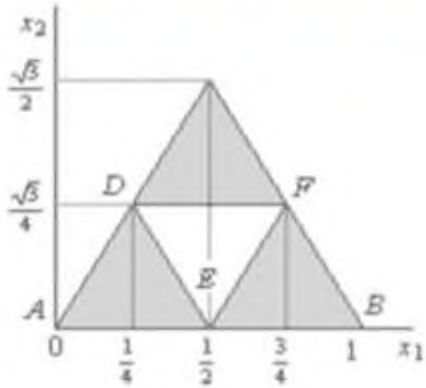
SH.A.ANAROVA

$$f_1\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$f_2\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$$
$$f_3\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/4\\\sqrt{3}/4\end{bmatrix}$$

FRAKTALLAR NAZARIYASI VA FRAKTAL GRAFIKA

DARSLIK



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI AXBOROT TEXNOLOGIYALARI VA KOMMUNIKATSIYALARINI RIVOJLANTIRISH VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

SH.A.ANAROVA

FRAKTALLAR NAZARIYASI VA FRAKTAL GRAFIKA

DARSLIK

5A351002 – Videotexnologiyalar mutaxassisligi talabalari uchun

O‘zbekiston Respublikasi
Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi
tomonidan darslik sifatida
tavsiya etilgan

Toshkent
“Universitet”
2021

UO‘K: 530.191:51(07)
KBK: 22.1ya7
22.3ya7
A 63

Anarova Sh.A. Fraktallar nazariyasi va fraktal grafika. Darslik. –T.: “Universitet”, 2021. 254 bet.
ISBN: 978-9943-7644-8-4

Mazkur darslik fraktallar va fraktallar qurish usullarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Darslikda fraktallar nazariyasining asosiy tushunchalari keltirilgan. Klassik va zamonaviy fraktallarning matematik modellari va rekursiv algoritmlari L-tizimlari, Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFS-Iterated Function Systems), algebro – mantiqiy R-funksiya (RFM – R-Function Method), to‘plamlar nazariyasi va arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasi usullariga asosan ishlab chiqilgan.

Sh.A.Anarova tomonidan tayyorlangan “Fraktallar nazariyasi va fraktal grafika” darsligi universitetning 5A351002 – “Videotexnologiya-lar” mutaxassisligida ta’lim oluvchi magistratura talabalari uchun mo‘ljallangan.

UO‘K: 530.191:51(07)
KBK: 22.1ya7
22.3ya7
A 63

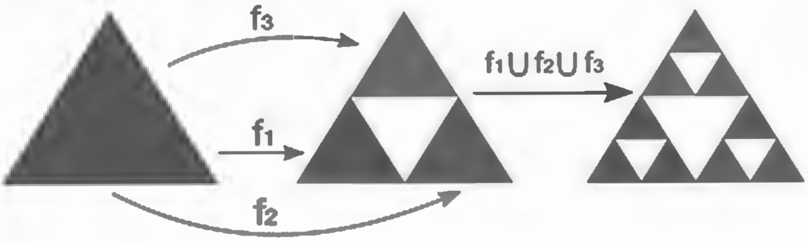
Taqrizchilar:

Zaynidinov H. – Muhammad al-Xorazmiy nomidagi TATU t.f.d., professor, “Axborot texnologiyalari” kafedrasi mudiri

Ravshanov N. – “Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari ilmiy innovatsion markazi” laboratoriya mudiri t.f.d., professor

ISBN: 978-9943-7644-8-4

SH.A.ANAROVA



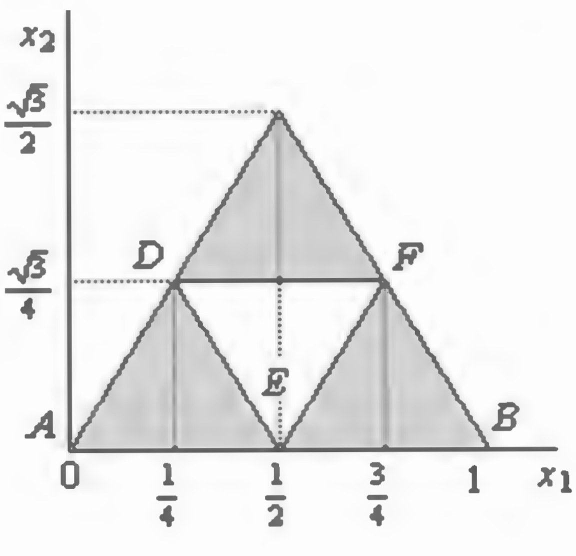
$$f_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

FRAKTALLAR NAZARIYASI VA FRAKTAL GRAFIKA

DARSLIK



KIRISH

Fraktallar noyob obyektlar bo‘lib, xaotik dunyoning aytib bo‘lmaydigan darajadagi harakatlaridan paydo bo‘ladi. Ularni juda kichik bo‘lgan membrana hujayralaridan tortib, juda katta hisoblangan Quyosh tizimidan ham topish mumkin. Daraxtlarning barglari va tuzilishi, insonlarning va hayvonlarning qon tomirlari, to‘lqinli daryolar, qimmat-baho qog‘ozlarning bozori – bularning hammasi fraktallardir. Qadimgi zamon taraqqiyoti vakillaridan to hozirgi kunning taraqqiyot vakillari, olimlar, matematiklar, san’at sohasi vakillari, shuningdek, yer yuzida yashaydigan jamiki odamlar fraktallar bilan hayratlanadilar hamda ulardan o‘zlarining ishlarida foydalanganlar. Shuningdek, dasturchilar va kompyuter texnikasi sohasidagi mutaxassislar fraktallardan cheksiz murakkablikdagi go‘zallikni oddiy formulalar orqali kompyuterlarda qurishlari mumkin.

Fraktallarning ixtiro etilishi fan va matematikada, san’atda yangi estetikaning ochilishidir, shuningdek, insonning olamni idrok qilishdagi kashfiyotidir.

“Fraktal” so‘zi ko‘pchilik insonlar, fiziklardan tortib maktab o‘quvchisigacha so‘z yuritadigan tushunchadir. U ko‘plab darsliklar va ilmiy jurnallar muqovalarida hamda kompyuterlarning dasturiy ta’minoti qutilarida paydo bo‘ldi. Bugun fraktallarning rangli sur’atini hamma joyda uchratish mumkin: tabriknomalardan tortib futbolkalargacha.

Oddiygina tilda aytish mumkin: *Fraktal – bu geometrik shakl bo‘lib, aniq bir qismi o‘lchamlari o‘zgargan holda qayta-qayta takrorlanishidir*.

Bu yerdan o‘zaro bir-biriga o‘xshashlik xususiyati kelib chiqadi. Barcha fraktallar o‘zaro bir-biriga o‘xshash va ular barcha darajalarda o‘xshashdir. Biroq fraktallar – murakkab shakllar bo‘lib qolmay, balki kompyuterlarda bo‘g‘imlarga bo‘lingan. Xulosa shuki, tasodifiy va tartibsiz harakatlar fraktallardir. Nazariy tomondan mavjud olamdagi barcha narsalar, ular bulutlarmi yoki kichkina kislorod molekulasi bo‘ladimi ularning hammasi fraktallardir.

Fraktallar xaos so‘zi bilan doimo bog‘langandir. Fraktallarni xaosning qismi sifatida aniqlash maqsadga muvofiqdir. Fraktallar tartibsiz va tasodifiy bo‘lishi bilan xaotik xatti-harakatlarni namoyon etadi. Agar juda yaqindan qaralsa, fraktalning ichida juda ko‘p o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik tomonlarni ko‘rish mumkin. Masalan, daraxtga qarang, bitta shoxini ajratib olib, uni yaqindan o‘rganing. Endi bir necha barglarning bog‘lamlarini ajratib oling. Fraktallar bilan shug‘ullanuvchi olimlar (xaologlar) uchun bu uchta obyekt aynan o‘xshash ifodalanadi.

Xaos so‘zi ko‘pchilik odamlarning xayoliga tartibsiz va so‘z bilan ifodalab bo‘lmaydigan narsalarni olib keladi. Aslida bunday emas. Demak, xaos qanchalik xaotik? Javob shunday, haqiqatda xaos nima yetarlicha tartiblangan va aniq qonuniyatga amal qiladi. Muammo shundaki, bu qonunlarni qidirib topmoq juda murakkab. Xaos va fraktallarni o‘rganishdan maqsad – aytib bo‘lmaydigan va xaotik tizimdagi qonuniyatlarni bashorat qilishdir.

Xaologlar bulutli tasvirlarni, ob-havoni, suv oqimini, hayvonlarning ko‘chishini, shuningdek ona tabiat hayotidan ko‘plab aspektlarni o‘rganishni yoqtirishadi.

Tizim – bu buyumlar to‘plami, yoki o‘rganish sohasidir. Shunday qilib, bizni o‘rab turgan dunyo fraktallardan iboratdir.

Ko‘plab xaologlar uchun xaos va fraktallarni o‘rganish dunyoni bilishni yangi sohasi bo‘lib qolmay, matematiklar, nazariy fiziklar, san’at va kompyuter texnologiya sohasidagi mutaxassislarni birlashtiruvchi inqilobdir. Bu kashfiyot nafaqat darsliklarda ko‘radigan, balki tabiatda hamda cheksiz olamda bizni o‘rab turgan olamni ifodalab beruvchi geometriyaning yangi turidir.

Bu yangi sohani o‘rganuvchilar fraktallar nazariyasining otasi deb Fronka – Amerika matematigi professor Benua Mandelbrot (Fransiyada tavallud topgan) deb hisoblaydilar. 1960-yillarning oxirgi o‘n yilligida Mandelbrot ishlagan ilmiy ijodini “*fraktal geometriya”* yoki “*tabiat geometriyasi*” deb ataydi (bu haqida u o‘zining “Tabiatning fraktal geometriyasi” – “The fraktal geometry of nature” nomli asarida yozadi).

Fraktal geometriyaning maqsadi – sindirilgan, burishgan va noravshan shakllarni tahlil qilishdan iborat. B.Mandelbrot parchalangan va qismlardan tashkil topgan bu shakllar uchun fraktal so‘zidan foydalangan.

B.Mandelbrot boshqa olimlar Klifford A.Pikkover (Clifford A.Pickover), Djeyms Gleyk (James Gleick) yoki G.O.Peytgen (H.O.Peitgen) fraktal geometriyaning sohasini kengaytirishga harakat qiladilar, ya’ni butun dunyoda ularni amaliy qo‘llashga, bozordagi qimmatli qog‘ozlarning narxlarini bashorat qilishdan tortib nazariy fizikaning yangi kashfiyotlarini bajarishgacha.

Fraktallar fanda ko‘pdan-ko‘p qo‘llanilmoqda. Buning asosiy sababi u mavjud borliqni an’anaviy fizika yoki matematikaga nisbatan juda aniq bayon etadi.

Fraktal geometriyaning ***asosiy g‘oyalaridan biri borliqda o‘lchov-lar miqdori uchun butun bo‘lmagan qiymatlar g‘oyasidir***. B.Mandelbrot butun bo‘lmagan o‘lchov **2.76** ni ***fraktal o‘lchov*** deb nomladi. Oddiy Evklid geometriyasi mavjud borliq tekis va silliq ekanligini ta’kidlaydi. Bunday borliqning xususiyati nuqtalar, chiziqlar, burchaklar, uchburchaklar, kublar, sferalar, tetraedrlar va boshqalarni beradi.

Tabiatdagi ko‘plab obyektlar (masalan, inson tanasi) biri ikkinchisi bilan qo‘shilgan fraktallar to‘plamidan tashkil topgan bo‘lib, har bir fraktal boshqalarining o‘lchamidan farq qiladigan o‘zining o‘lchamiga ega. Masalan, insonning ikki o‘lchamli sirtidagi tomirli tizimlari egiladi, tarmoqlanadi, buraladi va qisiladi, uning fraktal o‘lchami 3.0 ga teng. Ammo agar u alohida bo‘laklarga bo‘lingan bo‘lsa, arteriya qon tomirining fraktal o‘lchami faqatgina 2.7 ga teng bo‘ladi, unda o‘pka bronxial yo‘lidagi fraktal o‘lcham 1.07 ga teng.

Ma’lumki hozirgi vaqtda fraktallar kompyuter grafikasi, fizika va boshqa turli tabiiy fanlarda keng qo‘llanilmoqda, shuningdek radiotexnikada antennalarni loyihalashda, telekommunikatsiyada signallarni qayta ishlashda, kino hamda televideniyada maxsus effektlar va vizualizatsiya elementlari sifatida, yengil sanoatda gazlama va gilamlarga zamonaviy dizaynlar uchun naqshlar chizishda va h.k.

I BOB. FRAKTALLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Darslikning ushbu bobi fraktallar nazariyasining asosiy tushunchalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Fraktallarning paydo bo‘lish tarixi, fraktallarning ta’riflari, fraktallarning o‘ziga xos asosiy xususiyatlari hamda fraktallarga doir umumiy tushunchalar batafsil bayon etilgan.

1.1. Fraktallarning paydo bo‘lish tarixi, ta’riflari va ularning asosiy xususiyatlari

Fraktallar haqidagi fan matematikaning alohida sohasi sifatida XX asrning 70-yillaridan shakllana boshladi. Fraktallarni o‘rganishga qiziqishning paydo bo‘lishi abstrakt va tabiiy fanlarning maqsadlarini bir-biri bilan aloqada bo‘lishi uchun xizmat qiladi. Bu jarayonning boshlanishi deb B.Mandelbrotning 1977-yilda nashrdan chiqqan “Tabiatning fraktal geometriyasi” (Mandelbrot B.B. “The fraktal geometry of nature”) nomli kitobini keltirish mumkin. Mazkur qo‘llanma ko‘p miqdordagi turli xil fraktallar tasvirlarining to‘plamlarini o‘zida saqlaydi hamda tabiatda fraktal obyektlarni mavjudligining isbotlari mavjud.

Bugungi kunda fraktallar nazariyasining matematik jihatlarining tadqiqi, shuningdek tabiiy jarayonlar va hodisalarni fraktallar nazariyasi g‘oyalaridan foydalanib tavsiflash usullari – fanning mustaqil yangi sohasidir. U shu qadar kengayib ketdiki, bir necha tor ixtisosliklar sohalariga bo‘lib o‘rganilmoqda. Fraktallar nazariyasi fanlarni bog‘lovchi bo‘lib ulgurdi. Tabiatning fraktal geometriyasiga xizmat qiluvchi jarayonlarni o‘rganishga qiziqish fizikada, matematikada, biologiyada, materialshunoslikda va boshqa fanlarda yangi ilmiy yo‘nalishlarning paydo bo‘lishiga olib keldi. Turli xil ilmiy yo‘nalishlarning yagona strukturaga asosan yondashishi tasodifiy emas, balki fraktalli tuzilish xususiyatlarining natijasi hisoblanadi.

Fraktallarning tarixi. Fraktal so‘zi lotincha “fractus” so‘zidan olingan bo‘lib, “bo‘laklangan”, “qismlardan tashkil topgan” degan ma’noni anglatadi va u “fraction, fractional” (bo‘luv, bo‘linma) terminlaridan kelib chiqqan. Hozirgi kunga qadar fraktal tushunchasi aynan ta’rifga ega emas, biroq matematik nuqtai nazardan fraktal – bu kasrli o‘lchamlar to‘plamidir.

Fraktal va fraktal geometriya tushunchasi XX asrning 70-80-yillari o‘rtalarida matematiklar hamda dasturchilarning ilmiy izlanishlariga qat’iy ravishda kirib keldi.

Fraktallarning ta’riflari. Quyida fraktallarga berilgan ta’riflarni keltiramiz.

Yuqorida aytib o‘tganimizdek, fraktal aniq bir ta’rifga ega emas, biroq adabiyotlarda unga berilgan turlicha ta’riflarni uchratamiz.

Fraktal – bu geometrik fraktal bo‘lib, qismlardan tashkil topgan hamda ularning har biri butun fraktalning nusxasining kichiklashtirgan holatini ifodalaydi.

Fraktal – aniq bir qism o‘lchamini o‘zgartirgan holda qayta va qayta takrorlovchi geometrik shakldir.

Fraktal – qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishdir.

Fraktal – bu singan fazoviy shakl, tekis yoki notekis, xaotik yoki botartib va o‘ziga-o‘zini turli mashstabda takrorlaydigan murakkab tuzilish hisoblanadi.

Fraktal masshtabiga bog‘liq bo‘lmagan tasvirlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishlaridir.

Fraktal – Xausdorf o‘lchami topologik o‘lchamidan qat’iy katta bo‘lgan to‘plam.

Fraktal – nobutun o‘lchamli o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plamlar va cheksiz o‘ziga-o‘zi o‘xshash shakllardir, o‘lchami kasriy to‘plamdir. Bunday ta’riflardan yana bir nechtasini keltirish mumkin.

Yuqoridagi ta’riflardan kelib chiqib ularni quyidagi ikkita guruhga ajratish mumkin:

Fraktallarning matematik ta'rifi. Fraktallar cheksiz rekursiv jarayonlar natijasida ifodalangan funksional yoki hosil bo'luvchi to'plam va u quyidagi xususiyatlarga ega:

– o'ziga-o'zi o'xshash yoki masshtabning invariantligi (cheksiz skeyling), ya'ni kichik masshtabda va o'rta masshtabda xuddi katta masshtabdagi kabi ko'rinadi;

– kasrli o'lchami (Xausdorf o'lchami) topologik o'lchamidan qat'iy katta;

– differensiallanmaydi va kasrli ko'paytmalar hamda integrallarda aniqlashtiriladi.

Fraktallarning fizik ta'rifi. Fraktallar – kuchli qirqilgan tuzilishni ifodalovchi hamda chegaralangan masshtabda o'ziga-o'zi o'xshash xususiyatini egallovchi geometrik obyektlar (chiziq, sirt, jism)dir.

Fraktal bu avvalo abstrakt, nazariy model, reallikda mavjud bo'lmagan chegaraviy o'tish natijalaridir.

Biroq fraktallarning qat'iy aniq ta'rifi mavjud emas. Ammo fraktal geometriya tabiat geometriyasidir.

Fraktallarning xususiyatlari.

1. *O'ziga-o'zi o'xshashlik*. Eng oddiy holatda fraktallarning katta bo'lmagan qismi ular haqidagi barcha axborotlarni o'zida saqlaydi.

2. *Kasriylik*. Fraktallarning kasriyligi fraktallar noto'g'riligining o'lchamini matematik ifodalash deyiladi.

3. *Nomuntazamlik*. Agar fraktal funksiya ta'riflangan bo'lsa, matematika terminlarida nomuntazam funksiya hech bir nuqtada tekis emas va differensiallanmaydi.

***4. Masshtablashtirish*.**

1. Rivojlanish qobiliyati (uzluksiz shakllantirish tamoyili).
2. Kasrli metrik o'lchov (o'lchamlarning o'ziga xoslik tamoyili).
3. Chegaralarning noaniqligi tamoyili (chetlarning noaniqlgi).
4. Dinamik xaos tamoyili.

5. Fraktal o‘lchov – bu Benua Mandelbrot tomonidan kiritilgan butun bo‘lmagan songa teng o‘lchov. Bu tushuncha bilan keyingi bobda batafsil tanishasiz.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

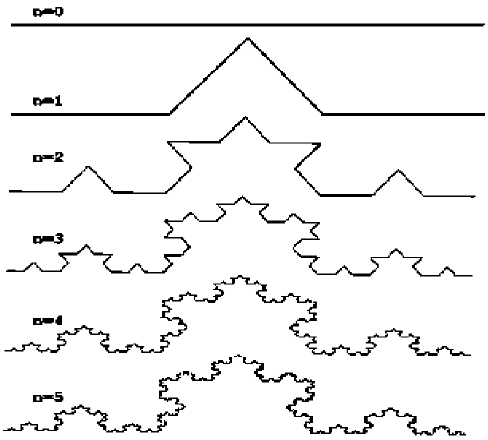
1. Fraktallar qachondan shakllana boshlagan?
2. Fraktallarning tarixi haqida nimalarni bilasiz?
3. Fraktallarga berilgan ta’riflar haqida tushuncha bering.
4. Fraktal o‘zi nima?
5. Fraktallarning matematik ta’rifi haqida ma’lumotlar keltiring.
6. Fraktallarning fizik ta’rifini bayon qiling.
7. Fraktallarning xususiyatlari nimalardan iborat?

1.2. Fraktallarning turlari

Fraktallarni o‘rganish uchun ularni aniq turlarga ajratish kerak bo‘ladi.

Tabiatda fraktallarning bir necha ko‘rinishini (turini) uchratish mumkin: geometrik fraktallar, algebraik fraktallar, stoxastik fraktallar, qo‘l-ijodiy fraktallar, tabiiy fraktallar va boshqalar. Shuningdek, ularni tuzilishiga ko‘ra bir o‘lchovli, ikki o‘lchovli va ko‘p o‘lchovli turlarga ajratish mumkin.

Geometrik fraktallar – bu turdagi Kox triad egri chizig‘i, Levi egri chizig‘i, Gilbert egri chizig‘i, Xartera-Xeytueya ajdari nomli siniq chiziqlar, Kontor to‘plami, Serpin uchburchagi, Serpin gilami, Pifagor daraxti va hokazo kabi fraktallar guruhi eng ko‘rgazmali hisoblanadi.



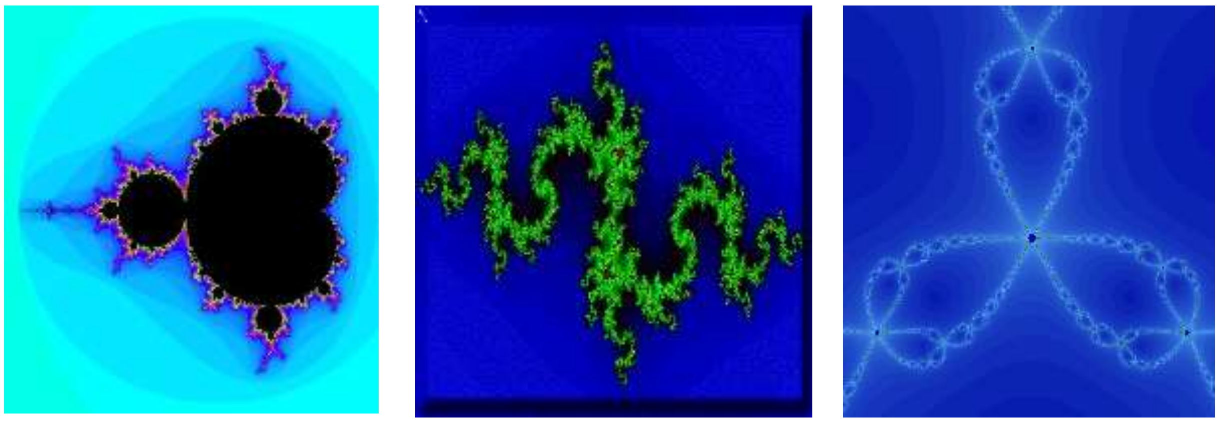
1.2-rasm. n=1,…,5 larda Kox triad egri chizig‘ini qurish

Fraktallar tarixi aynan shu fraktallardan boshlanadi. Geometrik fraktallarni loyihaviy fraktallar ham deb yuritiladi.

Bu turdagi fraktallar oddiy geometrik qurish yo‘li bilan, shuningdek, iteratsion funksiyalar tizimi, L-tizimlar usuli, R-funksiya (RFM) usuli, arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasiga asoslangan usulda va to‘plamlar nazariyasiga asosan quriladi.

Odatda geometrik turdagi fraktallarni qurish uchun ma’lum ***“kesma – aksioma – bo‘laklar yig‘indisi”*** kabi qoida o‘rinlidir. Masalan, Kox egri chiziqlari, Serpin uchburchaklari va boshqalar.

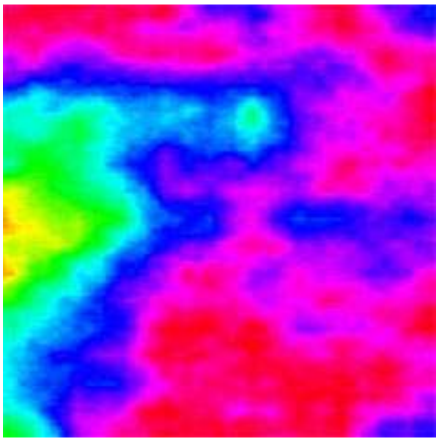
Algebraik fraktallar – fraktallarning yana bir katta guruhidir. Ular o‘z nomlariga oddiy algebraik formulalarga asosan qurilganligi uchun ega bo‘lgan. Ular chiziqsiz jarayonlar yordami bilan *n*-o‘lchovli fazolarda hosil qilinadi. Ma’lumki, chiziqsiz dinamik tizimlar bir necha barqaror holatlarni o‘zida mujassamlashtiradi. Bulardan bittasi, bir necha takrorlashlar sonidan keyin boshlang‘ich shartga bog‘liq bo‘lib qoladi. Shuning uchun har bir barqaror holat, bir necha boshlang‘ich holat sohalarini o‘zida namoyon etadi. Ulardan eng taniqlilari Mandelbrot, Julia, Nyuton to‘plamlari (1.3-rasm) va boshqalar.

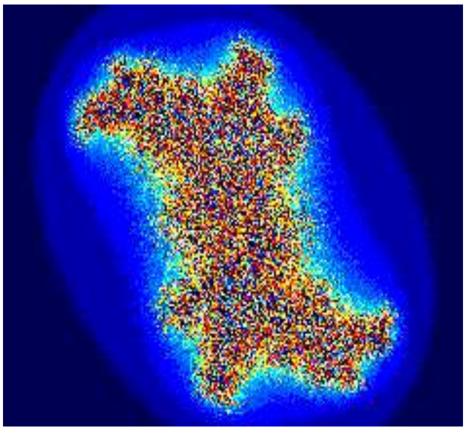


Mandelbrot fraktali **Julia Fraktali** **Nyuton fraktali**

1.3-rasm. Algebraik fraktallar

Stoxastik fraktallar – eng taniqli fraktallar guruhi hisoblanadi. Ular iteratsion jarayonda to‘satdan birorta parametrni o‘zgartirishi holatidan paydo bo‘ladi (1.4-rasm). “Stoxostik” termini grek so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, “faraz” (tasavvur) degan ma’noni anglatadi.





1.4-rasm. Stoxastik fraktallar

Fraktallarni yana bir qiziq sinflarga ajratish mavjud. Bunda fraktallar ikkita sinfga ajaratiladi: qo‘l-ijodiy (ideal) fraktallar va tabiiy (fizik) fraktallar.

Qo‘l-ijodiy fraktallar – olimlar tomonidan o‘ylab topilgan va ixtiyoriy masshtabda fraktallar xususiyatlarini o‘zida namoyon etadigan fraktallar.

Tabiiy fraktallar – mavjudlik sohasida chegaraga ega fraktallar.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Geometrik fraktallarning ta’riflari qanday va ularga misollar keltiring.
2. Algebraik fraktallarga misollar keltiring.
3. Stoxastik fraktallarning ta’rifi qanday ifodalanadi va “Stoxastik” so‘zining lug‘aviy ma’nosi nima?
4. Qo‘l-ijodiy fraktallar nimalarda ko‘zga tashlanadi?
5. Tabiiy fraktallar misollar keltiring.

II BOB. FRAKTALLARNING QO‘LLANILISH SOHALARI

Tabiatdagi ko‘plab obyektlar fraktal xususiyatlariga ega, masalan, qirg‘oqlar, bulutlar, daraxt shoxlari, qor parchalari, insonning qon aylanish tizimi, yurak-qon tomirlar tizimi, o‘pka nafas olish organlari tizimi va boshqalar.

Hozirgi kunda fraktallar rivojlanishning barcha sohalarida, shuningdek fanda tobora ko‘p qo‘llanilmoqda. Buning asosiy sababi shundaki, ular real dunyoni ba’zan an’anaviy fizika yoki matematikadan ham yaxshiroq tasvirlaydilar.

Fraktal tasvir zamonaviy san’atning yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, raqamli tasvirlar bilan ishlaydigan rassomlar orasida mashhurdir. Fraktal tasvirlar tomoshabinni g‘ayrioddiy hayratga soluvchi ta’sirga ega bo‘lib, yorqin porloq tasvirlarni yuzaga keltiradi.

2.1. Fraktallar nazariyasini ma’lumotlarni qayta ishlashda qo‘llash

Fraktallar nazariyasining rivojlanishi, matematikaning juda mavhum sohalarida erishilgan yutuqlarga teng ravishda fanning yangi yo‘nalishini takomillashtirishning yorqin namunasidir.

Fraktallar nazariyasi juda yosh va jadal rivojlanmoqda, ammo fraktallar to‘g‘risidagi barcha tasavvurlar yetarli darajada hal etilmagan hamda turli sohalarda munozarali masalalar ko‘p uchraydi. Hozirgi kunda tasvirlarni fraktal qayta ishlash vazifasi ham ilmiy, ham amaliy nuqtai nazardan katta qiziqish o‘yg‘otmoqda. Ishlab chiqarishning turli sohalarida fraktallar nazariyasidan foydalanish avval foydalanilmagan katta zaxiralarni kashf etish va ularni turli texnik qo‘llanmalar sohasida qo‘llash imkonini beradi.

Fraktallardan foydalanish. Birinchidan, tasvirlarni fraktal tarzda siqish, ikkinchidan, peyzajlar, daraxtlar, o‘simliklarning qurilish va fraktal to‘qimalarini yaratish. Shuningdek, fraktallar matematikada ham qo‘llaniladi. Tasvirlarni fraktal siqish yordamida fayl hajmini sezilarli darajada kamaytirish mumkin. Mexanika va fizikada fraktallar ko‘plab tabiat obyektlarining konturlarini takrorlashning noyob xususiyati tufayli qo‘llaniladi. Fraktallar daraxtlar, tog‘ sirtlari va yoriqlarini segmentlar yoki ko‘pburchaklar to‘plamlari ko‘rinishida berilgandan ko‘ra yuqori aniqlikda olish imkonini beradi.

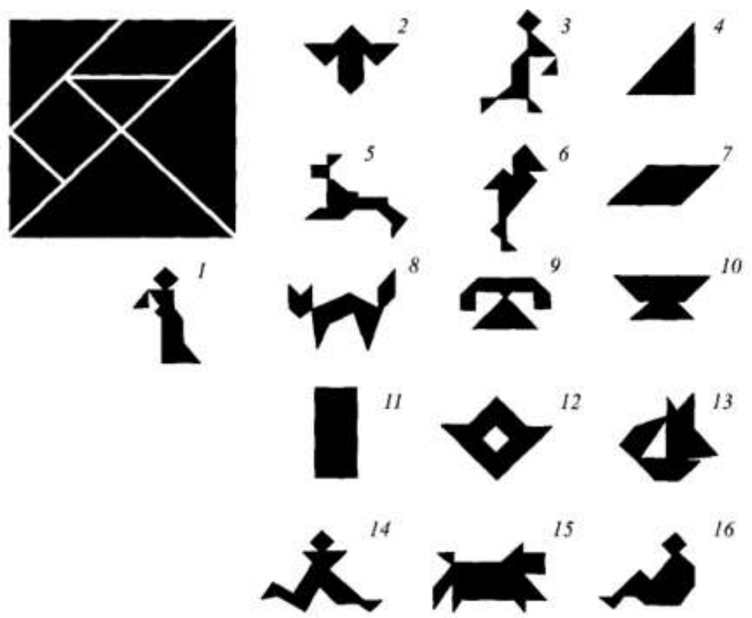
Fraktallar nazariyasi asosida tasvirlarni tanib olish. Tasvirlarni tanib olish olingan obyektni qaysi sinfga o‘tkazish mumkinligi haqidagi savolga aniqlik kiritib belgilanadi. Ta’kidlash mumkinki, tanib olish muammosi ko‘plab vazifalarni qamrab oladi. Bular sinflar alifbosi va belgilar lug‘atini qurish, shuningdek, tanib olish jarayonlarini matematik va kompyuterda modellashtirish hamda axborotlarni qayta ishlash usullari. Amaliyotda har qanday masalaning o‘ziga xos xususiyati ishlatiladigan axborot turiga qarab belgilanadi. Radarni tanib olish belgilarining ishchi lug‘ati har doim imzolarni ishlatadi. Ular radar obyektlarining koordinatalari bilan bevosita bog‘liq bo‘lmagani aks ettirilgan signallarning fazoviy, vaqtinchalik, spektral va polarizatsiya tuzilishini o‘z ichiga oladi. Ishchi lug‘at tarkibi bo‘yicha yakuniy qaror obyektlarni sinflarga bo‘lingan holda tasniflash vazifasidan tashqarida qabul qilinishi mumkin emas. Sinflar alifbosi va belgilarning so‘z birikmalarini topish vazifalari tanib olish va saralash uchun u yoki bu hal qiluvchi qoidalar-algoritmlardan foydalanish bilan bevosita bog‘liq. Hozirgi vaqtda tanlab olingan signallar yoki maydonlar topologiyasi va fraktal primitivlar tushunchalarini ishlatib tasvirni aniqlashga yangi integratsiyalashgan yondashuv taklif qilingan.

Obyektlarning fraktalli tasnifi va klasterlanishi. Tasniflash – bu obyektlarning o‘xshashligi, shu jumladan jarayonlar va harakatlar bo‘yicha tartiblash. Tasniflash masalasining umumiy qo‘yilishi stoxastikdir, chunki belgilarning vektorlari har doim shovqin va shovqin-suron tufayli ehtimollik taqsimotiga ega. Agar turli xil obyektlar va fon shovqinlari optik yoki radar tasvirda bo‘lsa, unda deskriptor vektorlari obyekt imzolari atrofida guruhlangan bo‘lib, ajratish maydoni kam to‘ldiriladi. Shunday qilib, ba’zi boshlang‘ich to‘plamlarning sinflarga bo‘linishida yaqinlik yoki o‘xshashlik mezoniga ko‘ra klasterlash muammosi paydo bo‘ladi. Deskriptor maydonidagi klaster o‘lchamlari klaster ichidagi belgilarning o‘xshashligi bo‘yicha berilgan o‘lchov bilan aniqlanadi.

Tasvirlarni testlashning fraktalli tanib olish algoritmi. Tasvirlarni testlashning fraktalli tanib olish algoritmlari paradigmani ishlatishga asoslanadi (maqsad topologiyasi uning fraktal o‘lchovidir). Fraktalli tanib olish algoritmlarining uslubiy asosi topologik konstantalarni rad etish va belgilarni sinflarda fraktal o‘lchovlar yoki fraktal imzolar shaklida tavsiflashdir. Determinallashgan yoki ehtimollik xususiyatlarining maydoni odatda dinamik testlash yordamida aniqlanadi. Tanib olishning aniq masalalarini o‘rganish uchun eng yaxshi testlash materiali obyektni tanib olish muammosiga to‘g‘ri keladigan tahlil qilingan ma’lumotnomalar to‘plamidir. Biroq, tanib olishning turli xil muammolaridagi har bir tasvir turining xususiyatlari tanib olish jarayonining umumiy qonuniyatlarini kuzatishni qiyinlashtiradi. Shu sababli, universal test materialidan foydalanish haqida savol paydo bo‘ladi. Har qanday tabiatdagi tasvirlarning ko‘rinishini aniqlash masalalarini o‘rganish uchun universal testlash materiallari sifatida “Tangram”dan iborat figuralar to‘plami ishlatilgan. Kompyuter tajribalarida 16ta Tangramdan: ko‘pburchaklar, sun’iy inshootlarning siluetlari, samolyotlar, kema, odam va hayvonlardan foydalanilgan (2.1-rasm).

Fraktal o‘lchovni baholashdagi yuqori sezuvchanligi tasvirlardagi uzluksiz konturlar mavjudligiga obyektlarning konturlarini va ularning shovqinlarini filtrlash imkoniyatini taklif qiladi. Fraktal algoritmdan foydalanib, juda kuchli shovqin (chang, tutun) sharoitida olingan avtomobil raqamlarini, tasvirlarni aniq ajratish mumkin. Tasvir konturini filtrlash algoritmi lokal fraktal o‘lchovni baholashga asoslangan.

Hozirgi vaqtda tasvirlarni raqamli qayta ishlashda rivojlanayotgan va istiqbolli yo‘nalishlardan biri fraktal tahlildan foydalanishdir. Fraktallar o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatlariga ega, turli xil masshtablarda ko‘rib chiqilganda obyekt xususiyatlarining aniq yoki ehtimoliy takrorlanishini anglatadi. O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyati tasvir xususiyatlarining statistik xatti-harakatlarida ma’lum qonuniyatlarga olib keladi, natijada tasvirlarni fraktal xususiyatlar bo‘yicha aniqlik bilan tasvirlash mumkin bo‘ladi. Ushbu yo‘nalishning rivojlanishiga ko‘pgina tasvirlarni ma’lum darajada fraktal yoki multifraktal deb hisoblash mumkinligi yordam beradi. Shuning uchun har qanday tasvir fraktal obyektlarning xususiyatlari va xarakteristikalariga ega, bular ko‘rish ko‘lami hamda aylanishning o‘zgarmasligidir. Hozirgi kun talabi tasvirlarni fraktalli qayta ishlashning yangi usullarini ishlab chiqishni va foydalanishni tavsiya etadi.



2.1-rasm. 16 ta Tangramdan iborat figuralar to‘plami

Tasvirlarni qayta ishlashning yangi usullarini yaratishga asos tasvirni nazariy nuqtai nazaridan tavsiflashga imkon beradigan tasvirlar modelidir. Shuning uchun tasvirning fraktal xususiyatlariga asoslangan modelini ishlab chiqish va tadqiq qilish kerak. Bunday holatda fraktal tasvir modeli haqida fikr yuritamiz. Ma’lumki fraktallarni qurish uchun iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT) usulidan foydalanishdir.

Tasvirlarni fraktalli qayta ishlashning yangi usullarini yaratish uchun tasvirning fraktal modelini ishlab chiqish kerak. Tasvirning fraktal tavsifiga ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan yondashuvlardan biri muntazam fraktal obyektlarni qurish uchun ishlatiladigan IFTdan foydalanish hisoblanadi.

Bunda tasvirni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$f = \sum_{i}^{M} \left(B_{n_i, m_i}^{r_i}\right) * \left[R_i\right]. \tag{1}$$

Har bir rang bloki R_i ga domen bloki D_i va hamda T_i almashtirish mos tushadi u quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$R_i = T_i\left(D_i\right) = A_i\left(D_i\right) + C_i. \tag{2}$$

Blokni chiqarish operatoridan foydalanib, domen bloki quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$D_i = B_{k_i, I_i}^{d_i}\left[f\right]. \tag{3}$$

(1), (2) va (3) larni hisobga olgan holda tasvir tuzilishini quyidagicha yozib olamiz:

$$f^{\,I} = \sum_{i}^{M} \left(B_{n_i, m_i}^{r_i}\right) * \left[A_i\left(B_{k_i, I_i}^{d_i}\left[f\right]\right) + C_i\right]. \tag{4}$$

(4) ifoda tasvirning ***fraktal modeli*** deb ataladi. Har bir tasvirning fraktal kodi *F* ushbu modeldagi parametrlar bilan tavsiflanadi.

Rang bloklarining ro‘yxati: $R = \{R_i\};\ R_i = \{r_i, n_i, m_i\}$.

Domen bloklarining ro‘yxari: $D = \{D_i\};\ D_i = \{d_i, k_i, I_i\}$.

Mos almashtirishlar: $D = \{D_i\};\ D_i = \{d_i, k_i, I_i\}$.

Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda tasvirning fraktal kodini ifodalaydigan operator topiladi:

$$\mathrm{F}(f) = \Phi. \tag{5}$$

Tasvirning fraktal modeli asl tasvirni parametrlaridan tiklashga imkon beradi. Shuning uchun tasvirni fraktal kod orqali tiklash operatori joriy qilinaladi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f^{\mathrm{I}} = \mathrm{F}^*(\Phi). \tag{6}$$

Ushbu model tasvirni fraktallar to‘plami sifatida taqdim etish imkonini beradi, ya’ni o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning lokal xususiyatlarini belgilaydi.

Mazkur ishlar yuzasidan adabiyotlarda iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT)dan foydalanilib, tasvirlar fraktal modellarining bayoni keltirilgan. Tasvirlarning fraktal modelidan foydalanib, tasvirlarning fraktal belgilarini olish mumkin bo‘ladi. Tanib olish uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan tasvirlarning belgilaridan biri bu tasvirdagi eng xarakterli joylarni aks ettiradigan o‘ziga-o‘zi o‘xshash lokal belgilarini tarqatishdir.

Tasvir fraktal kodining tavsifi. Raqamli tasvirning fraktal modeliga asoslanib, har bir tasvir o‘zining fraktal kodi bilan tavsiflanadi va uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathrm{R_i} = \left\{\mathrm{I}^{\mathrm{R_i}}, \mathrm{D}, \ldots, w_{\mathrm{i}}\right\}, \quad \mathrm{I}^{\mathrm{R_i}} = \left\{\mathrm{I_1}^{\mathrm{R_i}}, \mathrm{I_2}^{\mathrm{R_i}}, \ldots, \mathrm{I_M}^{\mathrm{R_i}}\right\}, \quad w_{\mathrm{i}} = \left\{\tilde{w}_{\mathrm{i}}, \mathrm{S_i}, \ldots, \mathrm{O_i}\right\} \tag{7}$$

bu yerda F, D-domeni bloklari va R-rang bloklari to‘plamlaridan iborat tasvirning fraktal kodi. Ranglar bloki indeksi – tasvirdagi daraja blokining o‘rnini belgilaydigan vektor. Har bir rang bloki o‘zida $\mathrm{I}^{\mathrm{R_i}}$, D domen blokini, joriy rang blokini eng aniq approksimatsiyalaydigan va ifodalaydigan w_{i} o‘zida saqlaydi.

w_i almashtirish $\tilde{w}_i$ tekislikdagi affin almashtirishlarni, S_i almashtirish kontrastini va O_i tiniqlikni o‘zida ifodalaydi:

$$R_i \approx w_i\left(D_i\right) = S_i\left(\tilde{w}_i(D_i)\right) + O_i.$$

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning lokal belgilarining taqsimlanishi. D vektori tasvirlarning fraktal kodidan qayta qurish uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan tasvirning domen bloklari ro‘yxati. Ushbu vektor fraktal kod hosil bo‘lishidan oldin hosil bo‘ladi va fraktal kodsiz tasvir uchun olinishi mumkin.

Ammo, aksariyat tasvirlar mutlaqo o‘ziga-o‘zi o‘xshash emas ekanligiga asoslanib, barcha domen bloklari asl tasvirni tiklash uchun foydalanilmasligi mumkinligi aniqlanadi.

Shunday qilib, “$D = \{D_i\}$” domen bloklari to‘plamidan foydalanilgan domen bloklarining bir qismini ajratib ko‘rsatish mumkin, $Du = \{Du_i\} \in D$ bu tasvirning o‘ziga o‘xshash qismlarini aks ettiradi.

So‘nggi paytlarda signallarni tahlil qilish uchun turli xil matematik usullar qo‘llanilmoqda. Signalni tahlil qilishning fraktal usullari va to‘lqin uzatish moslamalari ko‘proq qo‘llaniladi.

Fraktal usullar – maydonlar va signallarni qayta ishlashning tubdan yangi usullari. Ular signallar va tasvirlar makonining fraktal topologik o‘lchamlarini, fraktal integrallari va hosilalarining matematik apparati (kasrlar operatorlari) hamda o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik yoki masshtablash xususiyatlaridan foydalanadilar. Aslida radio fizikasi, radioelektronika va boshqaruv nazariyasida yangi fundamental yo‘nalish – xaos nazariyasi, fraktal o‘lchov nazariyasi hamda shkalali invariantlarni zamonaviy muammolar va turli xil maqsadlar uchun tizim hamda qurilmalarning axborot tarkibini oshirish usullarida qo‘llash haqida fikrlashamiz. Weyvlet tahliliga asoslangan tahlil usullari o‘rganilayotgan segment haqida aniq tasavvur bera oladigan, signalning chastota-vaqt vakili bilan ta’minlaydigan, ma’lum asosda signalni yaratadigan usullar toifasiga kiradi, fraktal usullar esa o‘ziga-o‘zi o‘xshash signallarni tuzishga asoslangan.

Fraktal signal (FS)larni qayta ishlash uchun mashtab koeffitsiyenti *a* va weyvlet amplitudasi U_0 orasidagi giperbolik bog‘liqlik asosida fraktal weyvlet (FW) hosil qilamiz. Bunday bog‘liqlik ko‘rib chiqilayotgan holatda FW shakllanishida ishtirok etgan to‘lqinlarning tarkibiy qismlari signallarining keng miqyosli o‘zgarmasligiga olib keladi.

FS va FW misollaridan foydalanib nolinchi va birinchi gomeomorfik tarkibiy qismlar asosida olingan signal va weyvlet (to‘lqin)ning weyvlet qayta ishlashni qaraymiz. Bu holatda fraktal signal va weyvlet uchun matematik ifodalar quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\mathrm{U}(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{U}_0}{k^{\mathrm{n}}}-\cos\left(2\pi\cdot\mathrm{f}\cdot k^{\mathrm{n}}\cdot\mathrm{t}\right). \tag{8}$$

$$\psi(a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\ -1\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^2-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^2\right]\frac{\mathrm{U}_0}{k^{\mathrm{n}}}. \tag{9}$$

bu yerda N=1; k=2; *a*=0.25; U_0=0.75; *b*=-2; -1.99, …, 2.
(9) ifodada, 1 qiymati FWni o‘zgartirishga imkon beradi.

Fraktal signalga weyvlet ishlov berish va weyvletning skalyar mahsulotini hisoblashga imkon beradi hamda keyinchalik mahsulotning integratsiyasi kuzatiladi.

$$\mathrm{w}(\mathrm{t},b)=\int_{\mathrm{t}}\mathrm{U}(\mathrm{t})\cdot\psi(\mathrm{t},b)\,\mathrm{dt}.$$

Fraktal signal va shovqinning kombinatsiyasida weyvlet ishlov berishini ko‘rib chiqamiz. Weyvlet ishlov berish o‘zida fraktal signallar va shovqinlar hamda bazis funksiyalar (weyvletlar) birlashmasining skalyar mahsuloti bo‘lgan uzluksiz weyvlet almashtirishga o‘tkazadi:

$$U_{wq} = \sum_{m=1}^{M} U_m \cdot \psi_{m,m_1}.$$

bu yerda U_{wq} – weyvlet qayta ishlash natijasida tiklangan FS, M-yig‘indining yuqori chegarasi va u M=500.

Fraktal weyvletdan foydalanib fraktal signalni weyvlet qayta ishlashni bajaramiz [9]:

$$\psi_{m,m_1} = \sum_{n=0}^{N} -1 \cdot U \cdot k^n \left[\left(\frac{t_m - b_{m_1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 - 1 \right] \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t_m - b_{m_1}}{a \cdot k^{-n}} \right)^2 \right].$$

ψ_{m,m_1} weyvlet $t = m \cdot \Delta t$ o‘zgaruvchida hosil qilingan, bu yerda $m = 750,\ \Delta t = 0,01$ bo‘lib, u qadamning o‘zgarishidir.

Siljish parametri $b_{m_1} = 0,85 + m_1 \cdot \Delta b \quad m_1 = 200, \quad \Delta b = 0,02$)-o‘zgarish qadami 0.02 siljishlar qadamini hisobga olgan holda weyvletni olishga imkon beradi.

Fraktal signallar va shovqinning qo‘shimcha aralashmasi uchun ifodani quyidagi ko‘rinishda yozamiz [10]:

$$U_{n,m} = u_n + u_m = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{U_0}{k^n} \cos\left(2\pi \cdot f \cdot k^n \cdot t_n \right) \right] + rnd(0,05).$$

bu yerda $rnd(0,05)$ yagona qonunga muvofiq taqsimlangan shovqin modeliga asosan tasodifiy raqamlarni ishlab chiqaradigan zamonaviy dasturning ichki funksiyasi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlash quyidagi ifoda bo‘yicha amalga oshiriladi [8, 9]:

$$W_{\mathrm{m}} = \sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{M}} \left\{ \left(\left[\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} \frac{U_0}{k^{\mathrm{n}}} \cos\left(2\pi \cdot f \cdot \mathrm{k}^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{t_n}\right) \right] + rnd(0{,}05) \right) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}} -1 \cdot U \cdot k^{\mathrm{n}} \left[\left(\frac{\mathrm{t_m} - \mathrm{t_{m_1}}}{a \cdot k^{-\mathrm{n}}} \right)^2 - 1 \right] \times \mathrm{e\,xp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{t_m} - \mathrm{t_{m_1}}}{a \cdot k^{-\mathrm{n}}} \right)^2 \right] \right\}. \tag{10}$$

bu yerda W_{m} – fraktal weyvlet filter chiqish signali.

Radiotexnika tizimlarining hozirgi rivojlanish bosqichi xaotik signallar sinfini o‘z ichiga olgan murakkab (keng polosali) signallarning intensiv rivojlanishi va keng qo‘llanilishi bilan tavsiflanadi. Bu sinfda klassik chastota modulyatsiyasi (ChM), faza modulyatsiyasi (FM) tebranishlari, shuningdek M − ketma-ketliklar kabi signallar bilan solishtirganda o‘ziga xos xususiyatlarga ega bo‘lgan fraktal signallar (FS) alohida o‘rin egallaydi. Odatda, FSni aniqlash va tanib olish muammolarida, tahlilning birinchi bosqichi bunday signalni tavsiflovchi xususiyatlarni aniqlashdan iborat bo‘ladi. FS hosil bo‘lishi va shakllanishining o‘ziga xos xususiyati bilan bog‘liq holda, FSning aniq parametrlarini, xususan, tasodifiylik darajasini, shuningdek fraktal o‘lchovni ham baholashga imkon beradigan bunday signallarni tahlil qilish va qayta ishlashning yangi usullarini izlash kerak bo‘ladi.

Fraktal signal va weyvlet almashtirish. Fraktal signalning tuzilishi o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik gipotezasiga asoslanadi, bu cheksiz bir xil (gomeomorfik) obyektlarni bir-biriga joylashtirilishiga imkon beradi. Bundan tashqari, obyekt faqat hajmda kamayadi, lekin asl obyektga nisbatan gomeomorf bo‘lib qoladi. Bunday obyektlarni yo‘naltiruvchi fraktal signalni shakllantirishda (asosiy) tebranishgacha gomeomorfik individual deterministik signallar (masalan, gormonik signallar, shuningdek burchakli modulyatsiyaga ega signallar) tushunilishi kerak. Fraktal o‘lchov Gelder ko‘rsatkichlari bilan bevosita bog‘liq bo‘lib, ular o‘z navbatida to‘lqinlar yordamida aniqlanadi. Bu munosabatlar weyvlet almashtirish (WA) yordamida fraktal signallarning asosiy parametrlarini tahlil qilish mumkiligini taklif qiladi. Signal tahlili deganda nafaqat uning sof matematik o‘zgarishini, balki ushbu o‘zgarishga asoslangan va mos keladigan signal (jarayon) yoki obyektning o‘ziga xos xususiyati to‘g‘risida xulosalar chiqarish ham tushuniladi.

Bir o‘lchovli signalni to‘lqin uzatishning mohiyati uni keng miqyosli o‘zgartirish va uzatish orqali solitonga o‘xshash asosiy funksiya (to‘lqin)da kengaytirishdan iborat.

WA asosining elementi kichik intervaldan tashqarida tezda “0” ga intiluvchi yaxshi mahalliylashtirilgan funksiya bo‘lib, bu lokalizatsiya qilingan signallarni tahlil qilish imkonini beradi. Boshqacha aytganda, WA avtomatik ravishda harakatlanadigan vaqt chastotasi oynasiga ega, kichik masshtablarda tor va katta masshtablarda keng. L^2 *(R)* asosiy funksional fazoning uzluksiz masshtabli almashtirishlar va weyvlet uzatish $\psi(t)$ yordamida asosiy parametrlarning ixtiyoriy qiymatlari – shkalaning faktori va *b* siljish parametrlari yordamida ko‘rib chiqiladi.

$$\psi_{a,b}(\mathrm{t}) = |a|^{-0,5}\, \psi\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right), \quad a,b \in \mathrm{R}, \quad \psi \in L^2(R). \qquad (11)$$

Ko‘rib chiqilgan bazisga asosan integral WAni yozamiz:

$$\mathrm{W}(a,b) = |a|^{-0,5} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\, \psi^*\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right) \mathrm{dt} = \int \mathrm{f}(\mathrm{t})\, \psi_{ab}{}^*(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}. \qquad (12)$$

(12)dan kelib chiqadiki, $L^2(R)$ dan har bir funksiyani o‘zgarishlarning superpozitsiyasi va basiz weyvletning siljishi bilan olish mumkin, ya’ni to‘lqinlar soniga (chastota, masshtab) va siljish parametriga (vaqtga) bog‘liq bo‘lgan koeffitsiyentli “weyvlet to‘lqinlari”ning tarkibiy qismidir. Shunday qilib, ushbu basizning har bir funksiyasi signalning ma’lum bir chastotasini ham, vaqt o‘tishi bilan uning lokalizatsiyasini ham tavsiflaydi.

Signallarni tahlil qilish uchun weyvletlarni qo‘llaganda doimiy WA (2) o‘rinli bo‘ladi. Uning shkalasi faktorining o‘zgarishi *a* va *b* siljish parametrining uzluksiz o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan hamda uning qisqarishi bu yerda ijobiy sifatga aylanadi, chunki signal tarkibidagi ma’lumotlarni to‘liq va aniq taqdim etish hamda tahlil qilish imkonini beradi.

Fraktal to‘lqin. FSning xususiyati uning parametrlarining giperbolik bog‘liqligidir, shuningdek, k o‘xshashlik koeffitsiyenti bilan belgilanadigan o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikdir. FSga o‘xshashligi bilan fraktal weyvlet (FW) tushunchasi kiritiladi. FW orqali o‘lchov kiritiladi, bunda a masshtabida va siljish parametrlari b, k koeffitsiyenti bilan aniqlanadigan giperbolik bog‘liqlik bilan bog‘lanadi.

“Meksika shlyapasi” weyvleti asosida quyidagi ifodani ishlatib:

$$\psi(\mathrm{t},a,b)=\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right)^2-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right)^2\right]. \tag{13}$$

FW qurilishini ko‘rib chiqamiz.

(13) ifodada bayon etilgan weyvlet harakatini b=0 va a masshtabni k^n koeffitsiyentga bo‘lamiz, bu yerda n quyidagi qiymatlar 0, 1, 2, …, N-1 ni qabul qilganda tahlil qilamiz:

$$\psi(\mathrm{t},a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}\cdot k^n}{a}\right)^2-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}\cdot k^n}{a}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Bunday holda masshtab koeffitsiyenti a chiziqli qonunga muvofiq kamayadi. n kattalashgan sari, a/k^{n} masshtab qiymati kamayadi, bu esa (n = 1) komponentlar weyvletiga nisbatan (n = 0) komponent to‘lqinining asosiy bo‘lagining torayishiga olib keladi.

Belgilangan o‘lchov qiymatida (a = 1 = const) va b siljish qiymatga qarab o‘zgarganda weyvletning holatini ko‘rib chiqaymiz:

$$\psi_b(\mathrm{t},a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{n}}{a}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}\right]. \quad (15)$$

Bunday holatda fiksirlangan *a* da, weyvlet o‘zgarishi k^n o‘zgaruvchanligi qonuniga muvofiq ortib boradi. (14) va (15) ifodalardan ko‘rinib turibdiki k^n koeffitsiyenti orqali *a* masshtab va *b* parametrlar o‘rtasida fraktal tuzilishlarga xos bo‘lgan giperbolik bog‘liqlik mavjud. (14) va (15) ga asoslanib, fraktal weyvlet uchun matematik ifoda yozamiz:

$$\psi_{ab}(\mathrm{t},a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^{2}\right]. \quad (16)$$

Shuningdek, FS uchun *n*=0 da weyvlet tayanch deb ataladi, qolganlari gomeomorfikdir.

(16) ga asosan, FWni tashkil etuvchi komponentlar chiziqli qonunga muvofiq bir-biriga nisbatan masofani bir vaqtning o‘zida kattalashtirish (cho‘zish) bilan siljiydi. Shuni ta’kidlash kerakki, weyvletlarning tarkibi asosiy weyvlet darajasida normallashtirilgan. Weyvlet darajasini normallashtirish amplitudalarga muvofiq amalga oshiriladigan FS tarkibiy qismlari ifodasi quyidagicha:

$$\psi_b(\mathrm{t},a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}\right]\frac{\mathrm{U}_0}{k^{\mathrm{n}}}.$$

bo‘ladi.

Tasvirlar ma’lumot manbai sifatida ko‘rib chiqilganda keng ko‘lamli muammolar mavjud bo‘lib, ular asosida qaror qabul qilish mumkin. Bunday muammolarni hal qilish uchun asos sun’iy intellekt tizimlarining yaratilishi bilan bog‘liq. Ayniqsa faol rivojlanayotgan naqshlarni aniqlash nazariyasida.

Fraktal signalni ajratish uchun fraktal weyvlet ishlab chiqilgan uning parametrlarining giperbolik bog‘liqligi (aloqasi)ga asoslangan bo‘lib, fraktal tuzilmalarning hal qiluvchi xususiyati hisoblanadi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlash signal buzilishini aniqlash uchun signallarning strukturasini, shuningdek, ularning mahalliy hududlarini vizual tahlil qilish imkonini beradi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlashning boshlanishi bilan shovqin yumshatiladi va samarali signal chiqariladi.

Fraktal signallarni qayta ishlashning weyvlet tarkibiy sxemalarini sintez qilish imkoniyatini ko‘rib chiqish tavsiya etiladi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fraktal nazariyaning rivojlanishi namunasi nimalarda ko‘rinadi?
2. Fraktallardan foydalanish segmentlari haqida ma’lumot bering.
3. Fraktallar nazariyasi asosida tasvirlarni tanib olish qanday amalga oshadi?
4. Obyektlarning fraktalli tasnifi va klasterlanishiga nima sabab bo‘ladi?
5. Tasvirlarni testlashning fraktalli tanib olish algoritmi nimaga asoslanadi?
6. Tasvirlarni fraktalli qayta ishlashning yangi usullarini ishlab chiqishda nimalarga ahamiyat berish kerak?
7. Fraktal modelni tushuntiring.
8. Tasvir fraktal kodining tavsifi haqida ma’lumot bering.
9. O‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning lokal belgilarining taqsimlanishini tushuntiring.
10. Fraktal usullarni tavsiflang.
11. Fraktal signallarni qayta ishlash haqida ma’lumot bering.
12. Fraktal to‘lqin nima?

2.2. Fraktallar nazariyasi va fraktal grafikani texnikada qo‘llash

Grafikada fraktallar. Kompyuter grafikasi fanida fraktallardan eng samarali foydalanish – bu fraktal ma’lumotlarni siqishdir. Ushbu turdagi siqishni haqiqiy dunyoni fraktal geometriya tomonidan yaxshi tasvirlanganligiga asoslanadi. Shu bilan birga, rasmlar an’anaviy usullar bilan (masalan, jpeg yoki gif) ishlov berilganidan ko‘ra yaxshiroq siqiladi. Fraktal siqishni yana bir afzalligi shundaki, tasvir kattalashganda pikselatsiya effekti kuzatilmaydi (nuqta o‘lchamini tasvirni buzadigan o‘lchamlarga ko‘paytirish). Fraktal siqish bilan kattalashgandan so‘ng, rasm ko‘pincha avvalgidan ko‘ra aniq va yaxshiroq ko‘rinadi. Fraktallar kompyuter grafikasida keng qo‘llaniladi – daraxtlar, butalar, dengizlar yuzasi, tog‘ landshaftlari va boshqa tabiiy obyektlarning rasmlarini yaratishda. Fraktal grafika tufayli rasmlari tabiiy obyektlarga o‘xshash murakkab Evklid bo‘lmagan obyektlarni amalga oshirishning samarali usuli ixtiro qilindi: bular har qanday rasm nusxasini iloji boricha asl nusxaga yaqinroq qaytarish imkonini beradigan fraktal koeffitsiyentlarni sintez qilish algoritmidir. Qizig‘i shundaki, fraktal “rasm”dan tashqari, fraktal musiqa va fraktal animatsiya ham mavjud. Tasviriy san’atda tasodifiy fraktalning tasvirini olish bilan bog‘liq bo‘lgan yo‘nalish mavjud – “fraktal monotip” yoki “stoxatipiya”dir.

Fraktal grafikaning matematik asosini fraktal geometriya tashkil etadi, bu yerda asl “ota-ona obyektlari” dan meros olish tamoyili “tasvir merosxo‘rlari” ni qurish usullariga asoslangan.

Fraktal geometriya va fraktal grafika tushunchalari o‘zlari bundan taxminan 40-50 yil ilgari paydo bo‘lgan, ammo allaqachon kompyuter dizaynerlari va matematiklarning kundalik hayotida mustahkam o‘rnashib oldi.

Fraktal grafikaning asosiy tushunchalari:

– Fraktal uchburchak – fraktal shakl – fraktal obyekt (kamayish tartibida iyerarxiya);

– Fraktal chiziq;

– Fraktal kompozitsiya

– “Ota-ona obyekti” va “merosxo‘r obyekt”.

Vektorli va uch o‘lchovli grafikada bo‘lgani kabi, fraktal tasvirlarni yaratish uchun ham matematik jihatdan hisoblash mumkin. Grafikaning dastlabki ikki turidan asosiy farq shundaki, fraktal tasvir tenglama yoki tenglamalar tizimiga binoan tuzilgan kompyuterning xotirasida formuladan boshqa hech narsa saqlash shart emas va bunday ixcham matematik apparatlar ushbu fikrni kompyuter grafikasida qo‘llashga imkon berdi. Tenglamaning koeffitsiyentlarini o‘zgartirib, mutlaqo boshqacha fraktal tasvirni olish mumkin. Bir nechta matematik koeffitsiyentlardan foydalanib, gorizontal va vertikal, simmetriya va asimmetriya, diagonal yo‘nalish va boshqa ko‘pgina kompozision texnikalarni amalga oshirishga imkon beradigan juda murakkab shakldagi sirt va chiziqlarni o‘rnatish mumkin.

Kompyuter grafikasida. Fraktallar asosan zamonaviy kompyuter grafikasida qo‘llaniladi. Ular yordami bilan yassi to‘plamlarni va juda murakkab shakllar tekisligini yaratish mumkin. Daraxt va paporotniklar barglarini, sun’iy tog‘-adirlarni, bulut hamda tabiatda mavjud bo‘lmagan planetalarni chizuvchi qulay zamonaviy kompyuter dasturlari fraktallar nazariyasiga katta boylik olib kirdi.

Kompyuter tizimlari sohasida. Kompyuter ilmida ma’lumotlarni fraktal siqish ularni eng foydali qo‘llash deb yuritiladi. Bu ko‘rinishdagi siqishga asoslanib, quyidagi faktni keltirish mumkin, ya’ni haqiqiy borliq fraktal geometriyani yaxshi yoritadi. Bunda rasmlar doimiy usullarga nisbatan ancha qulay siqiladi. Fraktal siqishning yana qulayligi shundan iboratki, rasmlarni kattalashtirgani bilan piksellar ta’sirining samarasi kuzatilmaydi. Shuni aytish mumkinki, fraktal siqish yordamida rasmlarni kattalashtirgandan keyin oldingisiga nisbatan aniq ko‘rinadi.

Telekommunikatsiya sohasida. Masofaga ma’lumotlarni uzatishda ularning o‘lchami va og‘irligini kuchli kamaytiradigan fraktal shakllarga ega bo‘lgan antennalar ishlatiladi. Antennalar tuzilishini loyihalashda fraktal geometriyani qo‘llashni birinchilardan bo‘lib amerikalik muhandis Natan Konen ishlatgan. U vaqtlarda binolar tashqarisida antennalar oʻrnatish taʼqiqlangan. Natan alyuminiy zar qogʻozdan Kox egri chizigʻi shaklidagi figuralarni qirqib, ularni qogʻoz varagʻiga yopishtiradi va uni priyomnikga ulaydi. Shu bilan Konen Natan shaxsiy kompaniyasiga asos solgan hamda ularni seriyali chiqarishni tashkil qilgan.

Markazlashtirilgan tarmoqlarda. Netsukuku tarmogʻida IP-adresni qoʻllash tarmoq tugunlaridagi maʼlumotlarni kompakt saqlash uchun maʼlumotlarni fraktalli siqish prinsiplaridan foydalaniladi. Netsukuku tarmogʻining har qaysi tuguni qoʻshni tugunlar haqidagi 4 kb maʼlumotni saqlaydi. Bunda ixtiyoriy yangi tugun markazlashgan IP-adressiz umumiy tarmoqqa ulanadi, masalan, bu Internet tarmogʻi uchun xarakterli. Shunday qilib, maʼlumotlarni fraktalli siqish prinsipi toʻliq markazlashtirishga kafolat, barcha tarmoqlarni maksimal barqaror ishlashiga imkon beradi.

Markazlashtirilmagan tarmoqlarda fraktallar. “Netsukuku” tarmoq tugunlari toʻgʻrisidagi maʼlumotlarni ixcham saqlash uchun maʼlumotni fraktal siqish prinsipi IP-manzilni belgilash tizimidan foydalanadi. Uning har bir tugunida qoʻshni tugunlarning holati toʻgʻrisida 4 kilobayt maʼlumot saqlanadi. Har qanday yangi tugun IP manzillarini tarqatishni markaziy tartibga solishni talab qilmasdan umumiy Internetga ulanadi. Shunday qilib, biz maʼlumotni fraktal ravishda siqish prinsipi butun tarmoqning markazlashtirilmagan ishlashini taʼminlaydi va shuning uchun undagi ish iloji boricha barqaror ravishda davom etadi, degan xulosaga kelishimiz mumkin.

Kinoda. Fraktallar vizualizatsiya va maxsus effektlar elementi sifatida qoʻllaniladi. Fraktallar oʻzining goʻzalligi hamda cheksizligi bilan oʻziga jalb qiladi hamda maftun etadi. Shuning uchun ham kompyuter grafikasida maxsus effektlar, videoinstallyatsiya, vizualizatsiyalarning turli avlodlarini yaratish uchun qoʻllaniladi.

Aslida, tasvirlari tabiiy narsalarga juda oʻxshash boʻlgan Evklidsiz murakkab obyektlarni osongina tasvirlash usuli topildi. Fraktal kompyuter grafikasi multfilmlar va ilmiy fantastika filmlarini yaratishda keng qoʻllaniladi.

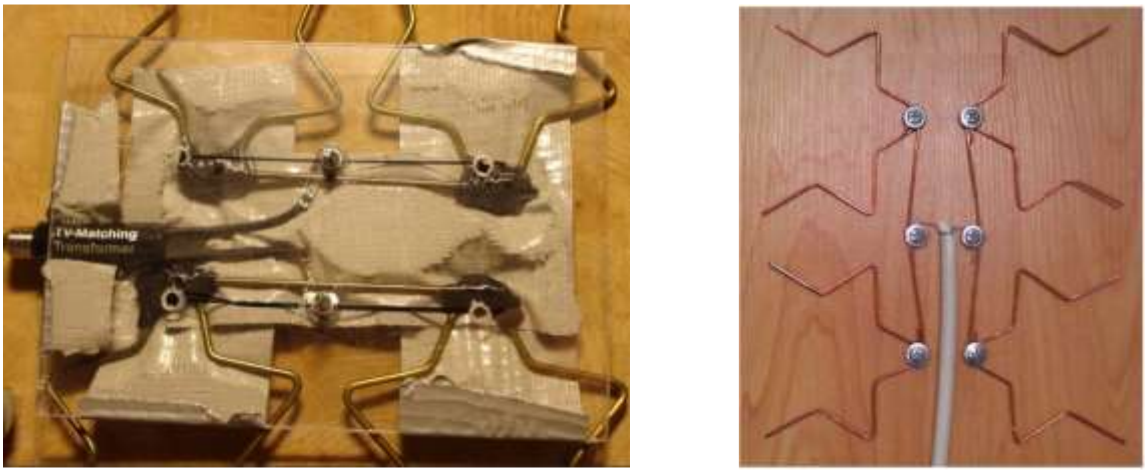
Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Grafikada fraktallar nimalarda aks etadi?
2. Fraktal kompyuter grafikasining asosiy tushunchalari nimalardan iborat?
3. Kompyuter grafikasida fraktallarni qo‘llashni ta’riflab bering.
4. Kompyuter tizimlari sohasida fraktallarni qo‘llashni ta’rifini keltiring.
5. Telekommunikatsiya sohasida fraktallarni qo‘llashni ta’riflang.
6. Markazlashtirilgan tarmoqlarda fraktallarni qo‘llashni tushuntirib bering.
7. Kinoda fraktallarni qo‘llash nimalarda namoyon bo‘ladi?

2.3. Fraktallar nazariyasini radiotexnikada va signallarni qayta ishlashda qo‘llash

Boston hokimiyatining uylarga tashqi antennalarni o‘rnatish ta’qiqini bekor qilish uchun u 1904-yilda shved matematigi Xelge fon Kox tomonidan tasvirlangan fraktal singan chiziq asosida yasalgan dekorativ rasm sifatida o‘zining radiostansiyasining antennasini yasagan (2.2-rasm). Natan alyuminiy folga ichidan Kox egri shaklini kesib, qog‘ozga yopishtirdi va keyin uni qabul qilgichga biriktirdi. Natan Konen o‘z kompaniyasini tashkil etdi va ularning seriyali ishlab chiqarishni boshladi.

Natan Konen yangi antenna dizaynining xususiyatlarini o‘rganish natijalarini e’lon qildi va mutaxassislarning e’tiborini tortdi. Ko‘pgina tadqiqotchilarning sa’y-harakatlari tufayli bugungi kunda fraktal antennalar nazariyasi elektromagnit nurlanishni sintez qilish va tahlil qilish uchun mustaqil, yetarlicha rivojlangan apparatga aylandi.



2.2-rasm. Konen Natan antennasi

Fraktal antennalar – bu nisbatan yangi bo‘lgan elektr energiyasi kichik antennalar (EKA) bo‘lib, ularning geometriyasi ma’lum yechimlardan tubdan farq qiladi. Aslida, antennalarning an’anaviy evolyutsiyasi butun o‘lchamdagi obyektlar (chiziq, aylana, ellips, paraboloid va boshqalar) bilan ishlaydigan Evklid geometriyasiga asoslangan edi.

Fraktal geometrik shakllarning asosiy farqi ularning fraktal o‘lchamidir, bu tashqi aniqlik bilan boshlang‘ich deterministik yoki tasodifiy naqshlarning ko‘payishi yoki kamayishida, rekursiv takrorlanishda o‘zini namoyon qiladi. Signalni filtrlash vositalarini shakllantirishda, tabiiy landshaftlarning uch o‘lchovli kompyuter modellarini sintez qilishda, tasvirlarni siqishda, fraktal texnologiyalar keng tarqalgan.

Tabiiyki, fraktal “rejim” antennalar nazariyasini chetlab o‘tmadi. Bundan tashqari, antenna texnologiyasida zamonaviy fraktal texnologiyalarning prototipi o‘tgan asrning 60-yillari o‘rtalarida taqdim etilgan log – davriy va spiral dizaynlar edi. To‘g‘ri, qat’iy matematik ma’noda, rivojlanish davrida bunday inshootlar fraktal geometriya bilan bog‘liq bo‘lmagan, aslida ular faqat birinchi turdagi fraktallar bo‘lgan. Endi tadqiqotchilar, asosan sinov va xato tufayli, antenna yechimlarida geometriyada ma’lum bo‘lgan fraktallarni ishlatishga harakat qilmoqdalar.

Fraktal antennalar odatdagidan deyarli bir xil foyda olishga imkon beradi, ammo kichik o‘lchamlarga ega, bu mobil ilovalar uchun muhimdir.

Fraktal tuzilmalarning elektrodinamikasi haqidagi birinchi nashrlar o‘tgan asrning 80-yillariga to‘g‘ri keladi. Fraktal antennalar tarixi bo‘yicha nashrlarda, odatda, Pensilvaniya universiteti olimlari Y.Kim va D.L.Jaggardning ishlari esga olinadi. Ko‘p chastotali antennalarni shakllantirish uchun fraktal shakllardan foydalanish imkoniyatlarini nazariy tadqiqotlardagi ustunlik Kataloniya Texnologik universitetining olimi C.Puentega bog‘liq. Eng ko‘p o‘rganilgan elektromagnit va yo‘nalish xususiyatlariga ega fraktal antennaning birinchi dizayni Kox prefraktal egri chizig‘iga asoslangan antenna edi.

Ko‘chma telekommunikatsiya texnologiyalarini, radarlarni va mikroto‘lqinlarni almashtirish sensorlarini rivojlantirish kichik o‘lchamlarga ega va optimal konfiguratsiyaga ega bo‘lgan sohalardan tashkil topgan yangi ko‘p elementli antenna tizimlarini ishlab chiqishni talab qiladi.

Antenna – atrofdagi kosmos orqali radio to‘lqinlari yordamida ma’lumot uzatish yoki olish uchun mo‘ljallangan har qanday radio qurilmalarning ajralmas qismi. Yuqorida aytib o‘tilganidek, fraktal antennalar boshqa barcha turdagi antennalardan farq qiladigan geometriyaga ega. Fraktal geometrik shakllarning asosiy xususiyati ularning fraktal o‘lchamidir. Fraktal tuzilmalarning xilma-xilligi orasida antennalarni yaratish uchun eng qulaylaridan biri bu Minkovskiy fraktalidir. Fraktalning “tashabbuskori” – bu segment, “generator” – bu sakkizta aloqaning singan chizig‘i (ikkita teng ulanish bir-birini davom ettiradi).

Antenna yechimlari haqiqiy fraktallarni ishlatmaydi, lekin ularning faqat bir nechta birinchi iterativ shakllari, ular geometriyada bo‘shliqni to‘ldiruvchi egri chiziq deyiladi (Space Filling Curves, SFC) yoki tekislik

(Plane-Filling Curves, PFC). Prefraktal atamasi kamroq ishlatiladi. Antenna dizayniga taalluqli barcha tushunchalar sinonim sifatida ishlatilishi mumkin. U qabul qilingan matematik ta’riflarga to‘g‘ri kelmasa-da, fraktal antennalar nazariyasining tarixiy yo‘lga qo‘yilgan terminologiyasi hisoblanadi.

Simli antennalar holatida, SFCning o‘z-o‘zidan kesishishiga faqat boshlash (yoki tugatish) nuqtasida ruxsat beriladi. Boshqacha qilib aytganda, fraktal chiziq yopiq kontur shaklida bo‘lishi mumkin, ammo uning hech bir qismi yopiq bo‘lak bo‘lolmaydi. SFC-obyektlarda o‘z-o‘zidan aloqa nuqtalarining yo‘qligi, biz ularni “o‘zini chetga oluvchi” egri chiziqlar sifatida atashimizga yoki gapirishimizga imkon beradi. Bu yerda, aytmoqchi, bu singan chiziqlar uchun yana bir ism paydo bo‘ldi – FASS-egri chiziqlar (bo‘shliqni to‘ldirishda o‘zini-o‘zi chetlab o‘tishning soddaligi o‘xshashlik – bo‘shliqni to‘ldiradigan o‘xshash segmentlarning o‘z-o‘zidan qochishi).

Fraktal antennalarning barcha turlarida yana bir cheklash mavjud: ularda ishlatiladigan SFC chiziqlari bo‘sh joylardagi antennaning ishlaydigan to‘lqin uzunligining o‘ndan bir qismidan qisqaroq bo‘lishi kerak. Bundan tashqari, antenna topologiyalarida ulangan SFC segmentlarining umumiy soni 10 ta dan oshishi maqsadga muvofiqdir.

Umuman shuni ta’kidlash kerakki, murakkab topologiyaga ega bo‘lgan konduktorda to‘lqin jarayonlarining analitik tavsifi yo‘qligi sababli fraktal qabul qiluvchi antenna va undagi elektromagnit to‘lqinlarning o‘zaro ta’siri mexanizmini nazariy jihatdan tasavvur qilish qiyin. Bunday vaziyatda fraktal antennalarning asosiy parametrlarini matematik modellashtirish orqali aniqlash tavsiya etiladi.

Shunday qilib, Kox ko‘pburchaklar liniyasi asosida antenna tizimining ko‘plab turli parametrlarini tanlash qobiliyati dizayni ichki qarshilik qiymati va rezonansli chastotalarni taqsimlash uchun turli talablarni qondirish imkonini beradi. Ammo, rekursiv o‘lcham va antenna xususiyatlarining o‘zaro bog‘liqligi faqat ma’lum bir geometriya uchun olinishi mumkinligi sababli boshqa rekursiv konfiguratsiyalar uchun ko‘rib chiqilgan xususiyatlarning to‘g‘riligi qo‘shimcha tadqiqotlarni talab qiladi.

Raqamli fraktallar. Fraktal geometriya raqamli musiqa sohasida yangi texnologiyalarni rivojlantirishga bebaho hissa qo‘shdi, shuningdek raqamli tasvirlarni siqib chiqarishga imkon berdi. Mavjud fraktal tasvirni siqish algoritmlari raqamli tasvirning o‘zi o‘rniga siqish tasvirini saqlash prinsipiga asoslangan. Siqilgan tasvir uchun asosiy rasm qat’iy nuqta bo‘lib qoladi. Microsoft kompaniyasi ushbu algoritmning variantlaridan birining ensiklopediyasini nashr qilishda ishlatgan, ammo biron-bir sababga ko‘ra yoki boshqa sababga asosan bu g‘oya keng qabul qilinmagan.

Fraktal shaklga ega antennalar ishlatiladi, bu ularning o‘lchamlari va vaznini sezilarli darajada kamaytiradi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fraktal antennalar qanday tushunchaga egasiz?
2. Fraktal geometrik shakllarning asosiy farqi nimada?
3. Raqamli fraktallar ahamiyati nimadan iborat?
4. Natan Konenning fraktallar nazariyasiga qo‘shgan hissasi haqida aytib bering.
5. Xelge fon Koxning fraktallar nazariyasiga qo‘shgan hissasi nimadan iborat?

2.4. Fraktallar nazariyasi va fraktal grafikani shaharsozlik va landshaft dizaynida qo‘llash

Tabiiy va geometrik obyektlarni rivojlantirishning fraktal tamoyili arxitekturaga chuqur kirib bormoqda. Me’morlar o‘z ishlarida arxitektura shakllarining fraktal nazariyasidan keng foydalanadilar.

Arxitektura nazariyasi va amaliyotining hozirgi rivojlanish bosqichida “fraktal” tushunchasi faqat cheksiz o‘ziga-o‘zi o‘xshash shakllardan olingan obyektlarning geometrik tuzilishini belgilash uchun ishlatiladi. Boshqacha qilib aytganda, arxitekturada fraktal geometriyadan foydalanish faqat yangi obyektni yaratish uchun ilhom manbai darajasida sodir bo‘ladi. Shuni ta’kidlash kerakki, bu arxitekturada “fraktallilik” ning yagona mumkin bo‘lgan varianti emas. Fraktallarning mohiyatini chuqurroq tushunish uchun uning nima ekanligini, qanday xususiyatlarga ega ekanligini, qanday turlari borligini va ushbu poydevorga yangi nazariyalarni asoslash maqsadga muvofiqligini tushunish kerak.

“Fraktal” va “fraktal geometriya” tushunchalari 1970-yillarda tartibsiz o‘zini-o‘zi shakllantirish tuzilmalarini o‘rgangan Benua Mandelbrot tufayli paydo bo‘ldi.

Obyektning fraktallilik tamoyillari:

– O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik – butunning har qanday qismi butunga o‘xshash;

– dinamiklik, o‘zini-o‘zi rivojlantirish qobiliyati (tabiatda statik holatlar va qat’iy o‘lchamlar mavjud emas);

– nosimmetrikliklar (oddiy shaklning masshtabi kattalashib borgan sari to‘g‘ri chiziq olinadi, kattalashib boradigan fraktal tuzilmalar soddalashmaydi: barcha darajalarda shakllar teng murakkab konturlarga ega bo‘ladi);

– rekursivlik;

– izomorfizm bilan parchalanish.

Fraktallarning ta’riflaridan biri – bu butunning qisqartirilgan nusxasi bo‘lgan qismlardan tashkil topgan geometrik shakl ekanligidir. Mazkur ta’rif fraktallarga geometriya obyekti sifatida qarashga imkon beradi. Uning asosida birinchi guruh – geometrik fraktallar olinadi. Ushbu guruhning asosiy vakillari quyidagilar: Peano egri chizig‘i, Kox qor parchasi, Serpin uchburchagi, Kantor changi, Xarter-Xeytueyaning “Ajdaho” fraktali va boshqalar. Ularning barchasi nuqtalar va chiziqlar yordamida geometrik qurishlarning ma’lum bir ketma-ketligini takrorlash orqali hosil qilinadi. Oddiy rekursiv protseduradan foydalanib, Kantor chiziqni uzilgan nuqtalar to‘plamiga “aylantiriladi”: chiziq olinadi va uning markaziy uchinchisini ma’lum masofaga o‘tkaziladi, so‘ngra qolgan qism bilan ushbu protsedura takrorlanadi va h.k.

Arxitekturada geometrik fraktallar keng qo‘llaniladi. Geometrik fraktallar guruhi fraktallarning eng ko‘rgazmalisidir. Agar tasvir ma’lumotlari tahlil qilinsa, geometrik fraktallarning quyidagi xususiyatlarini ajratish mumkin:

– cheksiz ko‘p geometrik fraktallar to‘plami cheklangan sirt maydonini qamrab oladi;

– fraktallarni tashkil etuvchi cheksiz to‘plam o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatiga ega;

– ba’zi fraktallarning uzunlik, maydoni va hajmi cheksizlikka intilsa, boshqalariniki nolga teng bo‘ladi.

Fraktal geometriya nafaqat statik, qat’iy simmetriyali geometrik jihatdan to‘g‘ri jismlarni va shu bilan birga ularning chiziqli bo‘lmagan dinamik obyektlarini ham tavsiflaydi.

Fraktallar tabiat tilida “tushuntiriladi”, ularning shakllanish qonunlari arxitekturaga chuqur kirib bormoqda. Mutanosiblik va uyg‘unlik, qulaylik, atrof-muhitga munosabat va hissiyot g‘oyalari turli asrlarning me’morlari tomonidan amalda sinab ko‘rilgan hamda tabiatda yashaydigan va yashamaydigan barcha narsalarning aksidir. Shunday qilib, fraktallar nazariyasi arxitekturada quyidagi qonunlarga asoslanib yangi uslubning asosi sifatida qo‘llaniladi:

– tabiatda statik holatlar, qat’iy o‘lchovlar mavjud emas;

– tabiiy kelib chiqishning har qanday shakli o‘ziga-o‘zi o‘xshashdir, ya’ni butunning har qanday qismi butunga o‘xshaydi;

– tabiatdagi har qanday jarayonlar diskret xususiyatga ega bo‘lib, bo‘shliqlar soni maksimal darajaga yetadi va bo‘shliq zonasi minimal darajaga yetadi.

Arxitektura o‘zining ko‘pgina ko‘rinishlarida tabiatning mo‘jizasi, shakllar, tuzilmalar, yuzalar, ranglar birikmasi va boshqalarning tuzilish tamoyillari hisoblanadi. Me’moriy shakllanishda tabiat qonunlarining takrorlanishi bizning oldingi kishilarimizga intuitiv darajada fraktal bino va inshootlarni yaratishga imkon berdi, misol tariqasida Eyfel minorasini keltirish mumkin (2.3-rasm). Geometrik, tabiiy va arxitektura obyektlari o‘rtasidagi o‘xshashliklar real dunyo obyektlarini rivojlantirish uchun umumiy qonun mavjudligini ko‘rsatadi.

2.3-rasm. Serpin uchburchagi fraktalining elementlariga asoslangan inshoot – Eyfel minorasi

2.3-rasmda fraktallarga xos bo‘lgan o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning geometrik elementlari aniq ko‘rsatilgan.

Aksariyat simmetriya o‘qi bilan bir xil tekislikda ko‘rsatilgan ko‘p boshli cherkovlar gumbazlarining joylashishi va o‘lchamlari fraktal prototipli tuzilishga ega. Tabiatdagi eng keng tarqalgan fraktal algoritmlardan birini aks ettiruvchi spiral shakllari, shuningdek arxitektura va dizayn sun’iy muhitda qo‘llaniladi 2.4-rasm. Me’morlarning asarlari arxitekturada fraktal shakllarning bir qator namunalarini taqdim etadi. Buni rasmlardan ko‘rish mumkin.

Tabiatda eng keng tarqalgan fraktal algoritmlardan birini aks ettiruvchi spiral shakllari, shuningdek arxitektura hamda dizaynnidagi spiral bezaklar, to‘siqlar va panjaralarning metall naqshlari, dekorativ-amaliy san’at asarlari sun’iy muhitda qo‘llaniladi.

Arxitekturada fraktal shaklidagi shakllanish tamoyillari qadimgi davrlardan beri qo‘llanilib kelinmoqda va fraktal qurilish qoidalarini arxitekturada qo‘llash har doim ham matematik jihatdan tasdiqlanmagan bo‘lsa ham, ularning iste’dodi, uyg‘unlik hissi va yuqori professionallik me’morlarni badiiy jihatdan ifodali nisbatlarini qidirish va yaratishga olib keldi.

2.4-rasm. Spiralsimon fraktallarning me’morchilikdagi tatbiqi

Arxitekturadagi dizayn va shaharsozlik ishlarida fraktal tuzilmalardan foydalanish quyidagi afzalliklarni beradi:

– aloqa iyerarxiyasi va shahar qismlarining ulanishi;

– turar-joy majmualari bosh rejalarining an’anaviy geometrik konstruktsiyalariga nisbatan yuqori qurilish zichligi;

– binolar funksional tuzilishini boyitish;

– turar-joy va jamoat binolari joylashuvining yuqori o‘zgaruvchanligi;

– Binoning estetik jozibasi va uning tabiiy shakllarga yaqinligi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Arxitektura nazariyasi va amaliyotining hozirgi rivojlanish bosqichida “fraktal” tushunchasi nimalarda aks etadi?
2. “Fraktal” va “fraktal geometriya” tushunchalarini farqlab bering.
3. Obyektning fraktallilik tamoyillarini sanab o‘ting.
4. Fraktallarning turlari haqida ma’lumot bering.
5. Fraktallarni qurishda qanday usullardan foydalaniladi?
6. Geometrik fraktallarning qanday xususiyatlarini ajratish mumkin?
7. Fraktallar nazariyasi arxitekturada qanday qonunlarga asoslanadi?

2.5. To‘qimachilik dizaynida murakkab fraktal tuzilishidagi tasvirlardan foydalanish

To‘qimachilik va naqsh dizayni to‘qimachilik sanoatida ham, kompyuter grafikasida ham olib borilayotgan ilmiy izlanishlarning eng muhim omili hisoblanadi. Naqsh dizaynida har qanday obyekt va manzaralardan, shu jumladan odam tomonidan yaratilgan mavhum narsalardan foydalanish mumkin. Avvallari an’anaviy dizaynlarni yaratishda ishlatiladigan usullar faqat mutaxassislar tomonidan yaratilib, naqshlarning murakkablik darajasi cheklangan edi.

Kiyim-kechaklarning naqshlarini va ranglarini shakllantirish, uylarni jihozlash kabi kundalik ehtiyojlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib boradi. Dizaynning barcha sohalari orasida to‘qimachilik dizayni tobora kengayib borayotgan soha bo‘lib, u moda dizayni, gilam ishlab chiqarish va gazlamalar bilan bog‘liq sohalarni qamrab oladi.

Fraktallar – juda go‘zal dizayndir, ularning rangi va tasviridan hayratlanish mumkin. Bu insonning hayotga bo‘lgan munosabatini o‘zgartirgan va odamlarga tabiat hamda koinotni tushunishga yordam bergan buyuk ilmiy kashfiyotdir.

Fraktal tasvir – fraktal nazariya va kompyuter tasvirlarini qayta ishlash texnologiyasining kombinatsiyasi hisoblanadi. Kompyuter texnologiyasi va fraktallar nazariyasining jadal rivojlanishi bilan to‘qimachilik muhandisligida fraktallarni qo‘llash tobora keng tarqaldi. To‘qimachilik muhandisligidagi murakkab muammolarni “Fraktallar nazariyasi” yordamida samarali hal qilish mumkin. Fraktal tasvirlarni qo‘llash to‘qimachilik naqshlari dizaynini yanada boyitadi va to‘qimachilik dizaynining yangi sohasini ochib beradi.

Meta-fraktal rekursiya usuli o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatidan foydalanib fraktal tasvirlarni yaratadi. Ushbu usul juda sodda bo‘lib, faqat aniq shakl va iterativ jarayon natijasida hosil qilinuvchi tasvirlar uchun mo‘ljallangan.

L-tizimlar usuli tasvirni qurish uchun tilshunoslik grammatikasini yaratish usulida modellashtirilgan algoritmdir. Fraktal tasvirni simulyatsiya qilish L-tizimlari usuli va genetik algoritmni aralashtirish orqali amalga oshirilishi mumkin. Koʻplab klassik fraktallar L-tizim usuli bilan hosil qilinadi. Shuningdek, u oʻsimliklar morfologiyasini, ayniqsa oʻsimliklarning tana tuzilishini simulyatsiya qilishi mumkin. Bu virtual oʻsimlikni oʻrganish uchun muhim usulga aylandi.

IFS (***Iteration Function System***) usulining asosiy gʻoyasida qism va butunlikning oʻzaro oʻxshashligi fraktal xususiyat boʻlib, qism butunning replikasidir, ular hajmi, holati va yoʻnalishi boʻyicha farqlanadi. IFS usulida maʼlumotlarni siqish amalga oshiriladi. Shunday qilib, berilgan rasmlar uchun maʼlumot shakllanishi qonuniyatlari olingan taqdirdagina sezilarli darajada siqilishi mumkin. Genetik algoritmlar bilan taqqoslash orqali IFS fraktal xususiyatlarga ega oʻsimliklarni tabiat qonunlariga yaxshiroq javob beradigan tarzda taqlid qilish mumkin. IFS usuli fraktal tasvirni qayta ishlash usullarining eng dinamik usuli hisoblanadi.

Murakkab iteratsiya usuli koʻpincha vaqtni quvish algoritmi yordamida yaratiladi. Ushbu algoritm nuqta iteratsiyasiga asoslangan. Har bir displey nuqtalari uchun bir necha bosqichni takrorlashdan soʻng, agar u maʼlum bir qiymatdan kattaroq boʻlsa, iterativ nuqtalardan kelib chiqishgacha boʻlgan masofa aniqlanadi.

Nyuton iterativ usuli vaqtni quvish algoritmi asosida iteratsiya orqali fraktal tasvirni yaratadi.

RFM (R-Function Method) usuli yordamida oddiy sohalarning maʼlum tenglamalari boʻyicha tuzilgan sohalarning chegarasi tenglamalarini oshkormas shakli quriladi. RFM usuli funksiyalarga cheksiz qiymatli mantiq yoki toqmantiq instrumenti sifatida qaraladi.

RFM usulida algoritm uchun kiruvchi maʼlumotlar quyidagilar:

1. Foydalaniladigan standart primitivlarning koʻrinishi: toʻgʻri chiziq, doira, ellips, toʻrtburchak, uchburchak, qavariq koʻpburchak, aylana, muntazam koʻpburchak va boshqalar (foydalanuvchining soʻroviga qarab menyu yoki ularning koʻrinishi toʻldirilib boriladi).

2. Standart primitivlarning o‘lchami va o‘rnini aniqlovchi geometrik parametrlar.

Bu ma’lumotlar asosida tayanch funksiyalar avtomatik shakllantiriladi, chaqirilgan primitivlarning normallashgan tenglamasi va belgilar bo‘yicha tashkil etilgan soha geometriyasining “ichkari tomon” – “tashqari tomon”larining predikat hamda analitik funksiyalari shakllantiriladi.

Odamlar turmush darajasining yaxshilanishi natijasida doimiy ravishda yashash muhiti, kiyim-kechak va boshqa narsalarga nisbatan talab darajasi ortib, naqshga bo‘lgan talab ham juda yuqori bo‘ladi. Fraktallar nazariyasi ushbu talabni aniq qondirgan holda tasvirlarni yaratish uchun cheksiz imkoniyatlarni taqdim etadi. Geometrik modellashtirishga asoslangan an’anaviy naqsh dizayni kamroq o‘zgaradi. Fraktal tasvirga asoslangan naqsh dizayni bir-biridan ancha farq qiladi hamda yaratilgan naqsh o‘z parametrlari bilan chambarchas bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun fraktalga asoslangan naqsh odatiy bo‘lmasdan turli uslubdaligi o‘ziga xosdir. An’anaviy estetik jozibaga javob beradigan rang-barang badiiy naqshlar fraktal naqshlarni tahrirlash, qayta o‘zgartirish yoki birlashtirish orqali hosil qilinadi. Uni to‘qimachilik naqshlari dizaynida qo‘llash yangi imkoniyatlarni ochadi.

Hozirgi vaqtda fraktal tasvirlarni yaratishda ikkita asosiy usul mavjud bo‘lib, ulardan birinchisi – matematik usullar va kompyuter dasturlarini qo‘llashdir. Ikkinchisi – fraktal tasvirlarni yaratish dasturlari, masalan, UltraFraktal, FraktalExplorer, ChaosPro, Apophysis, Chaoscope, Fraktal Editor, Mystica, Fraktal Zoomer va boshqalar.

To‘qimachilik muhandisligida fraktal tasvirning asosiy qo‘llanmalari sifatida to‘qimachilik tasvirini loyihalash, to‘qimachilik dizayni, to‘qimachilik naqshlari dizayni va boshqalarni keltirish mumkin. Masalan, murakkab iterativ avlod usuli bilan yaratilgan naqshlar majmuaning kompozitsiyalaridir. Ular turli xil funksiyalar va rang berish sxemalarini qo‘llash orqali ajoyib vizual ta’sirga ega. Shunday qilib, ular to‘qimachilik tasvirlarini loyihalashda ishlatilishi mumkin. IFS va L-tizimlar usuliga asoslangan fraktal naqshlar qat'iy o'ziga-o'zi o'xshashlik xususiyati asosida hosil qilinadi. Shunday qilib, ular to'qimachilik dizaynida ishlatilishi mumkin.

To'qimachilik naqshlari dizaynida fraktal tasvirning qo'llanilishini asosan liboslar naqsh dizayni, moda naqsh dizayni, dekorativ gazlama naqsh dizayni va boshqalarda ko'rish mumkin.

To'qimachilikda to'quv dizayni ko'pincha L-tizimlari usuli tomonidan o'ziga-o'zi o'xshashligini hisobga olgan holda amalga oshiriladi.

To'qimachilik naqshli dizaynida fraktal tasvirlarning dizayni va qo'llanilishini ikki qismga bo'lish mumkin. Ulardan birinchisi to'g'ridan-to'g'ri to'qilgan naqsh dizayni sifatida yaratilgan tasvirlardan foydalanish. Ikkinchisi – rasmlardan to'qimachilik naqsh dizaynining elementi sifatida foydalanishdir. Ko'pincha gul turlarining klassik tartibga solinishi ikki tomonli uzluksizligi, to'rt tomonli uzluksizlik va tarqoq permutatsiya yo'li bilan amalga oshiriladi.

Respublikamizda murakkab tuzulishli fraktallarni qurishga mo'ljallangan bir nechta dasturiy muhitlar yaratilgan bo'lib, ular yordamida fraktal tasvirlar ishlab chiqiladi. Bunday dasturiy muhitlar sifatida "Geometrik fraktallar", "Fraktallar", "Generator Fraktals" keltirish mumkin. Mazkur dastiriy muhitlar RFM va arifmetik xususiyatli binomial ko'phadlar nazariyasi usullari asosida ishlab chiqilgan matematik formulalar yordamida fraktal tasvirli naqshlarni quradi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. To'qimachilik va naqsh dizaynida fraktallar qanday o'rin tutadi?
2. Fraktal tasvir nima?
3. Meta-fraktal rekursiya usulini tushuntirib bering.
4. L-tizimlar usuli qanday modellashtirilgan?
5. IFS usulining asosiy xususiyati nimada?
6. Nyuton iterativ usuli qay tarzda fraktallarni yaratadi?
7. RFM usuli qanday quriladi?
8. RFM usulida algoritm uchun kiruvchi ma'lumotlar qaysilar?
9. Fraktal tasvirlarni yaratishdagi asosiy usullarni sanab o'ting.

2.6. O‘zbek milliy liboslarining naqshli dizaynida fraktallar

Har bir millatning o‘z libosi va o‘zgacha ko‘rki bor. Ajdodlar tomonidan yaratilib, asrlar davomida sayqallanib kelgan liboslar milliy merosimizdir.

O‘zbekistonda yashayotgan xalqlarning milliy liboslari sharqning barcha xalqlari uchun umumiy bo‘lgan xususiyatlarni va boshqa mamlakatlarning kiyim-kechaklarida topilmagan noyob xususiyatlarni juda ham uyg‘unlashtiradi.

Fraktallarning ixtiro etilishi fan va matematikada, san’atdagi yangi estetikaning ochilishidir, shuningdek insonning olamni idrok qilishdagi kashfiyotidir. Hozirgi vaqtda o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizaynida fraktallar nazariyasining usullaridan keng foydalanilmoqda.

Bugungi kunda kompyuter grafikasida fraktallarning o‘rni juda katta. Bir nechta koeffitsiyentlar yordamida juda murakkab shakldagi chiziqlar va sirtlarni aniqlash hamda matematik ko‘rinishda ifodalash mumkin. Kompyuter grafikasi nuqtai nazaridan fraktal geometriya sun’iy bulutlar, tog‘lar va dengiz yuzasini yaratish uchun zarurdir. Aslida, tasvirlari tabiiy narsalarga juda o‘xshash bo‘lgan Evklid bo‘lmagan murakkab obyektlarni osongina tasvirlash usuli topildi.

Kompyuter san’ati – raqamli san’at, axborot texnologiyalaridan foydalanadigan ma’lum ijodiy faoliyat bo‘lib, natijada raqamli shakldagi san’at asarlari paydo bo‘ladi.

Ko‘pgina to‘qimachilik naqshlari elementlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik tamoyili asosida hosil qilinadi, bu esa fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biridir. Ushbu dizaynlar biroz murakkabliklarga ega bo‘lib, bu dekorativ dizaynning rivojlanishiga olib keladi. Jhane Barnes fraktal dizaynni to‘qimachilik dizayni sifatida ishlatgan birinchi xonim hisoblanadi. U dizaynni gazlamaga qanday qilib bog‘lash to‘g‘risida qaror qabul qilish uchun to‘quv va to‘qimachilik dasturlari yordamida modani qayta aniqlagan.

Fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biri oziga-o‘zi o‘xshashlikdir. Eng oddiy holatda fraktalning kichik bir qismi butun fraktal haqida ma’lumotni o‘z ichiga oladi. B. Mandelbrot tomonidan berilgan fraktalning ta’rifi quyidagicha: “Fraktallar – qaysidir ma’noda butun obyektga o‘xshash qismlardan tashkil topgan tuzilishdir”.

Fraktal naqshlar o‘zining yorqin va g‘ayrioddiy shakllari bilan interyer buyumlari, mebelni badiiy bo‘yash dizayni, parket, stol usti, patnis, vitraj oynalari, lampalar, shisha buyumlar, yog‘och va keramik kulol idishlar, vazalar, sharflar, gilamlar hamda liboslarning tashqi dizaynida tezda o‘z ifodasini topdi.

To‘qimachilik dizayni – kompyuter yordamida dizayn va tasvirni qayta ishlashda foydalaniladigan soha bo‘lib, tasvirning o‘xshashligini aniqlash, tasvirni qayta ishlash hamda qayta tiklashda keng qo‘llaniladi.

Naqsh dizayni uchun barcha turdagi obyektlar va manzaralar, shu jumladan qo‘lda yasalgan narsalarni ham ishlatish mumkin.

R-funksiyasi nazariyasidan foydalanib rekursiv algoritmlar ishlab chiqib, ular asosida 2D da fraktallarni qurishning dasturiy ta’minoti yaratildi. R-funksiyasi nazariyasi asosida 2D da murakkab shakllarning chegaralarini analitik yozishning avtomatlashtirilgan texnologiyasi yaratildi. Yaratilgan texnologiya yordamida o‘zbek milliy liboslarining rangli dizayni zamonaviylashtirish uslibiyoti ishlab chiqildi. Fraktalli dizaynlar yaratishda R-funksiyasi usuli (RFM)ning imkoniyatlaridan foydalanib murakkab fraktal tuzilishlarni geometrik modellashtirish texnologiyasi ishlab chiqildi. Bu texnologiya yordamida o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizayni 2D da bayon etildi. Yaratilgan o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizaynida geometrik, algebraik fraktallar va ularning kombinatsiyasidan keng foydalanildi.

Dizayn sanoatida fraktallar ma’lumotlarning ortiqcha bo‘lishini kamaytirish, to‘qimachilik dizayni uchun mukammal platforma yaratish orqali tasvirlarni siqish uchun ishlatiladi. Fraktal yaratuvchi dasturlar uch bosqichni takrorlash orqali tasvirlarni yaratadi:

– tegishli fraktal dasturlarning parametrlarini o‘rnatish;

– amalga oshirish kerak bo‘lgan uzoq hisob-kitoblarni bajarish;

– mahsulotni baholash.

To‘qimachilik dizaynerlari global, ko‘p madaniyatli sohaga javob beradigan yangi va innovatsion yechimlarni yaratish uchun ijodkorlik, fan va texnologiya o‘rtasidagi bog‘liqlikni tushunishlari shart.

Fraktallar asosidagi to‘qimachilik dizayni naqshlarini ishlab chiqish – ranglar dizayni va to‘qima gazlamalarni sintez qilishni o‘z ichiga oladi.

Fraktal geometriyaga asoslangan naqsh dizayni to‘qimachilik sanoati texnikasining muhim sohasi hisoblanadi. Bizning maqsadimiz matematik funksiyalardan foydalangan holda innovatsion va chiroyli dizaynni ishlab chiqishdir. Dizayn yaratishda fraktal metodologiyalaridan foydalanish mashaqqatli jarayon bo‘lib, kerakli natijaga ma’lum kuch va sabr-toqat talab etiladi. Dizayner quyidagi qiyinchiliklarga duch kelishi mumkin:

– fraktal naqsh uchun tegishli formulani tanlash;

– tasvir shaklini hosil qilish funksiyasini tanlash;

– rang berishning samarali sxemasini tanlash;

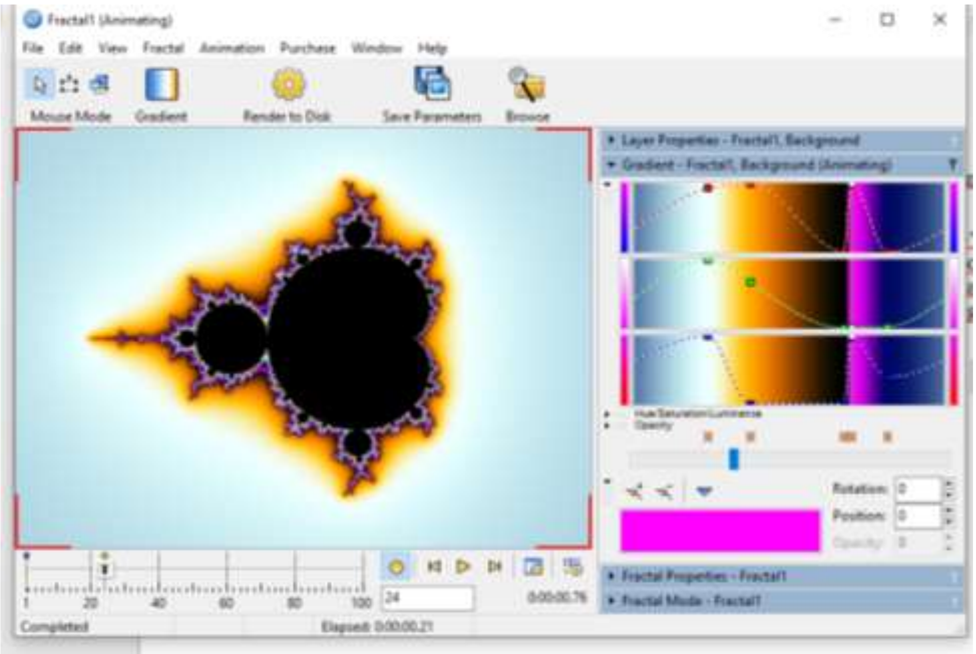
– tegishli formulani va rangni tanlash uchun tasavvurga tayanishi kerak.

Algebraik formulalar yordamida hosil qilingan fraktallar algebraik fraktallar deyiladi. Natijasi biror shakldan iborat bo‘lgan algebraik fraktallarni ishlab chiqishda aniq matematik amallar, formulalar ketma-ketligi bajarilishi natijasida tekislikda yoki fazoda nuqta, kesma yoki biror shakl hosil qilinadi va ma’lum parametrlarni o‘zgartirib aynan o‘sha formulaning qayta-qayta hisoblanishi oqibatida har safar unga mos shakl hosil qilinadi. Takrorlanish jarayoni cheksiz davom ettirilsa algebraik fraktal hosil bo‘ladi. Algebraik fraktalni kompyuterda hosil qilish uchun takrorlanish jarayonining dasturi tuzilishi lozim.

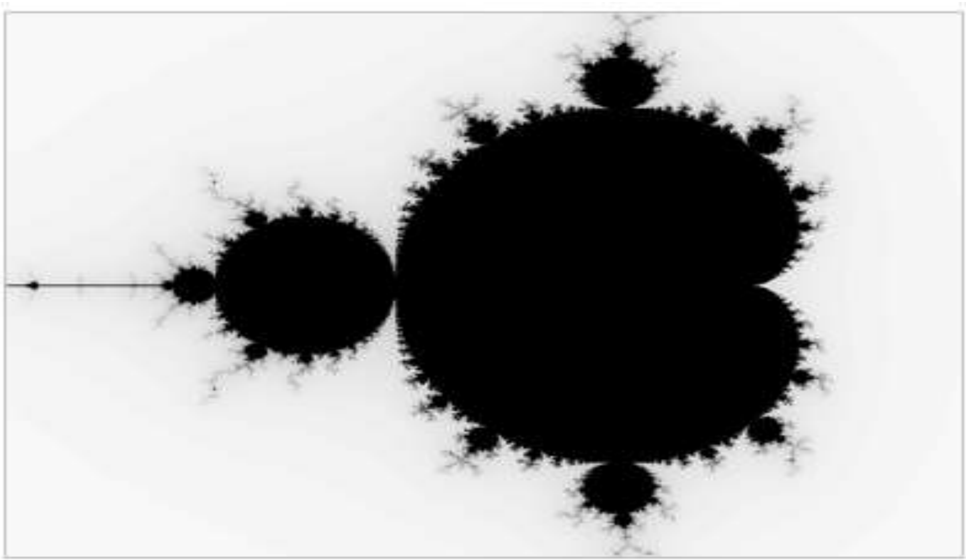
Mandelbrot to‘plami. Algebraik fraktalga misol sifatida Mandelbrot to‘plamini hosil qilish jarayoni bilan tanishamiz. Mandelbrot to‘plami kompleks tekislikda:

$$Z_{n+1}=z_n^2+c, \tag{1}$$

almashtirish orqali amalga oshiriladi. Bunda o‘zgaruvchilar va $z=x+iy$, c esa o‘zgarmas bo‘lib $c=a+ib$ sifatidagi formulaga ega bo‘ladi. Mandelbrot to‘plamini hosil qilishda kerak bo‘ladigan matematik almashtirishlarni tushunish uchun kompleks sonlar ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va darajaga ko‘tarish amallarini bilish yetarli. Ma’lumki, har bir kompleks songa tekislikda absissasi kompleks sonning haqiqiy qismiga, ordinatasi mavhum qismiga teng bo‘lgan yagona nuqta mos keladi. Har bir qadamda bitta kompleks son hosil bo‘ladi va tekislikda unga mos bitta nuqtani belgilash mumkin. Natijada hosil bo‘lgan nuqtalar Mandelbrot to‘plamini tashkil qiladi. Ushbu to‘plamni hosil qilish jarayoni quyidagi algoritm asosida amalga oshiriladi. Dastlabki nuqta sifatida kompleks tekislikda (x_0, y_0) nuqta hosil qilinadi. (1) formuladagi c parametrni o‘zgarmas deb qabul qilamiz. (1) formulaga ko‘ra birinchi qadamda $z_1=z^2_0+c$, ikkinchi qadamda $z_2=(z^2_0+c)^2+c$, uchinchi qadamda $z_3=z^2_2+c$ $=((z^2_0+c)^2+c)^2+c$ nuqtalar hosil qilinadi va hokazo. Mana shu nuqtalar to‘plami Mandelbrot to‘plamini tashkil qiladi. Bunda hosil bo‘layotgan z_n nuqtalar kompleks tekislikda (x_0, y_0) nuqta atrofida tartibsiz joylasha boshlaydi. Ba’zilari (x_0, y_0) nuqtaga yaqin joylashsa, ba’zilari undan uzoqlasha boshlaydi. Shuning uchun Mandelbrot markazi (x_0, y_0) nuqtada bo‘lgan ma’lum radiusli, masalan, $R=2$ bo‘lgan doira ichiga va undan tashqariga tushuvchi nuqtalarni aniqlashga harakat qildi. Buning uchun doira ichiga tushuvchi nuqtalarga qora rang berib, doiradan tashqariga tushuvchi nuqtalarga esa qadam rangiga teng nomerli ranglar berib ko‘ramiz. Albatta bu ishni kompyutersiz amalga oshirish ancha mashaqqatli ish. Kompyuter bu takrorlanish jarayonini ma’lum dastur asosida bajarganda aniq shakl hosil bo‘ladi. Eng muhimi shundaki, tashqaridan qaraganda nuqtalar o‘ta tartibsiz joylashayotgandek bo‘lsa ham aslida hosil bo‘lgan rasmda ham ma’lum qonuniyatni ko‘rish mumkin (2.5-rasm).



2.5-rasm. Dasturda Mandelbrot to‘plamlarini qurish



2.6-rasm. Mandelbrot to‘plamining 200 marta kattalashtirilgan ko‘rinishi

2.5-rasmdan ko‘rinib turibdiki, qora rangli asosiy sohadan tashqari yana unga aynan o‘xshash mayda sohachalar ham paydo bo‘ladi. Ular boshlang‘ich (x_0; y_0) nuqtadan uzoqlashgan sayin maydalashib ketaveradi. Ammo ularning tuzilishi qanchalik mayda bo‘lmasin, asosiy (katta sohaga) o‘xshaydi. Ya’ni fraktal tuzilishi saqlanib qoladi. 2.5-rasmdagi shakl 200-500 takrorlanishda hosil bo‘ladi. Hozircha faqat qora rangli nuqtalar hosil qilgan soha to‘g‘risida fikr yuritildi.

Yuqorida ta’kidlanganidek, doiradan tashqarida ham har xil rangli nuqtalar hosil bo‘ladi va bu nuqtalar Mandelbrot to‘plamining chegarasini tashkil qiladi. O‘sha chegaradagi nuqtalar joylashuvining 200 marta kattalashtirilgan ko‘rinishi 2.6-rasmda keltirilgan.

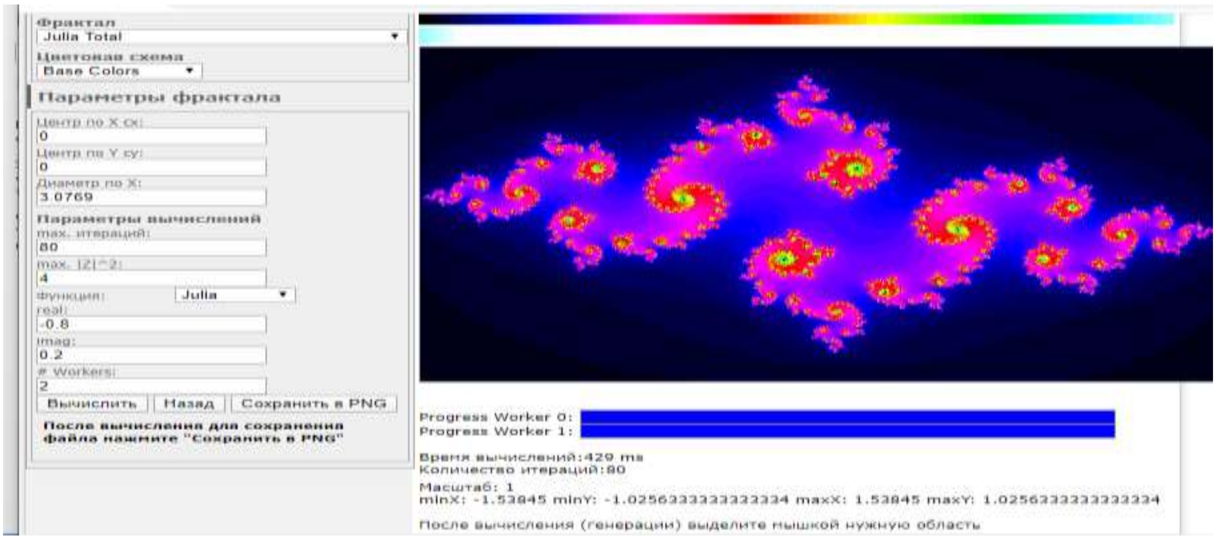
E’tibor berib qarasangiz chegara ham fraktal tuzilishga ega ekanligining guvohi bo‘lish mumkin. Ya’ni oq-qora yo‘laklarga o‘xshash mayda yo‘lakchalar mavjud.

(1) formuladagi *c* parametrning qiymatini har xil qilib o‘zgartirish yo‘li bilan har xil algebraik fraktallarni hosil qilish mumkin. Ushbu fraktallarni chizishda kompyuter haqiqiy nozik didli rassomga aylanadi. Kompyuterda mavjud bo‘lgan ranglar jilosi hosil bo‘layotgan fraktallarning yanada qiziqarli va chiroyli bo‘lishiga asos bo‘lib xizmat qiladi.

Julia to‘plamlari. Mandelbrot to‘plami bilan uzviy aloqada bo‘lgan Julia to‘plamlari XX asrning boshlaridayoq matematiklar Gaston Moris Julia va Pyer Joze Lui Fatu tomonidan o‘rganilgan.

1917-1919-yillarda ular tomonidan kompleks o‘zgaruvchili funksiyasini iteratsiyalash bilan bog‘liq bo‘lgan natijalar olindi. Umuman olganda, bu fakt alohida muhokamani talab etadi va o‘z vaqtida bir necha o‘n yilliklarga oldinlab ketgan matematik tadqiqotga yorqin misol bo‘la oladi. Bu yerda kompleks o‘zgaruvchining $f(x) = z^2 + c$ funksiyasi uchun Julia to‘plamlarini qurish usullarini keltirib o‘tamiz. Aniqroq aytganda, biz “to‘ldirilgan Julia to‘plamlari”ni quramiz.

$(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ to‘g‘ri to‘rtburchagini qarab chiqamiz. c o‘zgarmasni tayinlaymiz va tanlangan to‘g‘ri to‘rtburchak nuqtalarini muayyan qadam bilan ko‘rib chiqamiz. Xuddi Mandelbrot to‘plamini qurishdagiga o‘xshash har bir nuqtalar uchun iteratsiyalar seriyasini o‘tkazamiz (iteratsiyalar soni qancha ko‘p bo‘lsa, to‘plam shuncha aniqroq bo‘ladi). Iteratsiyalar seriyasidan so‘ng nuqta ikki gradusli aylana chegarasidan “chiqib ketmasa”, uni qora rang bilan belgilaymiz, aks holda esa oq rang bilan belgilaymiz.



2.7-rasm. Dasturda Julia to‘plamlarini qurish

Yuqorida keltirilgan Mandelbrot va Julia to‘plamlaridan iborat klassik fraktallar milliy gilamlar dizaynida keng qo‘llanilishi mumkin.

O‘zbek milliy liboslari va gilamlarining naqshli dizaynida fraktallarni qo‘llash uchun ularning tenglamalari R-funksiya (RFM) usulida quriladi. Ilmiy ishlarda Gosper egri chizig‘i, Daraxtsimon fraktallar, Kox egri chizig‘i, Serpin to‘rtburchak gilami, Serpin salfetkasi, Serpin egri chizig‘i tenglamalari qurilgan.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Kompyuter grafikasida fraktallarning o‘rnini izohlang.
2. Kompyuter san’atida fraktallarning ahamiyati.
3. Fraktallarning asosiy xususiyatlari qaysilar?
4. Fraktal naqshlarni tushuntirib bering.
5. To‘qimachilik dizaynida fraktallar.
6. To‘qimachilik va naqsh dizaynida fraktallar nima maqsadda ishlatiladi?
7. Nazariy tadqiqotlar haqida tushuncha bering.
8. Fraktal tasvir nima?
9. Fraktal tasvirlarni yaratish usullari haqida ma’lumot bering.
10. Fraktal yaratuvchi dasturlar qanday bosqichlarda takrorlash orqali tasvirlarni yaratadi?
11. Mandelbrot to‘plami nima?
12. Julia to‘plamlari nima?

2.7. Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlari va jakkard gazlamalarida qo‘llash

Naqsh – naqshli gazlamaning ajralmas badiiy asosi hisoblanadi. Tabiiy gazlama naqshini hosil qilish vazifasini gazlama va naqshning tuzilishi hamda rangi bo‘yicha bajarish kerak bo‘ladi.

Naqsh qadimiy va zamonaviy dekorativ san’at singari kiyimda bezak va bezatish rolini o‘ynaydi hamda ba’zi muvofiq shakllar orqali kiyimda qo‘llaniladigan naqshlarga kiyim naqshlari deyiladi. To‘qilgan trikotaj kiyimni oddiy gazlama kabi qirqish va o‘rash orqali o‘zgartirish mumkin emas. Shunday qilib, fraktallarni yangi gazlamalarda qo‘llash bilan bir qatorda naqshli gazlamalar dizaynining muhim qismiga aylanadi. Jakkard tomonidan trikotaj gazlama uchun rang naqshlarini hosil qilish mumkin. Jakkard – rangi bitta chiziqdagi ranglar soniga bog‘liq bo‘lgan turli xil rangdagi iplar bilan to‘qilgan naqshlardir.

Jakkard gazlama – murakkab va oddiy shaklda to‘qilgan gazlama hisoblanib, ularning asosida 24 tadan ortiq turlicha to‘qilgan iplar mavjud bo‘ladi. Shuningdek, Jakkard gazlamalar rangli naqshlardan iboratdir. Jakkard gazlamalar quyidagi xususiyatlarga ega:

– mahsulotning mustahkamligi,
– ranglarning yorqinligi,
– yuvishga chidamliligi,
– tozalash osonligi,
– chiroyli ko‘rinishga ega ekanligi va boshqalar.

Jakkard gazlamalarning bir necha xil turlari mavjud: Jakkard-satin, Jakkard-shyolk, Jakkard-atlas, Jakkard-trikotaj, Jakkard-streych va boshqalar (2.7-rasm).

2.7-rasm. Jakkard gazlamalar

Fraktal naqsh murakkab va tartibsiz grafika bo‘lib, betakror xususiyatlarga ega badiiy dizaynini qura oladi va gazlamaga naqshni tushira oladi. Hozirgi naqshli gazlama naqshlari asosan an’anaviy naqshlardan iborat bo‘lib, C++ tilida turli xil generatsiya tamoyillariga muvofiq qog‘oz rasmlari va o‘tish vaqti algoritmiga asoslangan blokli rasmlar, so‘ngra kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohlari va to‘quv dastgohlarining dizayn dasturlarida rasmlar qayta ishlangan. Naqsh tartibiga ega gazlamalar uchun shuni ko‘rsatadiki, birlik rasmini qayta tartiblash orqali trikotaj jakkard gazlamalarda qo‘llash mumkin va o‘tish vaqtining algoritmiga asoslangan fraktal naqsh blok yuzasi shaklida trikotaj jakkardli gazlamalarga qo‘llanilishi mumkin.

Fraktallar nazariyasi – bu so‘nggi 20-30 yil ichida yangi ishlab chiqilgan fan bo‘lib, u tabiatda yoki nochiziqli tizimda tartibsiz geometrik shakllarni tasvirlashi mumkin. Fraktal nazariya matematika, fizika, tibbiyot, informatika va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llanilmoqda.

Trikotaj gazlamalar naqshli dizaynidan ilhom olishimiz bilan bir qatorda murakkab va tartibsiz grafikadan iborat fraktal naqshning noyob xususiyatlari bilan badiiy dizaynini qurishda foydalanish mumkin.

Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlarida qo‘llash uchun R (RFM)-funksiya usulidan foydalanib ishlab chiqilgan tenglamalardan olingan natijalarda rastrli grafika ko‘rinishida keltirilgan.

Milliy fraktal naqshning xususiyatlari va generativ tamoyillari

1. *Fraktal naqshning xususiyatlari*

Fraktal o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik ma’nosidan kelib chiqib, asosan quyidagi o‘ziga xos xususiyatlarga ega:

– fraktal o‘ziga-o‘zi o‘xshash fraktalni yaratish jarayonida ko‘plab qismlarni ishlab chiqaradi;

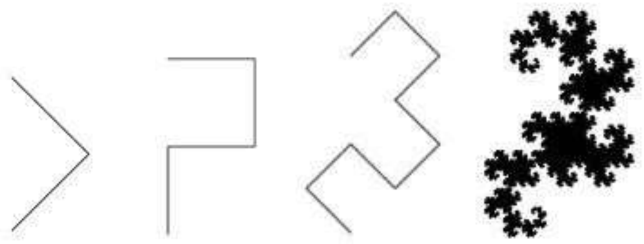
– uyg‘unlik: fraktal naqshning uyg‘unligi – bu matematik uyg‘unlik va rangga bog‘liq ravishda har bir shaklning o‘zgarish oqimi;

– noziklik: fraktal naqsh nozik tuzilmalarga ega bo‘lib, cheksiz ichki tuzilmalarni o‘z ichiga oladi va tartibsiz ravishda ko‘payish xususiyatiga ega bo‘lgan murakkablikka ega;

– xilma-xillik: fraktal naqsh – bu matematik nazariya va kompyuterni uyg‘unlashtirib, tasavvur, vaqt va makon chegaralanmagan holda yangi dizaynni yaratishdir.

Fraktal naqshning generatsiya tamoyillari. Fraktal naqshlarning xilma-xil turlari mavjud va kompyuterda uni yaratish tamoyillari ham turlichadir. Qog‘oz orqali asosan fraktal naqshning ikkita yaratuvchi tamoyili o‘rganiladi.

Birlashtirilgan tasvirlarga asoslangan fraktal naqshlar. Yaratuvchi element asosiy elementlardan biri bo‘lib, uning asosida rang-barang va cheksiz fraktal naqshni takrorlash va iteratsiyadan keyin ma’lum qoidalar asosida ishlab chiqish mumkin. Yaratuvchi element to‘g‘ri chiziq yoki analitik geometriya bo‘lishi mumkin. 2.8-rasmda ko‘rsatilgan egri chiziq ajdaho egrichizig‘i shakliga o‘xshashligi sababli “egri ajdaho” deb atalib, o‘ziga-o‘zi o‘xshash egri chiziqning takrorlangan qadamlaridan iborat umumiy shakldir. Bu yerda n qadamlar soni.



n=1 n=2 n=3 n=20

2.8-rasm. Ajdaho egri chizig‘i

O‘tish vaqti algoritmiga asoslangan fraktal naqsh. Iterativ usulga asoslangan o‘tish vaqti algoritmining shaklini chizish usuli quyidagicha, agar f aylanish deb faraz qilinsa, f_n n ning f-n iteratsiyasi, keyin $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, $n = 0,1,2…$.

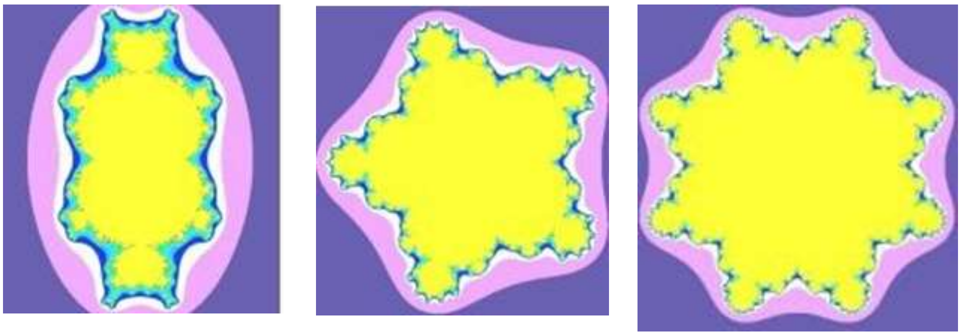
Klassik Julia, Mandelbrot va Nyuton iterativ fraktallari yordamida hosil qilinadi. Fraktal naqshni chizish uchun o‘tish vaqti algoritmidan asosan quyidagi to‘rt bosqichda foydalaniladi.

1. Grafik maydon aniqlanadi va kompyuterda koordinatalar tizimi yaratilib, koordinata o‘qlarini ekran markazi bilan birlashtiriladi;

2. Maydonning piksel koordinatalari ketma-ket ravishda tegishli iterativ formulaga almashtiriladi;

3. Piksel koordinatalarining konvergentsiyasi yoki ajralishi berilgan iteratsiyalar sonida hisoblanadi;

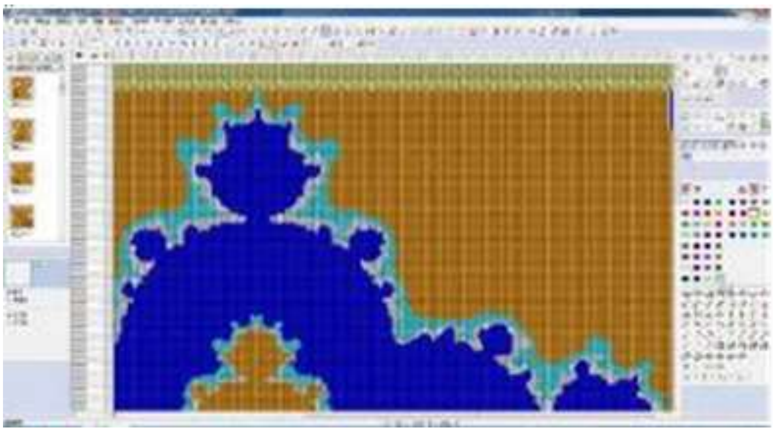
4. Konvergent va divergent piksellar ekrandagi turli xil ranglar bilan belgilanadi, chunki har xil piksel nuqtalarining konvergent va divergent iteratsiya vaqtlari ma’lum miqdordagi iteratsiyalarda farq qiladi, shuning uchun turli piksellar uchun turli xil ranglarni qo‘shish orqali yorqin va rangli fraktal naqshga ega bo‘lish mumkin. Mandelbrot fraktal naqshi 2.9-rasmda keltirilgan.



$f(z)= z^3+c$ $f(z)= z^6+c$ $f(z)= z^9+c$

2.9-rasm. Mandelbrot fraktal naqshi

Trikotaj Jakkard gazlamalarida fraktal naqshni qo‘llash. To‘qish dastgohlari va kompyuterlashtirilgan to‘quv dastgohlari. Fraktal naqshni kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohi yordamida Jakkard gazlamasida qo‘llashga erishilgan. Kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohi yuqori texnologiyali kiyim-kechak uchun mo‘ljallangan elektromexanik integratsiya mashinasidir. Uning yordamida to‘qish amalga oshirilib, naqsh o‘zgarishi sababli yuqori samaradorlikka erishiladi. 2.10-rasmda Stoll-M1plus naqshli dizayn dasturida Mandelbrot gazlama naqshi ko‘rsatilgan. 2.10-rasmning dastlabki bir nechta satrlarida faqat och ko‘k va sariq ranglar, keyingi ikki qatorda uchta rang – oq, och ko‘k va sariq ranglar, qolgan to‘rtta rang – ko‘k, och ko‘k, oq va sariq ranglardan iborat. Shubhasiz, har bir satrning ranglar soni bir xil emas, lekin ranglar soni kamroq bo‘lgan qatorlarning chetidagi kerakli miqdordagi ustunlarga bitta yoki ikkita boshqa rang qo‘shamiz. Bu nafaqat umumiy tasvirga ta’sir qilmaydi, balki har bir satrning rangi bir xil bo‘lishini ta’minlaydi.

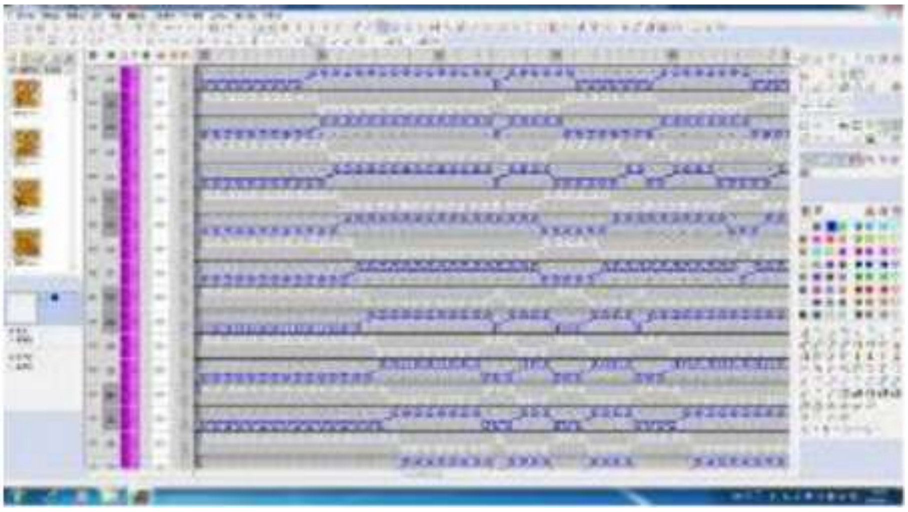


2.10-rasm. Mandelbrot to‘plami gazlama ko‘rinishi

Jakkardli tuzilmani aniqlash – bu savat to‘rlarining tashkiliy tuzilishini aniqlash, chunki bitta jakkardning orqa qismida suzuvchi chiziqlar mavjud, shuning uchun qog‘oz juft jakkard to‘quvini tanlaydi. Ikkala jakkardning orqa tomoni turli xil manbalar tomonidan sayqallanishi mumkin, chunki qog‘ozda to‘qilgan naqsh murakkab, ipning kuchliligi esa past, shuning uchun havo qatlami va kunjut urug‘laridan foydalaniladi. Va nihoyat, dasturda muhrlangan iplarni ajratish va qayta ishlash amalga oshiriladi. Ajratuvchi iplari to‘qilgan gazlamaning dastlabki ikki qatorida bajarilishi kerak va bu kompyuter yordamida to‘qish jarayoniga o‘tish rolini o‘ynaydi. Qoplash iplari to‘qish tanasining so‘nggi ikki qatorida bo‘lishi kerak va har qanday panelni to‘qish oxirida yopish kerak. “Boshlash” tugmasini bosib, tarqatish tugagandan so‘ng MC dasturi eksport qilinadi (bunda tekis to‘qish dastgohidagi ipning rangi naqsh rangiga mos kelishiga ishonch hosil qilish kerak bo‘ladi). Uning to‘g‘riligi tekshirilgandan so‘ng, U diskiga joylashtirilgan va kompyuterga tekis to‘qish dastgohiga olib kelinganida “TP” testi to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilgan holda, normal to‘qish mumkin.

Jakkard gazlamalarda birlik tasvirlar asosida fraktal naqshni qo‘llash (Fraktal chiziq asosida). Yaratuvchi element sifatida chiziq juda ko‘p fraktal naqshni keltirib chiqarishi mumkin. Ajdaho shaklidagi egri chiziqqa asoslanib, u o‘rta nuqtadan birinchi bo‘lib 90^0 burchagi bilan ikkita kesimga bo‘linadi va ikkita segment ikkinchi marta 90^0 burchak bilan qarama-qarshi yo‘nalishda qatlanadi, bir necha burmalardan so‘ng egri ajdaho shakli hosil bo‘ladi.

Naqsh turi yaratilgandan so‘ng mahalliy qism kuchaytirilib, tuzilishi nisbatan soddaligi sabab ikkita rang uning asosiy xususiyatlarini namoyish qilishi mumkin. Ikki xil rangli ikki tomonlama jakkard naqshli ipning o‘ziga xos xususiyati: bitta rangli ip ba’zi ignalar yordamida to‘qilgan, boshqa rangli iplar boshqa ignalarda to‘qilgan. Ikkala jakkardli old naqsh tasodifiy ravishda loyihalashtirilishi mumkin va orqa qismi har xil turlardan iborat bo‘lishi mumkin, ammo qog‘ozda naqshning tashkiliy tuzilishida havo qatlami qo‘llaniladi. Havo qatlami shundan iboratki, rang igna tagligining old tomoniga to‘qilgan va boshqa ranglar igna tagligining orqasiga naqshlangan bo‘lib, uni “jarayon ko‘rinishi” da ko‘rish mumkin. “Jarayon ko‘rinishi” – bu biz chizishimiz va igna tanlovini namoyish etishimiz mumkin bo‘lgan oyna. Trikotaj ignalari harakati 2.11-rasmda tasvirlanganidek naqshli gazlamani ko‘rsatadi. Havo qatlamining tashkiliy rangi qanchalik katta bo‘lsa, gazlama orasidagi havo qatlami shuncha ko‘p bo‘ladi. Old va orqa naqsh bir xil, ammo 2.12-rasmda ko‘rsatilgandek rangi har xil.



2.11-rasm.

2.12-rasm. Ajdaho egri chizig‘i shaklidagi obyektlar tasviri

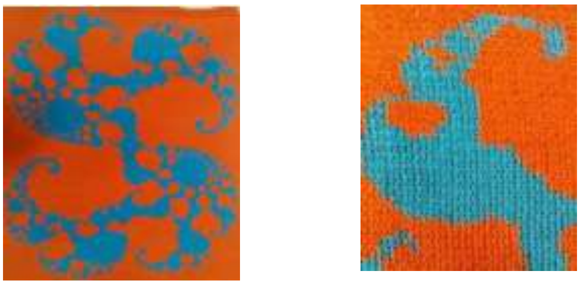
Jakkardli gazlamalarda o‘tish vaqti algoritmi asosida ishlab chiqilgan fraktal naqshni qo‘llash. Mandelbrot, Juliya, Nyuton to‘plamlari, naqshlari o‘tish vaqtning algoritmiga asoslangan ajoyib ranglar va murakkab tuzilish xususiyatlariga ega. Asosiy qism kuchaytirilganda murakkab naqshlar paydo bo‘ladi. Mandelbrot fraktal naqshining ichki tuzilishi sodda, ammo tashqi kontur nozik detallarga ega; Julia fraktal naqshlari barglarning shaklini yaxlit deb hisoblaydi va chetki qismlari ajralib turadi, ammo ichki tuzilishi murakkab; Nyuton iteratsiyasining fraktali tanlangan funksiyaga bog‘liq va turli naqsh turli funksiyalarga mos keladi, ichki dizayn murakkab tarkibga ega. Agar tasvir pikseli juda past bo‘lsa, lasan to‘qilgan gazlamalarda pikselni ifodalaydi. Uning tafsilotlarini ko‘rsatib bo‘lmaydi va fraktal naqshning xususiyatlarini aks ettira olmaydi, shuning uchun naqsh turi blok yuzasi shakliga mos keladi.

Mandelbrot to‘plamini qo‘llash. Mandelbrot to‘plami Mandelbrot tomonidan 1980-yilda topilgan va asosiy tamoyili $z_{n+1}=z^m{}_n+c$ tenglamaga asoslangan (z – murakkab o‘zgaruvchi, c – murakkablik doimiysi). c butun ekran bo‘ylab c ning o‘zgarishi kuzatiladi. M to‘plamning asosiy xususiyati shundaki, iteratsiyalar ko‘paygan sari, naqsh 2.8-rasmda ko‘rsatilganidek asta-sekin yumaloq shaklga ega bo‘ladi, masalan, naqsh tafsilotlarini ikki tomonlama aniqroq ko‘rish uchun 2.13-rasmda ko‘rsatilgandek Mandelbrotning oltinchi qadamini olaylik, orqa tomondan havo qatlami bo‘lgan to‘rt xil rangli jakkard tuzilishi keltirilgan.

2.13-rasm. Mandelbrot naqshining obyektdagi tasviri

Julia to'plamining qo'llanilishi. Julia to'plami Mandelbrot to'plamiga o'xshash formulaga asoslangan. $z_0(x_0,\ y_0)$ lar o'zgarmas qiymatga ega bo'lganida murakkab tekislikda notekis tasvirlar kuzatiladi. Parametrning haqiqiy va virtual qismlarini o'zgartirib, turli xil naqshlarni olish mumkin. 2.14-rasm $f(z)=z^2+0.29+0.012i$ formulaga asoslangan Julia to'plami natijasidir. Asosiy ichki berilganlarni saqlab turganda ikki tomonli rangli jakkard orqa tomonida sesame bilan ishlangan. Sesame deb ataladigan nuqta sesame tarqalishiga o'xshaydi va 2.15-rasmda orqa tomondagi ranglarning tuzilishi ko'rsatilgan.

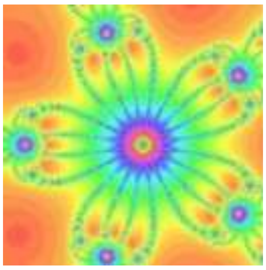
2.14-rasm. Juliya fraktali naqshi



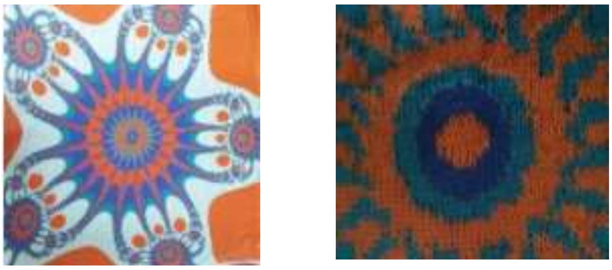
2.15-rasm. Juliya fraktali naqshining obyektdagi tasviri

Nyuton usulini iteratsiyada qo'llash. $f(x)$ differensial funksiya uchun Teylor formulasiga binoan $f\,(x) \approx f\,(x_0) + f\,'(x_0)\,(x\text{-}x_0)$, $f\,(x) = 0$ taxminiy ildizlar $x_{n+1} \approx x_n\text{-}f\,(x_n)\,/\,f\,'(x_n)$.

Agar kompleks son z bilan almashtirilsa, $z_{n+1} = z_n\text{-}f\,(z_n)\,/\,f\,'(z_n)$ Nyuton iterativ formulasi olinadi. 2.16-rasm $f\,(x) = f\,(x) = x^5\text{-}1$ tenglama naqshdir. Bu yanada murakkab bo'lib, to'rt xil rangli ikki tomonlama havo qatlami tuzilishi bilan to‘qilgan, 2.17-rasmda ko‘rsatilganidek chekka qismlari rang segmentatsiyasining asimmetriyasini aks ettiradi.



2.16-rasm. Nyuton iteratsiyasi uchun fraktal naqsh



2.17-rasm. Nyuton iteratsiyasi uchun fraktal naqshning obyektdagi tasviri

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Jakkard gazlama xususiyatlarini tushuntiring.
2. Naqsh – bu…
3. Fraktal naqshni tushunttiring.
4. Fraktallar nazariyasi qanday fan?
5. Fraktal naqshning xususiyatlari nimalardan iborat?
6. Fraktal naqshning qanday generatsiya tamoyillarini bilasiz?
7. Birlashtirilgan tasvirlarga asoslangan fraktal naqshlar qanday xususiyatlarga ega?
8. Fraktal naqshni chizish uchun o‘tish vaqti algoritmidan asosan qanday bosqichlardan foydalaniladi?
9. Trikotaj Jakkard gazlamalarida fraktal naqshni qo‘llash haqida tushuncha bering.
10. Jakkardli tuzilmani aniqlashda nimalarga e’tibor berish lozim?
11. Jakkard gazlamalarda birlik tasvirlar asosida fraktal naqshni qo‘llashning o‘ziga xos xususiyatlarini tushuntiring.
12. Jakkardli gazlamalarda o‘tish vaqti algoritmi asosida ishlab chiqilgan fraktal naqshni qo‘llashda nimalarga e’tibor beriladi?
13. Mandelbrot to‘plamini qo‘llashning asosiy xususiyati nimada?
14. Julia to‘plamining qo‘llanilish formulasini izohlang.
15. Nyuton usulini iteratsiyada qo‘llash tenglamasini tushuntiring.

2.8. Fraktallar nazariyasini tibbiyotda va boshqa tabiiy fanlarda qo‘llash

Fraktallar nazariyasi tibbiyot va biologiyada. Inson tanasi juda ko‘p murakkab tuzilmalardan iborat. Masalan, bronxlarning tarmoqlanishi, yurak-qon tomirlari tuzilishi, buyrak tizimi, katta qon va kapillyar tarmoqlari va boshqalar. Ushbu tuzilmalar haqiqiy jismoniy tizimlar bo‘lib, geometrik va funksional murakkabliklarga ega. Ushbu hodisalarga aniq yondashuv, albatta, matematik modellashtirish bosqichidan o‘tadi. Evklid geometriyasi, afsuski, bu muammolarni hal qila olmaydi. Aslida, bu faqat silliq va muntazam shakllardagina qo‘llaniladi. Shunday qilib, nuqta nolga teng, chiziq bir o‘lchovga ega, tekislik ikki o‘lchovga ega va hajm uch o‘lchovga ega. Fraktal geometriya o‘lchamlari bilan shug‘ullanadi. Masalan, bittadan ikkitagacha yoki ikkitadan uchtagacha va hokazo. Fraktal o‘lchov aslida tartibsiz egri o‘lchamdir. Fraktallarning bu o‘ziga xos xususiyati ularni ishlatishda biologiya va tibbiyot sohasida katta afzalliklarni beradi. Darhaqiqat, tirik tizimlarning ko‘plab murakkab tuzilishlari, xususan, inson tanasi fraktalga o‘xshash geometriyani namoyish etadi. Bu ularni modellashtirishga imkon beradi va shuning uchun fraktal tahlil yordamida ushbu hodisalarni miqdoriy aniqlash imkoniyatini yaratib beradi. Fraktal obyektlar haqidagi fan – Evklid bo‘lmagan geometriyaning aniq matematik obyektlaridan foydalanadi. Fraktal – fazoda lokalizatsiya qilingan obyekt bo‘lib, tobora kamayib borayotgan o‘xshash yoki bir xil elementlarning soniga aylanishi mumkin. Bu o‘z-o‘ziga o‘xshash obyekti bo‘lib, uning eng kichik elementlari uning eng katta obyektlarining nusxalari ekanligini anglatadi. Tabiatda topilgan fraktallarning ko‘pi uchun (bulut chegaralari, qirg‘oqlar, daraxtlar, o‘simlik barglari va boshqalar) kichikroq elementlar kattaroqlariga o‘xshash, ammo bir xil emas. Aynan shunday fraktal obyektlar kvazifraktallar deb nomlanadi – ular ideal mavhum fraktallardan struktura takrorlanishining to‘liq emasligi va noaniqligida farq qiladi. Tirik kletkalar tirik hujayra kattaligiga va oxir-oqibat molekulalar hajmiga bog‘liq bo‘lgan cheklovlar tufayli ideal fraktal bo‘lolmaydi. Fraktal o‘lcham egri chiziq murakkabligining ko‘rsatkichidir. Turli fraktal o‘lchamlarga ega saytlarning almashinishini va tashqi va ichki omillar tizimga qanday ta’sir qilishini tahlil qilib, tizimning xatti-harakatlarini taxmin qilishni o‘rganamiz. Eng muhimi, beqaror sharoitlarni tashxislash va bashorat qilish. Fraktallarni o‘lchash uchun eng keng tarqalgan usullardan biri – bu Minkovskiy o‘lchovidir. Uning mashhurligi ko‘p jihatdan matematik hisoblashning soddaligi bilan bog‘liq. C ning har qanday cheklanmagan chegarasi mavjud bo‘lsin. Bunda quyi va yuqori chegaralar quyidagicha belgilanadi:

$$\underline{\dim}_B(F)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta};\ \overline{\dim}_B(F)=\overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Ular, shuningdek, yuqori va pastki Minkovskiy o‘lchamlari deb ataladi. Agar ular teng bo‘lsa, unda umumiy qiymat Minkovskiy o‘lchovi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

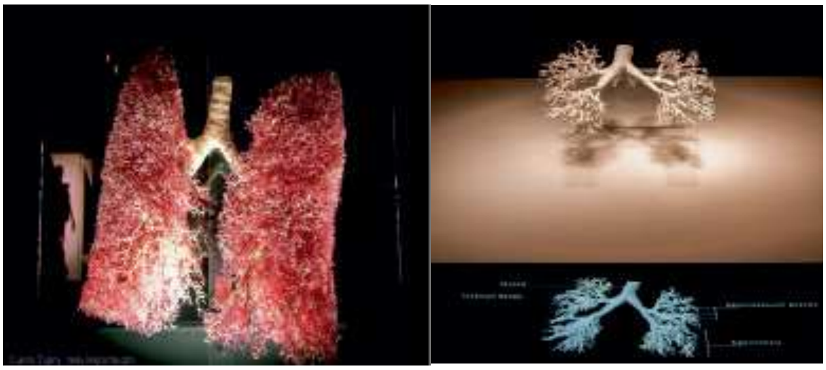
$$\underline{\dim}_B(F)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Atrof-muhit bilan maksimal almashinuv maydonini va mos keladigan metabolizmning intensivligini ta’minlash uchun tirik organizmlar fraktal tuzilmalar yordamida fazalarni ajratish maydonini ko‘paytiradi va bo‘shliqlarni iloji boricha to‘ldiradi. Fraktal tuzilmalarning biologik funksiyasi bu – juda ko‘p turli xil biologik shakl va funksiyalarni yaratishdir. Biologik fraktallar fazoviy to‘ldirish o‘lchovi sifatida fraktal o‘lchov bilan miqdoriy jihatdan tavsiflanadi. Biologiyada xaos va fraktallarni o‘rganish ketma-ket molekulalardan ekotizimlarga qadar tirik mavjudotlarni tashkil etishning barcha darajalarini qamrab oladi.

Organlar va organizmlarning fraktalliligi va fraktal o‘lchami. Fraktallar nafaqat bizni o‘rab oladigan tabiatda, balki ular bizning o‘zimizda va ko‘plab hayvonlar hamda o‘simliklarda uchraydi, chunki inson tanasining tuzilishi va hayvonlarning ko‘plab a’zolari, shuningdek o‘simliklar ham fraktal xususiyatlarga ega. Tabiat fraktal tuzilmalar imkoniyatlaridan foydalangan holda inson tanasini juda samarali qurgan. Organlar va tanalar darajasida nafas olish, qon-tomir, siydik va boshqa tizimlarning, shuningdek, jigardagi o‘t yo‘llarining fraktal tashkil etilishi o‘rganiladi.

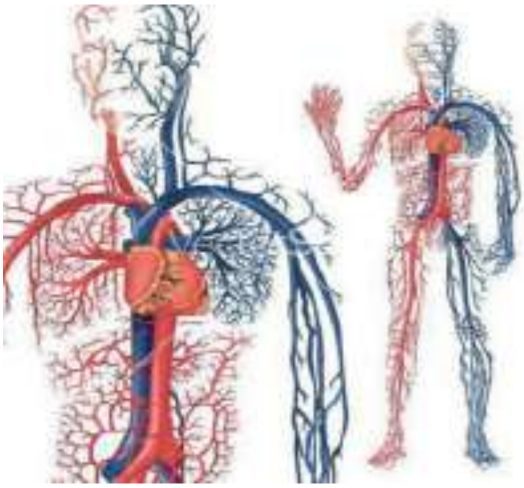
Nafas olish yo‘llarining o‘pka ichiga havo kiradigan fraktal tuzilishi sinchkovlik bilan o‘rganilgan. O‘pkalar – inson tanasida kislorod va karbonat angidrid almashinishi uchun mas’ul bo‘lgan va nafas olish funksiyasini bajaradigan muhim organdir. O‘pka sxemasi uchta asosiy tarkibiy elementni o‘z ichiga oladi: bronxlar, bronxiolalar va o‘pka alveolalari. O‘pka skeleti tarmoqlanib ketgan bronxial tizimdir. Har bir o‘pka ko‘plab tarkibiy qismlardan (lobulalardan) iborat. Har bir lobula o‘rtacha o‘lchami 15x25 mm bo‘lgan piramidal shaklga ega. Bronxlar o‘pka lobulasining yuqori qismiga kiradi, shoxlari kichik bronxiolalar deb ataladi. Hammasi bo‘lib har bir bronx 15-20 bronxiolaga bo‘linadi. Bronxiolalarning uchlarida maxsus shakllanishlar mavjud – bir necha o‘nlab alveolyar shoxchalardan tashkil topgan ko‘plab alveolalar bilan qoplangan. O‘pkaning eng muhim tarkibiy elementlari alveolalar bo‘lib, ular organizmda kislorod va karbonat angidridning normal almashinuvi bilan bog‘liqdir. O‘pka alveolalari juda ingichka devorlari bo‘lgan mayda vesikulalar bo‘lib, ular zich kapillyarlar tarmog‘i bilan o‘ralgan. O‘rtacha diametri 0,3 mm dan oshmaydigan mikroskopik alveolalar tufayli o‘pkaning nafas olish yuzasi maydoni 80 kvadrat metrga ko‘tariladi. Ular gaz almashinuvi uchun katta maydonni ta’minlaydi va qon tomirlarini doimiy ravishda kislorod bilan ta’minlaydi. Gaz almashinuvi jarayonida kislorod va karbonat angidrid alveolalarning ingichka devorlari orqali qonga kiradi, u yerda ular qizil qon tanachalari bilan “uchrashadilar”. Shunday qilib, o‘pka katta maydonning kichkina kosmosga “siqib” qo‘yilishiga misoldir. O‘pka bronxlari va bronxiolalari ko‘plab novdalar bilan “daraxt” hosil qiladi. Nafas olish yo‘llarining tarmoqlanishini miqdoriy tahlil qilish uning fraktal geometriyasiga ega ekanligini ko‘rsatadi.

Kalamushlar, quyonlar va odamlar bronxial tizimining o‘rtacha fraktal o‘lchami mos ravishda 1,587 1,58 va 1,57 ni tashkil qiladi. Shunday qilib, sut emizuvchilardagi bronxial tizimlarning fraktal o‘lchami tana hajmiga bog‘liq emas.



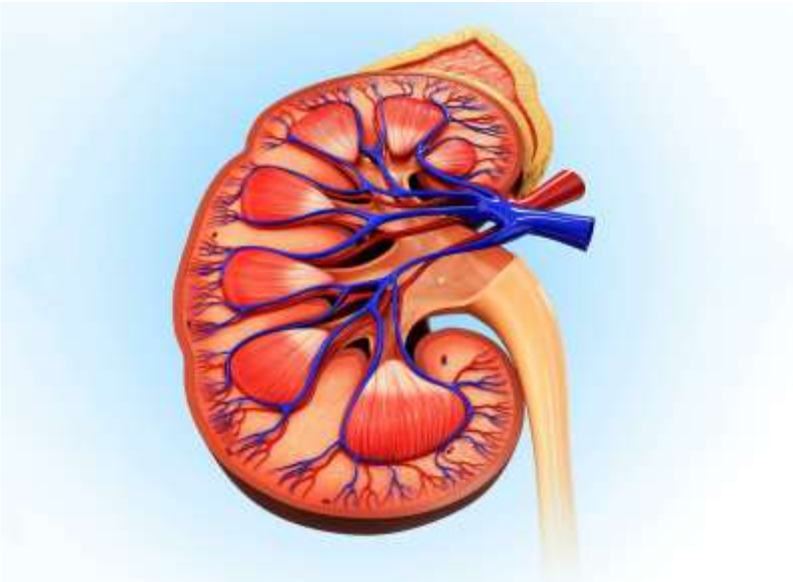
2.18-rasm. Nafas olish yo‘llarining tuzilishi

Qon tomirlari – qonning harakatlanadigan naychalaridir. Qonni yurakdan organlarga yetkazadigan tomirlarga arteriyalar, organlardan yurakka yetkazadigan tomirlar venalar deyiladi. Arteriya va tomirlarda gaz almashinuvi va ozuqa moddalarining tarqalishi amalga oshirilmaydi, bu shunchaki yetkazib berish yo‘li. Qon tomirlari yurakdan uzoqlashishi bilan ular kichiklashadi. Qon va suyuqliklar o‘rtasida moddalar almashinuvi kapillyarlarning o‘tkazuvchan devori – arteriya va venoz tizimlarni bog‘laydigan kichik tomirlar orqali sodir bo‘ladi. Tomirlar o‘zlari va ular orqali aylanib yuradigan qon juda oz joy egallaydi – bu tana hajmining qariyb 5 foizi. Odamlar taxminan 150 ming km qon tomirlariga ega. Bir daqiqada bir litrga yaqin suyuqlik barcha inson kapillyarlarining devorlarini yorib o‘tadi. Fraktal o‘lchamlari 1,7 bo‘lgan orqa miya tomirlarning fraktal topologiyasi batafsil o‘rganilgan. Shuningdek, inson qarishi davrida va qandli diabetning asoratlari bilan fraktal o‘lchamning pasayishi hamda ko‘zning to‘r pardasi tomirlari tarmog‘i soddalashtirilganligi isbotlangan. Ta’kidlanishicha inson qon aylanish tizimining fraktal o‘lchami 2,5 dan 2.6 gachadir.



2.19-rasm. Inson qon aylanish tizimi

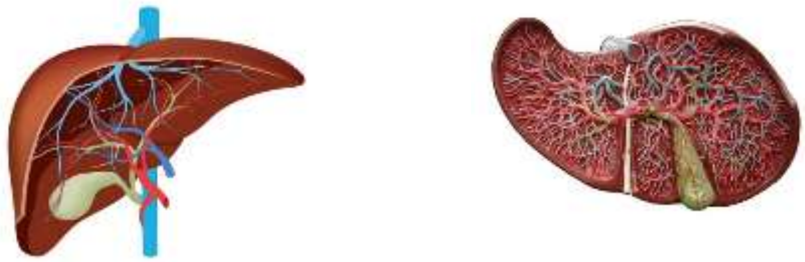
Odam siydik tizimi bu odamlarda peshobni hosil qiluvchi, to‘playdigan va chiqaradigan organlar tizimi. Bir juft buyrak, ikkita peshob pufagi, qovuq va peshob chiqarish kanalidan iborat. Buyraklarning asosiy vazifasi qondagi keraksiz moddalarni filtrlashdir. Buyrakda qon oqimi buyrak arteriyalari (qorin aortasi shoxlari) orqali o‘tadi va uning hajmii 1,25*l*/min (yurak qon oqimining 25%)ni tashkil etadi. Buyrak tos bo‘shlig‘i pastga, peshob pufagi tomon tushadi. Chiqarish tizimining oxirgi qismi – peshob chiqarish organlaridir.



2.20-rasm. Buyrakning tuzilishi

Jigar bu eng katta oshqozon bezidir, u o‘t pufagi va qon orqali yuborilgan moddalarni portal tomir orqali chiqarishga mo‘ljallangan. Jigarning safro tizimiga safro kapillyarlari, septal va interlobular o‘t yo‘llari, o‘ng va chap jigar, umumiy jigar, kist, umumiy o‘t yo‘llari va o‘t pufagi kiradi.

Tomirlar, asab va o‘t yo‘llari jigarning ko‘ndalang truba qismida joylashgan darvozadan o‘tadi. Me’da osti bezi yo‘llari bilan bog‘langan umumiy o‘t yo‘llari o‘n ikki barmoqli ichakka tushadi. O‘ng tomondagi bo‘ylama o‘t pufagi. Bu o‘t pufagi uchun bir turdagi rezervuar bo‘lib, u o‘n ikki barmoqli ichakda ovqatni qabul qilish vaqtida bo‘shatiladi. Jigar diametri 1-2 mm bo‘lgan jigar lobulalaridan iborat bo‘lib, ular markaziy tomir atrofidagi radial nurlar shaklida joylashgan jigar hujayralari tomonidan hosil bo‘ladi. Har bir lobula jigar arteriyasi va portal venasining kichik shoxlari zich tarmog‘i bilan o‘ralgan. Ulardan kapillyarlar chiqib ketadi, ular jigar nurlari orasidagi lobulalarga kiradi. Markaziy tomir ichiga tushgan kapillyarlar birlashib, jigar ichiga ochiladigan kattaroq tomirlarni hosil qiladi.



2.21-rasm. Jigarning safro yo‘llari

Yuqorida ta’kidlanganidek, inson tanasining tuzilishi fraktallar to‘plamidan tashkil topganligi uchun so‘nggi yillarda tibbiyot sohasidagi olimlar kasalliklarga diagnoz qo‘yish va davolash uchun fraktal algoritmlarni qo‘llashni taklif etmoqdalar. Chunki:

– ular yurak-qon tomirlari kasalliklarida diagnozlarni aniq va tez qo‘yishga imkon beradi;

– tibbiy rentgen tasvirlarni qayta ishlashda fraktal algoritmlardan keng foydalaniladi;

– saraton kasalliklariga oid muhim yangiliklarni ochgan, ular normal va saraton bilan kasallangan hujayralar bir-biriga yopishsa, ular har xil fraktal o‘lchamga ega bo‘ladi, degan xulosalarni aytganlar. Bu o‘z navbatida kasallikga diagnoz qo‘yishda muhim ekanligini ta’kidlagan.

Xulosa o‘rnida aytish mumkinki, biosensor o‘zaro ta’sir va yurak urishi, xaotik jarayonlarni modellashtirish, ichki organlar tizimini bayon etish uchun hamda biologik populyatsiyaning modelini ishlab chiqish kabilarda fraktallar nazariyasidan keng foydalaniladi.

Suyuqliklar va gazlar mexanikasi sohasida. Oqimdagi turbulent (tartibsiz) holatni o‘rganish fraktallarda juda yaxshi quriladi. Turbulent oqimlar xaotik bo‘lib, ularning modelini qurish juda murakkab. Bunda murakkab oqimlarning dinamikasini tushinishga imkon beruvchi fraktal ifodalashga o‘tish muhandislar va fiziklarning ishini ancha yengillashtiradi.

Sirtlar fizikasi sohasida. Sirtlar egri chiziqlarini bayon etish uchun fraktallar ishlatiladi. Teng bo‘lmagan sirt ikkita turlicha fraktallar kombinatsiyasida tavsiflanadi. Fraktallar yordamida juda murakkab fizik jarayonlarning modelini, shuningdek yog‘du tillarini modellashtirish mumkin. Juda murakkab geometrik tuzilishga ega g‘ovak buyumlarni fraktal shakllar yaxshi uzatadi. Bu bilim neft haqidagi fanda ishlatiladi. Fraktallar sirtlarning egriligini tasvirlash uchun ishlatiladi. Qattiq sirt ikki xil fraktallarning kombinatsiyasi bilan tavsiflanadi.

San’at sohasida. Fraktallarni qo‘llashning yana bahsli sohalaridan biri kompyuter san’ati sohasidir. Fraktal nafaqat olimlarga xizmat qiladi, balki rassomlarga ham fikrlarini, hissiyot va kayfiyatlarini, eng zo‘r tasavvurlarini uzatishda yordam beradi. Shuningdek, har bir notalarni yozishda aynan fraktal tuzilishli algoritmlar qo‘llaniladi.

Fizika va boshqa tabiiy fanlarda. Fraktallar nochiziqli jarayonlarni ya’ni yolqin, suyuqliklarning girdobli harakati, bulut, diffuzion-yutilish (adsorbtsiya) kabi murakkab jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi. G‘ovak materiallarni modellashtirishda ham fraktallar qo‘llaniladi.

Fraktallarning xususiyatlari va ularning qo‘llanilish imkoniyatlarini o‘rganib, hayotda uchraydigan turli jarayonlarni modellashtirishda fraktallar xizmati katta ekanligini aytish mumkin.

Fizikada fraktallar, tabiiy ravishda, noturg‘un suyuqlik oqimi, murakkab diffuziya-adsorbsiya jarayonlari, otash, bulut va boshqalar kabi chiziqli bo‘lmagan jarayonlarni modellashtirishda paydo bo‘ladi. Fraktallar g‘ovakli materiallarni, masalan, neft kimyosida modellashtirish uchun ishlatiladi. Oqimlarda turbulentlikni o‘rganish fraktallarga juda moslashadi. Turbulent oqimlar tartibsizdir, shuning uchun uni aniq modellashtirish qiyin. Fraktal vakillikka o‘tish yordam beradi, bu muhandislar va fiziklarning ishini osonlashtiradi va ularga murakkab oqimlarning dinamikasini yaxshiroq tushunishga imkon beradi. Biologiyada ular populyatsiyani modellashtirish va ichki organlar tizimini tavsiflash uchun ishlatiladi.

Ko‘pincha fraktallar geologiya va geofizikada qo‘llaniladi. Hech kimga sir emaski, orollar va qit’alarning qirg‘oqlari bir necha fraktal o‘lchamga ega, ular yordamida siz qirg‘oqlarning uzunligini aniq hisoblashingiz mumkin.

Fraktallarning fizik talqini. Algebraik fraktalni tushunish uchun oddiy tajribani ko‘rib chiqamiz. Ipga osilgan to‘p vertikaldan burilib tushadi. Tebranishlar sodir bo‘ladi. Agar to‘p biroz egilgan bo‘lsa, unda uning harakati chiziqli tenglamalar bilan tavsiflanadi. Agar og‘ish yetarlicha katta bo‘lsa, tenglamalar allaqachon chiziqli bo‘lmaydi. Nima o‘zgaradi? Birinchi holda, tebranish chastotasi (va shunga mos ravishda davr) boshlang‘ich og‘ish darajasiga bog‘liq emas. Ikkinchisida, tegishlilik sodir bo‘ladi. Eng oddiy holatda u induktor, kondensator va rezistordan (qarshilik) iborat. Masalan, sig‘im nochiziqli bo‘lsa, tebranish davri ularning amplitudasiga bog‘liq bo‘ladi.

Tebranish davri dinamikasi ikkita o‘zgaruvchiga qarab aniqlanadi, masalan, kontaktlarning zanglashiga olib keladigan oqim va sig‘imdagi kuchlanish. Agar bu qiymatlarni X va Y o‘qlari bo‘ylab kechiktirsak, tizimning har bir holati natijada olingan koordinata tekisligidagi ma’lum bir nuqtaga to‘g‘ri keladi. Bunday tekislikka faza deyiladi. (Shunga ko‘ra, agar dinamik tizim *n* o‘zgaruvchilar bilan aniqlansa, u holda ikki o‘lchovli fazoviy tekislikning o‘rniga uni n-o‘lchovli fazo maydoni bilan bog‘lash mumkin).

Endi biz matematik mayatnikga tashqi davriy signal bilan ta’sir qilishni boshlaymiz. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tizimlarning javoblari boshqacha bo‘ladi. Birinchi holda haydash signalining chastotasi bir xil chastota bilan muntazam davriy tebranishlar asta-sekin o‘rnatiladi. Fazoviy tekislikda bunday harakat tortuvchi deb nomlangan yopiq egri chiziqqa to‘g‘ri keladi (ingliz tilidan tortib olish uchun – jalb qilish so‘zidan) – barqaror jarayonni tavsiflovchi ko‘plab trayektoriyalar. Chiziqsiz mayatnik holatida fazoviy tekislikda trayektoriya o‘zboshimchalik bilan uzoq vaqt davomida yopilmasa, murakkab, davriy bo‘lmagan tebranishlar paydo bo‘lishi mumkin. Bunday holda deterministik tizimning harakati mutlaqo tasodifiy jarayonga o‘xshaydi.

Shunday qilib, tizimning fazoviy maydoni jalb qiluvchilarning diqqatga sazovor joylariga bo‘linadi. Agar fazo maydoni ikki o‘lchovli bo‘shliq bo‘lsa, unda diqqatga sazovor joylarni turli xil ranglar bilan bo‘yash orqali ushbu tizimning rangli fazali portretini olish mumkin (iterativ jarayon). Rang tanlash algoritmini o‘zgartirib, juda ko‘p rangli naqshlar bilan murakkab fraktal naqshlarni olishingiz mumkin.

Tabiatdagi fraktallar. Tabiat ko‘pincha mukammal geometriya va shunday uyg‘unlik bilan ajoyib va chiroyli fraktallarni yaratadi.

Fraktallar daraxt grafikasi, butalar, tog‘ landshaftlari, dengiz sathlari va boshqalar kabi tabiiy obyektlarning rasmlarini yaratish uchun kompyuter grafikasida keng qo‘llaniladi. Ular yordamga murojaat qilishadi, masalan, zarur bo‘lganda, juda murakkab shakldagi chiziqlar va sirtlarni olish uchun. Fraktallar sirtlarning egriligini tasvirlash uchun ishlatiladi.

Forex bozori savdosida fraktallardan foydalanish. Fraktallar juda ko‘p forexlar savdosida ishlatiladi. Bill Uilyams ulardan savdoda faol foydalana boshladi, ammo shuni ta’kidlash kerakki, ular boshqa nom ostida bundan ancha oldin ishlatilgan. Doktor Uilyams ilmiy ishlari natijasida bozor tartibsiz tizimlar kabi harakatlanmoqda, degan xulosaga keladi. Boshqacha qilib aytganda, yurakdagi qon oqimi, qirg‘oq chizig‘i va paxta narxi xuddi shu tuzilishga ega. Bill Uilyamsning tadqiqotlari shuni ko‘rsatadiki, bozor chiziqli tizim emas, balki u tartibsizdir. Shunga ko‘ra, uni tahlil qilish uchun chiziqli funksiyalarga asoslangan standart ko‘rsatkichlardan foydalanish yetarli natijaga olib kelmaydi. Bu, shuningdek, bozorning barqarorligi vaqtinchalik, doimiy esa aniq betartiblik ekanligini anglatadi. Forex fraktallari kompyuterni modellashtirish jarayonida kashf qilindi, keyin bozorning tuzilishini tavsiflovchi kamchiliklar topildi.

Fraktal – bu har qanday to‘xtash yo‘qotishlariga xos bo‘lgan takrorlanuvchi shakllanishdir. Forexda bu har qanday bozor, istalgan vaqt oralig‘i. Va ularning kelib chiqishi, tovar va fond bozorlarining fraksiyalari, qirg‘oq chizig‘ining fraktallari bir xil xususiyatga ega.

Birjadagi fraktallar Bill Uilyams tomonidan ishlab chiqilgan ko‘rsatkichdir. Bu juda sodda va ayni paytda ko‘p qirrali hamdir. U mustaqil indikator sifatida ham, boshqa texnik tahlil vositalari bilan ham birgalikda ishlatilishi mumkin.

Bill Uilyamsning xaos nazariyasiga ko‘ra fraktal savdosi. Fraktal ko‘rsatkich Bill Uilyams savdo tizimining beshta ko‘rsatkichlaridan biridir. Tizimga ko‘ra, fraktallarning signallari Alligator deb nomlangan indikator yordamida filtrlanishi kerak.

Fraktallardan foydalangan holda qanday qilib savdo qilish mumkin:

Agar sotib olish signalini beradigan fraktal Alligatorning tishlaridan (qizil chiziq) yuqori bo‘lsa, savdogarlar kutilayotgan sotib olish buyurtmasini fraktalning ustiga bir necha ball qo‘yishlari kerak.

Agar sotish signalini beradigan fraktal Alligatorning tishidan past bo‘lsa, savdogarlar sotuvga qo‘yilgan buyurtmani fraktalning ostidan bir nechta punktga qo‘yishlari kerak.

Boshqa hollarda fraktal indikator taqdim etgan savdo signallariga ishonmaslik kerak.

Kutilayotgan buyurtma ishga tushirilgunga qadar yoki yangi signal paydo bo‘lguncha signal dolzarb bo‘lib qoladi (bu holda kutilayotgan buyurtma darajasini o‘zgartirish kerak). Har bir yangi trend fraktalidan savdo pozitsiyasini yaratish uchun foydalanish mumkin.

Fraktallar nazariyasi ***Yer sharining tuzilishi***ni o‘rganishda ishlatiladi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fraktallar nazariyasining tibbiyot va biologiyadagi o‘rni qanday?
2. Organlar va organizmlarning fraktalliligi va fraktal o‘lchami haqida nimallarni bilasiz?
3. Tibbiyot sohasidagi olimlar kasalliklarga diagnoz qo‘yish va davolash uchun qanday fraktal algoritmlarni qo‘llashni taklif etmoqdalar?
4. Suyuqliklar va gazlar mexanikasi sohasida fraktalla o‘rni haqida gapirib bering.
5. Sirtlar fizikasi sohasida fraktallardan qanday maqsadda foydalanish mumkin?
6. San’at sohasidagi fraktallarning o‘rnini tushuntirib bering.
7. Fizika va boshqa tabiiy fanlarda fraktallarning o‘rni nimalarda aks etadi?
8. Fraktallarning fizik talqinini tushuntirib bering.
9. Bill Uilyamsning xaos nazariyasiga ko‘ra fraktal savdosi haqida nimalarni bilasiz?

III BOB. FRAKTAL VA TOPOLOGIK O‘LCHOVLAR

Fraktal o‘lchov fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biri hisoblanadi. Evklid geometriyasida o‘lchov tushunchasi mavjuddir. Ya’ni kesmaning o‘lchovi bir, aylananing o‘lchovi ikki, sharning o‘lchovi esa uchdir. Masalan, kesma uzunligining o‘lchovini bo‘laklarga bo‘lsak, unda kesmaning o‘lchovi N, kesmani ikkiga bo‘lsak 2N, kesmani o‘nta bo‘lakka bo‘lsak 10N ga teng. Bu holatda to‘g‘ri proportsional bog‘lanish kuzatiladi. Biz maydonni o‘lchash vaqtida quyidagi qiymatlarni olamiz: 4N, 100N ya’ni bu yerda bog‘liqlik kvadratikdir. Uch o‘lchovli shaklning hajmi kubning chiziqli o‘lchovlariga proportsionaldir. Agar bu qoidani fraktal obyektlarda qo‘llasak, kasr sonlardan iborat paradoks holat nomayon bo‘ladi.

Doimo o‘lchov tushunchasi intiutiv ravishda tushunarli deb hisoblanib, matematik jihatdan oson aniqlangan. Chiziqli fazoning o‘lchami tushunchasi elementar geometriya va chiziqli algebradan ma’lumdir. Ko‘pxillilik o‘lchovi – bu Evklid sharlaridan biriktirilgan o‘lchovdir. Biroq matematika, mexanika va fizikada shunday to‘plamlar uchraydiki, ular uchun o‘lchov tushunchasi alohida talqin qilinishi zarur va yana, shuningdek, ular uchun bir necha turli o‘lchovlarni aniqlash mumkin. Bu o‘lchovlar bir-biri bilan ustma-ust tushmasligi ham mumkin. Qat’iy ravishda aytadigan bo‘lsak, ixtiyoriy topologik fazo uchun turli o‘lchovlar tushunchalarini aniqlasa bo‘ladi. Ammo ko‘pxillilik tegishli bo‘lgan fazolar uchun bu sonlar (o‘lchovlar) ustma-ust tushadi. Biroq biz murakkab, ekzotik (ba’zida qandaydir ma’noda “patologik” bo‘lgan) obyektlarni qaraydigan bo‘lsak, turli o‘lcham tushunchalari uchun turli sonlarga ega bo‘lamiz. Ilgari bu asosan amaliyotda kam uchraydigan fazolar sinfi uchun o‘rinli deb hisoblanar edi. Hozir bunday obyektlar matematikaning klassik sohalarida doimo uchraydi. Bular ***fraktal***lardir.

Quyida o‘lchovlarga oid tushunchalarni ko‘rib chiqamiz.

3.1. Fraktal va topologik o‘lchov tushunchalari

***dim* topologik o‘lchovi**. Agar har bir $x \in X (\forall x \in X)$ nuqta U_i to‘plamlarning hech bo‘lmaganda birortasiga tegishli, ya’ni $\forall x \in X \, \exists U_i \in \{U_i\} | x \in U_i$ bo‘lsa, X topologik fazo $\{U_i\}$ qism to‘plamlar tizimining qobig‘i deyiladi.

Qobiqlar chekli bo‘lgan holatlarni qaraymiz. Agar $\{U_i\}$ qobiqning bo‘sh bo‘lmagan kesishmasidan iborat bo‘lmagan n ta element mavjud bo‘lsa, shunday n $(n \in \{0\} \cup N)$ – butun nomanfiy sonlardan eng kattasiga $\{U_i\}$ qobiqning karraligi deb aytiladi (ya’ni, qobiqning n ta turli elementlarga bir vaqtning o‘zida $\{U_j\} (j = \overline{1,n})$ qobiqlarning barchasiga tegishli bo‘lgan hech bo‘lmaganda bitta nuqtasi mavjuddir).

Yopiq chekli to‘plamni qaraymiz. Har bir kompakt $\forall \varepsilon > 0$ da ε-qobiqqa ega, ya’ni uni har biri ε dan kichik diametrga ega bo‘lgan chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin (agar $\forall V_j$ hech bo‘lmaganda bitta $U_i \in \{U_i\}$ ga tegishli bo‘lsa, $\{V_j\}$ to‘plamlar tizimi qismqobiq deyiladi).

Ta’rif. Agar ***X*** fazoning istalgan ochiq qobig‘iga, karraligi $n+1$ dan katta bo‘lmagan yopiq qism qobiqni kiritish mumkin bo‘lsa, shunday n ta butun sonlarning eng kattasiga ***X*** ning d_T topologik o‘lchovi yoki *dim* kompakti deb aytiladi. Agar bunday sonlar mavjud bo‘lmasa $dimX \overset{def}{=} +\infty$ deb faraz qilinadi. Topologik o‘lchov, shuningdek Brauer o‘lchovi yoki oddiy o‘lchov deb ham yuritiladi.

d**H** ***Xausdorf o‘lchovi (yoki fraktal o‘lchov).*** Aytib o‘tganimizdek, nuqtaning o‘lchovi nolga, kesma, aylana, umuman olganda tekislikdagi yoki fazodagi ixtiyoriy egri chiziqning o‘lchovi birga, doira, sferaning o‘lchovi ikkiga, jismlarning o‘lchovi esa uchga tengdir. Barcha keltirilgan misollarda o‘lchov qaralayotgan obyektda nuqtani belgilash zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soniga tengdir. Biroq “o‘lchov” tushunchasi kengroqdir. U faqat xususiy hollarda obyektni aniqlash uchun zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soni bilan ustma-ust tushadi. Bir o‘lchovli obyektlarni uzunlik tushunchasi bilan, 2 o‘lchovli obyektlarni yuzalar tushunchasi bilan bog‘laymiz va h.k. Biroq 3/2 o‘lchovga ega bo‘lgan to‘plamni qanday tasavvur qilish mumkin? 1919-yili Feliks Xausdorf ixtiyoriy $\alpha \geq 0,\ (\alpha \in R)$ uchun α-o‘lchovni aniqlaydi va shu asosda Evklid fazosida har bir to‘plamga metrik o‘lchov deb nomlanadigan sonni mos qo‘yadi.

Bizga ma’lum bo‘lgan uzunlik, yuza va hajm tushunchalarini Evklid fazosida ko‘rib chiqamiz.

R^1 da *r* radiusli sharning diametri (uzunligi) *2r* ga teng. R^2da sharning yuzasi πr^2 ga teng. R^3da hajm $\frac{4}{3}\pi r^3$ga teng. Bu formulalar ixtiyoriy butun son o‘lchovli Evklid fazosida quyidagicha ifodalanadi:

$$V_d = \gamma(d)\cdot r^d,\ d = 1,2,3,... \qquad (1)$$

$\gamma(d) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d \Big/ \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)$, bu yerda $\Gamma(x)$– Eyler gamma-funksiyasi:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dt, \quad x > 0.$$

R^n da r radiusli sharning d-o‘lchovini aniqlash orqali kasr ko‘rinishdagi o‘lchov nazariyasini qurishda birinchi qadam qo‘yiladi. Bunda *d*-ixtiyoriy nomanfiy haqiqiy son. Bunga barcha haqiqiy *d>0* larda (1) formula bajarilishi orqali erishiladi. Masalan, 3/2-o‘lchovli fazoda sharning o‘lchovi $\gamma(3/2)\cdot r^{3/2}$ ga teng.

Navbatdagi qadamda *d*-o‘lchov tushunchasi sharning ixtiyoriy $A \subset R^n$ to‘plami uchun o‘tkaziladi. Buning uchun $B_\varepsilon(x_i)$ sharlar to‘plami orqali *A* qobiqni quramiz (3.1-rasm).

3.1-rasm. Sharlar to‘plamidan iborat *A* qobiq

Ularning hajmlarini qo‘shib chiqamiz:

$$\sum_{i=1}^{M} \gamma(d) \cdot \varepsilon^d .$$

Ta’rif. To‘plamning ε-fraktalli d-o‘lchovi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu(A, d, \varepsilon) \overset{def}{=} \min\{M\} \cdot \varepsilon^d \equiv N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \qquad (2)$$

yoki ***A*** to‘plamning mumkin bo‘lgan barcha qobiqlari

$$\mu(A, d, \varepsilon) = \inf\{\sum \gamma(d)\} \cdot \varepsilon^d$$

ga aytiladi.

Masalan, agar $A_1 = [0,1] \in R^1$ bo‘lsa, bunda $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

$\varepsilon \to 0$ da bu $\inf$ faqat o‘sishi mumkin. Demak, $\varepsilon \to 0$ da $\mu(A, d, \varepsilon)$ chegara mavjud bo‘ladi.

Ta’rif. Xausdorfning fraktalli d-o‘lchovli sferik o‘lchovi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu_F(A, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \mu(A, d, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \mu(\varepsilon^d \cdot N(\varepsilon)) \equiv \mu_F(A, d)$$

ko‘pincha quyidagicha bo‘lishi ham mumkin:

$$\mu_F = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu(A,d,\varepsilon).$$

Bezikovich har bir X uchun har doim $d_H \in R$ soni mavjud ekanligini, X kompaktining d-o‘lchovli Xausdorf o‘lchovi $d<d_H$ da cheksiz va aksincha $d>d_H$ da 0 ga teng ekanligini ko‘rsatdi.

Agar $A_1=[0,1]$ bo‘lsa,

$d=1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\cdot N(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\frac{1}{2}$,

$d>1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=0$;

$d<1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\infty$ bo‘ladi.

Umumiy holda yopiq, agar chegaralangan ***A*** to‘plam uchun $\mu_F(A,d^1)>+\infty$ o‘rinli bo‘lsa, ixtiyoriy $d>d^1$ uchun $\mu_F(A,d^1)>0$ o‘rinlidir. Agar $\mu_F(A,d^1)>0$ bo‘lsa, u holda $\forall d<d^1 \Rightarrow \mu_F(A,d)=+\infty$. Demak, shunday $d_H\in[0,+\infty)$ soni mavjudki, $d>d_H$ da $\mu_F(A,d)=0$ va $\mu_F(A,d)=\infty$ ga teng. $\forall d<d_H$ bo‘lganda, bunda $\mu_F(A,d)$ soni $[0,+]$ intervalga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy son bo‘lishi mumkin. Ravshanki,

$$d_H=\inf\{d\}\big|\mu_F(A,d)=0.$$

Ta’rif. A to‘plamning Xausdorf-Bezikovich (metrik yoki fraktal) o‘lchovi deb, $d_H=\inf\{d\}\big|\mu_F(A,d)=0$ munosabatni qanoatlantiruvchi d_H soniga aytiladi va u d,d_H ko‘rinishida yoki d_F ko‘rinishida belgilanadi.

Masalan, $A_1=[0,1]$ uchun $\mu_F(A_1,d)=\begin{cases}0, & d>1;\\ +\infty, & d<1;\\ \frac{1}{2}, & d=1.\end{cases}$

Demak, $d_H(A_1)=1$.

(2) formulaga qaytamiz:

$$\mu(A,d,\varepsilon)=N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^d \Rightarrow N(\varepsilon)=\frac{\mu}{\varepsilon^d}.$$

Ikkala qismini logarifmlaymiz:

$$\log N(\varepsilon)=\log\mu-\log\varepsilon^d \Rightarrow d=-\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\varepsilon},$$

yoki

$$d=d_H=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ko‘pchilik “ajoyib” obyektlar, fazolar, to‘plamlar uchun ***dim*** va $\boldsymbol{d_H}$ ustma-ust tushadi, biroq $\dim < d_H$ bo‘lgan obyektlar ham mavjud. Bular ***fraktal***lardir.

d_M Minkovskiy o‘lchovi. Minkovskiy o‘lchovi, Xausdorf-Bezikovich o‘lchovi bilan o‘xshash va amaliy masalalarni yechishda juda qulay hisoblanadi. Biroq Minkovskiy o‘lchovini aniqlash algoritmi biroz soddaroq. Umuman (fraktal yoki tekis) egri chiziq uchun d_M Minkovskiy o‘lchovini quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilaylik, *r* radiusli katta bo‘lmagan Evklid shari (aylana)ning markazi egri chiziq bo‘ylab shar harakati bilan hosil bo‘luvchi *S(r)* Minkovskiy yuzasini qoplab turib harakatlanadi. *S(r)* yuzani *2r* ga nisbatini olamiz. Tekis egri chiziq bo‘lgan holda egri chiziqning uzunligini hosil qilamiz, biroq fraktal egri chiziq uchun natija cheksiz bo‘ladi. Haqiqatan ham, *F(r)/2r* nisbat r^{1-d_M} miqdorga proportsional, bu miqdor $d_M>1$ da $r\to 0$ uchun uzoqlashadi. d_m miqdorning qiymati uzoqlashish tezligi o‘lchovi bo‘ladi va Minkovskiy-Buligan o‘lchovi deb aytiladi. Uni quyidagi:

$$d_M = \lim_{r\to 0} \frac{\ln S(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} + 2,$$

formula bo‘yicha hisoblanadi. Tekis egri chiziq bo‘lgan holda $S(r) \sim r$ va $d_M = -1+2=1$.

Barcha qat’iy o‘ziga o‘xshash fraktallar uchun d_M Minkovskiy o‘lchovi d_H Xausdorf-Bezikovich o‘lchoviga teng. Agar bu o‘lchovlar teng bo‘lmasa, u holda

$$d_M > d_H.$$

Bundan kelib chiqadiki, Minkovskiy o‘lchovi Xausdorf-Bezikovich o‘lchovidan birmuncha “noqulaydir”, chunki u obyektning ba’zi bir mayda tuzilishini hisobga olmaydi.

Fraktal geometriyaning asosiy g‘oyalaridan biri borliqda o‘lchovlar miqdori uchun butun bo‘lmagan qiymatlar g‘oyasidir. Oddiy Evklid geometriyasi mavjud borliq tekis va silliq ekanligini ta’kidlaydi. Bunday borliqning xususiyati nuqtalar, chiziqlar, burchaklar, uchburchaklar, kublar, sferalar, tetraedrlar va boshqalarni beradi.

Tabiatdagi ko‘plab obyektlar (masalan, inson tanasi) biri ikkinchisi bilan qo‘shilgan fraktallar to‘plamidan tashkil topgan bo‘lib, har bir fraktal boshqalarining o‘lchamidan farq qiladigan o‘zining o‘lchamiga ega. Masalan, insonning ikki o‘lchamli sirtidagi tomirli tizimlari egiladi, tarmoqlanadi, buraladi va qisiladi, uning fraktal o‘lchami 3.0 ga teng. Ammo agar u alohida bo‘laklarga bo‘lingan bo‘lsa, arteriya qon tomirining fraktal o‘lchami faqatgina 2.7 ga teng bo‘ladi, unda o‘pka bronxial yo‘lidagi fraktal o‘lcham 1.07 ga teng.

3.2 Fraktal o‘lchovlarni hisoblash usullari

Fraktallarning xususiyatlarini o‘rganish asosiy masalalardan biri bo‘lib, ularni tushunish o‘ta muhimdir. So‘nggi yillarda e’tibor geografik, me’morchilik, tibbiyot va fazoviy hodisalar sohasiga yo‘naltirildi. Geografik hodisalar fraktallarga tegishli uchta xususiyatga ega va bu fazoviy ma’lumotlar hamda hodisalarni tekshirishning innovatsion usuli hisoblanadi.

Fraktal egri chiziqlarda takrorlanish jarayonining har bir bosqichi ularga ko‘proq uzunlik qo‘shadi. Cheksiz sonli qadamlar natijasida hosil bo‘lgan fraktal egri chiziq cheksiz uzunlikka ega bo‘ladi. Fraktal egri chiziqlar uzunligining o‘sish tezligi egri chiziqning ajralib turadigan xususiyati hisoblanadi. Asosiy tushuncha shundaki, uni o‘lchash uchun ishlatiladigan o‘lchov moslamasining uzunligi va hajmi bir-biriga bog‘liqdir. Ushbu o‘zaro munosabatlar ma’lum qonuniyatga ega bo‘lib chiqadi. Ushbu qonuniyat o‘chov ta’rifi uchun ham muhimdir. Matematikada ma’lum bir muammo turiga nisbatan o‘lchovning ko‘plab ta’riflari mavjud.

Yerni masofadan zondlash (YeMZ) tizimlarida olingan tasvirlarni qayta ishlashning amaliy muammolarida fraktal o‘lchovni hisoblash ko‘pincha kublar usuli, qoplama usuli, lokal-dispersiya usuli, prizma usuli, Richardson effekti va boshqa bir qator usullar asosida amalga oshiriladi.

Biroq, bir xil tasvirni turli xil usullar yordamida qayta ishlashda ham, natijalar ko‘pincha bir-biridan farq qiladi. Amalda fraktal o‘lchovni topishda hisoblash aniqligi, tezligi va tizim resurslari inobatga olingan holda tegishli algoritmni tanlash kerak.

Kublar usuli. Kublar usulidan foydalanganda tekshirilgan sirtni qoplash uchun zarur bo‘lgan tomoni ε bo‘lgan $N(\varepsilon)$ kubiklarning eng kichik miqdori hisoblanadi. Ushbu usul eng qulay va ko‘pincha egri chiziqlarning fraktal o‘lchamlarini hisoblash uchun ishlatiladi. Sirt o‘lchamini hisoblashda ushbu usul kamroq qo‘llaniladi, chunki u kerakli aniqlikka ega emas. E to‘plamini qoplash uchun yon tomoni ε bo‘lgan kublarning minimal soni $N(\varepsilon)$ bo‘lsin, u holda o‘rganilayotgan tekstura o‘lchovi tushunchasini kiritish mumkin:

$$\mu_p^h(E) = N(\varepsilon)\varepsilon^D. \tag{1}$$

Faraz qilaylik agar $\mu_p^h(E) > 0$ o‘lchovda, o‘zgarmas $C > 0$ bo‘lsa, u holda o‘lchov quyidagicha ifodalanadi:

$$N(\varepsilon) \approx C/\varepsilon^D, \quad \text{yoki} \tag{2}$$

$$\lg N(\varepsilon) = \lg C - D\lg\varepsilon, \tag{3}$$

bundan quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$D = -\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg\varepsilon} + \frac{\lg C}{\lg\varepsilon}. \tag{4}$$

$\varepsilon \to 0+$ da $\lg\varepsilon \to -\infty$ bo‘lgani uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$D = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}. \tag{5}$$

(3) formuladan ko‘rinib turibdiki, $\lg N(\varepsilon)$ ning $\lg(\varepsilon)$ ga bog‘liqlik grafigi D burchak koeffitsiyentga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni tashkil qiladi.

Qoplama usuli. Qoplama usuli bilan o‘lchovni aniqlash fraktal yuzasi $S(\varepsilon)$ bo‘lgan sirtni ε masshtablashning har xil qiymatlari uchun olingan yuqori va pastki qoplamalar yordamida baholashni o‘z ichiga oladi. Fraktal o‘lchovni ushbu usul bilan hisoblash uchun ko‘rsatilgan sirtning qalinligi 2ε bo‘lgan qoplama olinadi, bu sirtning maydoni hisoblab chiqiladi va olingan qiymatni 2ε ga bo‘lgandan so‘ng fraktal o‘lchov D parametriga bog‘liq bo‘lgan taxmin olinadi, qoplama yuzasi ikki komponent bilan aniqlanadi: u_ε – yuqori sirt va b_ε – pastki sirt. Yuza nuqtalarining qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$u_\varepsilon(i,j) = \max\left\{u_{\varepsilon-1}(i,j)+1, \max_{|(m,n)-(i,j)|\le 1} u_{\varepsilon-1}(m,n)\right\}, \tag{6}$$

$$b_\varepsilon(i,j) = \max\left\{b_{\varepsilon-1}(i,j)+1, \max_{|(m,n)-(i,j)|\le 1} b_{\varepsilon-1}(m,n)\right\}, \tag{7}$$

bu yerda $\varepsilon = 1,2,3...,\ u_0(i,j) = b_0(i,j) = I(i,j).$

Qoplama usulida olingan maydon yuzasi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S(\varepsilon) = \frac{\sum_{i,j}\left(u_\varepsilon(i,j) - b_\varepsilon(i,j)\right)}{2\varepsilon}. \tag{8}$$

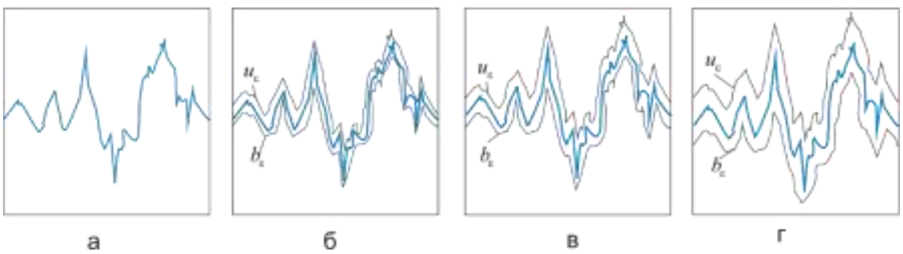
Fraktal o‘lchovning qiymati esa quyidagi ifodadan aniqlanadi:

$$S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{2-D}. \tag{9}$$

Shunday qilib, $\lg S(\lg\varepsilon)$ grafigidagi k koeffitsiyentning qiymati fraktal o‘lchovni topish uchun ishlatiladi:

$$D = 2 - k. \tag{10}$$

Qoplama usulning tasviri 3.2-rasmda keltirilgan:



3.2-rasm. Yuqori u_ε va pastki b_ε sirtlarni har xil masshtablarda qurish: a) $\varepsilon = 0$; b) $\varepsilon = 1$; v) $\varepsilon = 2$; g) $\varepsilon = 3$.

Lokal-dispersiya usuli. Lokal-dispersiya usulidan foydalanganda fraktal o‘lchovning qiymati intensivlik (yorqinlik)ning dispersiyasini bir necha shkalasi bo‘yicha hisoblash orqali aniqlanadi. Buning uchun har xil o‘lchamdagi ε_P rasmlarning $\boldsymbol{P}$ sonidagi $I_P(m,n)$ to‘plami mavjud, bu yerda $p \in [1,P]$, xuddi shu tekshirilgan fragment chiziqli oynani tekislash orqali hosil bo‘ladi, ya’ni I asl tasvirni I' ramkali tasvirga filtrlash orqali hosil qilinadi. $(2M+1)\times(2N+1)$ o‘lchamdagi oyna bilan ramkalarni filtrlash natijasida olingan $I'(m',n')$ elementlarning qiymatlari quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$I \to I' : I'(m',n')\Big|_{\forall mn} = \frac{1}{(2M+1)(2N+1)} \sum_{m=m'-M}^{m'+M} \sum_{n=n'-N}^{n'+N} I(m,n), \qquad (11)$$

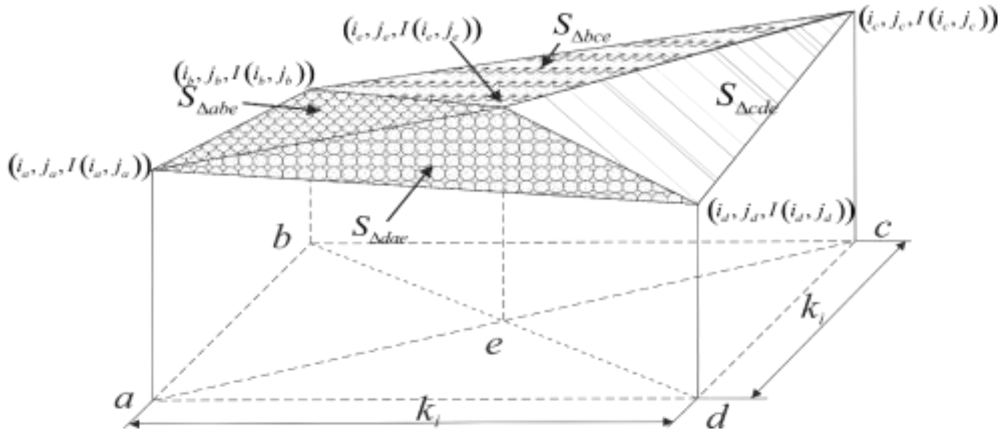
keyingi bosqichda $K \times K$ skanerlash oynasi yordamida $I_P(m,n)$ oynasidagi yorqinlik qiymatining standart og‘ishlari σ_p^2 – ni hisoblash amalga oshiriladi, bu yerda $0 \le m, \quad n \le K$, har xil ε_P o‘lchamlar uchun hisoblanadi. $\sigma^2(\varepsilon)$ standart og‘ishning ε o‘lchamga bog‘liqligi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$\sigma_p^2(\varepsilon_p) \approx \varepsilon_p^{6-2D}, \qquad (12)$$

α burchakning koeffitsiyentini topish uchun $\lg\sigma_p^2(\lg\varepsilon_p)$ grafigidan foydalaniladi. Keyin fraktal o‘lchovning qiymati aniqlanadi:

$$D = 3 - \frac{\alpha}{2}. \qquad (13)$$

Prizma usuli. Prizma usuli o‘rganilgan sirt maydonini har xil o‘lchov birliklarida har xil yaqinlashishlar yordamida hisoblash asosida fraktal o‘lchovning qiymatini aniqlashga imkon beradi. Prizma usuli bilan o‘lchovni hisoblashda $K_0 \times K_0$ o‘lchamdagi oyna tanlanadi. O‘lchash oynasi to‘rtta uchburchakka bo‘lib olinadi. Mazkur uchburchaklarni qurish uchun o‘rganilayotgan oynaga tegishli beshta nuqta ishlatiladi: to‘rtta a, b, c, d - balandliklar va e -ishlov berish oynasining markazi. Ushbu uchburchaklarning balandliklari 3.3-rasmda quyidagicha ko‘rsatilgan:



3.3-rasm. To‘rtta tasvir nuqtasi yordamida prizma chizish

1-uchburchak $-(i_a, j_a, I(i_a, j_a)), (i_b, j_b, I(i_b, j_b)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

2-uchburchak $-(i_b, j_b, I(i_b, j_b)), (i_c, j_c, I(i_c, j_c)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

3-uchburchak $-(i_c, j_c, I(i_c, j_c)), (i_d, j_d, I(i_d, j_d)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

4-uchburchak $-(i_d, j_d, I(i_d, j_d)), (i_a, j_a, I(i_a, j_a)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e)).$

Hosil bo‘lgan $S_{\Delta abe}, S_{\Delta bce}, S_{\Delta cde}$ *ва* $S_{\Delta dae}$ uchburchaklarning maydonlarini ma’lum bo‘lgan formulalar yordamida masalan Geron formulasi orqali hisoblab chiqiladi. K_0 qiymati uchun qurilgan prizmaning sirt maydoni quyidagi formula bilan topiladi:

$$S_{K_0} = S_{\Delta abe} + S_{\Delta bce} + S_{\Delta cde} + S_{\Delta dae}. \tag{14}$$

Navbatdagi bosqichda $K_0 \times K_0$ oynasi, $K_1 \times K_1$ kichik oynalarning soni n ga bo‘linadi va ularning har biri uchun $S_{K_1}^i$ qiymati aniqlanadi, so‘ngra quyidagi formula orqali umumiy qiymat topiladi:

$$S_{K_1} = \sum_{i=1}^{n} S_{K_1}^i. \tag{15}$$

Natijada, j-chi takrorlashdan so‘ng o‘zaro bog‘liqlik hosil bo‘ladi:

$$S_{K_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(S_{\Delta abe} + S_{\Delta bce} + S_{\Delta cde} + S_{\Delta dae} \right)_{K_j}^i. \tag{16}$$

Fraktal o‘lchovning qiymati $\lg S_{K_j} \left(\lg K_j \right)$ grafigi orqali topiladi. Fraktal o‘lchov maydonini qurishda $K \times K$ o‘lchamdagi skanerlash oynasi fraktal o‘lchovni hisoblashning birinchi bosqichida $K_0 \times K_0$ o‘lchamdagi o‘lchov oynasiga aylanadi, undan so‘ng ostki oynalarga bo‘linadi.

Richardson effekti. Ingliz olimi *Lyuis Frey Richardson* ma’lum bir qirg‘oq chizig‘i uchun kuzatilgan murakkablikdagi o‘zgarishlarni tavsiflaydigan qonuniyatni aniqladi, bu qonuniyat fraktal o‘lchov tushunchasi uchun namuna bo‘lib xizmat qildi. Bu qirg‘oqlarning fraktal egri chizig‘iga o‘xshash xususiyatlaridan kelib chiqadi, ya’ni qirg‘oq chizig‘i odatda fraktal o‘lchamga ega. Qirg‘oq chizig‘ining o‘lchangan uzunligi uni o‘lchash uslubiga va kartografik umumlashtirish darajasiga bog‘liq, o‘lchagich qanchalik kichik bo‘lsa, hosil bo‘lgan qirg‘oq chizig‘i shunchalik uzunroq bo‘ladi. Bu bugungi kunda L.F.Richardson effekti sifatida tanilgan.

Quruqlikning o‘lchamlari yuzlab kilometrdan millimetr va undan pastroq qismlarga qadar bo‘lgan har qanday miqyosda xususiyatlarga ega bo‘lganligi sababli o‘lchashda hisobga olinadigan eng kichik xususiyatning aniq o‘lchamlari mavjud emas, shuning uchun quruqlikda aniq perimetr yo‘q.

O‘sha paytda L.F.Richardsonning tadqiqotlari ilmiy jamoatchilik tomonidan e’tiborsiz qoldirildi. Bugungi kunda u fraktallarni zamonaviy o‘rganish boshlanishining elementi hisoblanadi. L.F.Richardsonning tadqiqotlarini tahlil qilgan matematik Benoit Mandelbrot, L.F.Richardson haqiqatan ham o‘lchangan L – chegara uzunligi va G – o‘lchov birligi o‘rtasida empirik munosabatlarni yaratganligini ta’kidlaydi:

$$L(G) \sim MG^{1-D}. \tag{17}$$

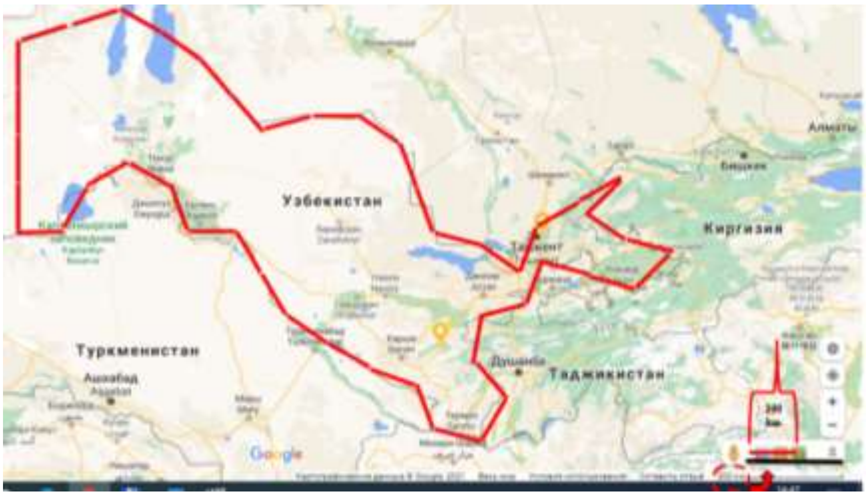
bu yerda M – proportsionallik koyeffisiyenti va D – Fraktal o‘lchovdir.

O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligi hamda fraktal o‘lchovini masshtablangan xarita yordamida Richardson effekti usulida aniqlash. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi ko‘plab yirik, unchalik katta bo‘lmagan, kichik va hatto juda kichik murakkab trayektoriya tashkil qiluvchi kirish joylaridan iborat. Kichikroq o‘lchash moslamasidan foydalanilganda, kirish joylari tobora ko‘proq o‘lchovga kiritiladi va natijada chegara chizig‘i uzunligi uzunroq bo‘ladi. Masshtab xarita orqali O‘zbekiston Respublikasining chegarasining uzunligi 200 km, 100 km, 50km va 25 km uzunliklardagi to‘g‘ri chiziqli segmentlar bilan o‘lchandi.

To‘g‘ri chiziqli segmentlar o‘lchami kichrayib borgan sari O‘zbekiston Respublikasi chegarasining ko‘pburchak tasviri deyarli xarita shakliga yaqinlashadi. Chegara chizig‘ining uzunligi o‘lchash qiymati kichrayishi bilan ortadi. Fraktal o‘lchov – o‘lchov parametrining aniqligi ortgani sari egri chiziq uzunlik miqdorining o‘sishini ko‘rsatadi (3.4, 3.5, 3.6, 3.7-rasmlarga qarang).

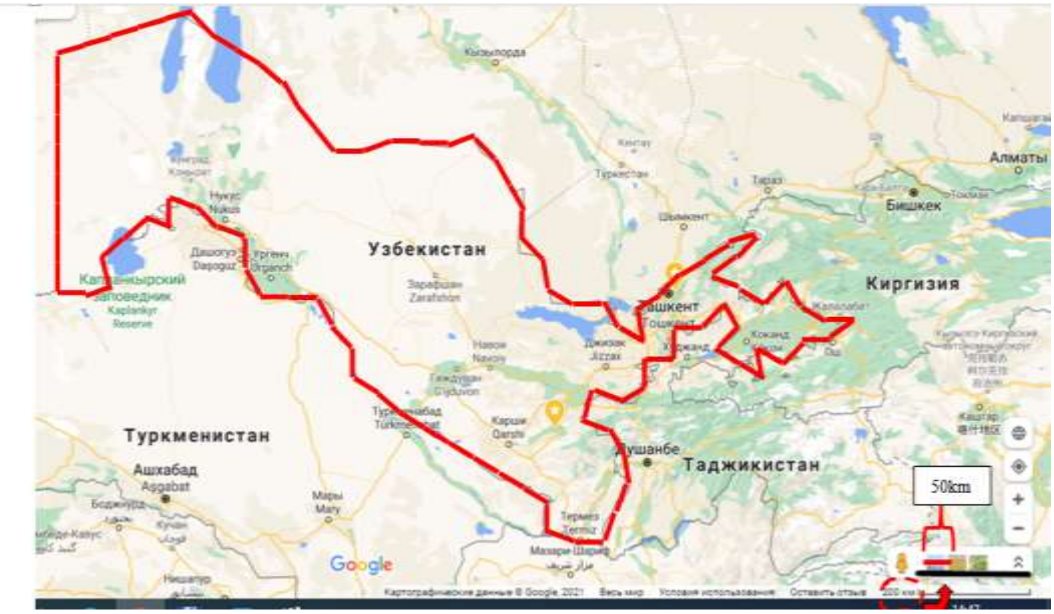
3.4-rasm. O‘zbekiston Respublikasi chegarasining uzunligini 200 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

O‘zbekiston Respublikasi chegarasining uzunligini 200 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda ushbu chiziqlar soni 19,5 tani tashkil etadi (3.4-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 3900 kmdan iborat bo‘ladi.



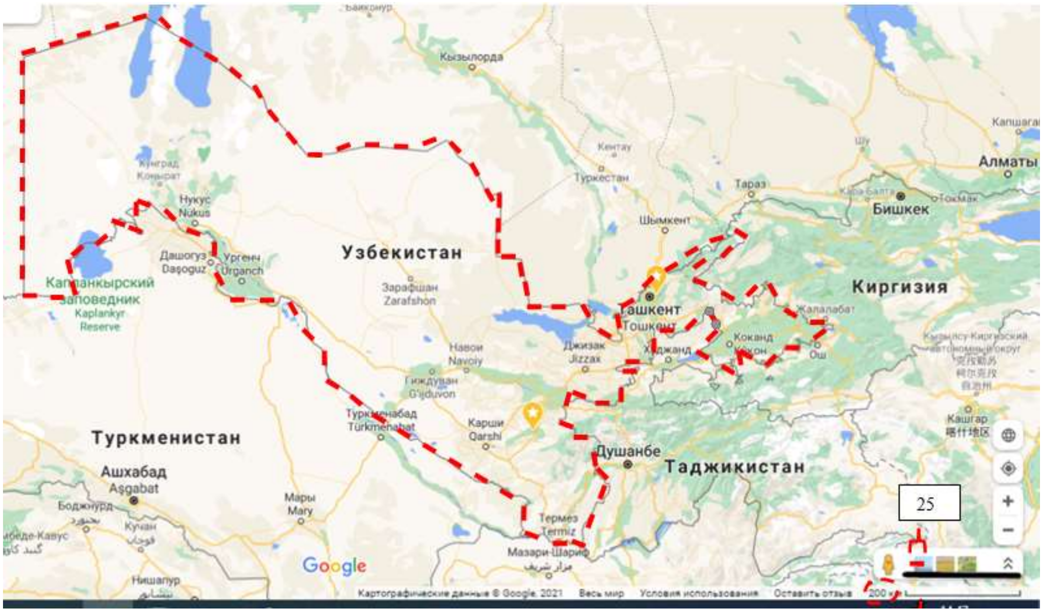
3.5-rasm. O‘zbekiston Respublikasi chegarasining uzunligini 100 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

100 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar soni 44 tani tashkil etadi (3.5-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 4400 kmdan iborat bo‘ladi.



3.6-rasm. O‘zbekiston Respublikasi chegarasining uzunligini 50 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

50 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar soni 100 tani tashkil etadi (3.6-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 5000 kmdan iborat bo‘ladi.



3.7-rasm. O‘zbekiston Respublikasi chegarasining uzunligini 25 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

25 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziq va 25 km uzunlikdagi to‘g‘ri ko‘rinmas chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar umumiy soni 245 tani tashkil etadi (3.7-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 6125 kmdan iborat bo‘ladi. Natijalar quyidagi 3.1-jadvalda keltirilgan.

3.1-jadval

Chegra uzunligi *L* va o‘lchov birligi *G* ning bog‘liqligi

	1-holat	**2-holat**	**3-holat**	**4-holat**
Birliklar soni (N)	19,5	44	100	245
O‘lchov birligi (G)	200 km	100 km	50 km	25km
Chegara uzunligi (L)	3900 km	4400 km	5000 km	6125 km

Yuqoridagi (17) empirik munosabat va jadvalda berilgan qiymat ma’lumotlari fraktal o‘chov (D)ni hisoblashga yordam beradi. Fraktal o‘lchov (D)ni aniqlash uchun $L(G) \sim MG^{1-D}$ empirik munosabat ustida quyidagi matematik qonuniyat amalga oshiriladi:

$$L = MG^{1-D} \Rightarrow \quad \lg L = \lg MG^{1-D} \Rightarrow \quad \lg L = \lg M + \lg G^{1-D} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lg L = \lg M + (1-D)\lg G. \tag{18}$$

Mazkur hosil bo‘lgan formula chiziqli funksiya ko‘rinishiga keltiriladi:

$$y = \lg L; \quad m = (1-D) \quad \Rightarrow \quad D = 1-m; \quad x = \lg G; \quad c = \lg M.$$

Natijada $y = c + mx$ chiziqli funksiya hosil bo‘ladi.

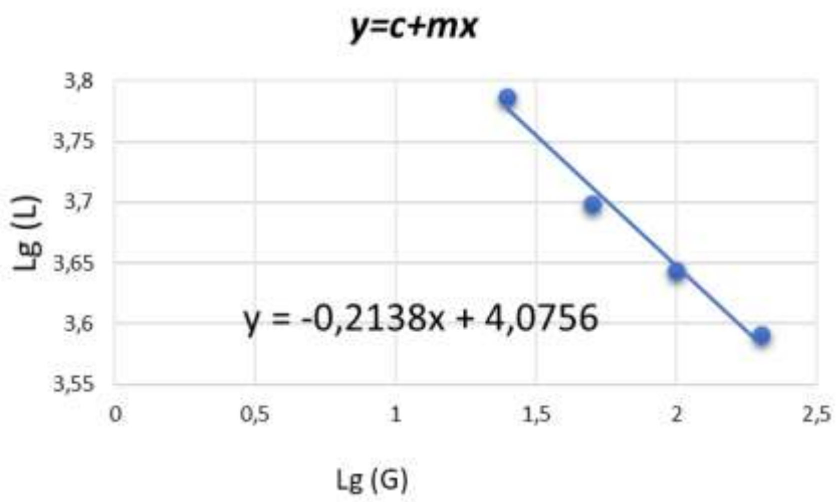
Yuqoridagi 3.1-jadval ma’lumotlaridan foydalanib x va y ning mos qiymatlaridagi logarifmlarini aniqlab, quyidagi 3.2-jadvaldagi natijalari olinadi.

3.2-jadval

Chegra uzunligi *L* va o‘lchov birliklari *G* ning logarifmik qiymatlari

	1-holat	**2-holat**	**3-holat**	**4-holat**
Birliklar soni	19,5	44	100	245
O‘lchov birligi (G)	200 km	100 km	50 km	25km
Chegara uzunligi (L)	3900 km	4400 km	5000 km	6125 km
x=lgG	2,30103	2	1,69897	1,39794
y= lgL	3,591065	3,643453	3,69897	3,787106

Hosil bo‘lgan qiymatlardan foydalanib, interpolyatsiya usuli orqali $y(x)$ funksiya koeffitsiyentlari hosil qilinadi, (3.8-rasm).



3.8-rasm. $y(x)$ **funksiya koeffitsiyentlarini aniqlash**

Hosil bo‘lgan $y = -0,2138x + 4,0756$ chiziqli funksiyani yuqoridagi $y = c + mx$ funksiyaga bog‘liqligidan, $c = \lg M = 4.0756$ va $m = (1 - D) = -0,2138$ qiymatlarni aniqlaymiz.

Hisoblashning yakunida $m=(1-D)=-0,2138 \quad \Rightarrow D=1-(-0,2138)$ dan $D=1,2138$ yoki O'zbekiston Respublikasi chegarasi uzunligining fraktal o'lchovi qiymati quyidagicha bo'ladi: $D\approx 1,21$

Fraktal o'lchovlarni hisoblashning ko'plab usullari mavjud bo'lib, ularning har biri qo'llanishda ma'lum xususiyatlarga ega. Misol uchun Cantor's hisoblash usuli faqat fraktal obyektlarning ma'lum bir sinfiga – tarmoqlanuvchi tuzilmalarga nisbatan qo'llaniladi. Umuman olganda borliqda mavjud bo'lgan har qanday shaklning fraktal o'lchovi mavjud bo'lib, fraktal o'lchovini hisoblashning ko'plab usullarini tahlil qilishimiz mumkin.

Fraktal o'lchov indeks sifatida har xil fraktal baholovchilarning bir-biriga mos kelmaydigan natijalari saqlanib qolgan bo'lsa ham, geologiyada keng qo'llanilgan. Bunday nomuvofiqliklar fraktal baholovchiga nisbatan qo'llaniladigan turli xil tanlov strategiyalarining natijasi bo'lishi mumkin. Paragrafda fraktal xarakterini o'lchash uchun fraktal xususiyatlarini aniq ko'rsatadigan o'lchov ma'lumotlarini tahlil qiluvchi kublar, qoplama, lokal-dispersiya, prizma hamda L.F.Richardson effekti usullarining har biri bo'yicha fraktal o'lchovni aniqlashning bir-biridan farq qiluvchi algoritmlari taqdim etilib, o'zaro taqqoslash orqali amaliy qo'llashda tavsiyalar berildi. Masshtablangan xarita yordamida O'zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligi hamda fraktal o'lchovini hisoblash uchun L.F.Richardson effekti usuli tatbiq etildi. Richardson effekti usuli boshqa usullarga nisbatan sodda. Richardson effekti usuli har qanday fraktal baholash algoritmlarida oson dasturlash va amalga oshirilishi mumkin. Bu usul sun'iy yo'ldosh tasvirlari kabi yuqori murakkablikdagi yuzalar uchun juda yaxshi natijalarni ko'rsatadi. Ushbu natijalarga asoslanib, Richardson effekti usulini fraktal o'lchovni hisoblash algoritmlarida, ayniqsa, masofadan turib zondlangan shahar tasvirini tavsiflashda qo'llash tavsiya etiladi.

3.3. Geometrik va arifmetik fraktallarning o‘lchovlari

Insonlar hozirga qadar Evklid geometriyasiga tayangan holda atrofimizdagi olamni tadqiq qilib kelishmoqda. Ya’ni sirti yassi yoki sirtning egilishi biror mavjud matematik qonuniyatni ifodalasa, bunday sirt yoki obyektni tushuntira olgan. Lekin Evklid geometriyasi yordamida tushuntirish mumkin bo‘lgan obyektlar soni atrofimizni o‘rab turgan olamdagi jami obyektlar soni oldida dengizdan bir tomchi bo‘lib qoladi. Masalan, tog‘lar, ulardagi ancha murakkab tuzulishga ega bo‘lgan cho‘qqilar, bulutlar, sharsharalar, daraxtlar, daryo yoki dengizlar qirg‘oqlari va boshqa ko‘plab obyektlarning tuzilishi qonuniyatini ifodalovchi formulalar mavjud emas. Ayniqsa, bunday obyektlarning o‘lchami haqida biror bir fikrni aytish ham qiyin. Evklid geometriyasi va topologiyada butun o‘lchamlarga ega bo‘lgan obyektlar bilan ish ko‘riladi. Ammo, yuqorida sanab o‘tilgan obyektlar kasr o‘lchamli obyektlardir.

Bizga ma’lumki,

1. Evklid fazosidagi o‘lchov: E=1, 2, 3
2. Obyektlarning topologik o‘lchovi: d_T=0 (nuqta), d_T=1 (to‘g‘ri chiziq), d_T=2 (tekislik) va boshqalar.
3. Dinamik tizimlardagi o‘zgaruvchilar soni quyidagicha bayon etiladi: N=1, 2, 3

Yuqorida keltirilgan barcha o‘lchovlar faqat ***butun son*****lardir.

4. B.Mandelbrot murakkab geometrik tuzilishlardagi obyektlarning sonli o‘lchovi sifatida fraktal o‘lchov *D* *(D≤E)* dan foydalanishni taklif etadi.

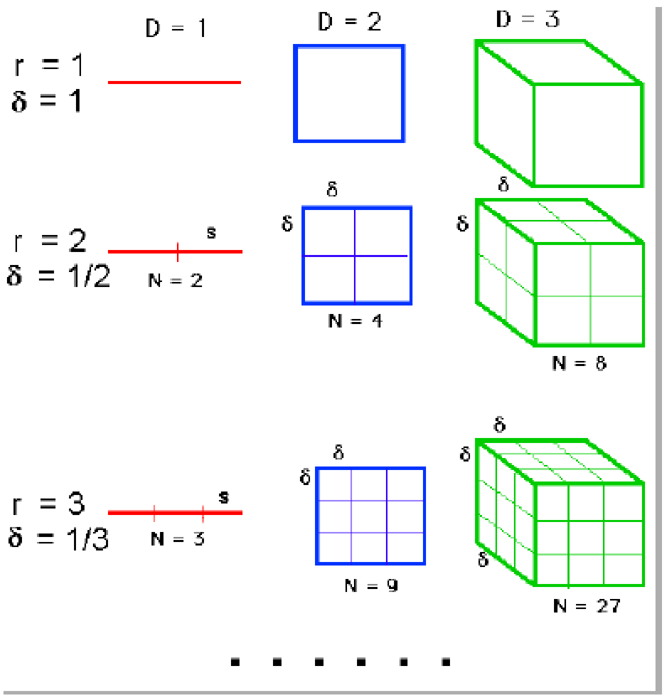
5. O‘xshashlik o‘lchovi: $D_s = \frac{ln(N)}{ln(r)}$ yoki $D_s = \frac{ln(N)}{ln(\delta)}$,

bu yerda

$$N = r. \quad yoki \quad D_s = \delta^{-D} \cdot \delta = 1/r.$$

Fraktal o‘lchov qaralayotgan masshtabga bog‘liq bo‘lmaydi.

$$D_s = -\lim_{\delta \to 0} \frac{ln(N)}{ln(\delta)}.$$



Xausdorf-Bezikovich o'lchovi

Fraktal to'plamlar uchun: $L(\delta) = N(\delta)\cdot\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} \infty$

bu yerda $N = N(\delta)$ kesmalar soni.

$$M_D = N(\delta)\cdot\delta^D.$$

$$\begin{cases} M_D \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,\ D > D_H \ bo'lganda, \\ M_D \xrightarrow[\delta \to 0]{} const,\ D = D_H \ bo'lganda, \\ M_D \xrightarrow[\delta \to 0]{} \infty,\ D > D_H \ bo'lganda. \end{cases}$$

$$D_H = -\lim_{\delta \to 0} \frac{ln(N)}{ln(\delta)}.$$

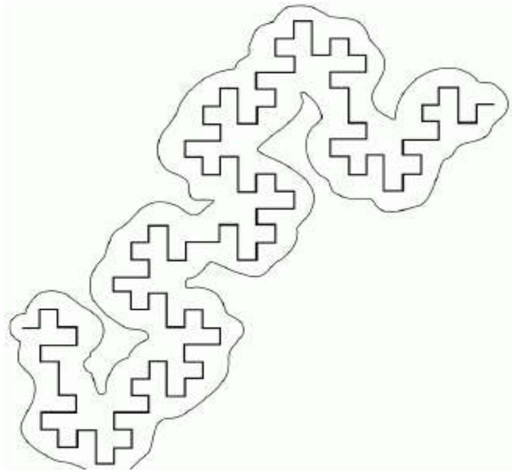
To'plamlarda D_H Xausdorf-Bezikovich o'lchovi, d_t topologik o'lchovdan katta bo'lsa, ular ***fraktallar*** deb ataladi, ya'ni $D_H > d_t$.

Minkovskiy o‘lchovi

$$D_M = -\lim_{\delta \to 0} \frac{ln(S/\delta^2)}{ln(\delta)}.$$

yoki

$$D_M = -\lim_{\delta \to 0} \frac{ln\, S(\delta)}{ln(\delta)} + 2.$$



Kantor to‘plami o‘lchovi

Topologik o‘lchov: $d_t = 0.$

Fraktal o‘lchov:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(2)}{ln(3)} \approx 0,6.$$

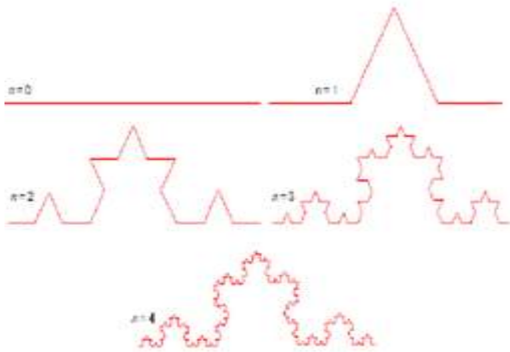
Kox egri chizig‘i o‘lchovi

Topologik o‘lchov:

$d_t = 0.$

Fraktal o‘lchov:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(4)}{ln(3)} \approx 1,26.185...$$



Kox qor parchasi o'lchovi

Topologik o'lchov: $d_t = 0.$

Fraktal o'lchov:

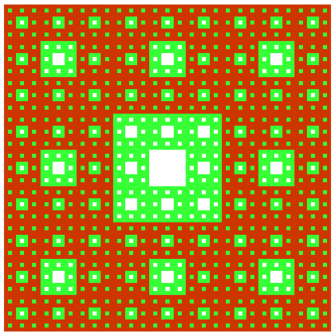
$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(4)}{ln(3)} \approx 1{,}26.185...$$

Serpin gilami

Topologik o'lchov: $d_t = 1.$

Fraktal o'lchov:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(8)}{ln(3)} \approx 1{,}8928$$



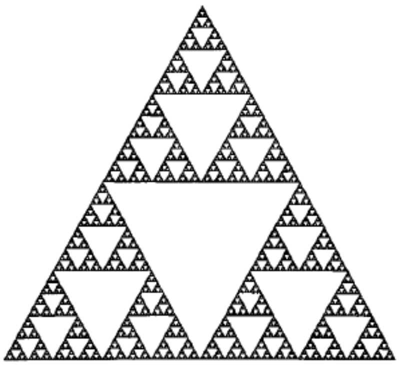
Serpin salfetkasi

Topologik o'lchov:

$d_t = 0.$

Fraktal o'lchov:

$D \approx 1{,}58496...$



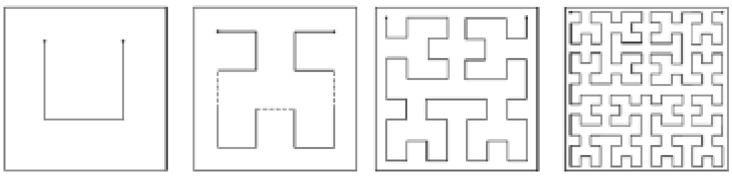
Gilbert egri chizig'i

Topologik o'lchov:

$d_t = 1.$

Fraktal o'lchov:

$D = 2$



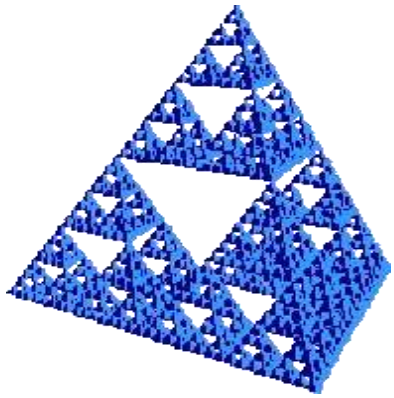
Serpin salfetkasi uch o‘lchovli

Topologik o‘lchov:

$d_t = 0.$

Fraktal o‘lchov:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(4)}{ln(2)} = 2$$



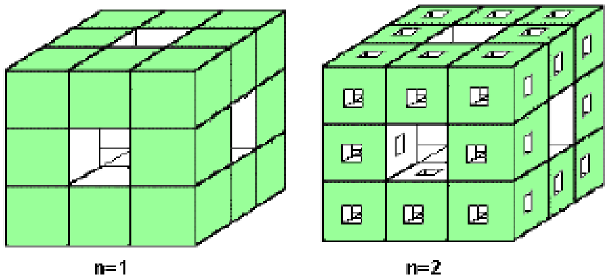
Menger gubkasi

Topologik o‘lchov:

$d_t = 2.$

Fraktal o‘lchov:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(r)} = \frac{ln(20)}{ln(3)} = 2{,}7268....$$



Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. dim Topologik o‘lchovi haqida ma’lumot bering.
2. d_H Xausdorf o‘lchovini tushuntirib bering.
3. d_M Minkovskiy o‘lchovi xususiyatlarini izohlang.
4. Fraktal o‘lchov nimaga teng?
5. Geometrik va arifmetik fraktallarni fraktal o‘lchamlari qanday?
6. Xausdorf-Bezikovich o‘lchovini hisoblashda nimalarga ahamiyat beriladi?
7. Minkovskiy o‘lchovi qanday aniqlanadi?
8. Kantor to‘plami o‘lchoviga izoh bering.
9. Kox egri chizig‘i o‘lchovini izohlang.
10. Kox qor parchasi o‘lchovini tushuntirib bering.
11. Serpin gilami qanday aniqlanadi?
12. Serpin salfetkasining hisoblash usulini tushuntiring.
13. Gilbert egri chizig‘i qanday hisoblanadi?
14. Serpin salfetkasi uch o‘lchovini aniqlab bering.
15. Menger gubkasini izohlang.

IV BOB. FRAKTALLARNI QURISH USULLARI

Fraktallar qurish uchun ularning tenglamasini turli usullardan foydalangan holda qurish kerak bo‘ladi. Bunda bir necha usullardan foydalaniladi, bular IFS (Itered function systems – Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT)) usuli, L-tizimlar usuli, arifmetik xususiyatlarga asoslangan binomial bazis ko‘phadlar nazariyasi usuli, R-funksiya usuli (RFM), to‘plamlar nazariyasi usuli va boshqalar.

4.1. L-tizimlar usuli va ularni fraktallar qurishda qo‘llash

Mandelbrot tomonidan fraktal tushunchasiga eng umumiy fikr bildirilgan: “Fraktal deb qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘xshash tuzilishga aytiladi”. O‘ziga-o‘zi o‘xshash obyektlarni o‘rganish muammosining oddiy bo‘lmagan xususiyatlarini klassik matematiklar nuqtai nazaridan XIX asrning oxiri XX asrning boshlarida Julia, Puankare, Peano, Kantor, Xausdorf va boshqa olimlar o‘z ishlarida ko‘rganlar. Biroq, Mandelbrot birinchi bo‘lib tarqalgan ilmiy ishlar natijalarini birlashtirishga va ularning amaliy qiymatini ko‘rsatishga muvaffaq bo‘lgan. U ilmiy jurnallardan birida nashr qilingan o‘zining “Buyuk Britaniya qirg‘oqlarining uzunligi qancha?” nomli maqolasida geografik kartani qurish va uning o‘lchamini o‘lchash bilan bog‘liq muammoni bayon etgan.

Quyida fraktallar qurishni L-tizimlar usuliga asosan ko‘rib chiqamiz.

1968-yili Aristidom Lindenmayer (ma’lumoti bo‘yicha biolog) tomonidan ishlab chiqilgan L-tizimlar usuli geometrik fraktallarni qurishda eng oddiy hisoblanadi. Lindenmayer tabiatning murakkab obyektlarini bir nechta qoidalar hamda oddiy tashkil etuvchilar yordami bilan ifodalash jarayonlari usulini taklif qilgan. L-tizimlar rasmiy tillarni o‘rganishda kiritilgan, shuningdek undan seleksiyaning biologik modellarini ishlab chiqishda foydalangan. Bunda *bo‘g‘im*lar qoidalariga tayanilgan va simvolli satrlarga almashtirilgan aniq rasmiy grammatikadan foydalangan.

L-tizimlar usuli bir necha tillarning yetarli darajada oddiy grammatikasi bo‘lib, ular ustida turli muhitlar yordamida initsiator va almashtirishlarni bayon etuvchi Logo tilining analogik vositalaridir (tekislikda va fazoda oddiy geometrik shakllarning mumkin bo‘lgan almashtirishlarini aksiomatik bayon etish).

L-tizimlar usuli yordamida ko‘pgina aniq o‘xshash fraktallarni qurish mumkin, ya’ni Kox qor tomchisi, Serpin uchburchaklari, Peano egri chiziqlari va boshqa murakkab qurishlar ham amalga oshiriladi.

Faraz qilamizki ixtiyoriy simvollardan tashkil topgan *aksioma* deb ataluvchi qator va *qoidalar* deb ataluvchi qatorlar majmuasi mavjud. Har bir qoida quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin: simvol→qator

Masalan,

Aksioma: a s v

Qoida a→av

v→a

0-qadamda natijaviy qator “0” ga teng. Keyin qator chapdan o‘ngga qarab boshlanadi. Agar navbatdagi belgi hech qanaqa qoida bermasa, uni yangi natijaviy qatorga o‘tkaziladi. Agar navbatdagi simvol biror qoidaning birinchi simvoli bo‘lsa, unda u mos qoidada qator bilan almashtiriladi.

0-qadam:	a	s	v	:asv
1-qadam:	av	s	a	:avsa
2-qadam:	av a	s	a v	:avasav
3-qadam:	av a av	s	av a	:ava avs ava

va h.k.

Lindenmayer L-tizimlarni biologik obyektlar rivojlanishini bayon etishning rasmiy usuli deb qaraydi.

Suv o‘tining quyidagi L-tizimlarini keltirib o‘tamiz:

Aksioma: A B

Qoida: A→B

B→AB

Bunda Suv o‘tining birinchi o‘n qadamdagi holatini qaraymiz.

0 A
1 B
2 AB
3 BAB
4 ABBAB
5 BABABBAB
6 ABBABBABABBAB
7 BABABBABABBABBABABBAB
8 ABBABBABABBABBABABBABABBABBABABBAB
9 BABABBABABBABBABABBABABBABBABABBABBAB
ABBABABBABBABABBAB

Keyinchalik L-tizimlarni kompyuter grafikasida qo‘llash mumkinligi topildi. Bu tizimlar yordamida o‘ziga o‘xshash tuzilishlardan iborat turli fraktallarni chizish juda qulay. Albatta L-tizimlar yangi fraktallarning cheksiz ko‘rinishlariga yo‘l ochadi, kompyuter grafikasida fraktal modellar qurish uchun ulardan keng foydalanishga sababchi bo‘lib xizmat qiladi.

L-tizimlarni qo‘llab quyidagiga ega bo‘lish mumkin. Umumiy qabul qilingan belgilashlarda L-tizimlar qanaqa kodlanadi: oldinga harakat F harfi bilan belgilanadi (Forward – oldinga), soat strelkasi bo‘yicha burilishni “+” belgilanadi, teskari yo‘nalishni esa “–” bilan, chizmasdan orqaga qaytishni B (Back – orqaga) harfi bilan belgilanadi. Qayerga qaytish nuqtasi “[“ bilan belgilanadi, qayerdan qaytish nuqtasi esa “]” bilan belgilanadi.

L-tizimlar tatbig‘i uchun qism tizimlari sifatida Turtle (toshbaqa algoritmi) grafika deb ataluvchi tizimlar qo‘llaniladi. Bunda toshbaqa nuqtasi ekran bo‘yicha diskret qadamlar bilan qoidadagi kabi o‘z izini chizib harakatlanadi yoki kerak bo‘lsa chizmasdan ko‘chadi.

Faraz qilamizki, buyruqlar to‘plamini bajaruvchilar toshbaqa bo‘lsin. Toshbaqa tekislik bo‘yicha ko‘chadi. Toshbaqaning boshlang‘ich holatining koordinatasini x, y va toshbaqa foydalanuvchi yo‘nalishni aniqlovchi burchak α bo‘lsin. Toshbaqaning xotirasi bor deb tasavvur qilinadi. Toshbaqaning boshlang‘ich joylashgan koordinatasini x_0,y_0 va harakat yo‘nalishi α_0, shuningdek h qadamning qiymati berilgan, toshbaqa “oldinga” buyrug‘i bo‘yicha ko‘chadi va o‘ngga yoki chapga buyrug‘i bo‘yicha β burchakka buriladi.

Toshbaqa quyidagi buyruqlarni bajara oladigan bo‘lsin:

“F” – α yo‘nalishda h qadam oldinga iz qoldirib;

“f” – α yo‘nalishda h qadam oldinga iz qoldirmay;

“+”– β burchak ostida (soat strelkasi bo‘yicha) o‘ngga burilish;

“–” – β burchak ostida (soat strelkasi bo‘yicha) chapga burilish;

“[“ – (x,y,α) boshlang‘ich holatini xotiraga saqlab qolish;

“]” – oxirgi saqlangan holatlari (x,y,α)ni eslab qolish.

1-misol sifatida Kox triad egri chizig‘i (3.1-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz. Bunda:

Aksioma: F

Qoida: F→F-F++F-F

Burchak β=360/6; β=60^0

0-qadam: F;

1-qadam: F-F++F-F;

2-qadam: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F;

3-qadam: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F - F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F va h.k.

2-misol sifatida Serpin uchburchagi (3.2-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz:

Aksioma: F×F–FF–FF

Qoida: F→ FF

×→ –F×F++F×F++F×F–

Burchak β=360/6; β=60^0;

0-qadam: F×F–FF–FF

1-qadam:(FF––F×F++F×F++F×F–FF–FF–FF;)

F–F×F++F×F++F×F–FF–FF–FF

2-qadam:FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFF–FFFF;

3-qadam:FFFFFFFF–FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF va h.k.

3-misol sifatida Tupbutoq (3.3-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz:

Aksioma: F

Qoida: F$\rightarrow$ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]

Burchak β=180^0/8.

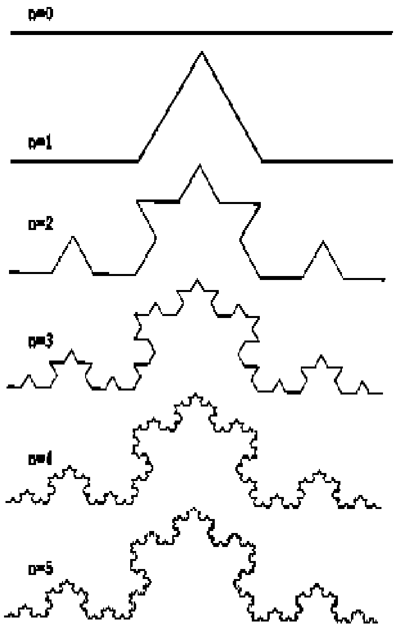
0-qadam: -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F];

1-qadam: --F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ [-F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]- -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]-]-[- -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F] va h.k.

Yuqorida keltirilganidek fraktallarni uchta eng katta guruhlarga ajratish qabul qilingan: geometrik, algebraik, stoxastik.

Geometrik fraktallarni qurish juda oddiy va eng ko‘rgazmali. Eng oddiy ikki o‘lchovli holatda ularni bir necha siniq chiziqlar yordamida *bo‘g‘im* deb ataluvchi chiziqni hosil qilish bilan amalga oshiriladi.

Misol sifatida Kox triad egri chiziqlarini qurish jarayonini qaraymiz. Bu egri chiziq 1904-yili shved olimi Gelge fon Kox tomonidan ko‘rib chiqilgan (o‘rganilgan).



4.1-rasm. n=1,…,5 bo‘lganda Kox triad egri chizig‘ini qurish

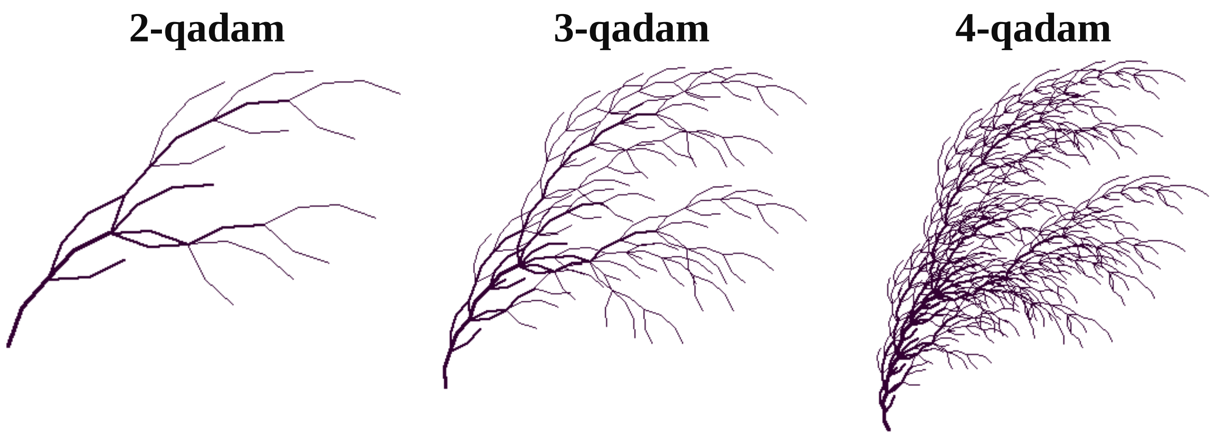
0-qadam: Egri chiziqni qurish jarayoni birlik kesmadan boshlanadi.

1-qadam: Bu kesmani teng uchta bo‘lakka bo‘lamiz va uning o‘rtadagisini ikkita bog‘langan shu uzunlikdagi kesma bilan xuddi 4.1-rasmda ko‘rsatilganidek almashtiramiz. Keyingi qadamda ham shu jarayon har bir zvenolar uchun alohida qo‘llaniladi.

Natijada yangi siniq chiziq hosil bo‘ladi, hamda ularning har birining uchi keyingisining uchi bo‘lib keladi. 4.1-rasmda egri chiziqning beshta avlodi keltirilgan. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, Kox triad egri chizig‘idan iborat fraktalni hosil qilamiz. Ixtiyoriy n-qadamdan olinadigan egri chiziqlar oldfraktal deb atalishi qabul qilingan.

Fraktal obyekt uchun boshqa bir misol Serpin gilamini qarab chiqamiz. Nolinchi qadamda oddiy teng tomonli uchburchak olinadi. Birinchi qadamda uchburchakning tomonlarini teng ikkiga bo‘linadi va tomon o‘rtalarini kesmalar bilan tutashtiriladi. Keyingi qadamda har bir uchburchaklar uchun shu jarayon alohida qo‘llaniladi va markazdagi uchuburchak bundan mustasnodir. Natijada yangi uchburchaklar hosil bo‘ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, Serpin uchburchak fraktali hosil qilinadi.

4.2-rasm. Serpin uchburchagi



4.3-rasm. Tupbutoq

Bunday to‘plamlarning tasviri aniq chizilgan chegaralarga ega bo‘lmaydi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. L-tizimlar usulining xususiyatlarini tushuntiring.
2. Suv o‘tining L-tizimlarini keltiring.
3. Umumiy qabul qilingan belgilashlarda L-tizimlar qanaqa kodlanadi?
4. L-tizimlar tatbig‘i uchun qism tizimlari qanday ataladi?

4.2. Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT – (Itered function systems – IFS) usuli va uni fraktallarni qurishda qo‘llash

Fraktallar tuzilishini hosil qilishning oddiy vositalaridan hisoblangan IFS usuli 1980-yillarning o‘rtalarida paydo bo‘lgan. IFS qisiluvchi affin almashtirishlar to‘plamidir. Ma’lumki affin almashtirishlar masshtablashtirish, burish va parallel ko‘chirishni o‘z ichiga oladi. Agar masshtablashtirish koeffitsiyenti 1 dan kichik bo‘lsa, affin almashtirish qisiluvchi hisoblanadi.

Bunday to‘plamlarning tasviri aniq chizilgan chegaralarga ega bo‘lmaydi. Fraktallarning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, tasvirning eng kichik bo‘lagi ham oxir oqibat butunligicha o‘zini ifodalaydi, ayniqsa bu samarani Julia to‘plami (4.4-rasm) misolida kuzatish mumkin. Fraktallarning bu xususiyatiga ko‘ra ma’lumotlarni fraktal siqishga asos solingan.

IFS bir nechta fiksirlangan funksiyalar tizimini o‘zida ifodalaydi. Eng oddiy IFS tekislikni affin almashtirishdan tashkil topgan:

$$X' = A*X + B*Y + C, Y' = D*X + E*Y + F.$$

1988-yili amerikalik taniqli mutaxassislar Barnsli va Sloan grafik ma’lumotlarni siqish va saqlash uchun dinamik tizimlar nazariyasiga asoslangan mulohazali fikrlarni taklif etadilar. Ular o‘z usullarini axborotlarni fraktal siqish usuli deb nomlaydilar. Bunday nomning kelib chiqishi bu usuldan paydo bo‘luvchi geometrik shakllar bilan bog‘liqdir.

Barnsli va Sloan ushbu fikrlarga asoslanib axborotlarni 500-1000 marotoba siqishga imkoniyat beruvchi algoritm yaratdilar. Buni qisqacha quyidagi ko‘rinishda bayon etish mumkin. Tasvir bir nechta oddiy almashtirishlar bilan kodlanadi, ya’ni bu almashtirishlarning koeffitsiyentlari bizning affin holatda A, B, C, D, E, F lardan iborat.

Masalan, birorta tasvirni ikkita affin almashtirish bilan kodlansa, ularni 12 ta koeffitsiyentlar yordamida bir qiymatli aniqlanadi. Agar boshlang‘ich nuqta $X = 0$, $Y = 0$ deb olinsa va iteratsion jarayon qo‘llanilsa, unda birinchi iteratsiyadan so‘ng 2 ta, ikkinchi iteratsiyadan so‘ng 4 ta, uchinchi iteratsiyadan so‘ng 8 ta, to‘rtinchi iteratsiyadan so‘ng 16 ta va h.k. bo‘ladi. Bir necha iteratsiyalardan so‘ng olingan nuqtalar to‘plami kodlangan tasvirni ifodalaydi. Biroq muammo shundan iboratki, ixtiyoriy tasvirni kodlagan IFS koeffitsiyentlarini topish juda qiyin.

IFS qurishda affin almashtirishdan boshqa parametrlar soni katta bo‘lmagan oddiy geometrik almashtirishlar ham qo‘llaniladi.

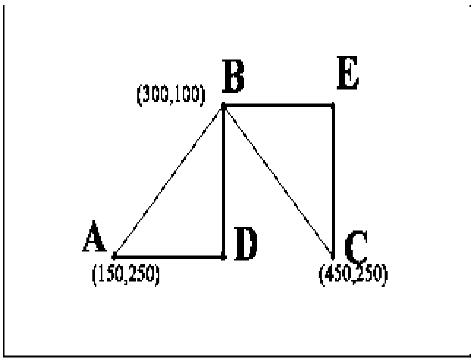
Masalan, loyihaviy:

$$X' = (A1*X + B1*Y + C1) / (D1*X + E1*Y + F1),$$
$$Y' = (A2*X + B2*Y + C2) / (D2*X + E2*Y + F2).$$

Yoki tekislikdagi kvadratik almashtirishlar:

$$X' = A1*X*X + B1*X*Y + C1*Y*Y + D1*X + E1*Y + F1,$$
$$Y' = A2*X*X + B2*X*Y + C2*Y*Y + D2*X + E2*Y + F2.$$

Misol tariqasida Xartera-Xeytueya “ajdari” (4.4-rasm) va Kox egri chizig‘i (4.1-rasm) fraktal tuzilishlarini qurish uchun IFS qo‘llashni qaraymiz. Bu tuzilishlarda o‘xshash qismlarni belgilaymiz va ularning har biri uchun affin almashtirish koeffitsiyentlarini hisoblaymiz. Butun tasvirga o‘xshash nechta qism bor bo‘lsa shuncha affin almashtirishlar affin kollajiga kiritiladi.



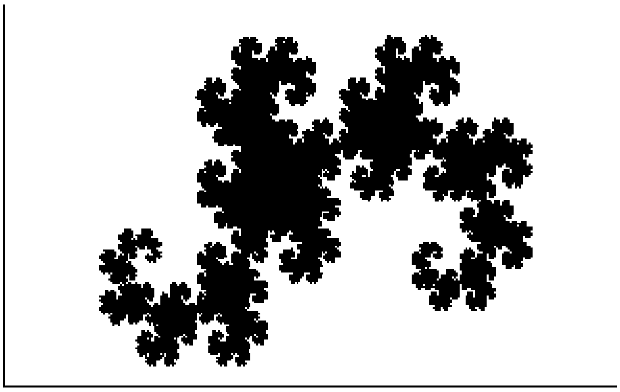
4.4-rasm. IFS usulida Xartera-Xeytueya “ajdari” qurish uchun tayyorgarlik

Xartera-Xeytueya “ajdari” uchun IFS quramiz. Buning uchun 640x350 displey to‘rlari koordinatasida bu fraktalning birinchi avlodini joylashtiramiz. Hosil bo‘luvchi siniq chiziq nuqtalarini A, B, C deb belgilaymiz. Qurish qoidasi bo‘yicha bu fraktal 2 ta qismdan iborat bo‘lib, rasmdagi siniq chiziqlar ADB va BEC siniq chiziqlarga to‘laligicha o‘xshash.

Bu kesmalarning chetlari koordinatalarini aniqlab, ABC siniq chizig‘ini ADB va BEC o‘tkazuvchi ikkita affin almashtirish koeffitsiyentlarini hisoblash mumkin:

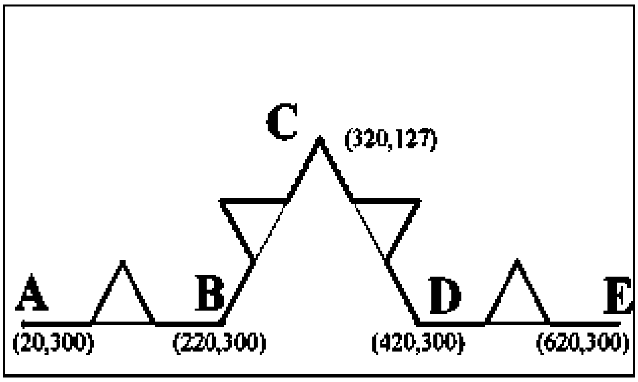
*X' = –0.5*X –0.5*Y + 490;*
*Y' = 0.5*X –0.5*Y + 120;*

*X' = 0.5*X –0.5*Y + 340;*
*Y' = 0.5*X +0.5*Y – 110.*



4.5-rasm. 640x350 to‘g‘ri burchagida IFS usuli yordamida qurilgan Xartera-Xeytueya “ajdari”

Boshlang‘ich nuqtalarini (*x*=0, *y*=0) deb olib, ularga IFS iteratsion ta’sir ettirsak, o‘nta iteratsiyadan keyin ekranda 4.5-rasmda tasvirlangan o‘zida Xartera-Xeytueya “ajdari”ni ifodalovchi fraktal tuzilishga ega bo‘lamiz. Uning kodi (siqib yozganda) ikkita affin almashtirishning koeffitsiyentlar to‘plami deyiladi.



4.6-rasm. IFS usulida Kox triad egri chizig‘i qurish uchun tayyorgarlik

Yuqoridagiga o‘xshash Kox triad egri chizig‘i uchun IFS qurish mumkin. Bu egri chiziq to‘rtta qismdan iborat bo‘lib, 4.1-rasmda n=2 dagi egri chiziqqa butunligicha o‘xshash. IFSni topish uchun fraktalning birinchi avlodi 640x350 displey to‘rlari koordinatasida joylashtiriladi. Uni qurish uchun to‘rtta almashtirishdan tashkil topgan affin almashtirishlar to‘plami talab etiladi:

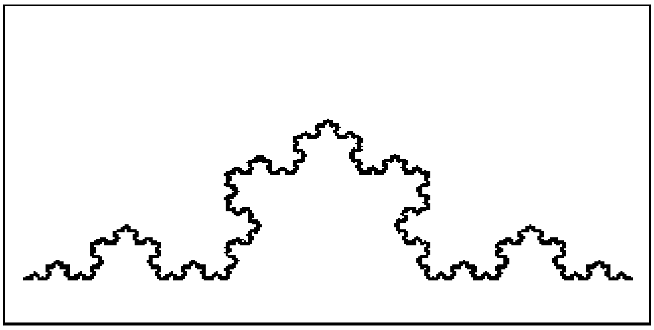
*X' = 0.333*X + 13.333;*
*Y' = 0.333*Y + 200;*

*X' = 0.333*X + 413.333;*
*Y' = 0.333*Y + 200;*

$X' = 0.167*X + 0.289*Y + 130;$ $X' = 0.167*X - 0.289*Y + 403;$

$Y' = -0.289*X + 0.167*Y + 256;$ $Y' = 0.289*X + 0.167*Y + 71.$

Bu affin almashtirishning qo‘llash natijasini o‘nta iteratsiyadan keyin 4.7-rasmdagi holatni ko‘rish mumkin.

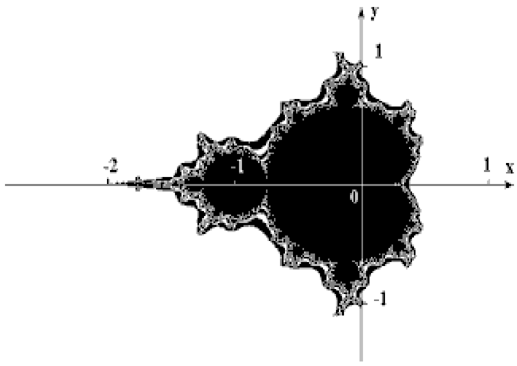


4.7-rasm. 640x350 to‘g‘ri burchagida IFS usuli yordamida qurilgan Kox egri chizig‘i

Fraktallarning eng katta guruhidan biri – algebraik fraktallardir. Ularni *n*-o‘lchovli fazoda nochiziq jarayonlar yordami bilan hosil qilinadi. Ikki o‘lchovli jarayonlar eng ko‘p o‘rganilgan. Nochiziq iteratsion jarayonni diskret dinamik tizim kabi izohlasak bu tizim nazariyasi terminologiyasidan foydalanish mumkin: fazali portret, barqaror jarayon, tortilish nuqtasi va boshqalar.

Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha turg‘un holatlarga ega. Iteratsiyaning bir necha sonidan keyin dinamik tizimning holati uning boshlang‘ich holatiga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun har bir turg‘un holat boshlang‘ich holatning bir necha sohasini egallaydi va albatta tizim ko‘rilayotgan oxirgi holatga tushadi. Xuddi shunday fazalar fazosi attraktorlar tortilish sohasiga bo‘linadi. Agar ikki o‘lchovli fazo fazali bo‘lsa, tortilish nuqtalari sohasini turli ranglar bilan bo‘yab bu tizimlarning rangli fazalar portretini olish mumkin. Ranglarni tanlash algoritmini almashtirib fraktal tasvirlarni olish mumkin.

Kutilmaganda matematiklar uchun primitiv algoritmlar yordamida juda murakkab notrivial tuzilishlarni yaratish imkoniyati paydo bo‘ladi.



4.8-rasm. Mandelbrot to‘plami

Misol sifatida Mandelbrot to‘plamini qaraymiz (4.8-rasm). Uni qurish algoritmi yetarlicha oddiy iterativ (takroriy) ifodaga asoslangan:

$$\boldsymbol{Z}[i+1] = \boldsymbol{Z}[i] * \boldsymbol{Z}[i] + \boldsymbol{C},$$

bu yerda Z_i va C lar kompleks o‘zgaruvchilar.

Iteratsiya har bir boshlang‘ich nuqta uchun bajariladi. To‘g‘riburchakli yoki kvadratik qism to‘plam kompleks tekisligidir. Iteratsion jarayon *Z[i]* markazi (0,0) nuqtada yotadigan, radiusi *2* ga teng aylana chegarasidan chiqmagunga qadar davom etadi, yoki iteratsiyalar soni yetarlicha katta bo‘lgandan keyin (masalan, 200-500) *Z[i]* aylananing qaysidir bir nuqtasiga kiradi (agar *Z[i]* yetarlicha katta iteratsiyalar soni davomida aylana ichida qolsa, iteratsion jarayon to‘xtatiladi). Yuqorida bayon etilgan algoritm Mandelbrot to‘plami deb ataluviga yaqinlashishni beradi. Mandelbrot to‘plamiga iteratsiya soni cheksiz bo‘lgan vaqtda cheksizlikka ketmaydigan nuqtalar kiradi. To‘plam chegaralarida yotuvchi (kiruvchi) nuqtalar (aynan shu yerda murakkab tuzilishlar paydo bo‘ladi) iteratsiyalar sonining oxiridan keyin cheksizlikka ketadi, to‘plam ichida yotuvchi nuqtalar bir necha iteratsiyalardan keyin cheksizlikka ketadi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. IFS qurishda affin almashtirishni tushuntirib bering.
2. IFS usulida Xartera-Xeytueya “ajdari” qurish qanday amalga oshiriladi?
3. Fraktallarning eng katta guruhi sifatida qaysi guruh e’tirof etiladi?
4. Mandelbrot to‘plamini qurish algoritmi nimaga asoslanadi?

4.3. R-funksiya usuli yordamida fraktallarning tenglamalarini qurish

Fraktallar tasvirini gazlama, gilam, chinni va keramik buyumlarga nusxalash (shtamplash) uchun ularning tenglamasini yozish kerak bo‘ladi, ya’ni R-funksiya usuli (RFM)ni qo‘llab, fraktallar sohasi geometriyasi tenglamasini qurishni amalga oshirish mumkin.

Soha geometriyalari chegarasi tenglamalarini qurish tayanch funksiyalar kabi R-funksiya tizimlaridan mosini tanlab, analitik tenglamaning ko‘rinishini chiqarishga imkon beruvchi mantiqiy formulalarni ham talab etadi. Bu R-funksiya usuli bilan tanish bo‘lmagan analitik hamda differensial geometriyaning muhandislari va tadqiqotchilari uchun qiyin bo‘lgan tizimni bajaradigan qat’iy matematik bilimni va malakani talab etadi. Bu yo‘nalishdagi istiqbol tashkil etilgan geometrik obyektlarni shakllantirishni o‘zida ifodalaydi.

Shuni aytish mumkinki, fraktallar sohasi geometriyaning analitik tenglamalarini yozish uchun imkon beruvchi usullaridan biri V.L.Rvachevning R-funksiya usuli (RFM) hisoblanadi. R-funksiya usuli bo‘yicha asosiy tushunchalarni keltiramiz.

R-funksiya haqiqiy o‘zgaruvchi sonli funksiya bo‘lib, uning ishoralari to‘liqligicha sonlar o‘qi intervallari $(-\infty,0)$ va $[0,\infty)$ning mos bo‘laklarida argumentlar ishoralari bilan aniqlanadi.

Agar shunday ergashuvchi *Φ* mantiqiy funksiya mavjud bo‘lib uning argumentlari $sign(z)=\Phi(sign(x), sign(y))$ bo‘lsa, $z=z(x,y)$ sonli funksiya R-funksiya deb ataladi.

Har bir R-funksiya yagona ergashuvchi mantiq funksiyaga mos tushadi.

R-funksiyalar to‘plami R-funksiyalarning ustma-ust tushishi ma’nosida yopiqdir. Agarda N ning barcha ustma-ust tushuvchi elementlari to‘plami R-funksiyalar to‘plamining har bir tarmog‘i bilan bo‘sh bo‘lmagan kesishishga ega bo‘lsa, R-funksiyalar tizimi N yetarlicha to‘liq deyiladi.

Eng ko‘p foydalaniladigan R-funksiya to‘liq tizimi

$$\left(-1<\alpha\le 1\right) \text{ da } R_\alpha \quad x\wedge_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$x\vee_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$\overline{x}\equiv -x.$$

tizimdir.

$\alpha=0$ da R_0 tizimga ega bo‘lamiz:

$$x\wedge_0 y\equiv\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$x\vee_0 y\equiv\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$\overline{x}\equiv -x.$$

$\alpha=1$ da R_1 tizimga ega bo‘lamiz:

$$x\wedge_1 y\equiv\frac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right);$$

$$x\vee_1 y\equiv\frac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right);$$

$$\overline{x}\equiv -x.$$

R-funksiyalarning oxirgi holatida konyunksiyalar va dizyunksiyalari quyidagilar bilan mos tushadi:

$$x\wedge y\equiv\min(x,y), \qquad x\vee y\equiv\max(x,y).$$

R-funksiya yordamida oddiy sohalarning ma’lum tenglamalari bo‘yicha tuzilgan sohalarning chegarasi tenglamalarini oshkormas shaklini qurish mumkin.

R-funksiyalarni cheksiz qiymatli mantiq yoki toqmantiq instrumenti sifatida qarash mumkin.

R-funksiyalar keng doiradagi matematika, fizika masalalari (elastiklik nazariyasi, elektrodinamika, issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasi va boshqalar) sinfini hal qilishda, signallar va tasvirlarni ko‘p o‘lchovli raqamli qayta ishlashda, kompyuter grafikasi va boshqa sohalarda qo‘llaniladi.

Soha geometriyasi tenglamalarini (ya’ni normallashgan tenglamasini) qurish usullari bu tenglamalarni tashkil qilish jarayonini avtomatlashtirish uchun yaxshi texnologik asosni o‘zida ifodalaydi. Aslida faqat predikat tenglamalarni qurish jarayonini avtomatlashtirish kerak, bu tenglamalardan soha geometriyasining oddiy elementar tenglamalariga o‘tish mantiq funksiya simvollarini R-funksiyaning mos simvollari bilan almashtirish orqali bajariladi, soha simvollari – ularning mos chap qismlariga teng emas.

Shunday qilib, algoritm uchun kiruvchi ma’lumot quyidagilar:

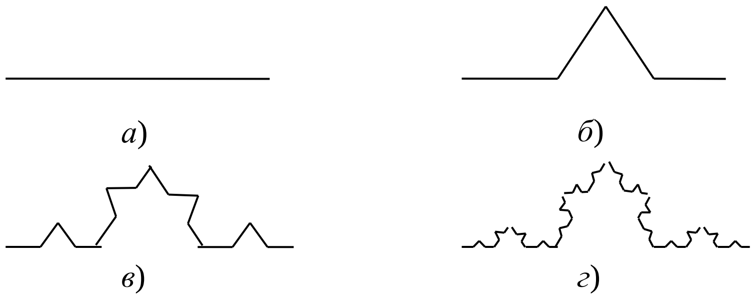
1. Foydalaniladigan standart primitivlarning ko‘rinishi: to‘g‘ri chiziq, doira, ellips, to‘rtburchak, uchburchak, qavariq ko‘pburchak, aylana, muntazam ko‘pburchak va boshqalar (foydalanuvchining so‘roviga qarab menyu yoki ularning ko‘rinishi to‘ldirilib boriladi).
2. Standart primitivlarning o‘lchami va o‘rnini aniqlovchi geometrik parametrlar.

Bu ma’lumotlar asosida tayanch funksiyalar avtomatik shakllantiriladi, chaqirilgan primitivlarning normallashgan tenglamasi va belgilar bo‘yicha tashkil etilgan soha geometriyasining “ichkari tomon” – “tashqari tomon”larining predikat hamda analitik funksiyalari shakllantiriladi.

Fraktallar nazariyasi va ularning amaliy tatbiqi bo‘yicha radiofizika va radiotexnika sohasida Rossiya fanlar akademiyasining V.A.Kotelnikov nomidagi radiotexnika va elektronika institutida tadqiqotlar olib borilmoqda. XX asrning 80-yillaridan boshlab ular yangi fundamental ilmiy yo‘nalish “Fraktal radiofizika va fraktal radiotexnika: Fraktal radiotizimni loyihalashtirish”ga asos soldi va rivojlantirdi.

Fraktallar, kasrli operatorlar va skeylinglar amaliyot so‘rovlariga hamda zamonaviy matematikaning abstrakt loyihalariga muvofiq keluvchi tadqiqotning muhim instrumentlari hisoblanadi.

R-funksiya usuli asosida **Kox egri chizig‘i**ning tenglamasini qurishni qaraymiz (4.9-rasm).



4.9-rasm Kox egri chizig‘ini qurish

Qurishni $-3a \le x \le 3a$ intervalda bajaramiz. U holda

$$\omega_0 = -y \ge 0; \ \omega_{00} = \omega_0 \wedge_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0;$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0; \ f_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0.$$

bo‘ladi.

Bu holatda ω_{00} teng yonli uchburchakning tenglamasidir. Agar ω_{00} ning o‘rniga tenglamaning ko‘rinishini

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0,$$

deb yozsak, unda 4.9-rasmdagi grafikka mos tenglamani olamiz. Shunday qilib,

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0; \ \omega_{21} = \omega_1\left(3\left(x + 2a\right), 3y\right) \ge 0;$$

$$\omega_{22}=\omega_1\left(3\left(\frac{x+a/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

$$3\left(-(x+a-2)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\geq 0;$$

$$\omega_2=(\omega_{21}(x,y)\vee_0\omega_{22}(x,y))\wedge_0(-x,y)\vee_0\omega_{22}(-x,y))\geq 0;$$

$$\omega_{k1}=\omega_{k-1}(3(x+2a),3y)\geq 0;$$

$$\omega_{k2}=\omega_{k-1}\left(3\left(\frac{x+\alpha/2}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),3\left(-(x+a/2)\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right)\geq 0;$$

$$\omega_k=\left(\omega_{k1}(x,y)\vee_0\omega_{k2}(x,y)\right)\wedge_0\left(\omega_{k1}(-x,y)\vee_0\omega_{k2}(-x,y)\right)\geq 0\left(k=3,4,...\right)$$

hosil bo‘ladi.

4.9-rasmda $\omega_k(x,y)\geq 0$ funksiya darajalari chiziqlarining tasviri keltirilgan bo‘lib, *k* ning turli qiymatlari uchun Kox egri chizig‘ini beradi.

1-tur Serpin Gilami. Serpin Gilami quyidagi tartibda quriladi. Berilgan kvadrat 9 ta bir xil kattalikdagi kvadratlarga bo‘linadi, bunda markazdagi kvadrat bundan mustasno (4.10-rasm). Keyin bu jarayon hosil qilingan kvadratlarda takror bajariladi va cheksiz davom ettiriladi, natijada fraktal obyekt hisoblangan Serpin gilamini hosil qilinadi. Uning kasrli o‘lchami *D*=lg8 / lg3 ≈ 1.893 ga teng. Agarda cheksiz jarayonni *k*-tartibda to‘xtatilsa, *k*-tartibdagi oldfraktal hosil qilinadi. Serpin oldfraktali chegaralarining funksiyasi quyidagi

$$f_1=\frac{a^2-x^2}{2a}\geq 0,\quad f_2=\frac{b^2-y^2}{2b}\geq 0.$$

ko‘rinishni oladi, $\omega_0=f_1\wedge_0 f_2\geq 0$ – 0-tartibdagi oldfraktaldir.

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatidan foydalanib yordamchi funksiyalarni qaraymiz:

$$\omega_1(x,y)=\frac{\overline{\omega_0(3x,3y)}}{3}\geq 0,\quad \omega_k(x,y)=\frac{\omega_{k\text{-}1}(3\mu_{hx},3\mu_{hy})}{3}\geq 0 \ldots (k=2,3,\ldots),$$

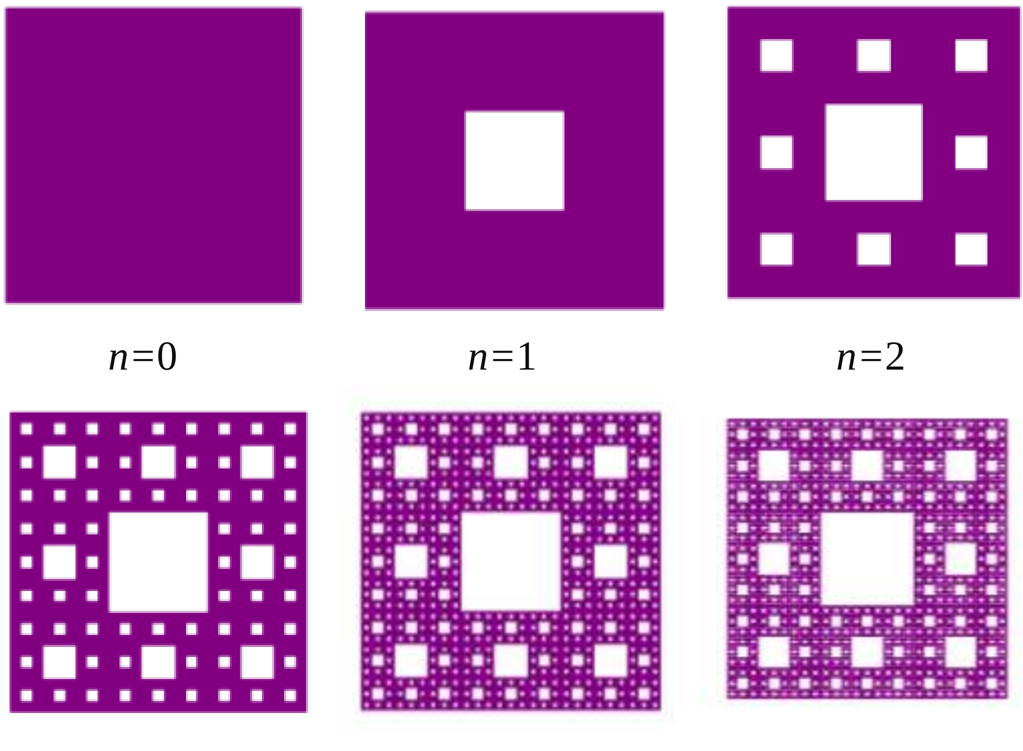
bu yerda

$$\mu_{h_x}=\frac{h_x}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi x}{h_x}\right),\quad \mu_{h_y}=\frac{h_y}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi y}{h_y}\right),\ h_x=\frac{2a}{3},\ h_y=\frac{2b}{3}.$$

Unda

$$K_\omega(x,y)=\omega_0(x,y)\wedge_0\omega_1(x,y)\wedge_0\omega_2(x,y)\wedge_0\ldots\wedge_0\omega_k(x,y)\geq 0.$$

4.10-rasmda k ning turli qiymatlarida Serpin gilamini beruvchi funksiya $K_{\omega_k}(x,y)\geq 0$ ning turli tartibdagi chiziqlari tasvirlari qurilgan.



$n=0$ $n=1$ $n=2$

$n=3$ $n=4$ $n=5$

4.10-rasm. Kvadratik Serpin gilamini qurish

2-tur Serpin gilami tenglamasi quyidagi tartibda quriladi. Boshlang‘ich kvadrat bir xil kvadratlarga bo‘linadi, markazdagi bundan mustasno (4.11-rasm). Keyin hosil qilingan kvadratlarda shu jarayon takroran qo‘llaniladi va h.k. Bu jarayon cheksiz davom ettirilishi natijasida fraktal obyekt Serpin gilamini olamiz. Uning kasrli o‘lchami D=lg 8/lg ≈ 1.893ga teng. Agar cheksiz jarayonni k-qadamda to‘xtatilsa, unda k-tartibdagi oldfraktal hosil qilinadi. Serpin oldfraktali chegarasi quyidagi

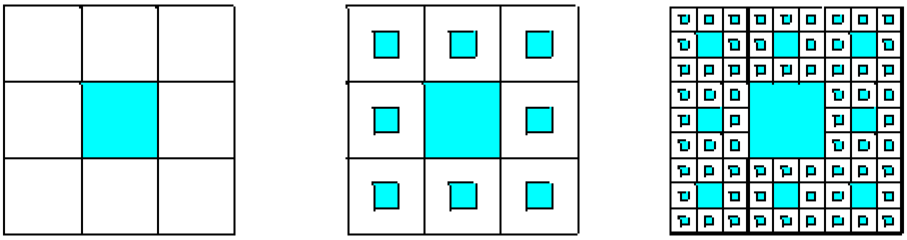
$$\omega_k(x,y)=\begin{cases}\omega_0(x,y), k=0\\ \omega_{k-1}(x,y)\wedge F_k(x,y), k=1,2,...,\end{cases}$$

bu yerda

$$F_k(x,y)=-3^{-k}\omega_0\left[6\arcsin\left[\sin(3^{k-1}\pi x/2)\right]/\pi 6\arcsin\left[3^{k-1}\pi y/2\right]/\pi\right],$$

$$\omega_0(x,y)=\left[\left(\alpha^2-x^2\right)\wedge\left(\alpha^2-y^2\right)\right]/2\alpha$$

ko‘rinishda ifodalanadi.



4.11-rasm. Serpin kvadrat gilamini qurish

Serpin salfetkasi. Serpin salfetkasi yoki uchburchakning tenglamasi qurilgan. Uni qurish uchun teng tomonli uchburchak markazidan uchburchak “qirqib” olamiz. Hosil bo‘lgan uchburchaklarda xuddi shu jarayon takroran bajariladi (markazdagi uchburchak bundan mustasno) va cheksiz davom ettiriladi. Agar shu hosil bo‘lgan uchburchaklardan ixtiyoriy bittasini olib kattalashtirilsa, boshlang‘ich uchburchak nusxasi paydo bo‘ladi. Bu holatda to‘liq o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyati bajariladi. Bu fraktalda initsiator va generator oldingi fraktaldagi kabi bir xildir.

Har bir iteratsiyada uning nusxasini kichiklashgani generatorning har bir burchaklariga qo‘shilib boradi. Har bir iteratsiyada har generatorning burchaklariga nusxalarning kichiklashtirilgani qo‘shiladi va h.k. Agar bu fraktalni yaratishda cheksiz sondagi iteratsiyalar olib borilsa, u butun bir tekislikni egallaydi. Shuning uchun uning fraktal o‘lchovi $\frac{\ln 9}{\ln 3}=2$ dir.

To‘g‘ri burchakli uchburchakning tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\omega_0(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right)+R\geq 0,$$

yoki
$$\omega_0(x,y)=-x_1+R\geq 0,$$

bu yerda

$$x_1=rcos\mu;\ y_1=r\sin\mu;\ \ \mu(\theta)=\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right);$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \ \theta=arctg\,\frac{y}{x};$$

R – ichki chizilgan aylana radiusi.

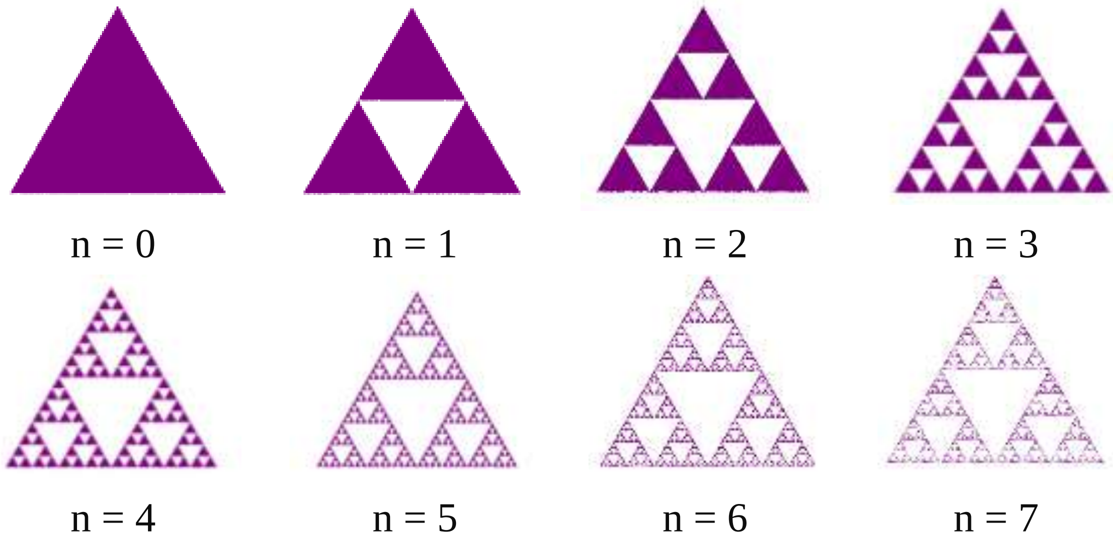
Unda

$$\omega_1(x,y)=\omega_0(-2(x_1-R),\ 2y_1)/2\geq 0,$$

va mos

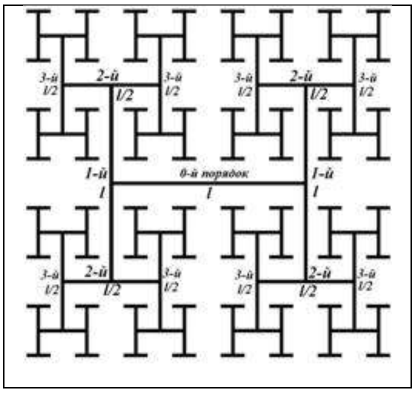
$$\omega_k(x,y)=\omega_{k-1}(2(x_1-R),\ 2y_1)/2\geq 0,\ \ (k=2,3,...).$$

Ta’kidlaymizki bu holatda R-funksiya usuli (RFM) qo‘llanilmaydi. 4.12-rasmda Serpin salfetkasini hosil etuvchi k ning turli qiymatlari uchun $\omega_k(x,y)\geq 0$ funksiyaning turli tartibdagi chiziqlari tasvirlari qurilgan.



4.12-rasm. Serpin salfetkasi

Keyli daraxtiga asoslangan fraktal antennalar. Fraktal antenna turli uzunliklardagi o‘tkazgichlar bo‘laklari qatorini ifodalaydi. Har bir yangi iteratsiyada antennaga aniq uzunlikdagi bo‘laklar qo‘shiladi, ya’ni har bir toq iteratsiyada uzunlik ilgarigidek qoladi, juft iteratsiyada uzunlik ikki martaga kamayadi (4.13-rasm). 6-tartibli “Keyli daraxti” antennasida tokning taqsimlanishi tadqiq qilingan bo‘lib, antenna parametrlarini rasmiylashtirishda abbreviaturaning yangi qismlari rol o‘ynaydi.



4.13-rasm. 6-tartibdagi “Keyli daraxti”

Endi *R*-funksiya usuliga asosan “Keyli daraxti” tenglamasini quramiz.

1-qadam.

$$i=1;\ \ a_1=l/2;\ b_1=l/2;$$

$$f_{oe}(x,y)=\frac{a_{11}^2-(x+a_1)^2}{2a_{11}}\geq 0,$$ (a_{11} – kichik son),

$$f_{op}=\frac{a_{11}^2-(a_1-x)^2}{2a_{11}}\geq 0,\ \ \varphi_0(x,y)=\frac{b_1^2-y^2}{2b_1}\geq 0;$$

$$f_1=f_{oe}(x,y)\wedge\varphi_0(x,y)\geq 0,\ \ f_2(x,y)=f_{op}(x,y)\wedge_0\varphi_0(x,y)\geq 0,$$

$$\omega_{01}(x,y)=f_1(x,y)\vee_0 f_2(x,y)\geq 0,$$

$$f_3(x,y)=\frac{a_1^2-x^2}{2a_1}\geq 0,\ \ f_4(x,y)=\frac{b_{11}^2-y^2}{2b_{11}}\geq 0,$$

(* b_{11} – yetarlicha kichik son*),

$$\omega_{02}(x,y)=f_3(x,y)\wedge_0 f_4(x,y)\geq 0,$$

$$f_{1ay}(x,y)=\frac{b_{11}^2-(y+b_1)^2}{2b_{11}}\geq 0,\ \ f_{1by}(x,y)=\frac{b_{11}^2-(b-y)^2}{2b_{11}}\geq 0,\ \ c=b_1/2,$$

$$\varphi_{1\ell x}(x,y)=\frac{c^2-(x+a_1)^2}{2c}\geq 0,\ \ \varphi_{1px}=\frac{c^2-(x-a_1)^2}{2c}\geq 0,$$

$$\omega_{03}(x,y)=(f_{1ay}(x,y)\wedge_0\varphi_{1lx}(x,y))\vee_0(f_{1ay}(x,y)\wedge_0\varphi_{1px}(x,y))\vee_0$$
$$\vee_0(f_{1by}(x,y)\wedge_0\varphi_{1lx}(x,y))\vee_0(f_{1by}(x,y)\wedge_0\varphi_{1px}(x,y))\geq 0,$$

$$\omega_1(x,y)=\omega_{01}(x,y)\vee_0\omega_{02}(x,y)\vee_0\omega_{03}(x,y)\geq 0,$$

2-qadam.

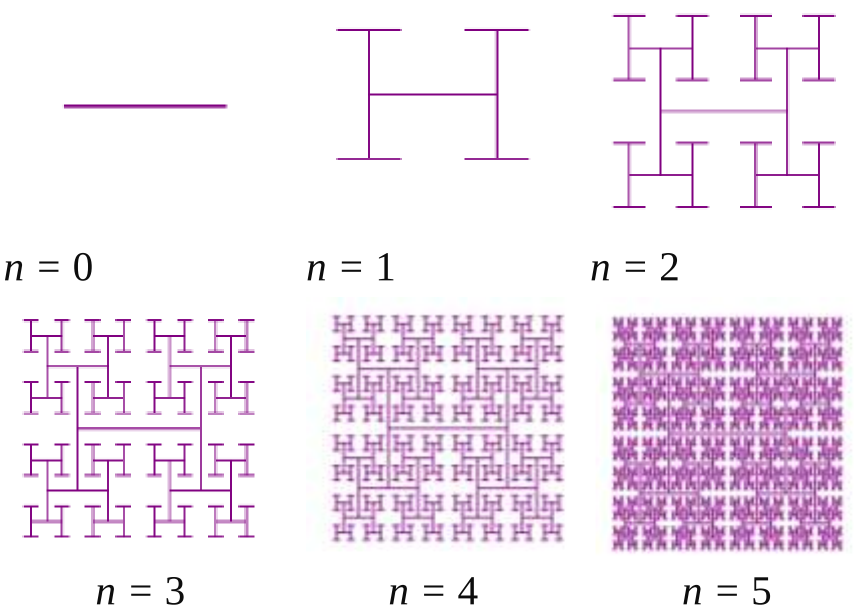
$$i=2;\quad a_1=a_1/2;\ b_1=b_1/2;$$

$$\omega_2(x,y)=\omega_1(x-a_1,y-b_1)\vee_0\omega_1(x+a_1,y-b_1)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_1(x+a_1,y+b_1)\vee_0\omega_1(x-a_1,y+b_1)\vee_0\omega_1(x,y)\ge 0.$$

Endi iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$i=k;\quad a_1=a_1/2;\ b_1=b_1/2;$$
$$\omega_k(x,y)=\omega_{k-1}(x-a_1,y-b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y-b_1)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x-a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x,y)\ge 0,$$
$$\mathrm{k}=3,4,5,...$$

k ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.14-rasmda keltirilgan.



4.14-rasm. “Keyli daraxti”ga asoslangan fraktal

Eksklyuziv fraktal halqalar. Fraktal halqali tuzulishlar tadqiqotida asosan simmetriya va o‘xshashlik xususiyatlari hisobga olingan.

1. A1 da fraktal antenna tuzilishining asosiy elementi sifatida birinchi iteratsiyada radiusi 11 mm, *Ox* o‘qi bo‘yicha qalinligi 0,4 mm va radiusi bo‘yicha 0,2 mm bo‘lgan halqa olingan.

4.15-rasmda ifodalangan fraktal abbreviaturaning tuzilishini qurish algoritmi quyidagicha ifodalanadi.

0-iteratsiyada asosiy halqaga berilgan halqaga nisbatan uch marta kichik bo‘lgan 7 ta halqalar joylashtiriladi. Boshqa elementlari (eni va halqaning qalinligi) o‘zgarishsiz qoldiriladi. 6 ta kichik aylananing markazi oltiburchakning uchiga R*2/3 masofada joylashtiriladi. Yettinchi aylananing markazi asosiy antennaning markazi bilan ustma-ust tushadi. Bu qurishni iteratsion algoritmning birinchi sikli deb ataymiz va uni A1 abbreviaturasi bilan belgilaymiz.

2. Ikkinchi iteratsiyadagi A2 eksklyuziv halqalarni qurish uchun A1 model uchun qo‘llangan algoritmdan foydalaniladi (4.16-rasm).

Har bir aylanaga oldingi radiusdan ikki marta kichik bo‘lgan oltita aylana qo‘yiladi, markazi oltiburchakning uchidagi boshlang‘ich radiusdan R*2/3 masofada joylashtiriladi. Yettinchi aylana asosiy aylana markazida joylashtiriladi. Shunday qilib, rasmda keltirilgan fraktal antenna modeli hosil qilinadi. Xuddi 1 dagi kabi koaksial chiziqlarning diametri 0,5 mm. Antennalarning qalinligi 0,4 mm, halqaning eni 0,2 mm. Tashqi aylananing radiuslari R = 11 mm, R1 = R/3, R2 = R/9.

A1 eksklyuziv antennaning tenglamasini quramiz:

0-qadam.

$$\omega_{00} = \frac{R_0^2 - x^2 - y^2}{2R},$$

1-qadam.

$$r_1 = \frac{1}{3}R_0, \quad a_1 = \frac{2}{3}R_0, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3}R_0, \quad dy = \frac{1}{3}R_0,$$

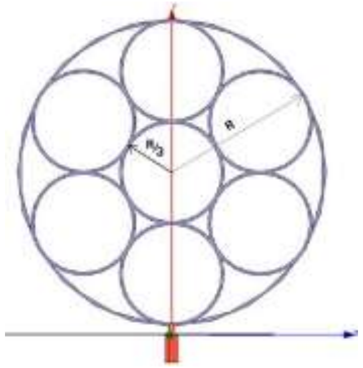
$$\omega_{10}=\frac{r_1^2-x^2-y^2}{2r_1},\ \omega_{11}=\frac{r_1^2-x^2-(y-a_1)^2}{2r_1},$$

$$\omega_{12}=\frac{r_1^2-x^2-(y+a_1)^2}{2r_1},\ \omega_{14}=\frac{r_1^2-(x+dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},$$

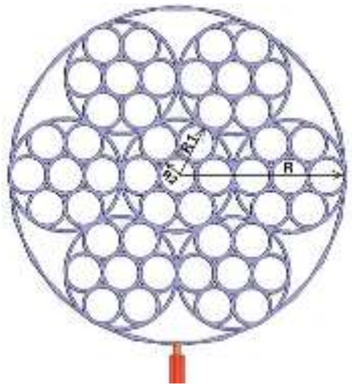
$$\omega_{15}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},\ \omega_{16}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y-dy)^2}{2r_1},$$

$$\omega=(\omega_{00}\vee_0(\omega_{10}\vee_0\omega_{11}\vee_0\omega_{12}\vee_0\omega_{13}\vee_0\omega_{14}\vee_0\omega_{15}\vee_0\omega_{16}));$$

Bu tenglama A1 eksklyuziv antennaning tenglamasini beradi



4.15-rasm. A1 eksklyuziv antennaning modeli



4.16-rasm. A2 eksklyuziv antennaning modeli

dr kichik son – aylana qalinligi

$$\omega_0=\frac{R_0^2-x^2-y^2}{2R}\wedge_0\frac{x^2+y^2-(R-dr)^2}{2R}\geq 0;$$

1-qadam.

$$r_1 = \frac{1}{3}R_0, \quad a_1 = \frac{2}{3}R_0, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3}R_0, \quad dy = \frac{1}{3}R_0.$$

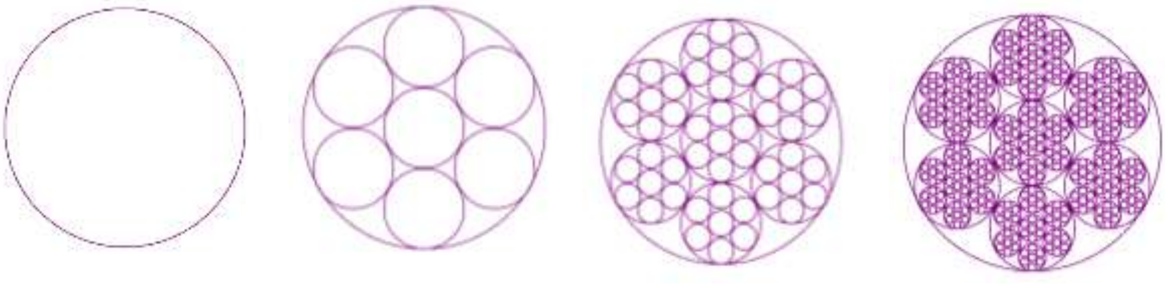
$$\omega_{10} = \omega_0(r_1, x, y), \ \omega_{11} = \omega_0(r_1, x, y - a_1), \ \omega_{12} = \omega_0(r_1, x, y + a_1),$$
$$\omega_{13} = \omega_0(r_1, x + dx, y - dy), \omega_{14} = \omega_0(r_1, x + dx, y + dy),$$
$$\omega_{15} = \omega_0(r_1, x - dx, y + dy), \omega_{16} = \omega_0(r_1, x - dx, y - dy),$$
$$\omega_1 = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{10} \vee_0 \omega_{11} \vee_0 \omega_{12} \vee_0 \omega_{13} \vee_0 \omega_{14} \vee_0 \omega_{15} \vee_0 \omega_{16}));$$

Barcha oldingilardan i-qadamni aniqlaymiz.

$$r_i = \frac{1}{3}r_{i-1}, \quad a_i = \frac{2}{3}r_{i-1}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3}r_{i-1}, \quad dy = \frac{1}{3}r_{i-1};$$
$$\omega_{i0} = \omega_{i-1}(r_i, x, y), \omega_{i1} = \omega_{i-1}(r_i, x, y - a_i), \ \omega_{i2} = \omega_{i-1}(r_i, x, y + a_i),$$
$$\omega_{i3} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y - dy), \omega_{i4} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y + dy),$$
$$\omega_{i5} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y + dy), \omega_{i6} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y - dy),$$
$$\omega = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{i0} \vee_0 \omega_{i1} \vee_0 \omega_{i2} \vee_0 \omega_{i3} \vee_0 \omega_{i4} \vee_0 \omega_{i5} \vee_0 \omega_{i6})),$$

i = 2,3,4,…

Ajratib ko‘rsatish mumkinki, *i*=2 da A2 antennaning modelini olamiz, i= 0, 1, 2, 3, 4 hisoblashlar natijalari 4.17-rasmda keltirilgan.



n = 0 *n* = 1 *n* = 2 *n* = 3

4.17-rasm. A2 eksklyuziv antenna

Serpin egri chizig‘i Avvalo asosning tenglamasini quramiz:

$$x_1 = x\cos(\alpha_1) + y\sin(\alpha_1), \quad y_1 = -x\sin(\alpha_1) + y\cos(\alpha_1),$$
$$x_2 = x\cos(\alpha_2) + y\sin(\alpha_2), \quad y_2 = -x\sin(\alpha_2) + y\cos(\alpha_2),$$
$$f_1(x,y) = (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (a^2 - y_1^2) \ge 0,$$
$$f_2(x,y) = (a^2 - x_2^2) \wedge_0 (a^2 - y_2^2) \ge 0,$$
$$f_3(x,y) = f_2(-x,y), \; \omega_1(x,y) = f_1(x,y) \vee_0 f_2(x,y) \vee_0 f_3(x,y).$$

Bu yerda o‘qlarning burilish formulalari qo‘llanilgan va u keyin ham kerak bo‘ladi.

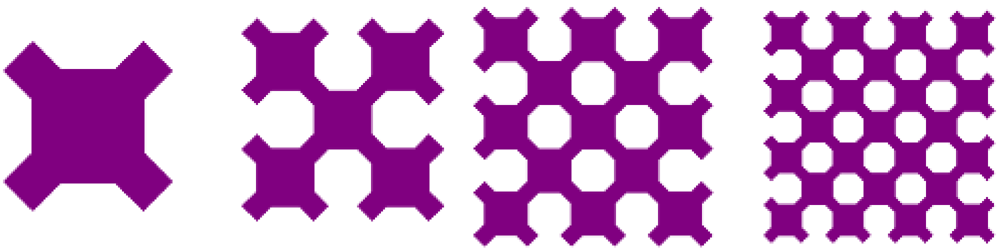
Iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\omega_n(x,y) = \omega_{n-1}(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(x-2a, y-2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y-2a) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y+2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x-2a, y+2a), \; \mathrm{n} = 2,\, 3,\, 4,\, 5,...$$

Hisoblashda

$$a_1 = \frac{3}{8}a, \;\; b_1 = \frac{7}{4}a,$$

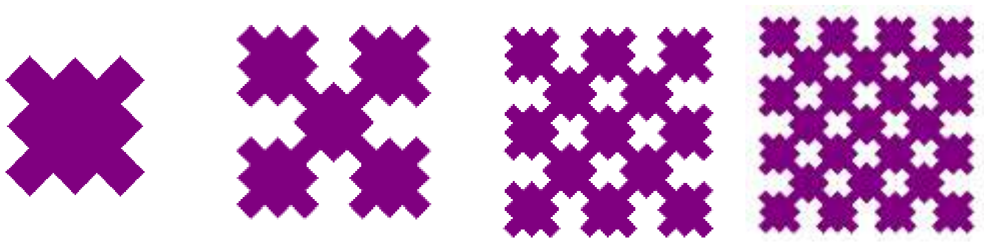
dan foydalanilgan. Hisoblashlarning natijalari $\alpha_1 = 0$ va $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ larda va turli qiymatlaridagi natijalar 4.18-rasmda keltirilgan.



n=1(α_1=0, α_2=π/4) n=2 (α_1=0, α_2=π/4) n=3 (α_1=0, α_2=π/4) n=4(α_1=0, α_2=π/4)

4.18-rasm. Serpin egri chizig‘i

$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ bo‘lganda *n* ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.19-rasmda keltirilgan.



n=1	*n=2*	*n = 3*	*n=4*
($\alpha_1 = \pi/4$,	*($\alpha_1 = \pi/4$,*	*($\alpha_1 = \pi/4$,*	*($\alpha_1 = \pi/4$,*
$\alpha_2 = \pi/4$)	*$\alpha_2 = \pi/4$)*	*$\alpha_2 = \pi/4$)*	*$\alpha_2 = \pi/4$)*

4.19-rasm. Serpin egri chizig‘i

Kox egri chizig‘i (ikkinchi usul). Kox egri chizig‘i quyidagi protsedura yo‘li bilan quriladi. Boshlang‘ich oraliqdan markazdagi bo‘lagi olib tashlanadi va teng tomonli uchburchak bilan almashtiriladi. Keyin hosil qilingan barcha uchburchaklarga shu protsedura qo‘llaniladi.

$y \le 0$ yarim tekisligi boshlang‘ich soha bo‘lsin, unda uning chegaralari tenglamasi $\omega_0 = -y = 0$ bo‘ladi. $(k \ge 1)$ k- tartibli old fraktallarni R-funksiya usuliga asosan tenglamasini topish algoritmi ikki etapdan iborat:

1. ω_{k-1} funksiyaning R-dizyunksiyasi to‘g‘ri chiziqqa nisbatan o‘zining aks ettirilishi bilan

$$y = -x\sqrt{3} + 3^{k-1}\sqrt{3}:$$

$$\varpi_k(x, y) = \omega_{k-1}(x, y) \vee$$

$$\vee\, \omega_{k-1}\left[\left(-x - y\sqrt{3} + 3^k\right)/2, \left(-x\sqrt{3} + y + 3^{k-1}\sqrt{3}\right)/2\right];$$

2. ϖ_k funksiyaning R-konyunksiyasi chiziqqa nisbatan o‘zining aks ettirilishi bilan

$$x = 3^k / 2:$$

$$\omega_k(x, y) = \varpi_k(x, y) \wedge \varpi_k(3^k - x, y).$$

Teng tomonli uchburchaklarning tomonlarida qurilgan Kox egri chizig‘i Kox qorparchasi nomli geometrik obyektni beradi. Kox qorparchasi chegaralari tenglamalari bir-biri bilan 60^0 burchakka burilgan uchta operatsiya R-konyunksiyani qo‘llash bilan olinadi:

$$W_k(x, y) = \omega_k(y + 3^k / 2, x - 3^{k-1}\sqrt{3} / 2) \wedge$$
$$\wedge \left[\omega_k \left[y - x\sqrt{3} + 3^k \right) / 2, \left(-x - y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3} \right) / 2 \right] \wedge$$
$$\wedge \omega_k \left[\left(-y - x\sqrt{3} + 3^k \right) / 2, \left(-x + y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3} \right) / 2 \right] \Big].$$

Oldingi bo‘limda Kox egri chizig‘i, Serpin salfetkasi va gilami, fraktal antenna va boshqa turdagi fraktallarning tenglamalarini V.L.Rvachevning R-funksiya usuliga asosan qurish keltirilgan.

Endi V.L.Rvachevning R-funksiya usuliga asosan (d=1 o‘lchamli) Kantor to‘plami, Gilbert, Gosper egri chiziqlari va boshqa ko‘rinishdagi fraktallarning tenglamalarini quramiz.

Kantor to‘plami (changlari). Juda ko‘p taniqli fraktallar Kantor to‘plamiga yaqin qarindosh hisoblanadi, shuning uchun Kantor to‘plamining fraktal xususiyatlari katta ahamiyatga ega.

Kantor to‘plamini qurish birlik kesmadan o‘rtadagi qismini tashlab yuborish bilan boshlanadi, bunda kesmaning oxirlari kirmaydi. Ya’ni [0,1] kesma boshlang‘ich to‘plam bo‘lib, birinchi qadam (1/3, 2/3) ochiq intervalni o‘chirishdan iborat. Navbatdagi va keyingi barcha qadamlarda joriy qadamdagi barcha kesma (oxirlari kirmaydi)larda o‘rtadagi qismi tashlab yuboriladi. Shu tartibda to‘plamlar ketma-ketlik o‘lchami d ≈ 0,9542 bo‘lgan Kantor to‘plamini olamiz.

O‘lchami d=1 Kantor to‘plami. To‘g‘ri chiziqdan tekislikka o‘tib o‘lchami d = 1 bo‘lgan Kantor to‘plamini qurish mumkin. Navbatdagi misol Magdi Muhammadga tegishli. Boshlang‘ich to‘plam birlik kvadratdan iborat va uchlarini (0,0), (1,0), (1,1) va (0,1) deb faraz qilamiz. Har bir qadamda oldingi kvadratdan to‘rt borabar kichik bo‘lgan kvadratlarni hosil qilamiz. Bu qurishning chegaraviy to‘plami $N = 4$ bilan o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plam va o‘xshashlik koeffitsiyenti $r = ¼$. Uning o‘lchami

$$d = \log(4)/\log(4) = 1.$$

ga teng.

Qurishlardan ko‘rinib turibdiki, hosil qilingan to‘plam Kantor to‘plami bo‘lib, ixcham, barkamol va to‘liq uzlukli.

Bu fraktalning tenglamasini V.L.Rvachevning R-funksiya usulini qo‘llab quramiz.

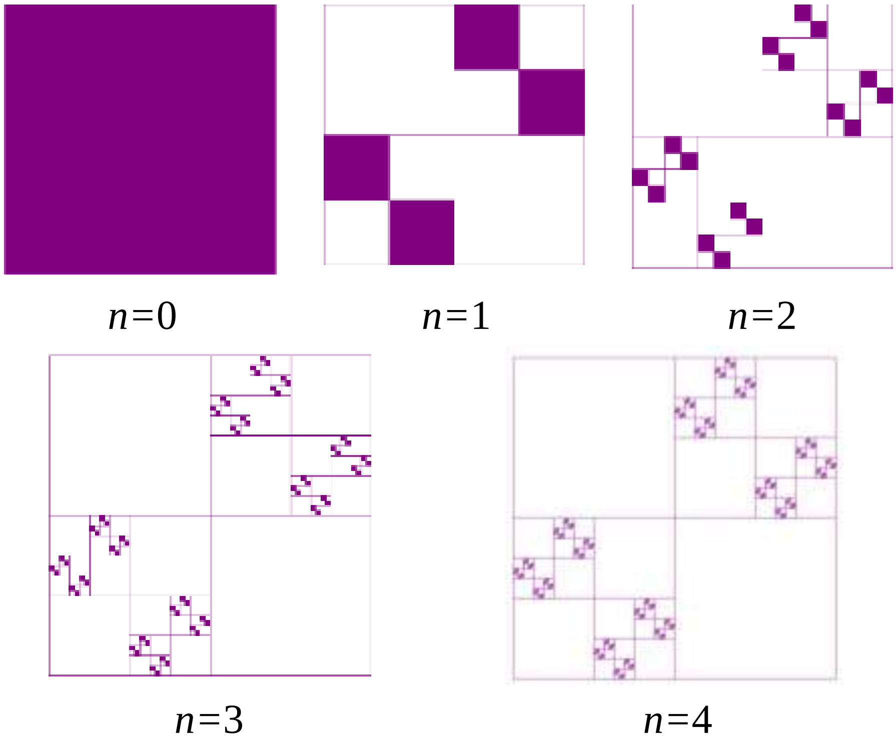
$$\omega_0(a,x,y) = \frac{a^2 - x^2}{2a} \wedge_0 \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0.$$

– kvadrat tenglamasi.

d=1 o‘lchamli Kantor to‘plami shartiga asosan, ya’ni iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagini olamiz:

$$\begin{gathered}
\omega_n(a,x,y) = \omega_{n-1}\left(\frac{a}{4}, x - \frac{3a}{4}, y - \frac{a}{4}\right) \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{a}{4}, x - \frac{a}{4}, y - \frac{3a}{4}\right) \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{a}{4}, x + \frac{3a}{4}, y + \frac{a}{4}\right) \vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{a}{4}, x + \frac{a}{4}, y + \frac{3a}{4}\right) \vee_0 \\
\vee_0 \left(x\left(a^2 - x^2\right) = 0 \wedge_0 \left(a^2 - y^2\right) \geq 0\right) \vee_0 \\
\vee_0 \left(y\left(a^2 - y^2\right) = 0 \wedge_0 \left(a^2 - x^2\right) \geq 0\right), \;\; n = 1,2,3,...
\end{gathered}$$

d=1 bo‘lganda va n ning turli qiymatlarida olingan natijalar 4.20-rasmda keltirilgan.



4.20-rasm *d*=1 o‘lchamli Kantor to‘plamini qurish

Gilbert egri chizig‘i. ω_0 -bo‘sh to‘plam (rasmda hech narsa chiqmaydi). Masalan ω_0 sifatida quyidagini olamiz:

$$\left(\omega_0(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (-1 - \mathrm{x}^2) \geq 0\right);$$

Endi Gilbert egri chiziqlarining tartiblarini boshqarish uchun quyidagi formulalar kerak bo‘ladi:

$$\begin{cases} m_0 = 0 \\ m_n = 2m_{n-1} + a. \end{cases}$$

Bu yerda m_n – n-tartibli Gilbert chizig‘ining o‘lchami (a – o‘lchamning birligi).

$$f_1(x,y) = ((y = 0) \wedge_0 (x - m_{n\text{-}1}) \wedge_0 (m_{n\text{-}1} + a - x)) \geq 0;$$

(pastki birlashtiruvchi chiziq)

$$f_2(x,y) = ((x - m_{n\text{-}1} = 0) \wedge_0 (y - m_{n\text{-}1}) \wedge_0 (m_{n\text{-}1} + a - y)) \geq 0;$$

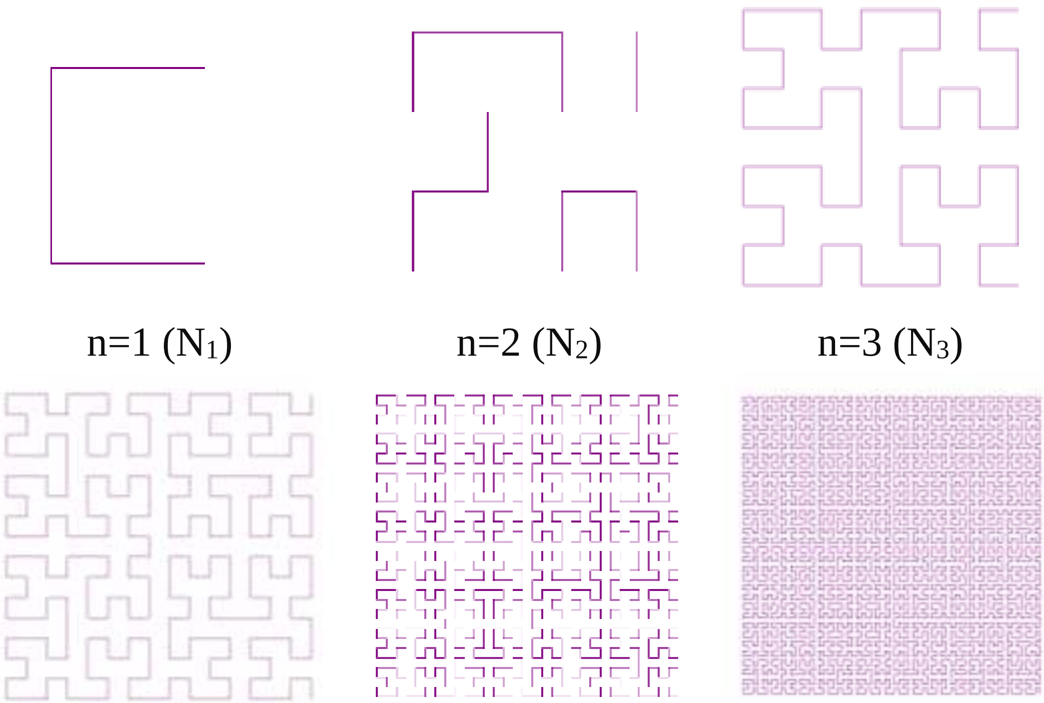
(chap birlashtiruvchi chiziq)

$$f_3(x,y) = ((y - 2m_{n-1} - a = 0) \wedge_0 (x - m_{n-1}) \wedge_0 (m_{n-1} + a - x)) \geq 0;$$

(tepa birlashtiruvchi chiziq).

Rekursiv protseduraga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\omega_n(x,y) = \omega_{n-1}(x,y) \vee_0 f_1(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(m_{n-1} - y, x - m_{n-1} - a) \vee_0 f_2(x,y) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(x, y - m_{n-1} - a) \vee_0 f_3(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(y - m_{n-1} - a, x - m_{n-1} - a),\ n = 1,2,3,\ldots$$



n=1 (N_1) n=2 (N_2) n=3 (N_3)

n=4 (N_4) n=5 (N_5) n=6 (N_6)

4.21-rasm. ($N_1 \ldots N_6$) Gilbert egri chizig‘i

4.21-rasmda $\omega_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \geq 0$ funksiya tenglamalari chiziqlarining chizmalari keltirilgan.

Gosper egri chizig‘i. Gosper egri chizig‘i nisbatan Serpin egri chizig‘iga o‘xshash bo‘lib, farqi shundaki Gosper egri chizig‘ining burchaklari *OX* va *OY* o‘qlariga nisbatan og‘ishgan bo‘ladi:

$$\omega_1(a,x,y) = \left(\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right) \wedge_0 ({a^2}_{11} - y^2) \geq 0,$$

Bu yerda a_{11} – yetarli darajada kichik son (chiziqning qalinligi).

Endi qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan o‘qlar sistemasida og‘ish burchagi qiymatini hisoblaymiz va bu yerda ko‘chirish hamda burish formulalarini qo‘llaymiz.

$$\varphi = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{5});\ a_{ky} = \frac{a}{\sqrt{7}};\ a_{mv} = a_{ky}\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_{ky} = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi);\ y_{ky} = -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) + a_{mv};$$

Endi rekursiyani qo‘llab quyidagini olamiz:

$$\omega_n(a,x,y) = \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky}, y_{ky} - a_{mv}) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{3a_{ky}}{2})\cos(\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(\frac{2\pi}{3}), -(x_{ky} - \frac{3a_{ky}}{2})\sin(\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(\frac{2\pi}{3})) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2}, y_{ky}) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2})\cos(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(-\frac{2\pi}{3}), -(x_{ky} - \frac{a_{ky}}{2})\sin(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(-\frac{2\pi}{3})) \vee_0$$

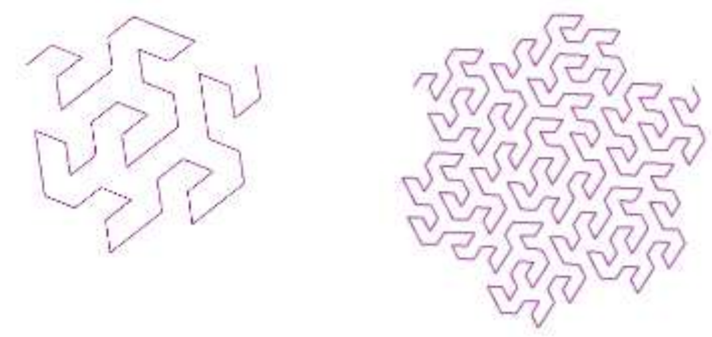
$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky}, y_{ky} + a_{mv}) \vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, x_{ky} - a_{ky}, y_{ky} + a_{mv}) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a_{ky}, (x_{ky} - \frac{5a_{ky}}{2})\cos(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\sin(-\frac{2\pi}{3}), -(x_{ky} - \frac{5a_{ky}}{2})\sin(-\frac{2\pi}{3}) + y_{ky}\cos(-\frac{2\pi}{3}))$$

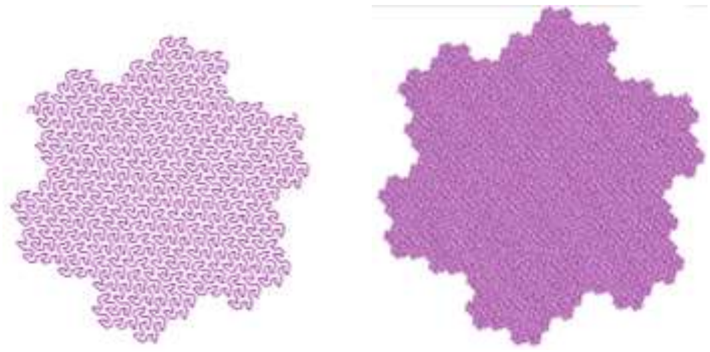
$n = 2, 3, 4, \ldots$

n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.22-rasmda keltirilgan.

n=1 n=2



n=3 n=4



n=5 n=6

4.22-rasm *n* ning turli qiymatlaridagi Gosper egri chizig‘i

Aylanalardan iborat fraktallar. Fraktallar nazariyasining asosiy ilovalaridan biri aylanalardan iborat fraktallarni generatsiyalashdir. Hozirgi vaqtda fraktallar tenglamasini qurishning bir necha usuli mavjuddir: L-tizimlari usuli, iteratsion funksiyalar tizimlari usuli va boshqalar. Ulardan farqli bo‘lgan R-funksiya algebra mantiq usulining loyihalash muhiti fraktallar tenglamasini qurish imkoniyatini yaratadi. Keyin bu tenglamalar bo‘yicha fraktallarning vizual tasvirini qurish mumkin. Shunday qilib, quyida V.L.Rvachevning loyihaviy muhiti R-funksiya usuliga asosan aylanalardan iborat fraktallarning tenglamalarini qurish qaralgan.

Bog‘langan aylanalar. Tashqi aylana tenglamasi quyidagicha aniqlangan:

$$\omega_{00} = \omega_{00}(R, x, y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0),$$

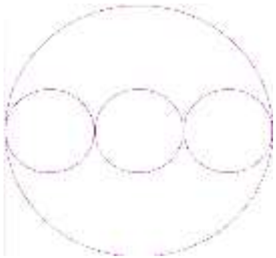
aylanaga bog‘lanuvchi aylananing tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\omega_0 = \omega_{00} \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R - a)^2 \geq 0),$$

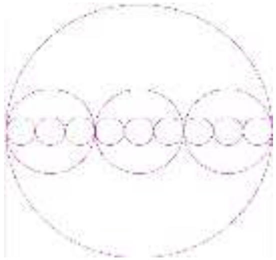
bu yerda *a*-aylananing qalinligi (aylananing qalinligi 2a ga), *R*-tashqi aylananing radiusi, $\alpha = \dfrac{2\pi}{k}$; k – har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalarning soni k=2,3,4,... Bu yerda iteratsiyani qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$
\begin{aligned}
&\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x,y\right)\vee_0\\
&\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x-\frac{2R}{3}\cos(0),y-\frac{2R}{3}\sin(0)\right)\vee_0\\
&\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x-\frac{2R}{3}\cos(\alpha),y-\frac{2R}{3}\sin(\alpha)\right)\vee_0\\
&\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x-\frac{2R}{3}\cos(2\alpha),y-\frac{2R}{3}\sin(2\alpha)\right)\vee_0\ldots\vee_0\\
&\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{3},x-\frac{2R}{3}\cos((k-1)\alpha),y-\frac{2R}{3}\sin((k-1)\alpha)\right)\geq 0;\, n=1,2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

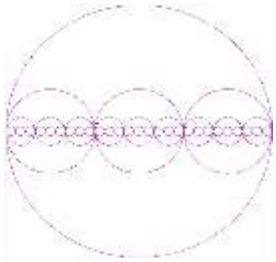
Hisoblash eksperimentining natijalari 4.23-rasmda keltirilgan.



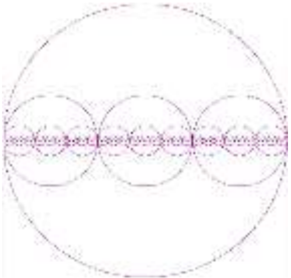
n=1, k=2



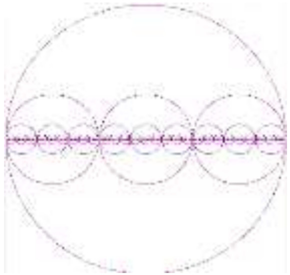
n=2, k=2



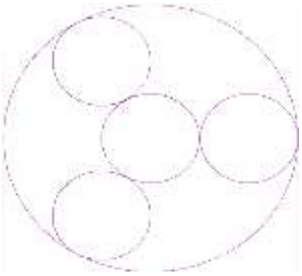
n=3, k=2



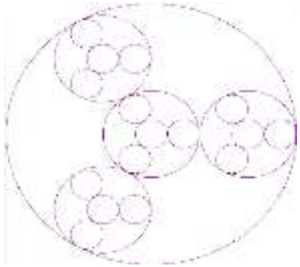
n=4, k=2



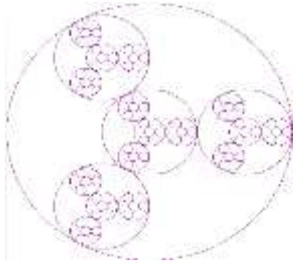
n=5, k=2



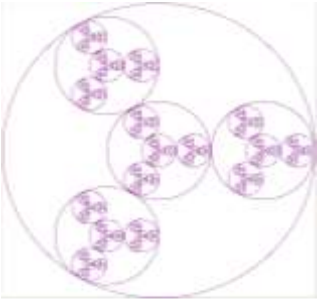
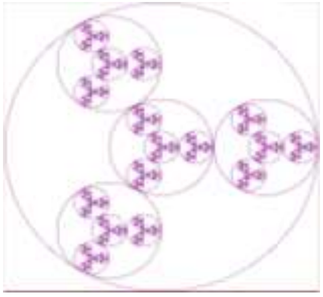
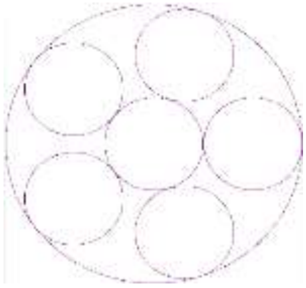
n=1, k=3



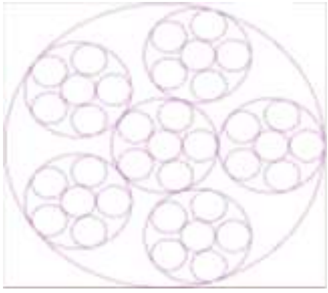
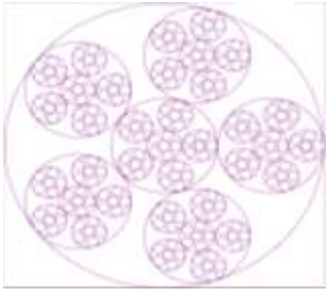
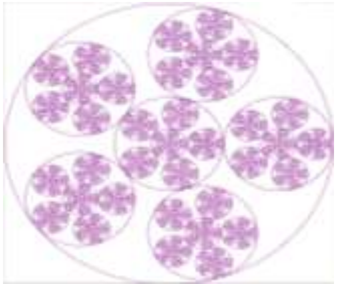
n=2, k=3



n=3, k=3

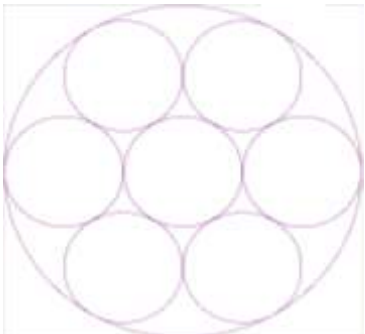
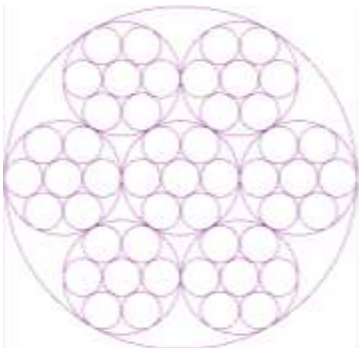
n=4, *k*=3 *n*=5, *k*=3 *n*=1, *k*=5

n=2, *k*=5 *n*=3, *k*=5 *n*=4, *k*=5

4.23-rasm

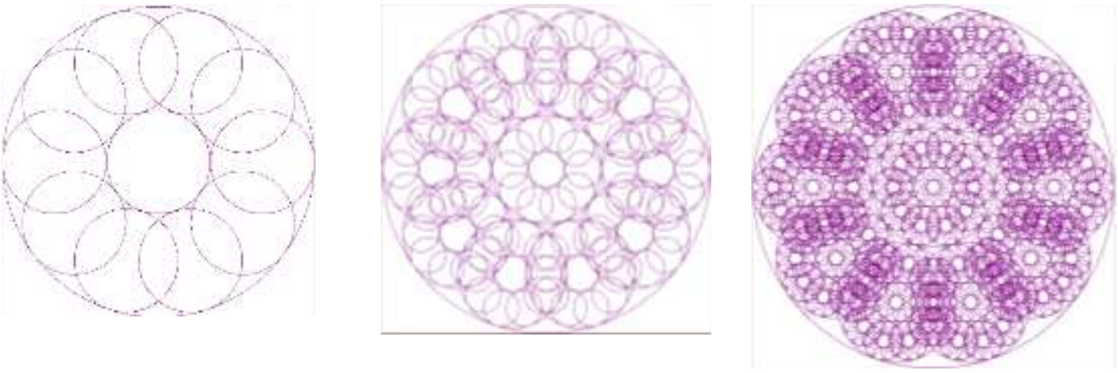
Endi k=6 dagi holatni qaraymiz. Bunda eksklyuziv halqali fraktallarni olamiz.

n=1, k=6 n=2, k=6

4.24-rasm

Ajratib koʻrsatish mumkinki, agar k<6 da ichki aylanalar bir-biriga urinmaydi, k=6 da ichki aylanalar urinadi, k>6 da ichki aylanalar kesishadi (4.25-rasm).



n=1, *k*=10 *n*=2, *k*=10 *n*=3, *k*=10

4.25-rasm

Urinishli kesishadigan aylanali fraktallar. Endi katta aylana ichida ikkita aylana bo‘lgan holatni qaraymiz. Bu aylanalar urinadi. O‘z navbatida ichki aylanalarda yana ikkita aylana hosil bo‘ladi va h.k. Xuddi shu fraktalni tenglamasini quramiz.

Bu holatda 1-qadamda fraktalning tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\omega\ (R,x,y)=(R^2-x^2-y^2\geq 0)\wedge_0 (x^2+y^2-(R-a)^2\geq 0),$$

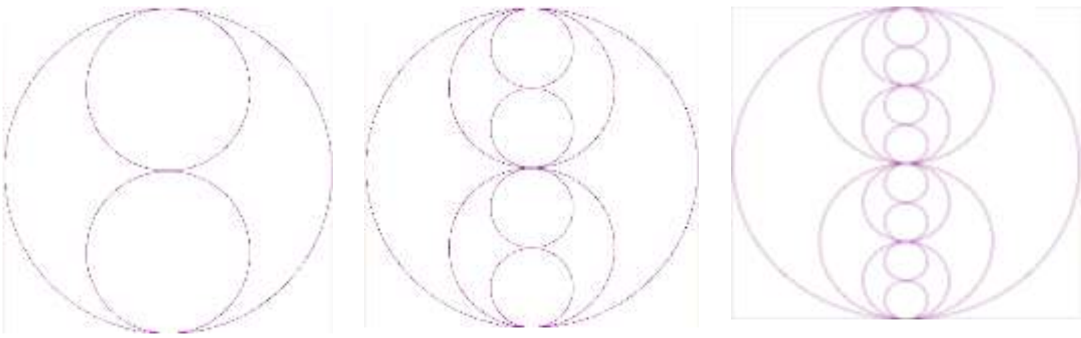
bu yerda ***a*** – aylana qalinligi (aylananing qalinligi *2a* ga teng), *R* – tashqi aylananing radiusi.

Iteratsiya protsedurasini qo‘llagandan keyin quyidagini hosil qilamiz:

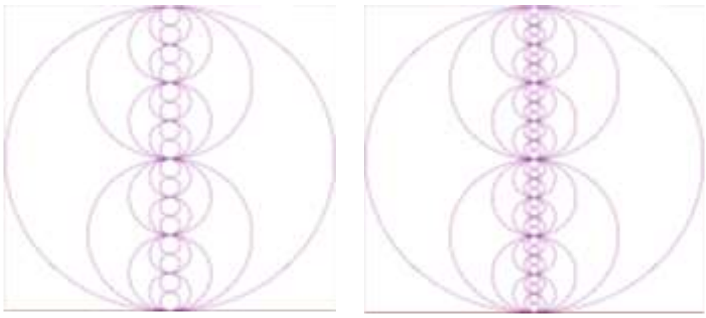
$$\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y-\frac{R}{2})\vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{2},x,y+\frac{R}{2})\geq 0; \quad n=1,2,3,...$$

n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 4.26-rasmda keltirilgan



n=1 n=2 n=3



n=4 n=5

4.26-rasm

Endi ichki aylanalar kesishadigan va kamayadigan holatni qaraymiz. Shu maqsad uchun l kamayuchi koeffitsiyentini kiritamiz.

Birinchi masaladagi kabi kesishadigan aylanalarning tenglamasini aniqlaymiz

$$\omega_0(R,x,y)=(R^2-x^2-y^2\geq 0)\wedge_0(x^2+y^2-(R-a)^2\geq 0)\,,$$

bu yerda a – aylananing qalinligi (aylananing qalinligi $2a$ ga teng).

$$\alpha=\frac{2\pi}{k};$$

k – har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalar soni k=2,3,4,...

l – har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalarning kamayish koeffitsiyenti, l=2,3,4,...

R – tashqi aylananing radiusi.

Iteratsiya protsedurasini qo‘llab quyidagini olamiz:

$$\omega_n(R,x,y)=\omega_0(R,x,y)\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{l},x,y\right)\vee_0$$

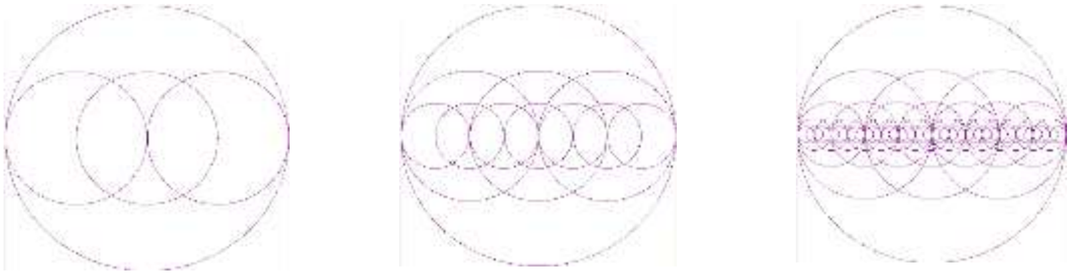
$$\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(0),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(0)\right)\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(\alpha)\right)\vee_0$$

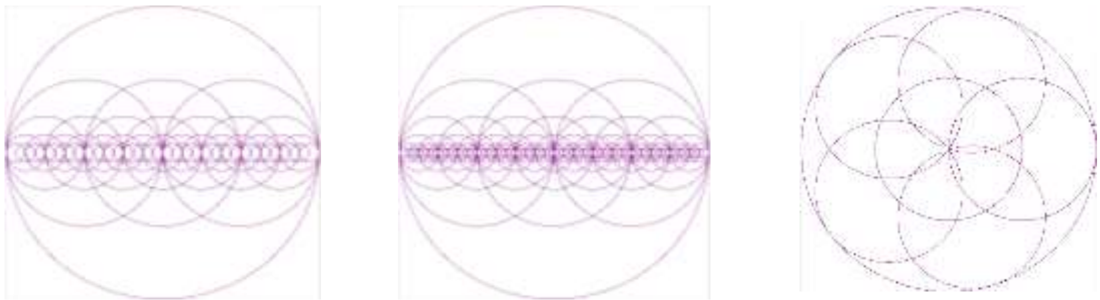
$$\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos(2\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin(2\alpha)\right)\vee_0\ldots\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{R}{l},x-\frac{(l-1)R}{l}\cos((k-1)\alpha),y-\frac{(l-1)R}{l}\sin((k-1)\alpha)\right)\geq 0;\quad n=1,2,3,\ldots$$

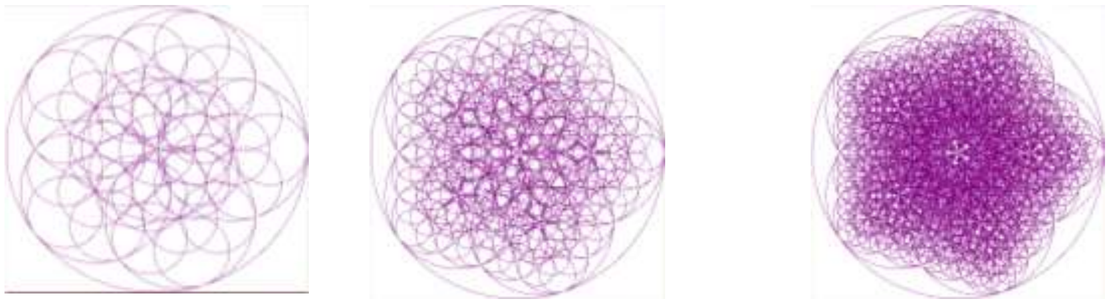
n, k, l larning turli qiymatlaridagi natijalar 4.27-rasmda keltirilgan



n=1, k=2, l=2 n=2, k=2, l=2 n=3, k=2, l=2



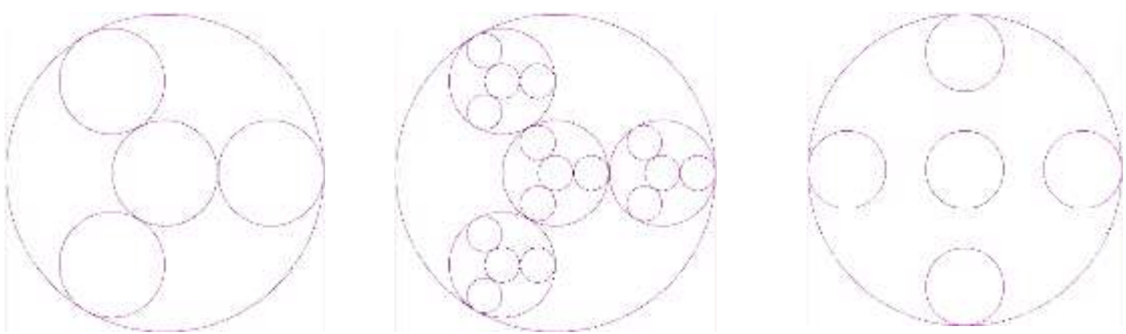
n=4, k=2, l=2 n=5, k=2, l=2 n=1, k=5, l=2



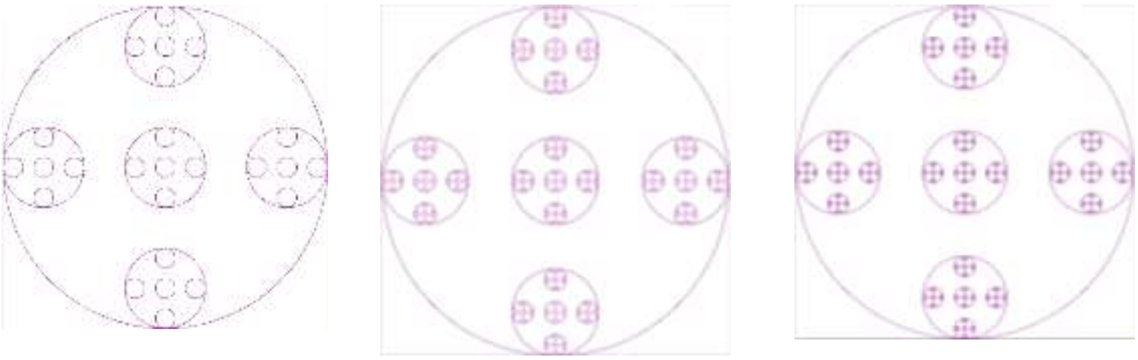
n=2, k=5, l=2 n=3, k=5, l=2 n=4, k=5, l=2

4.27-rasm

$l=3$ da bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar chiziladi. Bu natijalar 3.28-rasmda keltirilgan.

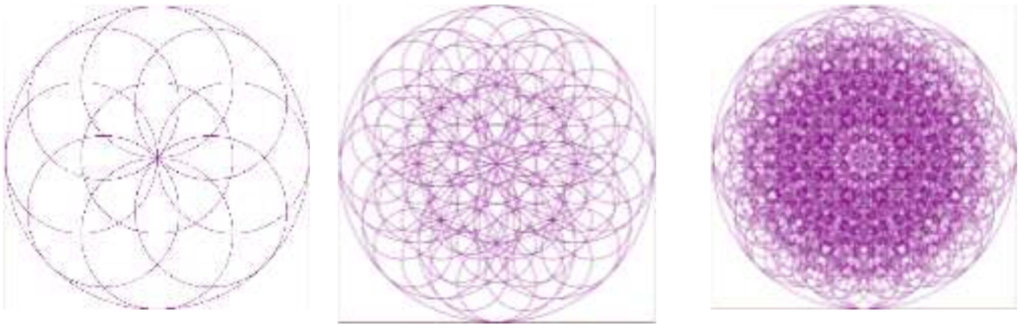


n=1, k=5, l=3 n=2, k=5, l=3 n=1, k=4, l=4



n=2, *k*=4, *l*=4 *n*=3, *k*=4, *l*=4 *n*=4, *k*=4, *l*=4

4.28-rasm

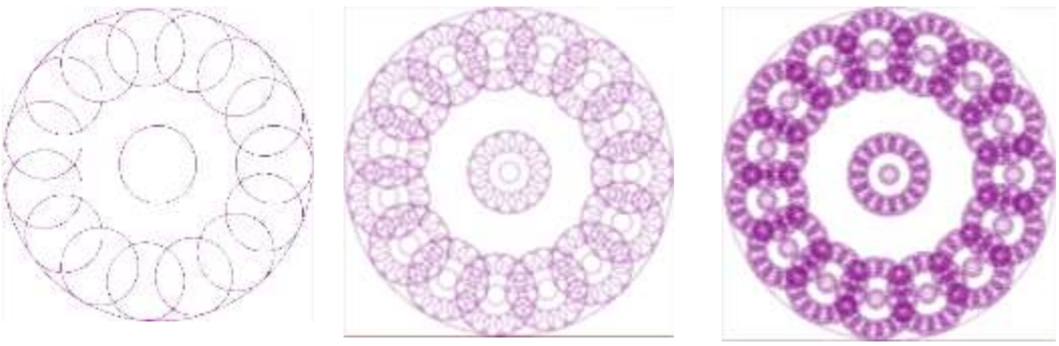


n=1, *k=8, l=2* *n=2, k=8, l=2* *n=3, k=8, l=2*

4.29-rasm

Iteratsion fraktallar $k=8$, $l=2$ va $n=\overline{1,2,3}$ da olinadi va 3.29-rasmda ifodalangan.

$k=15$, $l=4$ da n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.30-rasmda keltirilgan.



n=1, *k*=15, *l*=4 *n*=2, *k*=15, *l*=4 *n*=3, *k*=15, *l*=4

4.30-rasm

Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar. Ma’lumki geometrik fraktallarni asosiy rasmni qo‘llagan initsiator shakldan boshlanib rasmiylashtiriladi. Determinallashgan fraktallar rekursiv jarayonda ifodalanadi. Determinallashgan fraktallarda o‘ziga o‘xshashlik barcha tartiblarda namoyon bo‘ladi. Aniq tasvirlarni olish uchun bunday fraktallar 4-6 marta iteratsiyalanadi.

Bu bo‘limda V.L.Rvachevning R-funksiya usuliga asosan daraxt ko‘rinishdagi fraktallarning tenglamasini quramiz.

Aylanalardan daraxt tenglamasini qurishni qaraymiz. Oraliqning oxirlari *(x_1,y_1)* va *(x_2,y_2)* nuqtalar bo‘lsin. Berilgan nuqtalar *(x_1,y_1)* va *(x_2, y_2)*lardan erkin o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini quramiz.

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2,x,y)=\left(\left(\frac{1}{2}((x_2-x_1\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)+(y_2-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2-$$

$$-\left((x-x_1)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)+(y-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cos(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)+(y_2-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2\geq 0\right)\wedge_0$$

$$\wedge_0\left(a^2-\left(-(x-x_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)+(y-y_1)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2\geq 0\right)$$

bu yerda *a* – oraliqning balandligi (oraliqning balandligi *2a* ga teng).

Agar *k* juft bo‘lsa, unda $\varphi_0=0$, aks holda $\varphi_0=\frac{\alpha}{2}$.

n=1 da quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz: $\alpha=\frac{2\pi}{k}$

$$\omega_1(x,y)=f(0,0,R\cos(\varphi_0+0),R\sin(\varphi_0+0),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+\alpha),R\sin(\varphi_0+\alpha),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+2\alpha),R\sin(\varphi_0+2\alpha),x,y)\vee_0\ldots\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+(k-1)\alpha),R\sin(\varphi_0+(k-1)\alpha),x,y)$$

n=2,3,4… da

$$\alpha = \frac{2\pi}{k^{n-1}}; k_1 = -[k/2]; \; R_{n-1} = 2R(1 - \frac{1}{2^{n-1}}); \; R_n = 2R(1 - \frac{1}{2^n});$$

R_n – n-iteratsiyada aylana chegaralarning radiusi *(R_1=R)*.

Agar k juft bo‘lsa, unda $k_2 = [k/2]$, aks holda $k_2 = [k/2] - 1$.

Eslatma: [x] – x sonining butun qismi.

Iteratsiya protsedurasini qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\omega_{nx1}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n \cos\left(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}\right), \; R_n \sin\left(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}\right), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n \cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), \; R_n \sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n \cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), \; R_n \sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0 \ldots \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$

$$R_n \cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), \; R_n \sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), x, y)$$

$$\omega_{nx2}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),$$

$$R_n \sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),$$

$$R_n \sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),$$

$$R_n \sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0 \ldots \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), x, y)$$

Bu uchun ega bo‘lamiz $1 \leq i \leq k^{n-1}$:

$$\omega_{nxi}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha), R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0\ldots\vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+i\alpha),$$

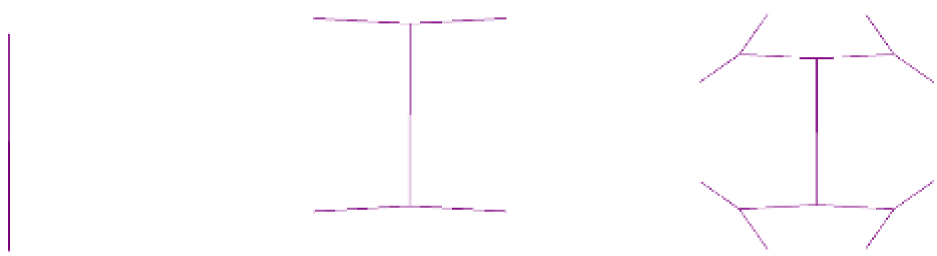
$$R_n\cos(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0+i\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), x, y)$$

$$\omega_n(x,y) = \omega_{n-1}(x,y)\vee_0\omega_{nx1}(x,y)\vee_0\omega_{nx2}(x,y)\vee_0\ldots$$

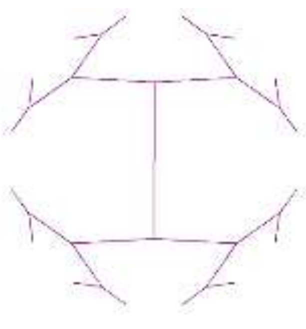
$$\vee_0\omega_{nxi}(x,y)\vee_0\ldots\vee_0\omega_{nxk^{n-1}}(x,y).$$

Oldingi formulalarda k=2, 3, 4, 5, ….

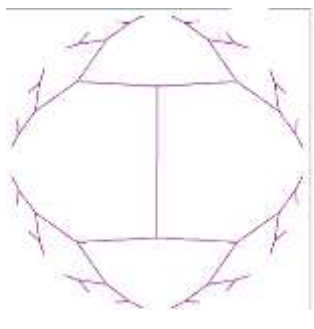
Barcha chiziqlar uchun R_n radius bilan tashqi doira chizish mumkin. (n-tartibli iteratsiya). n va k ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 4.31-rasmda keltirilgan.



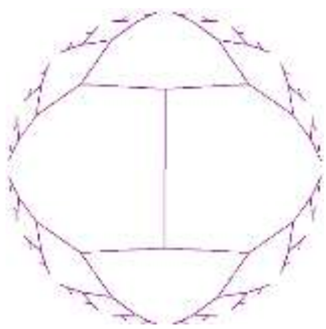
n=1, k=2 n=2, k=2 n=3, k=2



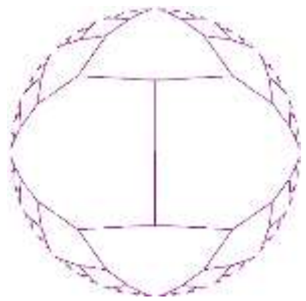
n=4, k=2



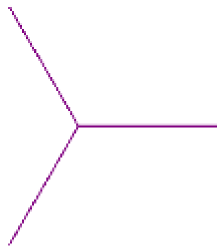
n=5, k=2



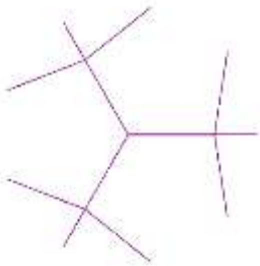
n=6, k=2



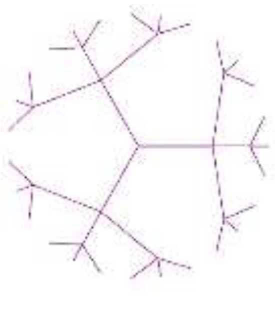
n=7, k=2



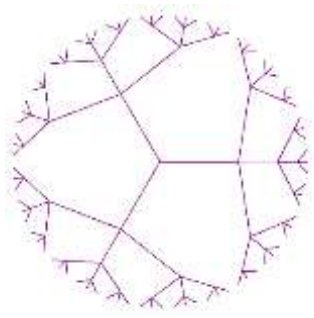
n=1, k=3



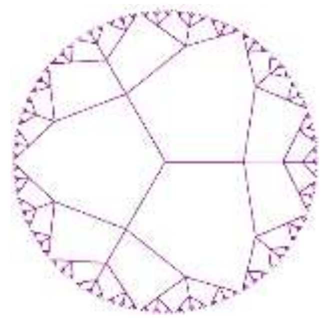
n=2, k=3



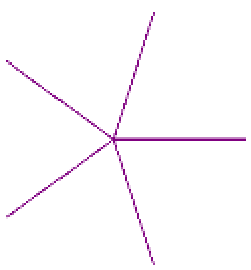
n=3, k=3



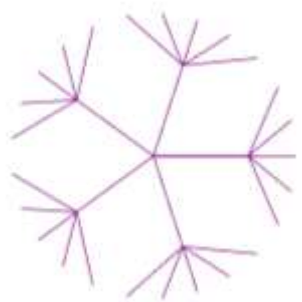
n=4, k=3



n=5, k=3

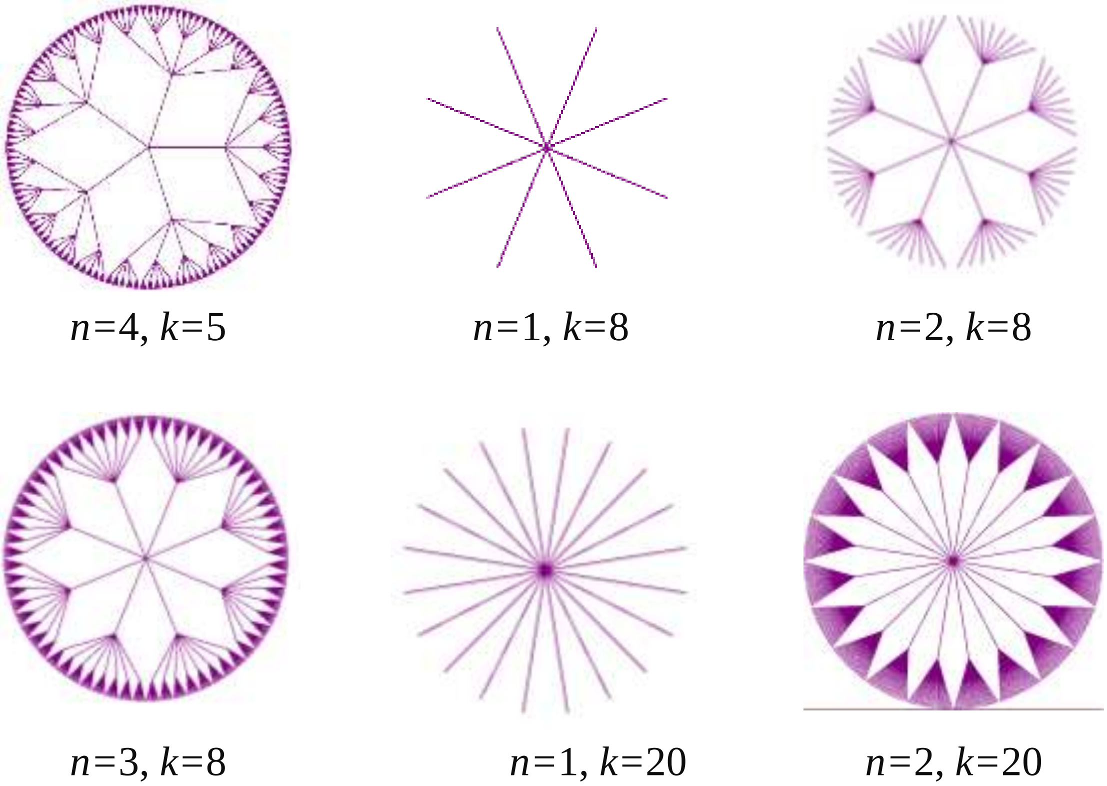


n=1, k=5



n=2, k=5

n=3, k=5



4.31-rasm

Pifagor daraxti. Pifagor, o‘zining teoremasini isbotlab, to‘g‘ri uchburchaklar tomonlariga kvadratlar joylashtirilgan figurani qurdi. Agar bu jarayonni davom ettirilsa, Pifagor daraxti hosil qilinadi. Kvadrat tenglamalaridan foydalanib daraxtning tenglamasini quramiz, ya’ni

$$\omega_0(a,x,y) = ((a^2 - x^2 \geq 0) \wedge_0 ((b^2 - (y-a)^2 \geq 0) \vee_0 (b^2 - (y+a)^2 \geq 0))) \vee_0$$
$$\vee_0 ((a^2 - y^2 \geq 0) \wedge_0 ((b^2 - (x-a)^2 \geq 0) \vee_0 (b^2 - (x+a)^2 \geq 0))) \geq 0$$

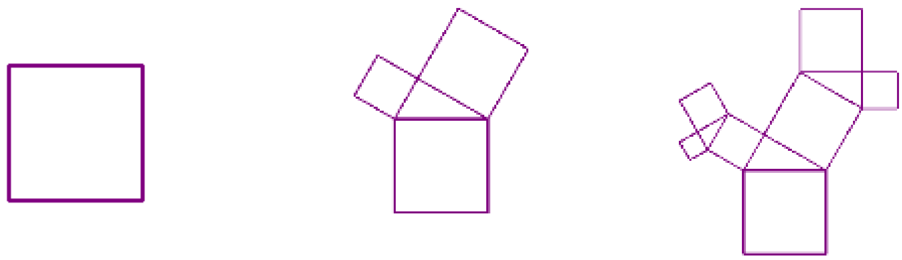
bu yerda $\omega_0(a,x,y)$ – tomoni $2a$ va uning qalinligi $2b$ ga teng bo‘lgan kvadrat.

Rekursiya protsedurasini qo‘llab quyidagini hosil qilamiz:

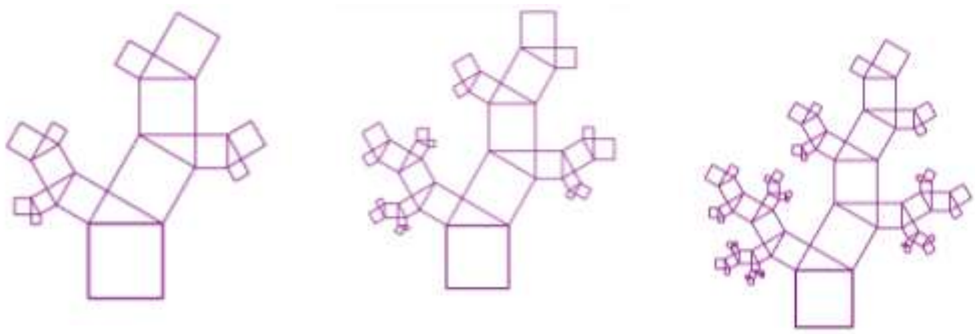
$$\omega_n(a,x,y) = \omega_0(a,x,y) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(a\cos(\alpha), (x + a - a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha))\cos(\alpha) + (y - a - a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha))\sin(\alpha),$$
$$-(x + a - a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha))\sin(\alpha) + (y - a - a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha))\cos(\alpha)) \vee_0$$

$$\vee_0 \omega_{n-1}(a\sin(\alpha), -(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha),$$
$$(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha))$$

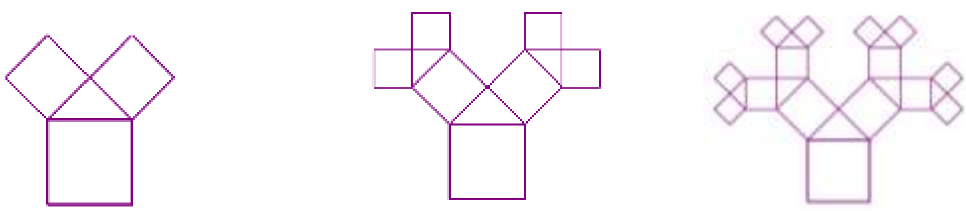
bu yerda α – daraxt shoxining chapga burgandagi burish burchagi $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ intervalda qiymatni oladi, o‘ngga burgandagi burish burchagi $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ga teng. n, α ning turli qiymatlaridagi hisoblashlar natijalari 4.32-rasmda keltirilgan.



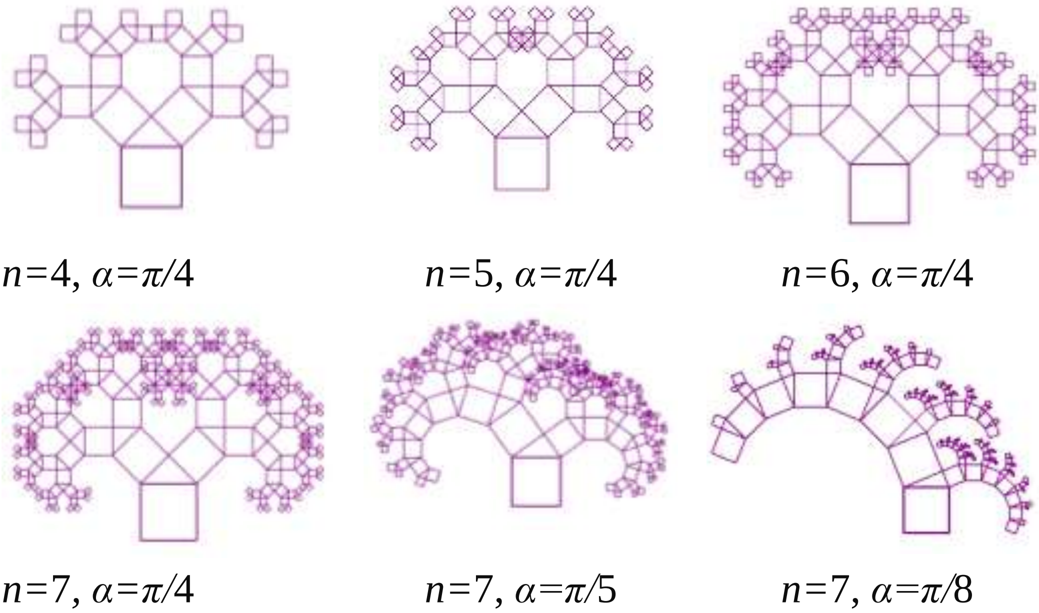
n=0, *α*=*π*/3 *n*=1, *α*=*π*/3 *n*=2, *α*=*π*/3



n=3, *α*=*π*/3 *n*=4, *α*=*π*/3 *n*=5, *α*=*π*/3



n=1, *α*=*π*/4 *n*=2, *α*=*π*/4 *n*=3, *α*=*π*/4



4.32-rasm

Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar eng oddiy fraktallar hisoblanadi. To‘g‘ri chiziq tenglamasi hamda R-funksiya usulining loyihaviy muhiti, ya’ni R_0: R-konyunksiya, R-dizyunksiya va R-inkordan foydalanib turli daraxt shaklli fraktallarning tenglamasini qurish mumkin. Bu tenglamalarga asosan iteratsiyalar sonini va burish burchagi α ni berib kompyuterli peyzajlarda, turli illyustratsiyalarda, to‘qimachilik sanoatida va boshqalarda qo‘llaniladigan turli oldfraktallarni tashkil etish mumkin.

Spiralsimon fraktallar. Spiralsimon fraktallar ichki kvadratlarni tashqi kvadratlarni ichida burish yo‘li bilan tasviflanadi.

Kvadrat tenglamalarini quramiz

$$\omega_0(a,x,y)=((a^2-x^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(y-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(y+a)^2\geq 0)))\vee_0$$
$$\vee_0((a^2-y^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(x-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(x+a)^2\geq 0)))$$

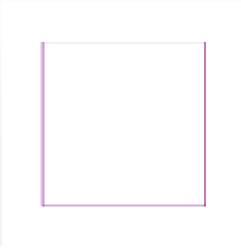
bu yerda a-tashqi kvadrat o‘lchami, b-chiziqning qalinligi (chiziqning qalinligi 2a ga teng).

Rekursiyani qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

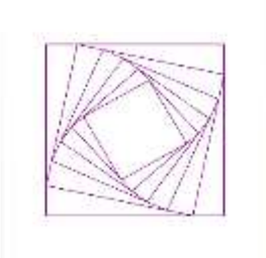
$$\omega_n(a,x,y)=\omega_0(a,x,y)\vee_0\omega_{n-1}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})},x\cos(\alpha)-y\sin(\alpha),x\sin(\alpha)+y\cos(\alpha)\right)\geq 0$$ bu

yerda n=1,2,3,…; α – buralish burchagi.

n va α ning turli qiymatlaridagi hisoblarning natijalari 4.33-rasmda keltirilgan.

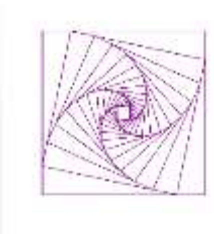


n=0, $\alpha=\pi/15$

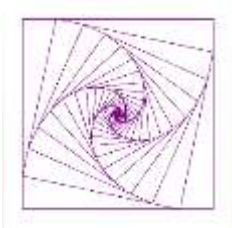


n=5, $\alpha=\pi/15$

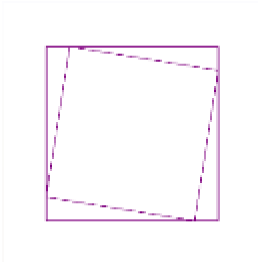
n=10, $\alpha=\pi/15$



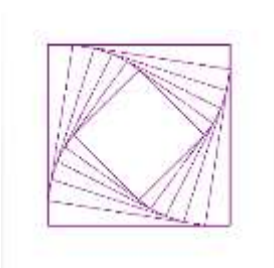
n=15, $\alpha=\pi/15$



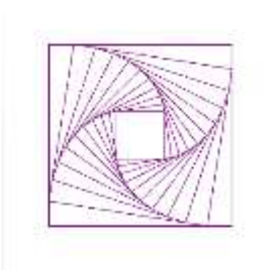
n=30, $\alpha=\pi/15$



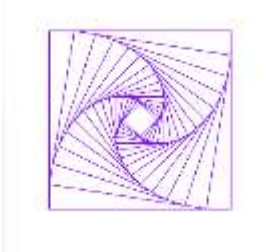
n=1, $\alpha=\pi/20$



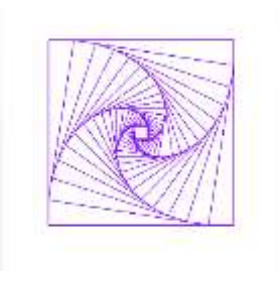
n=5, $\alpha=\pi/20$



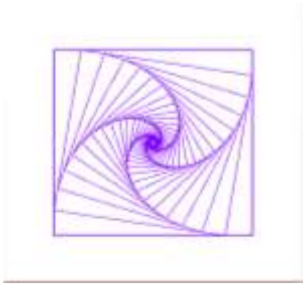
n=10, $\alpha=\pi/20$



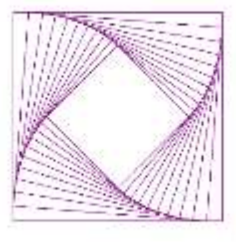
n=15, $\alpha=\pi/20$



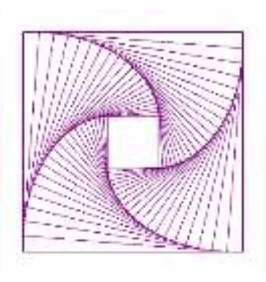
n=20, $\alpha=\pi/20$

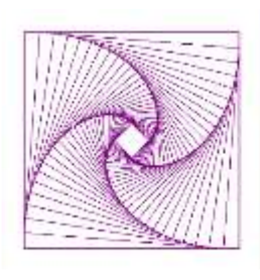


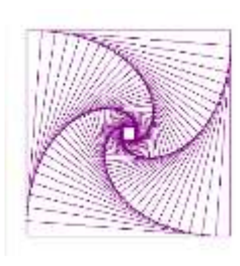
n=30, $\alpha=\pi/20$



n=10, $\alpha=\pi/40$

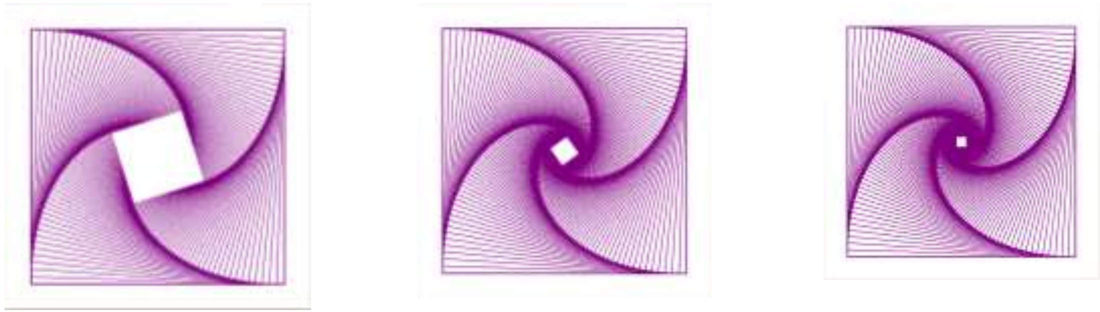






n=20, $\alpha=\pi/40$ n=30, $\alpha=\pi/40$ n=40, $\alpha=\pi/40$

n=80, $\alpha=\pi/40$ n=10, $\alpha=\pi/100$ n=20, $\alpha=\pi/100$



n=40, $\alpha=\pi/100$ n=80, $\alpha=\pi/100$ n=100, $\alpha=\pi/100$

4.33-rasm

Fraktallarni qurish usullarida klassik hamda zamonaviy fraktallar uchun tenglamalar qurilgan, natijalar olingan va rasmlari keltirilgan.

Aylanalar tenglamasi va algebromantiqiy usuli R-funksiyaning loyihalash vositasidan foydalanib, aylanalar kesishishi, aylanalar birlashishidan fraktallar tenglamasini qurishi mumkin. Bu fraktallar juda chiroyli bo‘lib, qaysiki yengil sanoat, telekommunikatsiya, keramik va chinni buyumlarga naqshlarni chizish va boshqalarda qo‘llanilishi mumkin.

Mantiq algebrasi, R-funksiya usuli (RFM) va fraktal arifmetika usullari bo‘yicha olib borilgan ko‘pyillik nazariy tadqiqotlar gazlama va gilam buyumlarning rangli dizaynini zamonaviylashtirishning algoritmik muhitini ishlab chiqishda xizmat qiladi.

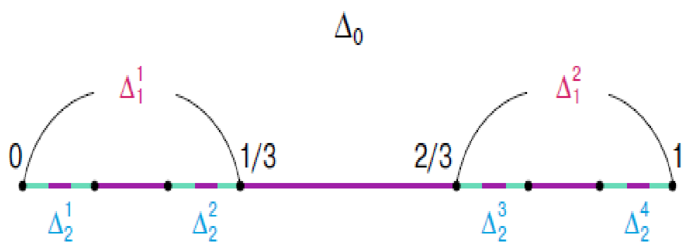
Bu o‘z navbatida katta hajmda paxta o‘stiradigan va ulardan paxta tolalari olinadigan hamda ulardan gazlamalar yaratadigan mamlakat – O‘zbekistonda dolzarbdir. Bizni gazlamaning gullarini shtamplari yetarli darajada chiroyli bo‘lishi qiziqtiradi. Bundan tashqari gazlamaning narxini aniqlashda gullarning ranglari alohida o‘rin egallaydi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. R-funksiya usuli (RFM)ni qo‘llab fraktallar sohasi geometriyasi tenglamasini qurish qanday amalga oshiriladi?
2. R-funksiya usuli bo‘yicha asosiy tushunchalar nimalardan iborat?
3. Eng ko‘p foydalaniladigan R-funksiya to‘liq tizimi haqida ma’lumot bering.
4. R-funksiyalar qaysi sohalarda qo‘llaniladi?
5. Algoritm uchun kiruvchi ma’lumot qaysilar?
6. R-funksiya usuli asosida Kox egri chizig‘ining tenglamasini qurish qanday amalga oshiriladi?
7. R-funksiya usuli asosida Serpin Gilamining tenglamasini qurishni tushuntirib bering.
8. R-funksiya usuli asosida Serpin salfetkasining tenglamasini qurishni izohlab bering.
9. Keyli daraxtiga asoslangan fraktal antennalarni tushuntiring.
10. Eksklyuziv fraktal halqalar tadqiqotida nimaga asoslangan?
11. Serpin egri chizig‘ining hisoblash tenglamasini tushuntiring.
12. Kantor to‘plami (changlari)ning fraktal xususiyatlarini tushuntirib bering.
13. Gilbert egri chizig‘ini izohlang.
14. Aylanalardan iborat fraktallar xususiyatlarini tushuntiring.
15. Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar qanday jarayonda ifodalanadi?
16. Spiralsimon fraktallar qanday tavsiflanadi?

4.4. To‘plamlar nazariyasi usulida fraktallar qurish

Kantor to‘plami misolida, K=A quyidagi konstruksiya yordamida**,**



4.34-rasm.

$\nabla_0 = [0,1]$ kesmadan olinadi.

Birinchi qadamda $\nabla_0 = [0,1]$ kesimdan $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ interval kesib olinadi. Natijada ikkita kesmalar $\nabla_1^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ va $\nabla_1^2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ qoladi.

Ikkinchi qadamda har ikkala $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ va $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ kesimdan uning markazidan uchdan biri kesib olinadi, ya’ni quyidagi intervallarni:

$$\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \ldots \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\right)$$

natijada quyidagi kesmalar

$$\nabla_2^1 = \left[0, \frac{1}{3^2}\right]; \quad \nabla_2^2 = \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]; \quad \nabla_2^3 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3^2}\right]; \quad \nabla_2^4 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, 1\right]$$

hosil bo‘ladi va hokazo. Har bir qadamda kesimning markazidan uning uchdan biri kesib olinadi (3.34-rasm).

Berilgan sonli to‘plam:

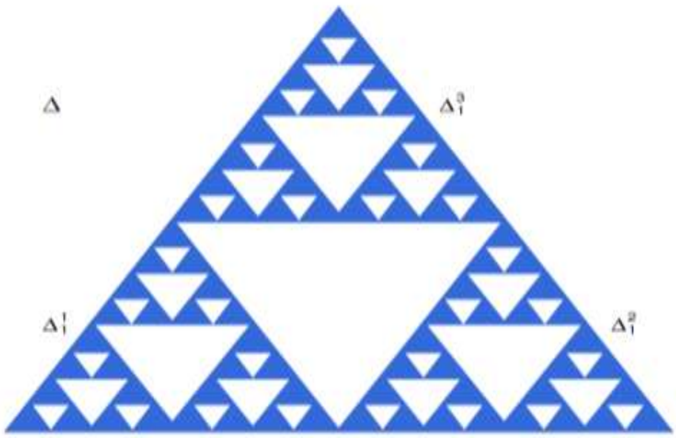
$$A=\left\{\frac{1}{n},\ n=1,2,\ldots\right\}\cup(0)$$

fraktal o‘lchami:

$$\varepsilon_p=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p(p-1)};$$

$$B\varepsilon_p=\left(\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{k}-\varepsilon_p<x<\frac{1}{k}-\varepsilon_p\right).$$

Serpin uchburchak gilamini qurish



$$S=\cap\left\{\nabla_1^1\cup\nabla_1^2\cup\nabla_1^3\right\}\cap\left\{\left(\nabla_2^1\cup\nabla_2^2\cup\nabla_2^3\right)\cup\right.$$
$$\left.\cup\left(\nabla_2^4\cup\nabla_2^5\cup\nabla_2^6\right)\cup\left(\nabla_2^7\cup\nabla_2^8\cup\nabla_2^9\right)\right\}\cap\ldots$$

Serpin uchburchak gilamini qurish

Birinchi rasmdagi fraktalni qurish uchun quyidagi algoritm bajariladi:

1. Gilam tartib raqamini N kiritish;

2. Uchburchak uchlari koordinatasini berish ABS: (X_A, Y_A), (X_B, Y_B), (X_C, Y_C);

3. Teng tomonli uchburchak ABC yasab unga ko‘k rang berish;

4. ABC uchburchak tomonlari markazini topish;

$$dx = \frac{x_b - x_a}{2}; \quad dx = \frac{y_b - y_a}{2};$$

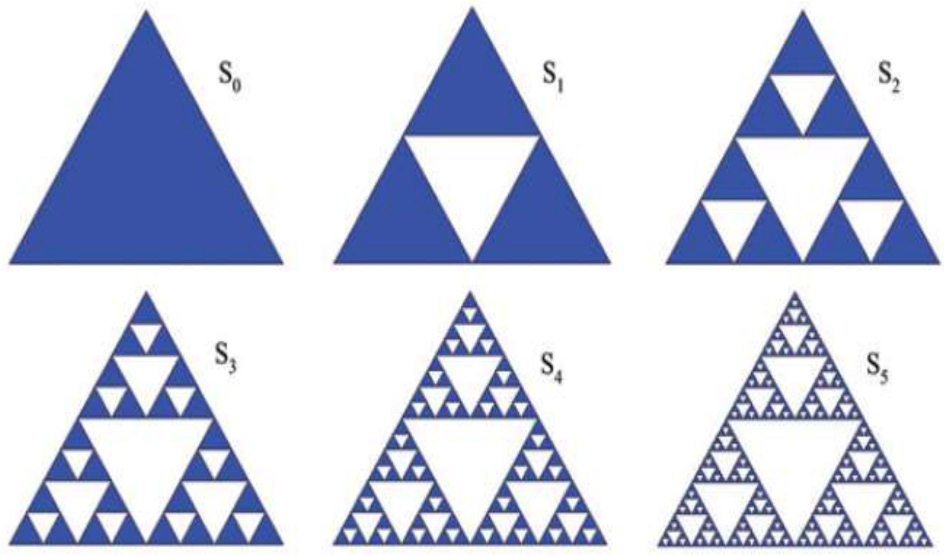
$X_{A'} = X_A + dx$, $Y_{A'} = Y_A + dy$;

$X_{B'} = X_B + dx + dx / 2$; $Y_{B'} = Y_B + dy$;

$X_{C'} = X_C + dx / 2$; $Y_{C'} = Y_C + dy$;

5. $A'B'C'$ uchburchakni yasab unga oq rang berish;

6. $AA'C', A'BB', C'B'C$ uchburchaklar uchun 4- va 5- qadamni N marta takrorlash.



4.35-rasm.

Serpin kvadrat gilamini qurish

4.35-rasmdagi fraktalni qurishda quyidagi algoritm amalga oshiriladi:

1. Gilam tartib raqamini N kiritish;

2. To‘rtburchak uchlari koordinatasini tanlash;

ABCD: (X_A, Y_A), (X_B, Y_B), (X_C, Y_C), (X_D, Y_D)

3. ABCD kvadrat yasab unga ko‘k rang berish;

4. ABCD kvadratning tomonlarini uchga bo‘luvchi nuqta koordinatasini topish;

$$dx = \frac{x_b - x_a}{3}; \quad dx = \frac{y_b - y_a}{3};$$

$X_{A'} = X_A + dx$, $Y_{A'} = Y_A + dy$

$X_{B'} = X_A + dx + dx$; $Y_{B'} = Y_A + dy$;

$X_{C'} = X_A + dx + dx$; $Y_{C'} = Y_A + dy + dy$;

$X_{D'} = X_A + dx$; $Y_{C'} = Y_A + dy + dy$;

5. $A'B'C'D'$ to‘rtburchakni yasab unga oq rang berish;

6. Quyidagi koordinatalarga ega bo‘lgan kvadrat uchlari uchun 4- va 5-qadamlarni N marta takrorlash.

$(X_A , Y_A), (X_{A'} , Y_A), (X_{A'} , Y_{A'}), (X_A , Y_{A'})$

$(X_{A'} , Y_A), (X_{B'} , Y_A), (X_{B'} , Y_{B'}), (X_{A'} , Y_{B'})$

$(X_{B'} , Y_A), (X_B , Y_B), (X_B , Y_{B'}), (X_{B'} , Y_{B'})$

$(X_{B'} , Y_{B'}), (X_B , Y_{B'}), (X_{B'} , Y_{C'}), (X_{C'} , Y_{C'})$

$(X_{C'} , Y_{C'}), (X_B , Y_{C'}), (X_C , Y_C), (X_{C'} , Y_{C'})$

$(X_{D'} , Y_{D'}), (X_{C'} , Y_{C'}), (X_{C'} , Y_{C'}), (X_{D'} , Y_{C'})$

$(X_A , Y_{D'}), (X_{D'} , Y_{D'}), (X_{D'} , Y_C), (X_D , Y_D)$

$(X_A , Y_{A'}), (X_{A'} , Y_{D'}), (X_{D'} , Y_{D'}), (X_A , Y_{D'})$

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Serpin uchburchak gilamini qurish qanday amalga oshiriladi?
2. Serpin uchburchak gilamini qurish algoritmlarini amalga oshirishni tushuntirib bering.

4.5. Arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasi asosida fraktallar qurish

Mazkur paragrafda arifmetik xususiyatlarga asoslangan binomial ko‘phadlar nazariyasi usulida Paskal uchburchaklarini qurish, Paskal uchburchaklari va *s*-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari muhokama qilinadi.

Paskal uchburchagini o‘rganishga qiziqish bugungi kunda ham ko‘plab uchraydi. Bu *p* modul elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi hamda ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek, turli amaliy muammolarda qo‘llanilishi bilan bog‘liq.

Arifmetik tuzilmalar bu kombinatorial sonlardan tashkil topgan arifmetik jadvallar, ularning sodda va aralash modullar bo‘yicha qoldiqlari, yoki boshqa kombinatorial sonlarga bo‘linadigan tub sonlar darajasidir. Ushbu ishda rekkurent munosabatlar asosida qurilgan binomial, trinomial va boshqa kombinatorial sonlar asosida qurilgan uchbuchaklarni o‘rganamiz.

Matematika tarixidagi eng mashhur jadvallardan biri XVII asrning buyuk fransuz matematigi va faylasufi sharafiga ***Paskal uchburchagi*** deb ataladigan arifmetik uchburchakdir. Blez Paskal (1623-1662) tadqiqoti natijalari muallifning vafotidan keyin nashr etilgan “Traite du triangle ametique” risolasida taqdim etildi. U bu risolada Paskal uchburchagining ma’lum bo‘lgan xususiyatlarini umumlashtirdi va ko‘plab yangi xususiyatlarni keltirdi.

Paskal arifmetik uchburchakni tashkil etuvchi sonlarning turli xil xususiyatlarining natijalarini algebraik yozmasdan umumiy ravishda yozgan. Paskalning ba’zi bir prinsipial muhim kashfiyotlari Paskalning arifmetik va nazariy-ehtimoliy izlanishlari bilan bevosita bog‘liq: to‘liq matematik induksiya usuli, arifmetik uchburchakning ehtimollik nazariyasi muammolariga tatbiq etilishi va boshqalar.

Arifmetik uchburchak va uning a’zolarini shakllantirish qo‘shimchalar qonuni miloddan avvalgi Hindistonda ma’lum bo‘lgan. Arifmetik uchburchakning tuzilishi Umar Xayyom (1100) – taniqli O‘rta Osiyolik matematik, shoir va faylasuf edi. Uchburchak keyinchalik Xitoyda paydo bo‘ldi.

Yevropada arifmetik uchburchak Paskal risolasi nashr etilishidan ancha oldin paydo bo‘lgan.

Paskal uchburchagiga qiziqish bugungi kunda ham to‘xtagani yo‘q. Bu modul p elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi va ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek turli amaliy muammolarda qo‘llanilishi bilan bog‘liq. Paskal uchburchagi yangi arifmetik uchburchaklar va to‘rtburchaklar, piramidalar va boshqa arifmetik jadvallarga e‘tibor qaratdi.

Paskal uchburchagi ko‘pincha teng yonli uchburchak shaklida yoziladi, unda yon tomonlarda birliklar mavjud, qolgan har bir son oldingi satrda chapda va o‘ngda turgan ikkita sonning yig‘indisiga teng.

Paskal uchburchagi va binomial koeffitsiyentlarning xususiyatlari, shuningdek, bo‘linishga oid ba’zi savollarni V.A.Uspenskiy kitobida, kombinatorial tahlil va sonlar nazariyasi bo‘yicha adabiyotlarda, shuningdek matematik ma’lumotnomalarda topish mumkin. Paskal uchburchagining ko‘plab elementar xususiyatlarining eng batafsil tavsifi T.M.Green, C.L.Hamberg tomonidan o‘rganilgan.

Ma’lumki, Paskal uchburchagi elementlari Paskal uchburchagi paydo bo‘lishidan oldin ham ma’lum bo‘lgan binomial koeffitsiyentlardir. Biroq u birinchi bo‘lib ularni qo‘llagan va Paskalning ta’rifini bergan. Binomial koeffitsiyentlar va binomial teoremasi to‘g‘risidagi tarixiy ma’lumotlarni adabiyotlardan topish mumkin.

a) Paskal uchburchaklari va binomial koeffitsiyentlar. Yevropada arifmetik uchburchak Paskal risolasi nashr etilishidan ancha oldin paydo bo‘lgan. Bu *p* moduli elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi va ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek, turli amaliy muammolarda qo‘llanilishi bilan bog‘liq.

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

4.36-rasm. Paskal uchburchagi

Shuningdek, biz to‘rtburchaklar jadvalini keltiramiz:

1	1	1	1	1	1	.
1	2	3	4	5	6	.
1	3	6	10	15	21	.
1	4	10	20	35	56	.
1	5	15	35	70	126	.
1	6	21	56	126	252	.
.	.	.	.	.	.	.

4.37-rasm. To‘rtburchaklar jadvali

Paskal uchburchagi yangi arifmetik uchburchaklar va to‘rtburchaklar, piramidalar va boshqa arifmetik jadvallarga e’tibor qaratdi.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

. . . .

4.38-rasm. Paskal uchburchagi

Paskal uchburchagi ko‘pincha teng yonli uchburchak shaklida yoziladi (4.38-rasm), unda yon tomonlarda birliklar mavjud va qolgan sonlarning har biri oldingi satrda chapda va o‘ngda turgan ikkita sonning yig‘indisiga teng. Satr raqami adabiyotda turlicha ko‘rsatilgan binomial kengayish koeffitsientlaridan *(1 + x) n* iborat. Bu yerda biz ularni XIX asrda paydo bo‘lgan belgi o‘rniga Eyler tomonidan kiritilgan belgilar bilan belgilaymiz.

Paskal uchburchagi va binom koeffitsiyentlarining xususiyatlari, shuningdek, bo‘linishga oid ba’zi savollarni V.A.Uspenskiyning kitobida, kombinatorial tahlil va sonlar nazariyasi bo‘yicha adabiyotlarda, shuningdek matematik ma’lumotnomalarda topish mumkin. Paskal uchburchagining ko‘plab elementar xususiyatlarining eng batafsil tavsifi T.M.Green, C.L.Hamberg adayotida keltirilgan.

Ma’lumki, Paskal uchburchagi elementlari Paskal uchburchagi paydo bo‘lishidan oldin ham ma’lum bo‘lgan binomial koeffitsiyentlardir. Biroq u birinchi bo‘lib ularni qo‘lladi va Paskal uchburchagini aniqladi.

Binomial koeffitsiyentlar n elementlarning m dan ortiq turli birikmalar sonini aniqlaydigan eng oddiy kombinatorial obyektlardir. Binomial koeffitsiyentlarni binom darajasiga olib keladigan generatsiya funksiyasini kengaytirish orqali olish mumkin:

$$(1+x)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m$$

bu yerda

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \ldots n = 0,1,2,\ldots, m \le n, \quad n! = 1,2,3\ldots n$$

Binomial koeffitsiyentlar quyidagi rekkurent munosabatlarini qanoatlantiradi:

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}, \binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

shuningdek, eng sodda tengliklar:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-1}$$

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)\binom{n}{m} = 0; \quad \sum_{m=0}^{n} \binom{0}{0} = 2^n$$

Binomial koeffitsiyentlar o‘rtasida turli xil o‘ziga xosliklar va munosabatlar o‘rnatiladi.

Ularning o‘ziga xosligi va turli munosabatlarning binomial koeffitsiyentlari matematika va fizikaning ko‘plab muammolarini hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Bu binom koeffitsiyentlarini har xil umumlashtirish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

b) Umumlashtirilgan Paskal uchburchaklar va umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlar. x ning darajalari bo‘yicha yoyilgan koeffitsiyentlardan tashkil topgan ifoda:

$$\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{s-1}\right)^n = \sum_{m=0}^{(s-1)n} \binom{n}{m}_s x^m, \quad s \ge 2.$$

s-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchagi yoki uchburchakli jadvallar deb nomlanadi.

$\binom{n}{m}_s$ koeffitsiyentlari s-tartibli umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlari deb nomlanadi. $s = 2$ da ular doimiy binomial koeffitsiyentlarga aylanadi, yani $\binom{n}{m}_2 = \binom{n}{m}$ va Paskal uchburchagiga mos keladigan uchburchak jadvalidir. Ba’zi adabiyotlarda umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari ***s-arifmetik uchburchaklar*** deb nomlanadi. Umumlashtirilgan *s*-tartibli Paskal uchburchaklari, Paskal uchburchagi kabi, to‘g‘ri burchakli yoki teng yonli uchburchaklar shaklida yozilishi mumkin. Oltinchi va to‘rtinchi tartibli Paskal uchburchaklarini teng yonli uchburchaklar shaklida taqdim etamiz.

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

1 5 15 31 45 51 45 31 15 5 1

1 6 21 51 91 127 141 127 91 51 21 6 1

. . . .

1

1 1 1 1

1 2 3 4 3 2 1

1 3 6 10 12 12 10 6 3 1

1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1

. . . .

4.39-rasm. Umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari

Birinchi uchburchakda (s = 3) har bir element oldingi chiziq uchta sonining yig‘indisiga teng: uning ustidagi son va undan chapda bog‘langan ikkita sonlardir.

Ikkinchi uchburchakning elementlari (s = 4) shunga o‘xshash tarzda hisoblab chiqiladi, ularning har bir elementi oldingi chiziq to‘rtta sonining yig‘indisiga teng. Xuddi shuningdek har qanday tartibdagi umumlashtirilgan Paskal uchburchagining satrlari ham to‘ldiriladi.

Umumlashtirilgan binomial koeffitsiyenti $\binom{n}{m}_s$ m ta o‘xshash elementlarni n ta kataklarga joylashtirishning har xil usullari soni va har bir katakchada s – 1 ta element bo‘lishi kerak.

Avvalo, umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlar uchun rekkurent munosabatni yozamiz:

$$\binom{n+1}{m}_s = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{m-k}_, \quad \binom{n}{0}_s = 1.$$

U, s = 2 da binomial koeffitsiyentlar (1) uchun rekkurent munosabat bilan mos keladi. Umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlar ko‘plab tengliklarni, ayniyat va boshqa munosabatlarni, binomial koeffitsiyentlari uchun analogik munosabatlarni ham qanoatlantiradi. Masalan,

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{0}_s = \binom{n}{n}_s = 1, \quad \binom{n}{m}_s = \binom{n}{(s-1)n-m}_s, \\ \sum\limits_{m=0}^{(s-1)n} \binom{n}{m}_s = s^n, \quad \sum\limits_{m=0}^{(s-1)n} (-1)^m \binom{n}{m}_s = \begin{cases} 0, & s = 2t \\ 1, & s = 2t+1. \end{cases} \end{array}\right\}$$

Umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlar o‘rtasidagi rekkurent munosabat s bo‘yicha quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\binom{n}{m}_{s+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m-k}_s,$$

bu yerda $s \geq 2, \quad k < \dfrac{m}{s}$ da $\binom{k}{m-k}_s = 0.$

s-tartibli umumlashtirilgan binomial koeffitsiyentlarini binomial koeffitsiyentlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\binom{n}{m}_s = \sum_{k=0}^{[m/s]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+m-sk-1}{n-1}.$$

c) Lyuka arifmetik uchburchagi. *a*) hamda *b*) bo‘limlarda Paskal uchburchagi va *s*-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari qaraldi. Hozirgi vaqtda boshqa turdagi arifmetik uchburchaklar ham o‘rganilgan va ishlatilgan. Bular Lyuka, Fibonachchi, Katalon, Stirling va boshqa arifmetik uchburchaklar va boshqalar.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	.
1	1	2									
2	1	3	2								
3	1	4	5	2							
4	1	5	9	7	2						
5	1	6	14	16	9	2					
6	1	7	20	30	25	11	2				
7	1	8	27	50	55	36	13	2			
8	1	9	35	77	105	91	49	15	2		
9	1	10	44	112	182	195	140	61	17	2	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

4.40-rasm. Lyuka uchburchagi

Lyuka uchburchagi va uning xususiyatlari H.W. Gould va W.E. Greig tomonidan batafsil o‘rganilgan. Lyuka uchburchagining to‘qqizta qatori 4.40-rasmda keltirilgan.

Ushbu uchburchakda har bir element rekkurent munosabatlaridan aniqlanadi:

$$A(n+1,k)=A(n,k-1)+A(n,k)=0,$$

quyidagi boshlang‘ich shartlar $A(1,0)=1$, $A(1,1)=2$ va $A(n,k)=0$, agar $k<0$ yoki k>n. Lyuka uchburchagining yuqoriga qaragan diagonallari Paskal uchburchagining yuqoriga ko‘tarilgan diagonallari bilan bir xil tarzda aniqlanadi.

A (n, k) sonlari va binomial koeffitsiyentlari o‘rtasida bog‘liqlik mavjud:

$$A(n,k)=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

Lyuka uchburchagidan *i*-ustunni *k* (k = 1, 2, 3, ...) ga o‘zgartirib, yangi uchburchak quriladi, uning elementlari Lyuka sonini o‘z ichiga olgan turli formulalarni olish uchun ishlatiladi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Paskal uchburchagining xususiyatlarini tushuntiring.
2. Paskal uchburchagi va binomial koeffitsiyentlarining o‘ziga xos jihatlari?
3. Paskal uchburchagi va binom koeffitsiyentlarining xususiyatlari qanday namoyon bo‘ladi?
4. Paskal uchburchagi elementlari nimalardan iborat?

4.6. Analitik usulda muntazam uchburchakli fraktallarning tenglamalarini qurish

Fraktal grafika kompyuter grafikasining eng tez rivojlanayotgan va zamonaviy sohasidir. Ma’lumki fraktallarning tenglamalarini bir necha usullardan foydalanib qurish mumkin. Fraktallarning turlarini bilgan holda ularni qurish usuli tanlab olinadi. Fraktallarning geometrik, algebraik, stoxastik, qo‘l-ijodiy va tabiiy turlari mavjud.

Fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biri ularning o‘ziga-o‘zi o‘xshashligidir. Ya’ni ma’lum bir masshtabda fraktallarning tuzilishlari uning boshqa kattaroq masshtabdagi tuzilishiga o‘xshashdir. Buni quyidagicha ta’kidlash mumkin. Agar fraktal tuzilishlarning qaysidir elementini bir necha marta kattalashtirilsa, yana o‘sha fraktal tuzilishlarini namoyon etadi. Bu xusisiyat aniq bir sinfdagi fraktallar uchun o‘rinli. Ko‘pincha fraktal obyektlarning xususiyatlarini o‘rganish matematika usullarida bayon etiladi. Mazkur paragrafda matematika usullarida fraktal obyektlarning xususiyatlari o‘rganildi. Fraktal tuzulishlarning xarakteristikalarini (*n*-tartibli to‘g‘ri fraktal piramidalar sirtlari, yuzalari va hajmlari, *n*-tartibli Serpin piramidasining qirralari yig‘indisi va sirtining yuzasini, *n*-tartibli to‘g‘ri fraktal uchburchak parametri va yuzalarining hamda *n*-tartibli Serpin salfetkasi) taqqoslash va hisoblash uchun tenglamalar ishlab chiqish maqsadida, shuningdek, mos ravishda topilgan tenglamalar bilan unga mos sonli ekspriment natijalari keltiriladi. Maqsadga erishish uchun quyidagi algoritm amalga oshiriladi:

1. Fraktal obyektlarning bir nechta xususiyatlarini hisoblash uchun matematik tenglamalar ishlab chiqish;
2. Sonli ekspriment o‘tkazish;
3. Fraktal tuzilishlarni matematik (fizik) modellashtirish.

Fraktal uchburchakning ta’rifi: Fraktal uchburchak – bu teng qirrali uchburchak, uning tomonlarida teng qirrali uchburchaklar rekursiv takrorlanish natijasida hosil bo‘ladi, ularning tomonlari oldingi uchburchakning yon tomoni uzunligining 1/3 nisbatini bildiradi. Fraktal uchburchakning formulasini to‘g‘ri fraktal uchburchakning perimetri va yuzasini hisoblashdan foydalanib topiladi. Bunda rekursiv protseduralardan foydalaniladi.

Muntazam fraktal uchburchak perimetri va yuzasi maydoni:

0-*qadam*: $P_0 = 3a$. $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

1-*qadam*: $P_1 = P_0 + a = 4a$;

$$S_1 = S_0 + 3\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = S_0 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3*4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{3*4}$$
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

2-*qadam*: $P_2 = P_1 + 4\frac{a}{3} = 4a\left(1 + \frac{1}{3}\right);$

$$S_2 = S_1 + 3\left(\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + 3 * 4\frac{a^2\sqrt{3}}{3^4*4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3}\right).$$

3-*qadam*: $P_3 = P_2 + 8\frac{a}{3^2} = 4a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2}\right);$

$$S_3 = S_2 + 3\left(\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4 * 4 = S_2 + 3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3^6*4} * 4^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5}\right).$$

4-*qadam*: $P_4 = P_3 + 16\frac{a}{3^3} = 4a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3}\right);$

$$S_4 = S_3 + 3\left(\left(\frac{a}{3^4}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4^3 = S_3 + 3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3^8*4} * 4^3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}\right).$$

....

n – *qadam:*

$$P_n = 4a + 4a\left(\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \frac{2^6}{3^4} + \cdots + \frac{2^{2(n-2)}}{3^{n-1}}\right);$$

$$S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7} + \cdots + \frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\right).$$

Yuqorida keltirilgan formulalarda 1-dan 4-tartibgacha fraktal uchburchaklarning konturlari qurilib, fraktal uchburchak yuzasi maydoni va perimetrining uning tartibiga analitik bog‘liqligi aniqlandi.

Xulosa: fraktal uchburchak yuzasi maydoni kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=4/9) bo‘lib, u chekli. Fraktal uchburchakning perimetri ortib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=4/3) bo‘lib, tartib raqami oshgan sari u ham ortib boradi.

Serpin salfetkasi fraktali yuzasi va perimetri:

0-*qadam*: $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;$P_0$ =3*a*.

1-*qadam*: $S_1 = \frac{3}{4}S_0 = \frac{3}{4} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_1 = 3 * \frac{3}{2}a$.

2-*qadam*: $S_2 = \frac{3}{4}S_1 = \left(\frac{3}{4}\right) * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$.

3-*qadam*: $S_3 = \frac{3}{4}S_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_3 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$.

4-*qadam*: $S_4 = \frac{3}{4}S_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_4 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$.

....

n-*qadam*: $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n S_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a$.

"Serpin salfetkasi" fraktalining 1-dan 4-tartibgacha bo'lgan konturlari qurildi. "Serpin salfetkasi" fraktalining maydoni va perimetrini uning tartibiga analitik bog'liqligi keltirib chiqarildi. Yuqorida keltirilgan formulalarda "Serpin salfetkasi" fraktali maydoni va perimetrining uning tartibiga bog'liqligi olindi.

Xulosa: "Serpin salfetkasi" fraktali maydoni kamayib boruvchi geometrik progressiya (maxraji q=3/4) bo'lib, u tartib bilan cheksiz ortib nolga intiladi. "Serpin salfetkasi" fraktalining perimetri ortib boruvchi geometrik progressiya (maxraji q=3/2) bo'lib, tartib raqami oshgan sari u ham ortib boradi.

"Serpin piramidasi" fraktali sirti yuzasi, hajmi va perimetri:

0-*qadam*: $S_n = a^2\sqrt{3} = const$; $V_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$; $P_0 = 6a$.

1-*qadam*: $V_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2}$; $P_1 = 6a * 2$.

2-*qadam*: $V_2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^2}$; $P_2 = 6a * 2^2$.

3-*qadam*: $V_3 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^3}$; $P_3 = 6a * 2^3$.

4-*qadam*: $V_4 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^4}$; $P_4 = 6a * 2^4$.

....

n-qadam: $V_n = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^n}$; $P_n = 6a * 2^n$.

“Serpin piramidasi” fraktalining 1-dan 4-tartibgacha bo‘lgan konturlari tuzib olindi. Uning tartibiga “Serpin piramidasi” fraktali qirralarining hajmi va uzunliklari yig’indisining analitik bog‘liqligi keltirib chiqarildi, “Serpin piramidasi” fraktalining qirralari hajmi va uzunliklari yig‘indisini uning tartibiga bog‘liqligi olindi.

Xulosa: “Serpin piramidasi” fraktalining hajmi kamayib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=1/2) bo‘lib, u chekli. “Serpin piramidasi” fraktali perimetri ortib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q = 2) bo‘lib, u tartibning ortib borishi bilan ham ortib boradi.

Muntazam fraktal piramidaning aniqlash. Muntazam fraktal piramida tetraedr deb hisoblanganda, uning tashqi sirtlari ham muntazam piramidalardan quriladi, ularning qirralar uzunligi oldingi piramidaning qirra uzunlining 1/2 ga teng bo‘ladi.

Muntazam fraktal piramidaning 0-qadami. Tetraedr – tomonlari muntazam uchburchaklardan iborat muntazam ko‘pyoqdir. Tetraedrda 4 ta yuzasi, 4 ta uchi va 6 ta qirrasi bor. Muntazam tetraedrda barcha yuzalar ko‘p qirrali uchburchaklardir. Barcha qirralari, yuzalari va uchubrchak burchaklari tengdir.

Muntazam fraktal piramidaning 1-qadami (yulduzsimon oktaedr). Sakkiz qirrali oktaedr yoki kengaytirilgan oktaedr Leonardo Da Vinchi tomonidan kashf etilgan va 100 yil o‘tgach, I.Kepler tomonidan takomillashtirilgan hamda unga “Stella oktangula” sakkiz burchakli yulduz nomi berilgan. Bu ko‘pyoqli tabiatda ikki kristal birlashtirilgan shaklda uchraydi, uni ikkita kesishgan muntazam tetraedrlarning birlashgani kabi tasavvur qilish mumkin.

Muntazam fraktal piramidaning sirt yuzasi va hajmi (tetraedr)

0-*qadam*: $S_0 = a^2\sqrt{3}$; $V_0 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{-1}$.

Muntazam fraktal piramidaning sirt yuzasi va hajmi (oktaedr)

1-*qadam*: $S_1 = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}$; $V_1 = V_0 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{-1} * 2^{-1}$.

2-*qadam*: $S_2 = \frac{9}{4} a^2\sqrt{3}$; $V_2 = V_1 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{0} * 2^{-3}$.

3-*qadam*: $S_3 = \frac{27}{8} a^2\sqrt{3}$; $V_3 = V_2 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{1} * 2^{-5}$.

4-*qadam*: $S_4 = \frac{81}{16} a^2\sqrt{3}$; $V_4 = V_3 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{2} * 2^{-7}$.

....

n-*qadam*: $S_n = \frac{3^n}{2^n} a^2\sqrt{3}$; $V_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} (2^{1-2k} * 3^{k-2})$.

Muntazam fraktal piramidaning hajmi kamayuvchi geometrik progressiya elementlarining yig‘indisi bo‘lib, bu to‘plam chekli bo‘ladi. Muntazam fraktal piramidaning sirt maydoni ortib boruvchi geometrik progressiya bo‘lib, piramidaning tartib raqami ortgan sari u ham ortib boradi.

Mazkur paragrafda ikki o‘lchovli va uch o‘lchovli fraktal obyektlarning ba’zi xususiyatlari tahlil qilindi, ular uchun fraktal qiymatlarning ma’lum bir tartibgacha bo‘lgan ba’zi xususiyatlarining analitik bog‘liqliklari o‘rganildi. Hosil qilingan analitik bog‘liqliklar asosida muallif tomonidan amalga oshirilgan hisob-kitoblar matematik formulalar ko‘rinishida bayon etildi. Fraktal obyektlarning ba’zi xususiyatlari qiymatlarining yaqinlashuvi va farqlanishi ko‘rsatildi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Muntazam fraktal uchburchak perimetri va yuzasi maydoni formulasi qanday ko‘rinishda ifodalanadi?
2. Serpin salfetkasi fraktali yuzasi va perimetrini formulalarini yozing.
3. Muntazam fraktal piramidani sirt yuzasi va hajmi (tetraedr) formulasi qanday?
4. Muntazam fraktal piramidani sirt yuzasi va hajmi (oktaedr) formulalarini yozing.

V BOB. FRAKTALLARNI QURISHNI AVTOMATLASHTIRUVCHI DASTURIY MUHITLAR

5.1. Fraktallar qurishni avtomatlashtiruvchi dasturiy muhitlar va ularning imkoniyatlari

Fraktallar kompyuter grafikasida, matematikada, mexanikada va boshqa tabiiy fanlarda keng qo‘llaniladi. Ular haqiqiy san’at asarlari – g‘ayrioddiy go‘zallik va jozibali tasvirlarni namoyish etib, san’atning yangi yo‘nalishiga aylandi. Bundan tashqari, logotiplar, saytlar uchun orqa fonlarni ishlab chiqish uchun fraktal grafika generator dasturlarini ham ishlatish mumkin. Umuman olganda, fraktal grafika mavzusi hali to‘liq ochilmagan va shuning uchun juda mashhur hamda qiziqarli.

Fraktal tasvirlarni yaratish uchun ko‘plab muharrirlar mavjud. Quyidagi eng keng tarqalgan va arzon narxlardagi fraktal grafik generator dasturlarini ko‘rib chiqamiz: UltraFraktal, FraktalExplorer, ChaosPro, Apophysis, Chaoscope.

Ish jarayonida fraktal grafikani yaratish dasturlarini taqqoslash uchun quyidagi mezonlar tanlandi: rasmni eksport qilish, bir vaqtning o‘zida turli xil oynalarda bir nechta fraktalalarni qurish, oddiy ikki o‘lchovli tasvirlar asosida fraktallarning uch o‘lchovli tasvirlarini yaratish, standart formulalar kutubxonasining mavjudligi va o‘z formati, tarqatish usuli, fraktal tasvirlarni yaratish prinsipi, qatlamlar bilan ishlash, rang parametrlarini sozlash, animatsiyalar yaratish qobiliyati, ish interfeysining murakkablik darajasi va boshqalar.

Jadvalda dastlabki besh mezondan foydalangan holda fraktal grafik dasturlarni taqqoslash natijalari ko‘rsatilgan.

Tarqatish usuli bo‘yicha UltraFraktaldan tashqari quyida ko‘rsatilgan barcha dasturlar bepul:

Fraktal grafikalarni qurish dasturlarini qiyosiy tahlil qilish.

5.1-jadval

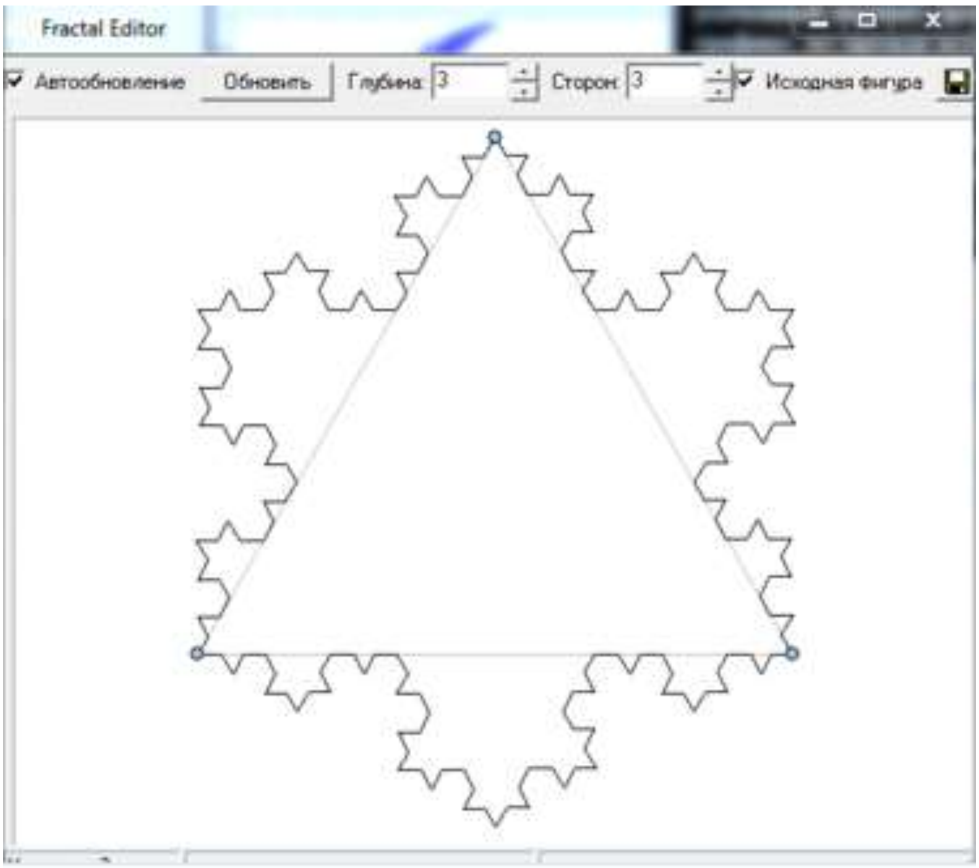
№	UltraFraktal	Fraktal Explorer	ChaosPro	Apophysis	Chaoscope
Tasvirlar eksporti	jpg, bmp, png, psd, avi	jpg, bmp, png, gif, avi	jpg, bmp, png, psd, avi	jpg, bmp, png, psd,avi	bmp
Ko‘p oynali rejim	–	–	+	–	–
3D fraktallarni yaratish	–	–	+	–	+
Standart formulalar kutubxonasi	+	+	+	+	
Til	Ruscha	–	Inglizcha	Inglizcha	Inglizcha

Fraktallardan foydalanib nafaqat real tasvirlarni qurish mumkin, balki juda mavhum (masalan, fraktallar ko‘pincha bulutlarni, qorlarni, qirg‘oqlarni, daraxtlar va butalarni qurish uchun ishlatiladi). Shuning uchun oddiy to‘qimalarni va fon tasvirlarini yaratishdan tortib, kompyuter o‘yinlari yoki kitob rasmlari uchun fantastik manzaralarga qadar turli xil sohalarda fraktal tasvirlarni qo‘llash mumkin. Bunday fraktalli asarlar (shuningdek, vektorli asarlar) matematik hisob-kitoblar yordamida yaratilgan, ammo vektorli grafikadan farqli o‘laroq, fraktal grafikaning asosiy elementi matematik formulaning o‘zi – demak, kompyuter xotirasida hech qanday obyekt saqlanmaydi va murakkab tasvir (bu qanday bo‘lishidan qat’iy nazar) faqat tenglamalar asosida quriladi.

Barcha dasturlar standart formulalar kutubxonasiga ega, qatlamlar bilan ishlash va rangni sozlash imkonini beradi. Shuningdek, animatsiyani yaratish barcha ko‘rib chiqilayotgan muharrirlarda mumkin.

Fraktal Editor – bepul geometrik fraktal muharriri. Bu eng primitiv fraktal grafik dasturlardan biridir. Uning interfeysi juda oddiy va ishlash uchun qulay.

Interfeys yuqori qismidagi menyu satridan, tayyor naqshni ko‘rish oynasidan, shuningdek raqam darajasi ko‘rsatkichi bilan pastki qatordan iborat. Yuqori satr quyidagi tugmalar va elementlardan iborat: “Avtomatik yangilash”, “Yangilash”, “Chuqurlik”, “Yon tomonlar”, “Chiquvchi raqam”, “Saqlash”. “Avtomatik yangilash” va “Yangilash” bir-biriga bog‘liq bo‘lgan ikkita variantdir, agar “Avtomatik yangilash” yonidagi katagiga belgi qo‘yilgan bo‘lsa, ekrandagi tasvir u yoki boshqa amallarni bajargandan so‘ng avtomatik ravishda o‘zgaradi. Agar ushbu bo‘limda katakcha belgilanmagan bo‘lsa, zarur bo‘lsa, “Yangilash” tugmachasi yordamida yangilashingiz kerak. “Chuqurlik” – fraktal grafika elementlarini chizish darajasi.



5.1-rasm. Fraktal Editor muharriri interfeysi

Ultra Fraktal. Katta imkoniyatlari bo‘lgan ajoyib dastur. Qatlamlar bilan ishlash mumkin. Rassomlar uchun haqiqiy jannat. Albatta, uni o‘zlashtirish juda oson emas. Bu dasturda nafaqat 2D, balki 3D fraktallarni ham qurish mumkin.

Ultra Fraktal – fraktal algoritmdan foydalanib tasvirlarni qurish va jonlantirish uchun mo‘ljallangan dastur. Ultra Fraktal yordamida jonlantirilgan to‘qimalarni, harakatlanuvchi fon tasvirlarini va oddiy suratlarni qurish mumkin. Dasturda ishlayotganda Photoshop foydalanuvchilari uchun tanish bo‘lgan vositalarni, masalan, qatlamlar, ularni aralashtirish usullari va niqoblardan foydalanish mumkin. Ultra Fraktalda yaratilgan tasvirlar yuqori sifatli bosmaga chiqarilishi mumkin.

Dasturning imkoniyatlari. Ultra Fraktal dasturi quyidagilarni ta’minlaydi:

Formulalar yordamida fraktallarni, soyalar algoritmlarini va geometrik almashtirishlarni yaratish mumkin. O‘rnatilgan formulalar tili murakkab sonlarni, qatorlarni, o‘zgaruvchan turlarni va rang arifmetikasini qo‘llab-quvvatlaydi. Dasturda sintaksisni ta’kidlash bilan formulalar muharriri va optimallashtiruvchi formula kompilyatori mavjud.

Tasvirlar yoki tasvir maskalari bo‘lishi mumkin bo‘lgan qatlamlarni yaratish va birlashtirish (Photoshopga o‘xshash) mumkin.

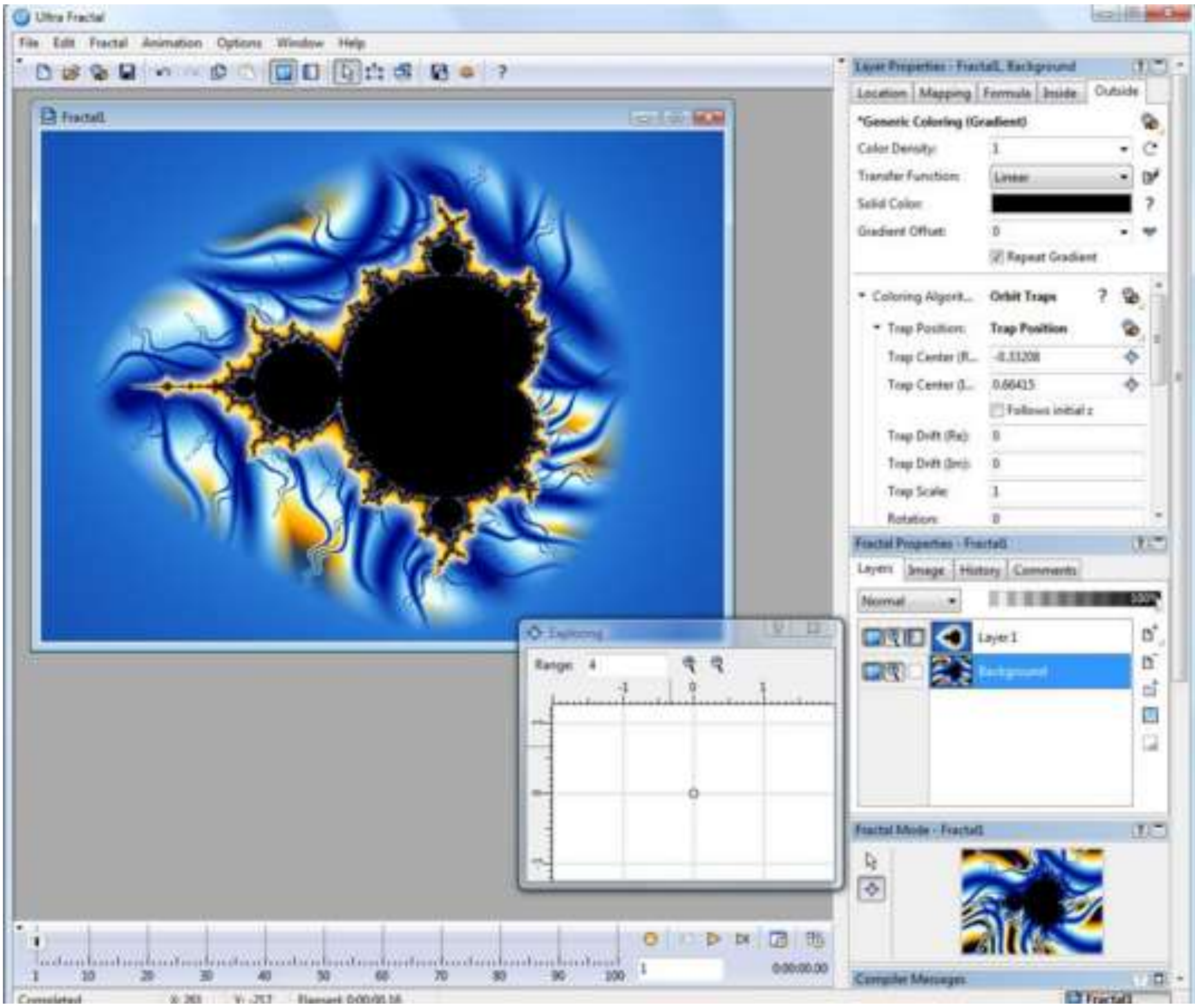
Gradiyent muharriri turli xil rang soyalarini va shaffoflik effektlarini osongina yaratishga imkon beradi.

Fraktalning cheksiz chuqurlikdagi shkalasining mavjudligi.

Fraktal tasvirlarni yuqori sifatli ko‘rsatish va uni JPEG, Photoshop, TIFF, PNG, Windows BMP va Targa formatlarida saqlash mumkin.

Mustaqil davomiylik va kadrlar tezligi bilan animatsiyalar (fraktal parametrlar) yaratish, ularni AVI formatidagi tasvirlar yoki videokliplar ketma-ketligi sifatida saqlash.

Fraktal fayllarni tashkil qilish va tashkillashtirish, bir necha ming obyektlarni o‘z ichiga olgan internetdagi fraktallar bazasi bilan ikki tomonlama almashinuv mavjud.



5.2-rasm. Ultra Fraktal interfeysi

Windows 2000 / XP / Vista uchun to‘liq qo‘llab-quvvatlash, shu jumladan yangi Windows Vista Aero foydalanuvchi interfeysi mavjud.

Dasturning asosiy va ilg‘or xususiyatlarini o‘rganishga yordam beradigan batafsil yordam tizimi mavjud.

Ultra Fraktal – professional sifatdagi noyob fraktal tasvirlarni yaratish uchun eng yaxshi yechim. Paketda do‘stona interfeys mavjud bo‘lib, uning ko‘pgina elementlari Photoshop interfeysiga o‘xshaydi (o‘rganishni soddalashtiradi) va dastur bilan ishlashning barcha jihatlarini bosqichma-bosqich muhokama qiladigan bir qator o‘quv qo‘llanmalar bilan nihoyatda batafsil va chiroyli tasvirlangan hujjatlar bilan birga keladi. Ultra Fraktal ikkita nashrdan iborat: *Standard Edition* va kengaytirilgan *Animation Edition*, ularning imkoniyatlari nafaqat fraktal tasvirlarni yaratishga, balki ular asosida animatsiyalar yaratishga imkon beradi.

Yaratilgan tasvirlarni yuqori aniqlikda chop etish mumkin va ularni mahalliy dastur formatida yoki taniqli fraktal formatlardan birida saqlash mumkin. Berilgan rasmlar, shuningdek, rastrli grafik formatlardan biriga (jpg, bmp, png va psd), shuningdek, AVI formatiga tayyor fraktal animatsiyalarga eksport qilinishi mumkin.

Fraktal tasvirlarni yaratish prinsipi juda an’anaviy, yetkazib berish tarkibiga kiradigan formulalardan birini ishlatish oddiy (o‘rnatilgan brauzer tanlangan formuladan hosil bo‘lgan rasmning mumkin bo‘lgan shaklini aniqlashga yordam beradi) va keyin formulalar parametrlarini o‘zingiz xohlagan tarzda o‘zgartirishingiz mumkin. Agar tajriba muvaffaqiyatsiz bo‘lsa, unda oxirgi harakatlar osongina bekor qilinadi. Tayyor fraktal formulalar juda ko‘p va ularning sonini dastur veb-saytidan yangi formulalarni yuklab olish orqali kengaytirish mumkin. O‘qitilgan foydalanuvchilar o‘zlarining formulalarini yaratishda omadlarini sinab ko‘rishlari mumkin, buning uchun paketda fraktal formulalar dasturlash tilining standart tuzilmalariga asoslangan asosiy shablonlarni qo‘llab-quvvatlaydigan o‘rnatilgan matn muharriri mavjud.

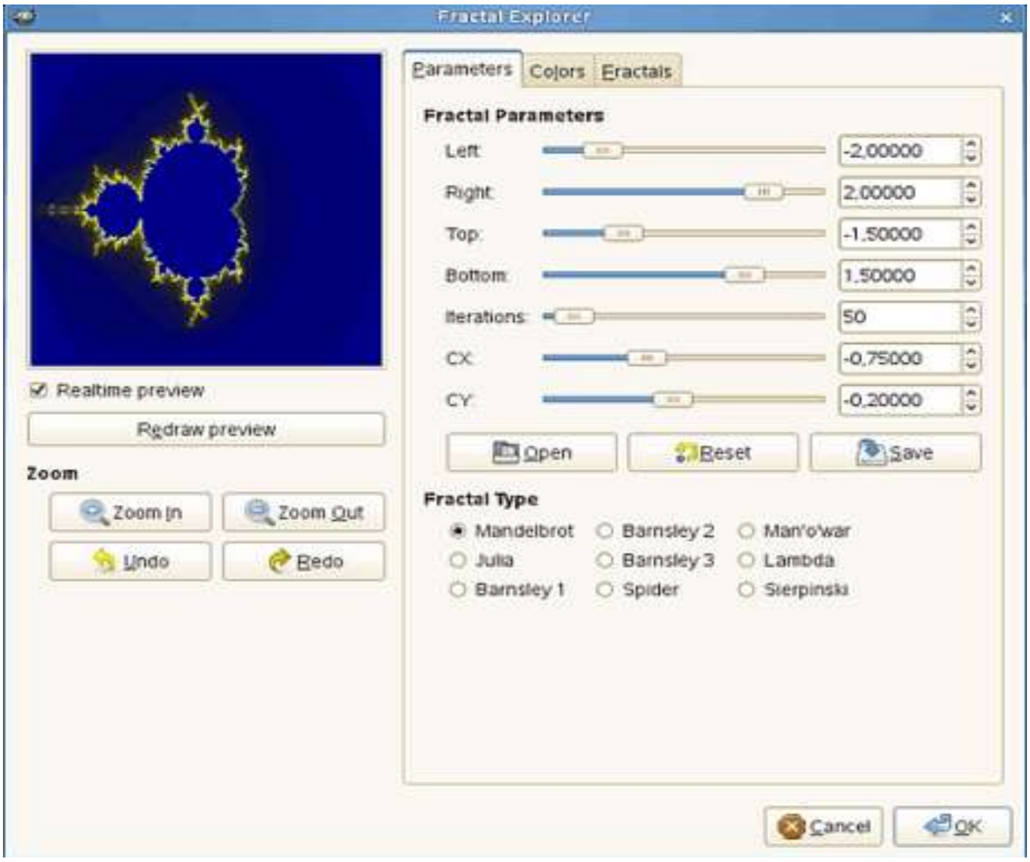
Biroq, fraktal tasvirning siri faqat muvaffaqiyatli formulada yotadi, deb o‘ylamasligingiz kerak. Boshqa jihatlar ham muhimdir. Masalan, rang parametrlarini tanlashni va uning parametrlarini sozlashni taklif qiladigan rangni sozlash. Rangni sozlash qattiq grafik paketlar darajasida amalga oshiriladi, masalan, gradiyentlar mustaqil ravishda tuzilishi va sozlanishi, ko‘plab parametrlarni, shu jumladan shaffoflikni sozlashi va kelajakda foydalanish uchun kutubxonada saqlash mumkin. Ularning aralashtirish rejimlarini o‘zgartirish va shaffoflikni sozlash imkoniyati bilan qatlamlardan foydalanish ko‘p qatlamli fraktallarni yaratishga va bir-biriga fraktal tasvirlarni superpozitsiyalash orqali noyob effektlarga erishishga imkon beradi. Shaffof niqoblardan foydalanish tasvirning ma’lum joylarini maskalashni ta’minlaydi. Transformatsiya filtrlari tanlangan rasm qismlariga nisbatan turli xil o‘zgarishlarni amalga oshirishga imkon beradi: masshtablash, aks ettirish, naqsh bo‘yicha qirqish, burish yoki burish orqali buzish, kaleydoskop prinsipi bo‘yicha targ‘ib qilish va boshqalar.

Fraktal Explorer – bu juda ta’sirchan xususiyatlarga ega bo‘lgan fraktallar va uch o‘lchovli attraktorlarning tasvirlarini yaratish uchun dastur. U foydalanuvchi xohishiga ko‘ra sozlanadigan va standart fraktal rasm formatlarini (*.frp; *.frs; *.fri; *.fro; *.fr3, *.fr4 va boshqalar) qo‘llab-quvvatlaydigan intuitiv klassik interfeysga ega. Tayyor fraktal rasmlar *.frs formatida saqlanadi va ularni rastrli grafik formatlardan biriga (jpg, bmp, png va gif) eksport qilish mumkin, fraktal animatsiyalar esa AVI fayllari sifatida saqlanadi.

Fraktal avlodni yaratish ikki xil usulda amalga oshiriladi – yetkazib berishga kiritilgan formulalar yordamida yoki noldan qilingan asosiy fraktal tasvirlar asosida. Birinchi variant sizga qiziqarli natijalarni olish imkoniyatini beradi, chunki mos formulani tanlash oson, ayniqsa qulay fayl brauzeri bazada fraktal tasvirni uning bazasida yaratmasdan oldin ma’lumotlar bazasidan baholashga imkon beradi. Shu tarzda olingan fraktal tasvir uchun ranglar palitrasini o‘zgartirish, unga fon rasmini qo‘shish va fraktal va fon qatlamlarining aralashtirish rejimini, shuningdek fraktal qatlamining shaffoflik darajasini aniqlash mumkin. Shunda fraktal tasvirni transformatsiyaga o‘tkazish mumkin, agar kerak bo‘lsa, uni o‘lchash, rasm va ko‘rsatish hajmini aniqlash. Tasvirni noldan yaratish ancha murakkab va ikkita usuldan birini tanlashni o‘z ichiga oladi. Deyarli 150 variantdan fraktal turini tanlash mumkin. Keyin turli xil parametrlarni o‘zgartirishga o‘tiladi: palitrani, fonni va boshqalarni sozlash. Yoki o‘rnatilgan kompilyator yordamida formulani yaratishga harakat qilish mumkin. Tayyor tasvirni taqdim etishdan oldin, ranglar muvozanatini avtomatik ravishda sozlash yoki nashrida, kontrasti va to‘yinganligini qo‘lda sozlash kerak bo‘lishi mumkin.

Fraktal Explorer – fraktal grafikalarni yaratish, ko‘rish va tahrirlash uchun yetakchi dastur. Dastur barcha mashhur kengaytmalar bilan ishlaydi va fayllarni .fr kabi formatlarga o‘zgartirishga imkon beradi.

*Fraktal Explorer*ning afzalliklari: yuqori tezlikni va cheksiz qisqartirishni va rasmga yaqinlashishni ta’minlaydigan innovatsion vositaga ega. Joriy versiyada ko‘plab yangi filtrlar va tayyor naqshlar, fayllar brauzeri va ko‘rib chiqish menyusi mavjud. Yordamchi dastur foydalanuvchilarning vaqtini tejab, darhol rasmlarni chop etishga imkon beradi.



5.3-rasm. Fraktal Explorer muloqot interfeysi

Oddiy fotosurat muharrirlari ko‘rinishida taqdim etilgan interfeys juda oddiy. Ishchi maydon, asboblar paneli va kengaytirilgan sozlamalarga ega ro‘yxatdan iborat. *Fraktal Explorer*ning so‘nggi versiyasini rasmiy saytdan viruslarsiz, reklama, ro‘yxatdan o‘tish va SMS larsiz bepul yuklab olishni tavsiya etamiz.

Fraktal Explorer**.** O‘qish va hajm bo‘yicha eng oson dastur. Juda qulay interfeys, rasm qanday o‘zgarishi deyarli darhol ko‘rinadi. Ammo dastur oson bo‘lishiga qaramay, u juda qiziqarli fraktallarni chiqaradi. Dastur ko‘pincha kutilmagan hodisalar keltiradi. Bu kutilmagan hodisalarni ko‘rish uchun asosiy narsa.

Fraktal Explorer dasturi bilan ishlashning mohiyati yetarli darajada jalb qilmaydigan rasmda qiziqarli elementni topishdir.

ChaosPro – bu eng yaxshi bepul fraktal tasvirlar generatorlaridan biri bo‘lib, ularning yordamida cheksiz go‘zal fraktal tasvirlarni yaratish juda oson. Dastur juda sodda va qulay interfeysga ega va fraktallarni avtomatik ravishda yaratish qobiliyati bilan bir qatorda ko‘plab sozlamalarni (iteratsiyalar soni, ranglar palitrasi, xiralashish darajasi, proyeksion xususiyatlar, rasm o‘lchami va boshqalar) o‘zgartirish orqali ushbu jarayonni to‘liq boshqarish imkoniyatini beradi. Bundan tashqari, yaratilgan rasmlar ko‘p qatlamli bo‘lishi mumkin (qatlamlarni aralashtirish rejimi boshqarilishi mumkin) va ularga bir qator filtrlarni qo‘llash mumkin. Qurilayotgan fraktallarda qo‘llaniladigan barcha o‘zgarishlar darhol ko‘rish oynasida aks etadi. Yaratilgan fraktallarni ichki dastur formatida yoki o‘rnatilgan kompilyator mavjudligi sababli asosiy fraktal turlaridan birida saqlash mumkin. Yoki bitmap rasmlari yoki 3D obyektlarga eksport qilinadi (agar ilgari fraktalning uch o‘lchovli tasviri olingan bo‘lsa).

Dastur imkoniyatlari ro‘yxatida:

– ranglarning bir-biriga silliq o‘tishini ta’minlaydigan ranglarni aniq sozlash;

– turli derazalarda bir vaqtning o‘zida bir nechta fraktallarni qurish;

– har qanday o‘zgaruvchi parametr bilan farq qilishi mumkin bo‘lgan asosiy animatsiya fazalarini aniqlash bilan fraktal tasvirlar asosida animatsiyalar yaratish qobiliyati: aylanish va aylanish burchaklari, rang parametrlari va hk.;

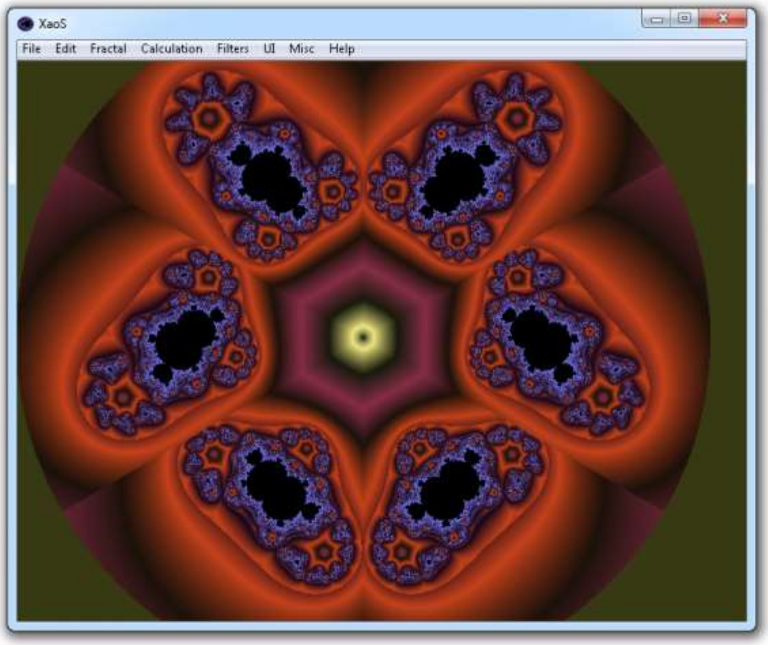
– oddiy ikki o‘lchovli tasvirlar asosida fraktallarning uch o‘lchovli tasvirlarini yaratish;

ChaosPro muhitida import va tahrir qilinishi mumkin bo‘lgan ko‘plab standart fraktal rasm formatlarini qo‘llab-quvvatlash mumkin.

ChaosPro dasturi ancha murakkab chizmalar yaratishga imkon beradi va interaktivlikni qo‘llab-quvvatlaydi. Fraktal parametrlarning har qanday o‘zgarishi oldindan ko‘rish oynasida darhol rasmning qayta chizilishiga olib keladi. Ushbu muharrirda bir vaqtning o‘zida ikkita oynada ishlash mumkin. Tasvirda ChaosPro tomonidan yaratilgan naqsh ko‘rsatilgan.

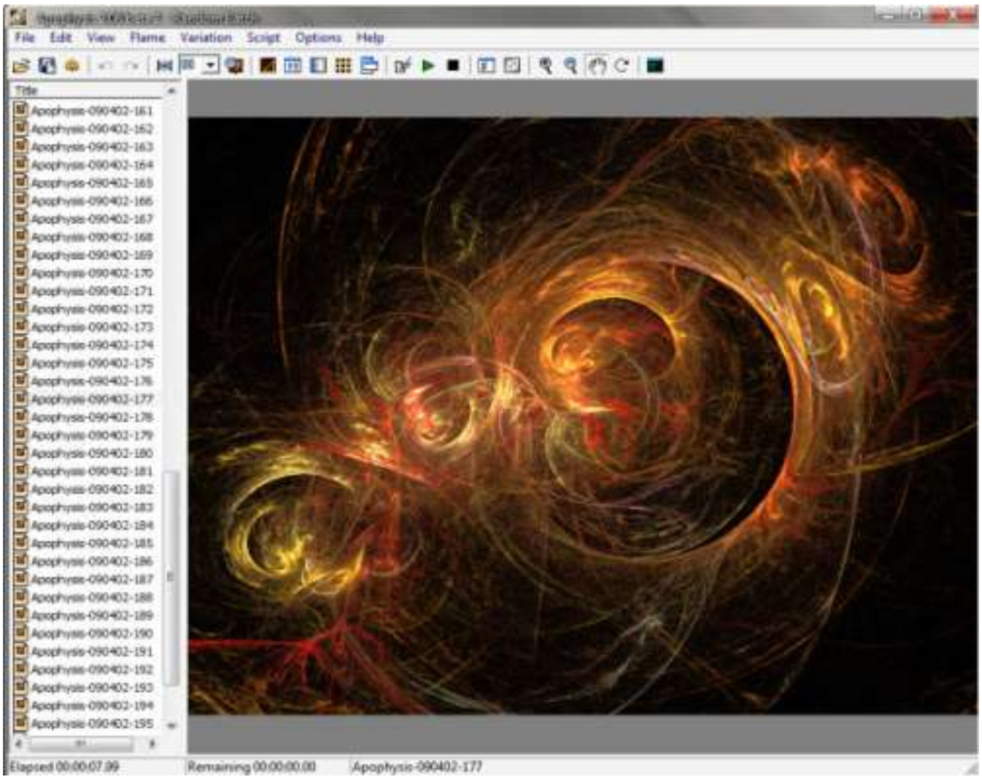
XaoS: har qanday ko‘rishdagi fraktallar uchun

Ko‘plab tasvir muharrirlarida fraktal naqshlarni yaratish uchun o‘rnatilgan vositalar mavjud. Biroq, ushbu vositalar odatda ikkinchi darajali bo‘lib, siz yaratgan fraktal naqshni aniq sozlashingizga imkon bermaydi. Matematik jihatdan aniq fraktalni qurish kerak bo‘lgan holatlarda XaoS o‘zaro faoliyat muharriri yordamga keladi. Ushbu dastur nafaqat o‘ziga o‘xshash tasvirni yaratishga, balki u bilan turli xil manipulyatsiyalarni amalga oshirishga imkon beradi. Masalan, real vaqt rejimida fraktsiyada uning o‘lchamini o‘zgartirish orqali “sayr” qilish mumkin. Fraktal bo‘ylab harakatlanuvchi harakatni XAF fayli sifatida saqlash mumkin va keyin dasturning o‘zida ijro etiladi.



5.4-rasm. Dasturiy muhitning asosiy interfeysi

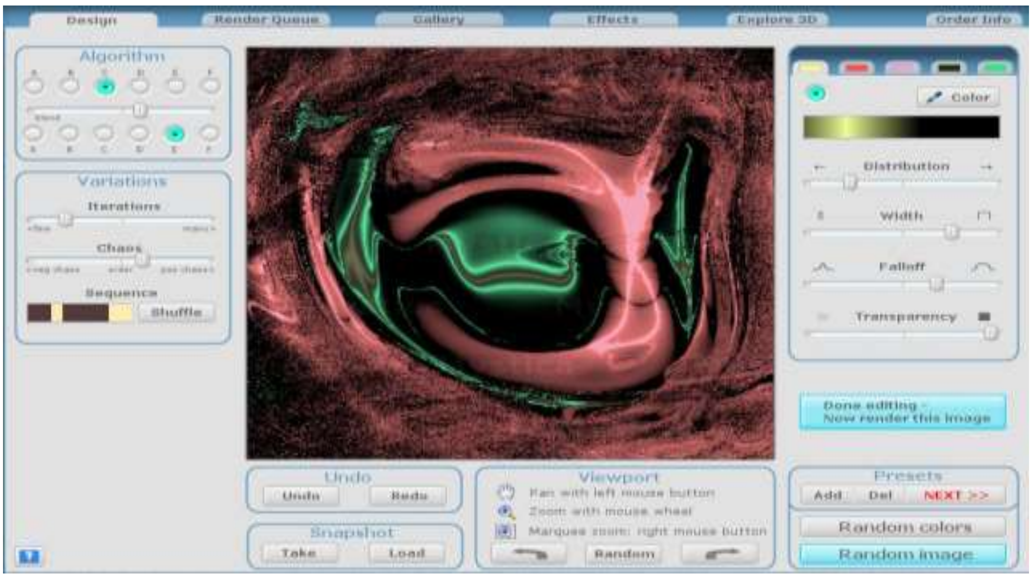
Apophysis asosiy fraktal formulalarga asoslangan fraktallarni hosil qilish uchun qiziqarli vositadir. Tayyor formulalar yordamida yaratilgan fraktallar turli parametrlarni sozlash orqali tahrir qilinishi va tan olinmagan tarzda o‘zgartirilishi mumkin. Shunday qilib, masalan, ularni muharrirga aylantirish mumkin, yoki fraktallar ostidagi uchburchaklarni almashtirish orqali yoki sizga yoqqan transformatsiya usulini qo‘llash orqali: to‘lqin kabi buzilish, Gaussian loyqalanishi va boshqalar. Keyin gradiyentni to‘ldirishning asosiy variantlaridan birini tanlab ranglar bilan tajriba o‘tkazishingiz kerak. O‘rnatilgan plombalarning ro‘yxati juda ta’sirli va agar kerak bo‘lsa, siz mavjud bitmapga avtomatik ravishda eng munosib to‘ldirishni tanlashingiz mumkin, masalan, ma’lum bir loyihaning boshqa rasmlari kabi bir xil uslubda fraktal fonni yaratishda muhimdir. Agar kerak bo‘lsa, gamma va yorqinlikni sozlash, fonni o‘zgartirish, fraktal obyektni o‘lchash va fonda uning o‘rnini aniqlashtirish oson. Natijada siz istalgan uslubdagi turli xil mutatsiyalarga ta’sir qilishingiz mumkin. Oxirida eng so‘nggi fraktal tasvirning o‘lchamlarini belgilashingiz va uning inglizcha versiyasini grafik fayl shaklida yozishingiz kerak (jpg, bmp, png).



5.5-rasm. Dasturiy muhitning muloqat interfeysi

Bu fraktallarni hosil qilish uchun yana bir dastur, u juda qiziq, lekin unda ishlash biroz qiyinroq. Fraktal Explorer dasturidan tubdan farq qiladi. Bu yerda turli xil plaginlarni birlashtirish orqali fraktalni qurish kerak. Bir zumda ushbu dasturni o‘zlashtirish juda qiyin. Ushbu dasturning kamchiliklaridan biri bu uning uzoq vaqt xizmat qilishi, ya’ni tasvirni vizuallashtirishidir. Dastur bepul.

Mystica – noyob ajoyib ikki o‘lchovli va uch o‘lchovli tasvirlar va to‘qimalarning universal generatoridir. Ular keyinchalik turli xil loyihalarda, masalan, veb-sahifalar, ish stoli fonlari yoki fantastik fon rasmlari uchun haqiqiy teksturalar sifatida, masalan, bolalarni bezashda ishlatilishi mumkin. Paket nostandart va juda murakkab interfeysga ega va ikkita rejimda ishlashi mumkin: namuna (yangi boshlanuvchilarga mo‘ljallangan va minimal sozlamalarni o‘z ichiga olgan) va ekspert (mutaxassislar uchun mo‘ljallangan). Siz yaratgan rasmlar har qanday hajmda bo‘lishi mumkin va keyinchalik mashhur 2D grafik formatlariga eksport qilinadi. Dastur oynasidan to‘g‘ridan-to‘g‘ri ular elektron pochta orqali yuborilishi mumkin, HTML-galereyada nashr etiladi yoki ular asosida divx, mpeg4 va boshqa formatlarda yaratilishi mumkin. Bu dasturning o‘rnatilgan uch o‘lchovli dvigateli kompyuter o‘yinlari uchun uch o‘lchovli sahnalarni yaratish uchun ishlatilishi mumkin, masalan, ajoyib fon va landshaft.



5.6-rasm. Dasturiy muhitning asosiy ishchi oynasi

Tasvirni yaratish paketga kiritilgan fraktal formulalar asosida amalga oshiriladi va rasmni tayyorlash tizimi ko‘p darajali bo‘lib, juda batafsil rang sozlamalari, yaratilgan elementlarni oddiy o‘zgartirish imkoniyati va boshqa o‘zgarishlarni o‘z ichiga oladi. Bularga filtrlardan foydalanish, yoritishni o‘zgartirish, ranglar garniturasi, yorqinligi va kontrastini sozlash, materialni yaratish uchun ishlatiladigan materialni o‘zgartirish, tasvirga “tartibsiz” tuzilmalarni qo‘shish va boshqalar kiradi.

Fraktal tasvirlar oddiy to‘qimalarni va fon rasmlarini yaratishdan tortib, kompyuter o‘yinlari yoki kitob rasmlari uchun fantastik manzaralarga qadar turli sohalarda qo‘llaniladi. Fraktal tasvirlar matematik hisoblar yordamida yaratiladi. Fraktal grafikaning asosiy elementi bu matematik formulaning o‘zi – bu shuni anglatadiki, kompyuter xotirasida hech qanday obyekt saqlanmaydi va tasvir faqat tenglamalar asosida quriladi.

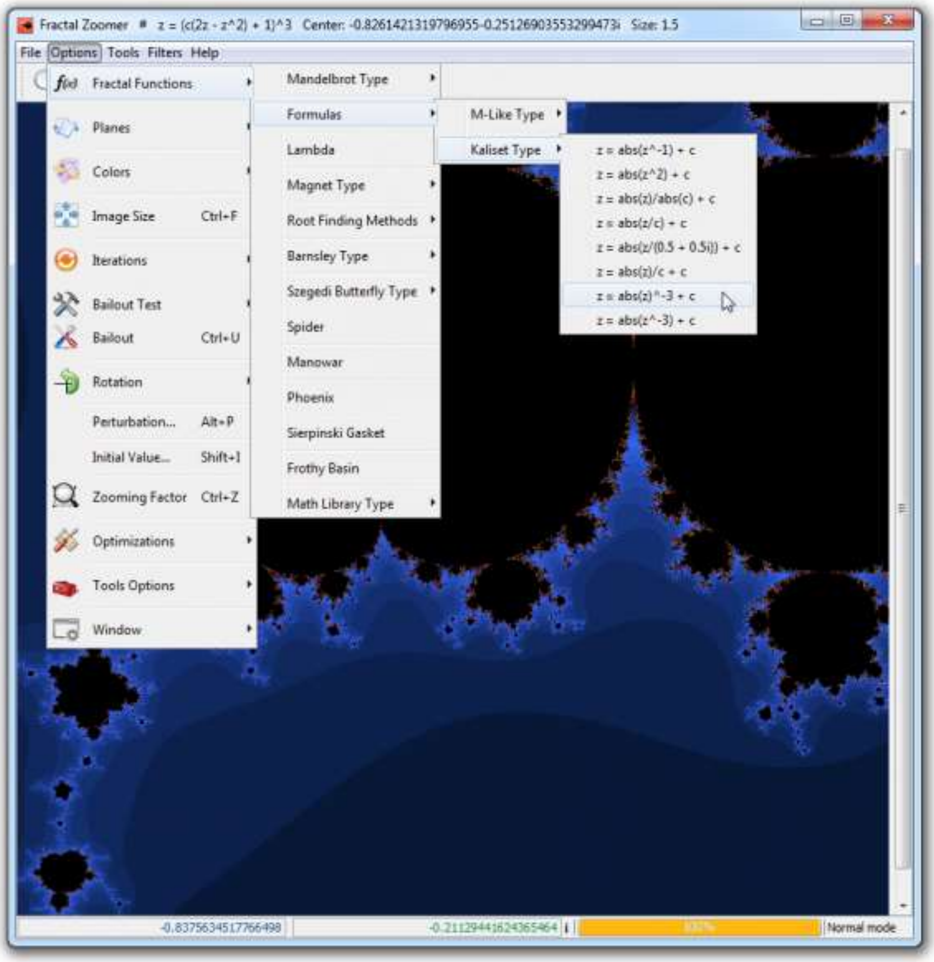
Fraktal tasvirning siri faqat bitta muvaffaqiyatli formulada yotmaydi. Boshqa jihatlar ham muhimdir. Masalan, ranglarni sozlash, o‘zgartirish filtrlari va boshqalar.

Fraktal tasvirlarni yaratish uchun ko‘plab dasturlar mavjud. Ushbu dasturlarning afzalliklari va kamchiliklari mavjud. Texnologiyaning rivojlanishi bilan dasturlarning soni ko‘paymoqda va ularning sifati va imkoniyatlari yaxshilanmoqda.

***Fraktal Zoomer**: ixcham fraktal generator.*

Boshqa fraktal tasvir generatorlari bilan taqqoslaganda Fraktal Zoomer bir nechta afzalliklarga ega. Birinchidan, u juda kichik hajmda va o‘rnatishni talab qilmaydi. Ikkinchidan, rasmning rang palitrasini aniqlash qobiliyatini amalga oshiradi. RGB, CMYK, HVS va HSL rang modellarida soyalarni tanlashingiz mumkin.

Rang soyalarini tasodifiy tanlab olish va rasmdagi barcha ranglarni inverter bilan almashtirish funksiyasidan foydalanish juda qulay. Rangni sozlash uchun soyalarni davriy ro‘yxatga olish funksiyasi mavjud – mos rejimni yoqganingizda, dastur tasvirni jonlantiradi, undagi ranglarning siklini o‘zgartiradi.



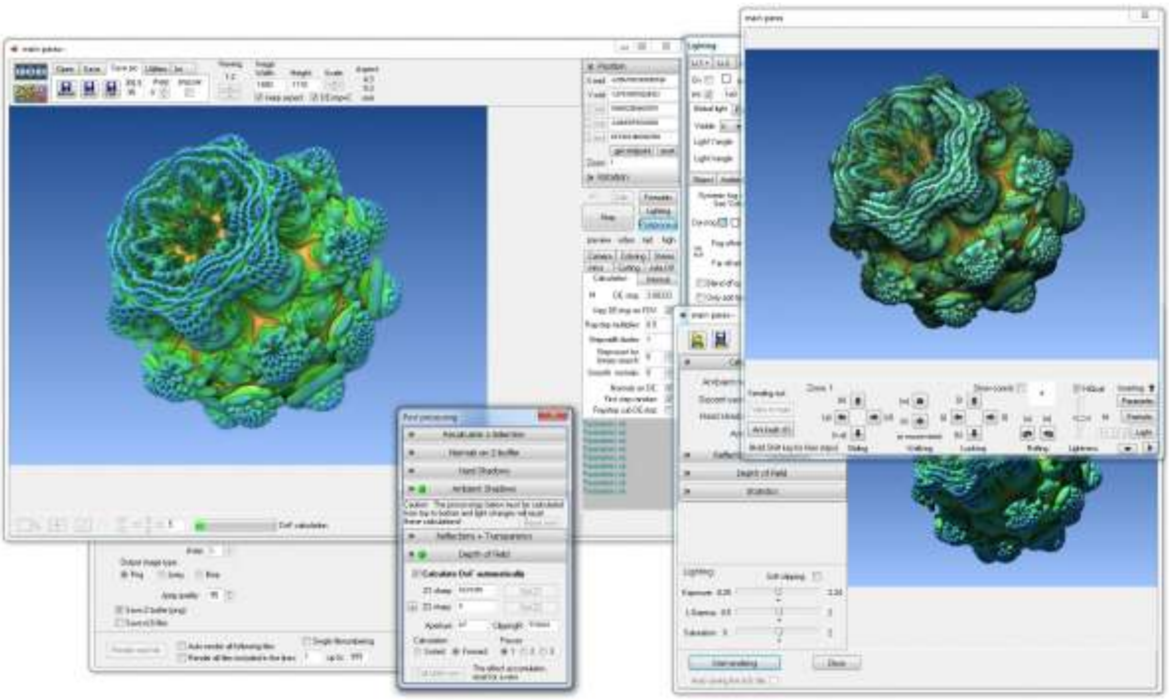
5.7-rasm. Dasturiy muhitning asosiy ishchi oynasi

Fraktal Zoomer 85 ta turli xil fraktal funksiyalarni vizualizatsiya qilishi mumkin va formulalar dastur menyusida aniq ko‘rsatiladi. Dasturdagi rasmlarni qayta ishlashdan keyingi filtrlar oz bo‘lsa ham mavjud. Har bir tayinlangan filtr istalgan vaqtda bekor qilinishi mumkin.

Mandelbulb3D: 3D fraktal muharriri. “Fraktal” atamasi ishlatilganda tekis ikki o‘lchovli tasvir ko‘pincha qo‘llaniladi. Biroq, fraktal geometriya 2D o‘lchash doirasidan tashqarida. Tabiatda yassi fraktal shakllarning ikkala misolini, masalan, chaqmoq geometriyasini va uch o‘lchovli hajmli raqamlarni topish mumkin. Fraktal yuzalar uch o‘lchovli bo‘lishi mumkin va kundalik hayotda 3D fraktallarining juda vizual tasvirlaridan biri bu karamning boshidir. Ehtimol, eng yaxshi fraktallarni Romanesko xilma-xilligidan ko‘rish mumkin – gulkaram va brokkoli gibridi.

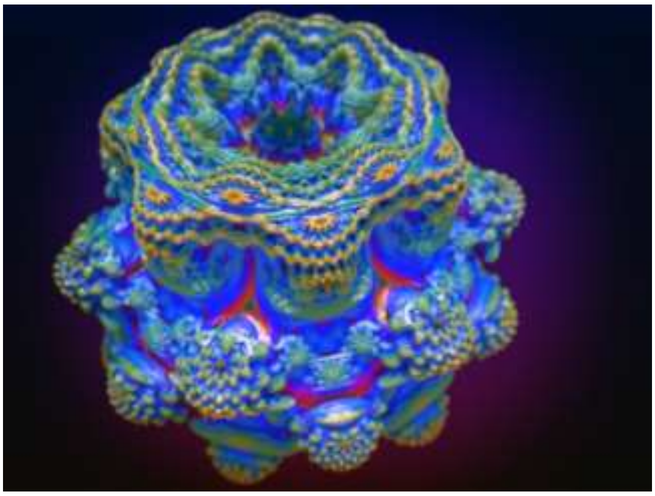
Mandelbulb3D shunga o‘xshash shaklga ega uch o‘lchovli obyektlarni yaratishga qodir. Fraktal algoritmdan foydalanib, uch o‘lchovli sirtni olish uchun ushbu dastur mualliflari Daniel Uayt va Pol Nylander Mandelbrot to‘plamini sharsimon koordinatalarga aylantirishdi. Ular yaratgan Mandelbulb3D dasturi har xil shakldagi fraktal sirtlarni modellashtiradigan haqiqiy uch o‘lchovli muharrirdir. Tabiatda fraktal naqshlarni tez-tez ko‘rib turganimiz sababli sun’iy ravishda yaratilgan fraktal uch o‘lchovli obyekt nihoyatda real va hatto “tirik” ko‘rinadi.

3D fraksiyalarni yaratish dasturi. Juda qiziq. Siz sabr bilan butun dunyoni yaratishingiz mumkin. Dasturda ko‘plab formulalar mavjud, ular birlashtirilishi mumkin va bo‘lishi kerak. Xuddi Fraktal Explorerda bo‘lgani kabi, siz birinchi qarashda qiziq bo‘lmagan rasmda qiziqarli elementni topishingiz kerak.



5.8-rasm. Dasturiy muhitning asosiy ishchi oynasi

Bu o‘simlik kabi bo‘lishi mumkin, u g‘alati hayvonga, sayyoraga yoki boshqa narsaga o‘xshashi mumkin. Ushbu effekt vizuallashtirishning ilg‘or algoritmi yordamida takomillashtirilgan bo‘lib, u aniq aks ettirish, shaffoflik va soyalarni hisoblash, maydon chuqurligining ta'sirini simulyatsiya qilish va h.k. Mandelbulb3D juda ko'p sonli sozlash va vizualizatsiya imkoniyatlariga ega. Siz yorug'lik manbalarining soyalarini boshqarishingiz, simulyatsiya qilingan obyektning fonini va tafsilotlarini tanlashingiz mumkin.



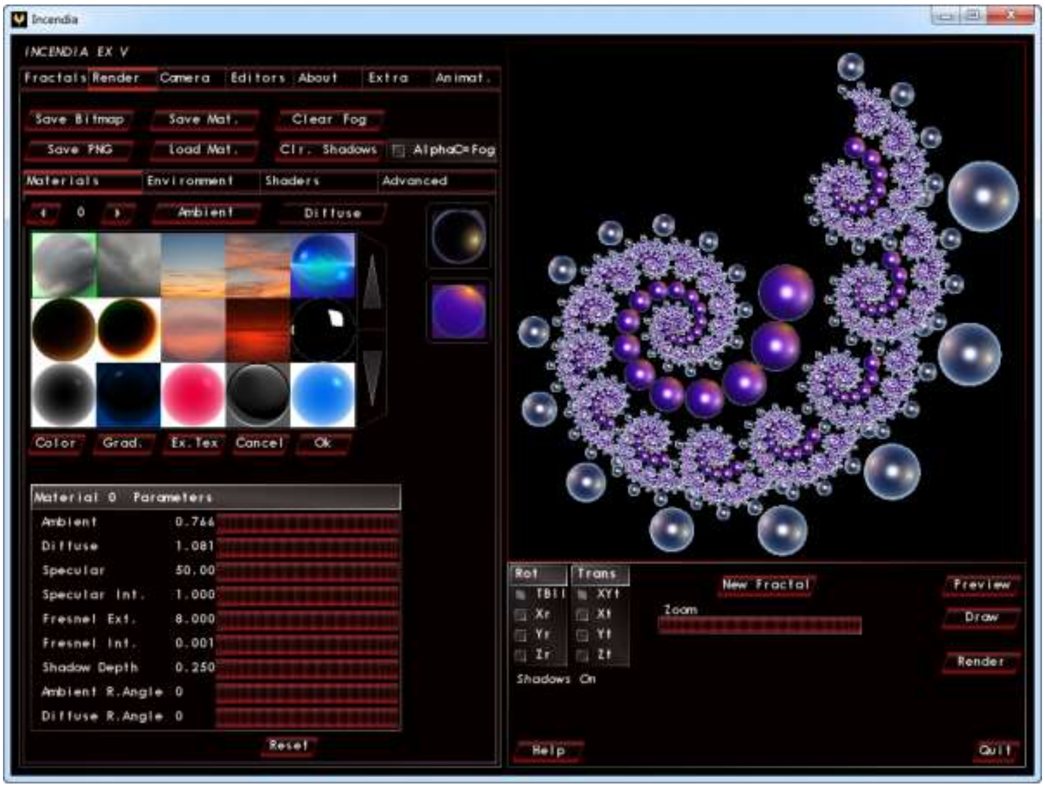
5.9-rasm. Dasturiy muhitda hosil qilingan obyekt

Fraktal muharriri animatsiyalar yaratishga imkon beradi. Nafaqat uch o'lchovli Mandelbrot to'plamini yaratish, balki vaqt davomida parametrlarini almashtirish, masshtablashtirish va o'zgartirish mumkin.

Incendia 3D fraktal generatori. Incendia – 1989-yildan beri fraktallarni o'rgangan ispaniyalik dasturchi Ramiro Peres tomonidan ishlab chiqarilgan ko'p protsessorli 3D fraktal generator.

Incendia fraktal muharriri ikki tomonlama tasvirni tekislashni qo'llab-quvvatlaydi, ellik xil uch o'lchovli fraktallardan iborat kutubxonani o'z ichiga oladi va asosiy shakllarni tahrirlash uchun alohida modulga ega.

Ilovada fraktal ssenariylardan foydalaniladi, uning yordamida fraktal tuzilmalarning yangi turlarini mustaqil ravishda tasvirlab berish mumkin. Incendia tekstura va material tahrirlovchilariga ega va vizualizatsiya mexanizmi sizga tumanli tuman effektlari va turli xil soyalarni ishlatishga imkon beradi. Dasturda buferni uzoq muddatli ko'rsatish paytida saqlash imkoniyati mavjud, animatsiya yaratiladi. Juda qiziqarli 3D fraktal generator. Bu yerda nafaqat fraktallarni yaratish, balki ularni modulyatsiya qilish mumkin. Ushbu dasturda 3D muharrirlaridan elementlar bor. Bu yerdagi aksariyat dasturlardan farqli o‘laroq, o‘zingizning ishlashingiz jarayonini boshqarishingiz kerak, ya’ni dasturning o‘zi buni to‘xtatmaydi. U bilan juda qiziqarli fraktallarni olishingiz mumkin. Dastur bepul.



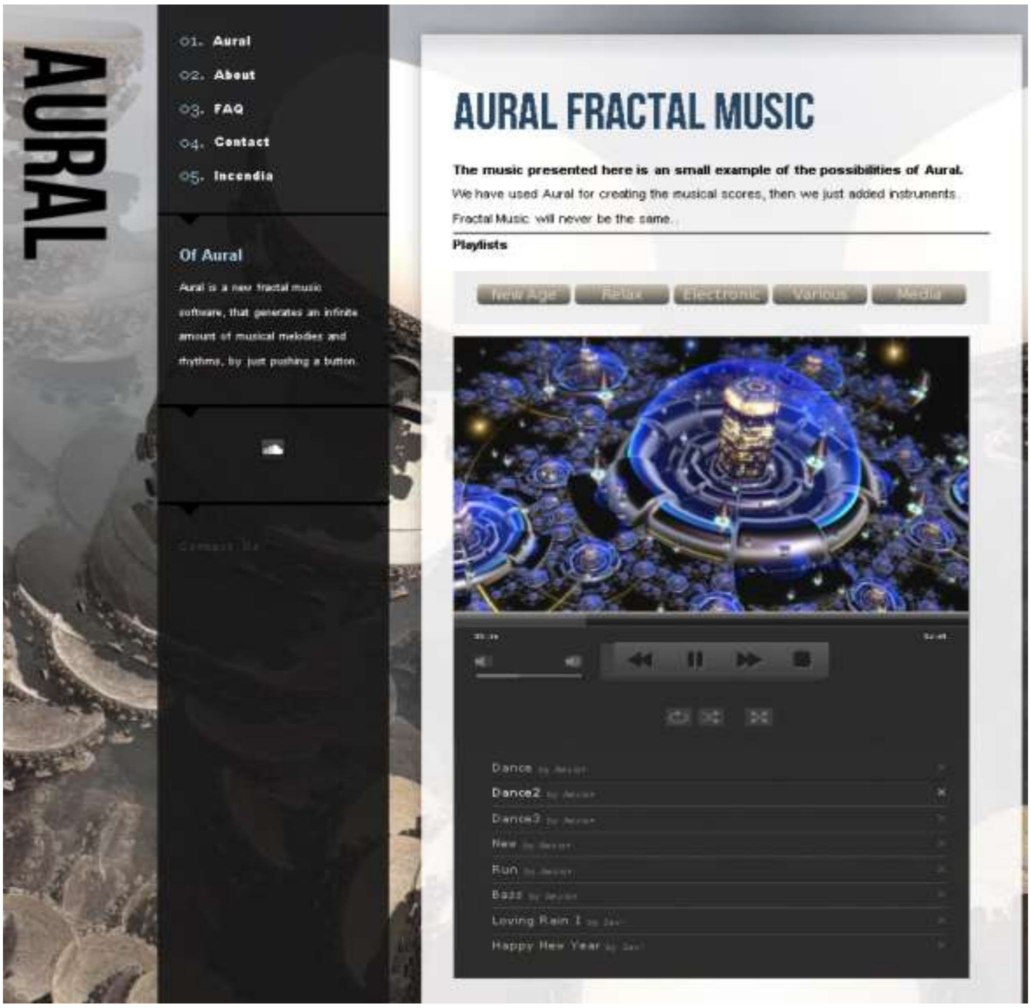
5.10-rasm. Incendia 3D dasturiy muhit interfeysi

Incendia fraktal modelni mashhur uch o‘lchovli grafik formatlarga – OBJ va STL-ga eksport qilishga imkon beradi. Incendia “Geometrica” deb nomlangan kichik yordam dasturini o‘z ichiga oladi, fraktal sirtlarni uch o‘lchovli modelga eksport qilishni sozlash uchun maxsus vosita. Ushbu yordam dasturidan foydalanib, 3D sirtining aniqligini aniqlash va fraktal iteratsiyalar sonini ko‘rsatish mumkin. Blender, 3DsMax va boshqalar kabi uch o‘lchovli tahrirlovchilar bilan ishlashda eksport qilinadigan modellarni 3D loyihalarida foydalanish mumkin.

Yaqinda Incendia loyihasi bo‘yicha ishlar biroz sekinlashdi. Ayni paytda muallif dasturni ishlab chiqishda unga yordam beradigan homiylarni qidirmoqda.

Agar ushbu dasturda chiroyli uch o‘lchamli fraktalni chizish uchun tasavvur bo‘lmasa – bu muhim emas. INCENDIA_EX parametrlari papkasida joylashgan parametrlar kutubxonasidan foydalaning. PAR fayllaridan foydalanib, eng noodatiy fraktal shakllarni, shu jumladan jonlantirilganlarni tezda topish mumkin.

Tovush: fraktallar qanday kuylashadi. Bu juda noodatiy dastur. Aural deb nomlangan loyihani Incendia ismli shaxs ixtiro qilgan. Fraktallarning g‘ayrioddiy xususiyatlarini hisobga olgan holda fikran juda qiziq. Tovush – bu fraktal algoritmlardan foydalanib, musiqalarni yaratadigan audio muharrir, ya’ni aslida u sintezator-sekvensatordir.



5.11-rasm. Aural fraktal music dasturiy muhit interfeysi

Ushbu dastur tomonidan ishlab chiqarilgan tovushlarning ketma-ketligi g‘ayrioddiy va hayratlanarli. Bu zamonaviy ritmlarni yozish uchun foydali bo‘lishi mumkin. Televizor va radio ekranlari uchun fonogrammalarni yaratish, shuningdek, kompyuter o‘yinlari hamda fon musiqasi uchun juda mos keladi.

Art Dabbler dasturi – *f*raktal grafika asoslari bilan tanishishni Art Dabbler to‘plamidan boshlash yaxshiroqdir. Ushbu muharrir (Fraktal Dizayn tomonidan yaratilgan va hozir Corelga tegishli) aslida Painter dasturining kesilgan versiyasidir. Bu nafaqat kompyuter grafikasini, balki tasvir chizish asoslarini ham o‘rgatish uchun juda yaxshi dastur. Kerakli xotiraning oz miqdori (uni o‘rnatish uchun atigi 10 MB vaqt kerak bo‘ladi), shuningdek, hatto bolaga ham tanish bo‘lgan oddiy interfeys uni maktab o‘quv dasturida ishlatishga imkon beradi. MS Paint raster muharriri singari Art Dabbler fraktal muharriri, ayniqsa, kompyuter grafikasini o‘zlashtirishning dastlabki bosqichida juda samarali.

Art Dabbler dasturchilari ikki omilga e’tibor qaratdilar:

• soddalashtirilgan interfeysni yaratish, uning asosiy elementi asbob to‘plamlari qutisi (bu yerda tortmalar deb ataladi);

• to‘plamdan o‘quv dasturi sifatida foydalanish imkoniyati. Ushbu maqsadga erishish uchun dasturning o‘zi bilan bir qatorda “Chizishni o‘rganing” qo‘llanmasi va kompakt-diskdagi o‘quv qo`llanmasi mavjud. Ular taklif etayotgan rasm darslari Art Dabbler to‘plamidan foydalangan holda tajribali rassomlar tomonidan rangli rasmlarni yaratish jarayonini bosqichma-bosqich kuzatishga imkon beradi.

Menyu panelida oltita element mavjud: ko‘pgina dasturlar uchun standart – Fayl, Edit va yordam, shuningdek, ko‘plab grafik dasturlarda mavjud bo‘lgan va qo‘shimcha izohlarga muhtoj bo‘lmagan effektlar, variantlar va repetitorlar.

Art Dabbler tasvirlarni o‘zgartirish yoki buzish uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan effektlar to‘plamini (effektlar menyusi) taqdim etadi. Masalan, Texturize effekti rassomning ijodiy imkoniyatlarini kengaytirib, qog‘oz, tuval va hokazolarni yaratadi.

Shuni ta’kidlash kerakki, Art Dabbler dasturida barcha vositalar tortmalar deb nomlanadi, masalan, Photoshop dasturida shunga o‘xshash vositalar palitralar, CorelDRAW dasturida esa dokerlar deb nomlanadi. Ular cho‘tkalar, qalamlar va boshqa vositalarni saqlaydi, ularni faollashtirish uchun tegishli belgini bosish kifoya qiladi. Qutilarning old devorlarida oz sonli tugmachalar va tutqich ko‘rsatiladi, uni bosish orqali qo‘shimcha tugmalarni ochish natijasida foydalanuvchi u orqali bajariladigan barcha operatsiyalar to‘plamiga kirish huquqini oladi.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fraktallar qaysi fanlarda keng qo‘llaniladi?
2. Fraktal tasvirlarni yaratish uchun qanday muharrirlar mavjud?
3. Ish jarayonida fraktal grafikani yaratish dasturlarini taqqoslash uchun qanday mezonlar tanlanadi?
4. Fraktal Editor fraktal muharriri imkoniyatlari qanday?
5. Ultra Fraktal dasturining imkoniyatlarini tushuntiring.
6. Fraktal Explorer dasturining imkoniyatlarini ta’riflang.
7. Mandelbulb3D: 3D fraktal muharriri qanday imkoniyatlarga ega?
8. Incendia 3D fraktal generatori afzalliklari nimada?
9. Art Dabbler dasturi haqida so‘zlab bering.

5.2. Fraktallarni qurishga mo‘ljallangan O‘zbekistonda ishlab chiqilgan dastiriy muhitlar

Hozirgi paytda fraktallarni hosil qiluvchi dasturlar anchagina. Lekin ularning tuzilishi va ish usuli har xil. Shuning uchun har bir algebraik fraktalni yaratish uchun alohida dastur tuzib yurish shart emas. Dasturdagi kerakli parametrlarni, takrorlanishlar sonini, parametrlarning o‘zgarish qadamini, kerak bo‘lganda algebraik fraktalni hosil qiluvchi formulani o‘zgartirish yangi fraktalning paydo bo‘lishiga olib keladi.

Shuningdek, nafaqat yassi fraktallar, balki o‘lchami (2; 3) oraliqda bo‘lgan fazoviy fraktallarni yaratishga mo‘ljallangan formulalar va bu formulalarni o‘z tarkibida saqlovchi dasturlar ham mavjud. Bunday dasturlar yordamida sun’iy bulutlar, dengizlar, daraxtlar, tog‘lar va ularning cho‘qqilarini ham hosil qilish hamda to‘qimachilik dizaynida qo‘llash mumkin.

Fraktallar kompyuter grafikasida, matematikada va boshqa sohalarda keng qo‘llaniladi. Ular haqiqiy san’at asarlari – g‘ayrioddiy go‘zallik va jozibali rasmlarni namoyish etib, san’atning yangi yo‘nalishiga aylanmoqda. Bundan tashqari, logotiplar, saytlar orqa fonlarini ishlab chiqish uchun fraktal grafika generator dasturlari ham ishlatilmoqda.

5.1 paragrafda ta’kidlanganidek hozirgi vaqtda fraktal tasvirlarni avtomatik tarzda yaratishda kompyuter dasturlaridan keng foydalaniladi. Respublikamizda ham fraktal tasvirlarni qurish uchun dasturiy muhitlar ishlab chiqilgan. Quyida TATU professor-o‘qituvchilari rahbarligida ishlab chiqilgan “Fraktallar”, “Geometrik fraktallar”, “Paskal uchburchagi” va “FRAKTAL GENERATOR” nomli dastiriy muhitlar bilan tanishamiz.

“Fraktallar” nomli dasturiy muhit. Ushbu dasturiy muhit Object Pascal 7.0 tilidagi Borland Delphi 7 platformasi muhitida yaratilgan. Ushbu platformada ishlab chiqilgan dasturiy muhit tez ishlaganligi sababli dasturlar va shakllarni yaratish juda oson va yaratilgan dastur yaxshi va chiroyli dizaynga ega.

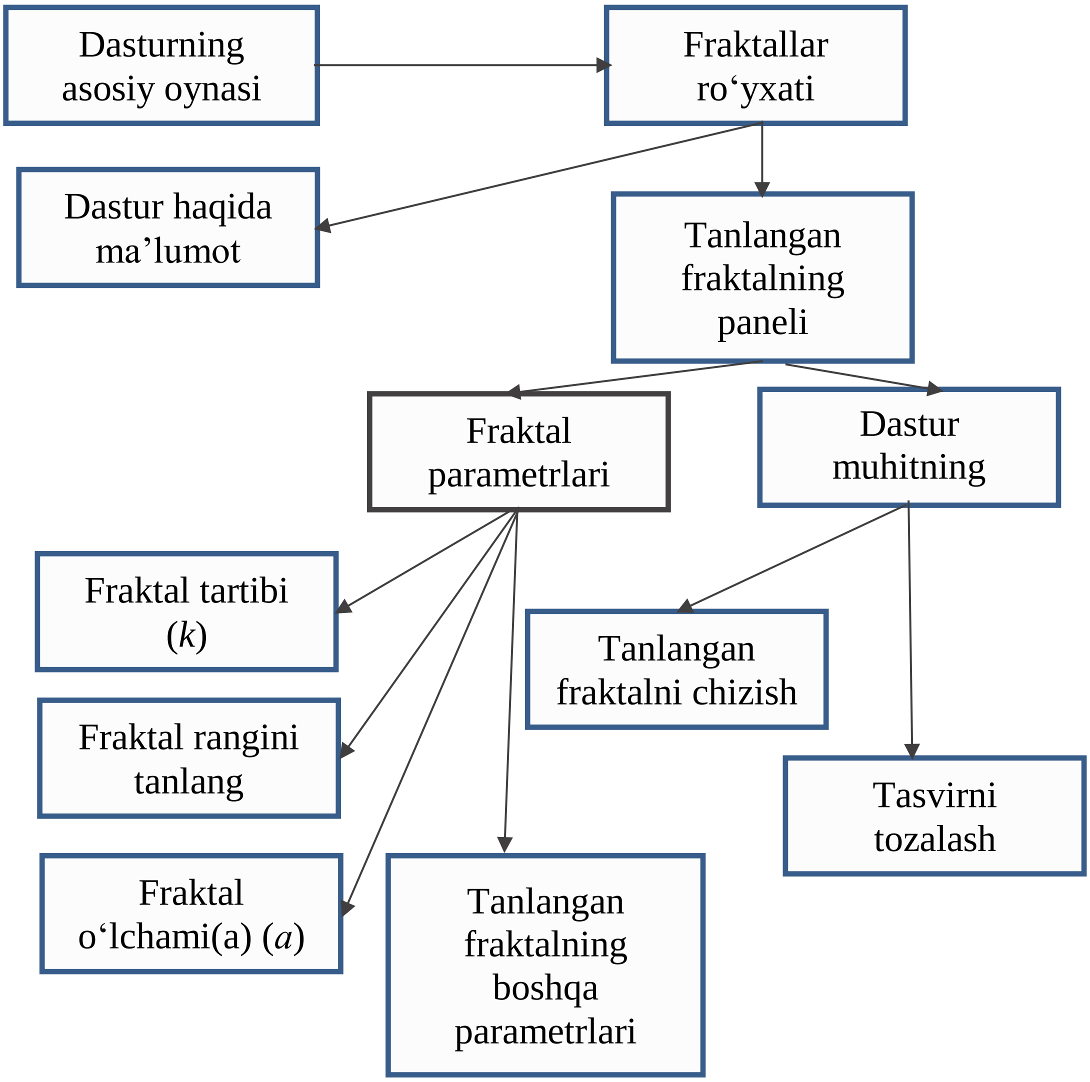
Dasturning asosiy oynasi fraktal yorliq sahifasi va ma’lumot sahifasidan iborat. Ishni boshlash uchun avval tab sahifasidan kerakli tabaqa (tab paneli) ni tanlash kerak. Masalan, Serpin fraktal, fraktal daraxti yoki fraktal gilam.

Tanlangan sahifada tanlangan fraktalning parametrini o‘zgartirish uchun komponentlar va tanlangan fraktal turiga tegishli buyruqlar mavjud.

Tanlangan fraktal uchun quyidagi parametrlar mavjud:

- fraktal tartib;
- fraktal o‘lchami;

- fraktal rang;
- fraktal turi (ularning ba’zilari);
- α – uchlari orasidagi burchak (fraktal daraxti uchun);
- φ – boshlang‘ich burchak (fraktal daraxti uchun);
- kk – pasayish koeffitsiyenti (fraktal daraxt uchun);
- fraktalni yaratadigan ko‘pburchakdagi burchaklar soni (Kox qorparchasi);
- qo‘shimcha fraktal o‘lcham (fraktal gilam uchun).
- tanlangan fraktal uchun buyruqlar:
- fraktal chizish;
- chizmani tozalash.



5.12. Dasturiy muhitning tuzilishi

Dasturiy muhitning tanlangan fraktallarni chizish moduli quyidagi funksiyalar va protseduralardan iborat:

Gilbert egri chizig‘ini chizish uchun funksiya va protseduralar:

gilbertLen – chiziqning minimal uzunligiga ko‘paytirish koeffitsiyentini aniqlaydi. gilbertA, gilbertB, gilbertC, gilbertD – Hilbert liniyasi uchun A, B, C, D funksiyalari

function gilbertLen(deg:integer):integer;

Procedure gilbertA(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);

Procedure gilbertB(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);

Procedure gilbertC(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);

Procedure gilbertD(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);

Serpin egri chizig‘i uchun protseduralar va funksiyalar:

Function serpinLenn(i:integer):real;

Procedure serpinA(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);

Procedure serpinB(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);

Procedure serpinC(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);

Procedure serpinD(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);

Procedure serpinS(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);

Serpin salfetkasi va Serpin gilami uchun protsedura va funksiyalar:

serpinKk – Serpin gilamining funksiyasi. serpinW – Serpin gilami uchun bazaviy funksiya. salfetka_fast_draw – Serpin salfetkasini tez chizish uchun funksiya.

function serpinW(k,a,b:Integer;x,y:Real):Boolean;

function serpinKk(k,a,b:Integer;x,y:Integer):Boolean;

procedure salfetka_fast_draw(can:TCanvas;Color:TColor;k,a:Integer;x,y:Integer);

Kox egri chizig'i, Kox qorparchasi va Kox kresti uchun funksiyalar:

koxW – Кox egri chizig'ini chizish uchun funksiya. koxWs – Kox qorparchasini chizish uchun funksiya. koxWw – Kox krestini chizish uchun asosiy funksiya. koxWk – Kox krestini chizish uchun funksiya.

function koxW(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function koxWs(n:Integer;k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function koxWw(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function koxWk(k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;

Quti *fraktali uchun funksiyalar:*

function qutiW(k,a:Integer; x,y:Integer):Boolean;

procedure box_fast_draw (can:TCanvas;k,a:Integer;xcen,ycen,height,width:Integer);

Daraxt fraktali uchun funksiyalar:

function bur(p:TPoint;fi:Integer):TPoint;

function treeW(k,a:Integer;fi,alpha:Integer;x,y:Integer):Boolean;

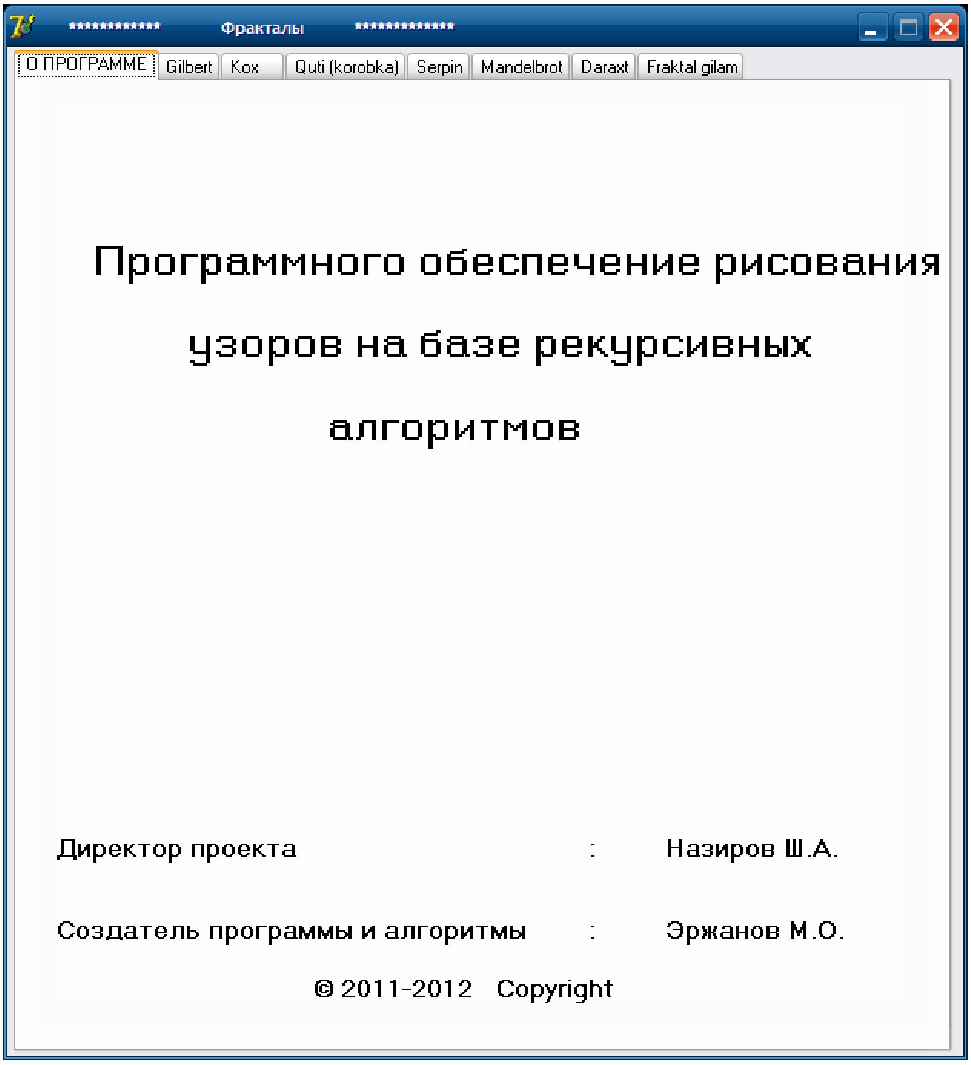
Gilam fraktali uchun funksiyalar:

function fgWw(k:Integer;a,b:Integer;x,y:Real):Boolean;

function fgW(k:Integer;a,b:Integer;x,y:Integer):Boolean;

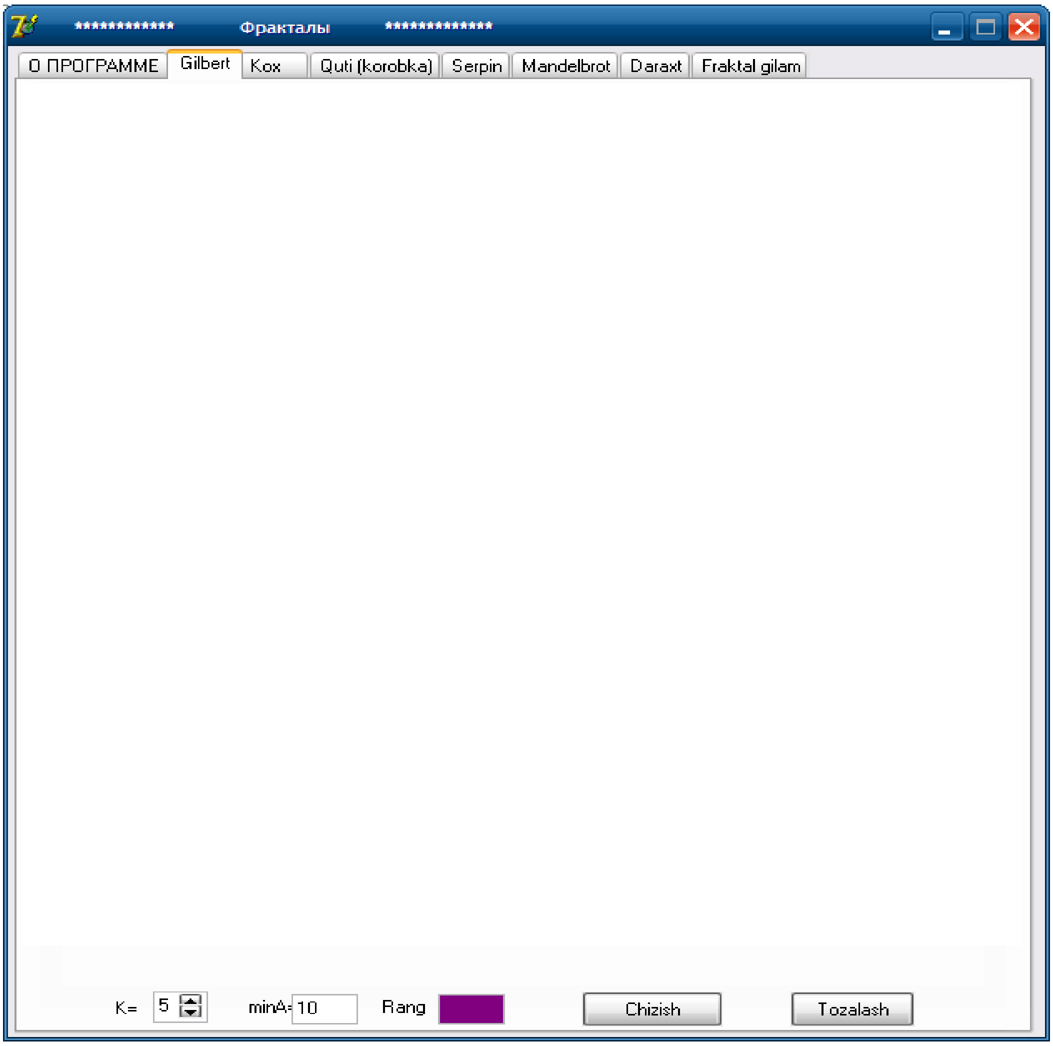
Dasturdan foydalanish bo'yicha ko'rsatmalar

Ishlab chiqilgan dasturiy muhitdan foydalanish ishlatish juda sodda. Dasturiy muhitning ishlashi o'zbek va rus tillarida.



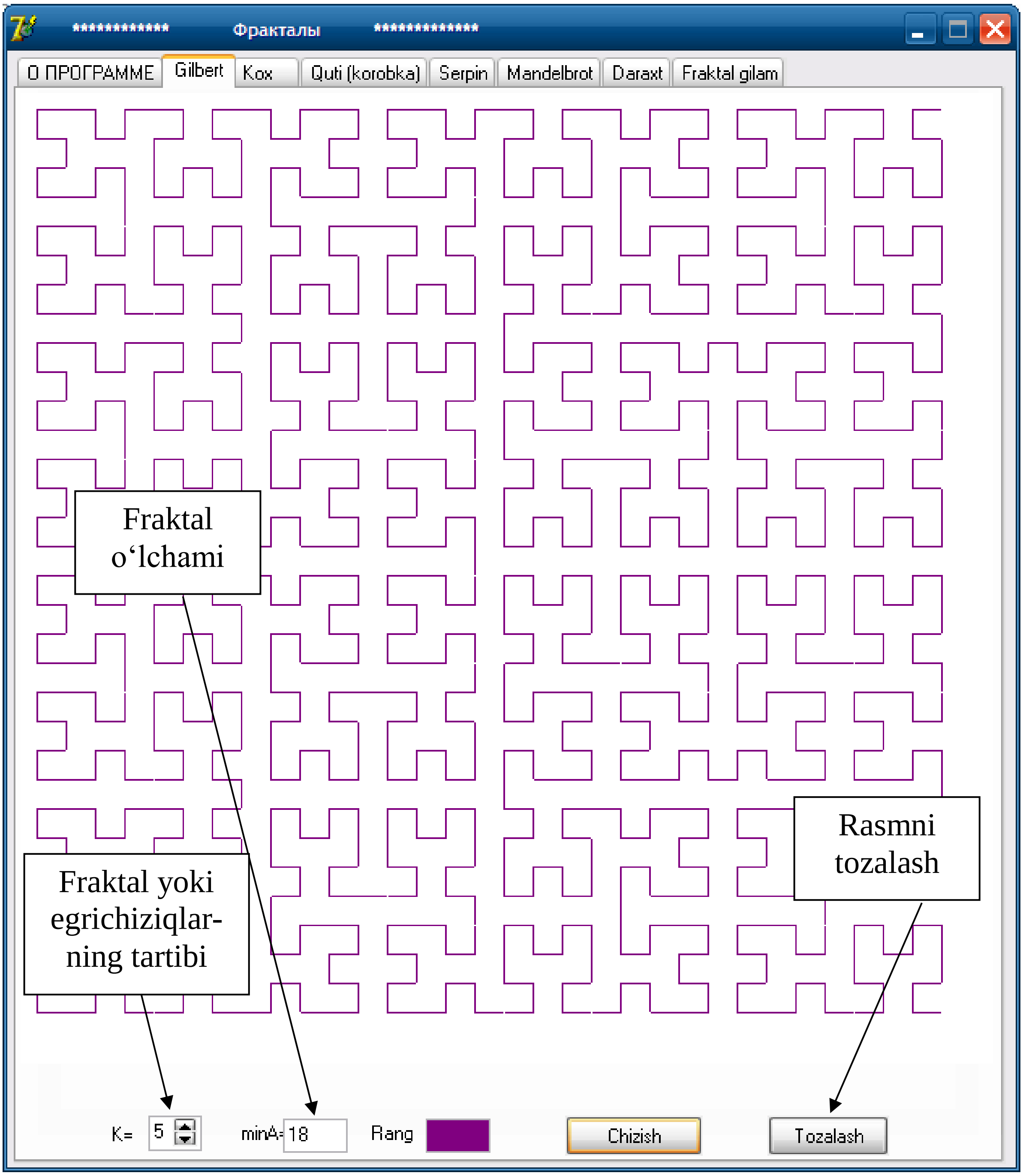
5.13-rasm

Ushbu rasmda dasturiy muhitning nomi berilgan, shuningdek mualliflari haqida ma'lumot ko'rsatib o'tilgan.



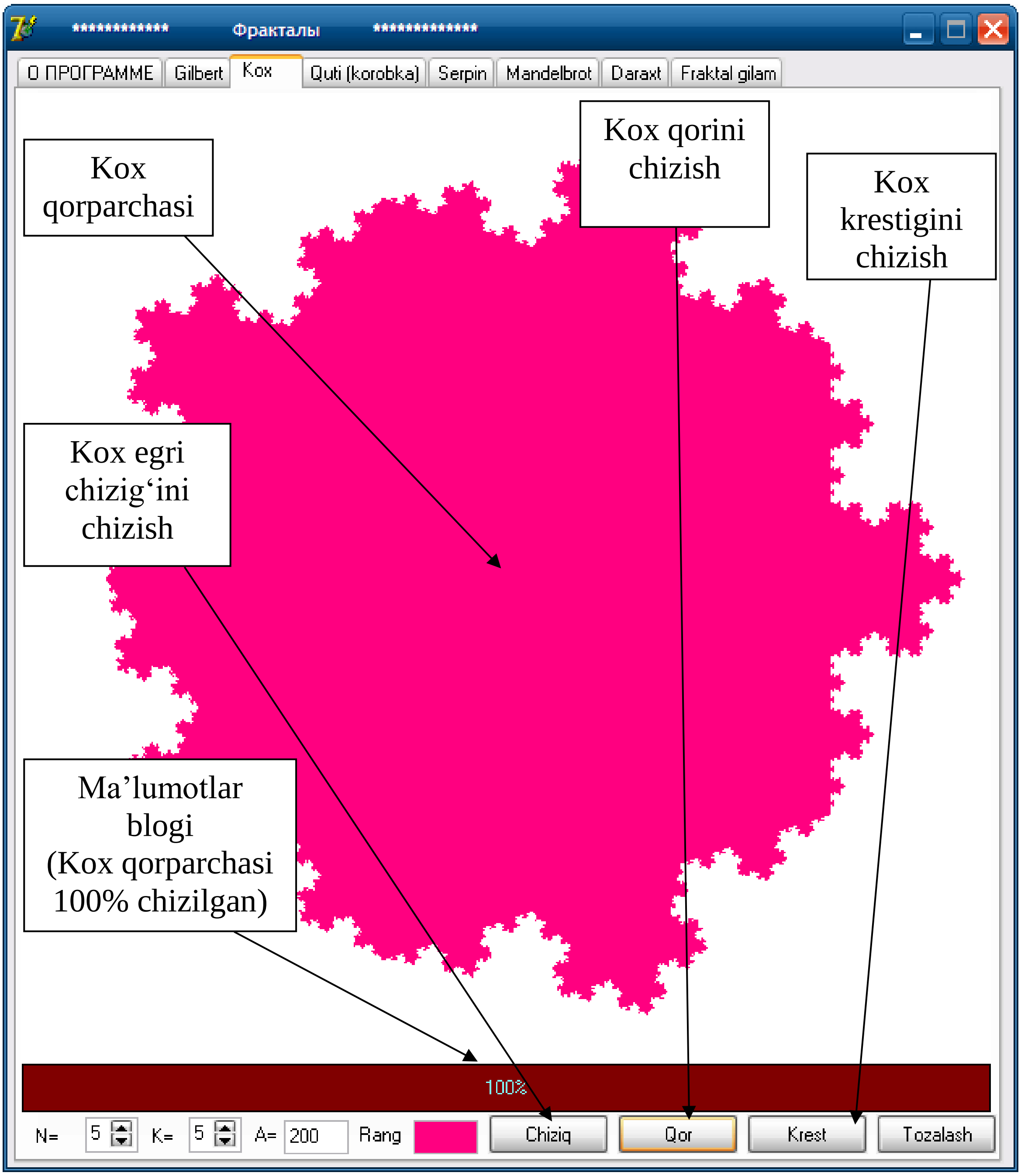
5.14-rasm. Dasturiy muhitning ish sohasi

Pastda keltirilgan rasmda Gilbert egri chizig‘i tanlangan. Boshida barcha tab-sahifalar shu ko‘rinishdagi kabi bo‘m-bo‘sh bo‘ladi. Har bir sahifada fraktallar chizish uchun maxsus tugmalar mavjud.



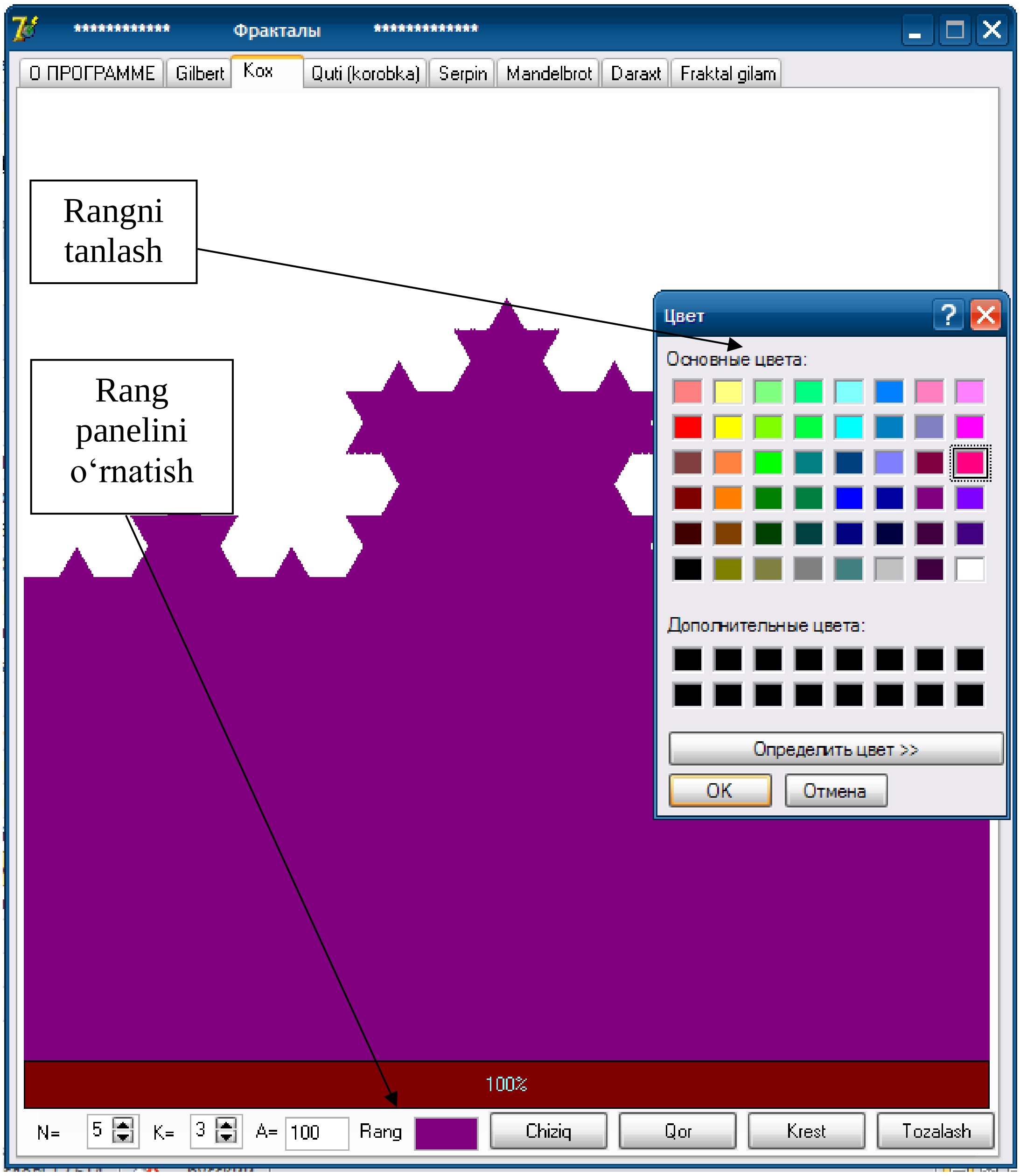
5.15-rasm. Gilbert egri chizig‘i

Ushbu rasmda Gilbert egri chizig‘i chizilgan. Bu yerda egrichiziqlar tartibi “5” ga va chiziqning minimal uzunligi “18” pikseldan iborat. Har bir sahifada rasmni tozalash tugmasi mavjud.



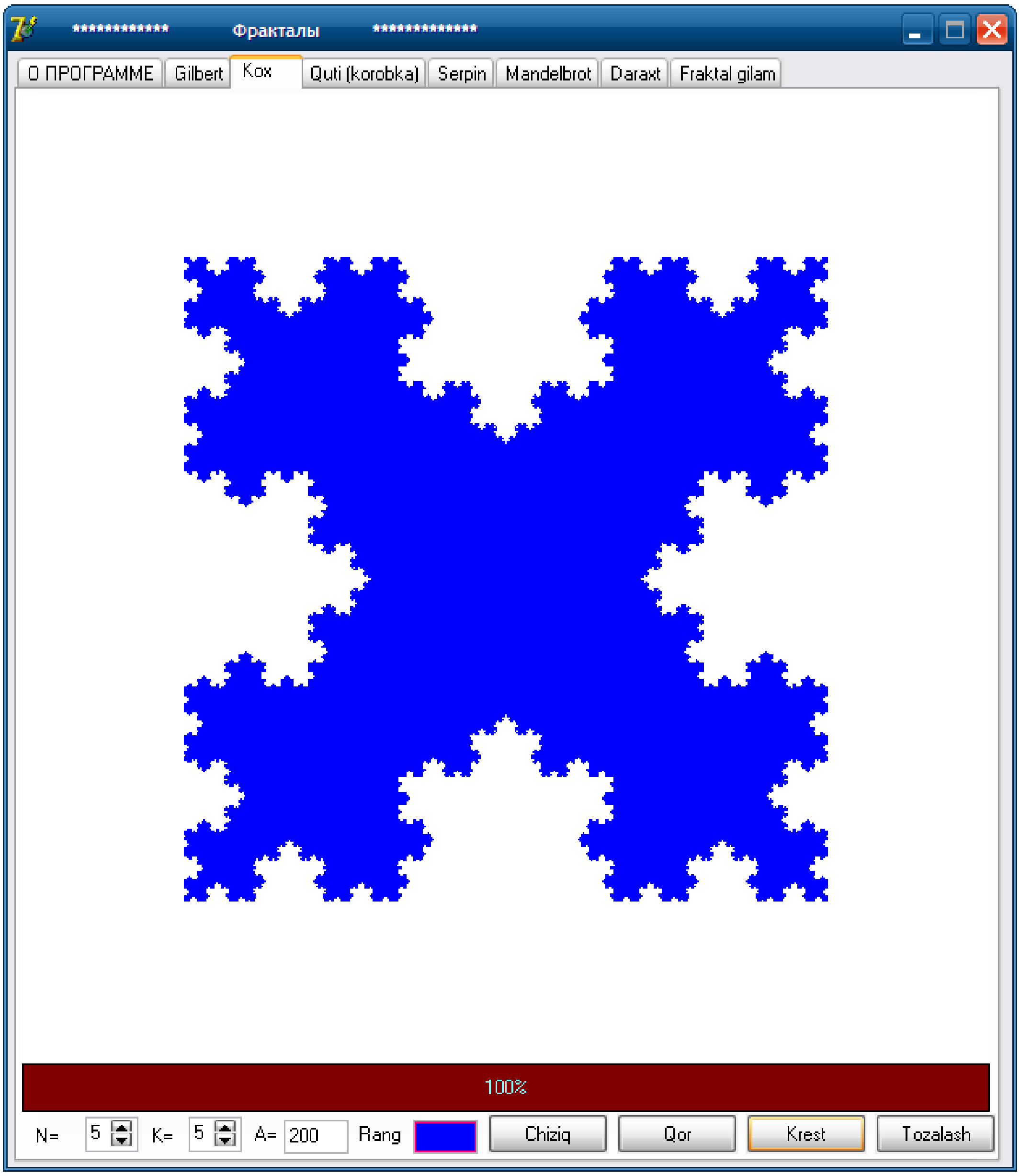
5.16-rasm. Kox qorparchasi

Ba'zi sahifalarda bir nechta fraktallar mavjud. Mana bu sahifada “3” ta fraktal mavjud: Kox egri chizig‘i, Kox qorparchasi va Kox krestigi. Har bir frakralni chizish uchun alohida tugmalar mavjud.

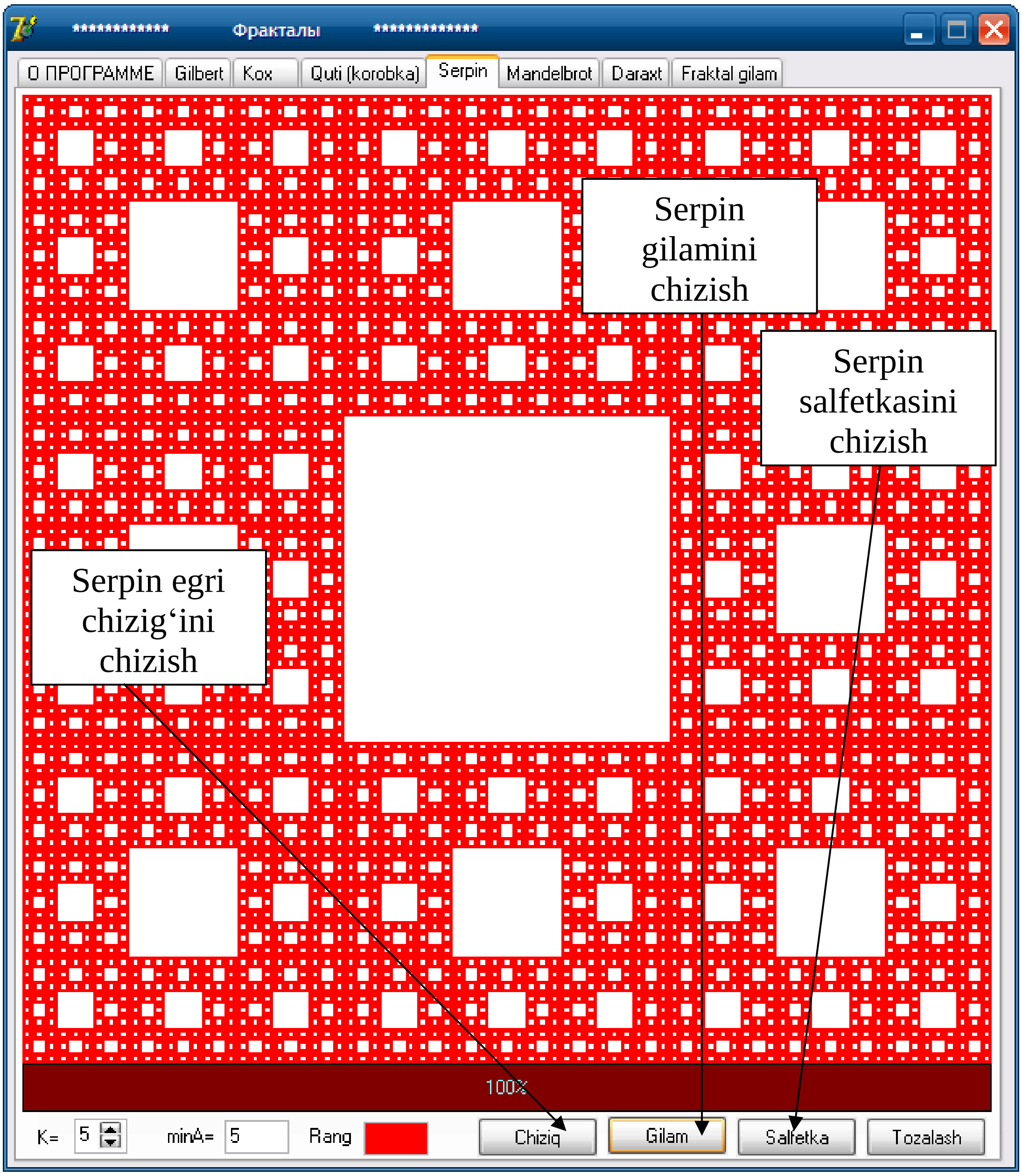


5.17-rasm. Ranglar bilan ishlash

Shuningdek bu yerda fraktalga ranglarni tanlash uchun kichik ranglar maydoni mavjud. Bu maydonda ikki marta tez-tez sichqonchani bosgandan keyin shu sahifaning o‘zida qo‘shimcha ranglar tanlash uchun ranglar maydoni paydo bo‘ladi.



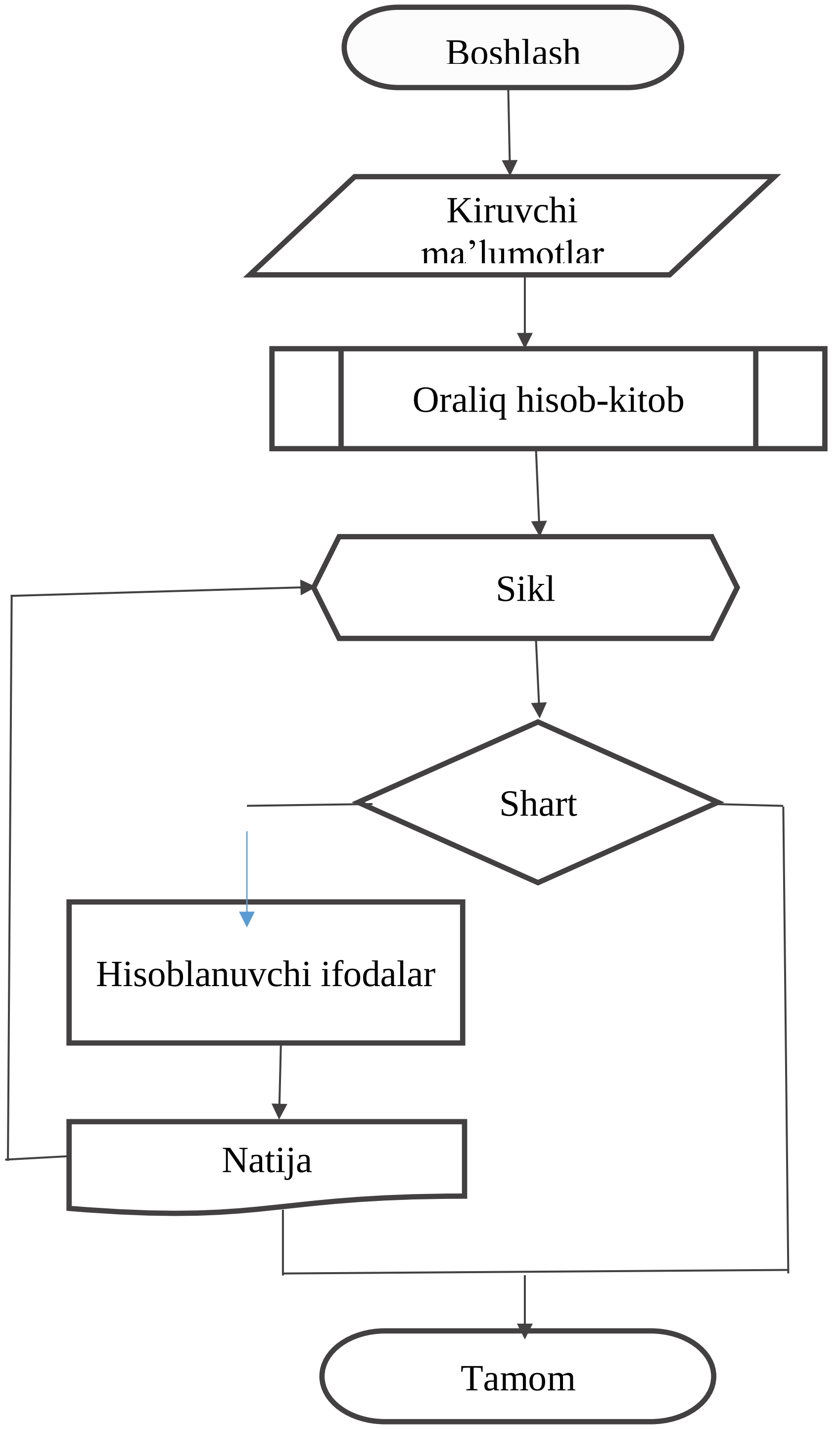
5.18-rasm. Kox krestik fraktali



5.19-rasm. Serpin kvadrat gilami

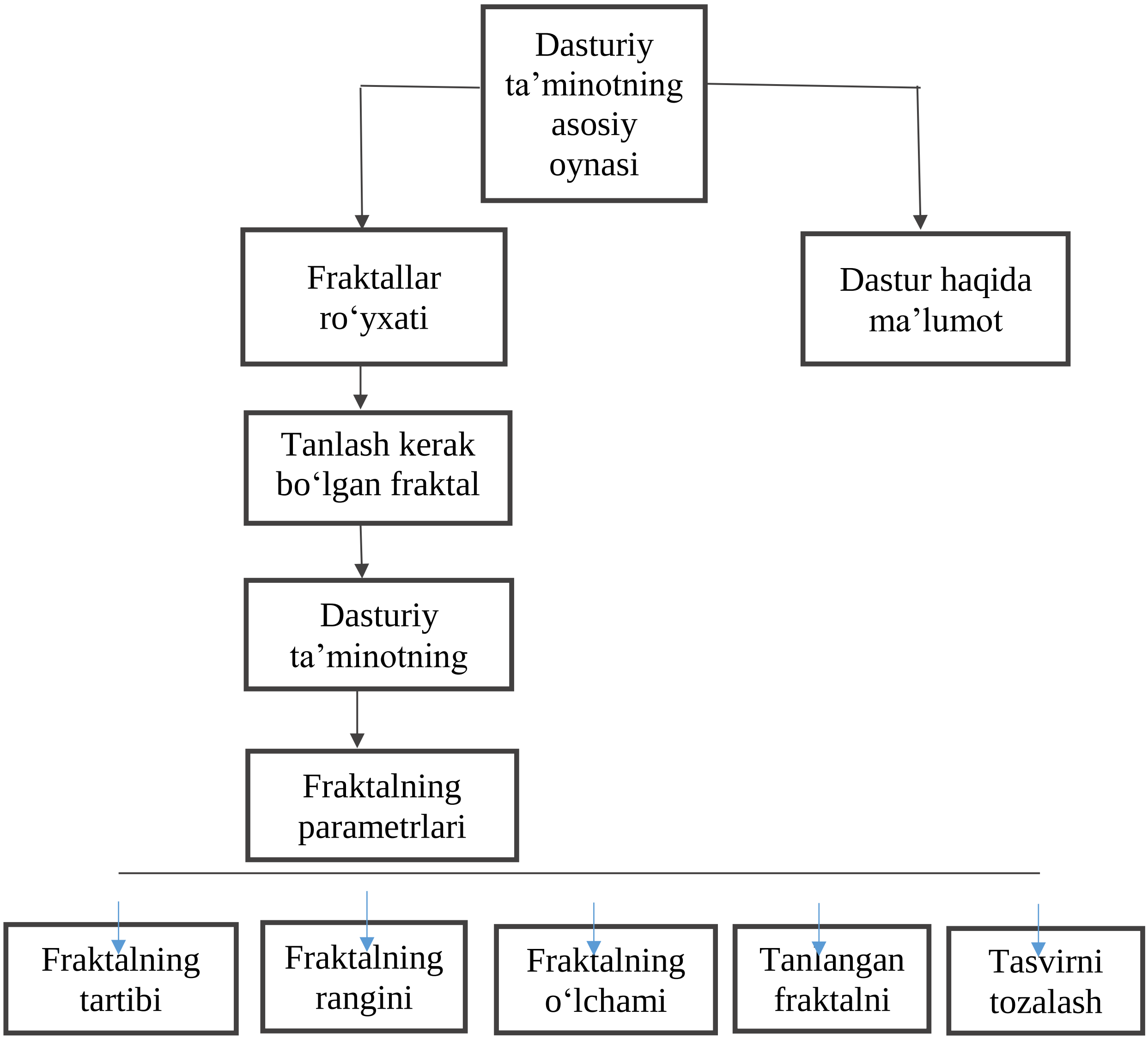
“Geometrik fraktallar” nomli dasturiy muhit

Dasturiy muhitning umumiy ishlash tartibi quyidagi blok-sxemada keltirilgan.



5.20-rasm. “Geometrik fraktallar” nomli dasturiy muhitning umumiy blok-sxemasi

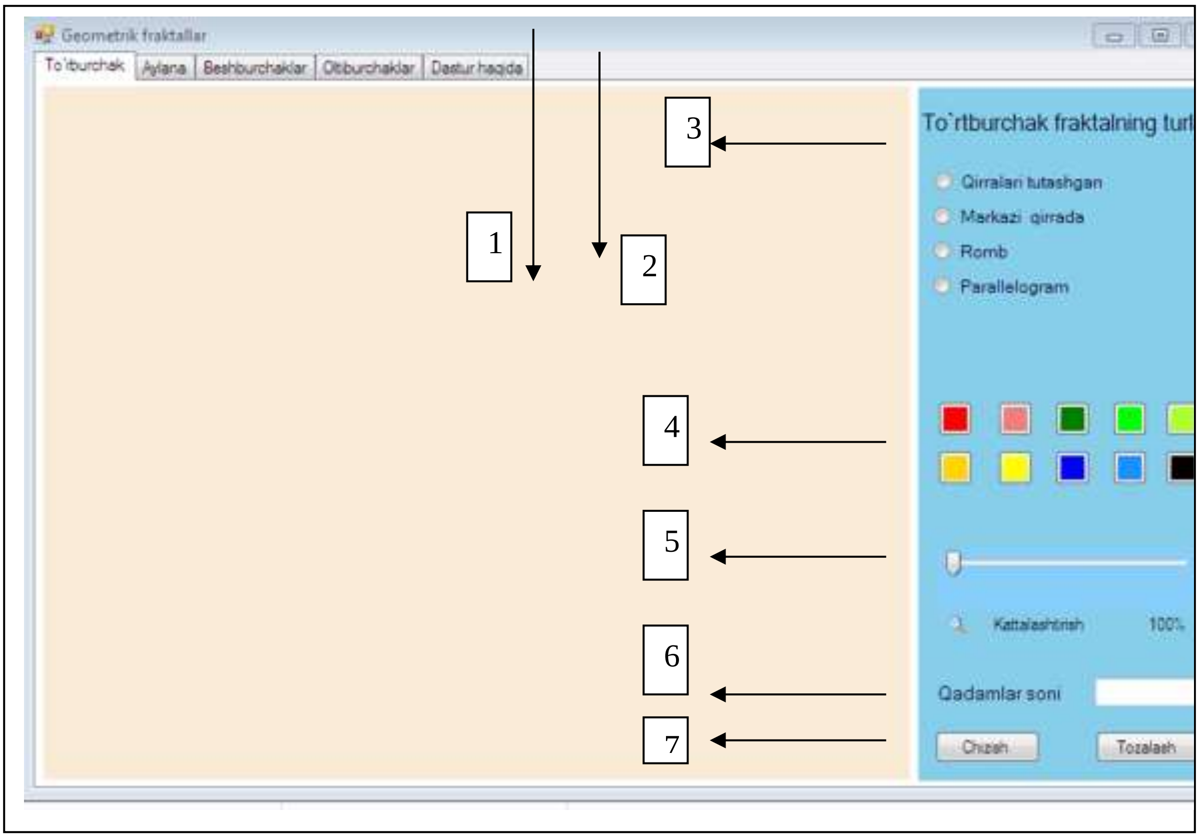
Ishlab chiqilgan dasturiy muhitning tuzilishi 5.21-rasmda keltirilgan.



5.21-rasm. Dasturiy muhitning tuzilishi

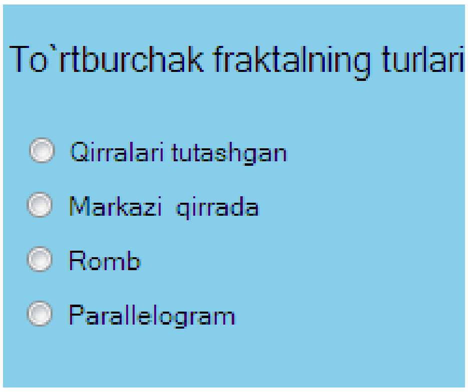
Ishlab chiqilgan dasturiy muhit iteratsiyaning turli sonlarida aylanalardan, to'rtburchaklardan va ko'pburchaklardan iborat fraktallarni qurishda foydalaniladi. Dasturiy muhit ishga tushirilishi bilan 5.22-rasmdagi interfeys ekranda paydo bo'ladi.

Hosil bo‘lgan interfeysdagi birinchi satrni asosiy menyu satri deb, bu yerda dasturiy ta’minotning nomi hamda dasturiy ta’minot bilan ishlashga qulaylik yaratishga mo‘ljallangan buyruqlar mavjuddir. Dasturiy ta’minotning ikkinchi satrida qism menyu satri joylashtirilgan bo‘lib, bular “Aylana”, “To‘rtburchak”, “Beshburchaklar”, “Oltiburchaklar” kabi fraktallarni chizishga imkoniyat yaratuvchi buyruqlar mavjuddir. Dasturiy ta’minotning ishchi sohasi ikkita vertikal qismga ajratilgan bo‘lib, ularning birinchi qismida rekursiyaning turli sonlarida hosil bo‘ladigan fraktallar chizmasi hosil bo‘ladi. Ikkinchi qismida tanlangan geometrik shakllardan iborat fraktallarning turlari (3), ranglar palitrasi (4), o‘lchamlari (5), qadamlar soni (6), chizish va tozalashlar (7) tanlab olinadi. Bular rasmda keltirib o‘tilgan.



5.22-rasm. Dasturiy muhitning umumiy ko‘rinishi

Dasturiy ta’minotdan to‘rtburchak shakllardan iborat fraktallarni qurishda foydalanilsa, bunda qism menyudan “To‘rtburchak” buyrug‘i tanlanadi. U holda (3) ning ko‘rinishi 5.23-rasmda keltirilgani kabi o‘zgaradi.



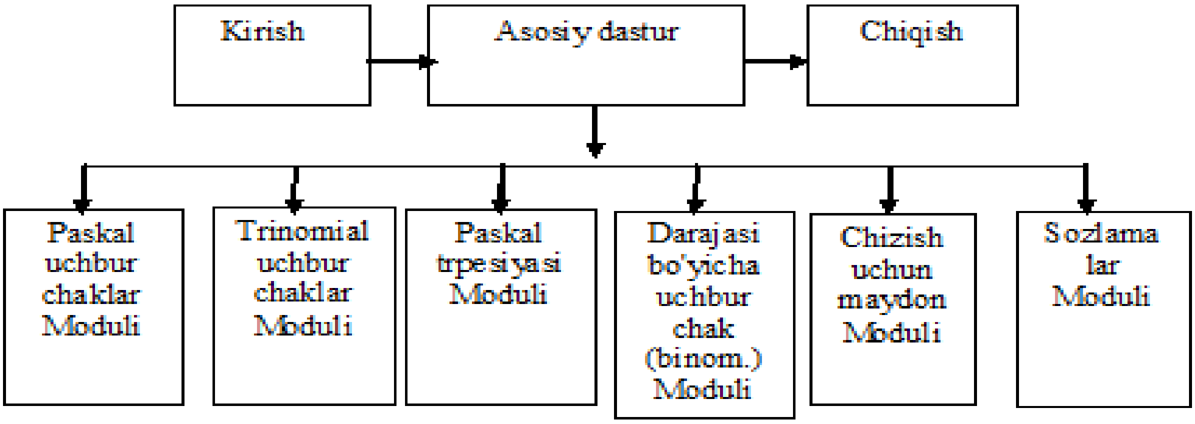
5.23-rasm. To‘rtburchaklardan iborat fraktallarning turlarini tanlash

Dasturiy ta’minotdan foydalanib 5.22-rasmda keltirilgan qism menyudagi boshqa shakllardan iborat fraktallarni chizish uchun kerakli fraktalga mos buyruq tanlanadi. Bunda 5.23-rasmning ko‘rinishi tanlangan geometrik shaklga mos holda o‘zgaradi.

“Paskal uchburchagi” dasturiy muhiti

Arifmetik hamda kombinartorik xususiyatlarini hisobga olgan holda klassik, zamonaviy uchburchaklarning va piramidalarning Paskal uchburchagi rekurrent munosabatlar asosida qurilgan binomial, trinomial va boshqa kombinator sonlar o‘rganilgan. Oltita modullarga asoslangan “Paskal uchburchagi” nomli dasturiy ta’minot C# da ishlab chiqilgan, dasturdan foydalanish uchun qulay interfeys ishlab chiqilgan, dasturiy ta’minotdan turli sanoatda keng foydalanish mumkin

Ushbu bobda C # dasturlash tilida amalga oshiriladigan oltita asosiy modullardan tashkil topgan dasturiy tuzilma tavsiflanadi. Blok sxemasi 5.22-rasmda keltirilgan.



5.24-rasm. Dastur muhit tuzilishi

Dasturiy ta’minot 6 asosiy modulni o‘z ichiga oladi:

• Paskal uchburchagi moduli 9 funksional protsedurani o‘z ichiga oladi;

Trinomial uchburchak moduli 3 ta funksiyani o‘z ichiga oladi;

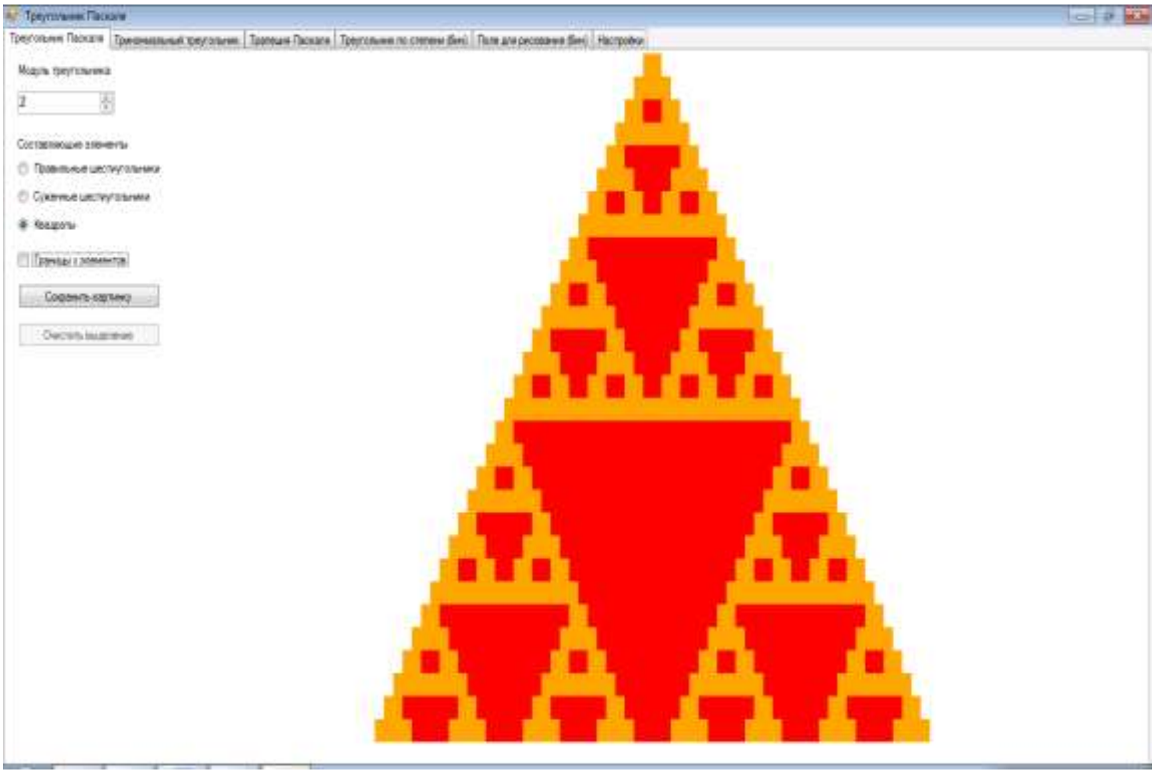
• Paskal Trapezoid moduli 8 ta funksional protseduralarni o‘z ichiga oladi;

Darajasi bo‘yicha uchburchak moduli (bin) 7 funksiyali protsedurani o‘z ichiga oladi;

• Chizish uchun maydon moduli 3 ta funksiyani o‘z ichiga oladi;

• Sozlamalar moduli rangni rostlash uchun ishlatiladigan ikkita funksional protsedurani o‘z ichiga oladi.

Dasturiy muhitdan foydalanish bo‘yicha ko‘rsatma. Paskal uchburchagi dasturidan foydalanish bo‘yicha ko‘rsatmalar. Keyinchalik, dasturiy ta’minotdan foydalanish bo‘yicha ko‘rsatmalar beramiz. Boshlangandan so‘ng dasturning asosiy oynasi 5.24-rasm paydo bo‘ladi, 6 yorliqdan iborat “Paskal uchburchagi”, “Trinomial uchburchak”, “Paskal Trapezoid”, “Uchburchak darajasi (bin)”, “Chizma maydoni”, “Sozlamalar”.

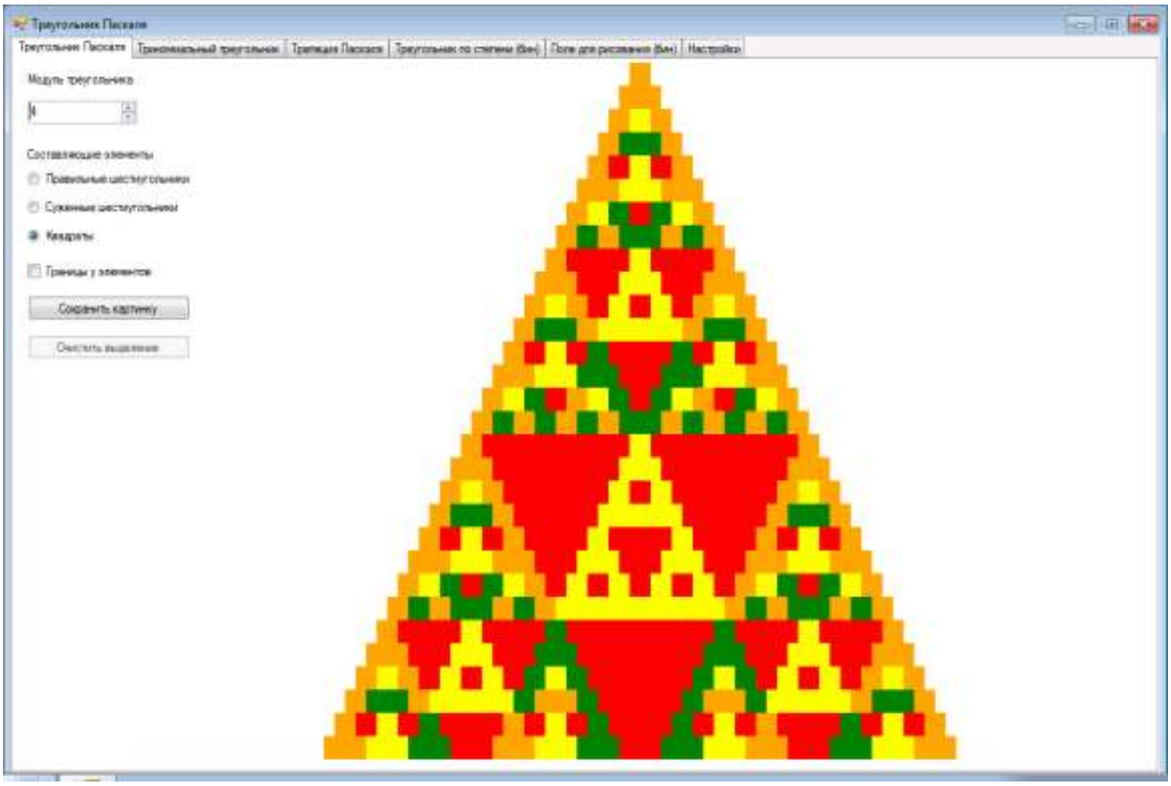


5.25-rasm. Dasturning umumiy muloqat interfeysi

Asosiy menyuda “Uchburchak moduli’, “Tashkil etuvchi elementlar” “Elementlar chegaralari”, “Rasmni saqlash”, “Belgilashni tozalash” ni tanlash uchun qism menyular mavjud.

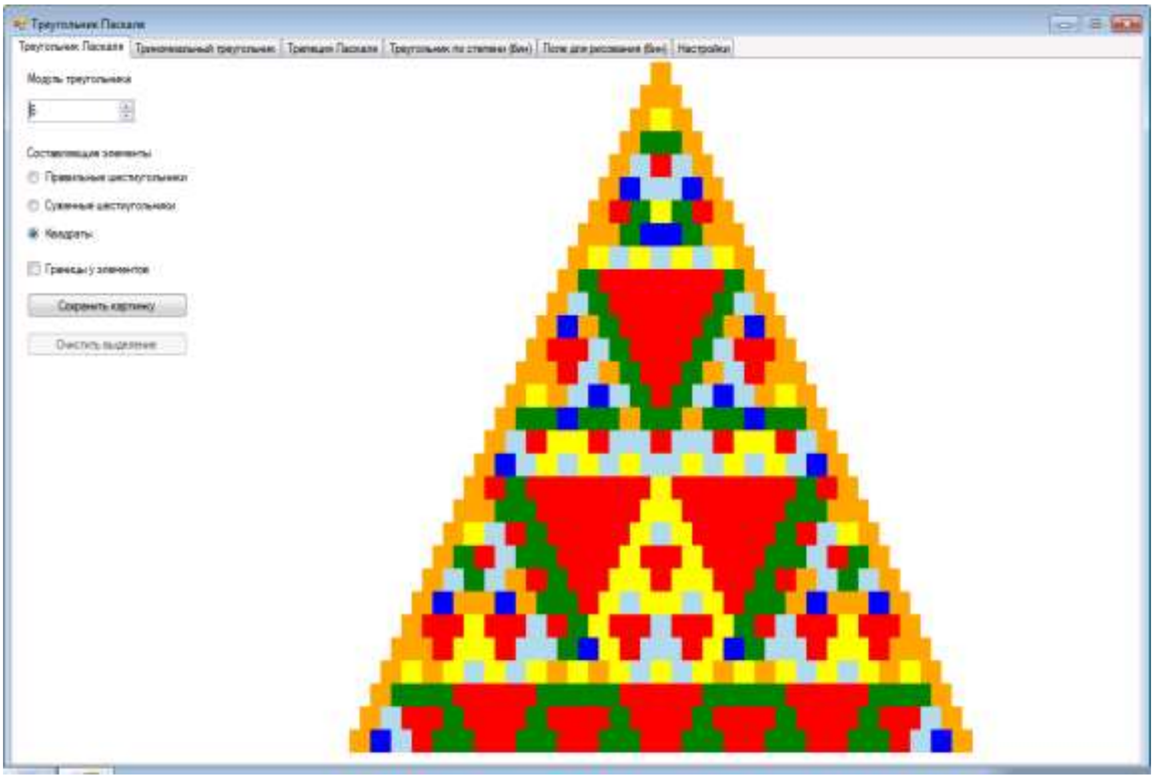
Sichqonchani ko‘rsatib, rasmga sichqonchaning chap tugmachasini bosganingizda, tanlangan element (yoki parcha) tanlanadi va “Paskal uchburchagi”, “Trinomial uchburchak”, “Trapezium Paskal”, “Darajadagi uchburchak (bin)” yorliqlarida tanlanadi va clipboardga ko‘chiriladi.

“Uchburchaklar moduli” maydonida siz 2 dan 9 gacha bo‘lgan raqamli qiymatni kiritishingiz mumkin. Masalan, modul maydoniga 4 ning qiymatini kiritishda biz quyidagi rasmda ko‘rsatilgan uchburchakni olamiz 6.26-rasm



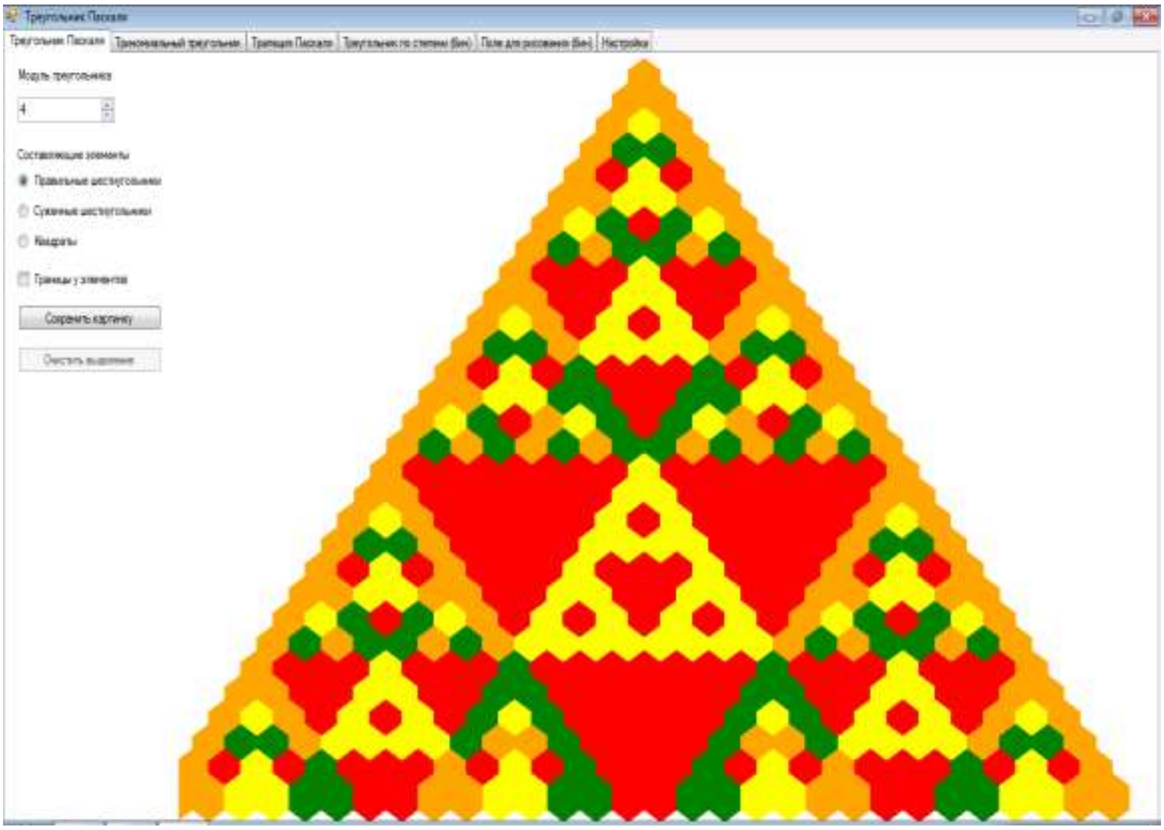
5.26-rasm. Modul bo‘yicha tanlangan qiymat 4 “Paskal uchburchagi”

Boshqa bir misolni ko‘rib chiqaylik, modul maydonini 6 ga teng qiymatga o‘zgartirganda rasmda ko‘rsatilgan quyidagi uchburchakni olamiz. 5.27-rasm.



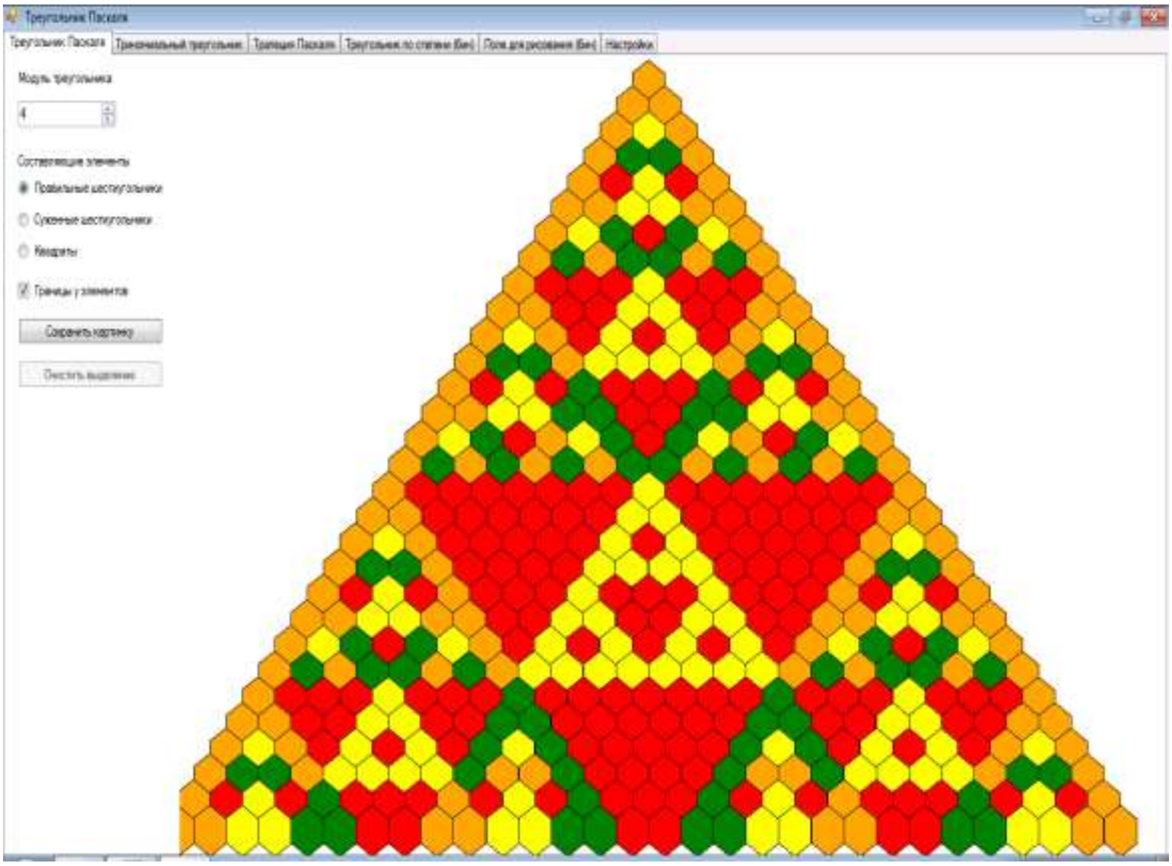
5.27-rasm. Tanlangan qiymat moduli 6 bo‘lgan “Paskal uchburchagi”

Bundan tashqari, “Komponentlar” qism menyudan “Doimiy olti burchakli”, “Tor olti burchakli”, “Kvadratlar” variantlaridan birini tanlash imkoni mavjud. Keyinchalik, 5.28-rasmning tarkibiy elementlari sifatida “To‘g‘ri olti burchakli chiziqlarni” tanlaymiz, elementlarning chegaralari ko‘rsatilmagan.

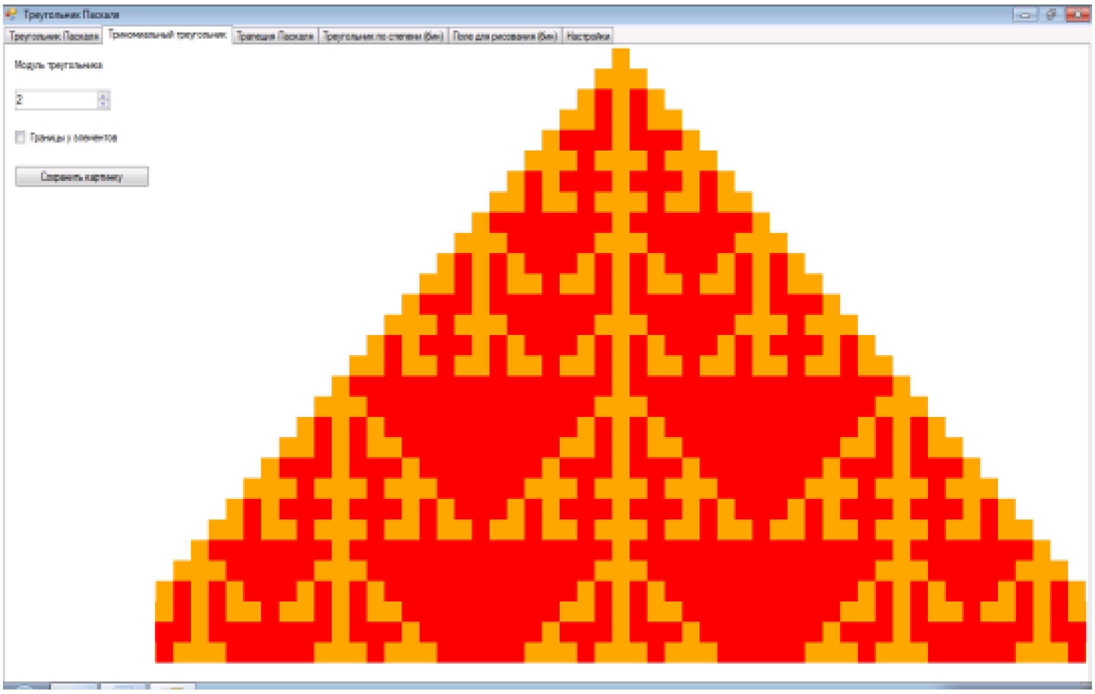


5.28-rasm. Tanlangan qiymat “Muntazam uchburchak”

Element chegaralari maydoni tanlangan muntazam olti burchakli, toraytirilgan olti burchakli chiziqlar va kvadratchalar elementlarining chegaralarini aniqroq aniqlashga imkon beradi. Elementlarning chegaralarini ko‘rsatadigan misolni ko‘rib chiqing, olingan natijalar 5.29-rasmda keltirilgan. Bu yerda uchburchakning moduli 4 ga teng va “Oddiy olti burchakli” Paskal uchburchagining tarkibiy elementlari sifatida tanlangan.



5.29-rasm. “Element chegaralari”ning tanlangan qiymati

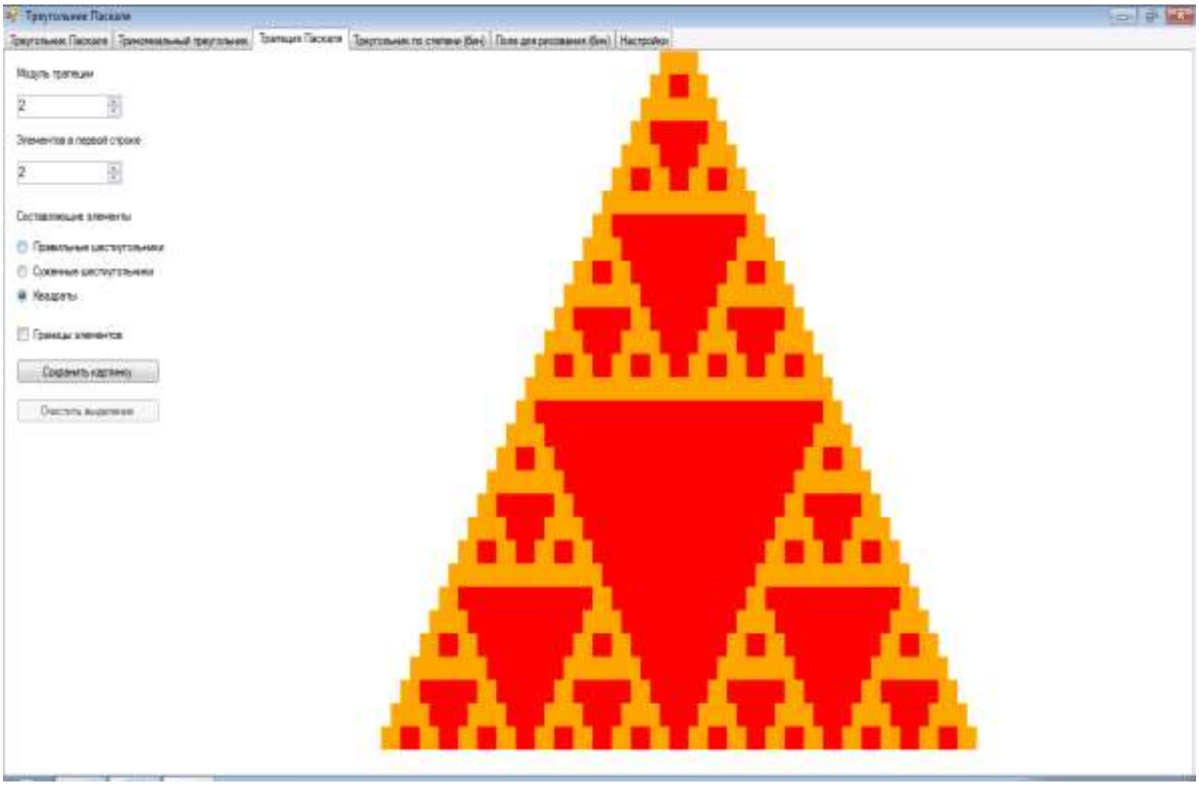


5.30-rasm. Trinomial uchburchak yorlig‘i

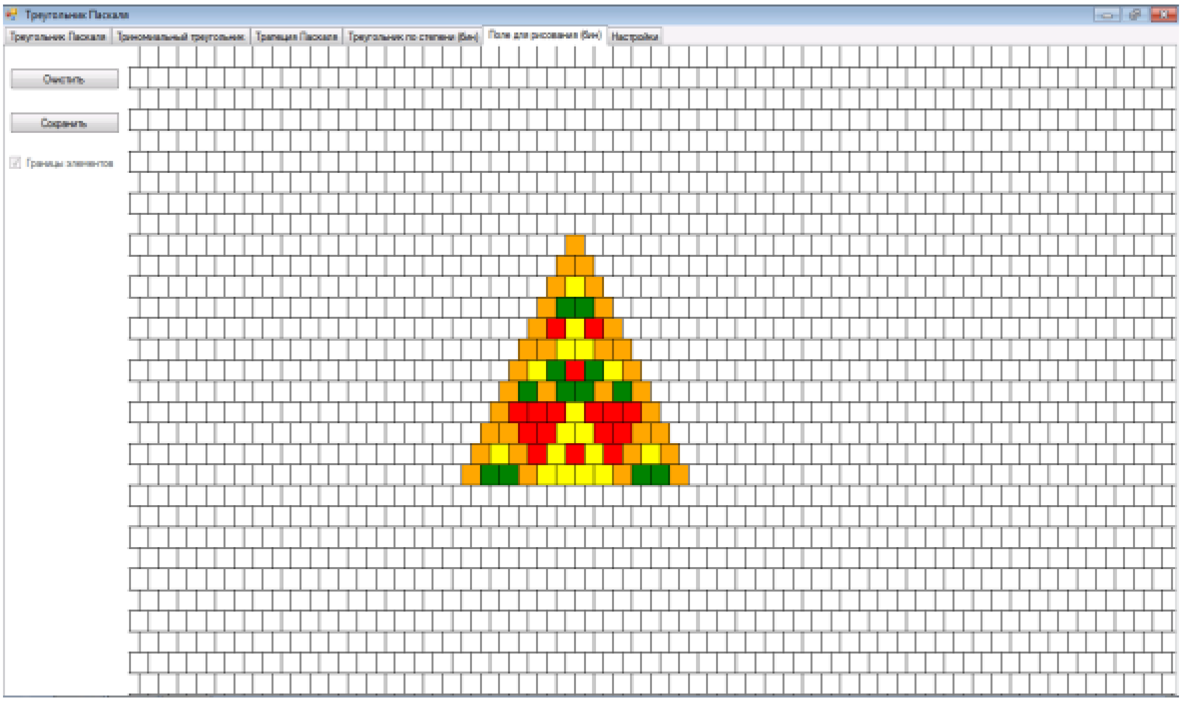
Bundan tashqari, “Rasmni saqlash” maydoni tanlangan rasmni PNG formatida (* .png) faylning nomi va ish stoli bilan saqlashga imkon beradi.

“Tanlovni tozalash” maydoni sizga rasmdagi alohida elementlarni (sichqonchaning chap tugmasi bilan) tozalash imkonini beradi. Keyingi “Trinomial uchburchak” oldingi qatorlar bilan bir xil maydonlarni o‘z ichiga oladi, “Komponent elementlari” va “Aniq tanlov” bundan mustasno.

Paskal Trapezoid, Uchburchak (bin) darajalari yorliqlari, shuningdek, “Paskal Trapezoid” qo‘shilgan maydonchadan tashqari Uchburchak Moduli maydonchalari, komponent elementlari, element chegaralari, rasmni saqlash, tanlangan joyni tozalash. Birinchi satrdagi narsalar.



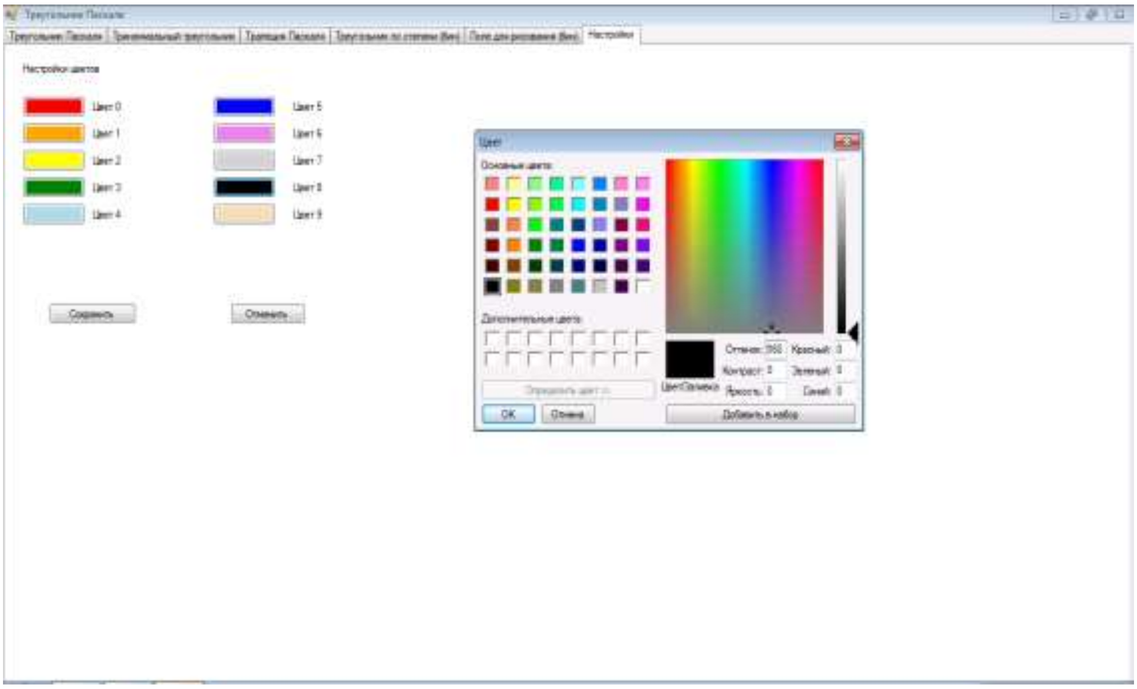
5.31-rasm. Paskal Trapezoid yorlig‘i



5.32-rasm. “Chizish uchun maydon”

Nusxalash sichqoncha kursorini o‘zboshimchalik bilan biror joyga ko‘chirish orqali amalga oshiriladi (sichqonchaning chap tugmasi). Ushbu yorliqda “Saqlash”, “Tozalash”, “Elementlarning chegaralari” maydonchalari mavjud.

Keyingi “Sozlamalar” yorlig‘ida tanlangan modul qiymatining 0 dan 9 gacha bo‘lgan qiymatiga mos ravishda sozlamalar va rang qiymatini tanlash mavjud. Rang modulning tanlangan rang qiymatiga sichqoncha kursorini bosib, chap tugmani bosish orqali o‘zgartiriladi.

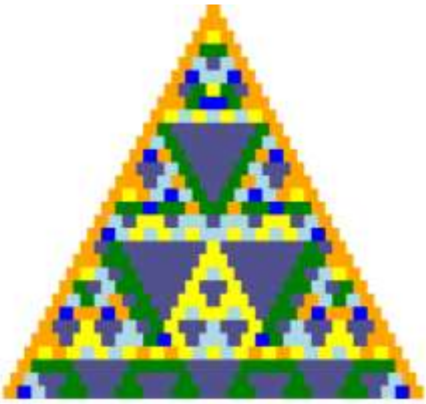


5.33-rasm. “Sozlamalar”

Bu yerda asosiy sozlamalar, funksionallik va dasturning interfeysi ko‘rsatildi.

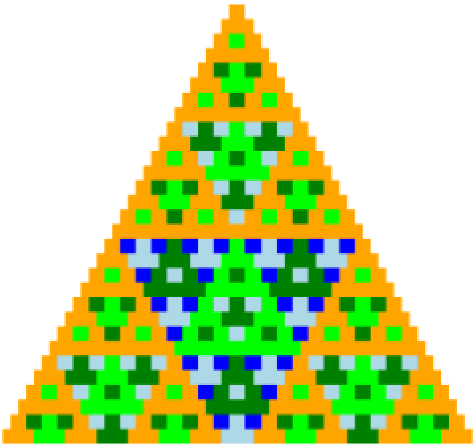
Rangografik fraktal tuzilmalarni qurish uchun dastur ta’minoti va ulardan foydalanish. (Dastur C# dasturlash tilida ishlab chiqilgan)

5.34-rasm. Paskal uchburchagi 3 moduli bo‘yicha binomial koeffitsiyentlarning tarqalishi



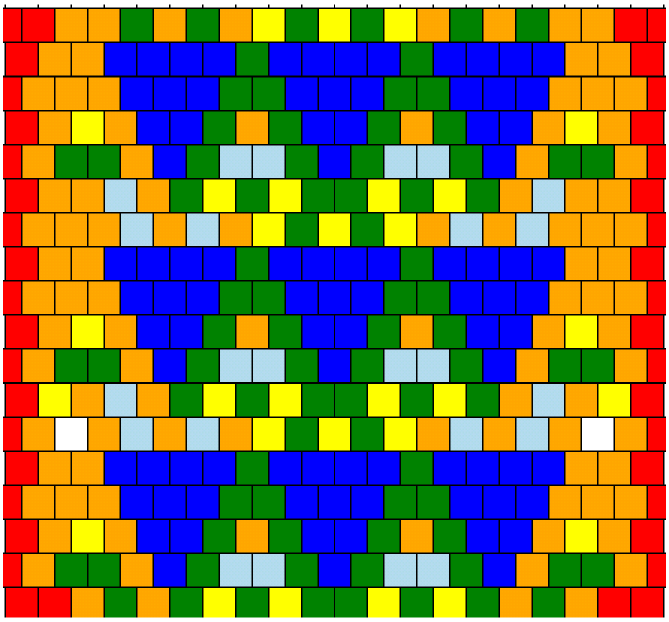
5.35-rasm. Paskal uchburchagi modulida binomial koeffitsiyentlarning tarqalishi

5.36-rasm. Paskal uchburchagidagi binom koeffitsiyentlarining n=3 darajadagi tarqalishi



5.37-rasm. Paskal uchburchagidagi binom koeffitsiyentlarining n=2 darajadagi tarqalishi

Paskal uchburchagidagi binom koeffitsiyentlarini turli darajadagi taqsimotiga asoslanib, amaliy maydonlar uchun to‘rtburchaklar konstruktsiyani qurish mumkin.

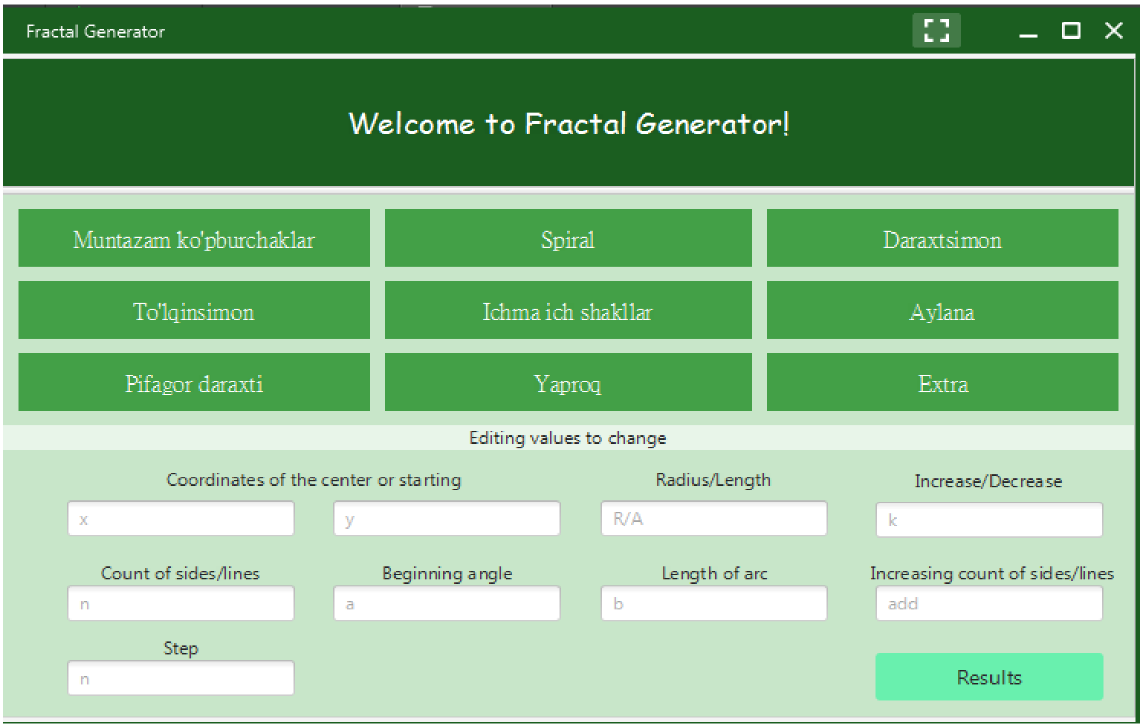


5.38-rasm.

“FRAKTAL GENERATOR” deb nomlangan zamonaviy dizayndagi naqshlarning murakkab fraktal tuzilishlarni qurishga mo‘ljallangan dasturiy muhitning imkoniyatlari.

Dasturiy muhit geometriyaning primitiv shakllari va asosiy tushunchalaridan foydalangan holda qurilgan matematik model va rekursiv algoritm yordamida fraktallarni chizish uchun dasturiy muhit ishlab chiqildi.

“FRAKTAL GENERATOR” dasturiy muhiti ishga tushirilganda 5.39-rasm ko‘rinishdagi interfeys ekranda paydo bo‘ladi. Interfeys gorizontal yo‘nalish bo‘yicha ikkita qismdan iborat. Birinchi qismida mavjud qurilgan fraktallar ro‘yxati keltirilgan. Dasturiy muhit o‘zbek va ingliz tilida ishlashga mo‘ljallangan.



5.39-rasm. Dasturiy muhitning umumiy ko‘rinishi

Bular: “Muntazam ko‘pburchaklar” asosida qurilgan fraktallar, “Spiralsimon” fraktallar, “Daraxtsimon” fraktallar, “To‘lqinsimon” fraktallar, “Ichma-ich” joylashgan shakllardan iborat fraktallar, “Aylana”lardan iborat fraktallar, “Pifagor daraxti” fraktali, “Yaproq”lardan iborat fraktallar va “Mo‘jiza” fraktal. Ikkinchi qismi “O‘zgartirishlar uchun qiymatlarni tahrirlash (Editing values to change)”da har bir qurilayotgan fraktal uchun parametrlar keltirilgan. Ushbu parametrlar quyida keltirib o‘tiladi:

∗ “Boshlang‘ich yoki markaz koordinatalari” – “Coordinates of the center or starting”;

∗ “Radius/Uzunlik” – “Radius/Decrease”;

∗ “Kattalashtirish/kichiklashtirish” – “Increase/Decrease”;

∗ “Tomonlar soni/chiziqlar” – “Count of sides/lines”;

∗ “Boshlang‘ich burchak” – “Beginning angle”;

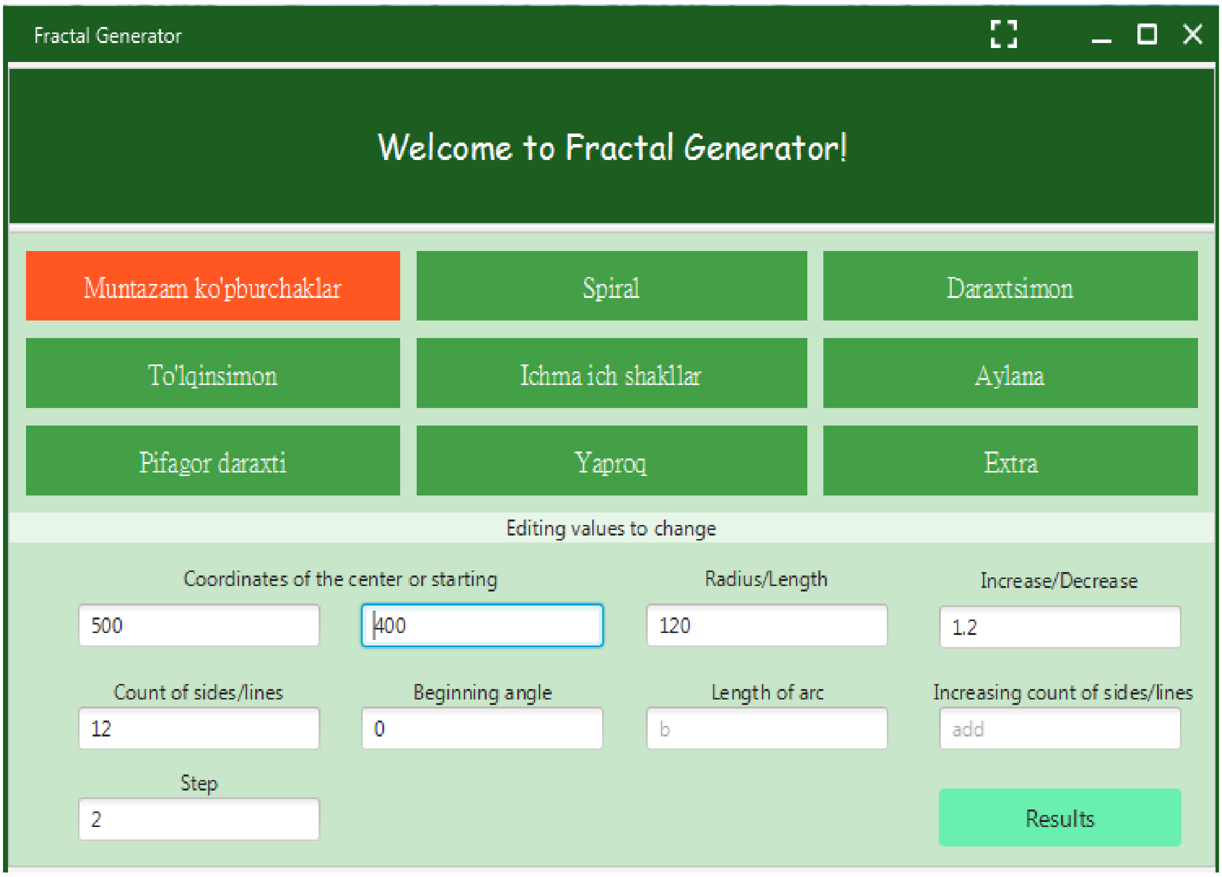
∗ “Yoyning uzunligi” – “Length of arc”;

∗ “Tomonlar sonini oshirish/chiziqlar” – “Increasing count of sides / lines”;

∗ “Qadam” – “Step”;

∗ “Natijalar” – “Results”.

Ushbu berilgan parametrlardan foydalangan holda talab etilgan barcha fraktallarni qurish mumkin. Muloqot interfeysiga e’tiborni qaratadigan bo‘lsa, ba’zi parametrlarning faol emasligini kuzatish mumkin. Bu esa o‘z navbatida alohida fraktallar uchun o‘rinlidir. Masalan, “Muntazam ko‘pburchaklar” asosida fraktallar qurilsa “Yoyning uzunligi” – “Length of arc”, “Tomonlar sonini oshirish / chiziqlar” – “Increasing count of sides / lines” parametrlarining faol emasligini ko‘rish mumkin. Qolgan tipdagi fraktallarni qurish uchun ham xuddi shu jarayonni kuzatish mumkin. Turli tipdagi fraktallarni qurish uchun umumiy bo‘lgan parametrlar va faqat bitta fraktalga tegishli bo‘lgan parametrlar mavjud. Dasturiy muhit ishga tushirilganda hamma parametrlar faol bo‘lmaydi. Faol bo‘lmagan parametrlar qurilayotgan murakkab tuzilishli fraktallarda ishtirok etmaydi.



5.40-rasm. “Muntazam ko‘pburchaklar”dan iborat fraktallarni qurish interfeysi

Fraktal naqsh murakkab va tartibsiz grafika bo‘lib, betakror xususiyatlarga ega badiiy dizaynini qura oladi va gazlamaga naqshni tushira oladi. Hozirgi naqshli gazlama dizaynlari asosan an’anaviy naqshlardan iborat bo‘lib, C++ tilida turli xil generatsiya tamoyillariga muvofiq qog‘oz rasmlari va o‘tish vaqti algoritmiga asoslangan blokli rasmlar, so‘ngra kompyuterlashtirilgan dizayn dasturlarida rasmlar qayta ishlangan.

Trikotaj gazlamalarni naqshli dizaynidan ilhom olishimiz bilan bir qatorda murakkab va tartibsiz grafikadan iborat fraktal naqshni noyob xususiyatlari bilan badiiy dizaynini qurishda foydalanish mumkin.

Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlarida qo‘llash uchun R-funksiya usulidan foydalanib ishlab chiqilgan tenglamalardan olingan natijalar rastli grafika ko‘rishida keltirilgan.

Nazorat uchun savol va topshiriqlar

1. Fraktallarni hosil qiluvchi dasturlarni sanab o‘ting.
2. “Fraktallar” nomli dasturiy muhiti to‘g‘risida ma’lumot bering.
3. Tanlangan fraktal uchun qanday parametrlar mavjud?
4. Gilbert egri chizig‘ini chizish uchun funksiya va protseduralarni sanang.
5. Serpin egri chizig‘i uchun qanday protseduralar va funksiyalar mavjud?
6. Serpin salfetkasi va Serpin gilami uchun protsedura va funksiyalarni ta’riflang.
7. Kox egri chizig‘i, Kox qorparchasi va Kox kresti uchun qanday funksiyalarni bilasiz?
8. Quti fraktali uchun qanday funksiyalarni bilasiz?
9. Daraxt fraktali uchun qaysi funksiyalarga asoslanadi?
10. Dasturdan foydalanish bo‘yicha ko‘rsatmalarni tushuntiring.
11. “Geometrik fraktallar” nomli dasturiy muhit haqida ma’lumot bering.
12. “Paskal uchburchagi” dasturiy muhitini izohlang.

TEST SAVOLLARI

1. Fraktal so‘zi qaysi so‘zdan olingan va nima ma’noni bildiradi?

A. Fransizcha “fraktale” so‘zdan olingan bo‘lib “qisqargan” degan ma’noni bildiradi.

B. Lotincha “fractus” so‘zidan olingan bo‘lib, “bo‘laklangan”, “qismlardan tashkil topgan” degan ma’noni bildiradi.

C. Inglizcha “fraktal” so‘zidan olingan bo‘lib, “butun”, “yaxlit” degan ma’noni bildiradi.

D. Lotincha “fractus” so‘zidan olingan bo‘lib, “bo‘laklanmagan”, “qismlardan tashkil topmagan” degan ma’noni bildiradi.

2. “Fraktal” va “fraktal geometriya” tushunchalarini fanga olib kirgan olimni aniqlang.

A. Pifagor.

B. Geron.

C. Xelge fon Kox.

D. Mandelbrot.

3. Fraktal va fraktal geometriya tushunchasi qachon paydo bo‘lgan?

A. Miloddan avvalgi II arsda.

B. XIX asrning 80-90-yillarida.

C. XX asrning 70-80 yillarida.

D. XXI asrning boshida.

4. Fraktallarga berilgan ta’riflardan to‘g‘risini tanlang.

A. Fraktal masshtabga bog‘liq bo‘lmagan tasvirlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishlaridir.

B. Fraktal – aniq bir qism o‘lchamini o‘zgartirgan holda qayta va qayta takrorlanuvchi geometrik shakldir.

C. A va B

D. Berilgan ta’riflar fraktallarga mos emas.

5. Berilgan javoblardan qaysi biri fraktallarning matematik ta’rifiga mos emas?

A. O‘ziga-o‘zi o‘xshash yoki masshtabning invariantligi (cheksiz skeyling), ya’ni kichik masshtabda va o‘rta masshtabda xuddi katta masshtabdagi kabi ko‘rinadi.

B. Fraktal o‘lchovlarning qiymati doim butun sonlardan iborat.

C. Kasrli o‘lchami (Xausdorf o‘lchami) topologik o‘lchamidan qat’iy katta.

D. Differensiallanmaydi va kasrli ko‘paytmalar hamda integrallarda aniqlashtiriladi.

6. Berilgan javoblardan qaysi biri fraktallarning fizik ta’rifiga mos?

A. Fraktallar – kuchli qirqilgan tuzilishni ifodalovchi hamda chegaralangan masshtabda o‘ziga-o‘zi o‘xshash xususiyatini egallovchi geometrik obyektlar (chiziq, sirt, jism)dir.

B. Fraktal-Xausdorf o‘lchami topologik o‘lchamiga teng bo‘lgan to‘plam.

C. Fraktal bu avvalo abstrakt, nazariy model, reallikda mavjud bo‘lmagan chegaraviy o‘tish natijalaridir.

D. A va C.

7. Fraktallarning xususiyatlari to‘g‘ri ko‘rsatilgan qatorni toping.

A. O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik, kasriylik, nomuntazamlik, masshtablashtirish, fraktal o‘lchov.

B. O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik, butunlik, muntazamlik, masshtablashtirish, fraktal o‘lchov.

C. O‘ziga-o‘zi o‘xshamaslik, kasriylik, nomuntazamlik, masshtablashtirish, topologik o‘lchov.

D. B va C.

8. Oddiy algebraik formulalarga asosan qurilgan fraktallar qaysi turga mansub?

A. Algebraik fraktallar.

B. Geometrik fraktallar.

C. Stoxastik fraktallar.

D. Tabiiy fraktallar.

9. Qanday turdagi fraktallar iteratsion jarayonda to‘satdan birorta parametrni o‘zgartirishi holatidan paydo bo‘ladi?

A. Algebraik fraktallar.

B. Geometrik fraktallar.

C. Stoxastik fraktallar.

D. Tabiiy fraktallar.

10. Olimlar tomonidan o‘ylab topilgan va ixtiyoriy masshtabda fraktallar xususiyatlarini o‘zida namoyon etadigan fraktallar.

A. Algebraik fraktallar.

B. Geometrik fraktallar.

C. Stoxastik fraktallar.

D. Qo‘l-ijodiy fraktallar.

11. Berilgan mulohaza fraktaldan foydalanishda o‘rinlimi? *“Fraktallar daraxtlar, tog‘ sirtlari va yoriqlarini segmentlar yoki ko‘pburchaklar to‘plamlari ko‘rinishida berilgandan ko‘ra yuqori aniqlikda olish imkonini beradi”.*

A. Mulohaza noto‘g‘ri. Chunki bunday tabiiy shakillarni modellashtirib bo‘lmaydi.

B. Mulohaza to‘g‘ri. Fraktal modellar orqali buni amalga oshirish imkoni mavjud.

C. Mulohaza noto‘g‘ri. Ishlab chiqilgan modellar tabiiy shakllarga umuman yaqin kelmagan.

D. A va C.

12. Hozirgi vaqtda tanlab olingan signallar yoki maydonlar topologiyasi va fraktal primitivlar tushunchalarini ishlatib tasvirni aniqlash mumkinmi?

A. Ha mumkin, aniq modellar ishlab chiqilgan.
B. Mumkin, yangi integrasiyalashgan yondashuv taklif qilingan.
C. Umuman imkoni yo‘q. Umumiy kelishilgan.
D. Bu masala bo‘yicha hech qanday axborot berilmagan.

13. Tasvirning fraktal kodini ifodalash operatorini aniqlang.

A. $\mathrm{F}\left(f\right)=\Phi.$
B. $f^{\mathrm{I}}=\mathrm{F}^{*}\left(\Phi\right).$
C. $\mathrm{F}\left(f\right)=\Phi.^{a}$
D. Tasvirning fraktal kodini ifodalashning imkoni yo‘q.

14. Tasvirning fraktal kod orqali tiklash operatorini aniqlang.

A. $\mathrm{F}\left(f\right)=\Phi.$
B. $f^{\mathrm{I}}=\mathrm{F}^{*}\left(\Phi\right).$
C. $\mathrm{F}\left(f\right)=\Phi.^{a}$
D. Tasvirning fraktal kod orqali tiklash operatorini ifodalashning imkoni yo‘q.

15. Dekorativ fraktal singan chiziq rasmi asosida o‘z radiostansiyasi antennasini yasagan olim kim?

A. Xelge fon Kox
B. V.L.Rvachev
C. B.Mandelbrot
D. Natan Konen

16. Mandelbrot to‘plamini aniqlang.

A. $Z_{n+1}=z_n^2+c$.

B. $Z_{n+1}=z_n+c$.

C. $Z_n=z_n^2+c$.

D. Bunday to‘plam mavjud emas.

17. Fraktal ko‘rsatkich ... savdo tizimining beshta ko‘rsatkichlaridan biridir. Nuqtalar o‘rniga kerakli ismni qo‘ying.

A. Bill Geyts.

B. Mark Zuckerberg.

C. Bill Uilyams.

D. Elon Musk.

18. Kox egri chizig‘ining topologik va fraktal o‘lchovini aniqlang.

A. $d_t=1., D=1$.

B. $d_t=0., D\approx1,26185$.

C. $d_t=0., D=2$.

D. $d_t=1., D\approx1.585$.

19. Serpin gilamining topologik va fraktal o‘lchovini aniqlang.

A. $d_t=1., D=1$.

B. $d_t=1., D\approx1,8928$.

C. $d_t=0., D=2$.

D. $d_t=1., D\approx1.585$.

20. Serpin salfetkasining topologik va fraktal o‘lchovini aniqlang.

A. $d_t=1., D=1$.

B. $d_t=0., D\approx1,585$.

C. $d_t=0., D=2$.

D. $d_t=1., D\approx1.585$.

21. 1968-yili Aristidom Lindenmayer tomonidan ishlab chiqilgan geometrik fraktallarni qurish usuli qaysi?

A. IFS usuli.
B. RFM usuli.
C. A va B.
D. L-tizimlar usuli.

22. Kox triad egri chizig‘i dastlab qachon va kim tomonidan ko‘rib chiqilgan?

A. 1904-yili Xelge fon Kox tomonidan.
B. 1968-yili Aristidom Lindenmayer tomonidan.
C. 1968-yili B.Mandelbrot tomonidan.
D. 1917-yili Gaston Moris Julia tomonidan.

23. Tomonlari muntazam uchburchaklardan iborat muntazam ko‘pyoq nima deb ataladi?

A. Romb.
B. Tetraedr.
C. Oktaedr.
D. Ikosaedr.

24. Sakkiz qirrali oktaedr yoki kengaytirilgan oktaedr kim tomonidan kashf etilgan?

A. Xelge fon Kox.
B. Pifagor.
C. Geron.
D. Leonardo Da Vinchi.

25. Mandelbulb3D dasturi mualliflari kim?

A. B.Mandelbrot.
B. Ramiro Peres.
C. Daniel Uayt va Pol Nylander.
D. Gaston Moris Julia.

26. Incendia 3D fraktal generatori kim tomonidan ishlab chiqilgan.
A. B.Mandelbrot.
B. Ramiro Peres.
C. Daniel Uayt va Pol Nylander.
D. Gaston Moris Julia.

27. Fraktal geometriya klassik geometriyadan farq qiladi, chunki fraktallar…
A. Qo‘pol va tartibsiz.
B. Silliq va muntazam.
C. Klassik geometriyaga asoslangan.
D. To‘g‘ri javob yo‘q.

28. Fraktallar qanday o‘lchovlarda mavjud?
A. 2D.
B. 3D.
C. 2D va 3D o‘rtasida.
E. To‘g‘ri javob yo‘q.

29. Fraktallar matematikaning qaysi sohasi bilan chambarchas bog‘liq va ko‘pincha uning bir qismi hisoblanadi?
A. Geometriya.
B. O‘yin nazariyasi.
C. Kombinatorik.
D. Ehtimollilik.

30. Fraktalga asoslangan tenglamalar quyidagi ilovalarning barchasida foydali, ammo bittasi bundan mustasno.U qaysi?
A. Kino CGI effektlarini yaratish.
B. Insonning qon aylanish tizimini modellashtirish.
C. Qirg‘oq chizig‘ining uzunligini aniqlash.
D. Avtomagistralda vaziyatning optimal yo‘lini aniqlash

31. Qaysi matematik fraktal so‘zini o‘ylab topgan va o‘zini fraktalchi deb atagan?

A. Benoit Mandelbrot.

B. Daniel Bernoulli.

C. Per de Ferma.

D. Rene Dekart.

32. Fraktallar elektron hisoblash paydo bo‘lganidan keyin ancha mashhur bo‘lib ketdi, chunki ular hisoblashning qaysi jihatlariga bog‘liq?

A. Iteratsiya va rekursiyaning yuqori darajasi.

B. Formulali ma’lumotlarning katta va murakkab to‘plamlarini tez yaratish va chizish qobiliyati.

C. Katta miqdordagi hisob-kitoblar.

D. Barcha javob to‘g‘ri.

33. Quyidagi tez-tez ishlatiladigan iste’molchi qurilmalardan qaysi biri fraktallardan amaliy foydalanadi?

A. Raqamli kalkulyatorlar.

B. DVD pleyerlar.

C. Mikroto‘lqinli pechlar.

D. Mobil telefonlar.

34. Quyidagilardan qaysi biri fraktallarning tabiatda paydo bo‘lishining yaxshi namunasi emas?

A. Zebradagi chiziqlar.

B. Qor parchalari.

C. Qirg‘oq chiziqlari.

D. Daraxtlarning shoxlanishi.

35. 1904-yilda birinchi va eng oddiy fraktallardan biri Xelge fon Kox tomonidan tasvirlangan, “Kox qor parchasi” qaysi standart geometrik shaklga asoslangan?

A. Teng tomonli uchburchak.
B. Kvadrat.
C. Aylana.
D. Tesserakt.

36. Bir oz murakkabroq fraktal teng tomonli uchburchakdan boshlanadi va uch tomonning o‘rta nuqtalarini bir-biriga bog‘lab, teskari ichki teng tomonli uchburchak hosil qilib, uni to‘rtta teng tomonli uchburchakka ajratadi. Bu fraktal shakl nima deb ataladi?

A. Sierpinski uchburchagi.
B. G‘alati tortuvchi.
C. Rubik kubigi.
D. Mushuk beshigi.

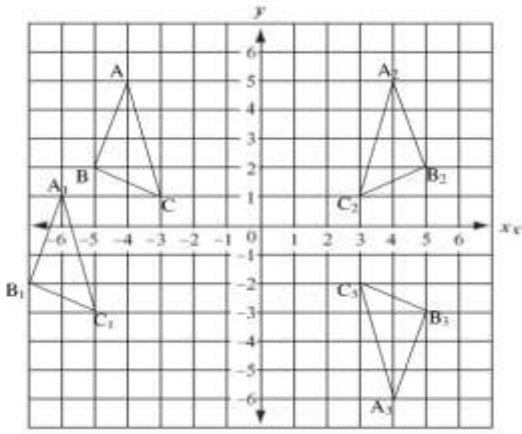
37. Benoit Mandelbrot IBM muammolarini ko‘rib chiqishni so‘ralganda fraktallarga e’tibor qaratishni boshladi. Muammo nimaga bog‘liq edi?

A. Dasturlar o‘sishi bilan xatolar ko‘payadi.
B. Tilni tarjima qilish algoritmidagi xatolar.
C. Katta kompyuterlar tomonidan ishlab chiqarilgan issiqlik.
D. Kiruvchi signal uzatishda shovqin.

38. Muayyan muammoga o‘rnatilgan qoidalarni rekursiv tarzda qo‘llash bir nechta aqliy o‘yinlarda uchraydi. Eng qisqa va eng uzun yechimlarning diagrammasi ba’zida biz ko‘rib chiqqan fraktallarga o‘xshab ko‘rinadigan raqamlarga olib keladi. Qaysi mashhur o‘yin bunga misol bo‘la oladi?

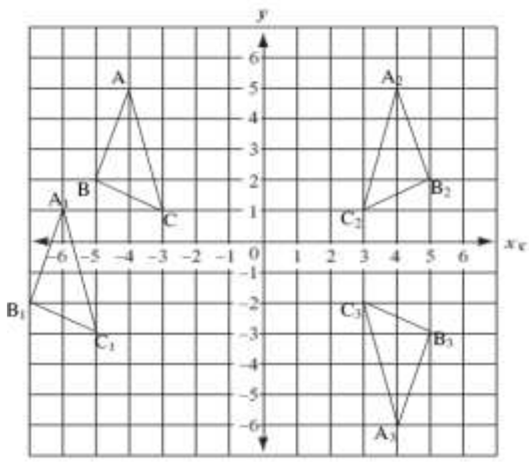
A. 1-15 Sliding Number puzzle.
B. Gordian Knot Puzzle.
C. Key in Bottle Puzzle.
D. Tower of Hanoi puzzle.

39. 39-41 savollar uchun Rasmdagi ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ va $A_3B_3C_3$ uchburchaklar koordinata tekistligida berilgan. ABC uchburchagidan $A_1B_1C_1$ uchburchagidagi geometrik o‘zgarishlarni tasvirlab bering.



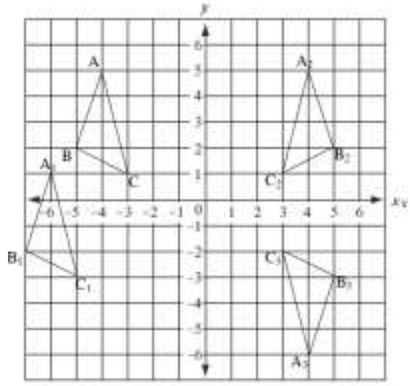
A. Chiziq ustida akslantirish.
B. Nuqta atrofida aylantirish.
C. 4 birlik pastga, keyin 2 birlik chapga o‘zgartirish.
D. 4 birlik yuqoriga, keyin 2 birlik o‘ngga o‘zgartirish.

40. Rasmdagi ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ va $A_3B_3C_3$ uchburchaklar koordinata tekistligida berilgan. ABC uchburchagidan $A_2B_2C_2$ uchburchagiga geometrik o‘zgarishlarni ta’riflang:



A. O‘ngga 4 birlik o‘zgartirish.
B. Nuqta atrofida aylantirish.
C. x o‘qi ustida akslantirish.
D. y o‘qi ustida akslantirish.

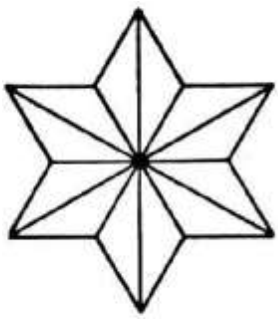
41. Rasmdagi ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ va $A_3B_3C_3$ uchburchaklar koordinata tekistligida berilgan. ABC uchburchagidan $A_3B_3C_3$ uchburchagiga geometrik o‘zgarishlarni ta’riflang:



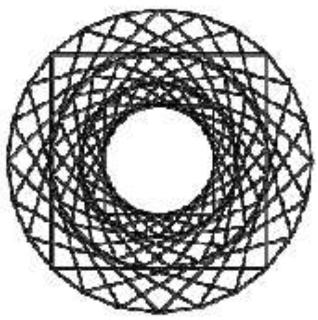
A. Chiziq ustida aks ettirish.
B. Boshlanish nuqtasi atrofida 180 daraja aylantirish.
C. Boshlanish nuqtasi atrofida 90 daraja aylantirish.
D. Akslantirish va uni o‘zgartirish.

42. Geometrik fraktallar yordamida yaratilgan aylana shaklidagi san’at asarini toping.

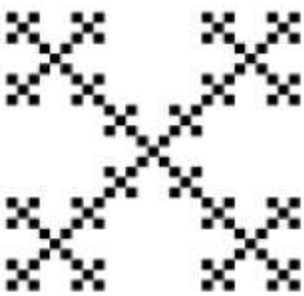
A.



B.



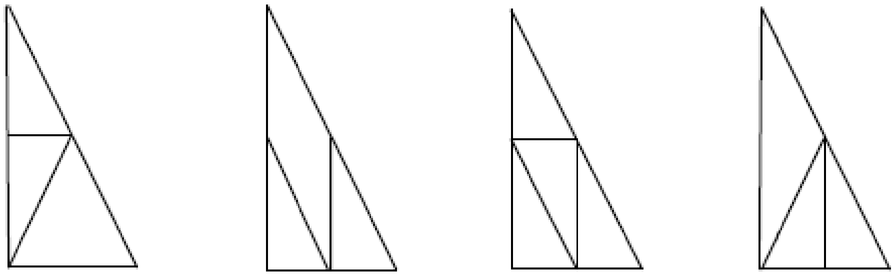
C.



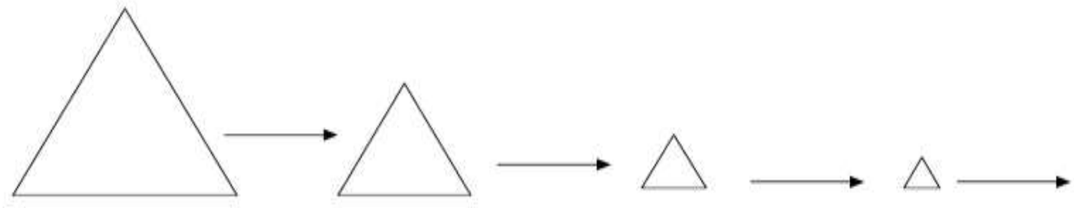
D.

43. Quyidagi rasmlar orasida qaysi biri o‘ziga o‘xshashlik xususiyatiga ega?

A. B. C. D.



44. Muntazam teng tomonli uchburchak tomonining uzunligi 1 ga teng deb tasavvur qiling. Geometrik takrorlanish qoidasi quyidagicha berilgan: teng tomonli uchburchakning har bir tomonini hozirgi tomonning yarmiga teng qilib qisqartiring. n-geometrik iteratsiyadan so‘ng hosil bo‘lgan ucnburchakning har bir tomonning uzunligini toping (n ning algebraik ifodasi yordamida).



T_0, Dastlabki holat T_1, iteratsiya T_2, iteratsiya T_3, iteratsiya

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

D. $3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

45. Muntazam teng tomonli uchburchak tomonining uzunligi 1 ga teng deb tasavvur qiling. Geometrik takrorlanish qoidasi quyidagicha berilgan: teng tomonli uchburchakning har bir tomonini hozirgi tomonning yarmiga teng qilib qisqartiring. n-geometrik iteratsiyadan so‘ng hosil bo‘lgan uchburchakning yuzasini toping (n ning algebraik ifodasi yordamida):

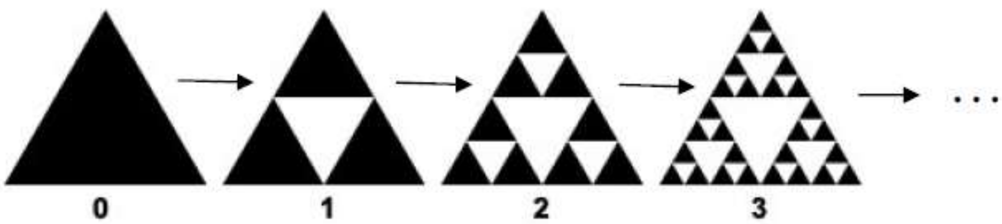
A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

B. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$.

C. $\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D. $\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$.

46. Serpenski uchburchagi geometrik takrorlanishlar natijasida hosil bo‘ladi. Dastlabki teng tomonli uchburchak va uning ichki qismi. Geometrik takrorlash qoidasi quyidagicha: Har tomoni muntazam uchburchakning yarmini tashkil etishi uchun dastlabki uchburchak har bir tomonining o‘rta nuqtalaridan hosil bo‘lgan uchburchakni olib tashlang. n-geometrik iteratsiyadan keyin olib tashlangan uchburchaklar soni:



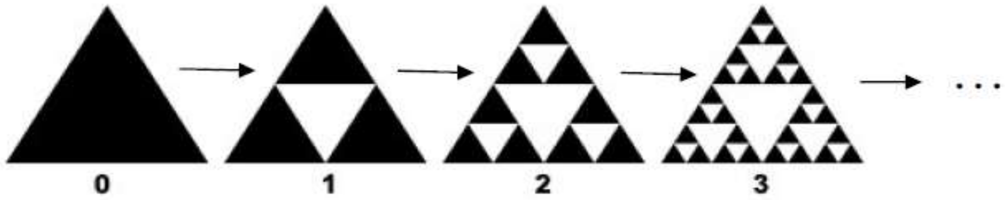
A. $\frac{3^{n+1}-1}{2}$.

B. $\frac{3^{n}}{2}$.

C. $\frac{3^{n-1}-1}{2}$.

D. $\frac{3^{n}-1}{2}$.

47. Serpenski uchburchagida geometrik takrorlanishlarning birinchi qadamidan keyin olib tashlangan uchburchakning yuzasi x bo‘lsa, 10-geometrik iteratsiyadan keyin olib tashlangan uchburchaklarning umumiy



yuzasi uchun algebraik ifodani yozing:

A. $4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\right]x$.

C. $\left[4-\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\right]x$.

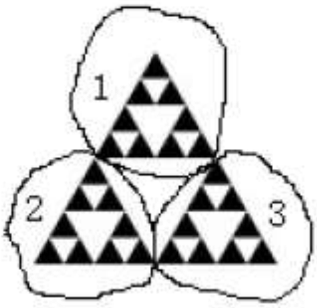
B. $4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right]x$.

D. $\left[4-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right]x$.

48. Agar geometrik iteratsiyaning birinchi bosqichidan keyin birinchi olib tashlangan uchburchakning maydoni 1 ga teng bo‘lsa, geometrik iteratsiya cheksizlikka o‘tganda olib tashlangan uchburchaklarning umumiy maydonini toping:

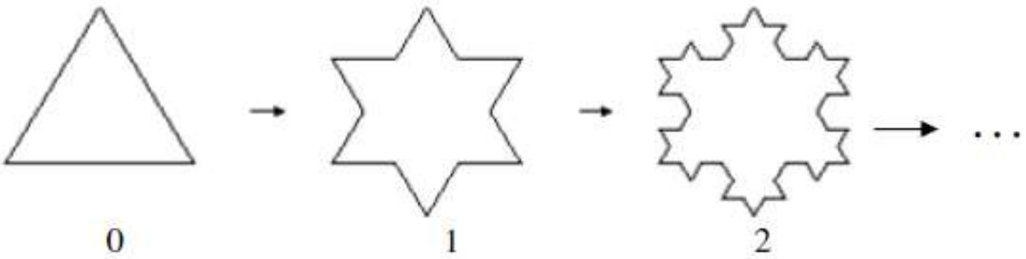
A. Cheksiz.
B. 3.75.
C. 3.9.
D. 4.

49. Quyidagi Sierpinski uchburchagini uchta aylana bo‘lakka bo‘lish mumkin. Butun rasmni olish uchun ushbu uchta bo‘lakning kattalash faktorini toping:



A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

50. Quyida Kox qor parchasi fraktalini hosil qilish jarayoni keltirilgan. Dastlabki shakl teng tomonli uchburchakdir, uning tomonlari uzunligi 1 ga teng. Geometrik takrorlash qoidasi: uchburchakning har bir tomoniga 1/3 uzunlikdagi yangi teng tomonli uchburchak qo‘shing va o‘rtasining 1/3 qismini olib tashlang. Cheksiz geometrik takrorlanishdan



keyin figuraning perimetri qancha?

A. 4. B. $\frac{64}{3}$. C. $\frac{4^{2n-1}}{3^{n-1}}$. D. Cheksiz.

JAVOBLAR

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**D**	**C**	**C**	**B**	**D**	**A**	**A**	**C**	**D**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**B**	**A**	**B**	**D**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	**A**	**B**	**D**	**C**	**B**	**A**	**C**	**A**	**D**
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A	**D**	**D**	**A**	**A**	**A**	**D**	**D**	**C**	**C**
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	**B**	**C**	**B**	**C**	**D**	**D**	**D**	**D**	**D**

GLOSSARIY

Fraktal – bu geometrik shakl bo‘lib, aniq bir qismi o‘lchamlari o‘zgargan holda qayta-qayta takrorlanishidir.

Fraktal so‘zi lotincha “fractus” so‘zidan olingan bo‘lib, “bo‘laklangan”, “qismlardan tashkil topgan” degan ma’noni anglatadi va u “fraction, fractional” (bo‘luv, bo‘linma) terminlaridan kelib chiqqan.

Fraktal – bu geometrik fraktal bo‘lib, qismlardan tashkil topgan hamda ularning har biri butun fraktalning nusxasini kichiklashtirgan holatini ifodalaydi.

Fraktal – aniq bir qism o‘lchamini o‘zgartirgan holda qayta va qayta takrorlovchi geometrik shakldir.

Fraktal – qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishdir.

Fraktal – bu singan fazoviy shakl, tekis yoki notekis, xaotik yoki botartib va o‘zida-o‘zini turli mashstabda takrorlaydigan murakkab tuzilish hisoblanadi.

Fraktal masshtabiga bog‘liq bo‘lmagan tasvirlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishlaridir.

Fraktal – Xausdorf o‘lchami topologik o‘lchamidan qat’iy katta bo‘lgan to‘plam.

Fraktal – nobutun o‘lchamli, o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plamlar va cheksiz o‘ziga-o‘zi o‘xshash shakllardir, o‘lchami kasriy to‘plamdir. Bunday ta’riflardan yana bir nechtasini keltirish mumkin.

Fraktallarning matematik ta’rifi. Fraktallar cheksiz rekursiv jarayonlar natijasida ifodalangan funksional yoki hosil bo‘luvchi to‘plam va quyidagi xususiyatlarga ega:

– o‘ziga-o‘zi o‘xshash yoki masshtabning invariantligi (cheksiz skeyling), ya’ni kichik masshtabda va o‘rta masshtabda xuddi katta masshtabdagi kabi ko‘rinadi;

– kasrli o‘lchami (Xausdorf o‘lchami) topologik o‘lchamidan qat’iy katta;

– differensiallanmaydi va kasrli ko‘paytmalar hamda integrallarda aniqlashtiriladi.

Fraktallarning fizik ta’rifi. Fraktallar – kuchli qirqilgan tuzilishni ifodalovchi hamda chegaralangan masshtabda o‘ziga-o‘zi o‘xshash xususiyatini egallovchi geometrik obyektlar (chiziq, sirt, jism)dir.

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik. Eng oddiy holatda fraktallarning katta bo‘lmagan qismi ular haqidagi barcha axborotlarni o‘zida saqlaydi.

Kasriylik. Fraktallarning kasriyligi fraktallar noto‘g‘riligining o‘lchamini matematik ifodalash deyiladi.

Nomuntazamlik. Agar fraktal funksiya ta’riflangan bo‘lsa matematika terminlarida nomuntazam funksiya hech bir nuqtada tekis emas va differensiallanmaydi.

Fraktal o‘lchov tushunchasi. B.Mandelbrot butun bo‘lmagan o‘lchov 2.76 ni fraktal o‘lchov deb nomladi.

dim topologik o‘lchovi. Agar har bir $x \in X\,(\forall x \in X)$ nuqta U_i to‘plamlarning hech bo‘lmaganda birortasiga tegishli ya’ni $\forall x \in X\ \exists U_i \in \{U_i\} | x \in U_i$ bo‘lsa, X topologik fazo $\{U_i\}$ qism to‘plamlar tizimining qobig‘i deyiladi.

d_H Xausdorf o‘lchovi (yoki fraktal o‘lchov). Ma’lumki nuqtaning o‘lchovi “0” ga, kesma, aylana, umuman olganda tekislikdagi yoki fazodagi ixtiyoriy egri chiziqning o ‘lchovi “1” ga, doira, sferaning o‘lchovi “2” ga, jismlarning o‘lchovi esa “3” ga tengdir. Barcha keltirilgan misollarda o‘lchov qaralayotgan obyektda nuqtani belgilash zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soniga tengdir.

d_M ***Minkovskiy o‘lchovi***. Minkovskiy o‘lchovi, Xausdorf-Bezikovich o‘lchovi bilan o‘xshash va amaliy masalalarni yechishda juda qulay hisoblanadi.

Geometrik fraktallar – bu turdagi Kox triad egri chizig‘i, Levi egri chizig‘i, Gilbert egri chizig‘i, Xartera-Xeytueya ajdari nomli siniq chiziqlar, Kontor to‘plami, Serpin uchburchagi, Serpin gilami, Pifagor daraxti va hokazo kabi fraktallar guruhi eng ko‘rgazmali hisoblanadi.

Odatda bu turdagi fraktallarni qurish uchun ma’lum ***“kesma–aksioma–bo‘laklar yig‘indisi”*** kabi qoida o‘rinli.

Algebraik fraktallar – fraktallarning yana bir katta guruhidir. Ular o‘z nomlariga oddiy algebraik formulalarga asosan qurilgani uchun ega bo‘lgan. Ularni nochiziq jarayonlar yordami bilan n-o‘lchovli fazolarda hosil qilinadi. Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha barqaror holatlarni o‘zida mujassamlashtiradi. Bulardan bittasi, bir necha takrorlashlar sonidan keyin boshlang‘ich shartga bog‘liq bo‘lib qoladi.

Stoxastik fraktallar – eng taniqli fraktallar guruhi hisoblanadi. Ular iteratsion jarayonda to‘satdan birorta parametrni o‘zgartirishi holatidan paydo bo‘ladi. “Stoxostik” termini grek so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, “faraz” (tasavvur)ni anglatadi.

Qo‘l-ijodiy fraktallar – olimlar tomonidan o‘ylab topilgan va ixtiyoriy masshtabda fraktallar xususiyatlarini o‘zida namoyon etadigan fraktallar.

Tabiiy fraktallar – mavjudlik sohasida chegaraga ega fraktallar.

Multifraktal – bu fraktalning umumlashtirilishi, uning tavsifi uchun bitta o‘lchov yetarli emas. Buning o‘rniga o‘lchovlar spektri talab qilinadi.

Fraktal grafikalar – bu kompyuter grafikalarining bir turi. Fraktal grafikaning matematik asosini fraktal geometriya tashkil etadi. Tasvirlarni qurish usuli meros qilib olingan obyektlarning geometrik xususiyatlarini “ota-onalar” deb ataladigan meros prinsipiga asoslanadi.

Fraktal o‘lchov – bu metrik fazodagi to‘plam hajmini aniqlash usullaridan biridir.

Paskal uchburchagi – uchburchak shakliga ega bo‘lgan binomial koeffitsientlarning cheksiz jadvali. Ushbu uchburchakda tepada va yon tomonlarda “1” raqamlari joylashgan. Har bir raqam yuqoridagi ikkita raqamning yig‘indisiga teng.

Serpin uchburchagi – fraktal, Kantor to‘plamining ikki o‘lchovli analoglaridan biri, uning matematik tavsifi 1915-yilda polshalik matematik Vatslav Serpinski tomonidan nashr etilgan. ***Serpin salfetkasi*** deb ham ataladi.

Kox egri chizig'i – 1904-yilda shved matematigi Xelge fon Kox tomonidan tasvirlangan fraktal egri chiziq. Muntazam uchburchakning yon tomonlariga chizilgan Kox egri chizig'ining uchta nusxasi (tashqi tomonga qarab) cheksiz uzunlikdagi yopiq egri chiziqni hosil qiladi, bu Kox qor parchasi deb nomlanadi.

Gosper egri chizig'i – yoki kashfiyotchi Bill Gosper nomidagi Peano-Gosper egri chizig'i bo'shliqni to'ldiruvchi egri chiziqdir. Bu ajdaho va Gilbert egri chiziqlariga o'xshash fraktal egri chiziq.

Gilbert egri chizig'i – bu birinchi bo'lib nemis matematigi Devid Xilbert tomonidan 1891-yilda bo'shliqni to'ldiruvchi Peano egri chiziqlarining bir varianti sifatida ta'riflagan uzluksiz fraktal bo'shliqni to'ldirish egri chizig'i.

Nyuton havzalari – Nyuton fraktallari algebraik fraktallarning bir turi. Fraktal chegaralari bo'lgan maydonlar chiziqli bo'lmagan tenglamaning ildizlari taxminan Nyuton algoritmi bilan kompleks tekislikda topilganda paydo bo'ladi.

Menger gubkasi – Serpin gilamining uch o'lchovli analoglaridan biri bo'lgan geometrik fraktal. Kub qirrasi 1 bilan qirralariga parallel tekisliklar tomonidan 27 ta teng kubga bo'linadi. Markaziy kub va unga bo'linadigan ushbu bo'linmaning barcha kublari ikki o'lchovli yuzlarda olib tashlanadi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

Asosiy

1. Bondarenko B.A. Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their Fraktals, Graphs, and Applications – USA, Santa Clara: Fibonacci Associations, The Third Edition. – 2010. –296 p.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. –М.: Институт компьютерных исследований, 2002. –656 с.
3. Потапов А.А., Гилмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Системные принципы и элементная база фрактальной радиоэлектроники. Этап, становление и состояние // Радиотехника и электроника, 2008. Том 53, №9. –С.1033-1080.
4. Перерва Л.М., Юдин В.В. Фрактальное моделирование. Учебное пособие. Под общ. ред. В.Н.Гряника. –Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. –186 с.
5. Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М. Фракталлар назарияси асослари. Монография. –Т.: “Навруз” нашриёти, 2017. 128б.
6. Анарова Ш.А., Тешабаев Т.З., Руралиев Ф.М., Абдикаримов С.С. Построение уравнений квадрата спиралеобразных фракталов. Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Tashkent, 2019. № 1(7). –С.121-124.
7. Anarova Sh.A. Nuraliyev F.M., Narzulloyev O.M. Construction of the equation of fraktals structure based on the Rvachev R-functions theories. III International scientific conference “Mechanical Science and Technology Update”. Omsk, Russia - 2019. http://conf.ict.nsc.ru/MSTU-2019
8. Потапов А.А. Теория фракталов: топология выборки. –М.: Университетская книга, 2005. –868 с.
9. Falconer Kenneth. Fraktal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 2014 John Wiley & Sons, Ltd. –400 p.

Qo‘shimcha:

10. Gerald Elgar. Measure, Topology, and Fraktal geometry. Second Edition. Springer Science+Business Media, LLC. 2008. –272 p.

11. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. / Отв. ред. Ю.Б.Башкуев. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. –224 с.

12. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике // Computerworld-Россия. 1995. №15. –С.11.

13. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств // Соросовский образовательный журнал. –Москва, 1998. №1, С.122-127.

14. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Москва: Постмаркет, 2000. –352 с.

15. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. –160 с

16. Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. –М.: Физматлит, 2008. 496 с. (монография по гранту РФФИ № 07-07-07005).

17. Ричард М.Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. –М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000. –350с.

18. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие. –М.: Издательство Триумф, 2003. –320 с

19. Кравченко В.Ф., Басариб М.А. Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R-функций. Москва:. ЖТФ, 2003, том 29, в ип.№24. –С.89-94.

20. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Применение метода R-функций в фракталной геометрии // В сб. Вопросы вычислителной и прикладной математики. Ташкент. 2012, вып 127. –С.51-61.

21. Назиров Ш.А., Эржонов М.О., Ташмухамедова Г.Х. Методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии // В сб.

Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2014, вып 130. –С.11-38.

22. Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Алгебрологический метод построения объектов фрактальной геометрии. // Вестник ТУИТ Ташкент, 2014, №1. –С.21-31.

23. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Построение и уравнение детерминированных фракталов // Узб. журнал Проблемы информатики и энергетики. 2014 №1-2. –С.57-65.

24. Назиров Ш.А., Рахманов Қ.С., Эржонов М.О., Юлдашев М.О. Айланалардан иборат фракталларнинг тенгламаларини қуриш // ТАТУ хабарлари журнали. 2014 №4, 98-110 б.

25. Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции как аппарат в приложениях фрактальной геометрии. Прикладная информатика. 2010, №6 (30). –С.20-27.

26. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R-функции в математическом моделирование геометрических объектов в 3D по информации в 2Д // Вестник Запорожский Национальный университет. 2010, №1. –С.98-104.

27. Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математическое моделирование геометрических фракталов с помощю R-функций // Кибернетика и системный анализ. 2012, №4. –С.155-162.

28. Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М., Қаюмова Г.А., Курбанов З.М. Геометрик шакллардан иборат фракталларни қуришнинг математик ва дастурий таъминоти // ТАТУ хабарлари журнали. 2017 №4(44). –Б.48-62.

29. Анарова Ш.А., Усмонов А.И., Хасанова М.А. Фракталларни қуриш усуллари ва истиқболлари // “Математик моделлаштириш, алгоритмлаш ва дастурлашнинг долзарб муаммолари” Республика конференцияси материаллари. Тошкент, 2018. 17-18 сентябр, 341-345б.

30. Анарова Ш.А., Хасанова М.А. Построение уравнения деревовидных фракталов на основе метода R-функций // Тезис и

доклады Республиканской научно-практической конференции с участием зарубежных женщин-ученых “Актуалные проблемы математики и механики – CAWMA-2018”, Хива, 2018, 25-26 октября. –С.14-15.

31. Анарова Ш.А., Эшқораева Н.Г., Хайдарова Л.Ў., Султонов Д.У. Юлдузсимон фракталларни қуришнинг геометрик моделлари ва алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2016 №1(37). –С.40-44.

32. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А., Султонов Д.У. Айланалардан ва тўртбурчаклардан иборат фракталларни қуришнинг рекурсив алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2015 №4(36). –С.82-88.

33. Анарова Ш.А., Рустамова М.Я., Умарова Г.Э. Фракталлар ва уларни қуриш технологиялари // Ҳисоблаш ва амалий математика масалалари илмий изланишлар тўплами. 2014 №131, 103-112 б.

34. Анарова Ш.А., Мулламуҳамедова М.А. Айланалардан иборат фракталларни қуриш алгоритми // Материалы международной научной конференции “Радиоэлектроника, информационные и телекоммуникационные технологии: проблемы и развитие”. Ташкент, 21-22 мая 2015. –С.187-189.

35. Anarova Sh.A., Narzulloyev O.M., Ibrohimova Z.E. Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlari va jakkard gazlamalarida qo‘llash // Muhammad al-Xorazmiy avlodlari ilmiy-amaliy va axborot tahliliy jurnal. Тошкент, 2020. № 1(13). –С.132-137.

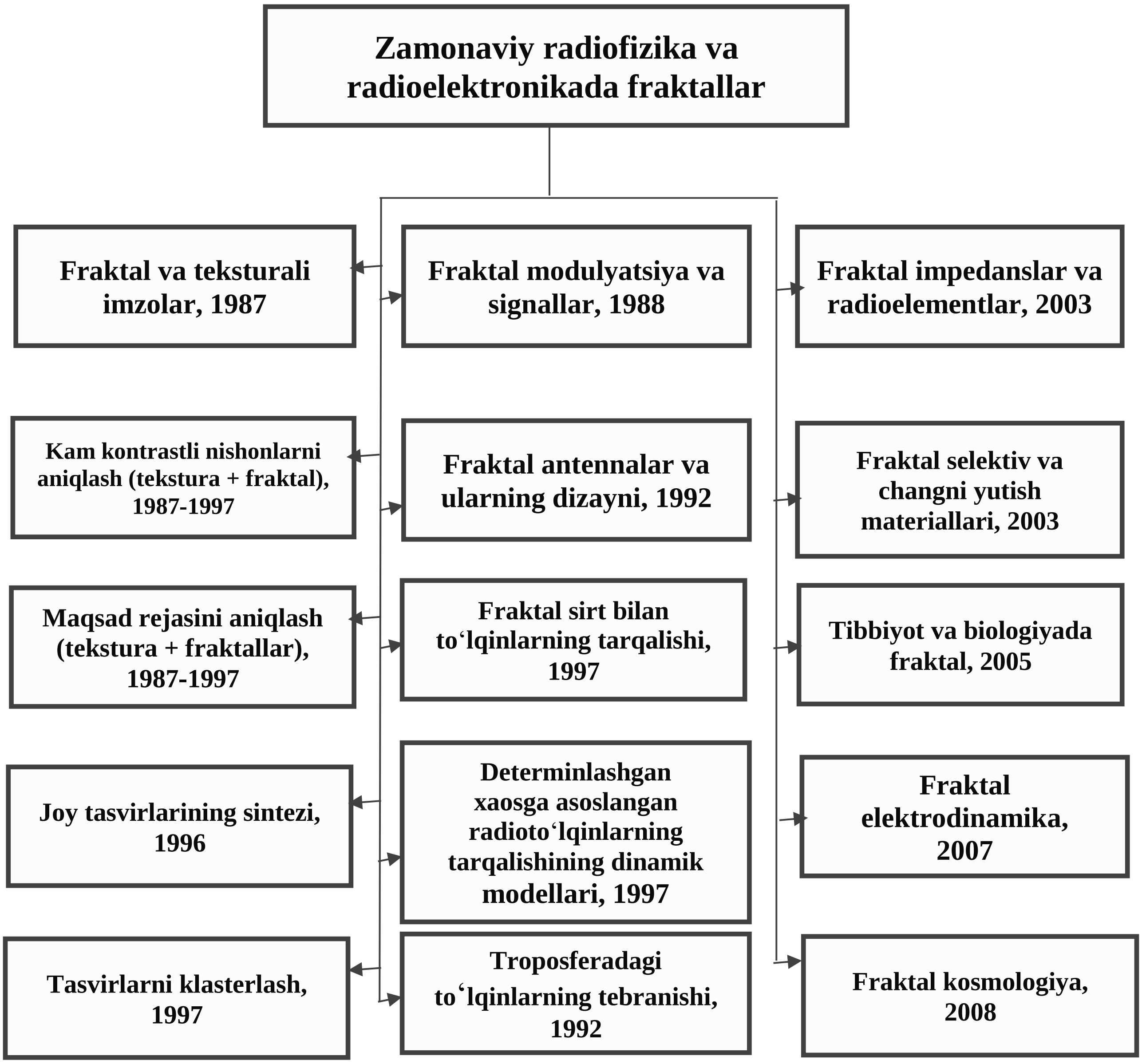
36. Anarova Sh.A., Narzulloyev O.M., Ibragimova Z.E. Development of Fraktal Equations of National Design Patterns based on the Method of R-Function. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE) ISSN: 2278-3075, Volume-9, Issue-4, February 2020. –P.134-147.

Internet saytlari

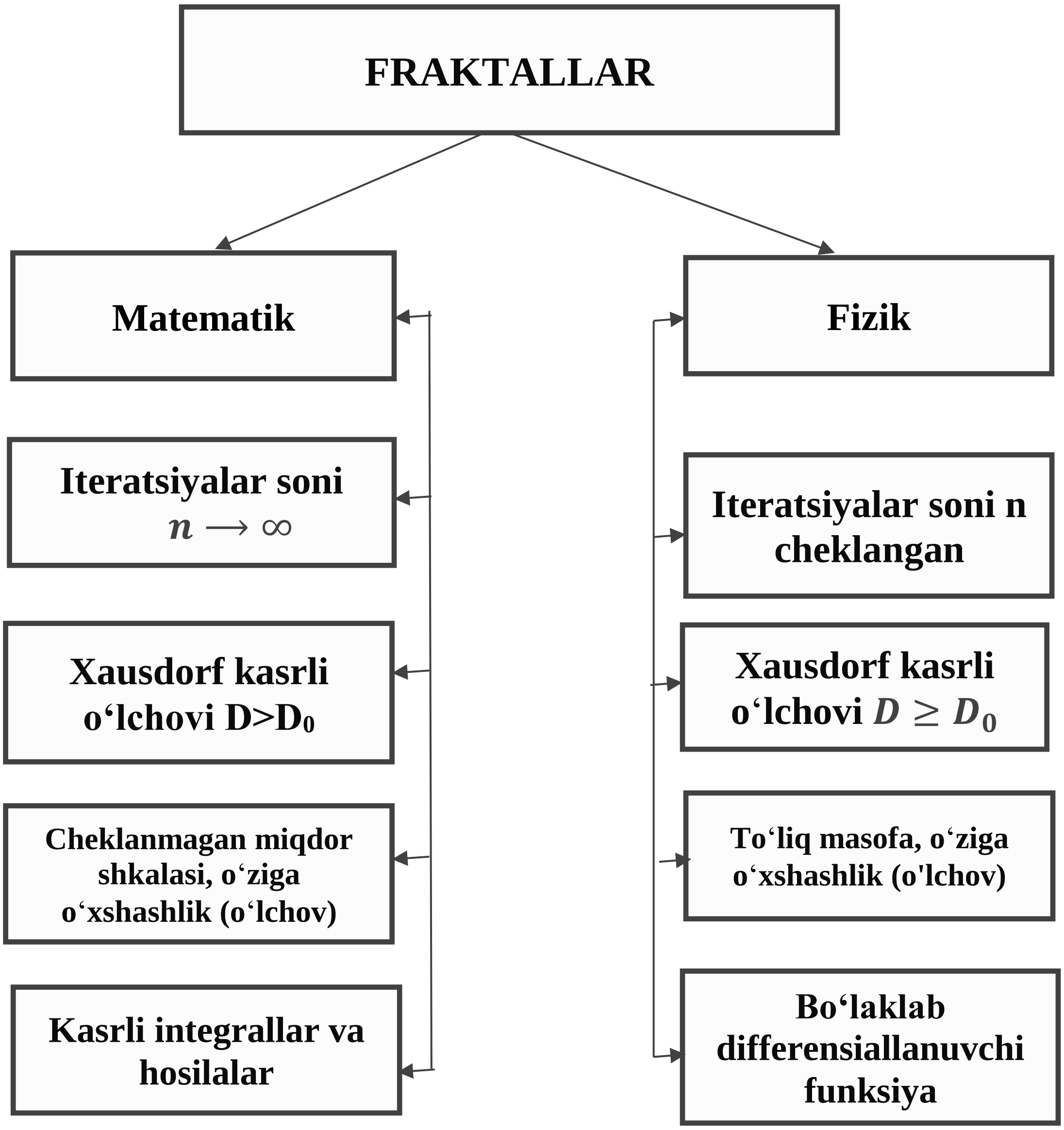
1. https://docplayer.ru/27299766-Fraktalnoe-modelirovanie.html
2. https://sibac.info/shcoolconf/natur/v/31852
3. https://novainfo.ru/article/3956
4. https://cyberleninka.ru/article/v/modelirovanie-fraktalov
5. http://fraktals.nsu.ru;
6. http://fraktals.ucoz.ru;
7. http://robots.ural.net/fraktals/;
8. https://knife.media/fraktal

ILOVALAR

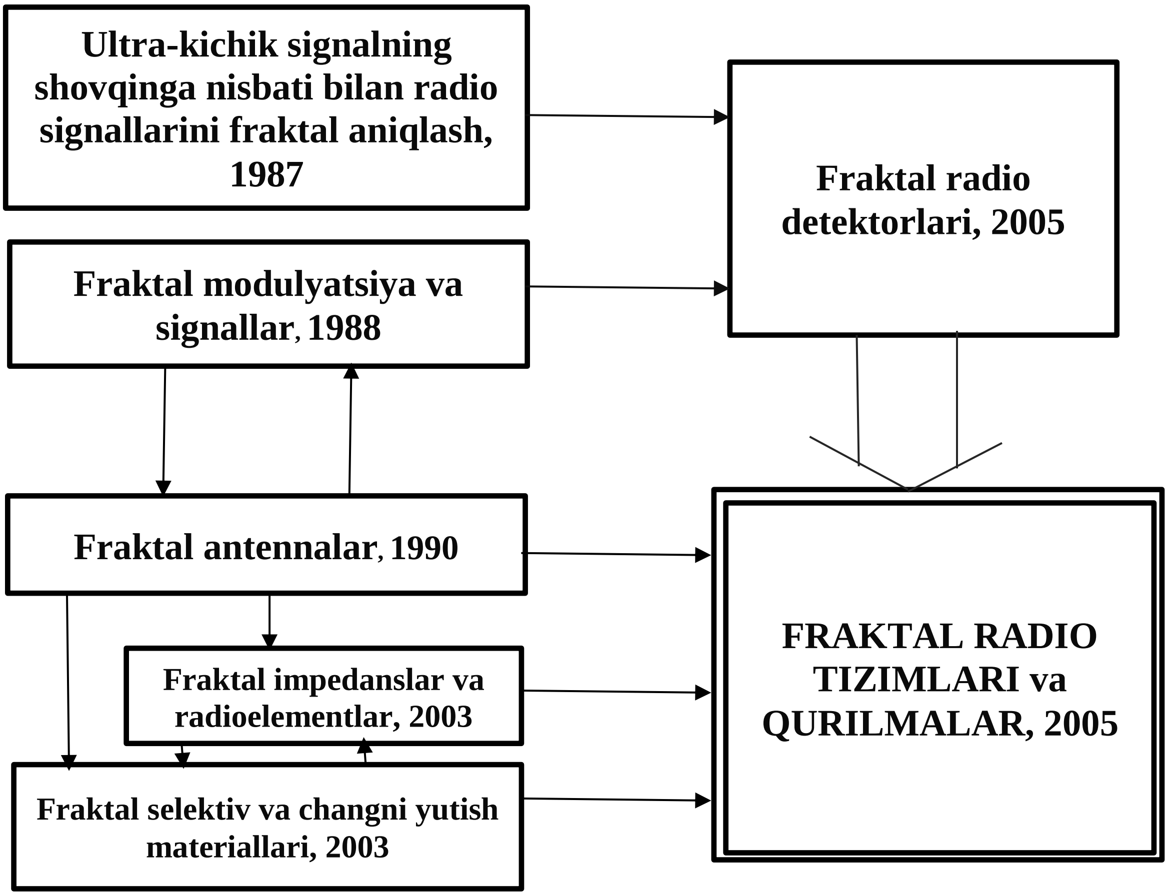
Fraktallarning turlari sxemalari



Rossiya Fanlar Akademiyasining V.A.Kotelnikov nomidagi radiotexnika va elektronika institutining radiofizika va elektronikada yangi tadqiqot usullari (muallif va rahbar A.A.Potapov).



Past kontrastli tasvirlarni va super kuchsiz signallarni qayta ishlash uchun tekstura va fraktal usullarni amalga oshirishning asosiy bosqichlari (A.A.Potapov va shogirdlari).



Rossiya Fanlar Akademiyasining B.A.Kotelnikov nomidagi radio-texnika va elektronika institutida ishlab chiqilgan fraktal radio tizimlari va qurilmalari haqida konsepsiya (muallif A.A.Potapov).

M U N D A R I J A

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

BELGILAR UCHUN

SH.A.ANAROVA

FRAKTALLAR NAZARIYASI VA FRAKTAL GRAFIKA

DARSLIK

Toshkent – “Universitet” – 2021

Muharrir Z.N.Buranov

Bosishga ruxsat etildi 24.11.2021y. Bichimi 60X84 $^1/_{16}$.
Bosma tabog‘i 15,875. Shartli bosma tabog‘i 15,875. Adadi 50 nusxa.
Bahosi kelishilgan narxda.
“Universitet” nashriyoti. Toshkent, Talabalar shaharchasi,
O‘zMU ma’muriy binosi.
“PROFESSIONAL SOLUTION” MChJ bosmaxonasida bosildi.
Toshkent, Chilonzor tumani, Turob To‘la ko‘chasi, 55.
Tel.: 71 245-35-55, 95 195-11-22, 99 002-11-22.