \end{gathered} \qquad (33.43)$$

системага Крамер теоремасини қўлланиб, бу системанинг ягона бўлган $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_r$ ечимини топамиз, чунки (33.43) системанинг δ детерминанти нолдан фарқли.

9-теоремада сонларнинг $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_r, x^0_{r+1}, \ldots, x^0_n$ системаси бошланғич (33.40) системанинг ечими экани исботланган эди. x^0_{r+1},

$\ldots, x_n^0$ сонлар бир-биридан эркли равишда исталган ҳақиқий сонларни қабул қилганда

$$\vec{c} = \begin{Vmatrix} x_{r+1}^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{Vmatrix}$$

вектор, равшанки, R^{n-r} фазодаги барча қийматларни қабул қилади. $(x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0) \in R^{n-r}$ векторга (33.40) системанинг $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_r^0, x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0$ ечимини мос келтирувчи

$$f: R^{n-r} \to P$$

акслантириш чизиқли акслантириш бўлади, шундай экани Крамер формулаларидан келиб чиқади. Бундан ташқари, бу акслантириш биективдир, чунки 9-теоремада $f(R^{n-r}) = P$ экани исботланган ва R^{n-r} тегишли $\vec{c}_1 \neq \vec{c}$ векторларга $f(\vec{c}_1) \neq f(\vec{c}_2)$ векторлар мос келади. Шунинг учун R^{n-r} даги чизиқли эркли векторлар P даги чизиқли эркли векторларга ўтади ва демак, R^{n-r} даги базис P даги базисга ўтади. Бундан P нинг ўлчами $n-r$ га тенг экани келиб чиқади.

Теорема исботланди.

1-натижа. (33.40) *бир жинсли система берилган бўлсин ва унинг коэффициентлари матрицасининг ранги* r *га тенг бўлсин. У ҳолда* (33.40) *системанинг умумий ечими ушбу кўринишда бўлади:*

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \vec{x}_{n-r},$$

бунда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-r}$ *лар* R^n *га тегишли векторларнинг исталган чизиқли эркли системаси бўлиб,* (33.40) *системанинг ечимларидир.*

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-r}$ системани кўпинча (33.40) бир жинсли система ечимларининг *фундаментал системаси* дейилади.

2-натижа. (33.36) *бир жинслимас тенгламалар системаси берилган бўлсин. У ҳолда бу системанинг умумий ечими ушбу кўринишга эга бўлади:*

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \vec{u}_{n-r},$$

бунда $\vec{x}_0$ *— бу системанинг қандайдир ечими,* $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n-r}$ *лар эса келтирилган бир жинсли* (33.38) *система исталган ечимларининг фундаментал системаси.*

Бу натижанинг исботи 10-теорема ва 1-натижадан бевосита келиб чиқади.

34-§. R^n ни R^m га чизиқли акслантиришларнинг умумий хоссалари ҳақида

Бу параграфда R^n ни R^m га чизиқли акслантиришнинг умумий хоссаларини ўрганиш давом эттирилади. Чизиқли акслантиришнинг қийматлари соҳаси мукаммал ўрганилади ва n ҳамда m сонларнинг хоссалари ва чизиқли акслантиришнинг қийматлари соҳасининг ўлчамига боғлиқ ҳолда чизиқли акслантиришларнинг инъектив, сюръектив ва биектив бўлишининг зарурий ва етарли шартлари берилади. Бу масалаларни ўрганишда 33-§-нинг натижалари муҳим роль ўйнайди.

34.1. Чизиқли акслантиришнинг қийматлари соҳасининг тузилиши.

1-теорема. *$f: R^n \to R^m$ — чизиқли акслантириш бўлсин. У ҳолда $f(R^n)$ фазо R^m нинг қисм фазоси бўлади ва $f(R^n)$ нинг ўлчами A матрицанинг рангига тенг бўлади, бунда A_f — f чизиқли алмаштиришнинг матрицаси (30.2-пунктга қаранг). Хусусан агар A_f нинг ранги m ёки нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(R^n)$ мос равишда R^m ёки R^n нинг нолинчи қисм фазоси билан бир хил бўлади.*

Исбот. $\vec{x}'$ ва $\vec{y}'$ лар $f(R^n)$ га тегишли ихтиёрий векторлар, λ ва μ эса ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин. $f(R^n)$ қисм фазо эканини исботлаш учун $\lambda\vec{x}' + \mu\vec{y}'$ нинг $f(R^n)$ га тегишли эканини исботлаш етарли. $\vec{x}', \vec{y}' \in f(R^n)$ бўлгани учун шундай $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар мавжудки, $f(\vec{x}) = \vec{x}'$, $f(\vec{y}) = \vec{y}'$ бўлади. Сўнгра, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in R^n$ ва, демак, $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in f(R^n)$. f акслантиришнинг чизиқли эканидан фойдаланиб, топамиз:

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = \lambda\vec{x}' + \mu\vec{y}'.$$

Бундан $\lambda\vec{x}' + \mu\vec{y}' \in f(R^n)$. Шундай қилиб, $f(R^n)$ фазо R^m нинг қисм фазоси.

Бу қисм фазонинг ўлчами қандай эканини аниқлаймиз. f чизиқли алмаштиришнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A_f = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

бунда A_f матрицанинг устунлари R^m фазонинг $\vec{a}_1 = f(\vec{e}_1)$, $\vec{a}_2 = f(\vec{e}_2), \ldots, \vec{a}_n = f(\vec{e}_n)$ векторларидан иборат (30.2-пунктга қаранг).

f чизиқли акслантириш бўлгани учун ҳар қандай $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in R^n$

учун ушбуга эгамиз:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i.$$

Бундан $f(R^n)$ фазо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар вужудга келтирган қисм-фазо экани ва унинг ўлчами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ системанинг чизиқли эркли векторларининг максимал сонига тенг экани, яъни A_f матрицанинг рангига тенг экани келиб чиқади (28.4 ва 33.4-пунктларга қаранг).

Теорема исботланди.

34.2. Чизиқли акслантиришнинг инъектив бўлиш (ўзаро бир қийматли бўлиш) шарти. $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш ҳар қандай $\vec{b} \in R^m$ вектор учун $A_f \vec{x} = \vec{b}$ тенгламалар системаси биттадан ортиқмас ечимга эга бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина инъектив бўлади (33.1-пунктга қаранг). Бунинг учун, 33.5-пунктда исботланганидек, A_f матрицанинг ранги $\vec{x}$ вектор компонентларининг миқдорига, яъни n сонга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. 34.1-пунктдаги теоремага биноан A_f нинг ранги $f(R^n)$ қисм фазонинг ўлчамига тенг.

Шундай қилиб, ушбу теоремага келамиз.

2-теорема. *$f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш инъектив бўлиши учун қуйидагилар ўринли бўлиши зарур ва етарли:*

1) $n \geqslant m$,

2) $f(R^n)$ қисм фазонинг ўлчами n га тенг.

34.3. Чизиқли акслантиришнинг сюръектив бўлиш шарти. $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш бўлсин. f сюръектив акслантириш бўлиши учун $A_f \vec{x} = \vec{b}$ система ҳар қандай $\vec{b} \in R^m$ учун ечимга эга бўлиши зарур ва етарли (33.1-пунктга қаранг). Бу система, 33.5-пунктда исботланганидек, A_f матрицанинг ранги $\vec{b}$ вектор компонентлари сонига, яъни m сонга — R^m нинг ўлчамига тенг бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина ечимга эга бўлади. A_f матрицанинг ранги $f(R^n)$ қисм фазонинг ўлчамига тенг бўлгани учун ушбу теорема ўринли.

3-теорема. *$f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш сюръектив бўлиши учун қуйидагилар ўринли бўлиши зарур ва етарли:*

1) $m \leqslant n$,

2) $f(R^n)$ нинг ўлчами m га тенг.

34.4. Чизиқли акслантиришнинг (устига акслантиришнинг бир қийматли) биектив бўлиш шарти. $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш таърифга кўра бир вақтнинг ўзида инъектив ва сюръектив бўлса, у ҳолда биектив бўлади. Шу сабабли 34.2 ва 34.3-пунктдаги 2 ва 3-теоремалардан ушбу теорема бевосита келиб чиқади.

4-теорема. *$f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш биектив бўлиши учун қуйидагилар ўринли бўлиши зарур ва етарли:*

1) $m = n$,

2) $f\ (R^n)$ *қисм фазонинг ўлчами n га тенг.*

$f: R^n \to R^m$ — биектив чизиқли акслантириш бўлсин. У ҳолда 4-теоремага биноан, биринчидан, $m = n$ ва A_f матрица квадрат матрица, ва, иккинчидан 34.1-пунктдаги 1-теоремага кўра A_f нинг ранги n га тенг. Шунинг учун 33.4-пунктдан $\det A_f \neq 0$ экани келиб чиқади ва бошланғич акслантириш R^n ни R^m га ўтказувчи чизиқли айнимаган оператор экани келиб чиқади.

Бу фикр билан 33.3-пунктдаги 4-теоремани қўшиб ушбу теоремага келамиз.

5-теорема. *Чизиқли акслантириш $f: R^n \to R^n$ биектив бўлиши учун $m = n$ ва f акслантириш R^n ни R^n га ўтказувчи чизиқли айнимаган оператор бўлиши зарур ва етарли.*

IV бобга доир масалалар ва машқлар

I. R^n фазо.

1) Қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни аниқланг:

а) R^4 фазода: $\vec{x} = (2,\ 1,\ 3,\ 2)$ ва $\vec{y} = (1,\ 2, -2,\ 1)$;

б) R^5 фазода: $\vec{x} = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0)$ ва $\vec{y} = (0,\ 3, -1,\ 0,\ 1)$;

2) R^4 фазода $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $(1, -1, -1,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1,\ 3)$ векторларга ортогонал бўлиб, узунлиги бирга тенг бўлган векторни топинг.

3) агар R^n да $\vec{x}$ вектор $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ векторларнинг ҳар бирига ортогонал бўлса, у ҳолда $\vec{x}$ вектор $l\ (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k})$ чизиқли қобиққа тегишли ҳар қандай векторга ҳам ортогонал бўлишини исботланг.

4) R^n да тўғри бурчакли n ўлчовли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг бир учидан чиқувчи қирралари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг (Пифагор теоремасининг n ўлчовли умумлаштирилиши).

5) қирраси a га тенг бўлган n ўлчовли кубнинг диагонали узунлигини топинг ва бу узунликнинг $n \to \infty$ даги лимитини аниқланг.

6) R^n даги иккита қисм фазонинг бирлашмаси ва кесишмаси яна R^n да қисм фазо эканини исботланг.

7) иккита қисм фазо ўлчамларининг йиғиндиси йиғиндининг ўлчамига бу қисм фазолар кесишмасининг ўлчамининг қўшилганига тенг бўлишини исботланг.

II. Матрицалар ва улар устида амаллар. Чизиқли акслантиришлар.

8) қуйидаги квадрат матрицаларнинг кўпайтмаларини топинг:

$$\text{а)} \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix};$$

б) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

9) қуйидаги тўғри бурчакли матрицаларнинг кўпайтмасини топинг:

а) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

б) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -5 & 6 \end{Vmatrix}$;

в) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 7 \\ -6 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

10) ушбу

$$F(A) = 3A^3 - 2A^2 + A$$

полиномнинг қуйидаги квадрат матрицаларга тўғри келадиган қийматларини топинг:

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

в) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$.

11) $f: R^4 \to R^5$ акслантириш $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$ векторларни $f(\vec{e_1}) = (1, 1, 0, 0, 0)$, $f(\vec{e_2}) = (0, 1, 1, 0, 0)$, $f(\vec{e_3}) = (0, 0, 1, 1, 0)$, $f(\vec{e_4}) = (0, 0, 0, 1, 1)$ векторларга ўтказувчи чизиқли аксланти-

риш бўлсин. Шу акслантиришнинг матрицасини ва унинг координаталар бўйича тасвирини (ифодасини) ёзинг.

12) $f:R_4 \to R_4$ алмаштириш $\vec{e_1}+\vec{e_2}$; $\vec{e_1}-\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$ векторларни $f(\vec{e_1}+\vec{e_2})=(0, 0, -1, 1)$, $f(\vec{e_1}-\vec{e_2})=(0, 0, 1, 2)$, $f(\vec{e_3})=(1,2,0,0)$, $f(\vec{e_4})=(0,-3, 2, 0)$ векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. Шу акслантиришнинг матрицаси ва унинг координаталар орқали тасвирини ёзинг.

13) $f:R^5 \to R^3$ акслантириш қуйидаги координаталар орқали тасвирланган чизиқли акслантириш бўлсин:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5, \\ x_3' &= -x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5. \end{aligned}$$

Ушбу $f(\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3})$, $f(\vec{e_2}+\vec{e_4}-2\vec{e_5})$ векторларни топинг.

14) $f:R^3 \times R^3 \to R^1$—бичизиқли форма бўлиб, унинг учун ушбу тенгликлар ўринли бўлсин: $f(\vec{e_1}, \vec{e_1})=f(\vec{e_2}, \vec{e_2})=f(\vec{e_3}, \vec{e_3})=1$, $f(\vec{e_1}, \vec{e_2})=2$, $f(\vec{e_2}, \vec{e_1})=3$, $f(\vec{e_1}, \vec{e_3})=-1$, $f(\vec{e_3}, \vec{e_1})=-2$, $f(\vec{e_3}, \vec{e_2})=2$. Бу форманинг R^3 га тегишли ихтиёрий $\vec{x}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ва $\vec{y}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ векторлар учун қиймати қандай бўлишини ёзинг ва $\vec{x}(-3, 0, 2)$ ва $\vec{y}=(4, 2, -3)$ да f нинг қийматини топинг.

15) $f:R^3 \times R^3 \to R^1$ бичизиқли форма бўлиб, унинг учун ушбу тенгликлар ўринли бўлсин $f(\vec{e_1}, \vec{e_1})=1$, $f(\vec{e_2}, \vec{e_2})=-1$, $f(\vec{e_3}, \vec{e_3})=2$, $f(\vec{e_1}+\vec{e_2}, \vec{e_2})=2$, $f(\vec{e_2}, \vec{e_1}-\vec{e_2})=4$, $f(\vec{e_2}+\vec{e_3}, \vec{e_3})=3$, $f(\vec{e_3}, \vec{e_2}-2\vec{e_3})=-1$, $f(\vec{e_1}, \vec{e_3})=3$, $f(\vec{e_3}, 2\vec{e_1}-\vec{e_2})=4$. f симметрик форма эканини текширинг ва $\vec{x}=(1, -2, 3)$ вектор учун f вужудга келтирган квадрат форманинг қийматини топинг.

16) $f:R^3 \to R^3$ оператор $\vec{e_1}$, $\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$ векторларни $f(\vec{e_1})=(1, 1, 1)$, $f(\vec{e_1}+\vec{e_2})=(0, 1, 1)$, $f(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3})=(1, 2, 0)$ векторларга ўтказувчи чизиқли оператор бўлсин, f операторнинг ва унга қўшма бўлган f^* операторнинг координаталар орқали тасвирини ёзинг. $(\vec{x}, f(\vec{y}))=(f^*(\vec{x}), \vec{y})$ формулани бевосита ҳисоблаш йўли билан $\vec{x}=(1,-1, 2)$ ва $\vec{y}=(0, 1, 3)$ векторлар учун текширинг.

17) $\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $\vec{e_1}-\vec{e_2}$, $\vec{e_3}+\vec{e_4}$, $\vec{e_3}-\vec{e_4}$ векторларни $f(\vec{e_1}+\vec{e_2})=(1, 1, 1, 1)$, $f(\vec{e_1}-\vec{e_2})=(1, \alpha, 2, \gamma)$, $f(\vec{e_3}+\vec{e_4})=(-1, 3, \beta, \theta)$, $f(\vec{e_3}-\vec{e_4})=(\varepsilon, \varphi, 0, 3)$ векторларга ўтказувчи $f:R^4 \to R^4$ чизиқли

оператор берилган бўлсин. α, β, γ, ε, φ сонларни шундай аниқлангки, $f: R^4 \to R^4$ оператор ўз-ўзига қўшма оператор бўлсин.

III. Детерминантлар.

Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

18) а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 27 & 1 \\ 5 & 25 & 125 & 1 \end{vmatrix}$.

19) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

20) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

21) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 4 & 6 & \dots & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 2n \end{vmatrix}$. 22) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

23) $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\alpha_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha_3 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+\alpha_n \end{vmatrix}$.

24) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & & n \end{vmatrix}$.

IV. Крамер теоремаси.

Қуйидаги тенгламалар системаларини ечинг:

25) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6,$

$2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4,$
$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8.$

26) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4,$
$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6,$
$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6.$

27) $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3,$
$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5.$

28) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$
$2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_n = t,$
$2^2x_1 + 3^2x_2 + \ldots + n^2x_n = t^2,$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$2^{n-1}x_1 + 3^{n-1}x_2 + \ldots + n^{n-1}x_n = t^n.$

29) $ax_1 + bx_2 + bx_3 + \ldots + bx_n = \gamma_1,$
$bx_1 + ax_2 + bx_3 + \ldots + bx_n = \gamma_2,$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$bx_1 + bx_2 + bx_3 + \ldots ax_n = \gamma_n.$

30) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2n} = a_1,$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - \ldots - 2nx_{2n} = a_2,$
$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + \ldots + (2n)^2x_{2n} = a_3$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$
$2^{2n-1}x_1 + (-3)^{2n-1}x_2 + 4^{2n-1}x_3 + \ldots + (-2n)^{2n-1}x_{2n} = a_{2n}.$

V. Матрицанинг ранги. Чизиқли тенгламаларнинг умумий системалари. Қуйидаги матрицаларнинг рангини топинг:

31) $\begin{Vmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 8 & 16 & 36 & 14 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 3 & 21 & 51 & 9 \end{Vmatrix}.$ 32) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 8 & 8 \end{Vmatrix}.$

33) $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix}.$ 34) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$

35) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$ 36) $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{Vmatrix}.$

Қуйидаги тенгламалар системаларини Кронекер — Капелли теоремасидан фойдаланиб ечинг:

37) $x_1 + x_2 - 3x_3 = -1,$
$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1,$

38) $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 = 2,$
$3x_1 \qquad - x_3 + x_4 = -3,$
$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6.$

39) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7,$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2,$
$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23,$
$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12.$

40) $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0,$
$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0,$
$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0.$

41) $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0,$
$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0,$
$x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0,$
$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0.$

42) $x_1 + 2x_2 \qquad - 3x_4 + 2x_5 = 1,$
$x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2,$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_4 = 7,$
$9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25.$

Қуйидаги системаларнинг умумий ечимларини бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг умумий хоссаларидан, шунингдек, бир жинсли ва бир жинслимас тенгламалар системаси ечимларининг умумий формаси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топинг:

43) $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0,$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0,$
$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0,$
$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0.$

44) $x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0,$
$2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0,$
$3x_1 \qquad + x_3 - x_4 + \qquad x_5 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0.$

45) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 4,$
$4x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 7.$

46) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,$
$-x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2,$
$x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 + 3x_5 = 2,$
$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1.$

Юқоридаги масалани λ параметрнинг қийматларига боғлиқ равишда текширинг:

47) $\lambda x + y + z = m,$
$x + \lambda y + z = n,$
$x + y + \lambda z = p.$

48) $\lambda x + y + z = 4,$
$x + 3\lambda y + z = 3,$
$x + 6\lambda y + z = 4.$

49) $\lambda x + y + z = 1,$
$x + \lambda y + z = \lambda,$
$x + y + \lambda z = \lambda^2.$

50) $\lambda x + y + z + t = 1,$
$x + \lambda y + z + t = \lambda.$
$x + y + \lambda z + t = \lambda^3,$
$x + y + z + \lambda t = \lambda^2.$

V боб. Чизиқли фазолар ва чизиқли операторлар

Чизиқли алгебрани ўрганишда асослари IV бобда тўла ўрганилган матрицалар назарияси ва чизиқли тенгламалар системалари назарияси асосий аппарат бўлиб хизмат қилади. Бу масалаларнинг баёни R^n фазоларнинг ва R^n ни R^m га акслантиришларнинг хоссаларига таянади, бунда n ва m — ихтиёрий натурал сонлар. Бу бобда биз ҳозирги замон математикасининг муҳим тушунчаларидан бири — чизиқли фазо тушунчасини киритамиз. Чизиқли фазолар синфи, хусусан, R^n ни ҳам ўз ичига олади.

Чизиқли фазоларнинг хоссалари математиканинг, механиканинг ва физиканинг кўп бўлимларида муҳим роль ўйнайди. Қуйида биз чизиқли фазолар, масалан, $m \times n$ матрицаларнинг $M^{m,n}$ тўпламини, R^n ни R^n га барча чизиқли акслантиришлар тўпламини ташкил қилишини, механикада тезлик ёки тезланиш векторлари тўпламини ташкил қилишини ва ҳоказоларни кўрамиз.

Биз ўз баёнимизни ҳозирги замон математикасининг марказий тушунчаларидан бири — группа тушунчаси ва унинг энг содда хоссаларидан бошлаймиз. Бундай қилиш, биринчидан, группа тушунчаси геометрия ва физиканинг бир қатор асосий принципларини ифодалаш учун ўз-ўзидан муҳимдир, иккинчидан, чизиқли фазога таъриф беришда бу тушунчадан фойдаланиш қулайдир.

35-§. Группа

35.1. Группанинг таърифи ва энг содда хоссалари. G бирор тўплам бўлсин. Агар

$$h : G \times G \to G$$

акслантириш аниқланган бўлса, у ҳолда G да *операция* берилган дейилади.

Агар $x \in G$ ва $y \in G$ бўлса, у ҳолда $h(x, y) \in G$ элементни одатда x ни y га кўпайтмаси дейилади ва xy (ёки $x \cdot y$) кўринишда белгиланади; h операцияни *кўпайтириш* амали дейилади. Барча $x \in G$, $y \in G$ ларда h акслантириш *коммутативлик қонунини* қаноатлантирса, яъни $h(x, y) = h(y, x)$ бўлса, бундай ҳолларда, одатда аддитив ёзувдан фойдаланилади: h операцияни G да *қўшиш амали* дейилади ва $+$ белги билан белгиланади.

G кўпайтириш амали киритилган тўплам бўлсин. $x, y, z \in G$ элементларнинг тартибланган учлиги учун кўпайтмани икки усул билан тузиш мумкин: $(xy)z$ ва $x(yz)$. Агар барча $x, y, z \in G$ ларда

$$(xy)z = x(yz) \tag{35.1}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда G да кўпайтириш амали *ассоциативлик қонунига* бўйсунади ёки *кўпайтириш ассоциатив* дейилади. Агар барча $x \in G$ лар учун

$$ex = x = xe \tag{35.2}$$

бўлса, $e \in G$ элемент *бирлик элемент* (ёки *бирлик*) деб аталади. Бирлик элемент ягонадир: агар $e' \in G$ бошқа бирлик бўлса, у ҳолда

$$e = ee' = e'.$$

Агар G тўпламда операция коммутатив бўлса, у ҳолда бирлик элемент θ билан белгиланади ва G группанинг *ноль элементи* (ёки ноли) дейилади. Бу ҳолда:

$$\theta + x = x = x + \theta. \tag{35.3}$$

Бирлик билан бир қаторда кўпинча бирмунча умумийроқ тушунча чап ёки ўнг бирлик тушунчаси киритилади, бунда G тўпламнинг мос равишда шундай e' ва e'' элементлари тушуниладики, ҳар қандай $x \in G$ учун мос равишда

$$e'x = x \quad \text{ёки} \quad xe'' = x \tag{35.4}$$

муносабатлар бажарилади.

Бирликка эга бўлган, ассоциатив кўпайтириш киритилган ва ҳар қандай $x \in G$ учун

$$xy = yx = e \tag{35.5}$$

тенглик бажариладиган $y \in G$ элемент мавжуд бўлса, бундай G тўплам *группа* дейилади. y элемент x га нисбатан *тескари элемент* дейилади. Тескари элемент ягонадир. Ҳақиқатан, агар y элемент x га нисбатан бошқа тескари элемент бўлса, у ҳолда.

$$y' = y'e = y'(xy) = (y'x)y = ey = y.$$

x га нисбатан тескари элемент x^{-1} билан белгиланади, агар операция группада коммутатив бўлса, у ҳолда тескари элемент — x билан белгиланади. Операция коммутив бўлган группалар *коммутатив* (ёки Абель группалари) *группалар* дейилади. Бундай группаларда, шартлашганимизга асосан, аддитив ёзувдан фойдаланилади. Ҳар қандай бутун мусбат сон n учун

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots x}_{n \text{ марта}}{}^*$$

$x^0 = e$ ва, охирида, $x^{-n} = (x^{-1})^n$ — деб фараз қиламиз.

* Кўпайтириш қонунининг ассоциативлиги туфайли x^n элемент тўла аниқланган.

Бутун кўрсаткичлар билан оддатаги амал қоидалари бажарилишини текшириш осон: $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$, $(x^n)^m = x^{nm}$.

Чап ва ўнг бирликларга ўхшаш чап ва ўнг тескари элементларни аниқлаш мумкин эди. Маълум бўлишича, группанинг таърифланишида бир томонли бирликлардан ва бир томонли тескари элементлардан фойдаланиш мумкин экан.

1-теорема. *G чап $e_ч$ элементга эга бўлган ассоциатив кўпайтиришли тўплам бўлсин. Сўнгра ҳар қайси $x \in G$ учун чап тескари элемент мавжуд бўлсин. У ҳолда $e_ч$ — ўнг бирлик бўлади; ҳар қандай чап тескари элемент шу вақтнинг ўзида ўнг бирлик элемент ҳамдир.*

Исбот. a элемент G нинг ихтиёрий элементи, b эса унинг чап бирлик элементи бўлсин: $ba = e_ч$. Ушбуга эгамиз:

$$(ba)b = e_ч b = b. \qquad (35.6)$$

c элемент b га чап тескари элемент бўлсин; (35.6) нинг иккала қисмини чапдан c га кўпайтириб, топамиз:

$$(cb)\cdot ab = cb \quad \text{ёки} \quad ab = e_ч,$$

яъни b элемент a учун ўнг тескари элемент ҳамдир. Бундан ташқари,

$$ae_ч = a(ba) = (ab)a = e_ч a = a.$$

Демак, $e_ч$ a нинг ўнг бирлигидир.

Теорема исботланди.

G — группа бўлсин. G группанинг H *қисм группаси* деб G нинг бирлик элементга эга бўлган ва кўпайтиришга нисбатан ҳамда тескари элементнинг олинишига нисбатан берк бўлган қисм тўпламига айтилади (барча $x \in H$, $y \in H$ лар учун $x \cdot y \in H$, $x^{-1} \in H$). Агар H қисм группа бирлик элементдангина иборат бўлса ёки G нинг ўзидан иборат бўлса, у ҳолда бу қисм группа *тривиал* қисм группа дейилади.

Равшанки, берилган группанинг бўшмас қисм группаларининг кесишмаси яна қисм группадир.

Мисоллар. 1. Рационал сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа ҳосил қилади. Нолдан фарқли рационал сонлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группа ҳосил қилади. Ҳақиқий сонлар тўпламига ва комплекс сонлар тўпламига нисбатан ҳам айтилган тасдиқлар ўринли. Бу олтита группанинг ҳаммаси коммутативдир.

2. Барча $m \times n$ матрицалар тўплами $M^{m,n}$ ҳар қандай натурал m ва n сонларда қўшишга нисбатан группа ҳосил қилади (30.1-пунктга қаранг). Бу группа коммутативдир; унинг ноли ноль матрицадан иборат.

3. Ҳамма n-тартибли махсусмас матрицалар тўплами (33.2 ва 33.3-пунктларга қаранг) кўпайтиришга нисбатан группа ҳосил қилади. Бу группа коммутативмас.

4. M —бўшмас тўплам ва $G(M)$ эса M нинг барча ўз-ўзига биектив акслантиришларининг тўплами бўлсин. У ҳолда $G(M)$ — группа,

бунда G (M) да кўпайтириш акслантиришлар композициясидан иборат (29. 2- пунктга қаранг) G (M) нинг бирлиги 1_M айний акслантиришдан иборат.

G (M) группанинг элементлари M тўпламнинг *алмаштиришлари* дейилади. Қабул қилинган терминологияга биноан, G (M) группанинг ҳар қандай қисм группаси M тўплэм *алмаштиришларининг группаси* дейилади. G (M) группа, умуман айтганда, коммутативмас.

5. R^n фазонинг ўзини ўзига ўтказувчи барча чизиқли айнимаган операторлари тўплами кўпайтиришга нисбатан коммутатив бўлмаган группа (33. 3- пунктга қаранг). Бу группа R^n нинг ўзини ўзига алмаштиришларининг қисм тўпламидир.

1 — 5- мисолларда группа хоссаларининг бажарилишини текшириш содда ва ўқувчида ҳеч бир қийинчилик туғдирмайди.

35.2. **Группаларнинг гомоморфизмлари** G, G' группалар берилган бўлсин. Агар барча x, $y \in G$ лар учун

$$f(x,y) = f(x)\cdot f(y) \tag{35.7}$$

тенглик бажарилса, $f: G \to G$ акслантириш G группанинг G' группага *гомоморфизми* дейилади.

G ва G' коммутатив группалар учун бу муносабат ушбу кўринишни олади:

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{35.7'}$$

2-теорема. *f акслантириш G группанинг G' группага гомоморфизми бўлсин. e ва e' лар G ва G' группаларнинг бирлиги бўлсин. У ҳолда*

$$f(e) = e' \tag{35.8}$$

ва ҳар қандай $x \in G$ учун

$$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}. \tag{35.9}$$

Исбот. $u = f(e)$ деб оламиз. У ҳолда, группанинг бирлиги хоссасидан ва гомсморфизмнинг таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$u = f(e) = f(ee) = f(e)\cdot f(e) = u\cdot u.$$

Шунинг учун

$$u^{-1}u = u^{-1}(u\,u)$$

ва, демак,

$$e' = u^{-1}u = (u^{-1}u)\,u = e'u = u = f(e).$$

Шундай қилиб,

$$f(e) = e'$$

ва (35.8) исботланди.

Энди x — G группанинг ихтиёрий элементи бўлсин, у ҳолда

$$e' = f(e) = f(xx^{-1}) = f(x)\, f(x^{-1}).$$

Бу тенгликни чапдан $[f(x)]^{-1} \in G$ элементга кўпайтириб, топамиз:

$$[f(x)]^{-1} e' = [f(x)^{-1}](f(x)\, f(x^{-1})). \qquad (35.10)$$

G' даги e' бирликнинг хоссасидан, кўпайтиришнинг группада ассоциативлигидан ва берилган $x \in G$ учун тескари элементнинг ягоналигидан фойдаланиб, (35.10) тенгликка ушбу кўринишни бериш мумкин:

$$[f(x)]^{-1} = f(x^{-1}).$$

(35.9) муносабат, у билан бирга 2-теорема ҳам исботланди.

Шуни қайд қиламизки, коммутатив группалар учун аддитив ёзувда (35.8) ва (35.9) муносабатлар ушбу кўринишни олади:

$$f(\theta) = \theta', \qquad (35.8')$$

$$f(-x) = -f(x). \qquad (35.9')$$

G группанинг G' группага барча гомоморфизмлари тўплами одатда $Hom\ (G,\ G')$ билан белгиланади. Агар

$$f \circ g = 1_{G'} \quad \text{ва} \quad g \cdot f = 1_G$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $g \in Hom\ (G',\ G)$ гомоморфизм мавжуд бўлса, $f \in Hom\ (G,\ G')$ акслантириш *изоморфизм* дейилади.

Тўпламларни акслантиришларнинг 29.2-пунктда қаралган хоссаларидан ҳар қандай изоморфизм биектив акслантириш экани келиб чиқади. Равшанки, агар $f \in Hom\ (G,\ G')$ ва f *биектив акслантириш бўлса, у ҳолда* f *изоморфизм бўлади.*

Ораларида изоморфизм ўрнатиш мумкин бўлган группалар изоморф группалар дейилади. Агар G ва G' группалар изоморф бўлса, бундай ёзадилар: $G \approx G'$. G ва G' группалар изоморф бўлсин. У ҳолда G группанинг фақатгина «кўпайтириш операцияси» (G группада) тушунчаси билан ифодаланадиган барча хоссалари G' группада ҳам ўринли бўлади. Тескари фикр ҳам ўринли, чунки G ва G' группалар изоморфдир. Бу ҳол шуни кўрсатадики, изоморф группалар бир-биридан фақат ўз элементларининг конкрет табиати билан фарқ қилади, элементларнинг бу табиати мазкур группаларни шу группаларда кўпайтириш операцияси хоссаларигагина асосланган тушунча ва методлар билан текширишда ҳеч қандай роль ўйнамайди. Шунинг учун кўпинча группаларни ва бошқа алгебраик объектларни текширишни изоморфизмгачагина аниқликда ўтказилади дейилади.

Агар G ва G' группалар бир хил бўлса, у ҳолда изоморфизмларни *автоморфизмлар* дейилади; G группанинг ўзига гомоморфизмлари *эндоморфизмлар* дейилади.

Мисоллар. 1. Бутун сонларнинг қўшишга нисбатан группасини Z билан белгилаймиз. Сўнгра, G ихтиёрий группа, x эса G нинг тайинланган элементи бўлсин. $f(n) = x^n$ (n — бутун сон) формула билан аниқланган $f:Z\to G$ акслантириш Z группани G группага гомоморфизмидир. Ҳақиқатан, ҳар қандай $n, m \in Z$ учун ушбуга эгамиз:

$$f(n+m) = x^{n+m} = x^n x^m = f(n)\cdot f(m).$$

2. G — группа ва n — тайинланган бутун сон бўлсин. G группани ўзига акслантирувчи ψ акслантиришни қараймиз: $\psi(x) = x^n$. Ҳар қандай $x, y \in G$ учун ушбуга эгамиз:

$$\varphi(xy) = (xy)^n = (xy)(xy)\ldots(xy).$$

Агар G коммутатив группа бўлса, у ҳолда:

$$\varphi(xy) = \underbrace{(x\cdot x \ldots x)}_{n \text{ марта}}\cdot\underbrace{(y\cdot y\ldots y)}_{n \text{ марта}} = x^n y^n = \varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

Коммутатив бўлмаган G группа учун охирги тенглик ўринли бўлмаслиги мумкин.

Шунинг учун φ акслантириш коммутатив группалар учунгина G ни G га гомоморфизми бўлади.

3. R^n ни R^m га чизиқли акслантиришларининг акслантиришларни қўшишга нисбатан $Hom(R^n, R^m)$ группаси $m\times n$ матрицаларнинг матрицаларни қўшишга нисбатан $M^{n,m}$ группасига изоморфдир. Бу группаларнинг изоморфизми 30.2-пунктда тавсифланган. Бу изоморфизмда $f \in Hom(R^n, R^m)$ акслантиришга $A_f \in M^{m,n}$ матрица таққосланади.

4. R^n ни R^n га ўтказувчи чизиқли айнимаган операторларнинг операторларни кўпайтиришга нисбатан группаси матрицаларни кўпайтиришга нисбатан n тартибли квадрат махсусмас матрицалар группасига изоморфдир. Изоморфизм бундай берилади: $f\to A_f$ (3-мисолга қаранг). Бу акслантириш изоморфизм эканини текшириш қийин эмас (30.3 ва 33.3-пунктларга қаранг).

G, G', G'' — группалар ва $f \in Hom(G, G')$, $g \in Hom(G', G'')$ гомоморфизмлар берилган бўлсин. У ҳолда $g\circ f \in Hom(G, G'')$, яъни G группанинг G'' группага гомоморфизми бўлади. Агар f ва g — изоморфизмлар бўлса, у ҳолда $g\circ f$ — изоморфизм ва $f^{-1}:G'\to G$ ҳам изоморфизмдир.

Энди G, G' — группалар, e ва e' — мос равишда G ва G' нинг бирликлари ва $f \in Hom(G, G')$ бўлсин. G' нинг бирлигининг тўла прообрази, яъни $f^{-1}(e')$ *гомоморфизмнинг ядроси* дейилади. Гомоморфизм ядроси одатда $Ker\, f$ каби белгиланади. Шундай қилиб, $Ker\, f = f^{-1}(e')$.

Одатда $f(G)\subset G'$ тўплам f *гомоморфизмнинг қийматлари* соҳаси дейилади ва $Im\, f$ каби белгиланади.

3-теорема. *f акслантириш G группанинг G' группага гомоморфизми бўлсин, у ҳолда $Ker\, f$ G нинг қисм группаси бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, агар x, y лар $Ker\, f$ нинг ихтиёрий элементлари бўлса, у ҳолда

$$f(xy) = f(x)f(y) = e'\cdot e' = e'$$

ва, демак, $xy \in Ker\, f$. 35.2-пунктдаги 2-теоремага кўра $e \in Ker\, f$ экани келиб чиқади. Охирида, агар $x \in Ker\, f$ бўлса, у ҳолда $f(x) = e'$ ва шу сабабли $[f(x)]^{-1} = e'$. (35.9) формуладан: $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} = e'$. Демак, $x^{-1} = Ker\, f$.

Теорема исботланди.

4-теорема. f — G группанинг G' группага гомоморфизми бўлсин. *У ҳолда $Im f$ G нинг қисм группаси бўлади.*

Исбот $e' = f(e)$ бўлгани учун $e' \in Im f$. Сўнгра, агар $x', y' \in \in Im f$ бўлса, у ҳолда $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, бунда $x \in G$ ва $y \in G$, шу сабабли ҳам:

$$x'y' = f(x)\, f(y) = f(xy) \in Im f.$$

Ниҳоят, агар $x' \in Im f$ бўлса, у ҳолда $x' = f(x)$, бунда $x \in G$; (35.9) дан фойдаланиб, топамиз:

$$(x')^{-1} = [f(x)]^{-1} = f(x^{-1}) \in Im f.$$

Теорема исботланди.

35.3. **Алмаштиришлар группасининг геометрияси.** M — бирор тўплам, $H(M)$ эса шу M тўплам алмаштиришларининг группаси, яъни $H(M)$ группа M нинг барча биектив акслантиришларининг қисм группаси бўлсин (35.1-пунктдаги 4-мисолга қаранг). M тўпламнинг элементлари *нуқталар*, M нинг қисм тўпламлари эса *фигуралар* дейилади. Агар $\varphi(A) = B$ тенгликни қаноатлантирадиган шундай $\varphi \in H(M)$ алмаштириш мавжуд бўлса, A фигура B* *фигурага эквивалент* дейилади. Агар A ва B фигуралар эквивалент бўлса, бундай ёзамиз. $A \sim B$.

5-теорема. *M тўпламда фигураларнинг эквивалентлиги қуйидаги хоссаларга эга:*

1. Ҳар қандай фигура ўз-ўзига эквивалент (рефлексивлиги).

2. Агар $A \sim B$ бўлса, у ҳолда $B \sim A$ (симметриклиги).

3. Агар $A \sim B$, $B \sim C$ бўлса, у ҳолда $A \sim C$ бўлади (транзитивлиги).

Исбот. 1. Ҳар қандай фигура учун $A \subseteq M A \sim A$, чунки $1_M \in H(M)$ ва $1_M(A) = A$.

2. Энди $A \sim B$ бўлсин. У ҳолда $\varphi(A) = B$ тенгликни қаноатлантирадиган $\varphi \in H(M)$ алмаштириш мавжуд бўлади. Аммо $H(M)$ — группа, шу сабабли $\varphi^{-1} \in H(M)$ ва шунинг учун $\varphi^{-1}(B) = = A$. Демак, $B \sim A$.

3. Ниҳоят, агар $A \sim B$, $B \sim C$ бўлса, у ҳолда шундай $\varphi \in H(M)$ ва $\psi \in H(M)$ алмаштиришлар мавжудки, $\varphi(A) = B$, $\psi(B) = C$ тенгликлар ўринли бўлади. $\psi \circ \varphi$ алмаштириш $H(M)$ га тегишли ва

$$(\psi \circ \varphi)(A) = \psi(\varphi(A)) = \psi(B) = C.$$

---

* Биз эквивалентлик муносабати билан боғлиқ бўлган умумийроқ йўлларни келтирмаймиз, чунки улар бу китоб доирасидан ташқарига чиқади.

Теорема исботланди.

M тўплам фигураларининг хоссаси ва бу фигуралар билан боғлиқ бўлган миқдорлар $H(M)$ группага тегишли ҳар қандай алмаштиришга нисбатан инвариант бўлса, яъни бу хоссалар ва миқдорлар барча эквивалент фигуралар учун бир хил бўлса, у ҳолда уларни машҳур немис математиги Ф. Клейнга тақлид қилиб, геометрик хосса ва миқдорлар ҳисобланади. *$H(M)$ группанинг барча алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлган фигура ва миқдорлар хоссалари ҳақидаги фикрлар системаси шу группанинг геометриясини ташкил қилади.* Шундай қилиб, Клейннинг ғояси шундан иборатки, у ҳар хил геометрияларни тегишли алмаштиришлар группаларининг инвариантлари назарияси деб қараш керак дейди. Қуйида, VI ва VII бобларда назарий-группавий принципларнинг конкрет татбиқлари берилади.

36- §. Чизиқли фазо

36.1. Сонлар майдонлари. Элементлари ҳақиқий ёки комплекс сонлардан иборат бўлган *K* тўплам ўз таркибига кирувчи сонларни қўшиш, айириш, кўпайтириш ва бўлишга (ноль бўлишдан ташқари) нисбатан ёпиқ бўлса, уни *майдон* дейилади. Бошқача сўзлар билан айтганда, агар ҳар қандай иккита $x, y \in K$ сон билан бирга $x+y$, $x-y$, xy ва $\frac{x}{y}$ ($y \neq 0$ деб фараз қилинади) сонлар ҳам *K* тўпламга тегишли бўлса, *K* тўплам майдон ташкил қилади.

Рационал сонлар майдони, ҳақиқий сонлар майдони ва комплекс сонлар майдони майдонларга энг содда мисол бўлади. Бошқа сонлар майдонлари ҳам мавжуд. Масалан, $a+b\sqrt{2}$ кўринишидаги ҳақиқий сонлар майдон ҳосил қилади, бунда a ва b — рационал сонлар. Исталган бошқа сонлар майдони таркибида рационал сонлар майдони мавжуд эканини, яъни бу майдон минимум эканини исботсиз қайд қилиб ўтамиз. Бундан кейин бизга ҳақиқий сонлар майдони билан комплекс сонлар майдонигина керак бўлади. Бу майдонлардан биринчисини *R* билан, иккинчисини эса *C* билан белгилаймиз.

32.2. Чизиқли фазонинг таърифи. *K* сонлар майдони ва бирор *M* тўплам берилган бўлсин. Ушбу

$$\varphi: K \times M \to M$$

акслантириш одатда *кўпайтириш операцияси (ёки тўғридан-тўғри K майдонни M тўпламга кўпайтириш)* дейилади. Агар $\lambda \in K$, $\vec{x} \in M$ бўлса, у ҳолда $\varphi(\lambda, \vec{x})$ элементни *M* тўпламнинг λ *соннинг* $\vec{x}$ *элементга кўпайтмаси* дейилади ва $\lambda\vec{x}$ билан белгиланади. Шу белгилашдан биз бундан кейин ҳам фойдаланамиз.

G коммутатив *группа K майдон устида чизиқли* фазо дейилади, бунда *G* группа учун *K* майдон билан *G* группа кўпайтмаси аниқланган ва у шбу хоссаларга эга бўлиши керак.

Ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in G$ ва қандай $\alpha, \beta \in K$ сонлар учун ушбу муносабатлар ўринли:

$$1. \ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x},$$

$$2. \ \alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x},$$

$$3. \ (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x},$$

$$4. \ \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}.$$

Агар K майдон ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, у ҳолда K майдон устидаги чизиқли майдон *ҳақиқий чизиқли майдон* дейилади агар K' комплекс сонлар майдони бўлса, K' майдон устидаги чизиқли майдон *комплекс чизиқли фазо* дейилади.

Мисоллар. 1. Фазонинг тайинланган нуқтасидан чиқувчи радиус-векторлар тўплами ҳақиқий чизиқли фазо ҳосил қилади.

2. Ҳар қандай натурал n да R^n фазо ҳақиқий чизиқли фазо бўлади.

3. C^n комплекс чизиқли фазо R^n нинг аналогидир. У бундай аниқланади:

$$C^n = \underbrace{C \times C \times \ldots \times C}_{n \text{ марта}}$$

яъни C^n чизиқли фазо n та комплекс соннинг тартибланган системасидан иборат:

$$\vec{z} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

бу сонлар учун қўшиш ва комплекс сонларга кўпайтириш ушбу формулалар билан аниқланади:

$$\vec{z} + \vec{z}' = (\xi_1 + \xi_1', \ldots, \xi_n + \xi_n'), \quad \gamma\vec{z} = (\gamma\xi_1, \ldots, \gamma\xi_n).$$

4. Ҳақиқий элементли $n \times m$ матрицаларнинг $M^{m,n}$ тўплами матрицаларни қўшиш ва матрицаларни ҳақиқий сонларга кўпайтиришга нисбатан чизиқли ҳақиқий фазони ташкил қилади.

5. Комплекс элементли $n \times m$ матрицаларнинг $M_C^{m,n}$ тўплами матрицаларни қўшиш ва матрицаларни комплекс сонларга кўпайтиришга нисбатан комплекс чизиқли фазони ташкил қилади.

6. R^n ни R^m га чизиқли акслантиришларнинг $Hom(R^n, R^m)$ тўплами акслантиришларни қўшиш ва акслантиришларни ҳақиқий сонларга кўпайтиришга нисбатан ҳақиқий чизиқли фазони ташкил қилади.

7. Даражалари n натурал сондан катта бўлмаган ҳақиқий коэффициентли барча полиномлар тўплами полиномларни қўшиш операциясига ва полиномларни ҳақиқий сонга кўпайтиришга нисбатан ҳақиқий чизиқли фазони ташкил қилади.

Даража кўрсаткичлари n билан тенпа-тенг бўлган ҳақиқий коэффициентли полиномлар ҳақиқий чизиқли фазо ҳосил қилмаслигини қайд қилиб ўтамиз. Масалан, n даражали $t^n + 3t$ ва $-t^n + 2$ полиномларнинг йиғиндиси анчагина паст даражали полиномдир.

Шунга ўхшаш, даража кўрсаткичлари n дан ортмайдиган барча комплекс коэффициентли полиномларнинг йиғиндиси полиномларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтиришга нисбатан чизиқли комплекс фазони ташкил қилади.

8. $[0, 1]$ кесмада берилган ҳақиқий функциялар тўплами функцияларни қўшиш ва уларни ҳақиқий сонга кўпайтиришга нисбатан чизиқли ҳақиқий фазони ташкил қилади.

36.3 **Чизиқли фазонинг ўлчами.** Бундай белгилашларни киритамиз: L_R — ҳақиқий чизиқли фазо, $L_{\mathbb{C}}$ — комплекс чизиқли фазо, ва ниҳоят, L_K — ихтиёрий сонлар майдони K устидаги чизиқли фазо. Чизиқли фазо элементларини *векторлар* деймиз.

Агар L_K фазода

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n = 0 \qquad (36.1)$$

тенгликдан, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сонлар K майдонга тегишли сонлар, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ экани келиб чиқса, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли дейилади.

Агарда нолдан фарқли ва 36.1 тенгликларни қаноатлантирувчи λ_i сонлар топилса, у ҳолда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлар системаси *чизиқли боғлиқ* дейилади.

Агар $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда λ_i коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли бўлади Аниқлик учун бу коэффициент λ_1 бўлсин. У ҳолда:

$$\lambda_1\vec{x}_1 = -\lambda_2\vec{x}_2 - \ldots - \lambda_n\vec{x}_n.$$

Буни λ_1 га бўлиб ва

$$\gamma_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \gamma_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, \gamma_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$$

деб олиб, топамиз:

$$\vec{x}_1 = \gamma_2\vec{x}_2 + \gamma_3\vec{x}_3 + \ldots + \gamma_n\vec{x}_n. \qquad (36.2)$$

Агар $\vec{x}_1$ вектор $\vec{x}_2, \vec{x}_3 \ldots, \vec{x}_n$ векторлар орқали (36.2) кўринишидаги формула билан ифодаланса, у ҳолда $\vec{x}_1$ вектор $\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси* дейилади. Шундай қилиб, агар $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлса улардан ақалли биттаси қолганларининг чизиқли комбинацияси бўлади. Аксинчаси ўринли бўлишини ҳам кўрсатиш осон.

R^n фазони ўрганишда бу фазонинг ўлчами ҳақидаги масала ҳам қаралган эди. R^n нинг ўлчами сифатида R^n нинг чизиқли эркли векторларининг максимал сони тушунилиши аниқланган эди, шу сабабли R^n да n та чизиқли эркли векторлар системаси мавжуд ва $n+1$ та вектордан тузилган система чизиқли боғлиқ (28.1 ва 28.4- пунктларга қаранг). Шу сабабли R^n нинг ўлчами n га тенг.

Бу чизиқли фазо ўлчамининг қуйидаги таърифига олиб келади. *Агар L_K да n та чизиқли эркли векторлар мавжуд бўлса ва бундан ортиқ сонда чизиқли эркли векторлар бўлмаса, у ҳолда L_K чизиқли фазо n ўлчовли фазо дейилади ва бундай ёзилади:* $\dim L_K = n$. Қуйида K майдон устидаги n ўлчовли чизиқли фазони L_K^n кўринишда белгилаймиз.

Агар L_K фазода исталган сонда чизиқли эркли векторларни топиш мумкин бўлса, у ҳолда L_K фазони *чексиз ўлчовли фазо* дейилади. Чексиз ўлчовли фазолар функционал анализ предметини ташкил қилади. Мазкур китобда бундай фазолар қаралмайди.

Юқорида кўриб чиққанларимиздан 36.2- пунктдаги 4- мисолда қаралган $m \times n$ матрицаларнинг ҳақиқий чизиқли фазосининг ўлчами mn га тенг экани келиб чиқади.

Ўқувчиларга фойдали машқ сифатида қуйидагиларни исботлашни тавсия қиламиз:

1) $\dim(C^n) = n$;

2) $\dim(Q^n) = n$. бунда Q^n — даражалари n дан ортмайдиган полиномларнинг ҳақиқий чизиқли фазоси;

3) функциялар фазоси (8- мисол) чексиз ўлчамли.

36.4. n ўлчовли чизиқли фазода базис ва векторнинг компонентлари. *Ўлчови n га тенг бўлган L_K^n фазода базис деб шу фазонинг n та чизиқли эркли векторларнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ системасига айтилади.*

L_K^n фазонинг таърифига кўра шу L_K^n фазода ақалли битта $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд.

1-теорема. *n ўлчовли L_K^n фазонинг ҳар қандай $\vec{x}$ векторини базис векторларининг чизиқли комбинацияси кўринишида тасвирлаш мумкин, бунда бундай тасвирлаш ягонадир.*

Исбот. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар L_K^n да базис ташкил қилса, у ҳолда n ўлчовли фазонинг таърифига кўра, L_k^n нинг $n+1$ та векторидан иборат $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ система чизиқли боғлиқ бўлади. Шу сабабли K майдонга тегишли шундай $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ сонлар мавжудки, бунда

$$\lambda_0\vec{x} + \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \theta \qquad (36.3)$$

тенглик ўринли бўлади, шу билан бирга бунда λ_i ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. λ_0 сон олдиндан нолга тенг эмас, чунки акс ҳолда (36.3) ушбу кўринишни олади:

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \theta,$$

бунда λ ларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас. Бу, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базиснинг элементлари чизиқли боғлиқ эканлигини билдирар эди, бунинг эса бўлиши мумкин эмас.

Шу сабабли (36.3) дан ушбуга эга бўламиз:

$$\vec{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\vec{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\vec{e}_n,$$

яъни L_K^n фазонинг ихтиёрий $\vec{x}$ вектори базис элементларининг чизиқли комбинациясидир.

Энди векторнинг базислар бўйича ёйилмасининг ягона эканини аниқлаймиз. Агар

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n$$

ва

$$\vec{x} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \ldots + \mu_n\vec{e}_n$$

бўлса, у ҳолда

$$\theta = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\vec{e}_n.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \ldots = \lambda_n - \mu_n = 0.$$

Бундан:

$$\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Векторнинг базис бўйича ёйилмасининг ягоналиги исботланди.

Агар L_K^n фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисга нисбатан

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n \tag{36.4}$$

ёйилма ўринли бўлса, $\alpha_1, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$ сонлар n ўлчовли чизиқли фазода $\vec{x}$ *векторнинг компонентлари* дейилади.

1-теоремадан, n ўлчовли L_K^n фазода ҳар бир векторни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис бўйича ёйиш мумкин экани, шу билан бирга $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ компонентлар бир қийматли аниқланган экани келиб чиқади.

Ноль векторгина ва фақат шу векторгина ҳар қандай базисда ноль компонентларга эга экани равшан.

2-теорема. *L_K^n фазода векторларни қўшишда уларнинг ҳар қандай тайинланган базисга нисбатан компонентлари қўшилади, векторларни K майдонга тегишли сонларга кўпайтиришда эса компонентлар шу сонларга кўпайтирилади.*

Исбот. $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ — L_K^n фазога тегишли ихтиёрий векторлар, $\lambda \in K$ эса ихтиёрий сон бўлсин. Агар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис L_K^n га тегишли ихтиёрий базис бўлса, у ҳолда

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n, \; \vec{y} = \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n,$$

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ лар $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг шу базисдаги компонентлари.

$$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\vec{e}_n.$$

эканини кўриш осон. Векторнинг берилган базисдаги компонентлари бир қийматли аниқлангани сабабли бундан $\vec{x} + \vec{y}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ компонентларга эга экани келиб чиқади. Шунга ўхшаш, $\lambda\vec{x}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда $\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n$ компонентларга эга бўлади.

Теорема исботланди.

Мисоллар. 1. R^n фазода (28.1 ва 28.4-пунктларга қаранг) векторларнинг

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
\vec{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

системаси базис ташкил қилади. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — R^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда

$$\vec{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, 0, \ldots, 0) +$$
$$+ \alpha_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0,0,0, \ldots, 1) =$$
$$= \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n.$$

Шундай қилиб, R^n фазода ҳар бир вектор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ҳақиқий сонларнинг тартибланган системасидан иборат бўлиб, бу сонлар $\vec{x}$ векторнинг

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \; \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$

базисдаги компонентларидир. Шунингдек,

$$\vec{g}_1 = (1,\ 1,\ 1, \dots, 1),$$
$$\vec{g}_2 = (0,\ 1,\ 1, \dots, 1),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{g}_n = (0,\ 0,\ 0, \dots, 1)$$

векторлар системаси R^n да базис ташкил қилиши осон текширилади. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — R^n даги ихтиёрий вектор бўлсин. Агар $\vec{x}$ векторнинг бу базисдаги компонентлари $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ сонлардан иборат бўлса у ҳолда:

$$\vec{x} = \gamma_1\vec{g}_1 + \gamma_2\vec{g}_2 + \dots + \gamma_n\vec{g}_n.$$

Тўла ёзувда бу ушбуни билдиради:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \gamma_1(1,\ 1,\ 1, \dots, 1) + \gamma_2(0,\ 1,\ 1, \dots, 1) + \dots +$$
$$+ \gamma_n(0,\ 0, \dots, 1) = (\gamma_1,\ \gamma_1 + \gamma_2, \dots, \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n).$$

Шундай қилиб, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ сонлар ушбу тенгламалар системасидан топилади:

$$\gamma_1 = \alpha_1,$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \alpha_n$$

Сўнгра

$$\gamma_1 = \alpha_1,\ \gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \gamma_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} \qquad (36.5)$$

эканини кўриш осон. (36.5) формулалар битта векторнинг ўзи турли базисга нисбатан турли компонентларга эга бўлишини кўрсатади.

2. C^n комплекс чизиқли фазони қараймиз. 36.3- пунктда айтилганидек $\dim C^n = n$. Қуйидаги векторлар системасини қараймиз:

$$\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0, \dots, 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0, \dots, 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots \qquad (36.6)$$
$$\vec{e}_n = (0,\ 0,\ 0, \dots, 1).$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли эканини кўриш осон. Ҳақиқатан,

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots, + \lambda_n\vec{e}_n = \theta$$

муносабатдан

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \theta$$

экани келиб чиқади. Бундан: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, ана шунинг ўзи бизнинг тасдиғимизни исботлайди. Сўнгра, агар $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — C^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда

$$\vec{x} = \alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n (0, 0, \ldots, 1) = \\ = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n,$$

ва, демак, $\vec{x}$ векторнинг (36.6) базисга нисбатан компонентлари

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

кўринишга эга.

Ушбу

$$\vec{g}_1 = (i, 0, 0, \ldots, 0), \vec{g}_2 = (0, i, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{g}_n = \\ = (0, 0, 0, \ldots, i) \qquad (36.7)$$

векторлар системаси ҳам C^n да базис ташкил қилади. Ихтиёрий $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in C^n$ вектор учун ўринли бўлган

$$\vec{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv -i\alpha_1 \vec{g}_1 - i\alpha_2 \vec{g}_2 - \ldots - i\alpha_n \vec{g}_n$$

айниятдан $\vec{x}$ векторнинг (36.7) базисга нисбатан компонентлари $-i\alpha_1, -i\alpha_2, \ldots, -i\alpha_n$ кўринишга эга экани келиб чиқади.

3. Ҳақиқий элементли $M^{m,n}$ матрицалар фазосида E_{ik} матрицалар базис ташкил қилади, бунда $a_{ik} = 1$ ва E_{ik}нинг бошқа барча элементлари нолга тенг ($i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n$). $m \times n$ ўлчамли A матрицанинг ихтиёрий векторининг E_{ik} базисга нисбатан компонентлари A матрицанинг мос элементлари билан бир хил бўлади, чунки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} E_{ik}. \qquad (36.8)$$

$M^{m,n}$ фазонинг ўлчами mn га тенг.

4. Комплекс элементли матрицаларнинг комплекс фазоси $M_C^{m,n}$ учун юқоридаги фикрлар ўринли. Бунда (36.8) формула ўринли, ва E_{ik} матрицалар системаси базис ташкил қилади. $m \times n$ матрица ихтиёрий вектори компонентлари E_{ik} базисга нисбатан A матрицанинг мос элементлари бўлмиш комплекс сонлардан иборат.

1 ва 2, 3 ва 4-мисоллар орасида катта аналогия (ўхшашлик) бўлишига қарамай, улар орасида муҳим фарқлар ҳам мавжуд. 1 ва 3-мисолларда базислар бўйича ёйилмада коэффициентлар ҳақиқий сонлар майдонига тегишли бўлиши керак, 2 ва 4-мисолларда эса коэффициентлар комплекс сонлар майдонининг ихтиёрий элементи бўлиши керак.

36.5. Элементлари ва коэффициентлари берилган K сонлар майдонига тегишли бўлган матрицалар, детерминантлар ва тенгламалар системалари ҳақида. IV бобда коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган матрицалар, детерминантлар ва тенгламалар системалари қаралган эди. Матрицаларни қўшиш, матрицаларни ҳақиқий сонларга кўпайтириш ва матрицаларни бир-бирига кўпайтириш операцияларини берадиган формулалардан шу нарса келиб чиқадики, оқибатда бу операциялар ҳақиқий сонларни қўшиш, айириш ва кўпайтиришга келтирилади. Ҳақиқий элементли матрицалар ҳосил қиладиган детерминантларни ҳисоблаш оқибатда матрицанинг элементлари устида бажариладиган операцияларга келтирилади, ва, ниҳоят, ҳақиқий коэффициентли тенгламалар системаларини ечиш охирида системаларнинг номаълумлари олдидаги коэффициентларни ва озод ҳадларни қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш операцияларини бажаришга келтирилади. Шундай қилиб, қараб чиқишларнинг ҳаммасида алгебраик операцияларнинг ҳақиқий сонлар майдонида ёпиқлигига таяндик. Шунинг учун IV бобнинг барча тушунчалари ва натижаларида матрицаларнинг, детерминантларнинг элементлари ва тенгламалар системаларининг коэффициентлари ихтиёрий сонлар майдони K нинг сонларидан иборат деб ҳисоблаш мумкин. Бу ҳол IV бобнинг натижаларини ихтиёрий сонлар майдони K устидаги чизиқли фазоларни текширишга татбиқ қилишга имкон беради.

Агар ҳақиқий сонлар майдонини комплекс сонлар майдони билан алмаштирилса, у ҳолда барча тушунчаларда ва теоремаларда R^n фазо ўрнига C^n фазони қўйиш керак. Агар қараб чиқишлар ихтиёрий сонлар майдони K устида бораётган бўлса, у ҳолда R^n фазо K майдонга тегишли сонларнинг мумкин бўлган барча тартибланган (α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$) наборларидан иборат бўлган $K^n = K \times K \times K \times$ $\times \ldots \times K$ фазога алмаштирилади; K^n да векторларни қўшиш ва векторларни K майдонга тегишли элементларга кўпайтириш худди R^n да киритилганидек киритилади (28.1-пунктга қаранг).

36.6. Базиснинг ўзгаришида векторлар компонентларининг ўзгариши. n ўлчовли L_K^n фазода иккита $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базис берилган бўлсин. Ҳар қайси $\vec{g}_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ вектор 36.4-пунктдаги 1-теоремага биноан, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторларининг чизиқли комбинацияси, шу сабабли қуйидаги ёйилмалар ўринли:

$$\vec{g}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n,$$

$$\vec{g}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \qquad (36.10)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\vec{g}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n,$$

яъни биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш $A = (A_{ik})$ матрица билан берилади. Бу матрицанинг детерминанти нолдан фарқли. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{g}_1, \vec{g}_2 \ldots, \vec{g}_n$ векторлар базиснинг элементлари сифатида чизиқли эркли. Агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда A матрицанинг сатрларидан бири шу матрицанинг бошқа сатрларининг чизиқли комбинацияси (33.4- пунктга қаранг) ва мос $\vec{g}_k$ $(k = 1,2, \ldots . n)$ вектор қолганларининг чизиқли комбинацияси, яъни $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ векторлар системаси L_K^n да базис ташкил қилмайди.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ихтиёрий $\vec{x}$ векторнинг биринчи базисдаги компонентлари, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ эса унинг иккинчи базисдаги компонентлари бўлсин. У ҳолда:

$$\vec{x} = \alpha_2\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n.$$

Агар бу тенгликдаги $\vec{g}_i$ лар ўрнига уларнинг $\vec{e}_i$ лар орқали (36.10) формулалар ёрдамида ифодаланган қийматларини қўйсак, ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \\ &= \beta_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n) + \\ &+ \beta_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n) + \\ &+ \beta_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots a_{nn}\vec{e}_n).\end{aligned}$$

36.4- пунктдаги 1- теоремага биноан:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n, \\ \alpha_2 &= a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n, \qquad (36.11) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &+ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + a_{nn}\beta_n,\end{aligned}$$

яъни $\vec{x}$ векторнинг биринчи базисдаги $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ компонентлари шу векторнинг иккинчи базисдаги компонентлари орқали A матрицага нисбатан транспонирланган A^* матрица орқали ифодаланади.

A махсусмас матрица бўлгани учун:

$$\beta_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \ldots + b_{1n}\alpha_n, \qquad (36.12)$$

$$\beta_2 = b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \ldots + b_{2n}\alpha_n,$$

. . . .

$$\beta_n = b_{n1}\alpha_1 + b_{n2}\alpha_2 + \ldots + b_{nn}\alpha_n,$$

бунда b_{ik} лар A^* матрицага тескари матрицанинг элементлари. Шундай қилиб, ушбу теорема ўринли.

3-теорема. *n ўлчовли L_K^n чизиқли фазода бир базисдан иккинчи базисга ўтишда векторларнинг компонентлари A^* матрицага тескари B матрица ёрдамида (36.12) формулалар бўйича алмаштирилади, бунда A^* матрица A матрицага нисбатан транспонирланган матрица бўлиб, A матрица биринчи базисдан иккинчи базисга ўтиш (36.10) ни беради.*

Мисоллар. 1. L_R^4 чизиқли фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис берилган бўлсин. L_R^4 да қуйидаги векторларни қараймиз:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\\
\vec{g}_2 &= \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4,\\
\vec{g}_3 &= 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4,\\
\vec{g}_4 &= -2\vec{e}_4.
\end{aligned}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ базисга ўтишни берувчи матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

нинг детерминанти нолдан фарқли: $\det A = -4$. Шу сабабли $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ векторлар L_R^4 да базис ташкил қилади.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — ихтиёрий $\vec{x}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисдаги компонентлари, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ эса шу $\vec{x}$ векторнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ базисдаги компонентлари бўлсин. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ ларни $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ лар орқали ифодалайдиган формулаларни топамиз.

3-теоремага биноан олдин $B = (A^*)^{-1}$ матрицани топамиз. Бизнинг ҳолда ушбуга эгамиз:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

33.3-пунктдаги (33.22) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$B = (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Бундан, 3-теоремага кўра:

$$\beta_1 = \alpha_1,$$
$$\beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2,$$
$$\beta_3 = \alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3,$$
$$\beta_4 = \frac{3}{4}\alpha_1 - \frac{3}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3.$$

2. L_C^3 фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис берилган бўлсин. L_C^3 фазода ушбу векторларни қараймиз:

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2,$$
$$\vec{g}_2 = \vec{e}_1 - i\vec{e}_2,$$
$$\vec{g}_3 = \qquad i\vec{e}_3.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базисга ўтишни берувчи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

матрица шундайки, ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -2i^2 = 2 \neq 0.$$

Шунинг учун $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ векторлар L_C^3 да базис ташкил қилади. (33.22) формулага биноан:

$$B = (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб, агар $\vec{x}$ L_C^3 даги ихтиёрий вектор, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ва $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ лар унинг мос равишда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базисларга нисбатан компонентлари бўлса, у ҳолда 3-теоремага биноан:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{i}{2}\alpha_2,$$
$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{i}{2}\alpha_2,$$
$$\beta_3 = \qquad -i\,\alpha_3.$$

36.7. Чизиқли фазонинг қисм фазолари. Агар ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in L_K$ ва K майдонга тегишли ҳар қандай λ учун $\vec{x} + \vec{y}$ ва $\lambda\vec{x}$ лар

P га тегишли бўлса, L_K чизиқли фазонинг P қисм тўплами *қисм фазо* дейилади. Бошқа сўзлар билан айтганда, L_K чизиқли фазонинг P қисм фазоси L_K фазонинг L_K да киритилган қўшиш ва K майдонга тегишли сонларга кўпайтириш операцияларига нисбатан чизиқли фазо ҳосил қиладиган векторларининг қисм тўпламидир.

28.4-пунктда бу таъриф L_K фазоларнинг хусусий ҳоли бўлган R^n да ундаги қисм фазоларни таърифлашда қўлланилган эди.

28.4-пунктда баён қилинган барча мулоҳазалар ва фактлар умумий L_K^n чизиқли фазонинг қисм фазоларига ҳам тўла ўтказилади.

Улардан баъзиларини қайд қилиб ўтамиз.

а) K майдон устидаги ҳар қандай чизиқли фазо учун θ ноль элемент қисм фазо ҳосил қилади, бу фазони ноль фазо дейилади. Бутун фазонинг ўзи шунингдек қисм фазодир. Бу икки қисм фазо тривиал қисм фазолар дейилади. Тривиал қисм фазолардан фарқли қисм фазолар тривиал бўлмаган қисм фазолар дейилади.

б) қисм фазоларни тузишнинг умумий усули векторлар системасининг чизиқли қобиғи тушунчасига асосланган. K майдон устидаги L_K^n чизиқли фазода $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ векторлар тўплами берилган бўлсин. Коэффициентлари K сонлар майдонига тегишли бўлган $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторларнинг ҳамма чизиқли комбинацияларининг тўплами $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ ни *чизиқли қобиқ* дейилади. 28.4-пунктдаги каби $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ тўплам L_K^n нинг қисм фазоси экани аниқланади. $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ ни кўпинча $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторлар вужудга келтирган қисм фазо дейилади. $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \ldots, \vec{x}_k)$ қисм фазо $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторларни ўз ичига олувчи энг кичик қисм фазо эканини кўриш осон.

28.4-пунктдагидек, агар $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторлар чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ L_K^n нинг k ўлчовли қисм фазоси бўлади ва $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ векторлар $l(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ да базис ташкил қилишини аниқлаш мумкин. Агар $n \geqslant 2$ бўлса, L_K^n да бир ўлчовли, икки ўлчовли, ..., $(n-1)$ ўлчовли тривиал бўлмаган қисм фазолар мавжудлигини тушуниш қийин эмас.

Ушбу

$$Q^k = \vec{x}_0 + P^k \; (0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

кўринишидаги тўпламларни L_K^n даги (бунда $\vec{x}_0$— L_K^n га тегишли тайинланган вектор, P^k эса L_K^n нинг k-даги ўлчовли қисм фазоси) k ўлчовли текисликлар дейилади ($\vec{x}_0 + P^k$ ни $x_0 + \vec{y}$ векторлар йиғиндиси тақкил қилган тўплам деб тушунилади, бунда $\vec{y}P^k$ қисм фазонинг барча қийматларини қабул қилади).

36.8. Чизиқли фазоларнинг гомоморфизмлари. Битта сонлар майдони K устида иккита чизиқли фазо берилган бўлсин. Бу фазоларни L_K ва L_K' билан белгилаймиз.

Агар ихтиёрий $\vec{x}, \vec{y} \in L_K$ векторлар учун ва ихтиёрий $\lambda \in K$ учун

$$\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}), \tag{36.13}$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}) \tag{36.14}$$

муносабатлар бажарилса, $\varphi: L_K \to L_K'$ акслантириш *гомоморфизм* дейилади.

Чизиқли фазонинг таърифига биноан L_K ва L_K' коммутатив группалар бўлгани учун (36.13) шарт L_K ва L_K' чизиқли фазоларнинг гомоморфизми L_K ва L_K' группаларнинг гомоморфизми эканлигини кўрсатади. (36.14) шарт L_K ва L_K' группаларнинг гомоморфизми иккала L_K ва L_K' группанинг элементларини K майдон сонларига кўпайтириш билан мувофиқлаштирилган бўлсагина, у L_K ва L_K' чизиқли фазоларнинг гомоморфизми бўлишини кўрсатади.

Чизиқли фазоларнинг гомоморфизми тушунчасини аниқловчи (36.13) ва (36.14) шартлар битта эквивалент муносабат билан алмаштирилиши мумкин:

$$\varphi(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x}) + \mu\varphi(\vec{y}), \tag{36.15}$$

бу муносабат ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in L_K$ ва исталган $\lambda, \mu \in K$ учун бажарилиши керак. $\varphi: L_K \to L_K'$ акслантиришга қўйиладиган (36.15) шарт L_K ва L_K' фазоларнинг ўзларининг чизиқли структурасини ҳам, акслантиришнинг чизиқли характерини ҳам аниқроқ таъкидлайди. Шу сабабли кўпинча чизиқли фазоларнинг гомоморфизмини шу фазоларнинг *чизиқли акслантиришлари* ҳам дейилади. Бу иккинчи терминдан биз ушбу китобда кўпроқ фойдаланамиз. L_K чизиқли фазонинг L_K' чизиқли фазодаги барча гомоморфизмларининг (чизиқли акслантиришларининг) тўпламини $Hom(L_K, L_K')$ билан белгилаймиз.

Шуни эслатиб ўтамизки, IV бобда R^n фазонинг R^m фазога чизиқли акслантиришлари тўла-тўкис қаралган ва, бир томондан, бу акслантиришлар орасидаги боғланишлар, иккинчи томондан, матрицалар ва чизиқли тенгламалар системалари орасидаги боғланишлар кўрсатилган эди. Маълум бўлишича, матрицалар ҳисоби аппарати умумий чизиқли фазолар ва уларнинг гомоморфизмларини ўрганиш учун жуда фойдали экан. IV бобда R^n фазо учун исботланган ёки R^n ни R^m га гомоморфизмларининг фазоси учун исботланган кўпгина жумлалар ихтиёрий чизиқли фазолар учун ҳам ўринлидир. Уларни биз исботламаймиз, кўпинча ифодаланиши ва тегишлича изоҳланиши билан чегараланамиз.

Чизиқли фазоларнинг бир қатор содда, аммо муҳим хоссаларини қараб чиқамиз.

$\varphi: L_K \to L'_K$ акслантириш L_K чизиқли фазонинг L'_K чизиқли фазога гомоморфизми бўлсин. Гомоморфизмлар группалари учун бўлганидек $\varphi^{-1}(\theta')$ тўплам, яъни φ акслантиришдаги θ' (ноль) нинг тўла прообрази *гомоморфизмнинг ядроси* дейилади. $\varphi(L_K)$ тўплам φ *гомоморфизмнинг қийматлари соҳаси* дейилади. Қуйида бу тушунчаларни $Ker\,\varphi$ ва $Im\,\varphi$ билан белгиланади.

4-теорема. *Ихтиёрий $\varphi: L_K \to L'_K$ гомоморфизм (чизиқли акслантириш) учун, бунда L_K ва L'_K — K майдон устидаги чизиқли фазолар, $Ker\,\varphi$ ва $Im\,\varphi$ тўпламлар мос равишда L_K ва L'_K нинг қисм фазоларидир.*

Исбот. φ акслантириш L_K коммутатив группанинг L'_K коммутатив группага гомоморфизми бўлгани учун 35.2- пунктдаги 3-теоремага биноан $Ker\,\varphi$ ва $Im\,\varphi$ мос равишда L_K ва L'_K нинг қисм группаларидир. Шу сабабли, агар биз бу қисм группалар K майдонга тегишли сонга кўпайтиришга нисбатан ёпиқ бўлишини аниқласак, теорема исботланган бўлади.

$\vec{x} \in Ker\,\varphi$ бўлсин, $\varphi(\vec{x}) = \theta'$ бўлгани учун, гомоморфизмнинг таърифига биноан ушбуга эгамиз:

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}) = \theta',$$

бунда λ — K майдонга тегишли ихтиёрий сон; яъни $\lambda\vec{x} \in Ker\,\varphi$ ва, демак, $Ker\,\varphi$ тўпламлар L_K нинг қисм фазосидир.

Агар $\vec{x}' \in Im\,\varphi$ бўлса, у ҳолда $\vec{x}' = \varphi(\vec{x})$ тенгликни қаноатлантирадиган $x \in L_K$ топилади. Ҳар қандай $\lambda \in K$ учун ушбуга эгамиз: $\lambda\vec{x} \in L_K$, шунинг учун:

$$\lambda\vec{x}' = \lambda\varphi(\vec{x}) = \varphi(\lambda\vec{x}) \in Im\,\varphi.$$

Шундай қилиб, $Im\,\varphi$ — L'_K нинг қисм фазоси.

Теорема исботланди.

L_K ва L'_K — K майдон устидаги чизиқли фазолар бўлсин. Агар

$$\psi\circ\varphi = 1_{L_K} \quad \text{ва} \quad \varphi\circ\psi = 1_{L'_K}$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $\varphi \in Hom(L_K, L'_K)$ гомоморфизм мавжуд бўлса, $\varphi \in Hom(L_K, L'_K)$ акслантиришни *изоморфизм* дейилади. 29.2- пунктда қаралган акслантиришларнинг хоссаларидан, ҳар қандай изоморфизм *биектив акслантириш* экани келиб чиқади. Равшанки, агар $\varphi \in Hom(L_K, L'_K)$ ва L_K *фазонинг* L'_K *фазога биектив акслантириши бўлса, у ҳолда* φ *изоморфизм бўлади.*

Битта К майдон устидаги чизиқли фазоларнинг бирини иккинчисига изоморф акслантириш мумкин бўлса, бу чизиқли фазолар изоморф фазолар дейилади.

5- теорема. *К майдон устидаги иккита чекли ўлчовли чизиқли фазоларнинг ўлчомлари ҳар хил бўлса, улар изоморф б лмайди.*

Исбот. L_K^n ва L_K^m фазолар теореманинг шартларини қаноатлантирсин ва аниқлик учун

$$n > m \tag{36.16}$$

бўлсин. L_K^n ва L_K^m изоморф деб фараз қилайлик. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ лар L_K^n га тегишли, $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ лар эса L_K^m нинг уларга мос векторлари бўлсин. У ҳолда $\varphi: L_K^n \to L_K^m$ изоморфизмнинг таърифига биноан

$$\lambda_1\vec{y} + \lambda_2\vec{y}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{y}_n = \theta'$$

тенглик

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{x}_n = \theta$$

тенгликка тенг кучли экани келиб чиқади, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лар K майдоннинг сонлари. Демак L_K^n фазонинг чизиқли эркли векторларига L_K^m фазонинг чизиқли эркли векторлари мос келади ва аксинча. Демак, L_K^n даги ва L_K^m даги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони бир хилдир, яъни $n = m$, бу эса (36.16) тенгсизликка зидлик қилади.

Шундай қилиб, бизнинг фаразимиз нотўғри, шу билан теорема исботланди.

6- теорема. *Биргина К сонлар майдони устида қаралган бир хил n ўлчамли барча чизиқли фазолар бир-бирига изоморфдир.*

Исбот. L_K^n ва $\tilde{L}_K^n$ фазолар теореманинг шартларини қаноатлантирсин. $\tilde{L}_K^n$ да бирор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни, L_K^n да эса ихтиёрий $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ базисни оламиз. $\varphi: \tilde{L}_K^n \to L_K^n$ акслантиришни қараймиз, бу акслантириш ҳар бир $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$ векторга

$$\varphi(\vec{x}) = \alpha_1\vec{e}'_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}'_n$$

векторни мос келтиради.

L_K^n га тегишли ҳар қандай $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар ва ихтиёрий $\lambda \in K$ сон учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)\vec{e}'_i =$$

$$= \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}), \tag{36.17}$$

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \varphi\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i\vec{e_i'} = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_i'} = \lambda\varphi(\vec{x}). \tag{36.18}$$

(36.17) ва (36.18) муносабатлар φ акслантириш L_K^n нинг $\tilde{L}_K^n$ га гомоморфизми эканини кўрсатади. 36.4-пунктдаги 1-теоремага биноан ҳар бир $\vec{x'} \in \tilde{L}_K^n$ вектор $\vec{x'} = \alpha_1\vec{e_1'} + \ldots + \alpha_n\vec{e_n'}$ тенгликни қаноатлантирувчи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар системасини бир қийматли аниқлайди. Шу сабабли шундай ягона $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e_i}$ вектор мавжудки, унинг учун: $\vec{x'} = \varphi(\vec{x})$, яъни φ акслантириш инъективдир. Бу ерда $\tilde{L}_K^n$ нинг ҳар бир $\vec{x'} = \alpha_1\vec{e_1'} + \ldots + \alpha_n\vec{e_n'}$ векторига L_K^n нинг $\vec{x} = \alpha_1\vec{e_1} + \ldots + \alpha_n\vec{e_n}$ вектори тегишлидир, бунда $\varphi(\vec{x}) = \vec{x'}$, бу φ — сюръектив акслантириш эканини кўрсатади.

Шундай қилиб, $\varphi: L_K^n \to \tilde{L}_K^n$ биектив гомоморфизмдир. Демак, φ изоморфизм, теорема исботланди.

5 ва 6- теоремалардан берилган сонлар майдони устидаги чекли ўлчамли чизиқли фазонинг ўлчами унинг энг муҳим характеристикасидан иборат экани келиб чиқади.

Ихтиёрий n да $K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ марта}}$ фазо K майдон устидаги n- ўлчовли чизиқли фазо бўлгани учун (36.5- пунктга қаранг) K майдон устидаги n- ўлчовли чизиқли фазоларнинг ҳаммаси K^n га изоморфдир. Хусусан, барча ҳақиқий n- ўлчовли чизиқли фазолар R^n га, барча комплекс n- ўлчовли фазолар C^n га изоморф.

35- § да айтиб ўтилганидек, группаларнинг группавий операциянинг хоссаларига ва группа гомоморфизмларига боғлиқ бўлган хоссаларини ўрганиш учун группаларнинг ўзларини изоморфизмгача аниқликда ўрганишнинг ўзи етарли. Тайинланган сонлар майдони устидаги чизиқли фазолар ва уларнинг акслантиришлари (гомоморфизмлари) учун ҳам худди юқоридагидек ситуация ўринли. Шу сабабли ҳақиқий чекли ўлчамли чизиқли фазолар учун R^n фазони ва R^n нинг чизиқли акслантиришларини ўрганиш, чекли ўлчамли комплекс фазолар учун эса C^n фазоларни ва C^n нинг чизиқли акслантиришларини ўрганиш етарли.

Сонлар майдони устидаги чизиқли фазони таърифлашда базис тушунчаси қатнашмайди ва кейинчалик ҳосилавий тушунча сифатида вужудга келади. 6- теоремадан чизиқли фазода барча базислар тенг ҳуқуқли экани кўринади. Шу сабабли тушунча ва теоремаларни ифодалашда уларнинг конкрет базис танлашга боғлиқ бўлмаслиги муҳимдир, чунки шу ҳолдагина бу тушунчалар ва теоремалар чизиқли фазолар геометриясига тегишли бўлади.

37- §. Чизиқли фазоларда чизиқли операторлар

37.1. Чизиқли операторни берилган базисда ифодалаш. L_K^n — K майдон устидаги n- ўлчовли чизиқли фазо бўлсин. L_K^n да ўз-ўзига гомоморфизм (ёки чизиқли акслантириш) ни IV бобдаги терминологияга мос равишда L_K^n ни L_K^n га ўтказувчи *чизиқли оператор* деймиз ёки тўғридан тўғри L_K^n *даги чизиқли оператор* деймиз.

Чизиқли операторни L_K^n да махсус базисда тасвирлаш 30.3-пунктда қараб чиқилган эди. Бу пунктда анча умумийроқ ситуация қаралади: L_K^n даги чизиқли операторнинг L_K^n фазодаги ихтиёрий базисдаги ифодаси келтириб чиқарилади.

1-теорема. *$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — L_K^n даги ихтиёрий базис бўлсин, $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$* эса *$L_K^n$ да берилган векторлар системаси бўлсин. У ҳолда шундай битта ва фақат битта $\varphi: L_K^n \to L_K^n$ оператор мавжудки,*

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \ldots, \varphi(\vec{e}_n) = \vec{g}_n$$

бўлади.

Исбот. Олдин φ акслантиришни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторларида берамиз:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \ \ldots, \ \varphi(\vec{e}_n) = \vec{g}_n. \tag{37.1}$$

Энди $\vec{x}$ вектор L_K^n нинг ихтиёрий вектори бўлсин. У ҳолда:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n,$$

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис билан бир қийматли аниқланади (36.4- пунктдаги 1- теоремага қаранг).

$$\varphi(\vec{x}) = \alpha_1\vec{g}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{g}_n \tag{37.2}$$

деб оламиз. (37.2) формула $\varphi: L_K^n \to L_K^n$ акслантиришни тўла аниқлайди. Бу формуладан φ акслантириш L_K^n да чизиқли оператор экани ҳам кўринади, ана шу операторнинг мавжудлигини исботлаш талаб қилинаётган эди.

Энди f оператор L_K^n даги чизиқли оператор бўлиб, ушбу

$$f(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \ldots f(\vec{e}_n) = \vec{g}_n \tag{37.3}$$

тенгликларни қаноатлантирсин. У ҳолда ҳар қандай $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i$

учун φ ва f операторларнинг чизиқлилигидан ва (37.1) ҳамда (37.2) шартлардан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{e}_i) = \varphi(\vec{x}).$$

Шундай қилиб, f ва φ операторлар бир хил.

Теорема исботланди.

2-теорема. *L_K^n да ихтиёрий $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис тайинланган бўлсин. У ҳолда ҳар бир $f: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли операторга A матрица бир қийматли жавоб беради, бу матрицани f чизиқли операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси дейилади. Агар*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{37.4}$$

ва

$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ — L_K^n га тегишли ихтиёрий вектор,

$\vec{x}' = \varphi(\vec{x}) = \alpha_1' \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n' \vec{e}_n$ — эса унинг образи бўлса, у ҳолда:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n' &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned} \tag{37.5}$$

(37.5) формулалар f операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвири дейилади.

Аксинча, ҳар бир $A = \| a_{ik} \|$ матрицага тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда $f: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли оператор бир қийматли мос келади, бу оператор векторларнинг компонентлари орқали (37.5) формулалар билан берилади. Бунда A матрица f чизиқли операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицасидир.

Ниҳоят, A матрицанинг геометрик мазмуни бундай: A матрицанинг устунлари $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)$ векторларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги компонентларидир.

Исбот. $f: L_K^n \to L_K^n$ — чизиқли оператор бўлсин. Бу оператор, 1- теоремага биноан $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ векторлар билан бир қийматли аниқланади, бу векторларни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис бўйича ёйилмалари билан бериш қулай:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n,\\
f(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{e}_2 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n.
\end{aligned}
\tag{37.6}
$$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ вектор L_K^n га тегишли ихтиёрий вектор, $x' = \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \vec{e}_n$ эса унинг образи бўлсин. У ҳолда:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\vec{e}_i) = \\
= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)\vec{e}_1 + \\
+ (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)\vec{e}_2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+ (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\vec{e}_n.
\end{aligned}
\tag{37.7}
$$

Бундан

$$
\begin{aligned}
\alpha'_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n,\\
\alpha'_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_n &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n.
\end{aligned}
\tag{37.8}
$$

Устунлари $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, ... , $f(\vec{e}_n)$ векторларнинг компонентларидан иборат бўлган ((37.6) формулаларга қаранг):

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

матрица, (37.8) формулалардан кўринишича f чизиқли операторнинг матрицасидир. 36.4- пунктдаги 1- теоремага биноан ва A матрицанинг тузилиш усулига биноан, бу матрица M_K^n га тегишли экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, теореманинг биринчи қисми исботланди.

Теореманинг иккинчи қисми, яъни тескари тасдиқнинг исботи, бевосита, векторларнинг компонентлари орқали $f: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли операторни берувчи (37.8) формулалардан келиб чиқади, бу оператор учун

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

матрица f операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси бўлади.
Теорема исботланди.

3-теорема. *f, g лар L_K^n га тегишли ихтиёрий чизиқли операторлар, λ эса K майдонга тегишли ихтиёрий сон бўлсин, у ҳолда қуйидаги формулалар ўринли бўлади:*

$$A_{f+g} = A_f + A_g, \quad A_{\lambda f} = \lambda A_f. \tag{37.9}$$

Агар, бундан ташқари $f: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли оператор айнимаган оператор бўлса, у ҳолда A_f — махсусмас матрица ва

$$A_f^{-1} = A_{f^{-1}} \tag{37.10}$$

бўлади.

A_f, A_g, $A_{\lambda f}$, A_{f+g}, $A_{f^{-1}}$ лар билан *L_K^n га тегишли тайинланган базисдаги f, g, λf, $f+g$, f^{-1} акслантиришларнинг матрицалари белгиланган.*

Исбот. (37.9) формулаларнинг келтириб чиқарилиши чизиқли акслантириш ва матрицалар учун (37.9) формулаларда қатнашувчи операцияларнинг аниқланиш усулларидан бевосита келиб чиқади (30,33- § ларга қаранг; бирдан-бир фарқ ҳақиқий сонларни K майдонга тегишли сонлар билан алмаштиришдан иборат, аммо сонлар майдони қўшиш, айириш, кўпайтириш ва нолга бўлишдан ташқари бўлиш операциясига нисбатан ёпиқ бўлгани учун кўрсатилган параграфларда юритилган фикрлар ўз кучида қолади).

Теореманинг иккинчи қисмининг исботи 33.3- пунктдаги тегишли теореманинг исботи, ҳақиқий сонларни K майдонга қарашли сонлар билан тегишлича алмаштириш билан сўзма-сўз такрорлайди.

Теорема исботланди.

2 ва 3- теоремалардан, Hom (L_K^n, L_K^n) операторларнинг чизиқли фазоси n- тартибли квадрат матрицаларнинг чизиқли фазоси M_K^n га изоморф экани келиб чиқади, бу квадрат матрицаларнинг элементлари K майдонга тегишли сонлардир.

37.2. Чизиқли операторнинг турли базислардаги матрицалари орасидаги боғланиш. f чизиқли оператор L_K^n ни ўз-ўзига акслантиришни ифодалайди, демак, базисни танлашга боғлиқ эмас. Шунга қарамай, унинг тасвирининг матрицаси A базисни танлашга боғлиқ. Қуйидаги теорема ўринли.

4-теорема. *$f: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли оператор ва L_K^n да иккита ихтиёрий $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базислар берилган бўлсин. f операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицасини A билан, шу операторнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базисдаги матрицасини эса B билан ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базисга* *ўтиш матрицасини C билан белгилаймиз* (36.6- пунктга қаранг). *У ҳолда ушбу*

$$B = C^{-1}AC \tag{37.11}$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Агар C матрица мукаммал ёзувда ушбу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисга ўтиш формулалари ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{g}_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \dots + c_{n2}\vec{e}_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{g}_n &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{37.12}$$

1 ва 2- теоремаларга кўра C матрица $\varphi: L_K^n \to L_K^n$ чизиқли айнимаган операторни бир қийматли аниқлайди, бу оператор ушбу тенгликларни қаноатлантиради:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{g}_2, \ \dots, \ \varphi(\vec{e}_n) = \vec{g}_n,$$

бунда C матрица φ нинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицаси. Агар A ва B матрицалар мукаммал ёзувда ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишларга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $k = 1, 2, \dots, n$ ларда

$$f(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i \tag{37.13}$$

$$f(\vec{g}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\vec{g}_i \tag{37.14}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Барча $i = 1, 2, \dots, n$ ларда $\vec{g}_i = \varphi(\vec{e}_i)$ бўлгани учун (37.14) дан ушбуга эга бўламиз:

$$f(\varphi(\vec{e}_k)) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\varphi(\vec{e}_i) \tag{37.15}$$

φ айнимаган оператор бўлгани учун φ^{-1} оператор мавжуд, (37.15) нинг иккала қисмига φ^{-1} операторни қўлланамиз, у ҳолда:

$$\varphi^{-1} f\varphi\,(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\vec{e}_i$$

ва, демак, B матрица $\varphi^{-1} f\varphi$ операторнинг $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицасидир. Иккинчи томондан, $\varphi^{-1} f\varphi$ операторнинг шу $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицаси $C^{-1}AC$ дан иборат (3- теорема). 2- теоремага кўра ҳар бир базисда оператор тасвирининг матрицаси бир қийматли аниқлангани учун $B=C^{-1}AC$. Теорема исботланди.

Мисоллар. 1. L_R^4 да $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3,\ \vec{e}_4$ базис тайинланган ва

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\quad f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\quad f(\vec{e}_4) = \vec{e}_4 + \vec{e}_1$$

шартларни қаноатлантирувчи $f: L_R^4 \to L_R^4$ чизиқли оператор берилган бўлсин. $\vec{g}_1 = f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2)$, $\vec{g}_2 = f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3)$, $\vec{g}_3 = f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3)$, $\vec{g}_4 = f(\vec{e}_4)$ векторлар базис ташкил қилишини исботлаш керак ва f операторнинг шу базисдаги матрицасини ёзиш керак,

Масала шартидан ушбуга эгамиз:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - 0\cdot\vec{e}_2 - \vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_4,\\
\vec{g}_2 &= f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = 0\cdot\vec{e} + \vec{e}_2 - 0\cdot\vec{e}_3 - \vec{e}_4,\\
\vec{g}_3 &= f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\\
\vec{g}_4 &= f(\vec{e}_4) \qquad\qquad\quad\ = \vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_4.
\end{aligned}$$

Демак, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ векторларга ўтиш матрицаси C ушбу кўринишга эга:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сўнгра:

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Шу сабабли $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ векторлар L_R^4 да базис ташкил қилади. Масала шартларидан ушбуларга эгамиз:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_4, \\ f(\vec{e}_2) &= 0\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_4, \\ f(\vec{e}_3) &= 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, \\ f(\vec{e}_4) &= \vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_4. \end{aligned}$$

Шу сабабли f оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисга нисбатан ушбу кўринишга эга:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(32.22) формулалардан ушбуга эгамиз:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3- теоремадан f операторнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_4$ базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга экани келиб чиқади:

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & -1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. L_C^3 да $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис берилган ва ушбу

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2,\ f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + i\vec{e}_3,\ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 + i\vec{e}_1.$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $f: L_C^3 \to L_C^3$ чизиқли оператор берилган бўлсин. $\vec{g}_1 = f(\vec{e}_1)$, $\vec{g}_2 = f(\vec{e}_2)$, $\vec{g}_3 = f(\vec{e}_3)$ векторлар базис ташкил қилишини исботлаш ва f операторнинг шу базисдаги матрицасини ёзиш керак.

Масала шартига кўра

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + i\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_2) &= 0\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + i\vec{e}_3, \\ f(\vec{e}_3) &= i\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

бўлгани учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдан $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$ векторларга ўтиш матрицаси ушбу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Сўнгра

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1 - i \neq 0$$

бўлгани учун $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ векторлар базис ташкил қилади, Сўнгра шу C матрицанинг ўзи f операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги матрицасидир. Шу сабабли f нинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$B = C^{-1}CC = C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

38- §. Инвариант қисм фазолар, чизиқли операторнинг хос векторлари ва хос қийматлари

38.1. Инвариант қисм фазолар. f — L_K^n фазодаги чизиқли оператор бўлсин. Агар $f(P) = P$ бўлса, $P \subseteq L_K^n$ қисм фазо *инвариант қисм фазо* дейилади. Бошқача айтганда, агар f нинг P даги торайиши P да мавжуд бўлган

$$f/_P(P) \subseteq P \qquad (38.1)$$

қийматлар тўпламига эга бўлса, f чизиқли оператор L_K^n да ўзининг P қисм фазосига эга бўлиб, бу унинг инвариант қисм фазосидир (29.2- пунктга қаранг).

Инвариант қисм фазоларнинг тривиал мисоллари бўлиб, θ ноль қисм фазо ва бутун L_K^n фазо хизмат қилади.

Мисоллар. 1. R^2 чизиқли фазода f чизиқли операторни қараймиз, бу оператор $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ базисда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

матрица билан берилади. Равшанки, f нотривиал инвариант қисм фазоларга эга эмас: IV бобдан биламизки (29.2- пункт), f чизиқли оператор R^2 ни φ бурчакка буришдан иборат.

2. R^3 чизиқли фазода f чизиқли операторни қараймиз, бу оператор $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ базисда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилади. f оператор учун $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар ҳосил қилган қисм фазо ва $\vec{e}_3$ вектор ҳосил қилган қисм фазо нотривиал инвариант қисм фазолар бўлади. f операторни R^3 да $\vec{e}_3$ вектор ҳосил қилган қисм фазо атрофида φ бурчакка буриш деб қараш мумкин.

38.2. Чизиқли операторнинг хос векторлари ва хос сонлари. f— L_K^n даги чизиқли оператор бўлсин. P^1 — f операторнинг $\vec{x} \neq \theta$ вектор ҳосил қилган бир ўлчовли инвариант қисм фазоси бўлсин деб фараз қилайлик; P^1 — $\alpha \vec{x}$ кўринишидаги векторлар тўплами.

$$f(\vec{x}) = \lambda(\vec{x}), \quad \vec{x} \in P^1 \tag{38.2}$$

тенгликни қаноатлантирувчи шундай $\lambda \in K$ сон мавжуд бўлгандагина ва фақат шундагина P^1 f нинг инвариант қисм фазоси бўлади. Ушбу муҳим таърифни киритамиз:

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

муносабатни қаноатлантирувчи $\vec{x}_0 \neq \theta$ вектор f операторнинг хос вектори, мос λ сон эса хос қиймати ёки f чизиқли операторнинг характеристик сони дейилади.

Шундай қилиб, агар $\vec{x}$ хос вектор бўлса, у ҳолда $\lambda\vec{x}$ векторлар бир ўлчовли инвариант қисм фазолар ҳосил қилади, ва аксинча, бир ўлчовли инвариант қисм фазонинг барча нолмас векторлари хос векторлардир.

5-теорема. *f оператор L_K^n даги чизиқли оператор ва λ_0 — f операторнинг хос қиймати, $\vec{x}$ эса f нинг λ_0 сонга мос келадиган хос вектори бўлсин.*

L_K^n да ихтиёрий бирор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... $\vec{e}_n$ *базисни белгилаймиз ва*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{38.3}$$

матрица f операторнинг шу базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда λ_0 сон

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{38.4}$$

тенгламанинг илдизи бўлади,

$$\vec{x} = \alpha_2\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$$

хос векторнинг компонентлари эса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базисда бир жинсли*

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_0)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_0)\alpha_n = 0 \end{cases} \tag{38.5}$$

системанинг ечимлари бўлади.

Исбот. $f(\vec{x})$ векторнинг $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ компонентлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ базисда ушбу кўринишга эга:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned}$$

Шу сабабли $\vec{x}$ вектор f операторнинг λ_0 хос қийматига мос хос вектори деган шарт ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= \lambda_0\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= \lambda_0\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n &= \lambda_0\alpha_n \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_0)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_0)\alpha_n &= 0. \end{aligned} \tag{38.6}$$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ нолмас вектор (38.6) системанинг ечими бўлиши учун бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак (33.5-пунктга қаранг). Демак, λ_0 ушбу тенгламанинг илдизи:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{38.7}$$

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ вектор ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ хос векторнинг компонентлари) эса (38.6) бир жинсли системанинг ечими.

Теорема исботланди.

Агар (38.4) нинг чап қисмида турган детерминантда, (32.1) формуладан фойдаланиб, λ нинг бир хил даражалари қатнашган ҳадларини группаласак ва уларни λ даражасининг камайиб бориш тартибида жойлаштирсак, ушбу айниятга келамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + g_1\lambda^{n-1} + \dots + g_n. \quad (38.8)$$

(38.8) нинг ўнг томонида турган ифодани одатда A *матрицанинг характеристик полиноми дейилади, (38.4) тенгламани эса шу матрицанинг характеристик тенгламаси дейилади.*

$f: L_K^n \to L_K^n$ оператор K майдон устидаги чизиқли фазода чизиқли оператор бўлсин, у ҳолда A матрицанинг элементлари K майдон сонларидан иборатдир. Шу сабабли (32.1) формуладан характеристик полиномнинг коэффициентлари K майдон сонларидан иборат экани келиб чиқади. Шунинг учун агар K ҳақиқий сонлар ёки комплекс сонлар майдони бўлса, у холда характеристик полином мос равишда комплекс ёки ҳақиқий коэффициентларга эга бўлади.

Чизиқли операторнинг хос қийматлари базисни танлашга боғлиқ бўлмагани ҳолда аниқлангани учун характеристик тенгламанинг илдизлари ҳам базисни танлашга боғлиқ бўлмайди. Характеристик полином ҳозирча операторни ихтиёрий, аммо белгиланган базисда берадиган матрица учунгина аниқланган. Шунга қарамай, бу полином базисни танлашга боғлиқ бўлмас экан, ва шунинг учун у чизиқли операторнинг характеристик полиноми деб аталиши мумкин. Бунга мос теорема мана бундай.

6-теорема. *f оператор L_K^n даги чизиқли оператор бўлсин ва*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица f операторнинг L_k^n даги ихтиёрий $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисидаги ифодасининг матрицаси бўлсин. У ҳолда характеристик кўпҳад $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ базисни танлашга боғлиқ бўлмайди.

Исбот. A матрицанинг характеристик полиноми

$$\det (A - \lambda E)$$

дан иборат, бунда E — бирлик матрица. $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ эса L_K^n даги $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ базисдан фарқли бирор базис бўлсин ва C — $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисга ўтишни берувчи махсусмас матрица бўлсин (32.2-пунктга қаранг). У ҳолда f операторнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисдаги матрицаси $C^{-1}AC$ кўринишга эга бўлади, ва, демак, бу базисда характеристик полином $C^{-1}AC - \lambda E$ матрицанинг детерминанти-дан иборат. Матрицалар кўпайтмаларининг детерминанти ҳақидаги (32.6-пункт) теоремани татбиқ қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\det (C^{-1}AC - \lambda E) = \det (C^{-1}AC - C^{-1}\lambda EC) =$$
$$= \det (C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det C^{-1} \det (A - \lambda E) \det C =$$
$$= \det (A - \lambda E).$$

Теорема исботланди.

38.3. Чизиқли операторлар хос векторларининг ва инвариант қисм фазоларининг мавжудлиги. Дастлаб чизиқли операторларни L_C^n комплекс чизиқли фазода қараймиз. Қуйидаги теорема ўринли.

7-теорема. *L_C^n фазода ҳар қандай f чизиқли оператор ақалли битта хос векторга эга.*

Исбот. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — L_C^n даги бирор базис бўлсин ва

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица f операторнинг шу базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда n-тартибли $\det (A - \lambda E)$ полином комплекс сонлар майдонида камида битта λ_0 илдизга эга (43.1-пунктга қаранг).

Шу сабабли

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ &a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_0)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0)\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

тенгламалар системаси нолмас $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0$ ечимга эга, чунки бу системанинг детерминанти нолга тенг. Равшанки, $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 \vec{e}_i \neq \theta$ вектор $f(\vec{x}_0) = \lambda_0 \vec{x}_0$ муносабатни қаноатлантиради. Шундай қилиб, f чизиқли оператор λ_0 хос қийматга ва бу қийматга мос келувчи $\vec{x}_0$ хос векторга эга.

Теорема исботланди.

38.1-пунктдаги 1-мисол n-ўлчовли ҳақиқий чизиқли L_R^n фазоларда хос векторлар бўлмаслиги ҳам мумкинлигини кўрсатади. Шунга қарамай қуйидаги теорема ўринли.

8-теорема. *L_R^n фазода ҳар қандай f чизиқли оператор камида битта бир ўлчовли ёки икки ўлчовли инвариант қисм фазога эга.*

Исбот. L_R^n да бирор $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисни танлаймиз ва f операторнинг бу базисдаги матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

бўлсин. У ҳолда f операторнинг характеристик полиноми $\det(A-\lambda E)$ кўринишга эга бўлади, бу полином ҳақиқий коэффициентли n-даражали полиномдир.

Иккита имконият мавжуд:

а) характеристик полином λ_0 ҳақиқий илдизга эга,

б) характеристик полином $\lambda_0 = \xi + i\eta$ комплекс илдизга эга, бунда $\eta \neq 0$.

б) ҳолда λ_0 сонга мос келувчи хос векторни топиш учун (38.5) система бундай бўлади:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ &a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_0)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлгани учун система $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0$ нолмас ечимга эга, бу ечим f операторнинг λ_0 хос қийматга мос келувчи $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 \vec{e}_i$ хос векторини аниқлайди.

б) ҳолда, $\lambda_0 = \xi + i\eta$ илдизни (38.5) тенгламалар системасига қўйиб, бу система тривиал

$$\alpha_1 + i\beta_1, \ \alpha_2 + i\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n + i\beta_n$$

ечимга эга эканини топамиз. Бу ечимни (38.5) системага қўямиз ва ҳосил бўлган тенгликларда $\lambda_0 = \xi + i\eta$ қатнашган ҳадларни ўнг қисмга ўтказамиз:

$$\begin{gathered} a_{11}(\alpha_1 + i\beta_1) + a_{12}(\alpha_2 + i\beta_2) + \ldots + a_{1n}(\alpha_n + i\beta_n) = \\ = (\zeta + i\eta)(\alpha_1 + i\beta_1), \\ a_{21}(\alpha_1 + i\beta_1) + a_{22}(\alpha_2 + i\beta_2) + \ldots + a_{2n}(\alpha_n + i\beta_n) = \\ = (\zeta + i\eta)(\alpha_2 + i\beta_2), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}(\alpha_1 + i\beta_1) + a_{n2}(\alpha_2 + i\beta_2) + \ldots + a_{nn}(\alpha_n + i\beta_n) = \\ = (\zeta + i\eta)(\alpha_n + i\beta_n). \end{gathered}$$

Бу системада ҳақиқий ва мавҳум қисмларни ажратиб, тенгликларнинг қуйидаги икки системасига келамиз:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = \zeta\alpha_1 - \eta\beta_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = \zeta\alpha_2 - \eta\beta_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = \zeta\alpha_n - \eta\beta_n. \end{cases} \tag{38.9}$$

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = \zeta\beta_1 + \eta\alpha_1, \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = \zeta\beta_2 + \eta\alpha_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + a_{nn}\beta_n = \zeta\beta_n + \eta\alpha_n. \end{cases} \tag{38.10}$$

Қуйидаги векторларни киритамиз:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i} \quad \text{ва} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{e_i}.$$

У ҳолда (38.9) ва (38.10) муносабатлар ушбу кўринишни олади:

$$f(\vec{x}) = \xi\vec{x} - \eta\vec{y}, \; f(\vec{y}) = \xi\vec{y} + \eta\vec{x}.$$

Бу формулалардан $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар ҳосил қилган қисм фазолар f операторнинг инвариант қисм фазолари эканлиги бевосита келиб чиқади.

Теорема исботланди.

Натижа. *f оператор L_R^{2n+1} даги ихтиёрий чизиқли оператор бўлсин, бунда n — манфиймас бутун сон. У ҳолда f операторнинг ақалли битта инвариант қисм фазоси мавжуд бўлади, яъни f нинг камида битта хос вектори мавжуд.*

Ҳақиқатан, f операторнинг характеристик полиноми ҳақиқий коэффициентли полином бўлгани сабабли $\lambda = \xi + i\eta$ комплекс илдиз билан бир қаторда унга қўшма бўлган $\overline{\lambda} = \xi - i\eta$ сон ҳам характеристик полиномнинг илдизи бўлади. Бундан характеристик полиномнинг ҳар доим жуфт сонда комплекс илдизи мавжудлиги келиб чиқади. L_R^{2n+1} жуфт бўлмаган ўлчамга эга бўлгани учун L_R^{2n+1} нинг характеристик полиномининг даражаси тоқ бўлади, ва демак, бу полином ҳар доим камида битта ҳақиқий илдизга эга, бу илдизга f операторнинг бир ўлчовли инвариант қисм фазоси мос келади (8-теорема).

38.4. Хос векторлари базис ташкил қиладиган чизиқли операторлар. L_K^n фазода энг содда чизиқли операторлар шундай операторларки, улар n та чизиқли эркли хос векторларга эга.

Ҳақиқатан, $f: L_K^n \to L_K^n$ оператор n та чизиқли эркли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларга эга бўлган оператор бўлсин. Шу векторларни базис учун қабул қиламиз. У ҳолда

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1,$$
$$f(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n,$$

бунда λ_1, λ_2, ... , λ_n сонлар f операторнинг мос равишда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ хос векторлар жавоб берадиган хос қийматлари:

Бундан, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ хос векторлар ташкил қилган базисда f операторнинг матрицаси энг содда, диагонал кўриниш деб аталадиган кўринишга эга бўлади (33.4-пунктга қаранг):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (38.11)$$

Аксинча, агар бирор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ базисда f операторга

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

матрица мос келса, у ҳолда $\vec{e}_1$, ... , $\vec{e}_n$ — f нинг хос векторлари, λ_1, λ_2, ... , λ_n лар эса f операторнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ векторлар мос келадиган хос қийматларидир. Ҳақиқатан A матрицанинг хоссасидан унинг устунлари $f(\vec{e}_1)$, ... , $f(\vec{e}_n)$ векторларнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ базисдаги компонентларидан иборатлиги келиб чиқади. Шу сабабли

$$f(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \quad f(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n,$$

ана шунинг ўзи айтилган тасдиқни исботлайди.

Қуйидаги теорема хос векторларнинг чизиқли эркли бўлишининг содда етарли шартини беради.

9-теорема. *Агар L_K^n да f чизиқли операторнинг хос қийматлари λ_1, λ_2, ... , λ_s $(s \leqslant n)$ K майдонга тегишли, жуфт-жуфти билан ҳар хил сонлар бўлса, бу хос қийматларга мос келувчи $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_s$ хос векторлар чизиқли эркли бўлади. Хусусан, агар $s = n$ бўлса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... , $\vec{e}_n$ хос векторлар L_K^n да базис ташкил қилади.*

Исбот индукция методи билан ўтказилади. $s = 1$ да тасдиқнинг тўғрилиги равшан. Тасдиқ $s - 1$ та вектор учун ўринли деб фараз қиламиз ва уни s та вектор учун исботлаймиз. Агар тасдиқ тўғримас деб фараз қилинса, у ҳолда K майдонда ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган ва

$$\gamma_1 \vec{e}_1 + \dots + \gamma_s \vec{e}_s = \theta \qquad (38.12)$$

муносабатни қаноатлантирувчи шундай $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ сонлар топилади. Аниқлик учун $\gamma_1 \neq 0$ деб фараз қилайлик. (38.12) тенгликка f операторни қўлланиб, топамиз:

$$f(\gamma_1 \vec{e_1} + \dots + \gamma_s \vec{e_s}) = f(\theta) = \theta.$$

Аммо

$$f(\gamma_1 \vec{e_1} + \dots + \gamma_s \vec{e_s}) = \gamma_1\lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \gamma_s \lambda_s \vec{e_s}$$

ва шунинг учун

$$\gamma_1 \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + \gamma_s \lambda_s \vec{e_s} = \theta.$$

Агар охирги тенгликдан (38.12) тенгликни олдин λ_s га кўпайтириб айирилса, ушбуга эга бўламиз:

$$\gamma_1(\lambda_1 - \lambda_s)\vec{e_1} + \dots + \gamma_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)\vec{e}_{s-1} = \theta. \qquad (38.13)$$

Фаразга кўра $\gamma_1 \neq 0$ ва $\lambda_1 - \lambda_s \neq 0$ бўлгани учун $\gamma_1 (\lambda_1 - \lambda_s) \neq 0$ ва биз индукция бўйича қилган фаразимизга нисбатан зидликка келамиз, чунки (38.13) дан $\vec{e_1}, \dots, \vec{e}_{s-1}$ векторлар чизиқли эркли эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_s}$ векторлар чизиқли эркли.

Теорема исботланди.

Мисоллар. 1: Шундай $f: L_R^3 \to L_R^3$ чизиқли оператор берилганки, берилган тайин $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базис учун f нинг матрицаси ушбу кўринишга эга бўлади.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

f операторнинг хос сонларини, хос векторларини ва (агар мумкин бўлса) f операторнинг матрицаси диагонал кўринишни оладиган базисни топинг.

f операторнинг характеристик кўпҳади ушбу кўринишга эга:

$$\det \| A - \lambda E \| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

бўлгани сабабли f операторнинг характеристик сонлари ушбу кўринишда бўлади: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$\lambda_1 = 1$ сонга тўғри келадиган $\vec{g_1} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ хос вектор ушбу системанинг ечими сифатида топилади:

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = x_1,$$
$$-3x_1 + 5x_2 - x_3 = x_2,$$

$$-3x_1+3x_2+x_3=x_3.$$

$\vec{g}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ вектор $\lambda_1=1$ сонга тўғри келадиган хос вектор эканини текшириш осон.

$\lambda_2=\lambda_3=2$ характеристик сонлар тўғри келадиган $\vec{g}_2$ ва $\vec{g}_3$ хос векторларни топиш системаси ушбу кўринишга эга:

$$-x_1+3x_2-x_3=2x_1,$$
$$-3x_1+5x_2-x_3=2x_2,$$
$$-3x_1+3x_2+x_3=2x_3,$$

Бевосита текшириш йўли билан $\vec{g}_2=\vec{e}_1,\ \vec{g}_3=\vec{e}_1-3\vec{e}_3$ векторлар f операторнинг $\lambda_2=\lambda_3=2$ сонларга мос хос векторлари эканига ишонч ҳосил қиламиз. $\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3$ векторлар чизиқли эркли эканини кўриш осон:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&-3\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Шу сабабли $\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3$ векторлар базис ташкил қилади. $\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3$ — f операторнинг хос векторлари бўлгани учун:

$$f(\vec{g}_1)=\vec{g}_1+0\vec{g}_2+0\vec{g}_3,$$
$$f(\vec{g}_2)=0\vec{g}_1+2\vec{g}_2+0\vec{g}_3,$$
$$f(\vec{g}_3)=0\vec{g}_1+0\vec{g}_2+2\vec{g}_3.$$

Шу сабабли, f операторнинг $\vec{g}_1,\ \vec{g}_2,\ \vec{g}_3$ базисдаги матрицаси бундай:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

2. $f: L_C^2\to L_C^2$ оператор тайин $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ базис векторларини $f(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+i\vec{e}_2,\ f(\vec{e}_2)=\vec{e}_2+i\vec{e}_1$ векторларга ўтказувчи оператор бўлсин. f операторнинг матрицаси диагонал кўринишда бўладиган базисни топиш талаб қилинади.

$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ базисда f нинг матрицаси ушбу кўринишда бўлади:

$$A=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}.$$

Шунинг учун A операторнинг характеристик полиноми бундай:

$$\det\|A-\lambda E\|=\begin{vmatrix}1-\lambda&i\\i&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-i^2=\lambda^2-2\lambda+2$$

$\lambda_1=1-i$ ва $\lambda_2=1+i$ сонлар f операторнинг характеристик сонлари бўлади. λ_1 ва λ_2 хос сонларга тўғри келадиган мос $\vec{g}_1=$

$= x_1 \vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ ва $\vec{g}_2 = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2$ хос векторлар қуйидаги тенгламалар системаларидан топилади:

$$x_1 + ix_2 = (1 - i)x_1, \quad \text{ва} \quad x_1 + ix_2 = (1 + i)x_1,$$
$$ix_1 + x_2 = (1 - i)x_2 \qquad ix_1 + x_2 = (1 + i)x_2.$$

Бундан, $\vec{g}_1$ ва $\vec{g}_2$ векторлар сифатида $\vec{g}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ва $\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ чизиқли эркли векторларни олиш мумкинлиги келиб чиқади. $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ базисда f операторнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$B = \begin{pmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix},$$

чунки $f(\vec{g}_1) = (1 - i)\vec{g}_1$, $f(\vec{g}_2) = (1 + i)\vec{g}_2$.

V бобга доир масалалар ва машқлар

1) f чизиқли акслантиришнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

f нинг қуйидаги базислардаги матрицаларини топинг:

а) $\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, 3\vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4$; б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$;

2) $f: R^2 \to R^2$ оператор $\vec{g}_1 = (1, 2)$, $\vec{g}_2 = (2,3)$ базисдаги чизиқли оператор бўлиб, унинг матрицаси $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ дан иборат бўлсин, $\vec{u}_1 = (3,1)$, $\vec{u}_2 = (4,2)$ базисдаги $h: R^2 \to R^2$ чизиқли оператор эса $\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$ матрица билан берилади. $f + h$, $f - h$, hf операторларнинг $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ ва $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ базислардаги матрицаларини топинг;

3) Тайинланган $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисда қуйидаги матрицалар ёрдамида берилган чизиқли операторларнинг хос қийматларини ва хос векторларини топинг:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

4) Агар тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда (ёки $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисда) чизиқли операторлар

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

матрицалар билан берилган бўлса, шу чизиқли операторлар R^3 ва R^4 да диагонал кўринишда бўладиган базисларни топинг.

5) n- тартибли

$$A = \begin{vmatrix} 0, & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

матрица учун шундай махсусмас n-тартибли U матрица топиш керакки, $B = U^{-1}AU$ матрица диагонал матрица бўлсин.

6) Тайинланган базисда

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилган $f: L_R^3 \to L_R^3$ чизиқли операторнинг барча инвариант қисм фазоларини топинг.

7) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ва } \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицалар билан берилган R^3 даги икки чизиқли операторнинг умумий инвариант қисм фазоларини топинг.

8) Агар G группанинг исталган a элементи учун $a^2 = e$ бўлса, G коммутатив группа бўлишини исботланг.

Чекли сондаги элементлардан ташкил топган группа *чекли группа* дейилади, унинг элементларининг сони эса *группанинг тартиби* дейилади.

9) Бирдан чиқарилган n- даражали илдизлар тўплами кўпайтиришга нисбатан группа ташкил қилишини ва бу группанинг тартиби n га тенг бўлишини исботланг.

10) Тартиблари 3, 4, 6 га тенг бўлган барча группаларни (изоморфизмгача аниқликда) топинг ва шу группаларда кўпайтириш жадвалини ёзинг.

11) Кўпайтиришга нисбатан мусбат ҳақиқий сонлар группаси қўшиш бўйича барча ҳақиқий сонлар группасига изоморф эканини, кўпайтириш бўйича барча мусбат рационал сонлар группаси эса қўшиш бўйича барча рационал сонлар группасига изоморф эмаслигини исботланг.

Агар исталган $g \in G$ элемент учун $gH = Hg$ тенглик ўринли бўлса, яъни $gh' = h''g$ тенгликни қаноатлантирувчи $h' \in H$ ва $h'' \in H$ элементлар мавжуд бўлса, G группанинг H қисм группаси *нормал бўлувчи* дейилади.

12) $f{:}G \to G'$ оператор G группанинг G' группага гомоморфизми бўлсин. а) $f^{-1}(e')$ G группанинг нормал бўлувчиси (e' — G' нинг бирлиги) эканини исботланг; б) $f(G) \subset G'$ қисм тўплам G' группанинг қисм группаси эканини исботланг; в) $U = f^{-1}(g')$ белгилашни киритамиз, бунда g' — $f(G)$ тўпламнинг исталган элементи. Бирор янги W тўпламнинг элементи сифатида қаралувчи $U_1 = f^{-1}(g_1)$, $U_2 = f^{-1}(g_2)$ қисм тўпламларнинг кўпайтмасини $U_1 \cdot U_2 = f^{-1}{}_2(g_1 \cdot g_2)$ тенглик билан аниқлаймиз. W тўплам бу кўпайтиришга нисбатан группа бўлишини ва бу группа $f(G)$ группага изоморф эканини исботланг.

VI боб. E_R^n ҲАҚИҚИЙ ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИ. ЎЗ-ЎЗИГА ҚЎШМА ВА ОРТОГОНАЛ ОПЕРАТОРЛАР

39-§. L_R^n да бичизиқли ва квадратик формалар

39.1. Асосий тушунчалар. L_R^n фазода чизиқли функцияни ёки $f{:}L_R^n \to R^1$ гомоморфизмни чизиқли форма деб айтилади. L_R^n да бичизиқли форма деб шундай $f{:}L_R^n \times L_R^n \to R^1$ функцияга айтиладики, бунда ҳар қандай тайинланган $\vec{y}_0 \in L_R$ учун $f(\vec{x}, \vec{y}_0)$ функция $\vec{x}$ нинг функцияси сифатида чизиқли форма, тайинланган ҳар қандай $\vec{x}_0 \in L_R^n$ учун $f(\vec{x}_0, \vec{y})$ функция $\vec{y}$ нинг функцияси сифатида чизиқли формадир. Бу таърифлар R^n да чизиқли ва бичизиқли формалар тушунчаларининг табиий умумлашмасидир (31-§ га қаранг). L_R^n да ихтиёрий $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни тайинлаймиз ва

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i, \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{e}_i$$

лар L_R^n га тегишли ихтиёрий векторлар бўлсин.

Чизиқли ва бичизиқли формаларни векторларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисга нисбатан компонентлари орқали тасвирлашга доир қуйидаги асосий теоремалар ўринли бўлади.

1-теорема. *Ҳар қандай $f: L_R^n \to R^1$ чизиқли форма L_R^n фазонинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисидаги векторлар орқали қийматларининг берилиши билан бир қийматли аниқланади. Агар $a_1 = f(\vec{e}_1), \ldots, a_n = f(\vec{e}_n)$ сонлар олдиндан берилган бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ учун f чизиқли форманинг қиймати*

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \tag{39.1}$$

формула бўйича аниқланади.

(39.1) муносабат f форманинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвири дейилади.

Аксинча, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис ва $a_1, \ldots, a_n$ ҳақиқий сонлар системаси тайинланган бўлса, (39.1) формула шундай $f: L_R^n \to R^1$ чизиқли формани аниқлайдики, (39.1) бу форманинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвири бўлади.

2-теорема. *Ҳар қандай $f: L_R^n \times L_R^n \to R^1$ бичизиқли форма ўзининг L_R^n фазонинг ихтиёрий тайинланган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторларнинг тартибланган $(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ жуфтларидаги қийматларининг берилиши билан бир қийматли аниқланади. Агар $a_{ik} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ $(i, k = 1, \ldots, n)$-сонлар олдиндан берилган бўлса, у ҳолда L_R^n нинг исталган $\vec{x}, \vec{y}$ векторлари учун бичизиқли форманинг қиймати ушбу* формула бўйича топилади:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \alpha_i \beta_k. \tag{39.2}$$

(39.2) муносабат f форманинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвири, $a_{ik} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ сонлар ташкил қилган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{39.3}$$

матрица эса бу тасвирнинг матрицаси дейилади.

Аксинча, агар $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис ва n-тартибли квадрат матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{39.4}$$

берилган бўлса, (39.2) формула шундай $f:L_R^n \times L_R^n \to R^1$ бичизиқли формани аниқлайдики, (39.2) бу форманинг тасвири, (39.4) матрица эса бу тасвирнинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси бўлди.

31-§ даги 1 ва 2-теоремалар L_R^n *фазонинг* хусусий ҳоли учун R^n *фазо* учун ва $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ векторлардан иборат махсус базис учун исботланди. Умумий ҳолда исбот 31-§ да берилган исботга айнан ўхшаш бўлгани учун биз бу исботни келтириб ўтирмаймиз.

Агар L_R^n га тегишли исталган $\vec{x}$, $\vec{y}$ векторлар учун

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}) \tag{39.5}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f:L_R^n \times L_R^n \to R^1$ бичизиқли форма симметрик бичизиқли форма дейилади.

f бичизиқли форма симметрик бўлиши учун L_R^n фазонинг исталган базисида бу форма тасвирининг матрицаси (39.3) симметрик бўлиши, яъни исталган i, $k = 1, \ldots, n$ да $a_{ik} = a_{ki}$ тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли. Бу тасдиқ, хусусий ҳолда R^n фазо ва R^n даги махсус базис учун юқорида қандай исботланган бўлса шундай исботланади (31-§ га қаранг).

Бир хил $(\vec{x}, \vec{x})$ векторлар жуфтларидан тузилган $D_R^n \subset L_R^n \times L_R^n$ тўплам $L_R^n \times L_R^n$ нинг диагонали дейилади. $f:L_R^n \times L_R^n \to R^1$ бичизиқли симметрик форманинг D_R^n диагоналга торайиши *квадратик форма* дейилади. Агар $\varphi:D_R^n \to R^1$ квадратик форма ва $f:L_R^n \times L_R^n \to R^1$ уни вужудга келтирган бичизиқли симметрик форма бўлса, у ҳолда

$$\varphi = f / D_R^n. \tag{39.6}$$

Юқорида тайинланган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисда φ квадратик форма ушбу тасвирга эга:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \alpha_i \alpha_k, \tag{39.7}$$

бунда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица f бичизиқли симметрик форманинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицаси. A матрица, айтиб ўтганимиздек, симметрик матрицадир.

39.2. Бир базисдан бошқа базисга ўтишда чизиқли ва бичизиқли формаларнинг тасвирларини алмаштириш. L_R^n фазода ихтиёрий иккита $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n$ базис берилган ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базиснинг векторлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис бўйича ёйиладиган формулалар

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{g}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \dots + c_{n2}\vec{e}_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{g}_n = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \tag{39.8}$$

бўлсин. Юқорида айтиб ўтганимиздек, $\vec{g}_i$ векторларнинг чизиқли эркли эканидан C матрица махсусмас экани келиб чиқади.

Агар $\vec{x}$ — L_K^n даги ихтиёрий вектор бўлса ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ лар унинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n$ базисдаги компонентлари, $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ лар эса $\vec{x}$ нинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисдаги компонентлари бўлса, у ҳолда 39. 1-пунктдаги 1-теоремага кўра, f чизиқли форма $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда ушбу кўринишга эга бўлади:

$$f(\vec{x}) = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n,$$

$\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисда эса бу форма

$$f(\vec{x}) = a'_1\alpha'_1 + a'_2\alpha'_2 + \dots a'_n\alpha'_n$$

кўринишга эга бўлади, бунда $a_i = f(\vec{e}_i)$, $a'_i = f(\vec{g}_i)$. Ҳар қандай $f: L_K^n \to R^1$ чизиқли форма учун

$$a'_k = f(\vec{g}_k) = f(c_{1k}\vec{e}_1 + \dots + c_{nk}\vec{e}_n) = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} f(\vec{e}_i)$$

ва, демак,

$$\begin{aligned} a'_1 &= c_{11}a_1 + c_{21}a_2 + \dots + c_{n1}a_n \\ a'_2 &= c_{12}a_1 + c_{22}a_2 + \dots + c_{n2}a_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a'_n &= c_{1n}a_1 + c_{2n}a_2 + \dots + c_{nn}a_n. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, бошқа базисга ўтишда $f: L_R^n \to R^1$ чизиқли форманинг коэффициентлари векторнинг базисларига ўхшаш ўзгарар экан.

Энди $f: R^n \times R^n \to R^1$ — бичизиқли форма бўлсин. f форманинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базислардаги тасвирларининг матрицаларини мос равишда бундай белгилаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ва

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

B матрица A матрица орқали қандай ифодаланишини ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ базисга ўтиш матрицасини топамиз. b_{kl} — B матрицанинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда таърифга кўра:

$$b_{kl} = f(\vec{g}_k, \vec{g}_l).$$

Аммо

$$\vec{g}_k = c_{1k}\vec{e}_1 + c_{2k}\vec{e}_2 + \dots + c_{nk}\vec{e}_n,$$
$$\vec{g}_l = c_{1l}\vec{e}_1 + c_{2l}\vec{e}_2 + \dots + c_{nl}\vec{e}_n,$$

ва шу сабабли

$$b_{kl} = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} c_{jl}\vec{e}_j\right) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_{ik}c_{jl}. \qquad (39.9)$$

(39.9) формула изланаётган формуладир. Матрица кўринишидаги ёзувга ўтиш учун уни бирмунча ўзгартирамиз. C^* матрица C матрицага нисбатан транспонирланган матрица бўлсин:

$$C^* = \begin{pmatrix} c^*_{11} & c^*_{12} & \dots & c^*_{1n} \\ c^*_{21} & c^*_{22} & \dots & c^*_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c^*_{n1} & c^*_{n2} & \dots & c^*_{nn} \end{pmatrix},$$

бунда $c^*_{lk} = c_{kl}$ У ҳолда (39.9) формулани бундай ёзиш қулай:

$$b_{kl} = \sum_{i,\ j=1}^{n} c^*_{ki}a_{ij}c_{jl}.$$

Матрицалар орқали ёзишга ўтсак, ушбуга эга бўламиз:

$$B = C^*AC. \qquad (39.10)$$

Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли.

3-теорема. *$f: L^n_R \times L^n_R \to R^1$ — бичизиқли форма ва A ҳамда B унинг мос равишда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базислардаги тасвирларининг матрицалари бўлсин. C матрица $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базисга ўтиш матрицаси бўлсин. У ҳолда*

$$B = C^*AC. \qquad (39.11)$$

40-§. E_R^n ҳақиқий Евклид фазоси

40.1. **L_R^n да скаляр кўпайтма.** L_R^n ҳақиқий чизиқли фазода, унда векторларни қўшиш ва ҳақиқий сонга кўпайтириш операцияларининг берилганига асосланиб, қисм фазолар ва ҳар хил ўлчамли текисликлар тушунчаларини таърифлаш, уларнинг ўзаро жойлашиш хоссаларини ўрганиш, шунингдек бу фазоларнинг фигураларининг бир қатор бошқа хоссаларини текшириш мумкин.

Аммо улар бу тушунчалар ёрдамида мактаб геометрия курсига қарашли ва аналитик геометрия курсига тегишли (I қисмга қаранг) фактларни олишга ва бу олинган фактларни L_R^n фазо учун умумлаштиришга камлик қилади. Вектор узунлиги, векторлар орасидаги бурчак, векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва ҳоказоларнинг таърифлари ва R^3 фазо фигуралари элементлари орасидаги айтиб ўтилган тушунчаларга асосланган кўпгина метрик муносабатлар биринчи ўринда айтиб ўтилган фактлар жумласига киради.

28.2-пунктда R^n фазода векторларни қўшиш ва векторларни сонга кўпайтириш операцияларига қўшимча равишда R^n фазонинг исталган тартибланган иккита $\vec{x}$, $\vec{y}$ векторига нисбатан $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма тушунчаси киритилган эди. $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма қуйидаги формула билан аниқланадиган ҳақиқий сондан иборат:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \tag{40.1}$$

бунда $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ва $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — R^n нинг ихтиёрий векторлари. Бу тушунча ёрдамида $\vec{x}$ векторнинг узунлиги ва $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар орасидаги φ бурчак қуйидаги формулалар билан аниқланган эди:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{40.2}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}. \tag{40.3}$$

Шуни эслатиб ўтамизки, (40.1) формула одатдаги уч ўлчовли фазо бўлган ҳолда скаляр кўпайтманинг векторларнинг Декарт координаталари системасидаги компонентлари орқали ифодаланишидан иборат бўлади (14.3-пунктга қаранг).

28.2-пунктда R^n да скаляр кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга экани кўрсатилган эди:

1. *Ҳар қандай* $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ *учун:*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}).$$

2. *Ҳар қандай* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in R^n$ *учун:*

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}).$$

3. *Ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$ ва исталган ҳақиқий сон λ учун:*

$$(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}).$$

4. *Ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$* учун $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, *бунда $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{x} = \theta$ бўлади.*

1 — 4-хоссаларни бичизиқли формалар нуқтаи назаридан қараймиз. 1 — 3-хоссалар R^n да $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма $R^n \times R^n$ дан R^1 га ўтувчи бичизиқли симметрик формадан иборат эканини кўрсатади. 4-хоссани формалар терминларида ифодалаш учун L_R^n ҳақиқий чизиқли фазода мусбат аниқланган квадратик форма тушунчасини киритамиз. $f: L_R^n \times L_R^n \to R^1$ — бичизиқли симметрик форма ва $\varphi = f/D_R^n$ — эса f юзага келтирган квадратик форма бўлсин. Агар ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0 \tag{40.4}$$

бўлиб, шу билан бирга, агар $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ бўлганда $\vec{x} = \theta$ бўлса, у ҳолда φ форма *мусбат аниқланган* форма дейилади.

R^n даги $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтманинг 4-хоссаси R^n да бичизиқли форма скаляр кўпайтмадан иборат бўлиб, мусбат аниқланган квадратик форма $(\vec{x}, \vec{x})$ ни вужудга келтиришини билдиради.

L_R^n да мусбат аниқланган квадратик формаларни вужудга келтирадиган бичизиқли симметрик формалар мисолларини осонлик билан кўрсатиш мумкин. Содда мисоллар сифатида иккита бичизиқли симметрик формани қараймиз; бу формалар ихтиёрий белгиланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда қуйидаги тасвирларга эга:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n x_n y_n, \tag{40.5}$$

$$f_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{40.6}$$

(40.5) форма $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ бўлган ҳолдагина ва фақат шу ҳолдагина мусбат аниқланган квадратик форма вужудга келтиради. Агар, бундан ташқари, L_R^n фазо R^n билан бир хил бўлса, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис эса $(1, 0 \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), (0, 0 \ldots, 1)$ векторлардан иборат бўлса, у ҳолда f_1 бичизиқли форма R^n даги $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма билан бир хил бўлади. (40.6) форма мусбат аниқланган $\varphi_2(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик формани вужудга келтиради. Ҳақиқатан, ҳар қандай $\vec{x}$ учун ушбуга эгамиз:

$$\varphi_2(\vec{x}, \vec{x}) = f_2(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 =$$

$$= \frac{1}{2}x_1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2.$$

Бундан эса φ_2 мусбат аниқланган квадратик форма экани келиб чиқади.

Қуйидаги муҳим таърифни киритамиз. *L_R^n ҳақиқий чизиқли фазода скаляр кўпайтма деб мусбат аниқланган квадратик формани вужудга келтирадиган ҳар қандай бичизиқли симметрик формага айтилади.*

У ёки бу скаляр кўпайтмани L_R^n да бир қийматли бериш учун, унинг ихтиёрий базисдаги тасвирини, ёки барибир, шу тасвирнинг матрицасини бериш етарли. Масалан, R^n да киритилган скаляр кўпайтма худди шундай тузилган (28.2-пунктга қаранг): скаляр кўпайтманинг (1, 0, 0, . . . 0), (0, 1, 0, . . . 0), (0, 0, . . . 1) базисдаги конкрет тасвири (40.1) формулалар ёрдамида кўрсатилган эди.

40.2. E_R^n ҳақиқий Евклид фазоси. Бирор скаляр кўпайтма берилган *n-ўлчовли чизиқли ҳақиқий L_R^n фазо n-ўлчовли E_R^n ҳақиқий Евклид фазоси дейилади. Ҳар қандай $\vec{x}$, $\vec{y} \in R^n$ учун скаляр кўпайтмани $(\vec{x}, \vec{y})$ белги билан белгилаймиз.*

Агар E_R^n Евклид фазосини аниқловчи скаляр кўпайтма L_R^n да f бичизиқли симметрик форма билан берилса, ва буни ёзувда кўрсатиш талаб қилинса, у ҳолда $(\vec{x}, \vec{y})_f$ белгилашдан фойдаланамиз. n-ўлчовли Евклид фазосининг келтирилган таърифидан, L_R^n фазо ва фақат шу фазонинг ўзидангина келиб чиқиб, унда чексиз кўп E_R^n Евклид фазоларини бериш мумкин.

Скаляр кўпайтма (40.1) формула билан бериладиган R^n фазодан ташқари, Евклид фазосининг яна қуйидаги мисолини келтирамиз. Агар Q^n $[a, b]$ оралиқдаги ҳақиқий коэффициентли, даражаси $n-1$ дан ошмайдиган полиномлар томонидан ҳосил қилинган чизиқли n-ўлчовли фазо бўлса, у ҳолда Q^n да

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$$

формула скаляр кўпайтмани аниқлашини ва Q^n ни n-ўлчовли ҳақиқий Евклид фазосига айлантиришни текшириб кўриш осон, бунда $x(t)$ ва $y(t)$ — Q^n га тегишли полиномлар.

E_R^n — n-ўлчовли ҳақиқий Евклид фазоси ва $(\vec{x}, \vec{y})$ — ундаги амалда мавжуд скаляр кўпайтма бўлсин. *$\vec{x}$ векторнинг E_R^n* даги *узунлиги* деб

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \tag{40.7}$$

сонга айтилади, E_R^n га тегишли икки $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ *вектор орасидаги бурчак* деб эса

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \tag{40.8}$$

сонга айтилади. Бурчакнинг (40.8) даги таърифида ҳар доим

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos\varphi$$

муносабатнинг бажарилиши кўзда тутилади.

φ урчакнинг таърифи коррект бўлиши (тўгри бўлиши) учун ҳар қандай икки $\vec{x}, \vec{y} \in E_R^n$ вектор учун

$$-1 \leqslant \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leqslant 1$$

тенгсизлик ўринли ёки, барибир,

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leqslant |\vec{y}|^2 \cdot |\vec{y}|^2 \tag{40.9}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботлаш керак. (40.9) тенгсизликни одатда *Коши—Буняковский тенгсизлиги* дейилади. R^n фазода бу тенгсизлик исботланган эди (28.2-пунктга қаранг). У ерда берилган исбот (40.9) тенгсизлик исботига сўзма-сўз ўтказилади. Шу сабабли биз уни келтирмаймиз.

Коши—Буняковский тенгсизлигидан E_R^n га тегишли $\vec{x}, \vec{y}$ векторлар учун

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}| \tag{40.10}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Ҳақиқатан,

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}),$$

(40.9) формулага биноан

$$(\vec{x}, \vec{y}) \leqslant |\vec{x}|\, |\vec{y}|,$$

шу сабабли

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \leqslant (\vec{x}, \vec{x}) + 2|\vec{x}|\, |\vec{y}| + (\vec{y}, \vec{y}) =$$
$$= (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2.$$

Бундан $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, яъни $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар ўзаро $\frac{\pi}{2}$ га тенг бурчак ташкил қилса, у ҳолда E_R^n даги $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар *ортогонал векторлар* дейилади.

Агар $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар ортогонал векторлар бўлса, у ҳолда $\vec{x}+\vec{y}$ ни томонлари $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ дан иборат бўлган тўғри тўртбурчакнинг диагонали деб ҳисоблаш табиийдир. $\vec{x}+\vec{y}$ вектор узунлигини топамиз. Ушбуга эгамиз:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}).$$

$\vec{x}$ ва $\vec{y}$ ортогонал бўлгани учун $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ва

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2. \tag{40.11}$$

(40.11) формула E_R^n фазо учун Пифагор теоремасининг аналогидир.

Бу натижа умумлаштиришга йўл қўяди. $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_k$ векторлар иккитадан ортогонал бўлсин, у ҳолда

$$|\vec{x}_1+\vec{x}_2+\ldots+\vec{x}_k|^2 = |\vec{x}_1|^2+\ldots+|\vec{x}_k|^2. \tag{40.12}$$

(40.12) формула Пифагорнинг кўп ўлчовли теоремасининг мазмунини ташкил қилади, чунки $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_k$ векторларни k- ўлчовли тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учидан чиқувчи қирралари деб интерпретациялаш мумкин. (40.12) формула (40.11) формулага ўхшаш исботланади.

40.3. E_R^n да ортонормаланган базис. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар E_R^n да иккитадан ортогонал векторлар бўлсин, у ҳолда, агар бу векторларнинг ҳаммаси θ дан фарқли бўлса, улар чизиқли эркли бўлади. Ушбу тенглик бажарилган бўлсин:

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n = 0. \tag{40.13}$$

Унда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ эканини исботлаймиз. (40.13) нинг иккала томонини $\vec{e}_1$ га скаляр кўпайтирамиз. У ҳолда.

$$\lambda_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1)+\lambda_2(\vec{e}_2, \vec{e}_1)+\ldots+\lambda_n(\vec{e}_n, \vec{e}_1) = 0. \tag{40.14}$$

Шартга кўра $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$, $k=2, 3, \ldots n$ да $(\vec{e}_1, \vec{e}_k)=0$. Шу сабабли (40.14) дан $\lambda_1=0$ экани келиб чиқади. $\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ экани ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Агар биттаси ҳам нолга тенг бўлмаган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системасининг векторлари иккитадан ортогонал бўлса, у ҳолда бу система *ортогонал базис* ташкил қилади дейилади. Агар $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар ортогонал базис ташкил қилса ва бундан ташқари, барча векторлар 1 га тенг узунликка эга бўлса, у ҳолда базис *ортогонал* ва *нормаланган* ёки тўғридан-тўғри *ортонормаланган* базис дейилади. Ортонормаланган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис учун ушбуга эгамиз:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} i=k \text{ да } 1, \\ i\neq 0 \text{ да } 0. \end{cases}$$

Иккитадан ортогонал бўлган нолмас векторлар чизиқли эркли эканлиги юқорида исботланган эди, шу сабабли ортогонал ёки ортонормаланган базис ташкил қилувчи векторлар E_R^n да оддий базис ҳам ташкил қиладилар.

1-теорема. *Ҳар қандай n- ўлчовли Евклид ҳақиқий фазосида ортонормаланган базислар мавжуд.*

Исбот. Бу теорема исботланадиган метод ортонормаланган базисни тузиш методидан иборат. Бу процессни одатда ортогоналлаш процесси дейилади.

E_R^n фазода n- ўлчовли Евклид ҳақиқий фазоси таърифига кўра бирор $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд. Олдин $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисдан ортогонал базис тузамиз.

$\vec{g}_1 = \vec{e}_1$ деб оламиз. $\vec{g}_2$ векторни $\vec{g}_2 = \vec{e}_2 + \lambda\vec{g}_1$ кўринишда излаймиз. λ сонни $(\vec{g}_2, \vec{g}_1) = 0$, яъни $(\vec{e}_2 + \lambda\vec{g}_1, \vec{g}_1) = 0$ тенглик ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. Бундан топамиз:

$$\lambda = -\frac{(\vec{e}_2, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}.$$

Исботнинг давомини индукция методи билан ўтказамиз. Иккитадан ортогонал ва нолмас $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{k-1}$ векторлар ясалган деб фараз қилайлик. $\vec{g}_k$ векторни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\vec{g}_k = \vec{e}_k + \lambda_1\vec{g}_{k-1} + \lambda_2\vec{g}_{k-2} + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{g}_1^{\,*}. \qquad (40.15)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ коэффициентлар $\vec{g}_k$ векторнинг олдин ясаб қўйилган $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{k-1}$ векторларга ортогоналлик шартларидан топилади:

$$(\vec{g}_k, \vec{g}_1) = 0, (\vec{g}_k, \vec{g}_2) = 0, \ldots, (\vec{g}_k, \vec{g}_{k-1}) = 0.$$

(40.15) формуладан бу шартлар тўла ёзувда ушбу кўринишга эгалиги келиб чиқади:

$$\begin{aligned}
&(\vec{e}_k + \lambda_1\vec{g}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{g}_1, \vec{g}_1) = 0,\\
&(\vec{e}_k + \lambda_1\vec{g}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{g}_1, \vec{g}_2) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\vec{e}_k + \lambda_1\vec{g}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{g}_1, \vec{g}_{k-1}) = 0.
\end{aligned}$$

$\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{k-1}$ векторларнинг иккитадан ортогоналлигидан фойдаланиб, охирги тенгликлар системаси анча содда кўринишни олишини кўрамиз:

---

*Шуни қайд қиламизки, $\vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{k-1}$ векторлар ҳам (40.15) формула бўйича тузилади.

$$\begin{aligned}
&(\vec{e}_k, \vec{g}_1) + \lambda_{k-1}(\vec{g}_1, \vec{g}_1) = 0, \\
&(\vec{e}_k, \vec{g}_2) + \lambda_{k-2}(\vec{g}_2, \vec{g}_2) = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&(\vec{e}_k, \vec{g}_{k-1}) + \lambda_1(\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_{k-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Бундан қуйидагини топамиз:

$$\lambda_{k-1} = -\frac{(\vec{e}_k, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}; \ \lambda_{k-2} = -\frac{(\vec{e}_k, \vec{g}_2)}{(\vec{g}_2, \vec{g}_2)}; \ \dots, \ \lambda_1 = -\frac{(\vec{e}_k, \vec{g}_{k-1})}{(\vec{g}_{k-1}, \vec{g}_{k-1})}. \quad (40.16)$$

Энди топилган $\vec{g}_k$ вектор нолмас вектор эканини исботлаймиз. (40.15) дан $\vec{g}_k$ вектор $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{k-1}, \vec{e}_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси экани келиб чиқади, бунда $\vec{e}_k$ олдида бирга тенг коэффициент турибди, аммо $\vec{g}_{k-1}$ векторни $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{k-2}$ векторлар ва $\vec{e}_{k-1}$ векторнинг чизиқли комбинацияси билан алмаштириш мумкин ва ҳоказо. Шундай қилиб, $\vec{g}_k$ вектор қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкинлигини кўрамиз:

$$\vec{g}_k = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_{k-1}\vec{e}_{k-1} + \vec{e}_k \quad (40.17)$$

Агар $\vec{g}_k = \theta$ бўлса, у ҳолда (40.17) дан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ векторлар чизиқли боғлиқ экани келиб чиқади, бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки шартга кўра $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_n$ векторлар E_R^n да базис ташкил қилади. Шундай қилиб, $\vec{g}_k \neq \theta$ ва у $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{k-1}$ векторларнинг ҳаммасига ортогонал. Индукцион фараз исботланди. $k = 2$ да нолмас иккита ортогонал векторларни ясаш ҳақидаги тасдиқ исботланган. Шунинг ўзи билан E_R^n да ортогонал $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$ базис мавжудлиги аниқланди. Агар $\vec{g}_i (i = 1, \dots, n)$ векторларни

$$\vec{g}_i' = \frac{\vec{g}_i}{|\vec{g}_i|}$$

векторлар билан алмаштирилса, у ҳолда бу векторларнинг узунлиги бирга тенг бўлади ва биз $\vec{g}_1', \vec{g}_2', \dots \vec{g}_n'$ лар E_R^n да ортонормаланган базис ташкил қилишини кўрамиз.

Теорема исботланди.

2-теорема. *E_R^n фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ векторлар ортонормаланган базис ташкил қилсин. У ҳолда бу базисга нисбатан скаляр кўпайтма*

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n \quad (40.18)$$

кўринишга эга бўлади, бунда $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n$ *лар* E_R^n *га тегишли ихтиёрий векторлар.*

Исбот. Скаляр кўпайтма бичизиқли форма бўлгани учун:

$$\begin{aligned}(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \ldots +\\ + \alpha_1\beta_n(\vec{e}_1, \vec{e}_n) + \alpha_2\beta_1(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{e}_2, \vec{e}_2) +\\ + \ldots + \alpha_2\beta_n(\vec{e}_2, \vec{e}_n) + \alpha_n\beta_1(\vec{e}_n, \vec{e}_1) +\\ + \alpha_n\beta_2(\vec{e}_n, \vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n\beta_n(\vec{e}_n, \vec{e}_n).\end{aligned} \tag{40.19}$$

$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормаланган базис, шу сабабли

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} i = k \text{ да } 1, \\ i \neq k \text{ да } 0. \end{cases} \tag{40.20}$$

(40.19) ва (40.20) дан ушбуга эга бўламиз:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Теорема исботланди.

3-теорема. *E_R^n га тегишли $\vec{x}$ векторнинг компонентлари ортонормаланган базисга нисбатан шу векторни базиснинг тегишли векторлари билан скаляр кўпайтмасига тенг.*

Исбот. $\vec{x}$ — E_R^n фазонинг ихтиёрий вектори ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ исталган ортонормаланган базис бўлсин.

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$$

бўлсин. Бу тенгликнинг иккала қисмини $\vec{e}_1$ векторга скаляр кўпайтириб,

$$\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{e}_1)$$

тенгликка эга бўламиз.

$$\alpha_2 = (\vec{x}, \vec{e}_2), \ \ldots, \ \alpha_n = (\vec{x}, \vec{e}_n)$$

экани ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Теорема исботланди.

Агар одатдаги уч ўлчовли фазодагига ўхшаш $\vec{x}$ векторнинг бирлик узунликдаги $\vec{e}$ векторга скаляр кўпайтмасини $\vec{x}$ векторнинг $\vec{e}$ га проекцияси деб атасак, у ҳолда E_R^n фазодаги векторнинг компонентлари ортонормаланган базисга нисбатан шу векторнинг базис векторларга проекцияларидан иборат бўлади.

Шундай қилиб, E_R^n да векторни ортонормаланган базис бўйича ёйиш билан R^3 да векторни Декарт координаталари системаси ортлари бўйича ёйиш орасида тўлиқ аналогия мавжуд.

40.4. E_R^n **Евклид фазоларининг изометрияси.** Иккита $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ ҳақиқий Евклид фазолари берилган бўлсин. Биз биламизки, булардан биринчиси бирор $L_R^{(1)}$ ҳақиқий чизиқли фазодан унда $(\vec{x}, \vec{y})_1$ скаляр кўпайтмани белгилаш билан ҳосил бўлади, иккинчиси эса бирор, умуман айтганда, бошқа $L_R^{(2)}$ чизиқли ҳақиқий фазодан унда скаляр кўпайтмани тайинлаш билан ҳосил бўлади, биз бу скаляр кўпайтмани $(\vec{x}, \vec{y})_2$ билан белгилаймиз. Ҳар қандай $f: L_R^{(1)} \to L_R^{(2)}$ гомоморфизмни ҳам $E_R^{(1)}$ нинг $E_R^{(2)}$ даги *гомоморфизми* деб ҳисоблаймиз. Хусусан, $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ ни, агар $f: E_R^{(1)} \to E_R^{(2)}$ изоморфизм мавжуд бўлса, *изоморф* деймиз. Агар $E_R^{(1)}$ га тегишли ихтиёрий $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар учун

$$(f(\vec{x}),\ f(\vec{y}))_2 = (\vec{x},\ \vec{y})_1 \tag{40.21}$$

тенглик бажарилса, $f: E_R^{(1)} \to E_R^{(2)}$ изоморфизмни *изометрия* ёки *изометрик акслантириш* деймиз. Бошқача айтганда, изометрия $f: E_R^{(1)} \to E_R^{(2)}$ изоморфизмдан иборат бўлиб, бу изоморфизм тегишли векторлар жуфти учун скаляр кўпайтма қийматини сақлайди. Агар $f: E_R^{(1)} \to E_R^{(2)}$ изометрик акслантиришни ўрнатиш мумкин бўлса, $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ Евклид фазолари изометрик фазолар дейилади. Изометрия $f: E_R^{(1)} \to E_k^{(2)}$ биектив акслантириш бўлгани учун $f^{-1}: E_R^{(2)} \to E_R^{(1)}$ тескари акслантириш мавжуд бўлиб, бу акслантириш ҳам равшанки, изометриядир.

Сўнгра, $f: E_R^{(1)} \to E_R^{(2)}$ ва $g: E_R^{(2)} \to E_R^{(3)}$ акслантиришлар $E_R^{(1)}$, $E_R^{(2)}$, $E_R^{(3)}$ Евклид ҳақиқий фазоларининг изометрик акслантиришлари бўлсин. У ҳолда $g \cdot f: E_R^{(1)} \to E_R^{(3)}$ акслантириш, равшанки, изометрия бўлади.

$E_R^{(1)}$ фазо $E_k^{(2)}$ га изометрик деган фактни $\approx$ ишора билан белгилаймиз: $E_R^{(1)} \approx E_R^{(2)}$. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли.

4-теорема. *$E_R^{(1)}$, $E_R^{(2)}$, $E_R^{(3)}$ — ихтиёрий ҳақиқий Евклид фазолари бўлсин. У ҳолда*

а) $E_R^{(1)} \approx E_R^{(1)}$;

б) *агар* $E_R^{(1)} \approx E_R^{(2)}$ *бўлса, у ҳолда* $E_R^{(2)} \approx E_R^{(1)}$;

в) *агар* $E_R^{(1)} \approx E_R^{(2)}$, $E_k^{(2)} \approx E_R^{(3)}$ *бўлса, у ҳолда* $E_R^{(1)} \approx E_R^{(3)}$.

Исбот бевосита $1_{E_R^{(1)}}$ акслантириш $E_R^{(1)}$ фазонинг изометрияси эканининг изометрик акслантириши таърифидан ва изометрик акслантиришларнинг юқорида исботланган хоссаларидан келиб чиқади.

4-теоремадан ҳақиқий Евклид фазолари орасидаги изометриклик муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга экани келиб чиқади, ва демак, у барча Евклид фазоларини иккитадан кесишмайдиган шундай синфларга бўладики, бир синфга ўзаро изометрик бўлган Евклид фазоларининг ҳаммаси тушади, изометрик бўлмаган фазолар эса албатта ҳар хил синфларга тушади.

Ўзаро изометрик бўлган Евклид ҳақиқий фазолари ўз хоссалари нуқтаи назаридан қараганда, бу хоссалар векторларни қўшиш операциясига ва векторларни ҳақиқий сонларга кўпайтириш операциясига, шунингдек, скаляр кўпайтмага боғлиқ бўлгани учун, бирбиридан фарқ қилмайди. Шу сабабли Евклид ҳақиқий фазоларининг изометриклик шартларини аниқлаш қизиқишга моликдир.

$E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ Евклид фазоларини вужудга келтирувчи $L_R^{(1)}$ ва $L_R^{(2)}$ чизиқли фазолар изоморфизми $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ изометриясининг зарурий таркибий қисми бўлгани учун 36.7-пунктдаги 5-теоремадан шу нарса келиб чиқадики, агар $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ Евклид фазоларининг ўлчамлари ҳар хил бўлса, улар изоморф бўлмайди ва бунинг устига изометрик ҳам бўлмайди. Қуйидаги теорема Евклид ҳақиқий фазоларининг изометрик бўлишини зарурий ва етарли шартларини беради.

5-теорема. *Иккита $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ Евклид ҳақиқий фазоларининг ўлчамлари бир хил бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина изометрик бўлади.*

Исбот. Юқорида айтилганлардан, ўлчамлари ҳар хил бўлган $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ фазолар изометрик эмаслиги келиб чиқади. Шу сабабли, агар $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ бир хил ўлчамли бўлса, у ҳолда $E_R^{(1)}$ ва $E_R^{(2)}$ изометрик бўлишини аниқлаш етарли. 4-теоремадан, бунинг учун ўз навбатида $E_R^{(1)}$ нинг R^n га изометриклигини аниқлаш етарли, R^n да скаляр кўпайтма (40.1) формула билан киритилган.

40.3-пунктдаги 1-теоремага биноан $E_R^{(1)}$ да ортонормаланган $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базис мавжуд. Агар $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ — $E_R^{(1)}$ даги ихтиёрий векторлар бўлса, у ҳолда $E_R^{(1)}$ да скаляр кўпайтма, 2-теоремага биноан, ушбу формула билан ифодаланади:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n. \tag{40.22}$$

Одатдагидек,

$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ бўлсин. У ҳолда R^n даги скаляр кўпайтма учун (40.1) формула $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар R^n да ортонормаланган базис ташкил қилишини кўрсатади. Ҳар қайси $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{g}_i$ га $E_R^{(1)}$ дан $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ векторни мос келтириб, $f: E_R^{(1)} \to R^n$ акслантиришни тузамиз. 36.7-пунктдаги 6-теоремани исботлашда f акслантириш $E_R^{(1)}$ ва R^n орасида изоморфизм экани исботланган эди, (40.22) ва (40.1) формулалардан f бунинг устига векторларнинг тегишли жуфтлари учун скаляр кўпайтмани сақлаши ҳам келиб чиқади. Шу сабабли $E_R^{(1)}$ ни R^n га изометрик акслантиришдир.

Теорема исботланди.

41- §. Ўзига қўшма операторлар. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш

41.1. E_R^n даги ўзига қўшма операторлар. Агар E_R^n га тегишли ҳар қандай икки $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ вектор учун

$$(\overrightarrow{f(x)}, \vec{y}) = (\vec{x}, \overrightarrow{f(y)}) \tag{41.1}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда f чизиқли оператор n- ўлчовли ҳақиқий E_R^n Евклид фазосида *ўзига қўшма* оператор дейилади.

1-теорема. *f чизиқли оператор E_R^n фазода ўзига қўшма оператор бўлиши учун R^n фазонинг ҳар қандай ортонормаланган базисидаги тасвирининг матрицаси симметрик матрица, яъни тасвирининг матрицаси унинг транспонирланган матрицаси билан бир хил бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n - E_R^n$ фазонинг ихтиёрий ортонормаланган базиси, $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$ ва $\vec{y} = \beta_1\vec{e}_1 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n$ эса E_R^n фазонинг иккита ихтиёрий вектори бўлсин. Агар $\vec{z} = f(\vec{x})$ ва

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица f операторнинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси бўлса, у ҳолда $\vec{z}$ векторнинг компонентлари ушбу формула бўйича топилади:

$$\gamma_i = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Бундан

$$(f(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{z}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\beta_i = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_k\beta_i \tag{41.2}$$

экани келиб чиқади. Шунга ўхшаш

$$(\vec{x}, f(\vec{y})) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\beta_k \tag{41.3}$$

эканини топамиз.

(41.2) ва (41.3) формулалардан (41.1) тенглик

$$a_{ik} = a_{ki}$$

тенглик ўринли бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина, яъни A матрица симметрик бўлгандагина бажарилиши келиб чиқади.

2-теорема. *E_R^n фазога тегишли f бичизиқли симметрик форма учун шундай ўзига қўшма $\varphi_f: E_R^n \to E_R^n$ оператор мавжудки,*

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi_f(\vec{x}), \vec{y}) \tag{41.4}$$

формула ўринли бўлади.

Исбот. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — E_R^n га тегишли ихтиёрий ортонормаланган базис бўлсин. У ҳолда f бичизиқли форма бу базисда ушбу тасвирга эга бўлади:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\beta_k, \tag{41.5}$$

бунда бу тасвирнинг

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицаси симметрик матрицадир.

Шу сабабли $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ базисда

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n, \\ a_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n \end{aligned}$$

формула билан бериладиган $\varphi_f: E_R^n \to E_R^n$ чизиқли оператор 1-теоремага асосан ўзига қўшма оператордир. Ушбу

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = (\varphi_f(\vec{x}), \vec{y})$$

тенглик ўринли эканини кўриш осон.

Теорема исботланди.

3-теорема. *E_R^n да ўзига қўшма f операторнинг барча хос қийматлари ҳақиқийдир.*

Исбот. f оператор $\lambda_0 = \xi + i\eta$ комплекс илдизга эга деб фараз қилайлик. 8-теоремани (38.3-пункт) исботлашда E_R^n га тегишли $\vec{x}, \vec{y} \neq \theta$ векторлар мавжуд бўлиб, улар

$$f(\vec{x}) = \xi\vec{x} - \eta\vec{y}, \quad f(\vec{y}) = \eta\vec{x} + \xi\vec{y} \tag{41.6}$$

тенгликларни қаноатлантириши ва $\vec{x}, \vec{y}$ векторларнинг чизиқли қобиғи операторнинг икки ўлчовли инвариант қисм фазоси экани аниқланган эди. (41.6) дан ушбуга эга бўламиз:

$$f(\vec{x}), \ \vec{y}) = \xi(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{y}, \vec{y}),$$
$$(\vec{x}, \ f(\vec{y})) = \eta(\vec{x}, \vec{x}) + \xi(\vec{x}, \vec{y}).$$

$(f(\vec{x}), \ \vec{y}) = (\vec{x}, \ f(\vec{y}))$ бўлгани учун иккинчи тенгликдан биринчи тенгликни айириб, ушбуни топамиз:

$$0 = 2\eta[(\vec{x}, \ \vec{x}) + (\vec{y}, \ \vec{y})].$$

Шундай қилиб, $(\vec{x}, \ \vec{x}) + (\vec{y}, \ \vec{y}) \neq 0$, шунинг учун $\eta = 0$. Бу $\lambda_0 = \xi + i\eta$ комплекс хос қиймат деб қилган фаразимизга зид келади. Ҳар қандай чизиқли оператор ақалли битта хос қийматга эга бўлгани учун ўзига қўшма операторнинг барча хос қийматлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлади.

4-теорема. *$f: E_R^n \to E_R^n$ — ўзига қўшма оператор бўлсин. У ҳолда шундай ортонормаланган базис мавжудки, унда бу оператор тасвирининг матрицаси диагонал матрицадир. 38.4-пунктга биноан бу базис f операторнинг хос векторларидан иборатдир.*

Исбот. 3-теоремага биноан f ўзига қўшма операторнинг ҳақиқий мос қиймати λ_1 мавжуд. Унга $\vec{e}_1$ хос вектор мос келади. $\vec{e}_1$ вектор узунлигини, умумийликни бузмаган ҳолда, бирга тенг деб ҳисоблаш мумкин. P тўплам E_R^n даги $\vec{e}_1$ га ортогонал векторларнинг ҳаммасининг тўплами бўлсин. У ҳолда E_R^n нинг исталган $\vec{x}, \ \vec{y}$ векторлари учун ва ҳақиқий λ ва μ сонлар учун ушбуга эгамиз:

$$(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \ \vec{e}_1) = \lambda(\vec{x}, \ \vec{e}_1) + \mu(\vec{y}, \ \vec{e}_1) = 0.$$

Бундан P, E_R^n нинг қисм фазоси бўлиши келиб чиқади. $\dim P = n - 1$ экани равшан. P f операторнинг инвариант қисм фазоси эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $\vec{x} \in P$ бўлсин, у ҳолда $(\vec{x}, \ \vec{e}_1) = 0$. Шунинг учун

$$(f(\vec{x}), \vec{e}_1) = (\vec{x}, \ f(\vec{e}_1)) = (\vec{x}, \ \lambda_1\vec{e}_1) = \lambda(\vec{x}, \ \vec{e}_1) = 0$$

ва демак, $f(\vec{x}) \in P$. Шундай қилиб, P f операторнинг инвариант қисм фазоси.

Шу сабабли, 3-теоремага кўра, P да f операторнинг ақалли битта хос қиймати бор, бу қийматга узунлиги бирга тенг бўлган $\vec{e}_2$ хос вектор мос келади. Бу ясашни давом эттириб, биз ортонормаланган базис ҳосил қилувчи n та $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ \ldots, \ \vec{e}_n$ хос векторларга эга бўламиз.

$$f(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i \ (i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n)$$

бўлгани учун f операторнинг $\vec{e}_1, \ \ldots, \ \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

кўринишга эга бўлади, бунда λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ f операторнинг хос қийматлари.

Теорема исботланди.

41.2. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш. *Агар шундай* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *базисни* (E_R^n *бўлган ҳолда базис ортонормаланган деб қўшимча фараз қилинади) кўрсатиш мумкин бўлиб, ҳар қандай* $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ *квадратик форма* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *базисда*

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n^2 \tag{41.7}$$

кўринишга эга бўлса, L_R^n *ёки* E_R^n *да квадратик форма каноник кўринишга келтирилган дейилади.*

5-теорема. φ *форма* n *ўлчовли* E_R^n *Евклид ҳақиқий фазосидаги квадратик форма бўлсин. У ҳолда бу квадратик форма каноник кўринишга келтириладиган ортонормаланган базис мавжуд бўлади.*

Исбот. $f: E_R^n \times E_R^n \to R^1$ форма E_R^n даги бичизиқли симметрик форма бўлиб, φ квадратик формани вужудга келтирсин. 41.1-пунктдаги 2-теоремадан

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\psi_f(\vec{x}), \vec{y})$$

тенгликни қаноатлантирувчи ўзига қўшма $\psi_f: E_R^n \to E_R^n$ оператор мавжудлиги келиб чиқади. 41.1-пунктдаги 4-теоремадан ψ_f операторнинг хос векторлари ташкил қилган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланган базис мавжудлиги келиб чиқади. Бу базисда биз қуйидаги тенгликка эгамиз:

$$\psi_f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

бунда λ_i лар ψ_f операторнинг хос қийматлари. Шунинг учун:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\psi_f(\vec{x}), \vec{y}) = \left(\psi_f \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i), \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k\right) = \lambda_1\alpha_1\beta_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n\beta_n.$$

Шу сабабли φ квадратик форма учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n^2.$$

Теорема исботланди.

Натижа. L_R^n *ҳақиқий чизиқли* n*-ўлчовли фазо бўлсин, бундан* E_R^n *фазо бирор скаляр кўпайтмани тайинлаш билан ҳосил қилинган бўлсин. У вақтда* E_R^n *нинг исталган базиси автоматик равишда* L_R^n

нинг ҳам базиси бўлади, бичизиқли ва квадратик форма тушунчалари эса L_R^n ва E_R^n учун бир хилдир. Шу сабабли 5-теореманинг ифодасида E_R^n ни L_R^n билан алмаштириш мумкин ва E_R^n даги ортонормаланган базисни L_R^n даги оддий базис билан алмаштириш мумкин.

5-теоремадан чиққан натижада ифодаланган фикр ушбу усул билан кучайтирилиши мумкин.

6-теорема. *n ўлчовли чизиқли ҳақиқий L_R^n фазода иккита φ_1 ва φ_2 квадратик форма берилган бўлсин, шу билан бирга φ_2 форма мусбат аниқланган бўлсин. У ҳолда L_R^n да иккала квадратик форма ҳам каноник кўринишга эга бўладиган базис мавжуд.*

Исбот. $f_2: L_R^n \times L_R^n \to R^1$ форма L_R^n даги, φ_2 квадратик формани ташкил қилувчи бичизиқли симметрик форма бўлсин. L_R^n да скаляр кўпайтмани

$$(\vec{x}, \vec{y}) = f_2(\vec{x}, \vec{y})$$

формула билан тайинлаймиз ва шу йўл билан n- ўлчовли Евклид ҳақиқий фазоси E_R^n га эга бўламиз. 41.2-пунктдаги 5-теоремага кўра E_R^n да ортонормаланган $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд, бу базисда φ_1 форма каноник кўринишга келтирилган:

$$\varphi_1(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n^2.$$

Ортонормаланган базисда скаляр кўпайтма

$$f_2(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

кўринишга эга бўлганлиги учун ана шу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базиснинг ўзида иккинчи форма ҳам каноник кўринишга эга бўлади.

Агар φ_1 да φ_2 квадратик формаларни L_R^n даги формалар деб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни эса L_R^n даги базис деб қаралса, исботланган тасдиқдан исботланадиган теореманинг ўринли экани келиб чиқади.

Мисол. R^3 да $f: R^3 \times R^3 \to R^1$ бичизиқли симметрик форма $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ базисда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилган бўлсин. f бичизиқли форма вужудга келтирган φ_f квадратик формани каноник кўринишга келтириш талаб қилинади.

Олдин шуни қайд қиламизки, агар $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ва $\vec{y} = (y_1,$

$y_2, y_3)$ R^3 даги иккита ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда f ва φ_f формалар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисга нисбатан ушбу тасвирларга эга бўлади:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{4}{\sqrt{3}} x_1 y_2 - x_1 y_3 + \frac{4}{\sqrt{3}} x_2 y_1 + 2x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_2,$$

$$\varphi_f(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{8}{\sqrt{3}} x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$$

41.1- пунктдаги 2- теоремага биноан исталган $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ да ушбу $f(\vec{x}, \vec{y}) = (\psi_f(\vec{x})\ \vec{y})$ тенгликни қаноатлантирувчи

$$\psi_f : R^3 \to R^3$$

чизиқли операторга эга бўламиз. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда ψ_f бундай тасвирланади:

$$\psi_f : \quad \begin{aligned} x_1' &= \frac{4}{\sqrt{3}} x_2 - x_3, \\ x_2' &= \frac{4}{\sqrt{3}} x_1 + 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Шунинг учун ψ_f операторнинг характеристик полиноми ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\det \| A - \lambda E \| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Бундан ψ_f нинг характеристик сонлари

$$3\lambda^3 - 25\lambda + 16\sqrt{3} = 0$$

тенгламанинг илдизлари экани келиб чиқади.

$$3\lambda^3 - 25\lambda + 16\sqrt{3} = (\lambda - \sqrt{3})(3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{3} - 16)$$

бўлгани учун ψ_f нинг характеристик сонлари бундай бўлади:

$$\lambda_1 = \sqrt{3}, \ \lambda_2 = \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}, \ \lambda_3 = \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}.$$

Сўнгра $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ хос векторларни қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан топамиз:

$$\begin{aligned} -\lambda_i x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}} x_2 - x_3 &= 0, \\ \frac{4}{\sqrt{3}} x_1 - \lambda_i x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -x_1 + 2x_3 - \lambda_i x_3 &= 0, \end{aligned}$$

бунда $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ шартда $i = 1, 2, 3$.

41.1-пунктдаги 4-теоремадан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ векторлар топилиши мумкинлиги ва улар ортонормаланган базис ташкил қилишлари келиб чиқади. Биз $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ компонентларининг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги сон қийматларини мустақил топишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Энди $\vec{x}, \vec{y} - R^3$ га тегишли ихтиёрий векторлар ва $\vec{x} = \alpha_1\vec{g}_1 + \alpha_2\vec{g}_2 + \alpha_3\vec{g}_3$, $\vec{y} = \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \beta_3\vec{g}_3$ лар уларнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базис бўйича ёйилмалари бўлсин. У ҳолда 41-пунктдаги 5-теоремага кўра ушбуга эга бўламиз:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{3}\,\alpha_1\beta_1 + \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{219}}{6}\alpha_2\beta_2 + \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{219}}{6}\alpha_3\beta_3,$$

$$\varphi_f(\vec{x}, \vec{x}) = \sqrt{3}\,\alpha_1^2 + \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{219}}{6}\alpha_2^2 + \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{219}}{6}\alpha_3^2.$$

41.3. Инерция қонуни. Олдинги пунктда квадратик формани тегишли E_R^n Евклид фазосида таъсир этувчи чизиқли ўзига қўшма оператор ёрдамида каноник кўринишга келтириш усули кўрсатилган эди. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтиришнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд. n-ўлчовли ҳақиқий чизиқли фазода квадратик формага боғлиқ бўлган қандай миқдорлар бу формани каноник кўринишга келтириш усулига боғлиқ бўлмаслиги, бошқача айтганда, L_R^n да квадратик формага боғлиқ бўлган қайси миқдорлар L_R^n даги, квадратик форма каноник кўринишга эга бўладиган базисга боғлиқ бўлмаслигига доир масалалар бизни қизиқтиради.

Агар $\varphi: D_R^n \to R^1$ квадратик форма бирор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ базисда каноник кўринишга келтирилган бўлса, у ҳолда $\vec{x} \in E_R^n$ векторнинг α_i компонентлари квадратлари олдидаги λ_i коэффициентлар мусбат, манфий сонлар ва ноль бўлиши мумкин. Базис векторларининг номерларини ўзгартириш ҳисобига ҳар доим олдин мусбат коэффициентли квадратлар, сўнгра эса манфий коэффициентли квадратлар келишига эришиш мумкин. Ноль коэффициентли квадратлар ёзувда қатнашмайди.

Шундай қилиб, $\varphi: D_R^n \to R^1$ квадратик форма L_R^n даги $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда ушбу каноник кўринишга келтирилган бўлсин:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_p\alpha_p^2 - \qquad (41.8)$$
$$- \lambda_{p+1}\alpha_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_{p+q}\alpha_{p+q}^2.$$

У ҳолда $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}$ мусбат сонлар $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ эса L_R^n га тегишли ихтиёрий вектор. Ўша квадратик форманинг ўзи бошқа базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ да ҳам каноник кўринишга келтирилган деб фараз қилайлик:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \mu_1\gamma_1^2 + \ldots + \mu_{p'}\gamma_{p'}^2 - \mu_{p'+1}\gamma_{p'+1}^2 - \ldots - \mu_{p'+q'}\gamma_{p'+q'}^2, \quad (41.9)$$

бунда $\mu_1, \ldots, \mu_{p'}, \mu_{p'+1}, \ldots, \mu_{p'+q'}$ — мусбат сонлар ва $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\vec{f}_i$ вектор L_R^n га тегишли ихтиёрий вектор.

У ҳолда квадратик формаларнинг инерция қонуни деб аталувчи қуйидаги теорема ўринли.

7-теорема. *Агар квадратик форма иккита ҳар хил усул билан (яъни иккита ҳар хил базис танлаш ёрдамида) каноник кўринишга келтирилган бўлса, мусбат коэффициентли квадратлар сони ҳам, манфий коэффициентли квадратлар сони иккала ҳолда ҳам бир хилдир.*

Бошқача айтганда (41.8) ва (41.9) формулаларда ушбуларга эгамиз: $p = p'$ ва $q = q'$. (41.8) ва (41.9) формулаларда нолга тенг коэффициентлар сони мос равишда $n - (p+q)$ ва $n - (p'+q')$ га тенг бўлгани учун теоремадан нолга тенг коэффициентлар сони ҳам квадратик формани каноник кўринишга келтириш усулига боғлиқ эмаслиги келиб чиқади.

7-теореманинг исботи қуйидаги леммага асосланган.

Лемма. $P^{(k)}$ ва $P^{(l)}$лар L_R^n нинг иккита қисм фазоси ва $k+l > n$ бўлсин, у ҳолда шундай $\vec{x} \neq \theta$ вектор мавжудки, бу вектор $\vec{x} \in P^{(k)} \cap P^{(l)}$ муносабатни қаноатлантиради. (Бунда, қабул қилинган белгилашларга биноан, $k = \dim P^{(k)}$, $l = \dim P^{(l)}$.)

Исбот. $P^{(k)}$ да бирор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ базисни, $P^{(l)}$ да эса $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_l$ базисни танлаймиз. $k + l > n$ бўлгани учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_l$ векторлар системаси чизиқли боғлиқ. Шу сабабли ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ сонлар мавжуд ва улар ушбу тенгликни қаноатлантиради:

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k + \mu_1\vec{f}_1 + \ldots + \mu_l\vec{f}_l = \theta.$$

Бундан

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k = -\mu_1\vec{f}_1 - \ldots - \mu_l\vec{f}_l$$

ва, маълум бўлишича,

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{e}_k = -\mu_1\vec{f}_1 - \ldots - \mu_l\vec{f}_l$$

вектор бир вақтнинг ўзида $P^{(k)}$ да ҳам, $P^{(l)}$ да ҳам ётади. Шунинг учун $\vec{x} \in P^{(k)} \cap P^{(l)}$. Агар $\vec{x} = \theta$ бўлганда эди, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторларнинг чизиқли эрклилигига кўра $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ бўлар эди, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_l$ векторларнинг чизиқли эрклилиги туфайли $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_l = 0$ бўлар эди. Шу сабабли $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ сонлардан ақалли биттаси нолдан фарқли, бу эса $\vec{x} \neq \theta$ муносабатнинг тўғрилигини кўрсатади. Лемма исботланди.

7-теореманинг исботи. $\varphi: D_R^n \to R^1$ квадратик форма $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда каноник кўринишга келтирилган бўлсин:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \ldots + \lambda_p \alpha_p^2 - \lambda_{p+1}\alpha_{p+1}^2 - \ldots - \lambda_{p+q}\alpha_{p+q}^2, \quad (41.10)$$

$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ базисда эса ушбу каноник кўринишга келтирилган бўлсин:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \mu_1\gamma_1^2 + \ldots + \mu_{p'}\gamma_{p'}^2 - \mu_{p'+1}\gamma_{p'+1}^2 - \ldots - \mu_{p'+q'}\gamma_{p'+q'}^2, \quad (41.11)$$

бунда, одатдагидек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+q} > 0$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p'+q'} > 0$,

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \gamma_1\vec{f}_1 + \ldots + \gamma_n\vec{f}_n.$$

Биз $p = p'$ ва $q = q'$ эканини исботлашимиз керак. Бу тенгликлар ўринли эмас деб фараз қилайлик. Масалан, $p > p'$ бўлсин. E_R^n нинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ векторлар вужудга келтирган қисм фазосини $P^{(p)}$ билан, $\vec{f}_{(p'+1)}, \ldots, \vec{f}_n$ векторлар вужудга келтирган қисм фазосини эса $P^{(n-p')}$ билан белгилаймиз. $\dim P^{(p)} = p$, $\dim P^{(n-p')} = n - p'$ экани равшан, чунки $P^{(p)}$ ва $P^{(n-p')}$ қисм фазоларни вужудга келтирувчи векторлар системалари чизиқли эркли векторлардан иборат. $p > p'$, шу сабабли

$$(n - p') + p > n$$

ва леммага асосан нолга тенг бўлмаган $\vec{x} \in P^{(p)} \cap P^{(n-p')}$ вектор мавжуд. Шунинг учун

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{e}_p$$

ва

$$\vec{x} = \gamma_{p'+1}\vec{f}_{p'+1} + \gamma_{p'+2}\vec{f}_{p'+2} + \ldots + \gamma_n\vec{f}_n.$$

Шундай қилиб, $\vec{x}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, 0, \ldots, 0$ компонентларга, $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$ базисда эса $0, \ldots, 0, \gamma_{p'+1}, \ldots, \gamma_n$ компонентларга эга. (41.8) ва (41.9) формулалардан фойдаланиб, $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ учун қуйидаги формулаларга эга бўламиз:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \ldots + \lambda_p\alpha_p^2 > 0, \quad (41.12)$$

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = -\mu_{p'+1}\gamma_{p'+1}^2 - \ldots - \mu_{p'+q'}\gamma_{p'+q'}^2 \leqslant 0. \quad (41.13)$$

(41.10) ва (41.11) муносабатлар биргаликда эмас, шу сабабли биз $p > p'$ деб қилган фаразимиз нотўғри. $p < p'$, $q > q'$, $q < q'$ муносабатларнинг ўринли бўлмаслиги ҳам шунга ўхшаш аниқланади. Демак, $p = p'$ ва $q = q'$. Теорема исботланди.

42-§. Ортогонал операторлар. Евклид геометрияси

42. 1. Ортогонал операторларнинг таърифи ва асосий хоссалари. Илгаригидек E_R^n n ўлчовли ҳақиқий Евклид фазоси бўлсин. Агар f чизиқли оператор E_R^n да векторларнинг скаляр кўпайтмасини сақласа, яъни E_R^n га тегишли исталган $\vec{x}$, $\vec{y}$ вектор учун

$$(f(\vec{x}), \quad f(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{42. 1}$$

тенглик ўринли бўлса, f чизиқли оператор E_R^n да *ортогонал* дейилади.

Ортогонал операторлар бир қатор муҳим хоссаларга эга.

а) *Ортогонал оператор векторлар узунликларини ўзгартирмайди.*

Ҳақиқатан, агар $\vec{x}$, E_R^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда (42. 1) формулада $\vec{x} = \vec{y}$ деб олиб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$|f(\vec{x})|^2 = (f(\vec{x}), \quad f(\vec{x})) = (\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2; \tag{42. 2}$$

б) *Ортогонал оператор векторлар орасидаги бурчакларни ўзгартирмайди.*

Бу тасдиқ ушбу формуладан бевосита келиб чиқади:

$$\varphi = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|},$$

бунда φ — E_R^n га тегишли исталган $\vec{x}$, $\vec{y}$ векторлар орасидаги бурчак. Ҳақиқатан,

$$\arccos \frac{(f(\vec{x}), f(\vec{y}))}{|f(\vec{x})|\,|f(\vec{y})|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}.$$

в) *Ортогонал оператор ортонормаланган базисни яна ортонормаланган базисга ўтказади.*

Бу тасдиқ а) ва б) хоссалардан бевосита келиб чиқадиган натижадир.

г) *f — E_R^n даги ортогонал оператор ва $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ E_R^n даги ортонормаланган базис бўлсин. Ортогонал f операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицасини*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{42. 3}$$

билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$1.\ A^*A = E;$$
$$2.\ A^{-1} = A^*;$$
$$3.\ \det A = \pm 1,$$

бунда A^* матрица A га нисбатан транспонирланган матрица, E эса бирлик матрица.

Исбот. в) хоссадан $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ векторлар E_R^n да ортонормаланган базис ташкил қилиши ва шу сабабли f ортогонал оператор чизиқли айнимаган оператор, унга мос матрица A эса махсусмас матрица, яъни $\det A \neq 0$ экани келиб чиқади. Сўнгра, A матрицанинг устунлари $f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n)$ векторларнинг $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисга нисбатан компонентлари наборидан иборатдир.

$$(f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_k)) = \begin{cases} i = k \text{ да } 1, \\ i \neq k \text{ да } 0 \end{cases}$$

бўлгани учун, бу муносабатларни $f(\vec{e}_i)$, векторлар компонентлари ёрдамида ёзиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jk} = \begin{cases} i = k \text{ да } 1, \\ i \neq k \text{ да } 0, \end{cases} \tag{42.4}$$

A матрицага нисбатан транспонирланган A^* матрицанинг сатрлари A нинг устунлари бўлгани учун, (42. 4) дан

$$A^*A = E \tag{42.5}$$

экани келиб чиқади. У ҳолда тескари матрицанинг таърифи ва хоссаларидан (33. 3-пунктга қаранг)

$$A^* = A^{-1} \tag{42.6}$$

экани келиб чиқади.

$$\det A = \det A^*$$

бўлганидан, (42. 5) тенгликка матрицалар кўпайтмасининг детерминанти ҳақидаги теоремани (32. 6-пункт) татбиқ қилиб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\det A = \pm 1;$$

г) хосса исботланди.

$\det A = 1$ бўлган ортогонал операторлар *хос*, $\det A = -1$ бўлган ортогонал операторлар эса *хосмас* ортогонал операторлар дейилади. Агар

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица махсусмас ва

$$A^* = A^{-1}$$

бўлса, у *ортогонал* матрица дейилади. Бирор f чизиқли операторнинг матрицаси бирор ортонормаланган базисда ортогонал бўлса, у ҳолда f оператор E_R^n да ортогонал оператор бўлишини исботлаш осон. Биз ўқувчига фойдали машқ сифатида бу тасдиқни исботлашни тавсия қиламиз.

42. 2. Бир ўлчовли ва икки ўлчовли Евклид фазоларида ортогонал операторлар. Дастлаб ортогонал операторларни E_R^1 бир ўлчовли Евклид фазосида қараймиз. $\vec{e}$ вектор E_R^1 ни вужудга келтирувчи вектор бўлсин. У ҳолда $f(\vec{e}) = \lambda\vec{e}$. f — ортогонал оператор бўлгани учун

$$(f(\vec{e}),\ f(\vec{e})) = (\vec{e},\ \vec{e})$$

ва, демак,

$$\lambda^2(\vec{e},\ \vec{e}) = (\vec{e},\ \vec{e}),$$

яъни $\lambda = \pm 1$. Шу сабабли E_R^1 фазода иккитагина ортогонал оператор бор: $f_1(\vec{x}) = \vec{x}$ ва $f_2(\vec{x}) = -\vec{x}$. Бу операторлардан биринчиси E_R^1 да ортогонал оператор бўлиб $1_{E_R^1}$ айний акслантиришдан иборатдир, иккинчиси эса хосмасдир. Равшанки, $f_2(\vec{x})$ оператор θ элементга нисбатан қайтишдан иборатдир.

Энди f оператор E_R^2 да ортогонал оператор бўлсин. ихтиёрий $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортонормаланган базисни белгилаймиз ва

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

матрица f нинг бу базисдаги матрицаси бўлсин. f —ортогонал оператор, шу сабабли, 42.1- пунктдаги г) хоссага биноан ушбу тенгликка эгамиз:

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{Vmatrix}. \qquad (42.7)$$

Энди f — хос ортогонал оператор, яъни $\det A = 1$ деб қўшимча фараз қиламиз. У ҳолда (33. 22) формуладан A матрицага тескари A^{-1} матрица учун ушбу формулага эга бўламиз:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{Vmatrix}. \qquad (42.8)$$

(42. 7) ва (42. 8) дан A матрица

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix}$$

кўринишга эга экани келиб чиқади, бунда $\alpha^2+\beta^2=1$. $\alpha=\cos\varphi$, $\beta=\sin\varphi$ деб оламиз. У ҳолда A матрица $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ортонормаланган базисда

$$A=\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$$

кўринишга эга бўлади. Бундан, E_R^2 *да ортогонал хос оператор* E_R^2 *ни* θ *элемент атрофида* φ *бурчак қадар айлантиришни ифодалаши* келиб чиқади.

Энди f оператор E_R^2 да хосмас ортогонал оператор бўлсин. Бу ҳолда $\det A=-1$ ва (33. 22) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}^{-1}=\begin{Vmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{Vmatrix}. \qquad (42.\ 9)$$

(42. 7) ва (42. 9) формулалардан

$$\alpha=-\delta,\ \beta=\gamma$$

экани келиб чиқади ва шу сабабли A матрица ушбу кўринишга эга бўлади:

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{Vmatrix}.$$

A симметрик матрица, шунинг учун $A^*=A$ ва f операторнинг ортогоналлигидан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$A^2=A\cdot A=A^*\cdot A=E.$$

Энди $\vec{x}\neq\theta$ вектор $\vec{e}_1=f(\vec{x})+\vec{x}\neq\theta$ шартни қаноатлантирувчи вектор бўлсин. Бундай $\vec{x}$ вектор албатта топилади, чунки акс ҳолда f оператор $f(\vec{x})=-\vec{x}$ кўринишга эга бўлади ва унинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базисдаги матрицаси бундай бўлади:

$$A=\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Аммо у ҳолда $\det A=1$ ва f — хос ортогонал оператор бўлади, бу эса бошланғич фаразга зидлик қилади. $\vec{e}_1=A\vec{x}+\vec{x}$ вектор f оператор учун хос вектор бўлишини ва 1 хос қийматга мос келишини исботлаймиз. Ҳақиқатан,

$$f(\vec{e}_1)=f(f(\vec{x})+\vec{x})=f^2(\vec{x})+f(\vec{x})=\vec{x}+f(\vec{x})=\vec{e}_1.$$

Ортогонал операторлар векторлар орасидаги бурчакларни сақлагани учун (42. 1-пункт) $\vec{e}_2$ вектор $\vec{e}_1$ векторга ортогонал, бу ҳам йўналишни сақлайди ва шу сабабли хос вектор бўлади. Бундан ташқари, (42. 1- пунктга қаранг) унинг узунлиги ортогонал оператор таъсиридан ўзгармайди, ва шунинг учун

$$f(\vec{e}_2) = \pm \vec{e}_2. \qquad (42.10)$$

Шу сабабли умумийликни бузмасдан ортогонал деб ҳисоблаш мумкин бўлган $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2$ ортонормаланган базисда, f ортогонал операторнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}.$$

Плюс ишорани чиқариб ташлаш керак, чунки, фаразга кўра f оператор хосмас оператордир. Шундай қилиб, ҳар қандай хосмас ортогонал оператор бирор ортонормаланган базисда ушбу кўринишга келтирилиши мумкин:

$$\alpha_1' = \alpha_1$$

$$\alpha_2' = -\alpha_2$$

ва бу базисда f ушбу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

матрицага эга. Равшанки, *f оператор $\vec{e}_1$ вектор орқали ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан акслантиришни ифодалайди.*

42. 3. **E_R^n да ортогонал операторлар.**

Лемма. *$f: E_R^n \to E_R^n$ — ортогонал оператор ва $P^{(k)}$ — f нинг k ўлчовли инвариант қисм фазоси бўлсин.* У ҳолда

1) $f(P^{(k)}) = P^{(k)}$;

2) *$P^{(k)}$ қисм фазонинг барча векторларига ортогонал векторлар тўплами $(n-k)$ ўлчовли $P^{(n-k)}$ қисм фазо ташкил қилади, бу қисм фазо $P^{(k)}$ нинг ортогонал тўлдирувчиси дейилади;*

3) *$P^{(n-k)}$, f операторнинг инвариант қисм фазоси бўлади.*

Исбот. Инвариант қисм фазонинг таърифидан

$$f(P^{(k)}) \subseteq P^{(k)}$$

экани келиб чиқади. Шу сабабли $\vec{x} \in P^{(k)}$ учун.

$$\hat{f}(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

формула бўйича таъсир қилувчи

$$\hat{f}: P^{(k)} \to P^{(k)}$$

оператор мавжуд. Исталган $\vec{x}$, $\vec{y} \in P^{(k)}$ да

$$(\hat{f}(\vec{x}), \hat{f}(\vec{y})) = (f(\vec{x}), f(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$$

бўлгани учун $\hat{f}$ оператор $P^{(k)}$ да ортогонал оператор бўлади. Ортогонал оператор ортонормалаган базисни ортонормаланган базисга ўтказгани учун $\hat{f}$ чизиқли айнимайдиган оператор ва демак, $\hat{f}(P^{(k)}) = P^{(k)}$ (33. 34-§ ларга қаранг). Сўнгра, $f(P^{(k)}) = P^{(k)}$, чунки $f(P^{(k)}) = \hat{f}(P^{(k)})$ ва 1-тасдиқ исботланди.

Энди 2-тасдиқни исботлаймиз. E_R^n да ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ базисни қараймиз, бу базиснинг векторлари $P^{(k)}$ да ётади. Бундай базис олдиндан мавжуд, чунки $P^{(k)}$ даги исталган базисни E_R^n даги базисгача тўлдириш мумкинлиги равшан. Шундан кейин ортогоналлаш процесси (40. 3-пунктга қаранг) бизни керакли ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисга келтиради, бу базиснинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторлар $P^{(k)}$ да ётади.

$\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар, равшанки, E_R^n да $(n-k)$ ўлчовли қисм фазо вужудга келтиради, уни $P^{(n-k)}$ билан белгилаймиз, шу билан бирга ортонормаланган базис ҳам ташкил қилади.

$\vec{x} \in E_R^n$ вектор $P^{(k)}$ нинг барча векторларига ортогонал бўлган нолмас вектор бўлсин. У ҳолда $\vec{x} \in P^{(n-k)}$. Ҳақиқатан, $\vec{x}$ ни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис бўйича ёйиб, топамиз:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k + \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

У ҳолда $\vec{x}' = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{e}_k \in P^{(k)}$ ва демак,

$$(\vec{x}, \vec{x}') = 0.$$

Аммо $(\vec{x}, \vec{x}') = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2$. Шунинг учун $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ ва $\vec{x} = \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$. Бундан тезда $\vec{x} \in P^{(n-k)}$ экан деган хулоса чиқарамиз.

Бошқа томондан θ вектор, барча $\vec{y} \in P^{(k)}$ ларга ортогонал, сўнгра ҳар қандай $\vec{x} \in P^{(n-k)}$ учун ушбу ёйилма ўринли:

$$\vec{x} = \alpha_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$$

Агар энди $\vec{y}$ — $P^{(k)}$ га тегишли исталган вектор бўлса, у ҳолда

$$\vec{y} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \cdots + \beta_k \vec{e}_k$$

ва биз ушбуга эга бўламиз:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \cdot \beta_1 + \ldots + 0 \cdot \beta_k + \alpha_{k+1} \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0.$$

Қараб чиқилган мулоҳазалардан $P^{(k)}$ га тегишли исталган векторга ортогонал векторларнинг тўплами E_R^n да $(n-k)$ ўлчовли $P^{(n-k)}$ қисм фазо эканлиги келиб чиқади.

2-тасдиқ исботланди.

3- тасдиқни исботлашга ўтамиз. $P^{(k)}f$ операторнинг инвариант қисм фазоси бўлгани учун $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, ...,$f(\vec{e}_k)$ векторлар $P^{(k)}$ да ётади. f—ортогонал оператор, шунинг учун $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ .., $f(\vec{e}_k)$ векторлар E_R^n да ортонормаланган базис ташкил қилади. Бундан $f(\vec{e}_{k+1})$, ..., $f(\vec{e}_n)$ лар $P^{(n-k)}$ да ётиши келиб чиқади, акс ҳолда $\dim P^{(k)}\geqslant k+1$ бўлади. Шу сабабли исталган $\vec{x}\in P^{(n-k)}$ учун ушбуга эгамиз:

$$\vec{x}=\alpha_{k+1}\vec{e}_{k+1}+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n$$

ва демак,

$$f(\vec{x})=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i f(\vec{e}_i)\in P^{(n-k)},$$

яъни

$$f(P^{(n-k)})\subseteq P^{(n-k)}.$$

1- тасдиқдан у ҳолда бундан ташқари $f(P^{(n-k)})=P^{(n-k)}$экани келиб чиқади.

Лемма исботланди.

$P^{(k)}$ f операторнинг E_R^n даги k ўлчовли инвариант қисм фазоси бўлсин. Леммадан шу нарса келиб чиқадики, $P^{(k)}$ нинг f га торайиши

$$f|_{P^{(k)}}:P^{(k)}\to E_R^{(n)}$$

ушбу шартни қаноатлантиради: $f|P^{(k)}(P^{(k)})=P^{(k)}$. Ушбу

$$\tilde{f}|_{P^{(k)}}:P^{(k)}\to P^{(k)}$$

акслантиришни киритамиз, бу акслантириш 29.2-пунктга биноан $f|_{P_{(k)}}$ акслантиришнинг келтирилиши деб аталади. Леммадан бевосита қуйидаги теорема келиб чиқади.

1- теорема. *f E_R^n даги ортогонал оператор, $P^{(k)}$ унинг инвариант қисм фазоси, $P^{(n-k)}$ эса унинг P^k га ортогонал тўлдирувчиси бўлсин. У ҳолда*

$$\tilde{f}|_{P^{(k)}}:P^{(k)}\to P^{(k)},\ \tilde{f}|_{P^{(n-k)}}:P^{(n-k)}\to P^{(n-k)}$$

операторлар ортогонал операторлар бўлади.

2- теорема **(ортогонал оператор тузилиши ҳақидаги асосий теорема).** *f оператор E_R^n фазодаги ортогонал оператор бўлсин. У* *ҳолда E_R^n да ортонормаланган базис мавжуд бўлиб, f операторнинг бу базисдан матрицаси*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{Vmatrix} \qquad (42.11)$$

кўринишга эга. (42.11) матрицанинг ёзилганлардан ташқари барча элементлари поллардан иборат.

Исбот. 38.3-пунктдаги 8-теоремага биноан, E_R^n да f нинг ё бир ўлчовли, ёки икки ўлчовли инвариант қисм фазоси мавжуд. Агар P_1 f нинг бир ўлчовли инвариант қисм фазоси бўлса, у ҳолда P_1 даги узунлиги бирга тенг векторни $\vec{e}_1$ билан белгилаймиз. Агар бир ўлчовли инвариант қисм фазо мавжуд бўлмаса, у ҳолда P_1 икки ўлчовли инвариант қисм фазода ортонормаланган $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базисни танлаймиз.

Агар P_1 бир ўлчовли бўлса, у ҳолда $f|P_{(1)}$ ортогонал оператор, 42.2- пунктга асосан, унда ушбу кўринишга эга: $f/P_{(1)}(\vec{x}) = \pm\vec{x}$.

Агар P_1 икки ўлчовли бўлса, у ҳолда $f|P_{(1)}$: $P_1 \to P_1$ ортогонал оператор, 42.2- пунктга кўра, хос оператор бўлади, чунки у бир ўлчовли инвариант қисм фазога эга эмас. Шунинг учун $f/P_{(1)}$ операторнинг матрицаси $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$ кўринишга эга, бунда φ 0 ва π дан фарқли. Q_1 P_1 нинг ортогонал тўлдирувчиси бўлсин. У ҳолда 42.3- пунктдаги 1- теоремага кўра

$$\tilde{f}|_{Q_1}\ Q_1 \to Q_1$$

оператор ортогонал экани келиб чиқади. Бу операторга нисбатан ҳам f операторга нисбатан бажарилган ясашни татбиқ қиламиз ва ҳоказо. Кўрсатилган процессни чекли сон марта қўлланиб, узунликлари бирга тенг бўлган иккитадан ортогонал бўлган n та векторга эга бўламиз (бунда $\dim E_R^n = n$ эканидан, яъни E_R^n фазо исталган базиси элементлари сони n га тенг эканидан ва демак, чекли эканидан муҳим фойдаланилади). Бу векторларни E_R^n да базис учун қабул қиламиз. У ҳолда, равшанки f нинг бу базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & \\ & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \cos\varphi_k \; -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & & \sin\varphi_k \; \cos\varphi_k \end{Vmatrix}$$

бу ерда диагонал бўйича турган ± 1 ларга бир ўлчовли инвариант қисм фазолар,

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{Vmatrix}$$

«катак» ларга эса f нинг икки ўлчовли инвариант қисм фазолари мос келади.

Теорема исботланди.

2-теореманинг геометрик интерпретациясини келтирамиз. Бирор икки ўлчовли $P^{(2)}$ қисм фазони қараймиз. $P^{(n-2)}$ орқали унинг ортогонал тўлдирувчисини белгилаймиз. Агар

$$\tilde{f}|_{P^{(2)}} : P^{(2)} \to P^{(2)}$$

оператор $P^{(2)}$ даги ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисда

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

матрицага эга бўлса, $\tilde{f}|P^{n-2}$ оператор эса айний оператор бўлса, у ҳолда $f: E_R^n \to E_R^n$ хос ортогонал операторни $P^{(2)}$ *икки ўлчовли қисм фазода* φ *бурчакка айлантириш* дейилади. Бу операторда айланиш ўқи ролини $(n-2)$ ўлчовли P^{n-2} қисм фазо бажаради.

Шунга ўхшаш, $P^{(1)}$ бирор бир ўлчовли қисм фазо ва $P^{(n-1)}$ — ортогонал тўлдирувчиси бўлсин. $(n-1)$ *ўлчовли* $P^{(n-1)}$ *қисм фазода* E_R^n даги f хосмас ортогонал операторни *аксланиш* дейилади, бу $\tilde{f}|_{P^{(1)}} : P^{(1)} \to P^{(1)}$ оператор $\tilde{f}|_{P^{(1)}}(\vec{x}) = -\vec{x}$ кўринишга эга бўлади,

$$\tilde{f}|_{P^{(n-1)}} \cdot P^{(n-2)} \to P^{(n-1)}$$

оператор эса айний оператор бўлади.

2-теоремадан, E_R^n *даги ҳар қандай чизиқли ортогонал оператор* $(n-1)$ *ўлчовли қисм фазолардаги аксланишларнинг бирор сони билан икки ўлчовли қисм фазодаги айланишлар кўпайтмасига келтирилиши келиб чиқади.*

Хусусан, $n = 3$ да ортогонал оператор икки ўлчовли қисм фазоларда учтадан ортиқмас аксланишлар кўпайтмасига, ёки икки ўлчовли қисм фазода айланиш билан бошқа икки ўлчовли қисм фазодаги аксланиш билан кўпайтмасига, ёки, охирида, бирор икки ўлчовли қисм фазодаги айланишга келтирилади.

VI бобга доир масалалар ва машқлар

1) Қуйидаги векторлар системаларини R^4 даги ортонормаланган базисгача тўлдиринг:

$$\text{а) } \vec{a}_1 = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{\sqrt{22}}{7}\right), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{22}}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right);$$

$$\text{б) } \vec{b}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{7}\right), \quad \vec{b}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

2) Ортогоналлаш процессини қўллаб, қисм фазоларнинг қуйидаги векторлар системаси вужудга келтирадиган ортонормаланган базисларини тузинг.

$$\text{а) } \vec{a}_1 = (1, -2, 1, 2), \qquad \text{б) } \vec{a}_1 = (1, 1, -1, -2, 0),$$

$$\vec{a}_2 = (1, 0, 2, -1), \qquad \vec{a}_2 = (0, 2, 5, 0, 8),$$

$$\vec{a}_3 = (2, 1, 0, 0); \qquad \vec{a}_3 = (1, 1, 3, 0, 1);$$

$$\text{в) } \vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0, 0), \ \vec{a}_2 = (0, 0, 1, 1, 0), \ \vec{a}_3 = (0, 1, 0, 1, 1)$$

3) E_R^n фазо P қисм фазосининг ортогонал тўлдирувчиси $P^\perp$ деб E_R^n нинг ҳар бири P нинг ҳамма векторларига ортогонал бўлган векторлари тўпламига айтилади.

Қуйидагиларни исботланг:

а) $P^\perp - E_R^n$ нинг қисм фазоси;

б) $\dim P^\perp + \dim P = n$.

4) R^4 да $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -2, 1)$ векторларга тортилган P қисм фазонинг ортогонал тўлдирувчиси $P^\top$ нинг базисини топинг.

5) R^5 да

$$a_1 = (1, 1, 0, 0, 0), \ \vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0, 0), \ \vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1, 0),$$
$$\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$$

векторларга тортилган P қисм фазонинг $P^\perp$ ортогонал тўлдирувчисининг базисини топинг.

6) $\varphi : E_R^3 \to E_R^3$ чизиқли аксләнтириш $\vec{g}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{g}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{g}_3 = (1, 1, 0)$ векторлардан иборат базисда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

матрица билан берилган. $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базиснинг компонентлари бирор ортонормаланган $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ базисда берилган деб ҳисоблаб φ^* қўшма акслантиришнинг $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ базисдаги матрицасини топинг.

7) Агар φ оператор $\vec{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1)$ векторларни $\vec{b}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{b}_2 = (3, 1, 2)$, $\vec{b}_3 = (7, 1, -4)$ векторларга ўтказса (ҳамма векторларнинг компонентлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда берилган), φ операторга қўшма бўлган $\varphi^* : E_R^3 \to E_R^3$ чизиқли операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги матрицасини топинг.

8) Қуйидаги квадратик формаларни ортогонал оператор ёрдамида каноник кўринишга келтиринг:

а) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
б) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
в) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$;
г) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8 \cdot x_2x_4$;
д) $\sum\limits_{i<k} x_ix_k$;
е) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<k} x_ix_k$.

9) Бирор ортонормаланган базисда A матрица билан берилган $\varphi : E_R^n \to E_R^n$ ортогонал оператор учун ортонормаланган базис топинг, бу операторнинг бу базисдаги матрицаси B каноник кўринишга эга:

а) $$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

б) $$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

VII боб. n ЎЛЧОВЛИ ЕВКЛИД КОМПЛЕКС (УНИТАР) ФАЗОЛАРИ

43- § L_C^n чизиқли комплекс фазоларда формалар

43.1. Комплекс сонлар ва полиномлар назариясидан ёрдамчи маълумотлар. Биз мактаб математика курсидан комплекс соннинг таърифи ва комплекс сонлар билан арифметик амаллар бажариш маълум деб фараз қиламиз. Комплекс сонларга доир бир қатор тушунчаларни эслатиб ўтамиз, бу тушунчалардан қуйида систематик фойдаланилади.

Агар $z = a + bi$ ихтиёрий комплекс сон бўлса,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (43.1)$$

ва

$$\cos\varphi = \frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}, \qquad (43.2)$$

тенгликлар билан аниқланадиган ρ ва φ ҳақиқий сонлар z комплекс соннинг *модули* ва *аргументи* дейилади. Ҳар қандай комплекс соннинг модули ҳар доим манфиймас ва у бир қийматли аниқланади, аксинча, φ аргумент (43.2) тенгликлар билан бутун каррали 2π гача аниқликда топилади. z комплекс соннинг модули ва аргументи учун кўпинча $|z|$ ва $\arg z$ белгилашдан фойдаланилади.

(43.1) ва (43.2) тенгликлардан фойдаланиб, ҳар қандай $z=a+bi$ комплекс сонни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (43.3)$$

z соннинг (43.3) кўринишдаги тасвири комплекс соннинг *тригонометрик шакли* дейилади.

Комплекс сонларни кўпайтиришда уларнинг модуллари кўпайтирилади, аргументлари эса қўшилади. Ҳақиқатан, $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= \rho_1\rho_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ &= \rho_1\rho_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \qquad (43.4)$$

Бундан

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad (43.5)$$

ва

$$z_1^n = \rho_1^n\,[\cos n\varphi + i\sin n\varphi] \qquad (43.6)$$

экани келиб чиқади.

$a - ib$ сон $a + ib$ сонга *қўшма сон* дейилади. z сонга қўшма сонни $\bar z$ билан белгилаш қабул қилинган. $a - (-ib) = a + ib$ бўлгани учун $\bar{\bar z} = z$. Қўшма соннинг бир қатор хоссаларини қайд қилиб ўтамиз.

а) $z = a + ib$ сон $\bar{z} = z$ *бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина ҳақиқий сон бўлади*. Бу қуйидаги тенгликнинг бевосита натижасидир:

$$\overline{a + ib} = a - ib.$$

б) *Қуйидаги муносабат ўринли:*

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2. \tag{43.7}$$

в) *ҳар қандай z_1, z_2 комплекс сонлар учун*

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \tag{43.8}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{43.9}$$

тенгликлар ўринли.

Энди

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0 \tag{43.10}$$

полином комплекс коэффициентли, хусусий ҳолда ҳақиқий коэффициентли полином бўлсин. Математик анализ курсида қуйидаги теорема қаралади.

1-теорема (**алгебранинг асосий теоремаси**). (43.10) *полином $n \geqslant 1$ да комплекс сонлар майдонида камида битта илдизга эга.*

Энди (43.10) полиномнинг коэффициентлари ҳақиқий сонлар ва z_0 унинг илдизи бўлсин. У ҳолда в) хоссадан

$$\overline{a_0z_0^n + a_1z_0^{n-1} + \ldots + a_n} = a_0\bar{z}_0^{\,n} + a_1\bar{z}_0^{\,n-1} + \ldots + a_n = 0$$

экани келиб чиқади. Шундай қилиб, $\bar{z}_0$ ҳам (43.10) ҳақиқий коэффициентли полиномнинг илдизидир. Бундан, *ҳақиқий коэффициентли полином ҳар доим фақат жуфт сонда мавҳум илдизларга эгалиги* келиб чиқади. Бундан эса, *ўз навбатида, ҳар қандай тоқ даражали ҳақиқий коэффициентли полином ҳар доим камида битта ҳақиқий илдизга эга* экани келиб чиқади.

C — элементлари комплекс сонлардан иборат n-тартибли квадрат матрица бўлсин:

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & \ldots & a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & \ldots & a_{2n} + ib_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + ib_{n1} & a_{n2} + ib_{n2} & \ldots & a_{nn} + ib_{nn} \end{Vmatrix}.$$

У ҳолда

$$C = A + iB,$$

бунда A ва B матрицалар мос равишда a_{jk} ва b_{jk} элементлардан тузилган, бу элементлар ҳақиқий сонлардир. A матрица C матрицанинг *ҳақиқий қисми*, B эса унинг *мавҳум қисми* дейилади. Иккита комплекс матрицадан бирининг ҳақиқий қисми иккинчисининг ҳақиқий қисмига, мавҳум қисми мавҳум қисмига тенг бўлганидагина улар ўзаро тенг бўлади.

$a_{jk} - i\,b_{jk}$ элементлардан тузилган матрицани C матрицага *комплекс қўшма матрица* деймиз ва $\overline{C}$ билан белгилаймиз. *Ҳар қандай C, C_1, C_2 комплекс матрицалар учун*

$$\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}, \tag{43.11}$$

$$\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}, \tag{43.12}$$

$$\overline{\det C} = \det \overline{C} \tag{43.13}$$

тенгликлар ўринли, биз бу тенгликларни исботлашни фойдали машқ тарзида тавсия қиламиз.

43.2. **Чизиқли ва античизиқли формалар.** Агар ихтиёрий $\vec{x}$, $\vec{y} \in L_C^n$ векторлар ва ихтиёрий λ комплекс сон учун

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}),$$

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда $f: L_C^n \to C$ функция *чизиқли форма* дейилади. Агар $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ — L_C^n фазодаги ихтиёрий базис, $\vec{x} = \alpha_1\vec{e_1} + \ldots + \alpha_n\vec{e_n}$ L_C^n даги ихтиёрий вектор, ва ниҳоят, $a_j = f(e_j)$ $(j = 1 \ldots n)$ бўлсин, у ҳолда f чизиқли форма учун $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ базисда

$$f(\vec{x}) = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \tag{43.14}$$

формула ўринли бўлади. Агар $\vec{x}$, $\vec{y} \in L_C^n$ ихтиёрий векторлар ва λ ихтиёрий комплекс сон учун

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \tag{43.15}$$

$$f(\lambda\vec{x}) = \overline{\lambda} f(\vec{x}) \tag{43.16}$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда $f: L_C^n \to C$ функция *античизиқли форма* дейилади. Агар $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ L_C^n даги ихтиёрий базис, $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}$ L_C^n даги ихтиёрий вектор, $a_j = f(\vec{e_j})$ $(j = 1, \ldots n)$ бўлса, у ҳолда $f(\vec{x})$ античизиқли форма учун $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ базисга нисбатан

$$f(\vec{x}) = a_1\overline{\alpha_1} + \ldots + a_n\overline{\alpha_n} \tag{43.17}$$

формула ўринли бўлади.

43.3. **Бирярим чизиқли формалар.** *Агар $f: L_C^n \times L_C^n \to C$ функция:*

1) *тайинланган $\vec{y}$ да $\vec{x}$ нинг чизиқли формаси бўлса;*

2) *тайинланган $\vec{x}$ да $\vec{y}$ нинг античизиқли формаси бўлса, у ҳолда у L_C^n да бирярим чизиқли форма дейилади.*

Бошқача айтганда, исталган $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in L_C^n$ ва исталган λ комплекс сон учун

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = f(\vec{x}_1, \vec{y}) + f(\vec{x}_2, \vec{y}),\ f(\lambda\vec{x}_1, \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}_1, \vec{y})$$

ва исталган $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in L_C^n$ учун ва исталган λ комплекс сон учун

$$f(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = f(\vec{x}, \vec{y}_1) + f(\vec{x}, \vec{y}_2),\ f(\vec{x}, \lambda\vec{y}_1) = \bar{\lambda} f(\vec{x}, \vec{y}_1).$$

Шуни қайд қиламизки, бизга кейинчалик фақат бирярим чизиқли формалар керак бўлади. Илгаригидек, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ система L_C^n даги ихтиёрий базис бўлсин, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ ва $\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k$ эса L_C^n га тегишли ихтиёрий векторлар бўлсин. У ҳолда бирярим чизиқли форма учун ушбуга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\bar{\beta}_1 f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \alpha_1\bar{\beta}_2 f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \ldots + \\ + \alpha_1\bar{\beta}_n f(\vec{e}_1, \vec{e}_n) + \alpha_2\bar{\beta}_1 f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \alpha_2\bar{\beta}_2 f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \\ + \ldots + \alpha_2\bar{\beta}_n f(\vec{e}_2, \vec{e}_n) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ + \alpha_n\bar{\beta}_1 f(\vec{e}_n, \vec{e}_1) + \alpha_n\bar{\beta}_2 f(\vec{e}_n, \vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n f(\vec{e}_n, \vec{e}_n). \end{aligned}$$

Ушбу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

матрица бирярим чизиқли f форманинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси дейилади, бунда $a_{jk} = f(\vec{e}_j, \vec{e}_k)$.

L_R^n ҳақиқий фазодан фарқли равишда квадратик форма тушунчаси исталган, албатта симметрик бўлиши шарт бўлмаган бирярим чизиқли форма ёрдамида киритилади. Чунончи $f: L_C^n \times L_C^n \to C$ бирярим чизиқли форма, D_C^n эса $L_C^n \times L_C^n$ даги диагональ бўлса, у ҳолда $\varphi = f|_{D^n}$ функция L_C^n да *квадратик форма* дейилади:

φ *квадратик форманинг қийматлари бўйича бу формани вужудга келтирувчи f бирярим чизиқли формани бир қийматли тикланади.* Бу ушбу айниятдан келиб чиқади:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}[f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) + if(\vec{x} + i\vec{y}, \vec{x} + i\vec{y}) - \\ - f(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) - if(\vec{x} - i\vec{y}, \vec{x} - i\vec{y})], \end{aligned}$$

бу айниятни бевосита текшириб кўриш осон.

Агар ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in L_C^n$ учун

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})} \tag{43.18}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f: L_C^n \times L_C^n \to C$ бирярим чизиқли формани *эрмит формаси* дейилади. Эрмит формаси L_R^n ҳақиқий фазодаги бичизиқли симметрик форма тушунчасининг аналогидир.

Агар f нинг эрмит формасига $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ базисда

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица мос келса, у ҳолда ҳар қандай j, k да ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$a_{jk} = \overline{a_{kj}}. \tag{43.19}$$

Ҳақиқатан,

$$a_{jk} = f(\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \overline{f(\vec{e}_k, \vec{e}_j)} = \overline{a_{kj}}.$$

Аксинча, агар f бирярим чизиқли форманинг матрицаси учун (43.19) тенгликлар бажарилса, у ҳолда ҳар қандай $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$ ва $\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k$ векторлар учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j, k=1}^{n} a_{jk} \alpha_j \bar{\beta}_k = \overline{\sum_{j, k=1}^{n} a_{kj} \beta_k \bar{\alpha}_j} = \overline{f(\vec{y}, \vec{x})}.$$

(43.19) тенгликни қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$A = \bar{A}^*. \tag{43.20}$$

Шундай қилиб, f бирярим чизиқли форма эрмит формаси бўлиши учун *ҳар қандай* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *базисда унинг* A *матрицаси* (43.20) *шартни қаноатлантириши зарур ва етарлидир.*

Эрмит формаси вужудга келтирган квадратик форма ҳам эрмит квадратик формаси дейилади.

2-теорема. *f бирярим чизиқли форма эрмит формаси бўлиши учун бу форма вужудга келтирган квадратик форма ҳар қандай $\vec{x} \in L_C^n$ учун фақат ҳақиқий қийматларни қабул қилиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Ҳар қандай бирярим чизиқли формалар учун қуйидаги айниятлар ўринлидир:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} \left\{ f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) + if(\vec{x}+i\vec{y}, \vec{x}+i\vec{y}) - \right.$$

$$-f(\vec{x}-\vec{y},\ \vec{x}-\vec{y})-if\ (\vec{x}-i\vec{y},\ \vec{x}-i\vec{y})\},\tag{43.21}$$

$$f(\vec{y},\ \vec{x})=\frac{1}{4}\{f(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\vec{y})-if\ (\vec{x}+i\vec{y},\ \vec{x}+i\vec{y})-$$

$$-f(\vec{x}-\vec{y},\ \vec{x}-\vec{y})+if(\vec{x}-i\vec{y},\ \vec{x}-i\vec{y})\}.\tag{43.22}$$

Шунинг учун, агар $f(\vec{x},\ \vec{x})$ ҳар қандай $\vec{x}\in L_C^n$ учун ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда $f(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{x}+\vec{y})$, $f(\vec{x}\pm i\vec{y},\ \vec{x}\pm i\vec{y})$, $f(\vec{x}-\vec{y},\ \vec{x}-\vec{y})$ сонлар ҳақиқий ва (43.21) ҳамда (43.22) дан

$$f(\vec{x},\ \vec{y})=\overline{f(\vec{y},\ \vec{x})}$$

экани келиб чиқади.

Агар энди f эрмит формаси бўлса, у ҳолда $f(\vec{x},\ \vec{y})=\overline{f(\vec{y},\ \vec{x})}$. $\vec{y}=\vec{x}$ деб оламиз. У ҳолда $f(\vec{x},\ \vec{x})=\overline{f(\vec{x},\ \vec{x})}$, ва демак, $f(\vec{x},\vec{x})$— — ҳақиқий сон.

Теорема исботланди.

Бу теоремадан квадратик форма L_C^n фазода фақат ҳақиқий қийматларни у эрмит формаси бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина қабул қилиши келиб чиқади. Шу сабабли L_C^n да скаляр кўпайтма тушунчасини киритиш учун эрмит формаларидан фойдаланиш керак.

44-§. n ўлчовли комплекс Евклид (унитар) фазолари

44.1. Асосий таърифлар ва тушунчалар. Агар ҳар қандай $\vec{x}\in L_C^n$ ва $\vec{x}\neq\theta$ учун

$$f(\vec{x},\ \vec{x})>0\tag{44.1}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, f *эрмит квадратик форма мусбат аниқланган эрмит квадратик формаси* дейилади. Мусбат аниқланган эрмит квадратик формаси мос келадиган $f(\vec{x},\ \vec{y})$ эрмит бирярим чизиқли формаси скаляр кўпайтма дейилади.

L_C^n да скаляр кўпайтмани бериш шундай $f:L_C^n\times L_C^n\to C$ бирярим чизиқли формани тайинлашни билдирадики, бу форма ушбу шартларни қаноатлантиради:

а) f эрмит формаси, яъни ихтиёрий $\vec{x}$, $\vec{y}$ учун

$$f(\vec{x},\ \vec{y})=\overline{f(\vec{y},\ \vec{x})}$$

тенглик ўринли;

б) f форма вужудга келтирадиган квадратик форма мусбат аниқланган.

L_C^n да скаляр кўпайтмани L_R^n даги каби $(\vec{x}, \vec{y})$ билан белгилаймиз. Скаляр кўпайтманинг таърифидан у қуйидаги хоссаларга эга эканлиги келиб чиқади:

1) ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in L_C^n$ учун $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}$, бунда $\overline{(\vec{y}, \vec{x})}$ *сон* $(\vec{x}, \vec{y})$ *га комплекс қўшма сон;*

2) *ҳар қандай* $\vec{x}, \vec{y} \in L_C^n$ *ва ҳар қандай* λ *комплекс сон учун*

$$(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}),$$

3) *ҳар қандай* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in L_C^n$ *лар учун*

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y});$$

4) *ҳар қандай* $\vec{x} \in L_C^n$ *учун* $(\vec{x}, \vec{x})$ *ҳақиқий манфиймас сон,* $x \neq \theta$ *дагина у нолга тенг бўлади*

$f: L_C^n \times L_C^n \to C$ функциядан талаб қилинадиган 1 — 4- хоссалар f функция L_C^n да скаляр кўпайтма эканига олиб келишини бевосита текшириш мумкин. Кўпинча L_C^n да скаляр кўпайтмани L_C^n даги векторлар жуфтининг 1 — 4- хоссаларга аксиомалар сифатида бўйсунувчи функцияси сифатида аниқланади.

Юқорида айтилганлардан L_C^n да скаляр кўпайтманинг иккала таърифи эквивалент эканлиги келиб чиқади.

Бирор скаляр кўпайтма тайинланган L_C^n *фазо n- ўлчовли Евклид комплекс (унитар) фазоси дейилади.*

Масалан, C^n комплекс чизиқли фазо, агар унда $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n} \qquad (44.3)$$

формула билан киритилса, у унитар фазо бўлади, бунда $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\vec{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. E_C^n унитар фазода

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

сон $\vec{x}$ *векторнинг узунлиги* дейилади. Скаляр кўпайтма унитар фазода комплекс қийматларни ҳам қабул қилиши мумкин бўлгани учун биз E_C^n да векторлар орасидаги бурчак тушунчасини киритмай, икки векторнинг ортогоналлиги тушунчасинигина киритамиз. Чунончи, агар

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \qquad (44.2)$$

бўлса, $\vec{x}, \vec{y} \in E_C^n$ векторларни *ортогонал векторлар деймиз.*

E_R^n фазодагидек, E_C^n унитар фазода ҳам ортогонал ва ортонормаланган базис тушунчалари киритилади ва ортогоналлаш (40.3-

пункт) процесси ёрдамида E_C^n да ортонормаланган базиснинг мавжудлиги аниқланади.

E_C^n фазонинг ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисида скаляр кўпайтма қандай ифодаланишини топамиз. $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$, $\vec{y} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$ — E_C^n даги ихтиёрий векторлар. У ҳолда

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \overline{\beta_1} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \alpha_1 \overline{\beta_2} (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \ldots + \alpha_1 \overline{\beta_n} (\vec{e}_1, \vec{e}_n) +$$
$$+ \alpha_2 \overline{\beta_1} (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \alpha_2 \overline{\beta_2} (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \ldots + \alpha_2 \overline{\beta_n} (\vec{e}_2, \vec{e}_n) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \alpha_n \overline{\beta_1} (\vec{e}_n, \vec{e}_1) + \alpha_n \overline{\beta_2} (\vec{e}_n, \vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n} (\vec{e}_n, \vec{e}_n) =$$
$$= \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n},$$

яъни

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n}. \qquad (44.5)$$

(44.5) формула шуни кўрсатадики, конкрет C^n унитар фазода скаляр кўпайта (44.3) формула билан қандай аниқланган бўлса, E_C^n унитар фазода ҳам скалар кўпайтма ортонормаланган базис векторларининг компонентлари орқали худди шу йўсинда ифодаланади.

(44.5) дан ихтиёрий $\vec{x} \in E_C^n$ вектор учун ҳар қандай $i = 1, 2, \ldots, n$ да

$$\alpha_i = (\vec{x}, \vec{e}_i) \qquad (44.6)$$

формула ўринли экани келиб чиқади, чунки

$$(\vec{x}, \vec{e}_i) = \alpha_1 (\vec{e}_i, \vec{e}_1) + \alpha_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n (\vec{e}_n, \vec{e}_1) = \alpha_1.$$

(44.6) формула, E_R^n фазодагидек, $\vec{x}$ векторнинг ортонормаланган базисига нисбатан компонентларини векторларнинг базис элементларига проекциялари сифатида қараш мақсадга мувофиқ эканини кўрсатади.

Агар E_C ва E_C' унитар фазоларни вужудга келтирадиган L_C ва L_C' чизиқли комплекс фазолар орасида изоморфизм мавжуд бўлса, у ҳолда E_C ва E_C' ни изометрик унитар фазолар дейилади, бунда изоморфизм векторларнинг скаляр кўпайтмасини сақлайди. Худди E_R^n фазо учун исботланганидек, *ҳар хил n ва m ларда E_C^n ва E_C^m фазолар изометрик эмаслиги, бир хил n ларнинг ўзида эса барча E_C^n фазолар скаляр кўпайтма (40.3) формула билан киритилган C^n фазога изометрик бўлишини ва, демак, ўзаро изометрик эканликларини исботлаш мумкин.*

45*-§. Берилган чизиқли операторга қўшма оператор

45.1. E_C^n да бирярим чизиқли ва чизиқли операторлар.

$f: E_C^n \times E_C^n \to C$ E_C^n даги бирярим чизиқли оператор бўлсин. E_C^n унитар фазода ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни белгилаймиз. У ҳолда E_C^n даги ҳар қандай $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$ ва $\vec{y} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$ икки вектор учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) = {} & a_{11}\alpha_1\overline{\beta_1} + a_{12}\alpha_1\overline{\beta_2} + \ldots + a_{1n}\alpha_1\overline{\beta_n} + \\ & + a_{21}\alpha_2\overline{\beta_1} + a_{22}\alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + a_{2n}\alpha_2\overline{\beta_n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\alpha_n\overline{\beta_1} + a_{n2}\alpha_n\overline{\beta_2} + \ldots + a_{nn}\alpha_n\overline{\beta_n} = \\ & = (a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{n1}\alpha_n)\overline{\beta_1} + \\ & + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{n2}\alpha_n)\overline{\beta_2} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)\overline{\beta_1}. \end{aligned} \tag{45.1}$$

Ушбу тенгликларни қабул қиламиз:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 &= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_n &= a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \ldots + a_{n.}\alpha_n. \end{aligned} \tag{45.2}$$

У ҳолда (45.2) формула E_C^n да φ чизиқли операторни аниқлайди, бу оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда A^* матрицага эга, бунда

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрица f бирярим чизиқли форманинг шу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси.

Шундай қилиб, E_C^n даги ҳар қандай бирярим чизиқли f форма учун ушбу

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \gamma_1\overline{\beta_1} + \gamma_2\overline{\beta_2} + \ldots + \gamma_n\overline{\beta_n} = (\varphi(x), y), \tag{45.3}$$

муносабатни қаноатлантирувчи шундай φ оператор жавоб берадики, бунда φ операторнинг ихтиёрий ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

базисдаги матрицаси f бирярим чизиқли операторнинг A матрицасидан транспонирлаш йўли билан ҳосил бўлади.

Бевосита текшириш йўли билан шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, агар φ E_C^n даги чизиқли оператор ва f форманинг ихтиёрий ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси φ оператор матрицасини транспонирлашдан ҳосил бўлса, у ҳолда

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \vec{y})$$

функция $f: E_C^n \times E_C^n \to C$ бирярим чизиқли формани аниқлайди.

Энди (45.3) даги φ чизиқли оператор f бирярим чизиқли форма билан бир қийматли аниқланишини исботлаймиз. Ҳақиқатан, агар φ ва ψ операторлар E_C^n даги чизиқли операторлар ва ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in E_C^n$ учун ушбуга эга бўлсак:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \vec{y}), \quad f(\vec{x}, \vec{y}) = (\psi(\vec{x}), \vec{y}),$$

у ҳолда

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) \equiv (\psi(\vec{x}), \vec{y})$$

ва шунинг учун

$$(\varphi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}), \vec{y}) = 0.$$

Бунда $\vec{y} = \varphi(\vec{x}) - \psi(\vec{x})$ деб олиб, ҳар қандай $\vec{x} \in E_C^n$ учун қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$(\varphi(\vec{x}) - \psi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) - \psi(\vec{x})) = 0,$$

бундан эса скаляр кўпайтманинг 4-хоссасига кўра

$$\varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$$

экани келиб чиқади, ана шунинг ўзи бизнинг тасдиқни исботлайди.

Шундай қилиб, (45.3) *формула бирярим чизиқли формалар тўпламининг E_C^n фазонинг чизиқли операторлари тўпламига акслантирилишининг биектив эканини аниқлайди.*

E_C^n даги бирярим чизиқли формалар билан E_C^n даги чизиқли операторлар орасидаги боғланиш бошқа усул билан ҳам аниқланиши мумкин. Бунинг учун (45.1) тенгликнинг биринчи қисмидан иборат бўлган

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) = {} & a_{11}\alpha_1\overline{\beta_1} + a_{12}\alpha_1\overline{\beta_2} + \ldots + a_{1n}\alpha_1\overline{\beta_n} + \\ & + a_{21}\alpha_2\overline{\beta_1} + a_{22}\alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + a_{2n}\alpha_2\overline{\beta_n} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}\alpha_n\overline{\beta_1} + a_{n2}\alpha_n\overline{\beta_2} + \ldots + a_{nn}\alpha_n\overline{\beta_n} \end{aligned} \tag{45.4}$$

формулада $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларни қавсдан ташқарига чиқарамиз. У ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1(a_{11}\overline{\beta_1} + a_{12}\overline{\beta_2} + \ldots + a_{1n}\overline{\beta_n}) +$$
$$+\alpha_2(a_{21}\overline{\beta_1} + a_{22}\overline{\beta_2} + \ldots + a_{2n}\overline{\beta_n}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\alpha_n(\overline{a_{n1}}\beta_1 + a_{n2}\overline{\beta_2} + \ldots + a_{nn}\overline{\beta_n})$$

ёки

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\overline{(\overline{a_{11}}\beta_1 + \overline{a_{12}}\beta_2 + \ldots + \overline{a_{1n}}\beta_n)} + \tag{45.5}$$
$$+\alpha_2\overline{(\overline{a_{21}}\beta_1 + \overline{a_{22}}\beta_2 + \ldots + \overline{a_{2n}}\beta_n)} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\alpha_n\overline{(\overline{a_{n1}}\beta_1 + \overline{a_{n2}}\beta_2 + \ldots + \overline{a_{nn}}\beta_n)}.$$

E_C^n даги чизиқли операторни $\overline{\varphi^*}$ билан белгилаймиз, бу оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда

$$\begin{Vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \ldots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \ldots & \overline{a_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \ldots & \overline{a_{nn}} \end{Vmatrix}$$

матрицага эга бўлсин. У ҳолда (45.5) формуладан ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \overline{\varphi^*}(\vec{y})).$$

Шуни қайд қиламизки, φ^* *операторнинг матрицаси* φ *операторнинг матрицасидан транспонирлаш ва комплекс қўшмалаш операциялари ёрдамида ҳосил бўлади, бунда иккала матрица ҳам ортонормаланган ихтиёрий тайинланган* $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ *базисда қаралади.*

45.2. Берилган чизиқли операторга қўшма бўлган оператор. Ушбу $\varphi: E_C^n \to E_C^n$ чизиқли оператор берилган бўлсин.

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \overline{\varphi^*}(\vec{y})) \tag{45.6}$$

шартни қаноатлантирувчи чизиқли оператор $\overline{\varphi^*}$ операторга *қўшма оператор* дейилади.

1-теорема. *E_C^n унитар фазода ҳар бир $\varphi: E_C^n \to E_C^n$ чизиқли операторга қўшма оператор мос келади, шу билан бирга бундай оператор биттагина бўлади.*

Исбот. 45.1-пунктдан φ чизиқли операторга

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \vec{y})$$

тенгликни қаноатлантирувчи бирярим чизиқли $f: E_C^n \times E_C^n \to C$ оператор бир қийматли мос келади. Аммо бирярим чизиқли f формага

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \overline{\varphi^*}(\vec{y}))$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\overline{\varphi^*}$ оператор бир қийматли мос келади. Лекин у ҳолда:

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \overline{\varphi^*}(\vec{y})).$$

Бундан 1-теореманинг тўғрилиги келиб чиқади.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, 45.1-пунктдан $\overline{\varphi^*}$ қўшма чизиқли операторнинг исталган ортонормаланган базисдаги матрицаси φ операторнинг шу базисдаги матрицасини транспонирлаш ва комплекс қўшмалаш операциялари ёрдамида ҳосил қилинади.

2-теорема. *Қўшма операторлар қуйидаги хоссаларга эга:*

а) $\overline{(\varphi\psi)^*} = \overline{\psi^*}\,\overline{\varphi^*}$;

б) $\overline{(\overline{\varphi^*})^*} = \varphi$;

в) $\overline{(\varphi + \psi)^*} = \overline{\varphi^*} + \overline{\psi^*}$;

г) $\overline{(\lambda\varphi)^*} = \bar{\lambda}\,\overline{\varphi^*}$;

д) $\overline{1^*_{E_C^n}} = 1_{E_C^n}$.

Бу теоремани мустақил исботлашни ўқувчига таклиф қиламиз.

46-§. Ўзига қўшма операторлар. Квадратик формаларни каноник кўринишга келтириш

46.1. Ўзига қўшма операторлар ва уларнинг хоссалари. Агар $\overline{\varphi^*} = \varphi$ бўлса, E_C^n даги φ чизиқли оператор *ўзига қўшма* оператор ёки *эрмит* оператори дейилади.

1-теорема. *φ чизиқли оператор ўзига қўшма оператор бўлиши учун $f = (\varphi(\vec{x}), \vec{y})$ бирярим чизиқли форма эрмит формаси бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. f нинг эрмит формаси эканлиги

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = \overline{(\varphi(\vec{y}), \vec{x})} \tag{46.1}$$

эканини билдиради, ўзига қўшмалиги эса

$$(\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \varphi(\vec{y})) \tag{46.2}$$

тенглик билан ифодаланади. (46.1) ва (46.2) тенгликлар эквивалент экани равшан.

2-теорема. *Ўзига қўшма операторнинг хос қийматлари ҳақиқий, ҳар хил хос қийматларга мос келадиган хос векторлар эса ортогоналдир.*

Исбот. λ—ўзига қўшма φ операторнинг хос қиймати, $\vec{x} \neq \theta$ эса λ сонга мос келадиган хос вектор бўлсин, яъни

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

$\bar{\varphi}^* = \varphi$ бўлгани учун:

$$(\varphi(\vec{x}), \ \vec{x}) = (\vec{x}, \ \varphi(\vec{x})).$$

Аммо у ҳолда

$$(\lambda\vec{x}, \ \vec{x}) = (\vec{x}, \ \lambda\vec{x})$$

ва скаляр кўпайтманинг хоссасидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз.

$$\lambda(\vec{x}, \ \vec{x}) = \bar{\lambda}(\vec{x}, \ \vec{x}).$$

$(\vec{x}, \vec{x}) \neq 0$ бўлгани учун $\lambda = \bar{\lambda}$, яъни λ — ҳақиқий сон.

Энди λ_1, λ_2 лар φ операторнинг иккита хос қиймати ва $\vec{e}_1 \neq \theta$, $\vec{e}_2 \neq \theta$ лар эса шу сонларга мос келувчи хос векторлар бўлсин.

$$(\lambda_1\vec{e}_1, \ \vec{e}_2) = (\varphi(\vec{e}_1), \ \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \ \bar{\varphi}^* (\vec{e}_2)) = (\vec{e}_1, \ \varphi(\vec{e}_2)) = (\vec{e}_1, \ \lambda_2\vec{e}_2)$$

ва λ_1, λ_2 — ҳақиқий сонлар бўлгани учун

$$\lambda_1(\vec{e}_1, \ \vec{e}_2) = \lambda_2(\vec{e}_1, \ \vec{e}_2) \text{ ёки } (\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{e}_1, \ \vec{e}_2) = 0.$$

Шартга кўра $\lambda_1 \neq \lambda_2$, шунинг учун

$$(\vec{e}_1, \ \vec{e}_2) = 0.$$

Теорема исботланди.

3-теорема. *φ оператор E_C^n даги ўзига қўшма оператор бўлсин. У ҳолда φ операторнинг n та иккитадан ортогонал хос векторлари мавжуд.*

Исбот. 38.3-пунктнинг 7-теоремасига биноан E_C^n фазода φ операторнинг ақалли битта $\vec{e}_1$ хос вектори мавжуд.

λ_1 қиймат φ операторнинг $\vec{e}_1$ векторга мос келадиган хос қиймати бўлсин. $\vec{e}_1$ векторга ортогонал бўлган векторлар тўпламини Q^1 билан белгилаймиз. Q^1 тўплам L_C^n фазонинг $(n-1)$ ўлчовли қисм фазоси экани худди 42.3-пунктдаги леммадаги каби исботланади (шуни эслатамизки, бунинг учун L_C^n фазода биринчи вектори $\vec{e}_1$ векторга пропорционал бўлган ортонормаланган базис олиш керак). Q^1 тўплам φ операторнинг инвариант қисм фазоси эканини исботлаймиз. $\vec{x} \in Q^1$ бўлсин. У ҳолда $(\vec{x}, \vec{e}_1) = 0$. Сўнгра ушбуга эгамиз:

$$(\varphi(\vec{x}), \ \vec{e}_1) = (\vec{x}, \ \varphi^*(\vec{e}_1)) = (\vec{x}, \ \varphi(\vec{e}_1)) = (\vec{x}, \ \lambda_1\vec{e}_1) = \lambda_1(\vec{x}, \ \vec{e}_1) = 0.$$

Бундан $\varphi(\vec{x}) \in Q^1$ экани келиб чиқади. Шундай қилиб, Q^1 тўплам φ нинг инвариант қисм фазоси.

Энди Q^1 қисм фазода $\varphi|_{Q^1}$ операторни қараймиз. $\varphi|_{Q^1}(Q^1) \subseteq Q^1$ экани ва $\varphi|_{Q^1}$ оператор Q^1 даги ўзига қўшма оператор экани равшан. Q^1 да 38.3-пунктнинг 7-теоремасига биноан $\vec{e}_2$ хос вектор мавжуд. Сўнгра Q^1 дан $n-2$ ўлчамли, Q^1 га ортогонал бўлган Q^2 қисм фазони ажратамиз, бу қисм фазода $\vec{e}_3$ хос векторни топамиз ва ҳ. к.

Натижада φ операторнинг иккитадан ортогонал бўлган n та $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ векторларига эга бўламиз.

Теорема исботланди.

4-теорема. φ *оператор* E_C^n *унитар фазодаги ўзига қўшма оператор бўлсин. У ҳолда ортонормаланган базис мавжуд бўлиб, унда* φ *операторнинг матрицаси диагонал кўринишда ва ҳақиқий матрицадир. Шунингдек, тескари тасдиқ ҳам ўринлидир.*

Исбот. 3-теоремага биноан φ оператор E_C^n фазода иккитадан ортогонал бўлган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларга эга экани келиб чиқади. Умумийликни бузмаган ҳолда, бу векторларнинг узунликлари бирга тенг деб ҳисоблаш мумкин; акс ҳолда $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ни $\vec{e}'_i = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$ векторлар билан алмаштирамиз. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар E_C^n да ортонормаланган базис ташкил қилади, бундан ташқари

$$\begin{gathered}\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1,\\ \varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2,\\ \cdots\cdots\\ \varphi(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n\end{gathered}$$

бўлгани учун φ операторнинг бу базисидаги матрицаси ушбу кўринишга эга бўлади.

$$\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n.\end{matrix} \tag{46.3}$$

2-теоремадан $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сонлар, шунинг учун (46.3) матрица ҳам ҳақиқий экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, 4-теореманинг биринчи тасдиғи исботланди. Энди иккинчи тасдиқни исботлаймиз. φ операторнинг бирор ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси (46.3) кўринишга эга бўлсин, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — ҳақиқий сонлардир. У ҳолда φ операторга қўшма бўлган φ^* операторнинг $\vec{e}, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси (46.3) матрицасини транспонирлаш ва комплекс қўшмалаш йўли билан ҳосил қилинади. (46.3) матрица диагонал кўринишли ва ҳақиқий матрица бўлгани учун бу (46.3) матрица устида бажарилган операциялар уни ўзгартирмайди. Демак, φ ва φ^* операторларга ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда битта матрицанинг ўзи мос келади, бу эса $\varphi = \overline{\varphi}^*$ эканини билдиради.

Теорема тўла исботланди.

4-теоремадан ўзига қўшма операторларнинг қуйидаги геометрик интерпретациясига эга бўламиз. φ оператор E_C^n унитар фазода ўзига қўшма оператор бўлсин. У ҳолда E_C^n фазода n та иккитадан ортогонал хос векторлар ажратилади, бу векторлар E_C^n да n та иккитадан ортогонал йўналишни аниқлайди. Бундай ҳар бир йўналишга λ_i ҳақиқий сон (φ нинг хос қиймати) мос келтирилади, шу билан бирга бу йўналишларнинг ҳар бири бўйича $|\lambda_i|$ марта сиқиш ёки чўзиш амалга оширилади, бундан ташқари, агар мос келувчи λ_i қиймат манфий бўлса, у ҳолда $(n-1)$ ўлчовли қисм фазода бу йўналишга ортогонал аксланиш (қайтиш) рўй беради. E_R^n ҳақиқий Евклид фазосида φ ўзига қўшма оператор учун худди шунга ўхшаш интерпретация ўринли. Бу 41.1 пунктнинг 4-теоремасидан келиб чиқади.

46.2. Эрмит квадратик формаларини каноник кўринишга келтириш.

5-теорема. *E_C^n унитар фазода $f: E_C^n \times E_C^n \to C$ эрмит бирярим чизиқли формаси қаралаётган бўлсин. У ҳолда E_C^n да ортонормаланган базис мавжуд бўлиб, бу базисда мос эрмит квадратик $\varphi = f|_{D_C^n}$ форма ушбу кўринишга эга бўлади:*

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 |\alpha_1|^2 + \lambda_2 |\alpha_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\alpha_n|^2, \qquad (46.4)$$

бунда λ_i — ҳақиқий сонлар, α_i эса қаралаётган базисга нисбатан ихтиёрий $\vec{x} \in E_C^n$ векторнинг компонентлари.

Исбот. 46.1-пунктга кўра эрмит бирярим чизиқли форма учун E_C^n да

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \vec{y})$$

тенгликни қаноатлантирувчи ўзига қўшма φ оператор мавжуд. E_C^n да ортонормаланган базис сифатида φ операторнинг узунлиги бирга тенг бўлган иккитадан ортогонал бўлган хос векторлари системасини танлаймиз. Бу танлашни 46.2-пунктнинг 2-теоремасига кўра амалга ошириш мумкин. У ҳолда

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \ \varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \ \ldots, \ \varphi(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n,$$

бунда 2-теоремага кўра $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ҳақиқий сонлардир. Энди

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n, \quad \vec{y} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$$

векторлар E_C^n га тегишли ихтиёрий векторлар бўлсин.

$$(\vec{e_i}, \vec{e_k}) = \begin{cases} i = k \text{ да } 1, \\ i \neq k \text{ да } 0 \end{cases}$$

бўлгани учун

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (\varphi(\vec{x}), \vec{y}) = \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}\right),\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{e_i}), \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e_k}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \vec{e_i}, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

Шу сабабли

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 |\alpha_1|^2 + \lambda_2 |\alpha_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\alpha_n|^2.$$

Теорема исботланди.

Энди 41.2-пунктнинг 6-теоремасининг қуйидаги умумлашган шаклини мустақил исботлашни таклиф қиламиз.

6-теорема. *Комплекс чизиқли фазода иккита f ва g бирярим чизиқли Эрмит формалари қаралаётган бўлсин, шу билан бирга $\varphi_g = f/_{D_C^n}$ — мусбат аниқланган квадратик форма бўлсин. У ҳолда бу иккала форма каноник кўринишга келтириладиган базис мавжуд.*

Эслатма. 6-теоремада формалардан бирининг мусбат аниқланган бўлиши талаби муҳимдир. Ушбу

$$|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 \text{ ва } \alpha_1\overline{\alpha_2} + \alpha_2\overline{\alpha_1}$$

квадратик формалар учун C^2 фазода 6-теорема ўринли бўлмаслигини исботлашни таклиф қиламиз.

Бу параграфнинг охирида шуни қайд қиламизки, эрмит квадратик формалари учун инерция қонуни ўринли, яъни қуйидаги теорема маънога эга.

7-теорема. *Агар L_C^n фазодаги эрмит квадратик формаси иккита базисда каноник кўринишга эга бўлса, у ҳолда мусбат, манфий ва ноль коэффициентларнинг сони иккала ҳолда ҳам бир хилдир.*

Бу теореманинг исботи квадратик формалар учун ҳақиқий чизиқли фазодаги мос теореманинг исботига ўхшаш ўтказилади. Шу сабабли биз исботни келтирмаймиз

47-§. Унитар операторлар

47.1. Унитар операторнинг таърифи ва хоссалари. Агар E_C^n унитар фазодаги φ чизиқли оператор учун

$$\varphi\overline{\varphi^*} = \overline{\varphi^*}\varphi = 1_{E_C^n} \tag{47.1}$$

бўлса, φ чизиқли оператор унитар оператор дейилади, бунда $\overline{\varphi^*}$ оператор E_C^n да φ га қўшма оператор.

1-теорема. *Ҳар қандай φ унитар оператор E_C^n да скаляр кўпайтмани сақлайди, яъни ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in E_C^n$ учун*

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}) \tag{47.2}$$

тенглик ўринли. Аксинча, скаляр кўпайтмани сақлайдиган ҳар қандай чизиқли оператор унитар оператордир.

Исбот. Ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in E_C^n$ учун қуйидаги тенгликка эгамиз.

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \overline{\varphi}^* (\varphi(\vec{y}))) = (\vec{x}, \overrightarrow{(\overline{\varphi}^* \circ \varphi)\, y}).$$

φ унитар оператор бўлгани учун (47.1) дан $\overline{\varphi}^* \circ \varphi = 1_{E_C^n}$ экани келиб чиқади, шу сабабли:

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Энди ҳар қандай $\vec{x}, \vec{y} \in E_C^n$ учун

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$$

тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда

$$((\overline{\varphi}^* \circ \varphi)(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = (1_{E_C^n} (\vec{x}), \vec{y})$$

ва 45.1-пунктга биноан, $\overline{\varphi}^* \varphi = 1_{E_C^n}$, яъни $\overline{\varphi}^*$ — унитар оператор.

Теорема исботланди.

1-теоремадан, $\vec{x} = \vec{y}$ да

$$|\varphi(\vec{x})|^2 = (\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x})) = (\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2$$

экани келиб чиқади, яъни φ унитар оператор векторлар узунликларини сақлайди,

E_C^n фазода $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланган базис берилган бўлсин ва φ — E_C^n да чизиқли оператор бўлсин. φ нинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицасини

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

билан, φ операторга қўшма бўлган $\overline{\varphi}^*$ операторнинг шу базисдаги матрицасини $\overline{A}^*$ билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$\overline{A}^* = \begin{Vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \ldots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \ldots & \overline{a}_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{a}_{1n} & \overline{a}_{2n} & \ldots & \overline{a}_{nn} \end{Vmatrix}$$

Агар φ унитар оператор бўлса, у ҳолда $\varphi\cdot\overline{\varphi}^{*}=1_{E_C^n}$ ва $\overline{\varphi}^{*}\varphi=1_{E_C^n}$ шартлар матрицаларнинг $A\overline{A}^{*}$ ва $\overline{A}^{*}A$ кўпайтмалари бирлик матрицага тенглигини билдиради. Шу сабабли $A\overline{A}^{*}=E$ ва $\overline{A}^{*}A=E$ матрицавий тенгликларга мос равишда жавоб берувчи иккита тенгликлар системасига эга бўламиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a}_{kj}=\begin{cases} i=k \text{ да } 1, \\ i\neq k \text{ да } 0, \end{cases} \tag{47.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\overline{a}_{jk}=\begin{cases} i=k \text{ да } 1, \\ i\neq k \text{ да } 0. \end{cases} \tag{47.4}$$

(47.3) ва (47.4) дан φ операторнинг ортонормаланган базисда унитарлиги шарти ушбуни билдиради: шу базисда A матрицанинг бирор устуни (сатри)га жойлашган элементлари билан бошқа сатри (устуни) элементларига қўшма элементлар билан кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг, исталган сатр (устун) элементлари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг экани келиб чиқади.

(47.4) формуладан қуйидаги теорема келиб чиқади.

2-теорема. *φ оператор унитар оператор бўлиши учун бу оператор $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланган базисни ортонормаланган базисга ўтказиши зарур ва етарли.*

Исбот қуйидаги фактдан келиб чиқади: $\varphi(\vec{e}_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ векторлар $\varphi(\vec{e}_i)=\sum a_{ji}\vec{e}_i$ кўринишга эга ва шунинг учун:

$$(\varphi(\vec{e}_i),\ \varphi(\vec{e}_k))=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\overline{a}_{jk}=\begin{cases} i=k \text{ да } 1, \\ i\neq k \text{ да } 0. \end{cases}$$

47.2. Унитар операторнинг тузилиши

3-теорема. *Унитар операторнинг хос қийматлари модули бўйича бирга тенг.*

Исбот. φ оператор E_C^n даги унитар оператор, λ эса φ нинг хос қиймати ва $\vec{x}\neq\theta$ вектор λ сонга мос келадиган хос вектор бўлсин. У ҳолда $\varphi(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ ва, демак,

$$(\vec{x},\ \vec{x})=(\varphi(\vec{x}),\ \varphi(\vec{x}))=(\lambda\vec{x},\ \lambda\vec{x})=\lambda\overline{\lambda}\,(\vec{x},\ \vec{x}).$$

Бундан $\lambda\overline{\lambda}=1$, чунки $(\vec{x},\ \vec{x})\neq 0$, яъни $|\lambda|=1$.

Теорема исботланди.

4-теорема. *φ оператор E_C^n даги унитар оператор бўлсин. У ҳолда φ операторнинг иккитадан ортогонал бўлган n та хос векторлари мавжуд. Бу векторларга мос келувчи хос қийматлар модули бўйича бирга тенг.*

Исбот. 38.3-пунктдаги 7-теоремага биноан φ оператор E_C^n даги ҳар қандай бошқа чизиқли оператор каби камида битта $\vec{e}_1 \neq \theta$ хос векторга эга. Умумийликни бузмасдан, $|\vec{e}_1| = 1$ деб ҳисоблаш мумкин. E_C^n даги $\vec{e}_1$ векторга ортогонал векторлар тўпламини Q^1 билан белгилаймиз. Биз биламизки, Q^1 тўплам E_C^n фазонинг $(n-1)$ ўлчовли қисм фазосидир (46-пунктнинг 4-теоремасига қаранг). Q^1 тўплам E_C^n нинг инвариант қисм фазоси эканини исботлаймиз. $\vec{x}$ вектор Q^1 нинг ихтиёрий вектори бўлсин. У ҳолда

$$(\vec{x}, \vec{e}_i) = 0$$

$\vec{e}_1$ хос векторга жавоб берувчи хос қиймат λ_1 бўлсин. 3-теоремадан $|\lambda_1| = 1$ экани келиб чиқади. Сўнгра ушбу тенглик келиб чиқади:

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{e}_1)) = (\overline{\varphi}^* \varphi (\vec{x}), \vec{e}_1) = (\vec{x}, \vec{e}_1) = 0,$$

шундай қилиб, $\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$, шунинг учун $\overline{\lambda}_1 (\varphi(\vec{x}), \vec{e}_1) = 0$, яъни $(\varphi(\vec{x}), \vec{e}_1) = 0$. Бу Q^1 нинг инвариант эканини исботлайди. φ операторнинг Q^1 қисм фазога сиқилиши бизни $(n-1)$ ўлчовли Q^1 унитар фазодаги

$$\varphi|_{Q_1} : Q^1 \to Q^1$$

унитар операторга олиб келади, бу операторга нисбатан ҳозиргина юритилган мулоҳазани яна татбиқ қилиш мумкин. Процессни давом эттириб, φ операторнинг n та иккитадан ортогонал, бирлик узунликка эга бўлган хос векторларини тузамиз. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларга, 3-теоремага кўра, φ операторнинг модуллари бўйича бирга тенг бўлган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ хос қийматлари мос келади.

Теорема исботланди.

5-теорема. *E_C^n унитар n ўлчовли фазода ҳар қандай унитар оператор учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланган базис мавжуд бўлиб, операторнинг бу базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:*

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{47.5}$$

бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — модуллари бўйича бирга тенг бўлган сонлар.

Аксинча, агар бирор ортонормаланган базисда $\varphi: E_C^n \to E_C^n$ чизиқли операторнинг матрицаси (47.5) кўринишга эга бўлса, у ҳолда φ унитар оператордир.

Исбот. 47.2-пунктнинг 4-теоремасига биноан E_C^n да φ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ хос векторлари ҳосил қилган ортонормаланган базис мавжуд.

Сўнгра

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1,$$
$$\varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\varphi(\vec{e}_n) = \lambda_n\vec{e}_n$$

бўлгани учун бу базисда φ операторнинг матрицаси (47.5) кўринишга эга бўлади, бунда 47.2-пунктнинг 3-теоремасига биноан λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ — модуллари бўйича бирга тенг бўлган сонлар.

Аксинча, φ чизиқли оператор бирор ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots,$ $\dots, \vec{e}_n$ базисда (47.5) кўринишдаги матрицага эга бўлсин, бунда $\lambda_i | = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. У ҳолда исталган

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i \text{ ва } \vec{y} = \sum_{k=1}^{n}\beta_k\vec{e}_k$$

векторлар учун қуйидаги тенгликка эгамиз:

$$(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})) = \left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{e}_i\right), \varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\vec{e}_k\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{\lambda}_i\alpha_i\bar{\beta}_i = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\alpha_i\bar{\beta}_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i.$$

Бу ҳолда эса 47.1-пунктнинг 1-теоремасига кўра φ оператор унитар оператор бўлади.

Теорема исботланди.

20—2081

МУНДАРИЖА

II ҚИСМ. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА АСОСЛАРИ

ИБ № 658

На узбекском языке

ИЛЬЯ ЯКОВЛЕВИЧ БАКЕЛЬМАН

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие для студентов педагогических институтов

Перевод с издания изд-ва «Просвещение», М., 1976.

Издательство „Ўқитувчи"
Ташкент—1978

Таржимон *Қ. Жуланов*
Редактор *Р. Каримов*
Бадиий редактор *Е. Соин*
Техредактор *Т. Грешникова*
Корректор *Д. Нуритдинова*

Теришга берилди 30.09. 1977 й. Босишга рухсат этилди 7.03. 1978 й. Формат 60×90 $^1/_{16}$. тип. қоғози. № 3 Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б.л. 19,25. Нашр. л. 15 8. Тиражи 15000. Зак. № 2081. Баҳоси 60 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 150-77.

Ўзбекистон ССР Министрлар Советининг Нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг полиграфия комбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1978 й.

Полиграфкомбинат Ташкентского производственного объединения «Матбуот» Государственного комитета по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров УзССР. Ташкент, Навои, 30.