Р. ХУДОЙБЕРДИЕВ, Р. САЙДАЛИЕВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

Ўзбекистон Халқ таълими вазирлиги техника олий ўқув юртларининг машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган.

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1992

Ўқув қўлланма машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентларга мўлжаллаб чиқарилган программага мувофиқ ёзилган. Қўлланмада ўқув материали назарий жиҳатдан баён этилгандан сўнг унга тегишли масалалар ечиб кўрсатилган, ҳар бобнинг охирида машқ қилиш учун бир неча масала берилган.

Қўлланмадан фанни мустақил ўрганувчилар ёки билимларини чуқурлаштирмоқчи бўлган кишилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Рецензентлар — *Ўзбекистон ФА академиги* *Х. А. Рахматуллин*,
проф. А. Г. Азизов

Х $\frac{1603020000-72}{353(04)-90}$ 192—90

ISBN 5—645—00741—7

СЎЗ БОШИ

Ушбу қўлланма назарий механиканинг бошланғич бўлими ҳисобланган статикага бағишланган. Китобни ёзишда муаллифлар Абу Райҳон Беруний номидаги Тошкент политехника институти студентларига кўп йиллар мобайнида назарий механика курсидан ўқиган лекциялари асос қилиб олинган. Қўлланмада статиканинг асосий, муҳим масалалари бобларга ажратиб ёритилган. Студентлар ўтилган материални пухта ўзлаштиришлари учун ҳар қайси бобнинг охирида айрим темаларга оид масалалар берилган. Статикани пухта ўрганишнинг «Материаллар қаршилиги», «Машина ва механизмлар назарияси» курсларини ўзлаштиришда жуда муҳим аҳамияти бор. Муаллифлар қўлланмани ёзишда ана шуларни ҳам эътиборга олиб, студентларнинг фазовий тасаввурларини ривожлантирадиган масалаларнинг ечилиш йўлларини кўрсатиб бердилар. Қўлланма олий мактаб проблемаларини ҳал этиш йўлида олға қўйилган бир қадам бўлади деган умиддамиз.

Қўлёзмани Ўзбекистон Фанлар академиясининг ҳақиқий аъзоси профессор Х. Рахматуллин, физика-математика фанлари доктори профессор А. Азизов, профессор М. Юнусов ва институт назарий механика кафедрасининг катта ўқитувчиси Р. Довидова ўқиб чиқиб, ўзларининг фойдали фикр ва мулоҳазаларини бердилар. Бу ўртоқларга муаллифлар самимий миннатдорчилик билдирадилар.

Муаллифлар

МУҚАДДИМА

Механикада ҳаракат деганда механик ҳаракат тушунилади. Механик ҳаракат эса материя ҳаракатининг энг оддий тури бўлиб, моддий жисмларнинг фазодаги вазиятларининг вақт ўтиши билан бир-бирига нисбатан ўзгаришини билдиради. Назарий механика фани мана шу механик ҳаракатни ва бу ҳаракатнинг хусусий ҳоли бўлмиш мувозанат вазиятни ўрганади. Механик ҳаракат табиатда ҳам, техникада ҳам кўп содир бўлади, шунинг учун назарий механика фани табииётда ва ҳозирги замон техникасида катта аҳамият касб этади. Назарий механикадан олинадиган маълумотлар замонавий техниканинг илмий асоси ҳисобланади. Ҳозирги вақтда назарий механикани яхши билмай туриб маълумотли инженер бўлиш қийин.

Таҳлил қилинадиган масалаларнинг турига қараб назарий механика уч қисмга бўлинади: статика, кинематика ва динамика. Статика бўлимида қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системасини унга эквивалент бўлган системага алмаштириш усуллари ва кучларнинг мувозанат шартлари ўрганилади. Кинематикада жисмларнинг ҳаракати фақат геометрик томондан ўрганилади. Ниҳоят, динамикада моддий жисмларнинг ҳаракати уларга таъсир этаётган кучлар билан биргаликда ўрганилади. Назарий механиканинг умумий курсида моддий нуқта ва қаттиқ жисм механикаси ҳамда моддий нуқталар системаси ҳаракатининг умумий қонунлари ўрганилади.

Назарий механика кузатиш, кундалик тажриба ва инсоннинг ишлаб чиқариш фаолиятига асосланади. Механикада тадқиқот олиб боришни енгиллаштириш мақсадида кўпинча реал жисмларнинг унча муҳим аҳамиятга эга бўлмаган баъзи хоссаларидан воз кечиб, соддалаштирилган схемалар (соддалаштирилган моделлар) яратилади. Масалан, назарий механикада абстракция методи катта роль ўйнайди, абсолют қаттиқ жисм, моддий нуқта ва инерциал саноқ системаси каби тушунчалар шулар жумласидандир. Тадқиқотнинг оддийдан мураккабга ўтишдек бу йўли назарий механикада кўп қўлланилади. Чунончи, абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат қонунлари ўрганиб олингандан сўнг деформацияланадиган жисмларнинг мувозанати масаласига ўтилади.

Энди механика тараққиётининг қисқача тарихини баён қилиб ўтамиз.

Механика фани жуда қадим замонларда пайдо бўлган. У даврда катта-катта иншоотлар, масалан, Миср эхромларини қуришда усталар механика қонунларига асосланиб, оғир юкларни кўтариш ва кўчиришда энг оддий механик мосламалар бўлмиш ричаг, блок ва қия текисликдан фойдаланганлар. Деҳқончилик, қурилиш ишлари, савдонинг юксалиши механиканинг ривожланишига туртки берди. Дастлаб механиканинг асосан статика қисми ривож топди. Статикани аниқ фан сифатида асослаган олим Архимед (эрамиздан олдинги 287—212 йиллар) деб ҳисоблаш лозим. Архимед ўзининг механикага оид асарларида қадимги дунё олимларининг статика соҳасидаги билимларига якун ясаб, статикага илмий асос солди. Архимед ричагнинг мувозанати тўғрисидаги масалани тўла-тўкис ечиб, оғирлик маркази ҳақида таълимот яратди.

Ўрта асрларда араб мамлакатларида ва Ўрта Осиёда яшаган Абу Райҳон Беруний, Ибн Рушд, Ибн Бажжи, Ал-Хоразмий, Ибн Қурра ва Улуғбек каби машҳур олимлар асосан математика, астрономия ва қисман механика соҳасида тадқиқотлар олиб борганлар.

XV асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб Юксалиш даврида савдо, ҳунармандчилик, денгизда сузиш ривожланиши билан бир қаторда механика ҳам тез суръатлар билан тараққий эта бошлади. Бу даврда яшаган олимлардан Леонардо да Винчи механика масалаларини ечишда математикани татбиқ қилишга ва тажрибага катта аҳамият берди. У жисмнинг қия текислик бўйлаб қиладиган ҳаракатини ва сирпаниб ишқаланишини тадқиқ этган. Кучнинг моменти тушунчасини биринчи бўлиб Леонардо да Винчи фанга киритди.

Улуғ итальян олими Галилейнинг (1564—1642) ишлари механика тарихида янги давр очди. Динамиканинг моддий жисмлар ҳаракати ҳақидаги бўлимининг асосчиси Галилейдир. Тўғри чизиқ бўйлаб нотекис илгарилама ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги ва тезланиши тушунчасини биринчи бўлиб Галилей айтган. Динамиканинг асосий қонунларидан бири ҳисобланган инерция қонунини Галилей кашф этган.

Машҳур Голланд олими Христиан Гюйгенс (1629—1695) Галилейнинг динамика соҳасидаги тадқиқотларини давом эттириб, физик маятник назариясини яратди. Ундан ташқари, Гюйгенс олдин Галилей киритган тезланиш тушунчасини нуқтанинг эгри чизиқли ҳаракати учун умумлаштирди. Гюйгенс қаттиқ жисмлар зарбининг назариясига оид бир қатор илмий ишлар ҳам қилган.

Динамиканинг асосий қонунларини ўрганиш соҳасида Галилей бошлаб берган илмий ишни улуғ инглиз олими Исаак Ньютон (1643—1727) ниҳоясига етказди. Ньютон динамикани ривожлантираётган бир даврда француз олими Вариньон (1554—1722) статика соҳасида тадқиқотлар олиб бориб, тенг таъсир этувчининг моменти тўғрисидаги теоремани исбот қилади.

XVII асрни механика тарихида динамика асослари яратилган давр деб ҳисоблаш мумкин.

XVIII асрда механиканинг умумий принциплари ишлаб чиқилиб, қаттиқ жисм механикаси, гидромеханика ва осмон механикаси соҳасида муҳим тадқиқотлар ўтказилди. Бу даврда механика чексиз кичик миқдорларни анализ қилишнинг И. Ньютон ва Лейбниц асос солган қудратли методлари ёрдамида аналитик методлар яратиш йўлидан боради. И. Бернулли, Л. Эйлер, Д. Бернулли, Даламбер ва Лагранжлар XVIII асрда яшаган энг йирик механик олимлардир. XIX асрга келиб аналитик механика яна камол топади; илмий ишлар асосан икки йўналишда олиб борилган: 1) механиканинг вариацион принциплари деб аталадиган принципларни барпо этиш ҳамда; 2) механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллашни такомиллаштириш ва янги методлар яратиш.

Механика тарихида XX аср А. Эйнштейннинг релятивистик механика кашф этиши билан алоҳида ўрин эгаллайди. Нисбийлик назарияси деб аталадиган релятивистик механика табиатнинг ҳақиқий ҳодисаларини тўлароқ тавсифлагани ҳолда ёруғлик тезлигига қараганда жуда кичик тезликлар билан ҳаракатланадиган жисмлар ҳаракати ўрганиладиган классик механика олдида, яъни Галилей-Ньютон механикаси олдида олға қараб қўйилган йирик қадам ҳисобланади. Бироқ назарий механика курси айни ўша ёруғлик тезлигидан анча кичик тезликлар билан ҳаракатланадиган жисмлар ҳаракати ва мувозанатини ўрганади.

Ҳозирги замон механикасини яратишда рус ва Совет олимлари катта ҳисса қўшдилар. М. В. Остроградский, Н. Е. Жуковский, С. В. Ковалевская, С. А. Чаплигин, И. В. Мешчерский, К. Э. Циолковский, А. Н. Крилов, Х. А. Рахматуллин ва бошқа машҳур олимларимиз ўзларининг оламшумул аҳамиятга эга бўлган тадқиқат ва кашфиётлари билан механикани янада бойитдилар. Ватанимиз фани намояндаларининг шонли анъаналарини давом эттириб, ҳозирги кунда А. Ю. Ишлинский, Л. И. Седов, А. А. Илюшин каби олимлар жуда самарали илмий ишлар олиб бормоқдалар.

СТАТИКА

1-БОБ. СТАТИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧА ВА АКСИОМАЛАРИ

1-§. Асосий тушунчалар

Жисмга куч қўйилганда, яъни жисмга бошқа бир жисм таъсир этганда, унинг шакли ўзгаради, буни физикада *жисмнинг деформацияланиши* дейилади. Деформациялар анча катта бўлиши мумкин, масалан, резина шнур, пружинанинг чўзилиши; буларни бевосита кўриб пайқаса бўлади. Бироқ деформациялар кўз илғамайдиган даражада кичик бўлиши ҳам мумкин, чунончи, узун темир йўл рельси ўз учларига таъсир қилаётган кучлар воситасида узаяди; бу ҳолда деформацияни махсус асбоблар воситасидагина ўлчаб аниқлаш мумкин, холос. Назарий механиканинг статика бўлимида эса деформациялар эътиборга олинмайди, демак, реал жисмлар ўрнида абсолют қаттиқ жисм деб аталадиган жисм билан иш кўрилади. Ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа кучлар таъсирида (ёки бутун ҳаракат давомида) ўзгармайдиган жисм *абсолют қаттиқ жисм* дейилади. Бундай жисм табиатда йўқ, лекин деформация кичкина бўлганлиги туфайли уни эътиборга олмаслик тадқиқот ўтказишда кўп қулайлик яратади. Деформацияни эътиборга олмаслик мумкин бўлмаган ҳолларда назарий механикада олинган натижалар механиканинг материаллар қаршилиги ёки эластиклик назарияси деб аталадиган бўлимларида қўлланиладиган методлар воситасида янада мукаммаллаштирилади ва тўлдирилади. Масалан, ракетанинг учишини таҳлил қилганда унинг айрим қисмларининг кичик-кичик тебранишларини эътиборга олмаслигимиз мумкин, чунки бу тебранишларнинг ракета учишининг параметрларига кўрсатадиган таъсири жуда заиф бўлади. Бироқ ракетанинг мустаҳкамлигини ҳисоблаган вақтда бундай тебранишларни албатта эътиборга олиш зарур, чунки бу тебранишлар ракетанинг корпусини емириши мумкин.

Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг мувозанат шартлари кучларнинг деформацияланадиган жисмга кўрсатадиган таъсирини ўрганишда қўлланилади.

Назарий механикада яна бир тушунча билан иш кўрилади. У ҳам бўлса моддий нуқта тушунчасидир. Ҳаракат ёки мувозанат қонунлари ўрганилаётганда ўлчамларининг катта-кичиклиги аҳамиятга эга бўлмаса, бундай жисм *моддий нуқта* дейилади. Моддий нуқтанинг геометрик нуқтадан фарқли ўлароқ, чекли массаси бор деб ҳисоблаймиз. Моддий нуқтанинг жисм каби инертлик хоссаси ҳам бор. Ундан ташқари, моддий нуқта жисмга ўхшаб бошқа моддий жисмлар билан ўзаро таъсирлаша олади. Масалан, сайёраларнинг Қуёш атрофида қиладиган ҳаракатини ўрганган вақтда биз уларни моддий нуқта деб ҳисоблай оламиз, чунки сайёраларнинг ўлчамлари Қуёшгача бўлган масофаларга нисбатан жуда хам кичик бўлади. Бироқ ўша сайёралардан бирининг ўз ўқи атрофида қиладиган ҳаракатини ўрганганда эса, унга моддий нуқта деб эмас, балки моддий жисм деб қараймиз. Одатда, механикада жисм абсолют қаттиқ жисм деб эмас, балки қисқагина қилиб бир сўз билан жисм деб юритилади.

Абсолют қаттиқ жисм ва моддий нуқта тушунчалари абстракт тушунчалар бўлиб, назарий механикада абстракция методи катта аҳамият касб этади.

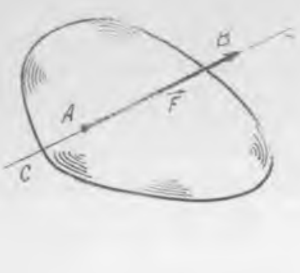
Агар бир неча моддий нуқта бир-бирига нисбатан шундай муносабатда бўлсаки, булардан бирортаси ҳам бошқаларидан мустақил равишда ҳаракат қила олмаса, бундай тўплам моддий нуқталарнинг механик системаси деб, баъзан қисқа қилиб *система* деб юритилади.

Энди механикада қўлланиладиган асосий тушунчалардан бири бўлган куч тушунчаси билан танишиб чиқамиз. Бир жисмга бошқа бир жисм таъсир кўрсатар экан, бу таъсирнинг катталиги механикада куч деган тушунча билан ифодаланади. Кучлар хилма-хил бўлади. Буларга оғирлик кучи, одам мускулларининг кучи, Қуёш билан сайёралар орасидаги ўзаро тортишиш кучи, электровознинг тортиш кучи, цилиндр ичидаги буғ ёки газнинг, шамолнинг босим кучи, атмосфера босими ва бир-бирига ишқаланувчи сиртларнинг ишқаланишга кўрсатадиган қаршилик кучи мисол бўлади. Кучга ҳаммага маълум бўлган оғирлик кучи энг оддий мисол бўла олади. Куч вектор бўлиб, унинг жисмга кўрсатадиган таъсири жисмга қўйилган нуқтаси, йўналиши ва катталиги (модули) билан белгиланади. Жисмга қўйилган кучнинг модули бирлик деб қабул қилинган куч билан таққослаш орқали аниқланади. СИ системасида кучнинг асосий бирлиги 1 ньютон (1 Н). Кучлар динамометр билан ўлчанади. Кучнинг йўналиши ва қўйилиш нуқтаси жисмлар ўзаро таъсирининг характерига ва уларнинг бир-бирига нисбатан тутган вазиятига боғлиқ. Масалан, бирор жисмга таъсир этаётган оғирлик кучи вертикал тарзда пастга қараб йўналган. Бир-бирига сиқиб қўйилган иккита силлиқ шарнинг босим кучлари шарларнинг уриниш нуқтасида уларнинг сиртларига ўтказилган нормал бўйлаб йўналган. Жисмга таъсир этаётган кучнинг қўйилиш нуқтаси деб жисмнинг шу куч таъсири тўпланган нуқтасига айтилади. Ҳақиқатда кучни бир нуқтага қўйиб бўлмайди. Ҳар бир куч одатда бирор юза ёки ҳажм бўйлаб тақсимланган бўлади. Масалан, ипга осиб қўйилган шарчанинг унга кўрсатадиган оғирлик кучи ҳақиқатда ипнинг бирор кўндаланг кесими бўйлаб тарқалган бўлади. Шарчага Ер томонидан таъсир этадиган оғирлик кучи эса шарчанинг бутун ҳажми бўйлаб тақсимланган. Лекин оддийлик учун бундай ёйилган кучларга бир нуқтага қўйилган кучлар деб қараш керак. Фақат шуни эсда сақлаш керакки, бундай соддалаштириш натижасида жисмнинг мувозанат шартлари бузилмаслиги керак.

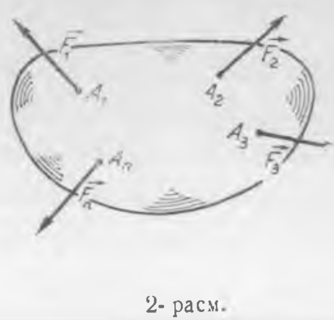
График равишда куч ҳар қандай вектор каби стрелкали кесма билан тасвирланади (1-расм). Бу AB кесманинг узунлиги танлаб олинган масштабда кучнинг модулини (катталигини) ифодалайди, кесманинг йўналиши эса кучнинг йўналишини кўрсатади. Кесманинг A боши куч қўйилган нуқтани билдиради. Баъзи ҳолларда эса стрелканинг учи куч қўйилган нуқтани билдиради (5-расм, *в* га қаранг). Кучнинг йўналишини кўрсатиб турган CD тўғри чизиқ *кучнинг таъсир чизиғи* деб аталади. Куч йўғон ҳарф ёки устига чизиқча қўйилган қўш ҳарф билан белгиланади, масалан, 1-расмдаги куч F ёки $\overrightarrow{AB}$ билан белгиланган. Кучнинг модули $|F|$ символ билан ёки оч ҳарф билан белгиланади. Доскага ёки дафтарга формула ёзишда векторлар оч ҳарфлар билан тасвирланиб, булар устига чизиқча қўйилади.

Жисмнинг ҳар хил нуқталарига қўйилган кучлар тўплами *кучлар системаси* деб аталади. Системанинг кучлари тайинли бир жисмга бошқа жисмлар томонидан бериладиган таъсирларни ифодалайди. Аниқ бир жисмга қўйилган кучлар системаси $(F_1, F_2, \ldots F_n)$ кўринишда белгиланади (2-расм). Кучлар системасининг турлари ҳар хил бўлади: масалан, кесишувчи кучлар системаси, бунинг ўзи ҳам икки хил бўлади— текисликда жойлашган кесишувчи кучлар, фазода жойлашган кесишувчи кучлар; параллел кучлар системаси, бу ҳам икки хил бўлади — текисликда жойлашган параллел кучлар, фазода жойлашган параллел кучлар; фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси ва текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси, ниҳоят, жуфт кучлар системаси. Бу системалар билан бирма-бир танишиб борамиз.

Агар жисм фазода исталган йўналишда ҳаракат қила олса, бундай жисм *эркин жисм* деб аталади. Агар эркин жисмга таъсир этаётган кучлар системаси ўрнига бошқа кучлар системаси қўйилганда бу жисмнинг тинчлик ёки ҳаракат ҳолати ўзгарма-



1-расм.



2-расм.

са, бундай кучлар системалари бир-бирига *эквивалент системалар* дейилади. Куч системаларининг эквивалент эканлиги

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

символ билан ифодаланади.

Агар кучлар системаси тинч турган жисмга таъсир этганда унинг тинчлик ҳолати ўзгармаса, бундай кучлар системаси мувозанатланган система ёки *нолга эквивалент система* деб аталади ва

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow 0.$$

шаклида ифодаланади. Нолга эквивалент система ҳаракат қилаётган жисмга қўйилганда ҳам жисмнинг ҳаракати характерини ўзгартирмайди.

Бирор куч системасига эквивалент бўлган битта куч бу системанинг *тенг таъсир этувчиси* дейилади ва

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow R,$$

шаклида ифодаланади. Демак, жисмга қўйилган кучлар системасининг ўрнини якка ўзи боса оладиган битта куч шу кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси экан. Бироқ шуни билиб қўйиш керакки, кучларнинг ҳар қандай системаси ҳам тенг таъсир этувчига эга бўлавермайди. Масалан, жисмга икки учрашмас тўғри чизиқ бўйлаб таъсир этадиган икки кучдан иборат системанинг тенг таъсир этувчиси йўқ.

$(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ кучлар системасининг мувозанатловчиси шундай кучки, бу кучни ўша системага қўшганда нолга эквивалент бўлган янги система ҳосил бўлади. Мувозанатловчи куч Q билан белгиланса,

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n, Q) \Longleftrightarrow 0$$

тарзида ёзилади. Тенг таъсир этувчига эга бўлган системанинггина мувозанатловчиси бўлади; мувознатловчи куч тенг таъсир этувчи кучнинг векторига қарама-қарши йўналган вектор билан тасвирланади, яъни $Q = -R$.

Абсолют қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучларни ички ва ташқи кучлар деб икки гуруҳга ажратиш мумкин. Тайинли бир жисмнинг зарраларига бошқа моддий жисмлар томонидан таъсир этадиган кучлар *ташқи кучлар* деб, ўша жисм заррачаларининг бир-бирига кўрсатадиган таъсир кучлари *ички кучлар* деб аталади.

Жисмнинг битта нуқтасига таъсир этадиган куч *якка куч* деб аталади. Жисмнинг маълум бир хажмидаги ёки сиртининг маълум бир қисмидаги ҳамма нуқталарга таъсир этувчи кучлар *ёйилган кучлар* деб аталади.

Назарий механикада ишлатиладиган кўп миқдорлар векторлар билан тасвирлангани туфайли векторларга тегишли бази маълумотлар қуйида баён этилади.

2- §. Векторлар

Векторлар билан тасвирланадиган физик миқдорларнинг хоссаларига қараб улар уч хил бўлади: 1) эркин вектор, 2) сирпанувчи вектор, 3) қўзғалмас вектор.

Эркин вектор ўзининг бошланғич физик маъносини сақлаган ҳолда фазонинг ихтиёрий нуқтасида бир хил бўлган физик миқдорни тасвирлайди. Бу ҳолда бир-бирига тенг бўлган икки вектор айни бир физик миқдорни тасвирлай олади. Масалан, илгарилама ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги эркин вектор ҳисобланади, чунки бу тезлик жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хил бўлади. Жуфт моментининг вектори ҳам эркин вектор эканлиги 28- § да батафсил баён этилади. Эркин вектор уч сон билан (ўзининг проекциялари билан) аниқланади.

Сирпанувчи вектор ўзининг бошланғич физик маъносини йўқотмаган ҳолда ўзи йўналган тўғри чизиқдаги ҳар қандай нуқтада бир хил бўлган физик миқдорни тасвирлайди. Бу ҳолда бир-бирига тенг бўлган ва айни бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналган векторларгина айни бир физик миқдорни тасвирлай олади; векторнинг ўзи ётган тўғри чизиқ *векторнинг таъсир чизиғи* деб аталади. Абсолют қаттиқ жисмга қўйилган куч ёки жисмнинг бурчак тезлиги сирпанувчи векторга мисол бўлади. Сирпанувчи вектор беш сон (ўзининг учта проекцияси ва ўзи йўналган тўғри чизиқ билан текислик кесишган нуқтанинг икки координатаси) билан аниқланади.

Қўзғалмас вектор фазонинг аниқ бир нуқтасига қўйилган деб олинганда маънога эга бўлиб, фазонинг ҳар қандай бошқа нуқтасига қўйилган деб олинганда эса ўзининг бошланғич физик маъносини йўқотадиган миқдорни тасвирлайди. Масалан, ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезлиги нуқтанинг ўзига боғланган қўзғалмас вектордир. Қўзғалмас вектор олти сон (векторнинг уч проекцияси ва қўйилиш нуқтасининг уч координатаси) билан аниқланади. Қўшиш, кўпайтириш ва дифференциаллаш амаллари бажарилган вақтда сирпанувчи ва қўзғалмас векторлар *эркин векторлар* деб ҳисобланади.

3- §. Статика аксиомалари

Статиканинг ҳамма теорема ва тенгламалари аксиомалар деб аталадиган бир неча қоидага асосланиб чиқарилади. Статика аксиомалари жисмларнинг мувозанати ва ҳаракати устида ўтказилган кўпдан-кўп кузатиш ва тажрибаларни умумлаштириш натижаси бўлиб, исботсиз қабул қилинади. Бу аксиомалар инсоният практикасида кўп марта тасдиқланган.

Биринчи аксиома. Эркин жисмга қўйилган икки куч модул жиҳатидан бир-бирига тенг бўлиб, умумий таъсир чизиғи бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган ҳолда ва фақат шу ҳолда жисм мувозанатда бўлади. Бундай икки куч ўзаро мувозанатлашади. 3- расмда $F_2 = F_1$, $F_2 = -F_1$ ва $(F_1, F_2) \Longleftrightarrow 0$.

Иккинчи аксиома. Жисмга қўйилган кучлар системасига мувозанатлашган кучлар қўшилса ёки ундан олиб ташланса, системанинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди. Бу аксиоманинг маъноси қуйидагича. Жисмга кучларнинг маълум бир (F_1, F_2, . . . , F_n) системаси таъсир қилаётган бўлсин Агар жисмга мувозанатлашган яна иккита F ва F' куч қўйсак, бунда пайдо бўлган $n+2$ та кучдан иборат (F_1, F_2, . . . , F_n, F, F') система (F_1, F_2, . . . , F_n) га эквивалент бўлади, яъни

$$(F_1, F_2, \ldots, F_n, F, F') \Longleftrightarrow (F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

Худди шунга ўхшаш, агар берилган (F_1, F_2, . . . , F_n) кучлар системасида мувозанатлашган F_1 ва F_2 кучлар бўлса, бу икки куч олиб ташлангандан сўнг қолган система аввалги (берилган) системага эквивалент бўлади: $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow (F_3, F_4, \ldots, F_n)$.

Демак, бир-биридан мувозанатлашган кучлар системасига фарқ қиладиган икки система бир-бирига эквивалентдир.

Энди биринчи ва иккинчи аксиомадан келиб чиқадиган натижалар билан танишилади.

1-натижа. Кучнинг қўйилиш нуқтасини унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш мумкин, бунда кучнинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

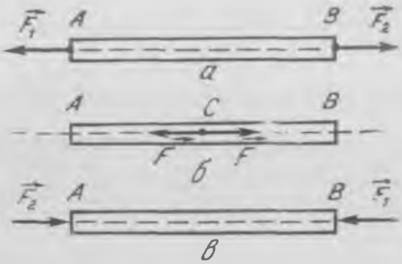
Исботи. Абсолют қаттиқ жисмнинг A нуқтасига F куч қўйилган бўлсин. Мувозанатлашган F_1 ва F_2 кучлар олинади, булар F кучнинг таъсир чизиғи бўйлаб йўналган бўлиб, модули F нинг модулига тенг. Бу иккала куч F кучнинг таъсир чизиғида ётган B нуқтага қўйилади (4-расм). У ҳолда

$$F \Longleftrightarrow \{F, (F_1, F_2)\} \text{ ва } F_2 = -F = -F_1.$$

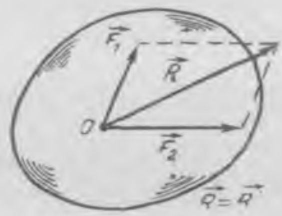
Бироқ биринчи аксиомага биноан, F ва F_2 кучлар мувозанатлашган система ҳисобланади, яъни $(F, F_2) \Longleftrightarrow 0$, иккинчи аксиомага асосан эса буларни чиқариб ташлаш мумкин. Қолган F_1 куч F кучга тенг, лекин у B нуқтага қўйилган. Кучнинг бу хоссаси кўпинча бундай таърифланади. Қаттиқ жисмга қўйилган куч сирпанувчи вектордир. Бу хулоса фақат абсолют қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучлар учунгина ўринли. Инженерлик ҳисобларида бирор конструкциянинг мувозанат шартлари аниқланиб, конструкциянинг айрим қисмларида пайдо бўладиган ички зўриқишлар изланмайдиган ҳоллардагина бу хулосадан фойдаланиш мумкин. Бу ҳол мисолда тушунти-

3- расм.

4- расм.



5- расм.



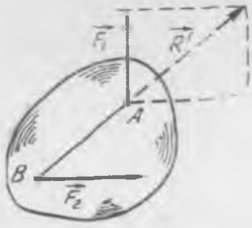
6- расм.

рилади. $F_1 = F_2$ бўлганда 5- расмда кўрсатилган AB стержень мувозанатда туради. Иккала кучнинг қўйилиш нуқтаси стерженнинг бирор C нуқтасига кўчирилганда (5- расм, *б*) ёки $\boldsymbol{F}_1$ кучнинг қўйилиш нуқтаси A нуқтага, $\boldsymbol{F}_2$ кучнинг қўйилиш нуқтаси B нуқтага кўчирилганда (5- расм, *а*) мувозанат бузилмайди. Бироқ бу ҳолларнинг ҳар барида ички зўриқиш кучлари ҳар хил бўлади. Биринчи ҳолда стержень қўйилган кучлар таъсирида чўзилади, иккинчи ҳолда стержень зўриқмайди (яъни ички зўриқиш кучлари пайдо бўлмайди), учинчи ҳолда стержень сиқилади.

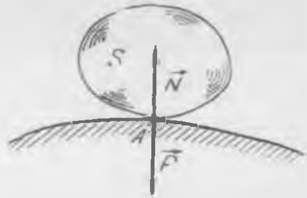
2- натижа. Тенг таъсир этувчиси бор кучлар системасигина мувозанатловчи кучга эга бўлади. Унда мувозанатловчи куч тенг таъсир этувчига модул жиҳатидан тенг бўлиб, умумий таъсир чизиғи бўйлаб унга қарама-қарши йўналади.

Учинчи аксиома. Қаттиқ жисмнинг бир нуқтасига қўйилган икки куч ҳамиша тенг таъсир этувчига эга бўлади. Бу тенг таъсир этувчи куч берилган икки кучнинг геометрик йиғиндисига тенг, яъни $R = R' = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$; тенг таъсир этувчи кучнинг таъсир чизиғи бу кучлар қўйилган нуқтадан ўтади (6- расм), бу ерда R' — геометрик йиғинди. Бу аксиомадан унга тескари даъво ҳам келиб чиқади: кучни унинг таъсир чизиғида жойлашган ихтиёрий нуқтага қўйилган икки кучга истаганча кўп усул билан ажратиш мумкин. Кучни иккига ажратганда ҳосил бўлган ташкил этувчи кучлар ажралаётган кучнинг таъсир этиш чизиғидан ўтадиган ихтиёрий битта текисликда ётади. Бундан буён кучларнинг геометрик йиғиндиси билан тенг таъсир этувчисини бир-биридан фарқ қилиш керак. Бу мисолда тушунтириб ўтилади. Жисмга A ва B нуқталарда қўйилган $\boldsymbol{F}_1$ ва $\boldsymbol{F}_2$ кучларни (7- расм) кўриб чиқамиз. Бу икки куч ўзаро перпендикуляр бўлиб, учрашмас тўғри чизиқлар бўйлаб йўналган. 7- расмда кўрсатилган R' куч $\boldsymbol{F}_1$ ва $\boldsymbol{F}_2$ кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг. Бироқ R' куч бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўла олмайди, чунки R' кучнинг бир ўзи $\boldsymbol{F}_1$ ва $\boldsymbol{F}_2$ кучларнинг жисмга кўрсатадиган таъсирининг ўрнини боса олмайди. Бунинг устига, бу икки куч умуман тенг таъсир этувчига эга эмас (40- §, 5- бандга қаранг).

Тўртинчи аксиома. Ҳар қандай таъсирга жавобан унга тенг



7- расм.



8- расм.

ва қарама-қарши йўналган акс таъсир юзага келади. Бу аксиома икки жисмнинг ўзаро таъсир кучлари модул жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналганлигини билдиради.

S жисм *A* нуқтада бошқа бир жисмга ***P*** куч билан босяпти, деб фараз қилайлик (8- расм). Ўз навбатида пастдаги жисм ҳам *A* нуқтада *S* жисмга *N* куч билан таъсир кўрсатади. Бу кучларнинг сон қиймати тенг, йўналишлари қарама-қарши, бироқ улар бошқа-бошқа жисмларга қўйилган. Битта геометрик *A* нуқтада икки моддий нуқта устма-уст тушгандек бўлиб туюлади: аслида эса бу нуқталардан бири жисмлардан бирига, иккинчиси бошқасига тегишли. Шунинг учун таъсир кучи билан акс таъсир кучи нолга эквивалент бўлган система бўла олмайди. Бу кучларга статиканинг биринчи аксиомасини қўллаб бўлмайди, чунки улар бошқа-бошқа жисмларга қўйилган.

Бешинчи аксиома. Қаттиқ бўлмаган (деформацияланадиган) жисм кучлар таъсирида мувозанатда бўлса, қотгандан кейин ҳам мувозанатда қолаверади.

Бу аксиома абсолют қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг мувозанат шартлари деформацияланадиган жисмлар учун ҳам бажарилишини кўрсатади. Бироқ кучлар деформацияланадиган жисмга қўйилган ҳолда бу шартлар зарурий бўлиб, аммо етарли эмас. Масалан, 5- расмда кўрсатилган қаттиқ стерженнинг учларига қўйилган икки куч мувозанатда бўлиши учун бу кучлар модул жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналиши керак. Агар *AB* стержень ўрнида *AB* ип олинса, ипга қўйилган бу икки куч ҳам ўша мувозанат шартини қаноатлантиради, яъни кучлар модул жиҳатидан тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган ва бундай бўлиши учун яна бир қўшимча шарт бажарилиши керак: кучлар ипни сиқадиган эмас, балки чўзадиган бўлиши керак.

4- §. Боғланишлар ва боғланиш реакциялари

Бошқа жисмлар билан бирикмаган ва фазода ҳар қандай йўналиш бўйлаб ўз вазиятидан четга чиқа оладиган жисм *эркин жисм* дейилади. Ўзига боғланган ёки ўзига тегиб турган бошқа жисмлар фазода қиладиган ҳаракатини чеклайдиган жисм *эркин бўлмаган жисм* дейилади. Эркин бўлмаган жисмларга стол устида ётган юк, ошиқ-мошиққа ўрнатилган эшик ва шу кабилар мисол бўлади. Жисмга қўйилган кучлар ҳар қандай булганда ҳам жисмнинг кўчишини чеклаб турадиган бошқа жисмлар механикада *боғланишлар* дейилади. Жисмга қўйилган боғланишлар жисмни унинг ўзига қўйилган кучлар таъсири остида қилиши мумкин бўлган ҳаракатидан четлаштиради. Боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсир кучи *боғланиш реакцияси* (тўлароқ қилиб айтганда, реакция кучи) дейилади. Жисмга таъсир этувчи ҳамма кучларни икки гуруҳга: актив кучлар (булар оғирлик кучи, сиқилган ёки чўзилган пружинанинг эластиклик кучи ва ҳоказо) ва боғланишлар реакция кучларига ажратиш мумкин. Боғланишлар реакция кучларидан бошқа ҳамма кучларни актив кучлар деб ҳисоблаш керак. Актив куч, масалан, оғирлик кучи эркин жисмни ҳаракатга келтира олади. Ҳар бир актив кучнинг модули ва йўналиши олдиндан маълум бўлади. Актив кучлар жисмга қўйилган бошқа кучларга, бу жисмнинг ҳаракатига ва унга қўйилган боғланишларнинг қандай эканига бевосита боғлиқ бўлмайди. Боғланишлар реакциялари эса жисмга қўйилган актив кучларнинг таъсирига, бу жисмнинг ҳаракатига ва унга қўйилган боғланишларнинг қандай эканига боғлиқ.

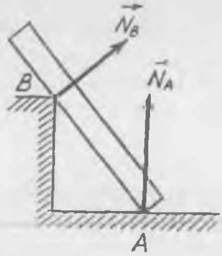
Боғланишдаги жисм актив кучлар таъсири остида бу боғланишларга босим кўрсатган вақтдагина реакция кучлари пайдо булади. Жисм боғланишлардан бўшатилган ҳамона боғланишлар реакциялари жисмга таъсир қилмай қўяди.

Боғланиш жисмни қайси томонга кўчишга йўл қўймаса, реакция кучи ўша томонга қарама-қарши йўналади. Статикадан масала ечишда боғланиш реакциясининг йўналишини тўғри топиш катта аҳамиятга эга. Шу сабабли боғланишлар асосий турларининг реакция кучлари қандай йўналганлигини батафсил куриб чиқамиз.

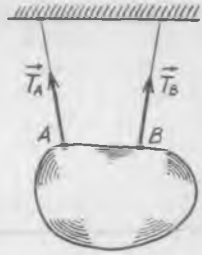
1. **Қўзғалмас силлиқ текислик (сирт) ёки таянч.** Ишқаланиш эътиборга олинмайдиган даражада силлиқ бўлган сирт одатда силлиқ сирт ҳисобланади. Жисм қўзғалмас силлиқ сиртга A нуқтада таяниб турган бўлсин (9-расм); у ҳолда таянч сиртининг реакцияси жисмга A нуқтада қўйилган бўлиб, у таянч сиртига шу нуқтада ўтказилган ташқи нормал бўйлаб йўналади, чунки бу сирт жисмнинг фақат ўша нормал бўйлаб кўчишига йўл қўймайди. Бу реакция кучи *нормал реакция* деб аталади ва одатда у N ҳарфи билан белгиланади. Бир-бирига тегиб турувчи сиртлардан бири нуқта булганда (10-расм) реакция кучи иккинчи сиртга ўтказилган нормал бўйлаб йўналади.

2. **Эгилувчан ип.** Бу боғланиш реакцияси жисмга унинг ипга боғланган нуқтасида қўйилган бўлиб, ип буйлаб йўналади (11-расм). Шунинг учун таранглаНган ипнинг T_A ёки T_B реакцияси ип бўйлаб осилиш нуқтасига қараб йўналади.

9- расм.



10- расм.

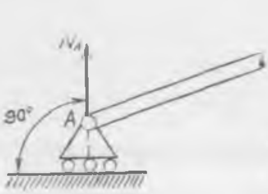


11- расм.

3. **Қўзғалувчи шарнир**. Бу боғланиш (12- расм) балканинг таянч юзасига перпендикуляр йўналишда пастга кўчишига йўл қўймайди, катокларнинг таянч юзасига ишқаланиши эътиборга олинмаса, қўзғалувчи шарнирнинг N_A реакцияси таянч юзасига перпендикуляр бўлиб, шарнирнинг марказидан ўтади.

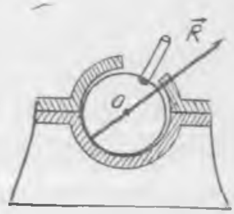
4. **Қўзғалмас цилиндрик шарнир**. Цилиндрик шарнир — бирор заминга қўзғалмайдиган қилиб ўрнатилган болтга кийдирилган втулка (13- расм); эшикнинг ошиқ-мошиғи бунга энг яхши мисол бўла олади. Цилиндрик шарнир жисмларни бир-бирига бириктириб, уларнинг бир-бирига нисбатан айланишига имкон берадиган қурилмадир. Болтнинг сирти билан втулканинг ички юзаси орасида ишқаланиш йўқ деб ҳисобланса, бу шарнир идеал қўзғалмас цилиндрик шарнир ҳисобланади. Актив кучлар ҳар қандай бўлганда ҳам қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакция кучи шарнирнинг ўқига (бу ўқ расм текислигига тик) перпендикуляр бўлган текисликда ётиб, уша ўқдан ўтади, лекин унинг йўналиши олдиндан маълум бўлмайди. Подпятник деб аталадиган боғланиш цилиндрик шарнирнинг худди ўзи бўлиб, жисмнинг цилиндр ўқи бўйлаб фақат бир томонга ҳаракатланишига имкон бериб, бунга тескари йўналишда ҳаракатланишига йўл қўймайди. Шунинг учун подпятник реакциясининг йўналиши ҳам олдиндан маълум эмас.

5. **Сферик шарнир**. Сферик шарнир дегани бир-бирига бир нуқтасидан бириктирилган жисмларнинг фазода бир-бирига нисбатан ҳаракатланишига имкон берадиган қурилмадир. Сфе-



12- расм.

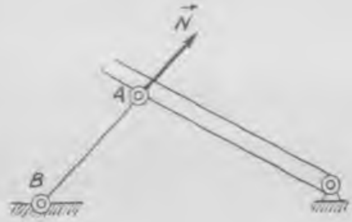
13- расм.



14- расм.

рик шарнир бир жисмдаги сферик чуқурча билан иккинчи жисмдаги худди ўшандай диаметрли сферик чиқиқдан иборат (14- расм).

Бундай шарнирда ҳам уринувчи сиртлар орасида ишқаланиш йўқ деб ҳисобланади. Телевизорнинг уйга қўйиладиган антеннасида икки стерженнинг асосга қўшиладиган жойидаги шарчалар бунга яхши мисол бўла олади. Сферик шарнирда актив кучлар ўзгарганда таянч реакцияси ўзгариб бир текисликда қолавермай, балки фазода ҳар қандай йўналиш олиши мумкин. Бунда жисм шарнирнинг O марказида қимирламай ҳаракат қилади, шунга қараб сферик шарнирнинг реакцияси қўзғалмас O нуқтадан ўтадиган ҳар қандай тўғри чизиқ бўйлаб йўналади. Демак, сферик шарнир реакциясининг йўналиши, худди цилиндрик шарнирникига ухшаб, олдиндан маълум эмас.



15- расм.

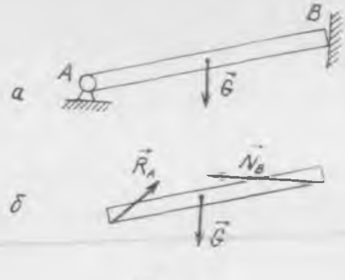
6. Стержень. Боғланиш ўрнида ишлатилган ингичка тўғри қаттиқ стерженнинг (15- расм) учларида идеал шарнирлар бўлиб, кучлар ҳам стерженнинг фақат учларига қўйилса, N реакция кучи стержень бўйлаб йўналади. Буни мисолда кўриб чиқамиз. Стерженнинг оғирлиги унга тушаётган кучларга нисбатан эътиборга олинмайди. Унда AB стерженга A ва B шарнирларга қўйилган фақат икки куч таъсир қилади. Умуман айтганда, бу икки куч ихтиёрий йўналган бўлиши мумкин. Модомики, AB стержень мувозанатда турар экан, A ва B нуқталарга қўйилган икки куч 1- аксиомага асосан, бир тўғри чизиқ бўйлаб, яъни стерженнинг ўқи бўйлаб (15- расм) йўналиши керак. Демак, бу стержень фақат сиқилади ёки чўзилади, шунинг учун унинг N реакцияси стерженнинг ўқи бўйлаб йўналади.

Боғланишнинг бу тури фермаларда таянч стержени сифатида кўп учрайди.

Боғланишларнинг бошқа турлари ҳам бор. Бу ҳақда кейин тўхталиб ўтамиз (37- §, 38- §).

5- §. Боғланишлар аксиомаси

Эркин бўлмаган жисмларнинг мувозанати статикада шу аксиома асосида ўрганилади. Агар эркин бўлмаган жисм боғланишлардан бўшатилиб, боғланишлар таъсири улар реакцияси билан алмаштирилса, уни эркин жисм деб ҳисоблаш мумкин. Бу қоида боғланишлар аксиомаси ёки боғланишдан бўшаш принципи деб аталади. Масалан, оғирлиги G бўлган AB тўсиннинг бир учи қўзғалмас цилиндрик A шарнирга бириктирилиб, иккинчи учи силлиқ вертикал деворга тираб қўйилган (16- расм, a). Бу тўсинни берилган G куч ва боғла-



нишларнинг R_A ва N_B реакция кучлари таъсирида мувозанатда турган эркин жисм (16- расм, *б*) деб ҳисоблаш мумкин.

Боғланиш реакцияси ҳисоблаб топилганда тўртинчи аксиомага асосан, боғланишга кўрсатиладиган босим кучини, яъни иншоот бирор қисмининг мустаҳкамлигини ҳисоблаш учун зарур маълумотга эга бўламиз.

2-боб. КЕСИШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

6-§. Тенг таъсир этувчини аниқлашнинг геометрик усули

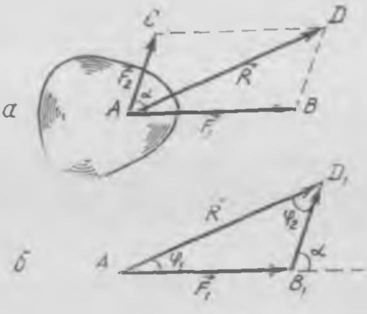
Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучлар *кесишувчи кучлар системаси* дейилади. Бу системанинг фазода ва бир текисликда жойлашган хили бўлади. Кучларнинг бундай системасида статиканинг биринчи масаласи ечилади, яъни кучлар системаси содда ҳолга келтирилади. Кучнинг қўйилиш нуқтасини унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани учун (1- ва 2- аксиомадан келиб чиқадиган 1- натижага асосан) кесишувчи кучларни бир нуқтага, яъни кучларнинг таъсир чизиқлари кесишадиган нуқтага қўйилган кучлар системасига алмаштириш мумкин.

Икки ёки бир неча кучни қўшиш деганда бу кучларни уларга эквивалент бўлган битта куч билан алмаштириш, бошқача айтганда, бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш тушунилади.

Ишни аввало икки кучни қўшишдан бошлаймиз. Қаттиқ жисмнинг бир нуқтасига қўйилган икки кучни қўшиш масаласи статиканинг учинчи аксиомасига асосланиб ҳал қилинади. Бир-бири билан бирор бурчак ҳосил қилиб йўналган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси мана шу кучлардан тузилган параллелограммнинг диагоналига модул жиҳатдан тенг бўлиб, ўша диагональ бўйлаб йўналади. Тенг таъсир этувчи куч ҳам қўшилувчи кучлар қўйилган нуқтага қўйилади. Бироқ векторлар ҳисобидан маълум бўлишича, икки кучни учбурчак қоидасига асосланиб қўшиш ҳам мумкин. Бунинг учун қўшилувчи кучлардан бирининг охирига иккинчи кучнинг боши қўйилади; биринчи кучнинг бошини иккинчи кучнинг охири билан туташтирувчи куч бу икки кучнинг тенг таъсир этувчиси бўлади.

Жисмнинг A нуқтасига қўйилган F_1 ва F_2 кучлар орасидаги бурчак α билан белгиланади.

Берилган F_1 ва F_2 кучларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш учун улардан параллелограмм ясалади (17-расм, *а*) ёки кучлар учбурчак қоидасига биноан қўшилади. Бунинг учун ихтиёрий A_1 нуқтага F_1 кучни қўйиб (17-расм, *б*), унинг охирига F_2 кучнинг боши қўйилади. F_1 кучнинг бошини F_2 кучнинг охири билан туташтириб турган куч тенг таъсир этувчи бўлади, у R билан белгиланади Бу учбурчак *куч учбурчаги* деб аталади. R куч билан бу кучлар орасида ҳосил бўлган бурчаклар мос равишда φ_1 ва φ_2 билан белгиланади.



17-расм.

Тенг таъсир этувчининг модули $A_1B_1D_1$ учбурчакнинг A_1D_1 томони сифатида косинуслар теоремасидан аниқланади:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1F_2\cos\,(180° - \alpha) \text{ ёки}$$
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2\cos\alpha,$$

бундан

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2\cos\alpha}, \qquad (1)$$

бу формулада учинчи ҳад олдида + ишора туришига $\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ тенглик таъсир қилган. Тенг таъсир этувчининг йўналишини, яъни у билан F_1 ва F_2 кучлар орасида ҳосил бўлган φ_1 ва φ_2 бурчакларни топиш учун ўша учбурчакка синуслар теоремаси татбиқ этилади, яъни F_1 томоннинг ўша томон қаршисидаги φ_2 бурчак синусига нисбати, F_2 томоннинг ўша томон қаршисидаги φ_1 бурчак синусига нисбати, шунингдек R томоннинг ўша томон қаршисидаги $180° - \alpha$ бурчак синусига нисбати бир-бирига тенг:

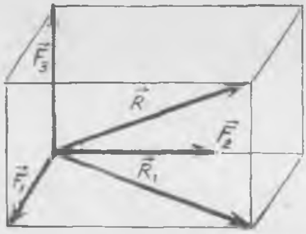
$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin\,(180° - \alpha)} \text{ ёки } \frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin\alpha};$$

бу ерда $\sin\,(180° - \alpha) = \sin\alpha$ формуласи ҳисобга олинди, юқоридаги икки тенгламадан φ_1 ва φ_2 бурчаклар аниқланади.

$$\sin\varphi_1 = \frac{F_2\sin\alpha}{R}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{F_1\sin\alpha}{R}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) формулалар ўзаро α бурчак ҳосил қилган $\boldsymbol{F_1}$ ва $\boldsymbol{F_2}$ кучлар тенг таъсир этувчисининг модули ҳамда йўналишини топишга имкон беради.

Жисмнинг бир нуқтасига қўйилган бўлиб, лекин бир текисликда ётмайдиган учта $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ кучни қўшиш билан танишиб чиқамиз (18-расм). Параллелограмм ёки учбурчак қоидасига асосан $\boldsymbol{F_1}$ куч билан $\boldsymbol{F_2}$ кучни қўшиб, уларнинг R_1 тенг таъсир этувчиси аниқланади. Сўнгра R_1 куч билан $\boldsymbol{F_3}$



18- расм.

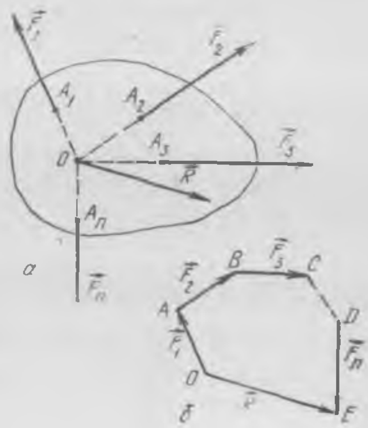
кучни яна ўша қоидага асосан қўшиб, берилган учта F_1, F_2, F_3 кучнинг тенг таъсир этувчиси аниқланади. 18- расмдан кўринишича, бир нуқтага қўйилган ва бир текисликда ётмайдиган учта кучнинг тенг таъсир этувчиси ўша учта кучдан ясалган параллелепипеднинг диагоналига модули ва йўналиши жиҳатидан тенг (пераллелепипед қоидаси).

Энди абсолют қаттиқ жисмга фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг (F_1, F_2, . . . , F_n) системаси қўйилган ҳол билан танишиб чиқамиз (19- расм, *а*).

Бу кучларга параллелограмм қоидаси ёки учбурчак қоидасини кетма-кет татбиқ этиб, уларнинг тенг таъсир этувчиси аниқланади. Учбурчак қоидаси қулайроқ. Бунинг учун танлаб олинган масштабда F_1 кучни твсирлайдиган $\overrightarrow{OA}$ вектор (19- расм, *б*) ихтиёрий O' нуқтага қўйилади. A нуқтага эса F_2 кучни тасвирлайдиган $\overrightarrow{AB}$ вектор қўйилади ва ҳоказо. Кучларни шу тариқа бирин-кетин қўйиб бориб, энг охирги F_n кучни тасвирлайдиган $\overrightarrow{DE}$ вектор D нуқтага қўйилади, шунда O' нуқта билан E нуқтани туташтирувчи $\overrightarrow{O'E}$ вектор кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини тасвирлайди. Демак, кесишувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси фазовий $O'ABCDE$ синиқ чизиқнинг бошланғич ва охирги нуқталарини туташтирувчи $\overrightarrow{O'E}$ вектор билан, бошқача қилиб айтганда, бу фазовий синиқ чизиқнинг ёпувчи томони билан тасвирланади. Тенг таъсир этувчининг модули ва йўналишини аниқлайдиган бу қоида *куч кўпбурчак қоидаси* деб, фазовий $O'ABCDE$ синиқ чизиқ *куч кўпбурчаги* деб аталади. Кучларни куч кўпбурчаги қоидаси билан қўшиш *геометрик қўшиш* деб аталади. Демак, кесишувчи кучлар системасининг R тенг таъсир этувчиси модул ва йўналиш жиҳатидан кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб,

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \qquad R = \sum_{\kappa=1}^{n} F_\kappa \tag{3}$$

шаклида ёзилади, бу ерда $\sum\limits_{\kappa=1}^{n}$ белги ундан ўнг томонда турган ва $\kappa = 1$ дан $\kappa = n$ гача бўлган барча натурал сонлар билан белгиланган кучларнинг йиғиндисини билдиради. Бундан буён осон бўлиши учун йиғинди олиш чегараларини кўрсатмасдан бу белги кўринишида ёзилади. Кучларнинг геометрик йиғиндиси *бош вектор* деб аталади. Шунга қараб кесишувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси бу кучларнинг бош векторига тенг ва кучларнинг кесишиш нуқтасига қўйилган деб ҳисоблаш мумкин (19-расм, *a*).



19-расм.

Бу хулосани текисликда жойлашган кесишувчи кучлар системасига мослаб айтганда тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи барча бу кучларнинг таъсир чизиқлари ётган текисликда ётишини эсда тутиш керак. Кучлар текисликда жойлашган ҳолда куч кўпбурчаги ўша текисликда ётади ва кучлар маълум бир масштабда олиб чизилади. Тенг таъсир этувчи бевосита чизмадан ўлчаб топилади. Бу усул *график усул* деб аталади.

Куч кўпбурчаги қоидасини айни бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналган барча кучларга татбиқ этиб, тенг таъсир этувчининг модули кучларнинг алгебраик йиғиндисининг модулига тенг экани аниқланади: бунда бир томонга йўналган кучлар *мусбат кучлар*, унга тескари томонга йўналган кучлар *манфий кучлар* деб аталади. Алгебраик йиғиндининг ишораси тенг таъсир этувчи кучнинг бу тўғри чизиқда қайси томонга қараб йўналганини кўрсатади. Модуллари тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши томонларга йўналган, яъни мувозанатланган икки кучнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг.

Кесишувчи кучларни қўшиш қоидасини татбиқ этишга бир-иккита мисол келтирамиз.

1-масала. Бири 3 Н, иккинчиси 4 Н бўлган икки кучнинг тенг таъсир этувчисининг сон қиймати 5 Н бўлса, бу кучлар орасидаги φ бурчак нимага тенг?

Ечиш. Кучларни белгилаб оламиз: $F_1 = 3\text{Н}$, $F_2 = 4\text{Н}$, тенг таъсир этувчи $R = 5\text{ Н}$. Тенг таъсир этувчининг модулини ифодалайдиган $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$ формулага маълум миқдорларни қўямиз: $5 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4\cos\varphi}$, бу тенгламадан $\cos\varphi$ ни топамиз, бунинг учун тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз: $25 = 9 + 16 + 24\cos\varphi$ ёки $\cos\varphi = 0$, бундан $\varphi = 90^\circ$ эканини топамиз.

2-масала. Икки куч орасидаги бурчак 135° бўлиб, тенг таъсир этувчи куч бу кучларнинг кичигига тенг. Шу кучларнинг нисбати аниқлансин.

Ечиш. $F_1 < F_2$ деб оламиз. $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}$ формулада R ўрнига F_1 ни қўямиз, $F_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2}$

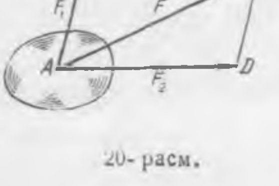
$\cos\varphi$ тенглама ҳосил бўлади, бунинг иккала томонини квадратга кўтариб, $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ эканини ҳисобга олсак, $F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ квадрат тенглама ҳосил бўлади, ундан номаълум кучларнинг изланаётган нисбати аниқланади. Тенгламанинг $F_2 = 0$ биринчи илдизи масала шартини қаноатлантирмайди. Иккинчи илдизи $F_2 = F_1\sqrt{2}$. Бундан $\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}$.

7-§. Кучни бир нуқтада кесишувчи тузувчиларга ажратиш

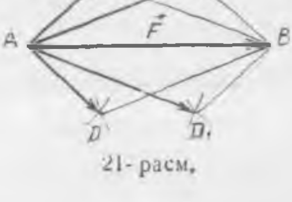
Олдинги параграфда кўриб ўтилган масалага тескари бўлган масала аниқ бир кучни икки ёки бир неча кесишувчи тузувчига ажратишдир. Кучни кесишувчи тузувчиларга ажратиш (баъзан компонентларга ажратиш) деганда бу кучга эквивалент бўлган икки ёки бир неча кесишувчи кучдан иборат системани топиш тушунилади. Бу масала ноаниқ бўлиб, чексиз кўп ечимга эга; у чинакам ягона ечимга эга бўлиши учун қўшимча шарт берилган бўлиши керак. Бу масаланинг ечилиш турлари кўп бўлса-да, лекин унинг уч турини кўриб чиқамиз:

1) берилган F кучни у билан бир текисликда ётадиган аниқ икки йўналиш бўйлаб йўналган тузувчиларга ажратиш. Бунинг учун F кучнинг охиридан берилган йўналишларга, яъни AB ва AD тўғри чизиқларга параллел чизиқлар ўтказамиз (20-расм). Бунда ҳосил бўлган параллелограммнинг томонларини тасвирловчи F_1 ва F_2 кучлар изланаётган тузувчилар бўлади, чунки $F_1 + F_2 = F$;

2) берилган F кучни у билан бир текисликда ётадиган ва сон қийматлари маълум бўлган икки тузувчига ажратиш. F кучнинг A боши ва B охирини марказ қилиб (21-расм), радиуслари F_1 ва F_2 нинг берилган қийматларига маълум масштабда тенг бўлган икки ёй ўтказилади. Бу ёйлар C ва D нуқталарда кесишади. ACB ва ADB учбурчакларни параллелограмм қилиб тўлдирамиз, буларда F куч диагонал бўлади. $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AE}$ ёки $\overrightarrow{AD}$ ва $\overrightarrow{AK}$ векторлар кучнинг изланаётган тузувчилари бўлади. Демак, айлана ёйларининг икки кесишиш



20-расм.



21-расм.

нуқталарига (C ва D га) мос равишда масала икки ечимга эга экан;

3) берилган F кучни бир текисликда ётмайдиган тайинли уч йўналиш бўйлаб (масалан, ўзаро перпендикуляр бўлган учта ўқ бўйлаб) йўналган кесишувчи тузувчиларга ажратиш. Бунинг учун диагонали берилган кучни тасвирлайдиган, қирралари эса тилга олинган йўналишларда ётган параллелепипед ясаш кифоя. Бунда параллелепипеднинг қирралари изланаётган тузувчилар масштабда тасвирланган бўлар эди. Пировардида шуни таъкидлаб ўтиш керакки, берилган кучни у билан бир текисликда ётмайдиган икки тузувчига ажратиб бўлмайди.

Берилган кучни тузувчиларга ажратишга ва статика масалаларини ечишда бу усулни қўллашга бир неча мисол келтирамиз.

3-масала. R кучни орасидаги бурчак 120° га тенг бўлган шундай P ва Q кучларга ажратиш керакки, уларнинг сон қийматлари йиғиндиси S га тенг бўлсин.

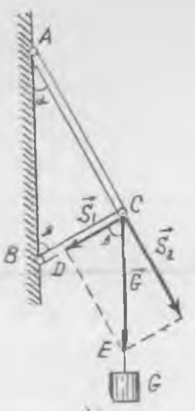
Ечиш. Бу масалада изланаётган P ва Q тузувчиларнинг йўналиши кўрсатилган ва улар орасидаги бурчак берилган. Бундан ташқари, компонентларнинг сон қийматлари истаганча бўлмай, балки улар ҳам маълум бир шартга бўйсунади. Масалани ишлашда $P+Q=R$ ва $P+Q=S$ шартлардан фойдаланилади. Берилган R куч тузувчиларнинг тенг таъсир этувчиси бўлгани учун унинг модулини (1) формулага асосан $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 120^\circ}$ кўринишда ёки, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0{,}5$ эканини ҳисобга олиб, $R=\sqrt{P^2+Q^2-PQ}$ кўринишда ёзамиз. Бу тенгламага $P+Q=S$ шартни қўшиб, иккала тенгламани ечамиз. Тенгламалар системасининг ечими

$$P=\frac{1}{6}\left(3S+\sqrt{12R^2-3S^2}\right),\quad Q=\frac{1}{6}\left(3S-\sqrt{12R^2-3S^2}\right).$$

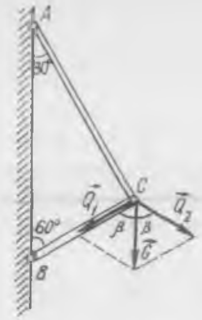
Бу ечим изланаётган тузувчиларнинг сон қийматлари бўлади. Бу масала иккинчи ҳолга тўғри келади.

4-масала AC ва BC стерженлар бир-бирига ва вертикал деворга идеал шарнирлар билан бириктирилган (22-расм). C шарнирга оғирлиги G бўлган юк осилган. Расмда кўрсатилган α ва β бурчаклар мос равишда 30° ва 60° га тенг. Стерженларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди. BC стерженни сиқувчи куч топилсин.

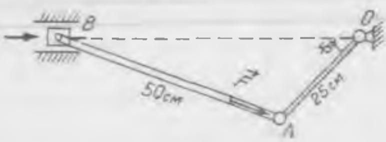
Ечиш. G куч иккала стерженга таъсир кўрсатади. Стерженларнинг оғирлиги ҳисобга олинмаган ва куч уларнинг фақат учига қўйилган бўлгани учун старженларнинг реакциялари стерженлар бўйлаб йўналади. Шу сабабли изланаётган кучни топиш учун юкнинг оғирлик марказига қўйилган G кучни 1-ва 2-аксиомадан келиб чиқадиган натижага кўра C нуқтага кўйиб, уни AC ва CB йўналишлар бўйлаб тузувчиларга ажратамиз. CB бўйлаб йўналган s_1 тузувчи изланаётган



22- расм.



23- расм.



24- расм.

куч бўлади. CDE учбурчакдан $s_1 = G\cos\beta = \cos 60^\circ = 0{,}5G$ эканини топамиз. Расмдан кўриниб турганидек, бу йўналишлар орасидаги бурчак 90° га тенг, чунки $\angle ACB = 90^\circ$.

Пировардида бундай масалаларни ечишда берилган кучни нима сабабдан албатта боғланиш реакциялари бўйлаб йўналтириш керак эканлиги кўрсатилади. Бунинг учун C нуқтага қўйилган G куч (23- расм) BC стержень бўйлаб ва у билан 120° бурчак ҳосил қиладиган йўналиш бўйлаб тузувчиларга ажратилади. 23- расмдаги параллелограммнинг ҳар бир ярмига синуслар теоремасини татбиқ этиб, Q_1 ва Q_2 тузувчилар аниқланади: $Q_1 = Q_2 = G$.

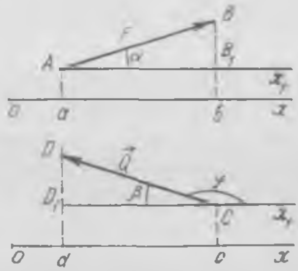
G куч тузувчиларга тўғри ажратилди, бироқ Q_1 куч BC стерженни сиқаётган кучни тўлиқ ифодаламайди, чунки Q_2 кучнинг таъсирини AC стержень ўзига тўлиқ олмайди. Шунинг учун Q_2 куч иккала стерженга таъсир қилиб, BC стерженга Q_1 кучдан ташқари қўшимча босим беради.

Мисолдан маълумки, агар куч боғланиш реакцияларининг йўналишидан бошқа йўналишлар бўйлаб ажратилса, масаланинг ечими хато бўлади.

7- §. га доир масалалар. Оғирлиги $G = 10$ кН бўлган жисм қия текислик устида ётибди. Қия текислик горизонт билан $\alpha = 30^\circ$ бурчак ҳосил қилган. Оғирлик кучини қия текислик бўйлаб йўналган ва унга тик йўналган икки тузувчига ажратинг. Жавоб: 5 кН; 8,66 кН.

24- расмда кўрсатилган вазиятда турган AB шатун кривошипнинг A нуқтадаги болтга $F = 200$ кН куч билан таъсир қилади. Бу кучни A нуқтада горизонтал ва вертикал йўналган икки тузувчига ажратинг. Жавоб: 187,2 кН; 70,8 кН.

Олдинги масалада тилга олинган $F = 200$ кН кучни механизмнинг ўша вазиятида кривошип бўйлаб йўналган ва унга тик йўналган икки тузувчига ажратинг. Жавоб: 82,4 кН; 182,4 кН.



25- расм.

8- §. Кучнинг ўқдаги проекцияси

Жисмга қўйилган F куч $\overrightarrow{AB}$ вектор билан тасвирланади (25- расм, *a*). ox ўқининг мусбат йўналиши x ҳарфи турган томонга қаратиб олинган. Ўқнинг учларига стрелка қўйилмайди. Куч билан ўқ бир текисликда ётади. F кучнинг A боши ва B охиридан x ўқига Aa ва Bb перпендикулярлар ўтказилади. Бунда ҳосил бўлган ab кесма F кучнинг x ўқдаги проекцияси деб аталади. Кучнинг ўқдаги проекцияси скаляр миқдор бўлиб, у кучнинг боши ва охирининг ўқдаги проекциялари орасида плюс ёки минус ишора билан олинган кесмага тенг. Кучнинг ўқдаги проекцияси куч белгиланган ўша ҳарф билан белгиланиб, пастки қисмига ўқнинг номини билдирадиган индекс қўйилади, масалан, F_x. Агар куч ўқнинг мусбат томонига қараб йўналган бўлса (25- расм, *a*), проекция мусбат бўлади: $F_x = ab$.

Энди жисмга D нуқтада таъсир этадиган Q кучнинг проекциясини кўриб чиқамиз (25- расм, *б*). Q кучнинг боши ва охиридан x ўққа Cc ва Dd перпендикулярлар ўтказилади. Бу ҳолда x ўқда ҳосил бўлган cd кесма Q кучнинг проекцияси бўлади, унинг ишораси манфий қилиб олинади; $Q_x = -cd$. Айни бир кучнинг бир хил йўналган параллел ўқлардаги проекцияси тенг бўлади. F ва Q кучларнинг проекцияси юстида айтилган гапларни формула шаклида ёзамиз:

$$F_x = ab = AB_1 = AB\cos\alpha \quad \text{ва} \quad Q_x = -cd = -CD_1 = -CD\cos\beta$$

буларда AB кесма F кучнинг модулини, CD кесма Q кучнинг модулини билдиради. Шунинг учун проекциялар бундай ёзилади:

$$F_x = F\cos\alpha \quad \text{ва} \quad Q_x = -Q\cos\beta = Q\cos\varphi. \qquad (4)$$

β бурчак φ бурчакни 180° га тўлдирувчи бурчак бўлгани учун охирги формулада $\cos\beta$ ўрнига унга тенг бўлган $-\cos\varphi$ қўйилди. Кучларнинг ўқдаги проекцияларининг ифодасига қараб, кучнинг ўқдаги проекцияси кучнинг модули билан куч ва ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг деган хулосага келинади. Куч ўққа тик йўналган бўлса, проекцияси нолга тенг, чунки $\cos 90° = 0$.

9- §. Кучнинг текисликдаги проекцияси

Қўлланиладиган координата системалари ўнг система (26- расм) дейилади. Бу системадаги z ўқи учидан қаралганда x

ўқини энг қисқа йўл билан y ўқи устига тушириш учун уни соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. Кучнинг текисликдаги проекцияси унинг ўқдаги проекциясидан фарқли ўлароқ, вектор бўлиб, текисликда маълум йўналишга эга. $\overrightarrow{AB}$ вектор билан тасвирланган F кучни текисликка, масалан, xOy текисликка проекциялаш учун кучнинг A боши ва B охиридан текисликка Aa ва Bb перпендикулярлар туширилади (26-расм). xOy текисликда ётган $\overrightarrow{ab}$ вектор кучнинг текисликдаги проекцияси бўлиб, у $F_{xy} = \overrightarrow{ab}$ шаклида ёзилади. Бу проекциянинг модули куч модули билан куч ва текислик орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг: $F_{xy} = F\cos\alpha$. Агар кучнинг ўқлардаги проекциясини ҳисоблаш керак бўлса, аввало бу куч текисликка проекцияланади, сўнгра текисликдаги проекция ўша текисликда ётган ўқларга проекцияланади. 26-расмда xOy текисликдаги проекция x ва y ўқларига проекцияланган: F_{xy} проекциянинг x ўқи билан ҳосил қилган бурчаги φ бўлгани учун F_x проекция F_{xy} билан $\cos\varphi$ нинг кўпайтмасига, худди шунга ўхшаш, F_y проекция, F_{xy} билан $\cos(90° - \varphi)$ нинг кўпайтмасига тенг:

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi,$$
$$F_y = F_{xy}\cos(90° - \varphi).$$

F_{xy} ўрнига унинг $F\cos\alpha$ қиймати қўйилади ва $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$ экани ҳисобга олинади:

$$F_x = F\cos\alpha\cos\varphi, \quad F_y = F\cos\alpha\sin\varphi. \tag{5}$$

10-§. Кучларни ифодалашнинг аналитик усули

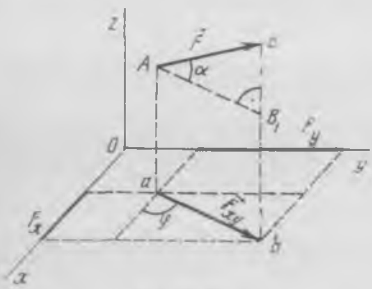
Кучнинг F модули ва координата ўқлари билан ҳосил қилган α, β, γ бурчаклари маълум бўлса, F куч векторини чизмада тасвирлаш мумкин. Куч қўйилган A нуқта, яъни унинг координаталари қўшимча равишда берилган бўлиши керак.

Статикада масала ечишда кучни проекциялари орқали ифодалаш қулай. Энди кучнинг тўғри бурчакли Декарт координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлганда F куч тасвири билан танишамиз. Бунинг учун 7-§ даги (4) формулалардан фойдаланилади:

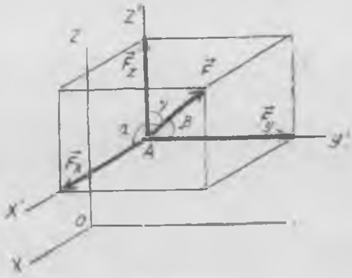
$$F_x = F\cos\alpha, \quad F_y = F\cos\beta, \quad F_z = F\cos\gamma.$$

Бу тенгликлар ҳадма-ҳад квадратга кўтарилиб, кейин қўшилади: $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$. Бу ерда қавс ичидаги йиғинди 1 га тенг. Натижада кучнинг F модули ва йўналтирувчи косинуслар аниқланади:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{F_x}{F},$$
$$\cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}. \tag{6}$$



26-расм.



27-расм.

Бу формулалар кучнинг координата ўқларидаги проекцияларига қараб кучнинг модули ва ўқлар билан ҳосил қилган бурчакларини аниқлашга, яъни кучни аниқлашга имкон беради. Формуладаги илдиз олдида ҳамиша плюс ишора олинади, чунки у формула кучнинг модулини ифодалайди. (6) формуладаги учта йўналтирувчи косинусдан иккитасигина мустақил, шунинг учун кучнинг координата ўқлари билан ҳосил қилинган учала бурчагига ихтиёрий қиймат бериш тўғри эмас.

Агар F куч координата ўқларига параллел бўлган учта x', y', z' ўқ бўйлаб тузувчиларга ажратилса, (27-расм), ҳосил бўлган F_x, F_y, F_z тузувчиларнинг сон қийматлари кучнинг ўша ўқлардаги проекцияларига тенг бўлади. Демак, кучнинг координата ўқларидаги проекциялари маълум бўлса, куч векторини параллелепипед қоидасидан фойдаланиб геометрик равишда ясаш мумкин. Бунинг учун куч қўйилган нуқтада кучнинг ўқлардаги проекцияларини томон деб олиб параллелепипед ясалади, параллелепипеднинг диагонали изланаётган кучни тасвирлайди.

11-§. Тенг таъсир этувчини топишнинг аналитик усули

Фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини аналитик усулда аниқлашда тенг таъсир этувчи бу кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг экани ва у 6-§ даги (3) формула билан ифодаланиши ҳисобга олинади. Куч векторлари орасидаги муносабатдан уларнинг проекциялари орасидаги муносабатга ўтишда геометрияда исбот этилган қуйидаги теоремадан фойдаланилади: векторлар йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг (F_1, F_2, . . . , F_n) системаси берилган бўлсин. Боши ихтиёрий O нуқтада бўлган $Oxyz$ координаталар системасидан фойдаланамиз. F_1 кучнинг x ўқидаги проекцияси F_{1x} билан, y ўқидаги проекцияси F_{1y} билан, z ўқидаги проекцияси F_{1z} билан белгиланади; F_2

кучнинг ўша ўқлардаги проекциялари ҳам индексида 2 рақами турган ўша ҳарфлар билан белгиланади ва ҳоказо. Энди ҳозиргина тилга олинган теоремани

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

муносабатга қўлланилганда:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}$$
$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}$$

тенгликлар ёзилади, бу ерда R_x, R_y, R_z лар тенг таъсир этувчининг координата ўқларидаги проекцияларини билдиради. Бу тенгликлар ихчамлаштирилиб қуйидагича ёзилади:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, \\ R_y &= \sum F_{ky}, \\ R_z &= \sum F_{kz}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тенг таъсир этувчининг R_x, R_y, R_z проекциялари маълум бўлгани учун 10-§ даги (6) формулага асосланиб, тенг таъсир этувчининг модули ва йўналиши (йўналтирувчи косинуслари) аниқланади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \ \cos\beta = \frac{R_y}{R}, \ \cos\gamma = \frac{R_z}{R}. \tag{8}$$

(8) формулалар фазода жойлашган кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини аналитик усулда аниқлаш масаласини тўлиқ ҳал қилади. Агар кесишувчи кучлар системаси фазода эмас, бир текисликда, масалан, xOy текисликда ётган бўлса, у ҳолда (8) формулалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \ \cos\beta = \frac{R_y}{R}. \tag{9}$$

Кучлар баъзан координата ўқларидаги проекциялар орқали ифодаланади. Лекин кўпинча кучлар модули ва координата ўқлари ҳосил қилган бурчаклар орқали берилади; бу ҳолда кучларни қўшишнинг аналитик усулини татбиқ этишда аввало бу кучларнинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳисоблаб чиқариш керак.

12-§. Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системасининг мувозанат шарти

Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системаси ҳамиша тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади, бундан $R = 0$ бўлган ҳолгина мустаснодир. $R = 0$ бўлган ҳол статикада алоҳида аҳамиятга эга бўлганлиги учун бу ҳақда батафсил тўхталиб ўтамиз.

Агар кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг, яъни уларнинг бутун системаси нолга эквивалент бўлса, бундай система *мувозанатлашган система* деб аталган эди. Демак, кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг ($R=0$) бўлса система мувозанатда туради. Равшанки, бунга тескари бўлган фикр хам тўғри: агар кесишувчи кучлар системаси мувозанатда турса, системанинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг ($R=0$). Лекин механика қонунларидан шу нарса ҳам маълумки, ўзаро мувозанатлашган ташқи кучлар таъсиридаги қаттиқ жисм тинч турадигина эмас, балки „инерцияси билан" ҳаракат қилади ҳам. Жисмнинг тўғри чизиқ бўйлаб қиладиган текис илгарилама ҳаракати инерция билан бўладиган ҳаракатга мисол бўлади. Бундан жуда муҳим икки хулоса чиқарса бўлади. Биринчидан, тинч турган жисмга қўйилган кучлар системаси ҳам, инерцияси билан ҳаракат қилаётган жисмларга қўйилган кучлар системаси ҳам мувозанат шартларига бўйсунади. Иккинчидан, эркин қаттиқ жисмга қўйилган кучларнинг мувозанатланганлиги жисм тинч (мувозанатда туришининг етарлилик шарти эмас, балки фақат зарурий шартидир; агар жисм ўзига мувозанатланган кучлар қўйилишидан олдин ҳам тинч турган бўлса, кучлар қўйилгандан сўнг ҳам тинч туради. Шунга кўра кучлар системаси мувозанатда дейилганда асосан ўша кучлар таъсиридаги жисмлар мувозанатда туришини тушунмоқ керак.

Қаттиқ жисмга қўйилган кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Мувозанат шартлари икки хил бўлади: геометрик шарт ва аналитик шарт.

13 §. Фазода жойлашган кесишувчи кучлар мувозанатининг геометрик шарти

Эркин қаттиқ жисмга фазода жойлашган кесишувчи кучлар (F_1, F_2, ..., F_n) системаси қўйилган бўлсин. Кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси бу кучлардан тузилган куч кўпбурчагининг ёпувчи томони билан тасвирланади (6-§ га қаранг). Шунинг учун кўпбурчакдаги охирги кучнинг охири биринчи кучнинг бошига келиб текканда ва фақат шу ҳолда тенг таъсир этувчи куч нолга тенг бўлади. Бу ҳолдаги кўпбурчак *ёпиқ куч кўпбурчаги* дейилади.

Демак, кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучлардан тузилган куч кўпбурчаги ёпиқ бўлиши зарур ва етарли. Бу қоида кесишувчи кучлар мувозанатининг геометрик шарти деган ном билан машҳурдир.

14-§. Фазода жойлашган кесишувчи кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

12-§ дан маълумки, фазода жойлашган кесишувчи кучлар састемаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир ($R=0$). Энди бу шарт аналитик равишда ифодаланади.

Фазода жойлашган кесишувчи кучлар системасининг тенг таъсир этувчисининг модули

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}.$$

формуласи билан ифодаланади [11-§, (8)] $R=0$ бўлса, $R=0$ бўлади. Демак, илдиз ҳам нолга тенг. Бироқ илдиз тагила бирор сон квадратларининг йиғиндиси турибди. Илдиз тагидаги ифода нолга тенг бўлиши учун ундаги ҳар бир ҳад алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши, яъни $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$ бўлиши керак. Бу ҳолда 11-§ даги (7) формулага асосан, жисмга таъсир этаётган кучлар қуйидаги тенгликларни қаноатлантириши керак:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum F_{kz}=0. \tag{10}$$

(10) тенгликлар фазода жойлашган кесишувчи кучлар мувозанатининг аналитик шартларини ифодалайди. Демак, фазода жойлашган кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларничг учала координата ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Жисмга қўйилган кесишувчи кучларнинг ҳаммаси бир текисликда ётса, у ҳолда бу кучларнинг мувозанат шартлари фақат иккита бўлади:

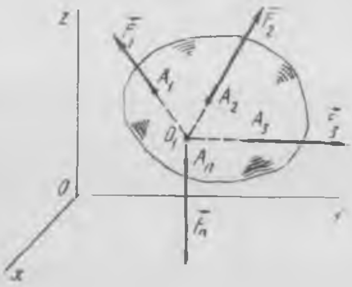
$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0. \tag{11}$$

Демак, текисликда жойлашган кесишувчи кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг x ва y координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. (10) ва (11) тенгликлар мана шу кучлар таъсиридаги эркин қаттиқ жисм мувозанатининг зарурий шарти ҳамдир. Эркин бўлмаган қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларида боғланиш реакциялари қатнашади.

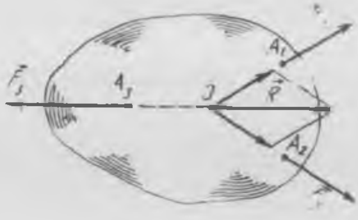
15-§. Уч куч теоремаси

Агар эркин жисм бир текисликда ётувчи параллел бўлмаган уч куч таъсири остида мувозанатда бўлса, бу кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади.

Исботи. Эркин жисмнинг бирор A_1, A_2, A_3 нуқталарига F_1, F_2, F_3 кучлар қўйилган бўлсин (29-расм). Бу кучлар текисликда ётиб, уларнинг таъсир чизиқлари бир-бирига парал-



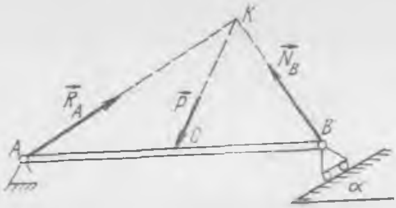
28- расм.



29- расм.

лея эмас. Агар бу уч куч ўзаро мувозанатда бўлса, уларнинг ҳаммаси бир нуқтада кесишади. Текисликда ётган параллел бўлмаган икки тўғри чизиқ кесишгани учун бу чизиқлар бўйлаб таъсир қилаётган F_1 ва F_2 кучлар жисмнинг бирор O нуқтасида кесишади. F_1 ва F_2 кучлар ўша O нуқтага кўчириб қўшилади, яъни улар тенг таъсир этувчи битта R куч билан алмаштирилади. F_1, F_2, F_3 учта кучдан иборат мувозанатлашган система энди R ва F_3 кучдан иборат системага (бу система ҳам мувозанатлашган) алмаштирилади. Эркин жисм мувозанатда тургани учун биринчи аксиомага асосан, икки куч айни бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналади, демак, F_3 кучнинг таъсир чизиғи ҳам O нуқтадан ўтади. Шу билан теорема исбот этилди. Мувозанатлашган учала куч бир текисликда ётади деб қилинган фараз ортиқча бўлиб, у исботни осонлаштириш учун қилинган, чунки мувозанатлашган уч кучнинг бир текисликда ётмаслиги мумкин эмас. Агар кучни уч кучнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишса, бундан эркин жисм бу кучлар таъсири остида албатта мувозанатда бўлади деган фикр чиқмайди. Кесишувчи уч куч таъсирида эркин жисм мувозанатда бўлмаслиги ҳам мумкин. Демак, бу теорема эркин жисмнинг уч куч таъсири остида мувозанатда бўлишининг етарлилик шартини эмас, балки зарурий шартини ифодалайди.

Параллел бўлмаган уч куч мувозанатининг зарурий шартини кўрсатиш учун бир мисол устида тўхталамиз. Самолёт барқарор ҳаракат қилиши, яъни ўша учиб кетаётганидан пасаймай тўғри чизиқ бўйлаб текис ҳаракат қилиши учун самолётга таъсир этаётган ҳамма кучлар системаси мувозанатлашган бўлиши зарур. Самолётга уч куч: унинг оғирлик кучи, двигателнинг тортиш кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи таъсир қилади деб ҳисоблаймиз. Бу уч куч мувозанатда бўлиши учун уларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши зарур. Оғирлик кучи самолётнинг оғирлик марказидан ўтадиган вертикал чизиқ бўйлаб йўналади, двигателнинг тортиш кучи эса паррак ўқи бўйлаб йўналади. Бундан самолётсозликнинг асосий қоидаси деган ном билан машҳур бўлган қоида келиб



30- расм.

чиқади: ҳавонинг қаршилик кучи парракнинг ўқини самолётнинг оғирлик марказидан чиққан вертикал чизиқ кесиб ўтадиган нуқтада кесиб ўтиши керак.

Қўзғалмас цилиндрик шарнир реакциясининг йўналишини (модулини эмас) топишда бу теоремадан фойдаланилади. Бунга битта мисол келтирамиз.

Мисол. A нуқтада цилиндрик шарнирга бириктирилган ва B нуқтада қўзғалувчи шарнирга (катокка) таянган AB балкага C нуқтада $\boldsymbol{P}$ куч қўйилган (30-расм). Агар боғланишларни олиб ташлаб, уларнинг таъсири реакция кучлари билан алмаштирилса, унда AB балкани эркин жисм деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда AB балка берилган $\boldsymbol{P}$ куч, B катокнинг N_B реакцияси, шарнирнинг $\boldsymbol{R}_A$ реакцияси таъсири остида мувозанатда туради. Ҳозиргина исбот этилган теоремага асосан, бу уч кучнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши керак. Бироқ $\boldsymbol{P}$ ва N_B кучларнинг таъсир чизиқлари маълум: улар K нуқтада кесишади. Демак, цилиндрик шарнирнинг A нуқтада балкага қўйилган $\boldsymbol{R}_A$ реакцияси ҳам K нуқтадан ўтиши, яъни AK тўғри чизиқ бўйлаб йўналиши керак. Уч куч тўғрисидаги теорема бу ҳолда A шарнир реакциясининг олдиндан маълум бўлмаган йўналишини аниқлашга ёрдам берди. Шарнир реакциясининг модулини эмас, балки фақат йўналиши аниқланди, энди модули мувозанат шартларидан фойдаланиб аниқланади.

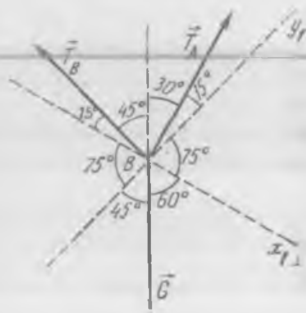
16-§. Масала ечиш

Ҳар қандай масалани ечишга киришишдан олдин унинг шартини диққат билан ўқиб чиқиш, нима берилган ва нимани топиш кераклигини албатта билиб олиш, масалани чизмада тасвирлаш, уни қандай йўл билан ечишни аниқлаш ва ундан кейингина ҳисоблашга ўтиш керак. Статикадан масала ечишда энг аввал ўртага ташланадиган биринчи савол „Изланаётган миқдорларни аниқлаш учун қайси жисмнинг (ёки нуқтанинг) мувозанати кўриб чиқилади?“ деган саволдир.

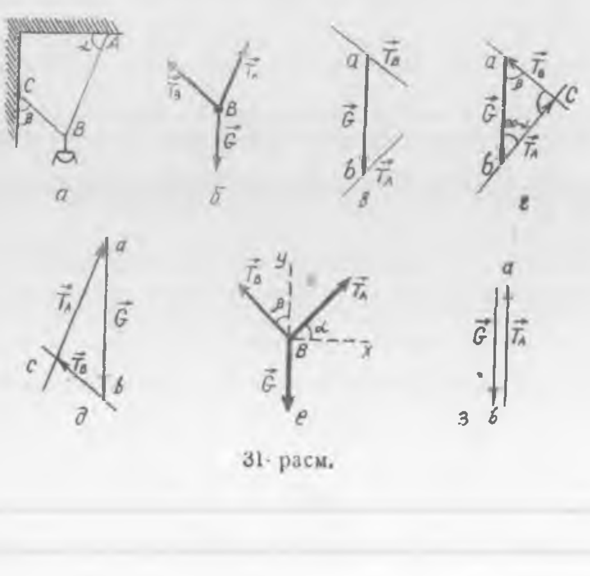
Баъзан масалалар берилган кучларни номаълум реакция кучларининг йўналишлари бўйлаб тузувчиларга ажратиш йўли билан ечилади (7-§, 2-масалага қаранг), бироқ кўп ҳолларда масала ечиш жараёни қуйидаги босқичлардан иборат. Бу босқичлар 5-масалани ечиб кўрсатиш жараёнида бирма-бир баён этилади.

5-масала. Оғирлиги 20 кН бўлган электр лампа шипга шнурда осилган бўлиб, кейин BC ип билан деворга тортиб қўйилган (31-расм, *а*). Расмдаги α бурчак 60° га, β бурчак 45° га тенг. *AB* шнурнинг ва *BC* ипнинг тортилиш кучларини топинг: Шнур ва ипнинг массасини ҳисобга олманг.

Ечиш. Юқорида айтиб ўтилганидек, масала ечишнинг биринчи босқичида қайси жисмнинг мувозанати кўриб чиқилади деган саволга жавоб берилади. Бу саволга жавоб бериш ҳамма вақт ҳам осон булавермайди. Бу масалада шнурнинг изланаётган тортилиш кучи шнурга қўйилган, ипнинг тортилиш кучи ипга қўйилган. Демак, изланаётган кучнинг иккови икки жисмга қўйилган. Шнурнинг тортилиш кучини текшириш урнига унга тенг ва қарама-қарши йуналган реакцияси текширилади, у T_B билан белгиланади. T_B реакция лампа осилган тугунга қўйилган. Ипнинг тортилиш кучи урнига унга тенг ва қарама-қарши йўналган реакция кучи текширилади, у T_B билан белгиланади, T_B реакция ҳам лампа осилган *B* тугунга қўйилган. Лампанинг оғирлик марказига қўйилган *G* оғирлик кучи биринчи ва иккинчи аксиомалардан келиб чиқадиган натижага асосан *B* нуқтага кўчирилади. Берилган ва изланаётган кучлар *B* нуқтага қўйилган. Демак, биринчи саволга *B* нуқтадаги тугуннинг мувозанати кўриб чиқилади деб жавоб берилади.



Масала ечишнинг иккинчи босқичида жисмга таъсир этувчи берилган кучлар чизмада курсатилади, жисм боғланишлардан бўшатилиб, олинган боғланишларнинг реакция кучлари ҳам курсатилади. Боғланиш сифатида ишлаётган шнурнинг T_A реакцияси шнур бўйлаб йўналган, боғланиш сифатида ишлаётган ипнинг T_B реак-



31- расм.

цияси ҳам ипнинг ўзи бўйлаб йўналган. Лампанинг оғирлик кучи оғирлик марказига қўйилган бўлиб, вертикал бўйлаб пастга йўналган. T_A, T_B ва G кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада, яъни B тугунда кесишади (31-расм, *б*). Тугун расмда алоҳида тасвирланиб, унга таъсир этаётган кучлар кўрсатилади. (Кейинчалик масала ечишни ўрганиб олгач мувозанати текшириладиган жисмни расмда алоҳида тасвирламаса ҳам бўлади, унга қўйилган кучларни масала шартини ифодаловчи расмнинг ўзида тасвирлаб қўяқолиш мумкин. Бир-бирига боғланган бир неча жисмдан иборат конструкцияни текширишда эса ҳар бир жисмни алоҳида чизиб, уларга таъсир этувчи актив кучларни ва реакция кучларини расмда чизиб кўрсатиш керак).

Масала ечишнинг учинчи босқичида мувозанат шарти тузилади. Жисмга қўйилган кучлар системасининг турига ва масалани геометрик ёки аналитик усулда ечишга қараб, мувозанат шарти ҳар хил бўлади. Бу масалада жисмга бир нуқтада кесишувчи кучлар таъсир қиляпти. Масала геометрик усулда ечилади. Лампа T_A, T_B ва G кучлар таъсирида мувозанатда турибди, демак, бу кучлардан тузилган куч учбурчаги ёпиқ. Энди куч учбурчаги ясаймиз. Куч учбурчаги берилган кучдан бошлаб чизилади. Олдин ихтиёрий a нуқтада G куч маълум масштабда чизилади (31-расм, *в*) G кучнинг бошидан ёки охиридан T_A кучга ёки T_B кучга параллел чизиқлар ўтказилади. Бу ерда G кучнинг охиридан T_A га параллел чизиқ ўтказилади. Эндиги чизиқни хоҳлаган жойдан ўтказиб бўлмайди, T_B га параллел чизиқ G кучнинг бошидан ўтказилади. Ўтказилган тўғри чизиқлар бирор нуқтада кесишади (31-расм, *г*), бу нуқта c билан белгиланади. Ўша c нуқта ёпиқ куч учбурчагининг учинчи учи бўлади. Куч учбурчагининг bc томони T_A реакцияга параллел ва танлаб олинган масштабда унга тенг, ac томони эса T_B реакцияга параллел ва танлаб олинган масштабда унга тенг. Кучларнинг йўналиши стрелкалар қоидаси билан аниқланади: куч учбурчаги ёпиқ бўлгани учун унинг ҳар бир учида битта кучнинг боши бошқа кучнинг охири бўлиши керак, яъни учбурчакдаги кучлар кетма-кет келиши керак. G куч пастга вертикал йўналгани учун T_A ва T_B реакциялар 31-расм, *г* да кўрсатилгандек йўналади. Диққат-эътиборни куч учбурчагини ясашга яна қаратмоқчимиз. Агар T_A реакцияга параллел қилиб ўтказиладиган чизиқ аввалгидек кучнинг охиридан эмас, бошидан ўтказилса, у ҳолда куч учбурчаги 31-расм, *д* дагича бўлади. Иккала куч учбурчаги бир хилдир.

Охирги тўртинчи босқичда номаълум миқдорлар аниқланади, масаланинг тўғри ечилгани текшириб кўрилади ва топилган натижалар анализ қилинади

Энди номаълум T_A ва T_B реакция кучларининг модули *abc* куч учбурчагини ечиб топилади. Бунинг учун учбурчакнинг ички бурчаклари аниқланади. G куч билан T_A реакция орасидаги бурчак $(90° - \alpha)$ га тенг, G куч билан T_B реакция орасидаги бурчак β га тенг. Учбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси 180° бўлгани учун куч учбурчагининг T_A томони билан T_B томони орасидаги учинчи бурчаги $(90° + \alpha + \beta)$ га тенг. Куч учбурчаги синуслар теоремасидан фойдаланиб ечилади: ҳар бир томоннинг ўша томон қаршисидаги бурчак синусига нисбати бир-бирига тенг, яъни

$$\frac{T_A}{\sin\beta} = \frac{T_B}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{G}{\sin[90° + (\alpha - \beta)]}.$$

Бу икки тенгламадан изланаётган T_A ва T_B реакциялар аниқланади.

T_A ни $\frac{T_A}{\sin\beta} = \frac{G}{\cos(\alpha - \beta)}$ тенгламадан қуйидагича аниқлаймиз: $T_A = \frac{G\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta)}$, T_B ни $\frac{T_B}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{G}{\sin[90° + (\alpha + \beta)]}$ тенгламадан топамиз, бу ерда келтириш формулаларига асосан $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ ва $\sin|90° + (\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$ экани ҳисобланади: $T_B = \frac{G\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$.

Масалани ечганда алгебраик кўринишда ҳисоблаш керак. Унда изланаётган миқдорлар формулалар билан ифодаланади. Бу ҳол топилган натижаларни анализ қилишга имкон беради. Масала шартида берилган миқдорларнинг сон қийматлари энг охирги натижага қўйилади. T_A ва T_B нинг ифодаларига $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $G = 20$ Н қийматлар қўйилса, $T_A = 14{,}6$ Н, $T_B = 10{,}4$ Н бўлиб чиқади. Аниқланган T_A ва T_B реакциялар AB шнур ва BC ипнинг тортилиш кучларига модул жиҳатидан тенг ва қарама-қарши йўналган.

Энди масаланинг тўғри ечилгани текшириб кўрилади. Агар масала „Масалалар тўпламидан“ берилган бўлса, унинг тўғри ечилганини билиш учун китобдаги жавобига қараш керак. Масаланинг жавоби берилмаган ҳолларда берилган куч (ёки бир неча куч) топилган реакцияларнинг йиғиндисига (арифметик йиғиндисига эмас, геометрик йиғиндисига) тенг бўлиши лозим. Куч учбурчагидаги *ac* томон косинуслар теоремасига асосан қолган икки томоннинг йиғиндисига (геометрик йиғиндисига) тенг бўлиши керак. T_A ва T_B реакцияларнинг топилган қийматларини $G = \sqrt{T_A^2 + T_B^2 - 2T_AT_B\cos(\alpha + \beta)}$ формулага қўйсак, ҳақиқатан ҳам $G = 20$ Н бўлиб чиқади.

Ечимни анализ қилишда ҳам куч учбурчагидан фойдаланилади. Агар β бурчакни ўзгартирмай туриб, α бурчак кичрайтирилса, яъни шнур деворга кўпроқ тортилса, куч учбурчагининг c учидаги $90°-\alpha$ бурчак катталашади, шунга яраша T_B реакция ортади. Энди α бурчакни ўзгартирмай туриб, β бурчак катталаштирилса, куч учбурчагининг a учидаги бурчаги катталашади, унинг қаршисида турган T_A реакция ортади. $\alpha = 90°$ ва $\beta = 90°$ бўлган ҳолда куч учбурчагининг b учидаги бурчаги кичрайиб, нолга тенглашади, T_A реакцияни тасвирлайдиган bc томони ab томон устига тушади, учинчи ca томони йўқолиб, нуқтага айланиб қолади, учбурчак бу ҳолда ҳам ёпиқ бўлиши лозимлиги туфайли, T_A реакция G га тенг бўлади, ca томон билан тасвирланиши лозим бўлган T_B реакция нолга тенг. Бу шакл *иккибурчак* деб аталади (31- расм, *з*), шнурнинг изланаётган T_A реакцияси G оғирлик кучига модул жиҳатдан тенг бўлиб, иккови бир-бирига қарама-қарши йўналган.

Бу масалада номаълумлар (T_A ва T_B) ҳам, топиладиган тенгламалар ҳам иккиталиги маълум. Бундай масалалар статик жиҳатдан *аниқ масалалар* деб, буларда тилга олинган жисм (ёки жисмлар системаси) статик жиҳатдан *аниқ системалар* деб аталади. Назарий механикада ҳамиша статик жиҳатдан аниқ масалалар ечилади. Бордию номаълумлар кўпроқ бўлиб, улар қатнашган тенгламалар сони камроқ бўлса, бундай масалалар статик жиҳатдан *ноаниқ масалалар* деб, буларда тилга олинган жисм (ёки жисмлар системаси) статик жиҳатдан *ноаниқ системалар* деб аталади. Статик жиҳатдан ноаниқ масалалар механиканинг материаллар қаршилиги ва иншоотлар статикаси деб аталадиган курсларида ҳал қилинади.

Энди қуйидаги масала аналитик усулда ечилади. Масала ечишнинг биринчи босқичи аввалдагидек бўлади. Энди тугун мувозанати кўриб чиқилади. Иккинчи босқич ҳам ўшандайлигича қолади. Учинчи босқичга келганда эса иш бошқача бўлади, чунки дастлабки мувозанат шарти кучлар системасининг турига ва масалани ечиш усулига қараб ҳар хиллиги маълум эди. B тугунга қўйилган кучлар текисликда жойлашгани учун икки координата ўқлари: x ўқи горизонтал y ўқи вертикал ўтказилади. G, T_A, T_B кучларнинг ўқлардаги проекциялари ҳисоблаб чиқилади. Аввал G кучнинг x ўқидаги ва y ўқидаги проекцияси, сўнг T_A нинг проекциялари, ундан кейин T_B нинг проекциялари аниқланади:

$$G_x = 0, \quad G_y = -G;$$

$$T_{Ax} = T_A \cos\alpha, \quad T_{Ay} = T_A \cos(90° - \alpha) = T_A \sin\alpha;$$

$$T_{Bx} = -T_B \cos(90° - \beta) = -T_B \sin\beta, \quad T_{By} = T_B \cos\beta.$$

Изоҳ. G куч x ўқига перпендикуляр бўлгани учун унинг x ўқидаги проекцияси нолга тенг бўлди, T_B куч x ўқига тескари томонга йўналгани учун унинг x ўқидаги проекцияси манфий бўлди.

(11) мувозанат шартларидан фойдаланиб, тенгламалар тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad T_A\cos\alpha - T_B\sin\beta=0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad T_A\sin\alpha + T_B\cos\beta - G=0.$$

Бу тенгламаларнинг биринчисини $\cos\beta$ га, иккинчисини $\sin\beta$ га кўпайтириб,

$$T_A=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=G\sin\beta$$

тенгламага эга бўламиз. Чап томонда қавслар ичида турган ифода икки бурчак айирмасининг косинуси ифодасини билдиради: $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. У ҳолда юқоридаги тенгламадан T_A ни аниқлаймиз:

$$T_A=\frac{G\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

T_A нинг бу ифодасига $G=20$ Н, $\beta=45°$ ва $\alpha=60°$ қийматларни қўйсак, $T_A=14{,}6$ Н бўлади, бу на кўриниб турибди. Ул-да аниқланган натижа билан бир хил экани кўриниб турибди. Мувозанат тенгламаларидан T_B топилади, бунинг учун T_A нинг топилган қиймати мувозанат тенгламаларининг биринчисига қўйилади, у ҳолда

$$T_B=\frac{T_A\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{G\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{22\cdot 0{,}5}{0{,}96}=10{,}4 \text{ Н}.$$

Жавобни текшириб кўриш ва анализ қилиш масала геометрик усул билан ишланганда гапириб ўтилган эди, шунинг учун бу ерда улар ҳақида тўхталиб ўтилмайди.

Текисликда координата ўқларидан бири иложи борича номаълум кучлардан бирига (ёки кучлар кўпроқ бўлган ҳолда — бир нечтасига) перпендикуляр қилиб олинса, мувозанат тенгламалари осон ечилади. Ундан ташқари, кучлар ўзаро мувозанатда бўлгани сабабли уларни албатта ўзаро перпендикуляр бўлган ўқларга проекциялаш шарт эмас. Шу масаланинг ўзини кучларни ўзаро перпендикуляр бўлмаган x_1, y_1 ўқларига проекциялаш йўли билан ҳам ечиб кўрсатамиз. x_1 ўқини T_A га перпендикуляр қилиб, y_1 ўқини T_B га перпендикуляр қилиб ўтказамиз (31-расм, *ж*). Бу ҳолда мувозанат тенгламалари соддароқ бўлади:

$$\sum F_{kx_1}=0; \quad -T_B\cos 15°+G\cos 60°=0,$$

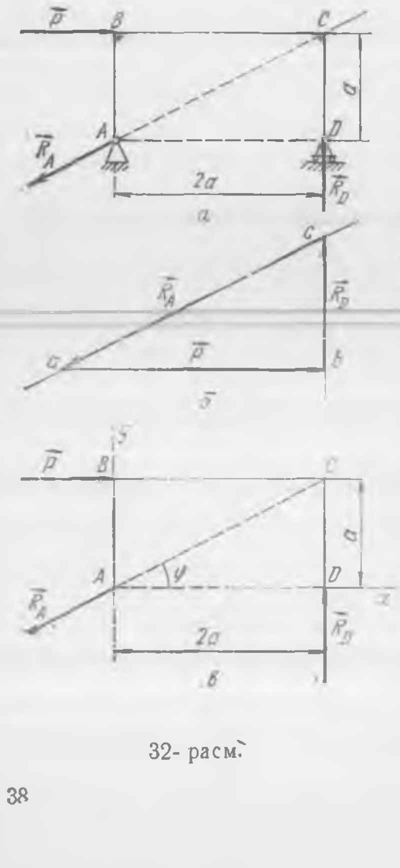
$$\sum F_{ky_1}=0; \quad T_A\cos 15°-G\cos 45°=0.$$

x_1, y_1 ўқлари ана шундай ўтказилгани учун мувозанат тенгламаларининг ҳар бирида фақат биттадан номаълум қатнашди:

биринчи тенгламада фақат T_A иккинчи тенгламада эса фақат T_B қатнашяпти. Бунда бир оз қийинчилик вужудга келади, расмда T_A, T_B, G кучларнинг x_1, y_1 ўқлари билан ҳосил қилган бурчакларининг қийматини кўрсатиш кўп вақтни олади.

6-масала. $ABCD$ рама таянчга A нуқтада цилиндрик шарнир билан бириктирилган бўлиб, D нуқтада шарнир устига қўйилган (32-расм, a). Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Рамага B нуқтада горизонтал йўналган P куч таъсир этганда таянчларда пайдо бўладиган реакцияларни топинг. Раманинг оғирлиги ҳисобга олинмайди.

Ечиш. Таянчларнинг реакциялари ва P куч рамага қўйилган. Шунинг учун рама мувозанати кўриб чиқилади. Сўнгра рамани боғланишлардан (яъни A шарнирдан ва D катокдан) бўшатиб, боғланишларнинг ўрнига уларнинг реакциялари қўйилади. Чизмани оддийлаштириш учун раманинг ўзи эркин жисм сифатида алоҳида чизилмайди, бироқ таъсир этувчи кучларни тасвирлаганда уни эркин жисм деб (32-расм, a) тасаввур этиш лозим. Рамага уч куч: горизонтал P, D катокнинг юқорига вертикал йўналган R_D реакцияси, A шарнирнинг расм текислигида ётган R_A реакцияси таъсир қилади. R_A реакциянинг йўналиши маълум эмас. R_D реакцияни расмда кўрсатамиз. Бироқ рама мана шу уч куч таъсири остида мувозанатда турганлиги учун уч куч тўғрисидаги теоремага асосан, унинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишади. Масала геометрик усулда ечилади. Берилган P куч билан R_D реакция кучларининг йўналиши маълум эканлигидан фойдаланиб, уларнинг кесишиш нуқтаси топилади. Бу нуқта C нуқтанинг устига тушади. Шарнирнинг R_A реакцияси ҳам ўша C нуқтадан ўтади, яъни реакция AC тўғри чизиқ бўйлаб йўналади, бироқ R_A реакция AC тўғри чизиқда қаёққа қараб йўналгани маълум эмас. Бунинг учун куч уч бурчаги ясалади. Куч учбурчаги берилган кучдан бошлаб чизилади. Олдинги масалада берилган куч вертикал йўналган эди, бу масалада эса берилган P куч горизонтал йўналган бўлганлиги учун ихтиёрий бир a



32-расм.

нуқтада P куч масштабда горизонтал қилиб чизилади (32-расм, *б*). Энди P кучнинг бошидан ёки охиридан R_D реакцияга ёки AC чизиқ бўйлаб йўналган R_A реакцияга параллел чизиқлар ўтказилади. Қайси чизиқни олдин ўтказиш мутлақо ихтиёрий, R_D реакцияга параллел бўлган вертикал чизиқ P кучнинг охиридан, R_A реакцияга параллел бўлган қия чизиқ P кучнинг бошидан ўтказилади. Бу икки чизиқ кесишган нуқта c билан белгиланади. Бу куч учбурчак ёпиқ бўлиши лозим эканлигидан R_D реакция вертикал бўйлаб юқорига, R_A реакция ac чизиқ бўйлаб пастга томон йўналгани аниқланади. Расм масштабда чизилгани учун R_D ва R_A реакциялар қиймати учун куч учбурчагининг томонларига ўша масштабда тенг бўлади. Бу ерда куч учбурчагини ечиш учун унинг ички бурчакларини аниқлаш шарт эмас. Масала шартида берилган ACD учбурчак acb учбурчакка ўхшашдир. Уларнинг ўхшашлигидан, яъни мос томонлар нисбати тенглигидан фойдаланамиз:

$$\frac{R_D}{DC} = \frac{R_A}{AC} = \frac{P}{AD},$$

сўз билан айтганда, бу тенгликлар R_D томоннинг DC томонга нисбати, R_A томоннинг AC томонга нисбати ва P томоннинг AD томонга нисбати бир-бирига тенг деб ўқилади. $AD = 2a$, $DC = a$ эканлиги шартда берилган. AC томон ACD учбурчакнинг гипотенузаси бўлгани учун $AC = a\sqrt{5}$ бўлади. $\frac{R_D}{a} = \frac{P}{2a}$ тенгламадан $R_D = \frac{P}{2}$ жавобни, $\frac{R_A}{a\sqrt{5}} = \frac{P}{2a}$ тенгламадан эса $R_A = \frac{P\sqrt{5}}{2}$ жавобни топамиз.

Энди масала аналитик усулда ечилади. x ўқини (номаълум R_D реакцияга тик қилиб) горизонтал, y ўқини вертикал қилиб ўтказиб, координаталар бошини A нуқтада оламиз (32-расм, *в*). R_A реакциянинг x ўқига оғиш бурчаги маълум эмас, уни φ билан белгилаб, қиймати аниқланади. ACD учбурчакдан $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DC}{AD} = \frac{a}{2a} = 0{,}5$. Энди кучлар x, y ўқларига проекцияланади:

$$R_{Ax} = -R_A \cos\varphi, \qquad R_{Ay} = -R_A \sin\varphi,$$
$$R_{Dx} = 0, \qquad R_{Dy} = R_D,$$
$$P_x = P \qquad P_y = 0.$$

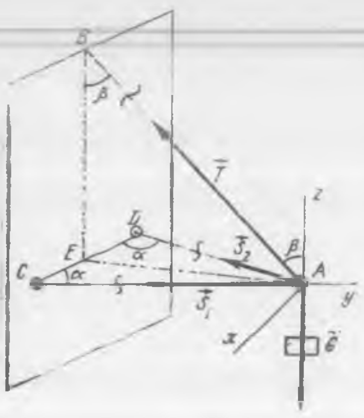
Булардан мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -R_A \cos\varphi + P = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad -R_A \sin\varphi + R_D = 0.$$

Координата ўқлари қулай қилиб ўтказилганлиги учун мувозанат тенгламаларининг биринчисида биттагина номаълум катнашяпти, ўша тенгламадан $R_A = \frac{P}{\cos\varphi}$ ечим топилади, лекин $\cos\varphi$ ўрнига унинг 9-синфда „Алгебра ва элементар функциялар“ курсида ўтиладиган $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ ифодасини қўямиз. Ниҳоят, $R_A = P\sqrt{1,25}$ ечимни топамиз. R_A нинг геометрик усулда топилган қиймати аналитик усулда топилган бу қиймати билан бир хил экани кўриниб турибди. Иккинчи тенгламадан $R_D = R_A \sin\varphi$ ечимни ёки унга $\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ қийматни қўйиб, $R_D = P\sqrt{1,25}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{P}{2}$ ечимни топамиз. R_A реакция қийматининг ишораси мусбат бўлиб чиқиши унинг x ўқига тескари томонга йўналганини, яъни унинг куч учбурчаги кўрсатиб турган йўналиши тўғри эканини билдиради. Жавобни текшириб кўриш ва анализ қилиш студентларга ҳавола қилинади.

7-масала. Оғирлиги $G = 180$ Н бўлган юк A илмоқга осилган бўлиб, бу илмоқни AC ҳамда AD стержень ва AB арқон тутиб туради (33-расм). Стерженлар бир-бирига ва деворга шарнирлар билан бириктирилган. Стерженларнинг оғирлиги ҳисобга олинмайди. ACD учбурчак текислиги горизонталдир. $CE = ED$ ва $\angle ECA = \angle PDA = \alpha$, AB арқон EB вертикал билан β бурчак ҳосил қилади. AC ва AD стерженларнинг, шунингдек, AB арқоннинг реакция кучларини аниқланг.

Ечиш. Изланаётган кучлар юк осилган илмоққа қўйилган, шунинг учун ўша A илмоқнинг мувозанати кўриб чиқилади. A илмоқ икки стержень ва арқондан иборат бирикмалардан бўшатилиб, уларнинг таъсири реакциялари билан алмаштирилади. G юкнинг оғирлик кучи ҳам A нуқтадан ўтадиган қилиб чизилади. A нуқтага AC стерженнинг ўзи бўйлаб йўналган $\bar{S}_1$ реакцияси, AD стерженнинг ўзи бўйлаб йўналган $\bar{S}_2$ реакцияси, AB арқоннинг ўзи бўйлаб йўналган $\bar{T}$ реакцияси ва, ниҳоят, юкнинг G оғирлик кучи таъсир қилади. Стерженларни чўзилади деб ҳисоблаб, уларнинг реакцияси A тугундан стерженлар бўйлаб C ва D нуқталар томон йўналтирилади. Масала ечиб бўлингач бирор реакциянинг ишо-



33-расм.

раси манфий чиқиб қолса, бу ишора ўша стерженнинг сиқилаётганини билдиради. Бу кучлар бир нуқтада кесишувчи кучлар бўлиб, бир текисликда ётмайди. Номаълум кучларни куч кўпбурчаги ясаш йўли билан топиш мумкин эди, лекин у фазовий шакл бўлгани учун ундан номаълум кучларни аниқлаш анча қийин. Шу сабабли бу масалани фақат аналитик усулда ечамиз. Координаталар боши A нуқтада олинади. x ўқи CD тўғри чизиққа параллел қилиб олинади, y ўқи тенг ёнли ACD учбурчакнинг EA баландлиги бўйлаб йўналтирилади, z ўқи эса вертикал бўйлаб юқорига йўналтирилади. Икки стерженнинг s_1 ва s_2 реакциялари горизонтал xy текисликда ётади, уларнинг x, y ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари расмдан кўриниб турибди, T реакция кучи вертикал yz текисликда ётгани учун бу куч x ўқига перпендикуляр бўлиб, унинг бу ўқдаги проекцияси нолга тенг. G куч вертикал бўйлаб пастга йўналгани учун x ўқига ҳам, y ўқига ҳам проекция бермайди. Бу масалада энди ҳар бир кучнинг координата ўқларидаги проекцияларини алоҳида ёзиб ўтирмай, тўппа-тўғри мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad s_1 \cos\alpha - s_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -s_1 \sin\alpha - s_2 \sin\alpha - T \sin\beta = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \qquad T\cos\beta - G = 0.$$

Кучларнинг x ўқидаги проекциялари йиғиндисининг нолга тенг бўлиши шу кучлар таъсири остида турган жисмнинг x ўқи бўйлаб силжимаслигини билдиради. Шу кучлар таъсири остида турган жисм, y, z ўқлари бўйлаб ҳам силжимай турган экан, демак, бу жисм мувозанатда турган бўлади. Бу мувозанат тенгламаларининг механик маъноси ана шу. Мувозанат тенгламаларининг учинчисидан T аниқланади: $T = \frac{G}{\cos\beta}$. Биринчи тенглама $\cos\alpha$ га қисқартирилса, $s_1 = s_2$ эканлиги келиб чиқади. Иккинчи тенгламада s_2 нинг ўрнига s_1 қўйилади, унда тенглама $2s_1 \sin\alpha = -T\sin\beta$ кўринишга эга бўлади, бу тенгламадан s_1 ни топиб, ундаги T нинг ўрнига $\frac{G}{\cos\beta}$ ифода ёзилади: $s_1 = s_2 = -\frac{T\sin\beta}{2\sin\alpha} = -\frac{G}{2}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$.

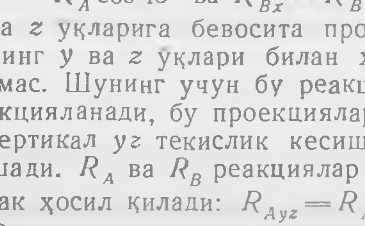
α ва β бурчаклар ўткир бурчаклар бўлгани учун $\operatorname{tg}\beta$ ва $\sin\alpha$ ларнинг қиймати касрнинг ишорасига таъсир қилмайди, демак, стерженлар сиқилар экан. Дастлаб AB арқоннинг реакциясини кўрсатишда уни чўзилади деб фараз қилган эдик, T реакциянинг ишораси мусбат бўлиб чиқиши унинг йўналиши тўғри эканини, яъни AB арқоннинг ҳақиқатан ҳам чўзилишини билдиради.

Энди кучни олдин текисликка, кейин ўққа проекциялашга тўғри келадиган бир масалани кўриб чиқамиз.

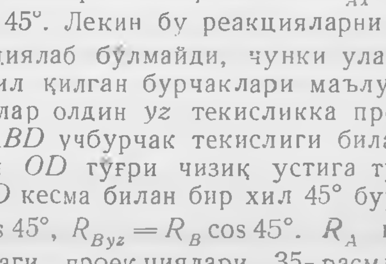
8- масала. Бир-бирига D нуқтада шарнир билан бириктирилган AD ва BD стерженларни CD сим тортиб туради (34-расм). Стерженлар тагликка ҳам A ва B нуқталарда шарнирлар билан бириктирилган. D шарнирга оғирлиги $G = 100$ кН бўлган юк осилган. Бурчаклар расмда кўрсатилган. Боғланишларнинг реакцияси аниқлансин.

Ечиш. Бу масаланинг ечилиши 7- масаланикидан кўп фарқ қилмайди. Бунда ҳам AD, BD стерженларнинг реакциялари ўша стерженлар бўйлаб йўналган, лекин уларни ўққа бевосита проекциялаб бўлмайди. Координаталар системаси расмда кўрсатилганидек қилиб ўтказилади. AD ва BD стерженларнинг R_A ва R_B реакцияларини, C симнинг R_D реакциясини расмда кўрсатамиз. Барча реакциялар ва юкнинг оғирлик кучи мувозанати текшириладиган D нуқтага қўйилган. Аввалгидек кучларнинг координата ўқларидаги проекциялари тенгламалари тузилади.

R_A ва R_B реакциялар x ўқи билан $45°$ бурчак ҳосил қилган; уларнинг x ўқидаги проекциялари мос равишда $R_{Ax} = -R_A \cos 45°$ ва $R_{Bx} = R_B \cos 45°$. Лекин бу реакцияларни y ва z ўқларига бевосита проекциялаб бўлмайди, чунки уларнинг y ва z ўқлари билан ҳосил қилган бурчаклари маълум эмас. Шунинг учун бу реакциялар олдин yz текисликка проекцияланади, бу проекциялар ABD учбурчак текислиги билан вертикал yz текислик кесишган OD тўғри чизиқ устига тушади. R_A ва R_B реакциялар OD кесма билан бир хил $45°$ бурчак ҳосил қилади: $R_{Ayz} = R_A \cos 45°$, $R_{Byz} = R_B \cos 45°$. R_A ва R_B реакцияларнинг текисликдаги проекциялари 35- расмда алоҳида чизиб кўрсатилди. Энди текисликдаги R_{Ayz} ва R_{Byz} проекциялар y ўқига проекцияланади: бу проекциялар билан y ўқи орасидаги бурчак $30°$ бўлгани учун $R_{Ay} = -R_{Ayz} \cos 30°$ ва $R_{By} = -R_{Byz} \cos 30°$ бўлади, бу ерга R_{Ay}, ва R_{Byz} ларнинг ифодалари қўйилади: $R_{Ay} = -R_A \cos 45° \cos 30°$ ва $R_{By} = -R_B \cos 45° \cos 30°$. Худди шунга ўхшаш, R_A ва R_B реак-



34- расм.



35-расм.

цияларнинг z ўқидаги проекциялари ҳам R_{Ayz} ва R_{Byz} ни проекциялаб топилади: $R_{Az} = -R_{Ayz}\cos 60°$ ва $R_{Bz} = -R_{Byz}\cos 60°$, бу ерга R_{Ayz} ва R_{Byz} проекцияларнинг ифодаларини қўйиб, $R_{Az} = -R_A\cos 45°\cos 60°$ ва $R_{Bz} = -R_B\cos 45°\cos 60°$ экани аниқланади. Ишнинг энг қийини ана шу эди.

Энди R_c реакциянинг проекциялари тўғрисида икки оғиз сўз. R_c реакция вертикал текисликда DC кесма бўйлаб йўналгани сабабли x ўқига проекция бермайди: $R_{cx} = 0$. Бу R_c реакциянинг y ва z ўқлардаги проекциялари мос равишда $R_{cy} = -R_c\cos 15°$. $R_{cz} = -R_c\cos 75°$. Кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \qquad -R_A\cos 45° + R_B\cos 45° = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \qquad -R_A\cos 45°\cos 30° - R_B\cos 45°\cos 30° - -R_c\cos 15° = 0,$$

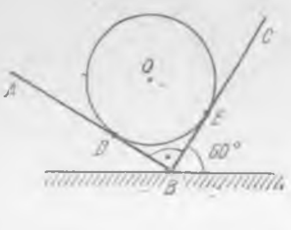
$$\sum F_{kz} = 0; \qquad -R_A\cos 45°\cos 60° - R_B\, 45°\cos 60° - -R_c\cos 75° - G = 0.$$

Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалардан иборат бўлган бу системанинг ечимлари $R_A = R_B = 264$ кН, $R_c = 335$ кН. R_A нинг R_B га тенг бўлиши биринчи тенгламадан кўриниб турибди.

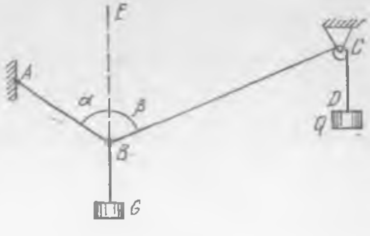
Масалалар

1. Бир-бирига тик бўлган иккита силлиқ AB ва BC қия текисликларда оғирлиги 6 кН бўлган бир жинсли O шар турибди (36- расм). BC текислик билан горизонтал текислик орасидаги бурчак 60°. Шарнинг ҳар қайси текисликка кўрсатадиган босим кучи аниқлансин. Жавоб: $N_D = 5{,}2$ кН; $N_E = 3$ кН.

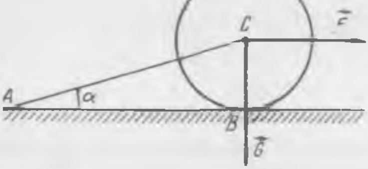
2. Бир учи A нуқтага боғланган AB арқоннинг B учига G юк ва блокдан ўтказилган BCD арқон боғланган (37- расм). Арқоннинг D учига оғирлиги $Q = 10$ кН бўлган юк осилган. Мувозанат вазиятда арқонлар BE вертикал чизиқ билан $\alpha =$



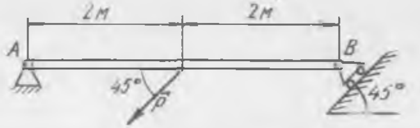
36 расм.



37-расм.



38-расм.



39- расм.

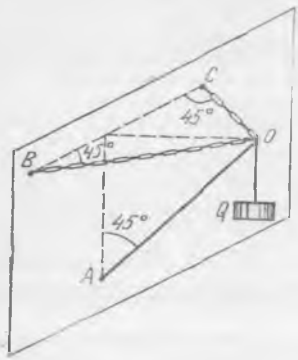
$= 45°$, $\beta = 60°$ бурчак ҳосил қилади. Блокда ишқаланиш йўқ деб ҳисоблансин. AB арқоннинг T тортилиш кучи ва G юкнинг оғирлиги аниқлансин. Жавоб: $T = 12{,}2$ кН; $G = 13{,}7$ кН.

3. Горизонтал силлиқ текисликда ётган бир жинсли цилиндрга C нуқтада горизонтал йуналган F куч таъсир қилади (38- расм). Цилиндрнинг оғирлиги G. Уни қиялик бурчаги α булган AC стержень силжитмай туради. Стерженни чўзувчи N кучни ва текисликнинг B нуқтадаги вертикал R_B реакцияси аниқлансин. Жавоб: $N = G\cos^{-1}\alpha$; $R_B = G + F\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

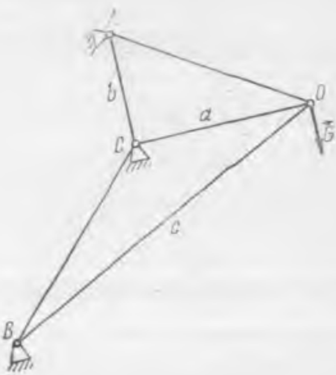
4. AB балка A таянчга шарнир билан бириктирилган, унинг B учи қузғалувчи шарнирга қўйилган (39- расм). Балканинг ўртасига $P = 2$ кН куч расмда кўрсатилганча таъсир қилади. Балканинг оғирлигини ҳисобга олмасдан таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $R_A = 2{,}24$ кН; $R_B = 1$ кН.

5. $Q = 100$ кН юкни CA стержень ва горизонтал ётган BO ва CO занжирлар тутиб туради (40- расм). OA стержень A нуқтага шарнир ёрдамида бириктирилган бўлиб, горизонтал билан 45° бурчак хосил қилади. $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Стерженнинг R реакцияси ва занжирларнинг T тортилиш кучи топилсин. Жавоб: $R = 141$ кН: $T = 71$ кН.

6. Учта OA, OB, OC стержень бирга қўшилган O нуқтага юк осилган (41- расм). OB ва OC стерженлар горизонтал те-



40-расм.



41-расм.

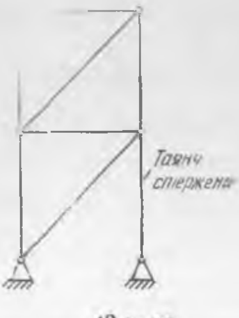
кисликда, OC ва OA стерженлар вертикал текисликда туради. $OB=c$, $OC=a$, $AC=b$ кесмаларни берилган деб ҳисоблаб, бу стерженларда пайдо бўлган зўриқишлар аниқлансин. Жавоб: $T_A=G\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ (чўзилади), $T_B=0$, $T_C=-G\frac{a}{b}$ (сиқилади).

7. Радиуси r бўлган силлиқ ярим сфера ичига томони a га тенг бўлган мунтазам учбурчак шаклида ишланган бир жинсли пластинка қўйилган. Пластинканинг оғирлиги G. Бу пластинка сфера ичида горизонтал вазиятда мувозанатда турганда унинг учлари сферага қандай босим беради? Жавоб:

$$N=\frac{Gr\sqrt{3}}{3\sqrt{3r^2-a^2}}.$$

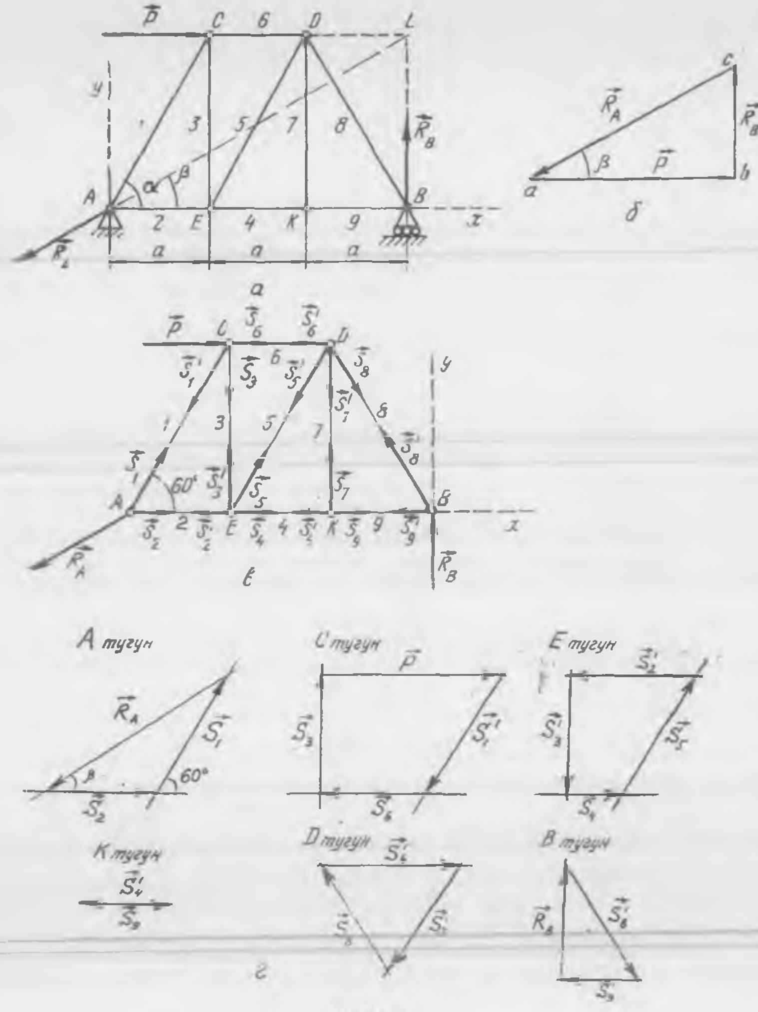
17-§ Фермалар

Кўприк, бино, самолёт ва бошқа иншоотларда *ферма* деб аталадиган конструкция ишлатилади. Ферма тўғри стерженлардан йиғилади, стерженлар бир-бирига идеал шарнирлар воситасида бириктирилади. Энди стерженларнинг ҳаммаси бир текисликда ётадиган, ташқи кучлар ҳам ўша текисликда таъсир этадиган ҳоллар текширилади. Стерженлар бириктирилган жойлар *ферманинг тугунлари* дейилади. Стерженларнинг оғирлиги фермага таъсир этаётган кучларга қараганда кичик бўлганидан стерженларнинг оғирлиги эътиборга олинмайди. Ҳақиқатда ишлатиладиган фермаларда шарнирлар идеал бўлмайди, ҳатто стерженлар бир-бирига шарнирлар билан эмас, балки парчин михлар билан маҳкам бириктириб қўйилади. Фермадаги стерженлар сони одатда тоқ бўлади; топшириқларда бериладиган баъзи фермаларда стерженлар сони тоқ бўлмаса, битта стержень (42-расм) таянч стержени бўлади. Ташқи кучлар фермага фақат тугунларда қўйилади. Шунинг учун ферманинг стерженлари ё сиқилади, ё чўзилади. Мисол тариқасида битта фермани ҳисоблаб чиқамиз (43-расм); фермани ҳисоблаш дегани ферманинг таянч реакцияларини ва стерженларида пайдо бўладиган зўриқиш кучларини аниқлашни билдиради. 43-расм, a да кўрсатилган фермага C нуқтада горизонтал йўналган $P=20$ кН куч қўйилган. $\alpha=60°$. A ва B нуқталардаги таянч реакцияларини ва стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучларини топинг.



42-расм.

Ечиш. 1. Таянч реакцияларини аниқлаш. Фермага қўйилган ташқи кучларни кўриб чиқамиз: улар берилган P куч, таянчларнинг R_A ва R_B реакциялари. Дастлаб ферманинг тугунларидаги шарнирларни йўқ деб, фермани яхлит бир



43-расм.

жисм деб фараз қиламиз Ферма боғланишлардан бўшатилади. B нуқтада қўзғалувчи шарнир турибди, унинг реакцияси таянч юзасига, яъни горизонтал текисликка тик йўналади, у расмда B нуқтага қўйиб кўрсатилади. A нуқтада турган цилиндрик шарнир R_A реакциясининг йўналиши маълум эмас. R_A реакциясининг йўналиши параллел бўлмаган уч куч тўғрисидаги теоремадан фойдаланиб аниқланади, чунки ферма бир текисликда ётган уч P, R_A, R_B куч таъсирида мувозанатда турибди, демак, бу уч кучнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишиши шарт. Берилган P куч билан R_B реакция қаерда кесишса, R_A реакция ҳам ўша ердан ўтиши керак. P куч билан R_B реакция кесишган нуқта L билан белгиланади, унда R_A реакция AL тўғри чизиқ бўйлаб йўналади, лекин бу тўғри чизиқда қаёққа қараб йўналгани номаълум. Уни куч учбурчаги кўрсатади. Энди ёпиқ куч учбурчагини ясаймиз. Маълумки, куч учбурчаги берилган кучдан, яъни P кучдан бошлаб чизилади. P куч бирор a нуқтага қўйилиб маълум масштабда горизонтал қилиб чизилади (43-расм, б). P кучнинг бошидан реакциялардан бирига, масалан R_B га параллел чизиқ ўтказилади (48-расм, б). Сўнгра R_A реакцияга параллел чизиқ чизиб, бу чизиқлар кесиштирилса, изланаётган ёпиқ куч учбурчаги ҳосил бўлади. abc куч учбурчаги 43-расм, a даги ABL учбурчакка ўхшаш. R_A реакция уша AL тўғри чизиқ бўйлаб дастлаб кўрсатилган йўналишда эмас, балки унга тескари йўналган экан. Номаълум реакциялар учбурчакларнинг ўхшашлигидан фойдаланиб аниқланади:

$$\frac{R_A}{AL} = \frac{R_B}{BL} = \frac{P}{AB}.$$

Бу икки тенгламадан R_A ва R_B реакциялар аниқланади, бунинг учун AL ва BL кесмаларнинг узунлиги аниқланиши керак. Масала шартида $AE=a$ деб берилгани учун $EC=BL=$ $=AE\,\mathrm{tg}\,\alpha=a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Бу ҳолда AL гипотенуза $AL=\sqrt{AB^2+BL^2}=$ $=\sqrt{9a^2+3a^2}=2\sqrt{3}a=3{,}46a$. R_A ни $\frac{R_A}{AL}=\frac{P}{AB}$ тенгламадан, R_B ни $\frac{R_B}{BL}=\frac{P}{AB}$ тенгламадан топамиз: $R_A\approx 20{,}4$кН; $R_B=3{,}85$кН.

Энди R_A ва R_B реакциялар аналитик усулда аниқланади. Бунинг учун координата ўқлари ўтказилади. Координагалар бошини A нуқтада олиб, x ўқи ўнг томонга горизонтал y ўқи юқорига тик йўналтирилади. R_A реакциянинг x ўқи билан ҳосил қилган бурчаги β билан белгиланади, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{BL}{AB}=$ $=0{,}578$; бундан $\beta=30°$ эканлиги келиб чиқади. Кучлар текисликда жойлашган кесишувчи кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат тенгламалари:

$$\sum F_{kx}=0;\quad P-R_A\cos\beta=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\quad -R_A\sin\beta+R_B=0.$$

Тенгламаларнинг биринчисидан $R_A=23{,}06$ кН экани, иккинчисидан $R_B=11{,}53$ кН экани топилади.

2. Стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучларини аниқлаш. Бунинг учун тугунни кесиш деб аталадиган усул қўлланади. Берилган кучлар ва боғла-

нишларнинг реакция кучлари таъсири остида ферма мувозанатда булгани учун унинг ҳаёлан кесиб олинган ҳар бир тугуни ҳам мувозанатда туриши керак. Кесиб олинган тугунларга кесиб юборилган стерженларнинг реакциялари, шунингдек баъзи ҳолларда берилган кучлар ва таянч реакциялари таъсир қилади. Стерженларнинг реакциялари стерженларда пайдо буладиган зуриқиш кучларига модул жиҳатдан тенг булиб, уларга тескари йуналади. Стерженларнинг реакциялари s ва s' билан белгиланади, $s=s'$. Ҳисоблашга эндигина киришилган вақтда ҳали ферманинг қайси стержени сиқилган, қайси стержени чузилган экани маълум булмайди. Шунинг учун шартли равишда ҳамма стерженлар чузилган деб, яъни стерженларнинг реакциялари тугундан стерженнинг уртасига томон йуналган деб фараз қиламиз. Агар ҳисоблаш натижасида бирор реакциянинг қиймати минус ишорали булиб чиқса, тегишли стержень сиқилаётган булади. Энг олдин A тугун кесилади, чунки бу тугунда реакцияси аниқланмаган икки стержень (1 ва 2-стержень) бор. Бу масалада энг олдин B тугунни кесиш ҳам мумкин эди, чунки унда ҳам реакцияси аниқланмаган икки (*8, 9*) стержень бор. Буларга қараб олдин таянчлардаги тугунларни кесиш керак деган фикр чиқмаслиги лозим. C тугунни кесиш мумкин эди, лекин унда реакцияси ҳали аниқланмаган учта (*1, 3, 6*) стержень учрашади, текисликда жойлашган кесишувчи кучларнинг иккита мувозанат тенгламасидан учта номаълум реакцияни топиб булмайди, шунинг учун иш реакцияси аниқланмаган икки стержень учрашадиган A тугунни кесишдан бошланди, A тугунга A шарнирнинг R_A реакцияси ва кесилган 1- ва 2-стерженнинг s_1 ва s_2 реакциялари қуйилган (43-расм, *в*). Координата уқлари аввалгича олинади. A тугунга қуйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_2+s_1\cos\alpha-R_A\cos\beta=0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad s_1\sin\alpha-R_A\sin\beta=0.$$

Бу тенгламаларга $\sin\beta$ ва $\cos\beta$ нинг таянч реакцияларини аниқлашда топилган қийматларини қуйиб, $s_1=13{,}31$ кН, $s_2=13{,}32$ кН экани топилади. Иккала реакциянинг ишораси мусбат булиб чиқди, демак, 1- ва 2-стерженлар чузилади. Расмда s_1' реакция C тугунга, s_2' реакция E тугунга қуйилади. Энди реакцияларнинг туғри топилганини куч учбурчагини ясаб текшириб курилади, бу учбурчак ёпиқ булиши керак (43-расм, *г*).

Энди қайси тугунга утамиз деган савол туғилади. Кесиладиган тугунда бошқалардан ташқари реакцияси ҳали аниқланмаган икки стержень учрашадиган булиши керак, бу C тугундир. C тугун кесилади, унга берилган $\boldsymbol{P}$ куч, 1-стерженнинг ҳозиргина аниқланган $s_1'=s_1$ реакцияси, кесилган 3- ва

6-стерженнинг s_3 ва s_6 реакциялари қўйилган (43-расм, *в*). *C* тугунга қўйилган кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad P-s_1'\cos\alpha+s_6=0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad -s_2\sin\alpha-s_3=0.$$

Бу тенгламаларнинг ечими $s_3=11{,}53$ кН, $s_6=13{,}35$ кН. 3- ва 6-стерженларнинг реакцияси манфий бўлиб чиқди, демак бу стерженлар сиқилади. Энди *C* тугунга қўйилган кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб, куч кўпбурчаги (тўртбурчак) ясалади (43-расм, *г*): у ёпиқ бўлиши керак. Бу ерда қўйидагиларга эътибор бериш керак. Текисликда жойлашган кесишувчи кучларнинг мувозанатига тегишли олдин ечиб кўрсатилган масалаларда берилган кучлар битта бўлиб, куч кўпбурчаги ясашда аввал айни ўша берилган куч чизилар эди. Бу масалада *C* тугундаги кучлар учун куч кўпбурчаги ясашда берилган кучлар битта эмас, балки иккита: берилган ***P*** куч ва ҳозиргина аниқланган s_1 реакция кучи. Шунинг учун куч кўпбурчаги ясашда ***P*** куч билан s_1 реакцияни йўналишларига қараб бирин-кетин қўйиб чизиш, сўнгра эса изланаётган s_3 ва s_6 реакцияларга параллел бўлган тўғри чизиқларнинг бирини *P* кучнинг бошидан, иккинчисини s_1 реакциянинг охиридан ўтказиш лозим.

Расмда s_3' реакция *E* тугунга, s_6' реакция *D* тугунга қўйилади.

Энди *E* тугун кесилади, унга ҳаммаси бўлиб тўрт куч: s_2' реакция, s_3 реакция ва кесилган 4 ва 5-стерженнинг s_4 ва s_5 реакциялари қўйилган. Бу кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_4+s_5\cos\alpha-s_2'=0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad s_5\sin\alpha+s_3'=0,$$

Нима учун кучларнинг *z* ўқидаги проекциялари тенгламаси тузилмаяпти? Бу ердаги иккинчи тенглама жуда содда бўлиб чиқди. Нима учун s_4 ва s_2 реакцияларнинг проекцияси бу тенгламага кирмай қолди? Чунки икки тенгламанинг ечими $s_5=13{,}32$ кН, $s_4=6{,}66$ кН. *E* тугунга қўйилган кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб куч кўпбурчаги (тўртбурчак) ясалади, у ёпиқ бўлиши керак (43-расм, *г*). Расмда s_4 реакция *K* тугунга, s_5 реакция *D* тугунга қўйилади. Энди хоҳласак *D* тугунни, хоҳласак *K* тугунни кесамиз, чунки бу тугунларнинг ҳар бирида ҳали реакцияси аниқланмаган икки стержень учрашади. *K* тугунни кесишга қарор қилдик.

K тугунга ҳозиргина аниқланган s_4' реакция ва кесилган 7 ва 9-стерженларнинг номаълум s_7 ва s_9 реакциялари қўйилган. K тугунга қўйилган s_4', s_7 ва s_9 кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad s_9 - s_4' = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad s_7 = 0.$$

Кўриниб турибдики, y ўқига фақат s_7 реакция проекция беради, лекин мувозанат тенгламасидан $s_7 = 0$ экани келиб чиқади. Шундай бўлишини тенглама тузмасдан олдин ҳам фермалар ҳақидаги леммага асосланиб айтиш мумкин эди. Ҳақиқатан ҳам, $s_7 = 0$ бўлиб чиқди. Бу ҳол масаланинг тўғри ечилаётганини билдиради. $s_7 = 0$ бўлганига караб, 7-стерженни олиб ташласа бўлар экан, деган фикр чиқмаслиги керак, чунки 7-стержень олиб ташланса, ферма қаттиқ конструкция бўлмай қолади. Биринчи тенгламадан $s_9 = s_4' = +6{,}66$ кН экани топилади. Кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб куч купбурчаги (бу ҳолда иккибурчак) ясалади, у ҳақиқатан ҳам ёпиқ бўлади, яъни бу тугундаги икки куч модул жиҳатидан тенг бўлиб, қарама-қарши йўналган (43-расм, $г$). Расмда s_9 реакция B тугунга қўйилади: гарчи s_7 реакция нолга тенг бўлса ҳам умумийликка зарар келтирмаслик учун s_7 реакция D тугунга қўйилади. Энди D тугун кесилади, унга олдин аниқланган s_6, s_5, s_7 реакциялар ва кесилган 8-стерженнинг s_8 реакцияси қўйилган. Бу кучлар учун ҳам иккита мувозанат тенгламаси тузиш мумкин, лекин аниқланиши керак бўлган фақат битта реакция (s_8 реакция) қолди. Шунинг учун s_8 реакция қатнашган фақат битта тенглама тузилади. Бу тенглама кучларнинг x ўқидаги проекциялари йиғиндиси бўлиши ҳам, y ўқидаги проекциялари йиғиндиси бўлиши ҳам мумкин. Бироқ кучларнинг y ўқидаги проекциялари тенгламасини тузган маъқул:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -s_8 \sin\alpha - s_5' \sin\alpha = 0,$$

чунки s_7 реакциянинг ўзи нолга тенг. Бу тенгламани $\sin\alpha$ га қисқартириб, $s_8 = -s_5' = -13.32$ кН экани топилади. 8-стержень сиқилади. Бу тугунга қўйилган кучлар учун куч учбурчаги (диққат қилинг: тўртбурчак эмас — учбурчак) ясалади, чунки $s_7 = 0$. Бу учбурчак ёпиқ куч учбурчаги бўлади (43-расм, $г$). s_8' реакция B тугунга қўйилади. Изланган ҳамма реакциялар аниқланди. Кесилмаган фақат битта тугун қолди, у ҳам бўлса, B тугундир. B тугунда учрашадиган 8 ва 9-стерженларнинг реакциялари ҳам аниқланди. Шунга қарамасдан B тугун ҳам кесиб кўрилади, ундан номаълумларни аниқлаш мақсадида эмас, балки топилган реакцияларни текшириб кўриш мақсадида фойдаланилади. B тугунга уч куч қўйилган: R_B, s_9', s_8' реакциялар. B тугун мувозанатда тургани учун кучларнинг x ва y ўқларидаги проекциялари йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши керак ёки шу уч кучдан тузилган куч учбурчаги ёпиқ бўлиши керак. Аввал мувозанат тенгламаларини тузиб, улардаги реакциялар ўрнига қийматлари қўйилади, айният ҳосил бўлиши керак:

$$\sum F_{kx}=0; \quad -s_8'\cos\alpha - s_9' = -(-13{,}32)\cdot 0{,}5 - 6{,}66 = 0,$$

$$\sum F_{ky}=0; \quad s_8'\sin\alpha + R_B = -13{,}32\cdot 0{,}866 + 11{,}53 = 0.$$

Кучларнинг ҳақиқий йўналишини ҳисобга олиб тузилган куч учбурчаги ҳам ҳақиқатда ёпиқ бўлиб чиқди (43-расм, *г* да B тугун).

Ҳисоблаш натижаларига қараб стерженларда ҳосил бўлган зўриқиш кучларига тегишли жадвал тузилади.

Стерженнинг номери	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Зўриқиш кучининг ишораси	+	+	−	+	+	−		−	+
Зўриқиш кучи, кН	13,31	13,32	11,53	6,66	13,32	13,35	0	13,32	6,66

18-§. Фермалар ҳақида леммалар

1-лемма. Агар ферманинг ташқи куч қўйилмаган тугунида икки стержень учрашса, бу стерженларнинг реакцияси нолга тенг (44-расм).

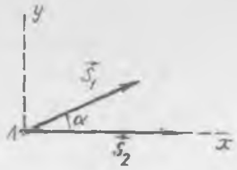
Исботи. A нуқтада кесишувчи s_1 ва s_2 кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_2 + s_1\cos\alpha = 0,$$

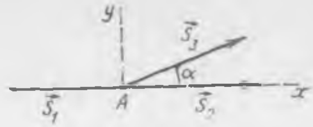
$$\sum F_{ky}=0; \quad s_1\sin\alpha = 0.$$

Иккинчи тенгламада $\sin\alpha$ нолдан фарқ қилгани учун $s_1=0$ экани топилади. $s_1=0$ қийматни биринчи тенгламага қўйиб, $s_2=0$ экани аниқланади. Шу билан лемма исбот этилди.

2-лемма. Агар ферманинг ташқи куч қўйилмаган тугунида уч стержень учрашиб, улардан иккитаси бир тўғри чизиқда ётган бўлса, учинчи стерженнинг реакцияси нолга тенг бўлади ва олдинги иккитасининг реакциялари бир-бирига тенг бўлади (45-расм).



44-расм.



45-расм.

Исботи. A нуқтада кесишувчи s_1, s_2, s_3 кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади:

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_2+s_3\cos\alpha-s_1=0,$$
$$\sum F_{ky}=0; \quad s_3\sin\alpha=0.$$

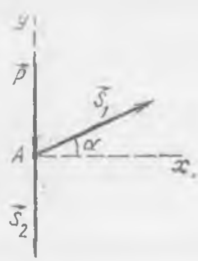
Иккинчи тенгламадан $s_3=0$ эканлиги кўриниб турибди. S_3 нинг қиймати биринчи тенгламага қўйилса, $R_2=s_1$ бўлиб чиқади. Шу билан лемма исбот бўлди. Бунга 17-§ да ҳисоб қилинган ферманинг K тугуни мисол бўлади: $s_7=0$, $s_9=s_4'$.

3-лемма. Агар ферманинг икки стержень учрашган тугунига стерженлардан бирининг ўқи бўйлаб йўналган ташқи куч қўйилган бўлса, бу стержендаги зўриқиш кучи шу ташқи кучга модули жиҳатидан тенг бўлиб, иккинчи стержендаги зўриқиш кучи нолга тенг (46-расм).

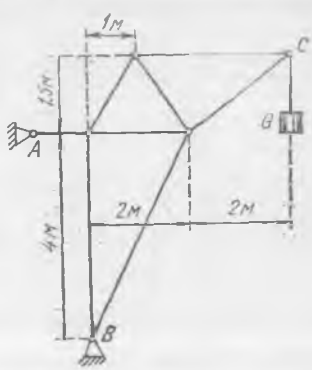
Исботи. A тугунда кесишувчи кучларнинг мувозанат тенгламалари тузилади,

$$\sum F_{kx}=0; \quad s_1\cos\alpha=0,$$
$$\sum F_{ky}=0; \quad s_1\sin\alpha-p-s_2=0.$$

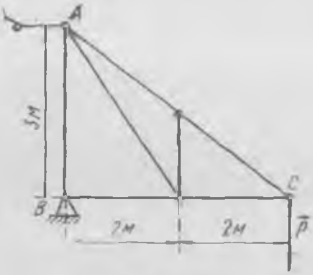
Биринчи тенгламадан $s_1=0$ эканлиги кўриниб турибди. s_1 нинг нолга тенг қиймати иккинчи тенгламага қуйилса, $s_2=-p$ бўлиб чиқади. Шу билан лемма исбот бўлди.



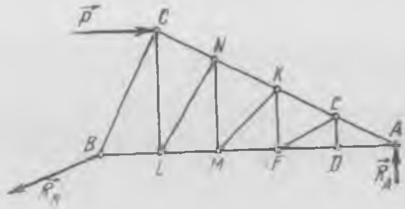
46-расм.



47-расм.



48-расм.



49-расм.

17- ва 18- § ларга доир масалалар

1. Кўтариш крани 47- расмда кўрсатилган ферма шаклида ишланган бўлиб, $G = 20$ кН юк кўтариб турибди. Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Краннинг таянч реакцияларини ва стерженларда пайдо бўлган зуриқиш кучларини топинг. Жавоб: $R_A = 20$ кН; $R_B = 28{,}3$ кН.

2. Ферманинг C тугунига вертикал йўналган $P = 5$ кН куч қўйилган (48- расм). Ўлчамлар расмда кўрсатилган. Ферманинг таянч реакцияларини ва стерженларда пайдо бўладиган зуриқиш кучларини топинг Жавоб: $R_A = 6{,}66$ кН, $R_B = 8{,}33$ кН.

3. Олдинги масалада тилга олинган фермада P куч йўналишини ўзгартирмасдан C тугунга эмас, A тугунга қўйилса, таянч реакциялари ва стерженларидаги зўриқиш кучлари нимага тенг булади?

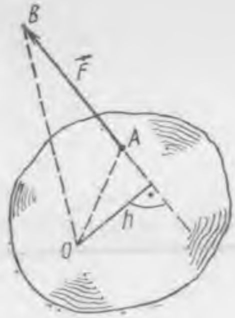
4. Таянч реакциялари олдин аниқлаб қўйилган ферманинг зўриқишлари нолга тенг бўлган стерженларини фермалар ҳақидаги леммалардан фойдаланиб аниқланг (49- расм). Ишни осонлаштириш учун D, E, F, K, M, N тугунларни мана шу тартибда бирин-кетин кўриб чиқинг. Стерженларга номер қўйинг.

3-БОБ КУЧНИНГ МАРКАЗГА ВА ЎҚҚА НИСБАТАН МОМЕНТЛАРИ

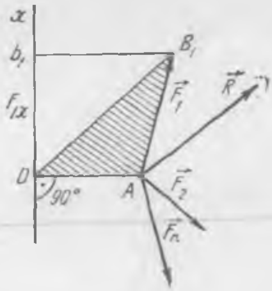
19- §. Кучнинг марказга нисбатан моменти

Тажрибанинг кўрсатишича, жисмга куч таъсир қилганда уни илгарилама ҳаракатга келтиришдан ташқари баъзан бирор марказ атрофида айлантиради ҳам.

Чизма текислигига тик бўлган қўзғалмас ўқ атрофида айлана оладиган қаттиқ жисмнинг A нуқтасига ўша текисликда ётган F куч қўйилган деб фараз қиламиз (50- расм). Жисм айланадиган қўзғалмас ўқ чизма текислигини O нуқтада кесиб ўтсин. O марказдан F кучнинг таъсир чизиғига тик қилиб



50-расм.



51-расм.

туширилган h кесма кучнинг O марказга нисбатан *елкаси* деб аталади. O нуқта *момент маркази* дейилади. Кучнинг қўйилиш нуқтасини таъсир чизиғи бўйлаб кўчириш мумкин бўлгани сабабли кучнинг жисмни айлантириш таъсири уч нарсага: 1) кучнинг F модули ва h елка узунлигига, 2) O марказдан ва F кучдан ўтадиган OAB бурилиш текислигининг вазиятига, ниҳоят, 3) бу текисликда бурилиш йўналишига боғлиқ. Кучнинг жисмга кўрсатадиган айлантириш таъсири миқдор жиҳатдан кучнинг марказга нисбатан моменти деган тушунча орқали ифодаланади. *Кучнинг марказга нисбатан моменти* деб куч модули билан кучнинг ўша нуқтага нисбатан елкасининг плюс ёки минус ишора билан олинган кўпайтмасига айтилади. Бу момент *алгебраик момент* дейилади. F кучнинг O марказга нисбатан олинган алгебраик моменти $m_0(F)$ символ билан белгиланади. Таърифга биноан,

$$m_0(F) = \pm Fh. \tag{12}$$

Агар F куч жисмни O марказ атрофида соат стрелкаси айланишига тескари айлантирмоқчи бўлса, моментнинг ишораси мусбат қилиб, акс ҳолда манфий қилиб олинади. Кучнинг марказга нисбатан моментининг ўлчов бирлиги куч бирлигининг узунлик бирлигига кўпайтмасига тенг. Куч Ньютон ҳисобида, узунлик метр ҳисобида ўлчанса, моментнинг ўлчов бирлиги 1 Н · м бўлади. Кучнинг марказга нисбатан моментининг таърифидан кучни ўз таъсир чизиғи бўйлаб кўчирганда ўзгармас момент келиб чиқади. Агар кучнинг таъсир чизиғи момент марказидан ўтса (яъни $h=0$ бўлса), кучнинг ўша марказга нисбатан моменти нолга тенг бўлади, Марказга нисбатан моментнинг сон қиймати OAB учбурчак юзининг иккиланганига тенг (50- расмга қаранг). Бу учбурчакда AB томон куч бирликларида ифодалангани учун OAB учбурчакнинг юзи юз бирликларида эмас, куч моменти бирликларида ифодаланади.

20- §. Тенг таъсир этувчининг моменти тўғрисида Вариньон теоремаси

Теорема: текисликда жойлашган кесишувчи кучлар тенг таъсир этувчисининг бирор марказга нисбатан олинган моменти қушилувчи кучларнинг ўша марказга нисбатан олинган моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

Бу теоремани исбот этиш учун текисликда A нуқтада кесишувчи (F_1, F_2, ..., F_n) кучлар системаси кўриб чиқилади (51- расм). Ихтиёрий O марказ олиб, у орқали OA кесмага тик қилиб Ox ўқи ўтказилади: ўқнинг мусбат йўналиши шундайки, кучлардан ҳар бирининг O марказга нисбатан моментининг ишораси кучнинг ўқдаги проекциясининг ишораси билан бир хил бўлади. Энди $m_0(F_1)$, $m_0(F_2)$, ..., $m_0(F_n)$ моментларнинг ифодаси аниқланади. (12) формулага асосан $m_0(F_1) = 2\Delta\, OAB_1$ юзи. OAB_1 учбурчакнинг юзи асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг. Бу ерда асоси деб OA кесма олинса, баландлик Ob_1 бўлади: $2\Delta\, OAB_1$ юзи $OA \cdot Ob_1$, бироқ Ob_1 кесма F_1 кучнинг Ox ўқидаги проекциясини билдиради, $Ob_1 = F_{1x}$. Шунинг учун

$$m_0(F_1) = OA \cdot F_{1x}. \tag{13}$$

Бошқа кучларнинг моменти ҳам шу каби ҳисобланади. F куч OA чизиқдан пастда ётганда ҳам (13) формула тўғри бўлаверади, бунда кучнинг проекцияси манфий бўлганлиги учун моментнинг ишораси ҳам манфий бўлади.

F_1, F_2, ..., F_n кучларнинг тенг таъсир этувчиси R билан белгиланади, $R = \sum F_k$. Энди 10-§ да тилга олинган теоремадан фойдаланиб, тенг таъсир этувчининг бирор ўқдаги (масалан, x ўқидаги) проекцияси қушилувчи кучларнинг ўша ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг экани, яъни $R_x = \sum F_{kx}$ экани аниқланади. Бу тенгликнинг иккала томони OA га кўпайтирилади.

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx}).$$

Бу тенгликнинг чап томонида OA билан тенг таъсир этувчининг x ўқидаги R_x проекцияси кўпайтмаси турибди, (13) формулага асосан бу кўпайтма $m_0(R)$ га, яъни тенг таъсир этувчининг O марказга нисбатан моментига тенг. Ўнг томондаги сумма ичидаги кўпайтма эса ҳар бир кучнинг O га нисбатан моментини билдиради. Демак, юқоридаги тенглик

$$m_0(\boldsymbol{R}) = \sum m_0(\boldsymbol{F}_k). \tag{14}$$

шаклида ёзилади. Теорема шу билан исбот этилди. (14) формула Вариньон теоремасининг математик ифодасидир.

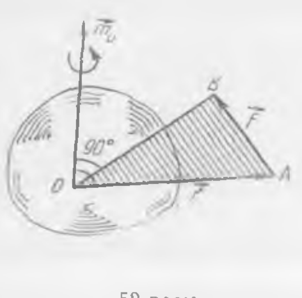
21-§. Кучнинг марказга нисбатан моментининг вектори

Қаттик жисмга қўйилган фазовий кучлар системасини ўрганишда кучнинг марказга нисбатан моменти тушунчасини бирмунча кенгроқ баён этган маъқул.

F кучнинг жисмни айлантириш таъсири сифатидаги моменти уч нарсага боғлиқ эканини, яъни 1) моментнинг модулига, 2) F кучнинг таъсир чизиғи ва O марказдан ўтадиган OAB бурилиш текислигининг вазиятига ҳамда 3) ўша текисликдаги бурилиш йўналишига боғлиқ эканлиги айтиб ўтилган эди. Ҳамма кучлар ва O марказ бир текисликда жойлашган ҳолда OAB бурилиш текислигининг вазиятини доим таърифлаб бераверишга эҳтиёж қолмайди, шунинг учун кучнинг O га нисбатан моментини $\pm Fh$ га тенг бўлган алгебраик скаляр миқдор деб таърифлаш мумкин. Бу ердаги ишора бурилиш йўналишини кўрсатади.

Бироқ кучлар фазода ихтиёрий равишда жойлашган ҳолда ҳар хил кучларнинг бурилиш текислиги турлича вазиятда бўлиб, улар қўшимча равишда тавсифлаб берилиши керак. Маълумки, текисликнинг фазодаги вазияти бу текисликка тик бўлган кесма (вектор) орқали ифодаланади. Агар бу векторнинг модули куч моментининг модулига тенг бўладиган ва бу векторнинг йўналиши кучнинг буриш йўналишини кўрсатадиган қилиб олинса, у ҳолда бу вектор кучнинг марказга нисбатан моментининг учала характеристикасини тўлиқ аниқлайди. Бу вектор $\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})$ символ билан белгиланади.

Шунинг учун умумий ҳолда F кучнинг O марказга нисбатан олинган $\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})$ моменти O марказга қўйилган $\boldsymbol{m}_0$ вектор билан белгиланади, унинг модули маълум масштабда F кучнинг модули билан h елка кўпайтмасига тенг бўлиб, ўзи эса O марказдан ва $\boldsymbol{F}$ кучдан ўтадиган OAB текисликка тик бўлади (52-расм). $\boldsymbol{m}_0$ векторни шундай томонга йўналтириш кераккки, унинг учидан туриб қаралганда куч OAB текисликни соат стрелкасининг ҳаракатига тескари айлантирадиган бўлсин. Демак, $\boldsymbol{m}_0$ вектор уч нарсани, яъни моментнинг модулини, ҳар хил кучлар учун ҳар хил бўлган бурилиш текислигининг вазиятини, ўша текисликда бурилиш йўналишини билдиради. $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг қўйилиш нуқтаси момент олинадиган марказнинг ўрнини кўрсатади. Кучнинг марказга нисбатан моменти қанча момент бирлигига (Н · м. га) тенг бўлса, бу моментни тасвирлайдиган $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг узунлиги масштабга мос келадиган шунча узунлик бирлигига тенг бўлади. Кучнинг марказга нисбатан моментининг вектори сирпанувчи вектордир.



52-расм.

22-§. Кучнинг марказга нисбатан моментини вектор купайтма орқали ифодалаш

Бир нарсани эслатиб утиш керак: $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг вектор купайтмаси шундай бир $\boldsymbol{c}$ вектордирки, бу $\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ дан утган текисликка тик булиб, шундай томонга йуналганки, унинг учидан туриб қаралганда $\boldsymbol{a}$ ни $\boldsymbol{b}$ нинг устига энг қисқа йул билан тушириш учун уни соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. $\boldsymbol{c}$ векторнинг модули маълум масштабда $\overrightarrow{OA}$ ва F векторлардан ясалган параллелограммнинг юзига тенг. $\overrightarrow{OA}$ ва F векторларнинг $\overrightarrow{OA} \times F$ вектор купайтмасини (52- расм) куриб чиқишда вектор купайтманинг таърифидан фойдаланилади. $\overrightarrow{OA}$ ва F векторлардан ясалган параллелограммнинг юзи иккита OAB учбурчакнинг юзига тенг. Таърифга асосан, вектор купайтманинг модули

$$\left|\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}\right| = 2\,\Delta OAB \text{ юзи.}$$

лекин m_0 векторнинг модули ҳам $2\Delta OAB$ юзига тенг, шунинг учун

$$\left|\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}\right| = m_0.$$

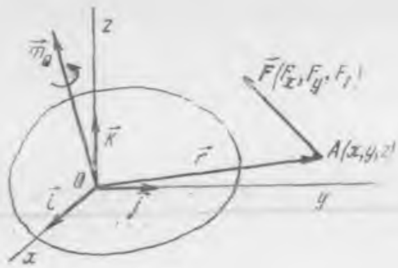
$\overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F}$ вектор OAB текисликка тик булиб, шундай томонга йуналганки, унинг учидан туриб қаралганда OA ни F нинг устига энг қисқа йул билан тушириш учун соат стрелкаси ҳаракатига тескари буриш керак. $\overrightarrow{OA} \times F$ вектор $\boldsymbol{m}_0$ вектор билан бир хил йуналган. Демак, $OA \times \boldsymbol{F}$ вектор билан $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг модули тенг, йуналиши бир хил. Ундан ташқари, бу икки вектор улчов бирлиги жиҳатидан айни бир миқдорни ифодалайди. Шунинг учун

$$\boldsymbol{m}_0 = \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F} \text{ ёки } \boldsymbol{m}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (15)$$

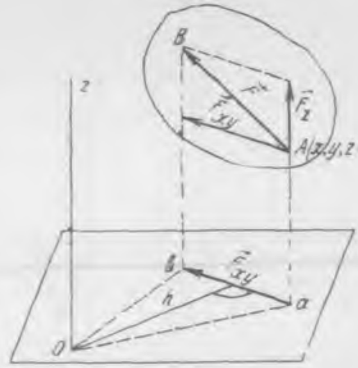
тарзида ёзилади, бу ерда $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}$ вектор A нуқтанинг O марказга нисбатан *радиус-вектори* деб аталади. Куч моментининг (15) ифодасидан баъзи теоремаларни исбот этишда фойдаланилади.

F кучнинг O марказга нисбатан олинган моменти O марказни куч қуйилган A нуқтага туташтирувчи $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор билан кучнинг вектор купайтмасига тенг.

(15) формула $\boldsymbol{m}_0$ моментни аналитик равишда ҳисоблаб аниқлашга ҳам имкон беради. O марказ орқали $Oxyz$ координата ўқлари ўтказилади (53- расм). Бу ўқларда $\boldsymbol{F}$ кучнинг F_x, F_y, F_z проекциялари ва куч қуйилган A нуқтанинг x, y, z координаталари берилган булсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда икки векторнинг купайтмасини детерминант билан ифо-



53-расм.



54-расм.

далаш формуласига асосан, m_0 вектор қуйидагича ифодаланади:

$$m_0 = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (15')$$

бу ердаги i, j, k — координата ўқларининг бирлик векторлари, x, y, z — r радиус-векторнинг ўқлардаги проекциялари, яъни A нуқтанинг координаталари. Ҳар қандай вектор каби m_0 векторни ҳам бирлик векторлар орқали $m_0 = m_{0x} i + m_{0y} j + m_{0z} k$ шаклида ёйиш мумкин. Демак, (15) детерминант биринчи йўл элементлари бўйича ёйилса, m_0 векторнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$m_{0x} = yF_{xz} - F_y, \quad m_{0y} = zF_x - xF_z, \quad m_{0z} = xF_y - yF_x \qquad (15'')$$

тенгликлар билан ифодаланади. Бу проекциялардан фойдаланиб m_0 векторнинг модулини ва йўналишини (йўналтирувчи косинусларини) аниқлаш мумкин:

$$m_0 = \sqrt{m_{0x}^2 + m_{0y}^2 + m_{0z}^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{m_{0x}}{m_0}, \quad \cos\beta = \frac{m_{0y}}{m_0}, \quad \cos\gamma = \frac{m_{0z}}{m_0}.$$

23-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти

Кучлар фазода ихтиёрий жойлаштирилганда статика масалаларини ечишда кучнинг ўққа нисбатан моменти тушунчасидан фойдаланилади. Кучнинг ўққа нисбатан моменти кучнинг жисмни аниқ бир ўқ атрофида айлантириш кучини билдиради.

Бирор z ўқи атрофида айлана оладиган қаттиқ жисмни кўриб чиқамиз (54-расм). Бу жисмнинг A нуқтасига F куч қуйилган. Бу куч z ўқи билан бир текисликда ётмайди. Ўқдаги бирор O нуқтадан z ўқига тик қилиб xy текисликни ўтказиб, F куч икки тузувчига ажратилади. Бу тузувчилардан бири z ўқига, иккинчиси xy текисликка параллел қилиб олинади. Биринчи тузувчи F_z, иккинчи тузувчи F_{xy} билан белгиланади, (F_{xy} тузувчи берилган F кучнинг xy текисликдаги проекцияси булади.) F_z куч z ўқига параллел булиб йуналгани учун жисмни бу ўқ атрофида айлантира олмайди, фақат жисмни ўқ бўйлаб суришга интилади. Демак, F кучнинг бутун айлантириш таъсири F_{xy} тузувчи ҳосил қилаётган таъсир билан бир хил булади. Шунинг учун F кучнинг z ўққа нисбатан моментини $m_z(F)$ билан белгилаб,

$$m_z(F) = m_z(F_{xy})$$

деб ёзамиз. $m_z(F_{xy})$ символ эса F_{xy} кучнинг z ўқига нисбатан моментини билдиради. z ўқига тик бўлган текисликда ётган F_{xy} кучнинг (тўғриси, кучнинг текисликдаги проекциясининг) айлантириш таъсири F_{xy} кучнинг модули билан кучдан ўққача булган h масофа купайтмаси орқали ифодаланади. Бироқ F_{xy} кучнинг z ўқи билан xy текислик кесишган O нуқтага нисбатан моменти ҳам ўша $F_{xy}h$ купайтма орқали ифодаланади. Шунга қараб $m_z(F_{xy}) = m_0(F_{xy})$ ёки юқоридаги тенгликка асосан,

$$m_z(F) = m_0(F_{xy}) = \pm F_{xy}h \tag{16}$$

тарзда ёза оламиз. Бу ифода эса кучнинг ўққа нисбатан моментининг таърифидир: кучнинг ўққа нисбатан моменти алгебраик миқдор бўлиб, кучнинг ўққа тик булган текисликдаги проекциясидан ўқ билан текислик кесишган нуқтага нисбатан олинган моментга тенг.

Ўққа нисбатан моментнинг ишораси қуйидагича аниқланади: агар z ўқининг мусбат учидан туриб қаралганда F_{xy} проекция жисмни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантиришга интилса, моментнинг ишораси мусбат қилиб олинади, соат стрелкаси ҳаракати бўйича айлантиришга интилса, ишора манфий қилиб олинади.

Кучнинг ўққа нисбатан моментини уңинг F_{xy} проекцияси ва момент марказидан тузилган Oab учбурчакнинг иккиланган юзи орқали ифодалаш ҳам мумкин:

$$m_z(F) = \pm 2\,\Delta Oab \text{ юзи.}$$

Кучнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш босқичларини айтиб ўтамиз. F кучнинг бирор z ўқига нисбатан моментини ҳисоблаш учун: 1) z ўқига тик қилиб xy текислик ўтказилади, (текисликни z ўқининг ҳар қандай нуқтасидаң ўтказиш мумкин); 2) F кучни ўша текисликка проекциялаб, F_{xy} проекциянинг модули аниқланади; 3) z ўқи билан xy текислик кесишган O нуқтадан F_{xy} проекциянинг таъсир чизиғига тик кесма ўтказиб, унинг h узунлиги аниқланади: 4) $F_{xy}h$ кўпайтма ҳисоблаб аниқланади, 5) моментнинг ишораси аниқланади.

F кучнинг z ўқига нисбатан моменти таърифидан моментнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. F кучни ўзининг таъсир чизиғи бўйлаб бошқа нуқтага қўйганда кучнинг ўққа нисбатан моменти ўзгармайди, чунки бу ҳолда F кучнинг xy текисликдаги F_{xy} проекцияси ҳам, h елкаси ҳам ўзгармайди.

2. Агар куч ўқни кесиб ўтса, кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда h елка нолга тенг.

3. Агар куч ўққа параллел бўлса, кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда кучнинг ўққа тик бўлган текисликдаги проекцияси нолга тенг.

2 ва 3- хоссаларни бирлаштириб, куч билан ўқ бир текисликда ётса, кучнинг ўққа нисбатан моменти нолга тенг дея оламиз, чунки куч билан ўқ бир текисликда ётганда куч ўқни кесиб ўтиши ёки ўққа параллел бўлиши мумкин.

4. Агар куч ўққа тик бўлса, кучнинг шу ўққа нисбатан моменти куч модули билан кучдан ўққача бўлган масофанинг кўпайтмасига тенг.

24- §. Кучнинг ўққа нисбатан моментининг аналитик ифодалари

$Oxyz$ координата системасида жисмга $A(x, y, z)$ нуқтада F куч қўйилган (55- расм). Бу кучнинг z ўқига нисбатан моменти аналитик равишда аниқланади. Бунинг учун кучнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблаш босқичлари тартибида куч ўққа тик бўлган текисликка проекцияланади ва таърифга асосан,

$$m_z(F) = m_0(F_{xy})$$

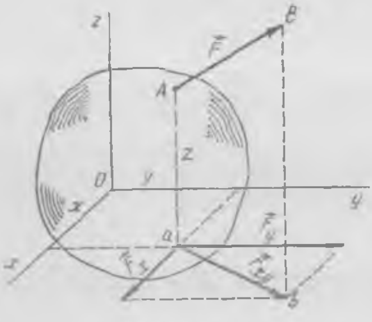
тарзида ёзилади. xy текисликдаги F_{xy} проекция x ва y ўқлари бўйлаб йўналган икки F_x ва F_y тузувчига ажратилади: $F_{xy} = F_x + F_y$. Текисликда жойлашган кесишувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисининг моменти тўғрисидаги Вариньон теоремасидан фойдаланиб,

$$m_0(F_{xy}) = m_0(F_x) + m_0(F_y)$$

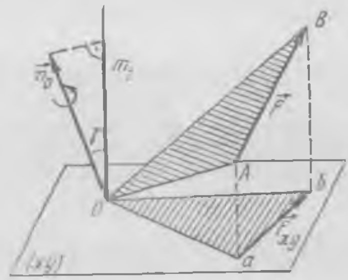
тенглик ёзилади. F_x кучнинг O нуқтага нисбатан елкаси y кесма, F_y кучнинг елкаси эса x кесмадир. Шунинг учун расмда $m_0(F_x) = -yF_x$, $m_0(F_y) = xF_y$ экани кўринади (F_x куч жисмни O нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракати бўйича бургани учун унинг моменти манфий). Моментларнинг бу ифодаларини юқоридаги формулага қўямиз. Демак,

$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

Қолган икки ўққа нисбатан моментлар ҳам шу тариқа ҳисобланади. Ҳар гал куч момент олиниши керак бўлган ўққа тик



55-расм.



56-расм.

текисликка проекцияланади, кучнинг проекцияси икки ўқ бўйлаб йўналган тузувчиларга ажратилади, Вариньон теоремаси татбиқ этилади ва ҳоказо. Ниҳоят,

$$
\begin{aligned}
m_x(F) &= yF_z - zF_y,\\
m_y(F) &= zF_x - xF_z, \qquad (17)\\
m_z(F) &= xF_y - yF_x.
\end{aligned}
$$

формулалар ҳосил бўлади. Булар кучнинг координата ўқларига нисбатан олинган моментининг аналитик ифодаларидир. Кучнинг координата ўқларидаги проекциялари ва қўйилиш нуқтасининг координаталари маълум бўлган ҳолда моментни бу формулалардан фойдаланиб ҳисоблаб чиқариш мумкин.

25-§. Кучнинг ўққа нисбатан моменти билан марказга нисбатан моменти орасидаги муносабат

Қаттиқ жисмга бирор A нуқтада F куч қўйилган бўлсин (56-расм). Бирор z ўқи ўтказиб, унда ихтиёрий бир O нуқта оламиз. Ўша F кучдан O марказга нисбатан олинган моментнинг m_0 вектори O нуқтага қўйилган бўлиб, OAB текисликка тик йўналади ва модули ΔOAB юзининг иккиланганига тенг булади:

$$m_0 = 2\Delta OAB \text{ нинг юзи},$$

O нуқтадан z ўқига тик қилиб xy текислик ўтказамиз. F кучнинг z ўқига нисбатан $m_z(F)$ моментини аниқлаш учун кучни xy текисликка проекциялаб, F_{xy} проекциянинг ўқ билан текислик кесишган O нуқтага нисбатан моментини аниқлаймиз. Бу моментнинг сон қиймати Oab учбурчак юзининг иккиланганига тенг:

$$m_z(F) = 2\Delta Oab \text{ юзаси}.$$

Бироқ Oab учбурчак OAB учбурчакнинг xy текисликдаги проекциясидир. Геометриядан маълумки, текис шакл проекциясининг юзи проекцияланаётган шаклнинг юзи билан шакл ва проекция ётган текисликлар орасидаги икки ёқли бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг. Текисликлар орасидаги икки ёқли бурчак эса бу текисликларга ўтказилган тик чизиқлар (нормаллар) орасидаги бурчакка тенг. OAB учбурчак текислигига ўтказилган тик чизиқ $\boldsymbol{m}_0$ вектор, Oab учбурчак текислигига ўтказилган тик чизиқ z ўқидир. $\boldsymbol{m}_0$ вектор билан z ўқи орасидаги бурчакни γ билан белгилаб,

$$\Delta Oab \text{ юзи} = \Delta OAB \text{ юзи } \cos\gamma.$$

тарзида ёза оламиз. Бу тенгликнинг иккала томонини 2 га кўпайтириб, OAB ва Oab учбурчак юзларининг иккилангани мос равишда m_0 ва $m_z(\boldsymbol{F})$ га тенг эканини ҳисобга олиб,

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_0 \cos\gamma \tag{18}$$

тарзида ёза оламиз. $m_0 \cos\gamma$ кўпайтма $m_0 = m_0(\boldsymbol{F})$ векторнинг z ўқидаги проекциясини ифодалагани учун (18) тенгликни яна

$$m_z(\boldsymbol{F}) = m_{0z} \text{ ёки } m_z(\boldsymbol{F}) = [m_0(\boldsymbol{F})]_z \tag{18'}$$

шаклида ёзиш мумкин. Охирги тенгликнинг ўнг томонидаги ифода кучнинг O марказга нисбатан олинган моментининг z ўқидаги проекциясини билдиради. Агар z ўқида O нуқтанинг ўрни ўзгартирилса, у ҳолда $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг сон қиймати ва йўналиши ўзгаради, чунки ҳар гал OAB учбурчак ўзгаради; бироқ $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг z ўқидаги проекцияси Oab учбурчакнинг иккиланган юзига тенг бўлгани ҳолда ўзгармай қолаверади. Натижада қуйидаги теорема исбот қилинди; $\boldsymbol{F}$ кучнинг z ўқига нисбатан моменти шу кучнинг z ўқидаги ихтиёрий марказга нисбатан олинган моментини тасвирловчи векторнинг ўша ўқдаги проекциясига тенг.

Шу теореманинг татбиқи сифатида кучнинг ўққа нисбатан моментининг аналитик ифодаларини унинг марказга нисбатан моменти векторининг учинчи тартибли детерминант орқали ёзилган (15′) ифодасидан келтириб чиқарамиз. $\boldsymbol{m}_0$ вектор, ҳар қандай вектор каби бирлик векторлар орқали $\boldsymbol{m}_0 = m_{0x}\boldsymbol{i} + m_{0y}\boldsymbol{j} + m_{0z}\boldsymbol{k}$ шаклида ёзилади, бу ердаги m_{0x}, m_{0y}, m_{0z} лар — $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари. Ҳозиргина исбот этилган теоремага асосан, бу проекциялар кучнинг тегишли координата ўқига нисбатан олинган моментига тенг. $\boldsymbol{m}_0$ векторнинг m_{0x}, m_{0y}, m_{0z} проекциялари (15″) формулада (22-§ га қаранг) ифодаланган эди. Шунинг учун

$$\begin{aligned} m_x(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}$$

Бу формулалар 24-§ да чиқарилган (17) формулалар билан бир хил.

26-§. Жуфт куч. Жуфт куч моменти

Ўрта мактаб физика курсидан маълумки, йўналишлари бир хил бўлган иккита F_1 ва F_2 параллел кучнинг (57-расм, *a*) тенг таъсир этувчи R кучи қўшилувчи кучлар билан бир хил йўналган бўлиб, унинг модули қўшилувчи кучлар модулларининг йиғиндисига тенг: $R=F_1+F_2$. Тенг таъсир этувчи R куч қўйилган C нуқта кучлар қўйилган A ва B нуқталар орасидаги кесмани кучларнинг модулларига таскари пропорционал бўлган бўлакларга бўлади, яъни

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}. \tag{19}$$

Пропорциянинг хоссаларига асосан, бу тенгликдан

$$\frac{AC}{F_2}=\frac{BC}{F_1}=\frac{AC+BC}{F_1+F_2}$$

ёки

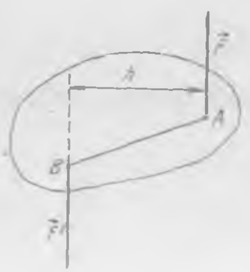
$$\frac{AC}{F_2}=\frac{BC}{F_1}=\frac{AB}{R} \tag{20}$$

тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

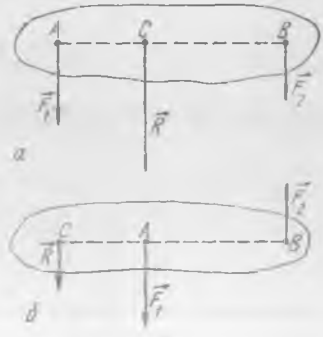
Йўналишлари қарама-қарши бўлган иккита F_1 ва F_2 параллел кучларнинг (57-расм, *б*) тенг таъсир этувчи R кучи катта куч билан бир хил йўналган бўлиб, унинг модули бу кучлар модулларининг айирмасига тенг $R=F_1-F_2$. Тенг таъсир этувчи R куч қўйилган C нуқта AB кесманинг давомида катта куч қўйилган нуқтадан нарида A ва B нуқталардан кучларга тескари пропорционал бўлган масофаларда туради:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{F_2}{F_1}; \quad \frac{AC}{F_2}=\frac{BC}{F_1}=\frac{AB}{R}. \tag{21}$$

Ўзлари параллел, модуллари тенг ва қарама-қарши йўналган иккита F ва F' кучдан иборат система (58-расм) *жуфт*



57-расм.



58-расм.

куч ёки қисқача, *жуфт* дейилади. Жуфт куч (F, F') символ билан белгиланади. Жуфт кучнинг тенг таъсир этувчиси бўлмайди, бироқ жуфтнинг бир чизиқда ётмайдиган тузувчилари (кучлари) мувозанатланмайди, ўзлари қўйилган қаттиқ жисмни айлантиришга интилади. Тенг таъсир этувчиси бўлмагани учун жуфт кучни бир куч билан мувозанатлаб ҳам бўлмайди. Жуфт ҳосил қилиб турган кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги масофа *жуфтнинг елкаси* дейилади. Жуфт кучнинг таъсир чизиқлари орқали ўтадиган текислик *жуфтнинг таъсир текислиги* дейилади. Жисмга жуфт айлантириш таъсирини кўрсатади, бу таъсир уч нарсага: 1) жуфт кучнинг F модули ва h елка узунлигига, 2) жуфт таъсир текислигининг вазиятига ва ниҳоят, 3) бу текисликда бурилиш йўналишига боғлиқ. Айлантириш таъсири жуфт моменти деган тушунча билан тавсифланади. Бу тушунча қуйидагича таърифланади: *жуфт моменти* деб жуфт кучдан бирининг модули билан жуфт елкасининг тегишли ишора билан олинган кўпайтмасига айтилади. Жуфт моменти m ҳарфи билан белгиланади. Таърифга асосан,

$$m = \pm Fh. \tag{22}$$

Жуфт куч жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари бурганда жуфт моментини мусбат, соат стрелкаси ҳаракати бўйича бурганда момент манфий ҳисобланади. Кучнинг марказга нисбатан олинган алгебраик моментида ҳам ишора қоидаси ана шундай эди. Жуфт моменти билан кучнинг марказга нисбатан моментининг белгисида бир нарсага эътибор қилинг: жуфт моментида m ҳарфининг ёнида ҳеч қандай индекс йўқ, кучнинг марказга нисбатан моментини кўрсатувчи m ҳарфи ёнида эса момент марказини кўрсатувчи ҳарф (масалан O ёки A индекс) бор. Жуфт моменти худди куч моменти ўлчанадиган бирликлар билан ифодаланади. 58-расмдан жуфт моменти жуфт тузувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага нисбатан олинган моментига тенг экани кўриниб турибди, яъни

$$m = m_B(F) = m_A(F'). \tag{23}$$

Жуфт кучлар назарияси статиканинг асосий масаласини, яъни қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системасининг мувозанат шартларини энг умумий ҳолда аниқлаш масаласини жуда осон ҳал қилишга имкон беради.

27-§. Бир текисликда жойлашган эквивалент жуфтлар тўғрисида теорема

Икки жуфтнинг бир-бирига эквивалент бўлиш шартини аниқлаш учун теорема исбот қиламиз: жуфтнинг жисмга кўрсатадиган механик таъсирини ўзгартирмасдан жуфтни бошқа жуфт билан алмаштириш мумкин, бу жуфт ўша текисликда ётиши ва унинг моменти берилган жуфт моментига тенг бўлиши керак.

Жисмга елкаси h бўлган (F, F') жуфт таъсир қилаётган бўлсин (59-расм). Бу жуфт моменти $m = Fh$. Статиканинг иккинчи аксиомасига биноан, (F, F') жуфтга мувозанатлашган Q ва Q' кучлар A ва B нуқталарда қўшилади: $(Q, Q') \Longleftrightarrow 0$. Энди F куч икки тузувчига ажратилади, улардан бири Q бўлсин, иккинчиси P билан белгиланади; F' куч ҳам Q' ва P' кучларга ажратилади. Бу ерда $P = -P'$, $Q = -Q'$. Лекин Q ва Q' кучлар нолга эквивалент бўлгани учун, уларни иккинчи аксиомага асосан ташлаб юбориш мумкин. Натижада (F, F') жуфт ўша текисликда ётган (P, P') жуфт билан алмаштирилади, бироқ бу жуфтнинг елкаси ҳам, кучлари ҳам аввалгиникидан бошқача, P ва P' кучларни ўзларининг таъсир чизиқларида C ва D нуқталарга кўчириш мумкин.

(P, P') жуфтнинг елкаси, яъни AC ва BD тўғри чизиқлар орасидаги масофа d билан белгиланади.

Пировардида (F, F') ва (P, P') жуфтларнинг алгебраик моменти тенг эканлиги кўриб чиқилади. F куч Q ва P кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлгани, яъни $F = Q + P$ бўлгани сабабли унга Вариньон теоремаси татбиқ этилади:

$$m_B(F) = m_B(Q) + m_B(P).$$

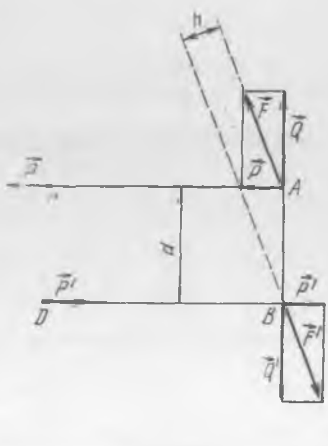
Лекин $m_B(F) = Fh$, $m_B(Q) = 0$ (чунки Q нинг таъсир чизиғи B нуқтадан ўтади), $m_B(P) = Pd$; бинобарин $Fh = Pd$, яъни (F, F') ва (P, P') жуфтларнинг моментлари тенг. Шу билан теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан жуфт кучнинг хоссалари келиб чиқади.

1. Жуфтни ўзининг таъсир текислигида ҳар қандай вазиятга кўчириш мумкин, бунда жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

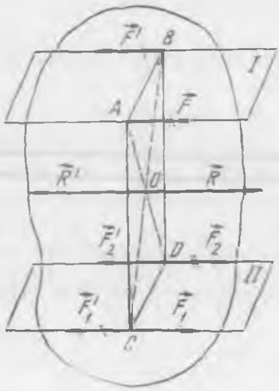
2. Жуфт куч модули ва елкасининг узунлигини моменти ўзгармайдиган қилиб ўзгартириш мумкин, бунда жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

Исбот этилган теорема ва ундан келиб чиққан хоссаларга асосланиб туриб бир текисликда ётган ва моментлари бир хил бўлган икки жуфт бир-бирига эквивалент бўлади, деган хулосага келамиз (эквивалентлик шарти), чунки бу жуфтни таъсир текислигида кўчириш ва елкасини ўзгартириш йўли билан бирини-бирига айлантириш мумкин. Шунинг учун жуфт куч кўпинча айланиш йўналишини кўрса•



59-расм.

60-расм.



61-расм.

тадиган айланма стрелка билан тасвирланади, бунда жуфтнинг кучлари чизилмайди, масалан, 60-расмда жисмга моментлари m_1 ва m_2 бўлган иккита жуфт таъсир этяпти; бу жуфтлар жисмнинг қайси нуқталарига қўйилгани, уларнинг кучлари ёки елкалари нимага тенг эканлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас, чунки жуфтни тавсифлаб бериш учун унинг моментини билиш етарли.

28-§. Жуфтни ўз текислигига параллел бўлган бошқа текисликка кўчириш тўғрисида теорема

I. текисликда ётган (F, F') жуфтни кўриб чиқамиз (61-расм.) Бу жуфтнинг моменти $m = F \cdot AB$ бўлиб, у жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари бурсин. I текисликка параллел қилиб жисмда II текислик ўтказамиз, унда AB кесмага тенг ва параллел CD кесма оламиз. C ва D нуқталарга ўзаро мувозанатлашган тўртта куч қўямиз, бу кучларнинг модули бир-бирига ва берилган жуфт куч модулига тенг: $(F, F') \Leftrightarrow 0$, $(F_2, F_2' \Leftrightarrow 0$ $F_1 = F_1' = F_2 = F_2' = F' = F$. Жисмга ва нуқталарда қўйилган кучлар, иккинчи аксиомага асосан, берилган жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини ўзгартирмайди.

Энди бу олти куч иложи борича соддалаштирилади. Расмдаги $ABCD$ шакл параллелограмм бўлгани учун, унинг BC ва AD диагоналлари кесишган O нуқтада тенг иккига бўлинади. B нуқтага қўйилган F' куч ва C нуқтага қўйилган F_1' куч бир томонга йўналган параллел кучлар бўлгани учун уларнинг R' тенг таъсир этувчиси ҳам уларга параллел бўлиб, улар билан бир томонга йўналган бўлади ва BC диагоналнинг ўртасидаги O нуқтадан ўтади; $R' = 2F \cdot A$ нуқтага қўйилган F ва D нуқтага қўйилган F_2 куч бир томонга йўналган параллел кучлар бўлгани учун уларнинг R тенг таъсир этувчиси ҳам уларга параллел бўлиб, улар билан бир томонга йўналган бўлади ва AD диагоналнинг ўртасидаги O нуқтадан ўтади; $R = 2F$. Кўриб чиқилган тўртта кучнинг R ва R' тенг таъсир этувчилари модул жиҳатидан тенг бўлиб, қарама-қарши йўналган. Демак, R ва R' тенг таъсир этувчиларни нолга эквивалент кучлар сифатида ташлаб юбориш мумкин. Натижада I текисликда ётган (F, F') жуфт II текисликда ётган худди ўзидай (F_1, F_2') жуфт билан алмаштирилади, чунки бу жуфтларнинг кучлари модули тенг ва елкалари бир хил. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот этилди: агар жуфт унинг ўз таъсир текислигига параллел бўлган бошқа текисликка кўчирилса, унинг жисмга кўрсатадиган таъсири ўзгармайди.

29-§. Жуфт моментининг вектори

26-§ да айтиб ўтилганидек, жуфтнинг жисмга кўрсатадиган айлантириш таъсири: 1) жуфт моменти m модулига, 2) таъсир текислигининг вазиятига ва 3) бу текисликда буриш йўналишига боғлиқ. Агар бир текисликда ётмайдиган жуфтлар билан иш кўришга тўғри келса, ҳар бир жуфтни тавсифлаш учун юқорида айтиб ўтилган учала характеристикани таъкидлаш керак бўлади. Шунинг учун жуфт моменти фазода тайинли йўналишга эга бўлади, демак, жуфт моменти вектор экан. Жуфтнинг таъсир текислигининг фазодаги вазияти ўша текисликка тик қилиб ўтказилган чизиқнинг йўналиши билан аниқлангани сабабли, жуфт моментини тасвирловчи вектор жуфтнинг таъсир текислигига тик қилиб йўналтирилади. Бу векторнинг узунлиги маълум масштабда жуфт моментининг сон қийматига (модулига) тенг қилиб олинади. Аниқроқ қилиб айтганда жуфт моменти қанча бирлик (қанча Н · м) бўлса, бу векторнинг узунлиги тегишли масштабда шунча узунлик бирлигига тенг бўлади. Жуфт моменти m вектори жуфт текислигига тик қилиб шундай томонга йўналтириладики, унинг учидан туриб жуфтга қаралганда жуфт жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантирмоқчи бўлади (62-расм). 62-расм, *а* даги жуфт горизонтал текисликда таъсир этяпти, унинг моментини тасвирловчи m вектор вертикал йўналган; 62-расм, *б* даги жуфт вертикал текисликда таъсир этяпти, унинг моментини тасвирловчи m вектор горизонтал йўналган. m вектор қаерга қўйилишини айтиб ўтиш керак. 27 ва 28-§ ларда исбот этилган теоремалардан жуфтни ўз текислигида исталган вазиятга кўчириш ва ўша текисликка параллел бўлган бошқа текисликка кўчириш мумкин деган хулоса чиқарилган эди. Шунга қараб, жуфт моментини тасвирловчи m векторни жисмнинг ҳар қандай нуқтасига қўямиз фақат у

64-расм.

жуфтнинг таъсир текислигига тик бўлиши керак. Жуфт моментининг m вектори эркин вектордир (62-расм, a га қаранг).

Дарҳақиқат, m вектор тайинли бир жуфтни тўлиқ ифодалайди, чунки m маълум бўлган ҳолда m га тик қилиб текислик ўтказилса, бу текислик жуфтнинг таъсир текислиги бўлади; m векторнинг узунлигини ўлчаб, жуфт моментининг модули аниқланади; m векторнинг йўналишига қараб эса жуфтнинг жисмни қаёққа айлантириши аниқланади.

Маълумки, жуфт моментининг модули унинг кучларидан бирининг иккинчи куч қўйилган нуқтага нисбатан олинган моментига тенг (26-§, (23) формулага қаранг), яъни $m = m_B(F)$. Лекин бу моментларнинг векторлари бир хил йўналган. Шунинг учун

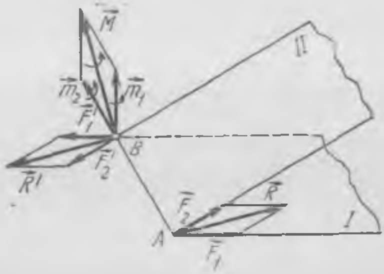
$$m = m_B(F) = m_A(F') \text{ ёки } m = \overrightarrow{BA} \times F = \overrightarrow{AB} \times F' \qquad (24)$$

шаклида ёзилади.

Жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсири m вектор билан аниқланишига асосланиб жуфтларнинг бир-бирига эквивалент бўлиш шарти (27-§ га қаранг) умумийроқ кўринишда ифодаланади: агар икки жуфтнинг моментлари вектори тенг бўлса, бу жуфтлар бир-бирига эквивалент бўлади. Дарҳақиқат, бу жуфтлар моменти векторлари m_1 ва m_2 билан белгиланса, уларнинг параллеллигидан бу жуфтларнинг параллел текисликларда ётиши келиб чиқади, 28-§ даги теоремага асосан жуфтлардан бирини иккинчи жуфт ётган текисликка кўчириш мумкин; ундан ташқари m_1 ва m_2 векторлар модулларининг тенг эканлигидан бу жуфтлар моментларининг сон қийматлари тенг эканлиги келиб чиқади; m_1 ва m_2 векторлар бир томонга йўналганлигидан бу жуфтлар жисмни бир томонга айлантиради деган хулоса чиқади. Модомики, икки жуфт бир текисликда ётиб, моментларининг сон қийматлари тенг ва жисмни бир томонга айлантирса, 27-§ даги теоремага асосан, бу жуфтлар эквивалент бўлади.

30-§. Фазодаги жуфт кучларни қўшиш

Жуфтлар бир текисликда (ёки параллел текисликларда) ётмаган, яъни фазода кесишувчи текисликлар жойлашган ҳолни кўриб чиқамиз. Лекин ишни икки жуфтни қўшишдан бошлаймиз. Кесишувчи I ва II текисликларда жойлашган жуфтлар моментларининг m_1 ва m_2 векторлари берилган бўлсин: $m_1 = \overrightarrow{BA} \times F_1$ ва $m_2 = \overrightarrow{BA} \times F_2$. Бу иккала жуфт айни бир қаттиқ жисмга таъсир қилади. Бу текисликлар кесишган чизиқда AB кесма олиб, жуфтларнинг кучларини AB кесманинг A ва B учларига қўямиз (63-расм). Бунинг учун кесишувчи текисликларда жойлашган жуфтлар, улар тўғрисидаги теоремадан (27-§) фойдаланиб ихтиёрий вазиятдан ўша вазиятга келтирилди ва айни вақтда жуфтларнинг кучи ва елкалари моменти ўзгармайдиган қилиб қўйилди.



63-расм.

Энди A нуқтага қўйилган F_1 ва F_2 кучлар, B нуқтага қўйилган F_1' ва F_2' кучлар параллелограмм қоидасига асосланиб қўшилади, уларнинг тенг таъсир этувчилари R ва R' бўлади: $R = F_1 + F_2$, $R' = F_1' + F_2'$ R куч билан R' куч жуфт хосил қилади, чунки улар ҳар хил (A ва B) нуқталарга қўйилган бўлиб, жуфт куч хосил қилувчи тенг ва қарама-қарши йўналган кучларнинг тенг таъсир этувчиларидир. Натижада (F_1, F_1') ва (F_2, F_2') жуфтлар битта (R, R') жуфт билан алмаштирилди, бу жуфт моменти вектори M билан белгиланса, бу вектор жуфт кучларидан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтага нисбатан олинган моменти векторига тенг бўлгани учун 29-§ даги (24) формулага асосан

$$M = \overrightarrow{BA} \times R$$

кўринишда ёзилади. Бу вектор кўпайтмага R нинг $F_1 + F_2$ геометрик йиғиндига тенг бўлган ифодасини қўйиб, кўпайтмани очиб чиқамиз:

$$M = \overrightarrow{BA} \times (F_1 + F_2) = \overrightarrow{BA} \times F_1 + \overrightarrow{BA} \times F_2.$$

Лекин ўнг томонда турган ҳадлар берилган жуфтлар моментларининг m_1 ва m_2 векторларини билдиради, шунинг учун

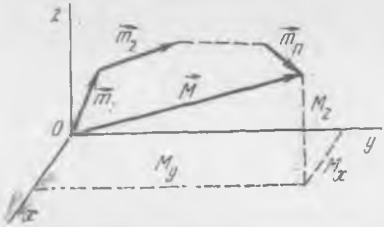
$$M = m_1 + m_2 \tag{25}$$

деб ёза оламиз, яъни кесишувчи текисликларда жойлашган икки жуфт битта жуфтга эквивалент бўлиб, эквивалент жуфтнинг моменти вектори берилган жуфтлар моментлари векторларининг йиғиндисига тенг.

Демак, кесишувчи текисликларда жойлашган икки жуфтни қўшиш учун улар моментларининг векторларини жисмнинг бирор масалан, B нуқтасида параллелограмм қоидасига асосан қўшиш керак. Жуфтларнинг ҳар иккитасига параллелограмм қоидасини кетма-кет татбиқ этиб, фазода жойлашган ҳар қанча жуфтни битта эквивалент жуфтга алмаштириш мумкин, бу эквивалент жуфт моментининг M вектори берилган жуфт моментлари векторларининг йиғиндисига тенг:

$$M = \sum m_k. \tag{26}$$

Бу формула абсолют қаттиқ жисмга таъсир этувчи ҳар қандай жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент бўлиб, бу



62-расм.

жуфт моментининг вектори қўшилувчи жуфтлар моментлари векторларининг йиғиндисига тенг деган теоремани ифодалайди.

Агар бордию жуфтларнинг ҳаммаси айни бир текисликда (ёки параллел текисликларда) жойлашган булса, жуфт моментлари векторларининг барчаси параллел бўлади, бироқ жўфт моментининг вектори эркин вектор бўлгани учун уларнинг ҳаммасини бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналадиган қилиш ва векторлар йиғиндиси [(26)] формула ўрнига алгебраик йиғинди олиш мумкин:

$$M = \sum m_k. \qquad (26')$$

Демак, қаттиқ жисмга бир текисликда ётиб таъсир этадиган жуфтлар системаси битта жуфтга эквивалент булиб, эквивалент жуфт моменти қўшилувчи жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.

(26) формуладаги $\boldsymbol{m}_k$ векторлар бир текисликда ётмайдиган ҳолда хисобни аналитик равишда олиб бориш қулай. Координата ўқлари ўтказиб (64-расм) ва векторлар йиғиндисининг проекцияси ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, (26) формуладан $\boldsymbol{M}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари аниқланади:

$$M_x = \sum m_{kx}, \quad M_y = \sum m_{ky}, \quad M_z = \sum m_{kz}. \qquad (27)$$

Бу проекциялардан фойдаланиб, вектор ясаш мумкин. Унинг модули

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

формуладан аниқланади.

Мисол. Айни бир қаттиқ жисмга моментларининг сон қиймати $m_1 = 40$ Нм ва $m_2 = 30$ Нм бўлган икки жуфт таъсир этяпти. Бу жуфтлар орасидаги икки ёқли бурчаги 60° га тенг бўлган кесишувчи текисликларда жойлашган. Мана шу икки жуфтга эквивалент бўлган жуфт моменти векторининг сон қиймати аниқлансин.

Ечиш. Берилган жуфтлар моментларининг векторларини параллелограмм қоидаси билан қўшиб, эквивалент жуфт моменти векторининг M сон қийматини косинуслар теоремасига биноан,

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1 m_2 \cos\,(\widehat{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2})}$$

формуладан аниқлаймиз. $\boldsymbol{m}_1$ ва $\boldsymbol{m}_2$ векторлар орасидаги бурчак жуфтлар ётган текисликлар орасидаги 60° ли бурчакка тенг. Шунинг учун берилган маълумотларни юқоридаги формулага қўйиб, ҳисоб қиламиз:

$$M = \sqrt{1600 + 900 + 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,5} = \sqrt{3700} \approx 61 \text{ Нм}.$$

31-§. Жуфт кучларнинг мувозанат шарти

Агар қаттиқ жисмга фазода ихтиёрий жойлашган (кесишувчи текисликларда жойлашган) жуфтлар таъсир этса, уларни моментининг $\boldsymbol{M}$ вектори берилган жуфтлар моментлари векторларининг йиғиндисига тенг бўлган битта эквивалент жуфт билан алмаштириш мумкин. $\boldsymbol{M}$ вектор берилган жуфтлар моментларининг векторларидан тузилган кўпбурчакнинг ёпувчи томони билан тасвирланади, яъни

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{m}_k.$$

Қаттиқ жисмга таъсир этувчи жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу системага эквивалент бўлган жуфт моментининг вектори нолга тенг бўлиши ёки, бошқача айтганда, берилган жуфтлар моментларининг векторларидан тузилган кўпбурчак ёпиқ бўлиши зарур ва етарли. Демак, $\boldsymbol{M} = 0$. Момент вектори нолга тенг бўлиши учун унинг координата ўқларидаги проекциялари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя. $\boldsymbol{M}$ векторнинг 30-§ даги (27) формулалар билан ифодаланган проекциялари нолга тенг:

$$\begin{aligned} M_x &= 0, & & \sum m_{kx} = 0, \\ M_y &= 0, & \text{ёки} \quad & \sum m_{ky} = 0, \\ M_z &= 0, & & \sum m_{kz} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Демак, қаттиқ жисмга қўйилган жуфтлар системаси мувозанатда бўлиши учун жуфт моментлари векторларининг ҳар бир координата ўқидаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.

Умумий ҳолда жуфт кучларни фақат битта жуфт билан мувозанатлаш мумкин, лекин битта куч билан ёки жуфтдан фарқ қиладиган бошқа система билан мувозанатлаб бўлмайди.

5-БОБ. ФАЗОДА ИХТИЁРИЙ РАВИШДА ЖОЙЛАШГАН КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

Системага қарашли кучларнинг таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишмаса ва бир-бирига параллел бўлмаса, бундай кучлар фазода ихтиёрий равишда жойлашган *кучлар системаси* дейилади. Лекин бу системада баъзи кучларнинг таъсир чизиқлари бир-бири билан кесишиши ёки параллел бўлиши ҳам мумкин.

32-§. Кучни ўзига параллел кўчириш тўғрисида теорема

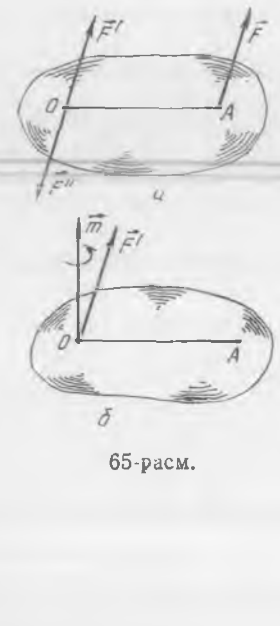
Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасида кучларни содда ҳолга келтириш, яъни статиканинг биринчи масаласини ечиш учун кучни ўзига параллел кўчириш масаласини кўриб чиқамиз. Бу масалага бағишланган қуйидаги теоремани исбот этамиз: жисмнинг бир нуқтасига қўйилган куч модули ва йўналиши худди ўшаникидек бўлган, лекин бошқа нуқтага қўйилган куч ва жуфтга эквивалент бўлади.

Жисмнинг A нуқтасига $\boldsymbol{F}$ куч қўйилган бўлсин (65- расм). Уни бошқа O нуқтага кўчириш керак. Бунинг учун O нуқтага бир-бирига модули тенг ва бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган $\boldsymbol{F}'$ ва $\boldsymbol{F}''$ куч қўйилади. Нолга эквивалент бўлган бу кучларни берилган $\boldsymbol{F}$ кучга параллел бўлган тўғри чизиқ бўйлаб йўналтириб, уларнинг модуллари берилган куч модулига тенг бўладиган қилиб олинади: $F' = F'' = F$. 2- аксиомага асосан уч кучдан иборат $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}', \boldsymbol{F}'')$ система берилган $\boldsymbol{F}$ кучга эквивалент. Демак, берилган $\boldsymbol{F}$ кучни ихтиёрий O нуқтага қўйилган $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}''$ куч ва $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ жуфт билан алмаштириш мумкин. Шу билан теорема исбот этилди.

Бу теорема берилган кучни ўзига параллел қилиб жисмнинг ҳар қандай бошқа нуқтасига кўчириш учун унга тегишли жуфт қўшиш керак эканлигини кўрсатади. Шунинг учун $\boldsymbol{F}$ кучни A нуқтадан O нуқтага кўчиришда ҳосил бўладиган $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ жуфт *қўшилма жуфт* деб, O нуқта *келтириш маркази* деб аталади. Равшанки, $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'')$ қўшилма жуфт моментининг вектори

$$m = m_0(F) \tag{29}$$

бўлади, яъни қўшилма жуфт моменти вектори берилган кучнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментининг векторига тенг. Қўшилма жуфт моменти вектори $(\bar{F}, \bar{F}'')$ жуфтнинг таъсир текислигига тик бўлиб йўналади, модули маълум масштабда жуфт моменти модулига тенг ва шундай томонга йўналганки, унинг учидан туриб жуфтга қаралганда жуфт жисмни соат стрелкаси ҳаракатига тескари буради (29- § га қаранг). 65- расм, *а* даги кучларни 65- расм, *б* даги кўринишда тасвирлаш ҳам мумкин.



65-расм.

33-§. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучларни бир марказга келтириш

Бу параграфда статиканинг асосий теоремаси деб аталадиган теорема исбот қилинади: фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси умумий ҳолда жисмнинг ихтиёрий бир нуқтасига қуйилган битта куч ва битта жуфтга эквивалент булади.

Дарҳақиқат, қаттиқ жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига таъсир чизиқлари фазода ихтиёрий равишда жойлашган $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ кучлар системаси қуйилган булсин (66-расм). Бирор O нуқтани келтириш маркази қилиб олинади-да, барча кучлар уша O марказга кучирилади. Бунда кучни узига параллел кучириш туғрисидаги теоремага асосан, жисмга O нуқтада

$$F_1' = F_1, \quad F_2' = F_2, \ \ldots, \ F_n' = F_n \tag{30}$$

кесишувчи кучлар системаси ва моментларининг векторлари (29) формулага асосан

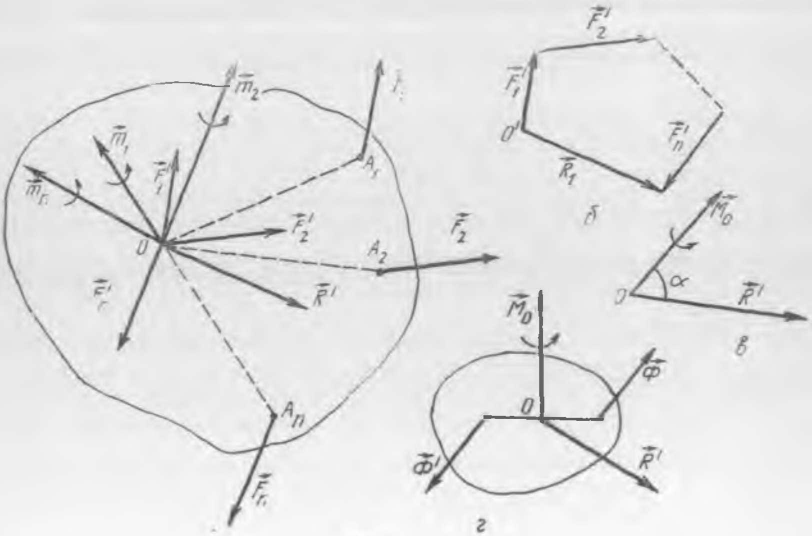
$$m_1 = m_0(F_1), \quad m_2 = m_0(F_2), \ \ldots, \ m_n = m_0(F_n) \tag{31}$$

булган (F_1, F_1'), (F_2, F_2'), ..., (F_n, F_n') қушилма жуфтлар системасига таъсир қилади. 5-§ да курилганидек, O нуқтага қуйилган кучлар битта R' куч билан алмаштирилади, R' куч ҳам O нуқтага қуйилади:

$$R' = F_1' + F_2' + \ldots + F_n'$$

ёки (30) тенгликлар эътиборга олинса,

$$R' = F_1 + F_2 + \ldots + F_n \ \text{ёки} \ R' = \sum F_k \tag{32}$$



66-расм.

бўлади Бу формуладаги R' вектор ихтиёрий равишда жойлашган (F_1, F_2, ... ,F_n) кучлар системасининг геометрик йиғиндиси, яъни куч кўпбурчагининг ёпувчи томони бўлиб, у *бош вектор* дейилади ва O нуқтага қўйилади (66- расм, *б*). Бу R' куч фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучларнинг бош вектори бўлгани учун (F_1, F_2, ... ,F_n) кучларнинг жисмга кўрсатадиган таъсирининг ўрнини боса олмайди, яъни бу системага эквивалент бўла олмайди.

Ҳосил бўлган барча қўшилма жуфтларни қўшиш учун уларнинг моментлари векторларини қўшиш керак. Натижада қўшилма жуфтлар системаси битта (Φ, Φ') жуфтга алмаштирилади, унинг моментининг M_0 вектори

$$M_0 = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

йиғиндига тенг. (31) тенгликлар эътиборга олинса, кучлар системасининг O марказга нисбатан бош моменти деб аталадиган M_0 вектор

$$M_0 = m_0(F_1) + m_0(F_2) + \ldots + m_0(F_n) \text{ ёки } M_0 = \sum m_0(F_k) \quad (33)$$

шаклида ёзилади ва кучлар системасининг O марказга нисбатан олинган моментлари векторларининг йиғиндисига тенг бўлади (бу ерда M_0 векторга O индекс кучларнинг моменти O нуқтага нисбатан олинганлигини англатиш учун қўйилган). Шу билан теорема исбот этилди.

Энди параграфнинг бошида келтирилган теорема қуйидагича таърифланади: фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси бирор марказга келтирилганда умумий ҳолда шу кучларнинг бош векторига тенг бўлиб, ўша келтириш марказига қўйилган битта кучга ва моментининг вектори бу кучлар системасининг ўша келтириш марказига нисбатан олинган бош моментига тенг бўлган битта жуфтга эквивалент бўлади. Бу теоремани қисқача (F_1, F_2, ... , F_n) $\Longleftrightarrow$ (R', M_0) шаклида ёзиш мумкин.

Бу системанинг кучлари фазода мутлақо ихтиёрий равишда жойлашганлиги учун бош моментнинг M_0 вектори R' бош вектор билан ҳар қандай бурчак ҳосил қилиши мумкин (66- расм, *в*). Бош момент бирор текисликда ётган Φ, Φ') жуфтнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини билдиради (66-расм, *г*).

Одатда R' ва M_0 векторлар аналитик равишда, яъни уларнинг координата ўқларидаги проекциялари орқали аниқланади. Координаталар бошини келтириш марказида оламиз.

Бош векторнинг координата ўқларидаги R'_x, R'_y, R'_z проекцияларининг ифодалари билан олдин танишиб чиққанмиз (11-§ га қаранг). M_0 векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини M_{ox}, M_{oy}, M_{oz} билан белгилаймиз. Векторлар йиғиндисининг ўқдаги проекцияси ҳақидаги теоремага асосан, $M_{ox} = \sum [m_o(F_k)]_x$ шаклида ёзамиз. Бироқ кучнинг ўққа нисбатан моменти билан ўша ўқда ётган марказга нисбатан моменти ҳақидаги теоремага асосан [25-§, (18) формулага қаранг], $M_{ox}=\sum m_x(F_k)$ тарзида ёзамиз. M_{oy} ва M_{oz} проекциялар ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

Ниҳоят, R' бош вектор ва M_0 бош момент проекциялари ҳисоблаб аниқланадиган формулалар қуйидагича бўлади:

$$R'_x=\sum F_{kx},\quad R'_y=\sum F_{ky},\quad R'_z=\sum F_{kz}, \tag{34}$$

$$M_{ox}=\sum m_x(F_k),\quad M_{oy}=\sum m_y(F_k),\quad M_{oz}=\sum m_z(F_k). \tag{35}$$

Бу проекциялар маълум бўлган ҳолда R' ва M_0 векторларнинг модули ва йўналишини аниқлаш қийин эмас.

34-§. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари мувозанат тенгламалари

Статиканинг асосий теоремасига асосан (33-§), фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси битта R' кучга ва моментининг вектори M_0 га тенг бўлган жуфтга эквивалент. Қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун

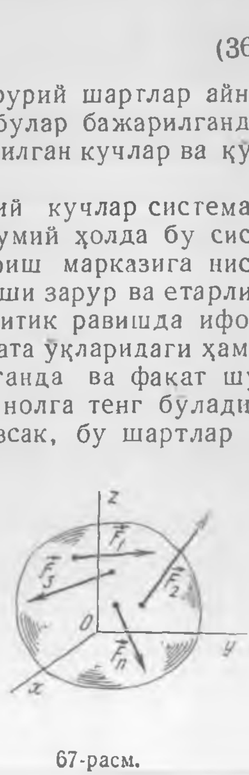
$$R'=0 \text{ ва } M_0=0 \tag{36}$$

шартлар бажарилиши зарур; лекин бу зарурий шартлар айни вақтда етарли шарт ҳам бўлади, чунки булар бажарилганда келтириш марказига кўчирилган барча берилган кучлар ва қўшилма жуфтлар мувозанатлашади.

Демак, қаттиқ жисмга қўйилган ихтиёрий кучлар системаси (67-расм) мувозанатда бўлиши учун умумий ҳолда бу систéманинг бош вектори ва ихтиёрий келтириш марказига нисбатан олинган бош моменти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Аниқланган мувозанат шартларини аналитик равишда ифодалаймиз. R' ва M_0 векторларнинг координата ўқларидаги ҳамма (34) ва (35) проекциялари нолга айланганда ва фақат шу ҳолда R' ҳамда M_0 векторлар бараварига нолга тенг бўлади. Агар (34) ва (35) формулаларнинг ўзини ёзсак, бу шартлар

$$\sum F_{kx}=0,\quad \sum {}_{ky}=0,\quad \sum {}_{kz}=0,$$
$$\sum m_x(F_k)=0,\quad \sum m_y(F_k)=0,$$
$$\sum m_z(F_k)=0 \tag{37}$$



67-расм.

кўринишда ёзилади. Демак, фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси (яъни шу кучлар таъсири остида турган эркин жисм) мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг учала координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари ва ўша ўқларга нисбатан олинган моментларининг йиғиндилари нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.

35-§. Фазода жойлашган параллел кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

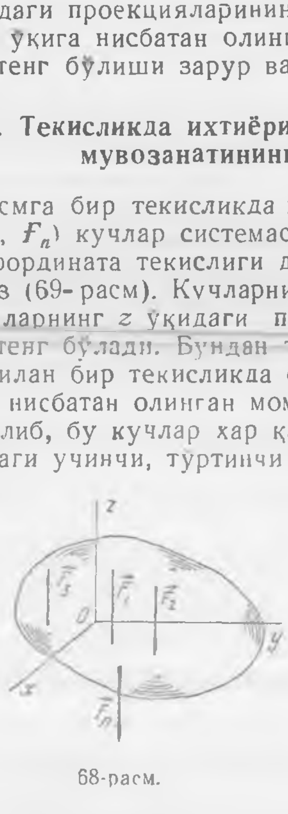
Қаттиқ жисмга бир текисликда ётмайдиган параллел кучлар таъсир қилаётган бўлсин (68-расм). z ўқи кучларга параллел қилиб йўналтирилади: унда ҳар бир кучнинг z ўқига нисбатан олинган моменти нолга тенг бўлади. x ва y ўқлари жисмга қўйилган кучларга тик бўлгани учун, ҳар бир кучнинг x ва y ўқларидаги проекциялари ҳам нолга тенг бўлади. Натижада (37) формулалардан учта мувозанат шарти келиб чиқади:

$$\sum F_{kz}=0, \quad \sum m_x(F_k)=0, \quad \sum m_y(F_k)=0. \tag{38}$$

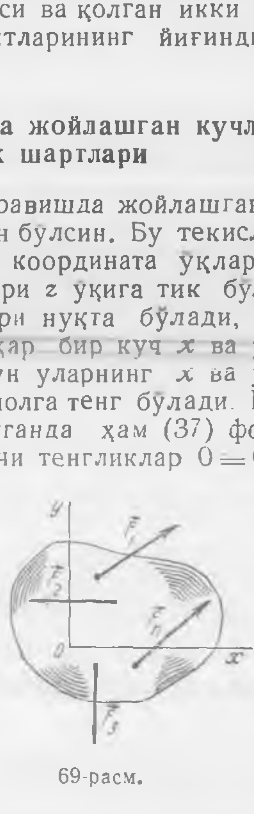
Қолган учта тенглик бу ҳолда $0=0$ кўринишдаги айниятга айланиб қолади. Демак, фазода параллел жойлашган кучлар мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг уларга параллел бўлган ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва қолган икки координата ўқига нисбатан олинган моментларининг йиғиндилари нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.

36-§. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

Жисмга бир текисликда ихтиёрий равишда жойлашган ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... , $\bar{F}_n$) кучлар системаси қўйилган бўлсин. Бу текисликни Oxy координата текислиги деб олиб, координата ўқлари ўтказамиз (69-расм). Кучларнинг ҳар бири z ўқига тик бўлгани учун уларнинг z ўқидаги проекциялари нуқта бўлади, яъни нолга тенг бўлади. Бундан ташқари, ҳар бир куч x ва y ўқлари билан бир текисликда ётгани учун уларнинг x ва y ўқларига нисбатан олинган моментлари нолга тенг бўлади. Шундай қилиб, бу кучлар ҳар қандай бўлганда ҳам (37) формулалардаги учинчи, тўртинчи ва бешинчи тенгликлар $0=0$ кў-



68-расм.



69-расм.

ринишидаги айниятга айланиб қолиб, текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучларнинг мувозанат шартлари учта бўлиб чиқади:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_z(F_k)=0.$$

Бироқ бу ҳолда ҳар бир куч xy текисликда ётгани учун унинг чизма текислигига тик бўлган z ўқига нисбатан олинган моменти [28-§ даги (16) таърифга асосан] унинг координаталар бошига (O нуқтага) нисбатан олинган алгебраик моментининг қиймати билан бир хил бўлади. Шунинг учун юқоридаги учта тенгликнинг учинчиси ўрнига $\sum m_0(F_k)=0$ тенгликни ёзамиз. Натижада бу кучларнинг мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_0(F_k)=0. \qquad (39)$$

Демак, текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг икки координата ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари ва ихтиёрий бир марказга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Бу шартлардан дастлабки иккитаси жисмнинг координата ўқлари бўйлаб силжимаслигини, учинчиси эса xy текисликда жисмнинг айланмаслигини билдиради. Энди текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанати шартларининг бошқача кўринишларини исботламай ёзамиз. Бу шартлар масала ишлашда баъзан қулай бўлади.

Мувозанат шартларининг иккинчи шакли: текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг ихтиёрий икки A ва B марказга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси ва мана шу икки нуқтадан ўтадиган AB тўғри чизиққа тик бўлмаган координата ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0, \quad \sum F_{kx}=0. \qquad (39')$$

Мувозанат шартларининг учинчи шакли: текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг бир тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий учта A, B ва C марказга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0, \quad \sum m_C(F_k)=0. \qquad (39'')$$

Кўриб чиқилган учала ҳолда ҳам мувозанат шартлари асосий шартлар деб ҳисобланади.

Агар жисмга текисликда жойлашган (F_1, F_2, ..., F_n) кучлардан ташқари ўша текисликда моментлари m_1, m_2, ..., m_s

бўлган жуфтлар таъсир қилса, мувозанат шартлари тузишда проекциялар тенгламасига жуфтлар кирмайди, чунки жуфт тузувчи кучларнинг ҳар қандай ўқдаги проекциялари йиғиндиси нолга тенг. Моментлар тенгламасида кучларнинг марказга нисбатан моменти билан жуфтларнинг моментлари алгебраик равишда қўшилади.

37-§. Текисликда параллел жойлашган кучлар мувозанатининг аналитик шартлари

Жисмга таъсир этаётган (F_1, F_2, ... , F_n) кучларнинг ҳаммаси бир текисликда бир-бирига параллел бўлса, x ўқи кучларга тик қилиб, y ўқи эса кучларга параллел қилиб йўналтирилади (70-расм). Бу ҳолда ҳар бир кучнинг x ўқидаги проекцияси нолга тенг бўлиб, (39) формулалардаги биринчи шарт $0=0$ кўринишдаги айниятга айланиб қолади. Натижада (39) формуладан текисликдаги параллел кучлар учун икки мувозанат шарти қолади:

$$\sum F_{ky}=0, \quad \sum m_0(F_k)=0. \qquad (40)$$

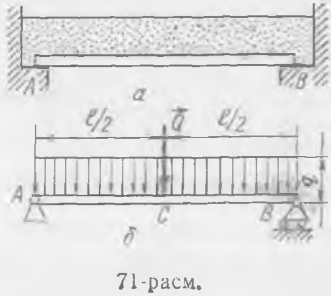
Демак, текисликда параллел жойлашган кучлар системаси мувозанатда бўлиши учун бу кучларнинг уларга параллел ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси ва бирор марказга нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.

Текисликда параллел жойлашган кучлар мувозанатининг яна бир бошқа шакли бор, уни текисликда ихтиёрий жойлашган кучларнинг (39′) шартларидан (36-§ қаранг) алоҳида келтириб чиқарамиз. Ҳар бир куч x ўқига тик бўлгани учун уларнинг x ўқидаги проекциялари нолга тенг бўлади. Натижада (39) формулалардаги биринчи тенглик $0=0$ кўринишдаги айниятга айланиб, қуйидаги икки шарт чиқади:

$$\sum m_A(F_k)=0, \quad \sum m_B(F_k)=0. \qquad (40')$$

Шу ергача кўриб чиқилган барча кучларнинг мувозанат шартлари таърифланди, таърифланмаган фақат (40) шартлар қолди. Буни ўзингиз мустақил таърифланг.

70-расм.



71-расм.

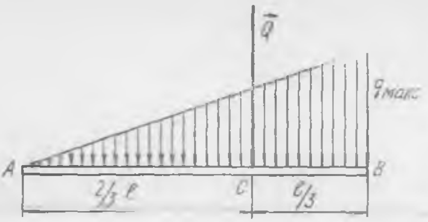
Энди фазода ва текисликда жойлашган кучларнинг мувозанат шартларини ишлатиб масала ечишда керак бўладиган баъзи тушунчаларни, жумладан, ҳар хил қонунлар бўйича ёйилган кучларни тенг таъсир этувчи билан алмаштиришни, баъзи боғланишларнинг реакцияларини янгича баён этишни, ниҳоят, 4- § да тилга олинмай қолган баъзи боғланишларни ва уларнинг реакцияларини кўриб чиқамиз.

38- §. Ёйилган кучлар

1. Статикада қаттиқ жисмнинг бирор нуқтасига қўйилган кучлар билан иш кўрилади. Ҳақиқатда эса кучлар жисм ҳажмининг, юзининг бирор қисмига, баъзан эса узунлигининг бир қисмига қўйилади. Статиканинг ҳамма аксиома ва теоремалари бир нуқтага қўйилган кучларга мослаб таърифлангани учун ёйилган кучларни кўпроқ учрайдиган оддий ҳолларда бир нуқтага қўйилган кучлар билан алмаштириш усулларини кўриб чиқамиз.

Ёйилган кучлар интенсивлик деган тушунча билан тавсиф этилади. Интенсивлик дегани ҳажм бирлигига, сирт юзининг бирлигига ёки чизиқ узунлигининг бирлигига тўғри келган кучнинг миқдорини билдиради ва q ҳарфи билан белгиланади, ўлчов бирлиги 1Н/м бўлади. Ёйилган кучлар асосан параллел кучлар ёки кесишувчи кучлар бўлади. Жисм зарраларининг оғирлик кучи ҳажм бўйича ёйилган кесишувчи кучларга мисол бўлади, лекин жисмнинг ўлчамлари Ер марказигача бўлган масофага қараганда жуда кичик бўлганини ҳисобга олиб, оғирлик кучларини параллел кучлар деб ҳисоблаймиз. Тўғон қуриб кўтарилган сувнинг тўғон сиртига берадиган босим кучи тўғон сиртига ёйилган параллел кучларга, энсиз тўсин устига текис қилиб сепилган қумнинг (71- расм, *а*) тўсинга берадиган босим кучи чизиқ бўйлаб ёйилган параллел кучларга мисол бўлади (71- расм, *б*).

Энди чизиқнинг узунлиги бўйлаб ёйилган кучларни бир нуқтага қўйилган куч билан алмаштиришни, яъни уларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаймиз. Осон бўлиши учун кучлар ёйилган чизиқ тўғри чизиқ кесмаси бўлган, бу кучларнинг интенсивлиги бир хил (ўзгармас) бўлган ёки чизиқли қонун билан ўзгарадиган ҳолларни кўриб чиқамиз. Тўғри чизиқнинг узунлиги l бўлган AB қисмига q интенсивлиги ўзгармас бўлган параллел кучлар ёйилган бўлса (71- расм, *б*) буларнинг тенг таъсир этувчи Q кучи ҳам ўша кучларга параллел бўлиб, AB кесманинг қоқ ўртасидаги нуқтага қўйилади ва модули $Q = ql$ бўлади. Интенсивлиги чизиқли қонун бўйича ўзгарадиган параллел ёйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси (72- расм) модул жиҳатидан $Q = q_{\text{макс}} \cdot \frac{l}{2}$ кўпайтмага тенг бўлиб, унинг қўйилиш нуқтаси (яъни C нуқта) A нуқтадан бошлаб



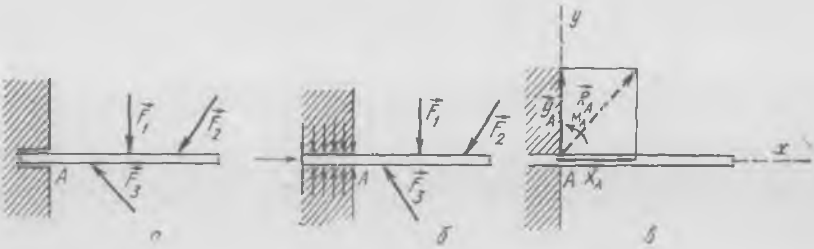
72-расм.

73-расм.

қўйилган $AC = \frac{2}{3}\, l$ масофада туради, бу ердаги $g_{макс}$ ёйилган кучнинг энг катта интенсивлигидир (72-расмга қаранг).

2. Қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакциясини кўриб чиқамиз. Боғланишнинг бу турининг реакцияси 4-§ да баён этилган эди. Унда қўзғалмас цилиндрик шарнирнинг реакция кучи шарнирнинг ўқига тик бўлган текисликда ётиб, ўша ўқдан ўтади ва йўналиши олдиндан маълум бўлмайди дейилган эди. Энди йўналиши маълум бўлмаган ўша R_A реакция кучини координата ўқлари бўйлаб йўналтирилган иккита номаълум X_A ва $У_A$ тузувчиларга ажратамиз (73-расм). Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучларнинг мувозанатига доир масалаларда шарнир реакциясининг X_A ва $У_A$ тузувчиларини мувозанат тенгламаларидан аниқлаб, R_A реакциянинг ўзини $R_A = X_A + У_A$ вектор тенгликдан, модулини $R_A = \sqrt{X_A^2 + У_A^2}$ формуладан аниқлаймиз. R_A нинг бирор ўқ билан, масалан, x ўқи билан хосил қилган α бурчаги $\operatorname{tg}\alpha = \frac{У_A}{X_A}$ тенгликдан аниқланади.

3. Қўзғалмас қистирма деб аталадиган боғланишнинг реакциясини кўриб чиқамиз (74-расм, *а*). Бу ҳолда балканинг бир учи девор ичига ёки конструкциянинг бирор мустаҳкам қисмига қистириб юборилади. Бир учи мана шундай қилиб қистирилган балка *консоль* деб аталади. Консолга текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсир қилганда консолнинг деворга қистирилган учига ён томондаги текисликлардан ёйилган реакция кучлари таъсир қилади (74-расм, *б*). Бу кучларни битта R тенг таъсир этувчи билан алмаштириш мумкин, лекин бу тенг таъсир этувчининг на модули, на йўналиши, на қўйилиш нуқтаси маълум эмас. Бу R кучни ўзига параллел қилиб балка билан деворнинг олдинги текислиги кесишган A нуқтага кўчирамиз, бунда R куч A нуқтага қўйилган $R_A = R$ кучга ва M_A моменти номаълум бўлган қўшилма жуфтга эквивалент бўлади (74-расм, *в*). Бу жуфтнинг M_A моменти *реактив момент* деб аталади. R_A реакция кучини x



74- расм.

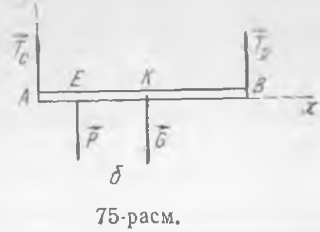
ва y ўқлари бўйлаб йўналган X_A ва Y_A тузувчилар орқали тасвирлаб, M_A реактив жуфт айланма стрелка билан кўрсатилади. Демак, қўзғалмас қистирма боғланишнинг реакциясини аниқлаш учун учта X_A, Y_A ва M_A номаълум миқдорни аниқлаш керак.

39-§. Масала ечиш

Бу параграфда текисликда ихтиёрий равишда ва параллел жойлашган кучларнинг мувозанатига доир масалаларни ечамиз. Бу ерда ҳам масала ечиш тартиби 16-§ да келтирилгандек бўлади. Лекин ҳар бир босқичда қилинадиган ишлар олдингидагидан бирмунча фарқ қилиши мумкин.

Агар масалада бир-бирига шарнир, ип ва шу каби ички боғланишлар билан боғланган қўшалоқ жисмларнинг мувозанати кўриб чиқиладиган бўлса, бу жисмлар системаси алоҳида-алоҳида жисмларга ажратилиб, ҳар бир айрим жисмга таъсир этувчи кучларнинг мувозанат шартлари тузилади.

9-масала. Оғирлиги 20 Н бўлган бир жинсли AB стержень параллел қилиб туширилган AC ва BD арқонларга горизонтал турадиган қилиб осилган (75-расм, a). Унинг A учидан бутун узунлигининг чорагича масофада E нуқтага $p = 120$ Н юк осилган. Арқонларнинг тортилиш кучи топилсин.



75-расм.

Ечиш. Изланаётган миқдорларни аниқлаш учун стерженнинг мувозанати кўриб чиқилади. Стержень боғланишлардан бўшатилади, яъни AC ва BD арқонларни фикран кесиб, уларнинг таъсири ўрнига реакция кучлари қўйилади. AC арқоннинг реакцияси шу арқон бўйлаб юқорига йўналади, у T_C билан белгиланади (75-расм, $б$); BD арқоннинг реакцияси ҳам арқон бўйлаб юқорига йўналади, у T_D билан белгиланади (арқонларнинг масала шартида сўралган тортилиш кучларини эмас, балки реакция кучларини топа оламиз, чунки арқонларнинг тортилиш кучи стерженга қўйилган эмас, стерженга арқонларнинг реакция кучи қўйилган. Реакция кучи аниқланса, тортилиш кучи аниқланган бўлади, чунки тортилиш кучлари реакция кучларига сон жиҳатдан тенг бўлиб, уларга қарши йўналади). Стерженга қўйилган кучларни чизмада тасвирлаймиз: Стерженга унинг ўзининг $\boldsymbol{G}$ оғирлиги, юкнинг $\boldsymbol{P}$ оғирлиги, $\boldsymbol{T}_C$ ва $\boldsymbol{T}_D$ реакциялар қўйилган; $\boldsymbol{G}$ оғирлик стерженнинг ўртасига қўйилади. Бу кучлар бир текисликда жойлашган параллел кучлар. Бу кучлар (яъни бу кучлар таъсири остида турган эркин стержень) мувозанатда бўлгани учун $\sum F_{kx}=0$, $\sum m_A(\boldsymbol{F}_k)=0$ мувозанат шартлари тузилади [(40) формулага қаранг]. Бунинг учун y ўқи кучларга параллел равишда юқорига йўналтирилади, x ўқи ўтказишга эҳиёж йўқ, чунки мувозанат шартларида кучларни уларнинг ўзига параллел бўлган ўққа проекциялаш талаб қилинади. Кучларнинг моментларини ўша текисликда ётган бирор нуқтага (масалан, A нуқтага) нисбатан олиш керак. Мувозанат тенгламалари:

$$\begin{aligned} &\sum F_{ky}=0; \quad T_C-P-G+T_D=0, \\ &\sum m_A(\boldsymbol{F}_k)=0; \quad -P\cdot AE-G\cdot AK+T_D\cdot AB=0. \end{aligned} \tag{a}$$

Бу тенгламаларнинг қандай тузилганини изоҳлаб берамиз: T_C ва T_D реакциялар y ўқига параллел бўлиб, y билан бир томонга йўналгани учун проекциялари ўзига тенг ва плюс ишора билан олинди; берилган $\boldsymbol{P}$ ва $\boldsymbol{G}$ кучлар ўққа параллел бўлиб, унга тескари йўналгани учун проекциялари ўзига тенг ва минус ишора билан олинди. Моментлар тенгламасига T_C реакция кирмай қолди, чунки унинг A нуқтага нисбатан елкаси йўқ бўлгани учун моменти ҳам нолга тенг бўлди. $\boldsymbol{P}$ кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси AE кесма, $\boldsymbol{G}$ кучнинг елкаси AK кесма, $\boldsymbol{T}_D$ кучнинг елкаси AB кесма бўлади, чунки тилга олинган учала кесма $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{T}_D$ кучларнинг таъсир чизиғига тик турибди. $\boldsymbol{P}$ ва $\boldsymbol{G}$ кучлар AB стерженни A нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракати бўйича буради, шунинг учун моментининг ишораси манфий қилиб олинди. T_D куч эса стерженни A нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари буради, унинг моменти мусбат қилиб олинди. Масала шартида AE ёки AK кесманинг қанча метр эканлиги айтилган эмас, лекин диққат қилинса, AE кесма бутун стержень узунлигининг чорак қисмига тенг экани, яъни $AE=\frac{1}{4}\ AB$ экани тушуниб олинади: худди шунга ўхшаш, $AK=\frac{1}{2}\ AB$ деб оламиз. Бутун стерженнинг узунлиги неча метр эканлиги айтилмагани учун уни бирлик деб олиб, AE ва AK қисмларнинг узунлигини AB орқали ифодалаймиз, натижада иккинчи тенгламада битта умумий кўпайтувчи пайдо бўлади, уни кейин қисқартириб юборамиз. Буларни эътиборга олиб иккинчи тенгламани ўзгартириб ёзамиз:

$$-P\cdot\frac{1}{4}\ AB-G\cdot\frac{1}{2}\ AB+T_D\cdot AB=0.$$

Тенгламани AB миқдорга қисқартирамиз:

$$-\frac{P}{4}-\frac{G}{2}+T_D=0,\ \text{бундан}\ T_D=40\text{Н}.$$

T_D реакциянинг аниқланган қийматини (а) системанинг биринчи тенгламасига қўйиб, ундан T_C ни топамиз: $T_C=100$ Н.

Масала ечимининг тўғрилигини текшириб кўриш учун бошқа нуқтага, масалан, B нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз:

$$\sum m_B(F_k)=0,\quad -T_C\cdot AB+P\cdot\frac{3}{4}\ AB+G\cdot\frac{1}{2}\ AB=0,$$

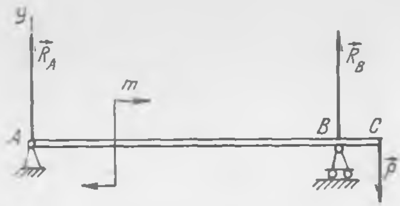
тенгламани AB га қисқартириб, кучларнинг берилган ва топилган қийматлари қўйилса, тенглама айниятга айланади. Демак, масала тўғри ечилган бўлади. Арқонларнинг масалада изланган тортилиш кучларининг сон қийматлари 100 Н ва 40 Н бўлиб, лекин пастга қараб йўналган.

Шу масаланинг ўзини текисликдаги параллел кучлар мувозанатининг бошқа шартларидан [қ. (40′) га қаранг] фойдаланиб ечамиз. Бу ҳолда A ва B марказларга (75-расм, *б*) нисбатан олинган моментлар тенгламалари тузилади:

$$\begin{aligned}&\sum m_A(F_k)=0;\quad -P\cdot AE-G\cdot AK+T_D\cdot AB=0,\\&\sum m_B(F_k)=0;\quad G\cdot BK+P\cdot BE-T_C\cdot AB=0.\end{aligned}\qquad(б)$$

Бу ерда ҳам $AE=\frac{1}{4}\ AB,\ AK=BK=\frac{1}{2}\ AB,\ BE=\frac{3}{4}\ AB$ эканлигини ҳисобга олиб, уларни тенгламаларга қўямиз. Натижада (б) системанинг ечимлари $T_C=100$ Н, $T_D=40$ Н эканлигини аниқлаймиз. Бу ерда иккала усулда ҳам жавоб бир хил эканлиги кўриниб турибди. Агар (б) тенгламалар системасига диққат қилинса, унинг ҳар бир тенгламасида биттадан номаълум қатнашади. Бир номаълумли тенгламани ечиш икки номаълумли тенгламани [(а) системанинг биринчи тенгламасини] ечишдан осон.

Масалани ечишда йўл қўйиладиган бир хато тўғрисида икки оғиз сўз. Кўпчилик масалаларда мувозанати текшириладиган балканинг (ёки бошқа жисмнинг) оғирлиги қанчага тенг эканлиги айтилади, лекин бу оғирлик китобдаги расмда чизиб кўрсатилмайди. Шунинг учун масала ечишда баъзан реакция куч-



76-расм.

лари балка устига қўйилган бошқа юкларнинг оғирлик кучлари қўлда чизилган расмда кўрсатилади-да, балканинг оғирлигини кўрсатиш унутиларди. Оқибатда ҳамма мувозанат тенгламалари тўғрига ўхшаб кўринса-да, жавоби чиқмасди. Бундай хато параллел кучларнинг мувозанатига доир масалаларни ечгандагина эмас, бошқа тур масалаларда ҳам учрайди.

10- масала. Горизонтал ётган AC балкага (76- расм) моменти $m = 6$кНм бўлган жуфт вертикал текисликда таъсир қилади, C нуқтада вертикал йўналган $P = 2$кН куч қўйилган. $AC = 4$ м, $BC = 0{,}5$ м. A нуқтада балка қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бўлиб, B нуқтада қўзғалувчи шарнир устига қўйилган. Балканинг оғирлиги ҳисобга олинмайди. Таянч реакциялари аниқлансин.

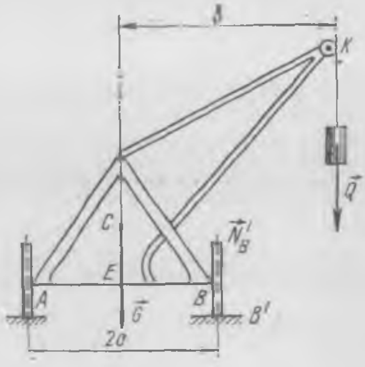
Е ч и ш. Номаълум реакцияларни аниқлаш учун AC балканинг мувозанатини кўриб чиқамиз.

Қўзғалувчи шарнирнинг R_B реакцияси юқорига вертикал йўналган. A қўзғалмас шарнирнинг реакцияси 38- § да икки X_A ва Y_A тузувчига ажратилган эди. Лекин реакция кучлари актив кучларга боғлиқ бўлгани учун бу масалада R_A реакция юқорига вертикал йўналади, чунки берилган $\boldsymbol{P}$ куч билан каток R_B реакциясининг геометрик йиғиндиси вертикал йўналган: моменти m бўлган жуфт эса кучларнинг ўқдаги проекциялари тенгламасига кирмайди, чунки жуфтни ўз текислигида кучлари ўқлардан бирига параллел (демак, иккинчисига тик) бўладиган қилиб буриш мумкин. y ўқини юқорига вертикал йўналтирамиз. AC балкага параллел кучлар таъсир қиляпти, параллел кучларнинг мувозанат шартлари $\sum F_{ky} = 0$, $\sum m_B(F_k) = 0$ бўлади. Олдинги масалада айтиб ўтилганидек, моментлар марказини хоҳласак A нуқтада, хоҳласак B нуқтада оламиз: бизга B нуқта маъқул бўлди:

$$\begin{aligned} &\sum F_{ky} = 0; \quad R_A + R_B - P = 0, \\ &\sum m_B(F_k) = 0; \quad -R_A \cdot AB - P \cdot BC - m = 0 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

m жуфт расмда кўрсатилган вазиятида y ўқига проекция бермайди; жуфтнинг ҳар бир кучи горизонтал йўналган, улар вертикал y ўқига проекцияланганда нуқта бўлиб тушади. Жуфт куч бу расмда кўрсатилганидан бошқача вазиятда турибди, деб фараз қилайлик. У ҳолда жуфт тузувчи кучлардан бирининг y ўқидаги проекцияси плюс ишора билан олинса, иккинчисининг проекцияси минус ишора билан олинади, иккала проекциянинг сон қийматлари тенг бўлгани учун улар ейишиб кетади

Моменти m бўлган жуфт моментлар тенгламасига ўзининг йўналишига қараб плюс ёки минус ишора билан киради. Лекин шуни эътиборга олиш керакки, жуфт моменти моментлар маркази қаерда олинганига боғлиқ бўлмайди. Бу масаладаги жуфт m моменти тенгламага минус ишора билан кирди. Балкага қўйилган жуфтни бир-бирига антипараллел йўналган иккита тенг куч шаклида чизмасдан айланма стрелка шаклида чизиш ҳам мумкин (27- §, 60- расмга қаранг). Бундан кейинги масалаларда жуфт айланма стрелка билан тасвирланади.



77-расм.

Энди (а) тенгламалар системасини ечамиз. Иккинчи тенгламадан R_A ни аниқлаймиз: $R_A = -2$ кН. R_A реакция ишорасининг манфий бўлиб чиқиши унинг ҳақиқатда юқорига эмас, балки пастга вертикал йўналганини кўрсатади. R_A нинг қийматини биринчи тенгламага қўйиб, $R_B = P - R_A = 2 - (-2) = 4$ кН экани аниқланади. Масаланинг тўғри ечилганини текшириб кўриш учун B дан бошқа нуқтага нисбатан моментлар тенгламасини тузамиз. Агар бу тенглама айниятга айланса, масала тўғри ечилган бўлади.

11- масала. 77- расмда схематик равишда тасвирланган кўтариш кранининг оғирлиги $G = 40$ кН. Кранннинг оғирлик маркази DE чизиқда ётади, кранннинг қулочи $b = 3{,}5$ м, $AB = 2a = 3$ м. Кран қанча юк кўтара олади?

Е ч и ш. Кран мувозанатда турганда унинг иккала ғилдираги томонидан рельсларга маълум куч билан босим тушади. Агар кран кўтариб турган юк оз-оздан орттира борилса, кран A дан ғилдиракка босим тушмай қўйиб, у юк томонга оға бошлайди. Агар юк янада орттирилса, унда кран B ғилдирак рельсга тегиб турган B' нуқта атрофида ағдарилиб кетади. Демак, кран A ғилдиракка босим туширмай қўйган ҳолда B ғилдиракнинг рельсга тегиб турган B' нуқтаси атрофида ағдарилиб кетмаслиги учун ҳамма кучларнинг ўша B' нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бирор нуқтага нисбатан олинган моментлар йиғиндисининг нолга тенг бўлиши жисмнинг ўша нуқта атрофида айланмаслигини билдиради. Мана шу шароитда Q юк энг катта юк бўлади. A ғилдиракнинг рельсга узатадиган босим кучи (ёки рельснинг ғилдиракка қўйилган реакцияси) нолга тенг бўлади. $\sum m_B \times$

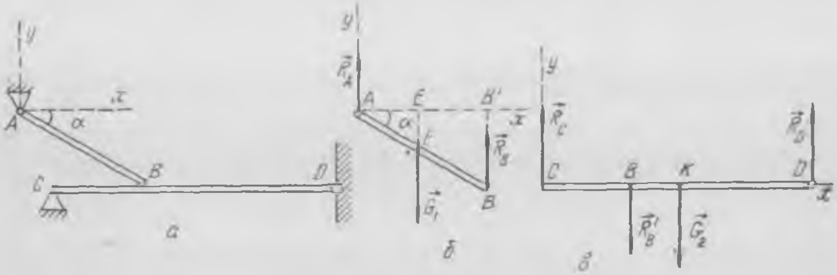
$\times(F_k)=0$ шартдан энг катта Q аниқланади: $Ga-Q(b-a)=0$, бундан $Q=\frac{a}{b-a}G=30$ кН. Демак, кран кўпи билан 30 кН юк кўтара олади.

Агар диққат қилган бўлсангиз, 9-масалада номаълумлар сони иккита, уларни топиш учун тузилган тенгламалар ҳам иккита эди. 10-масалада ҳам худди шундай: икки номаълум, икки тенглама мавжуд. 11-масалада икки тенглама тузиш мумкин бўлса-да (чунки параллел кучларнинг мувозанат шартлари иккита), масаланинг шартига қараб битта номаълумни топиш учун битта тенглама туздик. Бу масалалар *статик аниқ масалалар* деб аталади. Статик аниқ ва статик жиҳатдан ноаниқ масалалар тўғрисида китобнинг 15-§ ида гап юритилган эди. Энди параллел кучлар таъсир этаётган қўшалоқ жисмларнинг мувозанатига оид масалани ечамиз.

12-масала. A ўқи (цилиндрик шарнир атрофида айлана оладиган AB балканинг оғирлиги 5 кН, узунлиги 5 м; бу балка горизонтал ётган CD балкага B нуқтада эркин таянади. Балканинг оғирлиги 10 кН, узунлиги 6 м. CD балка D учида девордаги қўзғалмас цилиндрик шарнирга биркитилган бўлиб, C нуқтада таянч устига қўйилган $\alpha=30°$, $CB=2$ м. Таянч реакциялари ва балкаларнинг бир-бирига узатадиган босими аниқлансин.

Ечиш. Бу ерда икки балканинг мувозанати текширилади. Масалани ечишнинг икки йўли бор: 1) иккала балка B нуқтада бир-бирига маҳкам бириктирилган деб фараз қилиб, улар учун мувозанат шартлари тузилади, кейин балкалардан биттасини олиб, унинг мувозанат шартлари тузилади, бу ҳолда ташланган балканинг мувозанати текшириладиган балкага кўрсатадиган босими (реакцияси) ҳисобга олинади, 2) ҳар бир балканинг мувозанати алоҳида-алоҳида кўриб чиқилади, уларга тегишли мувозанат шартлари тузилади.

Бу масала иккинчи йўл билан ечилади. AB балкага унинг G_1 оғирлиги, B нуқтадаги таянчнинг юқорига вертикал йўналган R_B реакцияси ва A шарнирнинг R_A реакцияси қўйилган. Шарнирнинг реакцияси бу ҳолда вертикал бўйлаб юқорига йўналтирилади, чунки AB балкага қўйилган уч кучдан иккитаси вертикал йўналган. CD балкага унинг G_2 оғирлиги, C таянчнинг вертикал бўйлаб юқорига йўналган R_C реакцияси, таъсир ва акс таъсир қонунига асосан $R_B=R_B'$ бўлган реакция кучи, D шарнирнинг R_D реакцияси қўйилган. Бу ерда ҳам шарнирнинг реакцияси фақат вертикал бўйлаб йўналади, чунки CD балкага таъсир этувчи бошқа кучларнинг бош вектори (геометрик йиғиндиси) вертикал бўйлаб йўналган. (38-§ да шарнирнинг реакцияси икки тузувчига ажралади дейилган эди, лекин бу масалада балкага таъсир этувчи кучлар фақат параллел кучлар бўлгани учун шарнир реакциясининг бу кучларга тик бўлган тузувчиси нолга айланиб қолди, шунинг



78-расм.

учун A ва D шарнирларнинг реакцияси вертикал буйлаб йўналган битта куч билан курсатилди.) Балкаларни уларга қўйилган кучлар билан бирга алоҳида-алоҳида чизиб кўрсатиб (78- расм, *б* ва 78- расм, *в*), уларга тегишли мувозанат шартларини тузамиз. Иккала балкага параллел кучлар таъсир этяпти. Кучларга параллел ўқ y билан белгиланади. AB балканинг мувозанат тенгламалари:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_A - G_1 + R_B = 0, \qquad \text{(a)}$$
$$\sum m_A(F_k) = 0 \quad -G_1 \cdot 2{,}5\cos 30° + R_B \cdot 5\cos 30° = 0.$$

CD балканинг мувозанат тенгламалари:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_C - R'_B - G_2 + R_D = 0, \qquad \text{(б)}$$
$$\sum m_D(F_k) = 0; \quad -R_C \cdot 6 + R'_B \cdot 5 + G_2 \cdot 3 = 0.$$

AB балканинг мувозанат тенгламаларида G_1 ва R_B кучларнинг моментини ҳисоблашда уларнинг A нуқтага нисбатан елкалари нуқтадан G_1 ва R_B кучларнинг таъсир чизиқларига (вертикалга) тик қилиб ўтказилган $AE' = 2{,}5\cos 30°$ ва $AB' = 5\cos 30°$ кесмаларга тенг бўлганига эътибор беринг. (а) тенгламаларнинг ечимлари $R_B = R'_B = 2{,}5$ кН; $R_A = 2{,}5$ кН; (б) тенгламаларнинг ечимлари $R_C = 6$ кН, $R_D = 6{,}5$ кН. Масаланинг тўғри ечилганини текшириб кўриш осон. Кучлар параллел бўлгани учун AB балканинг 5 кН оғирлиги A ва B таянчларда 2,5 кН дан иккига ажралган. C ва D таянчлар реакцияларининг йиғиндиси ҳам CD балкага тушаётган актив кучга тенг бўлиши керак: $R_C + R_D = 12.5$ кН бўлиб, бу ерда CD балканинг оғирлигидан ортиб кетди. Ўша ортиқ деб ҳисобланган 2,5 кН миқдор юқоридаги балкадан пастдаги балкага тушиб турган босим кучидир. Демак, масала жуда тўғри ечилган.

Масалани биринчи йўл билан ўзингиз ечиб кўринг.

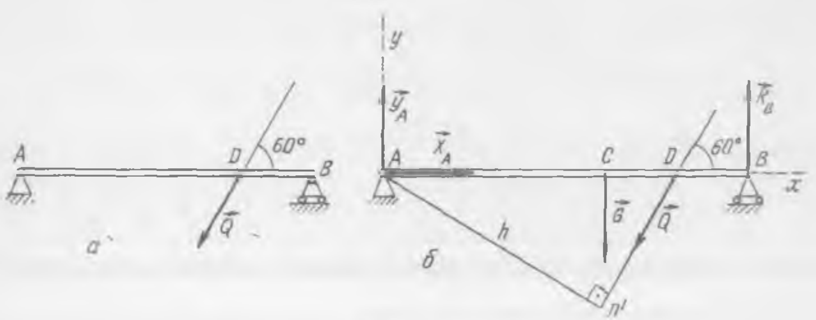
Энди текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсир этаётган жисмларнинг мувозанатига оид масалалар ечамиз

13 масала. Бир жинсли ингичка AB балканинг оғирлиги 15 кН бўлиб, узунлиги 4 м (79- расм). Балканинг A учи ердаги қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бўлиб, иккинчи B учи горизонтал текислик устида турган қўзғалувчи шарнирга қўйилган. Балканинг A учидан 3 м масофадаги D нуқтасига горизонт билан 60° бурчак ҳосил қилувчи $Q = 10$ кН куч таъсир қилади. A шарнир ва B катокнинг реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Изланаётган миқдорларни топиш учун AB балканинг мувозанати кўриб чиқилади. Боғланишларни ташлаб юбориб, балка эркин жисм деб ҳисобланса, унга ўртасига қўйилган G оғирлик кучи, боғланишларнинг R_A ва R_B реакция кучлари таъсир қилади. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек ўтказилади. Шарнирнинг реакциясини, 38- § да айтилгандек, горизонтал ва вертикал йўналган икки x_A ва y_A тузувчига ажратамиз. Балкага таъсир этувчи кучлар бир текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг (39) мувозанат шартларини тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - Q\cos 60^\circ = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - G - Q\cos 30^\circ + R_B = 0, \qquad \text{(a)}$$
$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -G\cdot AC - Q\cdot AD\sin 60^\circ + R_B\cdot AB = 0.$$

Моментлар маркази нима учун A нуқтада олинганини тушунтириб ўтамиз. 9- масалани ечганда моментлар марказини номаълум куч қўйилган нуқтада олиш керак, дейилган эди. Энди эса бу фикрни кенгайтириб, моментлар марказини номаълум кучлар кўпроқ бўлган нуқтада олиш керак, деб айтамиз. Моментлар маркази номаълум кучлар кўпроқ бўлган нуқтада олинса, ўша номаълум кучларнинг ўша марказга нисбатан моментлари нолга айланиб кетиб, моментлар тенгламасида номаълум кучлар камроқ қатнашади; тенгламада



79-расм.

номаълумлар кам бўлса, уни ечиш осон бўлади. Шунинг учун моментлар маркази деб икки номаълум X_A ва Y_A реакциялар қўйилган A нуқтани олдик. Дарҳақиқат, моменглар тенгламасида атиги битта номаълум R_B реакция турибди. G кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси AC кесма ҳисобланади, чунки AC кесма G кучнинг таъсир чизиғига тикдир. Q кучнинг A нуқтага нисбатан елкасини топиш учун A нуқтадан бу кучнинг таъсир чизиғига тик кесма ўтказилди. У расмда h билан белгиланади. Тўғри бурчакли ADD' учбурчакдан $AD' = h = AD \sin 60°$ эканини топиб, уни учинчи тенгламага ёзиб қўйдик. Q кучнинг моментини Вариньон теоремасидан фойдаланиш йўли билан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун Q куч AB балкага тик бўлган ва AB балка бўйлаб йўналган икки тузувчига ажратилади (79-расм, *б*). Q кучнинг балкага тик бўлган тузувчисини топиш учун у вертикалга проекцияланади: $Q_y = -Q \sin 60°$. Q_y нинг A га нисбатан елкаси AD кесма бўлади, чунки $AD \perp Q_y$. Q кучнинг балка бўйлаб йўналган тузувчисини аниқлаш учун у горизонталга проекцияланади: $Q_x = Q\cos 60°$. Лекин бу тузувчининг A га нисбатан елкаси нолга тенг, чунки Q_x нинг таъсир чизиғи A нуқтадан ўтади. Натижада Q кучнинг балка бўйлаб йўналган тузувчиси A нуқтага нисбатан момент ҳосил қилмайди. Q кучнинг A нуқтага нисбатан моменти $-Q \sin 60° \cdot AD$ ифодага тенг бўлди. (а) системанинг учинчи тенгламасида ҳам Q кучнинг A нуқтага нисбатан моментини худди ўша $-Q \sin 60° \cdot AD$ ифодага тенг қилиб ёзган эдик.

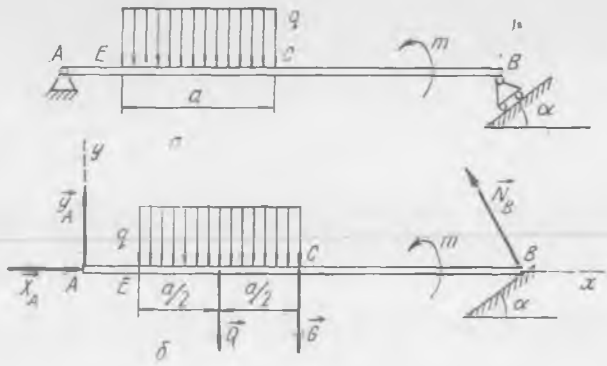
(а) тенгламалар системасини ечиб, номаълум миқдорлар аниқланади. Тайёр жавоб:

$$X_A = 5 \text{ кН}; \quad Y_A \approx 9{,}66 \text{ кН}; \quad R_B \approx 14 \text{ кН}.$$

Хоҳласангиз (а) системани ўзингиз ечиб кўришингиз мумкин.

Масалани ечишда моментлар маркази деб A нуқтани олган эдик, чунки у нуқтада ҳақиқатан ҳам икки номаълум куч бор. Бироқ моментлар маркази деб B нуқтани олиш ҳам мумкин, чунки B нуқтанинг ўзида битта номаълум R_B куч турган бўлишига қарамай, у нуқтадан яна бир номаълум X_A кучнинг таъсир чизиғи ўтади. R_B ва X_A реакцияларнинг B нуқтага нисбатан олинган моментлари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлади.

Энди берилган масала текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг (39′) шартлари ёрдамида ечилади. Кучларни x ўқига проекциялаймиз, моментларни A ва B нуқталарга нисбатан оламиз. Бу ҳолда кучларни y ўқига проекциялаш тўғри бўлмайди, чунки унда кучлар проекцияланадиган ўқ A ва B нуқталардан ўтадиган тўғри чизиққа тик бўлиб қолган бўлур эди. Бу эса (39′) шартларнинг иловасига зид келади. Тенгламаларни туздик, ҳақиқатда буларнинг дастлабки



80-расм.

иккитаси олдин тузиб қўйилган эди, (а) системага қаранг:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - Q\cos 60° = 0,$$
$$\sum m_A(F_k)=0; \quad -G \cdot AC - Q \cdot AD \sin 60° + R_B \cdot AB = 0, \qquad (б)$$
$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad -Y_A \cdot AB + G \cdot CB + Q \cdot BD \sin 60° = 0.$$

Q кучнинг A нуқтага нисбатан елкаси $AD' = AD \sin 60°$ эканлиги олдин айтилган эди, Q кучнинг B нуқтага нисбатан елкаси эса B нуқтадан Q кучнинг таъсир чизиғига ўтказилган тик кесма бўлиб, у $BD \sin 60°$ ифодага тенг. (б) системанинг ечимлари (а) системанинг ечимлари билан бир хил:

$$X_A = 5 \text{ кН}; \quad Y_A \approx 9{,}66 \text{ кН}; \quad R_B \approx 14 \text{ кН}.$$

14-масала. Схемаси 80-расмда кўрсатилган балканинг таянч реакциялари аниқлансин. Берилган маълумотлар:

$$G = 15 \text{ кН}, \ AC = CB = 2 \text{ м}, \ m = 8 \text{ кНм}, \ q = 2 \text{ кН/м},$$
$$a = 1{,}5 \text{ м}, \quad \alpha = 45°,$$

A—қўзғалмас шарнир, B—каток.

Ечиш. x ўқини горизонтал йўналишда ўнг томонга, y ўқини вертикал йўналишда юқорига қаратиб, координаталар бошини A нуқтада оламиз. AB балканинг мувозанатини текширар эканмиз, A шарнирнинг X_A ва Y_A реакцияларини, катокнинг қия текисликка тик йўналган N_B реакциясини, G оғирлик кучини, моменти m бўлган жуфтни ва интенсивлиги q бўлган текис ёйилган кучлар ўрнига уларнинг $Q = aq$ тенг таъсир этувчисини (38-§ га қаранг) расмда кўрсатамиз. Q куч балкадаги EC қисмнинг ўртасига қўйилади. Балкага қўйилган кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар эканини билган ҳолда (39) шартлар тузилади:

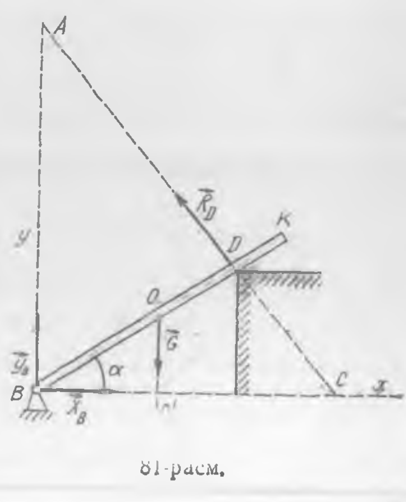
$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A-N_B\cos 45^\circ=0,$$
$$\sum F_{ky}=0;\quad Y_A-Q-G+N_B\cos 45^\circ=0,\qquad \text{(a)}$$
$$\sum m_B(F_k)=0;\quad m+G\cdot BC+Q\cdot BK-Y_A\cdot AB=0.$$

Учинчи тенгламани изоҳлаймиз. Жуфтнинг ўз текислигида ҳар қандай нуқтага нисбатан моменти m га тенг, ишораси мусбат бўлади, чунки жуфт балкани соат стрелкаси ҳаракатига тескари буришга интилади, Q кучнинг BK елкаси BC масофа билан a кесма ярмининг йиғиндисига, яъни 2,75 м га тенг. X_A кучнинг ўзи B нуқтага қўйилган бўлмаса ҳам, таъсир чизиғи B нуқтадан ўтади, шунинг учун X_A нинг B нуқтага нисбатан моменти нолга айланиб, ўзи моментлар тенгламасига кирмади. Текис ёйилган кучларнинг Q тенг таъсир этувчиси пунктир билан чизилди, туташ чизиқ билан чизилса, гуё балкага текис ёйилган кучлар ҳам, уларнинг тенг таъсир этувчисини тасвирлайдиган Q куч ҳам таъсир қилар экан деган фикр чиқиб қолади. Энди навбатдаги мақсад (а) системани ечишдир. Бу тенгламалар 13-масаладаги мувозанат тенгламаларидан мураккаб экани кўриниб турибди. Масаланинг жавоби:

$$X_A=6{,}45\ \text{кН};\quad Y_A=11{,}55\ \text{кН};\quad N_B\approx 9{,}2\ \text{кН}.$$

Бу масала схематик масалаларни ўқий олишга ҳам ўргатади.

15-масала. Узунлиги $4l$ ва оғирлиги G бўлган бир жинсли BK стержень B нуқтада қўзғалмас цилиндрик шарнирга бириктирилган бўлиб, D нуқтада вертикал деворнинг қиррасига суяб қўйилган (81-расм). Стерженнинг горизонтга қиялик бурчаги $\alpha\cdot BD=3l$. Таянч реакциялари аниқлансин.



81-расм.

Ечиш. Реакцияларни топиш учун стерженнинг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқлари чизмада кўрсатилгандек қилиб ўтказилади. Стержень ўзининг ўртасига қўйилган G оғирлик кучи, B шарнирнинг ўзаро тик йўналган X_B ва Y_B реакциялари, деворнинг D нуқтада стерженга тик бўлиб йўналган R_D реакцияси таъсирида мувозанатда турибди. Таъсир этаётган кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган. Бу масала

(39″) шартлардан фойдаланиб ечилади. Моментлар марказини ҳар икки номаълум куч кесишган A, B ва C нуқталарда оламиз. Бу куч нуқта бир тўғри чизиқда ётмаслиги расмдан кўриниб турибди. Бу нуқталар *Риттер нуқталари* деб аталади.

$$\sum m_A(F_k)=0; \quad X_B\frac{3l}{\sin\alpha}-G\,2l\cos\alpha=0,$$
$$\sum m_B(F_k)=0; \quad -G2l\cos\alpha+R_D3l=0, \qquad \text{(a)}$$
$$\sum m_C(F_k)=0; \quad -Y_B\frac{3l}{\cos\alpha}+G\left(\frac{3l}{\cos\alpha}-2l\cos\alpha\right)=0.$$

Ҳар бир марказда иккитадан номаълум реакция кучининг таъсир чизиқлари кесишгани учун, ҳар бир тенгламада битта номаълум куч қатнашади. Буларнинг ечимлари:

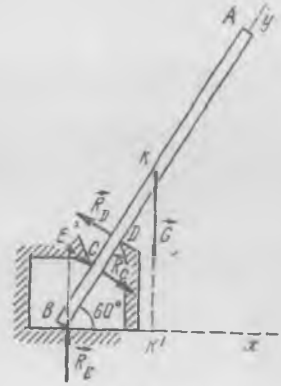
$$X_B=\frac{G}{3}\sin 2\alpha; \quad Y_B=\frac{G}{3}(3-2\cos^2\alpha); \quad R_D=\frac{2G}{3}\cos\alpha.$$

16- масала. Оғирлиги 200 Н бўлган бир жинсли AB балка горизонтал силлиқ полга B нуқтасида 60° бурчак остида тиралиб туради, бундан ташқари, уни иккита C ва D таянчлар тутиб туради (82- расм) $AB=3$ м, $BC=0{,}5$ м, $BD=1$ м. B, C ва D нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Берилган ва изланаётган кучларнинг ҳаммаси AB балкага таъсир қилади, шунинг учун балканинг мувозанати кўриб чиқилади. Балкага унинг G оғирлик кучи ва учта таянчдаги учта R_B, R_C, R_D реакция кучи қўйилган, балка эса текисликда ихтиёрий равишда жойлашган мана шу тўрт куч таъсирида мувозанатда турибди. B таянчнинг (горизонтал полнинг) реакцияси полга тик бўлиб, вертикал равишда юқорига йўналган. C ва D нуқталардаги таянч реакциялари балкага тик йўналган. Шу чоққача ҳамиша координата ўқлари бир-бирига тик қилиб олиб келинган эди. Лекин ўзи нолга тенг бўлган бош векторнинг ҳар қандай ўқлардаги (демак, бир-бирига тик бўлмаган ўқлардаги) проекциялари нолга тенг бўлади. Шунинг учун x ўқини горизонтал йўналишда олиб, y ўқи балканинг узунлиги бўйлаб йўналтирилади. (39) шартларни тузамиз:

$$\sum F_{kx}=0; \quad R_C\cos 30°-R_D\cos 30°=0,$$
$$\sum F_{ky}=0; \quad R_B\cos 30°-G\cos 30°=0. \qquad \text{(a)}$$
$$\sum m_E(F_k)=0; \quad R_B\cdot CD-G\cdot\frac{AB}{2}\cos 60°=0.$$

Проекциялар тенгламаси бунчалик содда бўлишига нима сабаб бўлди? Координата ўқларини уларга кўп кучлар тик бўладиган қилиб ўтказдик, масалан, x ўқини R_B ва G кучларга, y ўқини R_C ва R_D кучларга тик қилиб ўтказдик. Ана шунинг учун проекциялар тенгламаси содда бўлди. Моментлар маркази икки номаълум реакция кучи (R_B ва R_C) кесишган E нуқтада олинди, уларнинг моментлари нолга айланиб кетиб, R_B ва R_C кучлар моментлар тенгламасига кирмай қолди, натижасида моментлар тенгламасида битта номаълум R_D реакция қатнашмоқда. R_D реакция R_C реакцияга параллел бўлгани сабабли, R_D реакциянинг E нуқтага нисбатан олинган елкаси CD кесманинг узунлигига тенг: G кучнинг E нуқтага нисбатан елкасини аниқлаш учун E нуқтадан G кучнинг таъсир чизиғига тик кесма ўтказилади, бу кесма горизонтал ўқда ётган BK' кесмага тенг: $BK' = \frac{AD}{2}\cos 60°$.



82-расм.

(а) системанинг биринчи тенгламасини $\cos 30°$ га бўлиб, $R_C = R_D$ эканини, иккинчи тенгламасини ҳам $\cos 30°$ га бўлиб, $R_B = G = 200$ Н экани аниқланади. Учинчи тенгламадан $R_D = 300$ Н$\cdot R_C = R_D = 300$ Н.

Энди текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсири остида мувозанатда турган қўшалоқ жисмларга оид бир масалани ечамиз

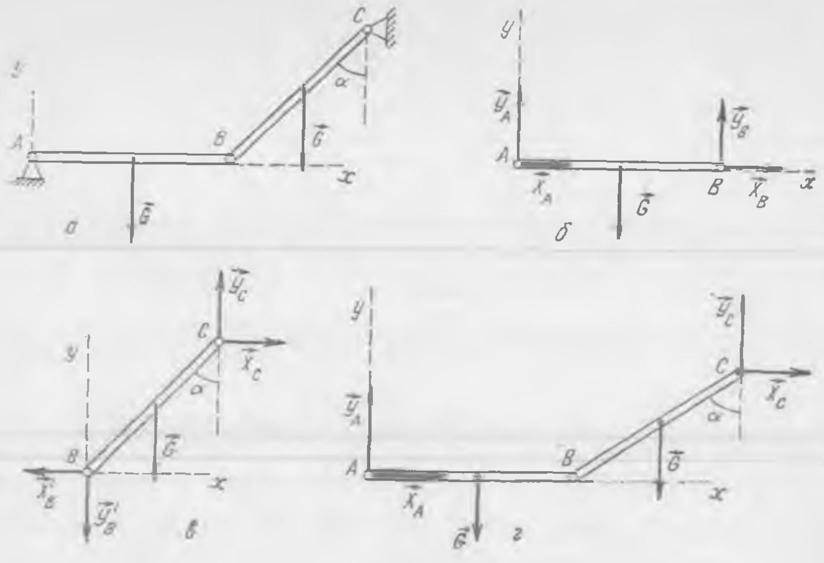
17-масала. Ҳар бирининг оғирлиги G бўлган иккови бир хил бир жинсли AB ва BC балка бир-бирига шарнир билан уланган бўлиб, қўзғалмас таянчларга A ва C шарнирлар воситасида шундай бириктирилганки, бунда AB балка горизонтал вазиятда, BC балка вертикал билан α бурчак ҳосил қилиб қия туради (83-расм). Шарнирларнинг реакцияси аниклансин.

Ечиш. Масалани ечиш учун ҳар бир балканинг мувозанатини алоҳида алоҳида кўриб чиқамиз. AB балкага унинг G оғирлик кучи, A шарнирнинг чизмада кўрсатилгандек қилиб йўналтирилган x ва y ўқлари бўйлаб йўналган X_A ва $У_A$ реакциялари, B шарнирнинг X_B ва $У_B$ реакциялари қўйилган. BC балкага ҳам унинг G оғирлик кучи, C шарнирнинг X_C ва $У_C$ реакциялари, B шарнирнинг X'_B ва $У'_B$ реакциялари қўйилган. Таъсир ва акс таъсир қонуни деб аталадиган тўртинчи аксиомага асосан, B шарнирнинг BC балкага қўйилган X'_B ва $У'_B$ реакциялари унинг AB балкага қўйилган X_B ва $У_B$ реакциялари унинг AB балкага қўйилган X_B ва $У_B$ реакцияларига қарама-қарши йўналган бўлиб, модуллари тенг бўлиши керак:

$$X'_B = X_B, \quad У'_B = У_B. \qquad (а)$$

Энди AB балкага (83-расм, б) қўйилган кучларнинг мувоанат шартлари (39') шаклда тузилади (балкаларнинг узунли-

3



83-расм.

ги $2a$ деб белгиланади):

$$\sum m_A(F_k)=0;\quad -Ga+y_B 2a=0,$$
$$\sum m_B(F_k)=0;\quad -y_A 2a+Ga=0,\qquad (б)$$
$$\sum F_{kx}=0;\quad X_A+X_B=0.$$

BC балкага (83-расм, *в*) қўйилган кучларнинг мувозанат шартлари (39) шаклида тузилади:

$$\sum F_{kx}=0;\quad -x'_B+x_C=0,$$
$$\sum F_{ky}=0;\quad -y'_B-G+y_C=0,\qquad (в)$$
$$\sum m_C(F_k)=0;\quad Ga\sin\alpha+y'_B 2a\sin\alpha-x'_B 2a\cos\alpha=0.$$

AB балканинг мувозанат шартларини тузишда кучларни y ўқига проекциялаш тўғри бўлмайди, чунки (39′) шартларда „Моментлар маркази сифатида олинган A ва B нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ ўққа (кучлар проекцияланадиган ўққа) тик бўлмаслиги керак“ деган шарт бор: масаладаги A ва B нуқталардан ўтадиган тўғри чизиқ y ўққа тик. Бир нарсага диққат қилинг. (б) ва (в) системаларда моментлар маркази сифатида олинган A ва B нуқталарда бир эмас, икки эмас, балки уч кучнинг таъсир чизиқлари кесишади, шунинг учун моментлар тенгламасида фақат биттадан номаълум куч қатнашяпти.

(а) тенгликлар ҳисобга олинса, (б) ва (в) системалар олти номаълумли олтита тенглама системасига айланади, ечимлар:

$$-X_A = X_B = X_C = G\operatorname{tg}\alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{G}{2}, \quad Y_C = \frac{3}{2}G.$$

X_B, X'_B ва X_C реакциялар расмда кўрсатилганидагига тескари йўналган.

Масалани бошқа усул билан ҳам ечиш мумкин, бунинг учун олдин бутун системанинг (иккала балкани биргаликда) мувозанатини (83-расм, *а*), кейин эса бир бўлагининг (*AB* ёки *BC* балканинг) мувозанатини текшириш керак. Бутун системанинг мувозанатини кўриб чиқишда балкаларни бир-бирига улаб турган *B* шарнирнинг X_B, Y_B ва X'_B, Y'_B реакциялари (а) шартларга асосан ўзаро ейишиб кетиб, гўё *B* нуқтада шарнир йўқдек тасаввур этилади. Бутун система (83-расм, *г*) эса фақат *G* оғирлик кучлари ва икки четдаги икки шарнирнинг X_A, Y_A ва X_C, Y_C реакциялари таъсирида мувозанатда туради:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_C = 0, \\ &\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_C - 2G = 0, \qquad\qquad (\text{г}) \\ &\sum m_A(F_k) = 0; \quad -Ga - G(2a + a\sin\alpha) - X_C 2a\cos\alpha + \\ &\qquad\qquad + Y_C(2a + 2a\sin\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Бу ердаги учта тенгламада тўртта номаълум бор. Шунга кўра масалани ечиш учун балкалардан бирининг (фақат бирининг) мувозанатини қўшимча равишда кўриб чиқиш керак. Масалан, *AB* балканинг мувозанатини кўриб чиқамиз, унинг шартлари (б) системада берилган. Демак, (б) ва (г) системаларни биргаликда ечиб, изланаётган номаълумлар аниқланади. Бу ерда аниқланган натижалар олдинги натижалар билан бир хил бўлади.

Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатига доир масала ечишни ўрганиб олдик, энди фермаларга оид масалаларни бирмунча кенгроқ қилиб баён этмоқчимиз. Шунга кўра фермаларнинг таянч реакцияларини ва ферма стерженларида пайдо бўладиган зўриқишларни (39), (39′) ва (39″) шартлар ёрдамида қандай аниқлашни кўриб чиқамиз. Энди фермага қўйилган актив ва реакция кучлари бир нуқтада кесишадиган кучлар бўлиши шарт эмас, бу кучлар текисликда жойлашган бўлса бас. Бунинг устига, ферманинг таянч реакцияларини аниқлашда ферма яхлит жисм деб, унинг стерженларидаги зўриқиш кучларини аниқлашда ферма жисмлар системаси (стерженлар системаси) деб ҳисобланади. Таянч реакцияларининг ёки стерженлардаги зўриқиш кучларининг олдинги усулда аниқланган қийматларини янги усулда аниқланган қийматларига таққослаш мумкин бўлиши учун ўша

17-§ да ишлаб кўрсатилган фермани яна ҳисоблаймиз. Стерженларни кесишнинг бу усули *Риттер усули* деб аталади

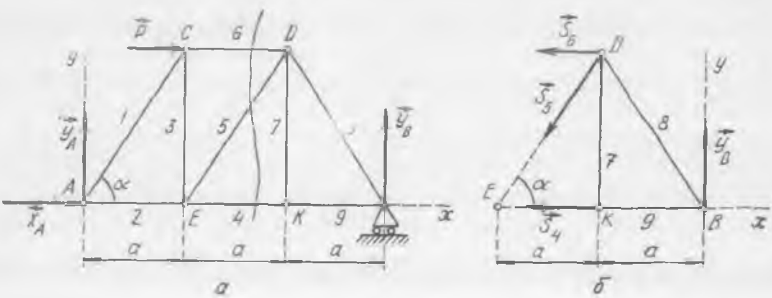
18-масала. Фермага C нуқтада горизонтал йўналган $P = 20$ кН куч қўйилган (84-расм, a), $\alpha = 60°$. A таянч цилиндрик шарнир, B таянч қўзғалувчи шарнир. Таянч реакциялари ва стерженларда пайдо бўладиган зўриқиш кучлари аниқлансин.

Ечиш. Аввало таянч реакциялари аниқланади. Бу ҳолда тугунларни йўқ деб, бутун фермани яхлит жисм деб ҳисоблаймиз. Фермага берилган горизонтал $\boldsymbol{P}$ куч, A шарнирнинг $\boldsymbol{X}_A$ ва $\boldsymbol{Y}_A$ реакциялари, B катокнинг $\boldsymbol{Y}_B$ реакцияси қўйилган. Бу кучлар текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг мувозанат шарти (39′) шаклида ёзилади:

$$\sum m_A(F_k) = 0; \quad -P \cdot a \sqrt{3} + Y_B \cdot 3a = 0,$$
$$\sum m_B(F_k) = 0; \quad -P \cdot a\sqrt{3} - Y_A \cdot 3a = 0, \qquad (a)$$
$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + P = 0.$$

(а) системанинг ечимлари $X_A = -P = -20$ кН, $Y_A = -11{,}53$ кН, $Y_B = 11{,}53$ кН бўлиб, 17-§ да ечилган ферманинг таянч реакциялари билан бир хил бўлди, чунки $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 23{,}06$ кН. Агар диққат қилинган бўлса, таянч реакцияларини аниқлашда уч куч тўғрисидаги теорема ишлатилмади, чунки бу ердаги кучлар текисликда жойлашган кесишувчи кучлар эмас, балки текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлардир.

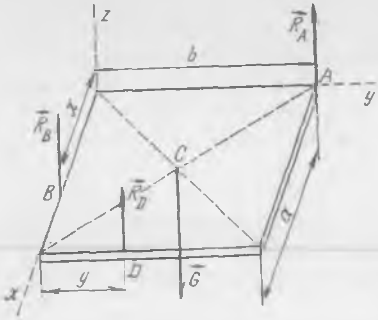
17-§ да ферма ҳисобланганда, масалан, 4-стержендаги зўриқиш кучини (ёки ўша стерженнинг реакциясини) аниқлаш учун ҳамма тугунлари A дан бошлаб бирин-кетин кесилган эди; 4-стерженнинг реакцияси E тугунни кесганда аниқланган эди, унгача эса A ва C тугунлар кесилиб, бир қанча мувозанат тенгламалари тузилган ва ечилган эди. Риттер усулининг афзал томони шундаки, бу усул билан ишлаганда исталган



85-расм.

стерженнинг зўриқиш кучи фақат битта тенглама тузиб аниқланади, қўшни стерженларнинг зўриқиш кучлари аниқланган ёки аниқланмаганига боғлиқ бўлмайди. Бу усул қўлланилганда ферма уч стерженидан кесилади (тўрт стерженидан кесиш тўғри эмас). Фермани, масалан, 4-, 5-, 6-стерженлари; 4-, 7-, 8-стерженлари; 1-, 3-, 6-стерженларидан кесиш мумкин, бироқ 5-, 6-, 7-, 9-стерженларидан кесиш тўғри эмас. Учта стерженидан кесилганда ферманинг бир қисми ташлаб юборилади, бу қисмнинг олиб қолган қисмига кўрсатадиган таъсири ўша кесилган учта стерженнинг номаълум зўриқиш кучлари орқали ифодаланади. Учта номаълум бўлган ҳолда текисликда ихтиёрий жойлашган кучларнинг мувозанат тенгламасидан ўша учта номаълумни топа оламиз, тўрт стерженидан кесилганда ўша тўрттасининг тўртта номаълум реакциясини учта мувозанат тенгламасидан аниқлай олмай қоламиз.

Энди стерженларни аниқ кесиб кўрсатамиз, масалан, 4-стерженнинг зўриқишини топиш керак бўлсин. Юқорида айтиб ўтилганидек, 4-стерженни 5-, 6-стерженлар ёки 7-, 8-стерженлар билан биргаликда кесиш мумкин. 4-, 5-, 6-стерженларни кесамиз-да (84-расм, *б*), ферманинг чап томонини ташлаб юборамиз, ташланган қисмининг ўнг қисмига берадиган таъсирини s_4, s_5, s_6 зўрикиш кучлари билан алмаштирамиз (84-расм, *б*). Ферманинг ўнг томондаги қисми s_4, s_5, s_6 ва Y_B кучлар таъсири остида мувозанатда турибди, s_4 зўриқиш кучини аниқлаш керак, шунинг учун иккита номаълум куч кесишган D нуқтага (Риттер нуқтасига) нисбатан моментлар тенгламаси тузилади: $\sum m_D(F_k) = 0,\ -s_4 \cdot a\sqrt{3} + Y_B \cdot a = 0,$ мана шу бир тенгламадан фақат s_4 номаълум аниқланади: $s_4 = \frac{Y_B}{\sqrt{3}} = 6{,}66$ кН, бу жавоб s_4 нинг 17-§ да тузилган жадвалдаги қийматига жуда тўғри келди, ҳатто ишораси ҳам бир хил бўлди. Масалан, s_4 ни эмас, s_6 ни аниқлаш керак бўлсин, унда ҳам фермани 84-расм, *б* дагича қилиб кесиб, икки номаълум куч кесишадиган E нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилади: $\sum m_E(F_k) = 0,\ s_6 \cdot a\sqrt{3} + Y_B \cdot 2a = 0,$ бундан $s_6 = -13{,}35$ кН жавоб чиқади, бу ҳам ўша жадвалдаги қийматга ҳатто ишораси билан ҳам тўғри келади. Бирор стерженнинг зўриқиш кучини аниқлаш учун фақат битта тенглама тузиб, у ечилмоқда. Бу жуда қулай усул. Энди бу ерда бир оз эҳтиёт бўлиш керак. 84-расм, *б* га қаралса, D ва E нуқтадан бошқа иккита номаълум куч кесишадиган нуқта йўқ. Борди-ю, K нуқтага ёки B нуқтага нисбатан моментлар тенгламаси тузилса, буларда номаълумлар битта эмас, балки иккита (s_6 ва s_5) бўлади. Шунинг учун моментлар тенгламаси эмас, кучларнинг проекциялари тенгламаси тузилади. Кучларни шундай ўққа проекциялаш керакки, бунда ҳам тенгламада фақат битта номаълум қатнашадиган бўлсин. Бундай ўқ сифа-



86-расм.

тида вертикал ўқ оламиз. 84-расм, б даги кучлар вертикал ўққа проекцияланади: $\sum F_{ky}=0$, $-s_5\cos 30°+Y_B=0$, бундан $s_5=13{,}32$ кН, бу жавоб ҳам s_5 нинг жадвалдаги қийматига ҳамма томондан тўғри келди.

Энди фазода параллел жойлашган кучларнинг мувозанатига оид бир масалани ечиб кўрсагамиз. Фазодаги кучларга оид масалалар ҳам текисликдаги кучлар таъсири остида турган жисмларнинг мувозанатига оид масалалар каби ечилади. Қайси жисмнинг мувозанатини текшириш керак эканлиги аниқлангандан сўнг жисм боғланишлардан бўшатилади, ташланган боғланишларнинг таъсири уларнинг реакциялари билан алмаштирилади, жисм эркин жисм деб ҳисобланиб, унинг мувозанат шартлари тузилади. Бу масалаларда мувозанат шартлари тузишда учрайдиган янги амал кучларнинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблашдир.

19- масала. Эни a, бўйи b бўлган тўғри тўртбурчак шаклида ишланган бир жинсли плитани кўтаришда уч нафар ишчидан бири плитанинг A учидан ушлаб туради (85- расм). Учала ишчига плитадан тушадиган куч бир хил бўлиши учун қолган икки киши плитани қаеридан ушлаши, яъни улар ушлаб турадиган B ва D нуқталарнинг координаталари нимага тенг бўлиши керак? Плитанинг оғирлиги G.

Ечиш. Плитанинг мувозанати кўриб чиқилади. Плитани кўтариб турган ишчилар қўлининг реакцияси R_A, R_B ва R_D билан белгиланса, плита вертикал йўналган тўртта куч таъсирида горизонтал вазиятда мувозанатда туради, бу ерда тўртинчи G куч — плитанинг оғирлик кучи. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказилади. Плита фазода параллел жойлашган кучлар таъсирида мувозанатда тургани учун (38) шартлар тузилади:

$$\sum F_{kz}=0:\quad R_A+R_B+R_D-G=0,$$

$$\sum m_x(F_k)=0;\quad R_Dy-G\frac{b}{2}+R_Ab=0,$$

$$\sum m_y(F_k)=0;\quad G\frac{a}{2}-R_Bx-R_Aa=0.$$

R_D куч x ўқини кесиб ўтгани учун унинг x ўқига нисбатан моменти нолга тенг. R_A куч y ўқини кесиб ўтгани учун унинг y ўқига нисбатан моменти нолга тенг. Ҳамма кучларнинг ўққа нисбатан моментлари кучнинг ўққа тик бўлган текисликдаги проекциясидан ўқ билан ўша текислик кесишган нуқтага нисбатан олинган момент сифатида ҳисоблаб чиқарилди. Масала шартида плитадан ҳар бир ишчига тушадиган куч бир хил бўлиши керак деб айтилган, яъни $R_A = R_B = R_D = R$. У ҳолда биринчи тенгламадан $3R = G$ тенглик келиб чиқади, буни охирги икки тенгламага қўйиб, тенглама R га қисқартирилади: $b + y = \frac{3}{2}b$, $a + x = \frac{3}{2}a$. Булардан $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ экани аниқланади. Иккинчи ва учинчи ишчи плитани четининг ўрталаридан ушлашлари керак экан. Шу чоққача ишлаб кўрсатилган масалаларнинг ҳаммасида номаълум миқдорлар реакция кучи бўлар эди. Бу масалада номаълум миқдорлар масофа (нуқталарнинг координатаси) бўлди.

Агар ўша плитани тўрт киши кўтарса, номаълум реакциялар тўртта, бу реакциялар қатнашадиган тенгламалар учталигича қолаверади; демак, масала статик жиҳатдан ноаниқ бўлиб қолади.

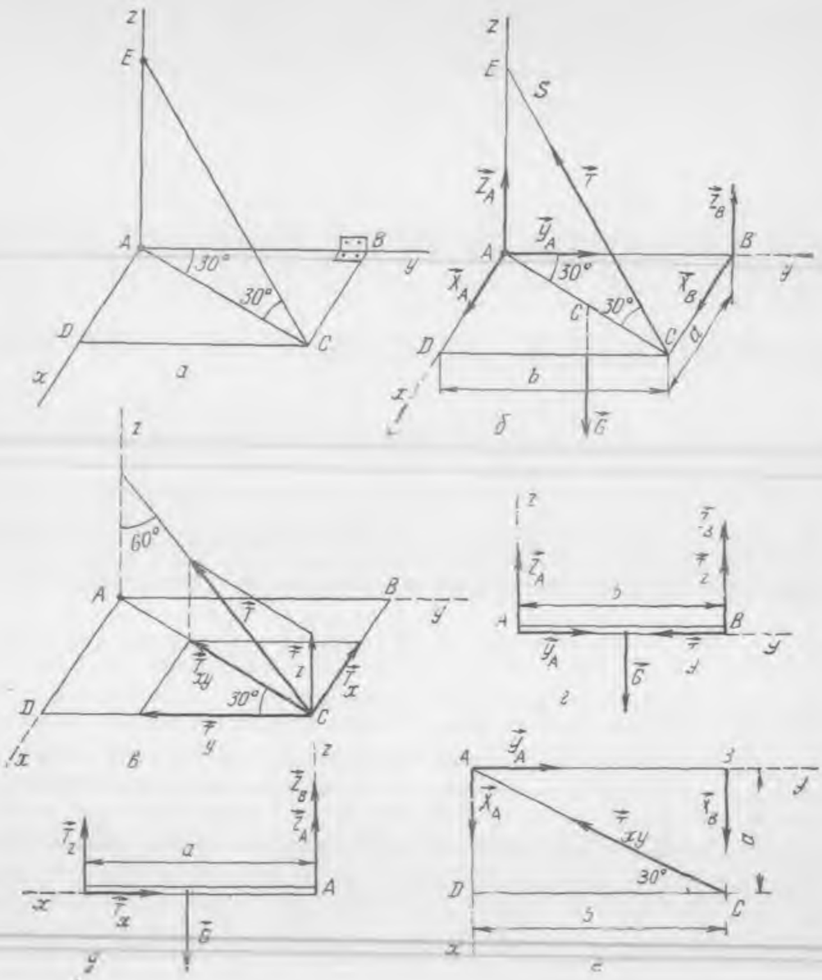
20-масала. Тўғри тўртбурчак шаклида ишланган бир жинсли $ABCD$ пластинка деворга A сферик шарнир ва B ошиқ-мошиқ билан бириктирилган бўлиб, уни CE арқон горизонтал вазиятда тутиб туради (86-расм, a); арқон деворнинг A нуқта билан бир вертикалдаги E нуқтасига қоқилган михга ва пластинканинг C нуқтасига боғланган. Пластинканинг оғирлиги $G = 200$ Н, $\angle ECA = \angle BAC = 30°$. Арқоннинг тортилиш кучи ва таянч реакциялари аниқлансин.

Ечиш. Изланаётган миқдорларни топиш учун пластинканинг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқлари чизмада кўрсатилгандек ўтказилади (86-расм, $б$). Масала шартида пластинканинг эни ва бўйи қанча экани берилмагани учун эни a, бўйи b билан белгиланади. Пластинкага вертикал бўйлаб пастга йўналган G оғирлик кучи, арқоннинг T реакцияси ва иккала шарнирнинг реакциялари қўйилган, G оғирлик кучи пластинканинг O марказига қўйилган; арқоннинг T реакцияси арқоннинг ўзи бўйлаб йўналган; A сферик шарнирнинг реакцияси фазода ихтиёрий йўналишда таъсир қилади, у координата ўқлари бўйлаб йўналган учта X_A, Y_A, Z_A тузувчи тарзида тасвирланади; B ошиқ-мошиқ (цилиндрик шарнир) нинг реакцияси унинг y ўқига тик бўлган xz текисликда ҳар қандай йўналишда таъсир қилади, у иккита X_B ва Z_B тузувчига ажратиб тасвирланади. Пластинкага таъсир этаётган кучлар фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган кучлар бўлгани учун уларнинг олтита мувозанат шартини [34-§, (36), (37) га қаранг] тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T\cos 30° \cos 60° = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A - T\cos 30° \cos 30° = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B + T\cos 60° - G = 0, \qquad \text{(a)}$$



87-расм.

$$\sum m_x(F_k)=0;\quad -G\frac{b}{2}+z_Bb+T\cos 60^\circ b=0,$$

$$\sum m_y(F_k)=0;\quad G\frac{a}{2}-T\cos 60^\circ a=0,$$

$$\sum m_z(F_k)=0;\quad -X_Bb=0.$$

Координата ўқлари бўйлаб йўналган реакция кучларининг ўқлардаги проекцияларини аниқлаш осон. Бироқ, баъзи кучларнинг, масалан, T реакциянинг x ёки y ўқидаги проекциясини бевосита ҳисоблаб бўлмайди, чунки T нинг x ва y ўқи билан ҳосил қилган бурчаклари маълум эмас. Шунинг учун T

реакция (86-расм, *в*) олдин xy текисликка проекцияланади. $T_{xy} = T\cos 30°$, кейин эса ўша T_{xy} проекция x ва y ўқларига проекцияланади: $T_x = T_{xy}\cos 60°$, $T_y = T\cos 30°$, бироқ бу ердаги T_{xy} нинг ўзи $T\cos 30°$ ифодага тенг. T_{xy} нинг бу ифодаси ўрнига қўйилса, $T_x = T\cos 30°\cos 60°$, $T_y = T\cos 30°\cos 30°$ бўлади [(а) системанинг биринчи, иккинчи тенгламасига қаранг]. T кучнинг z ўқидаги проекцияси бевосита аниқланади, чунки T куч билан z ўқи орасидаги бурчак 60° га тенг: $T_z = T\cos 60°$.

Кучларнинг мувозанат шартларига кирадиган ўққа нисбатан моментлари, одатда кучнинг тегишли ўққа тик бўлган текисликдаги проекциясидан ўқ билан бу текислик кесишган нуқтага нисбатан олинган момент сифатида ҳисобланади. Масалан. G оғирлик кучининг x ўқига нисбатан моментини ҳисоблаш учун Gzy текисликка проекцияланади, бу проекция G нинг ўзига тенг, елкаси эса $\frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$ га тенг, ишораси манфий. X_A куч x ўқига нисбатан момент бермайди, чунки ўқнинг ўзида ётибди: X_B куч x ўқига параллел, шунинг учун у x ўқига нисбатан момент бермайди; Z_A, Y_A кучлар x ўқини кесиб ўтади, шунинг учун улар ҳам x ўқига нисбатан момент бермайди. y ва z ўқларига нисбатан моментлар ҳам шунга ўхшаш ҳисобланади. Кучларнинг координата ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблашга қулай бўлиши учун жисм унга таъсир этаётган кучлар билан биргаликда учала координата текислигига проекциялаб кўрсатилади (86-расм *г*, *д*, *е*). Энди T реакциянинг x, y, z ўқларига нисбатан моментларини ҳисоблаш тўғрисида бир оз тўхталиб ўтамиз. T кучнинг учта тузувчига ажратилганлиги (86-расм, *в*) юқорида гапириб ўтилди. T кучнинг бирор ўққа, масалан, x ўқига нисбатан моменти унинг учала тузувчисининг ўша ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндисига тенг бўлади (Вариньон теоремаси. 42-§ га қаранг): T кучнинг T_x, T_y тузувчилари x ўқи билан бир текисликда ётгани учун уларнинг x ўқига нисбатан моменти нолга тенг, T_z тузувчисининг моментини аниқлаш учун yz текисликка проекцияланади, проекцияси T_z нинг ўзига тенг, бу проекциянинг x ўқи билан yz текислик кесишган A нуқтага нисбатан елкаси b га тенг. $m_x(T) = T_z b = T\cos 60° b$. Кучларнинг z ўқига нисбатан тузилган моментлар тенгламаси қуйидагича бўлди: Z_A куч z ўқида ётгани учун момент бермади, X_A, Y_A ва T кучлар z ўқини кесиб ўтгани учун момент бермади, G, Z_B кучлар z ўқига параллел бўлгани учун момент бермади, фақат X_B куч z ўқига нисбатан момент берди, ўшанинг моментини олтинчи тенглама қилиб ёзиб қўйдик. (а) системани ечишда ишни энг охирги, олтинчи тенгламадан бошлаймиз: $X_B = 0$ бўлади, ундан сўнг пастдан юқорига томон тенгламаларни бирин-кетин ечиб бориб, $T = G = 200$ Н, $z_B = 0$

$z_A = 100$ Н, $Y_A = 150$ Н, $X_A = 86{,}6$ Н экани аниқланади Масалада арқоннинг тортилиш кучини аниқлаш талаб қилинган эди, лекин бу ерда арқоннинг T реакцияси аниқланади. Арқоннинг $\boldsymbol{T}$ реакцияси унинг тортилиш кучига сон жиҳатдан тенг экани бундан олдин ишланган кўп масалаларда кўриб чиқилган эди. Агар B нуқтада ҳам сферик шарнир бўлганда эди, у ҳолда қўшимча $\boldsymbol{Y_B}$ реакция пайдо бўлиб, мувозанат шартларининг иккинчиси

$$Y_A + Y_B - T\cos 30^\circ \cos 30^\circ = 0 \qquad (б)$$

тенглама шаклида ёзилган бўлар эди. Лекин бошқа тенгламалар ўзгармай қолиб, X_A, Y_A, Z_A, Z_B, T номаълумларнинг қиймати ҳам аввалгича қолган бўлар эди. Аммо Y_A, Y_B номаълумларни битта (а) тенгламадан аниқлаш масаласи статик жиҳатдан ноаниқ масала бўлиб қолар эди, чунки B шарнирни сферик шарнир қилиш билан жисмга ортиқча боғланиш қўйилди. Битта сферик A шарнирнинг ўзиёқ жисмни y ўқи бўйлаб сирпанишга йўл қўймайди.

Энди жисмга фазовий кучлардан ташқари жуфт ҳам таъсир этаётган ҳолда битта масала ечамиз.

21-масала. Схемаси 87-расмда берилган диск ва втулкадан иборат яхлит деталнинг оғирлиги $G = 12$ кН бўлиб, дискка C нуқтада горизонтал текисликда ётадиган $\boldsymbol{T}$ куч қўйилган. K втулканинг горизонтга 30° қия бўлган юзасига ўша текисликда ётадиган ва моменти $m = 150$ кН см бўлган $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ жуфт таъсир қилади. $\boldsymbol{F} \parallel Ax$, $a = 10$ см, $b = 30$ см, $R = 15$ см. A подпятник ва B подшипникнинг реакциялари ҳамда T куч аниқлансин.

Ечиш. Номаълум миқдорларни аниқлаш учун деталнинг мувозанатини кўриб чиқамиз. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказамиз. A подпятникнинг реакциялари $\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$, B подшипникнинг реакциялари $\boldsymbol{X_B}$, $\boldsymbol{Y_B}$ булади. $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ жуфтни унинг моментининг $\boldsymbol{m}$ вектори орқали тасвирлаймиз (87-расм, *б*). Фазода ихтиёрий равишда жойлашган бу кучларнинг мувозанат шартларини тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A + X_B - T\cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - T\cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Z_A - G = 0, \qquad (а)$$

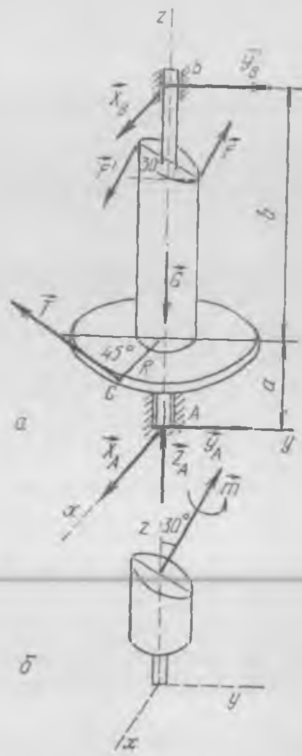
$$\sum m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad T\cos 45^\circ a - Y_B(a+b) = 0,$$

$$\sum m_y(\boldsymbol{F}_k) = 0; \quad -T\cos 45^\circ a + X_B(a+b) + m\cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad -TR + m\cos 30^\circ = 0.$$

(F, F') жуфтнинг x ўқига нисбатан моменти нолга тенг, чунки, биринчидан, масала шартида жуфтнинг тузувчилари Ax ўқига параллел бўлган, иккинчидан, жуфт моментининг m вектори x ўқига тик бўлган yz текисликда ётиб, x ўқига проекция бермайди. Жуфтнинг y ва z ўқига нисбатан моментлари m векторнинг y ва z ўқидаги проекцияларига тенг. Умуман, жуфт моментининг вектори қайси ўққа проекция берса, жуфт жисмни ўша ўқ атрофида айлантиришга интилади, момент векторининг проекцияси мусбат бўлса, соат стрелкаси ҳаракатига тескари айлантиришга интилади.

(а) системанинг ечимлари: $X_A \approx \approx 6{,}4$ кН, $Y_A \approx 4{,}6$ кН, $Z_A = 12$ кН, $X_B \approx -0{,}35$ кН, $Y_B \approx 1{,}5$ кН, $T \approx \approx 8{,}7$ кН.



7- расм.

Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатининг (36), (37) шартлари *асосий шартлар* деб аталади. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар мувозанатда бўлиши учун ҳамма кучларнинг учбурчакли бирор пирамиданинг қирралари бўйлаб йўналган олти ўққа нисбатан ёки учбурчакли призманинг ён қирралари ва асосининг қирралари бўйлаб йўналган олти ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя, деган теоремани исбот қилиш мумкин.

40-§. Эркин бўлмаган жисмнинг мувозанат шартлари

Эркин бўлмаган ҳар қандай жисмни эркин деб ҳисоблаш учун боғланишларни ташлаб, улар таъсирини реакцияси билан алмаштириш керак (5-§ га қаранг). Жисмга қўйилган актив кучларни бир-бирига боғлайдиган тенгламалар жисмнинг *мувозанат шартлари* деб аталади. Бироқ бу тенгламаларда номаълум реакция кучлари қатнашмайди.

Жисмнинг мустақил кўчишлари сони жисмнинг *эркинлик даражалари сони* деб аталади. Эркин қаттиқ жисм учта координата ўқига параллел бўлган учта илгарилама кўчишдан ташқари, яна ўша ўқлар атрофида учта айланма ҳаракат қила олади. Демак, эркин қаттиқ жисм олтита мустақил ҳаракат қила олади. Жисм бирор ўққа параллел равишда илгарилама ҳаракат қилмаслиги учун ҳамма кучларнинг мана шу ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур. Жисм бирор ўқ атрофида айланмаслиги учун эса ҳамма кучларнинг мана шу ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши шарт. Жисм мувозанатда турганда унга таъсир этаётган кучлар жисмни боғланишлар йўл қўядиган ҳаракатга келтира олмайдиган бўлиши керак; шунинг учун жисмнинг мувозанат шартлари сони унинг эркинлик даражалари сонига тенг.

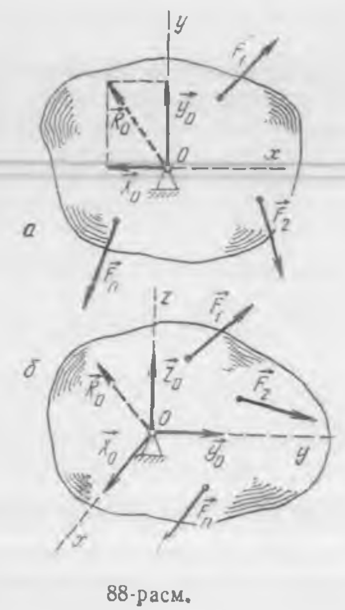
1. Ричагнинг мувозанати. Қўзғалмас ўққа тик бўлган текисликда ётган кучлар таъсирида ўша ўқ атрофида айлана оладиган жисм *ричаг* деб аталади. Ричакка ўша текисликда ётган F_1, F_2, ..., F_n актив кучлар таъсир этаётган бўлсин (88- расм, *а*). Ўқнинг R_0 реакцияси ҳам ўша текисликда ётиб, исталган йўналишга эга бўлади. x ва y координата ўқлари ўтказиб, ричакка таъсир этаётган бу кучлар учун учта мувозанат шартини (39) шаклида тузамиз.

$$X_0 + \sum F_{kx} = 0, \quad Y_0 + \sum F_{ky} = 0, \tag{41}$$

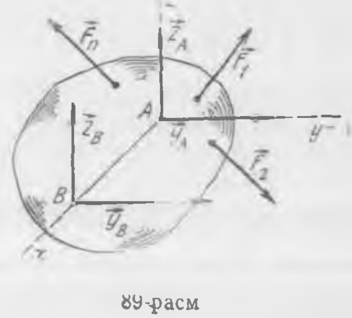
$$\sum m_0 (F_k) = 0. \tag{42}$$

(41) тенгламалардан R_0 реакция (унинг X_0, Y_0 тузувчилари) аниқланади, реакция кучлари қатнашмаган (42) тенглик эса ричагнинг мувозанат шартини ифодалайди. Демак, ричагнинг мувозанат шарти ҳамма кучларнинг айланиш ўқига нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади.

2. Битта қўзғалмас нуқтаси бўлган жисмнинг мувозанати. Битта нуқтасидан сферик шарнир билан маҳкамлаб қўйилган жисмга фазода ихтиёрий равишда йўналган F_1, F_2, ..., F_n актив кучлар қўйилган бўлсин (89- расм, *б*). Сферик шарнирнинг R_0 реакцияси O нуқтага қўйилган



88-расм.



89-расм

бўлиб, фазода ихтиёрий равишда йўналади. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, жисмга таъсир этаётган кучларнинг мувозанат шартларини (36), (37) шаклида тузамиз:

$$X_0 + \sum F_{kx} = 0,$$
$$Y_0 + \sum F_{ky} = 0, \qquad (43)$$
$$Z_0 + \sum F_{kz} = 0,$$
$$\sum m_x(F_k) = 0,$$
$$\sum m_y(F_k) = 0, \qquad (44)$$
$$\sum m_z(F_k) = 0.$$

(43) тенгликлардан R_0 реакция (унинг X_0, Y_0, Z_0 тузувчилари) аниқланади, реакция кучлари қатнашмаган (44) тенгликлар эса қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг мувозанат шартларини ифодалайди. Демак, қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисмнинг мувозанат шартлари ҳамма кучларнинг қўзғалмас нуқтадан ўтадиган учта ўзаро тик ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндилари алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлишини талаб қилади.

3. **Айланиш ўқи бор жисмнинг мувозанати.** Жисмнинг айланиш ўқи бўлсин, жисм мана шу ўқда силжий олсин, яъни жисмга A ва B нуқталарда иккита цилиндрик шарнир (подшипник) қўйилган (89- расм) бўлсин. Бу жисмга фазода ихтиёрий равишда жойлашган F_1, F_2, . . ., F_n актив кучлар қўйилган. У ҳолда шарнирлардаги реакция кучлари ўқларга тик йўналган бўлиб, айланиш ўқи расмда кўрсатилгандек йўналганда реакциялар Y_A, Z_A ва Y_B, Z_B тузувчиларга ажралади. Жисмга қўйилган фазовий кучларнинг олтита (36), (37) мувозанат шарти тузилса, улардан фақат иккитасида, яъни

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum m_x(F_k) = 0 \qquad (45)$$

тенгликларда реакция кучлари қатнашмаган экани кўринади. Шунинг учун (45) тенгликлар айланиш ўқига эга бўлган жисмнинг мувозанат шартларини ифодалайди. Демак, айланиш ўқига эга бўлган жисмнинг мувозанат шартлари ҳамма кучларнинг айланиш ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси ва уларнинг айланиш ўқига нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади.

4. **Айланиш ўқи қўзғалмайдиган жисмнинг мувозанати.** Агар 89- расмда кўрсатилган A ёки B шарнирлардан бири ўрнига сферик шарнир қўйилса, айланиш ўқи қўзғалмайдиган бўлиб қолади; бу ҳолда сферик шарнирнинг x ўқи бўйлаб йўналган яна битта реакцияси пайдо бўлади. Демак, бу ҳол-

да (45) тенгликларнинг фақат биттасида, тўғриси

$$\sum m_x(F_k) = 0 \tag{46}$$

тенгликда реакция кучи қатнашмайди, шунинг учун бу тенглик жисмнинг мувозанат шарти бўлади. Демак, айланиш ўқи қўзғалмайдиган жисмнинг мувозанат шарти ҳамма кучларнинг мана шу ўққа нисбатан олинган моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлишини талаб қилади. Жисмга таъсир этувчи кучларнинг ҳаммаси AB айланиш ўқига тик бўлган текисликда ётган хусусий ҳолда бу жисм ричаг бўлади.

41-§. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасини содда кўринишга келтириш

Таъсир чизиқлари айни бир текисликда жойлашган кучлар системаси, яъни текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси фазовий кучлар системасининг хусусий ҳоли ҳисобланади. Статиканинг асосий теоремаси хар қандай кучлар системаси учун ҳам тўғри. Жумладан, бу теорема текисликдаги кучлар системаси учун ҳам тўғри: текисликда ихтиёрий равишда жойлашган ҳар қандай кучлар системаси умумий ҳолда битта кучга ва битта жуфтга эквивалент бўлади.

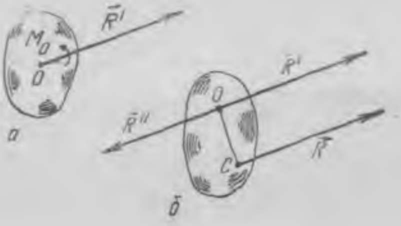
Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси ўша текисликда ётган нуқтага келтирилганда R' бош вектор кучлар таъсир этаётган текисликда ётади. Қўшилма жуфтларнинг ҳаммаси ҳам ўша текисликда ётади, демак, бу жуфтлар моментларининг векторлари бу текисликка тик бўлиб, ўзаро параллел йўналади. Қўшилма жуфтларга эквивалент бўлган жуфт моменти векторига тенг бўлган M_0 бош момент бу ҳолда бош векторга тик бўлади. Бунда бош моментнинг қиймати кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасида бош моментнинг вектори ўрнида алгебраик бош момент тушунчаси ишлатилади. Текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасининг кучлар билан бир текисликда ётган келтириш марказига нисбатан олинган *алгебраик бош моменти* деб бу кучларнинг келтириш марказига нисбатан олинган алгебраик моментларининг йиғиндисига айтилади.

Юқорида айтилган фикрларни ҳисобга олиб, статиканинг асосий теоремасини текисликдаги кучлар учун $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \Longleftrightarrow (R', M_0)$ символ шаклида ёзамиз, бу ерда $R' = \sum F_k$, $M_0 = \sum m_0(F_k)$. Хусусий ҳолларда кучлар системасининг нимага эквивалент бўлиши бу системанинг R' бош вектори ва M_0 бош моменти нимага тенг бўлишига боғлиқ. Хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. Агар бу системада $R' = 0$ ва $M_0 = 0$ бўлса, система му-

возанатда бўлади. Бу ҳолга тегишли (39), (39′), (39″) мувозанат шартлари олдин кўриб чиқилган ва уларга доир масала ишланган эди.

2 Агар бу системада $R' = 0$ бўлиб, $M_0 \neq 0$ бўлса, у ҳолда кучлар системаси моменти $M_0 = \sum m_0(F_k)$ бўлган битта жуфтга эквивалент бўлади. Бу ҳолда M_0 нинг қиймати O марказнинг қаерда олинганига боғлиқ бўлмайди, чунки акс ҳолда айни бир кучлар системаси бир-бирига эквивалент бўлмаган бошқа-бошқа жуфтлар билан алмаштирилган булар эди, бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, M_0 нинг қиймати O марказнинг қаерда олинганига боғлиқ эмас.



90-расм.

3. Агар бу системада $R' \neq 0$ бўлса, кучлар системаси битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

а) $R' \neq 0$, $M_0 = 0$. Бу ҳолда кучлар системаси O марказдан ўтадиган битта тенг таъсир этувчига эквивалент булади. Бош момент бўлмагани учун бош вектор тенг таъсир этувчига тенг бўлиб қолади: $R = R'$, яъни тенг таъсир этувчининг модули бош векторнинг модулига тенг, йўналиши бош вектор йўналиши билан бир хил.

б) $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ (90-расм, *а*). Бу ҳолда моменти M_0 бўлган жуфт модули $R' = R'' = R$ бўлган икки куч шаклида чизилади (90-расм, *б*). Агар $OC = d$ кесма жуфтнинг елкаси бўлса,

$$Rd = |M_0| \tag{47}$$

бўлиши керак. Бир тўғри чизиқ бўйлаб қарама-қарши йўналган тенг R' ва R'' кучларни бир-бири билан ейиштирилса, кучлар системаси C нуқтадан ўтадиган битта R тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. C нуқтанинг ўрни қуйидаги икки шартдан аниқланади: 1) $OC = a$ масофа (47) тенгликни қаноатлантиради ($OC \perp R$), 2) R кучнинг O марказга нисбатан олинган моментининг ишораси M_0 моментнинг ишораси билан бир хил бўлиши керак.

Текисликдаги кучлар мувозанатда бўлмаса ё битта тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади ($R' \neq 0$ ҳолда), ёки битта жуфтга эквивалент бўлади ($R' = 0$ бўлган ҳолда).

42-§. Фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системасини содда кўринишга келтириш

32-§ да исбот этилган теорема аниқ бир фазовий кучлар системасини содда кўринишга келтиришга имкон беради. Бунинг учун системанинг бош векторини ва ихтиёрий бир O марказга нисбатан бош моментини аниқлаш керак. Бош вектор билан бош момент 32- § даги (34) ва (35) проекциялари орқали аналитик равишда аниқланади. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

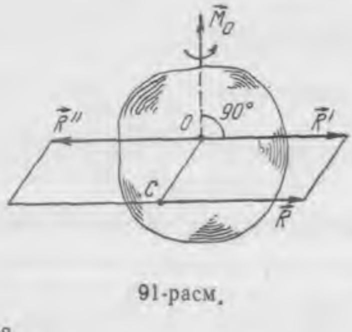
1. Агар фазовий кучлар системасида $R' = 0$, $M_O = 0$ бўлса, кучлар мувозанатда бўлади Бу ҳол 33- § да батафсил баён этилган эди.

2. Агар фазовий кучлар системасида $R' = 0$ бўлиб, $M_O \neq 0$ бўлса, кучлар системаси жуфтга эквивалент бўлади, бу жуфтнинг моменти (35) проекциялари орқали ҳисоблаб аниқланади. Бу ҳолда, текисликдаги кучларда бўлгани каби [40- §, 2-ҳолга қаранг], M_O нинг қиймати O марказнинг қаерда олинганига боғлиқ эмас. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида айланма ҳаракат қилади (лекин ҳамма вақт ҳам шундай бўлавермайди).

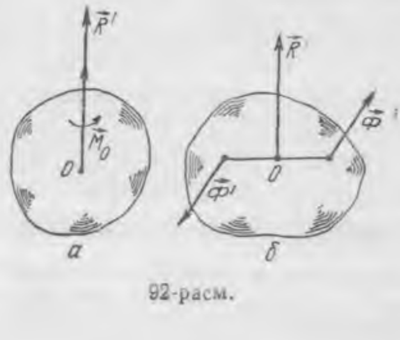
3. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$ бўлиб, $M_0 = 0$ бўлса, бу система O марказдан ўтадиган тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади. Тенг таъсир этувчининг қиймати (34) проекциялар орқали аналитик равишда ҳисоблаб аниқланади. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида илгарилама ҳаракат қилади (бунда тенг таъсир этувчи куч жисмнинг оғирлик марказига қўйилган бўлиши керак).

4. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, бироқ $M_0 \perp R'$ бўлса, кучлар системаси O марказдан бошқа жойдан ўтадиган тенг таъсир этувчи R кучга эквивалент бўлади. Шундай эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, $M_0 \perp R'$ бўлган ҳолда M_0 вектор орқали тасвирланадиган жуфт ҳам, R' куч ҳам айни бир текисликда ётади (91- расм). Бу ҳолда жуфтнинг R, R'' кучларини модуль жиҳатдан R' бош векторга тенг бўладиган қилиб, 91- расмда кўрсатилганча чизилса, R' ва R'' кучлар ўзаро ейишиб кетади, кучлар системаси эса $R = R'$ тенг таъсир этувчига эквивалент бўлади, лекин бу тенг таъсир этувчи C нуқтадан ўтади, бунда C нуқта $OC = \frac{|M_0|}{R}$ шартдан аниқланади ($OC \perp R$).

5. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, бироқ M_0 вектор R' га параллел бўлса (92- расм, a), кучлар системаси



91-расм.



92-расм.

R' куч билан ўша кучга тик бўлган текисликда ётган (Φ, Φ') жуфтга эквивалент бўлади (92- расм, *б*). Куч билан жуфтнинг бундай тўплами *динамик винт* деб ёки *динама* деб аталади. R' вектор ётган тўғри чизиқ кучлар системасининг *марказий ўқи* деб ёки *динаманинг ўқи* деб аталади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси йўқ. Бу системани бундан ортиқ соддалаштириб бўлмайди. Эркин жисм бундай кучлар таъсирида фақат мураккаб ҳаракат қилади, бундай ҳаракат *винтавий ҳаракат* деб аталади.

6. Агар фазовий кучларда $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлиб, улар бир-бирига параллел ҳам, тик ҳам бўлмаса [66- расм, *в* га қаранг], бу система ҳам динамага эквивалент бўлади, бироқ унинг марказий ўқи O марказдан ўтмайди. Шундай эканига исботсиз ишонса бўлади.

43- §. Тенг таъсир этувчининг ўққа нисбатан моменти тўғрисида Вариньон теоремаси

Қаттиқ жисмга фазода ихтиёрий равишда жойлашган $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ кучлар системаси таъсир этаётган бўлсин (93- расм). Бу кучлар R тенг таъсир этувчига эга бўлиб, унинг таъсир чизиғи бирор C нуқтадан ўтсин. Бу нуқтада жисмга мувозанатловчи Q куч қўйилади: $Q = -R$. У ҳолда $(F_1, F_2, \ldots, F_n, Q)$ система мувозанат ҳолатга келади. Шунинг учун мувозанатловчи кучни ҳам ўз ичига олган система (36) ва (37) мувозанат шартларини қаноатлантиради, жумладан. x ўқига нисбатан олинган моментлар йиғиндиси нолга тенг бўлади:

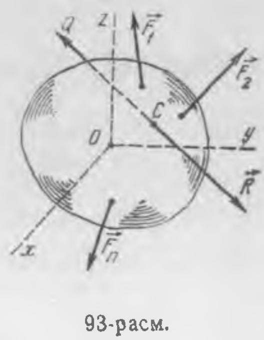
$$\sum m_x(F_k) + m_x(Q) = 0.$$

Бироқ $Q = -R$ бўлиб, иккаласи айни бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналгани сабабли $m_x(Q) = -m_x(R)$ бўлади, $m_x(Q)$ нинг бу ифодасини олдинги тенгликка қўямиз:

$$\sum m_x(F_k) - m_x(R) = 0,$$

бундан

$$m_x(R) = \sum m_x(F_k). \qquad (48)$$



93-расм.

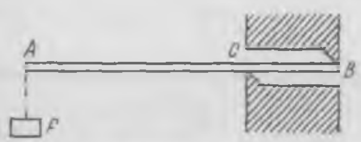
Демак, кучлар системаси тенг таъсир этувчига эга бўлса, бу тенг таъсир этувчининг ҳар қандай ўққа нисбатан олинган моменти қўшилувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг. Исбот этилган бу теорема Вариньон теоремасидир.

37-§ га доир масалалар

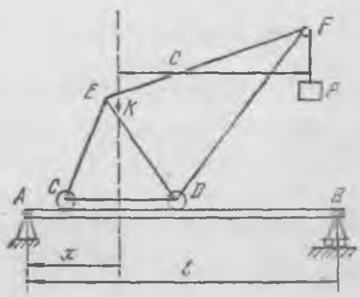
1. Узунлиги 2 м, оғирлиги 5 кН бўлган бир жинсли горизонтал AB балка қалинлиги 0,5 м бўлган деворга C ва B нуқталарда тиралиб турадиган қилиб ўрнатилган (94-расм). Балканинг A учига оғирлиги 10 кН бўлган юк осилган. Ишқаланиш йўқ деб ҳисоблаб, C ва B нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $R_C = 50$ кН, $R_B = 35$ кН.

2. Горизонтал AB балка устида $CDEF$ кран ҳаракатлана олади (95-расм). Краннинг оғирлиги 50 кН бўлиб, K нуқтага қўйилган. Кран F нуқтасида $P = 10$ кН юк кўтариб турибди. Ҳамма кучлар битта вертикал текисликда таъсир қилади, деб ҳисоблаб, балканинг оғирлигини эътиборга олманг. Краннинг расмда кўрсатилган вазиятида балканинг A ва B нуқталаридаги таянч реакциялари аниқлансин. $l = 10$ м, $x = 3$ м, $c = 4$ м. Жавоб: $R_A = 38$ кН, $R_B = 22$ кН.

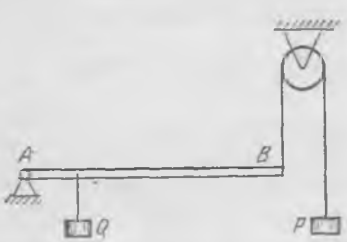
3. Оғирлиги 1 Н бўлган горизонтал AB стержень цилиндрик A шарнирда айлана олади (96-расм). Стерженнинг B учига ип боғланиб, бу ип кўчмас блокдан ўтказилиб, учига оғирлиги 1,5 Н бўлган P юк боғланган. Стерженнинг B учидан 20 см нарида турган нуқтасига оғирлиги 5 Н бўлган Q юк осилган. Стержень мувозанатда турибди, унинг узунлиги аниқлансин. Жавоб: 25 см.



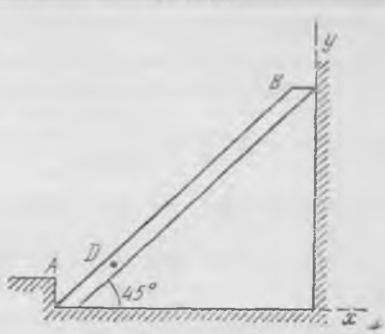
94-расм.



95-расм.



96-расм.



97-расм.

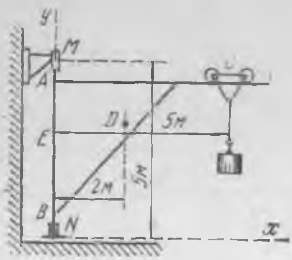
36-§ га доир масалалар

1. Силлиқ деворга горизонт билан 45° бурчак ҳосил қиладиган вазиятда бир жинсли AB тўсин тираб қўйилган (97-расм). Тўсиннинг пастки учидан ҳисоблаганда бутун узунлигининг учдан бир қисмидаги D нуқтага оғирлиги $P = 600$ Н бўлган юк осилган. Тўсиннинг оғирлиги 200 Н. A ва B нуқталардаги таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -300$ Н, $Y_A = 800$ Н, $X_B = -300$ Н.

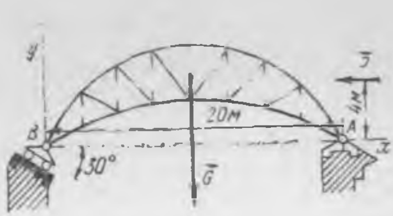
2. Эриган металл қуядиган ABC кран вертикал MN ўқи атрофида айлана олади (98-расм). Краннинг оғирлиги 20 кН бўлиб, D оғирлик маркази айланиш ўқидан 2 м масофада туради. Кран кўтариб турган Q юкнинг оғирлиги 30 кН. Ўлчамлар расмда кўрсатилган. M подшипник ва N подпятникнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_M = -38$ кН, $X_N = 38$ кН, $Y_N = 50$ кН.

3. Пештоқ шаклида ишланган ферманинг A нуқтаси қўзғалмас цилиндрик шарнирли таянчда ва B нуқтаси горизонт билан 30° бурчак ҳосил қилган силлиқ қия текисликдаги қўзғалувчи шарнирли (катокли) таянчда туради (99-расм). Ферманинг оғирлиги $G = 100$ кН, узунлиги $AB = 20$ м. Шамол босимининг тенг таъсир этувчиси $P = 20$ кН бўлиб, AB га параллел равишда ундан 4 м масофада фермага таъсир қилади. Таянч реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -11{,}2$ кН, $Y_A = 46$ кН, $R_B = 62{,}4$ кН.

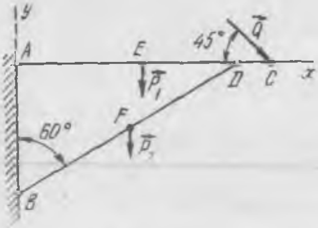
4. Узунлиги бир хил бўлган иккита AC ва BD стержень бир-бирига D нуқтада шарнир билан, вертикал деворнинг A ва B нуқталарига ҳам шарнир билан маҳкамланган (100-расм). AC стержень горизонтал вазиятда, BD стержень эса вертикал деворга 60° қия туради. AC стерженга унинг ўртасидаги E нуқтада вертикал йўналган $P_1 = 40$ Н куч, C нуқтада горизонтга 45° қия йўналган $Q = 100$ Н куч қўйилган. BD стерженга унинг ўртасидаги K нуқтада вертикал йўналган $P_2 = 40$ Н куч қўйилган. A ва B шарнирларнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $X_A = -287$ Н, $Y_A = 6$ Н, $X_B = 216$ Н, $Y_B = 145$ Н.



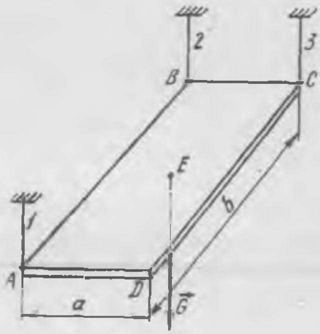
98-расм.



99-расм.



100-расм.



101-расм.

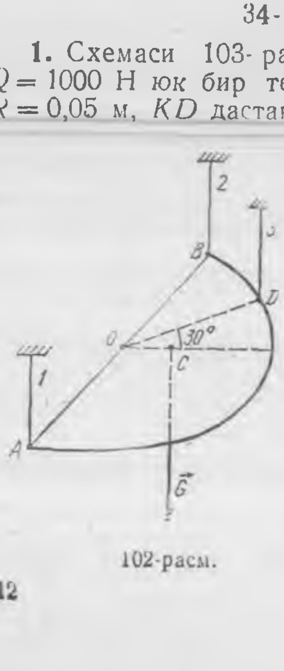
35-§ га доир масалалар

1. Вертикал қилиб туширилган учта ипга тўғри тўртбурчак шаклида ишланган бир жинсли $ABCD$ плита горизонтал вазиятда осиб қўйилган (101-расм). Плитанинг оғирлиги G. Ипларнинг тортилиш кучлари аниқлансин. Жавоб: $N_1 = N_3 = = \frac{G}{2}$, $N_2 = 0$.

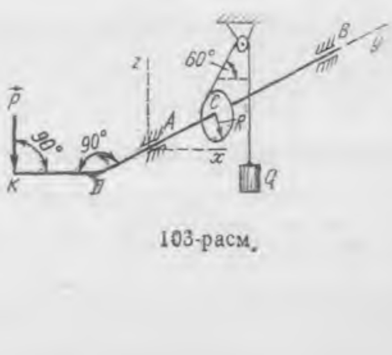
2. Ярим доира шаклида ишланган бир жинсли плита учта вертикал ипга горизонтал вазиятда турадиган қилиб осиб қўйилган (102-расм). Плитанинг оғирлиги G. Бу ипларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $N_1 = 0{,}38G$, $N_2 = 0{,}13G$, $N_3 = 0{,}49G$. Кўрсатма. Ярим доиранинг C оғирлик маркази диаметрга тик қилиб ўтказилган радиусда доира марказидан радиуснинг 0,43 қисмида туради.

34-§ га доир масалалар

1. Схемаси 103-расмда кўрсатилган чиғириқда оғирлиги $Q = 1000$ Н юк бир текис кўтарилади. Барабаннинг радиуси $R = 0{,}05$ м, KD дастанинг узунлиги 0,4 м, $DA = 0{,}3$ м, $AC =$



102-расм.

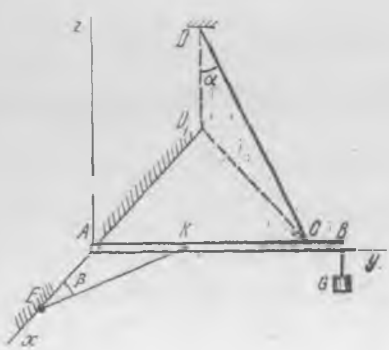


103-расм.

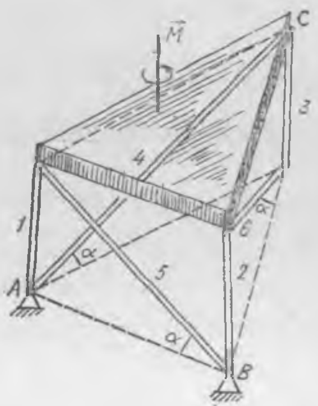
$= 0{,}4$. $CB = 0{,}6$ м. Арқон барабандан уринма бўйлаб горизонт билан $60°$ ҳосил қилиб тушади. KD даста горизонтал вазиятда турганда унга тушадиган вертикал P куч, A ва B подшипникларнинг реакциялари аниқлансин. Жавоб: $P = 125$ Н, $X_A = -300$ Н, $Z_A = -357$ Н, $X_B = -200$ Н, $Z_B = -384$ Н.

2. Горизонтал турган AB стержень деворга сферик A шарнир билан бириктирилган; KE ва CD симлар (тортқилар) уни деворга тик вазиятда тутиб туради (104-расм). Стерженнинг B учига оғирлиги $G = 360$ Н бўлган юк осилган. $AB = a = 0{,}8$ м; $AC = AD_1 = b = 0{,}6$ м; $AK = \frac{a}{2}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. Стерженнинг оғирлигини ҳисобга олманг. A шарнирнинг ва тортқиларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $X_A \approx -98$ Н; $Y_A \approx 705$ Н; $Z_A = -120$ Н; $T_C \approx 554$ Н; $T_K = 588$ Н. (Кўрсатма. Тортқининг T_C реакциясини горизонтал ва вертикал йўналган икки тузувчига ажратинг. T_C нинг ўққа нисбатан моментини ҳисоблашда Вариньон теоремасидан (43-§) фойдаланинг.

3. Томони a бўлган мунтазам учбурчак шаклида ишланган ABC плитани расмда кўрсатилгандек бириктирилган олтита стержень горизонтал вазиятда тутиб туради (105-расм). Стерженларнинг учтаси вертикал, қолган учта қия стерженнинг ҳар бири горизонтал текислик билан $\alpha = 30°$ бурчак ҳосил қилади. Плитанинг текислигига моменти M бўлган жуфт таъсир қилади. Плитанинг оғирлигини эътиборга олманг. Стерженларнинг реакцияси аниқлансин. Жавоб: $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{2}{3}\frac{M}{a}$, $s_4 = s_5 = s_6 = -\frac{4}{3}\frac{M}{a}$. (Кўрсатма. Бу масалани 39-§ нинг энг охирги абзацида тилга олинган теорема ёрдамида олтита ўққа нисбатан моментлар тенгламаси тузиш йўли билан ечинг.



104-расм.



105-расм.

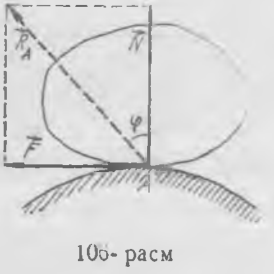
Учта ўқни вертикал турган уч стержень бўйлаб йўналтиринг, қолган учтасини расмдаги учбурчакли призма асосининг томонлари бўйлаб йўналтиринг).

6-БОБ. ИШҚАЛАНИШ

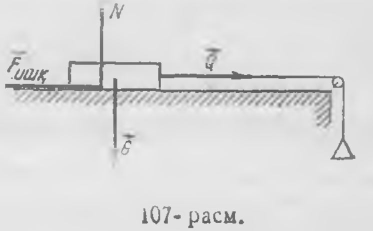
44-§. Сирпаниб ишқаланиш

Бир моддий жисм бошқа жисм сиртида сирпанганда пайдо бўладиган қаршилик *сирпаниб ишқаланиш кучи* дейилади. Жисмларнинг ишқаланиши фақат механикага алоқадор бўлмай, жисмларнинг электр, термик хоссаларига ва молекулалар ўртасида юз берадиган жараёнларга ҳам алоқадордир. Бу тушунча физикада кенг ўрганилади.

Шу чоққача кўриб келган масалаларда таянч сиртларининг жисмга кўрсатадиган реакцияларини аниқлашда сиртларни ниҳоят даражада силлиқ (абсолют силлиқ) ва қаттиқ деб ҳисоблаб келдик. Унда сиртлар жисмга фақат нормал бўйлаб йўналган реакция кучлари билан таъсир қилади. Тажриба бу фаразнинг ҳақиқатга тўғри келмаслигини кўрсатади. Ҳақиқатда эса жисмларнинг сирти озми-кўпми ғадир-будур бўлади. Ҳамма жисмлар деформацияланади. Шунинг учун ғадир-будур қўзғалмас сиртнинг мувозанатда турган жисмга кўрсатадиган R_A реакция кучининг модули ҳам, йўналиши ҳам актив кучларга боғлиқ. Қўзғалмас сиртнинг R_A реакцияси бу сиртга ўтказилган нормал (тик чизиқ) билан бирор α бурчак ҳосил қилади (106-расм). Бу R_A реакция кучини икки тузувчига ажратиш мумкин (106-расм): 1) улардан бири N куч бўлиб, у таянч сиртига ўтказилган нормал бўйлаб йўналади ва *нормал реакция* деб аталади; 2) иккинчиси эса F куч бўлиб, у таянч сиртига ўтказилган уринма текисликда ётади ва жисмнинг бу сиртда сирпанишига қаршилик қилади. Бу F куч сирпаниб ишқаланиш кучи деб аталади. Баъзан бир-бирига ишқаланувчи сиртлар ўртасида пайдо бўладиган ишқаланиш кучлари жисмнинг мувозанатини аниқлашда асосий омил ҳисобланади. Шунинг учун бундай ҳолларда ишқаланишни эътиборга олмаслик мумкин эмас.



106-расм



107-расм.

Одатда, ишқаланиш деганда бир-бирига тегиб турган тоза қуруқ сиртлар орасидаги қуруқ ишқаланиш назарда тутилади. Қуруқ ишқаланишда тинчликдаги (ёки мувозанатдаги) сирпаниб ишқаланиш ва бир жисм бошқа жисм сиртида бирор нисбий тезлик билан ҳаракат қилган ҳолдаги сирпаниб ишқаланиш билан иш кўрилади.

Ишқаланиш табиатда энг кўп учрайдиган ҳодиса бўлишига ва механиканинг деярли ҳамма масалаларида қатнашишига қарамай, унинг аниқ қонунлари шу чоққача кашф этилган эмас, чунки ишқаланиш кучи пайдо бўлишининг тўлиқ физик манзарасини тавсифлаш ва бу куч боғлиқ бўлган барча омилларни миқдор жиҳатдан аниқлаш жуда мураккаб. Шунинг учун амалда ишқаланиш кучларини ҳисобга олишда сифат характерига эга бўлган тақрибий қонунлар қўлланилади. Бу қонунлар ишқаланиш соҳасида Амонтон ўтказган (1699 й.) биринчи тажрибалар ва Кулон ўтказган (1781 й.) тадқиқотлар натижасида аниқланган.

Схемаси 107-расмда тасвирланган асбобда Кулон қонунини текшириб кўриш мумкин. Силлиқ бўлмаган горизонтал текисликда ётган тўғри бурчакли жисмга кўчмас блокдан ўтказилган ип боғланган; ипнинг иккинчи учига тарози палласини боғлаб, паллага тарози тоши қўйилган. Текислик билан жисм ишқаланиш коэффициенти аниқланадиган материалдан ясалади.

Жисмга унинг G оғирлик кучи, текисликнинг N реакцияси, ипнинг Q таранглик кучи (бу куч паллага қўйилган тошнинг оғирлигига тенг), ипнинг таранглик кучига тескари йўналган $F_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучи таъсир қилади. Паллага яна тош қўйиб ипнинг таранглик кучи оширилади. Ипнинг таранглик кучи маълум бир миқдорга етганда жисм ҳаракатга келади. Ипнинг таранглик кучи бу миқдордан кичик бўлиб қолаверар экан, у ишқаланиш кучи билан мувозанатлашиб, жисм тинч тураверади. Шунга қараб, бундай хулосага келамиз: жисм тинч турганда уни ҳаракатга келтирмоқчи бўлган куч ортганда ишқаланиш кучи нолга тенг бўлган қийматдан маълум бир $F_{\text{макс}}$ қийматгача ортади; ишқаланиш кучи $F_{\text{макс}}$ қийматдан катта бўла олмайди. Ишқаланиш кучининг бу қиймати *тинчликдаги сирпаниб ишқаланиш кучи* деб аталади Нормал босим кучи ҳосил қилувчи G оғирликни ўзгартириб, бу ҳолда ишқаланиш кучининг энг катта $F_{\text{макс}}$ қиймати қандай ўзгаришини текшириб кўриш мумкин. Нормал босим кучини ўзгартирмаган ҳолда ишқаланиш кучининг энг катта қийматига жисмларнинг бир-бирига ишқаланиш сирти катталиги қандай таъсир қилишини, шунингдек жисмлар материалининг, сиртларга ишлов бериш даражаси ва бошқа омилларнинг қандай таъсир қилишини тадқиқ этиш мумкин. Шу тадқиқотларга асосланиб туриб қуйида баён этиладиган Кулон қонунлари тўғри эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Кулон қонунлари 1. Сирпаниб ишқаланиш кучи жисмларнинг бир-бирига ишқаланиш сиртларига ўтказилган умумий уринма текисликда ётади ва ишқаланиш бўлмаганда жисмнинг актив кучлар таъсирида сирпаниши мумкин бўлган томонга қарши йўналади. Ишқаланиш кучининг қиймати актив кучларга боғлиқ бўлиб, ноль билан ўзининг энг катта $F_{\text{макс}}$ қиймати орасида бўлади:

$$0 \leqslant F_{\text{ишқ}} \leqslant F_{\text{макс}}. \tag{49}$$

2. Сирпаниб ишқаланишнинг энг катта қиймати бир-бирига ишқаланувчи сиртлар юзасининг катталигига боғлиқ эмас.

3 Сирпаниб ишқаланишнинг энг катта қиймати нормал босим кучига (нормал реакцияга) пропорционал, яъни

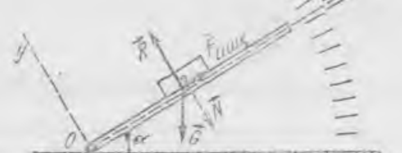
$$F_{\text{макс}} = fN. \tag{50}$$

Бу тенгликдаги f коэффициент *тенгликдаги сирпаниб ишқаланиш коэффициенти* деб аталади. Бу коэффициентнинг ўлчов бирлиги йўқ. Сирпаниб ишқаланиш f коэффициенти нормал босим кучига боғлиқ бўлмай, балки ишқаланувчи сиртларнинг материалига ва физик ҳолатига боғлиқ. Абсолют силлиқ жисмлар учун f коэффициент нолга тенг. Реал жисмлар учун $f > 0$. Ҳаракат бошлангандан кейин сирпаниб ишқаланиш коэффициенти бирмунча камаяди ва ҳаракатдаги сирпаниб ишқаланишнинг $f_{\text{дин}}$ қийматига эга бўлади.

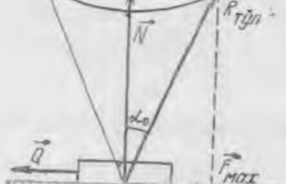
$$f > f_{\text{дин}}.$$

Ишқаланиш коэффициентининг ҳар хил шароитдаги қиймати тажрибада аниқланади. Тинчликдаги ва ҳаракатдаги сирпаниб ишқаланишнинг сон қийматлари техник справочникларда берилади.

Ишқаланиш бурчаги, ишқаланиш бурчагининг тангенси, ишқаланиш конуси деган тушунчалар билан танишамиз. Ишқаланиш коэффициентини тажрибада аниқлаймиз. Жисм ғадир-будир OA қия текислик устида ётибди (108-расм). Қия текисликнинг қиялик бурчагини истаганча ўзгартириш мумкин. Жисмга учта куч қўйилган: G оғирлик кучи, жисмнинг қия текисликка уриниш текислиги бўйлаб йўналган $F_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучи, қия текисликнинг R реакцияси; R реакция қия те-



108-расм.



109-расм.

кисликка тик бўлиб, унинг сон қиймати N нормал босим кучига тенг.

Текисликнинг қиялик бурчагини жисм текислик бўйлаб пастга қараб ҳаракатланмагунча орттириб борамиз. Текисликнинг жисм сирпана бошлагандаги қиялик бурчаги *ишқаланиш бурчаги* дейилади. Ишқаланиш бурчаги бир-бирига ишқаланувчи бир жуфт материалга тегишли бўлади. Масалан, жисм латундан, қия текислик пўлатдан ясалган бўлса, α бурчак латуннинг пўлат устида ишқаланиш бурчаги бўлади. Координата ўқларини 108-расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, кесишувчи кучлар учун мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad F_{\text{макс}} - G\sin\alpha_0 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R - G\cos\alpha_0 = 0. \tag{a}$$

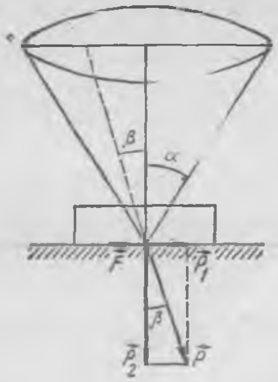
Бу тенгламаларда расмдаги $F_{\text{ишқ}}$ ўрнида ишқаланиш кучининг энг катта қиймати, яъни жисм сирпана бошлагандаги қиймати олинган, қия текисликнинг қиялик бурчаги ўрнида эса ишқаланиш бурчаги олинган. R нинг сон қиймати N нормал босим кучига тенг. (а) системани ечиб,

$$F_{\text{макс}} = \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot R \text{ ёки } F_{\text{макс}} = \operatorname{tg}\alpha_0 \cdot N$$

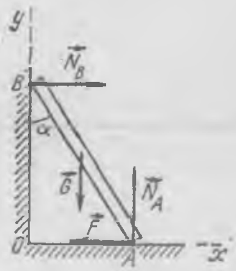
тенгликни топамиз. Бу (50) тенгликка солиштирилса, тинчликдаги сирпаниб ишқаланиш коэффициенти ишқаланиш бурчагининг тангенсига тенг эканини аниқланади. Таянч сиртига тик бўлган реакция *идеал реакция* ҳам дейилади (109-расм); таянч сиртининг жисмга кўрсатадиган тўлиқ реакцияси идеал реакция билан ишқаланиш кучининг геометрик йиғиндисига тенг. Демак, ишқаланиш кучи тўлиқ реакциянинг уринма йўналишдаги тузувчиси, идел реакция эса тўлиқ реакциянинг нормал йўналишдаги тузувчиси, ишқаланиш бурчаги эса тўлиқ реакциянинг сиртга ўтказилган нормалдан (яъни идеал реакциядан) энг кўп оғиш бурчаги.

Агар актив Q куч ўша нормал атрофида бурилса, ишқаланиш кучи ҳам, тўлиқ реакция ҳам бурилади. Бу ҳолда тўлиқ реакция конус чизади, бу конуснинг ўқи жисмларнинг уриниш сиртига тик бўлиб, учидаги текис бурчаги ишқаланиш бурчагидан икки марта катта бўлади. Ишқаланиш конуси деб аталадиган бу конус тўлиқ реакциянинг мумкин бўлган барча йўналишларининг геометрик ўрнидир. Ишқаланиш бурчаги, ишқаланиш конуси деган тушунчалар ғадир-будур сирт устидаги жисмларнинг мувозанатига доир масалаларни ечишда ишлатилади.

Силлиқ бўлмаган сирт устида ётган жисмга бирор актив P куч таъсир қилсин (110-расм), ўша куч сиртга ўтказилган нормал бирор β бурчак ҳосил қилсин. Агар β бурчак α_0 бурчакдан, яъни ишқаланиш бурчагидан кичик бўлса P куч бу жисмни ҳаракатга келтира олмаслигини кўрсатамиз. P кучни



110- расм.



111- расм.

икки тузувчига ажратамиз: $P_1 = P\sin\beta$, $P_2 = P\cos\beta$. P_1 тузувчи жисмни ҳаракатга келтиришга интилади, P_2 тузувчи эса сиртни босади, бунинг оқибатида P_1 га қарши йўналган $F_{ишк}$ ишқаланиш кучи пайдо бўлади. P_1 тузувчи ишқаланиш кучининг энг катта қийматидан ортиқ бўлган ҳолдагина жисм P куч таъсирида ҳаракатга келади: $P_1 > F_{макс} = fP_2 = \operatorname{tg}\alpha_0 P_2$, бу ерга P_1 ва P_2 нинг ифодаларини қўямиз:

$$P\sin\beta > \operatorname{tg}\alpha_0 \, P\cos\beta.$$

Бу тенгсизликнинг иккала томонини $P\cos\beta$ га бўлсак, жисм ҳаракатланишининг зарурий шартини топамиз:

$$\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha_0 \text{ ёки } \beta > \alpha_0.$$

Демак, жисм P куч таъсирида ҳаракатланиши учун кучнинг сиртга ўтказилган нормал билан ҳосил қилган β бурчаги ишқаланиш бурчагидан катта бўлиши керак, яъни бу кучнинг таъсир чизиғи ишқаланиш конусидан ташқарида ётиши керак. Текширилаётган P куч эса ишқаланиш конусининг ичидан ўтади, шунинг учун бу куч ҳар қанча катта бўлмасин, жисмни қўзғата олмайди.

22-масала. *Узунлиги l ва оғирлиги G бўлган бир жинсли AB балка силлиқ вертикал деворга ва ғадир-будур горизонтал полга тиралиб туради (111-расм). Балканинг полга ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Мувозанат вазиятида балка билан девор орасидаги α бурчак, шунингдек A ва B нуқталарда таянчларнинг реакцияси аниқлансин.*

Ечиш. Ишқаланишга доир масала ечишда шу нарсани эсда тутиш керакки, ишқаланиш кучлари қатнашадиган мувозанат шартлари тенглама тарзида эмас, балки тенгсизлик тарзида ифодаланади. Шунинг учун аввало ишқаланиш кучлари қатнашмайдиган шартларни тузиш керак. Масала ечиш босқичларида олдин айтиб ўтилганлардан ҳеч қанақа ўзгаришлар бўлмайди. Реакция кучларини тасвирлашга ўтилганда A нуқтада $F_{\text{ишқ}}$ кучи кўрсатилади. Агар ишқаланиш бўлмаса, балка ўнг томонга сирпаниб кетган бўлар эди, шунинг учун ишқаланиш кучи чап томонга йўналтирилган бўлиши керак. $F_{\text{ишқ}}$ кучи (49) ва (50) тенгликларга асосан $F_{\text{ишқ}} \leqslant fN_A$ тенгсизлик орқали ифодаланади. B нуқтада ишқаланиш кучи йўқ, чунки масаланинг шартида вертикал девор силлиқ деб айтилган. Балкага текисликда ихтиёрий равишда жойлашган кучлар таъсир қиляпти. Уларнинг мувозанат шартларини тузамиз. Ишқаланиш кучлари қатнашмайдиган мувозанат тенгламалари ва ишқаланиш кучи қатнашадиган шарт қуйидагича ёзилади.

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_A - G = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad G\frac{l}{2}\sin\alpha - N_B l\cos\alpha = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - F_{\text{ишқ}} = 0.$$

(a) системанинг иккинчи тенгламасидан $N_B = \frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$ экани, биринчисидан $N_A = G$ экани аниқланади. Учинчи тенгламанинг $N_B = F_{\text{ишқ}} \leqslant fN_A$ ечимида N_B ўрнига $\frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha$, N_A ўрнига G қўйилади:

$$\frac{G}{2}\operatorname{tg}\alpha \leqslant fG,$$

бундан $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2f$. Демак, α бурчакнинг мана шу тенгсизликни қаноатлантирадиган ҳамма қийматларида балка мувозанатда туради.

45-§. Думалаб ишқаланиш

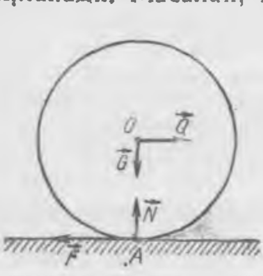
Бир жинсли оғир цилиндрни горизонтал текислик юзасида думалатиш учун цилиндрнинг ўқига горизонтал йўналган бирор Q куч билан таъсир этиш керак. Бу Q куч цилиндр думалаганда пайдо бўладиган қаршиликни енгади. Бу қаршилик *думаланиб ишқаланиш* деб аталади.

Думалаётган жисмнинг (цилиндрнинг) сирти ва жисм думалаётган текислик абсолют қаттиқ бўлмай, балки жисмнинг текисликка босим тушириши оқибатида бир оз деформацияланганн туфайли думаланишда ишқаланиш пайдо бўлади.

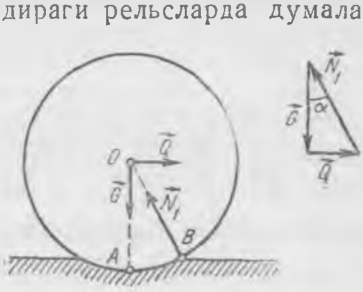
Дастлаб цилиндр шаклидаги жисм ва унинг тагидаги текисликни абсолют қаттиқ деб ва улар бир-бирига A нуқтада тегиб туради деб фараз қиламиз. Цилиндр сирпаниб кетмасдан думалаши учун цилиндрнинг сирти ҳам, текисликнинг юзаси ҳам ғадир-будур бўлиши керак. Цилиндрнинг ўқига горизонтал йўналган Q куч қўйилган ва бу кучнинг модули $F_{\text{макс}}$ дан

(44-§ га қаранг) кичик бўлсин (112-расм). У ҳолда цилиндрнинг A тегиш нуқтаси текислик юзасида сирпанмай туради. Бу ҳолда цилиндрга ўзаро мувозанатлашадиган G оғирлик кучи ва A нуқтага қўйилган N нормал реакция таъсир қилади, бундан ташқари, цилиндрга бир-бири билан мувозанатлаша олмайдиган Q куч ва A нуқтанинг сирпанишига қаршилик қиладиган F куч таъсир қилади. Q куч ҳар қанча кичик бўлганда ҳам цилиндр ана шу кучлар таъсири остида думалай бошлаган бўлар эди.

Ҳақиқатда эса аҳвол бутунлай бошқача бўлади. Жисмнинг ва тагидаги текисликнинг деформацияланиши оқибатида G ва N кучлар таъсирида жисм (цилиндр) текисликка бир A нуқтада эмас, балки бирор юза бўйлаб тегади (113-расм) Цилиндр ўқига қўйилган Q куч ўнг томонга йўналган ҳолда тегиш юзасининг чап томонида босим камайиб, унга қарши томонида босим ортади. Бу ҳолда N нормал реакция ўнг томонга бирор B нуқтага кўчади, у билан F сирпаниб ишқаланиш кучининг N_1 тенг таъсир этувчиси цилиндрнинг O ўқидан ўтади ҳамда G ва Q кучларни мувозанатлайди. Модомики, N_1 куч G ва Q кучларни мувозанатлар экан, бу уч кучдан тузилган куч учбурчаги ёпиқ бўлади. Бу куч учбурчагидан куринишича, Q куч ортганда бу системани мувозанатлаши учун N_1 куч вертикал чизиқ билан тобора каттароқ α бурчак ҳосил килиши, яъни N реакция қўйилган B нуқта ўнг томонга тобора кўпроқ силжиши керак. Бироқ бу силжишнинг уринувчи жисмлар материалининг хоссаларига боғлиқ бўлган чегараси бор. Силжишнинг энг катта қиймати k билан белгиланади. Мувозанат хали бузилмай турадиган вазиятда Q куч энг катта $Q_{макс}$ қийматга эга булса, $AB = k$ бўлади. $Q_{макс}$ нинг қийматини куч учбурчаги билан $\triangle OAB$ нинг ўхшашлик шартидан аниқлаш мумкин. $OA = r$ деб белгиланса (бу ерда r — цилиндрнинг радиуси), $\frac{Q_{макс}}{G} = \frac{k}{r}$ ёки $Q_{макс} = \frac{k}{r} G$. Агар $Q < Q_{макс}$ бўлса, цилиндр тинч туради. $Q > Q_{макс}$ бўлганда цилиндр думалай бошлайди. $Q_{макс}$ нинг ифодасидаги k коэффициент *думалаб ишқаланиш коэффициенти* дейилади. k коэффициент одатда сантиметр ҳисобида ўлчанади ва тажрибадан аниқланади. Масалан, вагон ғилдираги рельсларда думалаган-



112-расм.



113-расм.

да (ғилдираганда) $k=0{,}005$ см, шарикли подшипникларда $k=$ $=0{,}001$ см.

Кўпчилик материаллар учун $\frac{k}{r}$ нисбат f сирпаниб ишқаланиш коэффициентига қараганда анча кичик. Шунинг учун техникада имкон бўлган жойларда сирпаниб ишқаланиш думалаб ишқаланиш билан алмаштирилади.

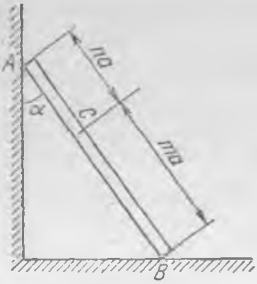
44-§ га доир масалалар

1. Ўз текислигида суриб очиладиган эшик пастки йўналтирувчида ишқаланиб сурилади. Йўналтирувчининг материали билан эшик орасидаги f ишқаланиш коэффициенти 0,5 дан ортиқ эмас. Эшикни сурганда вертикал текисликда ағанаб кетмайдиган қилиш учун унинг дасгасини кўпи билан қандай h баландликка қоқиш керак? Эшикнинг эни $l=0{,}8$ м, оғирлик маркази унинг вертикал симметрия ўқида ётади. Жавоб: $h=$ $=\frac{l}{2f}=0{,}8$ м.

2. Пастки учи горизонтал юзада турган AB нарвон вертикал деворга тираб қўйилган (114-расм). Нарвон билан девор орасидаги ишқаланиш коэффициенти f_1, нарвон билан пол орасидаги ишқаланиш коэффициенти f_2. Нарвоннинг устида турган одам билан биргаликдаги оғирлиги p бўлиб, бу оғирлик нарвоннинг узунлигини $m:n$ нисбатда бўладиган C нуқтага қўйилган. Нарвон мувозанатда турганда у билан девор орасида ҳосил бўладиган энг катта α бурчак, шунингдек α нинг ўша қийматида A ва B нуқталардаги реакцияларнинг N_A ва N_B нормал тузувчилари аниқлансин. Жавоб:

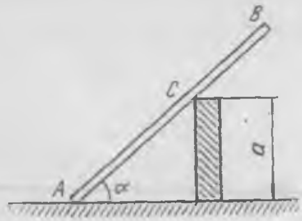
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{(m+n)f_2}{m-nf_1f_2};\; N_A=\frac{Pf_2}{1+f_1f_2};\; N_B=\frac{P}{1+f_1f_2}.$$

3. Пастки учи ғадир-будур горизонтал полда турган AB нарвон вертикал силлиқ деворга тираб қўйилган (115-расм). Нарвоннинг оғирлиги G. Нарвоннинг полга ишқаланиш коэффициенти f га тенг. Оғирлиги p га тенг бўлган киши нарвон-

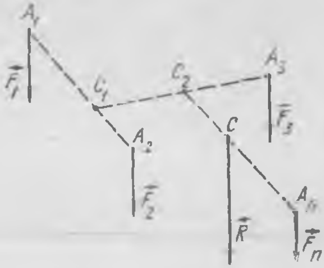


114-расм.

115-расм.



116-расм.



117- расм

нинг бошига чиқа олиши учун нарвонни полга нисбатан қандай α бурчак ҳосил қилиб қўйиш керак? Жавоб:

$$\operatorname{tg} \alpha \geqslant \frac{G + 2P}{2f(G + P)}.$$

4. *Узунлиги* l *бўлган* оғир AB балка A учида горизонтал текисликка қўйилган бўлиб, C нуқтада баландлиги $a = \frac{l}{2}$ бўлган силлиқ вертикал таянчга тиралиб туради (116- расм). Шу балка горизонтга 60° қиялатиб қўйилган ҳолда мувозанатда туриши учун балка билан текислик орасидаги ишқаланиш коэффициенти энг камида қанча бўлиши керак? Жавоб: $f \geqslant 0{,}48$. **Кўрсатма.** *Масалани ечишда балканинг оғирлигини* G деб оласиз, лекин оғирликнинг қанча бўлиши жавобга таъсир қилмайди.

7-БОБ. ОҒИРЛИК МАРКАЗИ

46-§. Параллел кучлар марказининг координаталари

Параллел кучлар маркази тушунчаси механиканинг баъзи масалаларини ечишда, жумладан, жисмларнинг оғирлик марказини аниқлашда қўлланилади. Қаттиқ жисмнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарига қўйилган $F_1, F_2, \ldots, F_n$ параллел кучларнинг ҳаммаси бир томонга йўналган бўлса (117- расм), бу кучлар системаси тенг таъсир этувчига эга бўлади. Бу кучлар бир текисликда ётмайди, бироқ булардан ҳар иккитаси бир текисликда ётади, чунки ҳар қандай икки тўғри чизиқ (кучларнинг таъсир чизиқлари) орқали ҳамиша текислик ўтказиш мумкин. Бир томонга йўналган параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси кетма-кет қўшиш усулидан фойдаланиб аниқланади. Бунинг учун A_1 ва A_2 нуқталарга қўйилган F_1 ва F_2 кучни икки параллел кучни қўшишнинг 26 § да қисқача айтиб ўтилган қоидаси билан қўшамиз. Буларнинг тенг таъсир этувчиси $R_1 = F_1 + F_2$ бўлиб, у

$$F_1 \cdot A_1C_1 = F_2 \cdot A_2C_1 \qquad (51)$$

тенгликни қаноатлантирадиган C_1 нуқтага қўйилади (расмда R_1 тенг таъсир этувчи кўрсатилмаган). Кейин шу икки кучнинг R_1 тенг таъсир этувчисига A_3 нуқгага қўйилган F_3 куч қўшилса, учта F_1, F_2, F_3 кучнинг тенг таъсир этувчиси, ўша қоидага асосан, C_1A_3 тўғри чизиқда ётадиган C_2 нуқтага қўйилади. Кучларни кетма-кет қўшишнинг бу йўли охиригача давом эттирилса, бутун системанинг

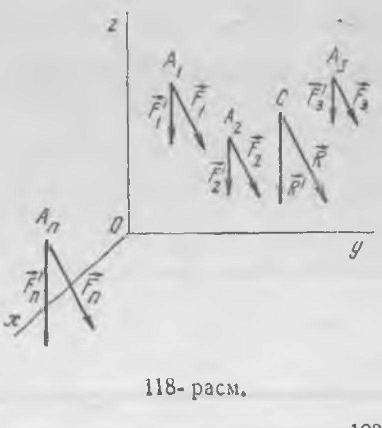
$$R = \sum F_k \tag{52}$$

тенг таъсир этувчиси ва тенг таъсир этувчи қўйилган C нуқта аниқланади.

Параллел кучларнинг ҳаммасини бирор томонга маълум бурчакка бурдик деб фараз қилайлик. У ҳолда дастлабки икки кучнинг тенг таъсир этувчиси ҳам ўша томонга ва ўша бурчакка бурилади, чунки параллел кучларнинг тенг таъсир этувчиси қўшилувчи кучларга параллел булади. Дастлабки икки кучнинг тенг таъсир эгувчиси қўйилган C_1 нуқта жойидан қўзғалмайди, чунки F_1 ва F_2 кучларнинг модули ва қўйилиш нуқталари ўзгармади, демак, (51) тенглик ҳам, тенг таъсир этувчининг модули ҳам ўзгармайди, чунки бу модуль қўшилувчи кучлар модулларининг йиғиндисига тенг. Модомики, R_1 кучнинг модули ва қўйилиш нуқтаси ўзгармаган, бунинг устига R_1 куч бурилиб F_3 кучга параллеллигича қолган экан, уч кучнинг таъсир этувчиси қўйилган C_2 нуқта ҳам жойидан қўзғалмайди. Бундан кейин ҳам шу тариқа C нуқта аввалги жойида қолаверишига, тенг таъсир этувчи R кучнинг таъсир чизиғи мана шу нуқта атрофида бурилиб, система кучларининг таъсир чизиқларига параллеллигича қолаверишига ишонч ҳосил қилинади.

Параллел кучларнинг маркази деб параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғида ётган шундай C нуқтага айтиладики, ҳамма параллел кучлар ўзи қўйилган нуқталар атрофида бурилиб бир-бирига параллеллигича қолганда тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи ўша нуқта атрофида бурилади.

Энди параллел кучлар марказининг координаталарини аниқлаймиз. C нуқтанинг A_1, A_2, ..., A_n нуқталарга нисбатан, яъни жисмга нисбатан эгаллаган вазияти ўзгармайди ва координаталар системасига боғлиқ бўлмайди. Шунинг учун ихтиёрий $Oxyz$ координата ўқлари олиб (118-расм), бу ўқларда нуқталарнинг координаталарини $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$, $C(x_c, y_c, z_c)$ орқали белгилаймиз.



118- расм.

C нуқтанинг вазияти кучларнинг йўналишига боғлиқ бўлмаганлигидан фойдаланиб, кучларнинг ҳаммасини қўйилиш нуқталари атрофида z ўқига параллел бўладиган қилиб бурамиз. Бурилган F'_1, F'_2, ..., F'_n кучларга Вариньон теоремасини (43-§) татбиқ этамиз. Бурилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси R' бўлгани учун ундан y ўқига нисбатан момент олиб,

$$m_y(R') = \sum m_y(F'_k) \tag{53}$$

тенгликни ёзамиз. Расмдан $m_y(R') = R'x_c = Rx_c$, чунки $R' = R$, худди шунга ўхшаш, ҳар бир кучнинг y ўқига нисбатан моменти $m_y(F_1) = F'_1 x_1 = F_1 x_1$ бўлади, чунки $F'_1 = F_1$ ва ҳоказо. Бу миқдорларнинг ҳаммаси (53) тенгликка қўйилса, $Rx_c = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n$ бўлади. Бундан x_c, яъни параллел кучлар марказининг абсциссаси аниқланади:

$$x_c = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{R}.$$

y_c координатани аниқлаш учун кучлардан x ўқига нисбатан моментлар оламиз. z_c координатани аниқлаш учун ҳамма кучларни y ўқига параллел қилиб йўналтириб, улардан x ўқига нисбатан моментлар оламиз.

Ниҳоят, параллел кучлар марказининг координаталари қуйидагича ифодаланади:

$$x_c = \frac{\sum F_kx_k}{R}, \quad y_c = \frac{\sum F_ky_k}{R}, \quad z_c = \frac{\sum F_kz_k}{R}, \tag{54}$$

бу ерда R тенг таъсир этувчи (52) тенгликдан аниқланади.

47-§. Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази ва унинг координаталари

Жисмни Ерга тортадиган куч билан жисмнинг Ер билан бирга айланиши оқибатида пайдо бўладиган марказдан қочма кучнинг тенг таъсир этувчиси *оғирлик кучи* дейилади. Бу кучнинг сон қиймати жисмнинг оғирлигига тенг. Оғирлик кучи бир учи қимирламайдиган қилиб боғланган, иккинчи учига оғир юк боғланган ип бўйлаб йўналади. Бу йўналиш *шовуннинг йўналиши* ёки *вертикал йўналиш* деб аталади.

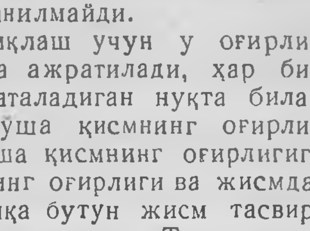
Агар жисм майда зарраларга бўлинган деб фараз қилинса, бу зарраларнинг ҳар бирига таъсир этувчи оғирлик кучи шу зарранинг ўзи билан бир хил бўлган нуқтага қўйилади. Ҳар бир зарранинг оғирлик кучи Ер марказига томон йўналгани учун зарраларнинг оғирлик кучлари кесишувчи кучлар бўлади. Бироқ оғирлик маркази аниқланадиган жисмнинг ўлчамлари Ернинг ўлчамларига қараганда ниҳоят даражада кичик бўлгани туфайли айни бир жисм зарраларининг оғирлик кучларини кесишувчи кучлар эмас, балки параллел кучлар деб, ҳисоблаш мумкин. Масалан, узунлиги 300 м келадиган катта кеманинг тумшуғида ва кетида турган икки зарранинг оғирлик кучлари орасидаги бурчак атиги ўн секунд бўлар экан; бу бурчак шу қадар кичикки, уни китобдаги чизмада чизиб кўрсатиш амри маҳол. Айни бир жисмнинг ҳар хил зарраларининг оғирлик кучларини бир-бирига параллел деб олиб, жисмнинг оғирлигини бу параллел оғирлик кучларининг марказига қўйилган деб ҳисоблаш мумкин. Бу марказ *жисмнинг оғирлик маркази* дейилади. Фазода жисмнинг вазияти ўзгартирилса, жисм зарраларининг оғирлик кучлари вертикал ва бир-бирига параллел бўлиб қолаверади. Жисмга нисбатан эса бу кучлар ўзларининг қўйилиш нуқталари атрофида бурилиб, параллеллигича қолаверади. Бу ҳолда параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг таъсир чизиғи айни бир нуқтадан, яъни жисмнинг оғирлик марказидан ўтади. Демак, фазода жисмнинг вазияти ўзгарганда оғирлик марказининг жисмга нисбатан эгаллаган вазияти ўзгармайди. Оғирлик марказининг вазияти жисмнинг шаклига ва унда моддий зарралар тақсимотига боғлиқ.

Бирор жисмнинг оғирлик марказини жисм зарраларининг оғирлик кучларини кетма-кет қўшиш йўли билан аниқлаш анча мушкул бўлганидан бу усул қўлланилмайди.

Жисмнинг оғирлик марказини аниқлаш учун у оғирлик маркази осон аниқланадиган қисмларга ажратилади, ҳар бир бундай қисм тасвирловчи нуқта деб аталадиган нуқта билан алмаштирилади. Тасвирловчи нуқта ўша қисмнинг оғирлик марказига қўйилиб, унинг оғирлиги ўша қисмнинг оғирлигига тенг бўлади. Тасвирловчи нуқта ўзининг оғирлиги ва жисмдаги ўрни билан тавсифланади. Шу тариқа бутун жисм тасвирловчи нуқталар системаси билан алмаштирилади. Тасвирловчи нуқталарнинг оғирликлари $G_1, G_2, \ldots, G_n$ билан белгиланади (119-расм). Жисмга боғланган координаталар системаси ўтказамиз, z ўқини юқорига тик йўналтирамиз. Тасвирловчи нуқталарнинг координаталарини (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... деб белгилаймиз. Тасвирловчи нуқталар системасидаги барча оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси бутун жисмнинг G оғирлигига тенг бўлиб, жисмнинг $C(x_c, y_c, z_c)$ оғирлик марказига қўйилган. C оғирлик марказининг координаталарини параллел кучлар маркази координаталарининг (54) ифодаларидан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$x_c = \frac{\sum G_k x_k}{G}, \quad y_c = \frac{\sum G_k y_k}{G},$$

$$z_c = \frac{\sum G_k z_k}{G}. \qquad (55)$$



119-расм.

Бу ифодалар (54) ифодаларда F_k кучлар ўрнига тасвирловчи нуқталарнинг

G_k оғирлик кучларини қўйиш натижасида ҳосил бўлди. (55) формулалар оғирлик марказининг вазиятини аниқлайди. Кучлар билан улар қўйилган нуқталар координаталари кўпайтмаларининг йиғиндиси *статик момент* деб аталади. Пировардида шуни таъкидлаш керакки, таърифга кўра жисмнинг оғирлик маркази геометрик нуқтадир; бу нуқта жисмнинг ўзидан ташқарида бўлиши ҳам мумкин. Масалан, симдан ясалган ҳалқанинг оғирлик маркази ҳалқанинг ўзида бўлмай, балки унинг геометрик марказида ётади.

48-§. Чизиқ, текис шакл ва жисмнинг оғирлик маркази

Агар жисм бир жинсли бўлса, унинг ҳар қандай қисмининг G_k оғирлигини v_k ҳажми билан ҳажм бирлигининг γ оғирлиги купайтмаси орқали $G_k = \gamma v_k$ тенглик билан, бутун жисмнинг G оғирлигини $G = \gamma V$ тенглик билан ифодалаймиз. Бу ифодаларни (55) формулаларга қўйиб, суратдаги γ умумий кўпайтувчини қавсдан чиқариб, махраждаги γ билан қисқартирсак,

$$x_c = \frac{\sum \gamma v_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k x_k}{V},$$
$$y_c = \frac{\sum \gamma v_k y_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \qquad (56)$$
$$z_c = \frac{\sum \gamma v_k z_k}{\gamma V} = \frac{\sum v_k z_k}{V}$$

формулалар келиб чиқади. Бир жинсли жисмнинг оғирлик маркази жисмнинг фақат шаклига боғлиқ бўлиб, γ нинг қийматига боғлиқ эмас. Координаталари (56) формулалар билан аниқланадиган C нуқта *ҳажмнинг оғирлик маркази* деб аталади.

Агар жисм бир жинсли юпқа текис пластинка бўлса, шу каби йўллар билан унинг оғирлик маркази координаталари

$$x_c = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \; y_c = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \; z_c = \frac{\sum s_k z_k}{S} \qquad (57)$$

формулалар билан ифодаланишини аниқлаш осон, бу ерда S — бутун пластинканинг юзаси, s_k — унинг қисмларининг юзаси. Координаталари (57) формулалар билан аниқланадиган C нуқта *юзасининг оғирлик маркази* деб аталади.

Чизиқнинг оғирлик маркази координаталарининг ифодалари ҳам худди шу йўл билан чиқарилади:

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{z}, \; y_c = \frac{\sum l_k y_k}{z}, \; z_c = \frac{\sum l_k z_k}{z}, \qquad (58)$$

бу ерда z — бутун чизиқнинг узунлиги, l_k — унинг қисмларининг узунлиги.

Агар жисм бир жинсли бўлмасдан, моддий симметрия текислигига эга бўлса, яъни жисмнинг мана шу текисликдан бир томонда турган ҳар бир заррасига бу текисликдан иккинчи томонда оғирлиги худди аввалги зарраникига тенг бўлган симметрик жойлашган зарра мос келса, у ҳолда жисмнинг оғирлик маркази симметрия текислигида ётади. Текисликдан бир томонда турган ҳар бир заррага текисликдан иккинчи томонда оғирлиги худди шундай симметрик жойлашган зарра мос келса, бу икки зарра оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси симметрия текислигида ётган нуқтага қўйилади. Шу сабабдан жуфт-жуфти билан олинган бошқа симметрик зарралар оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчилари қўйиладиган нуқталар ҳам симметрия текислигида ётади. Бу тенг таъсир этувчиларни қўшиб, уларнинг тенг таъсир этувчисини топамиз, бу куч эса ўша текисликда жисмнинг оғирлик марказига қўйилади. Жисм симметрия ўқига ёки симметрия марказига эга бўлган ҳол учун ҳам шунга ўхшаш теоремани исбот қилиш мумкин. Бу теоремалардан қуйидаги натижаларни келтириб чиқариш мумкин:

1) бир жинсли тўғри стерженнинг (ёки тўғри чизиқ кесмасининг) оғирлик маркази унинг ўртасида ётади;

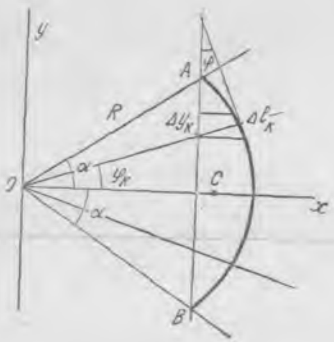
2) параллелограммнинг (параллелограмм шаклида ишланган бир жинсли юпқа пластинканинг) оғирлик маркази унинг диагоналларининг кесишиш нуқтасида, яъни параллелограммнинг симметрия марказида ётади;

3) бир жинсли мунтазам кўпбурчак, доира, эллипс ва шарнинг оғирлик маркази уларнинг геометрик марказида ётади. Қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини аниқлашнинг бу усули *симметрия усули* дейилади. Жисмнинг оғирлик маркази жисмни оғирлик маркази осон топиладиган қисмларга ажратиш йўли билан ҳам аниқланади. Бу ҳолда жисмнинг ҳар бир қисми ўша қисмнинг оғирлик марказига қўйилган тасвирловчи нуқта билан алмаштирилади. Кейин (56), (57), (58) формулаларнинг биридан фойдаланиб бутун жисмнинг оғирлик маркази аниқланади. Агар жисмда ковак жойлар ёки тешиклар бўлса, ковакларнинг ҳажми ва тешикларнинг юзи манфий деб олиниб, оғирлик маркази олдин айтиб ўтилган усул ва формулалар билан аниқланади. Бу усул баъзан *манфий массалар усули* ёки *тўлдириш усули* деб аталади. Баъзан жисмларнинг оғирлик маркази ўрта мактабдан маълум бўлган экспериментал усул билан ҳам аниқланади.

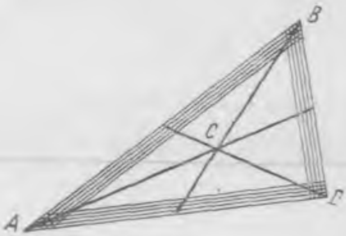
Айлана ёйининг ва учбурчак юзасининг оғирлик марказини аниқлашни мисол тариқасида кўрсатиб ўтамиз.

Айлана ёйининг оғирлик маркази. R радиусли айлананинг марказий бурчаги 2α бўлган AB ёйини кўриб чиқамиз (120-расм). Координата ўқларини расмда кўрсатилганча ўтказамиз. x ўқи бу ёйнинг симметрия ўқи. Бу ёйнинг оғирлик маркази симметрия ўқида, яъни x ўқида ётади, шунинг учун $y_c = 0$. x_c координатасини (58) формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{\sum \Delta l_k x_k}{l}$$



120- расм.



121- расм.

Бунинг учун AB ёйни Δl_k элементар бўлакларга бўлиб, ҳар бир бўлакни тўғри чизиқ кесмаси деб фараз қиламиз Агар Δl_k бўлакнинг ўртасига ўтказилган радиус x ўқи билан φ_k бурчак ҳосил қилса, расмдан

$$\cos\varphi_k = \frac{x_k}{R} = \frac{\Delta y_k}{\Delta l_k} \qquad (a)$$

эканлиги кўринади. Бу ерда x_k — Δl_k бўлакнинг юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида олинган абсциссаси (а) тенгликдан $x_k \Delta l_k = R\Delta y_k$ тенглик келиб чиқади. Ҳамма бўлаклар учун мана шундай ифодалар тузиб, уларни жамлаймиз:

$$\sum \Delta l_k x_k = \sum R\Delta y_k = R\sum \Delta y_k = Rh,$$

бу ерда h — барча бўлакларнинг вертикал ўққа туширилган проекцияларининг йиғиндиси бўлиб, AB ватарнинг узунлигига тенг. Топилган ифодани (58) формулага қўйиб, ёйнинг x_c оғирлик маркази аниқланади:

$$x_c = \frac{Rh}{l}.$$

$h = 2R\sin\alpha$ ва $l = 2\alpha R$ эканини ҳисобга олиб, x_c ни қуйидагича ёзамиз:

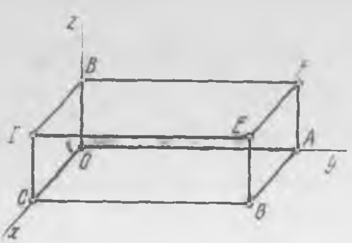
$$x_c = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Учбурчак юзасининг оғирлик маркази. ABD учбурчакнинг юзасини бир томонига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан жуда кўп энсиз тилимларга бўламиз (121- расм). Булар шу қадар энсизки, уларни тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаш мумкин. Ҳар бир бундай кесманинг оғирлик маркази унинг ўртасида ётади, шунинг учун учбурчак юзасининг оғирлик маркази учбурчакнинг бир учини ўша учи қаршисидаги томоннинг ўртаси билан туташтирувчи медиананинг бир жойида ётади. Учбурчакнинг юзасини бошқа бир томонига параллел бўлган тўғри чизиқлар билан энсиз тилимларга бўлиб, учбурчак юзасининг оғирлик маркази бошқа медианада ҳам ётиши керак деган хулосага келамиз. Демак, учбурчак юзасининг оғирлик маркази медианалар кесишган нуқтада ётади. Планиметриядан маълумки, учбурчакнинг медианалари асосдан ҳисоблаганда тегишли медиананинг учдан бир қисмида, учидан ҳисоблаганда учдан икки қисмида кесишади.

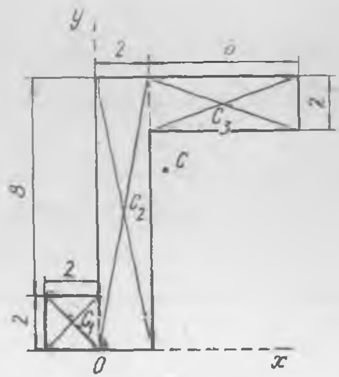
Шакли мураккаб жисмнинг оғирлик маркази координаталарини аниқлашда, аввал 47-§ да айтиб ўтилганидек, жисмни оғирлик маркази осон аниқланадиган қисмларга ажратамиз, уларни эса тасвирловчи нуқталар билан алмаштирамиз. Бундай жисмнинг оғирлик маркази координаталарини топиш учун ҳамма тасвирловчи нуқталарнинг оғирлик марказини қисмларнинг материали ҳар хил бўлганда (55) формулалардан, ҳамма қисмларнинг материали бир хил бўлганда эса (56), (57) ёки (58) формулалардан фойдаланиб топамиз. Бироқ, амалда бу ҳисоблар анча машаққатли бўлади. Масалан, пароход, самолёт ёки автомобиль каби жисмларни баъзан бир неча минг тасвирловчи нуқта билан алмаштиришга тўғри келади. Бундай ҳолларда қуйидаги масаланинг ечимида кўрсатиладиган жадвал бўйича ҳисоб қилиш анча қулай.

23-масала. Тўғри бурчакли параллелепипед (122-расм) контурининг оғирлик маркази координаталари аниқлансин. Параллелепипеднинг қирралари бир жинсли стерженлар бўлиб, лекин узунлиги бир хил бўлган баъзиларининг оғирлиги тенг эмаслиги шартида ёзиб кўрсатилган: $OA = 8$ дм, $OB = 4$ дм, $OC = 6$ дм; оғирликлари тегишли қирра ёнига Ньютон ҳисобида ёзиб қўйилган: OA ники 250, OB, OC, CD ларники 75, CG ники 200, AF ники 125, AG ва GE ларники 50, BD, BF, DE ва EF ларники 25.

Ечиш. Стерженларни тасвирловчи нуқталар билан алмаштирамиз. Улардан ҳар бирининг координаталари ўзи тасвирлаётган стержень ўртасининг координатасига, ҳар бирининг оғирлиги эса ўша стерженнинг оғирлигига тенг. Координата



122-расм.



123-расм.

ўқларини расмда кўрсатилганча қилиб ўтказамиз. Жадвал тузамиз:

Тартиб сони	Стерженнинг номи	G_k	x_k	y_k	z_k	$G_k x_k$	$G_k y_k$	$G_k z_k$
1	*OB*	75	0	0	2	0	0	150
2	*OC*	75	3	0	0	225	0	0
3	*CD*	75	6	0	2	450	0	150
4	*BD*	25	3	0	4	75	0	100
5	*BF*	25	0	4	4	0	100	100
6	*OA*	250	0	4	0	0	1000	0
7	*CG*	200	6	4	0	1200	800	0
8	*DE*	25	6	4	4	150	100	100
9	*AG*	50	3	8	0	150	400	0
10	*AF*	125	0	8	2	0	1000	250
11	*EG*	50	6	8	2	300	400	100
12	*EF*	25	3	8	4	25	200	100
	$\sum$	1000				2625	4000	1050

Ечилиши янада тушунарли бўлиши учун бир-икки стерженни тасвирловчи нуқталар билан алмаштирганда жадвалнинг устунлари қандай тўлдирилганини изоҳлаб ўтамиз. Масалан, *OB* стержень ўзининг ўртасига қўйилган тасвирловчи нуқта билан алмаштирилди, унинг координаталари $x_1=0$, $y_1=0$ ва $z_1=2$, чунки бу тасвирловчи нуқта z ўқда *OB* стерженнинг ўртасида ётибди; $x_1=0$ ва $y_1=0$ бўлгани учун $G_1x_1=75\cdot 0=$ $=0$ ва $G_1y_1=75\cdot 0=0$, G_1z_1 эса $75\cdot 2=150$ бўлди. *CG* стерженни алмаштиргандаги тасвирловчи нуқта ўша стерженнинг ўртасига қўйилади, бу стержень xy текисликда ётгани учун унинг z_6 координатаси $z_6=0$ бўлади, x_6 ва y_6 координаталари эса $x_6=6$, $y_6=4$. Ўша сатрдаги 1200, 800 ва 0 рақамлари тасвирловчи нуқтанинг оғирлигини тегишли координатага кўпайтириб топилган.

Учинчи устундаги сонларни қўшиб чиқиб бутун конструкциянинг оғирлигини аниқлаймиз, охирги учта устундаги сонларни қўшиб чиқиб статик моментлар аниқланади; кейин статик моментни конструкциянинг бутун оғирлигига бўлиб, оғирлик марказининг координаталари аниқланади: $x_c=2{,}625$ дм; $y_c=$ $=4{,}000$ дм; $z_c=1{,}050$ дм.

Масала шартида ҳамма жойида материали бир хил бўлган жисмлар берилган ҳолларни кўриб чиқамиз. Бунда олдин айтиб ўтилганидек, (55) формула эмас, балки (56), (57), (58) лардан бири ишлатилади.

24-масала. Шакли 123-расмда кўрсатилган бир жинсли пластинканинг оғирлик маркази координаталари аниқлансин. Ўлчамлари сантиметр ҳисобида берилган.

Е ч и ш. Координата ўқларини расмда кўрсатилгандек қилиб ўтказиб, пластинкани уч қисмга — учта тўғри тўртбурчакка бўламиз. Бўлиш чизиқлари пунктир билан кўрсатилган. Ҳар бир тўғри тўртбурчак оғирлик марказининг координаталарини ва уларнинг юзаларини ҳисоблаб чиқарамиз (жадвалга қаранг).

Қисмлар	x_k	y_k	s_k
1	−1	1	4
2	1	5	20
3	5	9	12

Бутун пластинканинг юзаси $S = s_1 + s_2 + s_3 = 36$ см².
Ҳисоблаб топилган миқдорларни юзанинг оғирлик марказини кўрсатадиган (57) формулага қўямиз:

$$x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ см;}$$

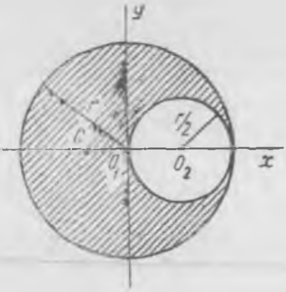
$$y_c = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ см;}$$

C оғирлик марказининг топилган вазияти расмда кўрсатилган. C нуқта пластинкадан ташқарида турар экан. Бу мисол оғирлик марказининг геометрик нуқта эканлигини ва бу нуқта жисмдан ташқарида туриши мумкин эканлигини яна бир марта кўрсатади.

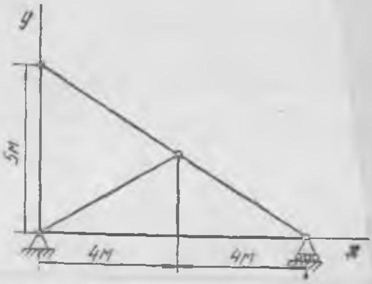
Тўлдириш усули (ёки манфий массалар усули) деб аталадиган усулга оид бир масалани ечамиз.

25-масала. Радиуси r бўлган бир жинсли дискдан радиуси $\frac{r}{2}$ бўлган доира кесиб олинган. Диск қолган қисмининг оғирлик маркази аниқлансин (124-расм).

Ечиш. Координата ўқлари расмда кўрсатилгандек ўтказилса, координаталар боши дискнинг марказига тўғри келади. Диск қолган қисмининг симметрия ўқи бор, симметрия ўқини x ўқи деб оламиз. Изланаётган оғирлик маркази ўша симметрия ўқида ётади, шунинг учун $y_c = 0$. Оғирлик марказининг абсциссасини топамиз. Масалани тўлдириш усулидан фойдаланиб ечамиз. Дискнинг қолган қисмини икки тасвирловчи нуқта билан кўрсатамиз. Тасвирловчи нуқталарнинг биринчисини дискнинг марказида оламиз, бу нуқтанинг массаси тўлиқ дискнинг массасига тенг деб ҳисоблаймиз. Диск бир жинсли бўлгани сабабли массаси ўрнида унинг юзасини олиш мумкин. Демак, $s_1 = \pi r^2$, $x_1 = y_1 = 0$. Тасвирловчи нуқтанинг иккинчиси кесиб олинган тўгаракнинг марказида ётади, массаси эса кесиб олинган доиранинг массасига тенг бўлиб, ишораси тескари деб фараз қилинади. Кесиб олинган доиранинг массаси ўрнида унинг юзаси олинади. Доиранинг юзаси $s_2 = -\frac{\pi r^2}{4}$, $x_2 = \frac{r}{2}$, $y_2 = 0$. Бу манфий юзани биринчи дискнинг юзасига қўшганда 124-расмда тасвирланган шакл ҳосил бўлади. Диск қолган қисмининг оғирлик маркази абсциссасини $x_c = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2}{s_1 + s_2}$



124- расм.



125- расм.

формуладан топамиз:

$$x_c = \frac{\pi r^2 \cdot 0 - \frac{\pi r^2}{4} \cdot \frac{r}{2}}{\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{4}} = -\frac{r}{6}.$$

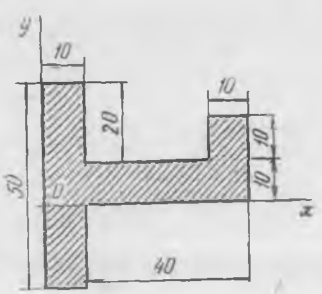
C оғирлик маркази катта дискнинг *O* марказидан чапда ҳақиқатан ҳам *x* ўқида жойлашган.

48-§ га доир масалалар

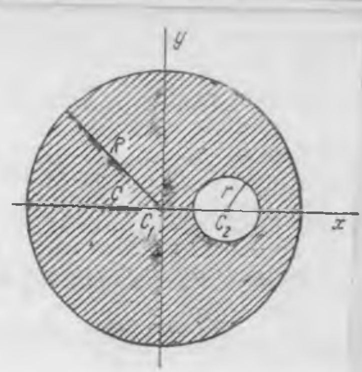
1. Текис ферманинг оғирлик маркази координаталари аниқлансин (125-расм); ҳамма стерженларнинг узунлик бирлигининг оғирлиги бир хил деб ҳисобланг. Жавоб: $x_c = 2{,}94$ м; $y_c = 1{,}875$ м.

2. 126-расмда кўрсатилган бир жинсли юпқа пластинканинг оғирлик маркази координаталари *x* ва *y* ўқларига нисбатан аниқлансин. Ўлчамлар сантиметр ҳисобида берилган. Жавоб: $x_c = 1{,}9$ см; $y_c = 0{,}6$ см.

3. Радиуси *R* бўлган доиравий пластинкадан радиуси *r* бўлган доира кесиб олинган (127-расм). $C_1C_2 = a$. Ўша пластинканинг оғирлик маркази координаталари *x* ва *y* ўқларига нисбатан аниқлансин.



126- расм.



127- расм.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

РАХМАТ ХУДАЙБЕРДИЕВ
РАШИД САИДАЛИЕВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для студентов немашиностроительных ВУЗов

Тошкент „Ўқитувчи" 1992

Муҳаррир *Ж. Пирмуҳамедов, Ф. Орипова*
Бадиий муҳаррир *Ф. Неққадамбоев*
Техник муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳлар *М. Минахмедова, А. Иброхимов*

ИБ№ 4996

Теришга берилди 28. 08. 91. Босишга рухсат этилди. 15. 01. 92. Формати $60 \times 90^1/_{16}$. Литературная гарнитура. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л 8,5. Шартли кр.-отт. 8,75. Нашр. л. 8,48. Тиражи 5000. Зак. № 6170. Баҳоси 11 с. 90 т.

„Ўқитувчи" нашриёти, Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 11—134—89.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд ш. У. Турсунов кўчаси, 82. 1992.

Объединённое издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

Х 87

Худойбердиев Р., Сайдалиев Р.
Назарий механика: Олий ўқув юрт. машинасозликдан бошқа ихтисос оладиган студентлари учун ўқув қўлл. — Т.: Ўқитувчи, 199. —136 б.

I. Автордош.

Худайбердиев Р., Сайдалиев Р. Статика: Для студентов втузов.

ББҚ 22.21я73