ЎЗБЕКИСТОН ПОЧТА ВА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯЛАР АГЕНТЛИГИ
ТОШКЕНТ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА АЛОҚА ИНСТИТУТИ

Эҳтимоллар назарияси
ва статистика кафедраси

Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика курси бўйича маърузалар матни

Маърузачи:
профессор Ш.А.Мирахмедов,
катта ўқитувчи О.О.Норхўжаев
ассистент О.А.Саидова

Тошкент 2000

МУНДАРИЖА

Кириш 3
Маъруза 1. Элементар ходисалар фазоси. Тасодифий ходиса.. 5
Маъруза 2. Эхтимолликни таърифлари 6
Маъруза 3 . Мураккаб ходисаларни эхтимоллиги. Шартли эхтимоллик.
Тула эхтимоллик формуласи, Байес формуласи. 8
Маъруза 4. Амалиетда кулланадиган баъзи мухим таксимотлар. 10
Муавр – Лаплас ва Пуассон теоремалари.
Маъруза 5. Богликсиз тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли схемаси. 15
Маъруза 6. Тасодифий микдор. Таксимот функция. 16
Маъруза 7. Тасодифий микдорлар системаси. Тасодифий вектор 17
Маъруза 8. Тасодифий микдорларнинг сонли характеристикалари 18
Корреляция коэффициенти 20
Маъруза 9. Характеристик функция. Алмаштириш формулалари
ва узлуксизлик теоремаси. 22
Маъруза 10. Эхтимоллар назариясида якинлашиш. Эхтимоллик
назариясининг лимит теоремалари. 25
Математик статистика
Маъруза 1. Бошлангич тушинчалар. Маълумотларни бошлангич статистик тахлили. Эмпирик таксимот функция Полигон ва гистограмма Танланма моментлар 26
Маъруза 2.Номаълум параметрни нуктавий бахолаш. 29
Маъруза 3.Статистик бахони тузиш усуллари. 31
Маъруза 4. Номаълум параметрга оралик бахо. Ишончлилик оралиги 32
Маъруза 5.Ста· ·ик тахминлар назарияси элементлари. 33
Маъруза6. Тасдиклаш аломати .Колмогоровни тасдиклаш 38
аломати . Пирсонни хи-квадрат тасдиклаш аломати
Маъруза7.Регрессион ва корреляцион тахлил. 41

Кириш

Эхтимоллар назариясини урганишдан аввал уни хакикатдан техник ва ижтимоий масалаларни ечишда кулланилиши мумкиилиги хакида фикрлаб, бу фанни урганишни асослаш керак. Асослашни икки усулда бажариш мумкин. Биринчиси, эхтимоллик тушунчаси маъносининг универсаллиги ва эхтимоллар назарияси айрим махсус масалаларни ечишда кулланадиган математика фанининг бир йуналиши сифатида каралмаслик нуктаи назарини кабул килишдан иборат. Иккинчиси, амалиётда учрайдиган турли-туман масалалардан эхтимоллар назариясини куллаш мажбурий шарт булганларини ажратиб курсатишдан иборат.

Замонавий физик карашлар ва материя табиати хакидаги ривожланиб келаётган билимлар шуни курсатадики, табиат конунларини узгармас ва котиб колган деб караш асоссиздир. Бундай детерминистик конунлар купи билан табиатнинг "уртача холатини" билдиради, холос. Куп холларда бундай "уртача холат" амалиётда кузатилаётган конуниятларга жуда якин ва хатоликни ахамиятга олмаса хам булади. Бундай холларда детерминистик конунларни куллаш мухимдир, чунки унда ортикча мураккаблиликсиз тизим холати келажагини айта олиш мумкин. Аммо аксарият холларда тасодифий таъсирлар узгармас таъсирларга нисбатан мухимрок булиши мумкин. Бундай холларда эхтимоллик назариясининг усулларини ва натижаларини куллаш лозим. Юкорида айтилганлар шуни курсатадики, "аник ечим"ларни берувчи детерминистик усуллар хамма вакт хам аник ечимларни бермайди ва хатто, улар амалиётда учрамайдиган, «гузаллаштирилган» хусусий холларни аниклайди. Иккичи томондан, эхтимоллар усули аник ечимлар усулининг урнини босувчи ва хакикий физик холатни тугрирок акслантирувчи усул була олади. Хатто баъзи холларда эхтимоллик усул натижалари детерминистик усул ечимларини хусусий хол сифатида уз ичига олади.

Эхтимоллар назарияси XVII асрда кимор уйинларини кузатиш натижасида келиб чиккан деб хисобланади. Паскаль, Ферма, Якоб, Бернулли ва бошкаларнинг илмий ишларида XVII ва XVIII асрларда (хозир шундай аталувчи) эхтимолликнинг классик таърифига асосланган математик назария яратилди. Бу назария тенг имкониятли чекли натижаларга эга булган тажрибанинг куп маротаба утказилиши натижасида хосил буладиган конуниятларнинг математик моделидир. Бундай тажриба мисолида иккала томони (герб ва ракам) тенг имкониятли булган тангани отиш тажрибасини куриш мумкин. Агар танга бир ёки бир неча маротаба ташланса, бирор бир конуниятни сезиш кийин, масалан, танга уч маротаба ташланганда, герб томони неча маротаба тушишини аввалдан айтиб булмайди. Танга куп маротаба ташланганда хам танга у ёки бу томони билан тушишини аник айтиб булмайди. Аммо танга ташлаш тажриба сериялари утказилса ва хар сериядаги тажрибалар сони етарлича куп булса. у холда хар серияда чиккан герблар сонини шу серияда утказилган тажрибалар сонига нисбати тахминан 1/2 га тенг эканлиги аникланади. Тангани ташлашда руёбга келган бу конуният эхтимолликнинг математик моделида куйидагдча шархланади: танга ташланганда, герб чикиш эхтимоллиги 1/2 га тенг. Агар биз танга харакати траекториясини хисоблашга етарли булган ва ерга тушгандаги холатини аникловчи тула маълумотга эга булсак эди, у холда тангани герб томони билан тушишини аник айта олар эдик. Аммо бундай маълумотларга эга булинмайди ва шунинг учун танганинг герб ёки ракам томони билан тушиши тасодифий ходиса булади.

XIX асрда эхтимоллик усулларининг кулланиш доираси кенгайиб эхтимолликнинг классик таърифи етарли булмай колди. Классик механика асосида харакат чизиклари бошлангич маълумотлар ва харакатни бошкарувчи дифференциал тенгламалар тизими оркали бир кийматли (узгармас) аниклаладиган чекли сондаги заррачалар тизими хакидаги тасаввур ётади. Аммо жуда катта сондаги заррачалар учун (масалан, бу бирор идишдаги газ молекулалари булиши мумкин) на бошлангич маълумотларни билиш ва на буларга мос куп сондаги тенгламалар тизимини ечиш мумкин эмас. Ва демак бундай заррачалар тизими харакати билан боглик булган хар кандай ходиса (айтилгандек, етарлича маълумотга эга булмаганлигимиз сабабли) биз учун тасодифий эходиса булади. Бу заррачалар тизимини бир пайтда утказилган тажрибалар мажмуаси сифатида караш мумкин. Хар бир тажриба битта заррачага нисбатан утказилади ва унинг натижалари заррачанинг барча мумкин булган холатлари, яъни заррача турган нуктаси ва импульси координаталари билан аникланади. Вундай тажриба натижалари туплами чекли эмас ва улар тенг имкониятли эмасдир, шунинг учун бу холларда эхтимолликнинг классик таърифини куллаб булмайди. Заррачаларнинг жуда куплиги бу хол билан боглик булган турли конуниятларни руёбга келтиради. Бундай конуниятлар мисоли сифатида куйидагини куриш мумкин: босим газ молекулаларининг идиш томонларини бомбардимон килиши натижаси булиб, у тасодифий холда узгариб туради, аммо молекулаларнинг ута куплиги босимни деярли узгармас холатда булишини таъминлайди, бу худди тангани жуда куп маротаба ташласак, герб ва ракамлар тахминан бир хил маротаба чикиши эффекти кабидир.

Эхтимоллар назарияси жуда куп холларда кузатилиши мумкин булган ходисаларни урганади. яъни бу ходисалар турлича руй бериши мумкин булиб, улар тасодифий еки тасодифий булмаган холда руй бериши бизнинг улар хакидаги маълумотларимизнинг тулалигига боглик, аммо уларнинг руй бериш шарт-шароитлари умуман олганда исталганча куп маротаба такрорланиши мумкин булмоги лозим. Шу билан бирга эхтимоллар назарияси ходисаларни жуда куп кузатилиши (яъни уларнинг руй бериш шарт-шароитларини куп маротаба такрорлаш) билан боглик булган конуниятларни аниклайди ва уларни тахлил этади.

Хозирги замон эхтимоллар назариясининг асосида А.Н.Колмогоров 1933 йилда таклиф этган аксиомалар ётади.

Маъруза 1. Элементар ходисалар фазоси. Тасодифий ходиса.

Элементар ходисалар фазоси эхтимоллар назариясини бош ва асосий тушунчаларидан бири булиб у математикани таърифланмайдиган факат талкинланувчи тушунчаларидандир. Элементар ходисалар фазоси маълум тажрибанинг бир вактда руй бермайдиган натижалар туплами сифатида талкин килинади. Умумий холда ихтиёрий тупламни элементар ходисалар фазоси сифатида олиш мумкин. Элементар ходисалар фазоси одатда Ω билан, унинг элементларини яъни элементар ходисани ω билан белгилаймиз.

Мисоллар.

1. Бир алока нуктасидан иккинчи алока нуктасига мъалумот юбориш тажрибаси. Тажрибада маълумот тугри кабул килинса 1 натижа, акс холда 0 натижа руй берди деймиз. Бунда $\Omega = (1;0)$. Шу тажрибани моделли тажриба - танга ташлаш тажрибасида айтиш мумкин. Тангани бир томонига 1 бошка томонига 0 ракамлари ёзилган булсин. Танга ташлаш тажрибасида $\Omega = (1;0)$ булади. Демак, математика нуктаи назаридан (хусусан эхтимоллик назарияси нуктаи назаридан) бу икки тажрибалар фарк этилмайди.

2. АТСга берилган вакт ичида тушадиган талаблар сонини кузатишдан иборат тажрибани курайлик. Бунда $\Omega = (0,1,2,...)$.

3. Тажриба тасодифий равишда узгариб турувчи кучланишни улчашдан иборат. Тажриба натижалари кучланишнинг кийматларидан иборат. Бунда $\Omega = [a,b]$, a , b лар кучланишни мумкун булган мос равишда энг кичик ва энг катта кийматлари.

Бу мисоллардан куриниб турибдики элементар ходисалар фазоси чекли, санокли, ёки санокли булмаган чексиз (континиум) туплам булиши мумкин.

Тасодифий ходиса тушунчаси учун Ω ни кисм тупламларидан тузилган, куйидаги шартларни бажарадиган $\Im$-тупламлар системаси киритилади. Ω ни кисм тупламларидан тузилган $\Im$-тупламлар системаси учун куйидаги шартларни бажарилсин:

1) $\Omega\in\Im$,

2) $A \in \Im \Rightarrow \bar{A} \equiv \Omega \setminus A \in \Im$,

3) $A1, A2, \ldots \in \Im \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Im$,

4) $A1, A2, \ldots \in \Im \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$.

Агар 1), 2), 3) бажарилса $\Im$га алгебра, агар 1), 2), 4) бажарилса $\Im$ га σ - алгебра дейилади.

Агар Ω чекли ёки санокли булса, у холда унинг барча кисм тупламларидан тузилган тупламлар системаси алгебра ёки σ алгебра булади.

Тасодифий ходиса деб факат ва факат $\Im$ ни элементига айтилади. Бундан келиб чикадики агар Ω чекли ёки санокли булса унинг ихтиёрий кисми тасодифий ходиса булади.

Ω га мукаррар ходиса, буш туплам $\varnothing$ га руй бермайдиган ходиса дейилади.

Шундай килиб тасодифий ходисани туплам деб караш мумкин. Демак тасодифий ходисалар устида тупламлар учун аникланган кушиш (бирлашма), купайтириш (кесишма) ва айириш амалларини бажариш мумкин.

Бир вактда руй бермайдиган А ва В ходисаларга биргаликда булмаган ходисалар дейилади. Бундай ходисалар учун $A \cap B = \varnothing$ булади.

Маъруза 2. Эхтимолликни таърифлари.

а) Эхтимолликнинг статистик таърифи.

Бирор тажрибада А ходисани руй бериш эхтимоллигини аниклаш учун бир хил шарт шароитлар сакланган холда тажриба сериялари кетма-кет утказилади. Белгилайлик n_i i-чи серияда утказилган тажрибалар сони, $n_i(A)$ i-чи серияда утказилган тажрибаларда А ходиса руй берган тажрибалар сони.

Таъриф 1. А ходисани эхтимоллиги деб

$$P(A)=\lim_{i\to\infty}\frac{n_i(A)}{n}$$

га айтилади.

Табийки бу таърифда лимитнинг мавжудлиги ва ягоналиги масаласи туради. Бу масалани, яъни лимит мавжудлиги ва ягоналиги катта

сонлар конунин и Бернулли формулласи (яъни Бернулли теоремаси) исботлайди.

б) Эхтимолликнинг классик таърифи.

Бунда икки шарт бажарилиши керак:

1) элементар ходисалар фазоси чекли, яъни

$\Omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$

2) элементар ходисалар тенг имкониятли булиши керак, яъни

$P(\omega_i)=1/n$, $i=1,\ldots,n$.

Таъриф 2. А ходиса эхтимоллиги деб

$P(A)=\frac{n(A)}{n}$

га айтилади, бу ерда $n(A)$-А ходисани руй беришига кулайлик тугдирувчи элементар ходисалар сони, яъни Ани ташкил этувчи элементар ходисалар сони, n - барча элементар ходисалар сони.

в) Эхтимолликнинг геометрик таърифи.

Бу холда элементар ходисалар фазоси бирор соха ва бу соханинг юзаси S мавжуд булиши керак. Юза деганда тугри чизикдаги соха булса узунликни, текислик кисми булса тугри маънодаги юза, уч улчовли фазо кисми булса хажмни тушинамиз. Тасодифий ходиса деб элементар ходисалар фазоси булмиш сохани ихтиёрий юкорида айтилган маънода юзаси мавжуд булган кисмига айтилади.

Таъриф 3. А ходиса эхтимоллиги деб

$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$

га айтилади, бу ерда S_A-А ходисанинг юзаси, S элементар ходисалар фазоси Ω ни юзаси.

Эхтимолликнинг хоссалари.

Юкорида келтирилган таърифлардан куйидаги хоссалар келиб чикади:

1. Ихтиёрий А учун,
2. $P(\Omega)=1$,
3. Агар $A\cdot B=\varnothing$ булса $P(A+B)=P(A)+P(B)$ булади,
4. $A\subset B$ булса $P(A)\leq P(B)$ ва $P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$ булади,
5. $\bar{A}=\Omega\backslash A$ булсин $P(\bar{A})=1-P(A)$ булади,
6. Ихтиёрий А, В ходисалар учун

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

булади.

Биринчи ва иккинчи хоссалардан $0\leq P(A)\leq 1$ келиб чикади, олтинчи хоссадан эса ихтиёрий А ва В ходисалар учун $P(A+B)\leq P(A)+P(B)$ келиб чикади. Табийки учинчи хосса бирнечта узаро биргаликда булмаган ходисалар йигиндиси учун хам уринлидир.

Эхтимолликни таърифлашга аксиоматик ёндошиш.

Колмогоров аксиомалари.

Бизга Ω элементар ходисалар фазоси ва у оркали тузилган $\Im$ алгебра ёки σ алгебра берилган булсин, $(\Omega,\Im)$ иккиликга улчовли фазо дейилади. Бу фазода эхтимоллик улчови ёки эхтимоллик деб $\Im$ да аникланган ва куйидаги хоссаларга эга булган сонли функция P га айтилади:

1. $P(A) \geq 0$ ихтиёрий $A \in \Im$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. Агар $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j=1,2,\ldots$ булса

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

булади.

1), 2), 3) ларга Колмогоров аксиомалари дейилади.

$(\Omega,\Im,P)$ учликка эхтимоллик фазоси дейилади.

Мисол. $\Omega=(0;1)$ булсин. у холда $\Im=\{\varnothing;\Omega;0;1\}$ алгебра булади. Эхтимоллик улчови P ни куйидагича киритамиз. Бирор p: $0<p<1$ олайлик ва $P(1) = p$, $P(0) = 1-p$ дейлик. Унда $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$. Ва демак P функция $\Im$ ни хар бир элементини (0,1) ораликга акслантиради, ва 1), 2), 3) хоссалар бажарилиши куриниб турубди.

2. Тажриба $[0,1]\times[0,1]$ квадратга тасодифий равишда нукта ташлашдан иборат булсин. Элементар ходисалар фазоси Ω айтилган квадрат булади, σ алгебра $\Im$ шу квадратни барча юзаси мавжуд булган кисмларидан иборат. Эхтимолликни геометрик таърифини куллаб, ихтиёрий ходисанинг эхтимоллиги деб унинг юзасига айтамиз.

Маъруза 3. Мураккаб ходисаларни эхтимоллиги.

Шартли эхтимоллик.Тула эхтимоллик формуласи, Байес формуласи.

Амалиётнинг катор масалаларида бирор ходиса руй берган шартида (масалан янги маълумотларга эга булдик) курилаётган ходисани эхтимоллигини хисоблашга тугри келади. Аникрок айтилганда B ходиса руй берганда A ходисани руй бериш эхтимоллигини топиш керак. Бундай эхтимолликни $P(A/B)$ еки $P_B(A)$ билан белгилаймиз.

Таъриф 1. А ходисани В ходиса руй бергандаги шартли эхтимоллиги деб

$$P(A/B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$

га айтилади. Бунда $P(B)>0$ шарти бажарилиши керак.

Равшанки, агар А ходисанинг руй бериши В ходисанинг руй бериши ёки руй бермаслигига боглик бусмаса $P(A/B)$ шартли эхтимоллик $P(A)$ шартсиз эхтимоллигига тенг булади. Бундан куйидаги таърифни хосил киламиз.

Таъриф 2. А ва В ходисалар богликсиз дейилади агар

$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$

тенглик уринли булса.

Бизга $A_1,\ldots,A_n$ тасодифий ходисалар кемма кетлиги берилган булсин.

Таъриф 3. Агар барча $k=2,\ldots,n$ учун

$P(A_{i1}\cdot\ldots\cdot A_{ik}) = P(A_{i1})\cdot\ldots\cdot P(A_{ik})$

тенглик бажарилса $A_1,\ldots,A_n$ ходисалар биргаликда богликсиз дейилади

Амалиётдаги талай масалаларни ечишда узаро биргаликда булмаган бир нечта ходисаларнинг бири руй бериши билан руй берадиган "мураккаб" тасодифий ходисанинг эхтимоллигини хисоблаш керак булади. Бундай холда тула эхтимоллик формуласи кулланилади.

Агар тасодифий ходисалар $A, B_1, \ldots, B_n$ учун $B_i\cdot B_j=\varnothing$, $i\neq j$; $i,j=1,2,\ldots$ ва $A\subset\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ шартлар бажарилса куйидаги *тула эхтимоллик* формуласи уринли

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k).$$

Тула эхтимоллик формуласи ечадиган масалаларга маълум маънода тескари масалаларни ечадиган формула *Байес*, ёки *тахминлар формуласи* дейилади.

Фараз килайликки тула эхтимоллик шартларини каноатлантирувчи $B_1,\ldots,B_n$ ва А ходисалар руй бериши мумкин булсин. Тажриба утказилганга кадар кандайдир мулохазаларга асосан $B_1,\ldots,B_n$ ходисаларнинг руй бериш эхтимолликлари мос равишда $P(B_1),\ldots,P(B_n)$ деб тахмин киламиз. Тажриба утказилганда А ходиса руй берса (яъни янги маълумотларга эга булдик) тахмин килинган эхтимолликларга кандай тузатишлар киритишимиз керак? Бунга куйидаги Байес формуласи жавоб беради:

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Маъруза 4. Амалиетда кулланадиган баъзи мухим таксимотлар Муавр-Лаплас ва Пуассон теоремалари.

Амалиётда куп куллададиган баъзи мухим таксимотларни куриб чикамиз. Бунинг учун кутича схемаси деб аталувчи r та турди шарлари булган кутичадан n та шарни танлаш усулларини куриб чикамиз.

1.*Кайтиб куйиш усулида танлаш* . Тажриба 1,2,...,n лар оркали номерлаб чикилган n та шардан r тасини кетма-кет танлашдан иборат булиб, хар кадамда биттадан шар тасодифий равишда танланади ва у кайтиб кутичага куйилади.

Агар a_i деб i чи танланган шарнинг номерини белгиласак, хосил булган танланма $a_1,a_2,...,a_r$ номерли r та шардан иборат булади.

Биз икки турдаги танланмаларни фарклаймиз: тартиблаштирилган ва тартиблаштирилмаган танланмалар. *Агар камида тартиби билан фарк килувчи танланмалар турли деб хисобланса, тартиблаштирилган танланмалар хосил килинади. Агар камида битта элементи билан фарк килувчи танланмалар турли деб хисобланса (яъни факат тартиби билан фарк килувчи танланмалар бир хил деб хисобланса), тартиблаштирилмаган танланмаларни хосил киламиз.*

Тартиблаштирилган танланмаларни $(a_1,a_2,...,a_r)$ оркали, тартиблаштирилмаган танланмаларни $[a_1,a_2,...,a_r]$ билан белгилаймиз. Текшириш кийин эмаски, курилаётган тажрибада элементар ходисалар фазоси

$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,...,a_r),\ a_i=1,2,...,n;\ i=1,2,...,r\}$

булиб, $|\Omega|=n^r$ булади.

Тартиблашмаган танланмаларда элементар ходисалар фазоси Ω нинг куриниши куйидагича $\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,...,a_r],\ a_i=1,2,...,n;\ i=1,2,...,r\}$ булиб $|\Omega|=C^r_{n+r-1}$ булади.

2.*Кайтиб куймаслик усулида танлаш.* Тажриба 1,2,...,n лар оркали номерлаб чикилган n та шардан r тасини кетма-кет танлашдан иборат булиб, аввалги танлаш усулидан фаркли уларок бу холда хар кадамда биттадан шар тасодифий равишда танланади ва у кайтиб кутичага куйилмайди.Табиийки бу усулда $r\leq n$ булади.

Кайтиб куймаслик усулида хам тартиблаштирилган ва тартиблаштирилмаган танланмалар курилади.

Тартиблашган танланмаларда элементар ходисалар фазоси Ω нинг куриниши $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,...,a_r),\ a_1□a_2□...□a_r;\ \ a_i=1,2,...,n;\ \ i=1,2,...,r\}$

булиб, $|\Omega|=n(n-1)\cdot\ldots(n-r+1)$ булади.

Тартиблашган танланмаларда элементар ходисалар фазоси Ω нинг куриниши $\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,\ldots,a_r],\ a_1\square a_2\square\ldots\square a_r;\quad a_i=1,2,\ldots,n;\quad i=1,2,\ldots,r\}$ булиб, $|\Omega|=C_n^r$ булади.

Курилган элементар ходисалар фазоларида турли эхтимоллик таксимотларини киритиш мумкин, яъни $\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=1$ тенгликни

каноатлантирувчи элементар ходиса ω нинг фукцияси $p(\omega)$ ни киритиш мумкин. Табиийки, $p(\omega)$ киритиш усули натижалар туплами Ω булган, курилаётган конкрет тажрибага боглик.

Талайгина масалаларда тажриба натижалари ω ларни тенг имкониятли деб, яъни $p(\omega)=1/|\Omega|$ куринишда олиш мумкин. Куйидаги мисолни курайлик.

1 мисол. $1,2,\ldots,n$ лар оркали номерланган n та лотерея билетларидан r таси ютукли. Таваккалига сотиб олинган r та билетдан камида биттаси ютукли булиш эхтимоллигини топинг.

Ечиш. Соддалик учун $2r\leq n$ холни курайлик. Ютукли билетни олишга билетларни олиш тартиби таъсир килмаганлиги сабабли

$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,\ldots,a_r],\ a_1\square a_2\square\ldots\square a_r;\quad a_i=1,2,\ldots,n;\quad i=1,2,\ldots,r\}$ булади ва сотиб олиш жараёни маъносига кура $p(\omega)=1/|\Omega|=1/\ C_n^r$. Эхтимоллиги топилиши керак булган ходисани A деб, унга тескари ходисани $\bar{A}$ билан белгилайлик. У холда

$\bar{A}=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,\ldots,a_r],\ a_1\square a_2\square\ldots\square a_r;\ a_i=r+1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,r\}$

$\bar{A}=C_{n-r}^r$ ва $|A|+|\bar{A}|=C_n^r$ булгани сабабли

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{C_n^r-C_{n-r}^r}{C_n^r}=1-\left(1-\frac{r}{n}\right)\left(1-\frac{r}{n-1}\right)\ldots\left(1-\frac{r}{n-r+1}\right).$$

Биномиал таксимот. Юкорида айтилган кутича схемасининг хусусий холини курайлик. Кутичада 0 ва 1 билан номерланган иккита шар булиб ундан кайтиб куйиш усулида хажми r га тенг булган танлалма олиш тажрибасини курайлик. Бундай танланмалар сони 2^r булади. $[0,1]$ ораликдан бирор p сонни олайлик ва тажрибанинг барча натижалари (яъни танланмалар) булмиш элементар ходисалар фазоси $\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,\ldots,a_r],\ a_i=1,2;\ i=1,2,\ldots,r\}$ да манфий булмаган функция $p(\omega)$ ни куйидагича аниклайлик:

$$p(\omega)=p^{\sum_{m=1}^{n}a_m}(1-p)^{n-\sum_{m=1}^{n}a_m}\qquad(2)$$

Шу усулда киритилгаи функция эхтимолликлар таксимоти булишини аниклаш учун $\sum_{\omega\in\Omega}p(\omega)=1$ тенглик уринли эканлигини курсатиш керак.

Буиинг учун Ω ни $n+1$ та узаро кесишмайдиган $A_0, A_1, ..., A_n$ кисм тупламлар оркали парчалаймиз, бу ерда $A_к=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,...,a_r),\ a_1=+...+a_1=к\}$, яъни $A_к$ роса к та бирлар катнашган элементар ходисалар тупламидир. Демак, ихтиёрий $\omega \in A_к$ учун $P(\omega)=p^к(1-p)^{n-к}$ булади. $A_к$ тупламнинг (ходисанинг) элементлари сони n та жойга к та бирларни уринлаштиришга, яъни n та турли шарлардан к тасини кайтиб куймаслик усулида танлаш сонига тенг булгани учун, $|A_к|=C_n^к$ булади. Шундай килиб,

$$P(A_к)= C_n^к\, p^к(1-p)^{n-к} \qquad (3)$$

Энди Ньютон биномиал формуласидан фойдалансак

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\omega\in A_k} p(\omega)=\sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1$$

булади.

Шундай килиб, элементар ходисаларга (1) усулда эхтимолликни мос куйилиши эхтимолликлар таксимотини аниклар экан.

Куриниб турибдики, $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$, (3) формула билан аникланувчи $P(A_0),...,P(A_n)$ лар биномиал таксимот дейилади. Бу таксимотнинг турли тафсилотлари булиб, улар эхтимоллик назарияси ва унинг амалиётдаги кулланишларида жуда катта ахамиятга эгадир. Мисол учун бирор алока тармогидан иккинчисига сигналлар юбориш тажрибасида хар бир сигнал р эхтимоллик билан тугри ва 1-р эхтимоллик билан нотугри кабул килинсин. Юборилган n та сигналдан к таси тугри кабул килинган булиш эхтимоллиги $P(A_к)$ га тенгдир.

$P(A_к)$ эхтимолликни $P_n(к)$ билан белгилайлик ва бу функциянинг берилган (фиксирланган) n лар учун к буйича узгаришини курайлик. (3) формуладан куриниб турибдики, агар 0 □ к □ n бўлса,

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}=\frac{(n-k)p}{(k+1)q}, \quad \text{бу ерда} \quad q=1-p \qquad (4)$$

Бу нисбат бирдан катта, агар к<np-q булса, бирга тенг, агар к = np-q булса, бирдан кичик булади, агар к>np-q булса, яъни $P_n(к)$ аввал усади, максимумга эга булади сунгра камаяди. Агар np-q бутун булса, узининг максимал кийматига $к_1$ = np-q ва $к_2$ = np + q = $к_1$+1 нукталарда эришади, агар np-q бутун булмаса. K_0 = [np-q] + 1 нутктада эришади. $к_0$ - эхтимоллиги энг катта булган киймат. Шуни айтиб утиш керакки, агар np-q бутун булса, энг катта эхтимолликка эга булган киймат иккита булади, булар $к_1$ва $к_2$дир.

Поллиномиал таксимот. Энди n та шардан кайтиб куйиш усулида r тасини танлаш тажрибасида элементар ходисалар фазосини курайлик.

$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,\ldots,a_r),\ a_i=1\div n;\ i=1\div r\}$

ва унинг элементар ходисаси ω учун эхтимолликни куйидагича аниклайлик:

$p(\omega)=p_1^{v_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{v_n}$,

бу ерда $v_k=v_k(\omega)$- танланма $\omega=(a_1,\ldots,a_r)$ даги номери к булган шарлар сони, $к=1\div n$, $p_1,\ldots,p_n$ йигиндиси бирга тенг (яъни $p_1+\ldots+p_n=1$) булган, олдиндан берилган манфий эмас сонлар. Табиийки, $v_1(\omega)+\ldots+v_n(\omega)=n$ булади.

Агар $r_1+\ldots+r_n=r$ булган манфий эмас $r_1,\ldots,r_n$ лар учун $A(r_1,\ldots,r_n)=\{\omega:v_1(\omega)=r_1,\ldots,v_r(\omega)=r_n\}$ ходисанҍ аникласак, унинг эхтимоллиги куйидагича булади:

$$P(A(r_1,\ldots,r_n))=\frac{r!}{r_1!\cdot\ldots\cdot r_n!}\,p_1^{v_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{v_n}.$$

Шу формула билан аникланувчи эхтимолликлар $n,r,p_1,\ldots,p_r$ параметрли *полиномиал таксимот* дейилади.

Гипергеометрик таксимот. Энди n та шардан кайтиб куймаслик усулида r тасини танлаш тажрибаси элементар ходисалар фазосини курайлик. $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,\ldots,a_r),\ a_1\square\ldots\square a_n,\ a_i=1\div n;\ i=1\div r\}$ ва унинг элементар ходисаларини тенг имкониятли деб олайлик, яъни $p(\omega)=1/|\Omega|=n(n-1)\cdot\ldots(n-r+1)$ булсин.

Фараз килайлик, n та шардан n_1 таси 1-турдаги ва хоказо $n_к$ таси к-турдаги булсин. Танланган r та шарлардан r_1 таси 1-турдаги ва хоказо $r_к$ таси к-турдаги булиш ходисаси $B(r_1,\ldots,r_к)$ нинг эхтимоллиги

$$P(B(r_1,\ldots,r_к))\frac{B(r_1,\ldots,r_k)}{\Omega}=\frac{C_{n_1}^{r_1}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{r_k}}{C_n^r}$$

будади, табиийки, $r_1+\ldots+r_n=r$. Шу формула билан аникланувчи эхтимолликлар r улчовли *гипергеометрик таксимот* дейилади.

Муавр-Лаплас ва Пуассон теоремалари.

Олдинги булимларда киритилган гипергеометрик ва полиномиал таксимотлар эхтимоллар назариясининг назарий ва амалий масалаларида кенг тадбик этидади. Лекин n ва k нинг катта кийматларида, хатто оддий биномиал таксимот $P_n(k)$ни хисоблаш анча кийиндчиликлар тугдиради. Катта аниклик билан аппроксимацияловчи асимптотик формулалар ердамида уларни такрибий хисоблаш осон олиб борилади.

1. $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$; $k=0,1,\ldots,n$; $0<p<1$; $q=1-p$ биномиал таксимот учун Муавр-Лапласнинг локал лимит теоремаси уринли. Фараз килайлик:

$\bar{p} = \frac{k}{n}$, $X_{n,k}=(k-np)\,/\sqrt{npg}$, $H(x)=x\ln\frac{x}{p}+(1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$,

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$.

<u>Теорема.</u> $0<p<1$, $k\to\infty$, $n-k\to\infty$, булсин. У холда

$$P_n(k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\bar{p}(1-\bar{p})}}\exp\{-nH(\bar{p})\}. \qquad (1)$$

Агар $|k-np| = 0\left((npg)^{2/3}\right)$ булса, барча k лар буйича

$$P_n(k)\sim\frac{1}{\sqrt{npg}}\,\varphi(x_{nk}) \qquad (2)$$

Булади.

Теоремадан куриниб турибдики, p нинг киймати 0 ёки 1 га якин булса, $P_n(k)$ ни $\left((npg)^{-1/2}\right)\varphi(x_{nk})$ билан алмаштириш хатто n нинг катта кийматларида хам унча яхши эмас. p нинг бундай кийматларида $P_n(k)$ ни яхширок бахолаш масаласига Пуассон теоремаси жавоб беради.

<u>Теорема.</u> Фараз килайлик, p n нинг функцияси булсин ва $p=p(n)\to 0$, $n\to\infty$ да хамда $np\to\lambda$, $\lambda>0$ узгармас. У холда $k > n$ лар учун $P_n(k) = 0$ деб хисобласак, куйидаги уринли буладй:

$$P_n(k)\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (3)$$

Муавр-Лаплас теоремаси npq>20 учун, Пуассон теоремаси npq>30 учун кулланилади.

Куйидаги сонлар кетма-кетлигига $\pi_k = \pi_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$Пуассон таксимоти дейилади. Куриш кийин эмаски, $\pi_k>0$ ва $\pi_0+\pi_1+\ldots=1$ булади.

Бу таксимотнинг аввалгисидан фарки у чекли сондаги эмас, балки санокли сондаги нукталарда аникланганилигидир, яъни элементар ходисадар фазоси манфий булмаган бутун сонлар тупламидан иборат. $P(\omega)$ функция куйндаги куринишга эга:

$$P(k)=\pi_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Санокли сондаги натижага эга булган тажрибада p, 0<p<1 сони берилган. У холда k-элементар ходиса этимоллиги $p(k)=pg^{k-1}$ k=1,2,... куринишида берилса. $p, pg, pg^2, \dots pg^k, \dots$; g = 1-p сонлар $\Omega=\{1,2,\dots\}$ элементар ходисалар фазосида этимоллар таксимотини беради.Бундай аникланган таксимот *геометрик таксимот* дейилади.

Назарий ва амалий масалаларда n та богликсиз тажрибадаги ютуклар сони- μ_n, $[k_1,k_2]$ ораликка тушиш эхтимоллигини, яъни

$$p_n(k_1,k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} p_n(k) \tag{4}$$

ни хисоблаш масаласи хам учрайди. Лекин бундай йигиндиларни хисоблаш анча мушкул. Шунинг учун буларга мос аппроксимацион формулаларни топиш масаласи курилади. Муавр-Лапласнинг интеграл лимит теоремасини куриб чикамиз.

<u>Теорема.</u> 0<p<1 ,$\chi_i=(k_i-np)/\sqrt{npg}$, i=1,2. У холда $\chi_1,\chi_2\in R'$ лар буйича текис холда; n □∞ да куйидаги уринли:

$$p_n(k_1,k_2)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-u^2/2}du. \tag{5}$$

<u>Мисол.</u> 12000 марта шошколтош ташланганда чиккан 6 сони [1800,2100] ораликда булиш этимоллиги топилсин.

<u>Ечими.</u> Курилаётган тажрибани куйидагича талкин килиш мумкин: Идишда 1,2,...6 ракамлар билан номерланган олтита шар бор. Кайтарилган холда биттадан 12000 марта шар олинади. 6 ракамли шар чикишини "ютук", бошка ракамли шарлар чикишини «ютказиш» деб атаймиз. У холда n=12000, k_i=1800, k_i=2100 кидирилаётган эхтимоллик куйидагига тенг:

$$p=\sum_{k=1800}^{2100} p_{12000}(k)=\sum_{k=1800}^{2100} C_{12000}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$$

Муавр-Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз:

$$p\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\chi_1}^{\chi_2} e^{-u^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2\sqrt{6}}^{3\sqrt{6}} e^{-u^2/2}du=\Phi(3\sqrt{6})-\Phi(-2\sqrt{6})\approx 0,922$$

бу ерда $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$ функциянинг киймати мос равишда жадвалдан топилган. Ф(х)-нормал таксимот функцияси дейилади.

Маъруза 5. Богликсиз тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли схемаси.

Даставвал эхтимоллар фазолари купайтмаси тушунчасини киритайлик.

Бизга $\{\Omega_1, \Im_1, P_1\},\ldots,\{\Omega_n, \Im_n, P_n\}$ эхтимоллар фазолари кетма-кетлиги берилган булсин. Бу фазолар купайтмаси деб шундай $\{\Omega_1, \Im_1, P_1\}$ эхтимоллар фазоси айтиладики, бунда Ω барча $\omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$, $\omega_m\in\Omega_m$, $m=1,\ldots,n$, куринишдаги элементар ходисалардан иборат булиб, эхтимоллик P эса манфий булмаган $p(\omega)=P(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ сонлар оркали аникланади.

$$\sum_{\omega_1\in\Omega}\cdots\sum_{\omega_{i-1}\in\Omega}\sum_{\omega_{i+1}\in\Omega}\cdots\sum_{\omega_n\in\Omega} P(\omega_1,\ldots,\omega_n) = P(\omega_i),\ i=1,2,\ldots,n.$$

Юкорида айтилгандек хар бир тажрибага мос эхтимоллар фазоси аникланади ва аксинча хар бир эхтимоллар фазосини бирор тажриба оркали талкин килиш мумкин. Демак эхтимоллар фазолари кетма-кетликлари тажрибалар кетма-кетлиги оркали талкин этилади. Агар хар бир $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ учун

$$P(\omega)= P(\omega_1,\ldots,\omega_n) = P_1(\omega_1)\cdot\ldots\cdot P_n(\omega_n) \qquad (1)$$

тенглик бажарилса курилаётган тажрибалар кетма-кетлигига богликсиз тажрибалар кетма-кетлиги дейилади.

Энди фараз килайликки $\Omega_i=(A,\bar{A})$, $\Im_n=\{\Omega_i,\varnothing, A,\bar{A}\}$, $P_i(A)=p$, $P_i(\bar{A})=1-p$, $i=1,\ldots,n$ булиб (1) тенглик уринли булсин. У холда $\{\Omega,\Im,P\}$ эхтимоллар фазосида

$\omega\in\Omega$ учун $\omega=\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)$: $\omega_{i1}=A,\ldots$, $\omega_{il}=A$, $\omega_{j1}=\bar{A},\ldots$, $\omega_{js}=\bar{A}$; $i_m\neq j_t$, $m=1,\ldots,l$; $t=1,\ldots,s$; $l+s=n$, $l=0,1,\ldots,n$; $s=0,1,\ldots,n\}$ куринишда булади. Яъни Ω нинг элементлари A ва $\bar{A}$ лардан тузилган n улчовли вектор булади.

Агар $\omega_к$ – аник берилган к та компонентаси A булиб колган n-к таси $\bar{A}$ булса, у холда

$$P(\omega_к)=p^к(1-p)^{n-к}$$

булади. Агар $A_к=\{\omega_к\}$ к та компонентаси A булган, n-к таси $\bar{A}$ булган барча $\omega_к$ векторлар туплами булса

$$P(A_к)=C_n^к p^к(1-p)^{n-к},\ к = 0,1,\ldots,n$$ булади ва

$$\sum_{k=0}^{n} P(A_k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1$$

булади.

Келтирилган тажрибалар кетма-кетлигига Бернулли схемаси дейилади.

Маъруза 6. Тасодифий микдор. Таксимот функция. Тасодифий микдор турлари.

Тасодифий ходиса тажрибани сифат тавсифидир. Аммо амалиётда тажрибани натижалари микдор оркали аникланадиган холлар хам мавжуд, ундан ташкари баъзи холларда тажрибада руй берадиган ходисаларни тахлил килиш учун уларга маълум микдорларни мос куйиш максадга мувофик булади. Демак, тажриба натижаларида биз микдорларни хосил киламиз, ва табийки бу аввалдан кандай микдорни хосил килишимиз ноъмалум, уларни бирор узгарувчан микдорни кийматлари деб карасак булади. Бу кийматлар эса кайси ходиса руй беришига боглик ва демак тасодифий равишда руёбга келади. Шундай килиб, тасодифий микдор деб тажриба натижасида маълум кийматни кабул килувчи узгарувчан микдорга айтиш мумкин. Аммо тажрибада натижа бирор эхтимоллик билан руй беради. Демак, *тасодифий микдор деб маълум кийматларни аник эхтимолликлар билан кабул килувчи узгарувчан микдорга айтилади.* Албатта келтирилган таърифга илмий-омма боб таъриф деб караш керак.

Тасодифий микдорни аник математик таърифига утайлик. Бизга (□,$\Im$, P) эхтимоллик фазоси берилган булсин.

Таъриф. Тасодифий микдор X (ω) деб аникланиш сохаси □ булган, узгариш сохаси хакикий соклар туплани ёки уни кисми булган улчовли функцияга айтилади, яъни

1. X (ω): □ □ R,
2. $\{\omega : X(\omega) < u\} \in \Im$, ихтиёрий $u \in R$ ўчун.

Иккинчи шартни маъноси шуки X (ω) функцияни (тасодифий микдорни) ихтиёрий хакикий u дан кичик кийматларни кабул килишини таъминловчи аргументлар (элементар ходисалар) туплами $\Im$ ни элементи булсин, яъни тасодифий ходиса булсин ва демак уни эхтимоллиги (улчови) $P\{\omega : X(\omega) < u\}$ мовжуд булсин.

Тасодифий микдорни тавсифловчи асосий функция куийдагича аниклайдиган таксимот функция $F_X(u)$:

$F_X(u) = P\{\omega : X(\omega) < u\} \equiv P\{X < u\}$.

Таксимот функцияни хоссалари.

1. $0 \le F(u) \le 1$,
2. $\lim\limits_{u \to \infty} F(u) = 1, \lim\limits_{u \to -\infty} F(u) = 0$,

3. $u_1 < u_2 \Rightarrow F(u_1) \le F(u_2)$,

4. $\lim\limits_{u \to a-0} F(u) = F(a)$, яъни таксимот функция чапдан узлуксиз.

<u>*Тасодифий микдор турлари.*</u> Биз асосан тасодифий микдорни укки турини курамиз.

<u>1. *Дискрет турдаги*</u> *тасодифий микдор деб чекли ёки санокли кийматларни кабул килувчи тасодифий микдорга айтилади.*

Дискрет тасодифий микдорни таксимот конуни деб куйидаги жадвалга айтилади.

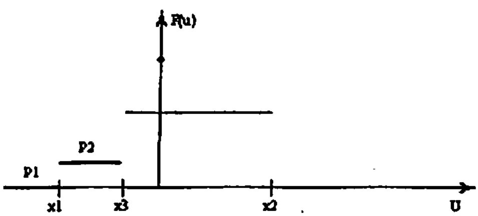
X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	P_1	P_2	...	P_n	...

Бунда $P_1 + P_2 + ... + P_n + ... = 1$, $x_1, x_2 ...$ лар X тасодифий микдорни кийматлари, P_1, P_2 ,... мос равишда шу кийматларни кабул килиш эхтимолликлари.

Дискрет тасодифий микдорни таксимот функцияси куйидагича аникланади:

$$F_X(u) = \sum_{k: x_k < u} P_k .$$

унинг графикги зинасимон куринишда булиб сакраш нукиталари x_1, x_2 ...ва сакраш катталиклари P_1, P_2 ... булади:



3. *Узлуксиз тасодифий микдор* деб кабул киладиган кийматлари бирор ораликни (чекли ёки чексиз) тула конлайдиган тасодифий микдорга айтилади. Аник математик таърифи куйидагича .

Агар шундай функция $P_X(t)$ мовжуд булсаки X тасодифий микдорни таксимот функцияси $F_X(u)$ учун

$$F_x(u) = \int_{-\infty}^{u} P_X(t)dt$$

тенглик бажарилса X тасодифий микдор узлуксиз турдаги (аникроги абсолют узлуксиз) тасодифий микдор дейилади. $P_X(t)$ функцияга зичлик функция дейилади айтилади.

Зичлик функция хоссалари.

1. $P_X(u) \geq o,$
2. $P_X(u) = \frac{d}{dx} F_X(u),$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} P_X(u) du = 1.$
4. $P(a < x < b) = \int_a^b P_X(u) du,$
5. $P(t < x < t + \Delta t) = P_X(t)\Delta t(1 + o(\Delta t)).$

Маъруза 7.Тасодифий микдорлар системаси. Тасодифий вектор

Бизга ($\Omega, \Im$, P) эхтимоллик фазосида $X_1(\omega),...,X_n(\omega)$ тасодифий микдорлар берилган булсин. У холда, $X(\omega) = (X_1(\omega),...,X_n(\omega))$ га n улчовли тасодифий вектор дейилади. Тасодифий вектор $X(\omega)$ хар бир элементлар ходиса ω га n улчовли Евклид фазосидан битта нукга $x = (x_1,...,x_n)$ ни (векторни) мос куяди. $X_i(\omega), i = 1, 2...,n,$ ларга $X(\omega)$ векторни компонентлари дейилади. Тасодифий векторни асосий тавсифи унинг таксимот функциясидир.

<u>Таъриф.</u> Тасодифий вектор $X(\omega) = (X_1(\omega),...,X_n(\omega))$ ни таксимот функцияси деб куйидаги n аргуметли функцияга айтилади:

$$F_X(u_1,...,u_n) = P\{\omega : X_1(\omega) < u_1,...,X_n(\omega) < u_n\}.$$

Агар тасодифий веторни барча компоненталари дискрет турдаги тасодифий микдорлар булса тасодифий вектор дискрет турдаги дейилади. Агар тасодифий веторни барча компоненталари узлуксиз турдаги тасодифий микдорлар булса тасодифий вектор узлуксиз турдаги дейилади. Бу холда тасодифий векторни зичлик функцияси $P(u_1,\ldots,u_n)$ мовжуд булиб у куйидагича аникланади

$$P(u_1,\ldots,u_n) = \frac{\partial^n}{\partial u_1 \ldots \partial u_n} F_X(u_1,...,u_n).$$

Мисоллар.

1. *Полинамиал таксимот.* Тасодифий вектор $\eta = (\eta_1,...,\eta_n)$ манфий булмаган бугун ва $k_1 + ... + k_n = n$ булган $k_1,...,k_n$ лар учун.

$$P\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_n = k_n\} = \frac{n!}{k!\dots k_n!} P_1^{k_1} \dots P_n^{k_n}$$, бу ерда $P_i > 0,\ i = 1, \dots, n;\ P_1 + \dots P_n = 1$

2. *Куп улчовли номал таксимот (Гаусс таксимоти)*. Тасодифий вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ n улчовли нормал таксимотга эга дейилади, агар

$$F_X(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\det A}} \int_{-\infty}^{u_1} \dots \int_{-\infty}^{u_n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i t_j a_{ij}\right\} dt_1 \dots dt_n,$$

бу ерда $A = (a_{ij})$ $ij = \overline{1, n}$, мусбат аникланган n улчовли матрица.

Икки тасодифий микдорлар X_1 ва X_2 узаро *богликсиз* дейилади ,агар

$$F_{X_1, X_2}(u_1, u_2) = P\{\omega : X_1(\omega) < u_1, X_2(\omega) < u_2\} = P\{\omega : X_1(\omega) < u_1\} P\{\omega : X_2(\omega) < u_2\}$$
$$= F_{X_1}(u_1) F_{X_2}(u_2)$$

тенглик уринли булса.

Маъруза 8. Тасодифий микдорларнинг сонли характеристикалари. Корреляция коэффициенти.

Бу булимда агар X тасодифий микдор узлуксиз булса унинг зичлик функциясини $P(u)$деб белгилаймиз, агар X дискрет турдаги булса унинг таксимот конуни

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

булсин.

1. *Математик кутилма.* Тасодифий микдор X ни математик кутилмаси MX деб куйидагига айтилади

$$MX = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k P_k, & \text{агар } x \text{ дискрет булса} \\ \int_{-\infty}^{\infty} uP(u)du, & \text{агар } x \text{ узлуксиз булса} \end{cases}$$

Хоссалари:

1) MC=C, 2) M(CX)=CMX, 3) M(X+Y)=MX+MY.

4) Агар X ва Y тасодифий микдорлар богликсиз булса, у холда
M (XY) = MX MY.

2. *Дисперсия.* Тасодифий микдор X ни дисперсияси DX деб куйидагига айтилади

$$DX=M(X-MX)^2=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-MX)^2P_k, & агар\ x\ дискрет\ булса \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}(u-MX)^2P(u)du, & агар\ x\ узлуксиз\ булса \end{cases}$$

Хоссалари.

1) DC=0, 2) $D(CX)=C^2DX$, 3)$DX=MX^2-(MX)^2$,

4) агар X ва Y тасодифий микдорлар богликсиз булса, у холда D(X±Y)=DX+DY. $\sigma=\sqrt{DX}$ катталикга урта квадратик четланиш дейилади.

3. *Мода* X тасодифий микдорнинг модаси M_0 деб унинг энг катта эхтимолликга эга булган кийматига айтилади.

4. *Медиана.* X тасодифий микдорнинг медианаси деб унинг шундай киймаги M_Dга айтиладини куйидаги тенглик уранли булади.

$$P(X<M_D)=P(X>M_D).$$

Корреляция коэффициенти.

Тасодифий микдорларни биргаликда урганилганда улар орасидаги муносибатларни куриш керак булади. Хусусан икки тасодифий микдор X ва Yларни бир бирига таъсири яъни богликлани урганилади. Тасодифий микдорларни богликлигини аникловчи турли катталиклар мовжуд шулардан амалиётда куп кулланадигани ва хисоблашга кулайи корреляция коэффициентидир. Тасодифий микдор X ва Y ларни корреляция коэффициенти

$$k(x,y)=\frac{M[(X-MX)(Y-MY)]}{\sqrt{DX\cdot DY}}$$

формула билан аникланади.

Хоссалари.

1. $|k(X,Y)|\le 1$

2. $|k(X,Y)|=1 \Leftrightarrow X=aY+b, \exists a,b.$

3. Агар X, Y лар богликсиз булса $k(x,y)=0$.

Маъруза 9. Характеристик функция. Алмаштириш формулалари ва узлуксизлик теоремаси

Олдинги булимдаги белгилашларни саклаймиз. Тасодифий микдор X ни характеристик функцияси $\varphi_X(t)$ деб куйидаги комплекс функцияга айтилади:

$$\varphi_X(t) = Me^{itX} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k \ , \ \text{агар } X \text{ дискрет булса} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu} p(u)du \ , \ \text{агар } X \text{ узлуксиз булса} \end{cases}$$

Таърифдан куриниб турибдини $\varphi_X(t)$ характеристик функция $p(u)$ зичлик функцияни Фурье алмаштирмаси.

Хоссалари

1) $|\varphi_X(u)| \le 1, \ \varphi_X(0) = 1$

2) $\varphi_{aX+b}(u) = e^{iub} \ \varphi_X(ua)$,

3) $X_1,\dots,X_n$ узаро богликсиз тасодифий микдорлар кетма кетлиги булсинб $S_n=X_1+\dots+X_n$. У холда

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)$$

4) $M|X|^k \Rightarrow \frac{d^l}{dt^l}\varphi_X(t)$ мавжуд ва $\frac{d^l}{dt^l}\varphi_X(t)|_{t=0} = i^l MX^l$ булади.

5) $M|X|^k < \infty \Rightarrow \varphi_X(t) = \sum\limits_{l=0}^{k} \frac{it^e}{ei} MX^e + o(t^e)$.

6) $\overline{\varphi}_X(t) = \varphi_X(-t)$,

бу ерда чизикча комплекс кушмаликни билдиради.

Мисоллар.

1) X тасодифий микдор Бернулли тасодифий микдори дейилади, агар унинг таксимоти

X	0	1
P	1-p	p

0булса. Бунда p- параметр,

$MX = p, \ DX = p(1-p), \ \varphi_X(t) = 1 + p(e^{it} - 1)$.

2) Агар $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$, $0<p<1$, булса X га биномиал тасодифий микдор дейилади. Курсатиш мумкунни X ни бернулли тасодифий микдорлари йигиндиси куринишда ёзиш мумкун: $X = X_1 + \ldots + X_n$ бунда $X_1,\ldots,X_n$ узаро богликсиз p параметрли Бернулли тасодифий микдорлари. Демак, бу холда

$$MX = np,\ DX = np(1-p),\ \varphi_X(t) = \left[1 + p(e^{it} - 1)\right]^n.$$

3) Агар $P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$, $k = 0,1,\ldots$, $\lambda > 0$ булса X га Пуассон тасодифий микдори дейилади. Бу холда $MX = \lambda$, $DX = \lambda$ $\varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$.

4) Зичлик функцияси куйидагича берилган тасодифий микдорга [a,b] ораликда тенис таксимланган тасодифий микдор дейилади:

$$p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & агар,\ u \in [a,b] \\ 0, & агар.\ u \notin [a,b] \end{cases}$$

Бунда

$$MX = \frac{a+b}{2},\ DX = \frac{(b-a)^2}{12},\ \varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{(b-a)it}.$$

5) Зичлик функцияси куйидаги формула билан берилган тасодифий микдорга (a,σ^2)параметрни нормал тасодифий микдор дейилади:

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\right\},\ -\infty < u < \infty.$$

Бунда $MX = a$. $DX = \sigma^2$,

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

6) Зичлик функцияси куйидаги формула билан аникланадиган тасодифий микдорга λ параметрли курсаткичли тасодифий микдор дейилади

$$p(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}, & u \geq 0 \\ 0 & ,\ u < 0 \end{cases}$$

Бунда $\lambda > 0$; $MX = \dfrac{1}{\lambda}$, $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.

Алмаштириш формулалари ва узлуксизлик теоремаси.

Агар $\varphi(t)$, $F(x)$ тасодифий микдор X ни мос равишда характеристик функцияси ва таксимот функцияси булса, у холда $F(x)$ ни ихтиёрий узлуксиз нукталари булмиш x_1 ва x_2 нукталарида куйидаги тенглик уринли:

$$F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_2}-e^{itx_1}}{it}\varphi(t)dt. \qquad (1)$$

Агар $\varphi(t)$ интегралланувчи булиб $p(u)$ зичлик булса

$$p(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itu}\varphi(t)dt. \qquad (2)$$

Агар

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}P\{X=a+kh\}=1$$

булса X га h кадамли панжара симон дейилади. X тасодифий микдор h кадамли панисарасимон булиши учун

$$\left|\varphi_X\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right|=1$$

булиши зарур ва етарлидир. Бундай тасодифий микдор учункуйидаги уринли

$$P\{X=a+kh\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}e^{it(a+kh)}\varphi(t)dt. \qquad (3)$$

Келтирилган (1), (2), (3) формулаларга алмаштириш формулалари дейилади.

Фараз килайликки $\varphi_1(t), \varphi_2(t),$.....характеристик функциялар кетма-кетлиги булиб $F_1(t)$, $F_2(t)$,.....мос таксимот функциялар булсин.

<u>Теорема.</u> (*Узлуксизнилик*). Агар $n\to\infty$да ихтиёрий t учун $\varphi_n(t)\to\varphi(t)$ булиб $\varphi(t)$ $t=0$ да узлуксиз булса, у холда

1) $\varphi(t)$ - бирор $F(x)$ такстимот функцияга мос характеристик функция булади;

2) $F(x)$ ни барча узлуксиз нукталарида

$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$ булади.

Маъруза 10 Эхтимоллар назариясида якинлашиш. (тасодифий микдорлар кетма кетлигини якинлашиши). Эхтимоллик назариясининг лимит теоремалари.

Бирор (Ω, $\Im$, P) эхтимоллик фазосида X, X_1, X_2,... тасодифий микдорллар берилгн булсин.

Таъриф 1. Агар

$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} = 0$ булса X_n кетма кетлик X га бир эхтимоллик билан (деярли хамма ерда) якинлашади.

Таъриф 2. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$ булса $\{X_n\}$ кетма кетлик X га эхтимоллик буйича якинлашади дейилади ва $X_n \xrightarrow{P} X$ куринишди белгиланади.

Белгилайлик $F_n(x) = P\{X_n < x\}$, $F(x) = P\{X < x\}$.

Таъриф 3. Агар $F(x)$ни узлуксиз нукталарида

$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ булса X_n кетма кетлик X га кучсиз якинлашади дейилади.

Таъриф 4. Агар

$\lim_{n\to\infty} M[X_n - X]^2 = 0$ булса X_n кетма кетлик X га урта квадратик маънода якинлашади дейилади.

Эхтимоллик назариясининг лимит теоремалари.

Белгилайлик:

$$X_1, X_2, \dots X_n \qquad (1)$$

Тасодифий микдорлар кетма-кетлиги,

$S_n = X_1 + \dots + X_n$, $a_i = MX_i$, $\sigma_i^2 = DX_i$,

агар математик кутилма ва дисперсиялар мовжуд булса ,

$A_n = a_1 + \dots + a_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Катта сонлар конуни.

Таъриф Агар (1) кетма кетлик учун $MX_i < \infty$ $i = 1, \dots, n$ булиб ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{Sn}{n} - \frac{An}{n}\right| > \varepsilon\right\} = 0$ булса (1) учун катта сонлар конуни (КСК) уринли дейилади.

Катта сонлар конуни табиатдаги ва амалиётдаги жароёларни тургунлигини курсатувчи конундир. КСК уринли булиши учун етарли шартларни берувчи теоремаларни келатирамиз.

Бернулли схемаси буйича утказилган n та таперибада A ходисани руй бериш эхтимоллиги P булсин, $S_n - A$ ходиса руй берган тажрибалар сонини белгиласин.

<u>*Теорема 1*</u> (Бернулли теоремаси) Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{Sn}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0$ муносибат уринли.

Агар X_i билан i тажрибада A ходиса руй берганда 1 ни акс холда 0 ни кабул киладиган тасодифий микдорни белгиласак, у холда $S_n = X_1 + ... + X_n$, булади. Демак Бернулли теоремаси КСКни хусусий холи. Яна шуни айтиш керакки $\frac{Sn}{n}$ n тажрибада A ходисани руй бериш частотасидир. Демак Бернулли теоремаси эхтимоллинни статистик тахърифини тасдиклайди, яъни лимитни мовжудлиги ва ягоналигини исботлайди.

<u>*Теорема 2*</u> (Хинчик теоремаси). Агар (1) кетма кетлик узаро богликсиз ва бархил таксимланган тасодифий микдорлар кетма кетлиги булиб $MX_i = a < \infty$ булса, у холда (1) учун КСК ни уринлидир.

Марказий лимит теорема (М.Л.Т.) Белгилайлик

$$F_n(u) = P\left\{\frac{Sn - An}{Bn} < u\right\},\ \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

<u>Таъриф.</u> Агар шундай $\{A_n\}$, $\{B_n > 0\}$ сонли кетма кетликлари мовжуд булсаки

$\lim\limits_{n\to 0} F_n(u) = \Phi(u)$ булса, (1) учун марказий лимит теорема уринли дейилади.

<u>Теорема 3.</u> Агар (1) кетма-кетлик узаро богликсиз бир хил таксимланган тасодифий микдорлар кетма-кетлиги булиб $MX_i = a$, $DX = \sigma^2 < \infty$ булса, у холда (1) учун МЛТ уринли ва $A_n = na$, $B_n^2 = n\sigma^2$ булади.

<u>Торема 4.</u> (Ляпунов теоремаси). Агар (1) кетма-кетлик узаро богликсиз тасодифий микдорлар кетма-кетлиги $MX_i = a_i$, $DX_i = \sigma_i^2$ $i = 1,...,n$ лар мовжуд булиб $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^3}\sum_{k=1}^{n} M|X_k - a_k|^3 = 0$ булса, у холда (1) учун МЛТ уринли ва $A_n = a_1 + ... + a_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2$ булади.

Математик статистика

Маъруза 1. Бошлангич тушинчалар. Маълумотларни бошлангич статистик тахлили.__Эмпирик таксимот функция. Полигон ва гистограмма._Танланма моментлар.

Эхтимоллар назариясида урганиладиган тасодифий ходисаларни математика модели (□, ℑ, P) – эхтимоллар фазоси булиб, бунда эхтимолик P тула тукис берилгандир. Аммо амалиётда аксарият холларда P маълум булмайди. Одатда факатгина P ни бирор эхтимолликлар синофи $\wp$ га тегишлилиги хакида гапириш мумкун булиб бу синиф ℑ да аникланиши мумкун булган барча эхтимоллиларни уз ичига камраб олиши (тула ноаниклик мовжуд булган хол) ёки у ёни бу усулда берилган эхтимоликни махсус оиласи булиши мумкун. Агар $\wp$ синф берлган булса (□,ℑ,$\wp$) статистик модел берилган дейилади.

Хуллас математик статистикада эхтимоллар фазосидаги P да кандайдир ноаниклик мавжуд булган хол курилади. Математик статистика фанини максади тажриба натижалари оркали олинган маълумотларга (статистик маълумотларга) асосланган холда мовжуд ноаникликга маълум даражада аниклик киритишдир.

Шундай килиб математик статистикада хар кандай мулохаза ва таклифлари статистик маълумотларга ёки бошкача килиб айтганда тажрибада кузатиладиган натижаларга таянади. Одатда таксимоти P оркали бериладиган тасодифий микдор X устида кузитувлар олиб борилади ва бу кузатувлар $X_1,\ldots,X_2$ богликсиз (агар тажрибалар (кузатувлар) богликсиз ва бир хил шарт шароитларда олиб борилса) тасодифий микдорлар деб олиниб, улар X билан бир хил таксимотга эга булади, яъни X ни n та богликсиз нусхалари булади, n га танланма хажми дейилади .Тажрибаларнинг конкрет натижалари эса табиийки $X_1,\ldots,X_2$ танланмани бирор холи , яъни аник сонлар $x_1,\ldots,x_2$ булади . Табиийки $x_1,\ldots,x_2$ X тасодифий микдорни кабул киладиган кийматлари яъни вариантларидир. Шунинг учун x_i га, $i=1,\ldots,n$, варианта дейилади. Шу билан бирга таксимотида ноаниклик мовжуд булган X тасодий микдорни кабул киладиган кийматлар тупламини $\mathfrak{R}$ деб олсак $x_1,\ldots,x_2$ $\mathfrak{R}$ дан кайтиб куйиш усулида хажми n га тенг булган танланма булади. $\mathfrak{R}$ га бош тулам дейилади. Табиийки $x_1,\ldots,x_2$ лар ичида бир хиллари хам мовжуд булиши мумкун, айтайликки хажми n га тенг булган тапланмада n_1 таси y_1 ва х.к. n_k таси y_k булсин, $n_1+\ldots+n_k=n$. Натижада

y_1	y_2	.....	y_k
n_1	n_2	.....	n_k

$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	.....	$\frac{n_k}{n}$

жадвал хосил булади: n_i га y_i ни *частотаси*, n_i/n га эса y_i ни *нисбий частотаси* дейилади. Вариантларни усиш тартибида жойлаштиришдан хосил булган катор $y_{(1)} < y_{(2)} < .... < y_{(k)}$, $y_{(1)},...,y_{(k)}$, га вариацион катор дейилади.

Умумиятга зиён келтирмасдан, белгиларни соддатлаштириш максадида биз $y_1,...,y_k$ ларни усиш тартибда ёзилган деб хисоблайлик, яъни $y_1 < y_2 < ... < y_k$.

<u>*Эмпирик таксимот функция.*</u> Белгилайлик $n_x = |\{i : y_i < x\}|$, яъни n_x берилган x дан кичик булган варианталар сони, бошкача килиб айтганда n_x – $\{X < x\}$ ходисани n та тажрибадаги частотаси, n_x/n эса нисбий частотаси.

<u>Таъриф.</u> Эмпирик таксимот функция $F_n(x)$ деб n_x/n га айтилади, яъни

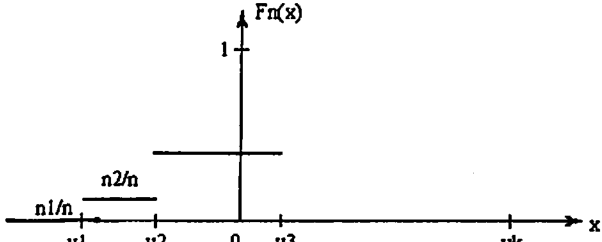
$$F_n(x) = \frac{n_x}{n}.$$

$F_n(x)$ функция таксимот функцияни барча хоссаларига эга. $F(x) = P\{X < x\}$ булсин, демак $F(x)$ номаълум таксимот функция (одатда $F(x)$ га X ни назарий таксимот функцияси дейилади). Бу ерда шуни айтиш керакки конкрет тажрибалар олиб боришга кадар $F_n(x)$, тасодифий микдор деб каралади, чунки бунда $F_n(x)$ танланма $X_1,...,X_n$ ни функциясидир.

<u>**Теорема**</u> (Гливенко) Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун куйидаги муносибат уринли

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sup_x |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\right\} = 1,.$$

Демак, $F_n(x)$ номаълум $F(x)$ таксимот функцияга «тахминан тенг»дейиш мумкун. $F_n(x)$ зинасимон функция булиб сакрашлари $y_1,...,y_k$ нукталарда ва y_i нуктадаги сакраш катталиги n_i/n га тенг (юкорида келишилган белгилашларда):



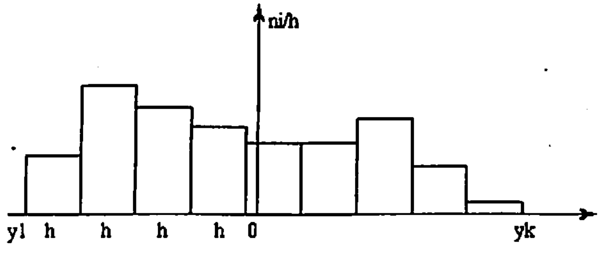
Полигон ва гистограмма

Частоталар полигони деб учлари $(y_1,n_1),...,(y_k,n_k)$ булган синик чизикга айтилади.

Нисбий частоталар полигони деб учлари $(y_1,\frac{n_1}{n}),....,(y_k,\frac{n_k}{n})$ нукталарда булган синик чизикга айтилади.

Агар X тасодифий микдор узлуксиз туртда булса (ёки статистик маълумотлар сони куп булса) маълумотлар группаланади. Бунинг учун X тасодифий микдорни кийматлар сохаси $\Re$ узунлиги h булган k та ораликларга булинади, ва тажрибада хар бир ораликга тушган кузатувлар сони аникланади, $n_i - i$чи ораликга тушган кузатувлар (x_i лар) сони $n_i+...+n_k=n$, булсин.

Частоталар гистограммаси деб асослари оралик узунлиги h булган баландликлари n_i/h булган тугри туртбурчаклардан тузилган зинасимон



фигурага айтилади.

Хосил булган фигурани юзаси nга тенг, чунки iчи турт бурган юзаси $\frac{n_i}{n}\cdot h=n_i$, $n_i+...+n_k=n$. Бундай гистограмма <u>частоталар гистограммаси дейилади.</u>

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h булган баландликлари n_i/nh булган туртбурганлардан тузилган зинасимон фигурга айтилади. Бу холда хосил булган фигура юзаси 1 гатенг, ва нисбий частоталар гистограммаси номаълум зичлик функцияни тахминий тасвири булади.

Танланма моментлар.

$X_1,....,X_n$ ни назарий таксимот функциясига мос сонли характеристикалар каби эмпирик таксимот функцияга мос танланма характеристикалар киритилади. Албатта булар тасодифий микдор булади. Хусусан A_k оркали k чи тартибли такланма моментни ва M_k оркали танланма марказий моментни белгилайлик

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} X_m^k, \qquad M_k = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(X_m - A_1)^k$$

булади. Амалиётда куп ишлатиладиган A_1 ва M_2лар махсус белгиланиб улар

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} X_m$$ - танланма урта киймат,

ва

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(X_m - \overline{X})^2$$ - танланма дисперсия

дейилади. $\overline{X}$ ва S^2ларни хоссаларини кейинги булимларда куриб чикамиз.

Маъруза 2. Номаълум параметрни нуктавий бахолаш.

Энди $P = P(\theta)$, яъни эхтимоллик таксимоти параметрга (битта ёки бир нечта) боглик булиб бу параметр номаълум. Бошкача килиб айтганда кузитилаётган тасодифий микдор Xнинг тасимот функцияси $F(x;\theta)$бирор параметрик таксимот функциялар ойиласига тегишли. Бизнинг максад танланма $X_1,....,X_n$ оркалиθ ни асли кимати θ_0га «тахминан» (бирор маънода) тенг булган катталикни аниклаш, яъни номаълум параметрга статистик бахо тузиш.

<u>**Тъариф.**</u> $X_1,....,X_n$ танланмадан олинган ихтиёрий функция $T(X_1,....,X_n)$га статистика дейилади.

Ноъмалум параметрни нуктавий бахосани топиш учун шундай статистика $T(X_1,....,X_n)$ изланадики унинг такланма $X_1,....,X_n$ни руйёби булмиш (яъни тажриба утказилганда хосил булган (руйёбга келган) Xтасодифий микдорни кийматлари) $x_1,....,x_n$лардаги киймати $T(x_1,....,x_n)$ номаълум параметр θ ни асли катталиги θ_0га тахминан тенг деб олинади. Бу статистика $T(X_1,....,X_n)$га ноъмалум параметр θга статистик бахо (кискарок бахо дейилади).

Статистикани таърифидан келиб чикадини битта номаълум параметрга умуман олганда чексиз куп статистик бахо олиш мумкун. Деман статистик бахолардан «яхши» сини ажратиш учун «яхшилик» улчовларини киритиш керак.

Силжимаган бахо. Энг аввло шуни кайд этамизки хар кандай статистик бахо тасодифий микдорлар $X_1,...,X_n$ ларни функцияси сифатида тасодифий микдордир. Шунинг учун статистик бахоларга куйиладиган талаб $T = T(X_1,...,X_n)$ статистикани таксимоти (у ёки бу маънода) номаълум параметр θ ни асил киймати атрофида мужасамланган булишидир.

Фараз килайликки ноъмалум параметр бир улчовли булсин, яъни битта номаълум параметр бахоланаяпти.

Таъриф. *Агар барча $\theta \in \Theta$ учун*

$$M_\theta T(X_1,......,X_n) = \theta \qquad (1)$$

булса статистика $T(X_1,...,X_n)$ номаълум параметр θ га силжимаган бахо дейилади,

$f(\theta) = M_\theta T(X_1,...,X_n) - \theta$ га силжиш катталиги дейилади. Демак силжимаган бахо учун $f(\theta) = 0$.

$$M_\theta (T(X_1,...,X_n) - \theta)^2 = D_\theta T(X_1,...,X_n) + b^2(\theta)$$

катталига $T(X_1,...,X_n)$ статистик бахони урта квадратик хатоси дейилади. Куриниб турибдини силжимаган бахолар учун урта квадратик хато шу бахони дисперсияси билан устма уст тушади.

Битта параметрга бир неча силжимаган бахо тузилиш мумкун.

Масалан.

Фараз килайликки номаълум параметр θ тасодифий микдор X ни математик кутилмаси булсин; $MX = \theta$ ва, демак, $MX_1 = ... = MX_n = \theta$ (тапланма X нинг n та богликсиз нусхаси эканлигини эслатайлик).

Статистика

$$T(X_1,...,X_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n \qquad (2)$$

булсин, бу ерда $a_1,...,a_n$ лар $a_1 + ... + a_n = 1$ тенгиликни каноатлантирувчи узгармас сонлар.

Бу статистика учун

$$MT(X_1,...,X_n) = M(a_1 X_1 + ... + a_n X_n) = (a_1\theta + ... + a_n\theta) = (a_1 + ... + a_n)\theta = \theta.$$

Демак (2) силжимаган бахо. Хусусан $a_1 = 1$, $a_2 = ... = a_n = 0$ булса $T(X_1,...,X_n) = X_1$ статистикани хосил киламиз, $a_1 = ... = a_n = 1/n$ булса

$$T(X_1,...,X_n) = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \overline{X}_n$$

танланма урта кийматни хосил киламиз. Демак танланма урта киймат номаълум математик кутипма учун силжимаган статистик бахо экан.

Аммо танланма дисперсия S^2 номаълум дисперсия θ^2 учун силжиган статистика булиб.

$$MS_n^2 = \frac{n-1}{n}\theta^2$$

булади. Демак S_n^2 ни урнига $\hat{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}S_n^2$ ни олсак хосил булган

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{m=1}^{n}\left(X_m - \overline{X}\right)^2$$

статистика номаълум дисперсия учун силжимаган статистика булади.

Юкорида айтилгандек битта номаълум параметрга бир нечта,хаттоки чексиз куп силжимаган статистик бахолар мовжуд булиши мумкун.

Демак силжимаган бахоларни таккослаш зарурияти тугилади.

Номаълум параметр θ га силжимаган бахолор тупламини Ψ_θ оркали белгилайлик. Фараз килайлик $T_1(X_1,...,X_n) \in \Psi_0$ ва $T_2(X_1,...,X_n) \in \Psi_\theta$,яъни бу иккала статистика параметр θ учун силжимаган баходир.

Таъриф. *Агар* $DT_1(X_1,...,X_n) < D\ T_2(X_1,...,X_n)$ *,булса* $T_1(X_1,...,X_n)$ *бахо* $T_2(X_1,...,X_n)$ *га нисбатан эффектив статистик бахо дейилади.*

Агар $\inf\limits_{T(X_1,...,X_n)\in\Psi_\theta} DT(X_1,...,X_n) = DT^*(X_1,...,X_n)$ булса $T^*(X_1,...,X_n)$ га *текис эффектив статистик бахо* дейилади. Шуни айтиш keраккки текис эффектив бахо хамма вакт хам мовжуд булмайди.

Маъруза 3. Статистик бахони тузиш усуллари.

1.*Моментлар усули* Фараз килайликки $X_1,...,X_n$ танланма олинган $F(x;\theta)$таксимот функция θ номаълум параметрга боглик булсин. Номаълум параметр θни статистик бахоси мантикан шундай булиши керакки танлама моментлар назарий моментларга тенг булиши керак.

Табнийки α_k k-чи назарий момент θга боглик, яъни $\alpha_k = \alpha_k(\theta)$. Агар ноъмалум параметрлар сони lта булса куйидаги lта тенгламалар системасини тузамиз.

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1(\theta) \\ \vdots \\ A_e = \alpha_e(\theta) \end{cases} \qquad (1)$$

бунда $\theta=(\theta_1,...,\theta_e)$, $A_j=A_j(X_1,...X_n)$ (1) тенгламалар системаси e та номаълумли e та тенгламалардан иборат. Агар (1) егимча эга булса, унинг учими $\theta^*(X_1,...X_n)=(\theta^*(X_1,...,X_n),...,\theta^*(X_1,...X_n))$ ноъмалум параметр $\theta=(\theta_1,...,\theta_e)$ га моментлар усулида топилган бахо дейилади.

<u>2. *Энг катта ухшашлик усули.*</u>

Агар кузатилаётган тасодифий микдор X дискрет булса f(u,θ) = P{X=u,θ},булсин, агар X узликсиз турдаги булса f(u,θ) Хни u нуктадаги зичлик функцияси булсин. Куйидаги функцияга:

$$L(x_1,...,x_n,\theta)=f(x_1;\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

Ухшашлик функция дейилади. Энг катта ухшашлик усулида номаълум параметр θни урнига шундай θ^* ни олишимиз керакки унда ухшашлик функция максимумга эришиши керак:

$$\max_{\theta\in H} L(x_1,...,x_n,\theta)=L(x_1,...,x_n,\theta^*).$$

Маълумки функция ва унинг логарифми айни нукталарда экстремумларга эришади (агар экстремумлар мовжуд булса).

Фараз килайликки барча $\theta\in H$ учун $L(x_1,...,x_n,\theta)>0$ ва θ буйича дифференциалланувчи булсин.

Юкорида айтилганларга кура *энг катта ухшашлик бахо* деб

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(x_1,....,x_n,\theta)=0$$

тенгламани ёки бари бир

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_m;\theta)=0$$

тенгламани ечими $\theta=\theta^*(x_1,...,x_n)$ га айтилади.

Агар номаълум параметр $\theta=(\theta_1,....,\theta_k)$ булса, яъни номаълум парамтерлар сони k та булса энг катта ухшашлик бахо куйидаги

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}L(x_1,...,x_n,\theta_1,...,\theta_k)=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_k}L(x_1,...,x_n,\theta_1,...,\theta_k)=0\end{cases}$$

системани, ёки бари бир

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln f(x_{mi}, \theta_1, \dots, \theta_k) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln f(x_{mi}, \theta_1, \dots, \theta_k) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини егими $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_k^*)$ га айтилади. Табиийки бу ерда $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$ танланмани функцияси.

Маъруза 4. Номаълум параметрга оралик бахо. Ишончлилик оралиги.

Номаълум параметрга битта сон билан аникланадиган бахога нуктавий бахо дейилади. Олдинги булмимларда кайд этилган статистик бахолар нуктавийдир.

Танланма хажма кичик булса нуктавий бахо номаълум параметрни асли кийматидан анча фарк этади,яъни йул куйиладиган хато катта булади.

Бундай холларда оралик бахолашни куллаш маъкулдир.

Фараз килайликни номаълум парамет θ сколяр булиб унга нуктавий бахо $T(X_1, \dots, X_n)$ булсин.

Табиийки $|\theta - T(X_1, \dots, X_n)|$ айирма канчалик кичик булса шунчалик $T(X_1, \dots, X_n)$ бахо номаълум параметр θ ни тугрирок аниклайди. Бошкача килиб айтганда агар $\delta > 0$ учун $|\theta - T(X_1, \dots, X_n)| = \delta$ булса, канчалик δ кичик булса шунчалик $T(X_1, \dots, X_n)$ бахо θ ни аникрок акс этади. Демак мусбат сон δ статистик бахо $T(X_1, \dots, X_n)$ ни «яхшилик» улчови, яъни аниклигини белгилайди. Аммо $T(X_1, \dots, X_n)$ тасодифий микдордир деман $|\theta - T(X_1, \dots, X_n)| = \delta$ тегсизлик бирор эхтимоллик γ билан руй беради:

$$P\{|\theta - T(X_1, \dots, X_n)| < \delta\} = \gamma \qquad (1)$$

Шу тегламадаги γ эхтимолликга *ишончлилик эхтимоллиги* дейилади. Одатда γ ни бирга якин килиб олинади, масалн 0,95; 0,99 ва х.к.... Оралик $(T(X_1, \dots, X_n) - \delta, T(X_1, \dots, X_n) + \delta)$ га ишончлилик оралиги дейилади, яъни

$$P\{\theta \in (T(X_1, \dots, X_n) - \delta, T(X_1, \dots, X_n) + \delta)\} = \gamma .$$

Бу муносибатни $(T(X_1, \dots, X_n) - \delta, T(X_1, \dots, X_n) + \delta)$ оралик γ эхтимоллик билан номаълум параметр θ ни уз ичига олади деб тушинмок керак.

Маъруза 5. Статистик тахминлар назарияси элементлари. Тасдиклаш аломати. Колмогоровни тасдиклаш аломати. К.Пирсонни хи-квадрат тасдиклаш аломати.

Тажрибада кузитиладиган тасодифий микдорнинг таксимоти хакида айтиладиган хар кандай тахминга статистик тахмин дейилади. Бундай тахминларни назарий мулохазалар ёки бошка кузатувларни статистик тахлилига асосланиб айтиш мумкун.

Масалан асли киймати «a» номаълум булган физик катталикни улчаш тажрибасини курайлик. Тажриба натижаларига бир канча тасодиий факторлар таъсир килади (улгаш асбобини аниклиги, мухит харорати, ва х.к.). Шунинг учун k чи улчаш натижаси (кузатув) $X_k = a + \varepsilon_k$ куринишда булиб бу ерда ε_k улчашда йул куйиладиган тасодифий хатоликдир. Одатда, юкорида айтилган тасодифий таъсирларни инобатга олган холда, ε_k куп сондаги хар бири жуда катта булмаган тасодифий хатолар йигиндиси куринишда булади. Шунинг учун марказий лимит теорема асосида X_k ни нормал таксимотга эга деган тахминни айта оламиз.

Аникланиши керак булган ноаниклик хакида айтилган ва текширилиши лозим булган тахминга асосий (одатда уни нолтахмин деб аталиб H_0 билан белгиланади) дейилади.

Статистик тахминларни текшириш деганда биз шундай койдани тузишимиз керакки, бу коидага буйича танланма натижаларига асосланиб асосий тахмин H_0 ни ёки кабул килишимиз ёки рад этишимиз керак.

Асосий тахмин H_0 ни кабул ёки рад этувчи коидага *статистик аломат дейилади.* Бундай коидаларни (аломатларни) ишлаб чикиш ва уларни оптималаштириш усулларни аниклаш статистик тахминлар назарясини масалаларидир.

С:::атистик тахминларга мисоллар келтирайлик.

1 масала. (тахсимот хакида тахмин). Фараз килайликни таксимот функцияси $F_x(u)$ номаълум булган тасодий микдор X устида хажми n булган кузатувлар олиб борилган булсин. Текширилиши лозим булган тахмин $H_0 : F_X(u) = F(u)$ бу ерда $F(u)$ тула тукис берилган (маълум) ёки $H_0 : F_X(u) \in J$, бу ерда J- берилган таксимот функциялар оиласи. Бу холда, одатда J параметрик таксимот функциялар оиласи булади: $J = \{F(x,\theta), \theta \in H\}$. Мисол учун $J = \{\prod(\theta) : \theta \in (0,\infty)\}$, $\prod(\theta)$ параметр θ булган Пауссон таксимот функция. Келтирилган тахминга таксимот куриниши хакида тахмин дейилади.

2.масала (бир жижлилик тахмини).Натижалари $(x_{i1},...,x_{in_i})$, $i = 1,...,k$ булган k та богликсиз кузатувлар сериялари уткасилган булсин. Бу кузатувлар битта тасодифий микдор устида олиб борилганлигига асос борми, яъни кузатувлар таксимоти сериядан серияга узгармадими? Агар бу шундай булса бу тапланмалар биржинсли дейилади. Агар $F_e(u)$деб eчи серияда кузатилган тасодифий микдорни таксимот функциясини белгиласак биржинслилик булган асосий тахмин $H_0 : F_1(u) = ... = F_k(u)$ куринишда булади.

3 мисол.(Богликсизлик тахмини). Тажрибада (X,Y)икки улчовли тасодифий вектор кузатилиб унин таксимот функцияси $F_{(X,Y)}(u,\upsilon)$номаълум булсин. Агар X,Yларни богликсиз дейишга асос мовжуд булса, асосий тахмин $H_0 : F_{(X,Y)}(u,\upsilon) = F_X(u)F_Y(\upsilon)$ куринишда булади, бу ерда $F_X(u), F_Y(\upsilon)$ мос равишда Xва Y тасодифий микдорларни таксимот функциялари.

Табнийки бу келтирилган мисоллар амалиётда учрайдиган барча холларни уз ичига олмайди. Хусусан, талайгина холларда ноаниклик таксимот функция боглик булган параметда булади, яъни параметр номаълум (масалан бош тупламни урта каймати ёки дисперсия ва х.к.). Статистик тахмин шу параметр маълум кийматга тенглигидан иборат. Бундай тахминларга параметрик тахмин дейилади.

Агар статистик тахмин номаълумни бир кийматли аникласа бундай тахминга содда тахмин дейилади. Акс холда мурракаб тахмин дейилади.

Тасдиклаш аломати.

Тасдиклаш аломатини тузишни умумий усулларини куриб чикайлик. Фараз килайликки $X_1,...,X_n$ кузатувлар олиб борилган тасодифий микдор Xдаги мовжуд булган ноаниклик хакида H_0 тахмин килинган булсин. Бу тахминни текшириш учун куйидаги кадамлар босиб утилади. Аввало эмпирик маълумотларни (танланмани) H_0тахмин буйича булиши керак булган маълумотлардан фаркини характерловчи статистика.$T = T(X_1,...,X_n)$ танланади. Одатда бундай статистика манофий булмайди, ва унинг таксимотини H_0 да аник ёки тахминан топиш мумкун булади. Хусусан агар H_0 мураккаб булса Tнинг тасимоти H_0ни ташкил этувчи барча тахминлар учун бир хил булади.

Фараз килайликни бундай статистика топланган булиб $J = \{t : t = T(x_1,...,x_n);\ x_1,...,x_n \in \Re\} - T = T(X_1,...,X_n)$ статистикани кабул киладиган кийматлар туплами булсин. Олдиндан етарлича кичик $\alpha > 0$ олиб J ни шундай кисми $J_{1\alpha}(J_{1\alpha} \subset J)$ни ажратамизки, агар асосий тахмин H_0 уринли булса $T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha}$ ходисани эхтимоллиги (бундай эхтимолликни $P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\}$ куринишда ёзмамиз) αдан ошмасин:

$$P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha} / H_0\} \le \alpha .$$

Бунда H_0ни текшириш коидаси куйидагича булади. Фараз килайликки nта тажриба утказилиб $x_1,...,x_n$ натижалар олинди ва $t=T(X_1,...,X_n)$ $T(X_1,...,X_n)$ статистикани мос киймати булсин.

Агар $t \in J_{1\alpha}$булса, у холда H_0 тахминда эхтимоллиги кичик (α) булган ходиса руй берган булиб H_0 тахмин рад этилиши керак (чунки тажриба натижалари уни тасдикламади). Акс холда, яъни агар $t \notin J_{1\alpha}$ булса H_0 тахминни кабул килишга асос бор, чунки тажриба натижалари уни тасдиклаяпти.

Шуни айтиш кераки $t \notin J_{1\alpha}$ (яъни $t \in J \setminus J_{1\alpha}$) булса албатта H_0ни кабул килиш керак деган катий факр айтилмайди, факатгина шу конкрет тажрибалар натижалари H_0ни тасдиклаяпти ва уни кабул килишга асос бор дейилади холос.

Айтилган коидада $T(X_1,...,X_n)$ статистикага аломат статистикаси, $J_{1\alpha}$ критик туплам, α га аломат даражаси дейилади.

Бунда икки турдаги хатога йул куйилиши мумкун:

Аслида асосий тахмин H_0 тугри булганда уни рад этишдан хосил булган хато, яъни аслида H_0 тугри лекин $t=T(x_1,....,x_n) \in J_{1\alpha}$булди. Бундай хатога <u>*биринчи турдаги*</u> хато дейилади. Демаа биринчи турдаги хато αдан ошмалик керак. Иккинчиси - аслида асосий тахмин H_0 нотугри булганда уни кабул килишдан хосил булган хато, яъни аслида H_0 нотугри, аммо тажриба натижалари $x_1,....,x_n$да $t=T(x_1,....,x_n) \notin J_{1\alpha}$ булди ва H_0 кабул килинди. Бундай хатога <u>*иккинчи турдаги*</u> хато дейилади.

Асосий тахмин H_0 дан фаркли булган хар кандай тахминга *карши тахмин* (*альтернатив тахмин*) дейилади, ва $P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha} / H_1\} \le \alpha$га аломат *куввати* дейилади. Умуман $P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha} / H\} = W(H)$ эхтимолликга тахмин H ни функцияси сифатида кувват функцияси дейилади ва $H=H_1$да $W(H_1)$ асосий тахмин нотугри булганда тугри ечимни кабул килиш эхтимоллигини беради.

Аломатни «яхши» хусусиятларидан бири силжимганлик хоссасидир. Бу хосса

$$P\{T(X_1,...,X_n) \in J_{1\alpha} / H_1\} \le \alpha,$$

тенгсизлик билан аникланади.

Критик туплам $J_{1\alpha}$ни куринишига караб аломат уч турга булинади: агар $J_{1\alpha}=\{t : t > C_\alpha\}$булса унг томонлама, $J_{1\alpha}=\{t : t > C_\alpha\}$ булса чап томонлама, $J_{1\alpha}=\{t : C_\alpha < t < C_{2\alpha}\}$булса икки томонлама аломат дейилади. C_α, $C_{i\alpha}$ларга критик нукта дейилади.

Колмогоровни тасдиклаш аломати.

Фараз килайликни $X_1,...,X_n$ таксимот функцияси $F_X(u)$ номаълум булган тасодифий миқдор X кийматлар тупламидан олинган танланма булсин. Асосий тахмин $H_0 : F_X(u) = F(u)$, бу ерда $F(u)$ тула тукис маълум таксимот функция, демак H_0 содда тахмин.

Колмогоров аломатида аломат статистикаси сифатида $F_n(u)$ эмпирик таксимот функцияни тахмин килинган $F(u)$ таксимот функциядан максимал фарки булмиш куйидаги Колмогоров статистикаси олинади:

$$D_n = D_n(X_1,...,X_n) = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right|$$

Гливенко теоремасига кура хар бир x да $F_n(x)$ эмпирик функция назарий таксимот функция $F(x)$ учун оптимал статистик баходир, агар H_0 уринли булса танланма хажми n усиши билан D_n нолга якинлашади. Демак аломат D_n статистикани катта кийматларида асосий тахминни рад этиши керак, яъни критик туплам

$$J_{1\alpha} = \{t : t = D_n(x_1,...,x_n) > C_\alpha\}$$

куринишда булиб аломат унг томонлидир.

Колмогоровни D_n статистикасини таксимот H_0 га яъни $F(x)$ га боглик эмас. Ундан ташкари куйидаги теорема уринли.

Теорема (Колмогоров). Агар $F(x)$ узлуксиз булса, у холда ихтиёрий берилган $t > 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}D_n \le t\right\} = K(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}(-1)^i e^{-2i^2t^2}.$$

Бунда $P\left\{\sqrt{n}D_n \le t\right\}$ эхтимолликни урнига $K(t)$ таксимот функцияни $n \ge 20$ дан бошлаб етарлига кичик хатолик билан олиш мумкун. Бундан келиб чикадики $n \ge 20$ булса критик нукта C_α ни $\lambda_\alpha / \sqrt{n}$ га тенг килиб олиш мумкун, бу ерда λ_α $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ тенгламани ечими. Хакикатдан хам берилган α учун

$$P\{D_n \in J_{1\alpha} / H_0\} = P\left\{\sqrt{n}D_n \ge \lambda_2 / H_0\right\} \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

Шундай килиб Колмогоров аломати куйидагича: берилган α оркали $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ тенглама ечими сифатида λ_α топилади (жадвал оркали), тажриба натижалари $x_1,...,x_n$ оркали $t = D_n(x_1,...,x_n)$ хисобланади; агар $\sqrt{n}t \ge \lambda_\alpha$ булса H_0 тахмин рад этилади, акс холда тажриба натижалари асосий тахмин H_0 ни тасдиклайди дейилади.

К.Пирсонни хи-квадрат тасдиклаш аломати.

Амалиётда Колмогоров статистикасини хисоблаш анча мурракаб, ундан ташкари Колмогоров аломатини куллаш факат $F(x)$ узлуксиз булганда мумкундир. Шунинг учун куп холларда Пирсонни χ^2 аломати кулланилади. Бу аломат универсал характерга эга булиб маълумотларни (кузатув натижаларини, танланмани) группалаш усулига асосланган.

Фараз килайликки $\Re$ кузатилаётган ва таксимот функцияси $F_X(u)$ номаълум булган X тасодифий микдорни узгариш сохаси булсин. $\Re$ни k та кесишмайдиган кисмлар (ораликларга) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ га буламиз:

$$\Re = \bigcup_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \cap \varepsilon_j = \theta, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

υ_i деб ε_i оралика тушган кузатувлар сонини булгилаймиз, яъни $X_1, \ldots, X_n$ тапланмадан ε_i ораликга тегишли булганлар сони. υ_i га ε_i оралик частотаси $\upsilon = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_k)$ частоталар вектори дейилади. Частоталар вектори υ тамланма вектор $X_1, \ldots, X_n$ оркали бир кийматли аникланади ва $\upsilon_1 + \ldots + \upsilon_k = n$ булади.

Кузатувни ε_i ораликга тушин эхтимоллигини H_0 тугри булгандаги эхтимоллигини P_{i0} билан белгилайлик: $P_{i0} = P\{X \in \varepsilon_i / H_0\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Аломат статистикаси сифатида

$$X_n^2 = \sum_{m=1}^{k} \frac{(\upsilon_m - nP_{m0})^2}{nP_{0m}}$$

олинади, бу ерда $H_0 : F_X(u) = F(u)$.

Эхтимолликни статистик таърифига кура (ёки катта сонлар конунини Бернулли формасига кура) агар H_0 уринли булса v_i / n нисбий частота P_{i0} эхтимолликга якин булиши керак. Демак, агар H_0 уринли булса X_n^2 статистика катта булмаслиги керак. Шундай килиб Пирсонни χ^2 аломати X_n^2 статистикани катта кийматларида асосий тахмин H_0 ни рад этади, яъни критик туплам унг томонли булиб $J_{1\alpha} = \{t : t > C_\alpha\}$ куринишда булади.

<u>Теорема (Пирсон).</u> Агар $0 > P_{i0} < 1$ булса

$$\lim_{n \to \infty} P\{X_n^2 < t / H_0\} = P\{\chi^2(k-1) < t\}$$

бу ерда $\chi^2(k-1)$ эркинлик даражаси k-1 булган хи-квадрат таксимотга эга булган тасодифий микдор:

$$P\{\chi^2(k-1) < t\} = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(\frac{k-1}{2})} \int_0^t x^{\frac{k}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} dx \qquad (1)$$

Амалийтда бу теоремани $n \geq 50$, $v_i \geq 50$ булганда курлаш мумкун. Бунда критик нукта C_α ни берилган α оркали

$$P\{\chi^2(k-1) > C_\alpha\} = \alpha \qquad (2)$$

тенгламани егими сифатида олинади ((1) учун жадваллар мовжуд).

Маъруза 6. Регрессион ва корреляцион тахлил.

Бу булимда бизнинг асосий максадимиз икки тасодифий ходисани богликлиги курсаткичини урганиш ва аниклаш.

Олдинги булимларда бундай масала маълум маънода курилган. Хусусан икки тасодифий микдорни богликлик улчови сифатида корреляция коэффициентини куриб чикдик, икки тасодифий ходисани богликлиги эса шартли эхтимоллик оркали курилган.

1) Икки тасодифий микдор богликлигини шартли таксимот оркали бериш мумкун.

Бизга X ва Y тасодифий микдорлар берилган булсин.

Белгилайлик:

$$P_{(X,Y)}(u,\vartheta) = \begin{cases} (X,Y) & \text{тасодифий векторни зичлик функцияси, агар } X \text{ ва } Y \text{ лар узлуксиз турда булса,} \\ P\{X = u, Y = \vartheta\} & \text{агар } X \text{ ва } Y \text{ лар дискрет турда булса,} \end{cases}$$

$$P_X(u) = \begin{cases} X & \text{тасодифий микдорнинг зичлик функцияси, агар } X \text{ узлуксиз турда булса,} \\ P\{X = u\} & \text{агар } X \text{ дискрет турда булса,} \end{cases}$$

$$P_Y(u) = \begin{cases} Y & \text{тасодифий микдорнинг зичлик функцияси, агар } Y \text{ узлуксиз турда булса,} \\ P\{Y = u\} & \text{агар } X \text{ дискрет турда булса} \end{cases}$$

$$P_{X/Y}(u/\vartheta)=\begin{cases} X & \text{тасодифий микдорни } Y=\vartheta \text{ шарти остидаги зичлик функцияси, агар } X, Y \text{ лар узлуксиз турда булса,} \\ Y=\vartheta & \text{шарти остида } X \text{ тасодифий микдорни } u \text{ га тенг булиш шартли эхтимоллиги.} \end{cases}$$

У холда агар $P_Y(\vartheta)>0$ булса

$$P_{X/Y}(u/\vartheta)=\frac{P_{XY}(u,\vartheta)}{P_Y(\vartheta)}$$

формула уринли.

Табийки X, Yлар дискрет булса

$$\sum_u P_{X/Y}(u,\vartheta)=1,$$

ва агар X, Y лар узлуксиз булса

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{X/Y}(u,\vartheta)du=1.$$

2) Шартли таксимот оркали шартли математик кутилма куйидагича аникланади

$$M(X/Y=\vartheta)=\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} uP_{X/Y}(u/\vartheta)du \\ \sum_u up_{X/Y}(u,\vartheta) \end{cases}$$

Бундан келиб чикадики $M(X/Y=\vartheta)=\varphi(\vartheta)$ ϑни функцияси. $\varphi(y)$ функцияга X ни Y га регрессия функцияси дейилади. Шунга ухшаш Y ни X га регрессия $\Psi(u)$ ни киритиш мумкун.

3. <u>Чизикли регрессия.</u>

Бизга X ва Y тасодифий микдорлар берилган булиб, улар орасида богликликни аниклаймиз. Биз Y тасодифий микдорни X тасодифий микдор оркали

$$Y\approx q(X)=dX+\beta$$

тахминий ,берилишини курамиз, бу ерда α,β лар аникланиш керак булган параметрлар. Бу параметрларни аниклаш усулларидан бир «энг кичик квадратлар» усули булиб бунда α,β ларни шундай танланадики $M[Y-q(X)]^2$ энг кичик кийматга эришасин. Бу шартни каноатлантирувчи $q(X)=\alpha X+\beta$ га Y ни X га чизикли урта квадратик регрессия функцияси дейилади. Куйидаги теорема уринли.

<u>Теорема.</u> Y ни X га чизикли урта квадратик регрессия функцияси

$$q(X) = MY + \sqrt{\frac{DY}{DX}}k(X,Y)(X - MX)$$

куринишда булади, бу ерда $k(X,Y)$ X,Y ларни корреляция коэффициенти.

$$\alpha = \sqrt{\frac{DY}{DX}}k(X,Y)$$

катталикга Y ни X га регрессия коэффициенти дейилади,

$$y = MY + \alpha(x - MX) = g(x)$$

функияга Y ни X га урта квадратик регрессия чизини дейилади.

Урта квадратик регрессия тугри чизиги танланма тенгламаси параметраларини топиш.

Фараз килайликки (X,Y) тасодифий вектор устида олиб борилган n та кузатувлар натижалари $(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ булсин. Y ни X га урта квдратик регрессия танланма тугри чизигини

$$y = kx + b$$

куринищда излаймиз. Бу тугри бурчак коэффициенти k га Y ни X га регресиясини танланма коэффициенти дейилади ва уни ρ_{YX} оркали белгилаб ρ_{YX} ва b ларни шундай танлашимиз керакни

$$y = \rho_{YX}x + b \qquad (1)$$

тугри чизик $(x_1,y_1),....,x_n y_n)$ нукталарга иложи борича якин булсин. Айтилганни аникрок очикланиши куйидагича. (1) тенгламага $x = x_i$ булгандаги мос координатага Y_i оркали белгилаймиз, y_i эса танланмадаги x_i га мос булса ρ_{YX} ва b ларни

$$F(\rho,b) = \sum_{m=1}^{n}(Y_m - y_m)^2 = \sum_{m=1}^{n}(\rho \quad x_i + b - y_i)^2$$

минимумга эришадиган килиб оламиз. Демак ρ ва b лар

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{m=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{m=1}^{n}(\rho x_i + b - y_i)x_i = 0$$

системани ечимидир ва

$$\rho_{XY} = \rho = \frac{\sum_{m=1}^{n} x_m y_m - n\overline{xy}}{n^2 S_n^2 - n\overline{x}^2} = \frac{n^{-1}\sum_{m=1}^{n} x_m y_m - \overline{xy}}{nS_n^2 - \overline{x}^2},$$

$$b = \frac{n\overline{y}S_n^2 - \overline{x}\cdot n^{-1}\sum_{m=1}^{n} x_m y_m}{nS_n^2 - \overline{x}^2}$$

булади, бу ерда $\overline{X},\overline{Y}$ лар танланма урта киймат, $S_n^2 - x_1,...,x_n$ танланмага мос танланма дисперсия.

Биз факатгина чизикли регрессияни куриб чикдик. Умуман олганда $q(x)$ функцияни k чи тартибли полином куринишда излаш мумкун. Хусусан

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

куринишда олинса бундай богланишга пароболик регрессия дейилади. Чизикли регрессия функцияни аниклашдаги барча мулохазаларни бир оз узгариш билан бу холга хам утказиш мумкун. Бунда асосий кадам яна «энг кичик квадратлар» усули, яъни энди a,b,c параметрларни шундай аниклаш керакки

$$M[Y - q(X)]^2 = M[Y - ax^2 - bx - c]^2$$

энг кичик кийматга эришсин.

Адабиётлар:

1. Сирожднинов С.Х, Маматов М, Эхтимоллар назарияси. «Укитувчи» нашр., 1978 й.
2. Гмурман В.Е. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. «Укитувчи» нашр. 1977 й.
3. Коваленко В.И., Филипова А.С., Теория вероятностей и математическая статистика. «Мир», 1980 г.

Отпечатано в Типографии ТЭИС.
Зак. 406-12-2000г.