Ф. Б. БАДАЛОВ

Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш

Ўзбекистон ~~ССР~~ Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги олий ўқув юртларининг амалий математика, автоматлаштирилган бошқарув системалари ва инженер-иқтисодчи ихтисосликлари студентлари учун дарслик сифатида тавсия этган

Тошкент „Ўқитувчи“ 1989

Тақризчилар: ЎзССР ФА мухбир аъзоси **Ф. Б. Абутолиев**, иқтисод фанлари доктори **Г. М. Қосимов**, физика-математика фанлари кандидати **Қ. Сафоева**.

Дарсликда оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш асослари баён қилинган. Ўзгарувчи миқдорларнинг натижавий сони функцияларини минималлаш масалалари, чизиқли, чизиқсиз ва динамик программалаштириш батафсил кўриб чиқилган. Асосий назарий материал мисоллар, машқлар ва иқтисодий ҳамда техник характердаги масалалар билан тўлдирилган.

Дарслик олий ўқув юртларининг амалий математика, АБС, инженер-иқтисодчи ихтисосликлари студентлари учун мўлжалланган.

22.18
Б 18

Бадалов Ф. Б.

Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш: Олий Ўқув юрт. студ. учун дарслик. — Т.: Ўқитувчи, 1989. — 188 б.

Бадалов Ф. Б. Теория оптимизации и математическое программирование.

ББК 22.18я73

Б $\frac{1602110000-6}{353(09)-89}$ 161—89

ISBN 5—645—00494—9

СЎЗ БОШИ

Оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш ҳозир инсон фаолиятининг турли жабҳаларида кенг қўлланилаётган фанлардан биридир. Бу соҳадаги муҳим муваффақиятларга катта техник системаларни лойиҳалаш ва анализ қилиш натижасида эришилгандир. Назарий билимларнинг инженерлик соҳасига тезда татбиқ қилиниши ҳозирги замон ҳисоблаш техникасининг такомиллаштирилиши ва кенг тарқалиши билан бевосита боғлиқдир.

Муаллиф мазкур дарсликни техника олий ўқув юртларининг махсус факультетлари ва инженер-иқтисодчилар тайёрлайдиган ихтисосликлари учун тасдиқланган янги ўқув программасига жавоб берадиган қилиб, ўзининг кўп йиллар давомида Тошкент политехника институтида, Самарқанд Давлат университетида ва Сирдарё Давлат педагогика институтларида ўқиган лекциялари ҳамда кўп йиллик илмий-педагогик тажрибаси асосида ёзди. Шунингдек, муаллиф ўзининг ва шогирдларининг кейинги йилларда олиб борган илмий изланишлари натижаларини, улардан студентлар ўзларининг ўқув фаолиятида бемалол фойдалана олишларини эътиборга олиб, дарсликка киритишни мақсадга мувофиқ деб топди. Дарсликни ёзишда рус тилидаги адабиётлардан ҳам кенг фойдаланилди. Фойдаланилган илмий мақолалар ва адабиётлар рўйхати дарсликнинг охирида берилган.

Инженерлар учун олий математикани, физикани, химияни, материаллар қаршилиги ва радиоэлектроникани билиш қандай зарур бўлса, оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш усулларини билиш ҳам шундай зарурдир.

Ҳозирги кунда оптималлаш назарияси ва математик программалаштиришнинг қатор бўлимлари бўйича кўпгина чуқур мазмунли илмий китоблар, дарслик ва ўқув қўлланмалари булажак мутахассислар хизматидадир. Аммо уларнинг кўпи чуқур математик йўналишда ёзилган бўлиб, уларни ўрганиш учун студентлар махсус математик тайёргарликка эга бўлишлари керак. Айниқса, оптималлаш назарияси ва математик программалаштириш усуллари ҳар томонлама тушунарли қилиб ёзилган қулланма ва дарслик ўзбек тилида етарли эмаслиги студентлар учун бир қанча қийинчилик туғдирмоқда.

Бу дарсликдаги темалар чуқур ва пухта ўзлаштирилиши учун деярли ҳар бир тема охирида типик мисол ва масалалар изоҳлар билан ечиб кўрсатилган ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ишлашлари учун қўшимча мисол ва масалалар келтирилган. Дарсликнинг бундай услубда тузилиши, ўйлаймизки, бу курсни мустақил ўрганувчилар учун жуда катта ёрдам беради.

Дарслик асосан техника олий ўқув юртларининг махсус факультетлари ва инженер-иқтисодчилар тайёрлайдиган ихтисосликлари учун мослаб ёзилган бўлса-да, ундан университетларнинг математика ва амалий математика, педагогика институтларининг физика-математика ва бошқа факультетларнинг студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Дарсликнинг қўлёзмасини кўриб чиқиб, унинг сифатини яхшилашга ёрдам берганликлари учун профессорлардан Ф.Б. Абутолиев, Ғ. М. Қосимовга ва доцент Қ. Сафоевага автор ўз миннатдорчилигини билдиради.

Дарслик тўғрисидаги фикр-мулоҳазаларни қуйидаги адресга юборилишини илтимос қиламиз:

Тошкент—700129, Навоий кўчаси, 30
„Ўқитувчи“ нашриётининг умумтехника адабиёти редакцияси

Муаллиф.

1-БОБ ФУНКЦИЯЛАРНИ МИНИМАЛЛАШ

1.1-§. Умумий тушунчалар

Сўнгги йилларда математиканинг программалаштиришга оид бир неча бўлимлари вужудга келди. Буларга чизиқли программалаштириш, қавариқ программалаштириш, чизиқсиз программалаштириш, бутун сонли программалаштириш, динамик программалаштириш ва ҳоказолар киради. Ҳозирги вақтда бу бўлимлар умумий тарзда математик программалаштириш ёки оптималлаш номи билан юритиладиган бўлди.

Чизиқсиз программалаштириш n ўзгарувчига боғлиқ бўлган ушбу

$$z=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)=F(X), \quad X=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.1.1)$$

функциянинг қуйидаги

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\varphi_i(X)\leqslant b_i, \quad i=\overline{1,m}$$
$$x_j\geqslant 0, \quad j=\overline{1,n} \qquad (1.1.2)$$

чекланиш шартларини қаноатлантирадиган экстремум қийматларини топиш масаласи билан шуғулланади.

Агар $F(x)$ ва $\varphi_j(x)$ функциялар чизиқли, яъни

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad \varphi_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i, \quad i=\overline{1,m}$$

бўлса, у ҳолда (1.1.1) ва (1.1.2) масала чизиқли программалаштириш масаласи дейилади. Чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалалари чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Чекланиш шартлари (1.1.2) ни қаноатлантирадиган ихтиёрий ечимлар тўплами мумкин бўлган ёки *ўринли ечимлар тўплами* дейилади.

Мумкин бўлган ечимлар ичидан $F(X)$ функцияга энг кичик (минимум) ёки энг катта (максимум) қиймат берадиган ечимни $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ билан белгиласак, бу ечим *оптимал* (энг қулай) *ечим* дейилади. $F(X)$ функцияга эса *оптималлаштириладиган* ёки *мақсад функция* дейилади.

Шундай қилиб, оптималлаш фани мумкин бўлган ечимлар ичидан оптимал ечимни топиш усуллари билан шуғулланадиган фандир. Агар қўйилган масала биргина ечимга эга бўлса, бу масаланинг оптимал ечимини топиш маънога эга бўлмайди.

Демак, оптималлаш фанининг асосий масаласи чизиқли ёки чизиқли бўлмаган (1.1.1) функциянинг чизиқли ёки чизиқли бўлмаган (1.1.2) чеклапиш шартларини қаноатлантирадиган экстремум қийматларини топиш масаласидан иборат экан.

Чизиқли программалаштириш чизиқли чекланишлар асосида чизиқли функцияни оптималлаш билан, чизиқсиз программалаштириш эса, чизиқли ёки чизиқсиз чекланишлар асосида чизиқсиз функцияни оптималлаш билан шуғулланади.

Оптималлаш масалалари функцияларнинг энг кичик ёки энг катта қийматларини топиш масаласи билан бевосита боғлиқ бўлганлиги учун бир ўзгарувчили ва кўп ўзгарувчили функцияларни минималлаш масалалари устида қисқача тўхтаб ўтамиз.

1.2-§. Бир ўзғарувчига боғлиқ бўлган функцияларни минималлаш

1. Масаланинг қўйилиши. Бизга сонлар ўқида қуйидаги

$$y=f(x), \quad x\in R_1 \tag{1.2.1}$$

скаляр функция берилган бўлсин. Сонлар ўқи R_1 да шундай $x_0\in R_1$ нуқтани топишимиз керакки, (1.2.1) функция ўзининг энг кичик қийматига эришсин, яъни

$$f(x_0)=\min f(x), \quad x\in R_1. \tag{1.2.2}$$

Бошқача қилиб айтганда, (1.2.2) тенглик сонлар ўқи R_1 даги барча x лар учун қуйидаги

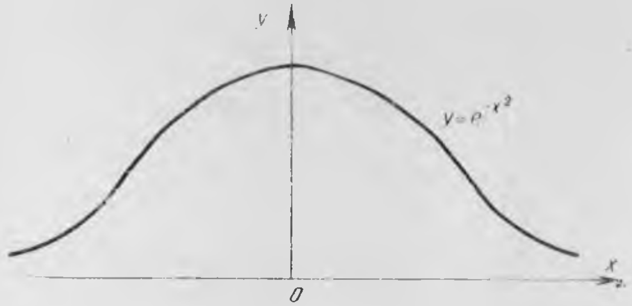
$$f(x_0)\leqslant f(x) \tag{1.2.3}$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини билдиради.

(1.2.2) шартни қаноатлантирувчи x_0 нуқтани топиш масаласи бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияларни *минималлаш масаласи* дейилади. Топишимиз керак бўлган x_0 пуқта $f(x)$ функцияга минимум берувчи нуқта ёки қўйилган минималлаш

1- расм.

2- расм.



3- расм.

масаласининг *ечими* дейилади. (1.2.3) тенгсизлик чизмада соддагина ифодаланади (1-расм). Минималлаш масаласи ҳамма вақт ҳам ечимга эга бўлавермайди, масалан:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0, \\ 1, & x\leqslant 0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad f(x)=e^{-x^2}$$

функциялар бирорта ҳам нуқтада минимумга эришмайди (2- ва 3-расмларга қаранг).

Шунинг учун бундан кейин функцияларнинг минимуми мавжудлигининг зарурий шартларини текширишда қаралаётган функциямиз Вейерштрасс теоремасининг шартларини қаноатлантиради, яъни минималлаш масаласи ечимга эга деб фараз қиламиз. Чунки, Вейерштрасс теоремасига асосан, агар (1.2.1) функция бирор ёпиқ оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлса, бу оралиқда функция ўзининг аниқ қуйи ёки юқори чегараларига эришади.

Агар (1.2.2) шартни қаноатлантирадиган x_0 нуқтани топиш талаб қилинган бўлса, бу нуқта (1.2.1) функцияга абсолют ёки „глобаль" минимум берувчи нуқта, қўйилган масала эса, абсолют ёки „глобаль" минималлаш масаласи дейилади.

Агар сонлар ўқидан шундай $x_0 \in R_1$ нуқта топиш мумкин бўлсаки, (1.2.3) тенгсизлик, етарли кичик $\varepsilon>0$ сон учун

$$|x-x_0|<\varepsilon$$

бўлганда, сонлар ўқидаги ҳамма $x \in R_1$ лар учун бажарилса, x_0 нуқта (1.2.1) функцияга нисбий ёки „локаль" минимум берувчи нуқта, қўйилган масала эса нисбий ёки „локаль" минималлаш масаласи дейилади.

Функцияга абсолют минимум берадиган нуқта нисбий минимум берадиган нуқта бўлишлиги ҳам ўз-ўзидан тушунарлидир. Бу 1-расмда яққол кўриниб турибди.

2. Минимум мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти. Нисбий ва абсолют минимум берадиган нуқталарда бажариладиган шартни топиш учун зарур бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема. Сонлар ўқида аниқланган, узлуксиз ва дифференциалланувчи (1.2.1) функция берилган бўлсин. Агар x_0 нуқта (1.2.1) функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлса, шу нуқтада унинг биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенг, яъни

$$f'(x)=0.$$

Исботи. Аксинча фараз қиламиз, яъни

$$f'(x)=\alpha\neq 0$$

бўлсин. Сонлар ўқидан шундай $x\in R_1$ ни танлаб оламизки, $x-x_0=-\operatorname{sign}\alpha$ бўлсин. Бу ерда $\operatorname{sign}\alpha$ α сонининг ишорасини билдиради, x ва x_0 нуқталар орқали $x(\beta)=x_0+\beta(x-x_0)$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$ нуқтани тузамиз. Бу нуқта β нинг етарли кичик қийматида x_0 нуқтага энг яқин оралиқда ётадиган бўлади, яъни олдиндан берилган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\beta_1>0$ сон топиладики, $0<\beta<\beta_1$ бўлганда

$$|x(\beta)-x_0|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Энди $f[x(\beta)]=f[x_0+\beta(x-x_0)]$ функцияни x_0 нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, бирицчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар қатнашадиган ҳадлар билан чегаралансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$f[x(\beta)]=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\beta(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}[\beta(x-x_0)]^2+0[\beta(x-x_0)^2]$$

ёки

$$f[x(\beta)]-f(x_0)=f'(x_0)\beta(x-x_0)+0[x(\beta)-x_0]=$$
$$\alpha\beta(x-x_0)+0(\beta)=\beta\left[-|\alpha|+\frac{0(\beta)}{\beta}\right] \qquad (1.2.4)$$

β ни шундай танлаб оламизки, $\frac{0(\beta)}{\beta}<|\alpha|$ бўлсин. У ҳолда (1.2.4) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$f[x(\beta)]-f(x_0)<0$$

ёки

$$f[x(\beta)]<f(x_0).$$

Бу эса x_0 нуқтанинг нисбий минимум берувчи нуқта эканлигига зиддир. Фаразимиз нотўғрилигидан $\alpha=0$, яъни $f'(x)=0$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди эса (1.2.1) функцияга нисбий минимум берадиган x нинг қийматлари

$$f'(x)=0 \tag{1.2.5}$$

тенгламанинг илдизлари орасида эканлиги келиб чиқади. (1.2.5) шарт функция минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти дейилади.

3. Минимум мавжудлигининг иккинчи тартибли зарурий шарти $x=x_0$ нуқтада (1.2.1) функция минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти

$$f'(x_0)=0 \tag{1.2.6}$$

бажарилади, деб фараз қилайлик.

Агар x_0 нуқта (1.2.1) функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлса ва (1.2.1) функциядан иккинчи тартибли узлуксиз ҳосила мавжуд бўлса, x_0 нуқтада қўшимча яна қандай шарт бажарилишини топиш учун қуйидаги теоремани исбот қиламиз.

2-теорема. Агар (1.2.1) функция сонлар ўқи R_1 да аниқланган узлуксиз ва икки марта дифференциалланувчи функция бўлса, нисбий минимум берадиган x_0 нуқтада унинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий бўлмайди, яъни

$$f''(x_0)\geqslant 0. \tag{1.2.7}$$

Исботи. $f''(x_0)=\alpha<0$ деб фараз қиламиз ва 1-теоремага асосан x_0 нуқтада (1.2.6) шарт бажарилганлиги учун Тейлор формуласига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+0[(x-x_0)^2]$$

ёки

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+0[(x-x_0)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\beta^2+0(\beta^2)=\frac{\beta^2}{1}\left[\frac{\alpha}{2}+\frac{0(\beta^2)}{\beta^2}\right],\ \beta=x-x_0.$$

Шундай β_1 ни танлаймизки, $|\beta|<\beta_1$ бўлганда, $\left|\frac{0(\beta^2)}{\beta^2}\right|<\frac{|\alpha|}{2}$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий етарли кичик $\varepsilon>0$ сон учун $0\leqslant|\beta|\leqslant\leqslant\min(\varepsilon,\beta_1)$ бўлганда $x=x_0+\beta$ нуқтада қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$f(x)<f(x_0);\ |x-x_0|\leqslant\varepsilon,$$

бу эса, x_0 нуқтанинг (1.2.1) функцияга нисбий минимум берадиган нуқта бўлишлигига зиддир. Бу қарама-қаршилик $\alpha<0$ деб қилган фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $\alpha\geqslant 0$ ёки $f''(x_0)\geqslant 0$ дир. Теорема исботланди.

(1.2.7) шарт (1.2.1) функциянинг минимуми мавжудлигининг иккинчи тартибли зарурий шарти дейилади.

1.1- жадвал

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	x_0
0	+	минимум нуқта
0	—	максимум нуқта
0	0	номаълум

Агар x_0 нуқтада $f''(x_0) \leqslant 0$ бўлса, бу нуқтада қаралаётган функция максимумга эга. Агар x_0 нуқтада $f''(x_0)=0$ бўлса, x_0 нуқтанинг қандай нуқта эканлиги номаълум бўлиб қолади.

Функцияларни иккинчи тартибли ҳосила ёрдамида экстремумини текширишни 1-жадвалдагидек тасвирлаш мумкин.

Юқорида исботланган 1- ва 2- теоремалардаги шартлар функция минимуми мавжудлигининг зарурий шартлари бўлиб, етарли шартлар бўла олмайди. Бунга ушбу

$$f(x) = -x^4, \ |x| < 1$$

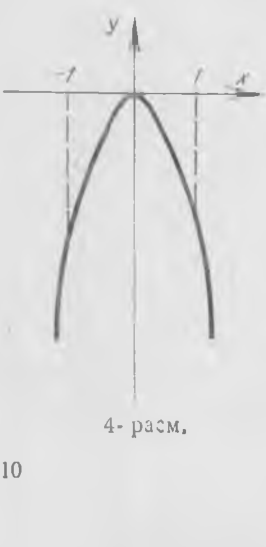
функция мисол бўла олади. Ҳақиқатан ҳам $x_0=0$ нуқтада

$$f'(0) = -4x^3/_{x_0=0} = 0, \ f''(0) = -12x^2/_{x_0=0} = 0$$

яъни, минимум мавжудлигининг биринчи ва иккинчи тартибли зарурий шартлари бажарилади, лекин (4-расмга қаранг) $x_0=0$ нуқта қаралаётган функциямизга абсолют максимум берувчи нуқтадир.

4. Минимум мавжудлигининг етарли шартлари. Бизга олий математика курсидан маълумки, аргументнинг ҳосила нолга айланадиган ёки узиладиган қийматлари *критик нуқталар* дейилади. Юқорида келтирилган мисолимиздан кўринадики, ҳамма критик нуқталар ҳам функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлавермайди. Лекин, функция бирорта нуқтада нисбий минимумга эришса, у нуқта, шубҳасиз, нисбий минимум берувчи критик нуқта бўлади.

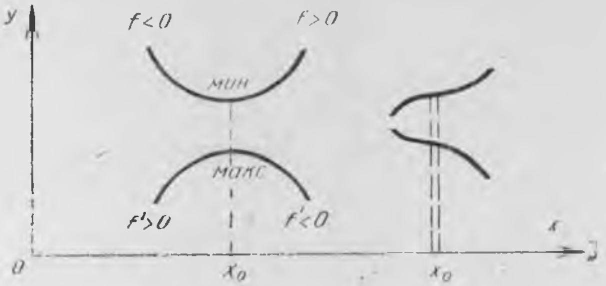
Шундай қилиб, функциянинг экстремумларини топиш қуйидагича бажарилади: ҳамма критик нуқталар топилади, сўнгра ҳар бир критик нуқта алоҳида текшириб кўрилади, яъни экстремумнинг мавжудлиги учун етарли шартлар кўриб чиқилади. Бу шартлар қуйидагилардан иборат.



4- расм.

3-теорема. $f(x)$ функция критик нуқта x_0 ни ўз ичига олувчи бирорта оралиқда узлуксиз ва шу оралиқнинг ҳамма (x_0 нуқтанинг ўзидан бошқа) нуқталарида дифференциалланувчи бўлсин (5-расм).

Агар шу нуқтанинг чап томонидан ўнг томонига ўтишда ҳосиланинг ишораси манфийдан мусбатга ўзгарса, функция x_0 нуқтада минимумга, агар мусбатдан манфийга ўзгарса, максимумга эга-



5-расм.

дир; агар ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда экстремум мавжуд эмас.

Бу теореманинг исботи олий математика курсида батафсил кўрсатилганлиги учун бу ерда исботлаб ўтирмаймиз.

Функция минимумларини топишда критик нуқталар яқинида ҳосиланинг ишорасини текширишни шу нуқталарнинг ўзида иккинчи тартибли ҳосиланинг ишорасини текшириш билан алмаштириш мумкин, яъни қуйидаги теорема ўринлидир.

4-теорема. Агар $f(x)$ функция сонлар ўқи R_1 да аниқланган, узлуксиз ва икки марта дифференциалланувчи бўлиб, x_0 нуқтада қуйидаги шартлар:

$$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \tag{1.2.8}$$

бажарилса, x_0 нуқта $f(x)$ функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлади.

Исбот. Тейлор формуласига асосан (1.2.8) шартларни назарда тутиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+0((x-x_0)^2).$$

Шундай $\varepsilon>0$ бўлган сонни киритамизки, $|\alpha|<\varepsilon$ бўлганда

$$|x-x_0|\leqslant|\alpha|\leqslant|\varepsilon,\quad \frac{1}{2}f''(x_0)\geqslant\left|\frac{0(\alpha^2)}{\alpha^2}\right|>0$$

бўлиб, қуйидаги

$$f(x)-f(x_0)=\alpha^2\left[\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{0(\alpha^2)}{\alpha^2}\right]>0$$

тенгсизлик бажарилсин, бу эса x_0 нуқтанинг қаралаётган функциямизга нисбий минимум берувчи нуқта эканлигини кўрсатади.

Мисол. $x_0=0$ нуқтанинг $f(x)=1-e^{-x^2}$ функцияга нисбий минимум берадиган нуқта эканлигини кўрсатинг.

Ҳақиқатан ҳам, 4-теореманинг шартлари $x_0 = 0$ нуқтада бажарилади:

$$f'(x_0) = 2x_0 e^{-x_0^2}\Big|_{x_0=0} = 0,\ f''(x_0) = \left(2e^{-x_0^2} - 4x_0^2 e^{-x_0^2}\right)_{x_0=0} = 2>0.$$

Демак, $x_0 = 0$ нуқта берилган функцияга нисбий минимум берувчи нуқта экан.

1.3-§. Бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функцияларни минималлаш

Бизга аналитик геометрия курсидан маълумки, текисликда берилган ҳар қандай векторнинг координаталари иккита тартибланган ҳақиқий сонлар системаси билан аниқланади ва қуйидагича ёзилади:

$$\vec{a} = (x, y).$$

Текислик икки ўлчов билан ифодаланади. Уч ўлчовли фазода берилган ҳар қандай векторнинг координаталари учта тартибланган ҳақиқий сонлар системаси билан аниқланади ва қуйидагича ёзилади:

$$\vec{b} = (x, y, z).$$

Худди шунингдек, n ўлчовли фазода, яъни R_n да берилган ҳар қандай вектор n та тартибланган ҳақиқий сонлар системаси билан аниқланади ва қуйидагича ёзилади:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Қуйида биз n ўлчовли фазода аниқланган функцияларни текширамиз. Агар X устун вектор бўлса, X' — сатр вектор ҳамда транспонирланган вектор бўлади, яъни

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Бу ерда $x_i (i = \overline{1,n})$ X векторнинг компонентлари ёки фазода берилган X нуқтанинг координаталаридир. Бир хил ўлчамли X ва Y векторларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидагича аниқланади:

$$Y'X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X'Y = (X', Y).$$

Ихтиёрий $f(X)$, $X \in R_n$, $f(X) \in C^{(2)}$ ($c^{(2)}$ икки марта дифференциалланувчи функциялар синфи) функция учун $\frac{\partial f(X)}{\partial X}$

белги n ўлчовли устун векторни, $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2}$ белги эса $n \times n$ ўлчовли матрицани билдиради, яъни

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Агар $\varphi(X) = \varphi_1(X), \ \varphi_2(X), \dots, \varphi_{m z}(X)$ бўлса, $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ белги $n \times m$ ўлчовли

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

матрицани билдиради. $\|X\|$ белги X векторнинг нормасини билдиради ва у қуйидагича аниқланади; $\|X\|^2 = X'X$ ёки

$$\|X\| = \sqrt{(X', X)} = \sqrt{(X, X')}.$$

1. Масаланинг қўйилиши. Юқорида келтирилган n ўлчовли фазо тушунчасидан фойдалансак, бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функциялар учун минималлаш масаласининг қўйилишини қуйидагича талқин қилиш мумкин: n ўлчовли R_n фазодан шундай X_0 нуқтани топиш талаб қилинадики, бунда,

$$f(X_0) = \min f(X) \tag{1.3.1}$$

тенглик R_n даги ҳамма X лар учун ўринли бўлсин. Бу ерда: $X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ нуқта n ўзгарувчига боғлиқ бўлган $f(X)$ функцияга *абсолют минимум берувчи нуқта*, қўйилган масала эса *абсолют минималлаш масаласи* дейилади.

Энди n ўзгарувчига боғлиқ бўлган функциялар учун нисбий минималлаш масаласининг қўйилиши ҳақида тўхталиб ўтамиз. Бу масаланинг қўйилиши қуйидагича: n ўлчовли R_n фазода шундай $X_0 \in R_n$ нуқта топиш талаб қилинадики, қуйидаги

$$f(X_0) \leqslant f(X) \tag{1.3.2}$$

тенгсизлик етарли кичик $\varepsilon > 0$ сон учун

$$\|X-X_0\| \leqslant \varepsilon \qquad (1.3.3)$$

бўлганда, ҳамма $X \in R_n$ лар учун бажарилсин. Бу ерда $X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқта $f(X)$ функцияга ***нисбий минимум берувчи нуқта*** дейилади.

Абсолют ва нисбий минималлаш масаласининг қўйилишига эътибор берсак, абсолют минималлаш масаласида берилган функциянинг аргументи X эркли ўзгарувчи бўлиб, фақат (1.3.1) шартни қаноатлантиришини, нисбий минималлаш масаласида эса X эркли ўзгарувчи бўла олмаслигини, яъни (1.3.2) шарт билан бир қаторда чекланиш шарти (1.3.3) ни ҳам қаноатлантириши талаб қилинишини кўрамиз. Бу мулоҳаза абсолют ва нисбий минималлаш масалалари қўйилишининг бир-биридан фарқини кўрсатади.

2. Квадратик форма назариясидан қўшимча маълумотлар. Бизга $A = \{a_{ij}\}$ $n \times n$ ўлчовли симметрик матрица берилган бўлсин, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X'AX$$

ифода *квадратик форма* дейилади.

Агар

$$X'AX \geqslant 0$$

тенгсизлик n ўлчовли фазо R_n даги ҳамма нуқталар учун ўринли бўлса, бу форма *мусбат ишорали* дейилади.

Агар тенгсизлик ҳамма $X \neq 0$ лар учун ўринли бўлса, бу форма мусбат дейилади. Юқорида келтирилган квадратик форма мусбат ($A > 0$) ва манфий бўлмаган ($A \geqslant 0$) матрицалар тушунчаси билан бевосита боғлиқ бўлгани учун улар ҳақида қисқача тўхталиб ўтамиз. Бизга қуйидаги симметрик матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ij}$$

берилган бўлсин. A матрицанинг сатрлари $i_1, i_2, \ldots, i_p$ номерлардан, устунлари эса $j_1, j_2, \ldots, j_p$ номерлардан бошланган минорни қуйидагича белгилаймиз:

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \ldots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \ldots & a_{i_2j_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \ldots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

Агар $i_1=j_1,\ i_2=j_2,\ \ldots,\ i_p=j_p$ бўлса, *бош минор* дейилади.

$$D_1=a_{11};\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\ \ldots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

минорлар эса *кетма-кет бош минорлар* дейилади. Энди мусбат ва манфий бўлмаган матрицалар тўғрисидаги Сильвестр критерияларини келтирамиз.

1) Матрицанинг мусбат, яъни $A>0$ бўлиши учун унинг кетма-кет бош минорлари

$$D_1>0,\ D_2>,\ \ldots,\ D_n>0$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

2) Матрица манфий бўлмаслиги, яъни $A\geqslant 0$ бўлиши учун унинг ҳамма бош минорлари

$$1\leqslant i_1\leqslant i_2<\ldots<i_p\leqslant n,\ p=\overline{1,n},\quad A\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{pmatrix}\geqslant 0$$

манфий бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

3. **Бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функцияларнинг минимуми мавжудлигининг зарурий шартлари ҳақидаги теоремалар.** $X_0\in R_n$ нуқта $f(X)$ функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлсин, яъни

$$f(X_0)\leqslant f(X)$$

тенгсизлик етарли кичик $\varepsilon>0$ сон учун

$$\|X-X_0\|<\varepsilon$$

бўлганда, n ўлчовли R_n фазодаги ҳамма $X\in R_n$ лар учун бажарилсин. У ҳолда қуйидаги теоремалар ўринлидир:

1-теорема. n ўлчовли R_n фазода берилган дифференциалланувчи $f(X)$ функциянинг нисбий минимум берувчи нуқтадаги биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенгдир, яъни

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial X}=0. \qquad (1.3.4)$$

Исботи. $f(X)=f(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n)$ функциянинг $n-1$ та аргументларини фиксирласак, яъни $x_k=x_k^0$, $k=\overline{1,n}$ $(k\neq i)$ деб олсак, у ҳолда фақат бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган қуйидаги

$$\varphi(x_i)=f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_{i-1}^0,\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n^0)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу функцияга бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган функциянинг $x_i=x_i^0$ нуқтадаги минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти ҳақидаги теоремани қўлласак,

$$\frac{\partial \varphi (x_i^{(0)})}{\partial x_i} = \frac{\partial f (X_0)}{\partial x_i} = 0, \ X_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бу тенгликда i га 1 дан n гача қиймат бериб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial f (X_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f (X_0)}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial f (X_0)}{\partial x_n} = 0.$$

Бу тенгликларнинг чап томонидаги ифодалар $\frac{\partial f (X_0)}{\partial x}$ устун векторнинг компонентлари бўлгани учун (1. 3. 4) тенглик ўринлидир. Шу билан теорема исботланди.

(1. 3. 4) шарт кўп ўзгарувчи функцияларнинг минимуми мавжудлигининг *биринчи тартибли зарурий шарти* дейилади.

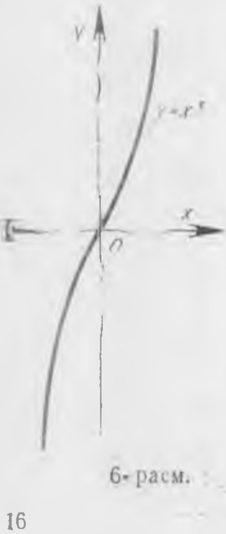
Одатда, $\frac{\partial f (X_0)}{\partial X}$ вектор $f(X)$ функциянинг X_0 нуқтадаги **градиенти** деб юритилади ва қуйидагича ёзилади:

$$grad\ f (X_0) = \frac{\partial f (X_0)}{\partial X}.$$

Исбот қилган теоремамиз R_n фазода берилган $f(X)$ функцияга нисбий минимум берувчи нуқталар

$$\frac{\partial f (X)}{\partial X} = 0$$

тенгламанинг ечимлари орасида эканлигини кўрсатади. Бу тенгламанинг ечимлари $f(X)$ функциянинг *стационар* ёки ***критик*** нуқталари дейилади.



6-расм.

Бу теореманинг маъносини қуйидагича тушуниш мумкин: функцияга нисбий минимум берувчи нуқта стационар нуқта бўла олади, лекин тескари мулоҳаза нотўғридир, яъни ҳамма стационар (критик) нуқталар ҳам функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўла олмайди. Соддалик учун бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$f(x) = x^3$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$\frac{\partial f (x)}{\partial x} = 3x^2/_{x=0} = 0.$$

Аммо бу функция $x = 0$ нуқтада максимумга ҳам, минимумга ҳам эга эмас.

Бу эса 6-расмдан кўриниб турибди. Демак, стационар нуқталарнинг ичидан функцияга минимум берадиган нуқталарни ажратиб олиш учун (1. 3. 4) шартдан ташқари қўшимча шарт ҳам керак бўлиб қолади.

2-теорема. Агар $f(X)$ функция n ўлчовли R_n фазонинг ҳамма нуқталарида аниқланган, узлуксиз, биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларга эга бўлса, нисбий минимум берувчи X_0 нуқтада бу функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларидан тузилган матрица манфий эмас, яъни

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} \geqslant 0. \quad (1.3.5)$$

Исботи. Биринчи теоремага асосан вектор $f'(X_0) = 0$ бўлгани учун Тейлор формуласидан қуйидагига эга бўламиз:

$$f(X) - f(X_0) = \frac{1}{2}(X - X_0)' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2}(X - X_0) + 0(\| X - X_0 \|^2).$$

Бу ерда $(X - X_0)$ устун, $(X - X_0)'$ сатр векторлардир, α билан қуйидагини белгилаймиз:

$$\alpha = \min_{\|Y\| = 1} Y' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2} Y = \overline{Y}' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2} \overline{Y}.$$

Аксинча фараз қилиб, яъни $\alpha < 0$ деб, қуйидаги нуқтани тузамиз:

$$X(\beta) = X_0 + \beta \overline{Y}, \ \|\beta\| \leqslant 1, \ \overline{Y} = X - X_0.$$

β ни етарлича кичик қилиб $X(\beta)$ нуқтани X_0 нуқтанинг энг яқин атрофига тушириш мумкин. У ҳолда Тейлор формуласи қуйидагича ёзилади:

$$f(X(\beta)) - f(X_0) = \frac{1}{2}(X(\beta) - X_0)' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2}(X(\beta) - X_0) +$$

$$+ 0(\| X(\beta) - X_0 \|^2) = \frac{1}{2}\beta^2 \overline{Y}' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2} \overline{Y} + 0(\beta^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\beta^2 \alpha + 0(\beta^2) = \beta^2 \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{0(\beta^2)}{\beta^2}\right].$$

Бу ерда β ни шундай танлаш мумкинки, $\frac{0(\beta^2)}{\beta^2} < \frac{\alpha}{2}$ бўлсин, бундан

$$f(X(\beta)) < f(X_0)$$

булади, бу ифода X_0 нинг нисбий минимум берувчи нуқта эканлигига зиддир. Демак, (1. 3. 5) шарт бажарилади. Бу шарт га бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функциялар минимуми мажудлигининг иккинчи тартибли зарурий шарти дейилади.

4 Бир неча ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функцияларнинг нисбий минимуми мавжудлигининг етарли шарти. Нисбий минимум мавжудлигининг етарли шарти бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз:

3-теорема. X_0 стационар (критик) нуқта n ўлчовли R_n фазода аниқланган, узлуксиз, икки марта дифференциаллланувчи $f(X)$ функцияга нисбий минимум берувчи нуқта бўлишлиги учун шу функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларидан тузилган матрица X_0 нуқтада мусбат, яъни

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2} > 0$$

бўлиши етарлидир.

Исботи. Теорема шартига асосан

$$\min_{\|Y\|=1} Y' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X} Y = \alpha > 0,$$

бу ерда $X - X_0 = Y$. Шундай

$$X(\beta) = X_0 + \beta(X - X_0)$$

нуқта оламизки, етарли кичик $\beta \geqslant 0$ учун $X(\beta)$ нуқта X_0 нуқтага энг яқин бўлсин. У ҳолда Тейлор формуласидан қуйидаги

$$f(X(\beta)) - f(X_0) = \frac{\beta^2}{2}(X - X_0)' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X^2}(X - X_0) + 0(\|X(\beta) -$$
$$- X_0\|^2) = \frac{\beta^2}{2} Y' \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial X} Y + 0(\beta^2) \geqslant \frac{\beta^2}{2}\alpha + 0(\beta^2) = \beta^2\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{0(\beta)^2}{\beta^2}\right]$$

ифодага эга бўламиз. $\alpha > 0$ бўлгани учун шундай $\varepsilon > 0$ танлаш мумкинки, $\frac{0(\beta^2)}{\beta^2} \leqslant \frac{\alpha}{2}$ бўлсин, бу ердан қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$f(X_0) < f(X(\beta)).$$

Охирги тенгсизлик X_0 нуқтанинг функцияга нисбий минимум берувчи нуқта эканлигини кўрсатади. Теорема исботланди.

1. 4-§. Шартли минималлаш масалалари

1. Масаланинг қўйилиши. Ҳозирча биз шуғулланган абсолют ва нисбий минималлаш масалаларида функцияларнинг аргументлари турлича мустақил қийматларга эга бўлиши фараз қилинган эди. Энди бу ерда функцияларнинг аргументлари баъзи бир қўшимча шартлар билан боғланган абсолют ва нисбий минималлаш масалалари ҳақида тўхталиб ўтамиз. Бундай ҳолда функцияларнинг абсолют ва нисбий минимуми *шартли* *абсолют минимум* ва *шартли нисбий минимум* дейилади. Фараз қилайлик, бизга ушбу

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.4.1)$$

функциянинг қуйидаги

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ i = \overline{1, m} \qquad (1.4.2)$$

тенгламалар системасини қаноатлантирадиган минимумини топиш талаб қилинган бўлсин. Бошқача қилиб айтганда, тенгламалар системаси (1. 4. 2.) ни қаноатлантирадиган шундай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ларни топиш керакки, x_i ларнинг шу қийматларида (1. 4. 1) функция минимумга эришсин. Агар қуйидагича

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ g(X) = (g_1(X), \ g_2(X), \ldots, g_m(X))$$

векторлар киритсак, (1. 4. 1) – (1. 4. 2) ни қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(X), \ g(X) = 0, \ X \in R_n.$$

Энди юқорида қўйилган масалани қуйидагича талқин қилиш мумкин: n ўлчовли R_n фазода

$$g(X) = 0 \qquad (1.4.3)$$

тенгламани қаноатлантирадиган шундай $X_0 \in R_n$ нуқтани топиш керакки (1. 3. 1) тенглик R_n даги ҳамма X лар учун ўринли бўлсин, ёки бошқача айтганда (1. 3. 2) тенгсизлик бажарилсин. (1. 4. 3) ва (1. 3. 1) шартларни қаноатлантирадиган X_0 нуқтага (1. 4. 1) функцияга шартли абсолют минимум берувчи нуқта деб, қўйилган масалага эса шартли абсолют минималлаш масаласи деб аталади. (1. 4. 3) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами қўйилган масаланинг мумкин бўлган ёки ўринли нуқталар тўплами дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$X = \{X : g(X) = 0\}.$$

Шартли нисбий минималлаш масаласининг қўйилиши қуйидагича бўлади: n ўлчовли R_n фазода шундай X_0 нуқтани топиш талаб қилинадики, олдиндан берилган $\varepsilon > 0$ сон учун $\|X - X_0\| < \varepsilon$ ва $g(X_0) = 0$ бўлганда (1. 3. 2) тенгсизлик R_n даги ҳамма X лар учун ўринли бўлсин, ёки қисқача

$$f(X_0) \leqslant f(X); \ g(X_0) = 0, \ \|X - X_0\| < \varepsilon, \ X \in R_n \qquad (1.4.4)$$

(1. 4. 4) ни қаноатлантирадиган X_0 нуқтага *шартли нисбий минимум берувчи нуқта,* қўйилган масалага эса *шартли нисбий минималлаш масаласи* дейилади.

2. Шартли минималлаш масалаларини шартсиз минималлаш масалаларига келтириш усуллари.

а) Эрксиз ўзгарувчиларни йўқотиш усули. Агар тенгламалар системаси (1.4.2) ни m та эрксиз ўзгарувчига нисбатан, масалан, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса, яъни

$$x_i = h_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \; i = \overline{1,m} \qquad (1.4.5)$$

бўлса, шартли минимизациялаш масаласини, биз юқорида кўриб ўтган, шартсиз минимизациялаш масаласига келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (1. 4. 5) ни (1. 4. 1) га қўйсак, $n-m$ эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлган

$$\varphi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f[h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\ldots h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)] \qquad (1.4.6)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Демак, (1. 4. 6) тенгликдаги $x_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_n$ эркли ўзгарувчилар (1. 4. 1) тенгламалар системасининг ечимлари билан боғлиқ бўлмаганлиги учун шартли минималлаш масаласи шартсиз минималлаш масаласига айланади.

Бу ердан, кўриниб турибдики, агар $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ нуқта (1. 4. 1) функцияга шартли минимум берувчи нуқта бўлса, $(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ нуқта эса шартсиз минимум берувчи нуқта бўлади. Бу нуқтани топиш усулини биз юқорида кўриб ўтдик Эрксиз ўзгарувчиларни йўқотиш усули бўлган шартли минималлаш масалаларини ечишда маълум қийинчилик туғилади, чунки (1. 4. 2) тенгламалар системасини m ўзгарувчиларга нисбатан ечиш мумкин бўлганда ҳам кўп ҳолларда уларни ечиш мураккаб бўлади. Шунинг учун, (1. 4. 2) тенгламалар системасини ечишга эҳтиёж қолмайдиган қулай усул *Лагранж усулидир*. Энди шу усул ҳақида қисқача тўхталиб ўтамиз.

б) Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули. Бизга (1. 4. 1) функциянинг (1. 4. 2) чекланиш тенгламалар системасини қаноатлантирадиган минимумини топиш талаб қилинган бўлса, қуйидаги

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = \lambda_0 f(x_1, x_2, \ldots,$$
$$\ldots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ёки қисқача

$$F(X, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X) \qquad (1.4.7)$$

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \lambda = (\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

функцияни тузамиз. Бу функция *Лагранж функцияси* дейилади. $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ — *Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилари* дейилади. Агар $\lambda_0 = 1$ бўлса, (1. 4. 7) функция *Лагранжнинг нормал функцияси* дейилади. Бундан кейин биз Лагранжнинг нормал функцияси билан иш курамиз.

(1. 4. 7) функциядан x_j $(j=\overline{1,n})$ ва λ_i $(i=\overline{1,m})$ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалар олиб нолга тенглаштирсак, қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} &= g_i(X) = 0, \ j=\overline{1,n}, \ i=\overline{1,m} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.8)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. (1. 4. 8) ни қисқача вектор формасида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial X} = \frac{\partial F(X)}{\partial X} + \lambda' \frac{\partial g}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(X',\lambda)}{\partial X} = g(X) = 0. \qquad (1.4.9)$$

Шундай қилиб, биз Лагранж усули билан n номаълумли $m+1$ тенгламалар системасини $n+m$ номаълумли $n+m$ та тенгламалар системасига келтирдик, ёки бошқача қилиб айтганда, берилган шартли минималлаш масаласини (1. 4. 7) шартсиз минималлаш масаласига келтирдик. (1. 4. 9) системани қаноатлантирадиган X_0 нуқтага *нормал минимум нуқта*, қуйилган масалага эса *нормал шартли минималлаш масаласи* дейилади. $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_n^0)$ *нуқтага қўйилган масаланинг ечими* ёки Лагранж функциясининг *стационар (критик) нуқтаси* дейилади.

Мисол. Ушбу $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_2 x_3$ функциянинг қуйидаги

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2 = 0,$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 - 2 = 0$$

чекланиш шартларини қаноатлантирадиган шартли минимум нуқтаси топилсин.

Ечиш. Қўйилган масала учун Лагранж функциясини тузамиз:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + x_3 - 2)$$

ва

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_3} = 0, \ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0, \ \frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_2} = 0$$

шартлардан қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_2 + \lambda_1 &= 0, \\ x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ x_2 + \lambda_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 2 &= 0, \\ x_2 + x_3 - 2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Биринчи ва учинчи тенгламадан $\lambda_1 = \lambda_2 = -x_2$ эканлигини эътиборга олсак:

$$x_1 + x_3 - 2x_2 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - 2 = 0,$$
$$x_2 + x_3 - 2 = 0$$

тенгламалар системасига эга бўламиз. Бу системани ечсак, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ бўлиб,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

ни ҳосил қиламиз.

1. 5- §. Чекланиш шартлари тенгсизликлар системаси кўринишда берилган функцияларни минималлаш

Биз ҳозиргача функцияларни минималлаш масаласини чекланиш шартлари тенгламалар системаси кўринишида берилган ҳолда қарадик. Энди чекланиш шартлари тенгсизликлар системаси билан берилган функцияларни минималлаш масалалари устида тўхталиб ўтамиз.

1. **Масаланинг қўйилиши.** Бизга n ўлчовли R_n фазода берилган (1. 4. 1) функциянинг қуйидаги тенгсизликлар системаси

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_i, \; i = \overline{1, m} \tag{1.5.1}$$

кўринишдаги чекланиш шартларини қаноатлантирадиган минимумини топиш талаб қилинган бўлсин.

Агар (1. 5. 1) тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган бирорта $(x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқта (1.4.1) функцияга минимум берувчи нуқта бўлса ёки бошқача қилиб айтганда, қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &g_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \leqslant b_i, \; i = \overline{1,m} \end{aligned}\right\} \tag{1.5.2}$$

тенгсизликлар n ўлчовли R_n фазодаги барча нуқталар учун бажарилса, $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқтага берилган (1.4.1) функцияга (1.5.1) тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган абсолют минимум берувчи нуқта, шу нуқтани топиш масаласи эса чекланиш шартлари тенгсизликлар системаси кўринишида берилганда *абсолют минималлаш масаласи* дейилади.

Агар етарли кичик $\varepsilon > 0$ сон учун

$$\| (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - (x_1, x_2, \ldots, x_n) \| < \varepsilon$$

бўлганда (1.5.2) тенгсизликлар системаси ўринли бўлса, $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқтага (1. 4. 1) функцияга (1.5.5) тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган нисбий минимум берувчи нуқта, шу нуқтани топиш масаласи эса *нисбий минималлаш масаласи* дейилади.

(1. 5. 1) тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган, R_n фазода берилган ихтиёрий $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нуқта *мумкин бўлган* нуқта ёки *уринли нуқта* дейилади.

Агар бирорта $X=\overline{X}$ нуқтада $g_i(\overline{X})=b_i$, $i=\overline{1, m}$ бўлса, чекланиш шартлари (1. 5. 1) — *актив*, $g_i(\overline{X})<b_i$ бўлса, *пассив* дейилади.

Тенгсизликлар системаси кўринишида берилган чекланиш шартларини қўшимча ўзгарувчилар киритиш йўли билан тенгламалар системаси кўринишига келтириш мумкин. Масалан, (1. 5. 1) ни x^2_{n+i} ўзгарувчилар киритиш йўли билан қуйидагича ёзиш мумкин:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)+x^2_{n+i}=b_i, \ i=\overline{1,m}$$

ёки

$$x^2_{n+i}=b_i-g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.5.3)$$

Демак, қўшимча ўзгарувчилар киритиш йўли билан чекланиш шартлари тенгсизликлар системаси кўринишида берилганда функцияларни минималлаш масаласини олдинги параграфда қаралган шартли минималлаш масаласига келтириш мумкин экан. Энди Лагранж функциясини тузиш йўли билан шартли минималлаш масаласини шартсиз минималлаш масаласига келтирамиз. Бунинг учун Лагранжнинг ушбу:

$$F(X, \lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[g_i(X)-b_i+x^2_{n+i}] \qquad (1.5.4)$$

нормал функциясини тузамиз. (1. 5. 4) га Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усулини қўллаб, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ номаълумларни топиш учун қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F(X\lambda)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_j}+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda\dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0, \ j=\overline{1,n}, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_{n+i}}=2\lambda_i x_{n+i}=0, \ i=\overline{1,m}, \ \lambda_i\geqslant 0, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i}=g_i(X)-b_i+x^2_{n+i}=0\end{array}\right\} \qquad (1.5.5)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системада $\lambda_i x_{n+i}=0$ бўлиши $\lambda i(b_i-g_i(X))=0$ бўлиши билан тенг кучлидир. Ҳақиқатан ҳам (1. 5. 3) ни ҳар иккала томонини λ_i га кўпайтириб,

$$\lambda_i x_{n+i}x_{n+i}=\lambda_i(b_i-g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан юқорида келтирилган даъвомизнинг тўғрилиги келиб чиқади. Демак, (1. 5. 5) ни унга тенг кучли булган қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}\\ &\lambda_i(b_i-g_i(X))=0,\quad i=\overline{1,m}\end{aligned}\right| \qquad (1.5.6)$$

тенгламалар системаси билан алмаштириш мумкин. (1. 5. 6) шартга *Лагранж функциясининг стационарлик шарти ёки Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти* дейилади.

Агар n ўлчовли R_n фазода берилган (1. 4. 1) ва $g_i(X)$ функциялар икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигининг иккинчи тартибли зарурий шарти X_0 стационар нуқтада қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} &u'\frac{\partial g_i(X_0)}{\partial X}=0,\quad i=\overline{1,m}\\ &u'\frac{\partial^2F(X_0,\lambda)}{\partial X^2}u\geqslant 0\end{aligned}\right| \qquad (1.5.7)$$

(1. 5. 7) нинг биринчи шарти X_0 стационар нуқтада $g_i(X_0)=b_i$ бўлганда, яъни чекланиш шарти актив бўлганда ўринлидир). Бу ерда u — ихтиёрий нолдан фарқли n ўлчовли вектор, $\frac{\partial g_i(X_0)}{\partial X}$ — n ўлчовли вектор устун, $\frac{\partial^2F(X_0,\lambda)}{\partial x^2}$ — $n\times n$ ўлчовли квадрат матрица. Демак, (1. 5. 7) ни яна ҳам аниқроқ қилиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial g_i(X_0)}{\partial n}=0,\ i=\overline{1,m}\\ &(u_1,u_2,\ldots u_n)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_n\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=0\end{aligned}\right| \qquad (1.5.8)$$

Агар биз (1.5.6) ва (1. 5. 7) шартларда

$$u'\frac{\partial^2F(x_0,\lambda)}{\partial x^2}u>0 \qquad (1.5.9)$$

бўлишини талаб қилсак, бу шартлар Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигининг етарли шартлари дейилади. Бу шартларнинг тўғрилиги кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган функцияларнинг минимуми мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари ҳақидаги теоремаларининг исботидан бевосита келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$$

функциянинг чекланиш шартлари

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \leqslant 9, \\ g_2(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \leqslant 1 \end{aligned}\right\}$$

ни қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Ечиш. Бу мисолда $n = 2$, $m = 2$, $b_1 = 9$ ва $b_2 = 1$ бўлгани учун Лагранж функцияси (1.5.4) қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$l(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 9 + x_3^2) +$$
$$+ \lambda_2(x_1 + x_2 - 1 + x_4^2).$$

Бу ерда x_3 ва x_4 лар қўшимча ўзгарувчилар бўлиб, $\lambda_1 x_3$ ва $\lambda_2 x_4$ (1.5.5) шартнинг иккинчисига, асосан нолга тенгдир. Энди Лагранж функциясининг стационарлик шарти (1.5.6) ни ҳосил қиламиз яъни

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0 \\ &1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0 \\ &\lambda_1(9 - x_1^2 + x_2^2) = 0, \ \lambda_1 \geqslant 0, \\ &\lambda_2(1 - x_1 - x_2) = 0, \ \lambda_2 \geqslant 0, \end{aligned}\right|$$

бу ердан қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &2x_1(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0, \\ &1 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ &\lambda_1(9 - x_1^2 + x_2^2) = 0, \\ &\lambda_2(1 - x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}\right| \qquad (1.5.10)$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. (1.5.10) да λ_1 ва λ_2 лар иккаласи бирданига нолга тенг бўлиши мумкин эмас, чунки (1.5.10) нинг иккинчи тенгламасидан $1 = 0$ бўлиб қолади. Фараз қилайлик, $\lambda_2 = 0$, у ҳолда (1.5.10) нинг биринчи тенгламасидан $2x_1(1 + \lambda_1) = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: $x_1 = 0$ ёки $1 + \lambda_1 = 0$. $\lambda_1 > 0$ бўлганлиги учун, $1 + \lambda_1 = 0$ шартимизга зиддир. Демак, $x_1 = 0$ бўлганда (1.5.10) нинг учинчисидан $x_2^2 = 9$ ёки $x_2 = \pm 3$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Бироқ, $x_2 = 3$, $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 < 1$ шартни қаноатлантирмайди, демак, $x_2 = -3$ дир. (1.5.10) нинг иккинчисида $\lambda_2 = 0$, $x_2 = -3$ бўлганда $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ бўлади.

Шундай қилиб, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ва $\lambda_2 = 0$ бўлганда (1.5.6) шарт тўла бажарилади, яъни $x = x_1^0 = 0$, $x_2 = x_2^0 = -3$, $X = X_0 = (x_1^0, x_2^0) = (0; -3)$ нуқта критик нуқта бўлади. Энди

X_0 ва λ ларнинг шу қийматларида иккинчи тартибли зарурий шартлар (1.5.7) нинг ёки аниқроғи

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2} u_j \frac{\partial g_i(x_1^0,\ x_2^0)}{\partial x_j}=0,\ i=1;\ 2.\\ &(u_1,\ u_2)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F(X_0,\lambda)}{\partial x_1\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X_0,\lambda)}{\partial x_1\,\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 F(X_0,\lambda)}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X_0,\lambda)}{\partial x_2\,\partial x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\geqslant 0\end{aligned}\right| \qquad (1.5.11)$$

нинг бажарилишини кўриб чиқамиз. $X_0=(0;\ -3)$ нуқтада чекланиш шартларидан $g_1(x_1,\ x_2)\leqslant 9$ — актив бўлиб, $g_2(x_1,\ x_2)<1$ — пассивдир. Ҳақиқатан ҳам,

$$g_1(x_1^0,\ x_2^0)=0+(-3)^2=9,$$
$$g_2(x_1^0,\ x_2^0)=-3\leqslant 1.$$

Шунинг учун, (1.5.11) шартни X_0 нуқтада фақат актив чекланиш шарти учун бажарилишини кўриб чиқиш етарлидир.

$X_0=(0;\ -3)$ нуқтада

$$\frac{\partial g_1(X_0)}{\partial x_1}=2x_1^0=0;\quad \frac{\partial g_2(F_0)}{\partial x_2}=2x_2^0=-6$$

бўлгани учун (1.5.11) нинг биринчи шарти қуйидагича:

$$u_1\frac{\partial g_1(X_0)}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial g_1(X_0)}{\partial x_2}=u_1\cdot 0-u_2\cdot 6=0.$$

Бу ердан u_1 ихтиёрий бўлганда ҳам $u_2\equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Энди (1.5.11) нинг иккинчи шартини X_0 нуқтада бажарилишини кўрамиз, яъни

$$(u_1,\ 0)\begin{pmatrix}2(1+\lambda_1) & 0\\ 0 & 2\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ 0\end{pmatrix}=(u_1,\ 0)\begin{pmatrix}2u_1(1+\lambda_1)\\ 0\end{pmatrix}=$$
$$=2u_1^2(1+\lambda_1)\geqslant 0>0,$$

чунки $\lambda_1\geqslant 0$. Демак, минимум мавжудлигининг иккинчи тартибли зарурий шарти (1.5.11) ва $2u_1^2(1+\lambda_1)>0$ бўлгани учун етарли (1.5.6) ва (1.5.9) шарглар ҳам бажарилади. Шундай қилиб, $f(X)=x_1^2+x_2$ функцияга $x_1^2+x_2^2\leqslant 9$, $x_1+x_2\leqslant 1$ чекланиш шартларини қаноатлантирадиган нисбий минимум берувчи нуқта $(0,\ -3)$ ва унга мос келадиган Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилари

$$\lambda_1=\frac{1}{6},\ \lambda_2=0$$

бўлади. Қўйилган масаланинг ечимини 7- расмда кўрсатилгандек тасвирлаш мумкин бўлади.

2-мисол. Тўла сирти $S_т$ га тенг бўлган цилиндрнинг баландлиги x_1 ва радиуси x_2 ни қандай танлаш керакки, унинг ҳажми энг катта бўлсин (8-расм).

Ечиш. Цилиндрнинг тўла сирти $S_т$ иккала асосининг юзи билан ён сиртининг йиғиндисига тенг бўлгани учун қуйидаги формула билан топилади:

$$S_т = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2.$$

Цилиндрнинг ҳажми эса

$$V = \pi x_2^2 \cdot x_1. \qquad (1.5.12)$$

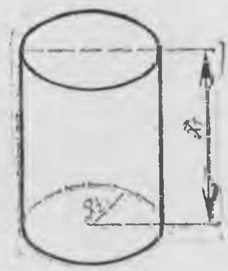
Ушбу

$$f(x_1, x_2) = -V = -\pi x_2^2 \cdot x_1 \qquad (1.5.13)$$

$$g(x_1, x_2) = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2 - S_т \qquad (1.5.14)$$

функцияларни киритсак, қўйилган масалани қуйидагича баён қилиш мумкин: чекланиш шарти (1.5.14) ни қаноатлантирадиган шундай x_1, x_2 ларни топиш керакки, (1.5.13) функцияга энг кичик қиймат берсин. Топилган x_1 ва x_2 ни (1.5.12) га қўйсак, энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрни ҳосил қиламиз.

7-расм.



8-расм.

(1.5.13) ва (1.5.14) учун Лагранжнинг нормал функциясини тузамиз

$$F(x_1, x_2, \lambda) = -\pi x_2^2 x_1 + \lambda(2\pi x_2^2 + 2\pi x_1 \cdot x_2 - S_т)$$

Бу функция учун (1.5.6) шарт қуйидагича бўлади:

$$-\pi x_2^2 + 2\pi\lambda x_2 = 0,$$
$$-2\pi x_2 x_1 + 4\pi\lambda x_2 + 2\pi\lambda x_1 = 0,$$
$$\lambda(2\pi x_2^2 + 2\pi x_2 x_1 - S_т) = 0,\ \lambda > 0,\ x_1 > 0,\ x_2 \gtrless 0,$$

ёки

$$\begin{cases} (-x_2 + 2\lambda)\pi x_2 = 0, \\ (-x_2 x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda x_1)2\pi = 0, \\ 2\pi(x_2 + x_1)x_2 - S_т = 0 \end{cases}$$

бу ердан: $x_3 = 2\lambda$, $x_1 = 4\lambda$, $\lambda = \sqrt{\frac{S_т}{24\pi}}$ критик нуқталарни топамиз. Энди иккинчи тартибли зарурий шарт (1.5.8) нинг бажарилишини текширамиз. x_1, x_2, λ ларнинг шу қийматида $g(x_1, x_2)=0$, яъни чекланиш шарти (1.5.14) актив бўлгани учун (1.5.8) нинг биринчисидан

$$2\pi x_2 u_1+[4\pi x_2+2\pi x_1]u_1=4\pi\lambda u_1+16\pi\lambda u_2=0$$

бўлиб, $u_1=-4u_2$ эканлиги келиб чиқади. Энди (1.5.8) нинг иккинчиси бажарилишини кўрсатамиз:

$$(u_1, u_2)\begin{pmatrix}0 & -2\pi x_2+2\pi\lambda\\ -2\pi x_2+2\pi\lambda & -2\pi x_1+4\pi\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=$$

$$=(u_1, u_2)\begin{pmatrix}0 & -2\pi\lambda\\ 2\pi\lambda & -4\pi\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=(u_1, u_2)\begin{pmatrix}-2\pi\lambda u_2\\ -2\pi\lambda u_1-4\pi\lambda u_2\end{pmatrix}=$$

$$=2\pi\lambda u_1u_2-2\pi\lambda u_1u_2-4\pi\lambda u_2^2=12\pi\lambda u_2^2\geqslant 0>0.$$

Демак, зарурий (1.5.6), (1.5.7) ва етарли (1.5.8), (1.5.4) шартлар бажарилади, шундай қилиб

$$x_1=2\sqrt{\frac{S_т}{6\pi}},\quad x_2=\sqrt{\frac{S_т}{6\pi}}$$

қийматларда (1.5.13) функциямиз ўзининг энг кичик қийматига эришади ва (1.5.12) формула билан топиладиган цилиндрнинг ҳажми энг катта бўлади.

3-мисол. Узунлиги l га тенг бўлган ипдан шундай тенг томонли учбурчак ва квадрат ясалсинки, улар юзларининг йиғиндиси энг катта бўлсин.

Кўрсатма. Учбурчак учун кетган ипнинг узунлигини $x_1\geqslant 0$, квадрат учун кетган ипнинг узунлигини $x_2\geqslant 0$ деб белгиласак, $x_1+x_2=l$ бўлади:

$$S=S_\Delta+S_\square=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x_1}{3}\right)^2+\left(\frac{x_2}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{36}x_1^2+\frac{x_2^2}{16}.$$

Ушбу $f(x_1, x_2)=-\frac{\sqrt{3}}{36}x_1^2-\frac{1}{16}x_2^2$ (1.5.15)

$$\left.\begin{aligned}g_1(x_1, x_2)&=x_1+x_2-l=0,\\ g_2(x_1, x_2)&=-x_1+x_3^2=0,\\ g_3(x_1, x_2)&=-x_2+x_4^2=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.16)$$

функциялар киритсак, қўйилган масаладан чекланиш шартлари (1.5.16) ни қаноатлантирадиган (1.5.15) функциянинг минимумини топишга тўғри келади.

Жавоби:

$$x_1=0,\ x_2=l,\ \lambda_1=\lambda_2=\frac{l}{8},\ \lambda_3=0.$$

2-БОБ. ҚАВАРИҚ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

Қавариқ программалаштиришнинг асосий масаласини баён қилишдан олдин, қавариқ тўпламлар ва қавариқ функциялар тушунчалари устида қисқача тўхталиб ўтамиз.

2.1-§. Қавариқ тўпламлар

1. Таърифлар.

1-таъриф. n ўлчовли фазода берилган X тўплам ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқта билан бирга шу нуқталарни бирлаштирувчи кесмани ҳам ўз ичида сақласа, яъни $x_1, x_2 \in X$ бўлиб, $z = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ бўлса (9-расмга қаранг), *қавариқ тўплам* дейилади.

9- расм.

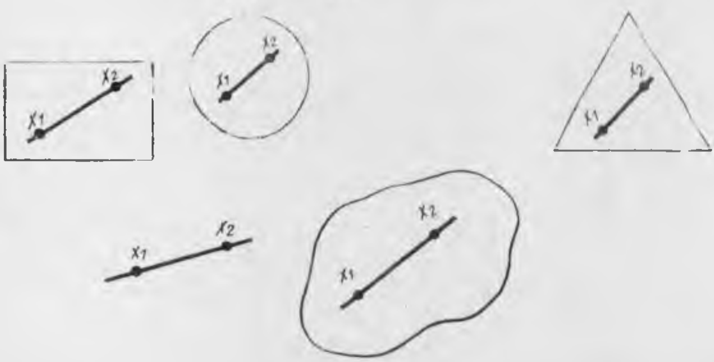
Агар $\lambda_1 = \lambda$ ва $\lambda_2 = 1 - \lambda$ деб белгиласак 9-расмда кўрсатилган нуқтани қуйидагича ёзамиз:

$$z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \qquad (2.1.1)$$

2-таъриф. (2.1.1) шартни қаноатлантирадиган z нуқта x_1 ва x_2 нуқталарнинг *қавариқ чизиқли комбинацияси* дейилади. $\lambda_1=1$ ва $\lambda_2=0$ бўлса, z нуқта кесманинг x_1 бошланғич учки, $\lambda_1=0$ ва $\lambda_2=1$ бўлса, кесманинг охирги учки нуқталари билан устма-уст тушади.

Таърифга асосан, учки нуқта x_1 ва x_2 ларни кесманинг бошқа ихтиёрий икки нуқтасининг қавариқ чизиқли комбинацияси кўринишида ёзиб бўлмайди. Бу таърифни умумийроқ қилиб қуйидагича баён қилиш мумкин: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуқталар берилган бўлса, z нуқта бу нуқталарнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўла олади, бунда қуйидаги шартлар бажарилади:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i; \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; \ \lambda_i \geqslant 0.$$



10- расм.

11- расм.

Тўғри чизиқ, нур, кесма — *бир ўлчовли қавариқ фигуралар* дейилади. *Икки ўлчовли қавариқ фигураларга* тўртбурчак, доира, эллипс, учбурчак ва бошқа шунга ўхшаш фигуралар мисол бўлади. Ҳақиқатан ҳам, 10-расмда кўрсатилган фигуралар ўзининг иккита ихтиёрий нуқтаси билан бирга шу нуқталарни бирлаштирувчи кесмани ҳам ўз ичига олади. Бу кесманинг ихтиёрий нуқтасини x_1 ва x_2 орқали (2.1.1) куринишда ёзиш мумкин.

3-таъриф. *Қавариқ кўпбурчак* деб, бир неча кесмалар билан чегараланган қавариқ фигурага айтилади.

Бу кесмалар кўпбурчакнинг томонлари, икки қўшни томонининг учрашган нуқтаси эса кўпбурчакнинг учлари ёки нуқталари дейилади.

Қавариқ кўпбурчакнинг учки нуқталарини шу кўпбурчакнинг бошқа ихтиёрий икки нуқтасининг қавариқ чизиқли комбинацияси кўринишида ёзиб бўлмайди. Учбурчакнинг учки нуқталари унинг учларидир. Доиранинг учки нуқталари доирани чегаралаб турган айлананинг нуқталаридир.

4-таъриф. Агар қавариқ кўпбурчак бирорта тўғри чизиқнинг бир томонида ётган бўлса, ва кўпбурчак билан тўғри чизиқ ҳеч бўлмаганда битта умумий нуқтага эга бўлса, бу тўғри чизиқ *таянч тўғри чизиқ* дейилади. 11-расмда l_1, l_2 ва l_3 тўғри чизиқлар таянч тўғри чизиқлардир.

Уч ўлчовли қавариқ фигураларга шар, призма, пирамида, параллелепипед ва ҳоказолар мисол бўла олади.

5-таъриф Шундай фигурага *чегаравий фигура* дейиладики, агар унинг ихтиёрий нуқтасини марказ қилиб олиб доира ўтказсак, бу доира ҳамма вақт шу фигурага тегишли ва тегишли бўлмаган нуқталарни ўз ичида сақлайди.

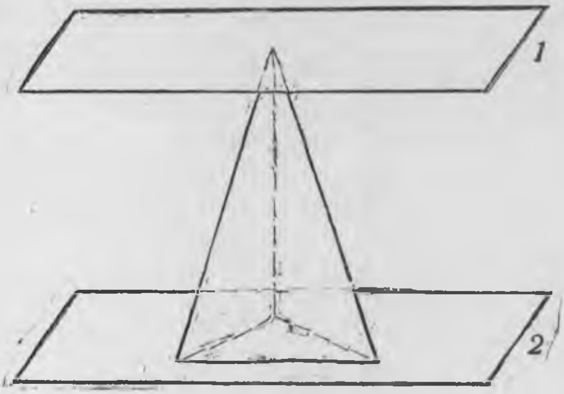
Ҳар қандай жисмнинг чегаравий нуқталар тўплами унинг чегарасини ташкил қилади.

6-таъриф. Қавариқ кўпбурчаклар билан чегараланган жисм *қавариқ кўпёқли* дейилади. Кўпёқлилар чекли сон учки нуқталарига эга бўлади. Агар кўпёқли бирорта текисликнинг бир томонида ётган бўлса ва кўпёқли билан ҳеч бўлмаганда битта умумий нуқтага эга бўлса, бу текислик *таянч текислик* дейилади. 12-расмда p_1 ва p_2 текисликлар таянч текисликлардир.

7-таъриф. n ўлчовли R_n фазода қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b_i$$

ёки



12- расм.

$$(aX) = B \tag{2.1.2}$$

шартни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами *гипер текислик* дейилади.

(2.1.2) ифода $n = 2$ бўлганда одатдаги текисликнинг, $n = 1$ бўлганда эса тўғри чизиқнинг тенгламасини билдиради.

8- таъриф. Қуйидаги

$$(aX) \leqslant B$$

шартни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами *ёпиқ ярим фазо* дейилади.

Бу таърифдан чекли сон ярим фазолар кесишмаси, аниқроғи, қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_j, \; j = \overline{1, m} \tag{2.1.3}$$

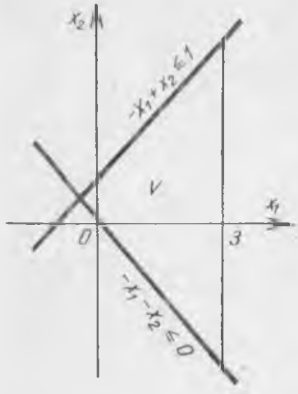
тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган нуқталар тўплами кўп ёқли эканлиги ёки чизиқли программалаштириш масаласи ўринли ечимлар тўпламининг мавжудлик соҳаси эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, чизиқли программалаштиришнинг асосий мақсади чизиқли

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i = F(x_1, \; x_2, \ldots x_n)$$

ёки

$$(C_1 X) = F(X) \tag{2.1.4}$$

функциянинг чизиқли чекланиш шартлари (2.1.3) ни қаноатлантирадиган минимумини топишдан иборатдир.



13- расм.

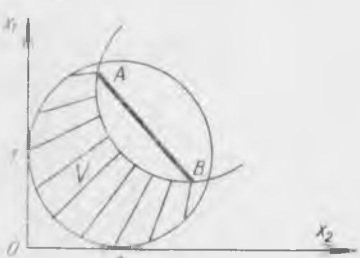
2. **Чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалаларининг бир-биридан фарқи.** Тушунарли бўлиши учун яна бир бор чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалаларининг бир-биридан фарқи ҳақида ҳамда мақсад функция (2.1.4) чекланиш шартлари (2.1.3) чизиқсиз функциялар бўлганда қўйилган масалани ечишда учрайдиган қийинчиликлар устида қисқача тўхталиб ўтамиз. Аввало чекланиш шартлари устида мулоҳаза юритамиз. Агар чекланиш шартларида қатнашадиган функциялар чизиқли бўлса, ўринли ечимлар соҳаси ҳамма вақт қавариқ бўлиб, чекли сон учки нуқталарга эга бўлади. Ўринли ечимлар соҳаси V қуйидаги чизиқли тенгсизликлар системаси билан берилган бўлсин, яъни

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2&\leqslant 1,\\ -x_1-x_2&\leqslant 0,\\ x_1&\leqslant 3 \end{aligned}\right\}$$

У ҳолда v соҳа 13- расмда кўрсатилгандек бўлади. Бу расмдан кўринадики, v соҳа икки ўлчовли қавариқ фигура, яъни учбурчак бўлиб, учки нуқталарининг сони 3 тага тенгдир, яъни чеклидир. Энди v соҳа чизиқсиз тенгсизликлар системаси билан аниқланган ҳолга мисол қурамиз. Фараз қилайлик, v соҳа қуйидаги тенгсизликлар, яъни

$$\left.\begin{aligned} (x_1-1)^2+(x_2-1)^2&\leqslant 1,\\ x_1\cdot x_2&\leqslant 1 \end{aligned}\right\}$$

билан аниқланган бўлсин. Бу чекланиш шартларининг биринчиси — маркази (1; 1) нуқтада бўлиб, радиуси бирдан кичик бўлган айланадан, иккинчиси эса гиперболадан иборатдир. 14- расмда ўринли ечимлар соҳаси v штрихланган бўлиб, унинг қавариқ эмаслиги кўриниб турибди, чунки гиперболага ўтказилган AB кесманинг A ва B нуқталари v соҳада ётса ҳам кесманинг ўзи v соҳада ётмайди. Бу эса соҳанинг қавариқ бўлишлигига зиддир.



14- расм.

Иккинчи томондан, v соҳанинг чегаравий нуқталари айлана ва гиперболаларда ётганлиги учун бу соҳа чексиз кўп учки нуқталарга эга.

Шундай қилиб, агар чизиқли программалаштириш масалаларининг оптимал ечимлари қавариқ V соҳанинг чекли сон учки нуқталар тўплами ичидан топилса, чизиқсиз программалаштириш масалаларининг оптимал ечимлари эса умумий ҳолда қавариқ бўлмаган соҳанинг чексиз кўп нуқталар тўплами ичидан топилади.

Мақсад функциянинг чизиқли бўлмаслиги ҳам масалани ечишда маълум қийинчиликларни юзага келтиради. Ҳақиқатан ҳам, агар чизиқли мақсад функция ўзининг минимум қийматига ўринли ечимлар соҳасининг чегарасида эришса, чизиқсиз мақсад функция эса соҳанинг фақатгина чегарасида эмас, балки ички нуқталарида ҳам бир неча нисбий минимумларга эга бўлиши мумкин. Бу эса топилган нисбий минимум берувчи нуқталарнинг қайси бири абсолют минимум берувчи нуқта эканлигини аниқлашда қўшимча қийинчиликка олиб келади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар, биринчидан, чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалаларининг бир-биридан фарқини кўрсатса, иккинчидан, чизиқсиз программалаштириш масалаларини умумий ҳолда ечишнинг ниҳоятда мураккаб эканлигини кўрсатади.

Бу мулоҳазаларнинг айримларининг тўғрилигини кейинчалик чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалаларига доир сонли мисоллар кўрганда алоҳида тўхталиб ўтамиз.

Агар чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечишда v соҳани ва мақсад функцияни қавариқ деб олинса, бу масалаларни ечиш анча осонлашади. Шунинг учун, биз қуйида қавариқ функциялар ва уларнинг хоссалари тўғрисида қисқача тўхталиб ўтамиз.

2.2-§. Қавариқ функциялар

1. Қавариқ функциянинг таърифи. Қавариқ X тўпламда аниқланган $f(x)$ функция агар бу тўпламга қарашли ихтиёрий $x_1, x_2 \in X$ нуқталар учун $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ шартни қаноатлантирувчи ҳамма λ ларда қуйидаги

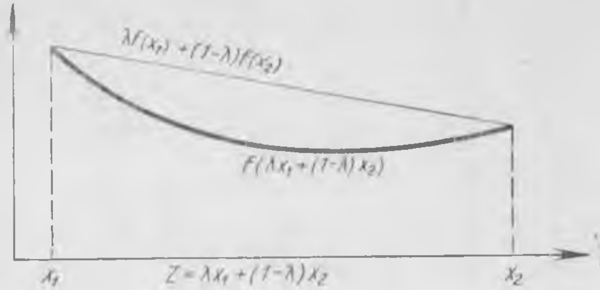
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \qquad (2.2.1)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, *қавариқ* (ёки пастга қавариқ) *функция* дейилади. Агар x_1, x_2 ва λ ларнинг шу қийматларида қуйидаги

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция *ботиқ* дейилади. (2.2.1) тенгсизликнинг геометрик маъносини 15-расмда кўрсатилгандек тасвирлаш мумкин.

Агар $f(x)$ функция қавариқ бўлса, $-f(x)$ ботиқ ва аксинча. $f(x) = cx$ чизиқли функция бир вақтда ҳам қавариқ ва ҳам



15- расм.

ботиқдир, бунда ихтиёрий x_1, x_2 ва λ лар учун қуйидаги тенглама ўринлидир:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=\lambda cx_1+(1-\lambda)cx_2=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

2. Қавариқ функцияларнинг хоссалари. Қавариқ функцияларнинг бизга кейинчалик зарур буладиган баъзи бир хоссалари ҳақида тухталиб утамиз.

1- хосса. Қавариқ функция $f(x)$, $x\in X$, X тупламининг ҳамма ички нуқталарида узлуксиздир. Бошқача қилиб айтганда (16- расмга қаранг), қавариқ функция X тупламнинг фақат чегаравий нуқталаридагина узилиши мумкин.

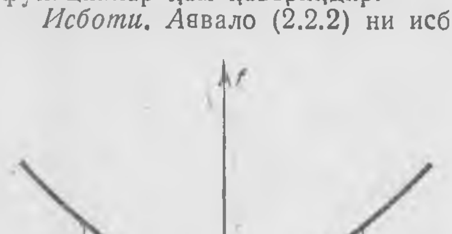
2- хосса. Агар $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, $x\in X$ функциялар қавариқ булса, $\alpha_i\geqslant 0$ лар учун

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x), \tag{2.2.2}$$

$$f(x)=\max_{1\leqslant i\leqslant m} f_i(x) \tag{2.2.3}$$

функциялар ҳам қавариқдир.

Исботи. Аввало (2.2.2) ни исбот қиламиз.



16- расм.

$$f(z)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\lambda x_1+$$
$$+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x_1)+$$
$$+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x_2)=$$
$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$
$$z=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2.$$

Демак, (2.2.2) функция қавариқдир. Энди (2.2.3) ни исбот қиламиз:

$$f(z) = \max_{1<l<m} f_l(z) \leqslant \lambda \max_{1<l<m} f_l(x_1) + (1-\lambda) \max_{1<l<m} f_l(x_2) =$$
$$= \lambda f_l(x_1) + (1-\lambda) f_l(x_2).$$

Бу хоссалар орқали берилган функциянинг қавариқ ёки ботиқ эканлигини аниқлаш анча мураккабдир. Баъзи ҳолларда функциянинг қавариқ ёки ботиқ эканлигини текшириш анча осонлашади. Масалан, берилган функция икки марта дифференциалланувчи бўлса, унинг қавариқ ёки ботиқ функция эканлигини текшириш учун қуйидаги энг қулай хоссадан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

3-хосса. Икки марта дифференциалланувчи

$$f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2.4}$$

функция, бирорта

$$X_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \tag{2.2.5}$$

нуқтанинг атрофида, агар шу нуқтада қуйидаги

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} < 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0,$$

шартлар ўринли бўлса, қатъий ботиқ бўлади. Бошқача қилиб айтганда, берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларидан тузилган ҳамма тоқ тартибли детерминантлар манфий бўлиб, жуфт тартибли детерминантлар мусбат бўлса, бу функция қатъий ботиқдир.

Агар юқорида келтирилган ҳамма жуфт ва тоқ тартибли детерминантлар мусбат бўлса (2.2.4) функция (2.2.5) нуқта атрофида қатъий қавариқ бўлади.

Мисол.

$f(x_1, x_2) = x_1^3 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 + x_2^3$ функциянинг $X_0 = (1;\ 1)$ нуқта атрофида қавариқ ёки ботиқ эканлиги аниқлансин.

Ечиш: $\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} = 6x_1^{(0)} - x_2^{(0)} = 6 \cdot 1 - 1 = 5 > 0,$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1^{(0)} - x_2^{(0)} & -2x_1^{(0)}x_2^{(0)} \\ -2x_1^{(0)}x_2^{(0)} & 6x_2^{(0)} - x_1^{(0)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21 > 0,$$

демак, берилган функция $X_0 = (1;\ 1)$ нуқта атрофида қатъий қавариқ функция экан.

4-хосса. Қавариқ функция (2.2.4) иккита ҳар хил локаль нисбий минимумга эга бўлиши мумкин эмас (ёки локаль минимум глобаль минимум билан устма-уст тушади). Агар (2.2.4) функция қатъий қавариқ бўлса, у фақат биттагина нуқтада минимумга эришади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар $x_1,\ x_2 \in X$ нуқталар қавариқ (2.2.4) функцияга ҳар хил минимум берадиган нуқта бўлиб,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ бўлса, } z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad 0 < \lambda < 1$$

учун

$$f(z) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_1) = \\ = f(x_1) = \min f(x) \tag{2.2.6}$$

булади. Бироқ, λ ни z нуқта x_1 нуқтанинг энг кичик атрофида ётадиган қилиб танланади. Бу атрофдаги ҳамма x лар учун (2.2.6) дан $f(x) < f(x_1)$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса x_1 нуқтанинг (2.2.4) функцияга минимум берувчи нуқта эканлигига, яъни $f(x_1) < f(x)$ шартга зиддир. Бу қарама-қаршиликдан $f(x) = f(x_1)$ эканлиги, яъни қавариқ (2.2.4) функция иккита ҳар хил локаль минимумга эга эмаслиги келиб чиқади.

Энди (2.2.4) функция қатъий қавариқ бўлса, минимум берувчи нуқтанинг битта эканлигини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик бундай нуқта иккита бўлсин, яъни $x_1,\ x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$. У вақтда $0 < \lambda < 1$ учун

$$f(z) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = f(x_1) = f(x_2) = \\ = \min_{x \in X} f(x)$$

булади. Бундан $z \in X$ нуқтадаги (2.2.4) функциянинг қиймати $f(x_1) = \min f(x)$ дан кичик эканлиги келиб чиқади. Бироқ, x_1 нуқта (2.2.4) функцияга минимум берувчи нуқта бўлгани учун $f(z) < f(x_1)$ бўлиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, $x_1 = x_2$ эканлиги, яъни қавариқ (2.2.4) функция фақат биттагина нуқтада минимумга эришиши мумкинлиги келиб чиқади. Қавариқ функцияларнинг бу хусусияти чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечишда анча қўл келади.

5-хосса. Агар (2.2.4) функция қавариқ функция бўлса, у ҳолда $c = \text{const}$ учун

$$X = \{X, f(X) \leqslant c\}$$

тўплам қавариқдир.

Исбот. x_1 ва x_2 нуқталар X тўпламга қарашли нуқталар бўлиб, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ бўлсин, хосса шартига асосан $f(x_1) \leqslant c$, $f(x_2) \leqslant \leqslant c$ ва (2.2.4) функция қавариқ, яъни $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ нуқтада

$$f(z) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leqslant \lambda c + (1-\lambda)c = c,$$

шарт бажарилиши керак. Демак, $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ нуқта X тўпламга қарашли x_1, x_2 ва λ лар ихтиёрий бўлганлиги учун X тўплам қавариқдир.

2. 3-§. Қавариқ программалаштириш масалалари

1. Масаланинг қўйилиши. Чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечиш усуллари пастга қавариқ мақсад функция* (2.2.4) ва чекланиш шартлари

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_i(X) \leqslant b_i, \; (j = \overline{1, m}) \tag{2.3.1}$$

ҳамда эркли $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ўзгарувчилар ўз қийматларини бирорта Q тўпламдан қабул қиладиган ҳол учун ишлаб чиқилгандир. Чунки, 4-хоссада кўрсатилгандек, бу хил масалаларнинг муҳим хусусияти мақсад функцияларнинг локаль ва глобаль минимумлари устма-уст тушишидадир.

Юқорида келтирилган хусусиятларга эга бўлган математик программалаштириш масалалари *қавариқ программалаштириш масалалари* дейилади ва бу масалаларнинг қўйилиши математика тилида қуйидагича бўлади: чекланиш шартлари (2.3.1) ни қаноатлантирадиган шундай (2.2.5) нуқта топиш талаб қилинадики, (2.2.4) функция шу нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришсин, яъни

$$\left.\begin{aligned} &f(X_0) = \min f(X), \\ &g_j(X_0) \leqslant b_j, \; j = \overline{1, m}. \end{aligned}\right\}$$

Агар энди биз қуйидаги

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b_j]$$

ёки қисқача

$$F(X, \lambda) = f(X) + \lambda'[g(X) - B] \tag{2.3.2}$$

---

* Мақсад функция деганда, минимуми топилиши керак бўлган функцияни тушунамиз.

функцияни тузсак, бу функция қавариқ программалаштириш масалалари учун *Лагранжнинг нормал функцияси* дейилади. (2.3.2) даги

$$\lambda'=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \ B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

$$\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} X=(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ g(X)=(g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X))\end{matrix}$$

векторлар m ва n ўлчовли векторлардир.

2. Лагранж функциясининг эгар нуқтаси ва қавариқ программалаштириш масаласининг ечими. Аввалги бобда Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигининг етарли ва зарурий шартлари ҳақида тўхтаб ўтган эдик. Бу ерда биз қавариқ программалаштириш масалаларини ечиш Лагранж функциясининг эгар нуқтасини топиш билан эквивалент эканлигини кўрсатамиз.

Лагранж функциясининг эгар нуқтасининг таърифи. (2.2.5) ва

$$\lambda_0=\left(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}\right)\geqslant 0 \tag{2.3.3}$$

векторлардан тузилган

$$\{X_0, \lambda_0\} \tag{2.3.4}$$

жуфтликка *Лагранж функциясининг эгар нуқтаси* дейилади, агар ҳамма $X_0\in Q$, $\lambda_0\geqslant 0$ лар учун

$$F(X_0, \lambda)\leqslant F(X_0,\lambda_0)\leqslant F(X, \lambda_0) \tag{2.3.5}$$

тенгсизлик ўринли бўлса.

Энди Лагранж функциясининг эгар нуқтаси билан қавариқ программалаштириш масаласининг ечими орасидаги боғланиш тўғрисидаги теоремани исбот қиламиз.

1-теорема. Агар (2.3.4) Лагранж функциясининг эгар нуқтаси бўлса, (2.2.5) қавариқ программалаштириш масаласининг ечими бўлади.

Исботи. (2.3.4) нуқта Лагранж функцияси (2.3.2) нинг эгар нуқтаси бўлсин, яъни

$$f(X_0)+\lambda'(g(X_0)-B)\leqslant f(X_0)+\lambda_0'(g(X_0)-B)\leqslant$$
$$\leqslant f(X)+\lambda'(g(X)-B)$$

ёки аниқроғи

$$f(X_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(g_jX_0)-b_j)\leqslant f(X_0)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(0)}(g_j(X_0)b_j)\leqslant$$

$$\leqslant f(X)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(0)}(g_j(X)-b_j). \tag{2.3.6}$$

Бу тенгсизлик қуйидаги тенгсизликларга тенг кучлидир:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(g_j(X_0) - b_j) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{0}(g_j(X_0) - b_j) \qquad (2.3.7)$$

$$f(X_0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)}(g_j)X_0(-b_j) \leqslant f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{0}(g_j)X(-b_j) \qquad (2.3.8)$$

Лагранж функциясининг таърифига асосан (2.3.6) тенгсизлик ҳамма $\lambda_j \geqslant 0$ лар учун ўринли бўлиши керак. Шунинг учун (2.3.7) дан

$$g_j(X_0) - b_j \leqslant 0 \qquad (2.3.9)$$

эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, (2.3.7) тенгсизлик $\lambda_j = 0$ да ҳам бажарилиши керак. Бу ҳолда (2.3.7) дан

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{(0)}(g_j(X_0) - b_j) \geqslant 0$$

келиб чиқади. Бироқ, $\lambda_j^{(0)} \geqslant 0$ шартга ва (2.3.9) тенгсизликка асосан $\lambda_j = 0$ бўлганда (2.3.7) тенгсизликнинг фақат

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)}(g_j(X_0) - b_j) \equiv 0$$

ёки қисқача

$$\lambda_0'(g(X) - B) \equiv 0 \qquad (2.3.10)$$

бўлганда ўринли бўлиши келиб чиқади (2.3.10) га асосан (2.3.8) қуйидаги

$$f(X_0) \leqslant f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)}(g_j(X) - b_j)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Бу тенгсизликда $\lambda_j^{(0)} \geqslant 0$ ва (2.3.1) га асосан $g_j(X) - b_j \leqslant 0$ бўлгани учун

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{(0)}(g_j(X) - b_j) \leqslant 0$$

бўлади. Демак,

$$f(X_0) \leqslant f(X)$$

тенгсизлик қавариқ Q тўпламдаги ҳамма X лар ва $\lambda > 0$ учун ўринлидир. Шунинг учун, X_0 қавариқ программалаштириш масаласининг ечимидир. Теорема исботланди.

Исбот қилинган теоремага асосан, Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжуд бўлса, қавариқ программалаштириш масаласининг ечими мавжуд деган хулосага келамиз.

Лагранж функциясининг эгар нуқтаси мавжудлиги ҳақидаги теорема биринчи марта америкалик олимлар Кун ва Таккерлар томонидан исботланган бўлиб, бу теоремани шу олимларнинг номи билан Кун—Таккер теоремаси деб юритилади. Қуйида биз шу теореманинг шартлари ва исботини келтирамиз.

Кун-Таккер теоремаси. Бизга n ўлчовли R_n фазода аниқланган, қавариқ, узлуксиз ва икки марта дифференциалланувчи (2.2.4) ва

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \ j = \overline{1, m} \tag{2.3.11}$$

функциялар берилган бўлсин ва эркли ўзгарувчи $X \in R_n$ ўзининг қийматларини бирорта қавариқ Q тўпламдан қабул қилиб олмаган бўлсин. Агар юқоридаги мулоҳазалар ўринли бўлганда (2.2.4) функциянинг қуйидаги

$$g_j(x_1. x_2, \dots, x_n) \leqslant 0, \ j = \overline{1, m} \tag{2.3.12}$$

чекланиш шартларини қаноатлантирадиган минимумини топиш талаб қилинган бўлса ушбу теорема ўринлидир.

2-теорема. Агар (2. 2 5.) нуқта қавариқ программалаштириш масаласи (2.2.4)—(2. 3.12) нинг ечими бўлса, шундай (2.3.3) вектор мавжуд бўладики, унда (2.3.4) нуқта Лагранж функциясининг эгар нуқтасини ташкил қилади. Бошқача қилиб айтганда, барча $\lambda \geqslant 0$ ва $X \in R_n$ лар учун (2. 3. 5) тенгсизлик ўринлидир.

Исбот. (2. 2. 5) нуқта қавариқ программалаштириш масаласи (2. 2. 4)—(2. 3. 12) нинг ечими бўлсин. У ҳолда шу нуқтада Лагранж функциясининг минимуми мавжудлигини биринчи тартибли зарурий шарти бажарилиши керак, яъни

$$\frac{\partial F(X_0, \lambda_0)}{\partial X} = 0, \ \lambda_0' g(X_0) = 0$$

ёки аниқроғи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 \frac{\partial g_j\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)}{\partial x_i} = 0, \\ &\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} g_j\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) = 0, \ i = \overline{1, n}. \end{aligned}\right\} \tag{2.3.13}$$

Қавариқ функцияларнинг иккинчи хоссасига асосан (2.2.4) ва (2.3.11) функциялар қавариқ функция бўлгани учун ихтиёрий $\lambda_j \geqslant 0$ учун

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.3.14}$$

функциянинг ҳам қавариқ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳамма $X \in R_n$ ларда

$$F(X_0, \lambda_0) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^0) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} g_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leqslant$$

$$\leqslant f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^0 g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(X, \lambda_0)$$

(2.3.15)

бўлади. (2. 2. 5) нуқтани, теорема шартига асосан, қавариқ программалаш масаласи (2. 2. 4)–(2. 3.12) нинг ечими деб фараз қилганимиз учун (2. 3. 12) га асосан

$$g_j(X_0) = g_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leqslant 0, \ j = \overline{1, m}$$

бўлиб, ҳамма $\lambda \geqslant 0$ учун

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leqslant 0 \qquad (2.3.16)$$

тенгсизлик ўринлидир. Иккинчи томондан, (2.3.14) дан (2.3.16) ни назарда тутсак, $F(X_0, \lambda) = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) +$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \leqslant f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$$

$$= F(X_0, \lambda_0) \qquad (2.3.17)$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. (2.3.15) ва (2.3.17) тенгсизликлардан (2.3.5) нинг тўғрилиги, яъни теореманинг тўғрилиги келиб чиқади.

3-теорема. (2.2.4) ва (2.3.11) функциялар икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлсин.

У ҳолда (2.2.5) нуқта (2.2.4) функциянинг

$$g_j(X) \leqslant 0, \ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \ j = \overline{1, m} \qquad (2.3.18)$$

чекланиш шартларини қаноатлантирувчи минимум нуқтаси бўлишлиги учун шундай (2.3.3) вектор мавжуд бўлишлиги ва ҳамма $X > 0$, $\lambda \geqslant 0$ лар учун

$$F(X, \lambda) = f(X) + \sum_{k=1}^{n+m} \lambda_k g_k(X) \qquad (2.3.19)$$

бўлганда (2.3.5) тенгсизлик бажарилиши зарурдир.

Исбот. Бу теоремани исбот қилиш учун (2.2.4) — (2.3. 18) масалани (2.2.4) — (2.3. 19) масала кўринишига келтириш кифоядир. Бунинг учун (2.3.18) даги қўшимча $X \geqslant 0$ ёки $x_i \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$ чекланиш шартларини $g_{m+i}(X) = -x_i$ билан белгилаш ёрдамида қуйидаги

$$g_{m+i}(X) \leqslant 0, \ i = \overline{1, n}$$

кўринишга келтирамиз. У ҳолда (2.3 18) ни умумий

$$g_k(X) \leqslant 0, \ k = \overline{1,(n+m)} \qquad (2.3.20)$$

куринишда ёзиш мумкин. Энди (2.2.4) — (2.3 20) масаланинг қўйилишига назар ташласак, бу масала учун Лагранж функциясининг кўриниши (2.3.19) формулада кўрсатилгандек бўлиши ва қўйилган масаланинг (2.2.4)—(2. 3.12) масаланинг қўйилиши билан бир хил эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шунинг учун, бу теореманинг бундан кейинги исботи худди 2-теореманинг исботи каби бўлади.

3-БОБ ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

3. 1-§. Чизиқли программалаштириш масалалари

Қавариқ программалаштиришнинг мақсад функция ва чекланиш шартлари чизиқли функциялардан иборат бўлган бўлими *чизиқли программалаштириш* дейилади.

1. Масаланинг умумий тарзда қўйилиши. Бизга чизиқли

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (3.1.1)$$

функциянинг қуйидаги чизиқли

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i = \overline{1, m} \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n} \end{array}\right| \qquad (3.1.2)$$

чекланиш шартларини қаноатлантирадиган минимумини топиш талаб қилинган бўлсин. Бу ерда C_j. a_{ij}, b_i лар олдиндан берилган ўзгармас сонлардир. Тенгсизликлар системаси· кўринишида берилган чекланиш шартлари (3.1.2) ни қўшимча ўзгарувчилар, яъни x_{n+i} киритиб тенгламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ x_j \geqslant 0, \ x_{n+i} \geqslant 0, \ j = \overline{1, n} \end{array}\right| \qquad (3.1.3)$$

(3.1.1) функциянинг чизиқли чекланиш шартлари (3.1.2) ни қаноатлантирадиган минимумини топиш масаласи *стандарт чизиқли программалаштириш масаласи* дейилади. (3. 1. 1) функциянинг чекланиш шартлари (3.1.3) ни қаноатлантирадиган минимумини топиш масаласи эса, *каноник кўринишдаги чизиқли программалаштириш масаласи* дейилади. (3.1.1) функцияга *мақсад* ёки *минималлаштириладиган функция* дейилади. (3.1.1)—(3.1.2) га ёки (3.1.1)—(3.1.3) га қўйилган масаланинг *математик модели* дейилади. Тенгсизликлар системаси (3.1.2) ёки тенгламалар системаси (3. 1. 3) нинг бир неча, ҳатто чексиз кўп ечимлари бўлиши мумкин.

1-таъриф. Тенгламалар ёки тенгсизликлар системасининг исталган манфий бўлмаган ечими *ўринли ечим* дейилади.

2-таъриф. Мақсад функция (3. 1. 1) га талаб қилинган минимум (ёки максимум) қиймат берувчи ўринли ечим *оптимал ечим* дейилади.

Чизиқли программалаштириш масалаларини ечишда, айрим ҳолларда мақсад функция (3. 1. 1) нинг максимумини топиш талаб қилинади. Бироқ, $\min Z = \max(-Z)$ бўлганлиги учун мақсад функциянинг минимумини топиш масаласини максимумни топиш масаласига келтириш мумкин ва аксинча.

2. **Чизиқли программалаштириш масалаларининг ҳар хил формада ёзилиши.**

а) Вектор формада ёзилиши. Агар қуйидаги

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n),\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (3.1.4)$$

векторлар киритсак, (3. 1. 1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Z = CX \qquad (3.1.5)$$

Худди шунингдек

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ j = \overline{1, n};\ E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (3.1.6)$$

векторлар киритсак чекланиш тенгсизликлари (3.1.2) ни ва тенгламалари (3.1.3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n \leqslant B;\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, n} \qquad (3.1.7)$$

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + E_1x_{n+1} + E_2x_{n+2} + \dots + E_mx_{m+n} = B. \qquad (3.1.8)$$

(3.1.5)—(3.1.7) ва (3.1.5)—(3.1.8) лар мос равишда стандарт ва каноник кўринишдаги чизиқли программалаштириш масалаларининг вектор формасидаги ёзилишидир.

б) Матрица формада ёзилиши.

C ва X векторлар билан бирга қуйидаги

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \,.\;.\;.\, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \,.\;.\;.\, a_{2n} \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ a_{m1}\, a_{m2} \,.\;.\;.\, a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1.9}$$

матрица ва $Y=(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n})$ вектор киритсак (3.1.2) ва (3.1.3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} AX \leqslant B, \\ X > 0. \end{array}\right\} \tag{3.1.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} AX+Y=B, \\ X>0,\ Y>0. \end{array}\right\} \tag{3.1.11}$$

(3.1.5)—(3.1.10) ва (3.1.5)—(3.1.11) мос равишда стандарт ва каноник кўринишдаги чизиқли программалаштириш масалаларининг матрица формадаги ёзилишидир. (3.1.1)—(3.1.2) ва (3.1.1)—(3.1.3) масалаларни ечишда қўлланиладиган математик усуллар *чизиқли программалаштириш усуллари* дейилади.

Ҳар хил иқтисодий, саноатни бошқариш, оптимал жиҳозлаш, ракеталарни лойиҳалаш, учувчи аппаратлар ва транспорт ҳаракатини тартибга солиш масалаларини ечишда математик усулларни қўллаш учун энг аввало шу жараёнларнинг моҳиятини тўла акс эттирадиган математик моделларни қуриш керак.

3.2-§ Энг содда чизиқли программалаштириш масалаларининг математик моделларини қуриш

1. Хом ашёдан фойдаланиш масаласи. Бирор корхона икки хил, яъни M_1 ва M_2 маҳсулот ишлаб чиқариш учун уч хил, яъни x_1, x_2, x_3 хом ашёдан фойдаланадиган бўлсин. Хом ашёнинг запаслари, маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарфланган хом ашё бирлигининг миқдори ва ҳар қайси маҳсулот бирлигидан келадиган фойданинг сон қиймати 3.1-жадвалда келтирилгандек бўлсин.

3.1-жадвал

Хом ашё хиллари	Хом ашё запаси	Маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарфланган хом ашё бирлигининг миқдори	
		M_1	M_2
x_1	20	2	5
x_2	40	8	5
x_3	30	5	6
Бир бирлик маҳсулотдан келадиган фойда		50	40

Агар M_1 маҳсулот бирлигининг миқдорини x_1, M_2 маҳсулот бирлигининг миқдорини эса x_2 билан белгилаб, маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарф бўлган хом ашё бирлигини ва хом ашёнинг запасини назарда тутсак, қуйидаги чекланиш тенгсизликларини (ёки шартларини) ҳосил қиламиз.

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 20, \;\; 8x_1 + 5x_2 \leqslant 40, \;\; 5x_1 + 6x_2 \leqslant 30. \quad (3.2.1)$$

Бу тенгсизликлар маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом ашёнинг берилган хом ашё запасидан ошиб кетмаслигини кўрсатади. Агар M_1 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарилмаса $x_1 = 0$, акс ҳолда эса $x_1 \geqslant 0$. M_2 хилдаги маҳсулот учун ҳам худди шундай бўлади.

Демак, ҳамма вақт $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ бўлар экан. M_1 хилдаги бир-бирлик маҳсулот 50 бирлик фойда бергани учун шу хилдаги умумий маҳсулотдан келадиган фойда $50 \cdot x_1$ га тенг бўлади. Худди шунингдек, иккинчи хил маҳсулотдан $40 \cdot x_2$ фойда олинади. Умумий фойда қуйидаги

$$z = Z(x_1, x_2) = 50x_1 + 40x_2 \quad (3.2.2)$$

кўринишда бўлади ва қўйилган масаланинг мақсад функциясини ифодалайди.

Чекланиш шартлари (3.2.1) ва мақсад функция (3.2.2) чизиқли бўлгани учун (3.2.2)—(3.2.1) ифода чизиқли иқтисодий масаланинг, яъни хом ашёдан фойдаланиш масаласининг математик моделини ташкил қилади. Демак, масалани ечиш унун (3.2.1) системанинг шундай манфий бўлмаган $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ечимини топамизки, унда (3.2.2) формула билан аниқланадиган z чизиқли функция энг катта қийматга эришади (z максималлашади), яъни умумий фойда энг катта бўлади.

Энди хом ашёдан фойдаланиш масаласини умумий ҳолда қўйиш мумкин. Фараз қилайлик, корхона n хил маҳсулот тайёрлаш учун m хил хом ашёдан фойдаланадиган бўлсин. Аввалги масаламизга ўхшаш маҳсулот хилларини $M_j(j = \overline{1, n})$ билан, хом ашё хилларини $x_i(i = \overline{1, m})$ билан, хом ашёнинг запасларини b_i билан i-кўринишдаги хом ашё бирлиги миқдоридан, j-номерли маҳсулот тайёрлаш учун қанча сарф қилинганлигини a_{ij} билан, j-номерли маҳсулот бирлиги реализация қилингандан кейин олинадиган фойдани c_j билан ва j-номерли маҳсулот бирлигининг миқдорини x_j билан белгиласак (3.2-жадвалга қаранг) қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (3.2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_j, \; (i = \overline{1, m}), \;\; x_j \geqslant 0, \; (j = \overline{1, n}) \quad (3.2.4)$$

Бу ерда (3.2.3) мақсад функция, (3.2.4) эса чекланиш шартларидир.

3.2-жадвал

Хом ашё хиллари	Хом ашё запаси	j-номерли маҳсулот бирлигини тайёрлаш учун сарф қилинган, i-хилдаги хом ашё бирлигининг миқдори				
		M_1	M_2	M_3	...	M_n
x_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
x_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
.	.	.	.	.		.
x_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}
Бир бирлик маҳсулотдан келадиган фойда		C_1	C_2	C_3	...	C_n

Қўйилган масаладан кўриниб турибдики, мақсад функция (3.2.3) ни максималлаштирадиган $x_j \geqslant 0$ ларни топиш учун чизиқли тенгсизликлар системаси (3.2.4) нинг манфий бўлмаган ечимларини топиш керак. Тенгсизликлар системасини ечиш тенгламалар системасини ечишга қараганда анча мураккаб бўлгани учун, кўпинча тенгсизликлар системаси (3.2.4) ни унга тенг кучли бўлган тенгламалар системаси билан алмаштирилади. Бунинг учун, тенгсизликлар системаси (3.2.4) нинг чап томонига, ҳозирча номаълум ва мусбат бўлган $x_{n+i} \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$ ўзгарувчиларни қўшиб ёзиш кифоядир, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m} \tag{3.2.5}$$

Бу системада номаълумлар сони тенгламалар сонидан кўп, яъни $n + m > n$ бўлгани учун (3 2.5) система чексиз кўп ечимларга эгадир. Бу ечимлар тўпламидан шундай $x_j \geqslant 0$ ларни танлаб олиш талаб қилинадики, мақсад функция (3.2.3) ўзининг энг катта қийматига эришсин. (3.2.3)–(3.2.4) умумий ҳолда хом ашёдан фойдаланиш масаласининг математик моделини ташкил қилади.

2. Рационни тузиш масаласи. Жониворларни ҳар куни озиқлантириш учун рационда миқдори $b_i (i = \overline{1, m})$ бирликдан кам бўлмаган, n хил озуқадан фойдаланишда m хил тўйимли модда керак бўлсин. Бу масаланинг математик моделини тузиш учун j-номерли озуқа бирлигининг таркибидаги i-хил тўйимли модда бирлигининг миқдорини a_{ij} билан, j — номерли озуқа бирлигининг нархини $C_j (j = \overline{1, n})$ билан, изланаётган номаълумларни, яъни кунлик рациондаги j-номерли озуқа бирлигининг миқдорини x_j билан белгилаймиз. У ҳолда, бу ерда ҳам, мақсад функция топилиши керак бўлган номаълум миқдорлар x_j лар орқали (3.2.3) кўринишда бўлади. Ҳар бир j номерли озуқада i та тўйимли модда борлигини ва уларнинг бирлик миқдорлари x_j ва b_i ларни назарда тутсак, қуйидаги чекланиш шартларига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \ i=\overline{1, m} \\ x_j \geqslant 0, \ j=\overline{1, n} \end{array}\right| \qquad (3.2.6)$$

Демак, (3.2.3) — (3.2.6) қўйилган масаланинг математик моделини ташкил қилади. (3.2.6) тенгсизликлар системасини, аввалги масалада кўрганимиздек, тенгламалар системаси шаклида ёзиш мумкин. Бунинг учун, (3.2.6) нинг чап томонидан, ҳозирча номаълум ва мусбат бўлган $x_{n+i} \geqslant 0, \ i=\overline{1, m}$ миқдорни айириб ёзиш кифоядир, яъни

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \ i=\overline{1, m}. \qquad (3.2.7)$$

Бу системада ҳам номаълумлар сони тенгламалар сонидан кўп бўлганлиги учун, (3.2.7) система чексиз кўп ечимларга эгадир. Бу ечимлар ичидан шундай мусбат ечимни танлаб олиш керакки, мақсад функция (3.2.3) ўзининг энг кичик қийматига эришсин, яъни энг кам харажат сарфлансин.

Масала. Бирор бир жониворни ҳар куни озиқлантириш учун миқдори 9 бирликдан кам бўлмаган T_1 тўйимли модда, миқдори 8 бирликдан кам бўлмаган T_2 тўйимли модда ва миқдори 12 бирликдан кам бўлмаган T_3 тўйимли модда керак бўлсин. Бу тўйимли моддалардан икки хил, яъни O_1 ва O_2 озуқа тайёрлаш керак бўлса ва ҳар бир озуқадаги тўйимли моддаларнинг миқдори, ҳамда ҳар бир озуқа бирлигининг нархлари 3.3-жадвалдагидек берилган бўлса, қўйилган масаланинг математик модели тузилсин.

3.3- жадвал

Тўйимли моддалар	Тўйимли моддалар миқдори	Ҳар бир кг озуқадаги тўйимли модда бирлигининг миқдори	
		O_1	O_2
T_1	9	3	1
T_2	8	1	2
T_3	12	1	6
1 кг озуқанинг нархи (тийинларда)		4	6

Ечиш. Қўйилган масаланинг математик моделини тузиш учун O_1 озуқа бирлигининг миқдорини x_1 ва O_2 озуқа бирлигини миқдорини эса x_2 билан белгилаймиз. Энди 3.3-жадвалнинг охирги сатридаги озуқа бирликларининг нархларига назар ташласак O_1, O_2 озуқаларни тайёрлаш учун кетган умумий харажат қуйидагига тенг:

$$z = 4x_1 + 6x_2. \tag{3.2.8}$$

Агар O_1 ва O_2 озуқалар тайёрланмаса $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ бўлади, акс ҳолда $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Демак, ҳамма вақт $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ экан.

Иккинчи томондан O_1 ва O_2 озуқаларда T_1 тўйимли модданинг умумий миқдори $3x_1 + x_2$ га, T_2 тўйимли модданинг миқдори $x_1 + 2x_2$ га ва T_3 тўйимли модданинг миқдори $x_1 + 6x_2$ га тенг бўлиб, улар мос равишда 9, 8, 12 дан кам бўлмаслиги керак, демак

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geqslant 9, \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 8, \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 12, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{3.2.9}$$

тенгсизликлар бажарилиши керак. (3.2 8)—(3.2.9) қўйилган масаланинг математик моделидир. (3.2.9) системанинг манфий бўлмаган ечимларидан шундай (x_1^0, x_2^0) ечимни танлашимиз керакки, у мақсад функция (3.2.8) га энг кичик қиймат берсин, яъни O_1 ва O_2 озуқаларни тайёрлаш учун кетган умумий харажат энг кам бўлсин.

3. Ҳаво йўллари бўйича самолётларни тақсимлаш масаласи. Бу масала энг кам харажат сарфлаб берилган ҳаво йўллари бўйича зарур бўлган юк ёки пассажирларни ташишнинг оптимал (энг қулай) ечимини танлаш масаласидир. Бу масаланинг қўйилиши қуйидагича бўлади:

m та ҳаво йўлига тақсимлаш учун n хил самолёт берилган бўлсин. Агар i- хилдаги самолётларнинг сони N_i $(i = \overline{1, n})$ га j-номерли ҳаво йўли бўйича i-хил самолётнинг бир ойлик юк, ташиш ҳажми a_{ij} бирликка ва шу билан боғлиқ бўлган харажат b_{ij} сўмга тенг бўлса, энг кам харажат сарфлаб, j-номерли ҳаво йўли бўйича C_j бирликдан кам бўлмаган ташиш ишини таъминлаш учун зарур бўлган i-хилдаги самолётлар сони x_{ij} ни топиш масаласининг математик моделини тузиш талаб қилинган бўлсин. Қўйилган масалани жадвал кўринишида 3.4- жадвалда кўрсатилгандек ёзиш мумкин.

Биринчидан, j- номерли ҳаво йўли бўйича ташиш ишини бажариш учун сарф бўлган харажат

$$Z_j = b_{1j} x_{1j} + b_{2j} x_{2j} + \ldots + b_{nj} x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}, \ j = \overline{1, m}$$

бўлгани учун, умумий харажат қуйидагига тенг бўлади:

$$Z=\sum_{j=1}^{m} Z_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\,x_{ij}. \tag{3.2.10}$$

3.4- жадвал

Самолётларнинг хили	Самолётларнинг сони	Ҳар бир ҳаво йўли бўйича бир ойлик юк ташиш ҳажми						Ҳар бир ҳаво йўли бўйича самолётларни ишлатиш учун кетган харажат					
		1	2	...	j	...	m	1	2	...	j	...	m
1	N_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}	b_{11}	b_{12}	...	b_{1j}	...	b_{1m}
2	N_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}	b_{21}	b_{22}	...	b_{2j}	...	b_{2m}
. . .	. . .	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	N_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}	b_{i1}	b_{i2}	...	b_{ij}	...	b_{im}
. . .	. . .	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	N_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nj}	...	a_{nm}	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nj}	...	b_{nm}
j-номерли ҳаво йўли бўйича юк ташиш бирлигининг миқдори		C_1	C_2	...	C_j	...	C_m						

Иккинчидан, масаланинг шартига кўра, i-хилдаги самолётларнинг сони N_i га тенг бўлиб, j- номерли ҳаво йўли бўйича C_j бирликдан кам бўлмаган ташиш ишини бажариш керак бўлганлиги учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,x_{ij}\geqslant c_j,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=N_i,\\ &x_{ij}\geqslant 0,\ i=\overline{1,\ n}, j=\overline{1,\ m}\end{aligned}\right\} \tag{3.2.11}$$

(3.2.10)—(3.2.11) математик ифода қўйилган масаланинг математик моделини ташкил қилади. Бошқача қилиб айтганда, (3.2.11) системанинг манфий бўлмаган ечимлари ичидан шундай ечимни танлаш керакки, мақсад функция (3.2.10) ўзининг энг кичик қийматига эришсин, яъни энг кам харажат сарфлансин.

Масала. Тўртта ҳаво йўлига тақсимлаш учун 3 хил самолёт берилган бўлсин. Агар ҳар бир хилдаги самолётларнинг сони, бир ойлик юк ташиш ҳажмининг бирлиги ва самолётларни ишлатиш учун кетган харажатларнинг сон қиймати 3.5- жадвалдагидек берилган бўлса, самолётларни шундай тақсимлаш керакки, энг кам харажат сарфлаб, ҳар бир ҳаво йўли бўйича мос равишда 300, 200, 1000 ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилсин. Қўйилган масаланинг математик модели қурилсин.

3.5- жадвал.

Самолётларнинг хили	Самолётларнинг сони	Ҳар бир ҳаво йўли бўйича бир ойлик юк ташиш ҳажми				Ҳар бир ҳаво йўли бўйича самолётларни ишлатиш учун кетган харажат			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	30	25	10	17	70	28	15	45
3	30	25	50	30	45	40	70	40	65
Юк ташиш бирлигининг миқдори		300	200	1000	500				

Ечиш. j- номерли ҳаво йўли буйича юк ташиш учун зарур бўлган i хил самолётлар сонини x_{ij} билан белгиласак (берилган масалада $i=1, 2, 3, 4$), шу йўллар бўйича юк ташиш учун кетган харажатлар (3.5- жадвалга қаранг) қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} z_1 &= 15x_{11} + 70x_{21} + 40x_{31}, \\ z_2 &= 20x_{12} + 28x_{22} + 70x_{32}, \\ z_3 &= 25x_{13} + 15x_{23} + 40x_{33}, \\ z_4 &= 40x_{14} + 45x_{24} + 65x_{34}. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Бу ерда z_1, z_2, z_3 ва z_4 лар биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи хил самолётларнинг мос равишда $j=1, 2, 3, 4$ йўллар буйича юк ташиш учун кетган харажатларидир. Умумий харажат эса

$$Z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \sum_{i=1}^{4} z_i \tag{3.2.12'}$$

га тенг бўлади, иккинчи томондан, ҳар бир ҳаво йўли бўйича мос равишда 300, 200, 1000 ва 500 бирликлардан кам бўлмаган юк ташилиши, ҳамда ҳар бир хил самолётдан шу йўлларнинг ҳаммасига 50, 20 ва 30 тадан беркитилиши керак бўлганлиги учун қуйидаги чекланиш шартларига эга буламиз:

$$\left.\begin{aligned} &15x_{11}+30x_{21}+25x_{31} \geqslant 300, \\ &10x_{12}+25x_{22}+59x_{32} \geqslant 200, \\ &20x_{13}+10x_{23}+30x_{33} \geqslant 1000, \\ &50x_{14}+17x_{24}+45x_{34} \geqslant 500 \end{aligned}\right| \left.\begin{aligned} &x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=50, \\ &x_{12}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=20, \\ &x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=30, \\ &x_{ij} \geqslant 0,\ i=\overline{1,3}\ \ j=\overline{1,4} \end{aligned}\right| \tag{3.2.13}$$

(3.2.12) — (3.2.13) қўйилган масаланинг математик модели бўлади. (3.2.13) системанинг манфий бўлмаган ечимлари тўпламидан шундай x°_{ij} ларни танлашимиз лозимки, у мақсад функция (3.2.12) га энг кичик қиймат берсин, яъни энг кам харажат сарфлансин.

4. **Транспорт масаласи.** Ҳар хил юкларни ташишда транспорт воситаларининг ўзига хос хусусиятлари ва бошқа шартларига кўра, қаралаётган масалаларни ҳал этиш учун ҳозирги

вақтда чизиқли программалаштиришнинг транспорт масаласи моделидан фойдаланилади. Ҳақиқатан ҳам, маълум юкларни ишлаб чиқариш пунктларидан истеъмол қилувчи пунктларга ташиш планини шундай аниқлаш керак бўладики, бунда транспорт харажатларини энг кам сарф қилган ҳолда истеъмолчилар талабини тўла қондириш мумкин бўлсин.

Фараз қилайлик, m та ишлаб чиқариш пункти (уларни A_1, A_2, ..., A_m деб белгилаймиз) ўз маҳсулотлари билан n та истеъмол пунктларини (уларни B_1, B_2, ..., B_n деб белгилаймиз) таъминлайдиган бўлсин ($m \neq n$). Маълум бир вақт ичида ҳар бир A_i $(i = \overline{1,m})$ пунктларда ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг миқдори мос равишда a_i га ва ҳар бир $B_j\,(j = \overline{1,n})$ пунктларнинг шу вақт ичидаги маҳсулотга бўлган талаби b_j га тенг бўлади.

A_i пунктларда ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий миқдори B_j пунктларнинг маҳсулотга бўлган талабнинг умумий миқдорига тенг бўлсин, деб фараз қиламиз, у ҳолда

$$a_1 + a_2 \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

тенглик ўринли бўлади.

A_i ишлаб чиқариш пунктидан B_j истеъмол пунктига олиб борилган маҳсулотнинг умумий миқдорини x_{ij} билан ва A_i ишлаб чиқариш пунктидан B_j истеъмол пунктигача бир бирлик маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинган харажатни C_{ij} билан белгилаймиз. Масалан, x_{23}—A_2 ишлаб чиқариш пунктидан B_3 истеъмол пунктига олиб борилган маҳсулотнинг миқдори бўлса, C_{23}—A_2 ишлаб чиқариш пунктидан B_3 истеъмол пунктигача бир бирлик маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинган харажатдир.

Бу масаланинг ҳамма берилган параметрларини 3.6- жадвалдан оламиз.

3.6- жадвал

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари			
		B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}
Маҳсулотга бўлган талаб		b_1	b_2	...	b_n

Шундай қилиб, масала ва унинг шартларини жадвал кўринишида жуда содда, аниқ ва ихчам ҳолда ифодаладик. Энди бу масалани математика тилида ифодалаймиз, яъни математик моделини тузамиз.

Масаланинг математик моделини тузишимиз учун, ҳар бир ишлаб чиқариш пунктини истеъмол пунктларига шундай мослаб қўйиш керакки, биринчидан ҳар бир ишлаб чиқариш пунктидаги маҳсулотлари тўла тақсимлансин. Бу шартни тенгламалар системаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m. \end{array}\right| \qquad (3.2.14)$$

Иккинчидан, ҳар бир истеъмол қилувчи пунктнинг талаби тўла қондирилсин. Бу шарт қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1m}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n. \end{array}\right| \qquad (3.2.15)$$

Учинчидан, маҳсулотларни ташиш учун сарф қилинадиган жами харажат энг кам бўлсин. Бу шартни қуйидаги чизиқли функция орқали ифодалаймиз:

$$\begin{array}{l} z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+ \\ +c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+ \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn} \end{array} \qquad (3.2.16)$$

Иқтисодий нуқтаи назардан, бу масаланинг ечимлари манфий бўлмаслиги керак, яъни:

$$x_{ij}\geqslant 0, \ \left(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n}\right) \qquad (3.2.17)$$

(3.2.14) – (3.2.17) ифодаларни йиғинди кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1, m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=\overline{1, n}, \quad x_{ij}>0, \end{array}\right| \qquad (3.2.18)$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{j}. \qquad (3.2.19)$$

Шундай қилиб, (3.2.18)–(3.2.19) ифодалар биргаликда *транспорт масаласининг математик модели* деб аталади. Демак, (3.2.18) шартни қаноатлантирувчи шундай ечимларни танлашимиз керакки, натижада (3.2.19) мақсад функция энг кичик қийматга эришсин.

Агар ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг умумий миқдори уларга бўлган талабнинг умумий миқдорига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M > 0, \tag{3.2.20}$$

у ҳолда бу масалани ёпиқ моделли транспорт масаласи деб атаймиз.

Теорема. Ихтиёрий ёпиқ моделли транспорт масаласи ечимга эга.

Исбот. Теоремани исботлаш учун, берилган шартлар асосида, масаланинг ҳеч бўлмаганда битта ечими мавжудлигини ва мақсад функциянинг ечимлари тўпламида чегараланганлигини кўрсатиш кифоя. Теореманинг шартига кўра (3.2.20) тенглик ўринлидир, у ҳолда

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M}, \ (i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}) \tag{3.2.21}$$

ифода берилган транспорт масаласининг ечими бўлади, чунки у (3.2.18) чекланиш шартларини қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} \cdot M = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} \cdot M = b_j$$

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{M} \geqslant 0, \text{ чунки } a_i \geqslant 0, \ b_j \geqslant 0, \ M > 0.$$

Мақсад функциянинг ечимлар тўпламида чегараланганлигини кўрсатиш учун c_{ij} қийматларнинг ичидан энг каттасини танлаб олиб, уни $c' = \max c_{ij}$ деб белгилаймиз ва (3.2.19) мақсад функциянинг барча коэффициентларини c' га алмаштирамиз; у ҳолда (3.2.18) нинг биринчисига ва (3.2.20) га асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leqslant c' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c' \sum_{i=1}^{m} a_i = c' M.$$

Энди c_{ij} қийматларининг ичидан энг кичигини танлаб олиб, уни $c'' = \min c_{ij}$ деб белгилаймиз ва (3.2.19) мақсад функциянинг барча коэффициентларини c'' га алмаштирамиз; у ҳолда (3.2.18) нинг биринчисига ва (3.2.20) га асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geqslant c'' \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c'' \sum_{i=1}^{m} a_i = c''M.$$

Иккита охирги тенгсизликларни бирлаштириб, уларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$C''M \leqslant z \leqslant C'M.$$

Демак, мақсад функция транспорт масаласининг ечимлари тўпламида чегараланган экан.

Мисол. A_1, A_2 ва A_3 омборларда мос равишда 90 т, 70 т ва 50 т ун сақланади. Бу унларни B_1, B_2, B_3 ва B_4 магазинларга уларнинг талабларига кўра, мос равишда 80 т, 60 т, 40 г ва 30 т дан етказиб бериш керак бўлсин. A_1 омбордан 1 т унни B_1, B_2, B_3 ва B_4 магазинларга етказиб бериш учун сарф қилинадиган транспорт харажати мос равишда 2; 1; 3 ва 2 сўмни; A_2 омбордан—2; 3; 3; ва 1 сўмни ва A_3 омбордан эса—3, 3; 2 ва 1 сўмни ташкил қилса, ташишда сарф қилинган умумий транспорт харажати энг кам бўладиган ечим топилсин. Бу транспорт масаласининг математик модели тузилсин.

Ечиш. $A_i(i=\overline{1,3})$ омборлардан $B_j(j=\overline{1,4})$ магазинларга етказиб бериладиган уннинг миқдорини x_{ij} билан, A_i омборларда сақланаётган уннинг миқдорини a_i (бунда $a_1 = 90$ т, $a_2 = 70$ т ва $a_3 = 50$ т) билан, B_j магазинларнинг унга бўлган талабини b_j (бунда $b_1 = 80$ т, $b_2 = 60$ т, $b_3 = 40$ т ва $b_4 = 30$ т) билан белгиласак, ҳар бир омборлардаги уннинг тўла тақсимланиш шартини

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \end{cases}$$

кўринишда ва ҳар бир магазинларнинг унга бўлган талабини тўла қондириш шартини

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \end{cases}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.

A_i омборлардан B_j магазинларга 1 т унни етказиб бериш учун сарф қилинган транспорт харажатини C_{ij} билан белгиласак, унни ташиш учун сарф қилинадиган жами харажатнинг миқдорини аниқлайдиган чизиқли функция қуйидагича бўлади:

$$z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + \\ + 3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}.$$

Иқтисодий нуқтаи назардан, транспорт масаласининг ечимлари манфий бўлмаслик шартларини ҳисобга олиб, қўйилган транспорт масаласининг математик моделини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + + 3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}.$$

Чизиқли мақсад функциянинг қуйидаги:

$$\left|\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80, \\ \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \end{array}\right.$$

$$x_{i,j} \geqslant 0, \ i = \overline{1,3}; \ j = 1,4$$

чекланиш тенгламалари системасини қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Машқлар: 1. Қуйидаги транспорт масалаларининг математик модели тузилсин: A_1 ва A_2 вокзалларга мос равишда 30 ва 40 комплектдан мебель келиб тушди. A_1 вокзалдан B_1, B_2 ва B_3 магазинларга 1 комплект мебелни етказиб бериш учун сарфланадиган транспорт харажати мос равишда 2 сўм, 3 сўм ва 4 сўмни, A_2 вокзалдан эса мос равишда 2 сўм, 5 сўм ва 3 сўмни ташкил қилсин. B_1, B_2 ва B_3 магазинларга мос равишда 15, 25 ва 30 комплектдан мебелни етказиб беришда сарф қилинган жами транспорт харажати энг кам бўладиган оптимал ечим топилсин.

2. Жадвал кўринишда берилган қуйидаги транспорт масаласининг математик модели тузилсин:

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	5 x_{11}	3 x_{12}	8 x_{13}	4 x_{14}
A_2	90	6 x_{21}	6 x_{22}	3 x_{23}	2 x_{24}
A_3	50	3 x_{31}	4 x_{32}	6 x_{33}	9 x_{34}
Маҳсулотга бўлган талаб		30	95	25	. 60

3.3-§. Чизиқли программалаштириш масалаларининг геометрик интерпретацияси

Айтайлик, бизга (3.1.1) мақсад функциянинг (3.1.2) чеклаш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган минимумини топиш масаласи берилган бўлсин. Тенгсизликлар системаси (3.1.2) ни қаноатлантирадиган ихтиёрий $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сонлар тўплами унинг ечимлари дейилади.

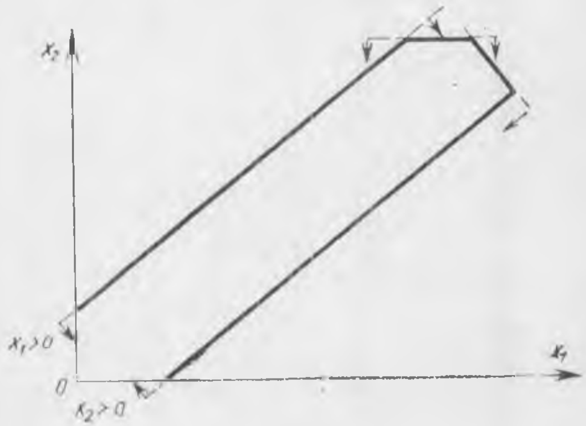
(3.1.2) система ҳеч бўлмаса битта ечимга эга бўлса система *биргаликда* дейилади. Акс ҳолда эса, система *биргаликда эмас* дейилади. Бундан кейин биз тенгсизликлар системаси (3.1.2) ни биргаликда деб фараз қиламиз.

$n=2$ бўлганда (3.1.2) дан қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=\overline{1,m}; \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \tag{3.3.1}$$

Бу тенгсизликларнинг ҳар бири $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ тўғри чизиқ билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j \geqslant 0$ $j=1$; 2 эса $x_j = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган ярим текисликлар бўлади. (3.3.1) тенгсизликлар системаси биргаликда бўлганлиги учун ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга бўлади, яъни чегаравий тўғри чизиқлар бир-бири билан кесишиб, ўринли ечимлар тўпламини ҳосил қилади. Демак, $n=2$ бўлганда ўринли ечимлар тўплами кўпбурчакнинг нуқталаридан иборат бўлади. Масалан, $m=4$ бўлганда ўринли ечимлар тўплами 17-расмда кўрсатилган кўпбурчакдан иборат бўлади. (3.1.2) да $n=3$ бўлса ва бу тенгсизликларнинг ҳар бирига геометрик нуқтаи назардан қараганда уларнинг ҳар бири

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i, \ (i=\overline{1,m})$$



17- расм.

текисликлар билан, ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j \geqslant 0$ лар эса, $x_j = 0$ текисликлар билан чегараланган уч ўлчовли ярим фазолардан иборат бўлади.

Иккинчи томондан, (3.1.2) система биргаликда бўлганлиги учун бу ярим фазолар кесишиб, бирор бир кўпёқли ҳосил қилади. Кўпёқли эса ўринли ечимлар тўпламини беради, яъни унинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари (3.1.2) системани қаноатлантиради ва ниҳоят, (3.1.2) да $n > 3$ бўлса, бу тенгсизликларнинг ҳар бири

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

гипертекисликлар билан ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари эса $x_j = 0$ гипертекисликлар билан чегараланган ярим фазолардан иборат бўлади. Бу ярим фазолар кесишиб, ўринли ечимлар тўплами бўлган бирорта кўпёқлини ҳосил қилади.

Юқоридаги мулоҳазалар чизиқли программалаштириш масалаларини геометрик нуқтаи назаридан қуйидагича талқин қилишга имкон беради: ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг шундай нуқтасининг координаталарини топиш керакки, бу нуқтада мақсад функция (3.1.1) ўзининг энг кичик қийматига эришсин.

3.4-§. Чизиқли программалаштириш масалалари ечимларининг хоссалари

Айтайлик, бизга чекланиш шартлари тенгсизликлар системаси кўринишида бўлган (3.1.1) — (3.1.2) чизиқли программалаштириш масаласи берилган бўлсин. Маълумки, (3.1.4), (3.1.6) ва (3.1.9) белгилашлар ёрдамида (3.1.1)—(3.1.2) чизиқли программалаштириш масаласини (3.1.5)—(3.1.10) кўринишда ёзиш мумкин. Қуйида бундай чизиқли программалаштириш масалаларини ечимларининг хоссалари ҳақида батафсилроқ тўхталиб ўтамиз.

1-хосса. Чизиқли программалаштириш масалаларининг ечимлар тўплами қавариқдир.

Исботи. n ўлчовли R_n фазодан олинган $X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ ва $X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$ нуқталар (3.1.5)—(3.1.10) чизиқли программалаштириш масаласининг ўринли ечимлари бўлса, уларнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўлган қуйидаги

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$
$$\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

ифоданинг ҳам ўринли ечим эканлигини исботлаймиз.

X_1 ва X_2 ўринли ечимлар бўлгани учун

$$AX_1 \leqslant B, \ X_1 \geqslant 0; \quad AX_2 \leqslant B, \ X_2 \geqslant 0$$

тенгсизликлар ўринлидир. Энди $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ бўлганда AX ифодани текширамиз, яъни

$$AX = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 \leqslant \lambda_1 B + \lambda_2 B = $$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2) B = B.$$

$X_1 \geqslant 0$, $X_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ бўлгани учун $X \geqslant 0$ дир. Демак, X ҳам чекланиш тенгсизлиги (3.1.10) ни қаноатлантиради, яъни бу ифода ўринли ечимдир. Бу эса чизиқли программалаштириш масалаларининг ўринли ечимлар тўплами қавариқ тўплам эканлигини билдиради.

Бу хоссадан фойдаланиб, агар $X_1, X_2, \ldots, X_m$ лар (3.1.5)—(3.1.10) нинг ўринли ечимлари бўлса, уларнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўлган қуйидаги

$$X = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i,$$

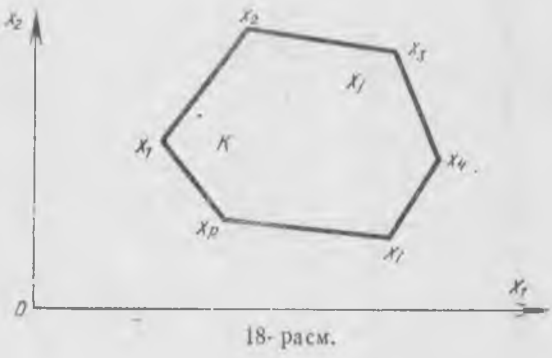
$$\lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

ифоданинг ҳам ўринли ечим эканлигини исботлаш қийин эмас.

Мазкур бобнинг учинчи параграфида чизиқли программалаштириш масалаларининг ўринли ечимлари тўплами қавариқ кўпёқлидан иборат эканлигини кўрсатган эдик. Энди чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига шу қавариқ кўпёқлининг учки нуқталаридагина эришиши мумкин эканлиги ҳақидаги қуйидаги хоссани исботлаймиз.

2-хосса. Чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг учки нуқталаридагина эришади. Агар чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига бир неча учки нуқталарда эришса, у ўзининг ана шу қийматига шу нуқталарнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам эришади.

Исботи. Ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлини K билан белгилаймиз. У ҳамма вақт чекли сондаги учки нуқталарга эга бўлади. Хусусий ҳолда $n=2$ бўлса (3.1.2) дан ҳосил бўладиган (3.3.1) ўринли ечимлар тўплами K кўпбурчакдан иборат бўлади (18-расмга қаранг). K тўпламнинг учки нуқта-



18-расм.

ларини $x_1, x_2, \ldots, x_p$ лар билан белгилаймиз. Бирор x_0 нуқта (3.1.5)–(3.1.10) масаланинг оптимал ечими бўлса K тўпламдаги ҳамма x лар учун қуйидаги

$$Z(x_0) \leqslant Z(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши керак. Агар x_0 нуқта K кўпбурчакнинг учки нуқтаси бўлса, хосса шартининг биринчи қисми исботланган бўлади.

Фараз қилайлик, x_0 нуқта учки нуқта бўлмасин.

У ҳолда K қавариқ тўплам бўлгани учун x_0 нуқтани K тўплам учки нуқталарининг қавариқ чизиқли комбинацияси шаклида ёзиш мумкин, яъни

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \ \lambda_i > 0, \ i = \overline{1,P}, \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Мақсад функция (3.1.5) чизиқли бўлгани учун қуйидаги

$$z(x_0) = z(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 z(x_1) + \\ + \lambda_2 z(x_2) + \ldots + \lambda_p z(x_p) \tag{3.4.1}$$

тенглик ўринлидир. Агар $z(x_i)$, $i = \overline{1, p}$ ларнинг энг кичигини, бирорга q сони билан белгиласак, яъни $q = \min\limits_{1 < i < p} z(x_i)$ бўлса (3.4.1) дан қуйидаги

$$z(x_0) \geqslant \lambda_1 q + \lambda_2 q + \ldots + \lambda_p q = q \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = q \tag{3.4.2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Иккинчи томондан, x_0 оптимал ечим бўлганлиги учун $z(x_0) \leqslant q$ бўлиши керак. Бу ердан (3.4.2) ни назарда тутсак $z(x_0) = q$ бўлиб, x_0 тўпламининг учки нуқтаси эканлиги келиб чиқади.

Демак, чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига ўринли ечимлар тўплами К нинг фақат учки нуқталаридагина эришар экан. Шу билан хоссанинг биринчи қисми исботланди. Иккинчи қисмини исботлаш учун мақсад функция (3.1.5) ўзининг энг кичик қийматига бир неча учки x_{11} $x_2, \ldots, x_r$ нуқталарда эришсин, яъни $z(x_1) = z(x_2) = \ldots = z(x_r) = q$ бўлсин. (3.4.2) тенглик ўринли бўлганда $x_1, x_2, \ldots, x_r$ нуқталарнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўлган x, яъни

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i, \ \lambda_i > 0, \ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

нуқтада ҳам $z(x) = q$ эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$z(x) = z(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r) = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \ldots + \\ + \lambda_r z(x_r) = \lambda_1 q + \lambda_2 q + \ldots + \lambda_r q = q \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = q.$$

Демак, чизиқли мақсад функция ўзининг энг кичик қийматига бир неча учки нуқталарда эришса, у ўзининг шу қийматига шу нуқталарнинг қавариқ чизиқли комбинацияси бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам эришар экан.

Бизга маълумки, (3.1.6) белгилашнинг биринчи ва охиргисидан фойдаланиб, чизиқли программалаштириш масалаларининг тенгламалар системаси кўринишда берилган чекланиш шартларини вектор формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B, \ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}. \qquad (3.4.3)$$

Бу ҳолда қуйидаги хосса ўринлидир.

3-хосса. Агар (3.4.3) ёйилмадаги $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $k \leqslant n$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлиб

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = B \qquad (3.4.4)$$

тенглик ўринли бўлса $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$ нуқта ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг учки нуқтаси бўлади. Бу ерда X нуқтанинг охирги $(n-k)$ та компонентлари нолга тенг бўлади.

Исботи. X нуқтани учки нуқта эмас, деб фараз қиламиз. У ҳолда бу нуқтани ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг ҳеч бўлмаганда иккита учки нуқтаси X_1 ва X_2 нинг қавариқ чизиқли комбинацияси шаклида ёзиш мумкин, яъни

$$X = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2, \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 > 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

бу ерда

$$X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}, 0, 0, \ldots, 0\right),$$
$$X_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}, 0, 0, \ldots, 0\right).$$

X_1 ва X_2 лар ўринли ечимлар бўлганлиги учун бу нуқталарнинг координаталари (3.4.4) ни қаноатлантириши, яъни

$$A_1x_1^{(1)} + A_2x_2^{(1)} + \ldots + A_kx_k^{(1)} = B,$$
$$A_1x_1^{(2)} + A_2x_2^{(2)} + \ldots + A_kx_n^{(2)} = B$$

бўлиши керак. Бу тенгламаларнинг биринчисидан иккинчисини айирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{l=1}^{k} (x_l^{(1)} - x_l^{(2)}) A_l = 0.$$

Шарт бўйича, $A_l (l = \overline{1, k})$ векторлар системаси чизиқли боғланмаганлиги учун

$$x_l^{(1)} - x_l^{(2)} = 0, \ x_l^{(1)} = x_l^{(2)}, \ l = \overline{1, k}$$

бўлади, яъни $X_1 = X_2$. Демак, X нуқтани кўпёқлининг ихтиёрий иккита нуқтасининг чизиқли комбинацияси кўринишида ёзиш мумкин эмас. Бу эса X нуқтанинг кўпёқлининг учки нуқтаси эканлигини билдиради.

4-хосса. Агар $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$ нуқта ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпёқлининг учки нуқтаси бўлса (3.4.4) ёйилмада қатнашган $A_1, A_2, \ldots, A_k$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлади.

Исботи. Айтайлик, X нуқта учки нуқта бўлиб, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ векторлар системаси чизиқли боғланган бўлсин, яъни ҳаммаси бирданига нолга тенг бўлмаган шундай l_i сонлар учун

$$A_1 l_1 + A_2 l_2 + \ldots + A_k l_k = 0 \tag{3.4.5}$$

тенглик бажарилади, деб фараз қилайлик.

Иккинчи томондан, X нуқта ўринли нуқта бўлганлиги учун унинг координаталари $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$, (3.4.4) тенгликни қаноатлантириши керак, яъни

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_k = B \tag{3.4.6}$$

Энди (3.4.5) ни бирорта $\varepsilon > 0$ сонга кўпайтириб, (3.4.6) га қўшсак, ва айирсак қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$A_1(x_1 + \varepsilon l_1) + A_2(x_2 + \varepsilon l_2) + \ldots + A_k(x_k + \varepsilon l_k) = B$$
$$A_1(x_1 - \varepsilon l_1) + A_2(x_2 - \varepsilon l_2) + \ldots + A_k(x_k - \varepsilon l_k) = B.$$

Бу ердан (3.4.6) система

$$X_1 = (x_1 + \varepsilon l_1,\ x_2 + \varepsilon l_2, \ldots, x_k + \varepsilon l_k, 0, 0, \ldots, 0);$$
$$X_2 = (x_1 - \varepsilon l_1,\ x_2 - \varepsilon l_2, \ldots, x_k - \varepsilon l_k, 0, 0, \ldots, 0)$$

ўринли ечимларга эга эканлиги келиб чиқади. Бу нуқталар орқали X нуқтани қуйидагича

$$X = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

шаклда, яъни X_1 ва X_2 нуқталарнинг қавариқ чизиқли комбинацияси шаклида ёзиш мумкин. Бу эса X нуқтанинг учки нуқта эканлигига зиддир. Юқоридаги қарама-қаршилик A_1, $A_2, \ldots, A_k$ векторлар системасининг чизиқли боғланган, деб қилган нотўғри фаразимиздан келиб чиқди. Демак, бу векторлар системаси чизиқли эрклидир.

4-БОБ. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

Олдинги бобда биз чизиқли программалаштириш масалаларининг умумий тарзда қўйилиши, айрим чизиқли программалаштириш масалаларининг математик моделининг қурилиши ва чизиқли программалаштириш масалалари ечимларининг хоссалари ҳақида маълумот олган эдик. Бу бобда чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш усуллари ҳақида тўхталиб ўтамиз.

4.1-§. График усул

Бизга икки ўлчовли фазода чизиқли программалаштириш масаласи берилган бўлсин, яъни ушбу

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{4.1.1}$$

функциянинг чекланиш тенгсизликлари системаси

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = \overline{1, m} \\ x_j \geqslant 0,\quad j = \overline{1, 2} \end{aligned}\right| \tag{4.1.2}$$

ни қаноатлантирадиган энг кичик қийматини топиш талаб қилинган бўлсин.

Тенгсизликлар системаси (4.1.2) ни биргаликда деб фараз қилсак, бу тенгсизликларнинг ҳар бири

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ i = 1,2$$

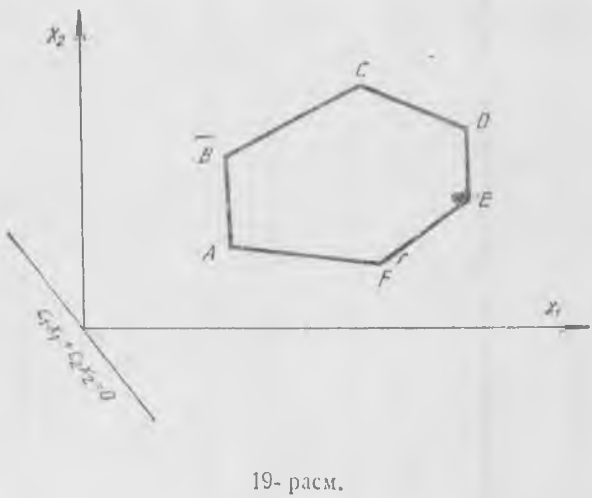
тўғри чизиқлар билан, ечимларнинг манфий эмаслик шартлари эса $x_j = 0$, $j = 1,2$ тўғри чизиқлар билан ярим текисликларни ташкил этади ва бу ярим текисликлар бир-бири билан кесишиб, ўринли ечимлар тўплами бўлган (19-расмга қаранг) бирорта кўпбурчакни ташкил қилади.

Мақсад функция (4.1.1) Z нинг ҳар бир қийматида бирорта тўғри чизиқнинг тенгламасини билдиради, яъни

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const} \tag{4.1.3}$$

Хусусий ҳолда $Z = 0$ бўлса, бу тўғри чизиқ

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \tag{4.1.4}$$



19- расм.

кўринишда бўлиб, координата бошидан ўтади. Энди қўйилган масалани қуйидагича баён қилиш мумкин: ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпбурчакнинг шундай таянч тўғри чизиғини топиш керакки, кўпбурчак билан таянч тўғри чизиққа умумий бўлган нуқтада мақсад функция (4.1.1) ўзининг энг кичик қийматига эришсин. Мақсад функция $\vec{N}=(c_1, c_2)$ вектор йўналиши бўйича ҳамма вақт ўсувчи бўлиб, бу вектор (4.1.3) тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади. Шунинг учун, (4.1.4) тўғри чизиқни $\vec{N}$ вектор йўналиши бўйича ўзига параллел равишда кўчира бошласак, у $ABCDEF$ кўпбурчакка A ва D нуқталарда таянч тўғри чизиқ бўлади ва мақсад функция (4.1.1) нуқтада энг кичик қийматга эришади.

A нуқтанинг координаталари x_1^0 ва x_2^0 лар AB ва AF тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан тузилган системани, яъни

$$\left.\begin{aligned} AB: a_{11}x_1^{(0)}+a_{12}x_2^{(0)}=b_{l1} \\ AF: a_{21}x_1^{(0)}+a_{22}x_2^{(0)}=b_{l2} \end{aligned}\right\}$$

ни биргаликда ечиш натижасида топилади.

График усули билан ечиладиган чизиқли программалаштириш масалаларига доир мисоллар.

а) Хом ашёдан фойдаланиш масаласини ечиш. Аввалги бобдан маълумки, хом ашёдан фойдаланиш масаласи ушбу

$$Z=50x_1+40x_2$$

чизиқли функциянинг қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &2x_1+5x_2\leqslant 20, \\ &8x_1+5x_2\leqslant 40, \\ &5x_1+6x_2\leqslant 30, \quad x_1\geqslant 0, \quad x\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирадиган максимумини топишдан иборатдир.

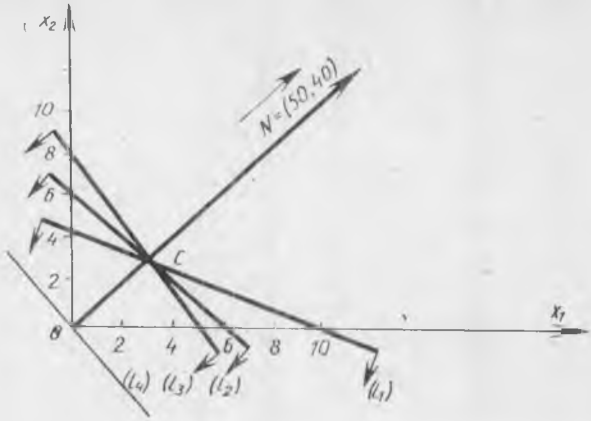
Ечиш. Аввал, ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпбурчакни ҳосил қиламиз. Бунинг учун x_1Ox_2 текисликда чекланиш тенгсизликларининг ҳар бирига тўғри келадиган чегаравий тўғри чизиқларнинг, яъни

$$\left.\begin{aligned} &l_1: 2x_1+5x_2=20, \\ &l_2: 8x_1+5x_2=40, \\ &l_3: 5x_1+6x_2=30, \; x_1=x_2=0 \end{aligned}\right\}$$

ларнинг ўрнини топамиз. Натижада ўринли ечимлар тўплами бўлган, $OABCD$ кўпбурчакни ҳосил қиламиз, $Z=0$ бўлганда

$$50x_1+40x_2=0$$

тўғри чизиқ $\vec{N}=(50, 40)$ векторга перпендикуляр бўлиб, координата бошидан ўтади ва $OABCD$ кўпбурчакка O ва C нуқталарда таянч тўғри чизиқ бўлади. Мақсад функциямиз $\vec{N}$ век-



20 расм.

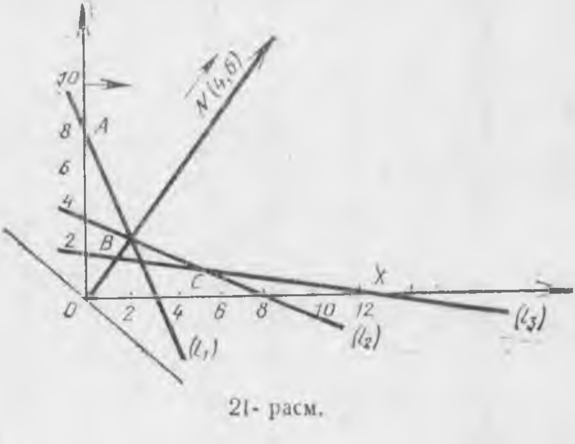
тор йўналиши бўйича ўсувчи бўлганлиги учун, O нуқтада минимумга C нуқтада эса максимумга эришади. C нуқтанинг координаталари $x_1^{(0)}$ ва $x_2^{(0)}$ лар эса l_2 ва l_3 (20-расм) тўғри чизиқларнинг тенгламаларидан тузилган қуйидаги системани, яъни

$$8x_1^{(0)}+5x_2^{(0)}=40,$$
$$5x_1^{(0)}+6x_2^{(0)}=30$$

ни биргаликда ечиш натижасида топилади.

Шундай қилиб, берилган мақсад функцияга оптимал, яъни энг катта қиймат берувчи ечим $x_1^{(0)}=3{,}9$; $x_2^{(0)}=1{,}7$ бўлиб, $Z=50x_1+40x_2^{(0)}=50\cdot3{,}9+40\cdot1{,}7=263$ бўлади.

Демак, 263 сўмдан иборат бўлган энг катта фойдани олиш учун биринчи хил маҳсулот M_1 дан 3,9 бирлик ва иккинчи



21- расм.

хил маҳсулот M_2 дан 1,7 бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришни планлаштириш зарур экан.

б) Рацион тузиш масаласини ечиш. Рацион тузиш масаласининг математик модели қуйидагича:

$$Z = 4x_1 + 6x_2$$

Шу функциянинг чекланиш тенгсизликлари системаси

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geqslant 9, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 8, \\ x_1 + 6x_2 &\geqslant 12, \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

ни қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Ечиш. Аввалги масаламиздагидек, чекланиш тенгсизликларининг ҳар бирига мос келувчи чегаравий тўғри чизиқларнинг, яъни

$$\left.\begin{aligned} l_1 &: 3x_1 + x_2 = 9, \\ l_2 &: x_1 + 2x_2 = 8, \\ l_3 &: x_1 + 6x_2 = 12, \; x_1 = 0, \; x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

нинг кесишишидан ҳосил бўлган кўпбурчакни ҳосил қиламиз (21-расм) 21-расмдан кўриниб турибдики, бу кўпбурчак юқоридан чегараланмаган кўпбурчакдир. Бу кўпбурчакнинг учки нуқталари A, B, C ва D нуқталардир. Энди 21-расмда кўрсатилган $\vec{N} = (4,6)$ векторнинг йўналиши бўйича

$$4x_1 + 6x_2 = 0$$

тўғри чизиқни ўзига параллел равишда кўчирсак, у B нуқтада чегараланмаган кўпбурчакка таянч тўғри чизиқ бўлади.

B нуқта эса l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидир. Шунинг учун, B нуқтанинг координаталари

$$\begin{aligned} 3x_1^{(0)} + x_2^{(0)} &= 9, \\ x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)} &= 8 \end{aligned}$$

тенгламалар системасининг ечимлари $x_1^{(0)} = 2$, $x_2^{(0)} = 3$ лардан иборатдир. Бу қийматларни мақсад функцияга қўйсак

$$Z = 4x_1^{(0)} + 6x_2^{(0)} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, ҳар куни 26 тийиндан иборат бўлган энг кам харажат сарфлаш учун биринчи озуқа O_1 дан 2 кг ва иккинчи озуқа O_2 дан 3 кг дан тайёрлашни планлаштириш зарур экан.

Чекланиш шартлари n номаълумли m та тенгламалар системасидан иборат бўлган чизиқли программалаштириш масалаларини график усулда ечиш.

Биз ҳозиргача чекланиш шартлари икки номаълумли m та тенгсизликлар системасидан иборат бўлган чизиқли программалаштириш масалаларини график усулда ечилишини кўрдик. Бу усул билан чекланиш шартлари n номаълумли m та тенгламалар системасидан иборат бўлган чизиқли программалаштириш масалаларини $n-m=2$ бўлганда ҳам ечиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бизга ушбу

$$Z_{\min}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{4.1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,\ n,\ n-m&=2 \end{aligned}\right\} \tag{4.1.5}$$

чизиқли программалаштириш масаласи берилган бўлсин. Кўриниб турибдики, (4.1.5) да номаълумлар сони тенгламалар сонидан 2 та кўпдир, яъни $n=m+2$. Шунинг учун, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларни эрксиз ўзгарувчилар, x_{m+1}, x_{m+2} ларни эса эркли ўзгарувчилар деб қабул қиламиз. (4.1.5) системани эрксиз ўзгарувчиларга нисбатан Гаусс усули билан ечсак, қуйидагига эга буламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b_1'-a'_{1,m+1}x_{m+1}-a'_{1,m+2}x_{m+2},\\ x_2&=b'-a_{2,m+1}x_{m+1}-a'_{2,m+2}x_{m+2}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_m&=b'_m-a'_{m,m+1}x_{m+1}-a_{m,m+2}x_{m+2} \end{aligned}\right| \tag{4.1.6}$$

Энди (4.1.6) ни (4.1.4) га қўйсак, мақсад функциямиз қуйидаги

$$Z_{\min}=c_0'+c'_{m+1}x_{m+1}+c'_{m+2}x_{m+2} \tag{4.1.7}$$

куринишга келади. Ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари, яъни $x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,n}$ ни назарда тутсак (4.1.6) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} a'_{1,m+1}x_{m+1}+a'_{1,m+2}x_{m+2}&\leqslant b'_1,\\ a'_{2,m+1}x_{m+1}+a'_{2,m+2}x_{m+2}&\leqslant b'_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a'_{m,m+1}x_{m+1}+a'_{m,m+2}x_{m+2}&\leqslant b'_m\\ x_{m+1}\geqslant 0,\ x_{m+2}&\geqslant 0 \end{aligned}\right| \tag{4.1.8}$$

(4.1.7) — (4.1.8) масалани график усулда ечамиз. Чекланиш тенгсизликлари (4.1.8) ни қаноатлантириб, мақсад функция (4.1.7) га минимум берувчи оптимал ечим x_{m+1}, x_{m+2} ни топиб, (4.1.6) га қўйсак, (4.1.4) функцияга минимум берувчи $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг ҳам оптимал қийматларини топган бўламиз;

Мисол. График усул билан

$$Z=2x_1-x_2+x_3-3x_4+4x_5 \tag{4.1.9}$$

функциянинг чекланиш шартлари

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 &= -4,\\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 &= 22,\\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 &= 38\\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,5} \end{aligned}\right|$$

ни қаноатлантирадиган максимуми топилсин.

Ечиш. Чекланиш тенгламаларини x_1, x_2 ва x_3 ларга нисбатан Гаусс усули билан ечсак,

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 3x_5 &= 6,\\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 &= 70,\\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= 20 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Бу ердан

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - x_4 + 3x_5,\\ x_2 &= 70 - 7x_4 - 10x_5,\\ x_3 &= 20 + 4x_4 - 5x_5. \end{aligned}$$

ларни топиб, мақсад функция (4.1.9) га қўйсак,

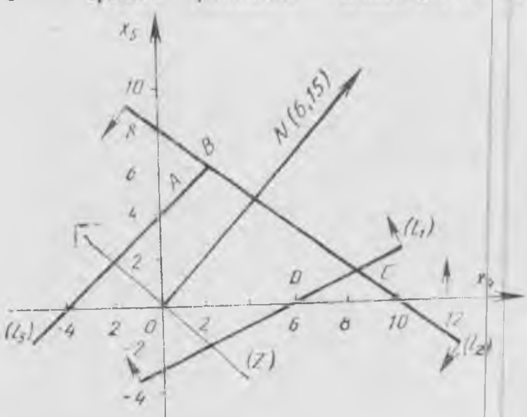
$$Z = 6x_4 + 15x_5 - 38 \tag{4.1.10}$$

ни ҳосил қиламиз. Ечимларнинг манфий бўлмаслик шартлари $x_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1,5})$ ни назарда тутсак,

$$\left.\begin{aligned} x_4 - 3x_5 &\leqslant 6,\\ 7x_4 + 10x_5 &\leqslant 70,\\ -4x_4 + 5x_5 &\leqslant 20\\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 &\geqslant 0 \end{aligned}\right| \tag{4.1.11}$$

тенгсизликлар системасини ҳосил қиламиз. Энди (4. 1. 10) функциянинг чекланиш тенгсизликлари (4 1.11) ни қаноатлантирадиган максимумини график усул билан топамиз. Бунинг учун, $x_4\,Ox_5$ текисликда ўринли ечимлар тўплами бўлган кўпбурчакни кўриб чиқамиз. Бу кўпбурчак

$$\left.\begin{aligned} l_1:&\ x_4 - 3x_5 = 6,\\ l_2:&\ 7x_4 + 10x_5 = 70,\\ l_3:&\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{aligned}\right|$$



22· расм.

туғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлади (22-расмга қаранг). 22-расмдан кўриниб турибдики, мақсад функция (4.1.10) ўзининг энг катта қийматига B нуқтада эришади. B нуқтанинг координаталари эса

$$\begin{aligned} 7x_4^{(0)} + 10x_5^{(0)} &= 70, \\ -4x_4^{(0)} + 5x_5^{(0)} &= 20 \end{aligned}$$

тенгламалар системасининг ечимлари: $x_4^{(0)}=2$, $x_5^{(0)}=28/5$ лардир.

$x_4^{(0)}$ ва $x_5^{(0)}$ ларнинг бу қийматларини (4.1.10) га қўйсак, мақсад функциянинг энг катта қиймати

$$Z = 6 \cdot 2 + 15 \cdot \frac{28}{5} - 38 = 12 + 84 - 38 = 58$$

эканлигига ва берилган масаланинг оптимал ечими эса $x_1 = 104/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{28}{5}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Машқлар. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалалари график усулда ечилсин.

1. $Z_{\max} = x_1 + 1{,}5x_2$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

2. $Z_{\min} = 2x_1 + 5x_2$
$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\geqslant 14, \\ 5x_1 + 6x_2 &\leqslant 30, \\ 3x_1 + 8x_2 &\geqslant 24 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

3. $Z_{\max} = x_1 + x_2$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

4. $Z_{\min} = x_1 - x_2$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 1, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant \frac{1}{2} \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

5. $Z_{\max} = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 &= 13, \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 &= 20. \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 &= 19, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}\right\}$$

6. $Z_{\min} = x_1 + 2x_3 + x_5$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leqslant 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &\leqslant 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &\leqslant 1, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,5}. \end{aligned}\right\}$$

4.2-§. Симплекс усул

Биз юқорида кўриб ўтган график усулда икки ўлчовли, ёки қандайдир усул билан икки ўлчовлига келтириладиган чизиқли программалаштириш масалаларинигина ечиш мумкин. Бироқ, амалда шундай масалалар учрайдики, бу масалани ечиш учун n ўлчовли чизиқли программалаштириш масалаларини ечишни талаб қилади. $n>2$ бўлганда чизиқли программалаштириш масалаларини ечишнинг умумий усули *симплекс усулидир* Энди шу усул билан танишамиз. Бу усул чекланиш шартлари тенгламалар системаси шаклида берилган чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш учун қўлланилади.

Бизга $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (4.2.1)

функциянинг чекланиш тенгламалари системаси

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_i, \quad x_j \geqslant 0, \quad i=\overline{1,m} \tag{4.2.2}$$

ни қаноатлантирадиган минимумини симплекс усули билан топиш талаб қилинган бўлсин.

Бу масалада чекланиш тенгламалари $x_1, x_2, \dots, x_m$ номаълумларга нисбатан бирорта усул билан ечилган, яъни

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b'_1-(a'_{1m+1}x'_{m+1}+a_{1m+2}x_{m+2}+\dots+a'_{1n}x_n), \\ x_2 = b'_2-(a'_{2m+1}x_{m+1}+a'_{2m+2}x_{m+2}+\dots+a'_{2n}x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = b'_m-(a'_{m\,m+1}x_{m+1}+a'_{m\,m+2}x_{m+2}+\dots+a'_{mn}x_n) \end{array}\right| \tag{4.2.3}$$

бўлсинки, бунда $b'_1 \geqslant 0,\ b' \geqslant 0, \dots,\ b'_m \geqslant 0$ шартлар ҳам бажарилсин.

Мақсад функция (4.2.1) ни (4.2.3) дан фойдаланиб қуйидаги

$$Z=c'_0-(c'_{m+1}x_{m+1}+c'_{m+2}x_{m+2}+\dots+c'_nx_n) \tag{4.2.4}$$

кўринишга келтирамиз ва бу чизиқли функциянинг минимумини топамиз. (4.2.3) нинг чап томонидаги $x_1, x_2, \dots, x_m$ номаълумлар тўплами чизиқли программалаштириш масаласининг *базиси* дейилади ва у

$$Б=\{x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0\}$$

кўринишда белгиланади, $x_1, x_2, \dots, x_m$ лар *базис* номаълумлар $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ лар эса *озод номаълумлар* дейилади. $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ озод номаълумларга $x_{m+1}=x_{m+2}=\dots=x_n=0$ қийматлар берсак, (4.2.3) дан $x_1=b'_1 \geqslant 0,\ x_2=b'_2 \geqslant 0, \dots,\ x_m = b'_m \geqslant 0$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб базис ечим деб аталган ушбу

$$Б_1=\{b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots 0\} \tag{4.2.5}$$

ўринли ечим ҳосил бўлади. Z нинг бу ечимдаги қиймати қуйидагига тенг:

$$Z(Б_1)=c'_0.$$

Бу масалада икки ҳол рўй бериши мумкин:

I. (4.2.4) да ҳамма $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n$ сонлар манфий, у ҳолда (4.2.4) $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$ шартда $Z(Б_1) = c'_0$ минимум қийматга эришади, яъни (4.2.5) базис ечим оптимал ечим бўлади, чунки бирор $c'_j < 0$, ва $x_j \geqslant 0$ учун $-c'_j x_j > 0$ бўлади. Демак, $Z = c'_0 - c'_j x_j > c'_0$ бўлади.

II. (4.2.4) даги $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n$ сонлар орасида мусбатлари бор. Масалан, $c'_j > 0$ дейлик, у вақтда $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0$, $x_j \geqslant 0$ деб олиб, x_j нинг қийматини орттира бориш ҳисобига $Z = c'_0 - c'_j x'_j$ нинг қийматини камайтириш мумкин. Бу ҳолда (4.2.3) дан келиб чиқадиган қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1j} x_j, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2j} x_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = b'_m - a'_{mj} x_j \end{array}\right| \qquad (4.2.6)$$

тенгламалардаги $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг бирортаси ҳам манфий бўлмаслиги керак.

Бу ерда ҳам икки ҳол рўй беради:

а) (4.2.6) да $a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}$ сонларнинг ҳаммаси мусбат эмас. $x_j \geqslant 0$ учун $-a'_{kj} x_j \geqslant 0$ $(k = \overline{1,m})$ бўлганидан $x_k = b'_k - a'_{kj} x_j \geqslant b'_k > 0$ дир.

Демак, $Z = c'_0 - c'_j x_j$ да $c'_j > 0$ ва $x_j \geqslant 0$ бўлгани учун x_j ни чексиз орттира бориш билан $\min Z = -\infty$ эга бўламиз. Бундан эса, мақсад функция Z минимумга эришмаслиги келиб чиқади.

б) (4.2.6) даги $a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}$ сонлар орасида мусбатлари бор. Масалан, $a'_{kj} > 0$ бўлсин. У ҳолда $x_k = b'_k - a'_{kj} x_j$ да x_j га $\frac{b'_k}{a'_{kj}}$ дан катта қиймат бериш мумкин эмас, акс ҳолда $x_k < 0$ бўлиб қолади. Бунда $\frac{b'_k}{a'_{kj}} \geqslant 0$ эканлиги равшан. Бундай касрлар орасида энг кичиги $\frac{b_l}{a_{lj}}$ бўлиб, a'_{lj} сон ҳал қилувчи элементдир. Қисқалик учун $\frac{b_l}{a_{lj}}$ белгилаш киритамиз. (4.2.6) да x_j ни ρ гача орттира оламиз, акс ҳолда $x_l < 0$ бўлишини кўрдик. Озод номаълумларга

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0, \; x_j = \rho \qquad (4.2.7)$$

қийматларни бериб, базис номаълумларни қуйидагидан аниқлаймиз.

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= b'_1 - a'_{1j}\rho \\
x_2 &= b'_2 - a'_{2j}\rho \\
&\dots\dots\dots \\
x_l &= b'_l - a'_{lj}\rho \\
&\dots\dots\dots \\
x_m &= b'_m - a'_{mj}\rho
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2.8)
$$

Энди янги $Б_2$ базисга ўтамиз:

$$Б_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, 0, 0, \dots, 0\}.$$

Бу базис ечим (4.2 7) ва (4.2.8) дан тузилади ва унга мос $Z(Б_2)$ нинг қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$Z(Б_2) = c'_0 - c'_j\rho \leqslant z(Б_1), \ c'_j > 0.$$

Энди (4.2.3) система ва мақсад функция (4.2.4) ни янги базис $Б_2$ га мослаб ёзамиз. Бунинг учун (4.2.3) даги

$$x_l = b'_l - (a'_{lm+1}x_{m+1} + \dots + a'_{lj}\, x_j + \dots + a'_{ln}x_n)$$

тенгламани x_j га нисбатан ечамиз:

$$x_j = \frac{b'_l}{a_{lj}} - \left(\frac{a'_{lm+1}}{a_{lj}}\, x_{m+1} + \frac{a'_{lm+2}}{a'_{lj}}\, x_{m+2} + \dots + \frac{1}{a'_{lj}}\, x_l + \dots + \frac{a'_{ln}}{a'_{lj}}\, x_n\right)$$

ва бу ифодани (4.2.3) нинг қолган тенгламаларига қўямиз. Ҳосил бўлган янги системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= b''_1 - (a''_{1\,m+1}x_{m+1} + a''_{1\,m+2}x_{m+2} + \dots + a''_{1l}x_l + \dots + a''_{1n}x_n), \\
x_2 &= b''_2 - (a''_{2\,m+1}x_{m+1} + a''_{2\,m+2}x_{m+2} + \dots + a''_{2l}x_l + \dots + a''_{2n}x_n), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_j &= b''_j - (a''_{jm+1}x_{m+1} + a''_{jm+2}x_{m+2} + \dots + a''_{jl}x_l + \dots + a''_{jn}x_n), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_m &= b''_m - (a''_{m\,m+1}x_{m+1} + a''_{m\,m+2}x_{m+2} + \dots + a''_{ml}x_l + \dots + a''_{mn}x_n)
\end{aligned}\right\} \quad (4.2.9)
$$

Бу базиснинг ифодаларини (4.2.4) га қўйиб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$Z = c''_0 - (c''_{m+1}x_{m+1} + c''_{m+2}x_{m+2} + \dots + c''_l x_l + \dots + c''_n x_n), \qquad (4.2.10)$$

Шу билан процесснинг биринчи босқичи тугади. Кейинги босқич, яна шу биринчи босқични яъни (4.2.10) ва (4.2.9) га нисбатан I ва II ҳолни, ундан кейин IIа ва IIб ни такрорлашдан иборат бўлади ва ҳ. к.

Шундай қилиб, симплекс усул қуйидаги процессни ифодалайди:

1. Чекланиш тенгламалари системаси (4.2.2) ни (4.2.3) кўринишга, мақсад функция (4.2.1) ни эса (4.2.4) кўринишга келтирамиз.

2. Агар (4.2.4) ва барча $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n$ коэффициентлар манфий бўлса, $Б_1$ базиснинг $\{b', b'_2, \ldots, b'_m, 0, 0, \ldots, 0\}$ ечими оптимал бўлиб, бу ечимда $Z(Б_1) = c'_0$ минимумга эришади.

3. (4.2.4) $c'_{m+1}, c'_{m+2}, \ldots, c'_n$ лар орасида мусбатлари мавжуд, масалан, $c'_j > 0$ десак, $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0$, $x_j > 0$ қийматларда 4.2.3 система 4.2.6 кўринишни олади. Агар (4.2.6) да барча $a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}$ коэффициентлар мусбат бўлмаса, $\min Z = -\infty$ келиб чиқади, яъни Z функция минимумга эришмайди.

4. (4.2.6) даги a_{kj}, $k = \overline{1,m}$ коэффициентларнинг мусбатлари мавжуд, яъни $a'_{2j} > 0$ десак, $\frac{b_{r'}}{a'_{rj}}$ сонлар орасида энг кичиги бўлган $\frac{b'_l}{a'_{lj}}$ ни оламиз. (4.2.3) системанинг x_l га нисбатан ёзилган тенгламасидан x_j ни аниқлаб, (4.2.3) системани янги $Б_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0\}$ базис ечимга нисбатан ёзиб (4.2.9) ни ҳосил қиламиз, мақсад функция (4.2.4) ни эса (4.2.10) кўринишда ифодалаймиз. Янги номаълумлар $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_l, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$ дан иборат бўлади. Юқорида баён этилган процесс (4.2.10) ва (4.2.9) га нисбатан яна такрорланади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 13 \\ 3x_2 + x_5 &= 15 \\ 3x_1 + x_6 &= 18 \end{aligned}\right| \qquad (4.2.11)$$

системанинг мусбат ечимлари орасидан

$$Z = -7x_1 - 5x_2 \qquad (4.2.12)$$

функцияга минимум берувчи ечимини топинг.

Ечиш. (4.2.11) системани x_3, x_4, x_5 ва x_6 номаълумларга нисбатан ечамиз, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 &= 13 - 2x_1 - x_1, \\ x_5 &= 15 - 3x_2, \\ x_6 &= 18 - 3x_1. \end{aligned}\right| \qquad (4.2.13)$$

Бу ерда x_3, x_4, x_5 ва x_6 базис, x_1, x_2 озод номаълумлар. $x_1 = x_2 = 0$ да (4.2.13) дан $x_3 = 19$, $x_4 = 13$, $x_5 = 15$, $x_6 = 18$ келиб чиқади. Шундай қилиб, базис деб аталган қуйидаги

$$Б_1 = \{0, 0, 19, 13, 15, 18\}$$

ўринли ечимга эга бўламиз. (4.2.12) функциянинг бу ечимга мос қиймати $Z(Б_1) = -7{,}0 - 5, 0 = 0$ бўлади. (4.2.12) дан кўриниб турибдики, x_1 ва x_2 нинг қийматлари ортиши билан Z камаяди. Яна (4.2.12) дан $5x_2$ га нисбатан $-7x_1$ да Z ни тезроқ камайишини кўрамиз. Шу сабабли $x_2=0$, $x_1>0$ деб олиб x_1 га $x_1=6$ қиймат берамиз ($x_1>6$) бўлганда (4.2.13) да $x_3>0$, $x_4>0$, $x_5>0$ ва $x_6<0$ бўлиб қолади, аммо биз (4.2.13) нинг мусбат ечимларинигина топишимиз керак. У ҳолда $x_2=0$, $x_1=6$ қийматларда $x_3>0$, $x_4>0$, $x_5>0$ ва $x_6=0$ келиб чиқади.

Энди янги x_1, x_3, x_4, x_5 базисга ўтиш қулай бўлиб, (4.2.13) ни x_1, x_3, x_4, x_5 га нисбатан ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 6-\frac{1}{3}x_6,\\ x_3 &= 7+\frac{2}{3}x_6-3x_2,\\ x_4 &= 1+\frac{2}{3}x_6-x_2\\ x_5 &= 15-3x_2 \end{aligned}\right| \qquad (4.2.14)$$

(4.2.12) нинг бунга мос ифодаси

$$Z=42+\frac{7}{3}x_6-5x_2 \qquad (4.2.15)$$

бўлади. (4.2.14) дан $x_6=0$, $x_2=0$ бўлганда қуйидаги ўринли ечимга эга бўламиз:

$$Б_2=\{6;\ 0;\ 7;\ 1;\ 15;\ 0\},$$

бу ечим янги базис ечим дейилади. (4.2.15) нинг бу ечимга мос келадиган қиймати $Z(Б_2)=42$ бўлади. (4.2.15) да x_2 ортганда Z камаяди, лекин x_6 ортганда Z ҳам ортади. Шунинг учун $x_6=0$ ва $x_2\leqslant 1$ деб оламиз, чунки $x_2>1$ шартда (4.2.14) нинг учинчи тенгламасидан $x_4<0$ эканлиги келиб чиқади, x_1, x_2, x_3, x_5 базисга ўтиш учун (4.2.14) дан ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 6-\frac{1}{3}x_6,\\ x_2 &= 1+\frac{2}{3}x_6-x_4,\\ x_3 &= 4-\frac{4}{3}x_6+3x_4,\\ x_5 &= 12-2x_6+3x_4, \end{aligned}\right| \qquad (4.2.16)$$

бунинг иккинчи тенгламасини (4.2.15) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз.

$$Z=-47+5x_4-x_6 \qquad (4.2.17)$$

$x_4=0$, $x_6=0$ бўлганда (4.2.16) дан янги базис ечим:

$$Б_3=\{6;\ 1;\ 4;\ 0;\ 12;\ 0\}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ечимда $Z(Б_3)=47$. Энди (4.2.17) га эътибор берсак, x_6 ортганда Z нинг камайишини кўрамиз. Бироқ $x_4 = 0$ да $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$ шартлар бузилмаслиги учун (4.2.16) да x_6 ни 3 гача орттиришимиз мумкин, чунки $x_6 > 3$ бўлганда x_3 0 бўлиб қолади. $x_6 = 3$ бўлганда $x_3 = 0$ бўлгани учун x_1, x_2, x_5, x_6 базисга ўтиш учун (4.2.16) дан ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$x_6 = 3 + \frac{9}{4} x_4 - \frac{3}{4} x_3$$

Бу ифодани (4.2.17) га қўйсак, мақсад функция қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Z = -50 + \frac{3}{4} x_3 + \frac{11}{4} x_4 \qquad (4.2.18)$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 0$ бўлганда (4.2.16) дан $Б_4 = \{5; 3; 0; 0; 6; 3\}$ ни ҳосил қиламиз. Бу ечимда Z нинг қиймати $Z(Б_4) = -50$ га тенг бўлади. (4.2.18) да x_3 ва x_4 нинг коэффициентлари мусбат сонлар бўлгани учун Z ни ортиқча камайтириб бўлмайди, демак, $Z(Б_4) = -50$ оптимал ечим экан. Ҳақиқатан ҳам,

$$Z(Б_1) < Z(Б) < Z(Б_3) < Z(Б_4) = -50.$$

Машқлар. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалалари симплекс усулда ечилсин.

1. $Z_{\min} = x_4 - x_5$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5, \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,5 \end{array}\right|$$

2. $Z_{\min} = -x_1 - 2x_2$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 > 0,\ x_2 > 0. \end{array}\right|$$

3. Ушбу

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,4} \\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \end{array}$$

масала учун $Z(Б_1)$ нинг қиймати ҳисоблансин.

4. $Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 - x_3$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3\text{[illegible]} = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \text{[illegible]} \\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array}\right|$$

5. $Z_{\min} = x_3 - 2x_1 + x_2$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 15, \\ x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,4} \end{array}\right|$$

4.3-§. Симплекс жадваллар усули

Чизиқли программалаштириш масаласининг ечимини Симплекс усули билан топиш бир неча босқичдан иборат эканлигини биз юқорида кўриб ўтдик. Бу усулнинг асосий қийинчилиги ҳар бир босқичда янги базисга нисбатан мақсад функция ва чекланиш шартларини қайтадан ёзиб чиқишдан иборатдир. Агар шу босқичларнинг ҳаммаси симплекс жадваллар ёрдамида бажарилса, чизиқли программалаштириш масаласини симплекс усули билан ечиш анча осонлашади.

Буни қуйидаги масалада кўриб чиқамиз:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a'_{1m+1} x_{m+1} + \dots + a'_{1j} x_j + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1,\\
&x_2 + a'_{2m+1} x_{m+1} + \dots + a'_{2j} x_j + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_i + a'_{im+1} x_{m+1} + \dots + a'_{ij} x_j + \dots + a'_{in} x_n = b'_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_m + a'_{mm+1} x_{m+1} + \dots + a'_{mj} x_j + \dots + a'_{mn} x_n = b'_m
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, n},\ b_s \geqslant 0,\ s = \overline{1, m}.$$

$$Z_{\min} + c'_{m+1} x_{m+1} + c'_{m+2} x_{m+2} + \dots + c'_j x_j + \dots + c'_n x_n = c'_0 \tag{4.3.2}$$

Фараз қилайлик, $c_j > 0$ бўлганда ҳал қилувчи элемент учун a'_{ij} танланган бўлсин. (4.3.1) да $x_1, x_2, \dots x_i, \dots, x_m$ — базис номаълумлар, $x_{m+1}, \dots, x_j, \dots, x_n$ — озод номаълумлардир. $c'_j > 0$ бўлганлиги учун мақсад функция (4.3.2) га минимум қиймат берувчи оптимал ечимни топиш учун $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ базисдан янги $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_m$ базисга ўтишимиз ва шу янги базисга нисбатан чекланиш шартлари (4.3.1) ни

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a''_{1m+1} x_{m+1} + \dots + a''_{1i} x_i + \dots + a''_{1n} x_n = b''_1,\\
&x_2 + a''_{2m+1} x_{m+1} + \dots + a''_{2i} x_i + \dots + a''_{2n} x_n = b''_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_j + a''_{jm+1} x_{m+1} + \dots + a''_{ji} x_i + \dots + a''_{jn} x_n = b''_j,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_m + a''_{mm+1} x_{m+1} + \dots + a''_{mi} x_i + \dots + a''_{mn} x_n = b''_m
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

кўринишда, мақсад функция (4.3.2) ни эса

$$Z_{\min} + c''_{m+1} x_{m+1} + \dots + c''_j x_i + \dots + c''_n x_n = c''_0 \tag{4.3.4}$$

кўринишда ёзиб оламиз. (4.3.1) — (4.3.2) ни Симплекс жадвал деб юритилувчи жадвалда қуйидагича ёзиш мумкин:

4.1- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	...	x_l	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1'	1	0	...	0	...	0	a_{1m+1}'	...	a_{1j}'	...	a_{1n}'
x_2	b_2'	0	1	...	0	...	0	a_{2m+1}'	...	a_{2j}'	...	a_{2n}'
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_l	b_l'	0	0	...	1	...	0	$a_{l\,m+1}'$	...	$\boxed{a_{lj}'}$	...	a_{ln}'
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	b_m'	0	0	...	0	...	1	a_{mm+1}'	...	a_{mj}'	...	a_{mn}'
Z	c_0'	0	0	...	0	...	0	c_{m+1}'	...	c_j'	...	c_n'

4.1- жадвалнинг x_1 дан бошланувчи сатрида (4.3.1) системадаги биринчи тенгламанинг озод ҳади ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар, x_2 дан бошланувчи сатрида эса иккинчи тенгламанинг озод ҳади ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар жойлаштирилган ва ҳоказо. Z дан бошланувчи охирги сатрида эса (4.3.2) тенгликдаги озод ҳад ва номаълумлар олдидаги коэффициентлар жойлаштирилган. Худди шу усул билан (4.3.3) — (4.3.4) масалага мос келувчи жадвални ҳам тузиш мумкин 4.1- жадвалдан фойдаланиб, 4.2- жадвал қуйидагича тузилади: Z га мос келувчи сатр элементлари орасида мусбатлари бўлса, шу элементларнинг энг каттаси жойлашган, яъни c_j' жойлашган устун

4.2- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	...	x_l	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n
x_1	b_1''	1	0	...	a_{1l}''	...	0	a_{1m+1}''	...	0	...	a_{1n}''
x_2	b''	0	1	...	a_{2l}''	...	0	a_{2m+1}''	...	0	...	a_{2n}''
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_j	b_j''	0	0	...	a_{jl}''	...	0	$a_{j\,m+1}''$	...	1	...	a_{jn}''
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	b_m''	0	0	...	a_{ml}''	...	1	a_{mm+1}''	...	0	..	a_{mn}''
Z	c_0''	0	0	...	c_l''	...	0	c_{m+1}''	...	0	...	c_n''

элементларидан мусбатини белгилаб оламиз, масалан, $a'_{kj} > 0$ бўлсин. Ажратилган мусбат a'_{kj} элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадлар b'_k нинг шу a'_{kj} ларга нисбатини тузамиз ва тузилган нисбатларнинг энг кичигини $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$ билан белгилаймиз, a'_{ij} — ҳал қилувчи элементдир. 4.1- жадвалда ҳал қилувчи элемент, a'_{ij} тўртбурчак ичига олинган, у турган устун ва сатр стрелкалар билан кўрсатилган.

Ҳал қилувчи a'_{ij} элемент 1 дан фарқли бўлса, уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун, шу элемент жойлашган сатрнинг барча элементларини a'_{ij} га бўлиш кифоя. Бунинг ўзи эса (4.3.1) да i тенгламани x_j га нисбатан ечиш билан тенг кучлидир. Энди 4.1- жадвал сатрларининг элементларини шундай ўзгартирамизки, ҳал қилувчи элемент турган устундаги шу элементдан бошқалари 0 га айлансин. Бунинг учун 4.1- жадвалнинг i- сатрини — a'_{kj}, $k = 1, m$, $k \neq i$ ва c'_j га кўпайтириб, мос равишда $k = 1, 2, 3, \ldots, m+1$, $k \neq i$ сатрларга қўшамиз. У ҳолда юқорида келтирилган 4.2- жадвал келиб чиқади. Юқорида келтирилган иш натижасида аввалги x_1, $x_2, \ldots x_i, \ldots, x_m$ базисдаги x_i ўрнига x_j келади ва 4.2- жадвалда кўрсатилгандек янги $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ базис ҳосил бўлади.

Агар 4.2- жадвалнинг охирги сатридаги барча c''_i, $c''_{m+1}, \ldots,$ c''_n лар манфий бўлса, $Z_{\min} = c''_0$ бўлади, акс ҳолда юқорида кўрсатилган усул билан 4.3- жадвал тузишга тўғри келади. Бу процесс оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг ечими мавжуд эмаслиги исботлангунга қадар давом эттирилади.

Агар бирорта К- жадвалда ҳал қилувчи элемент туриши мумкин бўлган устуннинг барча элементлари манфий бўлса $Z_{\min} = -\infty$ бўлиб, масала ечимга эга эмаслиги исботланган бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.5)$$

системанинг манфий бўлмаган ечимлари орасидан

$$Z = 0 + x_4 - x_5 \qquad (4.3.6)$$

функцияга минимум қиймат берувчи ечимни топинг.

Ечиш. (4.3.5) ва (4.3.6) ни жадвал тузиш учун

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_4 + x_5 &= 3, \\ Z - x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

куринишда ёзиб оламиз. (4.3.5) системаси x_1, x_2, x_3 га нисбатан осонгина ечиш мумкин. Шунинг учун бу номаълумларни (4.3.5) системанинг базис номаълумлари деб қабул қиламиз. Базис номаълумлар—x_1, x_2, x_3 ва Z ларни жадвалнинг биринчи устунига, озод ҳадларни иккинчи устунига, x_1 нинг коэффициентларини учинчи устунига ва ҳоказо x_5 нинг коэффициентларини охирги устунига ёзиб, қуйидаги 4.3-жадвалга эга буламиз:

4.3-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5 ↓
x_1	1	1	0	0	1	—2
→ x_2	2	0	1	0	—2	$\boxed{1}$
x_3	3	0	0	1	3	1
z	0	0	0	0	—1	1

Z дан бошланувчи охирги сатрда мусбат сон булганлиги учун Z ни камайтириш имконияти бор. Шунинг учун x_1, x_2, x_3 базисдан янги базисга утамиз. Бу иш жадваллар ёрдамида қуйидагича бажарилади:

1) Z дан бошланувчи охирги сатрда битта мусбат 1 сон бор. Бу мусбат сон биттагина булгани учун у жойлашган устунни ҳал қилувчи устун деб қараймиз (агар охирги сатрда мусбат сонлар иккита ва ундан ортиқ булса, уларнинг энг каттаси жойлашган устун ҳал қилувчи устун булади).

2) Ҳал қилувчи устундан мусбат элементларни оламиз. Улар иккита булиб, 2-ва 3-сатрларга жойлашган, агар битта булса, шу сонниг узи ҳал қилувчи элемент булади.

Ажратилган мусбат элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадларнинг шу сонларга нисбатларини тузамиз. Бу нисбатлар:

$\frac{2}{1}=2$ ва $\frac{3}{1}=3$ булади.

3) Тузилган нисбатлардан энг кичигининг махражи ҳал қилувчи элемент булади. 4.3-жадвалда ҳал қилувчи элемент туртбурчак ичига олинган ва шу элемент жойлашган сатр ва устун стрелка билан курсатилган.

4) Ҳал қилувчи элемент 1 га тенг булгани учун шу элемент турган сатрни 1 га булган билан бу сатр элементлари узича қолаверади.

5) 4.3-жадвалнинг ҳал қилувчи элемент турган иккинчи сатрини 2, — 1, — 1 га купайтириб, мос равишда 1 —, 3, — 4, —сатрларга қушсак, ҳал қилувчи элемент турган устунда шу элементлардан бошқалари 0 ларга айланади ва 4.4-жадвал келиб чиқади (4.4-жадвалга қаранг).

6) Юқоридагиларга асосан аввалги x_1, x_2, x_3 базисдаги x_2 урнига x_5 келади ва 4.4-жадвалда курсатилгандек, базисдаги

x_2 ўрнига x_5 келади ва 4.4- жадвалда кўрсатилгандек, янги x_1, x_5, x_3 базис ҳосил бўлади.

4.4- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	−3	0
→ x_2	2	0	1	0	−2	1
x_3	1	0	−1	1	$\boxed{5}$	0
Z	−2	0	−1	0	1	0

4.4- жадвалнинг Z дан бошланувчи охирги сатрида фақат битта мусбат элемент мавжуд. Бу устунда биттагина мусбат элемент бор. Уни ҳал қилувчи элемент деб ҳисоблаб, учинчи базисга ўтамиз. Бу иш натижаси қуйидаги 4.5- жадвалда келтирилган.

4.5- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
Z	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

4.5- жадвалнинг охирги сатрида бирорта ҳам мусбат элемент қолмади. Демак, топилган $\left\{\frac{28}{5};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right\}$ ечим оптимал бўлиб, унга мос келган Z нинг минимуми $-\frac{11}{5}$ га тенг, яъни $Z_{\min}=-\frac{11}{5}$.

Машқлар. Қуйидаги чизиқли программалаш масалалари Симплекс жадваллар усули билан ечилсин.

1. $Z_{\min}=x_1+6x_2-7x_3+x_4+5x_5$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1-4x_2-13x_3-2x_4+x_5=20, \\ x_1-x_2+5x_3-x_4+x_5=8, \\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,5} \end{array}\right\}$$

2. $Z_{\min}=2x_1+3x_2+\frac{5}{2}x_3$

$$\begin{array}{l} 2x_1+x_2+3x_3\leqslant 6, \\ 2x_1+4x_2+3x_3\leqslant 16, \\ 3x_1+4x_2+2x_3\leqslant 12, \\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,3} \end{array}$$

3. $Z_{\min} = -x_1 - x_2$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 2, \\ x_j \geqslant 0, \ j &= \overline{1,4} \end{aligned}\right\}$$

4. $Z_{\min} = x_4 - x_3 - x_2 - 2x_1$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 3, \\ x_j \geqslant 0, \ j &= \overline{1,4} \end{aligned}$$

5. $Z_{\min} = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_j \geqslant 0, \ j &= \overline{1,4} \end{aligned}\right|$$

6. $Z_{\min} = -x_1 - x_2 - x_3$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_j \geqslant 0, \ j &= \overline{1,3} \end{aligned}\right|$$

4.4-§. Сунъий базис усули

Чизиқли программалаштириш масалаларини симплекс усул билан ечиш учун чекланиш шартлари албатта базис номаълумларга нисбатан ечилган, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b'_1 - (a'_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{1n}x_n) \\ x_2 &= b'_2 - (a'_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{2n}x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= b'_m - (a'_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a'_{mn}x_n) \end{aligned}\right| \qquad (4.4.1)$$

бўлиши керак эканлигини биз юқорида кўриб ўтдик. Лекин, чекланиш тенгламалари системасида номаълумлар сони тенгламалар сонидан етарлича катта бўлганидан чекланиш шартларини (4.4.1) кўринишга келтириш анча меҳнат ва вақт талаб қилади. Бу масалани ечишнинг қулай усулларидан бири сунъий базис усулидир. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m, \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1,n}, \ \beta_i \geqslant 0, \ i &= \overline{1,m} \end{aligned}\right\} \qquad (4.4.2)$$

системанинг ечимлари орасидан

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \qquad (4.4.3)$$

функцияга минимум қиймат берувчи оптимал ечимни симплекс усул билан топиш талаб қилинган бўлсин. Чекланиш шартлари (4.4.2) базис номаълумларга нисбатан ечилмаган бўлгани учун, бу масалани тўғридан-тўғри симплекс усули билан ечиб бўлмайди. Шунинг учун, қуйидаги тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n), \\ y_2 &= \beta_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= \beta_m - (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n) \end{aligned}\right| \qquad (4.4.4)$$

билан аниқланадиган $y_1, y_2, \ldots, y_m$ сунъий номаълумлар киритамиз. Агар $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ бўлса, (4.4.4) системанинг ечимлари (4.4.2) системанинг ечимлари билан устма-уст тушишлиги ўз-ўзидан кўриниб турибди. Қуйидаги, ёрдамчи мақсад функциясини тузамиз:

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_m \tag{4.4.5}$$

ва унинг (4.4.4) шартни қаноатлантирадиган минимумини топамиз. (4.4.4) системада $y_1, y_2, \ldots, y_m$ лар базис номаълумлар бўлганлиги учун (4.4.4) — (4.4.5) масалани симплекс усули билан ечиш мумкин.

Шу усулни m марта қўллаш натижасида $y_1, y_2, \ldots, y_m$ сунъий номаълумлар қатнашмаган янги $x_1, x_2, \ldots, x_m$ базисга ўтамиз, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1' - (a_{1m+1}' x_{m+1} + \ldots + a_{1n}' x_n + a_{11}' y_1 + \ldots + a_{1m}' y_m), \\ x_2 &= b_2' - (a_{2m+1}' x_{m+1} + \ldots + a_{2n}' x_n + a_{21}' y_1' + \ldots + a_{2m}' y_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= b_m' - (a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n + a_{m1}' y_1' + \ldots + a_{mm}' y_m) \end{aligned}\right\} \tag{4.4.6}$$

Агар мана шу янги базисда $\min F > 0$ бўлса, қўйилган (4.4.2) — (4.4.8) масала $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ бўлганда $x_j \geqslant 0,\ j = \overline{1, h}$ шартни қаноатлантирадиган ечимга эга бўлмайди. Агар $\min F = 0$ бўлса, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots, 0\}$ базис ечим (4.4.4) — (4.4.5) масаланинг оптимал ечими бўлади. $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ бўлганда (4.4.6) дан $x_1, x_2, \ldots x_m$ базис номаълумларга нисбатан ечилган чекланиш шартларини ҳосил қиламиз. У ҳолда (4.4.3) қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Z = c_0 - (c_{m+1} x_{m+1} + c_{m+2} x_{m+2} + \ldots + c_n x_n)$$

Бу функциянинг

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_1 - (a_{1m+1} x_{m+1} + a_{1m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{1n} x_n), \\ x_2 &= b_2 - (a_{2m+1} x_{m+1} + a_{2m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{2n} x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= b_m - (a_{mm+1} x_{m+1} + a_{mm+2} x_{m+2} + \ldots + a_{mn} x_n), \end{aligned}\right|$$

шартни қаноатлантирадиган минимумини симплекс жадвал усули билан топиш мумкин, чунки чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилгандир.

Мисол. Ушбу $Z = x_1 + x_2 + 2x_3$ функциянинг чекланиш шартлари қуйидагича бўлиб:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 &= 1, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,4}. \end{aligned}$$

уни қаноатлантирадиган минимуми топилсин.

Ечиш. Чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилмаган бўлганлиги учун симплекс усулидан фойдаланиб бўлмайди. Бу масалани симплекс жадвал усули билан ечиш учун сунъий базис усулидан фойдаланамиз. y_1, y_2, y_3 сунъий номаълумлар ёрдамида бу масалага мос чизиқли программалаш масаласини қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 3-(x_1-x_3+4x_4), \\ y_2 &= 3-(2x_1-x_2), \\ y_3 &= 1-(3x_1-2x_2-x_4) \end{aligned}\right\}$$

Бу система учун манфий бўлмаган $x_j \geqslant 0$, $j=\overline{1,4}$ ларни ва қуйидаги

$$F = y_1 + y_2 + y_3$$

ёрдамчи мақсад функцияга минимум қиймат берувчи y_1, y_2, y_3 ларни топамиз.

Бошланғич жадвалда базис номаълумлар учун y_1, y_2, y_3 ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 + x_1 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ & y_2 + 2x_1 - x_2 = 3 \\ & y_3 + 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 1 \\ & F + 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ & Z - x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}\right|$$

Бу масалага мос симплекс жадвал қуйидагича бўлади:

4.6-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y_1	3	1	0	−1	4	1	0	0
y_2	3	2	−1	0	0	0	1	0
→ y_3	1	$\boxed{3}$	−2	0	−1	0	0	1
F	7	6	−3	−1	3	0	0	0
Z	0	−1	−1	−2	0	0	0	0

Симплекс жадвалларнинг биридан иккинчисига кетма-кет ўтиб, қуйидаги жадвалларни тузамиз (4.6 — 4.9- жадваллар)

4.7- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y_1	$\frac{8}{3}$	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	-1	$\frac{13}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$
y_2	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
F	5	0	1	-1	5	0	0	-2
Z	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$

4.8- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x_2	4	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_2	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
x_1	3	1	0	-1	4	1	0	$\frac{2}{3}$
F	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$
Z	$\frac{21}{3}$	0	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

4.9-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x_2	7	0	1	0	2	0	3	−1
x_3	2	0	0	1	−3	−1	2	−1
x_1	5	1	0	0	1	0	2	$\frac{5}{3}$
F	0	0	0	0	−0	−1	−1	−1
Z	16	0	0	0	−3	−2	9	−4

Охирги жадвалда F дан бошланувчи сатрда мусбат элеменг мавжуд эмас. Демак, топилган $\{5; 7; 2; 0; 0; 0;\}$ ечим оптимал ечим бўлади, чунки бу ечимда $F = 0$. Демак, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ да $Z = 16 + 3x_4$ бўлиб, $Б = \{5; 7; 2; 0\}$ бўлади.

Бу базис ечим мақсад функция Z га ҳам эга энг кичик қиймат беради, яъни $Z(Б) = 16$, чунки Z дан бошланувчи сатрда номаълумлар x_1, x_2, x_3, x_4 ларни биронтасининг ҳам олдидаги коэффициентлари мусбат эмас. Шунинг учун, мақсад функцияни бошқа камайтириш имконияти йўқ, акс ҳолда 4.9- жадвалда y_1, y_2, y_3 лардан бошланувчи устунлар ва F дан бошланувчи сатрни олиб ташлаб, симплекс жадвал тузишни давом эттирган бўлар эдик.

4.5- §. Чизиқли программалаштиришнинг ўзаро икки ёқлама масалалари

Ҳар қандай чизиқли программалаштириш масаласига, унга ўзаро икки ёқлама бўлган бошқа бир чизиқли программалаштириш масаласи тўғри келади. Берилган дастлабки (бошланғич) масала билан унга нисбатан икки ёқлама бўлган масала ўртасида бевосита боғланиш бор, яъни бирининг ечимидан иккинчисининг ечимини топиш мумкин.

Берилган дастлабки масала ва унга нисбатан ўзаро икки ёқлама бўлган масала ҳам бирон-бир иқтисодий жараённи ифода этади. Масалан, ресурслардан фойдаланиш масаласини кўриб ўтайлик. Бирор бир корхона миқдори $b_i (i = \overline{1, m})$ бирликка тенг бўлган m хил ресурсларга эга бўлиб, бу ресурслардан n хил маҳсулот ишлаб чиқариш учун фойдаланадиган бўлсин: j бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун i хилдаги ресурсдан a_{ij} бирлик сарфлансин. Маҳсулот бирлигининг нархи c_j бирликка тенг бўлсин. Корхонанинг энг кўп даромад олиш масаласини таъминлайдиган планини тузишнинг математик модели қурилсин. j- хилдаги маҳсулот бирлигининг миқдорини x_j билан белгиласак, қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (4.5.1)$$

функциянинг чекланиш тенгсизликлари системаси

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \ i = \overline{1,\ m} \\ x_j \geqslant 0, \ j = 1,\ n \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.2)$$

ни қаноатлантирадиган максимумини топинг.

Энди (4.5.1) — (4.5.2) масалага нисбатан икки ёқлама бўлган масаланинг математик моделини қўрамиз. Бунинг учун $y_i\ (i = \overline{1,\ m})$ билан i хилдаги ресурс бирлигининг нархини белгилаймиз, у ҳолда ҳар бир j бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф бўлган ресурснинг нархи

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

га тенг бўлади. Сарф қилинган ресурснинг нархи ишлаб чиқарилган маҳсулот нархидан ошиб кетмаслиги учун

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad (j = \overline{1,\ n}) \qquad (4.5.3)$$

бўлиши керак. Иккинчи томондан, корхона $b_i\ (i = \overline{1,\ m})$ бирликка тенг бўлган ресурсга эга бўлгани учун сарф қилинган умумий ресурснинг нархи

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (4.5.4)$$

га тенг бўлади. Демак, (4.5 3) — (4.5 4) масала дастлабки (4.5.1) — (4.5.2) масалага нисбатан икки ёқлама масаланинг математик моделидир.

Бу масалани иқтисодий нуқтаи назардан қуйидагича талқин қилиш мумкин: ресурс миқдори b_i га тенг бўлиб, маҳсулот бирлигининг нархи C_j га тенг бўлганда ресурс бирлигининг нархи y_i ни умумий сарф энг кам бўладиган қилиб танлаш керак. Бошқача қилиб айтганда (4.5.4) функциянинг чекланиш шартлари (4.5.3) ни қаноатлантирадиган энг кичик қиймати топилсин.

Дастлабки масала (4.5.1) — (4.5.2) ни матрица формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Z_{\max} = CX$$
$$AX \leqslant B, \ X \geqslant 0,$$

икки ёқлама (4.5.3) — (4.5.4) масала эса қуйидаги кўринишга эга:

$$F_{\min} = B'Y$$
$$A'Y' \geqslant C, \ Y \geqslant 0$$

Матрица формада ёзилган дастлабки ва икки ёқлама масалаларнинг матрицалари ва векторлари бир-бирига нисбатан транспонирлангандир:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\ldots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\ldots a_{m2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad B'=(b_1,\ b_2,\ \ldots b_m),\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C=(c_1c_2\ldots c_n),\quad C'=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

4.6-§. Ўзаро икки ёқлама масалалар математик моделларининг турлари

Ўзаро икки ёқлама масалаларнинг математик моделлари икки хил бўлади:

1. Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалалар

Симметрик бўлмаган ўзаро икки ёқлама масалаларнинг дастлабки масаласида чекланиш шартлари тенгламалар системасидан иборат бўлиб, унга нисбатан икки ёқлама бўлган масаласида эса чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлади ва номаълумлар манфий қийматлар ҳам қабул қилиши мумкин бўлади.

Масалан:

а) Дастлабки масала	Икки ёқлама масала
$Z_{\min}=CX$	$F_{\max}=B'Y$
$AX=B$	$A'Y\leqslant C'$
$X\geqslant 0$	

б) Дастлабки масала	Икки ёқлама масала
$Z_{\max}=CX$	$F_{\min}=B'Y$
$AX=B$	$A'Y\geqslant C'$
$X\geqslant 0$	

2. Симметрик бўлган ўзаро икки ёқлама масалалар

Симметрик бўлган ўзаро икки ёқлама масалаларнинг дастлабки ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган масалаларида чекланиш шартлари тенгсизликлар системасидан иборат бўлиб, изланаётган номаълумлар, албатта, мусбат бўлиши керак. Масалан,

а) Дастлабки масала

$$Z_{\max}=CX$$
$$AX\leqslant B$$
$$X\geqslant 0$$

Икки ёқлама масала

$$F_{\min}=B'Y$$
$$A'Y\geqslant C'$$
$$Y\geqslant 0$$

б) Дастлабки масала

$$Z_{\min}=CX$$
$$AX\leqslant B$$
$$X\geqslant 0$$

Икки ёқлама масала

$$F_{\max}=B'Y$$
$$A'Y\leqslant C'$$
$$Y\geqslant 0$$

Мисоллар. 1. Дастлабки масала. Ушбу

$$Z=x_2-x_4-3x_5$$

функциянинг чекланиш тенгламалари системаси

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2-x_4+x_5&=1,\\ -4x_2+x_3+2x_4-x_5&=2,\\ 3x_2+x_5+x_6&=5,\\ x_j\geqslant 0,\quad j&=\overline{1,6} \end{aligned}\right|$$

ни қаноатлантирадиган минимуми топилсин ва бу масалага икки ёқлама масала тузилсин.

Ечиш. Дастлабки масалада

$C=(0;\ 1;\ 0;\ -1\ -3;\ 0)$

$$B=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}1&2&0&-1&1&0\\0&-4&1&2&-1&0\\0&3&0&0&1&1\end{pmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}$$

$$Z_{\min}=CX;\ AX=B;\ X\geqslant 0$$

бўлади. Дастлабки масала симметрик бўлмаган масалага тўғри келади. Шунинг учун а) пунктга асосан икки ёқлама масала қуйидагича бўлади:

$$F_{\max}=B'Y;\ A'Y\leqslant C'$$

Бу ерда

$$B=(1,\ 2,\ 5),\ C'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\\3\\0\end{bmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{array}{c} F = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ \left.\begin{array}{c} y_1 \leqslant 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 = 1, \\ y_2 \leqslant 0, \\ -y_1 + 2y_2 \leqslant -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \leqslant -3, \\ y_3 \leqslant 0 \end{array}\right| \end{array}$$

2. Ушбу дастлабки масалага икки ёқлама масала тузилсин.

$$Z_{\min} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leqslant -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 3 \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, 3} \end{array}\right|$$

3. Ушбу дастлабки масалага икки ёқлама масала тузилсин.

$$Z_{\max} = -4x_1 + 5x_2 + 6x_3$$

$$\begin{array}{r} -x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 2, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 5, \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1,3} \end{array}$$

4.7-§ Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремаси

Бизга қуйидаги дастлабки

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.7.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \ i = \overline{1, m} \\ x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n} \end{array}\right| \tag{4.7.2}$$

ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4.7.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leqslant c_j, \ \ j = \overline{1, n} \\ y_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, m} \end{array}\right| \tag{4.7.4}$$

масалалар берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. Дастлабки масала ечимга эга бўлса, унга икки ёқлама бўлган масала ҳам ечимга эга бўлади ва қуйидаги

$$\min Z = \max F$$

тенглик ўринли бўлади. Агар мана шу ўзаро икки ёқлама масаланинг бирортасида мақсад функция чегараланмаган бўлса, иккинчи масала ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Фараз қилайлик, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ дастлабки масаланинг $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_m^{(0)}$ эса унга нисбатан икки ёқлама бўлган масаланинг ўринли ечими бўлсин. У вақтда (4.7.1) — (4.7.2), (4.7.3) — (4.7.4) га ўринли ечимларни қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1^{(0)} + a_{i2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{in}x_n^{(0)} \geqslant b_i, \ i = \overline{1, m} \\ Z = c_1x_1^{(0)} + c_2x_2^{(0)} + \ldots + c_nx_n^{(0)} \end{array}\right| \quad (4.7.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{1j}y_1^{(0)} + a_{2j}y_2^{(0)} + \ldots + a_{mj}y_m^{(0)} \leqslant c_j, \ j = \overline{1, n} \\ F_0 = b_1y_1^0 + b_2y_2^{(0)} + \ldots + b_my_m^{(0)} \end{array}\right\} \quad (4.7.6)$$

(4.7.5) тенгсизликларни $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, . . . , y_m^0 га (4.7.6) тенгсизликларни $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, . . . , $x_n^{(0)}$ га кўпайтириб қўшсак, қуйидаги тенгсизликларга эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(0)}y_i^{(0)} \geqslant \sum_{i=1}^{m} b_iy_i^{(0)} = F_0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i^{(0)}x_j^{(0)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_jx_j^{(0)} = Z_0$$

Бу ердан

$$F_0 \leqslant Z_0 \quad (4.7.7)$$

эканлиги келиб чиқади.

Агар $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ ва y_1^0, y_2^0, ..., $y_m^{(0)}$ ечимлар ўринли ечимлар бўлса,

$$\max F = F_0, \ \min Z = Z_0$$

бўлади. У ҳолда (4.7.7) га асосан қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$$\max F \leqslant \min Z \quad (4.7.8)$$

Энди қуйидаги тенгсизликлар системасини кўриб чиқамиз:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leqslant c, \ \ j = \overline{1, n}, \ i = \overline{1, m} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j - \sum\limits_{i=1}^{m} b_iy_i = Z - F \leqslant 0 \end{array}\right| \quad (4.7.9)$$

Энди масалани аксинча қўямиз: (4.7.9) системанинг манфий бўлмаган $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ ечими дастлабки ва икки ёқлама масалалар учун бир жуфт оптимал ечим бўлишини кўриб чиқамиз.

(4.7.7) га асосан $F_0 \leqslant Z_0$ эканини биламиз, (4.7.9) системанинг охирги тенгсизлигига асосан $F_0 \geqslant Z_0$ ёки $\max F \geqslant \min Z_2$ бўлади, чунки $\max F = F_0$, $\min Z = Z_0$. Бундан ва (4.7.8) дан $\min Z = \max F$ эканлиги келиб чиқади. Охирги тенгликдан, дастлабки масала ечимга эга бўлса, унга нисбатан икки ёқлама масала ҳам ечимга эга бўлиши ва аксинча мулоҳазанинг тўғрилиги келиб чиқади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. Фараз қилайлик, икки ёқлама масалада мақсад функция юқоридан чегараланмаган, бўлсин, яъни $F \geqslant +\infty$, у ҳолда $Z \geqslant F$ бўлгани учун, $Z \geqslant +\infty$ бўлиб, бу ҳеч қандай маънога эга бўлмайди. Худди шунингдек, агар берилган масалада мақсад функция қуйидан чегараланмаган, яъни $Z \geqslant -\infty$ булса, $F \leqslant -\infty$ бўлиб, қўйилган масала маънога эга бўлмайди.

4.8-§. Ўзаро икки ёқлама симплекс усул

Дастлабки масаланинг ечимидан, унга нисбатан икки ёқлама масаланинг ёки икки ёқлама масаланинг ечимидан дастлабки масаланинг ечимини келтириб чиқаришга имкон берадиган симплекс усул *ўзаро икки ёқлама симплекс усул* дейилади. Бу усул ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асослангандир. Ўзаро икки ёқлама симплекс усулнинг асосий мазмуни қуйидагидан иборат:
бизга қуйидаги дастлабки

$$Z_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.8.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \ i = \overline{1, m}, \\ &x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, n} \end{aligned}\right\} \tag{4.8.2}$$

ва унга нисбатан икки ёқлама

$$F_{\max} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4.8.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \ j = \overline{1, n} \\ &y_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, m} \end{aligned}\right\} \tag{4.8.4}$$

масалалар берилган бўлсин. Дастлабки (4.8.1) — (4.8.2) ва унга нисбатан икки ёқлама бўлган (4.8.3) — (4.8.4) масалага симплекс усулни қўллаш учун чекланиш шартлари базис номаълумларга нисбатан ечилган, яъни

$$x_{n+i} = -b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad b_i \leqslant 0 \tag{4.8.5}$$

$$y_{m+j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + c_j, \quad c_j \geqslant 0 \tag{4.8.6}$$

кўринишда бўлиши керак. Бу ерда (4.8.5), (4.8.6) тенгламалар системаси (4.8.2) ва (4.8.4) тенгсизликлар системасидан қўшимча

$$x_{n+i} \geqslant 0, \ i = \overline{1, m}; \ y_{m+j} \geqslant 0, \ j = \overline{1, n}$$

номаълумларни киритиш натижасида келиб чиқади. (4.8.5) ва (4.8.6) да $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ номаълумлар берилган масала учун базисдир. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лар озод номаълумлардир, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$ номаълумлар эса икки ёқлама масала учун базис, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ лар эса озод номаълумлардир.

Ўзаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асосан $\min Z = \max F$ бўлгани учун юқоридаги масалаларнинг бироргасининг оптимал ечимини топсак, иккинчисининг ҳам оптимал ечимини топган бўламиз.

Бунинг учун, берилган масаладаги базис номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги озод номаълумлар ва берилган масаладаги озод номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги базис номаълумлар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш кифоядир, яъни:

$$\begin{array}{cccccccc} x_{n+1} & x_{n+2} & \ldots & x_{n+m} & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m & y_{m+1} & y_{m+2} & \ldots & y_{m+n} \end{array} \tag{4.8.7}$$

Агар берилган масаланинг оптимал ечими $\{0, 0, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}\}$ бўлса, унга икки ёқлама бўлган масаланинг оптимал ечими $\{y_1, y_2, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots, 0\}$ бўлиб, y_1 x_{n+1} нинг олдидаги коэффициентга, яъни $y_1 = c_{n+1}$ га; y_2 эса x_{n+2} нинг олдидаги коэффициентга, яъни $y_2 = C_{n+2}$ га; y_m x_{n+m} нинг олдидаги коэффициентга, яъни $y_m = C_{n+m}$ га тенгдир.

Мисол. 1. Қуйидаги масалага икки ёқлама масала тузилсин ва уларнинг ечими ўзаро икки ёқлама симплекс усули билан топилсин.

$$Z_{\min} = x_2 - x_4 - 3x_5$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 &= 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5, \ x_j &=> 0, \ j = \overline{1, 6} \end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Бизга 4.6-§ дан маълум бўлган дастлабки масалага икки ёқлама масала қуйидагичадир:

$$
\begin{aligned}
&F_{\max} = y_1 + 2y_2 + 5y_3\\
&\left.\begin{aligned}
2y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\leqslant 1,\\
-y_1 + 2y_2 &\leqslant -1,\\
y_1 - y_2 + y_3 &\leqslant -3, \quad y_j \leqslant 0,\ j = \overline{1, 3}
\end{aligned}\right|
\end{aligned}
$$

ёки

$$
\begin{aligned}
&F_{\max} = y_1 + 2y_2 + 5y_3\\
&2y_1 - 4y_2 + 3y_3 + y_4 = 1,\\
&-y_1 + 2y_2 + y_5 = -1,\\
&y_3 + y_1 - y_2 + y_6 = -3\\
&y_j \leqslant 0,\ j = \overline{1,\ 3}.
\end{aligned}
$$

Дастлабки масалада x_1, x_3 ва x_6 номаълумлар базис, x_2, x_4 ва x_5 номаълумлар озод номаълумлардир. Икки ёқлама масалада эса y_4, y_5 ва y_6 номаълумлар базис, y_1, y_2 ва y_3 номаълумлар озод номаълумлардир. Бу мисол учун (4.8.7) муносабат қуйидагича бўлади:

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & x_3 & x_6\\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\
y_1 & y_2 & y_3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
x_2 & x_4 & x_5\\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\
y_4 & y_5 & y_6
\end{array}
$$

Дастлабки масаланинг чекланиш шартларида озод ҳадлар ҳаммаси мусбат бўлгани учун симплекс усулини қўллаш осондир. Дастлабки масалага мос келувчи қуйидаги жадвални тузамиз:

4.10-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	2	0	−1	$\boxed{1}$	0
x_2	2	0	−4	1	2	−1	0
x_3	5	0	3	0	0	1	1
Z	0	0	−1	0	1	3	0

Симплекс жадвалларнинг биридан иккинчисига ўтиб, қуйидаги жадвалларни тузамиз (4.11 — 4.13- жадваллар):

4.11- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	2	0	−1	1	0
x_2	3	1	−2	1	$\boxed{1}$	0	0
x_3	4	−1	1	0	1	0	1
Z	−3	−3	−7	0	4	0	0

4.12- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	4	2	0	1	0	1	0
x_4	3	1	−2	1	1	0	0
x_3	1	−2	$\boxed{3}$	−1	0	0	1
Z	−15	−7	1	−4	0	0	0

4.13- жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	4	2	0	1	0	1	0
x_4	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
Z	$-\frac{46}{3}$	$-\frac{19}{3}$	0	$-\frac{11}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$

4.13- жадвалнинг охирги сатрида мусбат элемент мавжуд эмас. Демак, топилган {0; 1/3; 0; 11/3; 4,0} ечим дастлабки масаланинг манфий бўлмаган оптимал ечими бўлади. Бу ечимда мақсад функция қуйидагича бўлиб:

$$Z = \frac{46}{3} - \frac{19}{3}x_1 - \frac{11}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \qquad (4.7.8)$$

унинг қиймати $Z = -\frac{46}{3}$ га тенг. (4.7.8) да $C_1 = -\frac{19}{3}$, $C_3 = -\frac{11}{3}$, $C_6 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = C_4 = C_5 = 0$. Юқоридаги ўзаро бир қийматли мосликка асосан, $y_1 \leqslant 0$, $y_2 \leqslant 0$ ва $y \leqslant 0$ ни назарда тутсак:

$$y_1 = -\frac{19}{3}, \quad y_2 = -\frac{11}{3}, \quad y_3 = -\frac{1}{3}, \quad y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

бўлади. Демак, икки ёқлама масаланинг оптимал ечими $\left\{-\frac{19}{3}; -\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}; 0; 0; 0\right.$ бўлиб,

$$\max F = \min\{y_1 + 2y_2 + 5y_3\} = -\frac{46}{3}.$$

Шундай қилиб, асосий теореманинг шарти қуйидагича бажарилади:

$$\min Z = \max F = -\frac{46}{3}.$$

Мисол. 2. Қуйидаги

$$Z_{\min} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \tag{4.8.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2,\\ &x_1 - x_2 - 4x_3 \leqslant -3,\\ &x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 6,\\ &2x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 3, \ x_j \geqslant 0, \ j \geqslant \overline{1,3}\end{aligned}\right| \tag{4.8.10}$$

масалага икки ёқлама масала тузилсин ва уларнинг ечими ўзаро икки ёқлама симплекс усул билан топилсин.

Ечиш. Бу масалани ечиш учун аввал чекланиш шартлари (4.8.10) даги барча тенгсизликларнинг ишорасини $\geqslant$ кўринишга келтирамиз. Бунинг учун (4.8.10) нинг иккинчисини „—1“ га кўпайтириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2,\\ &-x_1 + x_2 + 4x_3 \geqslant 3,\\ &x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 6,\\ &2x_1 + x_2 - 2x_3 \geqslant 3,\end{aligned}\right| \tag{4.8.11}$$

ёки тенглама кўринишида қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x_4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2,\\ x_5 + x_1 - x_2 - 4x_3 &= -3,\\ -x_6 - x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6,\\ x_7 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3\end{aligned}\right| \tag{4.8.12}$$

(4.8.9) — (4.8.11) да икки ёқлама масала қуйидагича бўлади:

$$F_{\max} = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4$$

$$\left.\begin{aligned} &2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leqslant 1,\\ &2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqslant 2,\\ &-y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leqslant 3\end{aligned}\right| \ y_i \geqslant 0, \ i = \overline{1,4} \tag{4.8.13}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 = 1,\\ 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 + y_6 = 2,\\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 + y_7 = 3,\\ y_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,7}\end{aligned}\right| \quad (4.8.14)$$

Дастлабки масаладаги x_4, x_5, x_6, x_7 базис номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги y_1, y_2, y_3 y_4 озод номаълумлар ва берилган масаладаги x_1, x_2, x_3 озод номаълумлар билан икки ёқлама масаладаги y_5, y_6, y_7 базис номаълумлар уртасида қуйидаги

$$\begin{array}{cccccccc} x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \quad & x_1 & x_2 & x_3\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & y_5 & y_6 & y_7\end{array} \quad (4.8.15)$$

бир қийматли мосликни ўрнатамиз ва бевосита биринчисининг ечимларидан иккинчисининг ечимларини келтириб чиқарамиз.

Энди (4.8.12) ва (4.8.14) шартларга назар ташласак, (4.8.14) да ҳамма озод ҳадлар мусбат бўлгани учун, икки ёқлама (4.8.13)—(4.8.14) масалани симплекс усули билан ечиш қулайроқдир*.

Шунинг учун, икки ёқлама масалани симплекс усули билан ечамиз. Бу масаланинг ечими 4.16-жадвалда келтирилган (4.8.15) муносабатга асосан берилган масаланинг оптимал ечими

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$$

бўлиб, $x_1 = c_5$. $x_2 = c_6$, $x_3 = c_7$ бўлиши керак. Ҳақиқатан ҳам 4.14-жадвалдан (4.8.13) — (4.8 12) масаланинг оптимал ечими

$$\left\{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 0;\ 0;\ 2\right\}$$

бўлиб, бу ечимда

$$F_{\max} = \frac{21}{2} - \left(10y_1 + \frac{9}{2}y_4 + \frac{3}{2}y_5 + \frac{9}{2}y_6\right) \quad (4.8.16)$$

нинг қиймати $\max F = \frac{21}{2}$ га тенгдир.

---

* (4.8.9) — (4 8.12) масалани симплекс усули билан ечиш учун юқорида келтирилган сунъий базис усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун (4.8.12) да y_1, y_2, y_3, y_4 сунъий номаълумлар киритиб. ёрдамчи $F = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ функцияни минимумга текшириш лозимдир.

4.14- ж а д в а л

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	y	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_5	1	2	−1	$\boxed{1}$	2	1	0	0
y_6	2	2	1	1	−1	0	1	0
y_7	3	−1	4	−2	−1	0	0	1
Z	0	−2	−3	−6	−3	0	0	0

4.15- ж а д в а л

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_3	1	2	−1	1	2	1	0	0
y_6	1	0	$\boxed{2}$	0	−1	−1	1	0
y_7	5	3	2	0	2	2	0	1
Z	6	10	−9	0	9	6	0	0

4.16- ж а д в а л

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
y_3	$\frac{3}{2}$	−2	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
y_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
y_7	2	3	0	0	4	5	3	1
Z	$\frac{21}{2}$	10	0	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0

(4.8.16) дан берилган масаланинг оптимал ечими

$$x_1 = c_5 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = c_6 = \frac{9}{2}, \quad x_8 = c_7 = 0$$

ни топамиз. Бу ечимда (4.8.9) нинг қиймати қуйидагича:

$$Z_{\min} = \frac{3}{2} + \frac{18}{2} = \frac{21}{2}.$$

Демак, асосий теореманинг қуйидаги шарти бажарилади

$$\min Z = \max F = \frac{21}{2}$$

Бу эса масаланинг тўғри ечилганини билдиради.

Машқлар. Ўзаро икки ёқлама симплекс усули билан қуйидагича масалалар ечилсин:

1. $Z_{\min}=2x_1+4x_2+12x_4.$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3+4x_4\geqslant 10,\\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4\geqslant 4,\\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,4} \end{array}\right\}$$

2. $Z_{\max}=2x_1-2x_2+3x_3+4x_4$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3+x_4\leqslant 2,\\ 2x_1-x_2+2x_3-3x_4\geqslant 3,\\ 3x_1+4x_2-5x_3+2x_4\leqslant 4\\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,4} \end{array}\right|$$

3. $Z_{\max}=5x_1-x_2-4x_3$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1+2x_3\geqslant 9,\\ -x_1+x_2\geqslant 1,\\ x_1+x_2-3x_3\geqslant 8,\\ x_1-x_3\leqslant 4,\\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,3} \end{array}\right|$$

4. $Z_{\min}=4x_1+6x_2+3x_3$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+x_2+2x_3\geqslant 9,\\ x_1+2x_2+2x_3\geqslant 8,\\ x_1+6x_2\geqslant 12,\\ x_j\geqslant 0,\ j=\overline{1,3} \end{array}\right|$$

4.9-§. Потенциаллар усули

Транспорт масалаларини ечиш учун қўлланиладиган биринчи аниқ усул потенциаллар усули 1949 йилда совет олимлари Л. В Канторович ва М. К. Гавурин томонидан таклиф қилинган Бу усулнинг асосий ғояси, чизиқли программалаштириш масалаларини ечиш усулларига боғлиқ бўлмаган ҳолда, транспорт масаласига мослаштирилган симплекс усулидан иборатдир.

Бошқа чизиқли программалаштириш масалалари сингари транспорт масалаларини потенциаллар усули ёрдамида ечиш жараёни ҳам бошланғич базис ечимини топишдан бошланади. Бу усул ёрдами билан бошланғич базис ечимдан бошлаб, оптимал ечимга яқинроқ бўлган янги базис ечимларга ўта бориб, чекли сондаги қадамдан сўнг масаланинг оптимал ечими топилади.

Шунинг учун, потенциаллар усулининг асосий моҳиятини баён қилишдан олдин, транспорт масаласининг бошланғич базис ечимини топиш учун қўлланиладиган усуллардан бири —шимоли-ғарб бурчак усули билан танишамиз:

1. Шимоли - ғарб бурчак усули. Фараз қилайлик, транспорт масаласининг шартлари 4.9.1-жадвалдагидек кўринишда берилган бўлсин.

Шимоли-ғарб бурчак усулининг асосий моҳияти қуйидагилардан иборат: даставвал масаланинг ечимларидан тузилган жадвалларнинг шимолий ғарбида жойлашган номаълум x_{11} нинг қиймати аниқланади, $x_{11}=\min(a_1,\ b_1)$. Агар $a_1\leqslant b_1$ бўлса, $x_{11}=a_1$ ва $x_{1j}=0$ $(j=\overline{2,n})$ бўлиб, $a_1=0$ ва $b_1=b_1-a_1$ га ўзгаради, агар $a_1\geqslant b_1$ бўлса, $x_{11}=b_1$ ва $x_{i1}=0$ $(i=\overline{2,m})$ бўлиб $a_1 = a_1 - b_1$ ва $b_1 = 0$ га ўзгаради. Фараз қилайлик, иккинчи ҳол бажарилсин. Бу ҳолда 1- қадамдан сўнг масаланинг ечимларидан тузилган жадвал 4.9.2- жадвал кўринишда бўлади. Энди жадвалнинг шимоли-ғарбида жойлашган x_{12} нинг қиймати аниқланади: агар $a_1 - b_1 > b_2$ бўлса, $x_{12} = b_2$ ва $x_{i2} = 0$ $(i = \overline{2, m})$ бўлиб, $a_1 - b_1 = a_1 - b_1 - b_2$ ва $b_2 = 0$ га ўзгаради. Агар $a_1 - b_1 < b_2$ бўлса, $x_{12} = a_1 - b_1$ ва $x_{1j} = 0$, $(j = \overline{3, n})$ бўлиб, $a_1 - b_1 = 0$ ва $b_2 = b_2 - a_1 + b_1$ га ўзгаради.

Айтайлик, янги жадвал учун биринчи ҳол бажарилсин, у ҳолда 2- қадамдан сўнг масаланинг ечимларидан тузилган жадвал 4.9.2 жадвал кўринишида бўлади.

4.9.1- жадвал

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
A_1	$a_1 - b_1$	b_1	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n}
A_2	a_2	0	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	a_m	0	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn}
Маҳсулотга бўлган талаб		0	b_2	b_3	...	b_n

4.9.2- жадвал

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
A_1	$a_1 - b_1 - b_2$	b_1	b_2	x_{13}	...	x_{1n}
A_2	a_2	0	0	x_{23}	...	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	a_m	0	0	x_{m3}	...	x_{mn}
Маҳсулотга бўлган талаб		0	0	b_3	...	b_n

4.9.3-жадвал

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
A_1	0	b_1	b_2	$a_1-b_1-b_2$	...	0
A_2	a_2	0	0	x_{23}	...	x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮
A_m	a_m	0	0	x_{m3}	⋮	x_{m-n}
Маҳсулотга бўлган талаб		0	0	$b_3-a_1+b_1+b_2$	...	b_n

4.9.2-жадвалнинг шимоли-ғарбидаги номаълум x_{13} нинг қийматини топайлик. Фараз қилайлик, бу ҳолда $a_1-b_1-b_2<b_3$ бўлсин. Демак, $x_{13}=a_1-b_1-b_2$ ва $x_{1j}=0$ $(j=\overline{4,n})$ бўлиб, $a_1-b_1-b_2=0$ ва $b_3=b_3-a_1+b_1+b_2$ га ўзгаради. (4.9.3-жадвалга қаранг) ва ҳ. к.

Худди шу йўл билан давом этиб, ҳар бир қадамда жадвалнинг шимоли-ғарбий бурчагида жойлашган x_{ij} нинг қиймати $x_{ij}=\min(a_i, b_i)$ топилади, бунда a_i ва b_i нолга ўзгаради. Бу жараён барча a_i ва b_i лар нолларга айлангунга қадар давом эттирилади.

Мисол. Қуйидаги транспорт масаласининг бошланғич базис ечимини топинг. (Соддалик учун жадвалда фақат a_i, b_i ва x_{ij} параметрлар берилган.)

4.9.4-жадвал

$a_i \backslash b_i$	2	5	4	7
1	3	3	7	10
7	4	5	3	9
4	5	4	5	12
6	6	3	4	6

1-қадам. $x_{11}=\min(1, 2)=1$ шунинг учун $a_1=0$ ва $b=2-1=1$ га ўзгаради. $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$ бўлади. (4.9.5-жадвалга қаранг.)

2-қадам. $x_{21}=\min(7, 1)=1$, шунинг учун $b_2=0$ ва $a_1=7-1=6$ га ўзгаради. $x_{31}=x_{41}=0$ бўлади (4.9.6-жадвалга қаранг).

4.9.5-жадвал

$a_i \backslash b_i$	1	5	4	7
0	1	0	0	0
7	4	5	3	9
4	5	4	5	12
6	6	3	4	6

4.9.6-жадвал

$a_i \backslash b_i$	0	5	4	7
0	1	0	0	0
6	1	5	3	9
4	0	4	5	12
6	0	3	4	6

4.9.7- жадвал

a_i \ b_j	0	0	1	7
0	1	0	0	0
1	1	5	3	9
4	0	0	5	12
5	0	0	4	6

4.9.8- жадвал

a_i \ b_j	0	0	3	7
0	1	0	0	0
0	1	5	1	0
4	0	0	5	12
6	0	0	4	6

4.9.9- жадвал

a_i \ b_j	0	0	0	7
0	1	0	0	0
0	1	5	1	0
1	0	0	3	12
6	0	0	0	6

4.9.10- жадвал

a_i \ b_j	0	0	0	6
0	1	0	0	0
0	1	5	1	0
0	0	0	3	1
6	0	0	0	6

4.9.11- жадвал

a_i \ b_j	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	1	5	1	0
0	0	0	3	1
0	0	0	0	6

3- қадам. $x_{22}=\min(6, 5)=5$, шунинг учун $b_2=0$ ва $a_2=6-5=1$ га ўзгаради. ҳамда $x_{32}=x_{42}=0$ бўлади (4.9.7- жадвал).

4- қадам. $x_{23}=\min(1, 4)=1$, бунда $a_2=0$ ва $b=4-1=3$ га ўзгаради ҳамда $x_{24}=0$ бўлади (4.9.8- жадвал).

5- қадам. $x_{23}=\min(4,3)=3$, бунда $b_3=0$ ва $a_3=4-3=1$ га ўзгаради ҳамда $x_{43}=0$ бўлади (4.9.9- жадвал).

6- қадам. $x_{34}=\min(1, 7)=1$, бунда $a_3=0$ ва $b_4=7-1=6$ га ўзгаради (4.9.10- жадвал).

7- қадам. $x_{44}=\min(6, 6)=6$, бунда $a_4=b_4=0$ бўлади (4.9.11- жадвал) ва масаланинг ечилиш жараёни тугайди. Топилган бошланғич базис ечим: $x_{11}=1$; $x_{21}=1$; $x_{22}=5$; $x_{23}=1$; $x_{33}=3$; $x_{34}=1$ ва $x_{44}=6$ бўлади.

2. Потенциаллар усули. Бу усул ёрдамида бошланғич базис ечимдан бошлаб, оптимал ечимга яқинроқ бўлган янги базис ечимларга ўта бориб, чекли сондаги қадамдан кейин масаланинг оптимал ечими топилади. Ҳар бир қадамдан кейин топилган базис ечим оптимал ечим эканлигини текшириш учун ҳар бир ишлаб чиқариш пункти (A_i) ва истеъмол қилувчи (B_j) пунктга уларнинг потенциаллари деб аталувчи миқдорлари u_i ва v_j мос қўйилади. Бу потенциалларни шундай танлаш керакки, бунда A_i ва B_j пунктларга мос келувчи потенциаллар йиғиндиси A_i ишлаб чиқариш пунктидан B_j истеъмол пунктигача бир бирлик маҳсулотни олиб бориш учун сарф қилинган харажатга, яъни C_{ij} га тенг бўлиши керак.

Теорема. Агар $X=(x_{ij})$ ечим транспорт масаласининг оптимал ечими бўлса, у ҳолда унга

$$u_i+v_j=C_{ij} \quad (x_{ij}>0) \qquad (4.9.1)$$

$$u_i + v_j \leqslant C_{ij} \ (x_{ij} = 0), \tag{4.9.2}$$
$$i = \overline{1,\ m} \quad j = \overline{1, n}$$

шартни қаноатлантирувчи $n+m$ та u_i ва v_j сонлар мос келади. u_i ва v_j сонлар мос равишда ишлаб чиқариш пунктлари ва истеъмол пунктларининг потенциаллари дейилади.

Исбот. Транспорт масаласининг математик модели қуйидагидан иборат эди:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \tag{4.9.3}$$

чизиқли функциянинг қуйидаги

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, \ i = \overline{1,\ m} \tag{4.9.4}$$
$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = b_j, \ j = \overline{1,\ n} \tag{4.9.5}$$
$$x_{ij} \geqslant 0$$

чекланиш шартларини қаноатлантирувчи минимуми топилсин. Берилган бу транспорт масаласини қандайдир дастлабки чизиқли программалаштириш масаласининг ўзаро икки ёқлама масаласи сифатида қараш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар (4.9.4) чекланиш шартларининг ҳар бирига дастлабки масаланинг u_i $(i = \overline{1, m})$ ўзгарувчиларини, (4.9.5) чекланиш шартларининг ҳар бирига v_j $(j = \overline{1,\ n})$ ўзгарувчиларини мос қўйсак, дастлабки чизиқли программалаштириш масаласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \tag{4.9.6}$$

чизиқли функциянинг

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}, \tag{4.9.7}$$
$$i = \overline{1,\ m}, \quad j = \overline{1,\ n}$$

чекланиш тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи максимуми топилсин

$X = (x_{ij})$ ечим икки ёқлама масаланинг (транспорт масаласининг) оптимал ечими булса, $Y = (u_i,\ v_j)$ ечим дастлабки чизиқли программалаштириш масаласи — (4.9.6) ва (4.9.7) нинг оптимал ечими бўлади ва узаро икки ёқлама масаланинг асосий теоремасига асосан

$$\min Z = \max F$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j, \ x_{ij} \geqslant 0$$

бўлади.

Чизиқли программалаштиришнинг икки ёқлама масалалари назариясидан маълумки, агар икки ёқлама масаланинг оптимал ечими (x_{ij}) дастлабки масаланинг i-чекланиш шартини тенгсизликка айлантирса, у ҳолда икки ёқлама масала оптимал ечимининг i-компонентаси нолга тенг ва аксинча, икки ёқлама масала оптимал ечимининг i-компонентаси мусбат бўлса, у ҳолда дастлабки масаланинг i-чекланиш шартини тенгликка айлантиради. Демак,

$$\left.\begin{array}{l} u_i + v_j = c_{ij} \text{ агар } x_{ij} > 0, \\ u_i + v_j \leqslant c_{ij} \text{ агар } x_{ij} = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.9.8)$$

Исбот қилинган теоремага асосан, бошланғич базис ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

а) Тўлдирилган ҳар бир катакчалар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакчаларда жойлашган бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарфланган харажатга тенг бўлиши керак, яъни

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

б) Бўш турган ҳар бир катакчалар учун потенциаллар йиғиндиси шу катакчаларда жойлашган бир бирлик маҳсулотни ташиш учун сарфланган харажатга тенг ёки ундан кичик бўлиши керак, яъни

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \qquad (4.9.10)$$

Агар камида битта бўш катакча учун (4.9.10) шарт бажарилмаса, топилган базис ечим оптимал бўлмайди ва

$$\max_{\Delta_{ij}>0} (u_i + v_j - c_{ij}) = \Delta_{kl}, \quad (\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij})$$

шартни қаноатлантирувчи (k, l) катакчани тўлдирилган катакчага айлантиришга тўғри келади.

Шундай қилиб, потенциаллар усулининг асосий ғояси қуйидаги босқичлардан иборат:

1. Шимоли-ғарбий бурчак усули ёрдамида бошланғич базис ечим топилади.

2. Топилган ечимни оптимал ечим эканлигини текшириш учун потенциаллар системаси тузилади.

Потенциаллар системасини фақатгина хос бўлмаган базис ечимлар учун тузиш мумкин. Бундай ечим $m+n-1$ та тўлдирилган катакчаларни ўз ичига олади. Шунинг учун, ҳар бир тўлдирилган катакчалардан ва (4.9.8) дан фойдаланиб, (4.9.9) кўринишда $m+n$ номаълумли $m+n-1$ та потенциал тенгламалар системасини тузишимиз мумкин. Ҳосил қилинган системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан биттага кам бўлганлиги сабабли потенциалларнинг сон қийматини аниқлашимиз учун номаълумларнинг бирига (одатда u_1 га) ноль қиймат бериб, қолганларини бирин-кетин топишимиз мумкин.

Агар u_i потенциал маълум бўлса, (4.9.9) формула ёрдамида v_j топилади:

$$v_j = c_{ij} - u_i$$

ва, аксинча, v_j маълум бўлса, (4.9.9) ёрдамида u_i топилади:

$$u_i = c_{ij} - v_j$$

3. Барча бўш катакчалар учун (4.9.10) шартга ёки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ белгилаш киритсак $\Delta_{ij} \leqslant 0$ шарт текшириб кўрилади.

Агар барча i ва j лар учун

$$\Delta_{ij} \leqslant 0 \quad (i = \overline{1, m},\ j = \overline{1,\ n}) \tag{4.9.11}$$

ўринли бўлса, топилган бошланғич базис ечим оптимал ечим бўлади. Агар i ва j ларнинг камида битта қийматлари учун $\Delta_{ij} > 0$ бўлса, бошланғич базис ечим алмаштирилади. Бу қуйидагича амалга оширилади:

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{kl}$$

шартни қаноатлантирувчи (k, l) катакча тўлдирилади (x_{kl} номаълум базисга киритилади). $x_{kl} = \theta$ деб белгилаб олиб (kl) катакчага θ ёзилади. Сўнгра соат стрелкаси йўналиши бўйича (k, l) катакчадан бошлаб тўлдирилган катакчаларга тартиб билан $(-)$ ва $(+)$ ишоралар қўйиб борилади. Натижада ёпиқ K контур ҳосил бўлади:

$$K = K^- \cup K^+,$$

бу ерда K^- — $(-)$ ишорали катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контур, K^+ — $(+)$ ишорали катакчаларни ўз ичига олувчи ярим контурдир. θ нинг сон қиймати қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\theta = \min_{x_{ij} \in K^-} x_{ij} = x_{pg}. \tag{4.9.12}$$

4. Янги базис ечим ҳисобланади:

$$x'_{kl} = \theta$$
$$x'_{pg} = 0,$$
$$x'_{ij} = x_{ij} \text{ агар } x_{ij} \notin K,$$
$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta \text{ агар } x_{ij} \in K^+$$
$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta \text{ агар } x_{ij} \in K^- \text{ бўлса.}$$

Янги базис ечимдаги тўлдирилган катакчалар сони $n + m - 1$ бўлгани учун (4.9.12) шартни қаноатлантирувчи катакчалар бирдан ортиқ бўлса, улардан биттасини бўш катакчага айлантириб, қолган катакчалардаги тақсимотни нолга тенг деб қабул қиламиз.

Ҳар бир қадамда топилган янги базис ечим учун яна қайтадан потенциаллар системаси тузилади ва янги базис ечимнинг оптимал ечим бўладиган (4.9.10) ёки (4.9.11) шарти текширилади. Агар янги базис ечим учун (4.9.10) ёки (4.9.11) шартлар бажарилмаса, у ҳолда 3, 4 пунктларда баён қилинган ишлар такрорланади. Такрорлаш жараёни оптимал ечим топилгунча, яъни барча бўш катакчалар учун $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}\leqslant 0$ шарт бажарилгунча давом эттирилади.

Мисол. A_1 ва A_2 базаларнинг ҳар бирида 30 тоннадан цемент бор. Агар A_1 базадан B_1, B_2 ва B_3 магазинларга 1 тонна цементни олиб бориш учун сарфланадиган харажат мос равишда 1,3 ва 5 сўмни, A_2 базадан эса—2,5 ва 4 сўмни ташкил этса, ҳар бир магазинга 20 тоннадан цемент шундай етказиб берилсинки, натижада сарфланадиган транспорт харажати энг кам бўлсин.

Ечиш. A_i $(i=1, 2)$ базалардан B_j $(j=1, 2, 3)$ магазинларга олиб бориладиган цементнинг умумий миқдорини x_{ij} билан белгиласак ва (3.2.14), (3.2.15) ларни назарда тутсак, берилган транспорт масаласининг чекланиш тенгламалари системаси қуйидагича бўлади:

$$\left|\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}=30, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=30, \\ x_{11}+x_{21}=20, \\ x_{12}+x_{22}=20, \\ x_{13}+x_{23}=20, \\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3. \end{array}\right. \qquad (4.9.14)$$

Мақсад функция (3.2.16) кўринишда бўлади, яъни

$$Z=x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+2x_{21}+5x_{22}+4x_{23}. \qquad (4.9.15)$$

Шундай қилиб, (4.9.14) — (4.9.15) шарт берилган транспорт масаласининг математик моделини ташкил қилади. Демак, (4.9.14) чекланиш тенгламалари системасини қаноатлантирувчи ечимини топамиз, унда (4.9.15) мақсад функция энг кичик қийматга эришади.

Берилган (4.9.14) — (4.9.15) транспорт масаласини жадвал кўринишида қуйидагича ифодалаймиз:

4.9.12-жадвал

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	30	1 x_{11}	3 x_{12}	5 x_{13}
A_2	30	2 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}
Магазинларнинг цементга бўлган талаби		20	20	20

Дастлабки транспорт масаласи — (4.9.14) — (4.9.15) га ўзаро икки ёқлама масала тузамиз. Ҳақиқатан ҳам, (4.9.6) ва (4.9.7) лардан фойдаланиб,

$$F = 30u_1 + 30u_2 + 20v_1 + 20v_2 + 20v_3 \qquad (4.9.16)$$

чизиқли функциянинг

$$\begin{cases} u_1 + v_1 \leqslant 1, \\ u_1 + v_2 \leqslant 3, \\ u_1 + v_3 \leqslant 5, \\ u_2 + v_1 \leqslant 2, \\ u_2 + v_2 < 5, \\ u_2 + v_3 \leqslant 4. \end{cases} \qquad (4.9.17)$$

чеклаииш тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи максимумини топадиган икки ёқлама масалага эга бўламиз.

Шундай қилиб, транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечиш учун қуйидаги босқичларни бажарамиз.

1. Шимоли-ғарбий бурчак усули ёрдамида бошланғич базис ечимини топамиз.

1-қадам. $x_{11} = \min(30, 20) = 20$, шунинг учун $b_1 = 0$ ва $a_1 = a_1 - b_1 = 30 - 20 = 10$ га ўзгаради, $x_{21} = 0$ бўлади (4.9.13-жадвалга қаранг).

4.9.13-жадвал

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	10	1 | 20	3 | x_{12}	5 | x_{13}
A_2	30	2 | 0	5 | x_{22}	4 | x_{22}
Магазинларнинг цементга бўлган талаби		0	20	20

2-қадам. $x_{12} = \min(10, 20) = 10$, шунинг учун $a_1 = 0$ ва $b_2 = 20 - 10 = 10$ га ўзгаради. $x_{13} = 0$ бўлади (4.9.14-жадвал).

3-қадам. $x_{22} = \min(30, 10) = 10$, демак, $b = 0$, $a_2 = 30 - 10 = 20$ га ўзгаради (4.9.15-жадвал).

4-қадам. $x_{23} = \min(20, 20) = 20$, бунда $a_2 = 0$ ва $b_2 = 0$ га ўзгаради (4.9.16-жадвал). Демак, бошланғич базис ечим: $x_{11} = 20$; $x_{12} = 10$; $x_{22} = 10$ ва $x_{23} = 20$ бўлар экан.

4.9.14- ж а д в а л

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	0	20 1	10 3	0 5
A_2	30	0 2	10 5	x_{23} 4
Магазинларнинг цементга булган талаби		0	10	20

4.9.15- ж а д в а л

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	0	20 1	10 3	0 5
A_2	20	0 2	10 5	x_{23} 4
Магазинларнинг цементга бўлган талаби		0	0	20

4.9.16- ж а д в а л

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	0	20 1	10 3	0 5
A_2	0	0 2	10 5	20 4
Магазинларнинг цементга бўлган талаби		0	0	0

Топилган бошланғич базис ечимда (4.9.15) мақсад функциянинг қиймати

$$Z = 20 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 20 = 180 \text{ (сўм)}$$

бўлади.

2. Топилган бошланғич базис ечимни оптимал ечим эканлигини текширамиз. Бунинг учун потенциаллар системасини

тузамиз, яъни ўзаро икки ёқлама масаланинг чекланиш тенгсизликлари системасидан фойдаланамиз. Агар дастлабки масала (транспорт масаласи) учун топилган бошланғич базис ечим оптимал бўлса, у ҳолда икки ёқлама масаланинг чекланиш тенгсизликлари системаси ўзининг ечимларида тенгликлар кўринишида бажарилиши керак. Бу ҳолда чизиқли тенгламалар системаси ҳосил бўлиб, у чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Бу ечимлардан бирини топамиз.

Топилган ечимни икки ёқлама масаланинг чекланиш тенгсизликлари системасидаги тенгламалар системасига (юқорида тузилган) кирмаган шартларига қўямиз. Агар бу тенгсизликлар бажарилса, текширилаётган бошланғич базис ечим оптимал ечим бўлади. Акс ҳолда оптимал ечим бўлмайди. Шундай қилиб, юқорида топилган бошланғич базис ечимга (4.9.17) чекланиш тенгсизликлар системасидан қуйидаги беш номаълумли тўртта тенгламалар системаси мос келади:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_2 = 5, \\ u_2 + v_3 = 4. \end{cases} \qquad (4.9.18)$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгламалар системасида номаълумлар сони тенгламалар сонидан биттага кўп бўлгани учун, унинг ечимлари чексиз кўпдир. Бу ечимлардан бирини топиш учун номаълумларнинг бирортасига (одатда u_1 га) ноль қиймат бериб, қолганларини бевосита ҳисоблаш йўли билан топилади, яъни $u_1 = 0$ десак, (4.9.18) нинг биринчисидан $v_1 = 1$, иккинчисидан эса $v_2 = 3$ ва кейингисидан $u_2 = 2$ ҳамда $v_3 = 2$ эканлиги келиб чиқади. Бу ечимни вектор кўринишда қуйидагича ёзамиз:

$$(u_1, u_2, v_1, v_2, v_3) = (0;\ 2;\ 1;\ 3;\ 2)$$

Топилган икки ёқлама масаланинг бу ечимларини (4.9.17) тенгсизликлар системасининг қолганларига қўямиз:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 \leqslant 5 \\ u_2 + v_1 \leqslant 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 + 2 \leqslant 5 & \text{(а)} \\ 2 + 1 \leqslant 2 & \text{(б)} \end{cases}$$

Бу ердан кўриниб турибдики (а) тенгсизлик тўғри, (б) тенгсизлик эса нотўғридир. Демак, (4.9.18) системанинг ечимлари (4.9.17) тенгсизликлар системасининг барча тенгсизликларини қаноатлантирмас экан. Бу эса, бошланғич базис ечимнинг оптимал эмаслигини кўрсатади.

3. Янги базис ечимни тузамиз. $u_2 + v_1 \leqslant 2$ тенгсизликка x_{21} ўзгарувчи мос келади. x_{21} ўзгарувчини базис ечимга киритамиз. $x_{21} = \Theta$ деб белгилаб (2, 1) катакчага, яъни (A_2, B_1) катакчага Θ ни ёзамиз (4.9.17- жадвалга қаранг). Бу катакчадан бошлаб соат стрелкаси йўналиши бўйича тўлдирилган катакчаларга тартиб билан (—) ва (+) ишораларини қўямиз.

Θ нинг сон қийматини (4.9 12) формула орқали қуйидагича топамиз:

$$\Theta = \min x_{ij} = \min (20,\ 10) = 10$$
$$x_{ij} \in K^{-}, \quad x_{ij} \in K^{-}.$$

4.9.17- жадвал

Базалар	Базалардаги сақланаётган цемент	Магазинлар		
		B_1	B_2	B_3
A_1	30	1^{-} [20]	3 [10]	5 [0]
A_2	30	2^{+} [0]	5 [10]	4 [20]
Магазинларнинг цементга бўлган талаби		20	20	20

Энди (4.9.13) дан фойдаланиб, янги базис ечимни қуйидагича ёзамиз:

$$x'_{21} = \Theta = 10$$

$x_{11} \in K^{-}$ бўлгани учун $\quad x'_{11} = x_{11} - \Theta = 20 - 10 = 10,$

$x_{12} \in K^{+}$ бўлгани учун $\quad x' = x_{12} + \Theta = 10 + 10 = 20,$

$x_{12} \in K^{+}$ бўлгани учун $\quad x'_{12} = x_{12} + \Theta = 10 + 10 = 20,$

$x_{22} \in K^{-}$ бўлгани учун $\quad x'_{22} = x_{22} - \Theta = 10 - 10 = 0,$

$x_{23} \in K$ бўлгани учун $\quad x'_{23} = x_{23} = 20$

Янги базис ечим: $x'_1 = 10$; $x'_{12} = 20$; $x_{21} = 10$; $x'_{22} = 0$; $x'_{23} = 20$ бўлади. Янги базис ечимда (4.9 15) мақсад функциянинг қиймати $Z_2 = 10 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 20 = 170$ (сўм) бўлади.

4 Янги базис ечимни оптимал ечим эканлигини текширамиз. Янги базис ечимга қуйидаги тенгламалар системаси мос келади:

$$u_1 + v_1 = 1,$$
$$u_1 + v_2 = 3,$$
$$u_2 + v_1 = 2,$$
$$u_2 + v_3 = 4.$$

Бу тенгламалар системасининг ечими $u_1 = 0$ да қуйидагича булади

$$(u_1;\ u_2;\ v_1;\ v_2;\ v_3) = (0;\ 1;\ 1;\ 3;\ 3) \qquad (4.9.19)$$

Топилган ечимни (4.9.17) тенгсизликлар системасининг қолганларига қуямиз:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 \leqslant 5 \\ u_2 + v_2 \leqslant 5 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 0 + 3 \leqslant 5, \\ 1 + 4 \leqslant 5. \end{cases}$$

Кўриниб турибдики, янги базис ечимда (4.9.17) нинг барча тенгсизликлари тўғри экан. Демак, янги базис ечим:

$$x'_{11}=10; \qquad x'_{12}=20; \qquad x'_{13}=0;$$
$$x'_{21}=10; \qquad x'_{22}=0; \qquad x'_{23}=20$$

оптимал ечим экан. (4.9.19) эса, икки ёқлама масала (4.9.16), (4.9.17) нинг оптимал ечими бўлади. (4.9.16) чизиқли функциянинг (4.9.19) ечимдаги қиймати:

$$F=30\cdot 0+30\cdot 1+20\cdot 3+20\cdot 3=170 \text{ сўм.}$$

Ҳақиқатан ҳам, $Z_{\min}=F_{\max}=170$ сўм бўлгани учун масала тўғри ечилди.

5. Шундай қилиб, ҳосил қилинган оптимал базис ечимдан қуйидагича хулоса чиқариш мумкин: A_1 базадан 10 т цемент B_1 магазинга, қолган 20 т цемент B_2 магазинга етказиб берилса, A_2 базадан 10 т цемент B_1 магазинга, қолган 20 т эса B_3 магазинга етказиб берилса, энг кам транспорт харажати 170 сўмни ташкил этади.

Машқлар. Қуйидаги транспорт масалаларини потенциаллар усули билан ечинг.

1. A_1 ва A_2 ғишт заводлари бир кунда мос равишда 1 000 ва 5000 донадан ғишт ишлаб чиқаради. Бу ғиштларни B_1, B_2 ва B_3 қурилиш участкаларига, уларнинг талаблари асосида, мос равишда 4000, 80 0 ва 3000 донадан ғишт етказиб бериш керак бўлсин. A_1 заводдан B_1, B_2 ва B_3 қурилиш участкаларига 1 дона ғиштни етказиб бериш учун кетадиган харажат мос равишда 3, 3 ва 2 тийинни, A_2 заводдан — 6, 5 ва 1 тийинни ташкил қилса, барча ғиштларни ташишнинг транспорт харажати энг кам бўлган варианти топилсин.

2. Иккита ишлаб чиқариш пункти ва учта истеъмол пункти мавжуд. Транспорт масаласининг шартлари қуйидаги жадваллар кўринишида берилган бўлса, транспорт харажати энг кам бўлган оптимал ечимини топинг.

а)

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари		
		1	2	3
I	40	6 x_{11}	4 x_{12}	2 x_{13}
II	60	3 x_{21}	5 x_{22}	7 x_{23}
Маҳсулотга бўлган талаб		20	70	10

б)

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари		
		1	2	3
I	40	7 x_{11}	2 x_{12}	4 x_{13}
II	25	3 x_{21}	8 x_{22}	9 x_{23}
Маҳсулотга бўлган талаб		10	35	20

3. Жадвал кўринишида берилган қуйидаги транспорт масалаларини потенциаллар усули билан ечинг:

а)

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари		
		1	2	3
I	100	4 x_{11}	3 x_{12}	5 x_{13}
II	150	10 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}
III	80	3 x_{31}	9 x_{32}	6 x_{33}
Маҳсулотга булган талаб		80	140	110

б)

Ишлаб чиқариш пунктлари	Ишлаб чиқарилган маҳсулот	Истеъмол пунктлари			
		1	2	3	4
I	70	3 x_{11}	7 x_{12}	4 x_{13}	3 x_{14}
II	130	5 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	8 x_{24}
Маҳсулотга бўлган талаб		80	60	20	40

5-БОБ. ЧИЗИҚСИЗ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

5.1-§. Масаланинг қўйилиши.

Биз биламизки, чизиқсиз программалаштириш масалаларининг мақсад функциялари ва чекланиш шартларида қатнашадиган функциялар изланаётган номаълумларнинг чизиқсиз функцияларидан иборат бўлади. Агар бизга n ўзгарувчи, яъни $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ га боғлиқ бўлган бирорта функциянинг чекланиш тенгламалари ёки тенгсизликлари системасини қаноатлантирадиган минимумни топиш талаб қилинган бўлса, бу шатрли минималлаш масаласи Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули ёрдамида шартсиз минималлаш масаласига келтирилади. Бу функциянинг минимуми мавжудлигининг биринчи таргибли зарурий шарти қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X}=\varphi(X)=0. \qquad (5.1.1)$$

Бу шарт функциянинг *стационарлик шарти* дейилади. Берилган $f(X)$ функцияга минимум берувчи стационар (критик) нуқталар (5.1.1) тенгламанинг ечимларидан иборат бўлади. $f(X)$ функция n ўзгарувчига боғлиқ чизиқсиз функция бўлганлигидан (5.1.1) тенгламанинг ечимларини топиш анча мураккаб масалалардан бири бўлиб, уни ечиш учун ҳозиргача ягона усул мавжуд эмас. Бу тенгламаларнинг кўринишига қараб, уни ечиш учун ҳар хил тақрибий усуллар қўлланилади. Масалан, $f(X)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан X_0 нуқта танлаб олиниб, бу нуқтада $f(X)$ функциянинг қиймати ҳисобланади. X_0 нуқта $f(X)$ функцияга минимум берувчи X^* нуқтанинг нолинчи қадами дейилади. X_0 нуқта функцияга минимум берувчи X^* нуқта учун дастлабки тақрибий нуқта бўлиб, X^* нуқтага яқинроқ бўлган X_1 тақрибий нуқтага, яъни биринчи қадамга ўтиш зарур. Бу ўтиш икки босқичдан иборат бўлади:

1) X_0 нуқтанинг X_1 нуқтага ўтишдаги ҳаракат йўналиши танланади.

2) Шу йўналиш бўйича қандай қадам билан бориш аниқланади.

X_1 нуқтани танлаш умумий ҳолда қуйидаги шартга бўйсуниши керак:

$$f(X_1)<f(X_0).$$

1-таъриф. Функциянинг минимумини ёки максимумини топиш алгоритми, агар $X_0 \to X_1, X_1 \to X_2, \ldots, X_{l-1} \to X_l$ га ўтиш маълум бир қоида асосида амалга оширилса, детерминаллашган алгоритм дейилади.

2-таъриф. Функциянинг минимумини ёки максимумини топиш алгоритми агар $X_{l-1} \to X_l$ угиш, яъни X_{l-1} дан X_l га ўтиш

($i = 1, 2, \ldots, n$) бирор тасодифий механизм асосида бўлса, тасодифий алгоритм дейилади.

Детерминаллашган алгоритмлар нолинчи, биринчи, иккинчи ва ҳоказо тартибли бўлиши мумкин.

Агар ҳар бир кетма-кет яқинлашишда, яъни $X_{i-1} \to X_i$ да фақат функциянинг ўзи қатнашадиган бўлса, бундай детерминаллашган алгоритм – нолинчи, биринчи тартибли ҳосила қатнашадиган бўлса—биринчи ва ҳоказо тартибли алгоритмлар дейилади.

Агар бирорта чизиқсиз программалаштириш масаласи ва унинг бирор тақрибий ечиш усули берилган бўлса, „Бу тақрибий ечиш усулининг аниқ ечимга яқинлашиш тезлиги қандай?“ – деган савол туғилади. Бу саволга қуйидагича жавоб бериш мумкин. Агар

$$\|X_{i-1} - X^*\| \leqslant q \|X_i - X^*\|^{\alpha}, \ 0 < q < 1$$

тенгсизликда $\alpha = 1$ бўлса, бу тақрибий ечиш усулининг яқинлашиш тезлиги *чизиқли*, $\alpha = 2$ бўлса, *квадратик*, $\alpha < 1$ бўлса, *геометрик* дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазаларни чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечишда тақрибий ечиш усулларини қўллаш жараёнида батафсилрок тўхтаб ўтамиз.

5.2-§. Ньютон усули

x^* нуқта $f(x)$ функцияга минимум берувчи нуқта бўлиши учун шу нуқтада берилган функциянинг градиенти нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$grad\, f(x^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0.$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функцияга минимум берувчи нуқта мавжуд бўлса, у нуқта қуйидаги

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \varphi(x) = 0$$

тенгламанинг ечимлари орасидан топилар экан. Фараз қилайлик, x_1 нуқта $\varphi(x) = 0$ тенгламанинг тақрибий ечими бўлсин. $\varphi(x)$ функцияни $(x - x_1)$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \frac{\partial f(x_1)}{\partial x}(x - x_1) + \frac{1}{2}(x - x_1)\frac{\partial^2 \varphi(x_1)}{\partial x^2}(x - x_1) + \ldots \tag{5.2.1}$$

Бу ёйилмада биринчи иккита қўшилувчи билан чегараланиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x) \approx \varphi(x_1) + \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x}(x - x_1) = 0.$$

Бундан

$$x = x_1 = \frac{\varphi(x_1)}{\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x}} = x_1 - \left(\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x}\right)^{-1}\varphi(x_1). \qquad (5.2.2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Ньютон усули (5.2.2) муносабатдан фойдаланиб,

$$x_\kappa = x_{\kappa-1} - \left(\frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}\right)^{-1}\varphi(x_{\kappa-1}) \qquad (5.2.3)$$

рекуррент формула орқали $x_2, x_3, \ldots, x_\kappa, \ldots$ кетма-кетликларни аниқлашдан иборатдир: $\varphi(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ бўлгани учун

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = A(x)$$

бўлиб, (5.2.3) формула қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x_\kappa = x_{\kappa-1} - (A(x_{\kappa-1}))^{-1}\varphi(x_{\kappa-1}). \qquad (5.2.4)$$

Агар дастлабки танланган x_1 нуқта $f(x)$ функцияга минимум берувчи нуқта x^* га етарлича яқин бўлса, (5.2.4) формула билан аниқланадиган $x_2, x_3, \ldots, x_\kappa, \ldots$ кетма-кетлик x^* га яқинлашувчи бўлади ва қўйилган хато $\varepsilon_\kappa = x_\kappa - x^*$, $\varepsilon_{\kappa-1} = x_{\kappa-1} - x^*$ га нисбатан иккинчи тартибли чексиз кичик миқдор бўлади. Ҳақиқатан ҳам (5.2.1) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi(x_{\kappa-1}) + \frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}(x - x_{\kappa-1}) + \frac{1}{2}(x - x_{\kappa-1})\frac{\partial^2\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x^2}(x - x_{\kappa-1}) = 0,$$

бу ерда $x_{\kappa-1} \leqslant \xi < x$ ва $x = x^*$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x_{\kappa-1}) + \frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}(x^* - x_{\kappa-1}) + \frac{1}{2}(x^* - x_{\kappa-1})\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial x^2}(x^* - x_{\kappa-1}) = 0. \qquad (5.2.5)$$

(5.2.5) дан (5.2.3) ни айириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}(x^* - x_\kappa) + \frac{1}{2}(x^* - x_{\kappa-1})\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial x^2}(x^* - x_{\kappa-1}) = 0. \qquad (5.2.6)$$

Энди (5.2.6) дан

$$x^* - x_\kappa = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}\right]^{-1}(x - x_{\kappa-1})\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial x^2}(x^* - x_{\kappa-1})$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\left|\frac{\partial\varphi(x_{\kappa-1})}{\partial x}\right| = N, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi(\xi)}{\partial x^2}\right| = M$$

деб белгиласак, қуйидаги

$$\| x^* - x_\kappa \| \leqslant q \| x^* - x_{\kappa-1} \|^2$$

ёки

$$\| \varepsilon_\kappa \| \leqslant q \| \varepsilon_{\kappa-1} \|^2, \quad q = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N}$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Бу эса K- қадамдаги хато $(K-1)$-қадамдаги хатога нисбатан иккинчи тартибли кичик миқдор эканлигини билдиради. Демак, Ньютон усулининг аниқ ечимга яқинлашиш тезлиги иккинчи тартибли экан. Ньютон усули бўйича ҳисоблаш олдиндан берилган $\varepsilon > 0$ сон учун

$$| x_\kappa - x_{\kappa-1} | \leqslant \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилгунга қадар давом эттирилади.

1-мисол. $x^2 - 5 = 0$ тенгламанинг мусбат ечими $\varepsilon = 0{,}0001$ аниқликда Ньютон усули билан топилсин.

Ечиш. Берилган тенгламанинг ечими 2 билан 2,5 орасида эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шунинг учун дастлабки тақрибий ечим деб $x_0 = 2$ ни олишимиз мумкин. Берилган мисолда $\varphi(x) = x^2 - 5$ бўлгани учун $\varphi'(x) = 2x$ дир.

Демак, (5.2.3) формула бу мисол учун қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_\kappa = x_{\kappa-1} - \frac{x_{\kappa-1}^2 - 5}{2x_{\kappa-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{\kappa-1} + \frac{5}{x_{\kappa-1}}\right), \ \kappa = 1;\ 2;\ \ldots$$

x_0 учун 2 ни қабул қиламиз. У ҳолда:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{5}{2}\right) = 2{,}25,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2{,}25 + \frac{5}{2{,}25}\right) = \frac{1}{2}(2{,}25 + 2{,}2222) = 2{,}2361;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2{,}2361 + \frac{5}{2{,}2361}\right) = \frac{1}{2}(2{,}2361 + 2{,}2300) = 2{,}23605;$$

$$| x_3 - x_2 | = | 2{,}23605 - 2{,}2361 | < 0{,}0001$$

Демак, берилган тенгламанинг $\varepsilon = 0{,}0001$ аниқликдаги ечими $x^* = 2{,}2361$ экан.

2-мисол. Қуйидаги

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

тенгламанинг мусбат ечими $x_0 = 0{,}3$ бўлганда $\varepsilon = 0{,}001$ аниқликда Ньютон усули билан топилсин.

5.3-§. Чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш учун Ньютон усули

Фараз қилайлик, чизиқсиз тенгламалар системаси

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

нинг K- қадамдаги тақрибий ечими

$x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)}$ маълум бўлиб, $(\kappa+1)$- қадамдаги тақрибий ечими $x_1^{(\kappa+1)}, x_2^{(\kappa+1)}, \ldots, x_n^{(\kappa+1)}$ ни Ньютон усулида топиш талаб қилинган бўлсин.

Бу масалани ечиш учун қуйидаги

$$\Delta x_i^{(\kappa)} = x_i - x_i^{(\kappa)} \quad \text{ёки} \quad x_i = x_i^{(\kappa)} + \Delta x_i^{(\kappa)}, \ i = \overline{1,n}$$

белгилашларни киритамиз ва $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцияларни Δx_i^{κ} нинг даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйиб, биринчи ҳосила қатнашган ҳадлари билан чегаралансак,

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1^{(\kappa)} + \Delta x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)} + \Delta x_2^{(\kappa)}, \ldots, \\ \quad x_n^{(\kappa)} + \Delta x_n^{(\kappa)}) = f_1(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)}) + \dfrac{\partial f_1(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(\kappa)} + \\ \quad + \ldots + \dfrac{\partial f_1(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(\kappa)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_n(x_1^{(\kappa)} + \Delta x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)} + \Delta x_2^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)} + \\ + \Delta x_n^{(\kappa)}) = f_n(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)}) + \dfrac{\partial f_n(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)})}{\partial x_1} \Delta x_1^{(\kappa)} + \ldots + \\ \quad + \dfrac{\partial f_n(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)})}{\partial x_n} \Delta x_n^{(\kappa)} = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_1} \Delta x_1^{(\kappa)} + \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_2} \Delta x_2^{(\kappa)} + \ldots + \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_n} \Delta x_n^{(\kappa)} = -f_1(X_\kappa), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial f_n(X_n)}{\partial x_1} \Delta x_1^{(\kappa)} + \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_2} \Delta x_2^{(\kappa)} + \ldots + \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_n} \Delta x_n^{(\kappa)} = -f_n(X_\kappa) \end{aligned}$$

ва уни матрица кўринишда ёзсак,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n(X_n)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(\kappa)} \\ \Delta x_2^{(\kappa)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(\kappa)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(X_\kappa) \\ f_2(x_\kappa) \\ \vdots \\ f_n(X_\kappa) \end{bmatrix} \tag{5.3.1}$$

га эга бўламиз (5.3.1) ни $\Delta x_{i(\kappa)}$ $(i=\overline{1,n})$ га нисбатан ечамиз. У ҳолда

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1^{(\kappa)} \\ \Delta x_2^{(\kappa)} \\ \vdots \\ \Delta x_n^{(\kappa)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(X_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(X_\kappa) \\ \vdots \\ f_n(X_\kappa) \end{bmatrix} \qquad (5.3.2)$$

Энди

$$x_i^{(\kappa)} + \Delta x_i^{(\kappa)} = x_i^{(\kappa+1)}$$

деб белгиласак, (5.3.2) дан $(\kappa+1)$- қадамдаги тақрибий ечимни топиш учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(\kappa+1)} \\ x_2^{(\kappa+1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(\kappa+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(\kappa)} \\ x_2^{(\kappa)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(\kappa)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(X_\kappa) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(X_\kappa) \end{bmatrix} \qquad (5.3.3)$$

$$k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots .$$

Бу ерда $f_i(X_\kappa)=f_i\left(x_1^{(\kappa)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ldots,\ x_n^{(\kappa)}\right),\ i=\overline{1,n}.$

(5 3.3) ифода чизиқсиз тенгламалар системасининг тақрибий ечимини топиш учун *Ньютон формуласи* дейилади. Ньютон усулининг кейинги модификацияси қуйидагичадир: (5.2.3) формуладаги функцияларнинг ҳосилаларидан тузилган матрицанинг элементлари фақат дастлабки тақрибий ечим бўлган $(x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқтада ҳисобланади. Бу эса (5.3.3) формула билан тақрибий ечимларни ҳисоблашда сарфланадиган арифметик ҳисоблашлар сонини анча камайтиришга имкон беради.

(5.3.3) ни яна ҳам қулайроқ қуйидагича ёзиш мумкин:

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa - W^{-1}(X_\kappa)\cdot F(X_\kappa), \qquad (5.3.4)$$

$$\kappa=0;\ 1;\ 2;\ \ldots .$$

Бу ерда

$$X_\kappa = \begin{bmatrix} x_1^{(\kappa)} \\ x_2^{(\kappa)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(\kappa)} \end{bmatrix};\ F(X_\kappa) = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1^{(\kappa)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ldots,\ x_n^{(\kappa)}\right) \\ f_2\left(x_1^{(\kappa)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ldots,\ x_n^{(\kappa)}\right) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n\left(x_1^{(\kappa)},\ x_2^{(\kappa)},\ \ldots,\ x_n^{(\kappa)}\right) \end{bmatrix},$$

$$W^{-1}(X_\kappa) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_\kappa)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(X_\kappa)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X_\kappa)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(X_\kappa)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(X_\kappa)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}.$$

$W^{-1}(X_\kappa)$ матрица *Якоби матрицаси* дейилади. Модификацияланган Ньютон усули учун (5.3.4) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa - W^{-1}(X_0)\,F(X_\kappa) \qquad (5.3.5)$$

$$K = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$$

Бу формула ёрдамида чизиқсиз тенгламалар системасининг тақрибий ечимини ҳисоблаш учун сарфланадиган арифметик амаллар сони (5.3.4) формулага қараганда анча кам бўлади. Чунки Якоби матрицасининг элементлари фақат X_0 нуқтада бир марта ҳисобланади. Бироқ (5.3.5) формула билан ҳисобланадиган тақрибий ечимнинг аниқ ечимга яқинлашиш тезлиги (5.3.4) га нисбатан секинроқ бўлади.

Мисол. Дастлабки тақрибий ечим $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0{,}5$ бўлганда

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, \\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 = 0, \\ f_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг тақрибий ечими Ньютон усули билан ҳисоблансин.

Ечиш:

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_3 \\ 3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$F(X)$ векторнинг

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

нуқтадаги қиймати

$$F(X_0) = \begin{pmatrix} 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 - 1 \\ 0{,}5 + 0{,}25 - 2 \\ 0{,}75 - 2 + 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -1{,}25 \\ -1 \end{pmatrix}$$

га тенгдир. Энди Якоби матрицасини тузамиз:

$$W(X)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_3} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 4x_1 & 2x_2 & -4 \\ 6x_1 & -4 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

$W(X)$ нинг X_0 нуқтадаги қиймати

$$W(X_0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$ га

ва унинг детерминанти

$$\det W(X_0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-40$$

га тенгдир.

$W(X_0)$ га тескари $W^{-1}(X_0)$ матрица қуйидагига тенг:

$$W^{-1}(X_0)=-\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15- & -5 & -5 \\ -14- & 2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

(5. 3. 3) формулага асосан

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & \frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -0,375 \\ 0 \\ 0,125 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,875 \\ 0,5 \\ 0,375 \end{pmatrix}$$

Демак, $x_1^{(1)}=0,875$; $x_2^{(1)}=0,5$; $x_3^{(1)}=0,375$.

Энди $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $(x_3^{(1)})$ лардан фойдаланиб, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ ларни ҳисоблаймиз:

$$F(X_1)=\begin{pmatrix} (0,875)^2+(0,5)^2+(0,375)^2-1 \\ 2\cdot 0,875+0,5-4\cdot 0,375 \\ 3\cdot(0,875)^2-4,\ 0,5+(0,375)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,15625 \\ 0,25125 \\ 0,4375 \end{pmatrix}$$

$$W(X_1)=\begin{pmatrix}2\cdot 0{,}875 & 2\cdot 0{,}5 & 2\cdot 0{,}375\\ 4\cdot 0{,}875 & 2\cdot 0{,}5 & -4\\ 6\cdot 0{,}875 & -4 & 2\cdot 0{,}375\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}75 & 1 & 0{,}75\\ 3{,}5 & 1 & -4\\ 5{,}25 & -4 & 0{,}75\end{pmatrix}$$

$$det\ W(X_1)=\begin{vmatrix}1{,}75 & 1 & 0{,}75\\ 3{,}5 & 1 & -4\\ 5{,}25 & -4 & 0{,}75\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1{,}75 & 1 & 0{,}75\\ 1{,}75 & 0 & -0{,}75\\ 12{,}25 & 0 & 3{,}75\end{vmatrix}=-64{,}75$$

$$W^{-1}(X_1)=\frac{-1}{64{,}75}\begin{pmatrix}-15{,}25 & -3{,}75 & -4{,}75\\ -23{,}625 & -2{,}625 & -9{,}625\\ -19{,}25 & 12{,}25 & -1{,}75\end{pmatrix}.$$

(5. 3.3) ёки (5. 3. 4) формулага асосан $X_2=X_2-W^{-1}(X_1)\,F(X_1)=$

$$=\begin{pmatrix}0{,}875\\ 0{,}5\\ 0{,}375\end{pmatrix}+\frac{1}{64{,}75}\begin{pmatrix}-15{,}25 & -3{,}75 & -4{,}75\\ -23{,}625 & -2{,}625 & 9{,}625\\ -19{,}25 & 12{,}25 & -1{,}75\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}15625\\ 0{,}28125\\ 0{,}4375\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}875\\ 0{,}5\\ 0{,}375\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}08519\\ 0{,}00338\\ 0{,}00507\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}78981\\ 0{,}49662\\ 0{,}36993\end{pmatrix}$$

Демак, $X_2=(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)})^{-1}=(0{,}78981;\ 0{,}49662;\ 0{,}36993)$. Худди шу йўл билан X_3 ни ҳам топсак,

$$X_3=\begin{pmatrix}0{,}78521\\ 0.49662\\ 0{,}36992\end{pmatrix};\ F(X_3)=\begin{pmatrix}0{,}00001\\ 0{,}00004\\ 0{,}00005\end{pmatrix}$$

бўлади. Агар учинчи X_3 тақрибий ечим билан чегаралансак, берилган системанинг ечимини $x_1^{(3)}=0{,}78521$; $x_2^{(3)}=0{,}49662$; $x_3^{(3)}=$ $=0{,}36992$ деб қабул қиламиз.

Мисоллар: қуйидаги тенгламалар системасининг тақрибий ечимлари Ньютон усули билан топилсин:

1. $\left.\begin{array}{l}2x_1^3-x_2^2-1=0,\\ x_1x_2^3-x_2-4=0\end{array}\right\}$ $x_1^{(0)}=1{,}2;\quad x_2^{(0)}=1{,}7$
Жавоб: $x_1^{(2)}=1{,}2343$; $x_2^{(2)}=1{,}6615$.

2. $\left.\begin{array}{l}x_1+3\,lg\,x_1-x_2^2=0\\ 2x_2^2-x_1x_2-5x_1+1=0\end{array}\right\}$ $x_1^{(0)}=3{,}4;\quad x_2^{(0)}=2{,}2$
$x_1^{(2)}=3{,}4891;\ x_2^{(2)}=2{,}2621.$

Кўрсатма. $lg\,3{,}4=0{,}5315$; $lg\,e=0{,}43429$.

5. 4-§. Итерация усули

Бизга ушбу

$$f_i(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=0,\ i=\overline{1,n} \qquad (5.4.1)$$

чизиқсиз тенгламалар системасининг ҳақиқий ечимини топиш талаб қилинган бўлсин. Бу системани

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

векторлар ёрдамида қисқача қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F(X) = 0. \tag{5.4.2}$$

Фараз қилайлик, бу системанинг ҳақиқий ечими бирорта қавариқ G соҳада мавжуд бўлиб, $f_i(X)$ функцияларнинг биринчи тартибли ҳосилаларидан тузилган Якоби матрицаси қуйидаги кўринишда ифодалансин:

$$W(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Шу ҳақиқий ечимнинг атрофида махсус бўлмаган бирор матрица, яъни

$$det\ W(X) \neq 0$$

бўлсин. (5. 4. 1) системани қуйидагича ёза оламиз:

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \ i = \overline{1,n}.$$

у ҳолда уни қисқароқ кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$X = \varphi(X). \tag{5.4.8}$$

Бу ерда

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} \varphi_1(X) \\ \varphi_2(X) \\ \vdots \\ \varphi_n(X) \end{pmatrix}.$$

Агар $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ дастлабки тақрибий ечим бўлса, биринчи иккинчи ва ҳоказо қадамдаги тақрибий ечимлар қуйидагича аниқланади:

$$\begin{cases} X_1 = \varphi(X_0), \\ X_2 = \varphi(X_1), \\ \dots\dots \\ X_{k+1} = \varphi(X_k) \end{cases} \tag{5.4.4}$$

Агар бу итерация яқинлашувчи, яъни

$$\lim_{\kappa \to \infty} X_\kappa = X^* \tag{5.4.5}$$

бўлса, X^* (5. 4. 3) системанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (5. 4. 4) дан

$$\lim_{\kappa \to \infty} X_{\kappa+1} = \varphi (\lim_{\kappa \to \infty} X_\kappa)$$

бўлиб, (5. 4. 5) га асосан қуйидагича бўлади:

$$X^* = \varphi (X^*). \tag{5.4.6}$$

Бу эса X^* (5. 4. 3) системанинг ечими эканлигини билдиради. Энди (5. 4. 2) системани (5. 4. 3) кўринишда ёзиш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Агар (5. 4. 3) да

$$\varphi (X) = X + \lambda F (X), \ \lambda \neq 0 \tag{5.4.7}$$

бўлса,

$$X = X + \lambda F (X)$$

келиб чиқади ва бу тенгламанинг (5. 4. 2) тенглама билан тенг кучли эканлигини кўриш қийин эмас. (5. 4. 7) даги ҳозирча номаълум λ ни $\frac{\partial \varphi (X_0)}{\partial x} = 0$, яъни

$$\frac{\partial \varphi (X_0)}{\partial x} = E + \lambda \frac{\partial F (X_0)}{\partial X} = E + \lambda W (X_0) = 0$$

шартдан топамиз. У ҳолда

$$\lambda = - W^{-1} (X_0) \tag{5.4.8}$$

бўлади. (5. 4. 7) ва (5. 4. 8) ни (5.4.4) га қўйиб,

$$X_{\kappa+1} = X_\kappa - W^{-1} (X_0) F (X_\kappa)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу формула (5. 3. 5) формула билан бир хилдир. Бу ердан, қўрилаётган итерация усули модификациялашган Ньютон усули билан бир хил экан, деган хулосага келамиз.

Энди итерация усулининг аниқ ечимга яқинлашиш тезлигини исботлаймиз. Бунинг учун n ўлчовли R_n фазода қуйидаги нормаларни киритамиз:

$$\| X \|_m = \max_i | X_i |; \ \| X \|_l = \sum_{i=1}^{n} | x_i |; \ \| X \|_q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Буларнинг биринчиси *m норма*, иккинчиси l ва учинчиси *q норма* дейилади. $\varphi (X)$ векторнинг компонентлари бўлган $\varphi_i (X)$ ($i = \overline{1,n}$) функциялар биророрта қаварик G соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу соҳадаги ихтиёрий X_1 ва X_2 векторлар учун қуйидаги

$$\| \varphi (X_1) - \varphi (x_2) \| \leqslant q \| X_1 - X_2 \|, \ 0 \leqslant q \leqslant 1 \qquad (5.4.9)$$

тенгсизлик бажарилса, қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема. Агар $\varphi(x)$ функция (5. 4. 9) шартни қаноатлантирса, ихтиёрий танлаб олинган дастлабки тақрибий ечим X_0 учун

$$X_{\kappa+1} = \varphi (X_\kappa), \ K = 0; 1; 2; \ldots . \qquad (5.4.10)$$

итерацион процесс яқинлашувчи бўлиб, қуйидагича ифодаланади:

$$\lim_{k \to \infty} X_\kappa = X^*. \qquad (5.4.11)$$

Лимит вектор (5. 4. 3) тенгламанинг ягона ечими бўлиб,

$$\| X^* - X_\kappa \| \leqslant \frac{q^\kappa}{1-q} \| X_1 - X_0 \| \qquad (5.4.12)$$

тенгсизлик ўринлидир.

Исботи. Бизга маълумки, қуйидаги

$$\| X_{\kappa+p} - X_\kappa \| = \| (X_{\kappa+1} - X_\kappa) + (X_{\kappa+2} - X_{\kappa+1}) + \ldots +$$
$$+ (X_{\kappa+p} - X_{\kappa+p-1}) \| \leqslant \| x_{\kappa+1} - X_\kappa \| + \| X_{\kappa+2} - X_{\kappa-1} \| + \ldots +$$
$$+ \| X_{\kappa+p} - X_{\kappa+p-1} \| \qquad (5.4.13)$$

тенгсизлик ўринлидир. Чунки, йиғиндининг нормаси қўшилувчилар нормаларининг йиғиндисидан кичик. (5. 4. 10) ва (5. 4. 9) га асосан қуйидаги тегсизликларни ҳосил қиламиз:

$$\| X_{\kappa+1} - X_\kappa \| = \| \varphi (X_\kappa) - \varphi (X_{\kappa-1}) \| \leqslant q \| X_\kappa - X_{\kappa-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant q^2 \| X_{\kappa-1} - X_{\kappa-2} \| \leqslant \ \ldots \ \leqslant q^\kappa \| X_1 - X_0 \|;$$

$$\| X_{\kappa+2} - X_{\kappa+1} \| \leqslant q^{\kappa+2} \| X_1 - X_0 \|; \ \| X_{\kappa+3} - X_{\kappa+2} \| \leqslant q^{\kappa+2} \| X_1 - X_0 \|$$

. . . .

$$\| X_{\kappa+p} - X_{\kappa+p-1} \| \leqslant q^{\kappa+p-1} \| X_1 - X_0 \|.$$

Буни (5. 4. 13) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\| X_{\kappa+p} - X_\kappa \| \leqslant q^\kappa \| X_1 - X_0 \| + q^{\kappa+1} \| X_1 - X_0 \| + \ \ldots \ +$$
$$+ q^{\kappa+p-1} \| X_1 - X_0 \| = (1 + q + q^2 + \ \ldots \ +$$
$$+ q^{p-1}) \, q^\kappa \cdot \| X_1 - X_0 \| = \frac{1-q^p}{1-q} \cdot q^\kappa \| X_1 - X_0 \| = \frac{q^\kappa - q^{p+\kappa}}{1-q} \cdot$$
$$\cdot \| X_1 - X_0 \| \leqslant \frac{q^\kappa}{1-q} \| X_1 - X_0 \|. \qquad (5.4.14)$$

$0 < q \leqslant 1$ бўлгани учун $\kappa \to \infty$ да $q^\kappa \to 0$ бўлиб, $\| X_{\kappa+p} - X_\kappa \| \leqslant \varepsilon$

тенгсизлик ўринлидир. Шунинг учун $\lim_{\kappa\to\infty} X_\kappa = X^*$ бўлади. Демак, (5. 4. 14) да P етарлича катта бўлганда $X_{\kappa+p}=X^*$, деб олиш мумкин. Бу эса (5. 4. 12) тенгсизликнинг тўғри эканлигини билдиради.

Энди лимит вектор X^* (5. 4. 3) тенгламанинг ягона ечими эканлигини кўрсатамиз. $\psi(X)$ узлуксиз функция бўлгани учун (5. 4. 10) дан

$$\lim_{\kappa\to\infty} X_{\kappa+1} = \psi(\lim_{\kappa\to\infty} X_\kappa)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгликни (5. 4. 11 га) га асосан

$$X^* = \psi(X^*) \qquad (5\ 4.\ 15)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Фараз қилайлик, (5. 4. 3) тенглама бошқа бир $\overline{X}^*$ ечимга ҳам эга бўлсин, яъни

$$\overline{X}^* = \psi(\overline{X}^*).$$

Бу билан (5. 4. 15) нинг айирмасини оламиз ва унинг нормасини қараймиз:

$$\|\overline{X}^* - X^*\| = \|\psi(\overline{X}^*) - \psi(X^*)\| \leqslant q\|\overline{X}^* - X^*\|.$$

Бу ердан

$$(1-q)\|\overline{X}^* - X^*\| \leqslant 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. $(1-q)>0$ бўлгани учун $\|\overline{x}^* - x^*\|=0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $\overline{X}^*=X^*$ бўлиб, берилган (5, 4, 3)тенглама ягона X^* ечимга эга экан. Шу билан теорема тўла исботланди.

Мисол. Дастлабки тақрибий ечим $x_1^{(0)}=0{,}9$; $x_2^{(0)}=0{,}5$ бўлганда ушбу

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2 = 0$$

тенгламалар системасининг тақрибий ечими 0,0008 аниқликда итерация усули билан топилсин.

Ечиш.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \qquad F(X) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^3 - x_2 \end{pmatrix};$$

$$W(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Демак, (5. 3. 5) формула бу мисол учун қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(\kappa+1)} \\ x_2^{(\kappa+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(\kappa)} \\ x_2^{(\kappa)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1^{(\kappa)} & 2x_2^{(\kappa)} \\ 3\,(x_1^{(\kappa)})^2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (x_1^{(\kappa)})^2 + (x_2^{(\kappa)})^2 - 1 \\ (x_1^{(\kappa)})^3 - x_2^{(\kappa)} \end{pmatrix}; \tag{5. 4. 16}$$

$$F(X_0) = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,229 \end{pmatrix};\ W(X_0) = \begin{pmatrix} 1,8 & 1 \\ 2,43 & -1 \end{pmatrix};\ det\ W(X_0) = -4,23,$$

$$W^{-1}(X_0) = -\frac{1}{4,23}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2,43 & -1,8 \end{pmatrix}.$$

Бу ифодаларни (5. 4. 16) га қўйсак, $K=0$ бўлганда қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4,23}\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -2,43 & -1,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,229 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,0683 \\ -0,5630 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8317 \\ 0,563 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix} x_1^{(1)} = 0,8317 \\ x_2^{(1)} = 0,563 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8317 \\ 0,563 \end{pmatrix} - \frac{1}{4,23}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2,43 & -1,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (0,8317)^2 - (0,563)^2 - 1 \\ (0,8317)^3 - 0,563 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8317 \\ 0,563 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,0049 \\ 0,0003 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8268 \\ 0,5683 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix} x_1^{(2)} = 0,8268; \\ x_2^{(2)} = 0,5633. \end{matrix}$$

Худди шу йўл билан

$$\begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8268 \\ 0,5633 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,0007 \\ 0,0002 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8261 \\ 0,5631 \end{pmatrix};\quad \begin{matrix} x_1^{(3)} = 0,8261, \\ x_3^{(3)} = 0,5631. \end{matrix}$$

ни топамиз. $|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,0007$; $|x_2^{(3)} - x_2^{(2)} = 0,0002$ бўлгани учун иккинчи қадамдаги қуйидаги

$$x_1^{(2)} = 0,8268.\quad x_2^{(2)} = 0,5633$$

тақрибий ечимни берилган тенгламалар системасининг ечими деб қабул қиламиз.

Мисоллар. Итерация усули билан қуйидаги тенгламалар системасининг тақрибий ечимлари топилсин:

1) $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0,1 = 0 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0,2 = 0 \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0,3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0,\ \varepsilon = 0,01$$

2) $$\left.\begin{aligned} 2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0 \\ x_1\, x_2^3 - x_2^0 - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1^{(0)} - 1,2;\ x_2^{(0)} = 1,7,$$

$$\varepsilon = 0,0007.$$

5. 5-§. Градиент усуллар

1. Градиент усуллар ҳақида умумий тушунчалар

Чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечишда энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири градиент усулларидир. Функцияларнинг минимумини топишда қўлланиладиган градиент усуллар дастлабки танлаб олинган X_0 тақрибий ечимни (5. 4. 2) тенгламанинг аниқ ечим йўналиши бўйича кетма-кет аниқлигини оширишга асослангандир.

Таъриф. n ўлчовли R_n фазода берилган $F(X)$ функциянинг X_0 нуқтадаги градиенти $grad\,F(X_0)=\frac{dF(X_0)}{\partial x}$ деб

$$F(X_0+\Delta X)-F(X_0)$$

чекли орттирманинг чизиқли қисмига айтилади, яъни

$$F(X_0+\Delta X)-F(X_0)=grad\,F(X_0)\,\Delta X+0(\Delta X).$$

Градиентнинг физик маъноси қуйидагича:

X_0 нуқтадан ҳаракат йўналиши $l_1\,\|l\|=1$ танланади. X_0 нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилганлиги учун вақтнинг чизиқли функциясидан иборат бўлади, яъни

$$X(t)=X_0+tl.$$

$F(X)$ функция вақт бўйича қуйидаги $\varphi(t)=F\,[X(t)]$ қонун бўйича ўзгаради, $t=0$ вақтдаги тезлик

$$\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial F\,[X(t)]}{\partial X}\cdot\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{\partial F\,[X(t)]}{\partial X}\cdot l.$$

Бу тенгликдан $F(X)$ функциянинг l йўналиш бўйича ўзгариш тезлиги $\frac{\partial F(X)}{\partial X}$ га тенг эканлиги келиб чиқади.

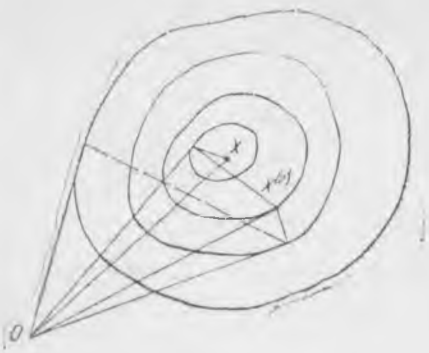
Демак, функциянинг бирор нуқтадаги градиенти шу функциянинг X_0 нуқтадан тез ўсиш йўналишини билдиради. $(-grad\,F(X_0))$ — антиградиент дейилади ва $F(X)$ функциянинг X_0 нуқтадан тез камайиш йўналишини кўрсатади.

Ҳамма градиент усуллар функция градиентининг юқоридаги хоссаларига асослангандир. Градиент усуллар ичида энг кўп қўлланиладиганларидан бири кескин пасайиш усулидир. Энди шу усул устида тўхтаб ўтамиз.

2. Кескин пасайиш усули

Бизга (5. 4. 1) чизиқсиз тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу системани вектор формадаги (5. 4. 2) кўринишда ёзиш мумкин. Қуйидаги

$$\varphi(X)=\sum_{i=1}^{n}|f_i(X)|^2=(F(X),\;F(X))\qquad(5.\,5.\,1)$$



23- расм.

функцияни киритамиз. (5. 4. 1) системани қаноатлантирадиган X вектор $\varphi(X)$ функцияга минимум берувчи нуқта ва, аксинча, функцияга минимум берувчи ҳар қандай нуқта (5. 4. 1) тенгламалар системасининг ечими эканлиги маълум. Шунинг учун (5. 4. 1) системанинг ечимини топиш ўрнига (5. 5. 1) функциянинг минимумини топиш кифоядир. Фараз қилайлик X_0 (5. 4. 1) системанинг аниқ ечими X га нисбатан дастлабки тақрибий ечим бўлсин. Агар X_0 X га яқин бўлса,

$$\varphi(X)=\varphi(X_0)$$

тенглама эллипсоидга ўхшаган бирорта сирт юзасини билдиради (23-расмга қаранг). Бу сирт сатҳига O нуқтадан уринма ўтказамиз ва уриниш нуқтасини X_0 билан белгилаймиз. Бу нуқтадан нормал ўтказамиз ва бу нормални иккинчи бир сирт юзаси

$$\varphi(X)=\varphi(X_1)$$

билан кесишгунча давом эттирамиз. Кесишиш нуқтасини X_1 билан белгилаймиз. Худди шу усул билан давом этиб

$$\varphi(X_1),\ \varphi(X_2),\ \ldots,\ \varphi(X_\kappa),\ \ldots$$

сирт юзаларини ва $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_\kappa,\ \ldots$ нуқталарни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\varphi(X_0)>\varphi(X_1)>\varphi(X_3)>\ldots>\varphi(X_\kappa)>\ldots$$

бўлганлиги учун процессни давом эттириб, $\psi(X)$ функцияга минимум қиймат берувчи нуқтани топамиз. Бу нуқта эса берилган (5. 4. 1) тенгламалар системасининг ечими бўлади. Энди

$$grad\,\psi(X)=\frac{\partial\varphi(X)}{\partial X}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi(X)}{\partial x_1}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial\varphi(X)}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\Delta\varphi(X)$$

деб белгиласак, изланаётган ечим қуйидаги итерация формуласи орқали топилади:

$$X_{\kappa+1}=X_\kappa-\lambda_\kappa\, grad\,\psi(X_\kappa)=X_\kappa-\lambda_\kappa\Delta\varphi(X_\kappa) \qquad (5.\,5.\,2)$$

Бу формулада $\lambda_к$ ҳозирча номаълум кўпайтувчидир. Бу номаълумни топиш учун ушбу

$$\Phi(\lambda)=\varphi\left[X_к-\lambda\Delta\varphi(X_к)\right]. \qquad (5.5.3)$$

скаляр функцияни қараймиз. $\Phi(\lambda)$ функция $X_к$ нуқтадан $\varphi(X_к)$ функциянинг сирт юзасига ўтказилган нормал бўйича $\varphi(X_к)$ функция юзасининг ўзгаришини билдиради. Сирт юзаси қанча кичик бўлса, биз топишимиз керак бўлган ечимга шунча яқин келган бўламиз. Шунинг учун $\lambda\,\Phi(\lambda)$ функция минимуми мавжудлигининг биринчи тартибли зарурий шарти қуйидаги ифодадан топилади:

$$\frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\varphi\left[X_к-\lambda\Delta\varphi(X_к)\right]. \qquad (5.5.4)$$

(5. 5. 3) ни (5. 5. 4) га асосан қуйидагича ёзамиз:

$$\Phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\{f_i[X_к-\lambda\Delta\varphi(X_к)]\} \qquad (5.5.5)$$

f_i функцияларни $\lambda\Delta\varphi(X_к)$ нинг даражалари бўйича Тейлор қаторнга ёйиб дастлабки иккита қўшилувчи билан чегараламиз, яъни

$$f_i[X_к-\lambda\Delta\varphi(X_к)]=f_i(X_к)-\lambda\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial X}\Delta\varphi(X_к).$$

Буни (5. 5. 5) га қўйиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\Phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\left\{f_i(X_i)-\lambda\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial X}\Delta\varphi(X_к)\right\}^2 \qquad (5.5.6)$$

Бу ерда қуйидаги

$$\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial X}=\left(\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_i(X_к)}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f_i(X_к)}{\partial x_n}\right)$$

вектор сатрдир. (5. 5. 6) ни (5. 5. 4) га қўйиб, қуйидаги

$$2\sum_{i=1}^{n}\left\{f_i(X_к)-\lambda\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial x}\Delta\varphi(X_к)\right\}\frac{\partial f_i(X_к)}{\partial X}\Delta\varphi(X_к)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан $\lambda=\lambda_к$ ни топамиз, яъни

$$\lambda_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(X_k)\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial X}\Delta\varphi(X_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial X}\Delta\varphi(X_k)\right]^2}=\frac{(F(X_k),W(X_k)\Delta\varphi(X_k))}{(W(X_k)\Delta\varphi(X_k)W(X_k)\Delta\varphi(X_k)}. \qquad (5.5.7)$$

Бу ерда, қуйидаги ифода

$$W(X_k) = \frac{\partial F(X_k)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(X_k)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n(X_n)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

квадрат матрицадир.

(5.5.1) дан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} [f_i(X)]^2\right) = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\frac{\partial f(X)}{\partial x_j},\ j = \overline{1,n}.$$

Демак,

$$\Delta\varphi(X_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \varphi(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i(X_k)\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^{n} f_i(X_k)\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial x_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{n} f_i(X_k)\frac{\partial f_i(X_k)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2W'(X_k)F(X_k).$$

Буни (5.5.7) ва (5.5.2) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$2\lambda_k = \frac{(F(X_k), W(X_k)W'(X_k)F(X_k))}{(W(X_k)W'(X_k)F(X_k), W(X_k)W'(X_k)F(X_k))}.$$

$$X_{k+1} = X_k - 2\lambda_k W'(X_k)F(X_k),\ k = 1; 2; 3; \ldots .$$

Бу формулалар чизиқсиз тенгламалар системасининг ечими- ни топишда қўлланиладиган кескин пасайиш усулининг фор- мулалари дейилади. Бу формулалар орқали чизиқсиз тенгла- малар системасининг тақрибий ечимларини ҳисоблашда қўлла- надиган арифметик амаллар сони Ньютон ва итерация усул- ларига нисбатан анча кўпдир. Бироқ, бу усул Ньютон ва итерация усулига қараганда маълум афзалликларга эга. Бу усул дастлабки тақрибий ечим ихтиёрий бўлганда ҳам яқин- лашувчи булади. Шунинг учун, кескин пасайиш усули чизиқ- сиз тенгламалар системасини ечишда энг умумий усул ҳисоб- ланади.

Мисол. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 &= 0{,}1; \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 &= -0{,}2; \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 &= 0{,}3 \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системасининг тақрибий ечими кескин пасайиш усули билан топилсин.

Ечиш. Дастлабки тақрибий ечим X_0 учун ихтиёрий векторни қабул қилишимиз мумкин. Соддалик учун

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

деб қабул қиламиз

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0{,}1 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0{,}2 \\ x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0{,}3 \end{pmatrix};$$

$$W(X) = \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_1 & -2x_3 & -2x_2 \\ 3x_3 & 1 - 2x_2 & 3x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 1 + 2x_3 \end{pmatrix};$$

$$F(X_0) = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}2 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}, \quad W(X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$2\lambda_0 = \frac{(F(X_0),\ F(X_0))}{(F(X_0),\ F(X_0))} = 1;$$

$$W(X_0) = E, X_1 = X_0 - 1E \cdot F(X_0) = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$$

ни ҳам худди шундай топамиз.

$$F(X_1) = \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}05 \\ 0{,}05 \end{pmatrix}; \quad W(X_1) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}6 & -0{,}4 \\ 0{,}9 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$$

$$W^1(X_1) = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}9 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 1{,}4 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}; \quad W W^1 F(X_1) = \begin{pmatrix} 0{,}2748 \\ 0{,}2098 \\ 0{,}1632 \end{pmatrix}.$$

Демак,

$$2\lambda_1 = \frac{(F(X_1),\ W(X_1) \cdot W^1(X_1) \cdot F(X_1))}{(W(X_1)W^1(X_1)F(X_1),\ W(X_1)W\ (X_1)F(X_1))} =$$

$$= \frac{0{,}13 \cdot 0{,}2748 + 0{,}05 \cdot 0{,}2098 + 0{,}05 \cdot 0{,}1632}{0{,}2748^2 + 0{,}2098^2 + 0{,}1632^2} = \frac{0{,}054374}{0{,}14619797} = 0{,}3719,$$

$$X_2=\begin{pmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\x_3^{(1)}\end{pmatrix}-2\lambda_1 W'(X_1)F(X_1)=\begin{pmatrix}0,1\\-0,2\\0,3\end{pmatrix}-0,3719\begin{pmatrix}0,181\\0,002\\0,147\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,0327\\-0,2007\\0,2453\end{pmatrix}.$$

Демак,

$$X_2=\begin{pmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\x_3^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,0327\\-0,2007\\0,2453\end{pmatrix};\qquad \begin{array}{l}x_1^{(2)}=0,0327;\\x_2^{(2)}=-0,2007;\\x_3^{(2)}=0,2453.\end{array}$$

Бу қийматларни тенгламага қўйиб, қўйилган хатони ҳисоблаймиз:

$$F(X_2)=\begin{pmatrix}0,032\\-0,017\\-0,007\end{pmatrix}.$$

Мисоллар. Қуйидаги тенгламалар системалари кескин пасайиш усули билан ечилсин:

1. $\left.\begin{array}{l}x_1^2+x_2^2=0,041,\\x_1+x_2^2=0,19.\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}x_1+x_2^2+x_3^2=3,\\x_1^2+x_2-x_3^2=1,\\x_1^2-x_2^2+x_3=1.\end{array}\right\}$

5.6-§. Жарима функция усули

Берилган шартли экстремум масаласини ечишни кетма-кет шартсиз экстремум масаласини ечишга келтирадиган усул *жарима функция усули* дейилади. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. Бизга $f(X)$ функциянинг ушбу

$$g_i(X)\geqslant 0,\ i=\overline{1,m},$$

чекланиш шартларини қаноатлантирувчи максимумини топиш талаб қилинган бўлсин. Бунинг ўрнига номаълум X га ҳеч қандай қўшимча шарт қўйилмаган ёрдамчи

$$\varphi(X)=f(X)+H(X)\qquad(5.6.1)$$

функциянинг максимумини топамиз.

Агар бу функцияга максимум берувчи ечим чекланиш шартлари $g_i(X)\geqslant 0$ ни қаноатлантирса, $H(X)=0$ бўлади, акс ҳолда эса $H(X)$ қаноатлантирилмаган чекланиш шартларига тўланадиган жаримани билдиради.

Шунинг учун, (5.6.1) даги $H(X)$ функция жарима функция дейилади. Бу усулнинг номи ҳам мана шу функциянинг номидан келиб чиққан.

Одатда, жарима функция қуйидагича танланади.

$$H(X)=\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(X)g_l(X),$$

бу ерда,

$$\alpha(X)=\begin{cases}0, \text{ агар } g_l(X)\geqslant 0;\\ \alpha, \text{ агар } g_l(X)<0.\end{cases} \quad (5.6.2)$$

Демак, жарима функция ёрдамида шартли экстремум масаласи шартсиз экстремум масаласига келтирилади, α параметр етарлича катта сон бўлиб, чекланиш шартлари қаноатлантирилмайдиган ҳамма нуқталарда

$$\alpha\left|\frac{\partial H(X)}{\partial x_j}\right|\gg\left|\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}\right|,\ j=\overline{1,n} \quad (5.6.3)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олинади.

Бу шартдан кўринадики, агар X мумкин бўлган ечимлар тўпламида бўлса, $\varphi(X)$ нинг градиенти $f(X)$ нинг градиентига тенг бўлади, акс ҳолда эса (5.6.3) шарт мумкин бўлган ечимлар тўпламига қараб функциянинг йўналишини кўрсатади.

Чекланиш шартлари ушбу

$$g_l(X)\geqslant 0,\quad i=\overline{1,m},\quad X\geqslant 0$$

тенгсизликлар системасидан иборат бўлганда жарима функция ёрдамида чизиқсиз программалаш масалаларини ечиш учун градиент усулини қўлласак, тақрибий ечимни топиш учун қуйидаги

$$x_j^{(k+1)}=\max\left\{0;\ x_j^{(k)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X_k)}{\partial X_j}+\sum_{l=1}^{m}\alpha_l(X_k)\frac{(\partial g_l X_k)}{\partial X_j}\right]\right\} \quad (5.6.4)$$

$$j=\overline{1,n}.$$

формулага эга бўламиз. Агар X_k мумкин бўлган ечимлар тўпламидан бўлса, квадрат қавс ичидаги иккинчи қўшилувчи бўлмайди, яъни

$$\alpha_l(X_k)=0$$

Агар X_k мумкин бўлган ечимлар тўпламига қарашли бўлмаса, $\alpha_l(X_k)\neq 0$ бўлиб, X_{k+1} ни мумкин бўлган ечимлар тўпламига қараб йўналтиради. $\lambda - X_{k+1}$ нинг мумкин бўлган ечимлар тўпламидан чиқиб кетмаслик шартидан топиладиган ихтиёрий параметрдир.

Шундай қилиб, жарима функция изланаётган ечимни мумкин бўлган ечимлар тўпламидан топишга имкон берар экан.

1-мисол. Ушбу $f(x_1, x_2)=x_1+2x_2-x_1^2-0{,}5x_2^2$ функциянинг

$$g_1(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2 + 6 \geqslant 0;$$
$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 - 4x_2 + 5 \geqslant 0$$

шартларини қаноатлантирадиган максимуми топилсин.

Ечиш.

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 1 - 2x_1; \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 2 - x_2;$$

$$\frac{\partial g_1(X)}{\partial x_1} = -2; \quad \frac{\partial g_1(X)}{\partial x_2} = -3; \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_1} = -1; \quad \frac{\partial g_2(X)}{\partial x_2} = -4.$$

(5.6.4) формула бу мисол учун қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$x_1^{k+1} = \max\{0; x_1^{(k)} + \lambda[1 - 2x_1^{(k)} + \alpha_1(-2) + \alpha_2(-1)]\}$

$x_2^{k+1} = \max\{0; x_2^{(k)} + \lambda[2 - x_2^{(k)} + \alpha_1(-3) + \alpha_2(-4)]\}$.

Дастлабки тақрибий ечим учун $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$ ва $\lambda = 0{,}2$; $\alpha = 2$ ларни қабул қиламиз. $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$

$$g_1 x(_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \geqslant 0, \quad g_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \geqslant 0$$

бўлгани учун (5.6.2) га асосан $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ дир. Демак,

$x_1^{(1)} = \max\{0; 0 + 0{,}2 \cdot [1 - 0 + 0 + 0]\} = 0{,}2,$

$x_2^{(1)} = \max\{0; 0 + 0{,}2 \cdot [2 - 0 + 0 + 0]\} = 0{,}4.$

$f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0{,}2 + 0{,}8 - 0{,}04 - 0{,}08 = 0{,}88$

$x_1^{(2)} = \max\{0; 0{,}2 - 0{,}2 \cdot [1 - 2.0{,}2]\} = 0{,}32$

$x_2^{(2)} = \max\{0; 0{,}4 + 0{,}2 \cdot [2 - 0{,}4]\} = 0{,}72$

$f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0{,}32 + 1{,}44 - 0{,}1024 - 0{,}2592 = 1{,}4$

$g_1(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = -0{,}64 - 2{,}16 + 6 \geqslant 0,$

$g_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = -0{,}32 - 2{,}88 + 5 \geqslant 0.$

Демак, (5.6.2) га асосан

$\alpha_1(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = \alpha_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0$

$x_1^{(3)} = \max\{0; 032 + 0{,}2 \cdot [1 - 0{,}64 + 0 + 0]\} = 0{,}4$

$x_2^{(3)} = \max\{0; 0{,}72 + 0{,}2 \cdot [2 - 0{,}72 + 0 + 0]\} = 1$

$f(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = 1{,}74$ ва ҳ.к.

2-мисол. Ушбу

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + x_1x_2 - x_1^2 + x_2^2$$

функциянинг $\lambda = 0{,}1$; $\alpha = 2$; $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 1$ бўлганда чеклаш шартлари

$$g_1(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 + 2{,}5 \geqslant 0$$
$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 - 4x_2 + 3 \geqslant 0$$

ни қаноатлантирадиган максимуми топилсин.

5.7-§. Тасодифий излаш усули

Кўпинча ўзгарувчи функцияларнинг максимумини ёки минимумини топишда тасодифий излаш усуллари қўлланилади. Юқорида кўриб ўтилган чизиқсиз программалаштириш масалаларини ечиш усуллари детерминаллашган усуллар бўлиб, бир қадамдан иккинчи қадамга ўтиш маълум бир алгоритм ёрдамида бажарилар эди. Тасодифий излаш усулларида эса бир қадамдан иккинчи қадамга ўтиш тасодифий тарзда содир бўлади. Қуйида шу усулнинг икки турини келтирамиз.

1. Бизга қуйидаги

$$f(X), \quad X = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$$

функциянинг минимумини топиш талаб қилинган бўлсин.

Дастлабки тақрибий ечим $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ дан тасодифий (ихтиёрий) йўналиш бўйича $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ қадам олинади ва $X^{(1)} = X^{(0)} + h$ да мақсад функция $f(X)$ нинг сон қиймати ҳисобланади. Агар $f(X^{(1)}) > f(X^{(0)})$ бўлса, $X^{(0)}$ нуқтадан бошқа бир йўналиш бўйича h қадам олинади ва $f(X^{(1)})$ нинг қиймати ҳисобланиб, $f(X^{(0)})$ билан таққослаб кўрилади. Бу $f(X^{(1)}) < f(X^{(0)})$ бўлгунга қадар давом эттирилади. Бу шарт бажарилгандан кейин $X^{(1)}$ нуқтадан ихтиёрий йўналишлар бўйича h қадам олиниб, $X^{(2)} = X^{(1)} + h$ да мақсад функциянинг қиймати ҳисобланади ва $f(X^{(1)}$ билан таққослаб кўрилади. Бу ишни кетма-кет такрорлаб қуйидаги тенгсизликлар кетма-кетлиги ҳосил қилинади: $f(X^{(0)}) > f(X^{(1)}) > f(X^{(1)}) > \ldots$.

Агар олдиндан берилган етарлича кичик мусбат ε сон учун бирорта K = қадамда ҳамма йўналишлар бўйича қуйидаги

$$|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$$

мусбат тенгсизлик бажарилса, $X = X^{(k)}$ нуқта берилган функцияга минимум берувчи ечим сифатида қабул қилинади.

Бу усулнинг бошқа усулларга нисбатан афзаллиги унинг соддалигидадир, камчилиги эса жуда секин яқинлашишдир.

2. Энди $f(X)$ функциянинг минимумини топиш учун тасодифий излаш усулининг тажрибада кўп қўлланадиган қуйидаги алгоритмини келтирамиз:

ихтиёрий танлаб олинган $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ нуқтадан, шу нуқтанинг $x_1^{(0)}$ координатаси бўйича h_1 синов қадам билан

$$X_0^{(1)} = (x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \text{ ва } X_0^{(1)} = (x_1^{(0)} - h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

нуқтага ўтамиз ва бу нуқталарда берилган $f(X)$ функциянинг қийматларини таққослаб кўрамиз. Агар $f(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) < f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ бўлса, $X_0^{(1)}$ учун $X_0^{(1)} = (x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ ни, акс ҳолда

$$f(x_1^{(0)} - h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) < f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$$

нинг туғрилигини текшириб кўрамиз. Агар бу тенгсизлик ўринли бўлса, $X_0^{(1)}$ учун $X_0^{(1)} = (x_1^{(0)} - h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ ни қабул қиламиз. Агар $f(x)_1^{(0)} \pm h_1, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(0)}) > f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ бўлса, $X_0^{(1)}$ учун $X_0^{(1)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ ни қабул қиламиз. Юқорида бажарилган ишни берилган нуқтанинг ҳамма координаталари, яъни $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ лар бўйича кетма-кет такрорлаб $X_0^{(n)}$ ни ҳосил қиламиз ва қуйидаги

$$X_1^{(0)} = X_0^{(0)} + 2(X_0^{(n)} - X_0^{(0)}) = 2X_0^{(n)} - X_0^{(0)}$$

формула орқали (натижали қадам билан) $X_1^{(0)}$ нуқтага ўтилади ва $X_0^{(0)}, X_1^{(0)}$ нуқталарда $f(X_0^{(0)}), f(X_1^{(0)})$ лар ҳисоблаб, таққослаб кўрилади. $X_0^{(0)}$, $X_1^{(0)}$ ларнинг қайси бири берилган функцияга мицимум берса, ўша нуқтадан яна синов қадами олинади ва синов қадам натижа бермай қолгунча бу иш такрорланади. Кейин синов қадамнинг қиймати камайтирилиб, майда қадамлар билан берилган $f(X)$ функциянинг қийматини, бошқа камайтиришга имкон бўлмай қолгунга қадар юқоридаги ҳол давом эттирилади. Берилган функцияга энг кичик қиймат берувчи $X_1^{(*)}$ нуқта ва $\min f(X) = f(X_1^{(*)})$ эслаб қолинади. Кейин $X_1^{(*)}$ нуқтадан унинг ҳамма координаталарига $\Delta x_i^{(*)}$ орттирмалар берилган катта қадам олинади. Ҳосил бўлган нуқтадан юқорида баён қилинган алгоритмни такрорлаб, X_2^{*} нуқтага ўтамиз. Топилган $X_1^{(*)}, X_2^{(*)}$ нуқталар ёрдамида жарли қадам деб аталувчи қадам билан X^* нуқтага қуйидагича ўтилади:

агар $f(X_2^{(*)}) \leqslant f(X_1^{(*)})$ бўлса, $X^{(*)} = X_1^{(*)} + \mu(X_2^{(*)} - X_1^{(*)})$ деб, агар $f(X_2^{(*)}) \geqslant f(X_1^{(*)})$ бўлса, $X^{(*)} = X_2^{(*)} + \mu(X_1^{(*)} - X_2^{(*)})$ деб олинади.

Бу ерда $\mu > 1$ коэффициент оптимал нуқта атрофида алгоритмнинг қайта-қайта такрорланиб қолмаслиги учун жарли қадамни танлашга ёрдам берувчи коэффициентдир. Топилган $X^{(*)}$ нуқтадан янги синов қадам билан $|X_{k+1}^{(*)} - X_k^{(*)}| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилгунча юқорида баён қилинган ҳисоблаш ишлари такрорланади.

Юқорида баён қилинган кўп ўзгарувчили функциялар минимумини топиш алгоритмидан ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу алгоритм μ нинг катта қийматларида берилган $f(X)$ функциянинг узлуксиз функция бўлмаган ҳолларида ҳам, фақат нисбий минимумини, балки абсолют минимумини топишда ҳам жуда қўл келади.

6-БОБ. ФУНКЦИОНАЛЛАРНИ МИНИМАЛЛАШ

6.1-§. Функционал ҳақида тушунча ва оптималлаш вариацион масаласининг мавзу баҳси

$Z = f(x)$ функциянинг экстремум қийматларини топиш масаласи билан бирга оптималлашнинг шундай масалалари ҳам мавжудки, бу ерда алоҳида хусусиятга эга бўлган миқдорларнинг, яъни функционалларнинг экстремум қийматларини топишга тўғри келади. Функционалларнинг экстремум қийматларини топиш масаласи оптималлашнинг *вариацион масаласи* дейилади.

Энг аввало, функционал ҳақида тўхталиб ўтамиз.

Таъриф. Бирор $K = \{y(x)\}$ функциялар синфидан олинган ҳар бир $y(x)$ функцияга боғлиқ равишда ўзгарувчи I сон, яъни

$$I = I[y(x)]$$

функционал дейилади. I функционал ўринли бўлган $K=\{y(x)\}$ функциялар синфи функционалнинг аниқланиш соҳаси, $y(x)$ функциянинг ўзи эса *мумкин бўлган функция* дейилади.

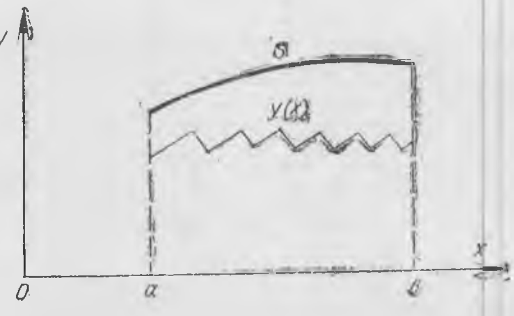
Функционалга қуйидаги интеграл мисол бўла олади:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x_1 y(x),\ y'(x))\ dx,$$

бу интеграл $y = f(x)$ функцияга боғлиқ.

Масалан, $[x_1, x_2]$ кесмада дифференциалланувчи $K=\{y(x)\}$ функциялар тўпламини қарайлик, яъни $y(x) \in c^{(1)}$. У ҳолда $x=x_1$ ва $x = x_2$ нуқталар орасидаги $y=y(x)$ эгри чизиқнинг ёй узунлиги—S, K соҳадаги $y(x)$ функциянинг функционали бўлади ва қуйидагича ҳисобланади:

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-(y'(x))^2}\ dx.$$



24- расм.

Бу ифода 24-расмда кўрсатилган. Шундай қилиб, оптималлаш вариацион масаласининг асосий вазифаси интеграл орқали ифодаланувчи бирон бир миқдорга (функционалга), яъни

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F[x_1, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)]\, dx$$

га экстремум қийматлар берувчи $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ функцияларни топишдан иборатдир.

Бу ерда F функциянинг кўриниши ва x_1, x_2 ларнинг қийматлари олдинда берилган бўлади.

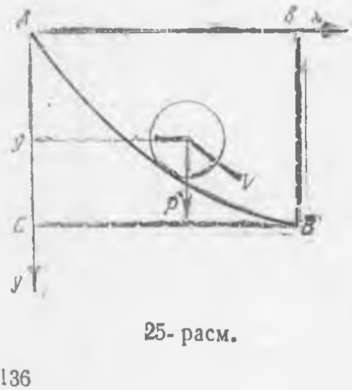
6.2-§ Вариацион ҳисобнинг энг оддий масаласи, Брахистохрон масаласи

Вариацион ҳисобига энг оддий мисол қилиб Брахистохрон масаласини олиш мумкин.

Брахистохрон сўзи грекча қисқартирилган сўз бўлиб, *брахистос*— энг қисқа, *хронос*— вақт маъносини билдиради. Шундай қилиб, бу масала, бошқача қилиб айтганда, энг қисқа вақт ҳақидаги масаладир. Бу масала 1696 йилда Иоганн Бернулли томонидан қўйилган бўлиб, унинг маъноси қуйидагидан иборат: вертикал текисликда ҳар хил ҳолатда жойлашган A ва B нуқталар берилган бўлсин (25- расм). A нуқтага массаси m га тенг бўлган оғир шарча қўзғалмайдиган қилиб ўрнатилган бўлсин. $t=0$ вақтда бу шарча оғирлик кучи P таъсирида A ва B нуқталарни туташтирувчи чизиқ бўйича ҳаракатланиб, A нуқтадан B нуқтага келадиган бўлсин. A ва B нуқталарни шундай текис чизиқ билан туташтириш талаб қилинадики, шарча шу чизиқ бўйича ҳаракатланиб, A нуқтадан B нуқтагача бўлган йўлни энг қисқа вақт ичида босиб ўтсин. Бошқача қилиб айтганда, чизиқ қандай формада бўлган шарчанинг A нуқтадан B нуқтага тушиш вақти энг қисқа бўлади.

A ва B нуқталарни 25- расмдагидек жойлаштириб, қўйилган масаланинг математик моделини тузайлик.

Энергиянинг сақланиш қонунига асосан, огирлик кучи $P=mg$ нинг $y(x)$ масофада бажарган иши $A = mg\,y(x)$, кинетик энергияси $K = \frac{mv^2}{2}$ га тенгдир, яъни



25- расм.

$$A = K. \qquad (6.2.1)$$

Бу ерда v—нуқтанинг t вақтидаги тезлиги, $y(x)$—изланаётган чизиқнинг тенгламаси, $g = \frac{P}{m}$ — — жисмнинг эркин тушиш тезланишидир. (6.2.1) ни қуйидагича ёзамиз:

$$mg\,y(x) = \frac{mv^2}{2},$$

бу ердан v ни топамиз, яъни

$$v=\sqrt{2g\,y(x)}, \qquad (6.2.2)$$

иккинчи томондан,

$$v=\frac{ds}{dt},\ ds=\sqrt{(dy)^2+(dx)^2},\ dy=y'(x)dx,$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx},\ ds=vdt\ dt=\frac{ds}{v}.$$

Бу ердан

$$\int_0^T dt=\oint_{\breve{AB}}\frac{ds}{v},$$

$ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ бўлганлиги учун (6.2.2) га асосан қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$T=\int_0^b\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{y(x)}}\,dx. \qquad (6.2.3)$$

Шундай қилиб, Брахистохрон масаласи (6.2.2) функционалга минимум берувчи $[0,b]$ кесмада аниқланган ва кесманинг учларида

$$y(0)=0,\ y(b)=C$$

қийматларни қабул қиладиган $y=y(x)$ функцияни топиш масаласидан иборат экан.

6.3-§. Вариацион ҳисобнинг энг оддий масаласининг қўйилиши

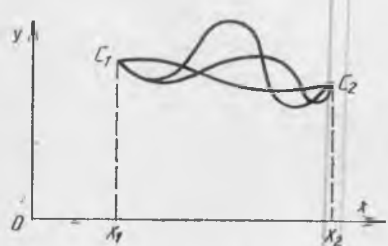
Бир ўзгарувчига боғлиқ бўлган $[x_1, x_2]$ кесмада аниқланган, дифференциалланувчи ва кесманинг учларида

$$y(x_1)=C_1,\ y(x_2)=C_2 \qquad (6.3.1)$$

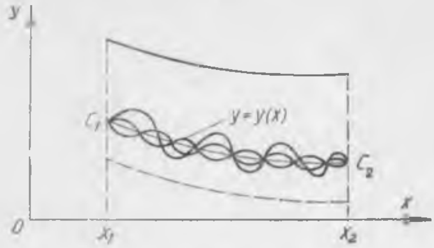
қийматлар қабул қиладиган $y=y(x)$ скаляр функциялар тўпламидан шундай функцияни топиш керакки, у функция

$$I[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x))\,dx \qquad (6.3.2)$$

функционалга энг кичик қиймат берадиган бўлсин. Бу масала вариацион ҳисобнинг *энг оддий масаласи* дейилади. Бу масалани 26- расмдагидек қилиб тасвирлаш мумкин.



26- расм.



27- расм.

1-таъриф. (6. 3. 1) шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий дифференциалланувчи функциялар *мумкин бўлган функциялар* дейилади.

2-таъриф. Агар ҳамма мумкин бўлган функциялар $y(\bar{x})$ учун

$$|\bar{y}(x) - y(x)| < \xi \qquad (6.3.3)$$

тенгсизлик бажарилганда

$$I[y(x)] \leqslant I[\bar{y}(x)] \qquad (6.3.4)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, мумкин бўлган функция $y(x)$ да функционал минимумга эришади, дейилади.

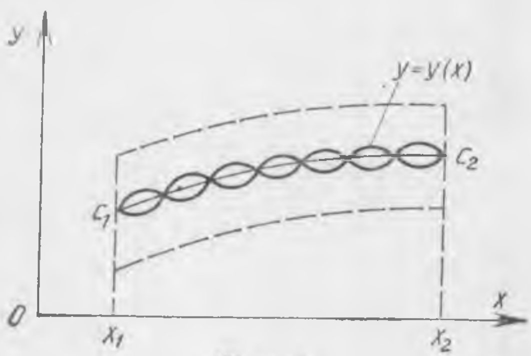
Агар (6.3.4) тенгсизлик қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} |\bar{y}(x) - y(x)| < \xi \\ |\bar{y}'(x) - y'(x)| < \xi \end{aligned}\right\} \qquad (6.8.5)$$

тенгсизликлар бажарилганда ўринли бўлса, мумкин бўлган функция $y(x)$ да функционал кучсиз минимумга эришади дейилади.

Кучли минимумни аниқлашда $y(x)$ эгри чизиқ билан қийматлари яқин бўлган ҳамма мумкин бўлган функциялар таққосланади, (27-расмга қаранг). Кучсиз минимумни аниқлашда эса ҳосилалари $y(x)$ функциянинг ҳосиласидан муҳим фарқ қиладиган мумкин бўлган функциялар таққослашдан чиқариб ташланади (28- расмга қаранг).

Юқорида келтирилган таърифдан функционалга кучли минимум берувчи $y(x)$ функция, кучсиз минимум берувчи функция ҳам бўлишлиги ва кучсиз минимумга қўйилган зарурий шарт (6.3.5) эса кучли минимумга қўйилган зарурий шарт бўлишлиги келиб чиқади. Тескари мулоҳаза эса нотўғридир, чунки (6.3.3) шарт бажарилганда (6.3.5) шарт бажарилмаслиги ҳам мумкин.



28 расм.

6.4-§ Вариация усули

Функционалларнинг минимумини текширишда қўлланиладиган энг умумий усул 1760 йилда Ж. Лагранж ва Л. Эйлер томонидан вариация усули номи билан тақдим этилгандир.

1. Мумкин бўлган функциянинг вариацияси.

$y(x_1)=C_1$, $y(x_2)=C_2$ шартни қаноатлантирадиган ҳамма функциялар мумкин бўлган функциялар эканлиги бизга олдинги параграфдан маълум.

Шу функциялар ичидан функционалга экстремум қиймат берадиганини топсак, у функция экстремал дейилади. Бу таърифга кўра $y=y(x)$ экстремал бўлса, бошқа ҳамма мумкин бўлган функциялар унга яқин бўлиши керак.

Бу яқинлик $\bar{y}(x)-y(x)=\xi h(x)$ айирма билан аниқланади, бу ерда $h(x_1)=0$, $h(x_2)=0$ дир, $h(x)\in C^{(1)}$ бўлиб, ξ сонли параметрдир. У вақтда

$$\delta y(x)=h(x)$$

функцияга *мумкин бўлган функциянинг вариацияси* дейилади. Шубҳасиз, x_1 ва x_2 нуқталарда $\delta y(x)=0$ дир. Демак, барча мумкин бўлган функциялар экстремалга вариация қўшилади, яъни

$$\bar{y}(x)=y(x)+\delta y(x).$$

2. Функционалнинг вариацияси.

$I[y(x)]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F[x,y(x),y'(x)]\,dx$ функционалнинг $\bar{y}=\bar{y}(x)$, $y=y(x)$ эгри чизиқлардаги орттирмасини ҳисоблаймиз, яъни

$$\Delta I(y)=I(\bar{y})-I(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2}[F(x,\bar{y},\bar{y}')-F(x_1,y,y')]dx=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\xi h,y'+\varepsilon h')-F(x,y,y')]dx=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[F(x,y,y')+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\xi h+\frac{\partial F(x_1,y_1,y')}{\partial y'}\xi h'+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y^2}\xi^2h^2+2\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y\,\partial y'}\xi^2hh'+$$

$$+\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y'^2}\xi^2h'^2\Big)-F(x,y,y')\Big]\,dx+0(\xi^2)=$$

$$=\xi\delta I(y)+\frac{\xi^2}{2}\delta^2I(y)+0(\xi^2).$$

(Соддалик учун y, $\bar{y}$ ва h ларнинг аргументлари тушириб қолдирилган.)

Бу ерда $\delta I(y)=\int\limits_{x_1}^{x_2}\Big[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}h+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}h'\Big]dx.$ (6.4,1)

$I(y)$ функционалнинг биринчи

$$\delta^2 I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y \partial y'} hh' = \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y'^2} h'^2 \right] dx$$

эса иккинчи вариацияси дейилади.

Функционалнинг биринчи ва иккинчи вариацияларини қуйидаги формулалар:

$$\delta I = \left[\frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon h) \right]_{\varepsilon=0}$$

$$\delta^2 I = \left[\frac{d^2}{\partial \varepsilon^2} I(y + \varepsilon h) \right]_{\varepsilon=0} \tag{6.4.2}$$

орқали ҳам осонгина топиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (6.4.2) дан (6.4.1) ни келтириб чиқарамиз.

$$y + \varepsilon h = u(x_1 \varepsilon)$$

белгилаш киритсак (6.4.2) ни

$$\delta I = \left| \frac{d}{d\varepsilon} I(u(x, \varepsilon)) \right]_{\varepsilon=0} = \left| \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} F(x, u(x, \varepsilon), u'(x, \varepsilon) d) x \right]_{\varepsilon=0}$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бу ифодани интеграл остида ε бўйича дифференциалласак,

$$\delta I = \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \cdot \frac{du'}{d\varepsilon} \right) dx \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial (y + \varepsilon h)} h + \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial (y' + \varepsilon h')} h' \right) \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h' \right) dx$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифода (6.4.1) нинг ўзидир. Худди шу йўл билан иккинчи вариацияни ҳам ҳосил қилишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

3. Функционалнинг кучсиз минимуми мавжудлигининг зарурий шартлари.

Фараз қилайлик, мумкин бўлган y функция $[x_1, x_2]$ кесманинг учларида (6.3.1) қийматларни қабул қилиб, (6.3.2) функционалга кучсиз минимум берувчи функция бўлсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

1-теорема. (6.3.2) функционалга кучсиз минимум берувчи y да қуйидаги

$$\delta I(y) = 0 \tag{6.4.3}$$

$$\delta^2 I(y) \geqslant 0 \qquad (6.4.4)$$

зарурий шартлар ўринлидир.

Исботи. Фараз қилайлик, $\delta I(y) = \alpha \neq 0$, у ҳолда

$$\Delta I(y) = \varepsilon\delta I(y) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 I(y) + \ldots = \varepsilon\left[\delta I(y) + \frac{\varepsilon}{2}\delta^2 I(y) + \ldots\right] \qquad (6.4.5)$$

формуладан қуйидагига:

$$\Delta I(y) = \varepsilon\left[\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\delta^2 I(y) + \ldots\right] \qquad (6.4.6)$$

эга бўламиз. ε ни шундай тенглаймизки, биринчидан, унинг ишораси α нинг ишорасига тескари бўлсин, иккинчидан,

$$|\bar{y} - y| = |\varepsilon| \cdot |h|, \quad |\bar{y}' - y'| = |\varepsilon| \cdot |h'|$$

айирмалар етарлича кичик бўлсин. У ҳолда (6.4.6) дан

$$\Delta I(y) < 0$$

келиб чиқади. Бу эса кучсиз минимум таърифи $I(y) \leqslant I(\bar{y})$ ёки $\Delta I(y) > 0$ га зиддир. Шунинг учун $\alpha \neq 0$ деб қилган фаразимиз нотўғридир. Демак, (6.4.3) шарт ўринлидир. Энди (6.4.4) шартнинг ўринли эканлигини кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик,

$$\delta I(y) = 0, \quad \delta^2 I(y) = \alpha < 0,$$

у ҳолда (6.4.5) дан қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta I(y) = \varepsilon^2\left[\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

Бунда квадрат қавсдаги нуқталар ε нинг биринчи, иккинчи ва ҳоказо даражалари қатнашган ҳадлар борлигини билдиради, ε етарли кичик бўлганда, квадрат қавс ичидаги ифоданинг ишораси α нинг ишораси билан бир хил бўлиб, $\Delta I(y) < 0$ бўлади. Бу эса кучсиз минимум таърифига зиддир.

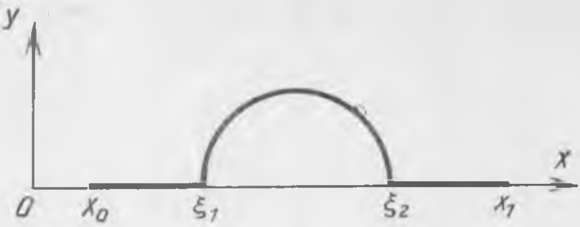
Фаразимизнинг нотўғрилигидан $\alpha \geqslant 0$ ёки $\delta^2 I(y) \geqslant 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, кучсиз минимум берувчи y да (6.4.3) ва (6.4.4) зарурий шартлар ўринлидир.

6.5-§. Эйлер тенгламаси

1-теоремада исботланган функционалнинг кучсиз минимуми мавжудлигининг асосий зарурий шартлари Эйлер тенгламаси орқали ифодаланади. Эйлер тенгламасини чиқаришдан олдин бизга кейинроқ зарур бўладиган асосий леммани исботлаймиз.

1. *Асосий лемма (Лагранж леммаси).* $|x_1, x_2|$ оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функция ва шу оралиқда $C^{(1)}$ синфга тегишли $h(x_1) = h(x_2) = 0$ шартларга бўйсунувчи, $h(x)$ функция учун

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,h(x)\,dx = 0$$



29- расм.

бўлса, у ҳолда $[x_1, x_2]$ оралиқда олинган ҳар қандай x учун $f[x] \equiv 0$ бўлади.

Исботи. Исботлаш учун тескари ҳолни фараз қилайлик, $[x_1, x_2]$ оралиқдан олинган бирор x_0 нуқтада $f(x_0) \neq 0$ бўлиб, масалан, $f(x_0) > 0$ бўлсин, у ҳолда $f(x)$ нинг узлуксизлиги сабабли x_0 нинг кичик атрофида, яъни $\xi_1 < x_0 < \xi_2$ да ҳам $f(x_0) > 0$ бўлади. Энди $h(x)$ ни $[\xi_1, \xi_2]$ оралиқда қуйидагича олайлик:

$$h(x) = \begin{cases} (\xi_1 - x)^2 (\xi_2 - x)^2, \text{ агар } x \in [\xi_1, \xi_2] \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ қолган нуқталарда.} \end{cases}$$

Бундай аниқланган функция лемма шартини қаноатлантиради, яъни функциянинг ўзи ва ҳосиласи узлуксиз бўлиб, ундан ташқари $h(x_1) = h(x_2) = 0$ (29-расмга қаранг).

Шунинг учун, лемма шартига кўра

$$\int_{x_1}^{x_2} f[x]\, h[x]\, dx = 0$$

бўлиши керак, лекин

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, h(x)\, dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\, (\xi_1 - x)^2 [\xi_2 - x]^2\, dx > 0,$$

демак, $f[x] \equiv 0$ экан.

2 **Эйлер тенгламасини келтириб чиқариш.** Агар $y(x)$ функция (6.3.2) функционалга кучсиз минимум берувчи функция бўлса, 6.4- § да исботланган теоремага асосан $\delta I(y) = 0$, яъни

$$\delta I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} h + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h' \right] dx = 0$$

бўлиши керак, бу интегралда

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dF(x, y, y')}{\partial y'} h' dx = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} h \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} h dx$$

бўлганлиги учун, $h(x_1)=h(x_2)=0$ шартни назарда тутсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\delta I(y)=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right]hdx=0.$$

Бу ерда $h(x)$ функция Лагранж леммасининг шартларини қа ноатлантирадиган функция бўлгани учун, ундан

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0 \qquad (6.5.1)$$

келиб чиқади. Бу тенглама Эйлер баъзи ҳолларда Эйлер — Лагранж тенгламаси дейилиб, (6.3.2) функционал экстремумга эга бўлишининг зарурий шартидир. Шундай қилиб, биз қуйидаги теоремани исботладик.

2-теорема. Мумкин бўлган функция $y(x)$ вариацион масаланинг энг содда функционали (6.3.2) га кучсиз минимум берувчи функция бўлиши учун у функция Эйлер тенгламаси (6.5.1) ни қаноатлантириши зарур.

Эйлер тенгламаси вариацион ҳисобда энг муҳим роль ўйнайдиган тенгламадир. Ҳақиқатан ҳам, (6.5.1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial x}-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial x\partial y'}-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y\partial y'}y'-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2}y''=0. \qquad (6.5.2)$$

Агар

$$F_1(x,y,y')=-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2};\quad F_2(x,y,y')=-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y\partial y'};$$

$$F_3(x,y,y')=\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}-\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial x\partial y'}$$

белгилашлар киритсак, (6.5.2) дан қуйидаги

$$F_1(x,y,y')y''+F_2(x,y,y')y'+F_3(x,y,y')=0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама ечимида иккита ихтиёрий ўзгармас иштирок этади, яъни

$$y=f(x,c_1,c_2) \qquad (6.5.3)$$

бу функция экстремал дейилади.

Демак, (6.3.2) функционалга кучсиз минимум қиймат берувчи функция Эйлер тенгламасининг ечими бўлиб, у экстремал бўлар экан. Математик анализ курсида функцияга экстремум қиймат берувчи аргументнинг қийматларини зарурий шартдан, чунончи биринчи тартибли ҳосилалардан, яъни уларни нолга тенглаштириб топгандан сўнг, бу қийматларни етарли шартларга асосан текшириб кўрилади. Вариацион ҳисобда ҳам етарли шартлар текширилади. Бироқ, кўпинча вариацион масаланинг қўйилиши, зарурий шарт бўлган Эйлер тенгламасини ечиб, ечимни топгандан сўнг, маъносига кўра етарли шартни текширишга эҳтиёж қолмайди. Шунинг учун, биз бу курсда фақат зарурий шартларини текшириш билангина чекланамиз. Экстремал (6.5.5) да иштирок этадиган c_1, c_2 ўзгармаслар ҳамма вақт (6.3.1) шартдан топилади.

3. Эйлер тенгламасининг баъзи бир хусусий ҳоллари.

1-ҳол. $F(x, y, y') = F(y')$, яъни (6.3.2) функционалда интеграл белгиси остидаги функция фақат y' га боғлиқ, у ҳолда (6.5.1) тенглама

$$\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} y'' = 0$$

кўринишга келади. Бундан $y'' = 0$ ва тенглама ечими

$$y = c_1 x + c_2$$

бўлади, яъни экстремал чизиқли функциядан иборат бўлади.

2-ҳол. $F(x, y, y') = F(x, y')$, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда y иштирок этмайди. Бу ҳол учун (6.5.1) ифода қуйидаги

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'}\right) = 0$$

кўринишга эга бўлади, бундан

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = c_1 \qquad (6.5.4)$$

бўлиб, бу ифода Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли дейилади ва уни ечиб, ушбу $y = f(x_1, c_1, c_2)$ умумий ечимга эга бўламиз.

Мисол. Қуйидаги

$$I(y) = \int_{1/2}^{1} [y' + x^2 y'^2]\, dx, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \; y(1) = \frac{1}{2}$$

функционалнинг экстремуми топилсин.

Ечиш.

$$F = (x, y, y') = F(x, y') = y' + x^2 y'^2, \; \frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = 1 + 2x^2 y'$$

(6.5.4) га асосан $1 + 2x^2 y' = c_1$

$$y' = \frac{c_1 - 1}{2x^2}, \; \frac{dy}{dx} = \frac{c_1 - 1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}, \quad dy = \frac{c_1 - 1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx,$$

$$y = \frac{c_1 - 1}{2} \int \frac{dx}{x^2} + c_2, \quad y = \frac{1 - c_1}{2x} + c_2.$$

$$\left.\begin{array}{l} y\left(\frac{1}{2}\right)=0 \\ y(1)=\frac{1}{2} \end{array}\right|, \quad \left.\begin{array}{l} (1-c_1)+c_2=0 \\ (1-c_1)+2c_2=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_2=1,\ c_1=2, \\ y=-\frac{1}{2x}+1. \end{array}$$

Мисоллар. Қуйидаги функционалларнинг экстремали топилсин:

$$1.\ I(y)=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx,\ y(1)=0,\ y(2)=1.$$

$$2.\ I(y)=\int_0^2 \left(x\cdot y'+y'^2\right)dx, \quad y(0)=0,\ y(2)=1.$$

3-ҳол. $F(x,\ y,\ y')=F(y,\ y')$ бўлсин, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда x иштирок этмасин. Бу ҳолда (6.5.1) тенглама

$$\frac{\partial F(y,\ y')}{\partial y}-\frac{\partial^2 F(y,\ y')}{\partial y\,\partial y'}-\frac{\partial^2 F(y,\ y')}{\partial y'^2}\,y''=0 \qquad (6.5.5)$$

кўринишга эга бўлиб, уни y' га кўпайтирсак,

$$\frac{d}{dx}\left[F(y,\ y')-\frac{\partial F(y,\ y')}{\partial y'}\,y'\right]=0 \qquad (6.5.6)$$

бўлади. (6 5.6) дан

$$F(y,\ y')-\frac{\partial F(y,\ y')}{\partial y'}\,y'=c_1 \qquad (6.5.7)$$

бўлиб, бу Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли дейилади ва у биринчи тартибли дифференциал тенглама бўлгани учун уни интеграллаш натижасида яна битта ихтиёрий ўзгармас иштирок этган қуйидаги

$$y=f(x,\ c_1,\ c_2)$$

ечимга эга бўламиз.

4-ҳол.

$$F(x,\ y,\ y')=F(x,\ y)$$

бўлсин, яъни интеграл белгиси остидаги функцияда y' иштирок этмайди. Бу ҳолда (6.5.1) тенглама

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=0$$

кўринишга келади. Бу тенглама эса дифференциал тенглама эмас. Тенгламани y га нисбатан ечиб, $y=f(x)$ кўринишдаги битта ёки бир неча экстремалларни топамиз. Бу ҳолда вариацион масала умумий ҳолда ечилмайди. Энди юқорида кўрилган ҳолларга оид мисоллар кўрамиз.

М и с о л л а р: 1. Ушбу

$$I(y)=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2+y^2\right)dx$$

функционалнинг $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ шартларга бўйсунувчи экстремали топилсин.

Ечиш. $F(y, y')=y'^2-y^2$ бўлгани учун, (6.5.5) га асосан

$$-2y-2y''=0,\quad y''+y=0,\quad y=e^{\kappa x},$$
$$\kappa^2+1=0,\quad \kappa_{1,2}=\pm i.$$
$$y=c_1\cos x+c_2\sin x \quad \text{бўлади.}$$

Ечимда иштирок этган c_1 ва c_2 ўзгармаслар $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ шартлардан топилади, яъни

$$c_1=0,\quad c_2\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad c_2=1.$$

Демак, берилган функционал $y=\sin x$ функцияда экстремумга эришади.

2. Ушбу

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$$

функционалнинг экстремали топилсин.

Ечиш. $F(y, y')$ бўлгани учун, (6.5.7) га асосан Эйлер тенгламасининг биринчи интеграли қуйидагича бўлади:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-\frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}}=\bar{c_1},$$

Бу ердан

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}\ \text{ёки}\ \ y\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{\bar{c_1}}=c_1,\quad y^2\left(1+y'^2\right)=c_1^2,$$

$$y'^2=\frac{c_1^2-y^2}{y^2},\quad dy=\frac{\sqrt{c_1^2-y^2}}{y}dx_1,\ \int\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=\int dx+c_2$$

$$-\left(c_1^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}=x+c_2,\quad c_1^2-y^2=(x+c_2)^2,\quad y=\pm\sqrt{c_1^2-(x+c_2)}\,,$$

3. Брахистохрон масаласини ечиш учун зарур бўлган

$$T=\frac{1}{2g}\int_0^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}dx$$

функционалнинг $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(b) = c \end{cases}$ шартларга бўйсунувчи экстремуми топилсин.

Ечиш. Интеграл белгиси остидаги ифода

$$F(y, y')$$

бўлганлиги учун бу масала Эйлер тенгламаси интегралланиш ҳолларининг учинчисига тўғри келади. Шунинг учун (6.5.7) га асосан тенгламанинг биринчи интегралини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}} = \bar{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

Буни (6.5.7) га асосан ёзган бўлсак ҳам, кейинги қадамларни бажаришда содда ифода ҳосил қилиш мақсадида ўнг томондаги ихтиёрий ўзгармасни махсус кўринишда олдик. Сўнгги ифодадан қуйидагига эга бўламиз

$$y'^2 = \frac{c_1 - y}{y}.$$

Бундан

$$\int \sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}\, dy = \int dx + c_2.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун

$$y = c_1 \sin^2 \frac{t}{2}, \quad dy = c_1 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}\, dt$$

алмаштириш киритамиз, у ҳолда

$$\int c_1 \sin^2 \frac{t}{2}\, dt = x + c_2, \quad \frac{c_1}{2}(t - \sin t) = x + c_2$$

чегаравий шартни қаноатлантириш учун $c_2 = 0$ деб олсак қуйидаги

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos t)$$

ечимга эга бўламиз.

4. Қуйидаги функционалларнинг экстремали топилсин:

а) $I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (xy + y^2)\, dx$

б) $I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

в) $I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(y^2 + y'^2 - 2y\sin x\right) dx$

г) $I(y) = \int\limits_{0}^{1} \left(y'^2 + 12xy\right) dx, \ y(0) = 0, \ y(1) = 1.$

6.6-§ Юқори тартибли ҳосилаларга боғлиқ бўлган функционаллар учун Эйлер тенгламаси

Бизга ушбу

$$I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \ldots, y^n)\, dx \tag{6.6.1}$$

функционалга экстремал қиймат бериб, чекланиш шартлари

$$\left.\begin{aligned} y(x_1) = c_0, \ y(x_1) = c_1, \ \ldots, \ y^{n-1}(x_1) = c_{n-1} \\ y(x_2) = d_0, \ y'(x_2) = d_1, \ \ldots, \ y^{n-1}(x_2) = d_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{6.6.2}$$

ни қаноатлантирадиган ва c^{2n} синфга тегишли бўлган функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (6 6.1) функционал учун ҳам минимум мавжудлигининг зарурий шарти $\delta I(y) = 0$ бўлгани учун бу функционалнинг биринчи вариацияси қуйидагича:

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\delta I\,(y + \varepsilon h)\right]_{\varepsilon=0} \tag{6.6.3}$$

ни ҳисоблаймиз, $y + \varepsilon h = u$ деб белгиласак (6.6.1) ва (6.6.3) га асосан қуйидаги

$$\begin{aligned} \delta I &= \left[\frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_{x_1}^{x_2} F\left(x, \ u, \ u', \ u'', \ \ldots, \ u^{(n)}\right) dx\right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dy} \cdot h + \frac{dF}{\partial y'} \cdot h' + \frac{dF}{dy''} \cdot h'' + \ldots + \frac{dF}{dy^{(n)}} h^{(n)}\right] dx \end{aligned} \tag{6.6.4}$$

ифодага эга бўламиз.

Бу ерда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h'\, dx = \left[\frac{dF}{\partial y'} \cdot h\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \cdot \frac{dF}{\partial y'}\right) h\, dx$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} h'' dx = \left[\frac{dF}{\partial y''} \cdot h'\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \left[\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''}\right) h\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{dF}{\partial y''}\right) h\, dx$$

. . . .

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dF}{\partial y^{(n)}}h^{(n)}dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\cdot h^{(n-1)}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\left[\left(\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)h^{(n-2)}\right]\Bigg|_{x_1}^{x_2}+\ldots+$$

$$+(-1)^n\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)hdx.$$

$$h(x_1)=h'(x_1)=h''(x_1)=\ldots=h^{(n-1)}(x_1)=0$$

$$h(x_2)=h'(x_2)=h''(x_2)=\ldots=h^{(n-1)}(x_2)=0$$

бўлгани учун

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{dF}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|hdx \tag{6.6.5}$$

бўлади. Одатдагидек, функционалнинг биринчи вариациясини нолга тенглаштириб, экстремумга эга бўлишнинг зарурий шартини текширадиган бўлсак, яна асосий леммани татбиқ қиламиз: (6.6.5) интеграл белгиси остидаги қавс ичидаги ифода узлуксиз, $h(x)$ эса лемма шартига бўйсунади, асосий леммага асосан

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{dF}{dy'}+\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{dF}{\partial y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0 \tag{6.6.6}$$

тенгламага келамиз. Бу тенглама *Эйлер—Пуассон тенгламаси* дейилиб, $2n$ тартибли оддий дифференциал тенгламадир. Бунинг ечимида $2n$ та ихтиёрий ўзгармас иштирок этади.

Бу ўзгармасларни аниқлаш учун $2n$ та (6.2.2) шарт мавжуд. Шу билан масала ечилди, деб ҳисоблаш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$I(y)=\int_0^{\pi/2}(y''^2-y^2+x^2)\,dx$$

функционалга экстремал қиймат берувчи ва

$$y(0)=1,\qquad y'(0)=0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

шартларни қаноатлантирувчи функция топилсин. Бу ҳолда Эйлер—Пуассон тенгламаси

$$-2y+\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0$$

ёки

$$y''-y=0$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$\kappa^4-1=0 \text{ бўлиб, } \kappa_1=1,\ \kappa_2=-1,\ \kappa_3=i,\ \kappa_4=-i$$

илдизларга эга. Шунинг учун дифференциал тенгламанинг ечими ёки экстремали қуйидагича бўлади:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x.$$

Масаланинг чекланиш шартларига асосан ўзгармаслар: c_1, c_2, c_3 ва c_4 ларни топиш учун

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_4&=1,\\ c_1-c_2+c_3&=0,\\ c_1e^{\pi/2}+c_2e^{-\pi/2}+c_3&=0,\\ c_1e^{\pi/2}-c_2e^{-\pi/2}-c_4&=-1 \end{aligned}\right|$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системанинг ечими $c_1=c_2=c_3=0$, $c_4=1$ бўлади. Демак, функционалга экстремал берувчи функция $y=\cos x$ экан.

2. Қуйидаги функционалларнинг экстремаллари топилсин:

а) $I(y)=\int\limits_0^1\left(1+y''^2\right)dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$; $y(1)=1$; $y'(1)=1$.

б) $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(16y^2-y''^2+x^2\right)dx$, $y(0)=\frac{1}{2}$; $y'(0)=0$;

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

в) $\int\limits_{x_1}^{x_2}(y')^n\,dx$.

г) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(yy'-3y'y''+y'''^2\right)dx$.

д) $\int\limits_0^1 y''^2\,dx$, $y(0)=0$, $y'(0)=a$; $y(1)=0$, $y'(1)=b$.

6.7-§. Қурилиш механикасида учрайдиган функционалларни минималлаш

Қурилиш механикасида ёки унинг ҳар хил статик ва динамик масалаларини ечишда, шунингдек, қовушқоқ эластик материаллардан ясалган авиация қурилмаси элементларининг турғунлигини текширишда масалаларнинг математик қўйилиши учун, яъни уларнинг функционалларини тузиш учун системага таъсир қилаётган ҳамма актив кучлар бажарган ишлари йиғиндисининг нолга тенглигини кўрсатадиган механиканинг мумкин бўлган силжиш принципи қўлланилади. Бунда бўлаклаб интеграллаш ёрдамида ўзига хос чекланиш шартларини қаноатлантирувчи, олдинги параграфларда келтириб чиқарилган Эйлер тенгламасига эквивалент бўлган ва юқорида айтиб ўтилган механиканинг мумкин бўлган силжиш принципи асосида ҳосил қилинадиган функционалга минимум берувчи тенглама келтириб чиқарилади.

Айтайлик, соддалик учун, қовушқоқ эластик материалдан ясалган стерженга унинг ўқи йўналиши бўйича вақтга боғлиқ ҳолда ўзгарадиган сиқувчи бўйлама куч $N(t)$ ва ўқи йўналиши бўйича кўндаланг қўйилган юк $q(x, t)$ таъсир қилаётган бўлсин.

Стержень қовушқоқ эластик асосда ётади, яъни асоснинг акс таъсири $\kappa^* W(x, t) = \kappa\left(1 - R_2^*\right) W(x, t)$ кўринишда берилган ва унинг дастлабки ҳолатдаги бошланғич эгилиши) $W_0(x)$ деб фараз қилайлик (бу ерда κ — асос коэффициенти).

Хотирловчи қовушқоқ эластиклик назариясига асосан эгилиш моменти қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$M = -EI\left(1 - R_1^*\right)\frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \qquad (6.7.1)$$

бу ерда E—эластиклик модули, I — кесимнинг инерция моменти, $W \cdot (x, t)$ — стерженнинг эгилиши, $R_i^*(i = 1,2)$ — мусбат аниқланган ва

$$R_i^* f(t) = \int_0^t R_i(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

формула билан ҳисобланадиган операторлар, $R_i(t-\tau)$ лар эса шу операторларга мос келувчи ядролардир.

Мумкин бўлган силжиш принципига асосан стерженнинг кўндаланг ва бўйлама эгилиш ҳамда тебраниш тенгламаларини қуйидаги

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2}\Big[M\delta\left(\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\right) + N(t)\left(\frac{\partial\,(W(x,t) + W_0(x))}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}\right) +$$

$$+ \left(g(x, t) + \kappa^* W(x, t) - \mu\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}\right)\delta W(x, t)\Big]dx = 0 \qquad (6.7.2)$$

функционалнинг минимумидан келтириб чиқарилади. (6.7.2) да $\mu\dfrac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}$ инерция кучи, $\mu = \rho F$, F—стержень кўндаланг кесимининг юзи, ρ—стержень материалининг зичлиги.

Қуйидаги

$$\left|\begin{array}{l} W(x_1, t) = 0, \quad \dfrac{\partial W(x_1, t)}{\partial x} = 0 \\[2ex] W(x_2, t) = 0, \quad \dfrac{\partial W(x_2, t)}{\partial x} = 0 \end{array}\right. \qquad (6.7.3)$$

ёки

$$\begin{cases} W(x_1, t)=0, & M(x_1, t)=0 \\ W(x_2, t)=0, & M(x_2, t)=0 \end{cases} \tag{6.7.4}$$

чекланиш шартлари асосида (6.7.2) функционални бўлаклаб интегралласак,

$$\delta A = \Big[M(x \quad t)\Big(\delta \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}\delta W(x, t) +$$

$$+ N(t)\frac{\partial (W(x,t)+W_0(x))}{\partial x}\delta W(x, t)\Big]\Big]\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\Big[\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - N(t)\times$$

$$\times \frac{\partial^2 (W(x,t)+W_0(x))}{\partial x^2} + g(x, t) - \kappa^* W(x, t) - \mu\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}\Big]\times$$

$$\times \delta W(x, t)\, dx = 0$$

ёки

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2}\Big[\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - N(t)\frac{\partial^2 (W(x,t)+W_0(x))}{\partial x^2} + q(x, t) -$$

$$- \kappa^* W(x, t) - \mu\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}\Big]\delta W(x, t)\, dx = 0 \tag{6.7.5}$$

функционалга эга бўламиз. Бу ерда $\delta W(x, t)$ функция Лагранж леммасининг шартларини қаноатлантирадиган функция бўлгани учун (6.7.5) дан

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - N(t)\frac{\partial^2 (W(x,t)+W_0(x))}{\partial x^2} + \kappa^* W(x, t) -$$

$$-\mu\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + q(x, t) = 0$$

ёки (6.7.1) ни назарда тутсак,

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + EI(1-R_1^*)\frac{\partial^4 W(x,t)}{dx^4} +$$

$$+ N(t)\frac{\partial^2 (W(x,t)+W_0(x))}{\partial x^2} + \kappa(1-R_2^*)\, W(x, t) -$$

$$-q(x, t) = 0 \tag{6.7.6}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама олдинги параграфда келтириб чиқарилган Эйлер тенгламасига эквивалент бўлиб, унинг қуйидаги

$$\begin{aligned} W(x,0) &= \varphi_1(x) \\ \frac{\partial W(x, 0)}{\partial t} &= \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{6.7.7}$$

ҳамда (6.7.3) ва (6.7.4) чекланиш шартларини қаноатлантирувчи ечими (6.7.2) функционалга минимум қиймат беради ва аксинча; (6.7.2) функционалга минимум қиймат берувчи $W(x, t)$ функция (6.7.6) тенгламанинг ечими бўлади. Шунинг учун биз қуйида (6.7.6) тенгламанинг (6.7.7), (6.7.3) ва (6.7.4) чекланиш шартларини қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласини ўрганамиз.

6.8-§. Қовушқоқ эластик асосда ётган қовушқоқ эластик стерженнинг эгилиши тўғрисидаги масалани ечиш

Агар (6.7.6) тенгламада $N(t)=0$ ва $\mu=0$ деб фараз қилсак, қовушқоқ эластик асосда ётувчи қовушқоқ эластик стерженнинг эгилиши тўғрисидаги масаланинг тенгламаси келиб чиқади, яъни:

$$EI\left(1-R_1^*\right)\frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4}+\kappa\left(1-R_2^*\right)W(x, t)=q(x, t) \qquad (6.8.1)$$

Айтайлик,

$$R_2^*=\theta R_1^*,$$
$$R(t-\tau)=\varkappa e^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-1}, \quad 0<\alpha\leqslant 1,$$
$$\varkappa=\frac{c_0\beta^\alpha}{\Gamma[\alpha]}, \quad 0\leqslant c_0\leqslant 1 \qquad (6.8.2)$$

ва $q(x, t)=f(x)$ тенгликлар ўринли бўлсин.

Агар $f(x)$ функцияни $[x_1, x_2]$ оралиқда Фурье қаторига ёйиш мумкин бўлса, яъни $l=x_2-x_1$,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\cdot\sin\frac{i\pi(x-x_1)}{e}, \quad f_i=\frac{2}{e}\int_{x_1}^{x_2}f(x)\sin\frac{i\pi(x-x_1)}{e} \qquad (6.8.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлса, у ҳолда (6.8.1) тенгламанинг ечимини (6.7.4) чекланиш шартларни қаноатлантирувчи

$$W(x, t)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\sin\frac{i\pi(x-x_1)}{e} \qquad (6.8.4)$$

функция кўринишда қидириш мақсадга мувофиқдир. Ҳақиқатан ҳам, (6.8.4) ва (6.8.3) ифодаларни (6.8.1) тенгламага қўйсак, $u_i(t)$ номаълум функцияларни топишимиз мумкин бўлган қуйидаги

$$u_i(t)-\mu_i R_1^* u_i(t)=\lambda_i, \quad i=1, 2, \ldots \qquad (6.8.5)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\mu_i=\frac{EI\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4+\kappa\theta}{EI\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4+\kappa}, \quad \lambda_i=\frac{f_i}{EI\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4+\kappa},$$

$$R_1^* u_i(t) = \varkappa \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1} u_i(\tau)\, d\tau.$$

Қуйидаги

$$u_i(t) = e^{-\beta t} P_i(t) \tag{6.8.6}$$

белгилаш ёрдамида (6.8.5) тенгламани

$$P_i(t) - \mu_i \varkappa \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} P_i(\tau)\, d\tau = \lambda_i e^{\beta t} \tag{6.8.7}$$

кўринишга келтириш мумкин.

Агар $y_i(t)$ функциялар

$$y_i(t) - \mu_i \varkappa \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} y_i(\tau)\, d\tau = 1 \tag{6.8.8}$$

тенгламаларнинг ечими бўлса, (6.8.7) тенгламаларнинг ечимлари $y_i(t)$ ечимлар орқали

$$P_i(t) = \lambda_i y_i(t) + \lambda_i \beta \int_0^t e^{\beta(t-\tau)} y_i(\tau)\, d\tau$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини осонгина исботлаш мумкин. Демак, ҳосил қилинган (6 8 7) тенгламаларнинг ечимларини (6.8.6) га қўйиб (6.8.5) тенгламаларнинг ечимларини қуйидагича ёзамиз:

$$u_i(t) = \lambda_i e^{-\beta t} y_i(t) + \lambda_i \beta \int_0^t e^{-\beta t} y_i(\tau)\, d\tau =$$

$$= \lambda_i \left(1 + \int_0^t e^{-\beta t} y_i'(\tau)\, d\tau\right). \tag{6.8.9}$$

Шундай қилиб, бирмунча мураккаброқ бўлган (6.8.7) тенгламаларнинг ечимларини топишни даражали қаторлар усули ёрдамида жуда ҳам содда ечиладиган (6.8.8) тенгламаларнинг ечимларини топишга келтирдик. Демак, даражали қаторлар усули ёрдамида (6.8.8) тенгламаларнинг ечимларини қуйидаги

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_i^{(l)} t^{\alpha j} \tag{6.8 10}$$

даражали қатор кўринишда ифодалаб, уни (6.8.8) тенгламаларга қўйсак,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} t^{\alpha j} - \mu_i \varkappa \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t a_j^{(l)} (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha j}\, d\tau = 1$$

ёки

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} t^{\alpha j} \sum_{j=0}^{\infty} (\mu_i \varkappa a_j^{(i)}) \frac{[[\alpha] \cdot \Gamma[\alpha j + 1]]}{\Gamma[\alpha(j+1)+1]} t^{\alpha(j+1)} = 1$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бу ердан $t^{\alpha j}$ ларнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, $a_j^{(i)}$ номаълумларни топиш мумкин бўлган қуйидаги

$$a_0^{(i)} = 1, \quad a_j^{(i)} \mu_i \varkappa \frac{\Gamma[\alpha] \cdot \Gamma[\alpha(j-1)+1]}{\Gamma[\alpha j + 1]} a_{j-1}^{(i)}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

рекуррент формулаларни ҳосил қиламиз. Бу ерда $\Gamma[\cdot]$ — Эйлернинг гамма функциялари Ҳосил қилинган рекуррент формулалар орқали $a_j^{(i)}$ коэффициентларни ҳисоблаб,

$$a_0^{(i)} = 1, \quad a_j^{(i)} = \frac{[\mu_i \varkappa \Gamma[\alpha]]^j}{\Gamma[\alpha j + 1]}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

га эга бўламиз. Топилган $a_j^{(i)}$ коэффициентларни (6.8.10) га ва уларни (6.8.9) га қўйсак, (6.8.5) тенгламаларнинг ечимлари қуйидаги

$$u_i(t) = \lambda_i \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r_i)^j \alpha \cdot j}{\Gamma[\alpha j + 1]} \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha j - 1} d\tau \right) \qquad (6.8.11)$$

кўринишда бўлишлигига ишонч ҳосил қиламиз (6.8.11) да

$$r_i = \mu_i \varkappa \Gamma[\alpha]. \qquad (6.8.12)$$

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг, яъни қовушқоқ эластик асосда ётувчи қовушқоқ эластик стерженнинг эгилиши тўғрисидаги масаланинг (6.7.4) чекланиш шартларини қаноатлантирувчи аниқ ечими (6.8.4) га (6.8.11) ни қўйишдан ҳосил қилинади ва у қуйидаги кўринишда бўлади:

$$W(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r_i)^j \alpha j}{\Gamma[\alpha j + 1]} \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha j - 1} d\tau \right) \sin \frac{i\pi(x - x_1)}{l}. \quad (6.8.13)$$

Агар $\varkappa = 0$, яъни $r_i = 0$ бўлса, (6.8.13) ечимдан

$$W(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{EI\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 + K} \sin \frac{i\pi(x - x_1)}{l}$$

ечим келиб чиқиб эластик асосда ётувчи эластик стерженнинг эгилиши тўғрисидаги масаланинг (6.7.4) чекланиш шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлади.

Энди t нинг етарлича катта қийматларида, масалан, $t = \infty$ бўлганда стерженнинг қовушқоқ эластиклик хусусиятини ҳисобга олиш нимага олиб келишини кўриб чиқамиз.

Даставвал, $t=\infty$ бўлганда $Z=\tau\beta$ алмаштириш ёрдамида

$$\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\tau^{\alpha j-1}d\tau=\frac{1}{\beta^\alpha j}\int_0^\infty e^{-z}z^{\alpha j-1}dz=\frac{\Gamma[\alpha j]}{\beta^\alpha j}$$

тенгликни ҳосил қилиб, (6.8.13) ечимдаги қавснинг иккинчи ҳадини ҳисоблаймиз, яъни

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(r_l)^j\alpha\cdot j}{\Gamma[\alpha j+1]}\cdot\frac{\Gamma[\alpha j]}{\beta^{\alpha j}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(r_l)^j}{\beta^{\alpha j}}.$$

Бундан (6.8.12) ва (6.8.2) ларни назарда тутсак,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ri)^j}{\beta^{\alpha j}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[\mu_l\cdot c_0\cdot\beta^{\alpha}\cdot\frac{1}{\Gamma[\alpha]}\cdot\Gamma[\alpha]\right]^j}{\beta^{\alpha j}}=\sum_{j=0}^{\infty}[\mu_l\cdot C_0]^j$$

бўлиб, бу йиғинди чексиз камаювчи геометрик прогрессияни ифодалайди, чунки $0\leqslant\mu_l C_0\leqslant 1$ шарт бажарилади. Шунинг учун,

$$\sum_{j=0}^{\infty}[\mu_l C_0]^j=\frac{1}{1-\mu_l C_0}$$

тенглик ўринлидир. Шундай қилиб, (6.8.13) ечимни қуйидагича ёзамиз:

$$W(x,\infty)=\sum_{l=0}^{\infty}\lambda_l\left(1+\frac{1}{1-\mu_l C_0}\right)\sin\frac{l\pi(x-x_1)}{l}.$$

Бу ечимдан кўриниб турибдики, стерженнинг қовушқоқ эластиклик хусусиятини ҳисобга олиш унинг эгилишининг кўпайишига олиб келар экан. Бунда $\mu_l C_0$ миқдор бирга қанчалик яқин бўлса, эгилиш шунчалик кўпроқ бўлади

6.9-§. Вақт буйича узгарувчи сиқувчи кучлар таъсиридаги қовушқоқ эластик стержень квазистатик турғунлигининг йўқолиши

Айтайлик, қовушқоқ эластик материалдан тайёрланган стержень кўндаланг қўйилган $g(x)$ юк ва бир меъёрда тақсимланган сиқувчи куч

$$N(t)=P+\gamma t^\alpha,\quad 0<\alpha\leqslant 1 \tag{6.9.1}$$

таъсирида бўлсин.

Сиқувчи кучнинг (6.9.1) тарзда ифодаланиши умумийдир. Дарҳақиқат, сиқувчи кучнинг бу тарзда ифодаланишидан, унинг тажрибаларда учрайдиган ҳар хил турлари келиб чиқади. Масалан:

1. Агар $\gamma = 0$ бўлса, вақтнинг $[t_1, t_2]$ оралиқдаги қийматлари учун $N(t) = P$ ва бошқа қийматлари учун эса $N(t) = 0$ бўлиб, сиқувчи куч вақт бўйича ўзгармас бўлади.

2. Агар $P = 0$ бўлиб, $\gamma > 0$ бўлса, вақтнинг ҳамма қийматлари учун $N(t) = \gamma t^{\alpha}$ бўлиб, сиқувчи куч вақт бўйича кескин ўсувчи бўлади.

3. Агар $P \neq 0$ бўлиб, $\gamma < 0$ бўлса, вақтнинг $[t_1, t_2]$ $\left(t_2 = \frac{P}{\gamma},\right.$ γ — сиқувчи кучнинг ўсиш тезланиши$\left.\right)$ оралиқдаги қийматлари учун сиқувчи куч вақт бўйича кескин камаювчи бўлади.

Фараз қилайлик, стержень дастлабки ҳолатда $W_0(x)$ бошланғич эгилишга эга бўлсин ва унинг инерция кучи $-\mu \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2}$ ҳамда асоснинг акс таъсири $-K^* W(x, t)$ ҳисобга олинмасин. У ҳолда (6.7.6) дан қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$EI(1 - R_1^*) \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + N(t) \frac{\partial^2 (W(x, t) + W_0(x))}{\partial x^2} = g(x). \quad (6.9.2)$$

Соддалик учун, чекланиш шартларини қуйидагича ёзамиз:

$$\left| \begin{array}{l} W(x_1, t) = 0, \ \frac{\partial^2 W(x_1, t)}{\partial x^2} = 0, \\ W(x_2, t) = 0, \ \frac{\partial^2 W(x_2, t)}{\partial x^2} = 0. \end{array} \right. \quad (6.9.3)$$

1-таъриф. Агар ҳамма $t < t_{кр}$ лар учун ва унга мос келувчи сиқувчи куч $N(t)$ учун эгилишнинг вақт бўйича ўзгариши чегараланган ҳолда қолса, яъни

$$\max W(x, t) \leqslant W^*$$

бўлса, стерженнинг ҳолати *турғун (барқарор)* дейилади.

2-таъриф. Агар $t \geqslant t_{кр}$ лар ва унга мос келувчи сиқувчи куч $N(t)$ учун стерженнинг вақт бўйича эгилиши интенсив ривожлана бошласа, стерженнинг бундай ҳолати *нотурғун (нобарқарор)* дейилиб, $t = t_{кр}$ вақт *критик вақт* ва унга мос келувчи $N(t) = N(t_{кр})$ сиқувчи куч *критик сиқувчи куч* дейилади.

Қўйилган масала вақтнинг ва унга мос келувчи сиқувчи кучнинг шундай қийматларини аниқлашдан иборатки, уларнинг бу қийматларидан бошлаб стерженнинг эгилиши интенсив ривожлансин. Агар кўндаланг қўйилган юк $q(x)$ ни ва бошланғич эгилиш $W_0(x)$ ни $[x_1, x_2]$ оралиқда $(l = x_2 - x_1)$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi(x - x_1)}{l}, \quad W_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(0)} \sin \frac{i\pi(x - x_1)}{l}, \quad (6.9.4)$$

$\left(\text{бу ерда } q_l = \frac{2}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2} q(x)\sin\frac{l\pi(x-x_1)}{l},\ u_l^{(0)} = \frac{2}{l}\int\limits_{x_1}^{x_2} W_0(x)\sin\frac{l\pi(x-x_1)}{l}\right)$

кўринишдаги Фурье қаторига ёйиш мумкин бўлса, (6.9.2) тенгламанинг (6.9.3) чекланиш шартларини қаноатлантирувчи ечимини (6.8.4) функция кўринишида топамиз. Ҳақиқатан ҳам, (6.9.1), (6.9.4) ва (6.8.3) ифодаларни (6.9.2) тенгламага қўйсак, $u_l(t)$ номаълум функцияларга нисбатан қуйидаги

$$(1 + B_l t^\alpha)\, u_l(t) - A_l \int\limits_0^t R_1(t-\tau)\, u_l(\tau)\, d\tau = C_l^{(0)} + C_l^{(1)} t^\alpha \tag{6.9.5}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\left.\begin{aligned} &B_l = -\frac{\gamma}{P_l - P},\ A_l = \frac{P_l}{P_l - P},\ C_l^{(0)} = \frac{q_l^{(0)}}{P_l - P},\ C_l^{(1)} = \frac{q_l^{(1)}}{P_l - P},\\ &P_l = EI\left(\frac{l\pi}{l}\right)^2,\ q_l^{(0)} = \left(\frac{l}{l}\right)^2 q_l + P u_l^{(0)};\ q_l^{(1)} = \gamma u_l^{(0)} \end{aligned}\right| \tag{6.9.6}$$

Ядрони $R_1(t-\tau) = \varkappa(t-\tau)^{\alpha-1}$ кўринишда олиб, (6.9.5) тенгламаларнинг ечимларини қуйидаги

$$u_l(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} \cdot t^{\alpha j} \tag{6.9.7}$$

қатор кўринишида қидирамиз. Бу ечимларни (6.9.5) тенгламаларга қўйсак,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} t^{\alpha j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(l)} \left[B_l - A_l \cdot \varkappa \frac{\Gamma[\alpha]\cdot\Gamma[\alpha j+1]}{\Gamma[\alpha(j+1)+1]}\right] t^{\alpha(j+1)} = C_l^{(0)} + C_l^{(1)} \cdot t^\alpha$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу ердан $t^{\alpha j}$ ларнинг бир хил даражалари олдиларидаги коэффициентларни тенглаштириб, $a_j^{(l)}$ номаълумларни топиш мумкин бўлган қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} &a_0^{(l)} = C_l^{(0)},\ a_1^{(l)} = C_l^{(0)}\,[A_l\varkappa - B_l] + C_l^{(1)},\\ &a_j^{(l)} = \left[\frac{\Gamma[\alpha]\cdot\Gamma[\alpha(j-1)+1]}{\Gamma[\alpha j+1]} A_l\varkappa - B_l\right] a_{j-1}^{(l)},\ j = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{6.9.8}$$

рекуррент формулаларни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган (6.9.8) рекуррент формулалар орқали $a_j^{(l)}$ коэффициентларини ҳисоблаб, уларни (6.9.7) га қўйсак, (6.9.5) тенгламаларнинг ечимлари келиб чиқади. Энди (6.9.1) дан келиб чиқадиган сиқувчи кучнинг баъзи бир турларида эгилишнинг жадаллик билан ривожлана бошлашини кўрсатадиган вақт ва унга мос келувчи сиқувчи кучни топишга имкон берадиган квазистатик турғунликнинг йўқолиш мезонини аналитик кўринишда аниқлаймиз.

1. Айтайлик, $q(x)=0$ ва сиқувчи куч вақт бўйича ўзгармас, яъни $\gamma=0$ бўлсин, у ҳолда (6.9.8) рекуррент формулалардан $a_j^{(i)}$ коэффициентлар қуйидагига тенг бўлади:

$$a_j^{(i)}=\frac{(A_i\varkappa)^j}{\Gamma[\alpha j+1]}C_i^{(0)},\ j=1,2,\ \ldots\ . \tag{6.9.9}$$

Бу коэффициентларни (6.9.7) га қўйиб, (6.9.6) дан $C_i^{(0)}$ нинг $\gamma=0$ га мос қийматини ҳисобга олсак, (6.9.5) тенгламанинг ечимлари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u_i(t)=\frac{Pu_i^{(0)}}{P_i-P}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma[\alpha j+1]},\ \ z=\varkappa A_i t^{\alpha}. \tag{6.9.10}$$

Кўриниб турибдики, (6.9.10) қатор z нинг даражалари бўйича интенсив ўсиши z миқдор бирга тенг бўлган қийматга эришгандан кейин бошланади. Шунинг учун, эгилишнинг жадаллик билан ривожлана бошланишини кўрсатадиган квазистатик турғунликнинг йўқотилиш мезони сифатида $\varkappa A_i t^{\alpha}=1$ шартни қабул қилиш мақсадга мувофиқдир. Шу шартдан A_i нинг (6.9.6) даги қийматини назарда тутиб, „критик" вақтнинг қийматини аниқлаш мумкин, яъни:

$$t_{\text{кр}}=\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\chi}\left(1-\frac{P}{P_i}\right)}.$$

(6.9.10) ечим критик сиқувчи кучнинг энг кичик қийматини аниқлаш учун қулай мезонни ифодалашга имкон беради. Хусусий ҳолда, бундай мезон сифатида бошланғич эгилишни m марта оширишни қабул қилиш мумкин. Шундай қилиб, m нинг қиймати қуйидаги муносабатдан аниқланади:

$$m=\frac{u_i(t)}{u_i^{(0)}}. \tag{6.9.11}$$

(6.9.10) ва (6.9.11) ларга биноан, m нинг ҳар бир қиймати учун, критик сиқувчи кучнинг энг кичик қиймати қуйидаги

$$P=P_i:\left(1+\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma[\alpha j+1]}\right)$$

формуладан аниқланади. Бундан кўриниб турибдики, $i=1$, $P_1=P_э$ ($P_э$ — Эйлер критик кучи) да P энг кичик қиймат қабул қилади, яъни

$$P_{\text{кр}}=P_1:\left(1+\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma[\alpha j+1]}\right). \tag{6.9.12}$$

Демак, (6.9.12) формула стерженнинг ковушқоқ эластиклик хусусиятини вақт бўйича ўзгармас сиқувчи куч таъсири остида ҳисобга олиш, критик сиқувчи куч қийматининг камайишига олиб келишини кўрсатади.

2. Айтайлик, энди $\gamma > 0$ ва $P = 0$, $q(x) = 0$ бўлсин, яъни сиқувчи куч вақт бўйича кескин ўсувчи бўлсин.

Шуни таъкидлаш лозимки, бу ҳолда критик сиқувчи кучнинг энг кичик қиймати Эйлер критик кучининг қийматига тенг бўлади. Буни кўрсатишни ўқувчиларнинг ўзларига ҳавола қиламиз.

3. Энди қуйидаги ҳолни кўриб чиқамиз: $q(x) = 0$, $\gamma < 0$ ва $P \neq 0$ бўлсин, яъни сиқувчи куч вақт бўйича кескин камаювчи бўлсин. У ҳолда (6.9.8) дан (6.9.6) ни назарда тутиб, $a_j^{(l)}$ коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(l)} &= C_l^{(0)} - \frac{Pu_l^{(0)}}{P_l - P}, \quad a_1^{(l)} = C_l^{(0)}\left|-2 + \frac{\varkappa P_l}{\gamma} + \frac{P_l}{P}\right| B_l \\ a_j^{(l)} &= C_l^{(0)}\left\{1 + \left|-2 + \frac{\varkappa P_l}{\gamma} + \frac{P_l}{P}\right|\right| B_l + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty} \prod_{s=1}^{j-1} \left|\frac{\Gamma|\alpha(S-1)+1}{\Gamma[\alpha S+1]} \cdot \frac{\varkappa P_l}{\gamma} - 1\right| B_l^j \right\} \end{aligned}\right| \qquad (6.9.13)$$

формулаларни ҳосил қиламиз. (6.9.13) ни (6.9.7) га қўйиб,

$$u_l(t) = \frac{P \cdot u_l^{(0)}}{P_l - P}\left\{1 + \left(-2 + \frac{\varkappa P_l}{\gamma} + \frac{P_l}{P}\right)\right| z +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \prod_{s=1}^{j-1} \left(\frac{\Gamma[\alpha(S-1)+1]}{\Gamma[\alpha S+1]} \cdot \frac{\varkappa P_l}{\gamma} - 1\right) z^j \Big|\Big\}, \quad z = B_l t^\alpha$$

га эга бўламиз. Бу ердан кўриниб турибдики, агар $z < 1$ бўлса, стержень чекли эгилишга ишлайди ва $z > 1$ бўлса эгилиш вақт бўйича ўсувчи бўлади. Бундан келиб чиқадики, эгилишнинг жадаллик билан ривожлана бошлашини кўрсатадиган квазистатик турғунликнинг йўқолиш мезони сифатида $B_l \cdot t^\alpha = 1$ шартни қабул қилиш мумкин. Бу шартдан B_l нинг (6.9.6) даги қийматини ҳисобга олиб, критик вақтнинг қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

$$t_{кр} = \sqrt[\alpha]{\frac{P - P_l}{\gamma}}.$$

Дарҳақиқат, (6.9.11) ни эътиборга олиб критик сиқувчи кучнинг энг кичик қийматини ҳисоблаш учун қуйидаги формулани топамиз:

$$P = P_l\left(1 - \frac{1}{m} A\right) : \left[1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\left(\frac{P_l \varkappa}{\gamma} - 2\right) A\right], \qquad (6.9.14)$$

бу ерда

$$A = 1 + \sum_{\gamma=2}^{\infty} \prod_{s=1}^{l=1} \left(\frac{\Gamma[\alpha(S-1)+1]}{\Gamma[\alpha S+1]} \cdot \frac{\varkappa P_l}{\gamma} - 1 \right)$$

ёки (6.9.14) дан $l = 1$, $P_1 = P_э$ десак,

$$P_{кр} = P_э \left(1 - \frac{1}{m} A\right) : \left[1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\left(\frac{P_э \varkappa}{\gamma} - 2\right) A\right] \quad (6.9.15)$$

бўлади. Демак, стерженга вақт бўйича кескин камаювчи сиқувчи куч таъсир қилганда ҳам, унинг ковушқоқ эластиклик хусусиятини ҳисобга олиш, критик сиқувчи куч қийматининг камайишга олиб келишини (6.9.15) формуладан яққол кўриш мумкин.

6.10-§. Вақт бўйича ўзгарувчи сиқувчи кучлар таъсиридаги қовушқоқ эластик стержень динамик турғунлигининг йўқолиши

Айтайлик, қовушқоқ эластик материалдан тайёрланган стерженга (6.9.1) кўринишдаги бўйлама сиқувчи куч таъсир қилаётган бўлсин ва асоснинг акс таъсири эътиборга олинмаган ҳолда $q(x) = W_0(X) = 0$ бўлсин. Унда (6.7.6) дан кўрилаётган масаланинг асосий ҳал қилувчи тенгламаси келиб чиқади, яъни

$$\rho F \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + EI(1 - R_1^*) \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + N(t) \frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial x^2} = 0. \quad (6.10.1)$$

Бу тенгламанинг (6.7.4) чекланиш шартларни қаноатлантирувчи ечимини (6.8 4) функция кўринишда қидирамиз. Демак, (6.8.4) ни (6.10.1) га қўйиб, $u_l(t)$ номаълум функцияларга нисбатан қуйидаги тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2 u_l(t)}{dt^2} - (d_l + b_l t^\alpha)\, u_l(t) - C_l \int_0^t R(t-\tau)\, u_l(\tau)\, d\tau = 0, \quad (6.10.2)$$

бу ерда

$$\left.\begin{aligned} d_l &= \frac{\omega_l^2}{\omega_0^2}\left(\frac{P}{P_l} - 1\right),\ b_l = \frac{\omega_l^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{P_э}{P_l} \gamma^* \\ C_l &= \frac{\omega_l^2}{\omega_0^2},\ \gamma = P_э \omega_0^\alpha \gamma^*,\ \omega_l = \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \\ P_l &= \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 EI,\ P_э = \frac{P_l}{l^2}. \end{aligned}\right| \quad (6.10.3)$$

(6.10.2) тенгламада $t^* = t\omega_0$ алмаштириш бажарилган ва соддалик учун, t нинг даражасидаги юлдузчалар тушириб қолдирилган.

Бу ерда ҳам ядрони $R_2(t-\tau)=\varkappa(t-\tau)^{\alpha-1}$ кўринишида танлаб олиб, (6.10.2) тенгламаларнинг қуйидаги

$$u_l(0)=\alpha_0^{(l)},\quad \frac{du_l(0)}{dt}=0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини (6.9.7) қатор куринишда қидирамиз. (6.9.7) ечимларни (6.10.2) тенгламаларга қўйиш натижасида ҳосил қилинган тенгликдан $t^{\alpha j}$ ларнинг бир хил даражалари олдиларидаги коэффициентларни тенглаштириб, $a_j^{(l)}$ номаълум коэффициентларни топиш мумкин бўлган қуйидаги

$$\left.\begin{aligned}
&a_0^{(l)}=\alpha_0^{(l)},\ a_1^{(l)}=a_2^{(l)}=\ldots=a_{2m-1}^{(l)}=0,\ \alpha=\frac{1}{m}\\
&a_{2m+j}^{(l)}=\frac{m^2}{(2m+l)(m+l)}\left\{a_la_j^{(l)}+\left(b_l+\varkappa C_l\frac{\Gamma[\alpha(j-1)+1]}{\Gamma[\alpha j+1]}\right)a_{j-1}^{(l)}\right\}\\
&\qquad j=0,1,2,\ldots.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.10.4)$$

рекуррент формулаларни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган рекуррент формулалар орқали $a_j^{(l)}$ коэффициентларни ҳисоблаб, уларни (6.9.7) га қўйсак, (6.10.2) тенгламаларнинг ечимлари

$$\begin{aligned}
u_l(t)=\alpha_0^{(l)}\Bigg\{&1+\frac{d_l t^2}{2!}+\frac{m^2\left(b_l+\varkappa\frac{C_l}{\Gamma[\alpha+1]}\right)}{(2m+1)(m+1)}t^2t^{\alpha}+\frac{d_lt^4}{4!}+\\
&+\frac{m^2d_lt^4t^{\alpha}}{(4m+1)(3m+1)\,2!}\Bigg[\left(\frac{m^2\cdot2\cdot1}{(2m+1)(m+1)}+1\right)b_l+\Bigg(\frac{m^2\cdot2\cdot1}{(2m+1)(m+1)\Gamma[\alpha+1]}+\\
&+\frac{\Gamma[\alpha(2m)+1]}{\Gamma[\alpha(2m+1)+1]}\cdot\varkappa\cdot C_l\Bigg)\Bigg]+\frac{d_lt^6}{6!}+\frac{m^2\cdot d_l^2\cdot t^6\cdot t^{\alpha}}{(6m+1)(5m+1)\cdot4!}\times\\
&\times\left(\frac{m^2\cdot4\cdot3}{(4m+1)(3m+1)}\cdot\left(\frac{m^2\cdot2\cdot1}{(2m+1)(m+1)}+1\right)b_l+\Bigg(\frac{m^2\cdot4\cdot3}{(4m+1)(3m+1)}\times\right.\\
&\times\left(\frac{m^2\cdot2\cdot1}{(2m+1)(m+1)\Gamma[\alpha+1]}+\frac{\Gamma[\alpha(2m)+1]}{\Gamma[\alpha(2m+1)+1]}\right)+\\
&\left.+\frac{\Gamma[\alpha(4m)+1]}{\Gamma[\alpha(4m+1)+1]}\Bigg)\right)\varkappa\cdot C_l\Bigg]+\ldots\Bigg\}
\end{aligned}\qquad(6.10.5)$$

кўринишда бўлишлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди стерженга таъсир қилаётган бўйлама сиқувчи кучдан, яъни (6.9.1) дан ҳосил бўладиган баъзи бир турларда эгилишнинг интенсив ривожлана бошлашини кўрсатадиган критик вақтни топишга имкон берадиган динамик турғунликнинг йўқолиш мезонини аниқлаймиз.

1. Айтайлик, сиқувчи куч вақт бўйича ўзгармас бўлсин, яъни $\gamma=0$. Сиқувчи кучнинг бу тури бошқа турларга нисбатан содда бўлгани учун буни бажаришни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

2. $\gamma > 0$ ва $P = 0$ бўлиб, сиқувчи куч вақт бўйича кескин ўсувчи бўлсин. У ҳолда (6.10.4) га биноан (6.10.5) дан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$
\begin{aligned}
u_i(t) = {} & a_0^{(i)}\Bigg\{\cos\sqrt{\theta_i t} + z^{2+\alpha}\Bigg[\frac{m^2}{(2m+1)(m+1)} - \\
& - \frac{m^2(\sqrt{\theta_i t})^2}{(4m+1)(3m+1)\,2!}\Bigg(\Bigg(\frac{m^2\cdot 2\cdot 1}{(2m+1)(m+1)} + 1\Bigg)b_i^* + \Bigg(\frac{m^3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)(m+1)\Gamma[\alpha+1]} + \\
& + \frac{\Gamma[\alpha(2m)+1]}{\Gamma[\alpha(2m+1)+1]}\Bigg)\cdot C_i^*\Bigg) + \frac{m^2(\sqrt{\theta t})^4}{(6m+1)(5m+1)\,4!}\Bigg(\Bigg(\frac{m^2\cdot 2\cdot 1}{(4m+1)(3m+1)} \times \\
& \times\Bigg(\frac{m^2\cdot 2\cdot 1}{(2m+1)(m+1)} + 1\Bigg) + 1\Bigg)b_i^* + \Bigg(\frac{m^3\cdot 4\cdot 3}{(4m+1)(3m+1)}\Bigg(\frac{m^3\cdot 2\cdot 1}{(2m+1)(m+1)\Gamma[\alpha+1]} + \\
& + \frac{\Gamma[\alpha(2m)+1]}{\Gamma[\alpha(2m+1)+1]}\Bigg) + \frac{\Gamma[\alpha(4m)+1]}{\Gamma[\alpha(4m+1)+1]}C_i^*\Bigg) + \ldots\Bigg]\Bigg\} \qquad (6.10.6)
\end{aligned}
$$

Бунда $z = \sqrt[2+\alpha]{b_i + \frac{C_i}{\Gamma[\alpha+1]}\cdot\varkappa\cdot t}$;

$$b_i^* = \frac{b_i}{d_i};\quad C_i^* = \frac{C_i}{d_i}\varkappa;\quad \theta_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2};\quad d_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}.$$

(6.10.6) ечимдан кўриниб турибдики, эгилишнинг вақт бўйича интенсив ривожланиши Z миқдор бирга тенг бўлган қийматга эришгандан кейин бошланади.

Демак, эгилишнинг жадаллик билан ривожланишини аниқлайдиган динамик турғунликнинг йўқолиш мезони учун қуйидаги

$$\sqrt[2+\alpha]{b_i + \frac{C_i}{\Gamma[\alpha+1]}\cdot\varkappa\cdot t} = 1$$

шартни қабул қилиш мақсадга мувофиқдир. Бу шартдан

$$t_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt[2+\alpha]{b_i + \frac{C_i}{\Gamma[\alpha+1]}\cdot\varkappa}} \qquad (6.10.7)$$

бўлади.

(6.10.6) ечимдан $\varkappa = 0$ ва $\alpha = 1$ қийматларда эластик стерженнинг ечими келиб чиқади, яъни

$$u_i(t) = a_0^{(i)}\left\{\cos\sqrt{\theta_i}\cdot t + \left(\sqrt[3]{b_i}\cdot t\right)^3 \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}\cdot j^2(\sqrt{\theta_i}\cdot t)^{2(j-1)}}{(2j+1)!}\right\} \qquad (6.10.8)$$

ва (6.10.7) дан эса, унга мос келувчи критик вақт

$$t_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt[3]{b_i}} \qquad (6.10.9)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, (6.10.7) ва (6.10.9) лардан стерженнинг қовушқоқ эластиклик хусусиятини ҳисобга олиш, критик вақтнинг камайишига олиб келишини кўриш мумкин.

3. Айтайлик, $\gamma < 0$ ва $P \neq 0$, яъни сиқувчи куч вақт бўйича кескин камаювчи бўлсин. Бу ҳолда (6.10.6) ечим қуйидагича бўлади:

$$u_i(t) = \alpha^{(i)} \left\{ 1 + \frac{d_i t^2}{2!} \left[1 + \frac{m^2 + 2! \left(b_i + \frac{C_i}{\Gamma[\alpha+1]} \cdot \varkappa \right)}{(2m+1)(m+1) d_i} t^\alpha \right] + \right.$$

$$+ \frac{d_i^2 t^4}{4!} \left[1 + \frac{m^2 \cdot 4 \cdot 3}{(4m+1)(3m+1) d_i} \left(\left(\frac{m^2 \cdot 2!}{(2m+1)(m+1)} + 1 \right) b_i + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{m^2 \cdot 2 \cdot 1}{(2m+1)(m+1)\Gamma[\alpha+1]} + \frac{\Gamma[\alpha(2m)+1]}{\Gamma[\alpha(2m+1)+1]} C_i \cdot \varkappa \right) t^\alpha \right] + \ldots \right\}. \quad (6.10.10)$$

Агар сиқувчи кучни P_i гача камаяди деб ҳисобласак, идеал эластик ҳолдагига ўхшаш, қовушқоқ, эластик стерженнинг динамик турғунлигининг йўқолиш мезони сифатида

$$d_i t^2 \left[1 + \frac{m^2 \cdot 2! \left(b_i + \frac{C_i}{\Gamma[\alpha+1]} \cdot \varkappa \right)}{(2m+1)(m+1) d_i} \cdot t^\alpha \right] = 1 \qquad (6.10.11)$$

шартни қабул қилиш мумкин. $P_i = P - \gamma t^\alpha$ шартдан сиқувчи кучнинг P_i қийматигача камайишига мос келувчи t нинг қийматини аниқлаймиз, яъни

$$t^\alpha (\psi_0 + z_i) \cdot \frac{1}{\gamma^*} \qquad (6.10.12)$$

бу ерда $Z_i = \frac{P_i}{F_э}$, $\psi = \frac{P}{F_э}$ — сиқувчи куч қийматининг Эйлер критик кучи қийматига нисбати.

(6.10.11) дан (6.10.12) ға биноан ψ_0 ва γ^* лар орасидаги боғланишни қуйидагича ёзамиз:

$$\psi_0 = \sqrt[\frac{2+\alpha}{\alpha}]{\frac{\frac{Z_i}{\theta_i} \gamma^{*\frac{2}{\alpha}}}{1 + \frac{m^2 \cdot 2 \cdot 1}{(2m+1)(m+1)} \left(\frac{Z_i}{\gamma^*} \bar{\varkappa} - 1 \right)}} + Z_i. \qquad (6.10.13.)$$

Бунда

$$\bar{\varkappa} = \frac{\varkappa \omega_0^\alpha}{\Gamma[\alpha+1]}, \quad \theta_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}.$$

Хусусий ҳолда (6.10.13) дан $\varkappa = 0$ ва $\alpha = 1$ қийматларда идеал эластик стержень учун ψ_0 ва γ^* лар орасидаги муносабат келиб чиқади, яъни

$$\psi_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \theta_i \gamma^{*2}} + Z_i.$$

Шундай қилиб, биринчи қарашда қурилиш механикасининг функционалларини минималлаш масаласи унчалик мураккаб бўлмаган масала бўлиб кўринса-да, ҳақиқатда эса ўзига хос чекланиш шартлари асосида мураккаб тенгламаларни ечишга келтирилади.

Биз бу тенгламаларни (6.7.4) кўринишдаги содда чекланиш шартларига биноан ечишни келтирдик.

7-БОБ. ОПТИМАЛ БОШҚАРИШ МАСАЛАЛАРИ. Понтрягиннинг максимум принципи

Ушбу бобда объектларни оптимал бошқариш назариясидан иборат дастлабки тушунчалар берилади. Сўнгра вариацион ҳисоб билан оптимал бошқариш орасидаги баъзи богланишлар қисқача баён қилинади.

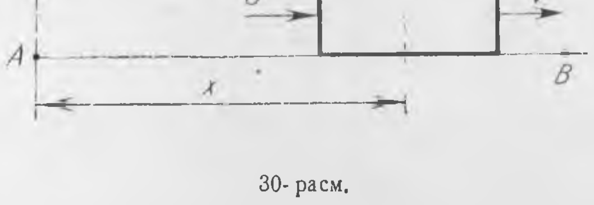
7.1-§ Тез ҳаракат масаласи ва оптимал бошқариш масаласининг қўйилиши

Оптимал бошқариш масаласининг умумий тарзда қўйилишини баён қилишдан олдин, унинг энг содда ҳоли бўлган тез ҳаракат масаласининг қўйилиши билан танишиб чиқамиз.

Тез ҳаракат масаласининг қўйилиши Брахистохрон масаласининг қўйилишига ўхшаб кетади. Бироқ, бу масалалар бирбиридан кучнинг материал нуқтага таъсир қилиш йўли билан фарқ қилади. Тез ҳаракат масаласининг қўйилиши қуйидагидар иборат: массаси m бўлган Q материал нуқта бирор куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қиладиган бўлсин. Ҳар бир пайтда нуқтадан координаталар бошигача бўлган масофа x бўлса, у ҳолда нуқтанинг тезлиги $v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ бўлади.

Материал нуқтанинг A ҳолатдаги тезлиги v_0 бўлса, бу нуқтага шундай куч таъсир қилсинки, бунда бу нуқта олдиндан берилган v тезликда энг қисқа вақт ичида B ҳолатга етиб келсин. Қўйилган масаланинг математик моделини тузамиз. Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан вақт ўтиши билан Q нуқтанинг ҳаракати (30-расм)

$$U=m\cdot a=m\cdot\ddot{x}$$



30-расм.

дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бу тенгламани x_1, x_2 ўзгарувчилар ёрдамида ($x = x_1$, $x_2 = \dot{x}_1$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{u}{m} \end{aligned}\right\} \tag{7.1.1}$$

кўринишда ёзиш мумкин. *u бошқариш функцияси,* бошқарилаётган Q нуқта эса *бошқариш объекти* дейилади. Бошқариш объекти ўзимизнинг ихтиёримизда бўлгани учун

$$|u(t)| \leqslant L, \ t \geqslant 0 \tag{7.1.2}$$

деб фараз қиламиз. (7.1.1) ва (7.1.2) лар тез ҳаракат масаласининг *математик модели* дейилади. Демак, тез ҳаракат масаласини қуйидагича баён қилишимиз мумкин: шундай бошқариш функциясини топишимиз керакки, у биринчидан (7.1.2) шартни қаноатлантирсин, иккинчидан, унга мос келган (7.1.1) системанинг ечими энг қисқа вақт ичида A ва B нуқталардан ўтсин. (7.1.1) системанинг ечими *материал нуқтанинг ҳаракат траекторияси* дейилади.

Энди Брахистохрон масаласи билан тез ҳаракат масаласи ўртасидаги фарқни яққол кўриш мумкин. Брахистохрон масаласида материал нуқтани ҳаракатга келтирувчи куч табиий, яъни оғирлик кучидир. Тез ҳаракат масаласида эса материал нуқтани ҳаракатга келтирувчи куч сунъий бўлиб, у (7.1.2) шартни қаноатлантириши талаб қилинади. Тез ҳаракат масаласида бошқариш функцияси $u(t)$ номаълум бўлиб. Брахистохрон масаласида эса моддий нуқта ҳаракат қиладиган траектория маълумдир.

Тез ҳаракат масаласи оптимал бошқаришнинг энг оддий масаласидир. Бу хилдаги масалаларни ҳал этувчи математик аппарат академик Понтрягин томонидан яратилган бўлиб, унинг номи билан, *Понтрягиннинг максимум принципи* деб юритилади. Бу принципнинг моҳиятини баён қилишдан олдин оптимал бошқариш масаласининг умумий қўйилиши ҳақида қисқача тўхталиб ўтамиз.

Бошқариладиган бирон объектнинг ҳаракати ушбу

$$\frac{dX}{dt} = F(X, U)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{7.1.3}$$

дифференциал тенгламалар системаси билан берилган бўлсин. Бу ерда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ҳар бир моментда объектнинг ҳолатини аниқловчи миқдорлар бўлиб, бирорта n ўлчовли R_n фазода вақт бўйича ўзгарувчи функциялардир; $u_1(t)$, $u_2(t)$, . . . ,

$u_m(t)$ лар эса бошқариш функциялари дейилиб, улар бошқариш соҳаси деб аталувчи m ўлчовчи R_m соҳада қийматлар қабул қилади. $[t_1, t_2]$ кесмада берилган $u_i(t)$ функциялар учун (7.1.3) тенгламани қуйидаги

$$X(t_1)=X_1 \qquad (7.1.4)$$

бошланғич шартда ечсак, қурилаётган объектнинг ҳаракат траекториясини топган бўламиз.

1-таъриф. X_1 билан бирга $[t_1, t_2]$ кесмада берилган $u_i(t)$, $i=\overline{1, m}$ функциялар тўплами *бошқариш* дейилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$v=(u(t),\ t,\ X_1,\ t_1). \qquad (7.1.5)$$

2-таъриф. (7.1.5) бошқариш R_m соҳалан қийматлар қабул қилувчи бўлакли—узлуксиз m ўлчовли $u(t)$ вектор функция орқали аниқланса, у *мумкин бўлган бошқариш* дейилади.

3-таъриф. Агар $F(x, u)$ функция ҳамма $X \in R_n$ ва $u \in R_m$ лар учун хусусий ҳосилаларга эга бўлган функция бўлса, яъни

$$\frac{\partial F(X, U)}{\partial x}$$

бўлса,

$$I(v)=\int_{t_1}^{t_2} F(X, U)dt \qquad (7.1.6)$$

сон бошқариш тўплами v да аниқланган функционал дейилади.

4-таъриф. Агар (7.1.5) бошқаришга мос келувчи (7.1.3) тенгламанинг ечими $X(t)$, $[t_1, t_2]$ кесмада аниқланган бўлиб, $X(t_2)=X_2$ шартни ҳам қаноатлантирса, у ҳолда *v бошқариш нуқтани X_1 ҳолатдан X_2 ҳолатга ўтказади* дейилади.

Юқорида киритилган тушунчалар асосида оптимал бошқариш масаласининг қўйилишини кўриб чиқамиз.

Нуқтани X_1 ҳолатдан X_2 ҳолатга ўтказадиган мумкин бўлган бошқаришлар ичидан шундайини топиш керакки, у (7.1.6) функционалга энг кичик қиймат берсин, яъни қуйидаги

$$I(v) \leqslant I(v_0) \qquad (7.1.7)$$

тенгсизлик ҳамма мумкин бўлган $v_0=(u^{(0)}(t^{(0)}),\ t^{(0)},\ X_1^{(0)},\ t_1^{(0)})$, бошқаришлар учун ўринли бўлсин. (7.1.7) тенгсизликни қаноатлантирадигин (7.1.5) бошқаришга *оптимал бошқариш* дейилади, ва унга мос келган (7.1.3) тенгламанинг ечими *бошқарилаётган объект ҳаракатининг оптимал траекторияси* дейилади, (7.1.7) шарт объект ҳаракатининг ёки бошқаришнинг *оптималлик шарти* дейилади.

7.2 § Оптималликнинг зарурий шарти. Понтрягиннинг максимум принципи

Энди берилган бошқаришнинг ва унга мос келувчи траекториянинг оптимал бўлишлиги учун зарур бўлган шартни баён қилишга ўтамиз. Шу мақсадда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U), \; i=\overline{1, n} \\ &x_i(t_1)=x_i^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{7.2.1}$$

система билан

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_0}{dt} = f_0(X, U) \\ &x_0(t_1) = 0 \end{aligned}\right| \tag{7.2.2}$$

тенгламани биргаликда қараймиз. Бу ерда $f_0(X, U)$ функция $I(v)$ функционални аниқлайдиган функциядир, яъни

$$\int_{t_1}^{t_2} f_0(X, U)dt = x_0(t_2). \tag{7.2.3}$$

Кўриниб турибдики, (7.2.3) ифода (7.2.2) тенгламани t_1 дан t_2 гача интеграллаш натижасида ҳосил бўлган. Энди оптимал бошқариш масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин: мумкин бўлган шундай U бошқаришни топиш керакки, унга мос келувчи (7.2.1) системанинг ечими (7.2.8) функционалга, яъни $x_0(t_2)$ га энг кичик қиймат берсин. Энди оптималлашнинг зарурий шарти бўлган Понтрягиннинг максимум принципини баён қиламиз. Бунинг учун (7.2.1)—(7.2.2) системадан бошқа яна ушбу

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} y_j(t), \; i=\overline{0, n} \tag{7.2.4}$$

системани қараймиз, бу ерда $y_0, y_1, \ldots, y_n$ ёрдамчи номаълум функциялар. Агар бирор мумкин бўлган $u(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ бошқариш функцияси танланган бўлиб, $\overline{X}(t)=(x_0(t), \; x_1(t), \ldots, x_n(t))$ функция $\overline{X}(t_1) = X_1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи унга мос траектория бўлса, у ҳолда (7.2.4) $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ оралиқда аниқланган, бошланғич қийматлари ихтиёрий бўлган ягона $\overline{Y}(t)=(y_0(t), \; y_1(t), \ldots, y_n(t)$ ечим мавжуд.

Энди ушбу

$$\Pi(\overline{Y}, \; X, \; U) = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(X, U)$$

функцияни киритамиз. Бу функция ёрдамида (7.2.1), (7.2.3) (7.2.4) ларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial П(\overline{Y}, X, U)}{\partial y_i}; \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial П(\overline{Y}, X, U)}{\partial x_i}; \quad i = \overline{0, n} \end{aligned}\right| \qquad (7.2.5)$$

фиксирланган $\overline{Y}$ ва X лар учун $П$ функциянинг U бўйича максимумини $H(\overline{Y}, X)$ билан белгилаймиз, яъни

$$H(\overline{Y}, X) = \max_{U \in v} П(\overline{Y}, X, U).$$

Энди Понтрягиннинг максимум принципи бўлган қуйидаги теоремани келтирамиз.

Теорема (максимум принципи). (7.1.5) бошқаришнинг ва $x_0(t_1) = 0$; $x_i(t_1) = x_i^{(1)}$; $x_i(t_2) = x^{(2)}$, $i = \overline{1, n}$ шартларни қаноатлантирувчи, унга мос келувчи (7.2.1)—(7.1.2) системанинг ечими $\overline{X}(t)$ ёки қурилаётган объектнинг ҳаракат траекторияси оптимал бўлиши учун қуйидаги учта шартни қаноатлантирувчи, нолга тенг бўлмаган ва узлуксиз

$$\overline{Y}(t) = (y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

вектор функциянинг мавжуд бўлиши зарур:

1) $\overline{Y}(t)$ вектор функция (7.2.5) тенгламалар системасидаги иккинчи тенгламанинг ечими;

2) Ихтиёрий t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ учун $П(\overline{Y}, X, U)$ функция $u = u(t)$ нуқтада максимумга эришади;

3) Охирги t_2 пайтда $y_0(t_2) = 0$.

$$П(\overline{Y}(t_2), X(t_2), U(t_2)) = \sum_{j=0}^{n} y_j(t_2) f_j X(t_2), U(t_2)) = 0$$

муносабатлар ўринлидир.

Агар $\overline{Y}(t)$, $X(t)$, $U(t)$ вектор функциялар (7.2.5) системани 1 ва 2-шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $y_0(t)$ ва $П(\overline{Y}(t)$, $X(t)$, $U(t))$ функциялар ўзгармас бўлади. Шунинг учун, 3-шартни t_2 пайтда эмас, балки ихтиёрий t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ пайтда текшириш мумкин.

Юқорида келтирилган теорема бошқаришнинг ва унга мос траекториянинг оптимал бўлишлигининг зарурий шартидир. Биз бу теореманинг исботи устида батафсил тўхтаб ўтирмасдан, оптимал бошқариш масаласи билан вариацион ҳисобининг энг оддий масаласи ўртасидаги боғланишни ва кейинги масала учун (7.2.5) система ҳамда $П(\overline{Y}(t)$, $X(t)$, $U(t))$ функциянинг максималлик шарти—Эйлер тенгламаси билан бир хил эканлигини кўрсатиш билангина чекланамиз.

7.3-§. Оптимал бошқариш ва вариацион ҳисоблаш масалалари орасидаги боғланиш

Берилган функционалда интеграл остидаги функция x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган вариацион ҳисобининг энг оддий масаласини, яъни

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y')dx, \; y(x_1) = C_1, \; y(x_2) = C_2 \qquad (7.3.1)$$

ни қараймиз. Бунда x ни t ва y ни x билан алмаштирсак қуйидагига эга бўламиз:

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} F(x, x')dt, \; x(t_1) = C_1, \; x(t_2) = C_2. \qquad (7.3.2)$$

Бу функционал учун функционалнинг минимуми мавжудлигининг зарурий шарти бўлган Эйлер тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\frac{\partial F(x, x')}{\partial x} - \frac{\alpha}{dt} \cdot \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'} = 0. \qquad (7.3.3)$$

Энг аввало, (7.3.2) масала оптимал бошқариш масаласининг хусусий ҳоли эканлигини кўриб чиқамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$x' = \frac{dx}{dt} = U(t) \qquad (7.3.4)$$

белгилаш киритсак,

$$I(v) = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), U(t)dt, \; x(t_1) = C_1, \; x(t_2) = C_2 \qquad (7.3.5)$$

бўлиб, (7.3.2) масала оптимал бошқариш масаласининг ((7.2.1) (7.2.2), (7.2.3) га қаранг) хусусий ҳоли эканлиги келиб чиқади. Энди

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \; \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \; i = \overline{0, n} \qquad (7.3.6)$$

система

$$H(\overline{Y}, X) = \max_{U \in v} \Pi(\overline{Y}, X, U)$$

шарт билан биргаликда Эйлер тенгламасининг ўзи эканлигини кўриб чиқамиз. Ҳақиқатан ҳам, (7.3.4) ва (7.3.5) учун $\Pi(\overline{Y}, X, U)$ функциянинг кўриниши

$$\Pi(\overline{Y}, X, U) = y_0 F(X, U) + y_1 \cdot U \qquad (7.3.7)$$

бўлади. Бу функция $\Pi(\overline{Y}, X, U) = \sum_{j=0}^{n} y_j f_j(X, U)$ функциядан $n=1$, $f_0(X, U) = F(X, U,)$ $f_1(X, U) = U$ кўринишдаги белгилашлардан келиб чиқади, (7.3.7) ни (7.3.6) га қўйиб, ($i=0,1$) қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_0}{dt}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_0}=F(X, U); \quad \dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial y_1}=U \\ \dfrac{dy_0}{dt}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_0}=0; \quad \dfrac{dy_1}{dt}=-\dfrac{\partial \Pi}{\partial x_1}=-y_0\dfrac{\partial F(X, U)}{\partial x_1} \end{array}\right| \qquad (7.3.8)$$

Функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шартидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U}=y_0\frac{\partial F(X, U)}{\partial U}+y_1=0 \text{ ёки } y_1=-y_0\frac{\partial F(X, U)}{\partial U}$$

Буни $\dfrac{dy_1}{dt}=-y_0\dfrac{\partial F(X, U)}{\partial x_1}$ тенгламага қўйиб (7.3.8) дан $y^{\prime}=$ $=\text{const}$ эканлигини ҳамда

$$\frac{\partial F(X, U)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F(X, U)}{\partial x'}=0$$

тенгламани ёки (7.3.4) ни назарда тутсак,

$$\frac{\partial F(x, x')}{\partial x}-\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F(x, x')}{\partial x'}=0$$

ҳосил қиламиз. Бу тенглама эса (7.3.5) нинг ўзидир. Демак, Понтрягиннинг максимум принципи бошқариш оптималлигининг зарурий шарти экан.

8-БОБ ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ

8.1-§. Динамик программалаштириш масалаларининг умумий характеристикаси

Динамик программалаштириш оптималлаш масалаларини ечишда қўлланиладиган, ҳозирги замонда яратилган энг янги математик усуллардан биридир. Бу усулдан фойдаланиб, электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида экономиканинг, математиканинг ва механиканинг ўта мураккаб масалаларини ечиш мумкин.

Ҳозиргача кўрилган ҳар хил иқтисодий жараёнларни акс эттирувчи чизиқли ва чизиқсиз программалаштириш масалалари вақтга боғлиқ бўлмаган, яъни статик масалалардир. Шунинг учун, бу масалаларнинг оптимал ечимларини планлаштиришнинг фақат бир босқичи учунгина топиш мумкин. Бундай типдаги масалалар, одатда, *бир босқачли масалалар* деб юритилади. Динамик программалаштириш усулининг номидан бу усулни фақат вақт билан боғлиқ масалаларга қўллаш мумкин, деган хулосага келиш мумкин, чунки динамика деган сўз вақт билан боғлиқ бўлган жараённи билдиради. Бироқ бу усул билан вақт умуман иштирок этмаган масалаларни ҳам ечиш мумкин. Демак, динамика қаралаётган масалада эмас, балки уни ечиш усулидадир; бошқача қилиб айтганда, қаралаётган масалани ечиш жараёни изланаётган ечимни топишга олиб келадиган вақт буйича кетма-кет бажарилиши зарур бўлган бир неча босқичга бўлинади. Шунинг учун ҳам динамик программалаштириш масалалари *кўп босқичли* ёки *кўп қадамли масалалар* дейилади.

Динамик программалаштириш назариясини яратишда америкалик олим Ричард Беллманнинг ҳиссаси каттадир. Динамик программалаштириш масалаларини ечишда муҳим роль ўйнайдиган функционал тенглама деб юритилувчи тенгламани ҳам мана шу олим яратгандир.

Динамик программалаштириш усули билан ечиладиган кўп босқичли масалаларнинг алоҳида хусусиятлари қуйидагилардан иборат.

1. Ҳар бир қадамдаги ҳолати $X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ вектор билан аниқланадиган бирон-бир физик ёки иқтисодий жараёнга ёки системага эга бўлайлик. Бу жараённинг бундан кейинги ўзгариши фақат мана шу X_k векторга боғлиқ бўлиб, унинг шу ҳолатга қандай йўл билан келтирилганлик сабабига боғлиқ бўлмаслиги ёки бошқача қилиб айтганда, жараён хотирада сақланмайдиган бўлиши керак.

2. Жараён бирин-кетин бажариладиган n та босқичга ёки қадамга бўлиниши керак. Ҳар бир қадамда жараённи x_{k-1} ҳолатдан X_k ҳолатга келтирувчи $v_k = (u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)})$ бошқариш танланиши керак. У ҳолда X_k ҳолат X_{k-1} ва v_k нинг функциясидан иборат бўлади, яъни

$$X_k = X_k(X_{k-1};\ v_k).$$

Жараён хотирада сақланмайдиган бўлганлиги учун v_k бошқариш фақат X_{k-1} векторнинг функцияси бўлади, яъни

$$v_k = v_k(X_{k-1}).$$

3. Ҳар бир қадамда олинадиган фойда R_k бўлса, у X_{k-1} ва v_k нинг функцияси бўлади, яъни

$$R_k = R_k(X_{k-1};\ v_k).$$

n қадамда олинадиган умумий фойда эса, қуйидаги

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k(X_{k-1};\ v_k) \qquad (8.1.1)$$

формула билан аниқланади.

4. Ҳар бир қадамга мос келувчи шундай v_k, $k = \overline{1, n}$ бошқаришни танлаш кераккки, n қадамда олинадиган умумий фойда энг кўп бўлсин. Бундан ташқари, X вектор ва v бошқариш ўзининг қийматларини мумкин бўлган соҳалар G_1 ва G_2 дан қабул қилсин, яъни $X \in G_1$, $v \in G_2$.

1-таъриф. Жараённи ёки қаралаётган системани бошланғич ҳолатдан охирги X_n ҳолатга ўтказадиган мумкин бўлган бошқаришлар $v_1, v_2, \ldots, v_n$ тўплами, яъни

$$v = v(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

бошқариш стратегияси дейилади.

2-таъриф. Кетма-кет аниқланадиган ва (8.1.1) функцияга максимум қиймат берувчи X_{k-1}, v_k, $k=\overline{1, n}$ лар *оптимал стратегия* дейилади.

(8.1.1) кўринишидаги мақсад функцияга бошқариш мезони ёки *аддитивлик мезони* дейилади. Биз қуйида бошқариш мезони (8.1.1) кўринишда бўладиган оптималлаш масалалари ҳақида тўхталиб ўтамиз. Бундай масалалар ичида энг соддаси ресурсларни тақсимлаш масаласидир.

8.2-§. Ресурсларни тақсимлаш масаласи

Фараз қилайлик, биз маълум миқдордаги ресурсларга эга бўлайлик, яъни бизнинг ихтиёримизда маълум сондаги одамлар, машиналар, сув ва ракеталар учун ёқилғилар ва ҳоказолар бўлиб, бу ресурсларни ҳар хил йўл билан ишлатиш имкониятига эга бўлайлик.

Бу имкониятларнинг ҳар бири *жараён* дейилади. Ҳар бир жараёнда бор бўлган ресурсларнинг барчасидан ёки унинг бир қисмидан фойдаланиб, маълум бир миқдордаги фойда оламиз ёки маълум бир нархга эга бўлган маҳсулот ишлаб чиқарамиз.

Олинадиган фойданинг миқдори ёки ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг нархи ресурсларни қандай қилиб тақсимлашимизга ва улардан қандай фойдаланишимизга боғлиқдир.

Асосий мақсад—ҳар бир жараёнда ресурсларни шундай тақсимлаш кераки, олинадиган фойда энг кўп бўлиб, сарф бўладиган харажат энг кам бўлсин.

Шундай қилиб, ресурсларни тақсимлаш масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин: n хил йўл билан фойдаланиш мумкин бўлган ва миқдори x га тенг бўлган ресурсга эга бўлайлик. Бор бўлган ресурслар ва уларни тақсимлаш йўллари ҳар хил бўлсин. i хил тақсимлашда ($i=\overline{1, n}$) фойдаланиладиган ресурснинг миқдори x_i бўлиб, олинадиган фойданинг миқдори $g_i(x_i)$ бўлса, умумий фойда энг кўп бўлишлиги учун қандай миқдордаги ресурсдан қайси йўл билан фойдаланиш кераклиги аниқлансин.

Қўйилган масаланинг математик моделини тузамиз. Ресурслардан фойдаланиш имкониятимиз $i=\overline{1, n}$ га ва ҳар бир имкониятдан келадиган фойда ёки ресурслардан фойдаланиш учун кетган харажат миқдори $g_i(x_i)$ бўлгани учун умумий фойда

$$z=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \tag{8.2.1}$$

га тенг бўлади. Ҳар бир имкониятлардан фойдаланадиган ресурслар миқдорининг йиғиндиси ресурсларнинг умумий миқдорига тенг бўлганлиги учун

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X,\ x_i \geqslant 0,\ i=\overline{1,\ n} \tag{8.2.2}$$

тенглик ўринлидир. Энди ресурсларни тақсимлаш масаласини қуйидагича баён қилиш мумкин. Чекланиш шартлари (8.2.2) ни қаноатлантирадиган шундай x_i ва n ларни топиш керакки, мақсад функция (8.2.1) энг катта қийматга эришсин. (8.2.1) нинг максимум қиймати ресурсларнинг умумий миқдори X ва имкониятлар сони n га боғлиқ бўлгани учун уни

$$f_n(X)=\max_{\sum_{i=1}^{n} x_i = X} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \tag{8.4.3}$$

деб ёза оламиз.

Бу ерда умумий ресурс миқдори (8.3.2) дан фойдаланиш бўйича максималлаш операцияси кетма-кет иккита максималлаш операциясидан иборатдир. Бунинг биринчиси $X-x_n=$ $=x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}$ ресурсдан фойдаланиш бўйича максималлаш операцияси бўлиб, иккинчиси x_n ресурсдан фойдаланиш бўйича максималлаш операциясидир, яъни

$$\max_{\sum_{i=1}^{n} x_i = X} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)=\max_{0<x_n<X}\left[\max_{\sum_{i=1}^{n} x_i = X-x_n} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right].$$

Бундан фойдаланиб, (8.2.3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f_n(X)=\max_{\sum_{i=1}^{n} x_i = X}\left[g_n(x_n)+g_{n-1}(x_{n-1})+\ldots+g_1(x_1)\right]=$$

$$=\max_{0<x_n<X}\left\{\max_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i = X-x_n}\left[g_n(x_n)+g_{n-1}(x_{n-1})+\ldots+q_1(x_1)\right]\right\}=$$

$$= \max_{0<x_n<X} \left\{ g_n(x_n) + \max_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i = X - x_n} \left[g_{n-1}(x_{n-1}) + g_{n-2}(x_{n-2}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + g_1(x_1) \right]\right\} = \max_{0<x_n<X} \left\{ g_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n) \right\}.$$

Демак,

$$f_n(X) = \max_{0<x_n<X} \left\{ g_n(x_n) + f_{n-1}(X - x_n) \right\} \qquad (8.2.4)$$

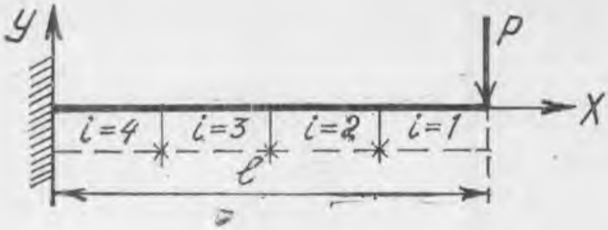
Бу ерда $f_n(X)$ ресурсларни тақсимлаш ва ундан фойдаланиш натижасида олинадиган максимал фойдани, $g_n(x_n)$ миқдори x_n га тенг бўлган ресурслардан фойдаланиш натижасида олинадиган фойдани, $f_{n-1}(X - x_n)$ эса қолган $X_n - x_n$ ресурсдан $n-1$ хил йўл билан фойдаланиш натижасида олинадиган максимал фойдани билдиради.

(8.2.4) тенгламаға (8.2.1)—(8.2.2) масалани ечиш учун қўлланиладиган Беллманнинг рекуррент типидаги функционал тенгламаси ёки *динамик программалаштириш усулининг алгоритми* дейилади. (8.2.4) тенглама ресурсларни $i=\overline{1, n}$ хил йўл билан фойдаланиш натижасида олинадиган максимал фойдани, яъни $f_i(X)$ ни $i=\overline{1, n}$, $f_0(X) \geqslant 0$ бўлганда кетма-кет ҳисоблаш имкониятини беради. Ҳақиқатан ҳам, $f_0(X)$ ни билган ҳолда $f_1(X)$, ни $f_1(X)$ ни билган ҳолда $f_2(X)$ ни ва ҳоказо, $f_{n-1}(X)$ ни билган ҳолда $f_n(X)$ ни (8.2.4) формула орқали ҳисоблаш имконияти мавжуд. $f_n(X)$ га қўйилган масаланинг ечими ёки оптимал сиёсат (стратегия) дейилади. Р. Беллман (8.2.4) тенгламани чиқаришда қуйидаги принципга асосланган: „бошланғич ечим қандай бўлишидан қатъи назар бундан кейинги ечим оптималлик хоссасига эга бўлган ва оралиқлардаги ҳолатга боғлиқ бўлган ечим оптимал стратегия дейилади“.Бу принцип *Беллманнинг оптималлик принципи* дейилади. (8.5.4) тенглама (8.2.1) функциянинг n ўзгарувчи бўйича максимумини топишдек мураккаб масалани, кетма-кет бир ўзгарувчи бўйича максимумни топишга олиб келади ва қўйилган масалани ечишни анча осонлаштиради.

8.3-§. Динамик программалаштириш усули билан ечиладиган масалаларга доир мисоллар

1. Консол қўринишдаги балкани оптимал лойиҳалаш масаласи

Бир учи маҳкамланган, иккинчи учига $P=10$ Н куч қўйилган балканинг узунлиги $l=1$ м, қалинлиги $b=0{,}04$ м, баландлиги h га тенг бўлиб, P куч таъсиридаги балканинг иккинчи учининг деформацияси $f^*=0{,}0421675$ м, эластиклик моду-



31- расм.

ли $E=2\cdot10^{11}$ бўлсин. Балканинг узунлиги l ни n та бўлакка бўлиб, ҳар бир i-бўлакда шундай h_i баландликни танлаш керакки, унинг умумий ҳажми энг кичик бўлсин.

Ечиш. Энг аввало қўйилган масаланинг математик моделини қурамиз. Балка тўртта тенг бўлакка бўлинган деб фараз қиламиз, яъни $n=4$, $\Delta l=0{,}25$ м бўлсин (31-расм).

Бизга материаллар қаршилиги фанидан маълумки, балканинг иккинчи учининг деформацияси қуйидаги

$$f^*=\frac{P}{EI}\int_0^l x^2dx=\frac{12P}{Eb}\int_0^b h^{-3}x^2dx=\frac{12P(\Delta l)^3}{Eb}\sum_{i=1}^{n}h_i^{-3}i^2 \qquad (8.3.1)$$

формула билан аниқланади. Агар (8.3.1) га

$$y_i=h_i=y \qquad (8.3.2)$$

белгилаш киритсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{k}y_i=Y.$$

Бу ерда

$$Y=\frac{f^*\cdot E\cdot b}{12P(\Delta l)^3},\ y_i>0. \qquad (8.3.3)$$

Балканинг умумий ҳажми эса

$$\sum_{i=1}^{n}bh_i\cdot\Delta l=b\Delta l\sum_{i=1}^{n}h_i=b\Delta l\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i^2}{y_i}} \qquad (8.3.4)$$

формула билан топилади (8.3.4) да $b\Delta l$ кўпайтувчи охирги натижага таъсир қилмаганлиги учун уни тушириб қолдириб, $g_i(y_i)=\sqrt[3]{\frac{i^2}{y_i}}$ деб белгилаш киритсак, мақсад функция

$$z=\sum_{i=1}^{n}g_i(y_i) \qquad (8.3.5)$$

кўринишда, чекланиш шартлари эса

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = Y, \quad y_i \geqslant 0 \qquad (8.3.6)$$

кўринишда бўлади. Энди қўйилган масалани қуйидагича баён қилиш мумкин: чекланиш шартлари (8.3.6) ни қаноатлантирадиган шундай y_i ни (ёки балканинг ҳар бир i-қисмига тўғри келадиган шундай $h_i = \sqrt[3]{\frac{i^2}{y_i}}$ баландлик) танлаш керакки, мақсад функция (8.3.5) га энг кичик қиймат берсин, ёки бошқача қилиб айтганда балканинг ҳажми энг кичик бўлсин.

(8.3.5)—(8.3.6) масала (8.2.1)—(8.2.2) масаланинг ўзгинасидир. Бу масалаларнинг бир-биридан фарқи (8.2.4) формуладаги max ўрнига min ёзишдан иборатдир, яъни

$$f_n(Y) = \min_{0<y_i<Y} (g_n(y_n) + f_{n-1}(Y - y_n)). \qquad (8.3.7)$$

Демак, қўйилган масалани ресурслардан фойдаланиш масаласига мослаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, y_i ни i хил тақсимлашдаги ресурснинг миқдори, Y ни эса ресурсларнинг умумий миқдори деб қабул қилсак, қўйилган масала ресурслардан фойдаланиш масаласидан фарқ қилмай қолади.

Масаланинг шартида берилганларни назарда тутсак, (8.2.3) формулага асосан

$$Y = f^* Eb/12P\,(\Delta l)^3 = 180 \cdot 10^3$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Аввало балканинг $i = 1$ участкасига мавжуд ресурсдан маълум миқдорда сарфланган деб фараз қилайлик. У ҳолда (8.3.7) формула

$$f_1(Y) = \min_{y_1} \sqrt[3]{\frac{1}{y_1}} \qquad (8.3.8)$$

кўринишга келади. Бунда min термини $M = \{y_0,\ y_0 + \Delta y,\ y_0 + 2\Delta y,\ \ldots,\ Y\}$ тўпламдан шундай $\overline{y}_1$ ни танлаш кераклигини билдирадики, шу қийматда (8.3.8) ифода энг кичик бўлсин. Агар $y_0 = 20 \cdot 10^3$, $\Delta y = 20 \cdot 10^3$ деб қабул қилсак, M тўпламимиз қуйидаги

$$M = \{20 \cdot 10^3;\ 40 \cdot 10^3;\ 60 \cdot 10^3;\ \ldots;\ 180 \cdot 10^3\} \qquad (8.3.9)$$

кўринишига келади. Кўриниб турибдики (8.3.8) нинг ўнг томонига боғлиқ бўлмагани учун $f_1(Y)$ ўзининг энг кичик қийматига $\overline{y}_1 = y_1 = 180 \cdot 10^3$ бўлганда, яъни мавжуд ресурснинг барчаси балканинг биринчи участкасига сарфланганда эришади (1- жадвалга қаранг).

1-жадвал

Y	$20\cdot10^3$	$40\cdot10^3$	$60\cdot10^3$	$80\cdot10^3$	$100\cdot10^3$
$\bar{y}_1$	$20\cdot10^3$	$40\cdot10^3$	$60\cdot10^3$	$80\cdot10^3$	$100\cdot10^3$
$f_1(Y)$	0,03684	0,02924	0,025544	0,023207	0,021544
Y	$120\cdot10^3$	$140\cdot10^3$	$160\cdot10^3$	$180\cdot10^3$	
$\bar{y}_1$	$120\cdot10^3$	$140\cdot10^3$	$160\cdot10^3$	$180\cdot10^3$	
$f_1(Y)$	0,020274	0,019259	0,01842	0,017711	

Энди мавжуд ресурслар балканинг биринчи ва иккинчи участкаларига ($i=1,\ 2$) тақсимланган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда балканинг энг кичик ҳажми $f_2(Y)$ бўлиб, иккинчи участкага миқдори Y_2 га тенг бўлган ресурс ажратилса, биринчи участкага эса қолган, яъни $Y-y_2$ ресурс ажратилади ва (8.3.7) формула қуйидагича ёзилади:

$$f_2(Y)=\min_{y_2}\left\{\sqrt[3]{\frac{4}{y_2}}+f_1(Y-y_2)\right\}. \tag{8.3.10}$$

Демак (8.3.9) тўпламдан шундай y_2 ни танлаш керакки, у (8.3.10) функцияга энг кичик қиймат берсин.

(8.3.10) формула билан $f_2(Y)$ ни $Y=20\cdot10^3$ қийматда ҳисоблаш маънога эга эмас, чунки $Y=20\cdot10^3$ да $f_2(Y)$ ни ҳисоблаш учун $f_1(0)$ маълум бўлиши керак. $f_1(0)$ эса (8.3.8) шартда аниқланмаган. Шунинг учун, $f_2(Y)$ ни M тўпламнинг $y=20\cdot10^3$ дан бошқа барча элементлари учун 1-жадвалдан фойдаланиб қуйидагича ҳисоблаймиз:

$$f_2(40\cdot10^3)=\min_{y_2=20\cdot10^3}\left[\sqrt[3]{\frac{4}{20\cdot10^3}}+f_1(20\cdot10^3)\right]=$$
$$=0,05848+0,03684=0,09532;\quad \bar{y}_2=20\cdot10^3.$$

$$f_2(60\cdot10^3)=\min_{\substack{y_2=20\cdot10^3\\ y_2=40\cdot10^3}}\begin{bmatrix}\sqrt[3]{\frac{4}{20\cdot10^3}}+f_1(40\cdot10^3)\\ \sqrt[3]{\frac{4}{40\cdot10^3}}+f_1(20\cdot10^3)\end{bmatrix}=$$

$$=\min\begin{bmatrix}0,05848+0,02924=0,087721\\ 0,046416+0,03684=0,083256\end{bmatrix}=0,083256;\quad \bar{y}_2=40\cdot10^3.$$

$$f_2(80\cdot10^3)=\min_{\substack{y_2=20\cdot10^3\\ y_2=40\cdot10^3\\ y_2=60\cdot10^3}}\begin{bmatrix}\sqrt[3]{\frac{4}{20\cdot10^3}}+f_1(60\cdot10^3)\\ \sqrt[3]{\frac{4}{40\cdot10^3}}+f_1(40\cdot10^3)\\ \sqrt[3]{\frac{4}{60\cdot10^3}}+f_1(20\cdot10^3)\end{bmatrix}=$$

$$= \min \begin{bmatrix} 0{,}05848 + 0{,}025544 = 0{,}084024 \\ 0{,}046416 + 0{,}02924 = 0{,}075656 \\ 0{,}040548 + 0{,}03684 = 0{,}077388 \end{bmatrix} =$$

$$= 0{,}075656, \quad \bar{y}_2 = 2 \cdot 40 \cdot 10^3$$

. . . .

$$f_2 = (180 \cdot 10^3) = \min_{\substack{y_2 = 20 \cdot 10^3 \\ y_2 = 40 \cdot 10^3 \\ y_2 = 60 \cdot 10^3 \\ y_2 = 80 \cdot 10^3 \\ y_2 = 100 \cdot 10^3 \\ y_2 = 120 \cdot 10^3 \\ y_2 = 140 \cdot 10^3 \\ y_2 = 160 \cdot 10^3}} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{\frac{4}{20 \cdot 10^3}} + f_1(160 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{40 \cdot 10^3}} + f_1(140 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{60 \cdot 10^3}} + f_1(120 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{80 \cdot 10^3}} + f_1(100 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{100 \cdot 10^3}} + f_1(80 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{120 \cdot 10^3}} + f_1(60 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{140 \cdot 10^3}} + f_1(40 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{160 \cdot 10^3}} + f_1(20 \cdot 10^3) \end{bmatrix} =$$

$$= \min \begin{bmatrix} 0{,}05848 + 0{,}01842 = 0{,}0769 \\ 0{,}046416 + 0{,}019259 = 0{,}065675 \\ 0{,}040548 + 0{,}020274 = 0{,}060822 \\ 0{,}03684 + 0{,}021544 = 0{,}058384 \\ 0{,}03420 + 0{,}023207 = 0{,}057407 \\ 0{,}032183 + 0{,}025544 = 0{,}057727 \\ 0{,}030571 + 0{,}02924 = 0{,}059811 \\ 0{,}02924 + 0{,}03684 = 0{,}06608 \end{bmatrix} = 0{,}057407; \quad \bar{y}_2 = 100 \cdot 10^3$$

Шундай қилиб, ҳар бир ҳолатга мос келувчи оптимал ечимлар ва оптимал ечимларга мос келувчи $f_2(Y)$ функциянинг қийматларидан тузилган қуйидаги 2-жадвалга эга бўламиз:

2-жадвал

Y	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$120 \cdot 10^3$
$\bar{y}_2$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$
$f_2(Y)$	0,09532	0,083256	0,075656	0,069788	0,06608

$$= \min \begin{bmatrix} 0{,}05848 + 0{,}025544 = 0{,}084024 \\ 0{,}046416 + 0{,}02924 = 0{,}075656 \\ 0{,}040548 + 0{,}03684 = 0{,}077388 \end{bmatrix} =$$

$$= 0{,}075656, \ \bar{y}_2 = 2 \cdot 40 \cdot 10^3$$

. . . .

$$f_2 = (180 \cdot 10^3) = \min_{\substack{y_2 = 20 \cdot 10^3 \\ y_2 = 40 \cdot 10^3 \\ y_2 = 60 \cdot 10^3 \\ y_2 = 80 \cdot 10^3 \\ y_2 = 100 \cdot 10^3 \\ y_2 = 120 \cdot 10^3 \\ y_2 = 140 \cdot 10^3 \\ y_2 = 160 \cdot 10^3}} \begin{bmatrix} \sqrt[3]{\frac{4}{20 \cdot 10^3}} + f_1(160 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{40 \cdot 10^3}} + f_1(140 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{60 \cdot 10^3}} + f_1(120 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{80 \cdot 10^3}} + f_1(100 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{100 \cdot 10^3}} + f_1(80 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{120 \cdot 10^3}} + f_1(60 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{140 \cdot 10^3}} + f_1(40 \cdot 10^3) \\ \sqrt[3]{\frac{4}{160 \cdot 10^3}} + f_1(20 \cdot 10^3) \end{bmatrix} =$$

$$= \min \begin{bmatrix} 0{,}05848 + 0{,}01842 = 0{,}0769 \\ 0{,}046416 + 0{,}019259 = 0{,}065675 \\ 0{,}040548 + 0{,}020274 = 0{,}060822 \\ 0{,}03684 + 0{,}021544 = 0{,}058384 \\ 0{,}03420 + 0{,}023207 = 0{,}057407 \\ 0{,}032183 + 0{,}025544 = 0{,}057727 \\ 0{,}030571 + 0{,}02924 = 0{,}059811 \\ 0{,}02924 + 0{,}03684 = 0{,}06608 \end{bmatrix} = 0{,}057407; \ \bar{y}_2 = 100 \cdot 10^3$$

Шундай қилиб, ҳар бир ҳолатга мос келувчи оптимал ечимлар ва оптимал ечимларга мос келувчи $f_2(Y)$ функциянинг қийматларидан тузилган қуйидаги 2-жадвалга эга бўламиз:

2-жадвал

Y	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$120 \cdot 10^3$
$\bar{y}_2$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$
$f_2(Y)$	0,09532	0,083256	0,075656	0,069788	0,06608

Y	$140 \cdot 10^3$	$160 \cdot 10^3$	$180 \cdot 10^3$
$\overline{y}_2$	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$
$f(Y)$	0,062384	0,059744	0,05740

Худди шу йўл билан бўлган ҳамма ресурсларни бажаришнинг биринчи, иккинчи ва учинчи участкаларига тақсимласак қуйидаги

$$f_3(Y) = \min_{y_3}\left[\sqrt[3]{\frac{9}{y_3}} + f_2(Y - y_3)\right]$$

муносабатга эга бўламиз. 2- жадвалдан фойдаланиб, $f_2(Y)$ ни ҳисоблагандек $f_3(Y)$ ни ҳам ҳамма ҳолатлар учун ҳисоблаймиз ва $f_3(Y)$ га энг кичик қиймат берувчи оптимал ечим $\overline{y}_3$ ларнинг қийматини топамиз, натижада қуйидаги 3- жадвалга эга бўламиз:

Y	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$120 \cdot 10^3$	$140 \cdot 10^3$
$\overline{y}_3$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$
$f_3(Y)$	0,1795	0,15614	0,14408	0,13639	0,12879

Y	$160 \cdot 10^3$	$180 \cdot 10^3$
$\overline{y}_3$	$60 \cdot 10^3$	$80 \cdot 10^3$
$f_3(Y)$	0,12292	0,11806

Энди барча мавжуд ресурсларни балканинг ҳамма участкаларига тақсимласак, аввалги ҳолатларга ўхшаш, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$f_4(Y) = \min_{y_4}\left[\sqrt[3]{\frac{16}{y_4}} + f_3(Y - y_4).\right].$$

Бу формуладан фойдаланиб оптимал ечимларда $\overline{y}_4$ ларни ва унга мос келган $f_4(Y)$ нинг қийматларини худди $f_2(Y)$ ва $f_3(Y)$ ларни ҳисоблагандек ҳисоблаймиз, натижада қуйидаги 4- жадвални ҳосил қиламиз.

Y	$80 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$120 \cdot 10^3$	$140 \cdot 10^3$	$160 \cdot 10^3$	$180 \cdot 10^3$
$\overline{y}_4$	$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$
$f_4(Y)$	0,26478	0,24563	0,22982	0,21776	0,20845	0,20076

4-жадвалдан кўриниб турибдики, $f_4(Y)$ нинг энг кичик қиймати $f_4(180 \cdot 10^3) = 0{,}20076$ бўлиб, унга мос келган оптимал ечимнинг қиймати ёки балканинг 4-участкасига тақсимланган ресурс миқдори $\overline{y}_4 = 60 \cdot 10^3$ га тенгдир. У ҳолда 3-участкага

$$Y - y_4 = (180 - 60) \cdot 10^3 = 120 \cdot 10^3$$

ресурс қолади ва 3-жадвалдан бу ресурсга мос келувчи оптимал ечим $\overline{y}_3 = 60 \cdot 10^3$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, балканинг иккинчи участкасига ҳаммаси бўлиб, $Y - y_3 = (120 - 60) \cdot 10^3 = 60 \cdot 10^3$ ресурс тақсимланади ва бу ресурсга мос келувчи оптимал ечим (2-жадвалга қаранг) эса $\overline{y}_2 = 40 \cdot 10^3$ га тенгдир. Шундай қилиб, балканинг биринчи участкасига $(60 - 40) \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^3$ ресурс қолади ва $\overline{y}_1 = 20 \cdot 10^3$ биринчи участка учун оптимал ечим бўлади. Оптимал ечим y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ лардан фойдаланиб, (8.3.2) формула орқали балканинг ҳар бир участкасидаги оптимал баландлиги h_i ларни топиш мумкин. Оптимал ечимлар ва унга мос келган h_i ларнинг қиймати 5 ва 6-жадвалларда келтирилган.

5-жадвал

$\overline{y}_1$	$\overline{y}_2$	$\overline{y}_3$	$\overline{y}_4$
$20 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$	$60 \cdot 10^3$

6-жадвал

h_1	h_2	h_3	h_4
0,03684	0,046416	0,053133	0,064366

Оптимал ечимларга мос келувчи балканинг энг кичик умумий ҳажми

$$b \cdot \Delta l \cdot f_4 \cdot (180 \cdot 10^3) = 200007{,}6 \text{ см}^3 \text{ дир.}$$

Юқорида келтирилган 1 — 5-жадвалдан фойдаланиб, f^* ўзининг қийматини {0,01875, 0,023438, 0,028125, 0,02813, 0,0375 м} тўпламдан қабул қилганда ҳам ҳар бир участкага мос келувчи балканинг оптимал баландликлари h_i ларни топиш мумкин. Бу масалаларни ечишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

2. Самолётларни юклаш масаласи

Юк кўтариш имконияти W бирликка тенг бўлган самолёт берилган бўлиб, уни ҳар хил нархдаги n хил предмет билан юклаш зарур бўлсин. Агар i- хилдаги предметнинг оғирлиги P_i га, нархи C_i га, сони x_i га тенг бўлса ($i=\overline{1, n}$), самолётни шундай юклаш керакки, юкланган предметларнинг умумий нархи энг катта бўлсин.

Ечиш. Қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:
ушбу

$$Z=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

функциянинг, чекланиш шартлари

$$\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \leqslant W, \quad x_i=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$$

ни қаноатлантирадиган максимуми топилсин. Чекланиш шартлари умумий юк самолётнинг юк кўтариш имкониятидан ошиб кетмаслигини билдиради.

Агар самолёт фақат биринчи хил предмет билан юкланса, (яъни $i=1$ бўлса)

$$P_1 x_1 \leqslant W, \ (x_1=0;\ 1;\ 2;\ \ldots)$$

шартда самолёт кўтариш керак бўлган юкнинг максимал нархи

$$f_1(W)=\max\{C_1,\ x_1\}$$

бўлади. Самолёт кўтариш керак бўлган биринчи хил предметнинг сони $x_1 \leqslant \frac{W}{P_1}$ эса бутун сон бўлиши керак. Шунинг учун $\frac{W}{P_1}$ соннинг шу сондан ошиб кетмайдиган энг катта бутун қисмини $\left[\frac{W}{P_1}\right]$ билан белгиласак,

$$x_1=\left[\frac{W}{P_1}\right] \text{ бўлиб, } f_1(W)=\max\left\{C_1\left[\frac{W}{P_1}\right]\right\}$$

бўлади.

Фараз қилайлик, самолёт биринчи ва иккинчи хил предметлар билан юклансин, яъни $i=2$ бўлсин. Агар самолётга юкланадиган иккинчи хил предметнинг сони x_2 га тенг бўлса, биринчи хил предметнинг сони $W-P_2x_2$ дан ошиб кетмаслиги ва уларнинг нархлари мос равишда C_2x_2 ва $f_1(W-P_2x_2)$ дан иборат бўлиши керак. У ҳолда юкланадиган умумий юкнинг максимал нархи

$$f_2(W)=\max_{0\leqslant x_2\leqslant\left[\frac{W}{P_2}\right]}\{C_2x_2+f_1(W-P_2x_2)\}$$

га тенг бўлади.

Худди шу йўл билан самолётга юкланадиган предметларнинг хилларини ошира борсак, n қадамдан кейин

$$f_n(W)=\max_{0\leqslant x_n\leqslant\left[\frac{W}{P_n}\right]}\{C_nx_n+f_{n-1}(W-P_nx_n)\}$$

муносабатга эга бўламиз. Бу ерда $f_n(W)$ n хил предметдан иборат бўлган юкнинг максимал нархи, C_nx_n n хил предметнинг нархи: $f_{n-1}(W-P_nx_n)$ оғирлиги $W-P_nx_n$ дан ошиб кетмайдиган $n-1$ предметдан иборат бўлган юкнинг максимал нархидир. Шунлай қилиб, юқорида ҳосил қилинган функционал тенглама (8.2 4) тенгламанинг ўзгинасидир.

Фараз қилайлик, $W=83$ бирлик бўлиб, юкланадиган предметларнинг оғирликлари ва нархлари мос равишда $P_1=24$; $P_2=22$; $P_3=16$; $P_4=10$; $C_1=96$; $C_2=85$; $C_3=50$; $C_4=20$; $n=4$ бўлсин.

Агар самолёт биринчи хилдаги предмет билан юкланса $\left[\frac{W}{P_1}\right]=[83:24]=3$ бўлиб, $x_1=0;\ 1;\ 2;\ 3$ қийматлар қабул қилади. Биринчи хил предметнинг ҳар бирининг оғирлиги $P_1=$ $=24$ бирликка тенг бўлгани учун $0\leqslant W\leqslant 23$ бўлганда самолётга биринчи хил предметдан биронта ҳам юклаш имконияти бўлмайди. $24\leqslant W\leqslant 47$ бўлса, биринчи хил предметдан битта, $48\leqslant W\leqslant 71$ бўлса иккита ва $72\leqslant W\leqslant 83$ бўлса, учта юклаш мумкин Юқорида келтирилган ҳар бир ҳолат учун W, $f_1(W)$ ва x_1 ларнинг қиймати қуйидаги 1-жадвалда келтирилган.

1-жадвал

W	$f_1(W)$	x_1
0 — 23	0	0
24 — 47	96	1
48 — 71	192	2
72 — 83	288	3

2-жадвал

W	$f_2(W)$	x_2	x_1
0 — 21	0	0	0
22 — 23	85	1	0
24 — 45	96	0	1
46 — 47	181	1	1
48 — 69	192	0	2
70 — 71	277	1	2
72 — 83	288	0	3

Агар самолёт биринчи ва иккинчи хил предметлар билан юкланса, $P_2=22$ бирлик бўлгани учун $\left[\frac{W}{P_2}\right]=[83/22]=3$ бўлиб, $x_2=0;\ 1;\ 2;\ 3$ қийматлар қабул қилади.

P_1 ва P_2 ларнинг қийматларини ҳисобга олиб, W ни оралиқларга ажратамиз ва ҳар бир оралиқдаги $f_2(W)$, x_2, x_1 ларнинг қийматларини 1-жадвалдан фойдаланиб ҳисоблаймиз (2-жадвалга қаранг).

Агар $0 \leqslant W \leqslant 21$ бўлса, самолётга биринчи ва иккинчи хилдаги предметдан биронта ҳам юклаш имкоинияти бўлмайди. Шунинг учун, бу оралиқда $f(W) = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ дир.

$$f_2(W) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant \left|\frac{W}{P_1}\right|} \{C_2 x_2 + f_1(W - P_2 x_2)\}$$

ва $x_2 = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ бўлгани учун $22 \leqslant W \leqslant 23$ оралиқда

$$f_2(22) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant [22/22]} [85x_2 + f_1(22 - 22x_2)]$$

бўлиб, $x_2 = 0,1$ қийматлар қабул қила олади. Шунинг учун

$$f_2(22) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} \begin{bmatrix} 85 \cdot 0 + f_1(22 - 22 \cdot 0) \\ 85 \cdot 1 + f_1(22 - 22 \cdot 1) \end{bmatrix} =$$

$$= \max \begin{bmatrix} 0 + f_1(22) \\ 85 + f_1(0) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 0 \\ 85 \end{bmatrix} = 85.$$

Демак, $f_2(22)$ ўзининг энг катта қийматига $x_2 = 1$ да эришади.

Энди $f_2(W)$ ни $24 \leqslant W \leqslant 45$ оралиқда ҳисоблаймиз.

$$f_2(24) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant [24/22]} [85x_2 + f_1(24 - 22x_2)].$$

Бу ердан

$$f_2(24) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} \begin{vmatrix} 85 \cdot 0 + f_1(24 - 22 \cdot 0) \\ 85 \cdot 1 + f_1(24 - 22 \cdot 1) \end{vmatrix} =$$

$$= \max \begin{bmatrix} f_1(24) \\ 85 + f_1(2) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 96 \\ 85 \end{bmatrix} = 96, \quad x_2 = 0.$$

$46 \leqslant W \leqslant 47$ оралиқда эса

$$f_2(46) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant [46/22]} [85 \cdot x_2 + f_1(47 - 22 \cdot x_2)]$$

$$x_2 = 0;\ 1;\ 2$$

бўлиб,

$$f_2(46) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2}} \begin{bmatrix} 85 \cdot 0 + f_1(46) \\ 85 \cdot 1 + f_1(24) \\ 85 \cdot 2 + f_1(2) \end{bmatrix} = \max \begin{bmatrix} 96 \\ 181 \\ 170 \end{bmatrix} = 181,$$

$x_2 = 1;$

Демак, қаралаётган оралиқда $f_2(W)$ функция $x_2=1$ бўлганда ўзининг энг катта қийматига эришар экан. $x_2=1$ эса самолётга иккинчи хил предметдан оғирлиги 22 бирликка тенг бўлган бир донасини юклаш мумкин эканлигини билдиради. У ҳолда самолётни биринчи хил предметдан юклаш учун $46-22=24$ бирлик имконият қолади. 1-жадвалдан маълумки, $24 \leqslant W \leqslant 47$ оралиқда $x_1=1$ дир. Шунинг учун $46 \leqslant W \leqslant 47$ оралиқда самолётга биринчи ва иккинчи хил предметлардан бир донадан юклаши зарур экан. $x_2=1$, $x_1=1$ бўлгандаги $f_2(W)$ нинг қиймати 2-жадвалда келтирилган. Худди шу йўл билан 2-жадвалда келтирилган ҳамма оралиқлар учун x_2, x_1 ни ва уларга мос келувчи $f_2(W)$ нинг қийматларини ҳисоблаймиз ва бу қийматларни 2-жадвалга жойлаштирамиз. Энди самолётни биринчи, иккинчи ва учинчи хил предметлар, ундан кейин биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи хил предметлар билан юклаймиз, яъни 3- ва 4-босқичларги ўтамиз. 3-босқичда 2-жадвалдан фойдаланиб 3-жадвални, 4-босқичда эса 3-жадвалдан фойдаланиб 4-жадвални тузамиз.

4-жадвалдан кўриниб турибдики, юк кўтариш қобилияти 83 бирликка тенг бўлган самолётга биринчи хил предметдан 3 дона, тўртинчи хил предметдан бир дона юкланса, юкланган юкнинг умумий пархи энг катта, яъни 308 бирликка тенг бўлар экан.

3-жадвал

W	$f_3(W)$	x_3	x_2	x_1
0—15	0	0	0	0
16—21	50	1	0	0
22—23	85	0	1	0
24—37	96	0	0	1
38—39	135	1	1	0
40—45	146	1	0	1
46—47	181	0	1	1
48—63	192	0	0	2
64—69	242	1	0	2
70—71	277	0	1	2
72—83	288	0	0	3

4-жадвал

W	$f_4(W)$	x_4	x_3	x_2	x_1
0—9	0	0	0	0	0
10—15	20	1	0	0	0
16—21	50	0	1	0	0
22—23	85	0	0	1	0
24—33	96	0	0	0	1
34—37	116	1	0	0	1
38—39	135	0	1	1	0
40—45	146	0	1	0	1
46—47	184	0	0	1	1
48—57	192	0	0	0	2
58—63	212	1	0	0	2
64—69	242	0	1	0	2
70—71	277	0	0	1	2
72—81	288	0	0	0	3
82—83	308	1	0	0	3

4-жадвалдан фойдаланиб, юк кўтариш қобилияти 83 бирликдан кичик бўлган ихтиёрий самолёт учун ҳам қўйилган масаланинг оптимал ечимини топиш мумкин. Масалан, $W=47$, $W=69$, $W=81$ бўлганда қўйилган масаланинг оптимал ечими топилсин. Бу масалаларни ечишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

АДАБИЁТЛАР

1. Амиро И. Я. «К определению критических значений быстро возрастающих во времени сжимающих сил». — Прикладная механика, 1979, XV, № 5, стр. 54—60.
2. Амиро И. Я. «Определение критических параметров быстро падающей во времени нагрузки треугольный импульс». — Прикладная механика, 1980, XVI, № 9, с. 70—76.
3. Беллман Р. «Динамичное программирование». — М.: ИЛ., 1960.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. «Методы оптимизации». Минск: Изд-во БГУ, 1981.
5. Гельфанд И. М., Фомин С. В. «Вариационное исчисление». — М.: Физматгиз, 1961.
6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. «Линейное и выпуклое программирование». — М.: «Наука», 1967.
7. Калинин И. Н., Ленкин И. Б. «Оптимизация оболочек кусочно-постоянной толщины при ограниченной прочности». — Известия АН СССР, МТТ, 1978, № 6, с. 89—94.
8. Кобулов. В. К. Оптимал планлаштириш масалалари. — Тошкент: «Фан» 1975.
9. Кобулов В. К. «Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси». — Тошкент., «Ўқитувчи», 1976.
10. Копченова Н. М., Марон И. А. «Вычислительная математика в примерах и задачах». — М.: «Наука», 1972.
11. Кузнецов Ю. Н., Кубузов В. И., Волощенко А. Б. «Математическое программирование». — М.: «Высшая школа», 1980.
12. Монахов В. М., Веляева Э. С., Краснер Н. Я. «Методы оптимизации». — М.: «Просвещение», 1978.
13. Почтман Ю. М., Бараненко А. «Динамическое программирование в задачах строительной механики». — М.: Стройиздат, 1975.
14. Сафоева К., Бекназарова Н. «Операцияларни текширишнинг математик усуллари». — Тошкент: «Ўқитувчи», 1984, I қисм.
15. Солодовников А. С. «Введение в линейное программирование и линейную алгебру». — М.: «Просвещение», 1966.
16. Собиров М. А. «Математика фанларидан русча-ўзбекча луғат». — Тошкент: «Ўқитувчи», 1984.
17. Химмелблау Д. «Нелинейное программирование». — М.: ИЛ,. 1973.
18. Бадалов Ф. Б., Суяров А. М., Темиров Н. „Решение некоторых линейных задач теории вязкоупругости методом степенных рядов". — В кн.: Вопросы вычисл. и прикл. матем. — Таш.: 1981, вып. 65, с. 116 — 134.
19. Бадалов Ф. Б, Каюмов Э. К., Суяров А М., Темиров Н. „Квазистатические и динамические формы потери устойчивости вязкоупругих систем". — В тезисе докладов Всесоюзн. симпозиума по устойчивости в механике деформируемого твердого тела. — Калинин, 1981.
20. Бадалов Ф. Б., Суяров А. М., Каюмов Э. К. „Оптимизация назарияси ва математик программалаштиришдан масала ва мисоллар туплами". — ТошПИ ротапринти, 1982, 1 қисм.
21. Бадалов Ф. Б., Темиров Н. «Об аналитическом критерии квазистатической и динамической потери устойчивости вязкоупругих систем». — В сб.: Вопросы математики и механики Таш.: 1981, вып. 316.

МУНДАРИЖА

(На узбекском языке)

БАДАЛОВ ФАХРИДДИН БАДАЛОВИЧ

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебник для студентов технических ВУЗов

Ташкент «Ўқитувчи» 1989

Муҳаррир *Асамуддинова Ф.*
Бадиий муҳаррир *Неккадамбоев Ф.*
Техн. муҳаррир *Скиба Т.*
Корректор *М. Махмудхўжаева*

ИБ № 4717

Теришга берилди 18. 04. 88. Босишга рухсат этилди 25.08.88. Р 15750. Формати 60×90/16. Тип. қоғози № 2. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 11,75, Шартли кр.-отт 11,94. Нашр. 9, 85. Тиражи 3000. Зак. № 2270. Баҳоси 50 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. 700129, Тошкент, Навоий кучаси, 30. Шартнома 11—291—87.

Область газеталарининг М. В Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1988

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В Морозова Самарканд, ул У. Турсунова, 8.