FRAKTAL MODELLSHTIRISH

monografiya

SH.A.ANAROVA

Toshkent-2022

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT
AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

SH.A. ANAROVA

FRAKTAL MODELLSHTIRISH

Toshkent – 2022

UO‘K: 004.92
KBK: 32.973
A 63

Ma’sul muharrir:

Ravshanov N. – t.f.d., professor Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot institute ilmiy ishlar bo‘yicha direktor o‘rinbosari

Taqrizchilar:

З.Р.Рахмонов – f.-m.f.d., O‘zbekiston Milliy Universiteti dotsenti

Nazirova E.SH. – t.f.d., dotsent, “Multimediya texnologiyalar” kafedrasi mudiri, professor

Mazkur monografiya fraktal tuzilishli ob’ektlarni modellashtirishning muhim masalalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Monografiyada fraktallar nazariyasining paydo bo‘lish tarixi, fraktallarning asosiy tushunchalari batafsil bayon etilgan. Fraktal tuzilishli shaklllarni fraktal o‘lchovlarini hisoblash formulalari keltirilgan. Fraktal tuzilishli ob’ektlarni matematik modellari L-tizimlari, Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFS-Iterated Function Systems), algebro-mantiqiy usul hisoblangan R-funksiya usuli, arifmetik xususiyatli binomial bazis ko‘phadlar nazariyasiga asoslangan usul asosida qurilgan va rekursiv protseduralarga asosan algoritmlari ishlab chiqilgan.

Monografiya fraktal tuzilishli ob’ektlarni mustaqil o‘rganuvchilarga, talabalarga, magistrlarga, ilmiy xodimlarga, tayanch doktorantlarga va doktorantlarga mo‘ljallangan.

ISBN: 978-9943-9439-1-3

MUNDARIJA bet.

KIRISH

“Nima uchun ko‘pchilik geometriya fanini sovuq va quriq deb hisoblaydi? Buning asosiy sabablaridan biri, uning bulutlar, tog‘lar, daraxtlar yoki dengiz qirg‘og‘ining shaklini tushuntirib bera olmasligidir.

Bulut - bu shar emas, tog‘lar - bu konuslar emas, qirg‘oq chiziqlari esa - bu doiralar emas va po‘stloq silliq bo‘lmaydi yoxud chaqmoq to‘g‘ri chiziq bo‘ylab tarqalmaydi… Tabiat bizga nafaqat o‘zining juda yuksak darajasini, balki tamomila boshqacha murakkablik darajasini ko‘rsatadi. Tuzilishlardagi uzunliklarning turli miqyoslari soni doimo cheksizdir.

B. Mandelbrot

Fraktallar noyob ob’ektlar bo‘lib, xaotik dunyoning aytib bo‘lmaydigan darajadagi harakatlaridan paydo bo‘ladi. Ularni juda kichik bo‘lgan membrana hujayralaridan tortib, juda katta hisoblangan Quyosh tizimidan ham topish mumkin. Daraxtlarning barglari, inson organizmlarining tuzilishlari, daryolarning, dengizlarning, okeanlarning qirg‘oqlari, qimmatbaho qog‘ozlarning bozorini bashorat qilish - bularning hammasi fraktallardir. Qadimgi zamon taraqqiyoti vakillaridan to hozirgi kunning taraqqiyoti vakillari, olimlar, matematiklar va ijodkorlar, shuningdek yer yuzida yashovchi odamlar fraktallar bilan hayratlangan hamda ulardan o‘zlarining ishlarida foydalangan. Shuningdek, dasturchilar va kompyuter texnikasi sohasidagi mutaxassislar fraktallardan cheksiz murakkablikdagi go‘zalliklarni oddiy formulalar orqali EHMlarning dasturiy imkoniyatlaridan foydalanib qurishlari mumkinligini ta’kidlaydilar.

Fraktallarning ixtiro etilishi fan va matematikada, san’atdagi yangi estetikaning ochilishi hisoblanadi, shuningdek, insonning olamni idrok qilishdagi kashfiyotdir.

“Fraktal” so‘zi bu biz yashab turgan kunda ko‘pchilik insonlar, fiziklardan tortib maktab o‘quvchisigacha gap yuritadigan tushunchadir. U ko‘plab darsliklar va ilmiy jurnallar muqovalarida hamda kompyuterlarning dasturiy ta’minoti qutilarida paydo bo‘ldi. Bugun fraktallarning rangli suratini hamma joyda uchratish mumkin: tabriknomalardan tortib liboslardagi naqshlargacha. Oddiygina tilda aytish mumkin: *Fraktal - bu geometrik shakl bo'lib, aniq bir qismi o'lchamlari o'zgargan holda qayta-qayta takrorlanishidir*.

Bu yerdan o'ziga - o'zi o'xshashlik xususiyati kelib chiqadi. Fraktallar o'ziga - o'zi o'xshashdir, ular barcha darajalarda o'xshashdir. Biroq fraktallar - murakkab shakllar bo'lib qolmay, balki kompyuterlarda bo'g'imlarga bo'lingan. Xulosa shuki, tasodifiy va tartibsiz harakatlar fraktallardir. Nazariy tomondan mavjud olamdagi barcha narsalar, bulutlarmi yoki kichkina kislorod molekulasi bularning hammasi fraktallardir.

Fraktallar xaos so'zi bilan doimo aloqadadir. Fraktallarni xaosning qismi sifatida aniqlash maqsadga muvofiqdir. Fraktallar tartibsiz va tasodifiy bo'lishi bilan xaotik hatti-harakatlarni namoyon etadi. Agar juda yaqindan qaralsa fraktalning ichida juda ko'p o'ziga-o'zi o'xshashlik tomonlarni ko'rish mumkin.

Xaos so'zi ko'pchilik odamlarning xayoliga tartibsiz va so'z bilan ifodalab bo'lmaydigan narsalarni olib keladi. Aslida bunday emas. Demak, xaos qanchalik xaotik? Javob shunday, haqiqatda xaos nima yetarlicha tartiblangan va aniq qonuniyatga amal qiladi. Muammo shundaki, bu qonunlarni qidirib topmoq juda murakkab. Xaos va fraktallarni o'rganishdan maqsad - aytib bo'lmaydigan va xaotik tizimdagi qonuniyatlarni bashorat qilishdir.

Xaologlar bulutli tasvirlarni, ob-havoni, suv oqimini, hayvonlarning ko'chishini, shuningdek, ona tabiat hayotidan ko'plab aspektlarni o'rganishni yoqtirishadi. Tizim - bu buyumlar to'plami, yoki o'rganish sohasi. Shunday qilib, bizni o'rab turgan dunyo fraktallardan iboratdir.

Ko'plab xaologlar uchun xaos va fraktallarni o'rganish dunyoni bilishni yangi sohasi bo'lib qolmay, matematiklar, nazariy fiziklar, san'at va kompyuter texnologiya sohasidagi mutaxassislarni birlashtiruvchi inqilobdir. Bu kashfiyot nafaqat darsliklarda ko'radigan, balki tabiatda hamda cheksiz olamda bizni o'rab turgan borliqni ifodalab beruvchi geometriyaning yangi turidir.

Bu sohani o'rganuvchilar fraktallar nazariyasining otasi deb Amerika matematigi professor Benua B.Mandelbrot (Fransiyada tavallud topgan) deb hisoblaydilar. 1960 - yillarning oxirlarida Mandelbrot ishlagan ilmiy faoliyatini "*Fraktal geometriya*" yoki "*Tabiat geometriyasi*" deb ataydi (bu haqida U o'zining "Tabiatning fraktal geometriyasi" - "The fractal geometry of nature"nomli asarida yozadi).

Fraktal geometriyaning maqsadi – sindirilgan, burishgan va noravshan shakllarni tahlil qilishdan iborat. Mandelbrot parchalangan va qismlardan tashkil topgan bu shakllar uchun fraktal soʻzidan foydalangan.

Mandelbrot boshqa olimlar Klifford A.Pikkover (Clifford A.Pickover), Djeyms Gleyk (James Gleick) yoki G.O.Peytgen (H.O.Peitgen) fraktal geometriyaning sohasini kengaytirishga harakat qiladilar, ya’ni butun dunyoda ularni amaliy qoʻllashga, bozordagi qimmatli qogʻozlarni narxlarini bashorat qilishdan tortib nazariy fizikaning yangi kashfiyotlarini bajarishgacha.

Respublikamizda fraktallar nazariyasini rivojlantirish boʻyicha f.-m.f.d., akademik Boris Anisomovich Bondarenkoning ishlarini keltirish mumkin. Boris Anisomovich Bondarenko arifmetik xususiyatli binomial koʻphadlar nazariyasiga asosan umumlashgan “Paskal uchburchaklari” va “Paskal piramidalari”ni, ularning fraktallarining tenglamalarini ishlab chiqqan.

Fraktallar fanda koʻpdan - koʻp qoʻllanilmoqda. Buning asosiy sababi u mavjud borliqni an’anaviy fizika yoki matematikaga nisbatan juda aniq bayon etadi. Bir necha misol keltiramiz: kompyuter grafikasi, kompyuter tizimlari, telekommunikatsiya, radiotexnika, kino, suyuqlik mexanikasi, sirtlar fizikasi, astronomiya, tibbiyot, biologiya, musiqa, kriptografiya, toʻqimachilik va yengil sanoat, san’at sohasi va boshqalarda. Ushbu sohalarda hozirgi vaqtda radiotexnikada antennalarni loyihalashda, telekommunikatsiyada signallarni qayta ishlashda, kino hamda televideniyada maxsus effektlar va vizualizatsiya elementlari sifatida, axborot xavfsizligi kriptografiyada, yengil sanoatda gazlama va gilamlarga zamonaviy dizaynlar uchun naqshlar chizishda va h.k.

Monografiya 5 ta bobdan iborat boʻlib, birinchi bobida fraktallar nazariyasining asosiy tushunchalari: fraktallarning paydo boʻlish tarixi, fraktallarning ta’riflari, fraktallarning oʻziga xos asosiy xususiyatlari, fraktallarning turlari, fraktallarning qoʻllanish sohalari oʻrganilgan. Shuningdek, fraktallarga doir boʻlgan umumiy tushunchalar bayon etilgan.

Monografiyaning ikkinchi bobida fraktallarning qoʻllanish sohalari oʻrganilgan. Sohalardagi fraktal tuzilishlarning ahamiyati haqidagi tushunchalar batafsil bayon etilgan.

Monografiyaning uchinchi bobi fraktallar qurish usullarini oʻrganishga bagʻishlangan. Fraktallarning tenglamalarini qurish uchun bir necha usullardan foydalaniladi, bular IFS (Itered function systems-Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT)) usuli, L-tizimlar usuli, arifmetik xususiyatli binomial bazis ko‘phadlar nazariyasiga asoslangan usul, R-funksiya (Rvachev funksiyasi) usuli, to‘plamlar nazariyasi usuli va boshqalar. Bu usullardan foydalanib qurilgan tenglamalarning natijalari rasmlarda keltirilgan.

Monografiyaning to‘rtinchi bobi geometriyaning asosiy tushunchalaridan foydalangan holda yangi turdagi fraktallar qurish uchun geometrik modellar va rekursiv algoritmlar ishlab chiqishga bag‘ishlangan. Rekursiyaning turli qiymatlarida olingan natijalarning rasmlari keltirilgan.

Monofrafiyaning beshinchi bobi fraktal hisob-kitoblar, ularning tadbiqlari va istiqboldagi roli haqidagi tushunchalarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Suningdek, fraktal-veyvlet yordamida tibbiy tasvirlarni raqamli ishlash misollarda o‘rganilgan.

I BOB. FRAKTALLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Monografiyaning ushbu bobi fraktallar nazariyasining asosiy tushunchalarini o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, fraktallarning paydo bo‘lish tarixi, fraktallarning ta’riflari, fraktallarning o‘ziga xos asosiy xususiyatlari hamda fraktallarga doir bo‘lgan umumiy tushunchalar batafsil o‘rganiladi.

1.1. Masalaning qo‘yilishi

Fraktallar haqidagi fan matematikaning alohida sohasi sifatida 20 asrning 70 - yillaridan shakllana boshladi. Fraktallarni o‘rganishga qiziqishning paydo bo‘lishi abstrakt va tabiiy fanlarlarning maqsadlarini bir - biri bilan aloqada bo‘lishi uchun xizmat qiladi. Bu jarayonning boshlanishi deb B.Mandelbrotning 1977 - yilda nashrdan chiqqan “Tabiatning fraktal geometriyasi” (Mandelbrot B.B. “The fractal geometry of nature”) nomli kitobini keltirish mumkin. Bu kitob o‘zida ko‘p sonli miqdordagi turli xil fraktallar tasvirlarining to‘plamlarini saqlaydi va tabiatda fraktal ob’ektlarni mavjudligining isbotlari mavjud.

Bugungi kunda fraktallar nazariyasining matematik jihatlarini tadqiqi, shuningdek tabiiy jarayonlar va hodisalarni fraktallar nazariyasi g‘oyalaridan foydalanib tavsiflash usullari - fanning mustaqil yangi sohasidir. Hozirgi kunda u shu qadar kengayib ketdiki u bir necha tor ixtisosliklar sohalariga bo‘lib o‘rganilmoqda. Fraktallar nazariyasi fanlarni bog‘lovchi bo‘lib ulgurdi. Tabiatning fraktal geometriyasiga xizmat qiluvchi jarayonlarni o‘rganishga qiziqish fizikada, matematikada, biologiyada, materialshunoslikda va boshqa fanlarda yangi ilmiy yo‘nalishlarni paydo bo‘lishiga olib keldi. Turli xil ilmiy yo‘nalishlarning yagona strukturaga asosan yondoshishi tasodifiy emas, balki fraktalli tuzilish xususiyatlarining natijasi hisoblanadi.

Hozirga qadar tabiat butun o‘lchov birliklar asosida o‘rganilmoqda. Ya’ni sirti yassi yoki sirtning egilishi ma’lum bir matematik qonuniyatni ifodalasa, bunday sirt yoki ob’yektni tadqiq qilish mumkun bo‘ladi. Lekin Yevklid geometriyasi yordamida aniqlash mumkin bo‘lgan ob’yektlardan tashqari boshqa turdagi murakkab ob’yektlarni ham aniqlash mumkin. Masalan, tog‘lar, ulardagi murakkab tuzilishga ega bo‘lgan cho‘qqilar, bulutlar, sharsharalar, daraxtlar, daryo yoki dengiz qirg‘oqlari va boshqa ko‘plab ob’yektlarning tuzilishi qonuniyatini ifodalovchi formulalar mavjud emas. Ayniqsa, bunday ob'yektlarning o'lchovi haqida biror bir fikrni aytish ham qiyin. Topologiyada butun o'lchovlarga ega bo'lgan ob'yektlar bilan ish ko'riladi. Ammo yuqorida sanab o'tilgan ob'yektlar kasr o'lchovli ob'yektlardir. Bunday ob'yektlarning o'lchovlari butun o'lchovlardan farqi shundaki, Yevklid geometriyasida nuqtaning o'lchovi , ixtiyoriy egri yoki to'g'ri chiziqning o'lchovi , sirtning o'lchovi , hajmga ega bo'lgan ob'yektning o'lchovi deb qaraladi. Bunda nuqta va ixtiyoriy chiziqning eni yo'q, ya'ni ular yuzaga ega emas. Lekin chiziqni yoki nuqtalarni zich joylashtirish natijasida biror sirtni to'ldirsa bo'ladi, o'sha sirt esa yuzaga ega hisoblanadi. Agar chiziq yoki nuqta yuzaga ega bo'lmasa, u holda bu yuza qayerdan paydo bo'ladi degan savol kelib chiqadi. Yoki ixtiyoriy yuzaga ega bo'lmagan ingichka ipdan to'qilgan gazlamani hajmga ega emas deb qaraladi. Shuning uchun uning o'lchami ga teng. Agar uni siqib biror idishga joylanganda u idish to'liq to'ldirilsa, bu gazlama endi yuzaga egami yoki hajmgami degan savol paydo bo'ladi. Agar hajmga ega bo'lsa, gazlamaning hajmi idishning hajmiga tengmi degan savollar kelib chiqadi. Albatta, gazlamaning hajmi idish hajmidan kichik, chunki gazlamani qanchalik optimal holda idishga joylansa ham bo'sh joylar qolishi mumkin. Demak, idishdagi gazlamaning o'lchami emas, ya'ni . Shu sababli butun o'lchovlar bilan birgalikda "kasr" o'lchovli ob'yektlar ham mavjud ekan degan xulosaga kelish mumkin.

Fraktal o'lchovning Yevklid o'lchovidan ya'na bir farqi Yevklid geometiriyasida nuqtaning o'lchovi hisobga olinmaydi. Fraktal o'lchovda esa uning o'lchovi bor deb hisoblanadi. Chunki nuqtalar to'plami qandaydir yuzani tashkil qilishi mumkin. Shu nuqta'i nazardan tadqiqot ishida fraktal tuzilishli tasvirlarni qurish, ularning o'lchovini aniqlash muhim sanaladi.

1.2. Fraktallarning paydo bo'lish tarixi, ta'riflari va ularning asosiy xususiyatlari

Fraktallarning tarixi. Fraktal so'zi lotincha «fractus» so'zidan olingan bo'lib, «bo'laklangan», «qismlardan tashkil topgan» degan ma'noni anglatadi va u «fraction, fractional» (bo'luv, bo'linma) terminlaridan kelib chiqqan. Manbalarda ta'kidlanishicha hozirgi kunga qadar fraktal tushunchasi aynan ta'rifga ega emasligi ta'kidlanadi, biroq matematik nuqtai nazardan "fraktal - bu kasrli o'lchamlar to'plamidan iboratdir" [4,14,15,34,37,37,42,46,47,56,60,64,65,67,68,70].

Fraktal va fraktal geometriya tushunchasi 20 - asrning 70-80 yillari o‘rtalarida matematiklar hamda dasturchilarning ilmiy izlanishlariga qat’iy ravishda kirib keldi.

Fraktallarning ta’riflari. Quyida fraktallarga berilgan ta’riflarni keltiramiz.

Yuqorida aytib o‘tilganidek, fraktal aniq bir ta’rifga ega emas, biroq fraktallar nazariyasini rivojlantirish sohasida ilmiy tadqiqotlar olib borgan olimlarning kitoblarida unga berilgan turlicha ta’riflarni uchratamiz [4,14,15,34,37,37,42,46,47, 56,60,64,65,67,68,70]:

Fraktal - bu geometrik fraktal bo‘lib, qismlardan tashkil topgan hamda ularning har biri butun fraktalning nusxasini kichiklashtirgan holatini ifodalaydi.

Fraktal - aniq bir qism o‘lchamini o‘zgartirgan holda qayta va qayta takrorlovchi geometrik shakldir.

Fraktal - qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishdir.

Fraktal - bu singan fazoviy shakl, tekis yoki notekis, xaotik yoki botartib va o‘ziga-o‘zini turli mashstabda takrorlaydigan murakkab tuzilish hisoblanadi.

Fraktal masshtabiga bog‘liq bo‘lmagan tasvirlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishlaridir.

Fraktal - Xausdorf o‘lchami topologik o‘lchamidan qat’iy katta bo‘lgan to‘plam.

Fraktal - nobutun o‘lchamli o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plamlar va cheksiz o‘ziga-o‘zi o‘xshash shakllar, o‘lchami kasriy to‘plamdir. Bunday ta’riflardan yana bir nechtasini keltirish mumkin.

Yuqoridagi ta’riflardan kelib chiqib ularni quyidagi ikkita guruhga ajratish mumkin.

Fraktallarning matematik ta’rifi. Fraktallar cheksiz rekursiv jarayonlar natijasida ifodalangan funksional yoki hosil bo‘luvchi to‘plam va quyidagi xususiyatlarga ega:

– o‘ziga-o‘zi o‘xshash yoki masshtabning invariantligi (cheksiz skeyling), ya’ni kichik masshtabda va o‘rta masshtabda xuddi katta masshtabdagi kabi ko‘rinadi;

– kasrli o‘lchami (Xausdorf o‘lchami) topologik o‘lchamidan qat’iy katta;

– differensiallanmaydi va kasrli ko‘paytmalar hamda integrallarda aniqlashtiriladi.

Fraktallarning fizik ta'rifi. Fraktallar - kuchli qirqilgan tuzilishni ifodalovchi hamda chegaralangan masshtabda oʻziga-oʻzi oʻxshash xususiyatini egallovchi geometrik ob'ektlar (chiziq, sirt, jism)dir.

Fraktal bu avvalo abstrakt, nazariy model, reallikda mavjud boʻlmagan chegaraviy oʻtish natijalaridir.

Biroq fraktallarning qat'iy aniq ta'rifi mavjud emas. Ammo fraktal geometriya tabiat geometriyasidir.

Fraktallarning xususiyatlari.

1. *Oʻziga-oʻzi oʻxshashlik*. Eng oddiy holatda fraktallarning katta boʻlmagan qismi ular haqidagi barcha axborotlarni oʻzida saqlaydi.

2. *Kasriylik*. Fraktallarning kasriyligi fraktallar notoʻgʻriligining oʻlchamini matematik ifodalash deyiladi.

3. *Nomuntazamlik*. Agar fraktal funksiya ta'riflangan boʻlsa matematika terminlarida nomuntazam funksiya hech bir nuqtada tekis emas va differensiallanmaydi.

4. Masshtablashtirish. Fraktal ma'lum mashtabda kichiklashtirganda (yoki kattalashtirganda) oʻzini ifodalaydi.

5. Fraktal oʻlchov.

1.3. Fraktal oʻlchov tushunchasi

Fraktal geometriyaning asosiy gʻoyalaridan biri borliqda oʻlchovlar miqdori uchun butun boʻlmagan qiymatlar gʻoyasidir. Mandelbrot butun boʻlmagan oʻlchov 2.76 ni fraktal oʻlchov deb nomladi. Oddiy yevklid geometriyasi mavjud borliq tekis va silliq ekanligini ta'kidlaydi. Bunday borliqning xususiyati nuqtalar, chiziqlar, burchaklar, uchburchaklar, kublar, sferalar, tetraedrlar va boshqalarni beradi.

Tabiatdagi koʻplab ob'ektlar (masalan, inson tanasi) biri ikkinchisi bilan qoʻshilgan fraktallar toʻplamidan tashkil topgan boʻlib, har bir fraktal boshqalaridan farq qiladigan oʻzining oʻlchamiga ega. Masalan, insonning ikki oʻlchamli sirtidagi tomirli tizimlari egiladi, tarmoqlanadi, buraladi va qisiladi, uning fraktal oʻlchami 3.0 ga teng. Ammo agar u alohida boʻlaklarga boʻlingan boʻlsa, arteriya qon tomirining fraktal oʻlchami faqatgina 2.7 ga teng boʻladi, unda oʻpka branxial yoʻlidigi fraktal oʻlcham 1.07 ga teng.

Yevklid geometriyasida oʻlcham tushunchasi mavjuddir. Ya'ni kesmaning oʻlchami bir, aylananing oʻlchami ikki, sharning oʻlchami esa uchdir. Masalan, kesma uzunligining oʻlchamini boʻlaklarga boʻlsak, unda kesmaning oʻlchami N, kesmani ikkiga boʻlsak 2N, kesmani oʻnta bo‘lakka bo‘lsak 10N ga teng. Bu holatda to‘g‘ri proporsional bog‘lanish kuzatiladi. Biz maydonni o‘lchash vaqtida quyidagi qiymatlarni olamiz: 4N, 100N ya’ni bu yerda bog‘liqlik kvadratikdir. Uch o‘lchovli shaklning hajmi kubning chiziqli o‘lchovlariga proporsionaldir. Agar bu qoidani fraktal ob’ektlarga qo‘llasak kasr sonlardan iborat paradoks holat nomayon bo‘ladi.

Doimo o‘lcham tushunchasini intiutiv ravishda tushunarli deb hisoblanib, matematik jihatdan oson aniqlangan. Chiziqli fazoning o‘lchami tushunchasi elementar geometriya va chiziqli algebradan ma’lumdir. Ko‘pxillilik o‘lchami - bu Yevklid sharlaridan biriktirilgan ko‘pxillilik o‘lchamidir va h.k. Biroq matematika, mexanika va fizikada shunday to‘plamlar uchraydiki, ular uchun o‘lcham tushunchasi alohida talqin qilinishi zarur va yana shuningdek, ular uchun bir necha turli o‘lchamlarni aniqlash mumkin. Bu o‘lchamlar bir-biri bilan ustma-ust tushmasligi ham mumkin. Qat’iy ravishda aytadigan bo‘lsak ixtiyoriy topologik fazo uchun turli o‘lchamlar tushunchalarini aniqlasa bo‘ladi. Ammo ko‘pxillilik tegishli bo‘lgan fazolar uchun bu sonlar (o‘lchamlar) ustma-ust tushadi. Biroq biz murakkab, ekzotik (ba’zida qandaydir ma’noda «patologik» bo‘lgan) ob’ektlarni qaraydigan bo‘lsak, turli o‘lcham tushunchalari uchun turli sonlarga ega bo‘lamiz. Ilgari bu asosan amaliyotda kam uchraydigan fazolar sinfi uchun o‘rinli deb hisoblanar edi. Hozir bunday ob’ektlar matematikaning klassik sohalarida doimo uchraydi. Bular ***fraktal***lardir.

Qo‘yida o‘lchov tushunchasini ko‘rib chiqamiz [1,4,10-12,14-18,21,22,26,31,34,37,40-43,60,64-68,70].

dim **Topologik o‘lchovi**. Agar har bir $x \in X\,(\forall x \in X)$ nuqta U_i to‘plamlarning hech bo‘lmaganda birortasiga tegishli ya’ni $\forall x \in X\ \exists U_i \in \{U_i\} \big| x \in U_i$ bo‘lsa, X topologik fazo $\{U_i\}$ qism to‘plamlar tizimining qobig‘i deyiladi.

Qobiqlar chekli bo‘lgan holatlarni qaraymiz. Agar $\{U_i\}$ qobiqning bo‘sh bo‘lmagan kesishmasidan iborat bo‘lmagan n ta element mavjud bo‘lsa, shunday $n\ (n \in \{0\} \bigcup N)$-butun nomanfiy sonlardan eng kattasiga $\{U_i\}$qobiqning karraligi deb aytiladi (ya’ni, qobiqning n ta turli elementlarga bir vaqtning o‘zida $\{U_j\}(j = \overline{1,n})$ qobiqlarning barchasiga tegishli bo‘lgan hech bo‘lmaganda bitta nuqtasi mavjuddir).

Brauer, Urisona, Menger ishlariga ko‘tariluvchi topologik o‘lchov tushunchasini rasmiylashtiramiz.

Yopiq chekli to‘plamni qaraymiz. Har bir kompakt $\forall\varepsilon>0$da ε-qobiqqa ega, ya’ni uni har biri ε dan kichik diametrga ega bo‘lgan chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin (agar $\forall V_j$ hech bo‘lmaganda bitta $U_i \in \{U_i\}$ga tegishli bo‘lsa, $\{V_j\}$ to‘plamlar tizimi qismqobiq deyiladi).

Ta’rif. Agar ***X*** fazoning istalgan ochiq qobig‘iga, karraligi *n+1*dan katta bo‘lmagan yopiq qism qobiqni kiritish mumkin bo‘lsa, shunday n ta butun sonlarning eng kattasiga ***X*** ning d_T topologik o‘lchovi yoki *dim* kompakti deb aytiladi. Agar bunday sonlar mavjud bo‘lmasa $dimX \overset{def}{=} +\infty$ deb faraz qilinadi. Topologik o‘lchov, shuningdek Brauer o‘lchovi yoki oddiy o‘lchov deb ham yuritiladi.

d

d_H **Xausdorf o‘lchovi (yoki fraktal o‘lchov).** Aytib o‘tganimizdek, nuqtaning o‘lchovi nolga, kesma, aylana, umuman olganda tekislikdagi yoki fazodagi ixtiyoriy egri chiziqning o‘lchovi birga, doira, sferaning o‘lchovi ikkiga, jismlarning o‘lchovi esa uchga tengdir. Barcha keltirilgan misollarda o‘lchov qaralayotgan ob’ektda nuqtani belgilash zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soniga tengdir. Biroq «o‘lchov» tushunchasi kengroqdir. U faqat xususiy hollarda ob’ektni aniqlash uchun zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soni bilan ustma-ust tushadi. Bir o‘lchovli ob’ektlarni uzunlik tushunchasi bilan, *2* o‘lchovli ob’ektlarni yuzalar tushunchasi bilan bog‘laymiz va h.k. Biroq *3/2* o‘lchovga ega bo‘lgan to‘plamni qanday tasavvur qilish mumkin? 1919 yili Feliks Xausdorf ixtiyoriy $\alpha \geq 0, (\alpha \in R)$ uchun α-o‘lchovni aniqlaydi va shu asosda yevklid fazosida har bir to‘plamga metrik o‘lchov deb nomlanadigan sonni mos qo‘yadi.

Bizga ma’lum bo‘lgan uzunlik, yuza va sharning hajmi tushunchalarini Yevklid fazosida ko‘rib chiqamiz.

R^1da *r* radiusli sharning diametri (uzunligi) *2r* ga teng. R^2da sharning yuzasi πr^2 ga teng. R^3da hajm $\frac{4}{3}\pi r^3$ga teng. Bu formulalar ixtiyoriy butun son o‘lchovli yevklid fazosida quyidagicha ifodalanadi:

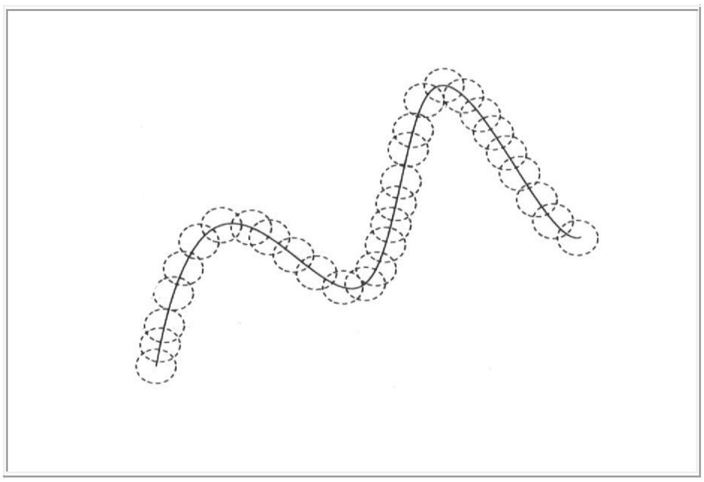
$$V_d = \gamma(d)\cdot r^d,\ d = 1,2,3,... \tag{1}$$

$\gamma(d) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d \Big/ \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)$, bu yerda $\Gamma(x)$-Eyler gamma-funksiyasi:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

R^n da r radiusli sharning d-o‘lchovini aniqlash orqali kasr ko‘rinishdagi o‘lchov nazariyasini qurishda birinchi qadam qo‘yiladi. Bunda d-ixtiyoriy nomanfiy haqiqiy son. Bunga barcha haqiqiy $d>0$larda (1) formula bajarilishi orqali erishiladi. Masalan, 3/2–o‘lchovli fazoda sharning o‘lchovi $\gamma(3/2)\cdot r^{3/2}$ ga teng.

Navbatdagi qadamda d-o‘lchov tushunchasi sharning ixtiyoriy $A \subset R^n$ to‘plami uchun o‘tkaziladi. Buning uchun $B_\varepsilon(x_i)$ aylanalar to‘plami orqali A qobiqni quramiz (1.1-rasm).



1.1-rasm. Aylanalar to‘plamidan iborat *A* qobiq

Ularning hajmlarini qo‘shib chiqamiz:

$$\sum_{i=1}^{M} \gamma(d) \cdot \varepsilon^d.$$

Ta’rif. To‘plamning ε-fraktalli d-o‘lchovi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu(A, d, \varepsilon) \overset{def}{=} \min\{M\} \cdot \varepsilon^d \equiv N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \qquad (2)$$

yoki *A* to‘plamning mumkin bo‘lgan barcha qobiqlari $\mu(A, d, \varepsilon) = \inf\{\sum \gamma(d) \cdot \varepsilon^d$ ga aytiladi.

Masalan, agar $A_1=[0,1]\in R^1$, bunda $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$.

$\varepsilon\to 0$ da bu inf faqat o‘sishi mumkin. Demak, $\varepsilon\to 0$ da $\mu(A,d,\varepsilon)$ chegara mavjud bo‘ladi.

Ta’rif. Xausdorfning fraktalli d -o‘lchovli sferik o‘lchovi deb quyidagi songa aytiladi:

$$\mu_F(A,d)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\mu(A,d,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sup\mu(\varepsilon^d\cdot N(\varepsilon))\equiv\mu_F(A,d)$$

ko‘pincha quyidagicha bo‘lishi ham mumkin:

$$\mu_F=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(A,d,\varepsilon).$$

Bezikovich har bir X uchun har doim $d_H\in R$ soni mavjud ekanligini, *X* kompaktining d - o‘lchovli Xausdorf o‘lchovi $d<d_H$ da cheksiz, va aksincha $d>d_H$ da 0 ga teng ekanligini ko‘rsatdi.

Agar $A_1=[0,1]$ bo‘lsa,

$d=1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\cdot N(\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\frac{1}{2}$,

$d>1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=0$;

$d<1$ da $\mu_F(A_1,1)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^d\cdot\left(\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\right)=\infty$ bo‘ladi.

Umumiy holda yopiq, agar chegaralangan A to‘plam uchun $\mu_F(A,d^1)>+\infty$ o‘rinli bo‘lsa, ixtiyoriy $d>d^1$ uchun $\mu_F(A,d^1)>0$ o‘rinlidir. Agar $\mu_F(A,d^1)>0$ bo‘lsa, u holda $\forall d<d^1\Rightarrow\mu_F(A,d)=+\infty$. Demak, shunday $d_H\in[0,+\infty)$ soni mavjudki, $d>d_H$ da $\mu_F(A,d)=0$ va $\mu_F(A,d)=\infty$ ga teng. $\forall d<d_H$ bo‘lganda, bunda $\mu_F(A,d)$ soni [0,+] intervalga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy son bo‘lishi mumkin. Ravshanki,

$$d_H=\inf\{d\}\big|\mu_F(A,d)=0.$$

Ta'rif. A to'plamning Xausdorf - Bezikovich (metrik yoki fraktal o'lchov) o'lchovi deb, $d_H = \inf\{d\} \big| \mu_F(A,d) = 0.$ munosabatni qanoatlantiruvchi d_H soniga aytiladi va u d, d_H ko'rinishida yoki d_F ko'rinishida belgilanadi.

Masalan, $A_1=[0,1]$ uchun $\mu_F(A_1,d) = \begin{cases} 0, & d>1; \\ +\infty, & d<1; \\ \frac{1}{2}, & d=1. \end{cases}$

Demak, $d_H(A_1)=1.$

(2) formulaga qaytamiz:

$$\mu(A,d,\varepsilon) = N(\varepsilon)\cdot\varepsilon^d \Rightarrow N(\varepsilon) = \frac{\mu}{\varepsilon^d}.$$

Ikkala qismini logarifmlaymiz:

$$\log N(\varepsilon) = \log\mu - \log\varepsilon^d \Rightarrow d = -\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\varepsilon}$$

yoki

$$d = d_H = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ko'pchilik «ajoyib» ob'ektlar, fazolar, to'plamlar uchun ***dim*** va $\boldsymbol{d_H}$ ustma-ust tushadi, biroq $\dim < d_H$ bo'lgan ob'ektlar ham mavjud. Bular ***fraktal***lardir.

d_M Minkovskiy o'lchovi. Minkovskiy o'lchovi, Xausdorf - Bezikovich o'lchovi bilan o'xshash va amaliy masalalarni yechishda juda qulay hisoblanadi. Biroq Minkovskiy o'lchovini aniqlash algoritmi biroz soddaroq. Umuman (fraktal yoki tekis) egri chiziq uchun d_M Minkovskiy o'lchovini quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilaylik, *r* radiusli katta bo'lmagan yevklid shari (aylana)ning markazi egri chiziq bo'ylab, shar harakati bilan hosil bo'luvchi *S(r)* Minkovskiy yuzasini qoplab turib harakatlanadi. *S(r)* yuzani *2r* ga nisbatini olamiz. Tekis egri chiziq bo'lgan holda egri chiziqning uzunligini hosil qilamiz, biroq fraktal egri chiziq uchun natija cheksiz bo'ladi. Haqiqatan ham, *F(r)/2r* nisbat

$r^{1}-d_M$ miqdorga proporsional, bu miqdor $d_M > 1$ da $r \to 0$ uchun uzoqlashadi. d_m miqdorning qiymati uzoqlashish tezligi o‘lchovi bo‘ladi va Minkovskiy-Buligan o‘lchovi deb aytiladi. Uni quyidagi:

$$d_M = \lim_{r \to 0} \frac{\ln S(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} + 2,$$

formula bo‘yicha hisoblanadi. Tekis egri chiziq bo‘lgan holda $S(r) \sim r$ va $d_M = -1+2=1$.

Barcha qat’iy o‘ziga o‘xshash fraktallar uchun d_M Minkovskiy o‘lchovi d_H Xausdorf - Bezikovich o‘lchoviga teng. Agar bu o‘lchovlar teng bo‘lmasa, u holda

$$\boldsymbol{d_M > d_H}.$$

Bundan kelib chiqadiki Minkovskiy o‘lchovi, Xausdorf-Bezikovich o‘lchovidan birmuncha «noqulaydir», chunki u ob’ektning ba’zi-bir mayda tuzilishini hisobga olmaydi [34,37].

1.4. Fraktal o‘lchovlarni hisoblash usullari

Fraktallarning xususiyatlarini o‘rganish asosiy masalalardan biri bo‘lib, ularni tushunish o‘ta muhumdir. So‘nggi yillarda e’tibor geografik, me’morchilik, tibbiyot va fazoviy hodisalar sohasiga yo‘naltirildi. Geografik hodisalar fraktallarga tegishli uchta xususiyatga ega va bu fazoviy ma’lumotlar hamda hodisalarni tekshirishning innovatsion usuli hisoblanadi.

Fraktal egri chiziqlarda takrorlanish jarayonining har bir bosqichi ularga ko‘proq uzunlik qo‘shadi. Cheksiz sonli qadamlar natijasida hosil bo‘lgan fraktal egri chiziq cheksiz uzunlikka ega bo‘ladi. Fraktal egri chiziqlar uzunligining o‘sish tezligi egri chiziqning ajralib turadigan xususiyati hisoblanadi. Asosiy tushuncha shundaki, uni o‘lchash uchun ishlatiladigan o‘lchov moslamasining uzunligi va hajmi bir-biriga bog‘liqdir. Ushbu o‘zaro munosabatlar ma’lum qonuniyatga ega bo‘lib chiqadi. Ushbu qonuniyat o‘chov ta’rifi uchun ham muhimdir. Matematikada ma’lum bir muammo turiga nisbatan o‘lchovning ko‘plab ta’riflari mavjud.

Yerni masofadan zondlash (YeMZ) tizimlarida olingan tasvirlarni qayta ishlashning amaliy muammolarida fraktal o‘lchovni hisoblash ko‘pincha kublar usuli, qoplama usuli, lokal-dispersiya usuli, prizma usuli, Richardson effekti va boshqa bir qator usullar asosida amalga oshiriladi.

Biroq, bir xil tasvirni turli xil usullar yordamida qayta ishlashda ham, natijalar ko‘pincha bir-biridan farq qiladi. Amalda fraktal o‘lchovni topishda hisoblash aniqligi, tezligi va tizim resurslari inobatga olingan holda tegishli algoritmni tanlash kerak.

Kublar usuli. Kublar usulidan foydalanganda, tekshirilgan sirtni qoplash uchun zarur bo‘lgan tomoni ε bo‘lgan $N(\varepsilon)$ kubiklarning eng kichik miqdori hisoblanadi. Ushbu usul eng qulay va ko‘pincha egri chiziqlarning fraktal o‘lchamlarini hisoblash uchun ishlatiladi. Sirt o‘lchamini hisoblashda ushbu usul kamroq qo‘llaniladi, chunki u kerakli aniqlikka ega emas. E to‘plamini qoplash uchun yon tomoni ε bo‘lgan kublarning minimal soni $N(\varepsilon)$ bo‘lsin, u holda o‘rganilayotgan tekstura o‘lchovi tushunchasini kiritish mumkin:

$$\mu_p^h(E) = N(\varepsilon)\varepsilon^D. \tag{1}$$

Faraz qilaylik agar $\mu_p^h(E) > 0$ o‘lchovda, o‘zgarmas $C > 0$ bo‘lsa, u holda o‘lchov quyidagicha ifodalanadi:

$$N(\varepsilon) \approx C/\varepsilon^D, \text{ yoki} \tag{2}$$

$$\lg N(\varepsilon) = \lg C - D\lg\varepsilon, \tag{3}$$

bundan quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$D = -\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg\varepsilon} + \frac{\lg C}{\lg\varepsilon}. \tag{4}$$

$\varepsilon \to 0+$ da $\lg\varepsilon \to -\infty$ bo‘lgani uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$D = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{\lg(1/\varepsilon)}. \tag{5}$$

(3) formuladan ko‘rinib turibdiki, $\lg N(\varepsilon)$ning $\lg(\varepsilon)$ ga bog‘liqlik grafigi D burchak koeffisiyentga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni tashkil qiladi.

Qoplama usuli. Qoplama usuli bilan o‘lchovni aniqlash fraktal yuzasi $S(\varepsilon)$ bo‘lgan sirtni ε masshtablashning har xil qiymatlari uchun olingan yuqori va pastki qoplamalar yordamida baholashni o‘z ichiga oladi. Fraktal o‘lchovni ushbu usul bilan hisoblash uchun ko‘rsatilgan sirtning qalinligi 2ε bo‘lgan qoplama olinadi, bu sirtning maydoni hisoblab chiqiladi va olingan qiymatni 2ε ga bo‘lgandan so‘ng, fraktal o‘lchov D parametriga bog‘liq bo‘lgan taxmin olinadi, qoplama yuzasi ikki komponent bilan aniqlanadi: u_ε - yuqori sirt va b_ε - pastki sirt. Yuza nuqtalarining qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

$$u_\varepsilon(i,j) = \max\left\{u_{\varepsilon-1}(i,j)+1, \max_{|(m,n)-(i,j)|\le 1} u_{\varepsilon-1}(m,n)\right\}, \tag{6}$$

$$b_\varepsilon(i,j) = \max\left\{b_{\varepsilon-1}(i,j)+1, \max_{|(m,n)-(i,j)|\le 1} b_{\varepsilon-1}(m,n)\right\}, \tag{7}$$

bu yerda $\varepsilon = 1,2,3..., u_0(i,j) = b_0(i,j) = I(i,j).$

Qoplama usulida olingan maydon yuzasi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S(\varepsilon) = \frac{\sum_{i,j}\left(u_\varepsilon(i,j) - b_\varepsilon(i,j)\right)}{2\varepsilon}. \tag{8}$$

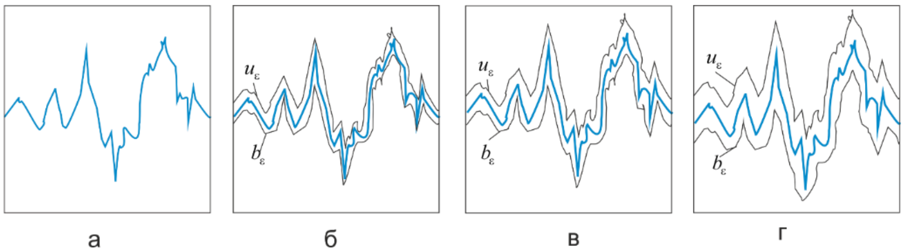
Fraktal o‘lchovning qiymati esa quyidagi ifodadan aniqlanadi:

$$S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{2-D}. \tag{9}$$

Shunday qilib, $\lg S(\lg\varepsilon)$ grafigidagi k koeffisiyentning qiymati fraktal o‘lchovni topish uchun ishlatiladi:

$$D = 2 - k. \tag{10}$$

Qoplama usulning tasviri 1.2 - rasmda keltirilgan:



1.2 - rasm. Yuqori u_ε va pastki b_ε sirtlarni har xil masshtablarda qurish: a) $\varepsilon=0$; b) $\varepsilon=1$; v) $\varepsilon=2$; g) $\varepsilon=3$.

Lokal-dispersiya usuli. Lokal-dispersiya usulidan foydalanganda fraktal o‘lchovning qiymati intensivlik (yorqinlik)ning dispersiyasini bir necha shkalasi bo‘yicha hisoblash orqali aniqlanadi. Buning uchun har xil o‘lchamdagi ε_P rasmlarning P sonidagi $I_P(m,n)$ to‘plami mavjud, bu yerda $p\in[1,P]$, xuddi shu tekshirilgan fragment chiziqli oynani tekislash orqali hosil bo‘ladi, ya’ni I asl tasvirni I' ramkali tasvirga filtrlash orqali hosil qilinadi. $(2M+1)\times(2N+1)$ o‘lchamdagi oyna bilan ramkalarni filtrlash natijasida olingan $I'(m',n')$ elementlarning qiymatlari quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$I\to I':I'(m',n')\Big|_{\forall mn}=\frac{1}{(2M+1)(2N+1)}\sum_{m=m'-M}^{m'+M}\sum_{n=n'-N}^{n'+N}I(m,n) \quad , \qquad (11)$$

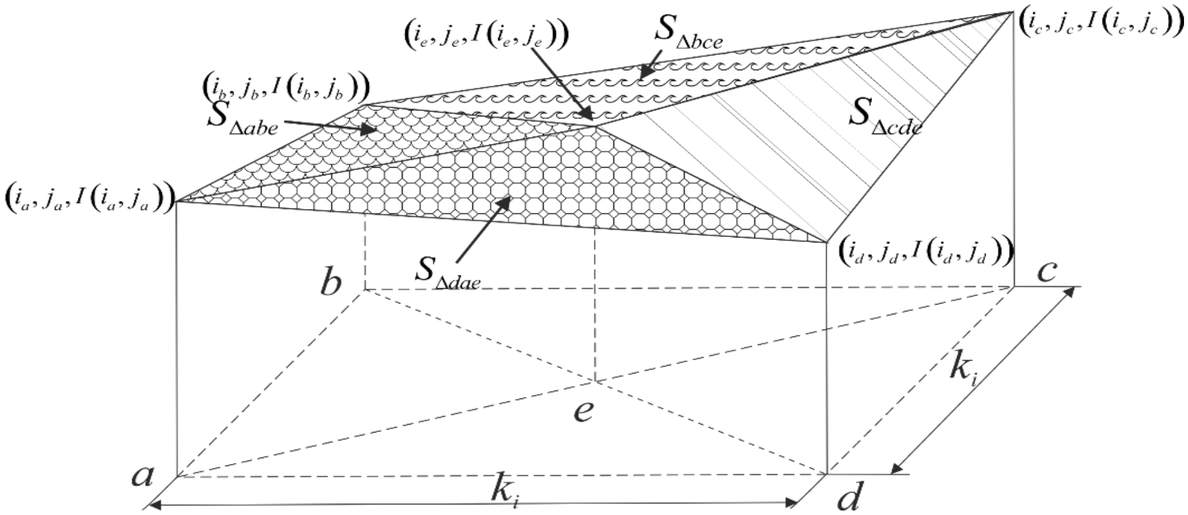
keyingi bosqichda $K\times K$ skanerlash oynasi yordamida $I_P(m,n)$ oynasidagi yorqinlik qiymatining standart og‘ishlari σ_p^2 - ni hisoblash amalga oshiriladi, bu yerda $0\le m,\quad n\le K$, har xil ε_P o‘lchamlar uchun hisoblanadi. $\sigma^2(\varepsilon)$ ctandart og‘ishning ε o‘lchamga bog‘liqligi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$\sigma_p^2(\varepsilon_p)\approx\varepsilon_p^{6-2D} \quad , \qquad (12)$$

α burchakning koeffisiyentini topish uchun $\lg\sigma_p^2(\lg\varepsilon_p)$ grafigidan foydalaniladi. Keyin fraktal o‘lchovning qiymati aniqlanadi:

$$D=3-\frac{\alpha}{2} \quad . \qquad (13)$$

Prizma usuli. Prizma usuli o‘rganilgan sirt maydonini har xil o‘lchov birliklarida har xil yaqinlashishlar yordamida hisoblash asosida fraktal o‘lchovning qiymatini aniqlashga imkon beradi. Prizma usuli bilan o‘lchovni hisoblashda $K_0 \times K_0$ o‘lchamdagi oyna tanlanadi. O‘lchash oynasi to‘rtta uchburchakka bo‘lib olinadi. Mazkur uchburchaklarni qurish uchun o‘rganilayotgan oynaga tegishli beshta nuqta ishlatiladi: to‘rtta a, b, c, d - balandliklar va e -ishlov berish oynasining markazi. Ushbu uchburchaklarning balandliklari 1.3-rasmda quyidagicha ko‘rsatilgan:



1.3-rasm. To‘rtta tasvir nuqtasi yordamida prizma chizish

1-uchburchak $-(i_a, j_a, I(i_a, j_a)), (i_b, j_b, I(i_b, j_b)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

2-uchburchak $-(i_b, j_b, I(i_b, j_b)), (i_c, j_c, I(i_c, j_c)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

3-uchburchak $-(i_c, j_c, I(i_c, j_c)), (i_d, j_d, I(i_d, j_d)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e));$

4-uchburchak $-(i_d, j_d, I(i_d, j_d)), (i_a, j_a, I(i_a, j_a)), (i_e, j_e, I(i_e, j_e)).$

Hosil bo‘lgan $S_{\Delta abe},\ S_{\Delta bce},\ S_{\Delta cde}$ *ва* $S_{\Delta dae}$ uchburchaklarning maydonlarini ma’lum bo‘lgan formulalar yordamida masalan Geron formulasi orqali hisoblab chiqiladi. K_0 qiymati uchun qurilgan prizmaning sirt maydoni quyidagi formula bilan topiladi:

$$S_{K_0} = S_{\Delta abe} + S_{\Delta bce} + S_{\Delta cde} + S_{\Delta dae}. \qquad (14)$$

Navbatdagi bosqichda $K_0 \times K_0$ oynasi, $K_1 \times K_1$ kichik oynalarning soni n ga bo‘linadi va ularning har biri uchun $S_{K_1}^i$ qiymati aniqlanadi, so‘ngra quyidagi formula orqali umumiy qiymat topiladi:

$$S_{K_1} = \sum_{i=1}^{n} S_{K_1}^i. \tag{15}$$

Natijada, j-chi takrorlashdan so‘ng, o‘zaro bog‘liqlik hosil bo‘ladi:

$$S_{K_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(S_{\Delta abe} + S_{\Delta bce} + S_{\Delta cde} + S_{\Delta dae}\right)_{K_j}^i. \tag{16}$$

Fraktal o‘lchovning qiymati $\lg S_{K_j}\left(\lg K_j\right)$ grafigi orqali topiladi. Fraktal o‘lchov maydonini qurishda $K \times K$ o‘lchamdagi skanerlash oynasi fraktal o‘lchovni hisoblashning birinchi bosqichida $K_0 \times K_0$ o‘lchamdagi o‘lchov oynasiga aylanadi, undan so‘ng ostki oynalarga bo‘linadi.

1.5. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligining fraktal o‘lchovini masshtablangan xarita yordamida Richardson effekti usulida aniqlash

Richardson effekti. Ingliz olimi *Lyuis Frey Richardson* ma’lum bir qirg‘oq chizig‘i uchun kuzatilgan murakkablikdagi o‘zgarishlarni tavsiflaydigan qonuniyatni aniqladi, bu qonuniyat fraktal o‘lchov tushunchasi uchun namuna bo‘lib xizmat qildi. Bu qirg‘oqlarning fraktal egri chizig‘iga o‘xshash xususiyatlaridan kelib chiqadi, ya’ni qirg‘oq chizig‘i odatda fraktal o‘lchamga ega. Qirg‘oq chizig‘ining o‘lchangan uzunligi uni o‘lchash uslubiga va kartografik umumlashtirish darajasiga bog‘liq, o‘lchagich qanchalik kichik bo‘lsa, hosil bo‘lgan qirg‘oq chizig‘i shunchalik uzunroq bo‘ladi. Bu bugungi kunda L.F. Richardson effekti sifatida tanilgan.

Quruqlikning o‘lchamlari yuzlab kilometrdan millimetr va undan pastroq qismlarga qadar bo‘lgan har qanday miqyosda xususiyatlarga ega bo‘lganligi sababli, o‘lchashda hisobga olinadigan eng kichik xususiyatning aniq o‘lchamlari mavjud emas, shuning uchun quruqlikda aniq perimetr yo‘q.

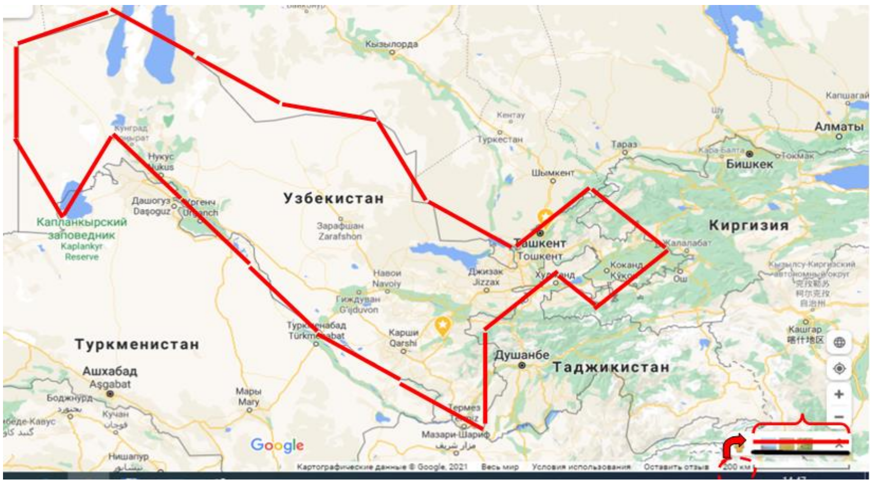
O‘sha paytda L.F.Richardsonning tadqiqotlari ilmiy jamoatchilik tomonidan e’tiborsiz qoldirildi. Bugungi kunda u fraktallarni zamonaviy o‘rganish boshlanishining elementi hisoblanadi. L.F.Richardsonning tadqiqotlarini tahlil qilgan matematik Benoit Mandelbrot, L.F. Richardson haqiqatan ham o‘lchangan L - chegara uzunligi va G - o‘lchov birligi o‘rtasida empirik munosabatlarni yaratganligini ta’kidlaydi:

$$L(G) \sim MG^{1-D}. \qquad (1)$$

bu yerda M – proporsionallik koyeffisiyenti va D – Fraktal o‘lchovdir.

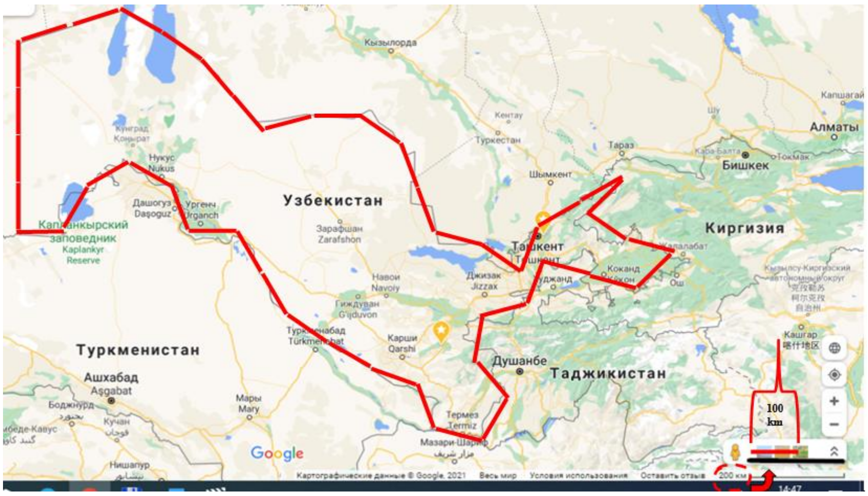
O‘zbekiston Respublikasining chegarasi ko‘plab yirik, unchalik katta bo‘lmagan, kichik va hatto juda kichik murakkab trayektoriya tashkil qiluvchi kirish joylaridan iborat. Kichikroq o‘lchash moslamasidan foydalanilganda, kirish joylari tobora ko‘proq o‘lchovga kiritiladi va natijada chegara chizig‘i uzunligi uzunroq bo‘ladi. Masshtab xarita orqali O‘zbekiston Respublikasining chegarasining uzunligi 200 km, 100 km, 50km va 25 km uzunliklardagi to‘g‘ri chiziqli segmentlar bilan o‘lchandi.

To‘g‘ri chiziqli segmentlar o‘lchami kichrayib borgan sari O‘zbekiston Respublikasining chegarasining ko‘pburchak tasviri deyarli xarita shakliga yaqinlashadi. Chegara chizig‘ining uzunligi o‘lchash qiymati kichrayishi bilan ortadi. Fraktal o‘lchov - o‘lchov parametrining aniqligi ortgani sari egri chiziq uzunlik miqdorining o‘sishini ko‘rsatadi (1.4, 1.5, 1.6, 1.7 – rasmlarga qarang).



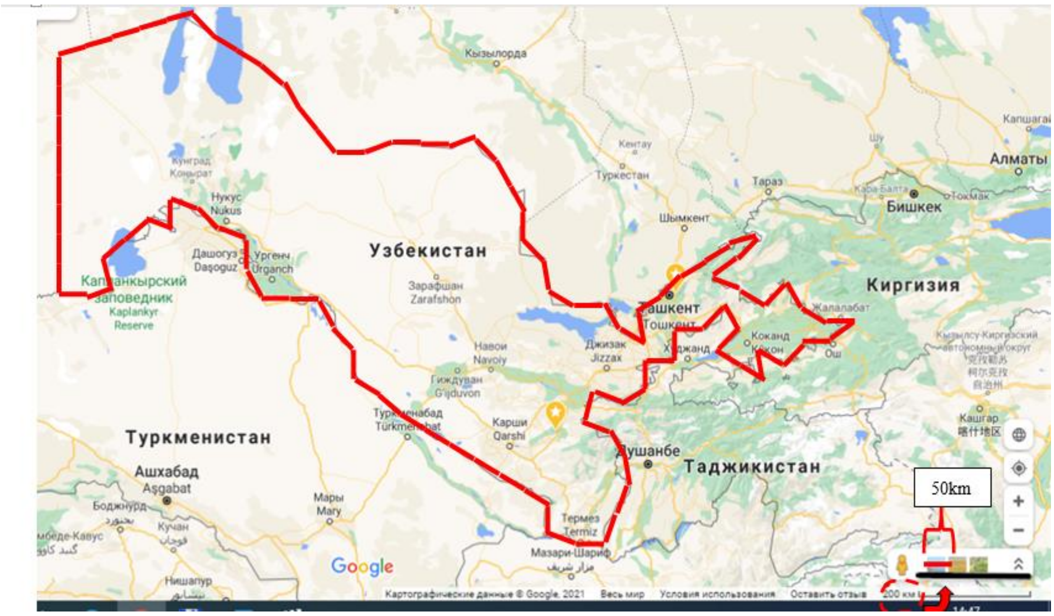
1.4 – rasm. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini 200 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini 200 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda ushbu chiziqlar soni 19,5 tani tashkil etadi (1.4-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 3900 kmdan iborat bo‘ladi.



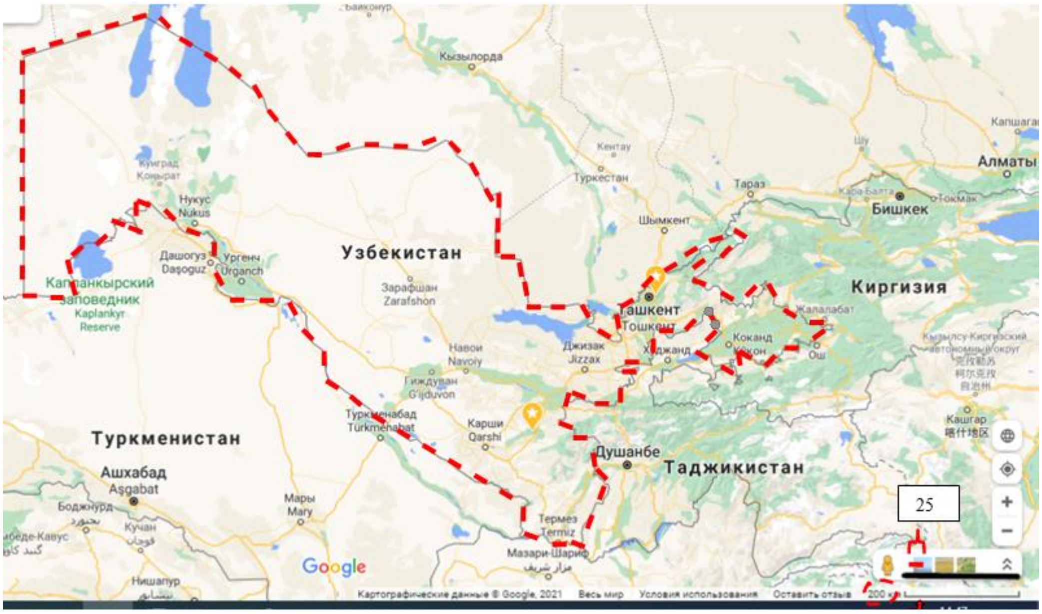
1.5– rasm. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini 100 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

100 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar soni 44 tani tashkil etadi (1.5-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 4400 kmdan iborat bo‘ladi.



1.6 – rasm. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini 50 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

50 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar soni 100 tani tashkil etadi (1.6-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 5000 kmdan iborat bo‘ladi.



1.7 – rasm. O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini 25 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar bilan o‘lchash

25 km uzunlikdagi to‘g‘ri chiziq va 25 km uzunlikdagi to‘g‘ri ko‘rinmas chiziqlar bilan o‘lchaganda mazkur chiziqlar umumiy soni 245 tani tashkil etadi (1.7-rasm). Mos ravishda chegara uzunligi 6125 kmdan iborat bo‘ladi. Natijalar quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval. Chegra uzunligi *L* va o‘lchov birligi *G* ning bog‘liqligi

	1-holat	**2-holat**	**3-holat**	**4-holat**
Birliklar soni (N)	19,5	44	100	245
O‘lchov birligi (G)	200 km	100 km	50 km	25km
Chegara uzunligi (L)	3900 km	4400 km	5000 km	6125 km

Yuqoridagi (1) empirik munosabat va jadvalda berilgan qiymat ma’lumotlari fraktal o‘chov (D)ni hisoblashga yordam beradi. Fraktal o‘lchov (D)ni aniqlash uchun $L(G) \sim MG^{1-D}$ empirik munosabat ustida quyidagi matematik qonuniyat amalga oshiriladi:

$$L = MG^{1-D} \Rightarrow \quad \lg L = \lg MG^{1-D} \Rightarrow \quad \lg L = \lg M + \lg G^{1-D} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lg L = \lg M + (1-D)\lg G. \qquad (2)$$

Mazkur hosil bo‘lgan formula chiziqli funksiya ko‘rinishiga keltiriladi:

$$y = \lg L; \quad m = (1 - D) \quad \Rightarrow \quad D = 1 - m; \quad x = \lg G; \quad c = \lg M.$$

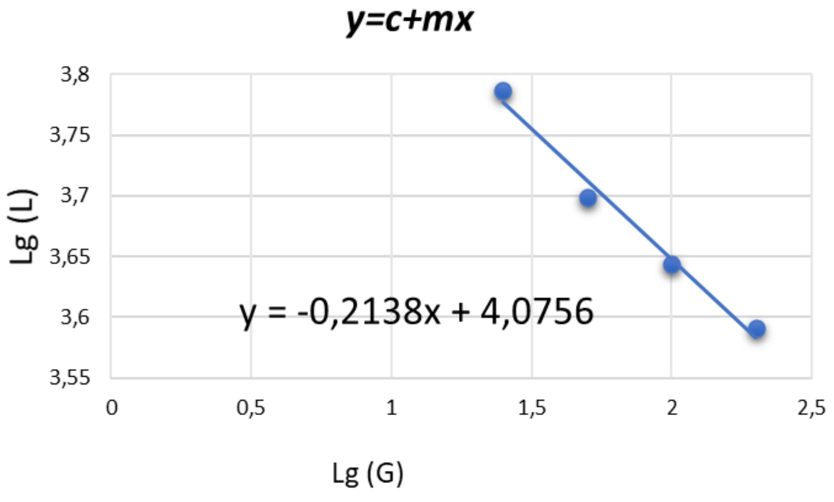
Natijada $y = c + mx$ chiziqli funksiya hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi 1-jadval ma’lumotlaridan foydalanib x va y ning mos qiymatlaridagi logariflarini aniqlab, quyidagi 2-jadvaldagi natijalari olinadi.

2-Jadval. Chegra uzunligi *L* va o‘lchov birliklari *G* ning logarifmik qiymatlari

	1-holat	**2-holat**	**3-holat**	**4-holat**
Birliklar soni	19,5	44	100	245
O‘lchov birligi (G)	200 km	100 km	50 km	25km
Chegara uzunligi (L)	3900 km	4400 km	5000 km	6125 km
x=lgG	2,30103	2	1,69897	1,39794
y= lgL	3,591065	3,643453	3,69897	3,787106

Hosil bo‘lgan qiymatlardan foydalanib, interpolyasiya usuli orqali $y(x)$ funksiya koeffisentlari hosil qilinadi, (1.8-rasm).



1.8-rasm. $y(x)$ funksiya koeffisentlarini aniqlash

Hosil bo‘lgan $y=-0,2138x+4,0756$ chiziqli funksiyani yuqoridagi $y=c+mx$ funksiyaga bog‘liqligidan, $c=\lg M=4.0756$ va $m=(1-D)=-0,2138$ qiymatlarni aniqlaymiz.

Hisoblashning yakunida $m=(1-D)=-0,2138 \quad \Rightarrow D=1-(-0,2138)$ dan $D=1,2138$ yoki O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligini fraktal o‘lchovi qiymati quyidagicha bo‘ladi: $D\approx 1,21$

Fraktal o‘lchovlarni hisoblashning ko‘plab usullari mavjud bo‘lib, ularning har biri qo‘llashnishda ma’lum xususiyatlarga ega. Misol uchun Cantor’s hisoblash usuli faqat fraktal ob’ektlarning ma’lum bir sinfiga - tarmoqlanuvchi tuzulmalarga nisbatan qo‘llaniladi. Umuman olganda borliqda mavjud bo‘lgan har qanday shaklning fraktal o‘lchovi mavjud bo‘lib, fraktal o‘lchovini hisoblashning ko‘plab usullarini tahlil qilishimiz mumkin.

Fraktal o‘lchov indeks sifatida har xil fraktal baholovchilarning bir-biriga mos kelmaydigan natijalari saqlanib qolgan bo‘lsa ham, geologiyada keng qo‘llanilgan. Bunday nomuvofiqliklar fraktal baholovchiga nisbatan qo‘llaniladigan turli xil tanlov strategiyalarining natijasi bo‘lishi mumkin. Paragrafda fraktal xarakterini o‘lchash uchun fraktal xususiyatlarini aniq ko‘rsatadigan o‘lchov ma’lumotlarini tahlil qiluvchi kublar, qoplama, lokal-dispersiya, prizma hamda L.F. Richardson effekti usullarining har biri bo‘yicha fraktal o‘lchovni aniqlashning bir-biridan farq qiluvchi algoritmlari taqdim etilib, o‘zaro taqqoslash orqali amaliy qo‘llashda tavsiyalar berildi. Masshtablangan xarita yordamida O‘zbekiston Respublikasining chegarasi uzunligi hamda fraktal o‘lchovini hisoblash uchun L.F. Richardson effekti usuli tatbiq etildi. Richardson effekti usuli boshqa usullarga nisbatan sodda. Richardson effekti usuli har qanday fraktal baholash algoritmlarida oson dasturlash va amalga oshirilishi mumkin. Bu usul sun’iy yo‘ldosh tasvirlari kabi yuqori murakkablikdagi yuzalar uchun juda yaxshi natijalarni ko‘rsatadi. Ushbu natijalarga asoslanib, Richardson effekti usulini fraktal o‘lchovni hisoblash algoritmlarida, ayniqsa, masofadan turib zondlangan shahar tasvirini tavsiflashda qo‘llash tavsiya etiladi.

1.6. Geometrik fraktallarning o‘lchovlarini Xausdorf-Bezikovich va Minkovskiy-Buligan usullar asosida aniqlash

B.Mendelbrot quyidagi fikrni aytgan: “Fraktalning asosiy xususiyatlaridan biri uning o‘lchovidir” [55,56]. Fraktal o‘lchovning boshqa o‘lchovlardan farqi shundaki, olingan o‘lchov fraktalning umumiy o‘lchovidan kichik bo‘lishi kerak, ya’ni $l_{\min} < l < l_{\max}$ tengsizlikni qanoatlantirsa [41,63,65], olingan uzunlik bo‘laklarning eng kichigidan katta va jami uzunlikdan kichik bo‘lishi kerak.

Fazoda topologik o‘lchov deb, D_T chiziqli mustaqil koordinatalar soniga aytiladi [41, 37]. Topologik o‘lchov butun sonli o‘lchov bo‘lib, aylananing topologik o‘lchovi $D_T = 1$, doiraning topologik o‘lchovi $D_T = 2$, shar yoki kubning topologik o‘lchovi $D_T = 3$ ga teng, bu o‘lchovlar butun o‘lchovlar hisoblanib fraktal o‘lchov esa kasrlidir.

Xausdorf-Bezikovich o‘lchovi. Bu o‘lchovni keltirib chiqarish uchun, berilgan fraktalning uzunligini l ga teng deb, quyidagicha masshtablanadi:

$$l = \frac{L}{N}, \tag{1}$$

bu yerda N qadamlar soni l to‘g‘ri chiziqning bo‘laklari soni va N sonini ixtiyoriy olish mumkin, lekin l ni o‘zgartirib bo‘lmaydi, chunki u dastlabki uzunlikdan iborat [33]. Shunga ko‘ra,

$$L(l) = l * N, \tag{2}$$

u holda maydonning yuzi

$$S = L(l) * l, \tag{3}$$

chunki (1) dan

$$S = l^2 * N = \left(\frac{L(l)}{N}\right)^2 * N = \frac{L(l)}{N} * \frac{L(l)}{N} * N = L(l) * l. \tag{4}$$

Hajm uchun

$$V = l^3 * N = L(l) * l^2. \tag{5}$$

Shunday qilib, bu qoida berilgan o‘lchovni k marta qisqartiradi. Demak, $l = \frac{L(l)}{k}$, deb (3.2) formuladagi l ning o‘rniga qo‘yib [33].:

$$S = L(l)^2 * \frac{N}{k^2}, \tag{6}$$

$$V = L(l)^3 * \frac{N}{k^3}, \tag{7}$$

demak, o‘xshashlik koeffitsenti $\chi=\frac{1}{k}$, $\chi=\frac{1}{k^2}$, $\chi=\frac{1}{k^3}$,…… $\chi=\frac{1}{k^n}$ ekan.

Endi berilgan l uzunlikni 1 birlik deb qarab, ya’ni $l=1$ bo‘lsa

$$l=k^d, \tag{8}$$

(8) formula hosil bo‘ladi va ikkala tamonini natural logarifm ko‘rinishida ifodalansa quyidagicha bo‘ladi [33,37]:

$$d=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}. \tag{9}$$

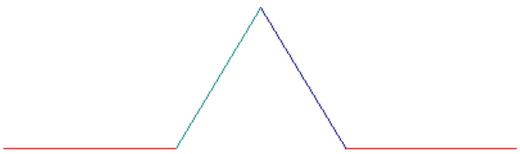
Bu o‘lchovni bir-biridan farqli ravishda Xausdorf-Bezikovich aniqlagan [30,31], shu formula asosida geometrik ob’ektlarning fraktal o‘lchovi aniqlanadi. Yuqoridagi o‘lchov boshqa o‘lchovlardan kasrliligi bilan farq qiladi.

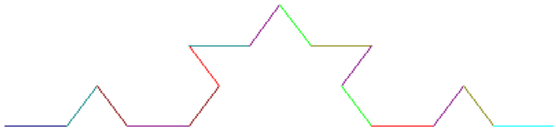
Minkovskiy-Buligan o‘lchovi [30]:

$$d_M=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln(S(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}+2. \tag{10}$$

Barcha qatiy o‘ziga o‘xshash fraktallar uchun d_M Minkovskiy o‘lchovi d_H Xausdrof-Bezikovich o‘lchovidan hisoblash xatoligi katta ekanligi ma’lum bo‘ldi. Chunki u ob’ektning ba’zi bir mayda tuzilishlarini hisobga olmaydi.

Yuqoridagilarni inobatga olgan holda geometrik ob’ektlarning fraktal o‘lchovlari aniqlanadi.

1-qadam	*x=60* *y=150* *l=400* *u=0* *t=0*		$N_1=1$, $\chi_1=1$;
2-qadam	*x=60* *y=150* *l=400* *u=0* *t=1*		$N_2=4$, $\chi_2=\frac{1}{3}$;

3-qadam	*x=60* *y=150* *l=400* *u=0* *t=2*		$N_3 = 16$, $\chi_3 = \frac{1}{9}$;

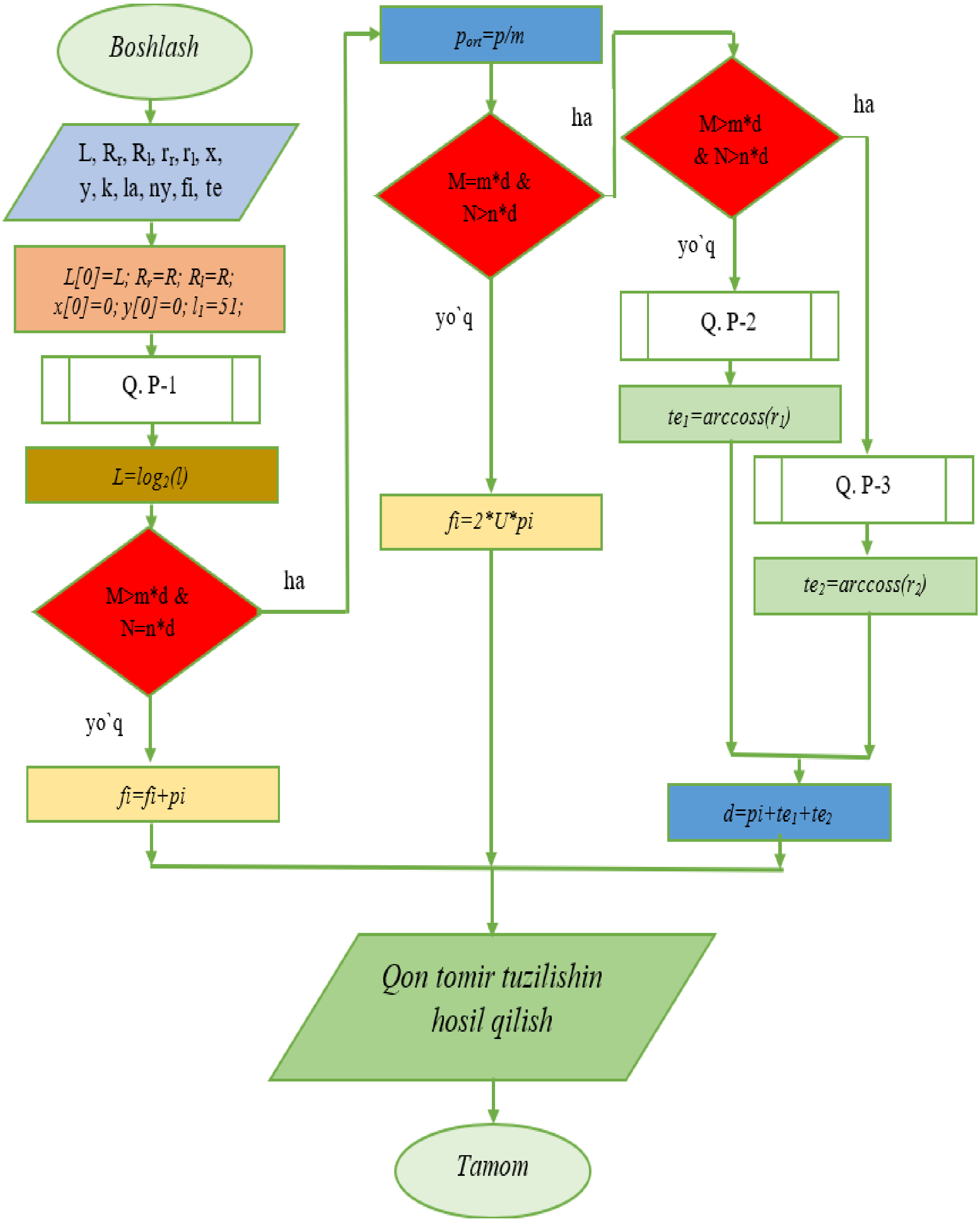
1.9-rasm. Kox egri chizig‘ining fraktal o‘lchovini topish algoritmi

x-kox egiri chizig‘ining dastlabki joylashgan nuqta abssissasi;
y-kox egri chizig‘ining dastlabki joylashgan nuqta ordinatasi;
l- kox egri chizig‘ining uzunligi;
u-kox egri chizig‘ining burilish gradusi;
t-qadamlar soni.

*n-qadam*da $N_n = 4^n$ $\chi_n = \frac{1}{3^n}$ ga teng bo‘ladi [30]. U holda Kox egri chizig‘ining fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26186. \qquad (11)$$

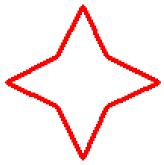
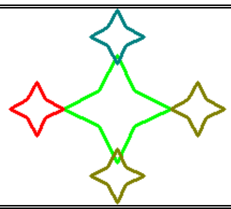
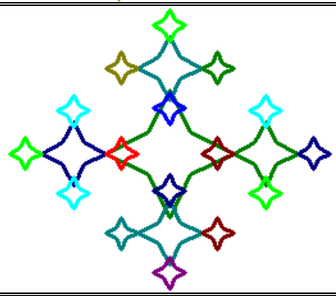
0-qadam: Egri chiziqni qurish jarayoni birlik kesmadan boshlanadi.
1-qadam: Bu kesma teng uchta bo‘lakka bo‘linadi va uning o‘rtadagisini ikkita bog‘langan shu uzunlikdagi kesma bilan xuddi yuqorida ko‘rsatilganidek almashtiriladi. Keyingi har bir qadam uchun alohida qo‘llaniladi. Natijada yangi siniq chiziq hosil bo‘ladi hamda ularning har birining uchi keyingisining uchi bo‘lib keladi. 1.9-rasmda egri chiziqning uchta ko‘rinishi keltirilgan. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, Kox egri chizig‘idan iborat fraktal hosil bo‘ladi. Ixtiyoriy *n*-qadamdan olinadigan egri chiziqlar oldfraktal deb atalishi qabul qilingan [60,98].



1.10-rasm. Qon tomir tuzilishini binar usuli yordamida vizuallashtirish algoritimining blok sxemasi

Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha turg‘un holatlarga ega. takrorlashlarning bir necha sonidan keyin dinamik tizimning holati uning boshlang‘ich holatiga bog‘liq bo‘ladi [109]. Shuning uchun har bir turg‘un holat boshlang‘ich holatning bir necha sohasini egallaydi.

1.10-rasmda qon tomir tuzilishini binar usuli yordamida vizuallashtirish algoritimining blok sxemasi keltirilgan Ranglarni tanlash algoritmini almashtirib fraktal tasvirlarni olish mumkin.

1-qadam	*n=1* *x=230* *y=230* *a=50*		$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1$;
2-qadam	*n=2* *x=230* *y=230* *a=50*		$N_2 = 4$, $\chi_2 = \frac{1}{2}$;
3-qadam	*n=3* *x=230* *y=230* *a=50*		$N_3 = 4^2$, $\chi_3 = \frac{1}{2^2}$;

1.11-rasm. To‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning o‘lchovini aniqlash algoritmi

n- qadamlar soni;

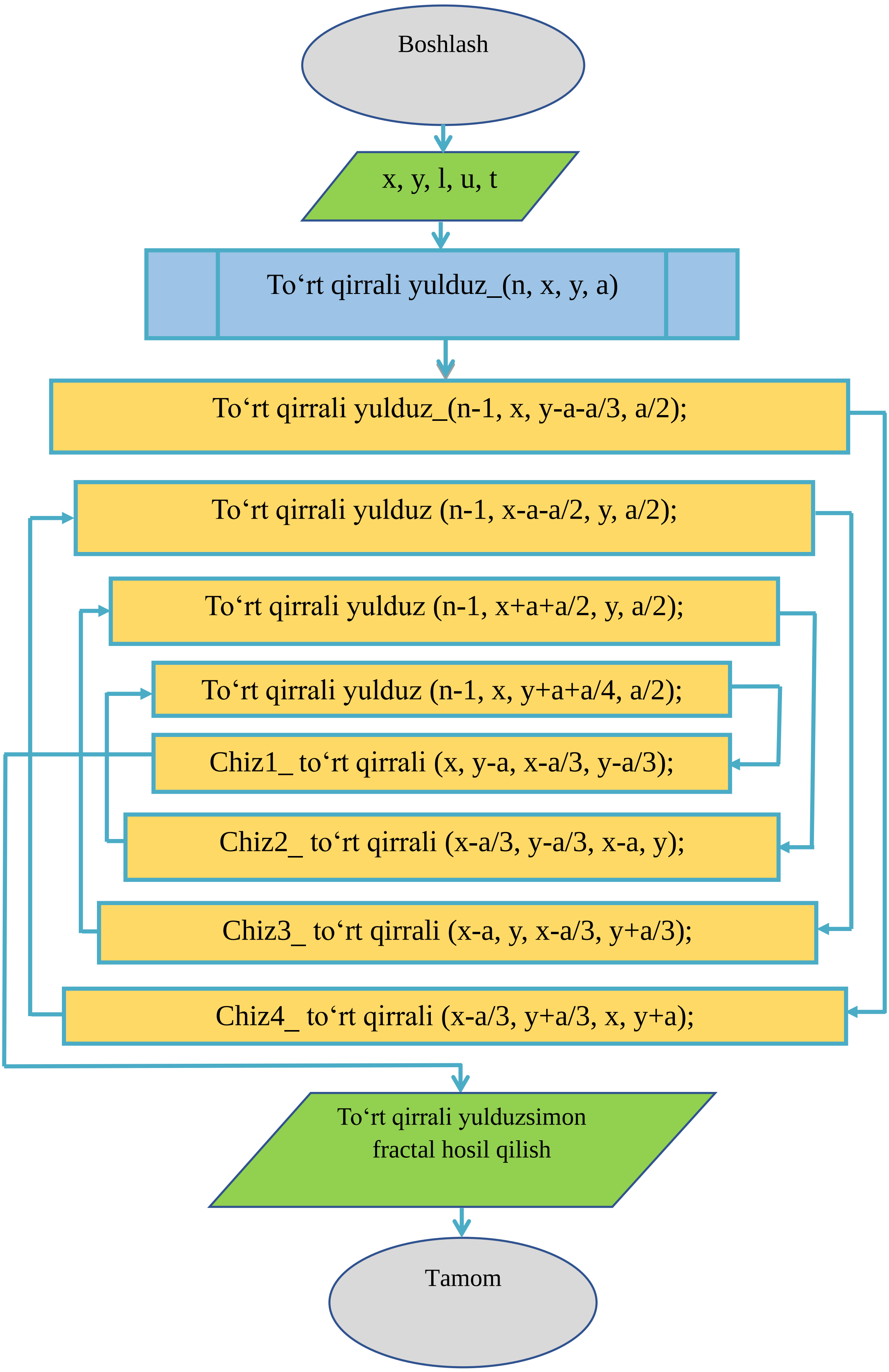
x- to‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning markazi joylashgan nuqta absissasi;

y- to‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning markazi joylashgan nuqta ordinatasi;

a- to‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning markazidan eng uzoq uchlarigacha bo‘lgan masofa.

Agar qadamlar sonini davom ettirilsa $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 4^n$ $\chi_n = \frac{1}{2^n}$, demak, to‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/2^n}\right)} = 2. \qquad (12)$$



1.12-rasm. To‘rt qirrali yulduzsimon fraktalni qurishning blok sxemasi

Kontor to‘plamning fraktal o‘lchovi:

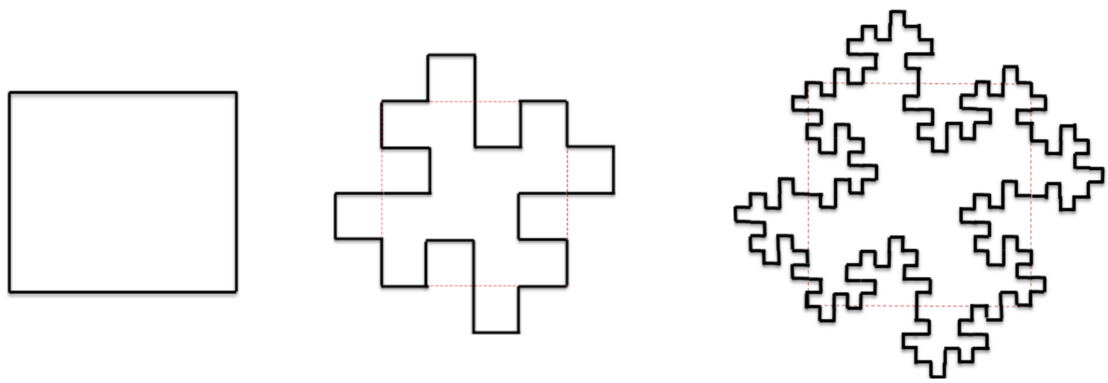
$N_1 = 1, \quad \chi_1 = 1;$ $\qquad N_2 = 2 \quad \chi_2 = \frac{1}{3};$ $\qquad N_3 = 4 \quad \chi_3 = \frac{1}{9};$

*n-qadam*da $N_n = 2^n \quad \chi_n = \frac{1}{3^n}$ ga teng bo‘ladi.

U holda Kontor to‘plamning fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(2^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/3^n}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63093. \qquad (13)$$

Given (shlyapa) fraktalining o‘lchovi:

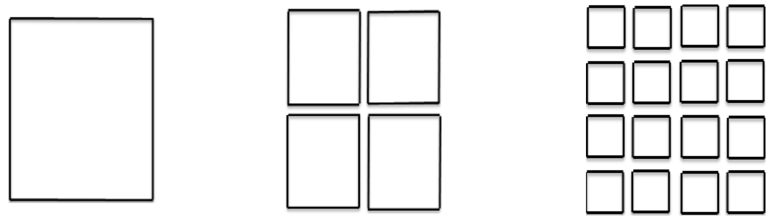


$N_1 = 1, \quad \chi_1 = 1;$ $\qquad N_2 = 8, \quad \chi_2 = \frac{1}{4};$ $\qquad N_2 = 64, \quad \chi_2 = \frac{1}{16};$

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 8^n \quad \chi_n = \frac{1}{4^n}$, demak Given egri chizig‘ining fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi\to\infty}\frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(8^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/4^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2^{3n}}{\ln 4^{2n}} = \frac{3}{2} = 1.5. \quad (14)$$

Kvadrat fraktalning o‘lchovi:

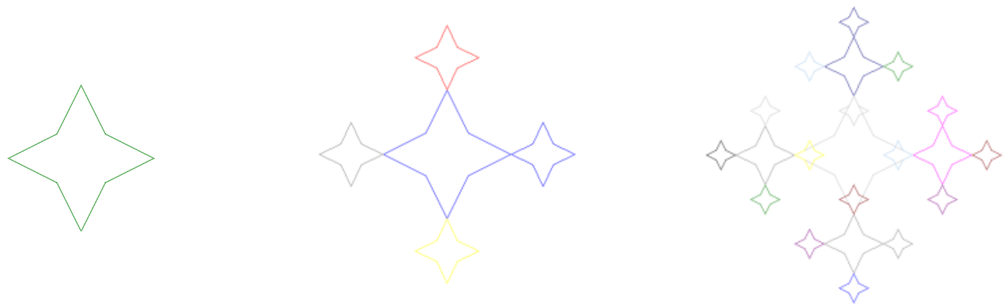


$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1$; $N_2 = 4$, $\chi_2 = \frac{1}{2}$; $N_3 = 4^2$, $\chi_3 = \frac{1}{2^2}$;

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 4^n$ $\chi_n = \frac{1}{2^n}$, demak kvadratning fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi\to\infty}\frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/2^n}\right)} = 2. \quad (15)$$

To‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning o‘lchovi:



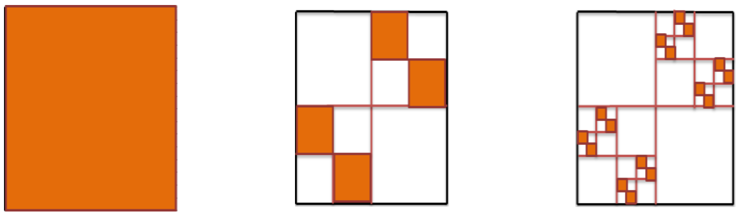
$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1$; $N_2 = 4$, $\chi_2 = \frac{1}{2}$; $N_3 = 4^2$, $\chi_3 = \frac{1}{2^2}$;

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 4^n$ $\chi_n = \dfrac{1}{2^n}$, demak to‘rt qirrali yulduzsimon fraktalning fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\dfrac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\dfrac{1}{1/2^n}\right)} = 2. \qquad (16)$$

Endi ikki o‘lchovli fraktallarning o‘lchamini hisoblashni qaraymiz.

Kvadratning bo‘yalgan holati uchun:



$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1$;

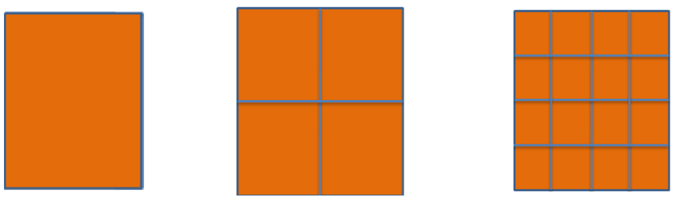
$N_2 = 4$, $\chi_2 = \dfrac{1}{4}$;

$N_3 = 16$, $\chi_3 = \dfrac{1}{16}$;

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 4^n$ $\chi_n = \dfrac{1}{4^n}$, demak kvadratning bo‘yalgan holati uchun fraktal o‘lchovi quydagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\dfrac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\dfrac{1}{1/4^n}\right)} = 1. \qquad (17)$$

Kvadrat kontor fraktalining o‘lchovi:



$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1$;

$N_2 = 4$, $\chi_2 = \dfrac{1}{2}$;

$N_3 = 16$, $\chi_3 = \dfrac{1}{4}$;

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishiladi $N_n = 4^n$ $\chi_n = \frac{1}{2^n}$, demak kvadrat kontorni fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/2^n}\right)} = 2. \qquad (18)$$

Serpin gilamining fraktal o‘lchovi (*bo‘yalgan holat uchun*):

$N_1 = 1$, $\chi_1 = 1;$ $\qquad$ $N_2 = 3$, $\chi_2 = \frac{1}{2};$ $\qquad$ $N_3 = 3^2$, $\chi_3 = \frac{1}{2^2};$

agar qadamlar sonini davom ettirsak $n-$ qadamda quyidagi natijaga erishamiz $N_n = 3^n$ $\chi_n = \frac{1}{2^n}$, demak Serpin gilamining fraktal o‘lchovi quyidagiga teng:

$$D = \lim_{\chi \to \infty} \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\chi}\right)()} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln\left(\frac{1}{1/2^n}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585. \qquad (19)$$

Yuqorida keltirilgan (9) va (19) formulalardagi $\chi -$o‘xshashlik koeffitsienti, $N-$ hosil bo‘lgan nusxalar soni.

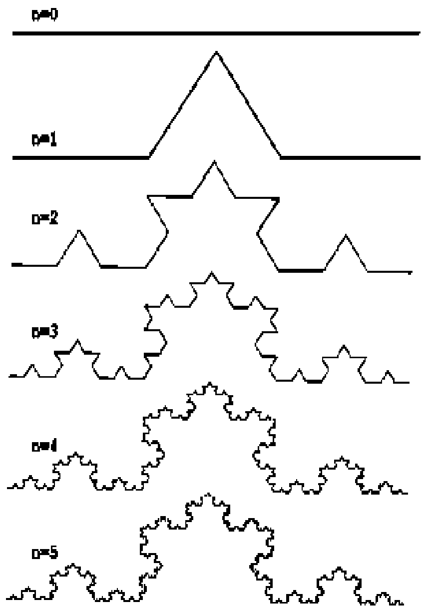
Fraktal geometrik ob’ektlarni fraktal o‘lchovlarini aniqlash algoritmlari va blok sxemalari keltirildi. Shuningdek, geometrik shakllarning fraktal o‘lchovlarini aniqlashda Xausdorf-Bezikovich va Minkovskiy-Buligan o‘lchovlaridan foydalanildi [85]. Fraktal tuzilishli tasvirlarning fraktal o‘lchovini aniqlash uchun sonli algoritmni qo‘llash kerakligi taklif qilindi va fraktal o‘lchovlar asosida tabiatdagi geometirik ob’ektlarning o‘lchovlari aniqlandi.

1.7. Fraktallarning turlari

Fraktallarni o‘rganish uchun ularni aniq sinflarga ajratish kerak bo‘ladi.

Tabiatda fraktallarning bir necha ko‘rinishini (turini) uchratish mumkin: geometrik fraktallar, algebraik fraktallar, stoxastik fraktallar va boshqalar [4,14,15,17,34,37,39,57,60,64,65,67,68,70].

Geometrik fraktallar - bu turdagi Kox triad egri chizig‘i, Levi egri chizig‘i, Gilbert egri chizig‘i, Xartera-Xeytueya ajdari nomli siniq chiziqlar, Kontor to‘plami, Serpin uchburchagi, Serpin gilami, Pifagor daraxti va hokazo kabi fraktallar guruhi eng ko‘rgazmali hisoblanadi.

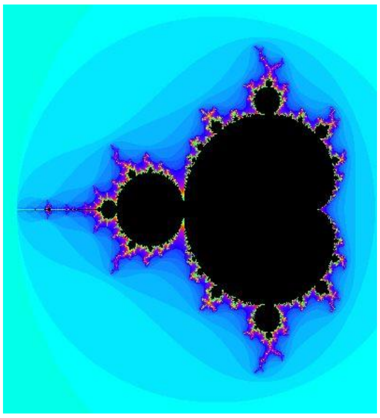


1.13-rasm. n=1,…,5 larda Kox triad egri chizig‘i

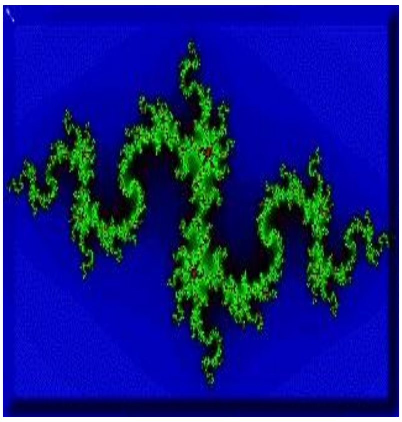
Fraktallar tarixi aynan shu fraktallardan boshlanadi. Geometrik fraktallarni loyihaviy fraktallar ham yuritiladi.

Bu turdagi fraktallar oddiy geometrik qurish yo‘li bilan shuningdek, iteratsion funksiyalar tizimi, L-tizimlar usuli, R-funksiya (Rvachev funksiyasi) usuli, arifmetik xususiyatli binomial basis ko‘phadlar nazariyasi usuli va to‘plamlar nazariyasiga asosan hosil qilinadi. Odatda bu turdagi fraktallarni qurish uchun ma’lum «kesma–aksioma–bo‘laklar yig‘indisi» kabi qoida o‘rinlidir. Masalan, Kox egri chiziqlari, Serpin uchburchaklari va boshqalar.

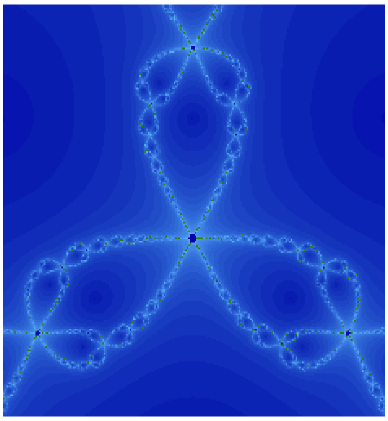
Algebraik fraktallar - fraktallarning yana bir katta guruhidir. Ular o‘z nomlariga oddiy algebraik formulalarga asosan qurilgani uchun ega bo‘lgan. Ularni nochiziq jarayonlar yordami bilan n-o‘lchovli fazolarda hosil qilinadi. Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha barqaror holatlarni o‘zida mujassamlashtiradi. Bulardan bittasi, bir necha takrorlashlar sonidan keyin boshlang‘ich shartga bog‘liq bo‘lib qoladi.



Mandelbrot fraktali



Jyulia Fraktali

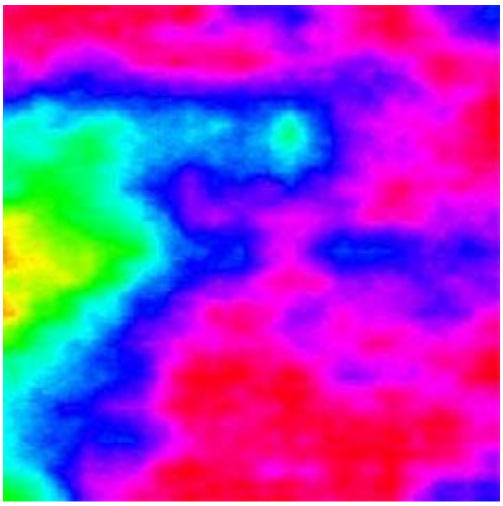


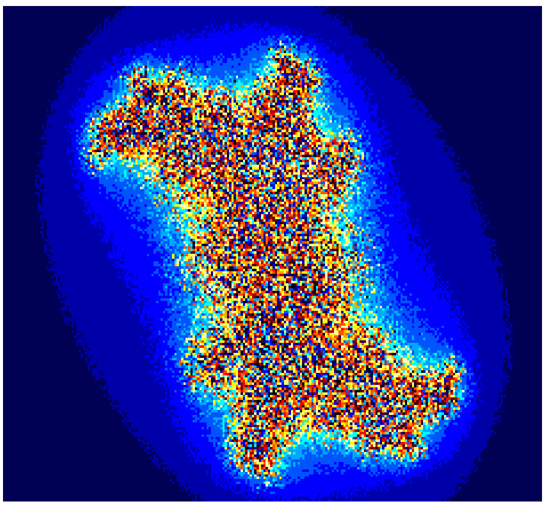
Nyuton fraktali

1.14-rasm.

Shuning uchun har bir barqaror holat, bir necha boshlang‘ich holat sohalarini o‘zida namoyon etadi. Ulardan eng taniqlilari Mandelbrot, Julia, Nyuton to‘plamlari (1.14-rasm) va boshqalar.

Stoxastik fraktallar - eng taniqli fraktallar guruhi hisoblanadi. Ular iteratsion jarayonda to‘satdan birorta parametrni o‘zgartirishi holatidan paydo bo‘ladi (1.15-rasm). «Stoxostik» termini grek so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, «faraz» (tasavvur)ni anglatadi.





1.15-rasm. Stoxastik fraktallar

Fraktallarni yana bir qiziq sinflarga ajratish mavjud. Bunda fraktallar ikkita sinfga ajaratiladi: qo‘l - ijodiy (ideal) fraktallar va tabiiy (fizik) fraktallar.

Qo‘l-ijodiy fraktallar - olimlar tomonidan o‘ylab topilgan va ixtiyoriy masshtabda fraktallar xususiyatlarini o‘zida namoyon etadigan fraktallar.

Tabiiy fraktallar - mavjudlik sohasida chegaraga ega fraktallar.

I bob bo‘yicha xulosa

Birinchi bobda kirish keltirilgan. Shuningdek, fraktallar nazariyasining paydo bo‘lish tarixi, asosiy tushunchalari, ta’riflari, turlari, fraktal o‘lchov tushunchalari keng doirada bayon etilgan. Ularning matematik formulalari ishlab chiqilgan, misollar asosida ko‘rsatib o‘tilgan.

II BOB. FRAKTALLARNING QO‘LLANISH SOHALARI

Tabiatdagi ko‘plab ob’ektlar fraktal xususiyatlarga ega, masalan, qirg‘oqlar, bulutlar, daraxt shoxlari, qor parchalari, insonning qon aylanish tizimi, yurak-qon tomirlar tizimi, o‘pka nafas olish organlari tizimi va boshqalar.

Hozirgi kunda fraktallar rivojlanishning barcha sohalarda, shuningdek fanda tobora ko‘p qo‘llanilmoqda. Buning asosiy sababi shundaki, ular real dunyoni ba’zan an’anaviy fizika yoki matematikadan ham yaxshiroq tasvirlaydilar.

Fraktal tasvir zamonaviy san’atning yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, raqamli tasvirlar bilan ishlaydigan rassomlar orasida mashhurdir. Fraktal tasvirlar tomoshabinni g‘ayrioddiy hayratga soluvchi ta’sirga ega bo‘lib, yorqin porloq tasvirlarni yuzaga keltiradi.

2.1. Fraktallar nazariyasini ma’lumotlarni qayta ishlashda qo‘llash

Fraktallar nazariyasining rivojlanishi, matematikaning juda mavhum sohalarida erishilgan yutuqlarga teng ravishda fanning yangi yo‘nalishini takomillashtirishning yorqin namunasidir.

Fraktallar nazariyasi juda yosh va jadal rivojlanmoqda, ammo fraktallar to‘g‘risidagi barcha tasavvurlar yetarli darajada hal etilmagan hamda turli sohalarda munozarali masalalar ko‘p uchraydi. Hozirgi kunda tasvirlarni fraktal qayta ishlash vazifasi ham ilmiy, ham amaliy nuqtai nazardan katta qiziqish o‘yg‘otmoqda. Ishlab chiqarishning turli sohalarida fraktallar nazariyasidan foydalanish avval foydalanilmagan katta zaxiralarni kashf etish va ularni turli ilmiy-texnikalar sohasida qo‘llash imkonini beradi.

Fraktallardan foydalanish. Birinchidan, tasvirlarni fraktal tarzda siqish, ikkinchidan, peyzajlar, daraxtlar, o‘simliklarni qurilish va fraktal to‘qimalarni yaratish. Shuningdek, fraktallar matematikada ham qo‘llaniladi. Tasvirlarni fraktal siqish yordamida fayl hajmini sezilarli darajada kamaytirish mumkin. Mexanika va fizikada fraktallar ko‘plab tabiat ob’ektlarining konturlarini takrorlashning noyob xususiyati tufayli qo‘llaniladi. Fraktallar daraxtlar, tog‘ sirtlari va yoriqlarini segmentlar yoki ko‘pburchaklar to‘plamlari ko‘rinishida berilgandan ko‘ra yuqori aniqlikda olish imkonini beradi.

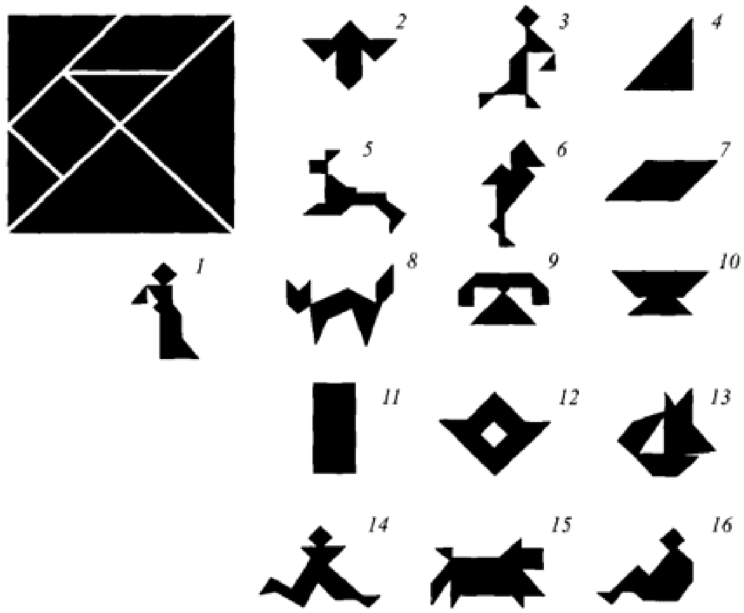
Fraktallar nazariyasi asosida tasvirlarni tanib olish. Tasvirlarni tanib olish olingan ob’ektni qaysi sinfga o‘tkazish mumkinligi haqidagi savolga aniqlik kiritib belgilanadi. Ta’kidlash mumkinki, tanib olish muammosi ko‘plab vazifalarni qamrab oladi. Bular sinflar alifbosi va belgilar lug‘atini qurish, shuningdek, tanib olish jarayonlarini matematik va kompyuterda modellashtirish hamda axborotlarni qayta ishlash usullari. Amaliyotda har qanday masalaning o‘ziga xos xususiyati ishlatiladigan axborot turiga qarab belgilanadi. Radarni tanib olish belgilarining ishchi lug‘ati har doim imzolarni ishlatadi. Ular radar ob’ektlarning koordinatalari bilan bevosita bog‘liq bo‘lmagan aks ettirilgan signallarning fazoviy, vaqtinchalik, spektral va polarizasiya tuzilishini o‘z ichiga oladi. Ishchi lug‘at tarkibi bo‘yicha yakuniy qaror ob’ektlarni sinflarga bo‘lingan holda tasniflash vazifasidan tashqarida qabul qilinishi mumkin emas. Sinflar alifbosi va belgilarning so‘z birikmalarini topish vazifalari tanib olish va saralash uchun u yoki bu hal qiluvchi qoidalar-algoritmlardan foydalanish bilan bevosita bog‘liq. Hozirgi vaqtda tanlab olingan signallar yoki maydonlar topologiyasi va fraktal primitivlar tushunchalarini ishlatib tasvirni aniqlashga yangi integrasiyalashgan yondashuv taklif qilingan.

Ob’ektlarning fraktalli tasnifi va klasterlanishi. Tasniflash – bu ob’ektlarning o‘xshashligi, shu jumladan jarayonlar va harakatlar bo‘yicha tartiblash. Tasniflash masalasining umumiy qo‘yilishi stoxastikdir, chunki belgilarning vektorlari har doim shovqin va shovqin-suron tufayli ehtimollik taqsimotiga ega. Agar turli xil ob’ektlar va fon shovqinlari optik yoki radar tasvirda bo‘lsa, unda deskriptor vektorlari ob’ekt imzolari atrofida guruhlangan bo‘lib, ajratish maydoni kam to‘ldiriladi. Shunday qilib, ba’zi boshlang‘ich to‘plamlarning sinflarga bo‘linishida yaqinlik yoki o‘xshashlik mezoniga ko‘ra klasterlash muammosi paydo bo‘ladi. Deskriptor maydonidagi klaster o‘lchamlari klaster ichidagi belgilarning o‘xshashligi bo‘yicha berilgan o‘lchov bilan aniqlanadi.

Tasvirlarni testlashni fraktalli tanib olish algoritmi. Tasvirlarni testlashni fraktalli tanib olish algoritmlari paradigmani ishlatishga asoslanadi (maqsad topologiyasi uning fraktal o‘lchovidir). Fraktalli tanib olish algoritmlarining uslubiy asosi topologik konstantalarni rad etish va belgilarni sinflarda fraktal o‘lchovlar yoki fraktal imzolar shaklida tavsiflashdir. Determinallashgan yoki ehtimollik xususiyatlarining maydoni odatda dinamik testlash yordamida aniqlanadi. Tanib olishning aniq masalalarini o‘rganish uchun eng yaxshi testlash materiali ob’ektni tanib olish muammosiga to‘g‘ri keladigan tahlil qilingan ma’lumotnomalar to‘plamidir. Biroq, tanib olishning turli xil muammolaridagi har bir tasvir turining xususiyatlari tanib olish jarayonining umumiy qonuniyatlarini kuzatishni qiyinlashtiradi. Shu sababli, universal test materialidan foydalanish haqida savol paydo bo‘ladi. Har qanday tabiatdagi tasvirlarning ko‘rinishini aniqlash masalalarini o‘rganish uchun universal testlash materiallari sifatida “Tangram”dan iborat figuralar to‘plami ishlatilgan. Kompyuter tajribalarida 16ta Tangramdan: ko‘pburchaklar, sun’iy inshootlarning siluetlari, samolyotlar, kema, odam va hayvonlardan foydalanilgan (2.1-rasm).

Fraktal o‘lchovni baholashdagi yuqori sezuvchanligi tasvirlardagi uzluksiz konturlar mavjudligiga ob’ektlarning konturlarini va ularning shovqinlarini filtrlash imkoniyatini taklif qiladi. Fraktal algoritmdan foydalanib, juda kuchli shovqin (chang, tutun) sharoitida olingan avtomobil raqamlarini, tasvirlarni aniq ajratish mumkin. Tasvir konturini filtrlash algoritmi lokal fraktal o‘lchovni baholashga asoslangan.

Hozirgi vaqtda tasvirlarni raqamli qayta ishlashda rivojlanayotgan va istiqbolli yo‘nalishlardan biri fraktal tahlildan foydalanishdir. Fraktallar o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatlariga ega, turli xil masshtablarda ko‘rib chiqilganda ob’ekt xususiyatlarining aniq yoki ehtimoliy takrorlanishini anglatadi. O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyati tasvir xususiyatlarining statistik hatti-harakatlarida ma’lum qonuniyatlarga olib keladi, natijada tasvirlarni fraktal xususiyatlar bo‘yicha aniqlik bilan tasvirlash mumkin bo‘ladi. natijada tasvirlarni fraktal xususiyatlar bo‘yicha aniqlik bilan tasvirlash mumkin bo‘ladi. Ushbu yo‘nalishning rivojlanishiga ko‘pgina tasvirlarni ma’lum darajada fraktal yoki multifraktal deb hisoblash mumkinligi yordam beradi. Shuning uchun har qanday tasvir fraktal ob’ektlarning xususiyatlari va xarakteristikariga ega, bular ko‘rish ko‘lami hamda aylanishning o‘zgarmasligidir. Hozirgi kun talabi tasvirlarni fraktalli qayta ishlashning yangi usullarini ishlab chiqishni va foydalanishni tavsiya etadi.



2.1-rasm. 16 ta Tangramdan iborat figuralar to‘plami

Tasvirlarni qayta ishlashning yangi usullarini yaratishga asos tasvirni nazariy nuqtai nazaridan tavsiflashga imkon beradigan tasvirlar modelidir. Shuning uchun tasvirning fraktal xususiyatlariga asoslangan modelini ishlab chiqish va tadqiq qilish kerak. Bunday holatda fraktal tasvir modeli haqida fikr yuritamiz. Ma’lumki fraktallarni qurish uchun iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT) usulidan foydalanishdir.

Tasvirlarni fraktalli qayta ishlashning yangi usullarini yaratish uchun tasvirning fraktal modelini ishlab chiqish kerak. Tasvirning fraktal tavsifiga ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan yondashuvlardan biri muntazam fraktal ob’ektlarni qurish uchun ishlatiladigan IFTdan foydalanish hisoblanadi.

Bunda tasvirni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$f = \sum_{i}^{M} \left(B_{n_i,m_i}^{r_i}\right) * \left[R_i\right]. \tag{1}$$

Har bir rang bloki R_i ga domen bloki D_i va hamda T_i almashtirish mos tushadi u quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$R_i = T_i\left(D_i\right) = A_i\left(D_i\right) + C_i. \tag{2}$$

Blokni chiqarish operatoridan foydalanib, domen bloki quyidagicha qayta yozish mumkin:

$$D_i = B^{d_i}_{k_i, I_i}\left[f\right]. \qquad (3)$$

(1), (2) va (3) larni hisobga olgan holda tasvir tuzilishini quyidagicha yozib olamiz:

$$f^{\,I} = \sum_{i}^{M} \left(B^{r_i}_{n_i, m_i}\right) * \left[A_i\left(B^{d_i}_{k_i, I_i}\left[f\right]\right) + C_i\right]. \qquad (4)$$

(4) ifoda tasvirning ***fraktal modeli*** deb ataladi. Har bir tasvirning fraktal kodi *F* ushbu modeldagi parametrlar bilan tavsiflanadi.

Rang bloklarining ro‘yxati: $R = \{R_i\};\ R_i = \{r_i, n_i, m_i\}$.

Domen bloklarining ro‘yxari: $D = \{D_i\};\ D_i = \{d_i, k_i, I_i\}$.

Mos almashtirishlar: $D = \{D_i\};\ D_i = \{d_i, k_i, I_i\}$.

Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda tasvirning fraktal kodini ifodalaydigan operator topiladi:

$$F\left(f\right) = \Phi. \qquad (5)$$

Tasvirning fraktal modeli asl tasvirni parametrlaridan tiklashga imkon beradi. Shuning uchun tasvirni fraktal kod orqali tiklash operatori joriy qilinaladi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f^{\,I} = F^*\left(\Phi\right). \qquad (6)$$

Ushbu model tasvirni fraktallar to‘plami sifatida taqdim etish imkonini beradi, ya’ni o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning lokal xususiyatlarini belgilaydi.

Mazkur ishlar adayotlarda iterasion funksiyalar tizimlari (IFT)dan foydalanilib tasvirlarning fraktal modellarining bayoni keltirilgan. Tasvirlarning fraktal modelidan foydalanib, tasvirlarning fraktal belgilarini olish mumkin bo‘ladi. Tanib olish uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan tasvirlarning belgilaridan biri bu tasvirdagi eng xarakterli joylarni aks ettiradigan o‘ziga-o‘zi o‘xshash lokal belgilarini tarqatishdir.

Tasvirning fraktal kodini tavsifi. Raqamli tasvirning fraktal modeliga asoslanib, har bir tasvir o‘zining fraktal kodi bilan tavsiflanadi, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\mathrm{R_i} = \left\{ \mathrm{I}^{\mathrm{R_i}}, \mathrm{D}, ..., w_{\mathrm{i}} \right\}, \quad \mathrm{I}^{\mathrm{R_i}} = \left\{ \mathrm{I_1}^{\mathrm{R_i}}, \mathrm{I_2}^{\mathrm{R_i}}, ..., \mathrm{I_M}^{\mathrm{R_i}} \right\}, \quad w_{\mathrm{i}} = \left\{ \tilde{w}_{\mathrm{i}}, \mathrm{S_i}, ..., \mathrm{O_i} \right\} \quad (7)$$

bu yerda F, D-domeni bloklari va R-rang bloklari to‘plamlaridan iborat tasvirning fraktal kodi. Ranglar bloki indeksi-tasvirdagi daraja blokining o‘rnini belgilaydigan vektor. Har bir rang bloki o‘zida $\mathrm{I}^{\mathrm{R_i}}$, D domen blokini, joriy rang blokini eng aniq approksimasiyalaydigan va ifodalaydigan w_{i} o‘zida saqlaydi.

w_{i} almashtirish $\tilde{w}_{\mathrm{i}}$ tekislikdagi affin almashtirishlarni, $\mathrm{S_i}$ almashtirish kontrastini va $\mathrm{O_i}$ tiniqlikni o‘zida ifodalaydi:

$$\mathrm{R_i} \approx w_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{D_i}\right) = \mathrm{S_i}\left(\tilde{w}_{\mathrm{i}}(\mathrm{D_i})\right) + \mathrm{O_i}.$$

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning lokal belgilarining taqsimlanishi. D vektori tasvirlarning fraktal kodidan qayta qurish uchun ishlatilishi mumkin bo‘lgan tasvirning domen bloklari ro‘yxati. Ushbu vektor fraktal kod hosil bo‘lishidan oldin hosil bo‘ladi va fraktal kodsiz tasvir uchun olinishi mumkin.

Ammo, aksariyat tasvirlar mutlaqo o‘ziga-o‘zi o‘xshash emas ekanligiga asoslanib, barcha domen bloklari asl tasvirni tiklash uchun foydalanilmasligi mumkinligi aniqlanadi.

Shunday qilib, “$\mathrm{D} = \left\{ \mathrm{D_i} \right\}$” domen bloklari to‘plamidan foydalanilgan domen bloklarining bir qismini ajratib ko‘rsatish mumkin, $\mathrm{Du} = \left\{ \mathrm{Du_i} \right\} \in \mathrm{D}$ bu tasvirning o‘ziga o‘xshash qismlarini aks ettiradi.

So‘nggi paytlarda signallarni tahlil qilish uchun turli xil matematik usullar qo‘llanilmoqda. Signalni tahlil qilishning fraktal usullari va to‘lqin uzatish moslamalari ko‘proq qo‘llaniladi.

Fraktal usullar – maydonlar va signallarni qayta ishlashning tubdan yangi usullari. Ular signallar va tasvirlar makonining fraktal topologik o‘lchamlarini, fraktal integrallari va hosilalarining matematik apparati (kasrlar operatorlari) hamda o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik yoki masshtablash xususiyatlaridan foydalanadilar. Aslida radio fizikasi, radioelektronika va boshqaruv nazariyasida yangi fundamental yo‘nalish-xaos nazariyasi, fraktal o‘lchov nazariyasi hamda shkalali invariantlarni zamonaviy muammolar va turli xil maqsadlar uchun tizim hamda qurilmalarning axborot tarkibini oshirish usullarida qo‘llash haqida fikrlahsamiz. Weyvlet tahliliga asoslangan tahlil usullari o‘rganilayotgan segment haqida aniq tasavvur bera oladigan, signalning chastota-vaqt vakili bilan ta'minlaydigan, ma'lum asosda signalni yaratadigan usullar toifasiga kiradi, fraktal usullar esa o'ziga-o'zi o'xshash signallarni tuzishga asoslangan.

Fraktal signal (FS)larni qayta ishlash uchun mashtab koeffisiyenti *a* va weyvlet amplitudasi U_0 orasidagi giperbolik bog'liqlik asosida fraktal weyvlet (FW) hosil qilamiz. Bunday bog'liqlik ko'rib chiqilayotgan holatda FW shakllanishida ishtirok etgan to'lqinlarning tarkibiy qismlarini signallarining keng miqyosli o'zgarmasligiga olib keladi.

FS va FW misollaridan foydalanib nolinchi va birinchi gomeomorfik tarkibiy qismlari asosida olingan signal va weyvlet (to'lqin)ning weyvlet qayta ishlashni qaraymiz. Bu holatda fraktal signal va weyvlet uchun matematik ifodalar quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\mathrm{U}(\mathrm{t})=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{U}_0}{k^{\mathrm{n}}}-\cos\left(2\pi\cdot\mathrm{f}\cdot k^{\mathrm{n}}\cdot\mathrm{t}\right). \tag{8}$$

$$\psi(a,b)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\ -1\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^2-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^2\right]\frac{\mathrm{U}_0}{k^{\mathrm{n}}}. \tag{9}$$

bu yerda N=1; k=2; *a*=0.25; U_0=0.75; *b*=-2; -1.99, …, 2.
(9) ifodada, 1 qiymati FWni o'zgartirishga imkon beradi.

Fraktal signalga weyvlet ishlov berish va weyvletning skalyar mahsulotini hisoblashga imkon beradi hamda keyinchalik mahsulotning integrasiyasi kuzatiladi.

$$\mathrm{w}(\mathrm{t},b)=\int_{\mathrm{t}}\mathrm{U}(\mathrm{t})\cdot\psi(\mathrm{t},b)\mathrm{dt}.$$

Fraktal signal va shovqinning kombinatsiyasida weyvlet ishlov berishini ko'rib chiqamiz. Weyvlet ishlov berish o'zida fraktal signallar va shovqinlar hamda bazis funksiyalar (weyvletlar) birlashmasining skalyar mahsuloti bo'lgan uzluksiz weyvlet almashtirishga o'tkazadi:

$$U_{wq}=\sum_{m=1}^{M}U_m\cdot\psi_{m,m_1}.$$

bu yerda U_{wq} - weyvlet qayta ishlash natijasida tiklangan FS, M-yig‘indining yuqori chegarasi va u M=500.

Fraktal weyvletdan foydalanib fraktal signalni weyvlet qayta ishlashni bajaramiz [9]:

$$\psi_{m,m_1}=\sum_{n=0}^{N}-1\cdot U\cdot k^{n}\left[\left(\frac{t_m-b_{m_1}}{a\cdot k^{-n}}\right)^2-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t_m-b_{m_1}}{a\cdot k^{-n}}\right)^2\right].$$

ψ_{m,m_1} weyvlet $t=m\cdot\Delta t$ o‘zgaruvchida hosil qilingan, bu yerda $m=750,\ \Delta t=0{,}01$ bo‘lib u qadamning o‘zgarishidir.

Siljish parametri $b_{m_1}=0{,}85+m_1\cdot\Delta b$ $m_1=200,\ \ \Delta b=0{,}02$)-o‘zgarish qadami 0.02 siljishlar qadamini hisobga olgan holda weyvletni olishga imkon beradi.

Fraktal signallar va shovqinning qo‘shimcha aralashmasi uchun ifodani quyidagi ko‘rinishda yozamiz [10]:

$$U_{n,m}=u_n+u_m=\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{U_0}{k^n}\cos\left(2\pi\cdot f\cdot k^n\cdot t_n\right)\right]+rnd(0{,}05).$$

bu yerda $rnd(0{,}05)$ yagona qonunga muvofiq taqsimlangan shovqin modeliga asosan tasodifiy raqamlarni ishlab chiqaradigan zamonaviy dasturning ichki funksiyasi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlash quyidagi ifoda bo‘yicha amalga oshiriladi [8, 9]:

$$W_m=\sum_{m=1}^{M}\left\{\left(\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{U_0}{k^n}\cos\left(2\pi\cdot f\cdot k^n\cdot t_n\right)\right]+rnd(0{,}05)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{n=0}^{N}-1\cdot U\cdot k^n\left[\left(\frac{t_m-t_{m_1}}{a\cdot k^{-n}}\right)^2-1\right]\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t_m-t_{m_1}}{a\cdot k^{-n}}\right)^2\right]\right\}. \qquad (10)$$

bu yerda W_m - fraktal weyvlet filter chiqish signali.

Radiotexnika tizimlarining hozirgi rivojlanish bosqichi xaotik signallar sinfini o‘z ichiga olgan murakkab (keng polosali) signallarning intensiv rivojlanishi va keng qo‘llanilishi bilan tavsiflanadi. Bu sinfda klassik chastota modulyasiyasi (ChM), faza modulyatsiyasi (FM) tebranishlari, shuningdek M−ketma-ketliklar kabi signallar bilan solishtirganda o‘ziga xos xususiyatlarga ega bo‘lgan fraktal signallar (FS) alohida o‘rin egallaydi. Odatda, FSni aniqlash va tanib olish muammolarida, tahlilning birinchi bosqichi bunday signalni tavsiflovchi xususiyatlarni aniqlashdan iborat bo‘ladi. FS hosil bo‘lishi va shakllanishining o‘ziga xos xususiyati bilan bog‘liq holda, FSning aniq parametrlarini, xususan, tasodifiylik darajasini, shuningdek fraktal o‘lchovni ham baholashga imkon beradigan bunday signallarni tahlil qilish va qayta ishlashning yangi usullarini izlash kerak bo‘ladi.

Fraktal signal va weyvlet almashtirish. Fraktal signalning tuzilishi o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik gipotezasiga asoslanadi, bu cheksiz bir xil (gomeomorfik) ob’ektlarni bir-biriga joylashtirilishiga imkon beradi. Bundan tashqari, ob’ekt faqat hajmda kamayadi, lekin asl ob’ektga nisbatan gomeomorf bo‘lib qoladi. Bunday ob’ektlarni yo‘naltiruvchi fraktal signalni shakllantirishda (asosiy) tebranishgacha gomeomorfik individual deterministik signallar (masalan, gormonik signallar, shuningdek burchakli modulyatsiyaga ega signallar) tushunilishi kerak. Fraktal o‘lchov Gelder ko‘rsatkichlari bilan bevosita bog‘liq bo‘lib, ular o‘z navbatida to‘lqinlar yordamida aniqlanadi. Bu munosabatlar weyvlet almashtirish (WA) yordamida fraktal signallarning asosiy parametrlarini tahlil qilish mumkiligini taklif qiladi. Signal tahlili deganda nafaqat uning sof matematik o‘zgarishini, balki ushbu o‘zgarishga asoslangan va mos keladigan signal (jarayon) yoki ob’ektning o‘ziga xos xususiyati to‘g‘risida xulosalar chiqarish ham tushuniladi.

Bir o‘lchovli signalni to‘lqin uzatishning mohiyati uni keng miqyosli o‘zgartirish va uzatish orqali solitonga o‘xshash asosiy funksiya (to‘lqin)da kengaytirishdan iborat.

WA asosining elementi kichik intervaldan tashqarida tezda “0” ga intiluvchi yaxshi mahalliylashtirilgan funksiya bo‘lib, bu lokalizatsiya qilingan signallarni tahlil qilish imkonini beradi. Boshqacha aytganda, WA avtomatik ravishda harakatlanadigan vaqt chastotasi oynasiga ega, kichik masshtablarda tor va katta masshtablarda keng. L^2 (R) asosiy funksional fazoning uzluksiz masshtabli almashtirishlar va weyvlet uzatish $\psi(t)$ yordamida asosiy parametrlarning ixtiyoriy qiymatlari - shkalaning faktori va b siljish parametrlari yordamida ko‘rib chiqiladi.

$$\psi_{a,b}(\mathrm{t}) = |a|^{-0,5}\,\psi\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right),\quad a,b\in\mathrm{R},\quad \psi\in L^2(R). \tag{11}$$

Ko‘rib chiqilgan bazisga asosan integral WAni yozamiz:

$$\mathrm{W}(a,b) = |a|^{-0,5}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{t})\,\psi^*\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right)\mathrm{dt} = \int \mathrm{f}(\mathrm{t})\,\psi_{ab}^{\ *}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}. \tag{12}$$

(12)dan kelib chiqadiki, $L^2(R)$ dan har bir funksiyani o‘zgarishlarning superpozitsiyasi va basiz weyvletning siljishi bilan olish mumkin, ya’ni to‘lqinlar soniga (chastota, masshtab) va siljish parametriga (vaqtga) bog‘liq bo‘lgan koeffisiyentli “weyvlet to‘lqinlari” ning tarkibiy qismidir. Shunday qilib, ushbu basizning har bir funksiyasi signalning ma’lum bir chastotasini ham, vaqt o‘tishi bilan uning lokalizasiyasini ham tavsiflaydi.

Signallarni tahlil qilish uchun weyvletlarni qo‘llaganda doimiy WA (2) o‘rinli bo‘ladi. Uning shkalasi faktorining o‘zgarishi *a* va *b* siljish parametrining uzluksiz o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan uning qisqarishi bu yerda ijobiy sifatga aylanadi, chunki signal tarkibidagi ma’lumotlarni to‘liq va aniq taqdim etish hamda tahlil qilish imkonini beradi.

Fraktal to‘lqin. FSning xususiyati uning parametrlarining giperbolik bog‘liqligidir, shuningdek, *k* o‘xshashlik koeffisiyenti bilan belgilanadigan o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikdir. FSga o‘xshashligi bilan fraktal weyvlet (FW) tushunchasi kiritiladi. FW orqali o‘lchov kiritiladi, bunda *a* masshtabida va siljish parametrlari *b*, *k* koeffisiyenti bilan aniqlanadigan giperbolik bog‘liqlik bilan bog‘lanadi.

“Meksika shlyapasi” weyvleti asosida quyidagi ifodani ishlatib:

$$\psi(\mathrm{t},a,b) = \left[\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right)^2 - 1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b}{a}\right)^2\right]. \tag{13}$$

FW qurilishini ko‘rib chiqamiz.

(13) ifodada bayon etilgan weyvlet harakatini b=0 va a masshtabni k^n koeffisiyentga bo‘lamiz, bu yerda n quyidagi qiymatlar 0, 1, 2, …, N-1 ni qabul qilganda tahlil qilamiz:

$$\psi\left(\mathrm{t},a,b\right)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}\cdot k^{n}}{a}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}\cdot k^{n}}{a}\right)^{2}\right]. \qquad (14)$$

Bunday holda masshtab koeffisiyenti *a* chiziqli qonunga muvofiq kamayadi. *n* kattalashgan sari, a/k^{n} masshtab qiymati kamayadi, bu esa (*n* = 1) komponentlar weyvletiga nisbatan (n = 0) komponent to‘lqinining asosiy bo‘lagining torayishiga olib keladi.

Belgilangan o‘lchov qiymatida (*a* = 1 = const) va *b* siljish qiymatga qarab o‘zgarganda weyvletning holatini ko‘rib chiqaymiz:

$$\psi_{\mathrm{b}}\left(\mathrm{t},a,b\right)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{n}}{a}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}\right]. \qquad (15)$$

Bunday holatda fiksirlangan *a* da, weyvlet o‘zgarishi k^n o‘zgaruvchanligi qonuniga muvofiq ortib boradi. (14) va (15) ifodalardan ko‘rinib turibdiki k^n koeffisiyenti orqali *a* masshtab va *b* parametrlar o‘rtasida fraktal tuzilishlarga xos bo‘lgan giperbolik bog‘liqlik mavjud. (14) va (15) ga asoslanib, fraktal weyvlet uchun matematik ifoda yozamiz:

$$\psi_{\mathrm{ab}}\left(\mathrm{t},a,b\right)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a\cdot k^{-\mathrm{n}}}\right)^{2}\right]. \qquad (16)$$

Shuningdek FS uchun *n*=0 da weyvlet tayanch deb ataladi, qolganlari gomeomorfikdir.

(16) ga asosan, FWni tashkil etuvchi komponentllar chiziqli qonunga muvofiq bir-biriga nisbatan masofani bir vaqtning o‘zida kattalashtirish (cho‘zish) bilan siljiydi. Shuni ta’kidlash kerakki, weyvletlarni tarkibi asosiy weyvlet darajasida normallashtirilgan. Weyvlet darajasini normallashtirish amplitudalarga muvofiq amalga oshiriladigan FS tarkibiy qismlari ifodasi quyidagicha:

$$\psi_{b}\left(\mathrm{t},a,b\right)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}}\left[\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}-1\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{t}-b\cdot k^{\mathrm{n}}}{a}\right)^{2}\right]\frac{\mathrm{U}_{0}}{k^{\mathrm{n}}}.$$

bo‘ladi.

Tasvirlar ma’lumot manbai sifatida ko‘rib chiqilganda keng ko‘lamli muammolar mavjud bo‘lib, ular asosida qaror qabul qilish mumkin. Bunday muammolarni hal qilish uchun asos sun’iy intellekt tizimlarining yaratilishi bilan bog‘liq. Ayniqsa faol rivojlanayotgan naqshlarni aniqlash nazariyasida.

Fraktal signalni ajratish uchun fraktal weyvlet ishlab chiqilgan uni parametrlarining giperbolik bog‘liqligi (aloqasi)ga asoslangan bo‘lib, fraktal tuzilmalarning hal qiluvchi xususiyati hisoblanadi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlash signal buzilishini aniqlash uchun signallarning strukturasini, shuningdek, ularning mahalliy hududlarini vizual tahlil qilish imkonini beradi.

Fraktal signallarni weyvlet qayta ishlashning boshlanishi bilan shovqin yumshatiladi va samarali signal chiqariladi.

Fraktal signallarni qayta ishlashning weyvlet tarkibiy sxemalarini sintez qilish imkoniyatini ko‘rib chiqish tavsiya etiladi.

2.2. Fraktallar nazariyasi va fraktal grafikani texnikada qo‘llash

Grafikada fraktallar. Kompyuter grafikasi fanida fraktallardan eng samarali foydalanish bu fraktal ma’lumotlarni siqishdir. Ushbu turdagi siqishni haqiqiy dunyoni fraktal geometriya tomonidan yaxshi tasvirlanganligiga asoslanadi. Shu bilan birga, rasmlar an’anaviy usullar bilan (masalan, jpeg yoki gif) ishlov berilganidan ko‘ra yaxshiroq siqiladi. Fraktal siqishni yana bir afzalligi shundaki, tasvir kattalashganda pikselasiya effekti kuzatilmaydi (nuqta o‘lchamini tasvirni buzadigan o‘lchamlarga ko‘paytirish). Fraktal siqish bilan kattalashgandan so‘ng, rasm ko‘pincha avvalgidan ko‘ra aniq va yaxshiroq ko‘rinadi. Fraktallar kompyuter grafikasida keng qo‘llaniladi - daraxtlar, butalar, dengizlar yuzasi, tog‘ landshaftlari va boshqa tabiiy ob’ektlarning rasmlarini yaratishda. Fraktal grafika tufayli rasmlari tabiiy ob’ektlarga o‘xshash murakkab Evklid bo‘lmagan ob’ektlarni amalga oshirishning samarali usuli ixtiro qilindi: bular har qanday rasm nusxasini iloji boricha asl nusxaga yaqinroq qaytarish imkonini beradigan fraktal koeffisiyentlarni sintez qilish algoritmidir. Qizig‘i shundaki, fraktal “rasm”dan tashqari, fraktal musiqa va fraktal animatsiya ham mavjud. Tasviriy san’atda tasodifiy fraktalning tasvirini olish bilan bog‘liq bo‘lgan yo‘nalish mavjud - “fraktal monotip” yoki “stoxatipiya”dir.

Fraktal grafikaning matematik asosini fraktal geometriya tashkil etadi, bu yerda asl “ota-ona ob’ektlari” dan meros olish tamoyili “tasvir merosxo‘rlari” ni qurish usullariga asoslangan.

Fraktal geometriya va fraktal grafika tushunchalari o‘zlari bundan taxminan 40-50 yil ilgari paydo bo‘lgan, ammo allaqachon kompyuter dizaynerlari va matematiklarining kundalik hayotida mustahkam o‘rnashib oldi.

Fraktal grafikaning asosiy tushunchalari:

- Fraktal uchburchak - fraktal shakl - fraktal ob’ekt (kamayish tartibida ierarxiya);
- Fraktal chiziq;
- Fraktal kompozisiya
- “Ota-ona ob’ekti” va “merosxo‘r ob’ekti”.

Vektorli va uch o‘lchovli grafikada bo‘lgani kabi, fraktal tasvirlarni yaratish uchun ham matematik jihatdan hisoblash mumkin. Grafikaning dastlabki ikki turidan asosiy farq shundaki, fraktal tasvir tenglama yoki tenglamalar tizimiga binoan tuzilgan-kompyuterning xotirasida formuladan boshqa hech narsa saqlash shart emas-va bunday ixcham matematik apparatlar ushbu fikrni kompyuter grafikasida qo‘llashga imkon berdi. Tenglamaning koeffisiyentlarini o‘zgartirib, mutlaqo boshqacha fraktal tasvirni olish mumkin. Bir nechta matematik koeffisiyentlardan foydalanib, gorizontal va vertikal, simmetriya va assimetriya, diagonal yo‘nalish va boshqa ko‘pgina kompozision texnikalarni amalga oshirishga imkon beradigan juda murakkab shakldagi sirt va chiziqlarni o‘rnatish mumkin.

Kompyuter grafikasida. Fraktallar asosan zamonaviy kompyuter grafikasida qo‘llaniladi. Ular yordami bilan yassi to‘plamlarni va juda murakkab shakllar tekisligini yaratish mumkin. Daraxt va paporotniklar barglarini, sun’iy tog‘-adirlarni, bulut hamda tabiatda mavjud bo‘lmagan planetalarni chizuvchi qulay zamonaviy kompyuter dasturlari fraktallar nazariyasiga katta boylik olib kirdi.

Kompyuter tizimlari sohasida. Kompyuter ilmida ma’lumotlarni fraktal siqish ularni eng foydali qo‘llash deb yuritiladi. Bu ko‘rinishdagi siqishga asoslanib quyidagi faktni keltirish mumkin, ya’ni haqiqiy borliq fraktal geometriyani yaxshi yoritadi. Bunda rasmlar doimiy usullarga nisbatan ancha qulay siqiladi. Fraktal siqishni yana qulayligi shundan iboratki rasmlarni kattalashtirgani bilan piksellar ta’sirining samarasi kuzatilmaydi. Shuni aytish mumkinki fraktal siqish yordamida rasmlarni kattalashtirgandan keyin oldingisiga nisbatan aniq ko‘rinadi.

Telekommunikatsiya sohasida. Masofaga ma’lumotlarni uzatishda ularning o‘lchami va og‘irligini kuchli kamaytiradigan fraktal shakllarga ega bo‘lgan antennalar ishlatiladi. Antennalar tuzilishini loyihalashda fraktal geometriyani qo‘llashni birinchilardan bo‘lib amerikalik muhandis Natan Konen ishlatgan. U vaqtlarda binolar tashqarisida antennalar o‘rnatish ta’qiqlangan. Natan alyuminiy zar qog‘ozdan Kox egri chizig‘i shaklidagi figuralarni qirqib, ularni qog‘oz varag‘iga yopishtiradi va uni priyomnikga ulaydi. Shu bilan Konen Natan shaxsiy kompaniyasiga asos solgan hamda ularni seriyali chiqarishni tashkil qilgan.

Markazlashtirilgan tarmoqlarda. Netsukuku tarmog‘ida IP - adresni qo‘llash tarmoq tugunlaridagi ma’lumotlarni kompakt saqlash uchun ma’lumotlarni fraktalli siqish prinsiplaridan foydalaniladi. Netsukuku tarmog‘ining har qaysi tuguni qo‘shni tugunlar haqidagi 4 kb ma’lumotni saqlaydi. Bunda ixtiyoriy yangi tugun markazlashgan IP-adressiz umumiy tarmoqqa ulanadi, masalan, bu Internet tarmog‘i uchun xarakterli. Shunday qilib, ma’lumotlarni fraktalli siqish prinsipi to‘liq markazlashtirishga kafolat, barcha tarmoqlarni maksimal barqaror ishlashiga imkon beradi.

Markazlashtirilmagan tarmoqlarda fraktallar. “Netsukuku” tarmoq tugunlari to‘g‘risidagi ma’lumotlarni ixcham saqlash uchun ma’lumotni fraktal siqish prinsipi IP-manzilni belgilash tizimidan foydalanadi. Uning har bir tugunida qo‘shni tugunlarning holati to‘g‘risida 4 kilobayt ma’lumot saqlanadi. Har qanday yangi tugun IP manzillarini tarqatishni markaziy tartibga solishni talab qilmasdan umumiy Internetga ulanadi. Shunday qilib, biz ma’lumotni fraktal ravishda siqish prinsipi butun tarmoqning markazlashtirilmagan ishlashini ta’minlaydi va shuning uchun undagi ish iloji boricha barqaror ravishda davom etadi degan xulosaga kelishimiz mumkin.

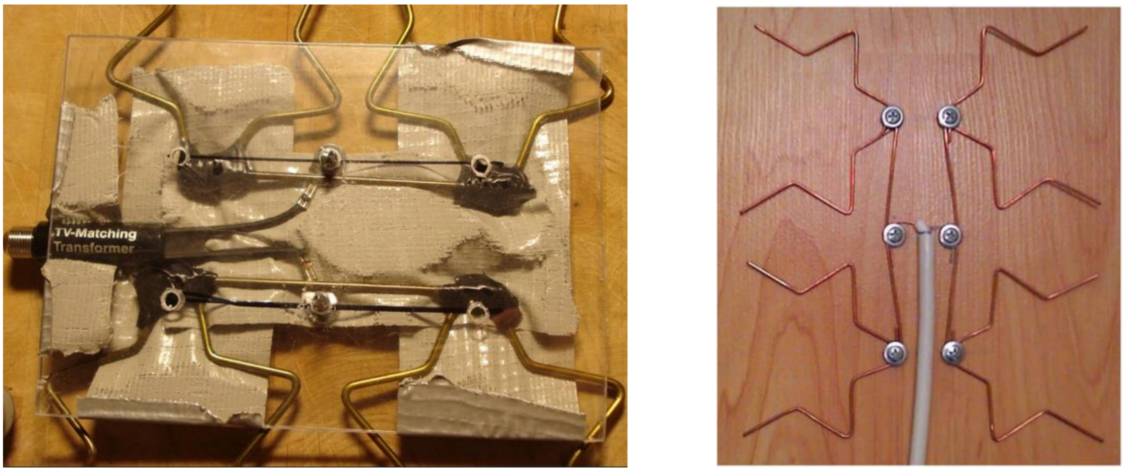
Kinoda. Fraktallar vizualizatsiya va maxsus effektlar elementi sifatida qo‘llaniladi. Fraktallar o‘zining go‘zalligi hamda cheksizligi bilan o‘ziga jalb qiladi hamda maftun etadi. Shuning uchun ham kompyuter grafikasida maxsus effektlar, videoinstallyatsiya, vizualizatsiyalarning turli avlodlarini yaratish uchun qo‘llaniladi.

Aslida, tasvirlari tabiiy narsalarga juda o‘xshash bo‘lgan Evklidsiz murakkab ob’ektlarni osongina tasvirlash usuli topildi. Fraktal kompyuter grafikasi multfilmlar va ilmiy fantastika filmlarini yaratishda keng qo‘llaniladi.

2.3. Fraktallar nazariyasini radiotexnikada va signallarni qayta ishlashda qo‘llash

Boston hokimiyatining uylarga tashqi antennalarni o‘rnatish taqiqini bekor qilish uchun, u 1904 yilda shved matematiki Xelge fon Kox tomonidan tasvirlangan fraktal singan chiziq asosida yasalgan dekorativ rasm sifatida o‘zining radiostansiyasining antennasini yasagan (2.2-rasm). Natan alyuminiy folga ichidan Kox egri shaklini kesib, qog‘ozga yopishtirdi va keyin uni qabul qilgichga biriktirdi. Natan Konen o‘z kompaniyasini tashkil etdi va ularning seriyali ishlab chiqarishni boshladi.

Natan Konen yangi antenna dizaynining xususiyatlarini o‘rganish natijalarini e’lon qildi va mutaxassislarning e’tiborini tortdi. Ko‘pgina tadqiqotchilarning sa’y-harakatlari tufayli bugungi kunda fraktal antennalar nazariyasi elektromagnit nurlanishni sintez qilish va tahlil qilish uchun mustaqil, yetarlicha rivojlangan apparatga aylandi.



2.2-rasm. Konen Natan antennasi

Fraktal antennalar - bu nisbatan yangi bo‘lgan elektr energiyasi kichik antennalar (EKA) bo‘lib, ularning geometriyasi ma’lum yechimlardan tubdan farq qiladi. Aslida, antennalarning an’anaviy evolyutsiyasi butun o‘lchamdagi ob’ektlar (chiziq, aylana, ellips, paraboloid va boshqalar) bilan ishlaydigan Evklid geometriyasiga asoslangan edi.

Fraktal geometrik shakllarning asosiy farqi ularning fraktal o‘lchamidir, bu tashqi aniqlik bilan boshlang‘ich deterministik yoki tasodifiy naqshlarning ko‘payishi yoki kamayishida, rekursiv takrorlanishda o‘zini namoyon qiladi. Signalni filtrlash vositalarini shakllantirishda, tabiiy landshaftlarning uch o‘lchovli kompyuter modellarini sintez qilishda, tasvirlarni siqishda, fraktal texnologiyalar keng tarqalgan.

Tabiiyki, fraktal “rejim” antennalar nazariyasini chetlab o‘tmadi. Bundan tashqari, antenna texnologiyasida zamonaviy fraktal texnologiyalarning prototipi o‘tgan asrning 60-yillari o‘rtalarida taqdim etilgan log-davriy va spiral dizaynlar edi. To‘g‘ri, qat’iy matematik ma’noda, rivojlanish davrida bunday inshootlar fraktal geometriya bilan bog‘liq bo‘lmagan, aslida ular faqat birinchi turdagi fraktallar bo‘lgan. Endi tadqiqotchilar, asosan sinov va xato tufayli, antenna yechimlarida geometriyada ma’lum bo‘lgan fraktallarni ishlatishga harakat qilmoqdalar.

Fraktal antennalar odatdagidan deyarli bir xil foyda olishga imkon beradi, ammo kichik o‘lchamlarga ega, bu mobil ilovalar uchun muhimdir.

Fraktal tuzilmalarning elektrodinamikasi haqidagi birinchi nashrlar o‘tgan asrning 80-yillariga to‘g‘ri keladi. Fraktal antennalar tarixi bo‘yicha nashrlarda, odatda, Pensilvaniya universiteti olimlari Y.Kim va D.L.Jaggardning ishlari esga olinadi. Ko‘p chastotali antennalarni shakllantirish uchun fraktal shakllardan foydalanish imkoniyatlarini nazariy tadqiqotlardagi ustunlik Kataloniya Texnologik universitetining olimi C.Puentega bog‘liq. Eng ko‘p o‘rganilgan elektromagnit va yo‘nalish xususiyatlariga ega fraktal antennaning birinchi dizayni Kox prefraktal egri chizig‘iga asoslangan antenna edi.

Ko‘chma telekommunikatsiya texnologiyalarini, radarlarni va mikroto‘lqinlarni almashtirish sensorlarini rivojlantirish kichik o‘lchamlarga ega va optimal konfiguratsiyaga ega bo‘lgan sohalardan tashkil topgan yangi ko‘p elementli antenna tizimlarini ishlab chiqishni talab qiladi.

Antenna-atrofdagi kosmos orqali radio to‘lqinlari yordamida ma’lumot uzatish yoki olish uchun mo‘ljallangan har qanday radio qurilmalarning ajralmas qismi. Yuqorida aytib o‘tilganidek, fraktal antennalar boshqa barcha turdagi antennalardan farq qiladigan geometriyaga ega. Fraktal geometrik shakllarning asosiy xususiyati ularning fraktal o‘lchamidir. Fraktal tuzilmalarning xilma-xilligi orasida antennalarni yaratish uchun eng qulaylaridan biri bu Minkovskiy fraktalidir. Fraktalning “tashabbuskori” - bu segment, “generator” - bu sakkizta aloqaning singan chizig‘i (ikkita teng ulanish bir-birini davom ettiradi).

Antenna yechimlari haqiqiy fraktallarni ishlatmaydi, lekin ularning faqat bir nechta birinchi iterativ shakllari, ular geometriyada bo‘shliqni to‘ldiruvchi egri chiziq deyiladi (Space Filling Curves, SFC) yoki tekislik (Plane-Filling Curves, PFC). Prefraktal atamasi kamroq ishlatiladi. Antenna dizayniga taalluqli barcha tushunchalar sinonim sifatida ishlatilishi mumkin. U qabul qilingan matematik ta’riflarga to‘g‘ri kelmasada, fraktal antennalar nazariyasining tarixiy yo‘lga qo‘yilgan terminologiyasi hisoblanadi.

Simli antennalar holatida, SFCning o‘z-o‘zidan kesishishiga faqat boshlash (yoki tugatish) nuqtasida ruxsat beriladi. Boshqacha qilib aytganda, fraktal chiziq yopiq kontur shaklida bo‘lishi mumkin, ammo uning hech bir qismi yopiq bo‘lak bo‘lolmaydi. SFC-ob’ektlarda o‘z-o‘zidan aloqa nuqtalarining yo‘qligi, biz ularni “o‘zini chetga oluvchi” egri chiziqlar sifatida gapirishga imkon beradi. Bu yerda, aytmoqchi, bu singan chiziqlar uchun yana bir ism paydo bo‘ldi – FASS - egri chiziqlar (bo‘shliqni to‘ldirishda o‘zini-o‘zi chetlab o‘tishning soddaligi o‘xshashlik-bo‘shliqni to‘ldiradigan o‘xshash segmentlarning o‘z-o‘zidan qochishi).

Fraktal antennalarning barcha turlarida yana bir cheklash mavjud: ularda ishlatiladigan SFC chiziqlari bo‘sh joylardagi antennaning ishlaydigan to‘lqin uzunligining o‘ndan bir qismidan qisqaroq bo‘lishi kerak. Bundan tashqari, antenna topologiyalarida ulangan SFC segmentlarining umumiy soni 10 ta dan oshishi maqsadga muvofiqdir.

Umuman shuni ta’kidlash kerakki, murakkab topologiyaga ega bo‘lgan konduktorda to‘lqin jarayonlarining analitik tavsifi yo‘qligi sababli fraktal qabul qiluvchi antenna va undagi elektromagnit to‘lqinlarning o‘zaro ta’siri mexanizmini nazariy jihatdan tasavvur qilish qiyin. Bunday vaziyatda fraktal antennalarning asosiy parametrlarini matematik modellashtirish orqali aniqlash tavsiya etiladi.

Shunday qilib, Kox ko‘pburchaklar liniyasi asosida antenna tizimining ko‘plab turli parametrlarini tanlash qobiliyati dizayni ichki qarshilik qiymati va rezonansli chastotalarni taqsimlash uchun turli talablarni qondirish imkonini beradi. Ammo, rekursiv o‘lcham va antennaning xususiyatlarining o‘zaro bog‘liqligi faqat ma’lum bir geometriya uchun olinishi mumkinligi sababli, boshqa rekursiv konfiguratsiyalar uchun ko‘rib chiqilgan xususiyatlarning to‘g‘riligi qo‘shimcha tadqiqotlarni talab qiladi.

Raqamli fraktallar. Fraktal geometriya raqamli musiqa sohasida yangi texnologiyalarni rivojlantirishga bebaho hissa qo‘shdi, shuningdek raqamli tasvirlarni siqib chiqarishga imkon berdi. Mavjud fraktal tasvirni siqish algoritmlari raqamli tasvirning oʻzi oʻrniga siqishni tasvirini saqlash prinsipiga asoslangan. Siqilgan tasvir uchun asosiy rasm qatʼiy nuqta boʻlib qoladi. Microsoft kompaniyasi ushbu algoritmning variantlaridan birini ensiklopediyasini nashr qilishda ishlatgan, ammo biron-bir sababga koʻra yoki boshqa sababga asosan bu gʻoya keng qabul qilinmagan.

Fraktal shaklga ega antennalar ishlatiladi, bu ularning oʻlchamlari va vaznini sezilarli darajada kamaytiradi.

2.4. Fraktallar nazariyasi va fraktal grafikani shaharsozlik va landshaft dizaynida qoʻllash

Tabiiy va geometrik obʼektlarni rivojlantirishning fraktal tamoyili arxitekturaga chuqur kirib bormoqda. Meʼmorlar oʻz ishlarida arxitektura shakllarining fraktal nazariyasidan keng doirada foydalanadilar.

Arxitektura nazariyasi va amaliyotining hozirgi rivojlanish bosqichida “fraktal” tushunchasi faqat cheksiz oʻziga-oʻzi oʻxshash shakllardan olingan obʼektlarning geometrik tuzilishini belgilash uchun ishlatiladi. Boshqacha qilib aytganda, arxitekturada fraktal geometriyadan foydalanish faqat yangi obʼektni yaratish uchun ilhom manbai darajasida sodir boʻladi. Shuni taʼkidlash kerakki, arxitekturada “fraktallilik” ning yagona mumkin boʻlgan varianti emas. Fraktallarning mohiyatini chuqurroq tushunish uchun uning nima ekanligini, qanday xususiyatlarga ega ekanligini, qanday turlari borligini va ushbu poydevorga yangi nazariyalarni asoslash maqsadga muvofiqligini tushunish kerak.

“Fraktal” va “fraktal geometriya” tushunchalari 1970-yillarda tartibsiz oʻzini-oʻzi shakllantirish tuzilmalarini oʻrgangan Benua Mandelbrot tufayli paydo boʻldi.

Obʼektning fraktallilik tamoyillari:

- Oʻziga-oʻzi oʻxshashlik - butunning har qanday qismi butunga oʻxshash;
- dinamiklik, oʻzini-oʻzi rivojlantirish qobiliyati (tabiatda statik holatlar va qatʼiy oʻlchamlar mavjud emas);
- nosimmetrikliklar (oddiy shaklning masshtabi kattalashib borgan sari, toʻgʻri chiziq olinadi, kattalashib boradigan fraktal tuzilmalar soddalashmaydi: barcha darajalarda shakllar teng murakkab konturlarga ega boʻladi);
- rekursivlik;

- izomorfizm bilan parchalanish.

Fraktallarning ta’riflaridan biri, bu butunning qisqartirilgan nusxasi bo‘lgan qismlardan tashkil topgan geometrik shakl ekanligidir. Mazkur ta’rif fraktallarni geometriya ob’ekti sifatida qarashga imkon beradi. Uning asosida birinchi guruh - geometrik fraktallar olinadi. Ushbu guruhning asosiy vakillari quyidagilar: Peano egri chizig‘i, Kox qor parchasi, Serpin uchburchagi, Kantor changi, Xarter-Xeytueyaning “Ajdaho” fraktali va boshqalar. Ularning barchasi nuqtalar va chiziqlar yordamida geometrik qurishlarning ma’lum bir ketma-ketligini takrorlash orqali hosil qilinadi. Oddiy rekursiv proseduradan foydalanib, Kantor chiziqni uzilgan nuqtalar to‘plamiga “aylantiriladi”: chiziq olinadi va uning markaziy uchunchisini ma’lum masofaga o‘tkaziladi, so‘ngra qolgan qism bilan ushbu prosedurani takrorlanadi va h.k..

Arxitekturada geometrik fraktallar keng qo‘llaniladi. Agar tasvir ma’lumotlari tahlil qilinsa, geometrik fraktallarning quyidagi xususiyatlarini ajratish mumkin:

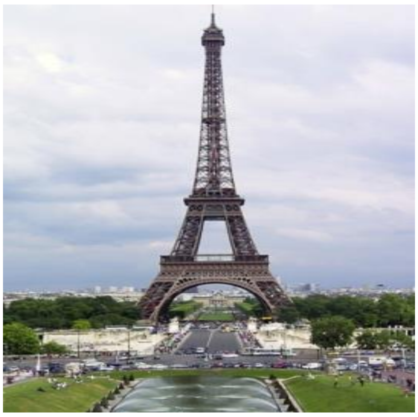
- cheksiz ko‘p geometrik fraktallar to‘plami cheklangan sirt maydonini qamrab oladi;
- fraktallarni tashkil etuvchi cheksiz to‘plam o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatiga ega;
- ba’zi fraktallarning uzunligi, maydoni va hajmi cheksizlikka intilsa, boshqalariniki nolga teng bo‘ladi.

Fraktal geometriya nafaqat statik qat’iy simmetriyali geometrik jihatdan to‘g‘ri jismlarni balki chiziqli bo‘lmagan dinamik ob’ektlarini ham tavsiflaydi.

Fraktallar tabiat tilida “tushuntiriladi”, ularning shakllanish qonunlari arxitekturaga chuqur kirib bormoqda. Mutanosiblik va uyg‘unlik, qulaylik, atrof-muhitga munosabat va hissiyot g‘oyalari turli asrlarning me’morlari tomonidan amalda sinab ko‘rilgan hamda tabiatda yashaydigan va yashamaydigan barcha narsalarning aksidir. Shunday qilib, fraktallar nazariyasi arxitekturada quyidagi qonunlarga asoslanib yangi uslubning asosi sifatida qo‘llaniladi:

- tabiatda statik holatlar, qat’iy o‘lchovlar mavjud emas;
- tabiiy kelib chiqishning har qanday shakli o‘ziga-o‘zi o‘xshashdir, ya’ni butunning har qanday qismi butunga o‘xshaydi;
- tabiatdagi har qanday jarayonlar diskret xususiyatga ega bo‘lib, bo‘shliqlar soni maksimal darajaga etadi va bo‘shliq zonasi minimal darajaga etadi.

Arxitektura o‘zining ko‘pgina ko‘rinishlarida tabiatning mo‘jizasi, shakllar, tuzilmalar, yuzalar, ranglar birikmasi va boshqalar tuzilish tamoyillari hisoblanadi. Me’moriy shakllanishda tabiat qonunlarining takrorlanishi bizning oldingi kishilarimizga intuitiv darajada fraktal bino va inshootlarni yaratishga imkon berdi, misol tariqasida Eyfel minorasini keltirish mumkin (2.3-rasm). Geometrik, tabiiy va arxitektura ob’ektlari o‘rtasidagi o‘xshashliklar real dunyo ob’ektlarini rivojlantirish uchun umumiy qonun mavjudligini ko‘rsatadi.



2.3-rasm. Serpin uchburchagi fraktalining elementlariga asoslangan inshoot-Eyfel minorasi

2.3-rasmda fraktallarga xos bo‘lgan o‘ziga-o‘zi o‘xshashlikning geometrik elementlari aniq ko‘rsatilgan.

Aksariyat simmetriya o‘qi bilan bir xil tekislikda ko‘rsatilgan ko‘p boshli cherkovlarning gumbazlarining joylashishi va o‘lchamlari fraktal prototip tuzilishga ega. Tabiatdagi eng keng tarqalgan fraktal algoritmlardan birini aks ettiruvchi spiral shakllari, shuningdek, arxitektura va dizaynni sun’iy muhitda qo‘llaniladi 2.3-rasm. Me’morlarning asarlari arxitekturada fraktal shakllarning bir qator namunalarini taqdim etadi. Buni 2.3 va 2.4 rasmlardan ko‘rish mumkin.

Tabiatda eng keng tarqalgan fraktal algoritmlardan birini aks ettiruvchi spiral shakllar, shuningdek, arxitektura hamda dizaynnidagi spiral bezaklar, to‘siqlar va panjaralarning metall naqshlari, dekorativ-amaliy san’at asarlari sun’iy muhitda qo‘llaniladi.

Arxitekturada fraktal shaklidagi shakllanish tamoyillari qadimgi davrlardan beri qo‘llanilib kelinmoqda va fraktal qurilish qoidalarini arxitekturada qo‘llash har doim ham matematik jihatdan tasdiqlanmagan bo‘lsa ham, ularning iste’dodi, uyg‘unlik hissi va yuqori professionallik me’morlarni badiiy jihatdan ifodali nisbatlarini qidirish va ishlab chiqishga olib keldi.

2.4-rasm. Spiralsimon fraktallarning me’morchilikdagi tatbiqi

Arxitekturadagi dizayn va shaharsozlik ishlarida fraktal tuzilmalardan foydalanish quyidagi afzalliklarni beradi:

- aloqa ierarxiyasi va shahar qismlarining ulanishi;
- turar-joy majmualarining bosh rejalarining an’anaviy geometrik konstruktsiyalariga nisbatan yuqori qurilish zichligi;
- binolarning funksional tuzilishini boyitish;
- turar-joy va jamoat binolarining joylashuvining yuqori o‘zgaruvchanligi;
- Binoning estetik jozibasi va uning tabiiy shakllarga yaqinligi.

2.5. To‘qimachilik dizaynida murakkab fraktal tuzilishidagi tasvirlardan foydalanish

To‘qimachilik va naqsh dizayni - to‘qimachilik sanoatida ham, kompyuter grafikasida ham olib borilayotgan ilmiy izlanishlarning eng muhim omili hisoblanadi. Naqsh dizaynida har qanday ob’ekt va manzaralardan, shu jumladan odam tomonidan yaratilgan mavhum narsalardan foydalanish mumkin. Avvallari an’anaviy dizaynlarni yaratishda ishlatiladigan usullar faqat mutaxassislar tomonidan yaratilib, naqshlarning murakkablik darajasi cheklangan edi.

Kiyim-kechaklarning naqshlarini va ranglarini shakllantirish, uylarni jihozlash kabi kundalik ehtiyojlar vaqt o‘tishi bilan o‘zgarib boradi. Dizaynning barcha sohalari orasida to‘qimachilik dizayni tobora kengayib borayotgan soha bo‘lib, u moda dizayni, gilam ishlab chiqarish va gazlamalar bilan bog‘liq sohalarni qamrab oladi.

Fraktallar – juda go‘zal dizayndir, ularni rangi va tasviridan hayratlanish mumkin. Bu insonning hayotga bo‘lgan munosabatini o‘zgartirgan va odamlarga tabiat hamda koinotni tushunishga yordam bergan buyuk ilmiy kashfiyotdir.

Fraktal tasvir – fraktal nazariya va kompyuter tasvirlarini qayta ishlash texnologiyasining kombinasiyasi hisoblanadi. Kompyuter texnologiyasi va fraktallar nazariyasining jadal rivojlanishi bilan to‘qimachilik muhandisligida fraktallarni qo‘llash tobora keng tarqaldi. To‘qimachilik muhandisligidagi murakkab muammolarni “Fraktallar nazariyasi” yordamida samarali hal qilish mumkin. Fraktal tasvirlarni qo‘llash to‘qimachilik naqshlari dizaynini yanada boyitadi va to‘qimachilik dizaynining yangi sohasini ochib beradi.

Meta-fraktal rekursiya usuli o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatidan foydalanib fraktal tasvirlarni yaratadi. Ushbu usul juda sodda bo‘lib, faqat aniq shakl va iterativ jarayon natijasida hosil qilinuvchi tasvirlar uchun mo‘ljallangan.

L-tizimlar usuli tasvirni qurish uchun tilshunoslik grammatikasini yaratish usulida modellashtirilgan algoritmdir. Fraktal tasvirni simulyatsiya qilish L-tizimlari usuli va genetik algoritmni aralashtirish orqali amalga oshirilishi mumkin. Ko‘plab klassik fraktallar L-tizim usuli bilan hosil qilinadi. Shuningdek, u o‘simliklar morfologiyasini, ayniqsa o‘simliklarning tana tuzilishini simulyatsiya qilishi mumkin. Bu virtual o‘simlikni o‘rganish uchun muhim usulga aylandi.

IFS (***Iteration Function System***) usulining asosiy g‘oyasida qism va butunlikning o‘zaro o‘xshashligi fraktal xususiyat bo‘lib, qism butunning replikasidir, ular hajmi, holati va yo‘nalishi bo‘yicha farqlanadi. IFS usulida ma’lumotlarni siqish amalga oshiriladi. Shunday qilib, berilgan rasmlar uchun, ma’lumot shakllanishi qonuniyatlari olingan taqdirdagina sezilarli darajada siqilishi mumkin. Genetik algoritmlar bilan taqqoslash orqali IFS fraktal xususiyatlarga ega o‘simliklarni tabiat qonunlariga yaxshiroq javob beradigan tarzda taqlid qilishi mumkin. IFS usuli fraktal tasvirni qayta ishlash usullarining eng dinamik usuli hisoblanadi.

Murakkab iteratsiya usuli ko‘pincha vaqtni quvish algoritmi yordamida yaratiladi. Ushbu algoritm nuqta iteratsiyasiga asoslangan. Har bir displey nuqtalari uchun bir necha bosqichni takrorlashdan so‘ng, agar u ma’lum bir qiymatdan kattaroq bo‘lsa, iterativ nuqtalardan kelib chiqishgacha bo‘lgan masofa aniqlanadi.

Nyuton iterativ usuli vaqtni quvish algoritmi asosida iteratsiya orqali fraktal tasvirni yaratadi.

RFM (R-Function Method) usuli yordamida oddiy sohalarning ma’lum tenglamalari bo‘yicha tuzilgan sohalarning chegarasi tenglamalarini oshkormas shakli quriladi. RFM usuli funksiyalarni cheksiz qiymatli mantiq yoki toqmantiq instrumenti sifatida qaraladi.

RFM usulida algoritm uchun kiruvchi ma’lumot quyidagilar:

1. Foydalaniladigan standart primitivlarning ko‘rinishi: to‘g‘ri chiziq, doira, ellips, to‘rtburchak, uchburchak, qavariq ko‘pburchak, aylana, muntazam ko‘pburchak va boshqalar (foydalanuvchining so‘roviga qarab menyu yoki ularning ko‘rinishi to‘ldirilib boriladi).
2. Standart primitivlarni o‘lchami va o‘rnini aniqlovchi geometrik parametrlar.

Bu ma’lumotlar asosida tayanch funksiyalar avtomatik shakllantiriladi, chaqirilgan primitivlarning normallashgan tenglamasi va belgilar bo‘yicha tashkil etilgan soha geometriyasining “ichkari tomon” - “tashqari tomon”larining predikat hamda analitik funksiyalari shakllantiriladi.

Odamlarning turmush darajasining yaxshilanishi natijasida doimiy ravishda yashash muhiti, kiyim-kechak va boshqa narsalarga nisbatan talab darajasi ortib, naqshga bo‘lgan talab ham juda yuqori bo‘ladi. Fraktallar nazariyasi ushbu talabni aniq qondirgan holda, tasvirlarni yaratish uchun cheksiz imkoniyatlarni taqdim etadi. Geometrik modellashtirishga asoslangan an’anaviy naqsh dizayni kamroq o‘zgaradi. Fraktal tasvirga asoslangan naqsh dizayni bir-biridan ancha farq qiladi, hamda yaratilgan naqsh o‘z parametrlari bilan chambarchas bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun fraktalga asoslangan naqsh odatiy bo‘lmasdan, turli uslubdaligi o‘ziga xosdir. An’anaviy estetik jozibaga javob beradigan rang-barang badiiy naqshlar fraktal naqshlarni tahrirlash, qayta o‘zgartirish yoki birlashtirish orqali hosil qilinadi. Uni to‘qimachilik naqshlari dizaynida qo‘llash yangi imkoniyatlarni ochadi.

Hozirgi vaqtda fraktal tasvirlarni yaratishda ikkita asosiy usul mavjud bo‘lib, ulardan birinchisi - matematik usullar va kompyuter dasturlarini qo‘llashdir. Ikkinchisi - fraktal tasvirlarni yaratish dasturlari, masalan, UltraFractal, FractalExplorer, ChaosPro, Apophysis, Chaoscope, Fractal Editor, Mystica, Fractal Zoomer va boshqalar.

To‘qimachilik muhandisligida fraktal tasvirning asosiy qo‘llanmalari sifatida to‘qimachilik tasvirini loyihalash, to‘qimachilik dizayni, to‘qimachilik naqshlari dizayni va boshqalarni keltirish mumkin. Masalan, murakkab iterativ avlod usuli bilan yaratilgan naqshlar majmuaning kompozitsiyalaridir. Ular turli xil funksiyalar va rang berish sxemalarini qo‘llash orqali ajoyib vizual ta’sirga ega. Shunday qilib, ular to‘qimachilik tasvirlarini loyihalashda ishlatilishi mumkin. IFS va L-tizimlar usuliga asoslangan fraktal naqshlar qat’iy o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyati asosida hosil qilinadi. Shunday qilib, ular to‘qimachilik dizaynida ishlatilishi mumkin.

To‘qimachilik naqshlari dizaynida fraktal tasvirning qo‘llanilishini asosan liboslar naqsh dizayni, moda naqsh dizayni, dekorativ gazlama naqsh dizayni va boshqalarda ko‘rish mumkin.

To‘qimachilikda to‘quv dizayni ko‘pincha L-tizimlari usuli tomonidan o‘ziga-o‘zi o‘xshashligini hisobga olgan holda amalga oshiriladi.

To‘qimachilik naqshli dizaynida fraktal tasvirlarning dizayni va qo‘llanilishini ikki qismga bo‘lish mumkin. Ulardan birinchisi to‘g‘ridan-to‘g‘ri to‘qilgan naqsh dizayni sifatida yaratilgan tasvirlardan foydalanish. Ikkinchisi - rasmlardan to‘qimachilik naqsh dizaynining elementi sifatida foydalanishdir. Ko‘pincha gul turlarining klassik tartibga solinishi ikki tomonli uzluksizligi, to‘rt tomonli uzluksizlik va tarqoq permutatsiya yo‘li bilan amalga oshiriladi.

Respublikamizda murakkab tuzulishli fraktallarni qurishga mo‘ljallangan bir nechta dasturiy muhitlar yaratilgan bo‘lib, ular yordamida fraktal tasvirlar ishlab chiqiladi. Bunday dasturi muhitlar sifatida “Geometrik fraktallar”, “Fraktallar”, “Generator Fraktals” keltirish mumkin. Mazkur dastiriy muhitlar RFM va arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasi usullari asosida ishlab chiqilgan matematik formulalar yordamida fraktal tasvirli naqshlarni quradi.

2.6. Milliy liboslarining naqshli dizaynida fraktallarni qo‘llash

Har bir millatning o‘z libosi va o‘zgacha ko‘rki bor. Ajododlar tomonidan yaratilib, asrlar davomida sayqallanib kelgan liboslar milliy merosimizdir.

O‘zbekistonda yashayotgan xalqlarning milliy liboslari sharqning barcha xalqlari uchun umumiy bo‘lgan xususiyatlarni va boshqa mamlakatlarning kiyim-kechaklarida topilmagan noyob xususiyatlarni juda ham uyg‘unlashtiradi.

Hozirgi vaqtda o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizaynida fraktallar nazariyasining usullaridan keng foydalanilmoqda.

Bugungi kunda kompyuter grafikasida fraktallarning o‘rni juda katta. Bir nechta koeffisiyentlar yordamida juda murakkab shakldagi chiziqlar va sirtlarni aniqlash hamda matematik koʻrinishda ifodalash mumkin. Kompyuter grafikasi nuqtai nazaridan fraktal geometriya sun’iy bulutlar, togʻlar va dengiz yuzasini yaratish uchun zarurdir. Aslida, tasvirlari tabiiy narsalarga juda oʻxshash boʻlgan Evklid boʻlmagan murakkab ob’ektlarni osongina tasvirlash usuli topildi.

Kompyuter san’ati - raqamli san’at, axborot texnologiyalaridan foydalanadigan ma’lum ijodiy faoliyat boʻlib, natijada raqamli shakldagi san’at asarlari paydo boʻladi.

Koʻpgina toʻqimachilik naqshlari elementlarning oʻziga-oʻzi oʻxshashlik tamoyili asosida hosil qilinadi, bu esa fraktallarni asosiy xususiyatlaridan biridir. Ushbu dizaynlar biroz murakkabliklarga ega boʻlib, bu dekorativ dizaynning rivojlanishiga olib keladi. Jhane Barnes fraktal dizaynni toʻqimachilik dizayni sifatida ishlatgan birinchi xonim hisoblanadi. U dizaynni gazlamaga qanday qilib bogʻlash toʻgʻrisida qaror qabul qilish uchun toʻquv va toʻqimachilik dasturlari yordamida modani qayta aniqlagan.

Fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biri oziga-oʻzi oʻxshashlikdir. Eng oddiy holatda, fraktalning kichik bir qismi butun fraktal haqida ma’lumotni oʻz ichiga oladi. B. Mandelbrot tomonidan berilgan fraktalning ta’rifi quyidagicha: “Fraktallar – qaysidir ma’noda butun ob’ektga oʻxshash qismlardan tashkil topgan tuzilishdir”.

Fraktal naqshlar oʻzining yorqin va gʻayrioddiy shakllari bilan interyer buyumlari, mebelni badiiy boʻyash dizayni, parket, stol usti, patnis, vitraj oynalari, lampalar, shisha buyumlar, yogʻoch va keramik kulol idishlarni, vazalar, sharflar, gilamlar hamda liboslarning tashqi dizaynida tezda oʻz ifodasini topdi.

Toʻqimachilik dizayni - kompyuter yordamida dizayn va tasvirni qayta ishlashda foydalaniladigan soha boʻlib, tasvirning oʻxshashligini aniqlash, tasvirni qayta ishlash, hamda, qayta tiklashda keng qoʻllaniladi.

Naqsh dizayni uchun barcha turdagi ob’ektlar va manzaralar, shu jumladan qoʻlda yasalgan narsalarni ham ishlatish mumkin.

R-funksiyasi nazariyasidan foydalanib rekursiv algoritmlar ishlab chiqib, ular asosida 2D da fraktallarning qurishning dasturiy ta’minoti yaratildi. R-funksiyasi nazariyasi asosida 2D da murakkab shakllarning chegaralarini analitik yozishning avtomatlashtirilgan texnologiyasini yaratildi. Yaratilgan texnologiya yordamida oʻzbek milliy liboslarining rangli dizayni zamonaviylashtirish uslibiyoti ishlab chiqildi. Fraktalli dizaynlarni yaratishda R-funksiyasi usuli (RFM)ning imkoniyatlaridan foydalanib murakkab fraktal tuzilishlarni geometrik modellashtirish texnologiyasi ishlab chiqildi. Bu texnologiya yordamida o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizayni 2D da bayon etildi. Yaratilgan o‘zbek milliy liboslarining naqshli dizaynida geometrik, algebraik fraktallar va ularning kombinasiyasidan keng foydalanildi.

Dizayn sanoatida fraktallar ma’lumotlarning ortiqcha bo‘lishini kamaytirish, to‘qimachilik dizayni uchun mukammal platforma yaratish orqali tasvirlarni siqish uchun ishlatiladi. Fraktal yaratuvchi dasturlar uch bosqichni takrorlash orqali tasvirlarni yaratadi:

- tegishli fraktal dasturlarning parametrlarini o‘rnatish;
- amalga oshirish kerak bo‘lgan uzoq hisob-kitoblarni bajarish;
- mahsulotni baholash.

To‘qimachilik dizaynerlari global, ko‘p madaniyatli sohaga javob beradigan yangi va innovatsion yechimlarni yaratish uchun ijodkorlik, fan va texnologiya o‘rtasidagi bog‘liqlikni tushunishlari shart.

Fraktallar asosidagi to‘qimachilik dizayni naqshlarini ishlab chiqish-ranglar dizayni va to‘qima gazlamalarni sintez qilishni o‘z ichiga oladi.

Fraktal geometriyaga asoslangan naqsh dizayni to‘qimachilik sanoati texnikasining muhim sohasi hisoblanadi. Bizning maqsadimiz matematik funksiyalardan foydalangan holda innovatsion va chiroyli dizaynni ishlab chiqishdir. Dizayn yaratishda fraktal metodologiyalardan foydalanish mashaqqatli jarayon bo‘lib, kerakli natijaga ma’lum kuch va sabr-toqat talab etiladi. Dizayner quyidagi qiyinchiliklarga duch kelishi mumkin:

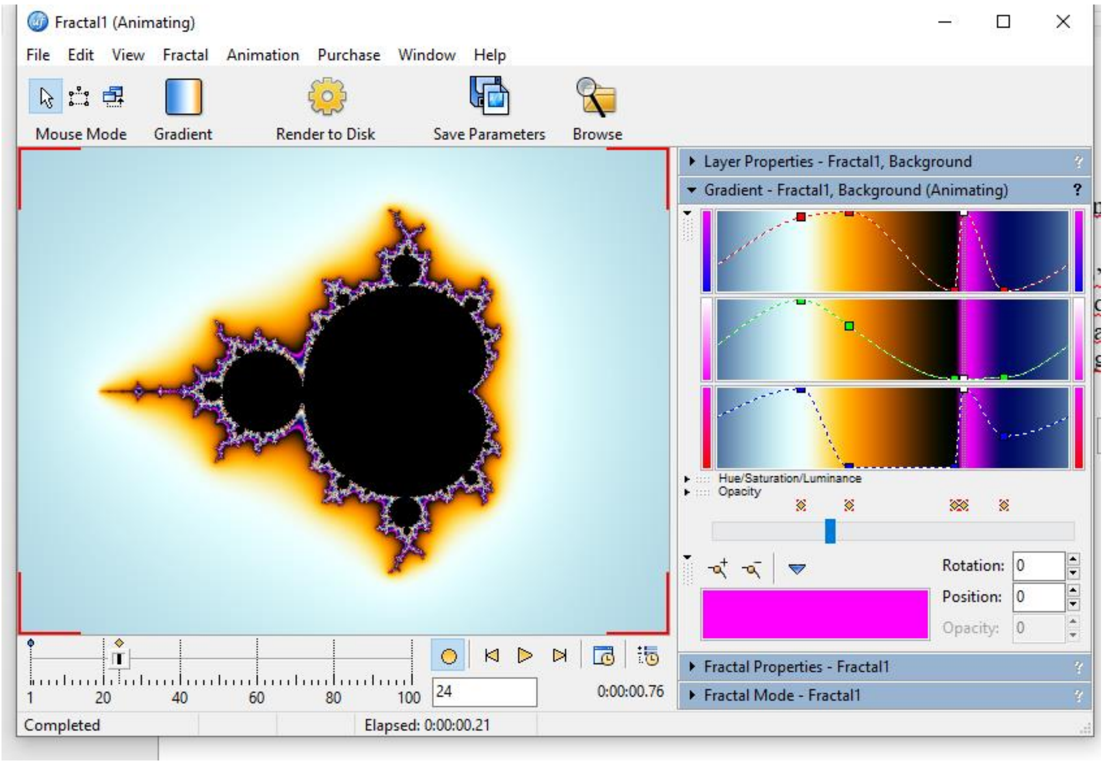
- fraktal naqsh uchun tegishli formulani tanlash;
- tasvir shaklini hosil qilish funksiyasini tanlash;
- rang berishning samarali sxemasini tanlash;
- tegishli formulani va rangni tanlash uchun tasavvurga tayanishi kerak.

Algebraik formulalar yordamida hosil qilingan fraktallar algebraik fraktallar deyiladi. Natijasi biror shakldan iborat bo‘lgan algebraik fraktallarni ishlab chiqishda aniq matematik amallar, formulalar ketma-ketligi bajarilishi natijasida tekislikda yoki fazoda nuqta, kesma yoki biror shakl hosil qilinadi va ma’lum parametrlarni o‘zgartirib aynan o‘sha formulaning qayta-qayta hisoblanishi oqibatida har safar unga mos shakl hosil qilinadi. Takrorlanish jarayoni cheksiz davom ettirilsa algebraik fraktal hosil bo‘ladi. Algebraik fraktalni kompyuterda hosil qilish uchun takrorlanish jarayonining dasturi tuzilishi lozim.

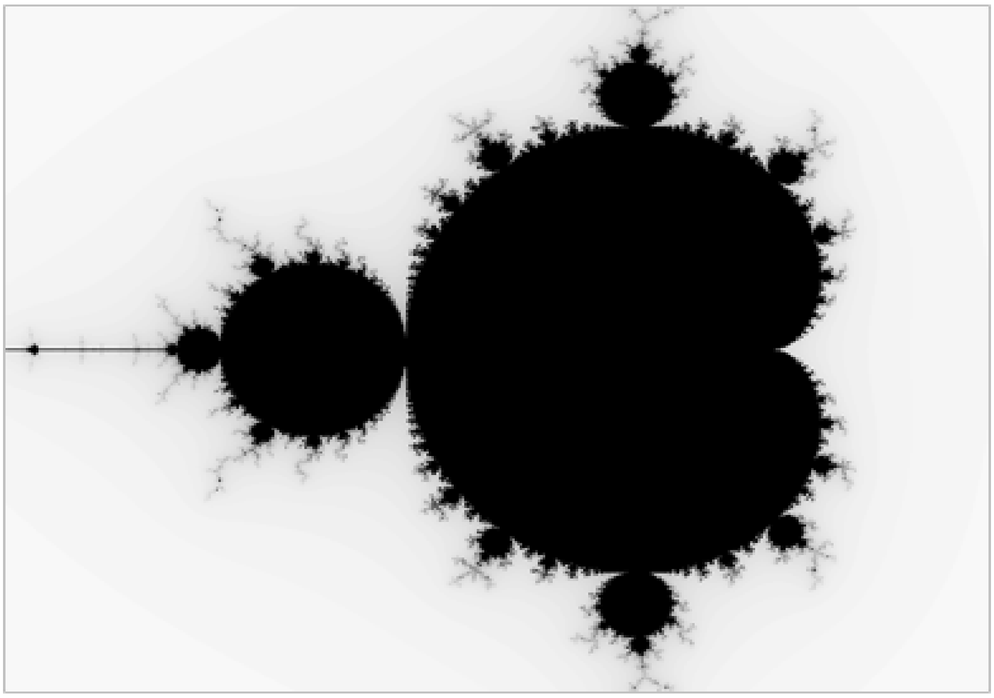
Mandelbrot to‘plami. Algebraik fraktalga misol sifatida Mandelbrot to‘plamini hosil qilish jarayoni bilan tanishamiz. Mandelbrot to‘plami kompleks tekislikda:

$$Z_{n+1}=z_n^2+c, \qquad (1)$$

almashtirish orqali amalga oshiriladi. Bunda o‘zgaruvchilar va $z=x+iy$, c esa o‘zgarmas bo‘lib $c=a+ib$. Mandelbrot to‘plamini hosil qilishda kerak bo‘ladigan matematik almashtirishlarni tushunish uchun kompleks sonlar ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va darajaga ko‘tarish amallarini bilish yetarli. Ma’lumki, har bir kompleks songa tekislikda absissasi kompleks sonning haqiqiy qismiga, ordinatasi mavhum qismiga teng bo‘lgan yagona nuqta mos keladi. Har bir qadamda bitta kompleks son hosil bo‘ladi va tekislikda unga mos bitta nuqtani belgilash mumkin. Natijada hosil bo‘lgan nuqtalar Mandelbrot to‘plamini tashkil qiladi. Ushbu to‘plamni hosil qilish jarayoni quyidagi algoritm asosida amalga oshiriladi. Dastlabki nuqta sifatida kompleks tekislikda (x_0, y_0) nuqta hosil qilinadi. (1) formuladagi c parametrni o‘zgarmas deb qabul qilamiz. (1) formulaga ko‘ra birinchi qadamda $z_1=z^2_0+c$, ikkinchi qadamda $z_2=(z^2_0+c)^2+c$, uchinchi qadamda $z_3=z^2_2+c=((z^2_0+c)^2+c)^2+c$ nuqtalar hosil qilinadi va hokazo. Mana shu nuqtalar to‘plami Mandelbrot to‘plamini tashkil qiladi. Bunda hosil bo‘layotgan z_n nuqtalar kompleks tekislikda (x_0, y_0) nuqta atrofida tartibsiz joylasha boshlaydi. Ba’zilari (x_0, y_0) nuqtaga yaqin joylashsa, ba’zilari undan uzoqlasha boshlaydi. Shuning uchun Mandelbrot markazi (x_0, y_0) nuqtada bo‘lgan ma’lum radiusli, masalan, $R=2$ bo‘lgan doira ichiga va undan tashqariga tushuvchi nuqtalarni aniqlashga harakat qildi. Buning uchun doira ichiga tushuvchi nuqtalarga qora rang berib, doiradan tashqariga tushuvchi nuqtalarga esa qadam rangiga teng nomerli ranglar berib ko‘ramiz. Albatta bu ishni kompyutersiz amalga oshirish ancha mashaqqatli ish. Kompyuter bu takrorlanish jarayonini ma’lum dastur asosida bajarganda aniq shakl hosil bo‘ladi. Eng muhimi shundaki, tashqaridan qaraganda nuqtalar o‘ta tartibsiz joylashayotgandek bo‘lsa ham aslida hosil bo‘lgan rasmda ham ma’lum qonuniyatni ko‘rish mumkin (2.6-rasm).



2.6-rasm. Dasturda Mandelbrot to‘plamlarini qurish



2.7-rasm. Mandelbrot to‘plamining 200 marta kattalashtirilgan ko‘rinishi

2.6-rasmdan ko‘rinib turibdiki, qora rangli asosiy sohadan tashqari yana unga aynan o‘xshash mayda sohachalar ham paydo bo‘ladi. Ular boshlang‘ich (x_0; y_0) nuqtadan uzoqlashgan sayin maydalashib ketaveradi. Ammo ularning tuzilishi qanchalik mayda bo‘lmasin, asosiy (katta sohaga) o‘xshaydi. Ya’ni fraktal tuzilish saqlanib qoladi. 2.6-rasmdagi shakl 200-500 takrorlanishda hosil bo‘ladi. Hozircha faqat qora rangli nuqtalar hosil qilgan soha to‘g‘risida fikr yuritildi.

Yuqorida ta’kidlanganidek, doiradan tashqarida ham har xil rangli nuqtalar hosil bo‘ladi va bu nuqtalar Mandelbrot to‘plamining chegarasini tashkil qiladi. O‘sha chegaradagi nuqtalar joylashuvining 200 marta kattalashtirilgan ko‘rinishi 2.7-rasmda keltirilgan.

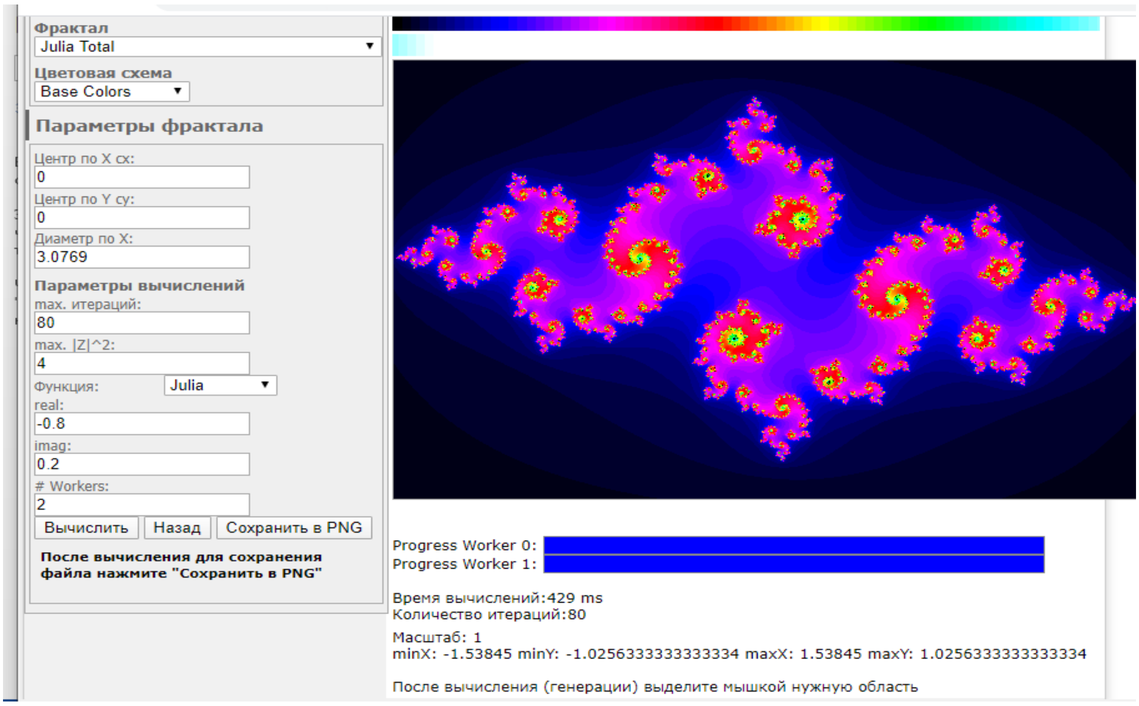
E’tibor berib qarasangiz chegara ham fraktal tuzilishga ega ekanligining guvohi bo‘lish mumkin. Ya’ni oq-qora yo‘laklarga o‘xshash mayda yo‘lakchalar mavjud.

Agar (1) formuladagi c parametrning qiymatini har xil qilib o‘zgartirish yo‘li bilan har xil algebraik fraktallarni hosil qilish mumkin. Ushbu fraktallarni chizishda kompyuter haqiqiy nozik didli rassomga aylanadi. Kompyuterda mavjud bo‘lgan ranglar jilosi hosil bo‘layotgan fraktallarning yanada qiziqarli va chiroyli bo‘lishiga asos bo‘lib xizmat qiladi.

Julia to‘plamlari. Mandelbrot to‘plami bilan uzviy aloqada bo‘lgan Julia to‘plamlari XX asrning boshlaridayoq matematiklar Gaston Moris Julia va Pyer Joze Lui Fatu tomonidan o‘rganilgan.

1917-1919 yillarda ular tomonidan kompleks o‘zgaruvchili funksiyasini iterasiyalash bilan bog‘liq bo‘lgan natijalar olindi. Umuman olganda, bu fakt alohida muhokamani talab etadi va o‘z vaqtida bir necha o‘n yilliklarga oldinlab ketgan matematik tadqiqotga yorqin misol bo‘la oladi. Bu yerda kompleks o‘zgaruvchining $f(x) = z^2 + c$ funksiyasi uchun Julia to‘plamlarini qurish usullarini keltirib o‘tamiz. Aniqroq aytganda, biz “to‘ldirilgan Julia to‘plamlari”ni quramiz.

$(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ to‘g‘ri to‘rtburchagini qarab chiqamiz. c o‘zgarmasni tayinlaymiz va tanlangan to‘g‘ri to‘rtburchak nuqtalarini muayyan qadam bilan ko‘rib chiqamiz. Xuddi Mandelbrot to‘plamini qurishdagiga o‘xshash, har bir nuqtalar uchun iterasiyalar seriyasini o‘tkazamiz (iterasiyalar soni qancha ko‘p bo‘lsa, to‘plam shuncha aniqroq bo‘ladi). Iterasiyalar seriyasidan so‘ng nuqta ikki gradusli aylana chegarasidan “chiqib ketmasa”, uni qora rang bilan belgilaymiz, aks holda esa oq rang bilan belgilaymiz.



2.8.-rasm. Dasturda Julia to‘plamlarini qurish

Yuqorida keltirilgan Mandelbrot va Julia to‘plamlaridan iborat klassik fraktallar milliy gilamlar dizaynida keng qo‘llanishi mumkin.

O‘zbek milliy liboslari va gilamlarining naqshli dizaynida fraktallarni qo‘llash uchun ularning tenglamalarini R-funksiya (RFM) usulida quriladi. Ilmiy ishlarda Gosper egri chizigi, Daraxtsimon fraktallar, Kox egri chizig‘i, Serpin to‘rtburchak gilami, Serpin salfetkasi, Serpin egri chizig‘i tenglamalari qurilgan.

2.7. Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlari va jakkard gazlamalarida qo‘llash

Naqsh–naqshli gazlamaning ajralmas badiiy asosi hisoblanadi. Tabiiy gazlama naqshini hosil qilish vazifasini gazlama va naqshning tuzilishi hamda rangi bo‘yicha bajarish kerak bo‘ladi.

Naqsh qadimiy va zamonaviy dekorativ san’at singari kiyimda bezak va bezatish rolini o‘ynaydi, hamda ba’zi muvofiq shakllar orqali kiyimda qo‘llaniladigan naqshlarga kiyim naqshlari deyiladi. To‘qilgan trikotaj kiyimni oddiy gazlama kabi qirqish va o‘rash orqali o‘zgartirish mumkin emas. Shunday qilib, yangi gazlamalarga qo‘llash bilan bir qatorda naqshli gazlamalar dizaynining muhim qismiga aylanadi. Jakkard tomonidan trikotaj gazlama uchun rang naqshlarini hosil qilish mumkin. Jakkard - rangi bitta chiziqdagi ranglar soniga bog‘liq bo‘lgan turli xil rangdagi iplar bilan to‘qilgan naqshlardir.

Jakkard gazlama – murakkab va oddiy shaklda to‘qilgan gazlama hisoblanib, ularning asosida 24 tadan ortiq turlicha to‘qilgan iplar mavjud bo‘ladi. Shuningdek, Jakkard gazlamalar rangli naqshlardan iboratdir. Jakkard gazlamalar quyidagi xususiyatlarga ega:

- mahsulotning mustahkamligi,
- ranglarning yorqinligi,
- yuvishga chidamli,
- tozalash oson,
- chiroyli ko‘rinishga ega va boshqalar.

Jakkard gazlamalarning bir necha xil turlari mavjud: Jakkard -satin, Jakkard - shyolk, Jakkard - atlas, Jakkard -trikotaj, Jakkard -streych va boshqalar (2.8-rasm).

2.8-rasm. Jakkard gazlamalar

Fraktal naqsh murakkab va tartibsiz grafika bo‘lib, betakror xususiyatlarga ega badiiy dizaynini qura oladi va gazlamaga naqshni tushura oladi. Hozirgi naqshli gazlama naqshlari asosan an’anaviy naqshlardan iborat bo‘lib, C++ tilida turli xil generatsiya tamoyillariga muvofiq qog‘oz rasmlari va o‘tish vaqti algoritmiga asoslangan blokli rasmlar, so‘ngra kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohlari va to‘quv dastgohlarining dizayn dasturlarida rasmlar qayta ishlangan. Naqsh tartibiga ega gazlamalar uchun shuni ko‘rsatadi, birlik rasmini qayta tartiblash orqali trikotaj jakkard gazlamalarga qo‘llash mumkin va o‘tish vaqtni algoritmiga asoslangan fraktal naqsh blok yuzasi shaklida trikotaj jakkardli gazlamalarga qo‘llanilishi mumkin.

Fraktallar nazariyasi – bu so‘nggi 20-30 yil ichida yangi ishlab chiqilgan fan bo‘lib, u tabiatda yoki nochiziqli tizimda tartibsiz geometrik shakllarni tasvirlashi mumkin. Fraktal nazariya matematika, fizika, tibbiyot, informatika va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llanilmoqda.

Trikotaj gazlamalarni naqshli dizaynidan ilhom olishimiz bilan bir qatorda murakkab va tartibsiz grafikadan iborat fraktal naqshni noyob xususiyatlari bilan badiiy dizaynini qurishda foydalanish mumkin.

Fraktal naqshlarni o‘zbek milliy gilamlarida qo‘llash uchun R (RFM) - funksiya usulidan foydalanib ishlab chiqilgan tenglamalardan olingan natijalarda rastli grafika ko‘rishida keltirilgan.

Milliy fraktal naqshning xususiyatlari va generativ tamoyillar

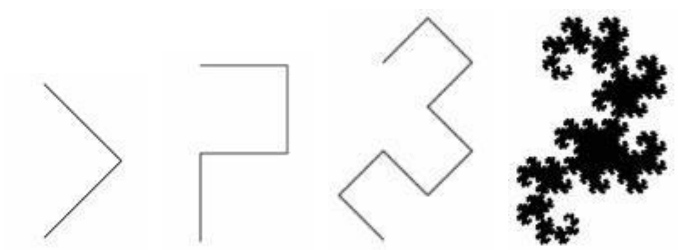
1. *Fraktal naqshning xususiyatlari*

Fraktal o‘ziga - o‘zi o‘xshashlik ma’nosidan kelib chiqib, asosan quyidagi o‘ziga xos xususiyatlarga ega:

- fraktal o‘ziga-o‘zi o‘xshash fraktalni yaratish jarayonida ko‘plab qismlarni ishlab chiqaradi;
- uyg‘unlik: fraktal naqshning uyg‘unligi bu matematik uyg‘unlik va rangga bog‘liq ravishda har bir shaklning o‘zgarish oqimi;
- noziklik: fraktal naqsh nozik tuzilmalarga ega bo‘lib, cheksiz ichki tuzilmalarni o‘z ichiga oladi va tartibsiz ravishda ko‘payish xususiyatiga ega bo‘lgan murakkablikka ega;
- xilma-xillik: fraktal naqsh - bu matematik nazariya va kompyuterni uyg‘unlashtirib, tasavvur, vaqt va makon chegaralanmagan holda yangi dizaynni yaratishdir.

Fraktal naqshning generatsiya tamoyillari. Fraktal naqshlarning xilma-xillari mavjud va kompyuterda uni yaratish tamoyillari ham turlichadir. Qog‘oz orqali asosan fraktal naqshning ikkita yaratuvchi tamoyili o‘rganiladi.

Birlashtirilgan tasvirlarga asoslangan fraktal naqshlar. Yaratuvchi element asosiy elementlardan biri bo‘lib, uning asosida rang-barang va cheksiz fraktal naqshni takrorlash va iteratsiyadan keyin ma’lum qoidalar asosida ishlab chiqish mumkin. Yaratuvchi element to‘g‘ri chiziq yoki analitik geometriya bo‘lishi mumkin. 2.9-rasmda ko‘rsatilgan egri chiziq ajdaho egrichizig‘i shakliga o‘xshashligi sababli “egri ajdaho” deb atalib, o‘ziga-o‘zi o‘xshash egri chiziqning takrorlangan qadamlardan iborat umumiy shakldir. Bu yerda *n* qadamlar soni.



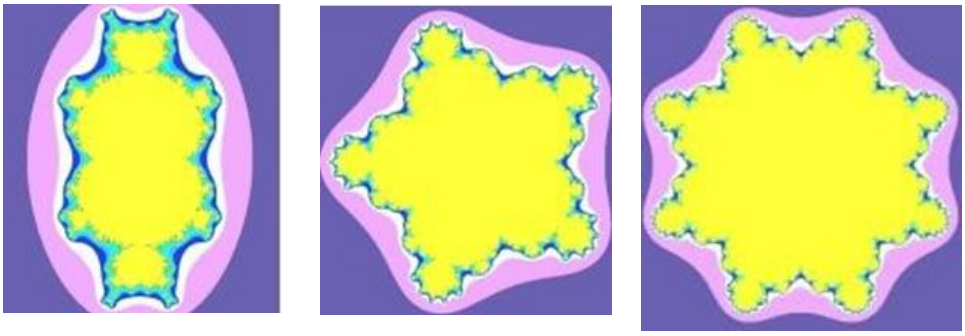
n=1 n=2 n=3 n=20

2.9-rasm. Ajdaho egri chizig‘i

O‘tish vaqti algoritmiga asoslangan fraktal naqsh. Iterativ usulga asoslangan o‘tish vaqtni algoritmining shaklni chizish usuli quyidagicha, agar f aylanish deb faraz qilinsa, f_n n ning f-n iteratsiyasi, keyin $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$, $n = 0,1,2\ldots$.

Klassik Julia, Mandelbrot va Nyuton iterativ fraktallari yordamida hosil qilinadi. Fraktal naqshni chizish uchun o‘tish vaqti algoritmidan asosan quyidagi to‘rt bosqichdan foydalaniladi.

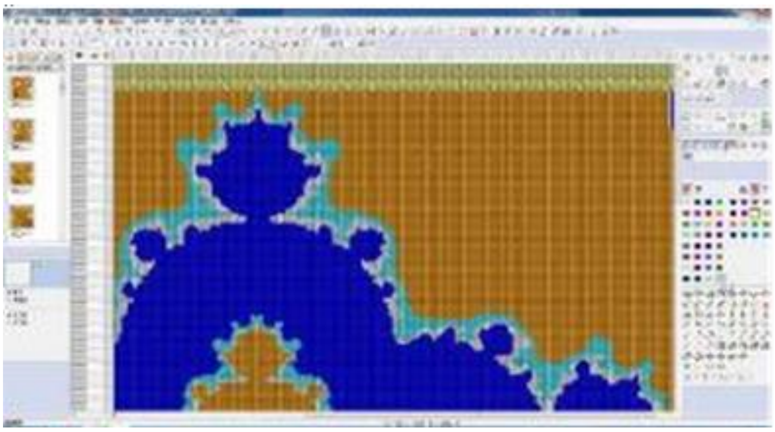
1. Grafik maydon aniqlanadi va kompyuterda koordinatalar tizimi yaratilib, koordinata o‘qlarini ekran markazi bilan birlashtiriladi;
2. Maydoning piksel koordinatalari ketma-ket ravishda tegishli iterativ formulaga almashtiriladi
3. Piksel koordinatalarining konvergentsiyasi yoki ajralishi berilgan iteratsiyalar sonida hisoblanadi;
4. Konvergent va divergent piksellar ekrandagi turli xil ranglar bilan belgilanadi, chunki har xil piksel nuqtalarining konvergent va divergent iteratsiya vaqtlari ma’lum miqdordagi iteratsiyalarda farq qiladi, shuning uchun turli piksellar uchun turli xil ranglarni qo‘shish orqali yorqin va rangli fraktal naqshga ega bo‘lish mumkin. Mandelbrot fraktal naqshi 2.10-rasmda keltirilgan.



$f(z) = z^3 + c$ $f(z) = z^6 + c$ $f(z) = z^9 + c$

2.10-rasm. Mandelbrot fraktal naqshi

Trikotaj Jakkard gazlamalarida fraktal naqshni qo‘llash. To‘qish dastgohlari va kompyuterlashtirilgan to‘quv dastgohlari. Fraktal naqshni kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohi yordamida Jakkard gazlamasida qo‘llashga erishilgan. Kompyuterlashtirilgan tekis to‘qish dastgohi yuqori texnologiyali kiyim-kechak uchun mo‘ljallangan elektromexanik integratsiya mashinasidir. Uning yordamida to‘qish amalga oshirilib, naqsh o‘zgarishi sababli yuqori samaradorlikka erishiladi. 2.11-rasmda Stoll-M1plus naqshli dizayn dasturida Mandelbrot gazlama naqshi ko‘rsatilgan. 2.11-rasmning dastlabki bir nechta satrlarida faqat och ko‘k va sariq ranglar, keyingi ikki qatorda uchta rang - oq, och ko‘k va sariq ranglar, qolgan to‘rtta rang – ko‘k, och ko‘k, oq va sariq ranglardan iborat. Shubhasiz, har bir satrning ranglar soni bir xil emas, lekin ranglar soni kamroq bo‘lgan qatorlarning chetidagi kerakli miqdordagi ustunlarga bitta yoki ikkita boshqa rang qo‘shamiz. Bu nafaqat umumiy tasvirga ta’sir qilmaydi, balki har bir satrning rangi bir xil bo‘lishini ta’minlaydi.

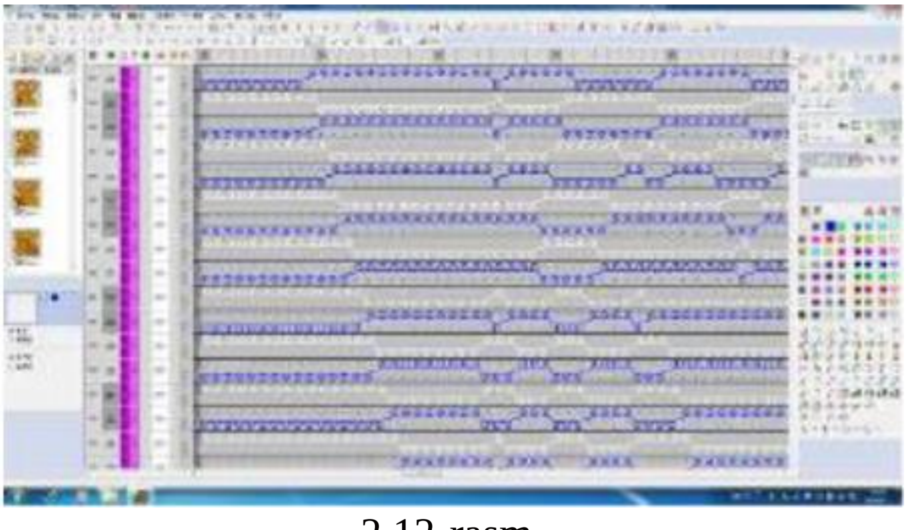


2.11-rasm. Mandelbrot to‘plami gazlama ko‘rinishi

Jakkardli tuzilmani aniqlash - bu savat to‘rlarining tashkiliy tuzilishini aniqlash, chunki bitta jakkardning orqa qismida suzuvchi chiziqlar mavjud, shuning uchun qog‘oz juft jakkard to‘quvini tanlaydi. Ikkala jakkardning orqa tomoni turli xil manbalar tomonidan sayqallanishi mumkin, chunki qog‘ozda to‘qilgan naqsh murakkab, ipning kuchliligi esa past, shuning uchun havo qatlami va kunjut urug‘laridan foydalaniladi. Va nihoyat, dasturda muhrlangan iplarni ajratish va qayta ishlash amalga oshiriladi. Ajratuvchi iplari to‘qilgan gazlamaning dastlabki ikki qatorida bajarilishi kerak va bu kompyuter yordamida to‘qish jarayoniga o‘tish rolini o‘ynaydi. Qoplash iplari to‘qish tanasining so‘nggi ikki qatorida bo‘lishi kerak va har qanday panelni to‘qish oxirida yopish kerak. “Boshlash” tugmasini bosib, tarqatish tugagandan so‘ng MC dasturi eksport qilinadi (bunda tekis to‘qish dastgohidagi ipning rangi naqsh rangiga mos kelishiga ishonch hosil qilish kerak bo‘ladi). Uni to‘g‘riligi tekshirilgandan so‘ng, U diskiga joylashtirilgan va kompyuterga tekis to‘qish dastgohiga olib kelinganida, “TP” testi to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilgan holda, normal to‘qish mumkin.

Jakkard gazlamalarda birlik tasvirlar asosida fraktal naqshni qo‘llash (Fraktal chiziq asosida). Yaratuvchi element sifatida chiziq juda ko‘p fraktal naqshni keltirib chiqarishi mumkin. Ajdaho shaklidagi egri chiziqqa asoslanib, u o‘rta nuqtadan birinchi bo‘lib 90^0 burchagi bilan ikkita kesimga bo‘linadi va ikkita segment ikkinchi marta 90^0 burchak bilan qarama-qarshi yo‘nalishda qatlanadi, bir necha burmalardan so‘ng egri ajdaho shakli hosil bo‘ladi.

Naqsh turi yaratilgandan so‘ng, mahalliy qism kuchaytirilib, tuzilishi nisbatan soddaligi sabab ikkita rang uning asosiy xususiyatlarini namoyish qilishi mumkin. Ikki xil rangli ikki tomonlama jakkard naqshli ipning o‘ziga xos xususiyati: bitta rangli ip ba’zi ignalar yordamida to‘qilgan, boshqa rangli iplar boshqa ignalarda to‘qilgan. Ikkala jakkardli old naqsh tasodifiy ravishda loyihalashtirilishi mumkin va orqa qismi har xil turlardan iborat bo‘lishi mumkin, ammo qog‘ozda naqshning tashkiliy tuzilishida havo qatlami qo‘llaniladi. Havo qatlami shundan iboratki, rang igna tagligining old tomoniga to‘qilgan va boshqa ranglar igna tagligining orqasiga naqshlangan bo‘lib, uni “jarayon ko‘rinishi” da ko‘rish mumkin. “Jarayon ko‘rinishi” bu biz chizishimiz va igna tanlovini namoyish etishimiz mumkin bo‘lgan oyna. Trikotaj ignalari harakati 2.12-rasmda tasvirlanganidek naqshli gazlamani ko‘rsatadi, havo qatlamining tashkiliy rangi qanchalik katta bo‘lsa, gazlama orasidagi havo qatlami shuncha ko‘p bo‘ladi. Old va orqa naqsh bir xil, ammo 2.13-rasmda ko‘rsatilgandek rangi har xil.



2.12-rasm.

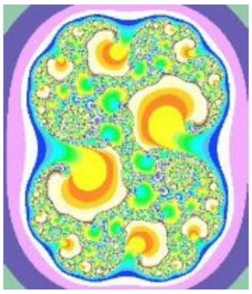
2.13-rasm. Ajdaho egri chizig‘i shaklidagi obyektlar tasviri

Jakkardli gazlamalarda o‘tish vaqti algoritmi asosida ishlab chiqilgan fraktal naqshni qo‘llash. Mandelbrot, Juliya, Nyuton to‘plamlari, naqshlari o‘tish vaqtning algoritmiga asoslangan ajoyib ranglar va murakkab tuzilish xususiyatlariga ega. Asosiy qism kuchaytirilganda, murakkab naqshlar paydo bo‘ladi. Mandelbrot fraktal naqshini ichki tuzilishi sodda, ammo tashqi kontur nozik detallarga ega; Julia fraktal naqshlari barglarning shaklini yaxlit deb hisoblaydi va chetki qismlari ajralib turadi, ammo ichki tuzilishi murakkab; Nyuton iteratsiyasining fraktali tanlangan funksiyaga bog‘liq va turli naqsh turli funksiyalarga mos keladi, ichki dizayn murakkab tarkibga ega. Agar tasvir pikseli juda past bo‘lsa, lasan to‘qilgan gazlamalarda pikselni ifodalaydi. Uning tafsilotlarini ko‘rsatib bo‘lmaydi va fraktal naqshning xususiyatlarini aks ettira olmaydi, shuning uchun naqsh turi blok yuzasi shakliga mos keladi.

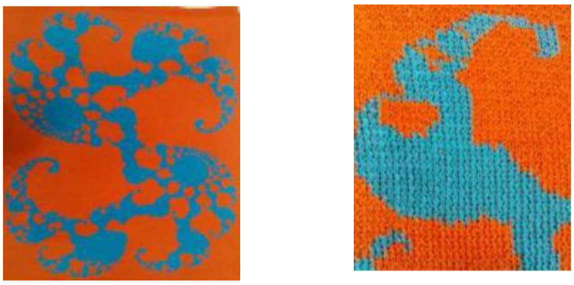
Mandelbrot to‘plamini qo‘llash. Mandelbrot to‘plami Mandelbrot tomonidan 1980 yilda topilgan va asosiy tamoyil $z_{n+1}=z^m{}_n+c$ tenglamaga asoslangan (z - murakkab o‘zgaruvchi, c - murakkablik doimiysi). c butun ekran bo‘ylab c ning o‘zgarishi kuzatiladi. M to‘plamning asosiy xususiyati shundaki, iteratsiyalar ko‘paygan sari, naqsh 2.14-rasmda ko‘rsatilgandek asta-sekin yumaloq shaklga ega bo‘ladi, masalan, naqsh tafsilotlarini ikki tomonlama aniqroq ko‘rish uchun 2.14-rasmda ko‘rsatilgandek Mandelbrotning oltinchi qadamini olaylik, orqa tomondan havo qatlami bo‘lgan to‘rt xil rangli jakkard tuzilishi keltirilgan.

2.14-rasm. Mandelbrot naqshini
obyektdagi tasviri

Julia to‘plamining qo‘llanilishi. Julia to‘plami Mandelbrot to‘plamiga o‘xshash formulaga asoslangan. $z_0(x_0, y_0)$ lar o‘zgarmas qiymatga ega bo‘lganida murakkab tekislikda notekis tasvirlar kuzatiladi. Parametrning haqiqiy va virtual qismlarini o‘zgartirib, turli xil naqshlarni olish mumkin. 2.15-rasm $f(z)=z^2+0.29+0.012i$ formulaga asoslangan Julia to‘plami natijasidir. Asosiy ichki berilganlarni saqlab turganda, ikki tomonli rangli jakkard orqa tomonida sesame bilan ishlangan. Sesame deb ataladigan nuqta, sesame tarqalishiga o‘xshaydi va 2.16-rasmda orqa tomondagi ranglarning tuzilishi ko‘rsatilgan.



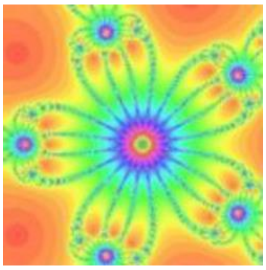
2.15-rasm. Juliya fraktali
naqshi



2.16-rasm. Juliya fraktali
naqshining obyektdagi tasviri

Nyuton usulini iteratsiyada qo‘llash. $f(x)$ differensial funksiya uchun Teylor formulasiga binoan $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $f(x) = 0$ taxminiy ildizlar $x_{n+1} \approx x_n - f(x_n) / f'(x_n)$.

Agar kompleks son z bilan almashtirilsa, $z_{n+1} = z_n - f(z_n) / f'(z_n)$ Nyuton iterativ formulasi olinadi. 2.17-rasm $f(x) = f(x) = x^5-1$ tenglama naqshdir, bu yanada murakkab bo‘lib, to‘rt xil rangli ikki tomonlama havo qatlami tuzilishi bilan to‘qilgan, 2.18-rasmda ko‘rsatilgandek chekka qismlari rang segmentatsiyasining assimetriyasini aks ettiradi.



2.17-rasm. Nyuton iteratsiyasi uchun fraktal naqsh

2.18-rasm. Nyuton iteratsiyasi uchun fraktal naqshni obyektdagi tasviri

2.8. Fraktallar nazariyasini tibbiyotda va boshqa tabiiy fanlarda qo‘llash

Fraktallar nazariyasi tibbiyot va biologiyada. Inson tanasi juda ko‘p murakkab tuzilmalardan iborat. Masalan, bronxlarning tarmoqlanishi, yurak-qon tomirlari tuzilishi, buyrak tizimi, katta qon va kapillyar tarmoqlari va boshqalar. Ushbu tuzilmalar haqiqiy jismoniy tizimlar bo‘lib, geometrik va funksional qiyinchiliklarga ega. Ushbu hodisalarga aniq yondashuv, albatta, matematik modellashtirish bosqichidan o‘tadi. Evklid geometriyasi, afsuski, bu muammolarni hal qila olmaydi. Aslida, bu faqat silliq va muntazam shakllardagina qo‘llaniladi. Shunday qilib, nuqta nolga teng, chiziq bir o‘lchovga ega, tekislik ikki o‘lchovga ega va hajm uch o‘lchovga ega. Fraktal geometriya o‘lchamlari bilan shug‘ullanadi, masalan, birdan ikkitagacha yoki ikkitadan uchtagacha va hokazo. Fraktal o‘lchov aslida tartibsiz egri o‘lchamidir. Fraktallarning bu o‘ziga xos xususiyati ularni ishlatishda biologiya va tibbiyot sohasida katta afzalliklarni beradi. Darhaqiqat, tirik tizimlarning ko‘plab murakkab tuzilishlari xususan, inson tanasi fraktalga o‘xshash geometriyani namoyish etadi, bu ularni modellashtirishga imkon beradi va shuning uchun fraktal tahlil yordamida ushbu hodisalarni miqdoriy aniqlashga imkon beradi. Fraktal ob’ektlar haqidagi fan - Evklid bo‘lmagan geometriyaning aniq matematik ob’ektlaridan foydalanadi. Fraktal - fazoda lokalizatsiya qilingan ob’ekt bo‘lib, tobora kamayib borayotgan o‘xshash yoki bir xil elementlarning soniga aylanishi mumkin. Bu o‘z-o‘ziga o‘xshash ob’ekt bo‘lib, uning eng kichik elementlari uning eng katta ob’ektlarining nusxalari ekanligini anglatadi. Tabiatda topilgan fraktallarning ko‘pi uchun (bulut chegaralari, qirg‘oqlar, daraxtlar, o‘simlik barglari va boshqalar) kichikroq elementlar kattaroqlariga o‘xshash, ammo bir xil emas. Aynan shunday fraktal ob’ektlar kvazifraktallar deb nomlanadi - ular ideal mavhum fraktallardan strukturaning takrorlanishining to‘liq emasligi va noaniqligida farq qiladi. Tirik kletkalar tirik hujayra kattaligiga va oxir-oqibat molekulalar hajmiga bog‘liq bo‘lgan cheklovlar tufayli ideal fraktal bo‘lolmaydi. Fraktal o‘lcham egri chiziqning murakkabligining ko‘rsatkichidir. Turli fraktal o‘lchamlarga ega saytlarning almashinishini va tashqi va ichki omillar tizimga qanday ta’sir qilishini tahlil qilib, tizimning hatti-harakatlarini taxmin qilishni o‘rganamiz. Eng muhimi, beqaror sharoitlarni tashxislash va bashorat qilish. Fraktallarni o‘lchash uchun eng keng tarqalgan usullardan biri bu Minkovskiy o‘lchovidir. Uning mashhurligi ko‘p jihatdan matematik hisoblashning soddaligi bilan bog‘liq. C ning har qanday cheklanmagan chegarasi mavjud bo‘lsin. Bunda quyi va yuqori chegaralar quyidagicha belgilanadi:

$$\underline{\dim}_B(F)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta};\ \overline{\dim}_B(F)=\overline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Ular shuningdek, yuqori va pastki Minkovskiy o‘lchamlari deb ataladi. Agar ular teng bo‘lsa, unda umumiy qiymat Minkovskiy o‘lchovi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

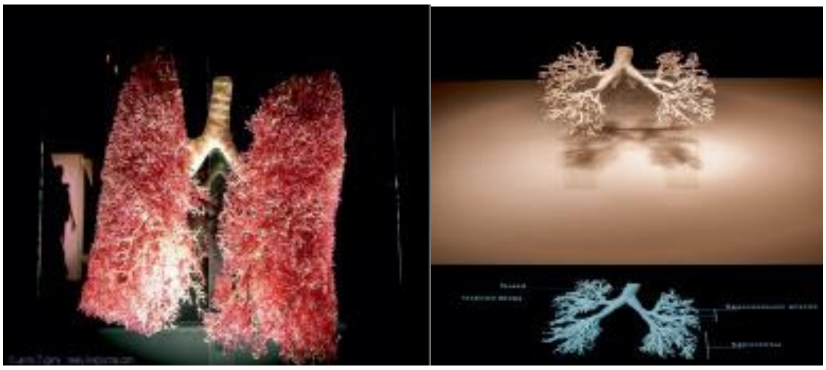
$$\underline{\dim}_B(F)=\underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Atrof muhit bilan maksimal almashinuv maydonini va mos keladigan metabolizmning intensivligini ta’minlash uchun tirik organizmlar fraktal tuzilmalar yordamida fazalarni ajratish maydonini ko‘paytiradi va bo‘shliqlarni iloji boricha to‘ldiradi. Fraktal tuzilmalarning biologik funksiyasi bu - juda ko‘p turli xil biologik shakl va funksiyalarni yaratishdir. Biologik fraktallar fazoviy to‘ldirish o‘lchovi sifatida fraktal o‘lchov bilan miqdoriy jihatdan tavsiflanadi. Biologiyada xaos va fraktallarni o‘rganish ketma-ket molekulalardan ekotizimlarga qadar tirik mavjudotlarni tashkil etishning barcha darajalarini qamrab oladi.

Organlar va organizmlarning fraktalliligi va fraktal o‘lchami. Fraktallar nafaqat bizni o‘rab oladigan tabiatda, balki ular bizning o‘zimizda va ko‘plab hayvonlar hamda o‘simliklarda uchraydi, chunki inson tanasining tuzilishi va hayvonlarning ko‘plab a’zolari, shuningdek o‘simliklar ham fraktal xususiyatlarga ega. Tabiat fraktal tuzilmalar imkoniyatlaridan foydalangan holda inson tanasini juda samarali qurgan. Organlar va tanalar darajasida nafas olish, qon tomir, siydik va boshqa tizimlarning, shuningdek jigardagi o‘t yo‘llarining fraktal tashkil etilishi o‘rganiladi.

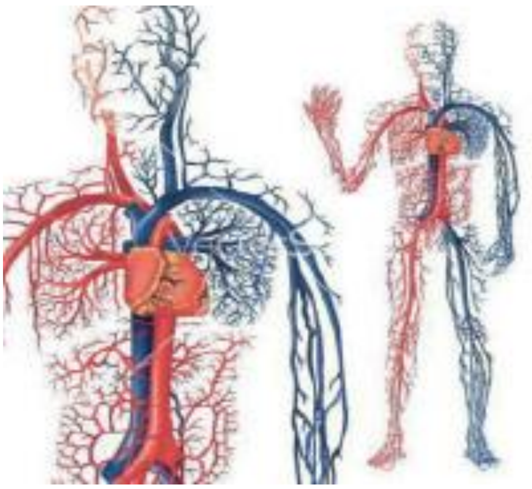
Nafas olish yo‘llarining o‘pka ichiga havo kiradigan fraktal tuzilishi sinchkovlik bilan o‘rganilgan. O‘pkalar - inson tanasida kislorod va karbonat angidrid almashinishidan mas’ul bo‘lgan va nafas olish funksiyasini bajaradigan muhim organdir. O‘pka sxemasi uchta asosiy tarkibiy elementni o‘z ichiga oladi: bronxlar, bronxiolalar va o‘pka alveolalari. O‘pka skeleti tarmoqlanib ketgan bronxial tizimdir. Har bir o‘pka ko‘plab tarkibiy qismlardan (lobulalardan) iborat. Har bir lobula o‘rtacha o‘lchami 15x25 mm bo‘lgan piramidal shaklga ega. Bronxlar o‘pkaning lobulasining yuqori qismiga kiradi, shoxlari kichik bronxiolalar deb ataladi. Hammasi bo‘lib, har bir bronx 15-20 bronxiolaga bo‘linadi. Bronxiolalarning uchlarida maxsus shakllanishlar mavjud - bir necha o‘nlab alveolyar shoxchalardan tashkil topgan ko‘plab alveolalar bilan qoplangan. O‘pkaning eng muhim tarkibiy elementlari alveolalar bo‘lib, ular organizmda kislorod va karbonat angidridning normal almashinuvi bog‘liqdir. O‘pka alveolalari juda ingichka devorlari bo‘lgan mayda vesikulalar bo‘lib, ular zich kapillyarlar tarmog‘i bilan o‘ralgan. O‘rtacha diametri 0,3 mm dan oshmaydigan mikroskopik alveolalar tufayli o‘pkaning nafas olish yuzasi maydoni 80 kvadrat metrga ko‘tariladi. Ular gaz almashinuvi uchun katta maydonni ta'minlaydi va qon tomirlarini doimiy ravishda kislorod bilan ta'minlaydi. Gaz almashinuvi jarayonida kislorod va karbonat angidrid alveolalarning ingichka devorlari orqali qonga kiradi, u erda ular qizil qon tanachalari bilan «uchrashadilar». Shunday qilib, o‘pka katta maydonning kichkina kosmosga “siqib” qo‘yilishiga misoldir. O‘pka bronxlari va bronxiolalari ko‘plab novdalar bilan “daraxt” hosil qiladi. Nafas olish yo‘llarining tarmoqlanishini miqdoriy tahlil qilish uning fraktal geometriyasiga ega ekanligini ko‘rsatdi.

Kalamushlar, quyonlar va odamlarning bronxial tizimining o‘rtacha fraktal o‘lchami mos ravishda 1,587 1,58 va 1,57 ni tashkil qiladi. Shunday qilib, sutemizuvchilardagi bronxial tizimlarning fraktal o‘lchami tana hajmiga bog‘liq emas.



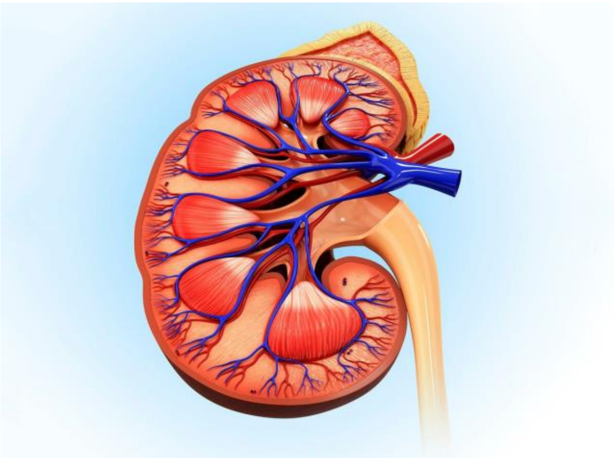
2.19-rasm. Nafas olish yo‘llarining tuzilishi

Qon tomirlari - qon orqali harakatlanadigan to‘liq naychalardir. Qonni yurakdan organlarga yetkazadigan tomirlarga arteriyalar, organlardan yurakka yetkazadigan tomirlar venalar deyiladi. Arteriya va tomirlarda gaz almashinuvi va ozuqa moddalarining tarqalishi amalga oshirilmaydi, bu shunchaki etkazib berish yo‘li. Qon tomirlari yurakdan uzoqlashishi bilan ular kichiklashadi. Qon va suyuqliklar o‘rtasida moddalar almashinuvi kapillyarlarning o‘tkazuvchan devori - arteriya va venoz tizimlarni bog‘laydigan kichik tomirlar orqali sodir bo‘ladi. Tomirlar o‘zlari va ular orqali aylanib yuradigan qon juda oz joy egallaydi - bu tana hajmining qariyb 5 foizi. Odamlar taxminan 150 ming km qon tomirlariga ega. Bir daqiqada bir litrga yaqin suyuqlik barcha inson kapillyarlarining devorlarini yorib o‘tadi. Fraktal o‘lchamlari 1,7 bo‘lgan orqa miya tomirlarning fraktal topologiyasi batafsil o‘rganilgan. Shuningdek, inson qarishi davrida va qandli diabetning asoratlari bilan fraktal o‘lchamning pasayishi hamda ko‘zning to‘r pardasi tomirlari tarmog‘i soddalashtirilganligi isbotlangan. Ta’kidlanishicha inson qon aylanish tizimining fraktal o‘lchami 2,5 dan 2.6 gachadir.



2.20-rasm. Inson qon aylanish tizimi

Odam siydik tizimi bu odamlarda peshobni hosil qiluvchi, to‘playdigan va chiqaradigan organlar tizimi. Bir juft buyrak, ikkita peshob pufagi, qovuq va peshob chiqarish kanalidan iborat. Buyraklarning asosiy vazifasi qondan keraksiz moddalarni filtrlashdir. Buyrakda qon oqimi buyrak arteriyalari (qorin aortasi shoxlari) orqali o‘tadi va 1,25 *l*/min (yurak qon oqimining 25%). Buyrak tos bo‘shlig‘i pastga, peshob pufagi tomon tushadi. Chiqarish tizimining oxirgi qismi – peshob chiqarish organlaridir.



2.21-rasm. Buyrakning tuzilishi

Jigar bu eng katta oshqozon bezidir, u o‘t pufagi va qon orqali yuborilgan moddalarni portal tomir orqali chiqarishga mo‘ljallangan. Jigarning safro tizimiga safro kapillyarlari, septal va interlobular o‘t yo‘llari, o‘ng va chap jigar, umumiy jigar, kist, umumiy o‘t yo‘llari va o‘t pufagi kiradi.

Tomirlar, asab va o‘t yo‘llari jigarning ko‘ndalang truba qismida joylashgan darvozadan o‘tadi. Me’da osti bezi yo‘llari bilan bog‘langan umumiy o‘t yo‘llari o‘n ikki barmoqli ichakka tushadi. O‘ng tomondagi bo‘ylama o‘t pufagi. Bu o‘t pufagi uchun bir turdagi rezervuar bo‘lib, u o‘n ikki barmoqli ichakda ovqatni qabul qilish vaqtida bo‘shatiladi. Jigar diametri 1-2 mm bo‘lgan jigar lobulalaridan iborat bo‘lib, ular markaziy tomir atrofida joylashgan radial nurlar shaklida joylashgan jigar hujayralari tomonidan hosil bo‘ladi. Har bir lobula jigar arteriyasi va portal venasining kichik shoxlari zich tarmog‘i bilan o‘ralgan. Ulardan kapillyarlar chiqib ketadi, ular jigar nurlari orasidagi lobulalarga kiradi. Markaziy tomir ichiga tushgan kapillyarlar, birlashib, jigar ichiga ochiladigan kattaroq tomirlarni hosil qiladi.

2.22-rasm. Jigarning safro yo‘llari

Yuqorida ta’kidlanganidek, inson tanasining tuzilishi fraktallar to‘plamidan tashkil topganligidan so‘nggi yillarda tibbiyot sohasidagi olimlar kasalliklarga diagnoz qo‘yish va davolash uchun fraktal algoritmlarni qo‘llashni taklif etmoqdalar. Chunki:

- ular yurak-qon tomirlari kasalliklarida diagnozlarni aniq va tez qo‘yishga imkon beradi;
- tibbiy rentgen tasvirlarni qayta ishlashda fraktal algoritmlardan keng foydalaniladi;
- saraton kasalliklariga oid muhim yangiliklarni ochgan, ular normal va saraton bilan kasallangan hujayralar bir-biriga yopishsa, ular har xil fraktal o‘lchamga ega bo‘ladi degan xulosalarni aytganlar. Bu o‘z navbatida kasallik diagnoz qo‘yishda muhim ekanligini ta’kidlagan.

Xulosa o‘rnida aytish mumkinki, biosensor o‘zaro ta’sir va yurak urishi, xaotik jarayonlarni modellashtirish, ichki organlar tizimini bayon etish uchun hamda biologik populyatsiyaning modelini ishlab chiqish kabilarda fraktallar nazariyasida keng foydalaniladi.

***Suyuqliklar va gazlar mexanikasi sohasida*.** Oqimdagi turbulent (tartibsiz) holatni o‘rganish fraktallarda juda yaxshi quriladi. Turbulent oqimlar xaotik bo‘lib, ularning modelini qurish juda murakkab. Bunda murakkab oqimlarning dinamikasini tushinishga imkon beruvchi fraktal ifodalashga o‘tish muhandislar va fiziklarni ishini ancha yengillashtiradi.

***Sirtlar fizikasi sohasida*.** Sirtlar egri chiziqlarini bayon etish uchun fraktallar ishlatiladi. Teng bo‘lmagan sirt ikkita turlicha fraktallar kombinatsiyasida tavsiflanadi. Fraktallar yordamida juda murakkab fizik jarayonlarni modelini, shuningdek yog‘du tillarini modellashtirish mumkin. Juda murakkab geometrik tuzilishga ega g‘ovak buyumlarni fraktal shakllar yaxshi uzatadi. Bu bilim neft haqidagi fanda ishlatiladi. Fraktallar sirtlarning egriligini tasvirlash uchun ishlatiladi. Qattiq sirt ikki xil fraktallarning kombinatsiyasi bilan tavsiflanadi.

San’at sohasida. Fraktallarni qo‘llashning yana bahsli sohalaridan biri kompyuter san’ati sohasidir. Fraktal nafaqat olimlarga xizmat qiladi, balki rassomlarga ham fikrlarini, hissiyot va kayfiyatlarini, eng zoʻr tasavvurlarini uzatishda yordam beradi. Shuningdek, har bir notalarni yozishda aynan fraktal tuzilishli algoritmlar qoʻllaniladi.

Fizika va boshqa tabiiy fanlarda. Fraktallar nochiziqli jarayonlarni ya’ni yolqin, suyuqliklarning girdobli harakati, bulut, diffuzion-yutilish (adsorbtsiya) kabi murakkab jarayonlarni modellashtirishda qoʻllaniladi. Gʻovak materiallarni modellashtirishda ham fraktallar qoʻllaniladi.

Fraktallarning xususiyatlari va ularning qoʻllanish imkoniyatlarini oʻrganib, hayotda uchraydigan turli jarayonlarni modellashtirishda fraktallar xizmati katta ekanligini aytish mumkin.

Fizikada fraktallar, tabiiy ravishda, noturgʻun suyuqlik oqimi, murakkab diffuziya-adsorbsiya jarayonlari, otash, bulut va boshqalar kabi chiziqli boʻlmagan jarayonlarni modellashtirishda paydo boʻladi. Fraktallar gʻovakli materiallarni, masalan, neft kimyosida modellashtirish uchun ishlatiladi. Oqimlarda turbulentlikni oʻrganish fraktallarga juda moslashadi. Turbulent oqimlar tartibsizdir, shuning uchun uni aniq modellashtirish qiyin. Fraktal vakillikka oʻtish yordam beradi, bu muhandislar va fiziklarning ishini osonlashtiradi va ularga murakkab oqimlarning dinamikasini yaxshiroq tushunishga imkon beradi. Biologiyada ular populyatsiyani modellashtirish va ichki organlar tizimini tavsiflash uchun ishlatiladi.

Koʻpincha fraktallar geologiya va geofizikada qoʻllaniladi. Hech kimga sir emaski, orollar va qit’alarning qirgʻoqlari bir necha fraktal oʻlchamga ega, ular yordamida siz qirgʻoqlarning uzunligini aniq hisoblashingiz mumkin.

Fraktallarning fizik talqini. Algebraik fraktalni tushunish uchun oddiy tajribani koʻrib chiqamiz. Ipga osilgan toʻp vertikaldan burilib, tushadi. Tebranishlar sodir boʻladi. Agar toʻp biroz egilgan boʻlsa, unda uning harakati chiziqli tenglamalar bilan tavsiflanadi. Agar ogʻish yetarlicha katta boʻlsa, tenglamalar allaqachon chiziqli boʻlmaydi. Nima oʻzgaradi? Birinchi holda, tebranish chastotasi (va shunga mos ravishda davr) boshlangʻich ogʻish darajasiga bogʻliq emas. Ikkinchisida, tegishlilik sodir boʻladi. Eng oddiy holatda u induktor, kondensator va rezistordan (qarshilik) iborat. Masalan, sigʻim nochiziqli boʻlsa, tebranish davri ularning amplitudasiga bogʻliq boʻladi.

Tebranish davri dinamikasi ikkita oʻzgaruvchiga qarab aniqlanadi, masalan, kontaktlarning zanglashiga olib keladigan oqim va sigʻimdagi kuchlanish. Agar bu qiymatlarni X va Y oʻqlari boʻylab kechiktirsak, tizimning har bir holati natijada olingan koordinata tekisligidagi ma’lum bir nuqtaga to‘g‘ri keladi. Bunday tekislikka faza deyiladi. (Shunga ko‘ra, agar dinamik tizim *n* o‘zgaruvchilar bilan aniqlansa, u holda ikki o‘lchovli fazoviy tekislikning o‘rniga uni n-o‘lchovli fazo maydoni bilan bog‘lash mumkin).

Endi biz matematik mayatnikga tashqi davriy signal bilan ta’sir qilishni boshlaymiz. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tizimlarning javoblari boshqacha bo‘ladi. Birinchi holda, haydash signalining chastotasi bilan bir xil chastota bilan muntazam davriy tebranishlar asta-sekin o‘rnatiladi. Fazoviy tekislikda bunday harakat tortuvchi deb nomlangan yopiq egri chiziqqa to‘g‘ri keladi (ingliz tilidan tortib olish uchun - jalb qilish so‘zidan) - barqaror jarayonni tavsiflovchi ko‘plab trayektoriyalar. Chiziqsiz mayatnik holatida, fazoviy tekislikda trayektoriya o‘zboshimchalik bilan uzoq vaqt davomida yopilmasa, murakkab, davriy bo‘lmagan tebranishlar paydo bo‘lishi mumkin. Bunday holda deterministik tizimning harakati mutlaqo tasodifiy jarayonga o‘xshaydi.

Shunday qilib, tizimning fazoviy maydoni jalb qiluvchilarning diqqatga sazovor joylariga bo‘linadi. Agar fazo maydoni ikki o‘lchovli bo‘shliq bo‘lsa, unda diqqatga sazovor joylarni turli xil ranglar bilan bo‘yash orqali ushbu tizimning rangli fazali portretini olish mumkin (iterativ jarayon). Rang tanlash algoritmini o‘zgartirib, juda ko‘p rangli naqshlar bilan murakkab fraktal naqshlarni olishingiz mumkin.

Tabiatdagi fraktallar. Tabiat ko‘pincha mukammal geometriya va shunday uyg‘unlik bilan ajoyib va chiroyli fraktallarni yaratadi.

Fraktallar daraxt grafikasi, butalar, tog‘ landshaftlari, dengiz sathlari va boshqalar kabi tabiiy ob’ektlarning rasmlarini yaratish uchun kompyuter grafikasida keng qo‘llaniladi. Ular yordamga murojaat qilishadi, masalan, zarur bo‘lganda, juda murakkab shakldagi chiziqlar va sirtlarni olish uchun. Fraktallar sirtlarning egriligini tasvirlash uchun ishlatiladi.

Forex bozori savdosida fraktallardan foydalanish. Fraktallar juda ko‘p forexlar savdosida ishlatiladi. Bill Uilyams ulardan savdoda faol foydalana boshladi, ammo shuni ta’kidlash kerakki, ular boshqa nom ostida bundan ancha oldin ishlatilgan. Doktor Uilyams, ilmiy ishlar natijasida, bozor tartibsiz tizimlar kabi harakatlanmoqda, degan xulosaga keladi. Boshqacha qilib aytganda, yurakdagi qon oqimi, qirg‘oq chizig‘i va paxta narxi xuddi shu tuzilishga ega. Bill Uilyamsning tadqiqotlari shuni ko‘rsatadiki, bozor chiziqli tizim emas balki u tartibsiz. Shunga ko‘ra, uni tahlil qilish uchun chiziqli funksiyalarga asoslangan standart ko‘rsatkichlardan foydalanish yetarli natijaga olib kelmaydi. Bu, shuningdek, bozorning barqarorligi vaqtinchalik, doimiy esa aniq betartiblik ekanligini anglatadi. Forex fraktallari kompyuterni modellashtirish jarayonida kashf qilindi, keyin bozorning tuzilishini tavsiflovchi kamchiliklar topildi.

Fraktal – bu har qanday to‘xtash yo‘qotishlariga xos bo‘lgan takrorlanuvchi shakllanishdir. Forexda bu har qanday bozor, istalgan vaqt oralig‘i. Va ularning kelib chiqishi, tovar va fond bozorlarining fraksiyalari, qirg‘oq chizig‘ining fraktallari bir xil xususiyatga ega.

Birjadagi fraktallar Bill Uilyams tomonidan ishlab chiqilgan ko‘rsatkichdir. Bu juda sodda va ayni paytda ko‘p qirrali hamdir. U mustaqil indikator sifatida ham, boshqa texnik tahlil vositalari bilan birgalikda ishlatilishi mumkin.

Bill Uilyamsning xaos nazariyasiga ko‘ra fraktal savdosi. Fraktal ko‘rsatkich Bill Uilyams savdo tizimining beshta ko‘rsatkichlaridan biridir. Tizimga ko‘ra, fraktallarning signallari Alligator deb nomlangan indikator yordamida filtrlanishi kerak.

Fraktallardan foydalangan holda qanday qilib savdo qilish mumkin:

Agar sotib olish signalini beradigan fraktal Alligatorning tishlaridan (qizil chiziq) yuqori bo‘lsa, savdogarlar kutilayotgan sotib olish buyurtmasini fraktalning ustiga bir necha ball qo‘yishlari kerak.

Agar sotish signalini beradigan fraktal Alligatorning tishidan past bo‘lsa, savdogarlar sotuvga qo‘yilgan buyurtmani fraktalning ostidan bir nechta punktga qo‘yishlari kerak.

Boshqa hollarda, fraktal indikator taqdim etgan savdo signallariga ishonmaslik kerak.

Kutilayotgan buyurtma ishga tushirilgunga qadar yoki yangi signal paydo bo‘lguncha signal dolzarb bo‘lib qoladi (bu holda kutilayotgan buyurtma darajasini o‘zgartirish kerak). Har bir yangi trend fraktalidan savdo pozitsiyasini yaratish uchun foydalanish mumkin.

Fraktallar nazariyasi ***Yer sharining tuzilishi***ni o‘rganishda ishlatiladi.

Fraktallarning xususiyatlari va ularning qo‘llanish imkoniyatlarini o‘rganib, hayotda uchraydigan turli jarayonlarni modellashtirishda fraktallar xizmati katta ekanligini aytish mumkin.

III BOB. FRAKTALLARNI QURISH USULLARI

Fraktallar qurish uchun ularning tenglamasini turli usullardan foydalangan holda ishlab chiqish kerak. Bunda bir necha usullardan foydalaniladi, bular IFS (Itered function systems-Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT)) usuli [3-5,12,-15,17,29,34,37,39,56,60,64,68], L-tizimlar usuli (Lindenmayer nomidan kelib chiqqan) [4,5,10,12,15,17,27,29, 34,37,39,56,57,60,62,64,68], binomial bazis ko‘phadlar va arifmetik xususiyatlar nazariyasiga asoslangan usul [14,15,24,37,49-51,60], R-funksiya (Rvachev funksiyasi) usuli [28,32,33,41-48,63,67,70], to‘plamlar nazariyasi usuli [22,57,60] va boshqalar.

3.1. L-tizimlar usuli va ulardan fraktallarni qurishda foydalanish

Mandelbrot tomonidan fraktal tushunchasiga eng umumiy fikr bildirilgan: «Fraktal deb qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘xshash tuzilishga aytiladi». O‘ziga o‘xshash ob’ektlarni o‘rganish muammosini oddiy bo‘lmagan xususiyatlarini klassik matematiklar nuqtai nazardan XIX asrning oxiri XX asrning boshlarida Jyulia, Puankare, Peano, Kantora, Xausdorf va boshqa olimlar o‘z ishlarida ko‘rganlar. Biroq, Mandelbrot birinchi bo‘lib tarqalgan ilmiy ishlar natijalarini birlashtirishga va ularni amaliy qiymatini ko‘rsatishga muvaffaq bo‘lgan. U ilmiy jurnallardan birida nashr qilingan o‘zining «Buyuk Britaniya qirg‘oqlarining uzunligi qancha?» nomli maqolasida geografik kartani qurish va uning o‘lchamini o‘lchash bilan bog‘liq muammoni bayon etgan. Maqoladan shu narsa ma’lum bo‘ladiki kartaning masshtabi qanchalik katta bo‘lsa, qirg‘oqning tasviri shuncha aniq bo‘ladi.

Quyida fraktallarni qurishni L-tizimlar usuliga asosan ko‘rib chiqamiz.

1968 yili Aristidom Lindenmayer (U ma’lumoti bo‘yicha biolog) tomonidan ishlab chiqilgan L-tizimlar usuli geometrik fraktallarni qurishda eng oddiy hisoblanadi. Lindenmayer tabiatning murakkab ob’ektlarini bir nechta qoidalar hamda oddiy tashkil etuvchilar yordami bilan ifodalash jarayonlari usulini taklif qilgan. L-tizimlar rasmiy tillarni o‘rganishda kiritilgan, shuningdek undan seleksiyaning biologik modellarini ishlab chiqishda foydalangan. Bunda *bo‘g‘im*lar qoidalariga tayanilgan va simvolli satrlarga almashtirilgan aniq rasmiy grammatikadan foydalangan.

L-tizimlar usuli bir necha tillarning yetarli darajada oddiy grammatikasi bo‘lib, ular ustida turli muhitlar yordamida initsiator va almashtirishlarni bayon etuvchi LOGO tilining analogik vositalaridir (tekislikda va fazoda oddiy geometrik shakllarni mumkin bo‘lgan almashtirishlarini aksiomatik bayon etish).

L-tizimlar usuli yordamida ko‘pgina aniq o‘xshash fraktallarni qurish mumkin, ya’ni Kox qor tomchisi, Serpin uchburchaklari, Peano egri chiziqlari va boshqa murakkab qurishlar ham amalga oshiriladi.

Faraz qilamizki ixtiyoriy simvollardan tashkil topgan *aksioma* deb ataluvchi qator va *qoidalar* deb ataluvchi qatorlar majmuasi mavjud. Har bir qoida quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin: simvol→qator

Masalan,

Aksioma: a s v

Qoida a→av

v→a

0-qadamda natijaviy qator «0»ga teng. Keyin qator chapdan o‘ngga qarab boshlanadi. Agar navbatdagi belgi hech qanaqa qoida bermasa, uni yangi natijaviy qatorga o‘tkaziladi. Agar navbatdagi simvol biror qoidaning birinchi simvoli bo‘lsa, unda u mos qoidada qator bilan almashtiriladi.

0-qadam: a s v :asv

1-qadam: av s a :avsa

2-qadam: av a s a v :avasav

3-qadam: av a av s av a :ava avs ava

va h.k.

Lindenmayer L-tizimlarni biologik ob’ektlar rivojlanishini bayon etishning rasmiy usuli deb qaraydi.

Suv o‘tining quyidagi L-tizimlarni keltirib o‘tamiz:

Aksioma: A B

Qoida: A→B

B→AB

Bunda Cuv o‘tining birinchi o‘n qadamdagi holatni qaraymiz.

0 A
1 B
2 AB
3 BAB
4 ABBAB
5 BABABBAB
6 ABBABBABABBAB
7 BABABBABABBABBABABBAB
8 ABBABBABABBABBABABBABABBABBABABBAB
9 BABABBABABBABBABABBABABBABBABABBABBABAB BABABBABBABABBAB

Keyinchalik L-tizimlarni kompyuter grafikasida qo‘llash mumkinligi topildi. Bu tizimlar yordamida o‘ziga o‘xshash tuzilishlardan iborat turli fraktallarni chizish juda qulay. Va albatta L-tizimlar yangi fraktallarning cheksiz ko‘rinishlariga yo‘l ochadi, kompyuter grafikasida fraktal modellar qurish uchun ulardan keng foydalanishga sababchi bo‘lib xizmat qiladi.

L-tizimlarni qo‘llab qo‘yidagiga ega bo‘lish mumkin. Umumiy qabul qilingan belgilashlarda L-tizimlar qanaqa kodlanadi: oldinga harakat F harfi bilan belgilanadi (Forward-oldinga), soat strelkasi bo‘yicha burilishni «+» belgilanadi, teskari yo‘nalishni esa «–» bilan, chizmasdan orqaga qaytishni B (Back-orqaga) harfi bilan belgilanadi. Qaerga qaytish nuqtasi «[» bilan belgilanadi, qaerdan qaytish nuqtasi esa «]» bilan belgilanadi.

L-tizimlar tatbig‘i uchun qism tizimlari sifatida Turtle (toshbaqa algoritmi) grafika deb ataluvchi tizimlar qo‘llaniladi. Bunda toshbaqa nuqtasi ekran bo‘yicha, diskret qadamlar bilan qoidadagi kabi o‘z izini chizib harakatlanadi yoki kerak bo‘lsa chizmasdan ko‘chadi.

Faraz qilamizki buyruqlar to‘plamini bajaruvchilar toshbaqa bo‘lsin. Toshbaqa tekislik bo‘yicha ko‘chadi. Toshbaqaning boshlang‘ich holatining koordinatasini x,y va toshbaqa foydalanuvchi yo‘nalishni aniqlovchi burchak α bo‘lsin. Toshbaqaning xotirasi bor deb tasavvur qilinadi. Toshbaqaning boshlang‘ich joylashgan koordinatasini x_0,y_0 va harakat yo‘nalishi α_0, shuningdek h qadamning qiymati berilgan, toshbaqa «oldinga» buyrug‘i bo‘yicha ko‘chadi va o‘ngga yoki chapga buyrug‘i bo‘yicha β burchakka buriladi.

Toshbaqa quyidagi buyruqlarni bajara oladigan bo‘lsin:

«F» - α yo‘nalishda h qadam oldinga iz qoldirib;

«f» - α yo‘nalishda h qadam oldinga iz qoldirmay;

«+» - β burchak ostida (soat strelkasi bo‘yicha) o‘ngga burilish;

«–» - β burchak ostida (soat strelkasi bo‘yicha) chapga burilish;

«[» - (x,y,α) boshlang‘ich holatini xotiraga saqlab qolish;

«]» - oxirgi saqlanganlarni holati (x,y,α)ni eslab qolish.

1 - misol sifatida Kox triad egri chizig‘i (3.1-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz. Bunda:

Aksioma: F

Qoida: F→F-F++F-F

Burchak β=360/6; $\beta=60^0$

0 - qadam: F;

1-qadam: F-F++F-F;

2-qadam: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F;

3-qadam: F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F–F-F++F-F– F-F++F-F++F-F++F-F–F-F++F-F va h.k.

2-misol sifatida Serpin uchburchagi (3.2-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz:

Aksioma: F×F–FF–FF

Qoida: F→ FF

×→ –F×F++F×F++F×F–

Burchak β=360/6; $\beta=60^0$;

0 - qadam: F×F–FF–FF

1-qadam:(FF––F×F++F×F++F×F––FF–FF–FF;)

F–F×F++F×F++F×F–FF–FF–FF

2-qadam:FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFF–FFFF;

3-qadam:FFFFFFFF–FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FFFF++FFFF–FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF++FF–F×F++F×F++F×F–FF–FFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF–FFFFFFFF va h.k.

3-misol sifatida Tupbutoqning (3.3-rasm) uchun boshqaruvchi qator qurishni qaraymiz:

Aksioma: F

Qoida: F$\rightarrow$ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]

Burchak β=180^0/8.

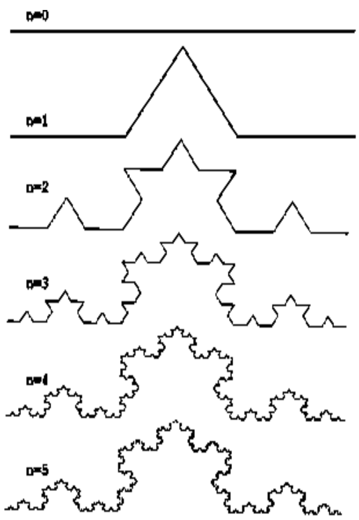
0 - qadam: -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F];

1 - qadam: --F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ [-F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]- -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]-]-[- -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F]+ -F+F+[+F-F-]-[-F+F+F] va h.k.

Yuqorida keltirilganidek fraktallarni uchta eng guruhlarga ajratish qabul qilingan: geometrik, algebraik, stoxastik.

Geometrik fraktallarni qurish juda oddiy va eng ko‘rgazmali. Eng oddiy ikki o‘lchovli holatda ularni bir necha siniq chiziqlar yordamida *bo‘g‘im* deb ataluvchi chiziqni hosil qilish bilan amalga oshiriladi.

Misol sifatida Kox triad egri chiziqlarini qurish jarayonini qaraymiz. Bu egri chiziq 1904 yili shved olimi Gelge fon Kox tomonidan ko‘rib chiqilgan (o‘rganilgan).



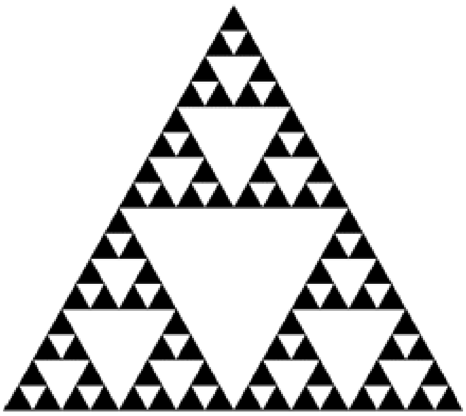
3.1-rasm. n=1,…,5 bo‘lganda Kox triad egri chizig‘i

0-qadam: Egri chiziqni qurish jarayoni birlik kesmadan boshlanadi.

1-qadam: Bu kesmani teng uchta bo‘lakka bo‘lamiz va uning o‘rtadagisini ikkita bog‘langan shu uzunlikdagi kesma bilan xuddi 1-rasmda ko‘rsatilganidek almashtiramiz. Keyingi qadamda ham shu jarayon har bir zvenolar uchun alohida qo‘llaniladi.

Natijada yangi siniq chiziq hosil bo‘ladi, hamda ularning har birining uchi keyingisining uchi bo‘lib keladi. 1-rasmda egri chiziqning beshta avlodi keltirilgan. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, Kox triad egri chizig‘idan iborat fraktalni hosil qilamiz. Ixtiyoriy n-qadamdan olinadigan egri chiziqlar oldfraktal deb atalishi qabul qilingan.

Fraktal ob’ekt uchun boshqa bir misol Serpin gilamini qarab chiqamiz. Nolinchi qadamda oddiy teng tomonli uchburchak olinadi. Birinchi qadamda uchburchakning tomonlarini teng ikkiga bo‘linadi va tomon o‘rtalarini kesmalar bilan tutashtiriladi. Keyingi qadamda har bir uchburchaklar uchun shu jarayon alohida qo‘llaniladi va markazdagi uchuburchak bundan mustasnodir. Natijada yangi uchburchaklar hosil bo‘ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, Serpin uchburchak fraktalini hosil qilinadi.



3.2-rasm. Serpin uchburchagi

2-qadam 3-qadam 4-qadam

3.3-rasm.Tupbutoq

Bunday to‘plamlarning tasviri aniq chizilgan chegaralarga ega bo‘lmaydi.

3.2. Iteratsion funksiyalar tizimlari (IFT (Iterated Function Systems-IFS))usuli va undan fraktallarni qurishda foydalanish

Fraktallar tuzilishini hosil qilishning oddiy vositalaridan hisoblangan IFS usuli 1980-yillarning o‘rtalarida paydo bo‘lgan. IFS qisiluvchi affin almashtirishlar to‘plamidir. Ma’lumki affin almashtirishlar masshtablashtirish, burish va parallel ko‘chirishni o‘z ichiga oladi. Agar masshtablashtirish koeffitsienti 1 dan kichik bo‘lsa, affin almashtirish qisiluvchi hisoblanadi.

Bunday to‘plamlarning tasviri aniq chizilgan chegaralarga ega bo‘lmaydi. Fraktallarning o‘ziga xos xususiyati shundan iboratki, tasvirning eng kichik bo‘lagi ham oxir oqibat butunligicha o‘zini ifodalaydi, ayniqsa bu samarani Jyulia to‘plami (1.3-rasm) misolida kuzatish mumkin. Fraktallarning bu xususiyatiga ko‘ra ma’lumotlarni fraktal qisishga asos solingan.

IFS bir nechta fiksirlangan funksiyalar tizimini o‘zida ifodalaydi. Eng oddiy IFS tekislikning affin almashtirishdan tashkil topgan:

$$X' = A*X + B*Y + C, Y' = D*X + E*Y + F.$$

1988 yili amerikalik taniqli mutaxassislar Barnsli va Sloan grafik ma’lumotlarni qisish va saqlash uchun dinamik tizimlar nazariyasiga asoslangan mulohazali fikrlarni taklif etadilar. Ular o‘z usullarini axborotlarni fraktal qisish usuli deb nomlaydilar. Bunday nomning kelib chiqishi bu usuldan paydo bo‘luvchi geometrik shakllar bilan bog‘liqdir.

Barnsli va Sloan ushbu fikrlarga asoslanib axborotlarni 500-1000 marotoba qisishga imkoniyat beruvchi algoritm yaratdilar. Buni qisqacha quyidagi ko‘rinishda bayon etish mumkin. Tasvir bir nechta oddiy almashtirishlar bilan kodlanadi, ya’ni bu almashtirishlarning koeffitsientlari bizning affin holatda A,V,S,D,E,F lardan iborat.

Masalan, birorta tasvirni ikkita affin almashtirish bilan kodlansa, ularni 12 ta koeffitsientlar yordamida bir qiymatli aniqlanadi. Agar boshlang‘ich nuqta X = 0, Y = 0 deb olinsa va iteratsion jarayon qo‘llanilsa, unda birinchi iteratsiyadan so‘ng 2 ta, ikkinchi iteratsiyadan so‘ng 4 ta, uchinchi iteratsiyadan so‘ng 8 ta, to‘rtinchi iteratsiyadan so‘ng 16 ta va h.k. bo‘ladi. Bir necha iteratsiyalardan so‘ng olingan nuqtalar to‘plami kodlangan tasvirni ifodalaydi. Biroq muammo shundan iboratki, ixtiyoriy tasvirni kodlagan IFS koeffitsientlarini topish juda qiyin.

IFS qurishda affin almashtirishdan boshqa, parametrlar soni katta bo‘lmagan oddiy geometrik almashtirishlar ham qo‘llaniladi.

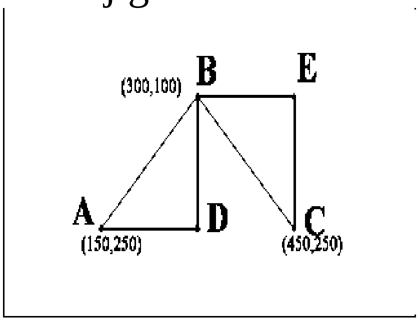
Masalan, loyihaviy:

$$X' = (A1*X + B1*Y + C1) / (D1*X + E1*Y + F1),$$
$$Y' = (A2*X + B2*Y + C2) / (D2*X + E2*Y + F2).$$

Yoki tekislikdagi kvadratik almashtirishlar:

$$X' = A1*X*X + B1*X*Y + C1*Y*Y + D1*X + E1*Y + F1,$$
$$Y' = A2*X*X + B2*X*Y + C2*Y*Y + D2*X + E2*Y + F2.$$

Misol tariqasida Xartera-Xeytueya «ajdari» (3.4-rasm) va Kox egri chizig‘i (3.1-rasm) fraktal tuzilishlarini qurish uchun IFS qo‘llashni qaraymiz. Bu tuzilishlarda o‘xshash qismlarni belgilaymiz va ularning har biri uchun affin almashtirish koeffitsientlarini hisoblaymiz. Butun tasvirga o‘xshash nechta qism bor bo‘lsa shuncha affin almashtirishlar affin kollajiga kiritiladi.



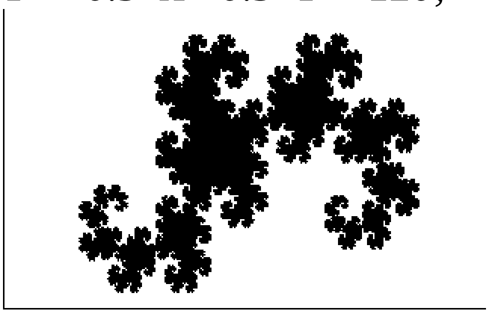
3.4-rasm. IFS usulida Xartera-Xeytueya «ajdari» qurish uchun tayyorgarlik

Xartera-Xeytueya «ajdari» uchun IFS quramiz. Buning uchun 640x350 displey to‘rlari koordinatasida bu fraktalning birinchi avlodini joylashtiramiz. Hosil bo‘luvchi siniq chiziq nuqtalarini A,V,S deb belgilaymiz. Qurish qoidasi bo‘yicha bu fraktal 2 ta qismdan iborat bo‘lib, rasmdagi siniq chiziqlar ADB va VES siniq chiziqlarga to‘laligicha o‘xshash.

Bu kesmalarning chetlari koordinatalarini bilib, AVS siniq chizig‘ini ADB va VES o‘tkazuvchi ikkita affin almashtirish koeffitsientlarini hisoblash mumkin:

$X' = –0.5*X –0.5*Y + 490;$
$Y' = 0.5*X –0.5*Y + 120;$

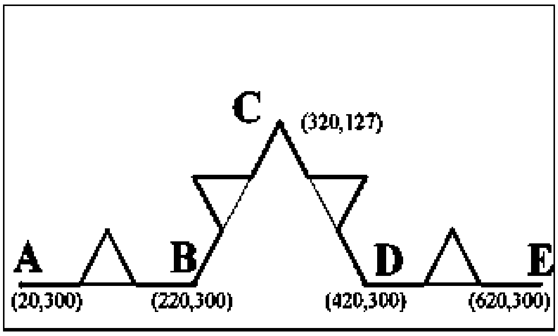
$X' = 0.5*X –0.5*Y + 340;$
$Y' = 0.5*X +0.5*Y – 110.$



3.5-rasm. 640x350 to‘g‘ri burchagida IFS usuli yordamida qurilgan Xartera-Xeytueya «ajdari»

Boshlang‘ich nuqtalarini (x=0, y=0) deb olib, ularga IFS iteratsion ta’sir ettirsak, o‘nta iteratsiyadan keyin ekranda 3.5-rasmda tasvirlangan o‘zida Xartera-Xeytueya «ajdari»ni ifodalovchi fraktal tuzilishga ega bo‘lamiz. Uning kodi (qisib yozganda) ikkita affin almashtirishning koeffitsientlar to‘plami deyiladi.

Yuqoridagiga o‘xshash Kox triad egri chizig‘i uchun IFS qurish mumkin. Bu egri chiziq to‘rtta qismdan iborat bo‘lib, 3.1-rasmda n=2 dagi egri chiziqqa butunligicha o‘xshash. IFS ni topish uchun fraktalning birinchi avlodini 640x350 displey to‘rlari koordinatasida joylashtiriladi.



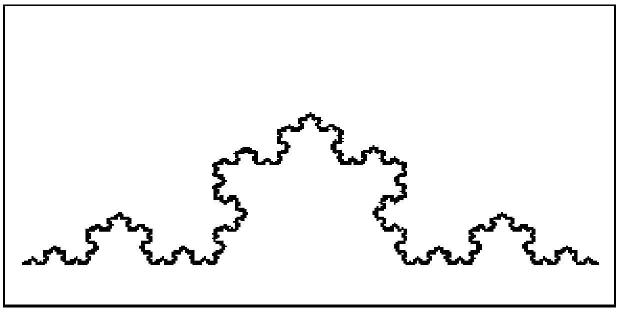
3.6-rasm. IFS usulida Kox triad egri chizig‘i qurish uchun tayyorgarlik

Uni qurish uchun to‘rtta almashtirishdan tashkil topgan affin almashtirishlar to‘plami talab etiladi:

*X' = 0.333*X + 13.333;*
*Y' = 0.333*Y + 200;*
*X' = 0.167*X + 0.289*Y + 130;*
*Y' = -0.289*X + 0.167*Y + 256;*

*X' = 0.333*X + 413.333;*
*Y' = 0.333*Y + 200;*
*X' = 0.167*X - 0.289*Y + 403;*
*Y' = 0.289*X + 0.167*Y + 71.*

Bu affin almashtirishning qo‘llash natijasini o‘nta iteratsiyadan keyin 3.7-rasmdagi holatni ko‘rish mumkin.

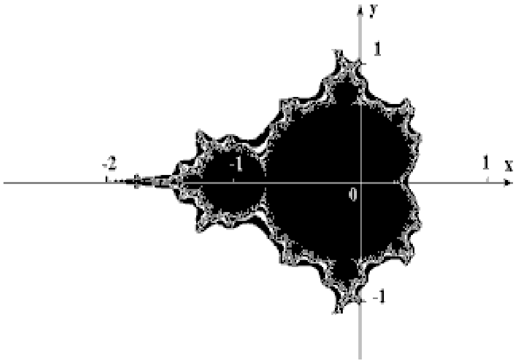


3.7-rasm. 640x350 to‘g‘ri burchagida IFS usuli yordami bilan qurilgan Kox egri chizig‘i

Fraktallarning eng katta guruhidan biri-algebraik fraktallardir. Ularni *n*-o‘lchovli fazoda nochiziq jarayonlar yordami bilan hosil qilinadi. Ikki o‘lchovli jarayonlar eng ko‘p o‘rganilgan. Nochiziq iteratsion jarayonni diskret dinamik tizim kabi izohlasak, bu tizim nazariyasi terminologiyasidan foydalanish mumkin: fazali portret, barqaror jarayon, tortilish nuqtasi va boshqalar.

Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha turg‘un holatlarga ega. Iteratsiyaning bir necha sonidan keyin dinamik tizimning holati uning boshlang‘ich holatiga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun har bir turg‘un holat boshlang‘ich holatning bir necha sohasini egallaydi va albatta tizim ko‘rilayotgan oxirgi holatga tushadi. Xuddi shunday fazalar fazosi attraktorlar tortilish sohasiga bo‘linadi. Agar ikki o‘lchovli fazo fazali bo‘lsa, tortilish nuqtalari sohasini turli ranglar bilan bo‘yab bu tizimlarning rangli fazalar portretini olish mumkin. Ranglarni tanlash algoritmini almashtirib fraktal tasvirlarni olish mumkin.

Kutilmaganda matematiklar uchun primitiv algoritmlar yordamida juda murakkab notrivial tuzilishlarni yaratish imkoniyati paydo bo‘ladi.



3.8-rasm. Mandelbrot to‘plami

Misol sifatida Mandelbrot to‘plamini qaraymiz (2.8-rasm). Uni qurish algoritmi yetarlicha oddiy iterativ (takroriy) ifodaga asoslangan:

$$\boldsymbol{Z}[i+1] = \boldsymbol{Z}[i] * \boldsymbol{Z}[i] + \boldsymbol{C},$$

bu yerda Z_i va S lar kompleks o‘zgaruvchilar.

Iteratsiya har bir boshlang‘ich nuqta uchun bajariladi. To‘g‘riburchakli yoki kvadratik qism to‘plam kompleks tekisligidir. Iteratsion jarayon *Z[i]* markazi (0,0) nuqtada yotadigan, radiusi *2* ga teng aylana chegarasidan chiqmagunga qadar davom etadi, yoki iteratsiyalar soni yetarlicha katta bo‘lgandan keyin (masalan, 200-500) *Z[i]* aylananing qaysidir bir nuqtasiga kiradi (agar *Z[i]* yetarlicha katta iteratsiyalar soni davomida aylana ichida qolsa, iteratsion jarayon to‘xtiladi). Yuqorida bayon etilgan algoritm Mandelbrot to‘plami deb ataluviga yaqinlashishni beradi. Mandelbrot to‘plamiga iteratsiya soni cheksiz bo‘lgan vaqtda, cheksizlikka ketmaydigan nuqtalar kiradi. To‘plam chegaralarida yotuvchi (kiruvchi) nuqtalar (aynan shu yerda murakkab tuzilishlar paydo bo‘ladi) iteratsiyalar sonining oxiridan keyin cheksizlikka ketadi, to‘plam ichida yotuvchi nuqtalar bir necha iteratsiyalardan keyin cheksizlikka ketadi.

3.3. R-funksiya usuli yordamida fraktallar qurish

Fraktallar tasvirini gazlama, gilam, chinni va keramik buyumlarga nusxalash (shtamplash) uchun ularning tenglamasini yozish kerak bo‘ladi, ya’ni R-funksiya usulini qo‘llab fraktallar sohasi geometriyasi tenglamasini qurishni amalga oshirish mumkin [28,32,33,41-48].

Soha geometriyalari chegarasi tenglamalarini qurish tayanch funksiyalar kabi R-funksiya tizimlaridan mosini tanlab analitik tenglamaning ko‘rinishini chiqarishga imkon beruvchi mantiqiy formulalarni ham talab etadi. Bu R-funksiya usuli bilan tanish bo‘lmagan analitik hamda differensial geometriyaning muhandislari va tadqiqotchilari uchun qiyin bo‘lgan tizimni bajaradigan qat’iy matematik bilimni va malakani talab etadi. Bu yo‘nalishdagi istiqbol - tashkil etilgan geometrik ob’ektlarni shakllantirishni o‘zida ifodalaydi.

Shuni aytish mumkinki, fraktallar sohasi geometriyaning analitik tenglamalarini yozish uchun imkon beruvchi usullaridan biri V.L.Rvachevning R-funksiya usuli hisoblanadi. R-funksiya usuli bo‘yicha asosiy tushunchalarni keltiramiz.

R-funksiya haqiqiy o‘zgaruvchili sonli funksiya bo‘lib, uning ishoralari to‘liqligicha sonlar o‘qi intervalari $(-\infty,0)$ va $[0,\infty)$ning mos bo‘laklarida argumentlar ishoralari bilan aniqlanadi.

Agar shunday ergashuvchi *F* mantiqiy funksiya mavjud bo‘lib uning argumentlari $sign(z)=\Phi(sign(x), sign(y))$ bo‘lsa, $z=z(x,y)$ sonli funksiya R-funksiya deb ataladi.

Har bir R-funksiya yagona ergashuvchi mantiq funksiyaga mos tushadi.

R-funksiyalar to‘plami R-funksiyalarning ustma-ust tushishi ma’nosida yopiqdir. Agarda *N* ning barcha ustma-ust tushuvchi elementlari to‘plami R-funksiyalar to‘plamining har bir tarmog‘i bilan bo‘sh bo‘lmagan kesishishga ega bo‘lsa, R-funksiyalar tizimi *N* yetarlicha to‘liq deyiladi.

Eng ko‘p foydalaniladigan R-funksiya to‘liq tizimi

$$(-1<\alpha\le 1) \text{ da } R_\alpha \quad x\wedge_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$x\vee_\alpha y\equiv\frac{1}{1+\alpha}\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}\right);$$

$$\bar{x}\equiv -x.$$

tizimdir.

$\alpha=0$ da R_0 tizimga ega bo‘lamiz:

$$x\wedge_0 y\equiv\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$x\vee_0 y\equiv\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

$$\overline{x} \equiv -x.$$

$\alpha = 1$ da R_1 tizimga ega bo‘lamiz:

$$x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right);$$
$$x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right);$$
$$\overline{x} \equiv -x.$$

R-funksiyalarning oxirgi holatida kon’yunksiyalar va diz’yunksiyalari quyidagilar bilan mos tushadi:

$$x \wedge y \equiv \min(x, y), \quad x \vee y \equiv \max(x, y).$$

R-funksiya yordamida oddiy sohalarning ma’lum tenglamalari bo‘yicha tuzilgan sohalarning chegarasi tenglamalarini oshkormas shaklini qurish mumkin.

R-funksiyalarni cheksiz qiymatli mantiq yoki toqmantiq instrumenti sifatida qarash mumkin.

R-funksiyalar keng doiradagi matematika, fizika masalalari (elastiklik nazariyasi, elektrodinamika, issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasi va boshqalar) sinfini hal qilishda, signallar va tasvirlarni ko‘p o‘lchovli raqamli qayta ishlashda, kompyuter grafikasi va boshqa sohalarda qo‘llaniladi.

Soha geometriyasi tenglamalarini (ya’ni normallashgan tenglamasini) qurish usullari bu tenglamalarni tashkil qilish jarayonini avtomatlashtirish uchun yaxshi texnologik asosni o‘zida ifodalaydi. Aslida faqat predikat tenglamalarni qurish jarayonini avtomatlashtirish kerak, bu tenglamalardan soha geometriyasining oddiy elementar tenglamalariga o‘tish mantiq funksiya simvollarini R-funksiyaning mos simvollari bilan almashtirish orqali bajariladi, soha simvollari - ularning mos chap qismlariga teng emas.

Shunday qilib, algoritm uchun kiruvchi ma’lumot quyidagilar:

3. Foydalaniladigan standart primitivlarning ko‘rinishi: to‘g‘ri chiziq, doira, ellips, to‘rtburchak, uchburchak, qavariq ko‘pburchak, aylana, muntazam ko‘pburchak va boshqalar (foydalanuvchining so‘roviga qarab menyu yoki ularning ko‘rinishi to‘ldirilib boriladi).

4. Standart primitivlarni o‘lchami va o‘rnini aniqlovchi geometrik parametrlar.

Bu ma’lumotlar asosida tayanch funksiyalar avtomatik shakllantiriladi, chaqirilgan primitivlarning normallashgan tenglamasi va belgilar bo‘yicha tashkil etilgan soha geometriyasining “ichkari tomon” - “tashqari tomon”larining predikat hamda analitik funksiyalari shakllantiriladi.

Fraktallar nazariyasi va ularning amaliy tatbiqi bo‘yicha radiofizika va radiotexnika sohasida Rossiya fanlar akademiyasining V.A.Kotelnikov nomidagi radiotexnika va elektronika institutida tadqiqotlar olib borilmoqda. 20 asrning 80-yillaridan boshlab ular yangi fundamental ilmiy yo‘nalish “Fraktal radiofizika va fraktal radiotexnika: Fraktal radiotizimni loyihalashtirish”ga soldi va rivojlantirdi.

[58,59]da ajratib ko‘rsatilganidek, fraktallar, kasrli operatorlar va skeylinglar amaliyot so‘rovlariga hamda zamonaviy matematikaning abstrakt loyihalariga muvofiq keluvchi tadqiqotning muhim instrumentlari hisoblanadi.

R-funksiya usuli asosida **Kox egri chizig‘i**ning tenglamasini qurishni qaraymiz (3.9-rasm).

3.9-rasm Kox egri chizig‘ini qurish

Qurishni $-3a \le x \le 3a$ intervalda bajaramiz. U holda

$$\omega_0 = -y \ge 0; \quad \omega_{00} = \omega_0 \wedge_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0;$$
$$f_1 = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0; \quad f_2 = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}\right) \ge 0.$$

bo‘ladi.

Bu holatda ω_{00} teng yonli uchburchakning tenglamasidir. Agar ω_{00} ning o‘rniga tenglamaning ko‘rinishini

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \ge 0,$$

deb yozsak, unda 3.9 *v*) rasmdagi grafikka mos tenglamani olamiz. Shunday qilib,

$$\omega_1 = \omega_0 \vee_0 \left(f_1 \wedge_0 f_2\right) \geq 0; \quad \omega_{21} = \omega_1\left(3\left(x + 2a\right), 3y\right) \geq 0;$$

$$\omega_{22} = \omega_1\left(3\left(\frac{x + a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

$$3\left(-\left(x + a - 2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right) \geq 0;$$

$$\omega_2 = (\omega_{21}(x,y) \vee_0 \omega_{22}(x,y)) \wedge_0 (-x,y) \vee_0 \omega_{22}(-x,y)) \geq 0;$$

$$\omega_{k1} = \omega_{k-1}(3(x+2a), 3y) \geq 0;$$

$$\omega_{k2} = \omega_{k-1}\left(3\left(\frac{x + \alpha/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 3\left(-\left(x + a/2\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right)\right) \geq 0;$$

$$\omega_k = \left(\omega_{k1}(x,y) \vee_0 \omega_{k2}(x,y)\right) \wedge_0 \left(\omega_{k1}(-x,y) \vee_0 \omega_{k2}(-x,y)\right) \geq 0 \left(k = 3, 4, \ldots\right)$$

hosil bo‘ladi.

3.9-rasmda $\omega_k(x,y) \geq 0$ funksiya darajalari chiziqlarining tasviri keltirilgan bo‘lib, *k* ning turli qiymatlari uchun Kox egri chizig‘ini beradi.

2. Serpin Gilami. Serpin Gilami quyidagi tartibda quriladi. Berilgan kvadrat 9 ta bir xil kattalikdagi kvadratlarga bo‘linadi, bunda markazdagi kvadrat bundan mustasno (2.10-rasm). Keyin bu jarayon hosil qilingan kvadratlarda takror bajariladi va cheksiz davom ettiriladi hamda natijada fraktal ob’ekt hisoblangan Serpin gilamini hosil qilinadi. Uning kasrli o‘lchami *D*=lg8 / lg3 ≈ 1.893 ga teng. Agarda cheksiz jarayonni *k*-tartibda to‘xtatilsa, *k*-tartibdagi oldfraktal hosil qilinadi. [32,33]ga asosan Serpin oldfraktali chegaralarini funksiyasi quyidagi

$$f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0, \quad f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0.$$

ko‘rinishni oladi, $\omega_0 = f_1 \wedge_0 f_2 \geq 0$ – 0-tartibdagi oldfraktaldir.

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyatidan foydalanib yordamchi funksiyalarni qaraymiz:

$$\omega_1(x,y) = \frac{\overline{\omega_0(3x,3y)}}{3} \geq 0, \quad \omega_k(x,y) = \frac{\omega_{k\text{-}1}(3\mu_{hx}, 3\mu_{hy})}{3} \geq 0 \ldots (k = 2, 3, \ldots),$$

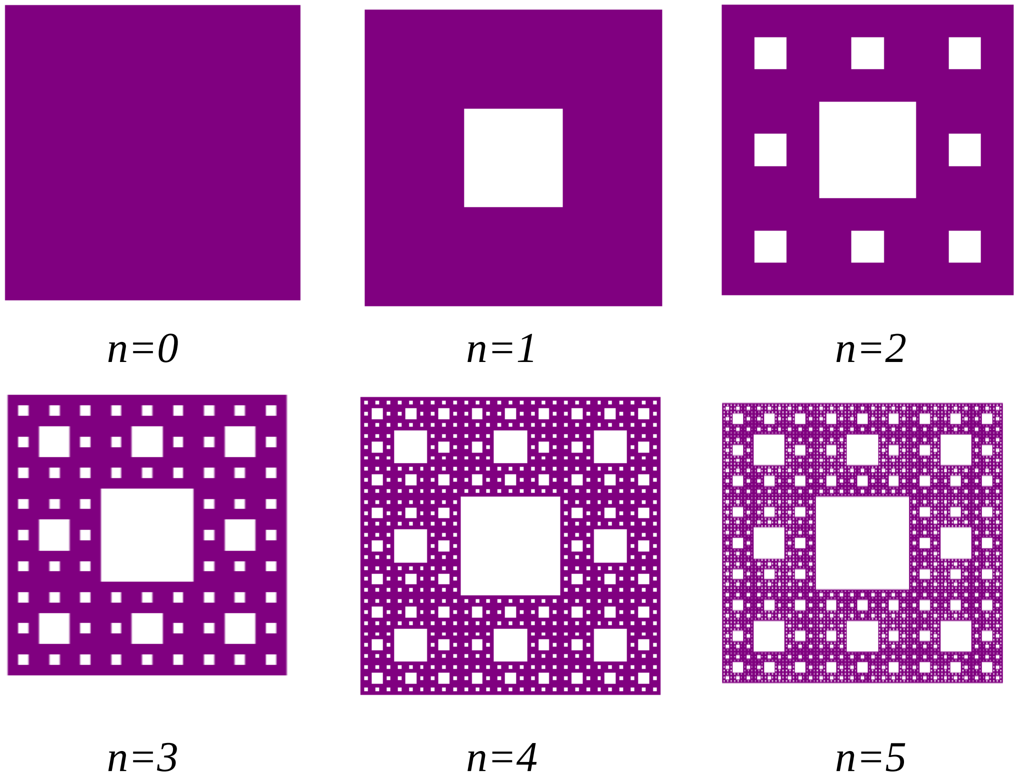
bu yerda

$$\mu_{h_x} = \frac{h_x}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi x}{h_x}\right),\ \ \mu_{h_y} = \frac{h_y}{\pi}\arcsin\left(sin\frac{\pi y}{h_y}\right),\ h_x = \frac{2a}{3},\ \ h_y = \frac{2b}{3}.$$

Unda

$$K_\omega(x,y) = \omega_0(x,y) \wedge_0 \omega_1(x,y) \wedge_0 \omega_2(x,y) \wedge_0 \ldots \wedge_0 \omega_k(x,y) \geq 0.$$

3.10-rasmda k ning turli qiymatlarida Serpin gilamini beruvchi funksiya $K_{\omega_k}(x,y) \geq 0$ning turli tartibdagi chiziqlari tasvirlari qurilgan.



3.10-rasm. Kvadratik Serpin gilamini qurish

3. Serpin Salfetkasi. [32,33]da Serpin salfetkasi yoki uchburchakning tenglamasi qurilgan. Uni qurish uchun teng tomonli uchburchak markazidan uchburchak “qirqib” olamiz. Hosil bo‘lgan uchburchaklarda xuddi shu jarayon takroran bajariladi (markazdagi uchburchak bundan mustasno) va cheksiz davom ettiriladi. Agar shu hosil bo‘lgan uchburchaklardan ixtiyoriy bittasini olib kattalashtirilsa, boshlang‘ich uchburchak nusxasi paydo bo‘ladi. Bu holatda to‘liq o‘ziga-o‘zi o‘xshashlik xususiyati bajariladi. Bu fraktalda initsiator va generator oldingi fraktaldagi kabi bir xildir.

Har bir iteratsiyada uning nusxasini kichiklashgani generatorning har bir burchaklariga qo‘shilib boradi. Har bir iteratsiyada har generatorning burchaklariga nusxalarning kichiklashtirilgani qo‘shiladi va h.k. Agar bu fraktalni yaratishda cheksiz sondagi iteratsiyalar olib borilsa u butun bir tekislikni egallaydi. Shuning uchun uning fraktal o‘lchovi $\frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$ dir.

To‘g‘ri burchakli uchburchakning tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\omega_0(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right) + R \ge 0,$$

yoki $$\omega_0(x,y) = -x1 + R \ge 0,$$

bu yerda

$$x1 = r\cos\mu; \; y1 = r\sin\mu; \; \mu(\theta) = \frac{2}{3}\arcsin\left(\sin\frac{3\theta}{2}\right);$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \; \theta = arctg\frac{y}{x};$$

R - ichki chizilgan aylana radiusi.

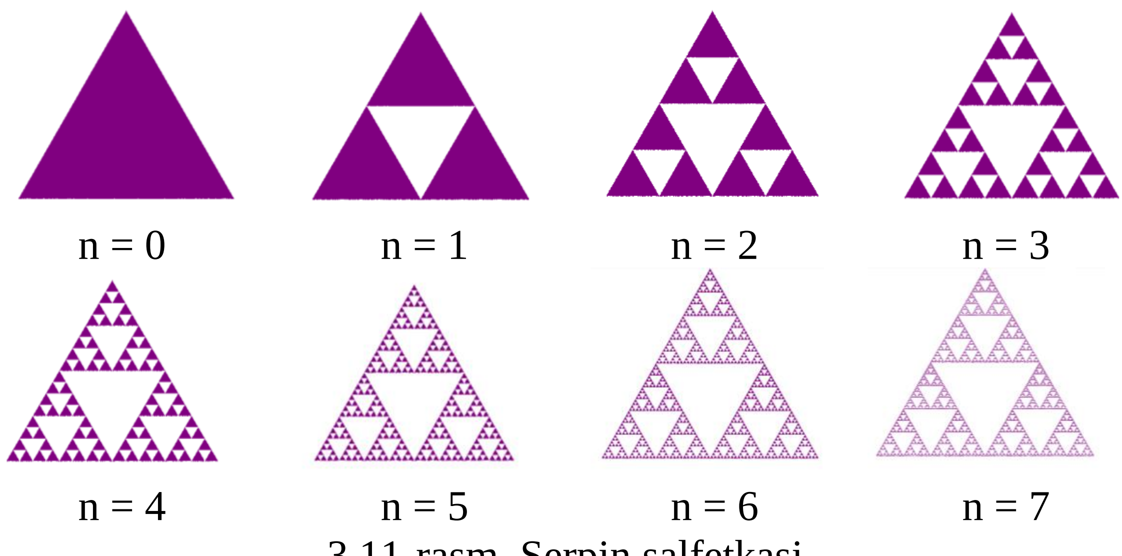
Unda

$$\omega_1(x,y) = \omega_0(-2(x1-R),\ 2y1)/2 \ge 0,$$

va mos

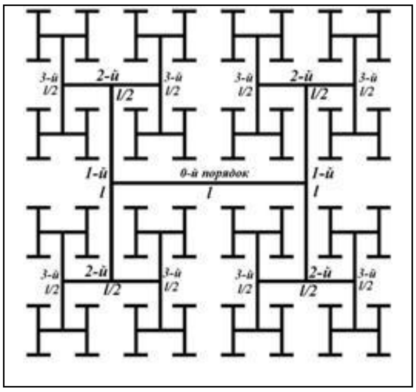
$$\omega_k(x,y) = \omega_{k-1}(2(x1-R),\ 2y1)/2 \ge 0, \; (k = 2,3,\ldots).$$

Ta’kidlaymizki bu holatda R-funksiya qo‘llanilmaydi. 3.11-rasmda Serpin salfetkasini hosil etuvchi k ning turli qiymatlari uchun $\omega_k(x,y) \ge 0$ funksiyaning turli tartibdagi chiziqlari tasvirlari qurilgan.



3.11-rasm. Serpin salfetkasi

4. Keyli daraxtiga asoslangan fraktal antennalar. Fraktal antenna turli uzunliklardagi o‘tkazgichlar bo‘laklari qatorini ifodalaydi. Har bir yangi iteratsiyada antennaga aniq uzunlikdagi bo‘laklar qo‘shiladi, ya’ni har bir toq iteratsiyada uzunlik ilgarigidek qoladi, juft iteratsiyada uzunlik ikki martaga kamayadi (3.12-rasm). [52,53]da 6-tartibli “Keyli daraxti” antennasida tokning taqsimlanishi tadqiq qilingan bo‘lib, antenna parametrlarini rasmiylashtirishda aperaturaning yangi qismlari rol o‘ynaydi.



3.12-rasm. 6-tartibdagi «Keyli daraxti»

Endi *R*-funksiya usuliga asosan «Keyli daraxti» tenglamasini quramiz.

1-qadam.

$$i=1;\quad a_1 = l/2;\; b_1 = l/2;$$

$$f_{oe}(x,y)=\frac{a_{11}^2-(x+a_1)^2}{2a_{11}}\geq 0,$$ (a_{11} – kichik son),

$$f_{op}=\frac{a_{11}^2-(a_1-x)^2}{2a_{11}}\geq 0,\quad \varphi_o(x,y)=\frac{b_1^2-y^2}{2b_1}\geq 0;$$

$$f_1=f_{oe}(x,y)\wedge\varphi_0(x,y)\geq 0,$$

$$f_2(x,y)=f_{op}(x,y)\wedge_0\varphi_0(x,y)\geq 0,$$

$$\omega_{01}(x,y)=f_1(x,y)\vee_0 f_2(x,y)\geq 0,$$

$$f_3(x,y)=\frac{a_1^2-x^2}{2a_1}\geq 0,\quad f_4(x,y)=\frac{b_{11}^2-y^2}{2b_{11}}\geq 0,$$

(* b_{11} - yetarlicha kichik son*),

$$\omega_{02}(x,y) = f_3(x,y) \wedge_0 f_4(x,y) \geq 0,$$

$$f_{1ay}(x,y) = \frac{b_{11}^2 - (y+b_1)^2}{2b_{11}} \geq 0, \quad f_{1by}(x,y) = \frac{b_{11}^2 - (b-y)^2}{2b_{11}} \geq 0, \ c = b_1/2,$$

$$\varphi_{1\ell x}(x,y) = \frac{c^2 - (x+a_1)^2}{2c} \geq 0, \quad \varphi_{1px} = \frac{c^2 - (x-a_1)^2}{2c} \geq 0,$$

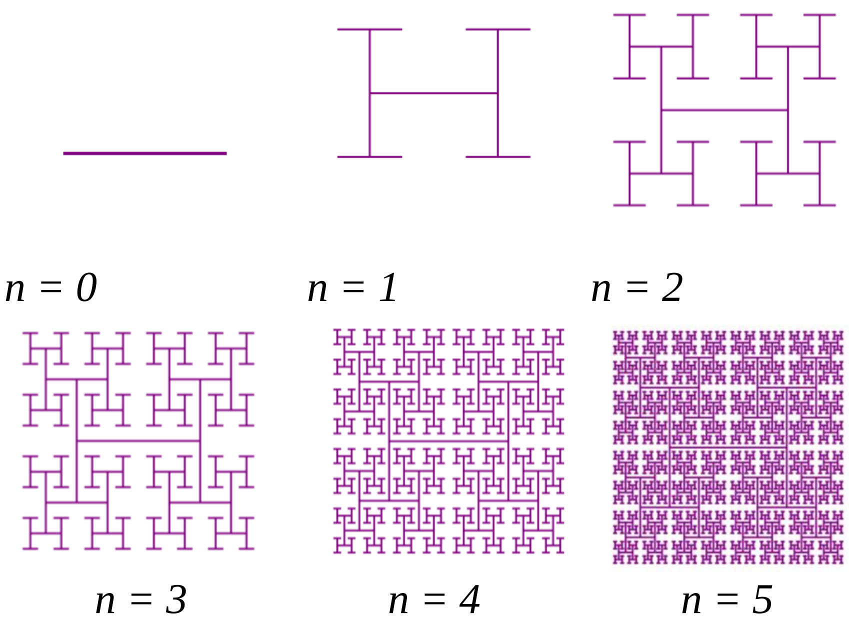
$$\omega_{03}(x,y) = (f_{1ay}(x,y) \wedge_0 \varphi_{1lx}(x,y)) \vee_0 (f_{1ay}(x,y) \wedge_0 \varphi_{1px}(x,y)) \vee_0$$
$$\vee_0 (f_{1by}(x,y) \wedge_0 \varphi_{1lx}(x,y)) \vee_0 (f_{1by}(x,y) \wedge_0 \varphi_{1px}(x,y)) \geq 0,$$

$$\omega_1(x,y) = \omega_{01}(x,y) \vee_0 \omega_{02}(x,y) \vee_0 \omega_{03}(x,y) \geq 0,$$

2-qadam.

$$i = 2; \quad a_1 = a_1/2; \ b_1 = b_1/2;$$

$$\omega_2(x,y) = \omega_1(x-a_1, y-b_1) \vee_0 \omega_1(x+a_1, y-b_1) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_1(x+a_1, y+b_1) \vee_0 \omega_1(x-a_1, y+b_1) \vee_0 \omega_1(x,y) \geq 0.$$



3.13-rasm. «Keyli daraxti»

Endi iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$i = k; \quad a_1 = a_1/2; \ b_1 = b_1/2;$$

$$\omega_k(x,y)=\omega_{k-1}(x-a_1,y-b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y-b_1)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{k-1}(x+a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x-a_1,y+b_1)\vee_0\omega_{k-1}(x,y)\geq 0,\quad \mathrm{k}=3,4,5,...$$

k ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 2.13-rasmda keltirilgan.

5. Eksklyuziv fraktal halqalar. Fraktal halqali tuzulishlar tadqiqotini birinchi bo‘lib [52,53] ishlarida taklif etilgan. Bunda asosan simmetriya va o‘xshashlik xususiyatlari hisobga olingan.

1. A1 da fraktal antenna tuzilishining asosiy elementi sifatida birinchi iteratsiyada radiusi 11 mm, *Ox* o‘qi bo‘yicha qalinligi 0,4 mm va radiusi bo‘yicha 0,2 mm bo‘lgan halqa olingan.

2.14 - rasmda ifodalangan fraktal aperaturaning tuzilishini qurish algoritmi quyidagicha ifodalanadi.

0 - iteratsiyada asosiy halqaga berilgan halqaga nisbatan uch marta kichik bo‘lgan 7 ta halqalar joylashtiriladi. Boshqa elementlari (eni va halqaning qalinligi) o‘zgarishsiz qoldiriladi. 6 ta kichik aylananing markazi oltiburchakning uchiga R*2/3 masofada joylashtiriladi. Yettinchi aylananing markazi asosiy antennaning markazi bilan ustma-ust tushadi. Bu qurishni iteratsion algoritmning birinchi sikli deb ataymiz va uni A_1 abbreviaturasi bilan belgilaymiz.

2. Ikkinchi iteratsiyadagi A_2 eksklyuziv halqalarni qurish uchun A_1 model uchun qo‘llangan algortmdan foydalaniladi (3.15 - rasm).

Har bir aylanaga oldingi radiusdan ikki marta kichik bo‘lgan oltita aylana qo‘yiladi, markazi oltiburchakning uchidagi boshlang‘ich radiusdan R*2/3 masofada joylashtiriladi. Yettinchi aylana asosiy aylana markazida joylashtiriladi. Shunday qilib, rasmda keltirilgan fraktal antenna modeli hosil qilinadi. Xuddi 1 dagi kabi koaksial chiziqlarning diametri 0,5 mm. Antennalarning qalinligi 0,4 mm, halqaning eni 0,2 mm. Tashqi aylaning radiuslari R = 11 mm, R1 = R/3, R2 = R/9.

A_1 eksklyuziv antennaning tenglamasini quramiz:

0-qadam.

$$\omega_{00}=\frac{R_0^2-x^2-y^2}{2R},$$

1 - qadam.

$$r_1=\frac{1}{3}R_0,\quad a_1=\frac{2}{3}R_0,\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{3}R_0,\quad dy=\frac{1}{3}R_0,$$

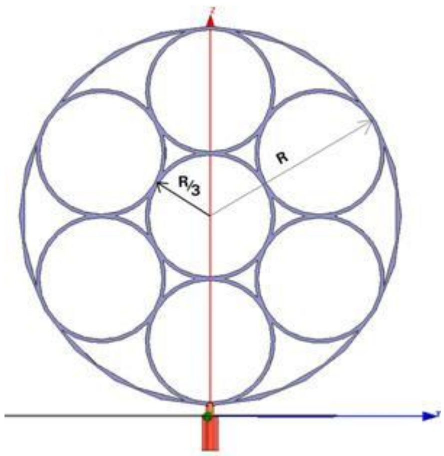
$$\omega_{10}=\frac{r_1^2-x^2-y^2}{2r_1},\ \omega_{11}=\frac{r_1^2-x^2-(y-a_1)^2}{2r_1},$$

$$\omega_{12}=\frac{r_1^2-x^2-(y+a_1)^2}{2r_1},\ \omega_{14}=\frac{r_1^2-(x+dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},$$

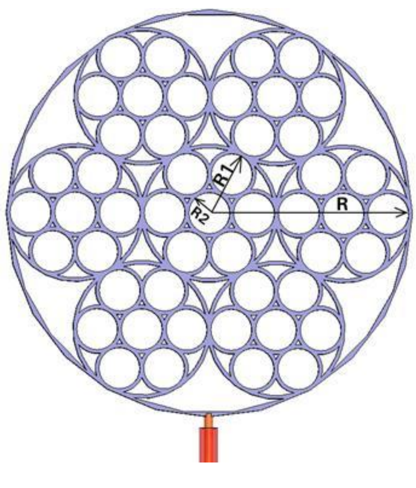
$$\omega_{15}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y+dy)^2}{2r_1},\ \omega_{16}=\frac{r_1^2-(x-dx)^2-(y-dy)^2}{2r_1},$$

$$\omega=(\omega_{00}\vee_0(\omega_{10}\vee_0\omega_{11}\vee_0\omega_{12}\vee_0\omega_{13}\vee_0\omega_{14}\vee_0\omega_{15}\vee_0\omega_{16}));$$

Bu tenglama A_1 eksklyuziv antennaning tenglamasini beradi



3.14-rasm. A_1 eksklyuziv antennaning modeli



3.15-rasm. A_2 eksklyuziv antennaning modeli

dr kichik son - aylana qalinligi

$$\omega_0 = \frac{R_0^2 - x^2 - y^2}{2R} \wedge_0 \frac{x^2 + y^2 - (R - dr)^2}{2R} \geq 0;$$

1-qadam. $r_1 = \frac{1}{3} R_0, \quad a_1 = \frac{2}{3} R_0, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3} R_0, \quad dy = \frac{1}{3} R_0.$

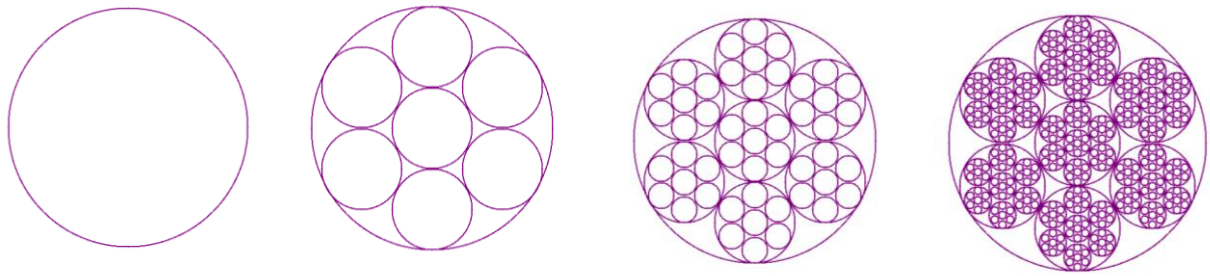
$$\omega_{10} = \omega_0(r_1, x, y),\ \omega_{11} = \omega_0(r_1, x, y - a_1),\ \omega_{12} = \omega_0(r_1, x, y + a_1),$$
$$\omega_{13} = \omega_0(r_1, x + dx, y - dy), \omega_{14} = \omega_0(r_1, x + dx, y + dy),$$
$$\omega_{15} = \omega_0(r_1, x - dx, y + dy), \omega_{16} = \omega_0(r_1, x - dx, y - dy),$$
$$\omega_1 = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{10} \vee_0 \omega_{11} \vee_0 \omega_{12} \vee_0 \omega_{13} \vee_0 \omega_{14} \vee_0 \omega_{15} \vee_0 \omega_{16}));$$

Barcha oldingilardan i - qadamni aniqlaymiz.

$$r_i = \frac{1}{3} r_{i-1}, \quad a_i = \frac{2}{3} r_{i-1}, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{3} r_{i-1}, \quad dy = \frac{1}{3} r_{i-1};$$
$$\omega_{i0} = \omega_{i-1}(r_i, x, y), \omega_{i1} = \omega_{i-1}(r_i, x, y - a_i),\ \omega_{i2} = \omega_{i-1}(r_i, x, y + a_i),$$
$$\omega_{i3} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y - dy), \omega_{i4} = \omega_{i-1}(r_i, x + dx, y + dy),$$
$$\omega_{i5} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y + dy), \omega_{i6} = \omega_{i-1}(r_i, x - dx, y - dy),$$
$$\omega = (\omega_{00} \vee_0 (\omega_{i0} \vee_0 \omega_{i1} \vee_0 \omega_{i2} \vee_0 \omega_{i3} \vee_0 \omega_{i4} \vee_0 \omega_{i5} \vee_0 \omega_{i6})),$$

i = 2,3,4,…

Ajratib ko‘rsatish mumkinki i=2 da A_2 antennaning modelini olamiz, i= 0, 1, 2, 3, 4 hisoblashlar natijalari 3.16 - rasmda keltirilgan.



n = 0 n = 1 n = 2 n = 3

3.16-rasm. A_2 eksklyuziv antenna

Serpin egri chizig‘i [20]. Avvalo asosning tenglamasini quramiz:

$$x_1 = x\cos(\alpha_1) + y\sin(\alpha_1), \quad y_1 = -x\sin(\alpha_1) + y\cos(\alpha_1),$$
$$x_2 = x\cos(\alpha_2) + y\sin(\alpha_2), \quad y_2 = -x\sin(\alpha_2) + y\cos(\alpha_2),$$
$$f_1(x,y) = (a^2 - x_1^2) \wedge_0 (a^2 - y_1^2) \geq 0,\ f_2(x,y) = (a^2 - x_2^2) \wedge_0 (a^2 - y_2^2) \geq 0,$$
$$f_3(x,y) = f_2(-x,y),\ \omega_1(x,y) = f_1(x,y) \vee_0 f_2(x,y) \vee_0 f_3(x,y).$$

Bu yerda o‘qlarning burilish formulalari qo‘llanilgan va u keyin ham kerak bo‘ladi.

Iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\omega_n(x,y) = \omega_{n-1}(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(x-2a, y-2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y-2a) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(x+2a, y+2a) \vee_0 \omega_{n-1}(x-2a, y+2a),\ \mathrm{n} = 2,\ 3,\ 4,\ 5,...$$

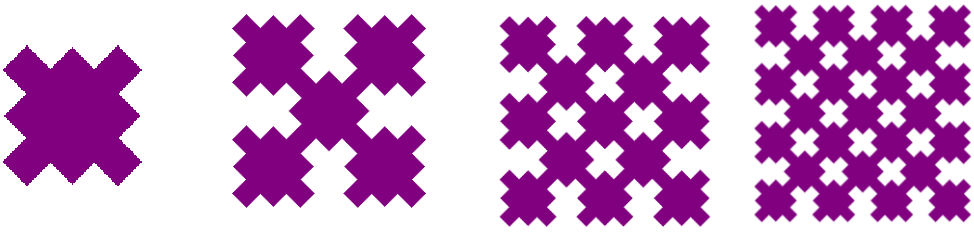
Hisoblashda $a_1 = \frac{3}{8}a,\ \ b_1 = \frac{7}{4}a,$

dan foydalanilgan. Hisoblashlarning natijalari $\alpha_1 = 0$ va $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ larda va turli qiymatlaridagi natijalar 3.17-rasmda keltirilgan.

n=1(α_1=0, α_2=π/4)	n=2 (α_1=0, α_2=π/4)	n=3 (α_1=0, α_2=π/4)	n=4(α_1=0, α_2=π/4)

3.17-rasm. Serpin egri chizig‘i

$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$ bo‘lganda n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.18-rasmda keltirilgan.



$n=1$ ($\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/4$)	$n=2$ ($\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/4$)	$n = 3$ ($\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/4$)	$n=4$ ($\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/4$)

3.18-rasm. Serpin egri chizig‘i

2. Serpin gilami tenglamasi quyidagi tartibda quriladi. Boshlang‘ich kvadrat bir xil kvadratlarga bo‘linadi, markazdagi bundan mustasno (3.19-rasm). Keyin hosil qilingan kvadratlarda shu jarayon takroran qo‘llaniladi va h.k. Bu jarayon cheksiz davom ettirilsa natijada fraktal ob’ekt Serpin gilamini olamiz. Uning kasrli o‘lchami *D*=lg 8/lg ≈ 1.893ga teng. Agar cheksiz jarayonni *k*-qadamda to‘xtatilsa unda *k*-tartibdagi oldfraktal hosil qilinadi. [25]ga mos Serpin oldfraktali chegarasi quyidagi

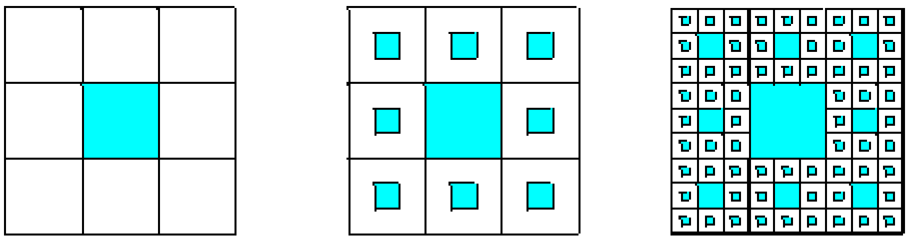
$$\omega_k(x,y)=\begin{cases}\omega_0(x,y), k=0\\ \omega_{k-1}(x,y)\wedge F_k(x,y), k=1,2,...,\end{cases}$$

bu yerda

$$F_k(x,y)=-3^{-k}\omega_0\left[6\arcsin\left[\sin(3^{k-1}\pi x/2)\right]/\pi 6\arcsin\left[3^{k-1}\pi y/2\right]/\pi\right],$$

$$\omega_0(x,y)=\left[\left(\alpha^2-x^2\right)\wedge\left(\alpha^2-y^2\right)\right]/2\alpha$$

ko‘rinishda ifodalanadi.



3.19-rasm. Serpin kvadrat gilamini qurish

Kox egri chizig‘i (Ikkinchi usul). Kox egri chizig‘i quyidagi protsedura yo‘li bilan quriladi. Boshlang‘ich oraliqdan markazdagi bo‘lagi olib tashlanadi va teng tomonli uchburchak bilan almashtiriladi. Keyin hosil qilingan barcha uchburchaklarga shu protsedura qo‘llaniladi.

$y \le 0$ yarim tekisligi boshlang‘ich soha bo‘lsin, unda uning chegaralari tenglamasi $\omega_0=-y=0$ bo‘ladi. $(k \ge 1)$ k-tartibli oldfraktallarni R-funksiya usuliga asosan tenglamasini topish algoritmi ikki etapdan iborat:

1. ω_{k-1} funksiyaning R-diz’yunksiyasi to‘g‘ri chiziqga nisbatan o‘zining aks ettirilishi bilan

$$y = -x\sqrt{3} + 3^{k-1}\sqrt{3}:$$

$$\varpi_k(x,y) = \omega_{k-1}(x,y) \vee$$

$$\vee\, \omega_{k-1}\left[\left(-x - y\sqrt{3} + 3^k\right)/2, \left(-x\sqrt{3} + y + 3^{k-1}\sqrt{3}\right)/2\right];$$

2. ϖ_k funksiyaning R-kon'yunksiyasi chiziqga nisbatan o'zining aks ettirilishi bilan

$$x = 3^k/2:$$

$$\omega_k(x,y) = \varpi_k(x,y) \wedge \varpi_k(3^k - x, y).$$

Teng tomonli uchburchaklarning tomonlarida qurilgan Kox egri chizig'i Kox qorpachasi nomli geometrik ob'ektni beradi [63]. Kox qorparchasi chegaralari tenglamalari bir-biri bilan 60^0 burchakka buralgan uchta operatsiya R-kon'yunksiyani qo'llash bilan olinadi:

$$W_k(x,y) = \omega_k(y + 3^k/2, x - 3^{k-1}\sqrt{3}/2) \wedge$$

$$\wedge\left[\omega_k\left[y - x\sqrt{3} + 3^k\right)/2, \left(-x - y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3}\right)/2\right] \wedge$$

$$\wedge\, \omega_k\left[\left(-y - x\sqrt{3} + 3^k\right)/2, \left(-x + y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3}\right)/2\right]\Bigg].$$

Oldingi bo'limda Kox egri chizig'i, Serpin salfetkasi va gilami, fraktal antenna va boshqa turdagi fraktallarning tenglamalarini V.L.Rvachevning [63] R-funksiya usuliga asosan qurish keltirilgan [32,33].

Endi V.L.Rvachevning R-funksiya usuliga asosan (d=1 o'lchamli) Kantor to'plami, Gilbert va Gosper egri chiziqlari va boshqa ko'rinishdagi fraktallarning tenglamalarini quramiz.

Kantor to'plami (changlari). Juda ko'p taniqli fraktallar Kantor to'plamiga yaqin qarindosh hisoblaniladi, shuning uchun Kantor to'plamining fraktal xususiyatlari katta ahamiyatga ega.

Kantor to'plamini qurish birlik kesmadan o'rtadagi qismini tashlab yuborish bilan boshlanadi, bunda kesmaning oxirlari kirmaydi. Ya'ni [0,1] kesma boshlang'ich to'plam bo'lib, birinchi qadam (1/3, 2/3) ochiq intervalni o'chirishdan iborat. Navbatdagi va keyingi barcha qadamlarda joriy qadamdagi barcha kesma (oxirlari kirmaydi)larda o'rtadagi qismi tashlab yuboriladi. Shu tartibda to‘plamlar ketma-ketlik o‘lchami d ≈ 0,9542 bo‘lgan Kantor to‘plamini olamiz.

O‘lchami d = 1 Kantor to‘plami. To‘g‘ri chiziqdan tekislikka o‘tib o‘lchami d = 1 bo‘lgan Kantor to‘plamini qurish mumkin. Navbatdagi misol Magdi Muhammadga tegishli. Boshlang‘ich to‘plam birlik kvadratdan iborat va uchlarini (0,0), (1,0), (1,1) va (0,1) deb faraz qilamiz. Har bir qadamda oldingi kvadratdan to‘rt borabar kichik bo‘lgan kvadratlarni hosil qilamiz. Bu qurishning chegaraviy to‘plami N = 4 bilan o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plam va o‘xshashlik koeffitsienti r = ¼. Uning o‘lchami

$$d = \log(4)/\log(4) = 1.$$

ga teng.

Qurishlardan ko‘rinib turibdiki, hosil qilingan to‘plam Kantor to‘plami bo‘lib, ixcham, barkamol va to‘liq uzlukli.

Bu fraktalning tenglamasini V.L.Rvachevning R-funksiya usulini qo‘llab quramiz.

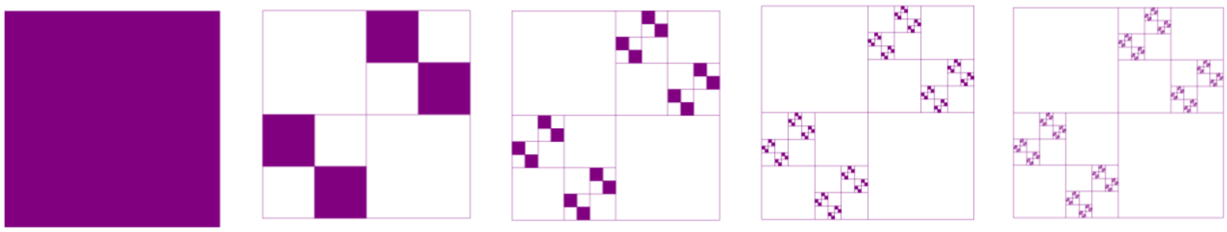
$$\omega_0(a,x,y) = \frac{a^2 - x^2}{2a} \wedge_0 \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0$$

- kvadrat tenglamasi.

d=1 o‘lchamli Kontor to‘plami shartiga asosan, ya’ni iteratsion jarayonni quramiz va natijada quyidagini olamiz:

$$\omega_n(a,x,y) = \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x - \frac{3a}{4}, y - \frac{a}{4}) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x - \frac{a}{4}, y - \frac{3a}{4}) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x + \frac{3a}{4}, y + \frac{a}{4}) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{a}{4}, x + \frac{a}{4}, y + \frac{3a}{4}) \vee_0$$
$$\vee_0 (x(a^2 - x^2) = 0 \wedge (a^2 - y^2)) \vee_0 (y(a^2 - y^2) = 0 \wedge (a^2 - x^2)) \geq 0; n = 1,2,3,...$$

d=1 bo‘lganda va *n* ning turli qiymatlarida olingan natijalar rasmda keltirilgan.



3.20-rasm *d=1* o‘lchamli Kantor to‘plamini qurish

Gilbert egri chizig‘i. ω_0 -bo‘sh to‘plam (rasmda hech narsa chiqmaydi). Masalan ω_0 sifatida quyidagini olamiz

$$\left(\omega_0(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (-1-\mathrm{x}^2) \geq 0\right);$$

Endi Gilbert egri chiziqlarining tartiblarini boshqarish uchun quyidagi formulalar kerak bo‘ladi:

$$\begin{cases} m_0 = 0 \\ m_n = 2m_{n-1} + a. \end{cases}$$

Bu yerda m_n - n-tartibli Gilbert chizig‘ining o‘lchami (a -o‘lchamning birligi).

$$f_1(x,y) = ((y=0) \wedge_0 (x - m_{n-1}) \wedge_0 (m_{n-1} + a - x)) \geq 0;$$

(pastki birlashtiruvchi chiziq)

$$f_2(x,y) = ((x - m_{n-1} = 0) \wedge_0 (y - m_{n-1}) \wedge_0 (m_{n-1} + a - y)) \geq 0;$$

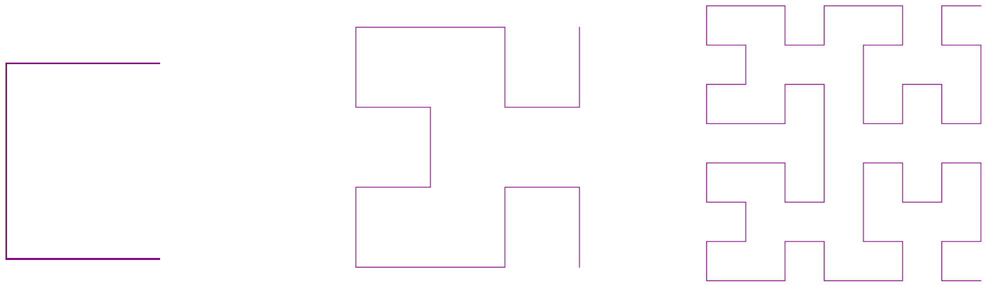
(chap birlashtiruvchi chiziq)

$$f_3(x,y) = ((y - 2m_{n-1} - a = 0) \wedge_0 (x - m_{n-1}) \wedge_0 (m_{n-1} + a - x)) \geq 0;$$

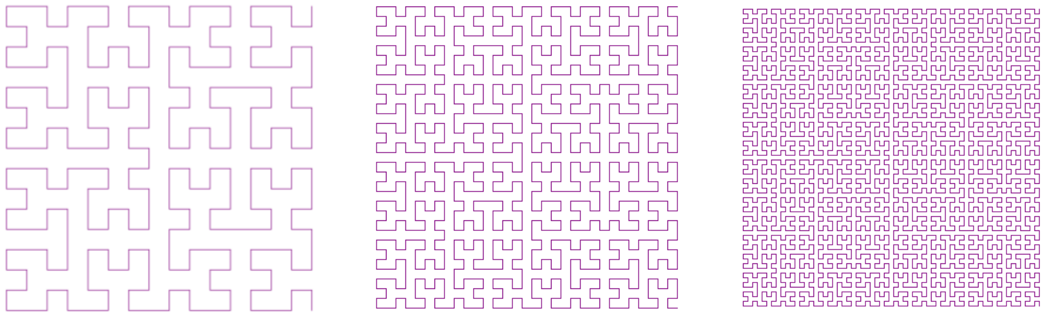
(tepa birlashtiruvchi chiziq).

Rekursiv protseduraga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} \omega_n(x,y) = {} & \omega_{n-1}(x,y) \vee_0 f_1(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(m_{n-1} - y, x - m_{n-1} - a) \vee_0 f_2(x,y) \vee_0 \\ & \vee_0 \omega_{n-1}(x, y - m_{n-1} - a) \vee_0 f_3(x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(y - m_{n-1} - a, x - m_{n-1} - a),\ n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$



a. n=1 (N_1) b. n=2 (N_2) v. n=3 (N_3)



g. n=4 (N_4) d. n=5 (N_5) e. n=6 (N_6)

3.21-rasm. ($N_1 \ldots N_6$) Gilbert egri chizig‘i

3.21-rasmda $\omega_n(x, y) \geq 0$ funksiya tenglamalari chiziqlarining chizmalari keltirilgan.

Gosper egri chizig‘i. Gosper egri chizig‘i nisbatan Serpin egri chizig‘iga o‘xshash bo‘lib, farqi shundaki Gosper egri chizig‘ining burchaklari *OX* va *OU* o‘qlariga nisbatan og‘ishgan bo‘ladi [64]:

$$\omega_1(a,x,y) = \left(\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right) \wedge_0 (a^2{}_{11} - y^2) \geq 0,$$

Bu yerda a_{11} -yetarli darajada kichik son (chiziqning qalinligi).

Endi qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan o‘qlar sistemasida og‘ish burchagi qiymatini hisoblaymiz va bu yerda ko‘chirish hamda burish formulalarini qo‘llaymiz.

$$\varphi = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{5}); \; a_{ky} = \frac{a}{\sqrt{7}}; a_{mv} = a_{ky} \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_{ky} = x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi); \; y_{ky} = -x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) + a_{mv};$$

Endi rekursiyani qo‘llab quyidagini olamiz:

$$\omega_n(a,x,y)=\omega_{n-1}(a_{ky},x_{ky}\ ,y_{ky}\ \text{-}\ a_{mv})\vee_0$$

$$\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},(x_{ky}-\frac{3a_{ky}}{2})\cos(\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\sin(\frac{2\pi}{3})\ ,-(x_{ky}-\frac{3a_{ky}}{2})\sin(\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\cos(\frac{2\pi}{3}))\vee_0$$

$$\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},x_{ky}\ \text{-}\frac{a_{ky}}{2},y_{ky})\vee_0$$

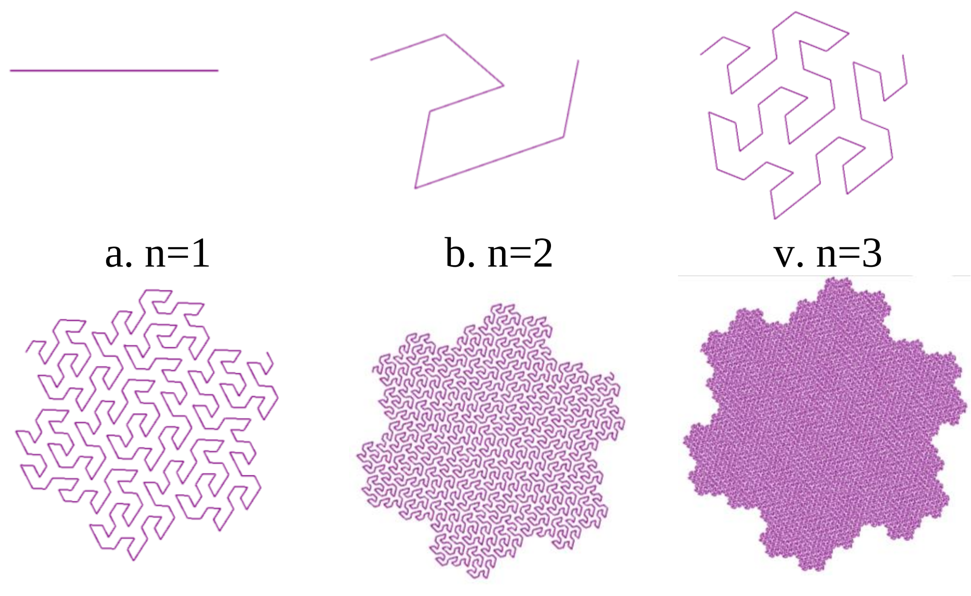
$$\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},(x_{ky}-\frac{a_{ky}}{2})\cos(\text{-}\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\sin(\text{-}\frac{2\pi}{3})\ ,-(x_{ky}-\frac{a_{ky}}{2})\sin(\text{-}\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\cos(\text{-}\frac{2\pi}{3}))\vee_0$$

$$\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},x_{ky}\ ,y_{ky}\ +\ a_{mv})\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},x_{ky}\text{-}a_{ky}\ ,y_{ky}\ +\ a_{mv})\vee_0$$

$$\vee_0\,\omega_{n-1}(a_{ky},(x_{ky}-\frac{5a_{ky}}{2})\cos(\text{-}\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\sin(\text{-}\frac{2\pi}{3})\ ,-(x_{ky}-\frac{5a_{ky}}{2})\sin(\text{-}\frac{2\pi}{3})+y_{ky}\cos(\text{-}\frac{2\pi}{3}))$$

$$n=2,3,4,\ldots$$

n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.22-rasmda keltirilgan.



a. n=1 b. n=2 v. n=3

g. n=4 d. n=5 e. n=6

3.22-rasm *n* ning turli qiymatlaridagi Gosper egri chizig‘i

Aylanalardan iborat fraktallar. Fraktallar nazariyasining asosiy ilovalaridan biri aylanalardan iborat fraktallarni generatsiyalashdir. Hozirgi vaqtda fraktallar tenglamasini qurishni bir necha usuli mavjuddir: L-tizimlari usuli, iteratsion funksiyalar tizimlari usuli va boshqalar. Ulardan farqli bo‘lgan R-funksiya algebra mantiq usulining loyihalash muhiti fraktallar tenglamasini qurish imkoniyatini yaratadi. Keyin bu tenglamalar bo‘yicha fraktallarning vizual tasvirini qurish mumkin. Shunday qilib, quyida V.L.Rvachevning loyihaviy muhiti R-funksiya usuliga asosan aylanalardan iborat fraktallarning tenglamalarini qurish qaralgan.

Bog‘langan aylanalar. Tashqi aylana tenglamasi quyidagicha aniqlangan:

$$\omega_{00} = \omega_{00}(R, x, y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0),$$

aylanaga bog‘lanuvchi aylananing tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\omega_0 = \omega_{00} \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R - a)^2 \geq 0),$$

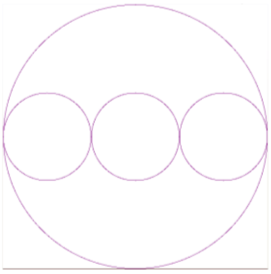
Bu yerda *a*-aylananing qalinligi (aylananing qalinligi 2a ga), *R*-tashqi aylananing radiusi, $\alpha = \frac{2\pi}{k}$; k - har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalarning soni k=2,3,4,...

Bu yerda iteratsiyani qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

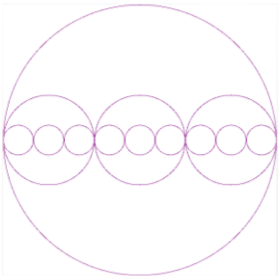
$$\begin{aligned}
\omega_n(R, x, y) = \omega_0(R, x, y) \vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x, y\right) \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(0), y - \frac{2R}{3}\sin(0)\right) \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin(\alpha)\right) \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos(2\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin(2\alpha)\right) \vee_0 \ldots \vee_0 \\
\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{3}, x - \frac{2R}{3}\cos((k-1)\alpha), y - \frac{2R}{3}\sin((k-1)\alpha)\right) \geq 0;
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

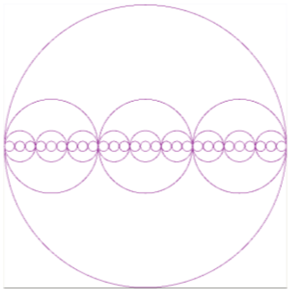
Hisoblash eksperimentining natijalari 3.23-rasmda keltirilgan.



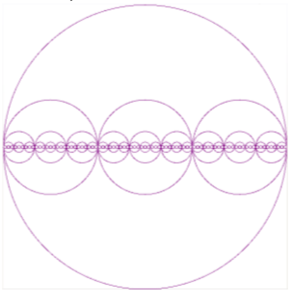
n=1, k=2



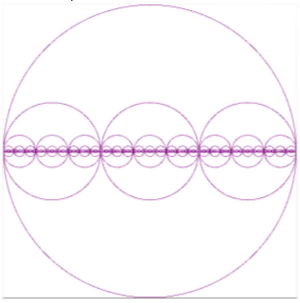
n=2, k=2



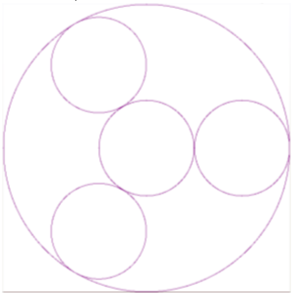
n=3, k=2



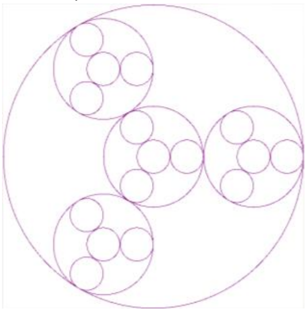
n=4, k=2



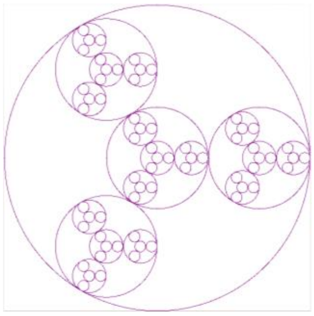
n=5, k=2



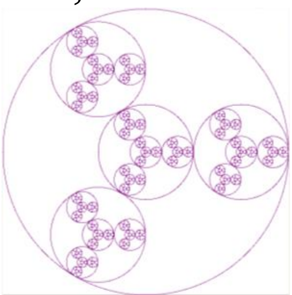
n=1, k=3



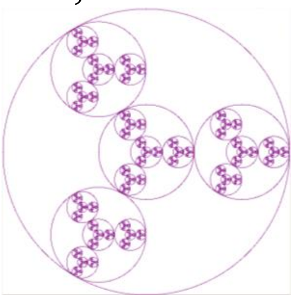
n=2, k=3



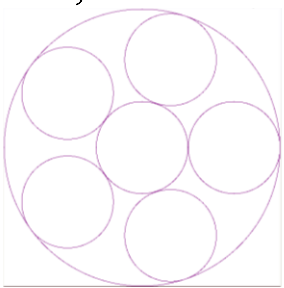
n=3, k=3



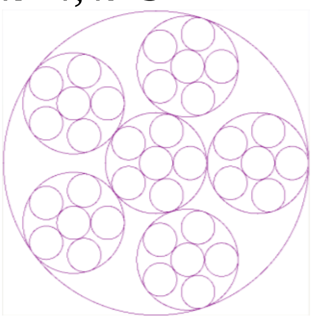
n=4, k=3



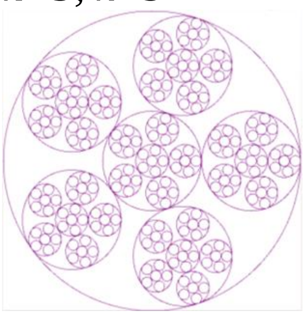
n=5, k=3



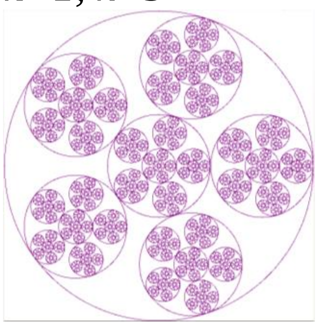
n=1, k=5



n=2, k=5



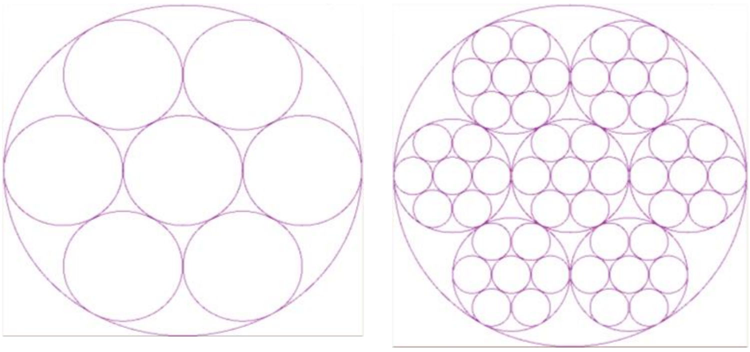
n=3, k=5



n=4, k=5

3.23-rasm. Bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar

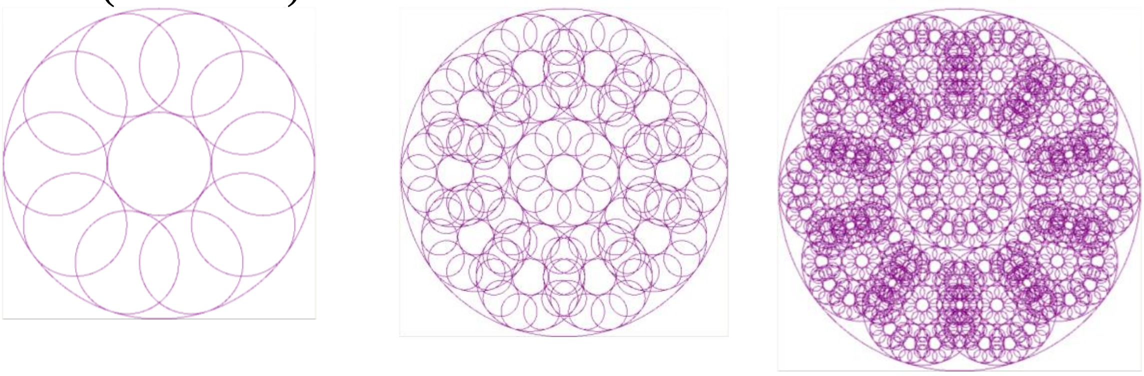
Endi (1)da k=6 dagi holatni qaraymiz. Bunda eksklyuziv halqali fraktallarni olamiz.



n=1, k=6 n=2, k=6

3.24 – rasm. Eksklyuziv halqali fraktallar

Ajratib koʻrsatish mumkinki, agar k<6 da ichki aylanalar bir-biriga urinmaydi, k=6 da ichki aylanalar urinadi, k>6 da ichki aylanalar kesishadi (2.25-rasm).



n=1, k=10 *n=2, k=10* *n=3, k=10*

3.25-rasm. Eksklyuziv halqali fraktallar

Urinishli kesishadigan aylanali fraktallar. Endi katta aylana ichida ikkita aylana boʻlgan holatni qaraymiz. Bu aylanalar urinadi. Oʻz navbatida ichki aylanalarda yana ikkita aylana hosil boʻladi va h.k. Xuddi shu fraktalni tenglamasini quramiz.

Bu holatda 1 - qadamda fraktalning tenglamasi quyidagi koʻrinishni oladi

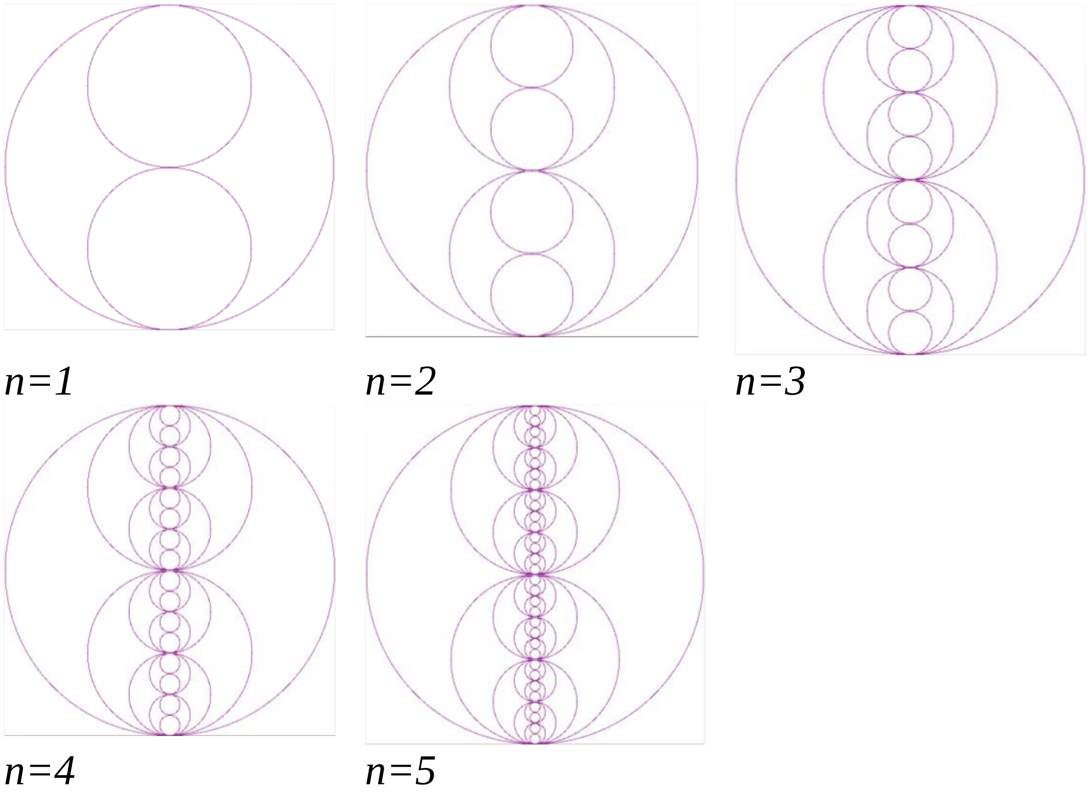
$$\omega\ (R, x, y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0) \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R - a)^2 \geq 0),$$

bu yerda ***a***-aylana qalinligi (aylananing qalinligi *2a* ga teng), *R*-tashqi aylananing radiusi.

Iteratsiya protsedurasini qoʻllagandan keyin quyidagini hosil qilamiz

$$\omega_n(R,x,y) = \omega_0(R,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{2}, x, y-\frac{R}{2}\right) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{R}{2}, x, y+\frac{R}{2}\right) \geq 0; \quad n = 1,2,3,...$$

n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.26-rasmda keltirilgan



3.26-rasm. Urinishli kesishadigan aylanali fraktallar

Endi kesishadigan va kichiklashadigan ichki aylanalarni qaraymiz. Shu maqsadda (*l*)da kamayish koeffitsienti l ni kiritamiz.

Endi ichki aylanalar kesishadigan va kamayadigan holatni qaraymiz. Shu maqsad uchun *l* kamayuchi koeffitsientini kiritamiz.

Birinchi masaladagi kabi kesishadigan aylanalarning tenglamasini aniqlaymiz

$$\omega_0(R,x,y) = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0) \wedge_0 (x^2 + y^2 - (R-a)^2 \geq 0)$$

bu yerda *a* - aylananing qalinligi (aylananing qalinligi *2a* ga teng).

$$\alpha = \frac{2\pi}{k};$$

k - har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalar soni *k=2,3,4,...*

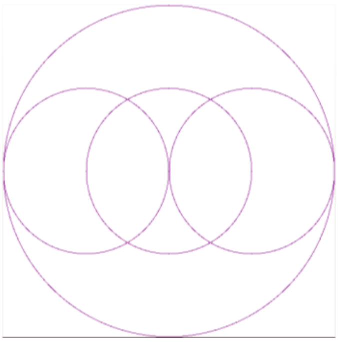
l - har bir iteratsiyadan keyingi ichki aylanalarning kamayish koeffitsienti, *l=2,3,4,...*

R - tashqi aylananing radiusi.

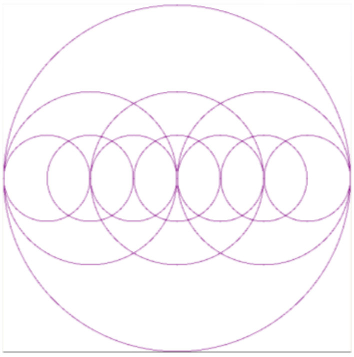
Iteratsiya protsedurasini qo‘llab quyidagini olamiz

$$\omega_n(R,x,y) = \omega_0(R,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l},x,y) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(0), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(0)) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(\alpha)) \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos(2\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin(2\alpha)) \vee_0 \ldots \vee_0$$
$$\vee_0 \omega_{n-1}(\frac{R}{l}, x - \frac{(l-1)R}{l}\cos((k-1)\alpha), y - \frac{(l-1)R}{l}\sin((k-1)\alpha)) \geq 0; \quad n = 1,2,3,\ldots$$

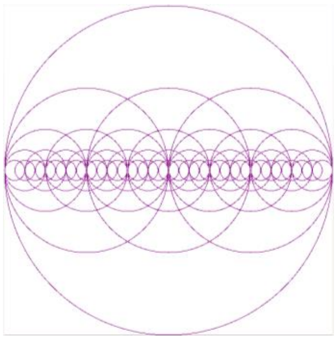
n, k, l larning turli qiymatlaridagi natijalar 3.27-rasmda keltirilgan



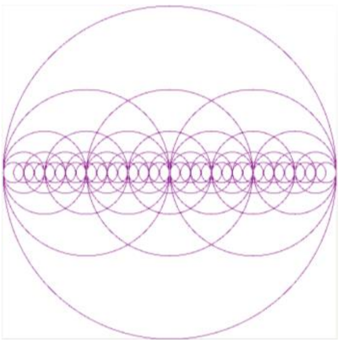
n=1, k=2, l=2



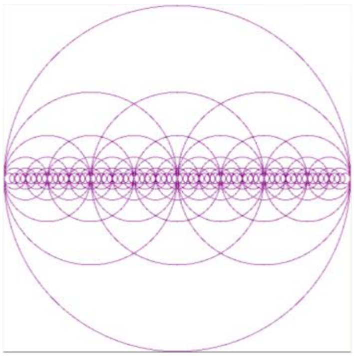
n=2, k=2, l=2



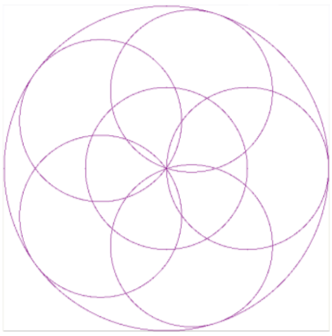
n=3, k=2, l=2



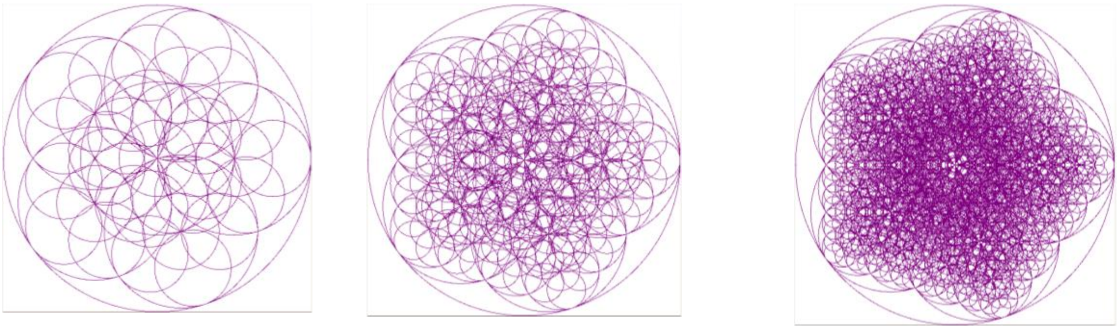
n=4, k=2, l=2



n=5, k=2, l=2



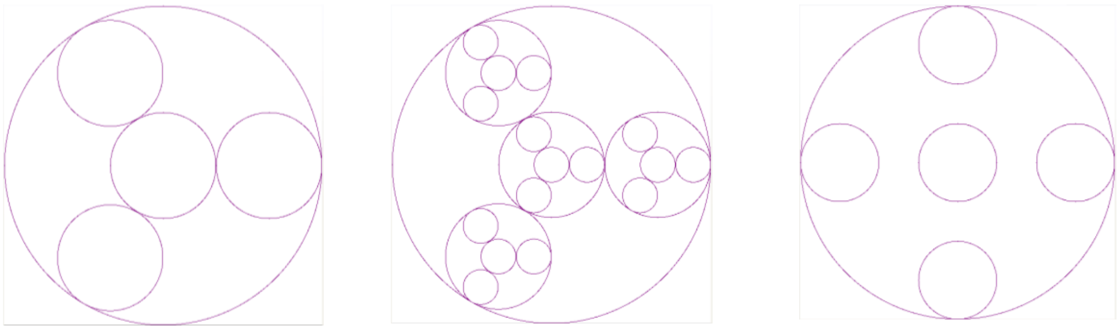
n=1, k=5, l=2



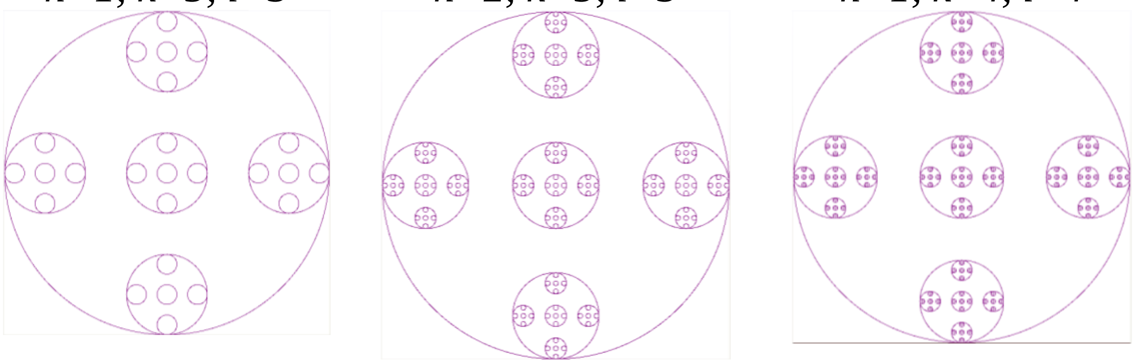
n=2, k=5, l=2 *n=3, k=5, l=2* *n=4, k=5, l=2*

3.27-rasm. Kesishadigan va kichiklashadigan ichki aylanali fraktallar

$l=3$ da bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar chiziladi. Bu natijalar 3.28 - rasmda keltirilgan.



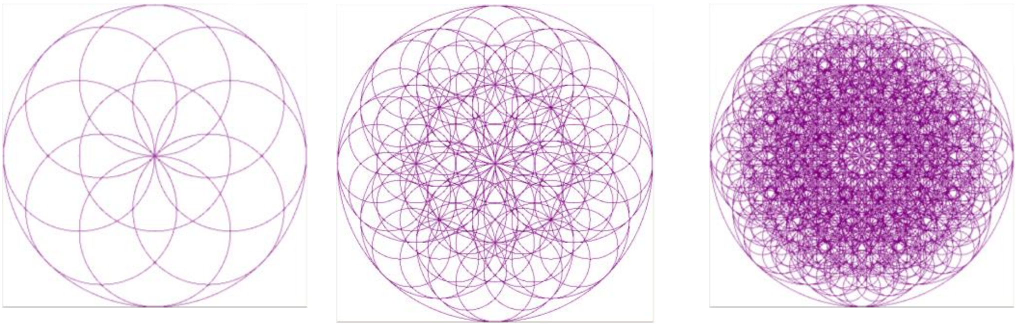
n=1, k=5, l=3 *n=2, k=5, l=3* *n=1, k=4, l=4*



n=2, k=4, l=4 *n=3, k=4, l=4* *n=4, k=4, l=4*

3.28 – rasm. Bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar

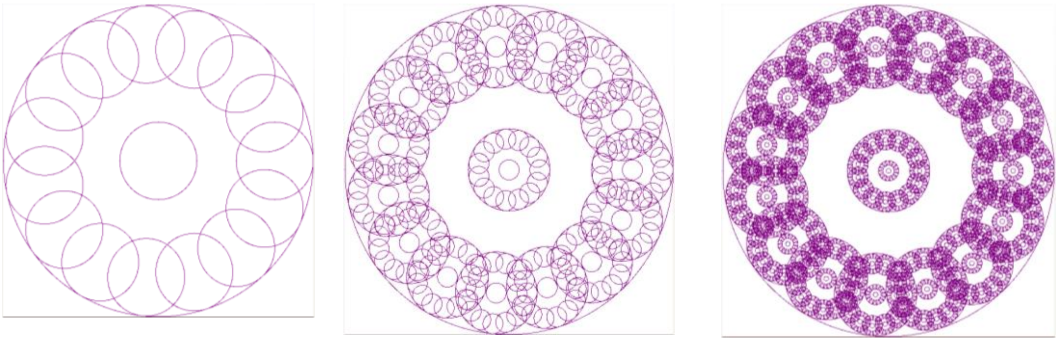
Iteratsion fraktallar $k=8$, $l=2$ i $n=\overline{1,2,3}$ da olinadi va 3.29-rasmda ifodalangan.



n=1, k=8, l=2 *n=2, k=8, l=2* *n=3, k=8, l=2*

2.29-rasm. Bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar

$k=15,\ l=4$ da n ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.30-rasmda keltirilgan.



n=1, k=15, l=4 *n=2, k=15, l=4* *n=3, k=15, l=4*

3.30-rasm. Bog‘langan aylanalardan iborat fraktallar

Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar. Ma’lumki geometrik fraktallarni asosiy rasmni qo‘llagan initsiator shakldan boshlanib rasmiylashtiriladi. Determinallashgan fraktallar rekursiv jarayonda ifodalanadi. Determinallashgan fraktallarda o‘ziga o‘xshashlik barcha tartiblarda namoyon bo‘ladi. Aniq tasvirlarni olish uchun bunday fraktallar 4-6 marta iteratsiyalanadi.

Hozirgi kunda fraktallar radiotexnikada antenna qurilmalarini loyihalashda, kompyuter grafikasida, fizikada, neftximiyada, biologiyada va boshqa sohalarda keng qo‘llanilmoqda. Shuning uchun fraktallarga bo‘lgan qiziqish kundan-kunga tezlikda o‘sib bormoqda. Har kuni fraktallar nazariyasi va amaliyoti bo‘yicha yuzlab yangi ishlar paydo bo‘lmoqda.

Bu bo‘limda V.L.Rvachevning R-funksiya usuliga asosan daraxt ko‘rinishdagi fraktallarni tenglamasini quramiz.

Aylanalardan daraxt tenglamasini qurishni qaraymiz. Oraliqning oxirlari *(x_1,y_1)* va *(x_2,y_2)* nuqtalar bo‘lsin. Berilgan nuqtalar *(x_1,y_1)* va *(x_2, y_2)*lardan erkin o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini quramiz.

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2,x,y)=\left(\left(\frac{1}{2}((x_2-x_1\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)+(y_2-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2-$$

$$-\left((x-x_1)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)+(y-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}(x_2-x_1)\cos(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)+(y_2-y_1)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2\geq 0\right)\wedge_0$$

$$\wedge_0\left(a^2-\left(-\left(x-x_1\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)+\left(y-y_1\right)\cos\left(\arctan\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)\right)\right)^2\geq 0\right)$$

Bu yerda *a* - oraliqning balandligi (oraliqning balandligi *2a* ga teng).

Agar *k* juft bo‘lsa, unda $\varphi_0=0$, aks holda $\varphi_0=\frac{\alpha}{2}$.

n=1 da quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz: $\alpha=\frac{2\pi}{k}$

$$\omega_1(x,y)=f(0,0,R\cos(\varphi_0+0),R\sin(\varphi_0+0),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+\alpha),R\sin(\varphi_0+\alpha),x,y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+2\alpha),R\sin(\varphi_0+2\alpha),x,y)\vee_0\ldots\vee_0$$
$$\vee_0 f(0,0,R\cos(\varphi_0+(k-1)\alpha),R\sin(\varphi_0+(k-1)\alpha),x,y)$$

n=2,3,4… da

$$\alpha=\frac{2\pi}{k^{n-1}};k_1=-[k/2];\ R_{n-1}=2R(1-\frac{1}{2^{n-1}});\ R_n=2R(1-\frac{1}{2^n});$$

R_n – *n*-iteratsiyada aylana chegaralarning radiusi *(R_1=R)*.

Agar *k* juft bo‘lsa, unda $k_2=[k/2]$, aks holda $k_2=[k/2]-1$.

E*slatma: [x] - x sonining butun qismi.*

Iteratsiya protsedurasini qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\omega_{nx1}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$
$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$
$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$
$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0\ldots\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+\alpha),$$
$$R_n\cos(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),\ R_n\sin(\varphi_0+\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), x, y)$$
$$\omega_{nx2}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}),$$
$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_1\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}),$$
$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+1)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}),$$
$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+(k_1+2)\alpha)}{k}), x, y)\vee_0\ldots\vee_0$$
$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0+2\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0+2\alpha), R_n\cos(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}),$$
$$R_n\sin(\varphi_0+2\alpha+\frac{(\varphi_0+k_2\alpha)}{k}), x, y)$$

Bu uchun ega bo‘lamiz $1\leq i\leq k^{n-1}$:

$$\omega_{nxi}(x,y) = f(R_{n-1}\cos(\varphi_0 + i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0 + i\alpha), R_n\cos(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + k_1\alpha)}{k}),$$

$$R_n\sin(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + k_1\alpha)}{k}), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0 + i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0 + i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + (k_1+1)\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + (k_1+1)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0 + i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0 + i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + (k_1+2)\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + (k_1+2)\alpha)}{k}), x, y) \vee_0 \ldots \vee_0$$

$$\vee_0 f(R_{n-1}\cos(\varphi_0 + i\alpha), R_{n-1}\sin(\varphi_0 + i\alpha),$$

$$R_n\cos(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + k_2\alpha)}{k}), R_n\sin(\varphi_0 + i\alpha + \frac{(\varphi_0 + k_2\alpha)}{k}), x, y)$$

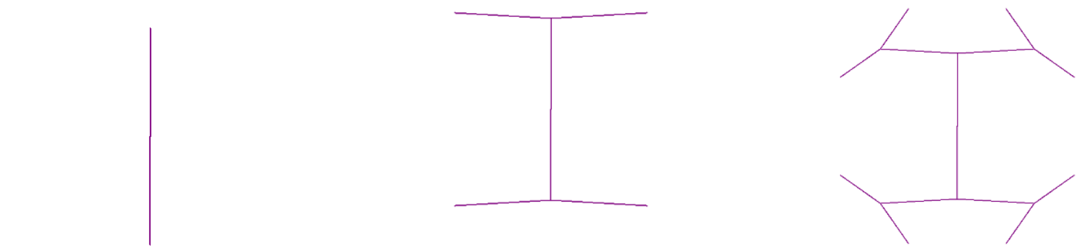
$$\omega_n(x,y) = \omega_{n-1}(x,y) \vee_0 \omega_{nx1}(x,y) \vee_0 \omega_{nx2}(x,y) \vee_0 \ldots$$

$$\vee_0 \omega_{nxi}(x,y) \vee_0 \ldots \vee_0 \omega_{nxk^{n-1}}(x,y).$$

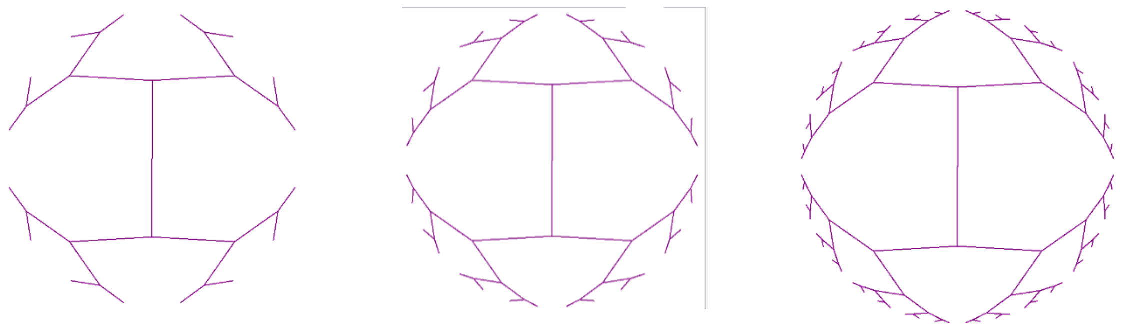
Oldingi formulalarda k=2, 3, 4, 5, ….

Barcha chiziqlar uchun R_n radius bilan tashqi doira chizish mumkin. (n–tartibli iteratsiya).

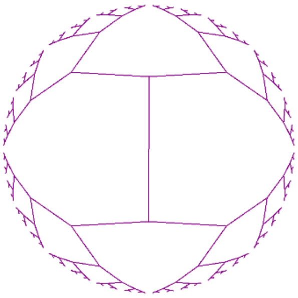
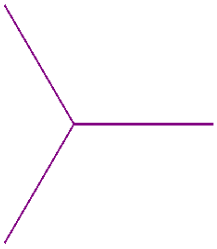
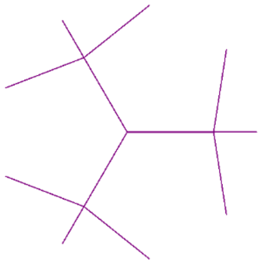
n va k ning turli qiymatlaridagi hisob natijalari 3.31–rasmda keltirilgan.



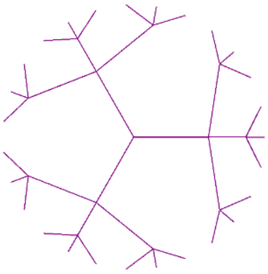
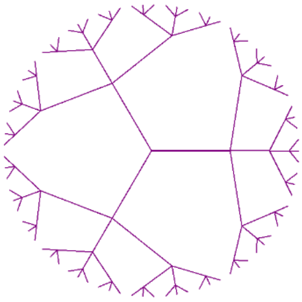
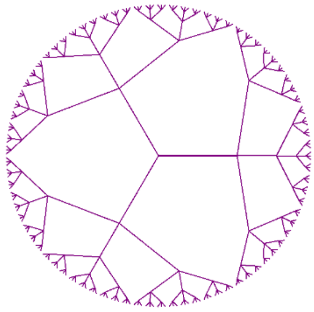
n=1, k=2 n=2, k=2 n=3, k=2



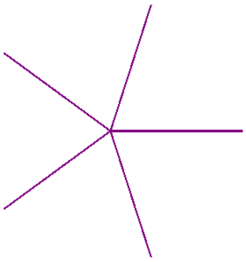
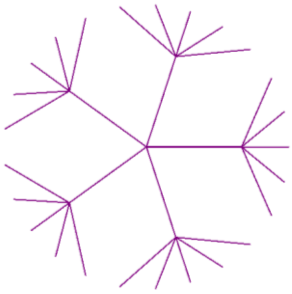
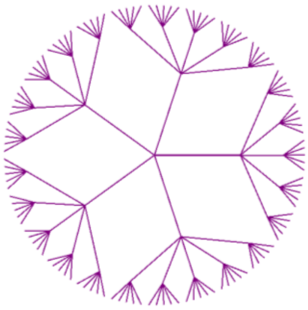
n=4, k=2 n=5, k=2 n=6, k=2

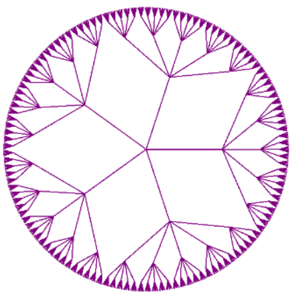
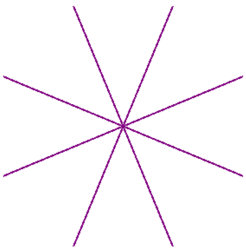
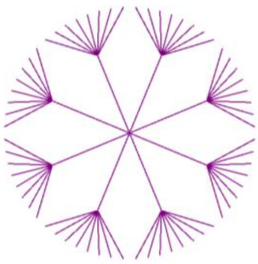
n=7, k=2 n=1, k=3 n=2, k=3

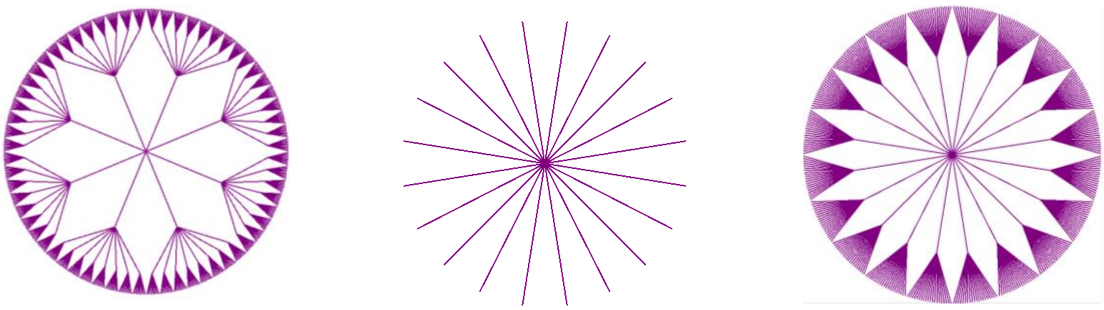
n=3, k=3 n=4, k=3 n=5, k=3

n=1, k=5 n=2, k=5 n=3, k=5

n=4, k=5 n=1, k=8 n=2, k=8



n=3, k=8 n=1, k=20 n=2, k=20

3.31-rasm. Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar

Pifagor daraxti. Pifagor, o‘zining teoremasini isbotlab, to‘g‘ri uchburchaklar tomonlariga kvadratlar joylashtirilgan figurani qurdi. Agar bu jarayonni davom ettirilsa Pifagor daraxti hosil qilinadi. Kvadrat tenglamalaridan foydalanib daraxtning tenglamasini quramiz, ya’ni

$$\omega_0(a,x,y)=((a^2-x^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(y-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(y+a)^2\geq 0)))\vee_0$$
$$\vee_0((a^2-y^2\geq 0)\wedge_0((b^2-(x-a)^2\geq 0)\vee_0(b^2-(x+a)^2\geq 0)))\geq 0$$

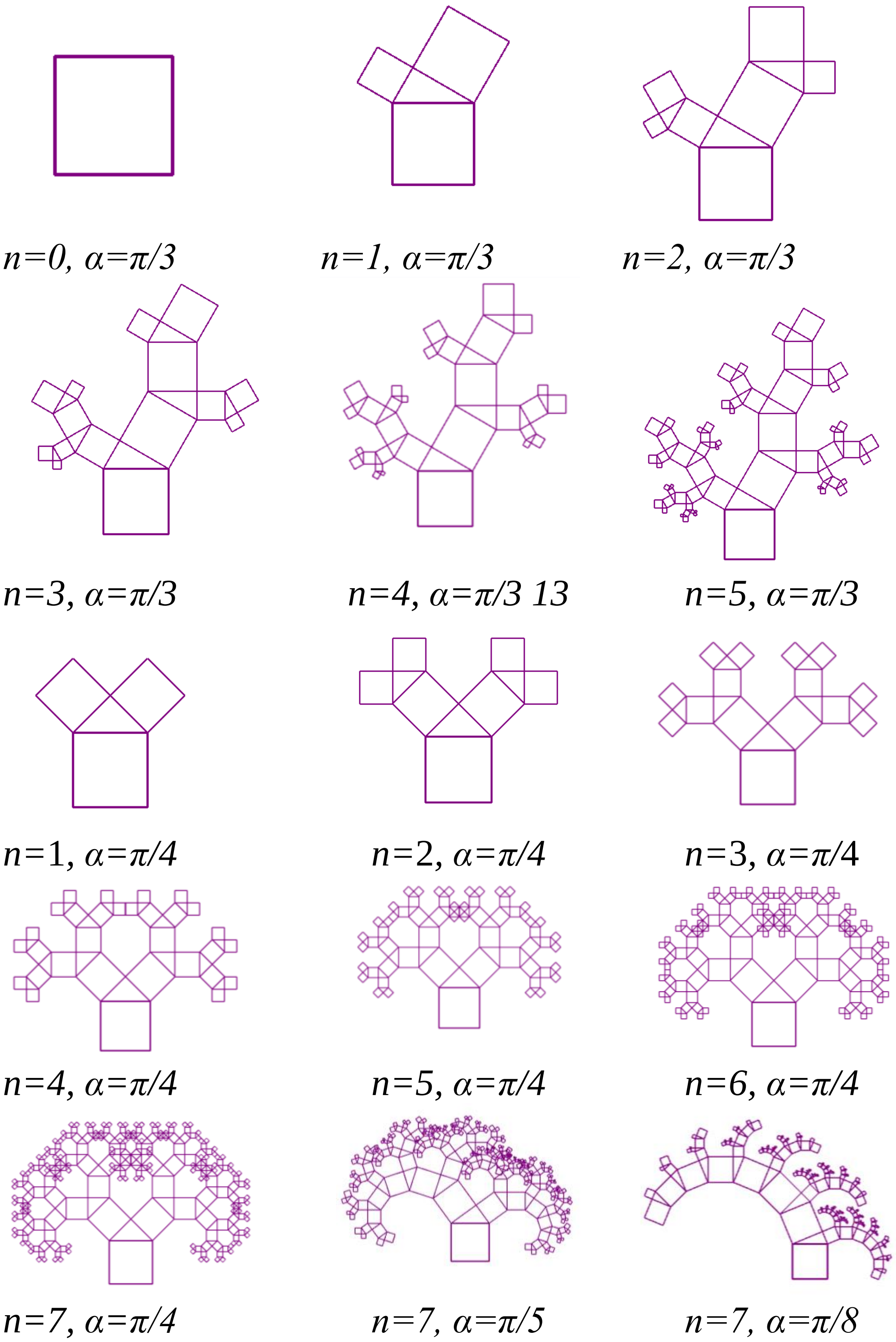
Bu yerda $\omega_0(a,x,y)$ - tomoni *2a* va uning qalinligi 2b ga teng bo‘lgan kvadrat.
Rekursiya protsedurasini qo‘llab quyidagini hosil qilamiz.

$$\omega_n(a,x,y)=\omega_0(a,x,y)\vee_0$$
$$\vee_0\omega_{n-1}(a\cos(\alpha),(x+a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha),$$
$$-(x+a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\cos(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha))\vee_0$$

$$\vee_0\omega_{n-1}(a\sin(\alpha),-(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha),$$
$$(x-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha))\cos(\alpha)+(y-a-a\sqrt{2}\sin(\alpha)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha))\sin(\alpha))$$

Bu yerda α - daraxt shoxining chapga burgandagi burish burchagi $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ intervalda qiymatni oladi, o‘ngga burgandagi burish burchagi

$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ ga teng. n, α ning turli qiymatlaridagi hisoblashlar natijalari 3.32–rasmda keltirilgan.



3.32-rasm. Pifagor daraxti fraktali

Daraxt ko‘rinishdagi fraktallar eng oddiy fraktallar hisoblaniladi. To‘g‘ri chiziq tenglamasi hamda R-funksiya usulining loyihaviy muhiti, ya’ni R_0: R-kon’yunksiya, R-diz’yunksiya va R-inkordan foydalanib turli daraxt shaklli fraktallarning tenglamasini qurish mumkin. Bu tenglamalarga asosan iteratsiyalar sonini va burish burchagi α ni berib kompyuterli peyzajlarda, turli illyustratsiyalarda, tekstil sanoatida va boshqalarda qo‘llaniladigan turli oldfraktallarni tashkil etish mumkin.

Spiralsimon fraktallar. Spiralsimon fraktallar ichki kvadratlarni tashqi kvadratlarni ichida burish yo‘li bilan tasviflanadi.

Kvadrat tenglamalarini quramiz

$$\omega_0(a,x,y) = ((a^2 - x^2 \ge 0) \wedge_0 ((b^2 - (y-a)^2 \ge 0) \vee_0 (b^2 - (y+a)^2 \ge 0))) \vee_0$$
$$\vee_0 ((a^2 - y^2 \ge 0) \wedge_0 ((b^2 - (x-a)^2 \ge 0) \vee_0 (b^2 - (x+a)^2 \ge 0)))$$

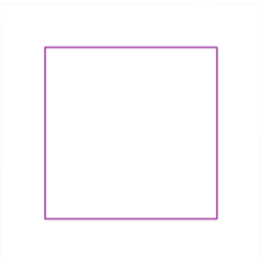
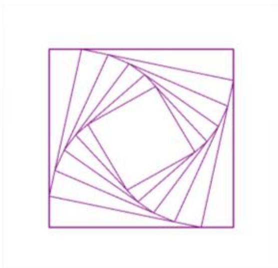
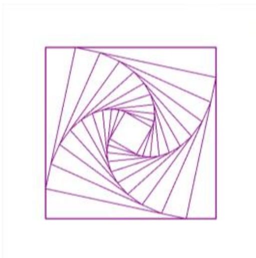
bu yerda *a*-tashqi kvadrat o‘lchami, *b*-chiziqning qalinligi (chiziqning qalinligi 2a ga teng).

Rekursiyani qo‘llab quyidagiga ega bo‘lamiz:

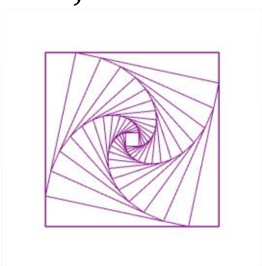
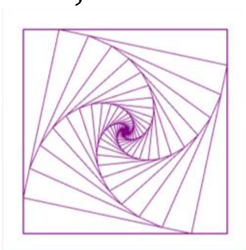
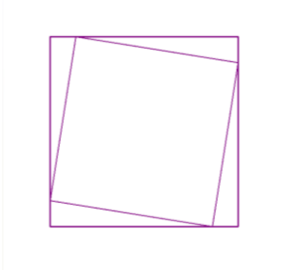
$$\omega_n(a,x,y) = \omega_0(a,x,y) \vee_0 \omega_{n-1}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}, x\cos(\alpha) - y\sin(\alpha), x\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)\right) \ge 0$$

bu yerda n=1,2,3,…; α - buralish burchagi.

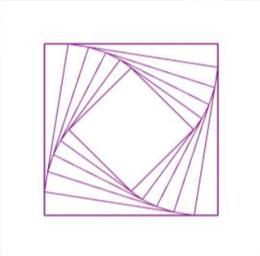
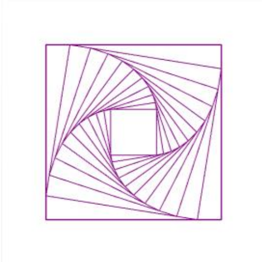
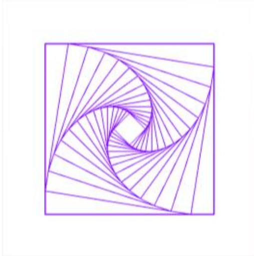
n va α ning turli qiymatlaridagi hisoblarning natijalari 3.33-rasmda keltirilgan.

n=0, α=π/15 *n=5, α=π/15* *n=10, α=π/15*

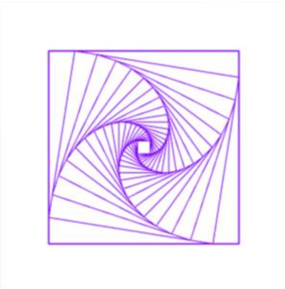
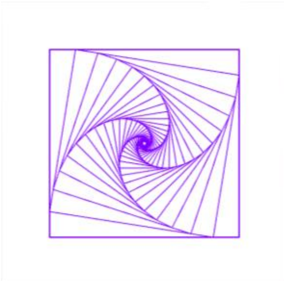
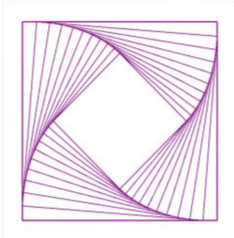




n=15, α=π/15 *n=30, α=π/15* *n=1, α=π/20*

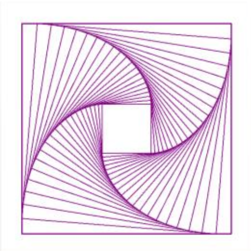
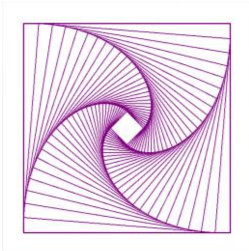
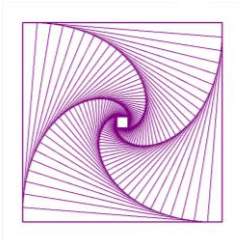




n=5, α=π/20 *n=10, α=π/20* *n=15, α=π/20*

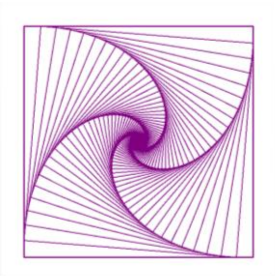
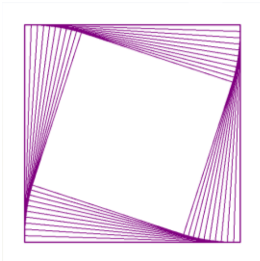
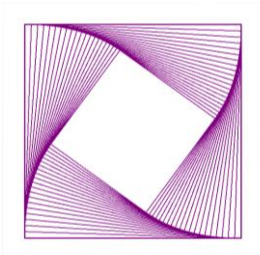
3.33-rasm. Spiralsimon fraktallar

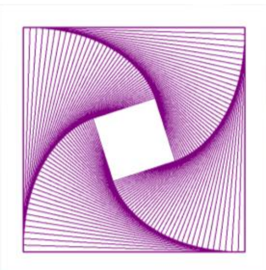
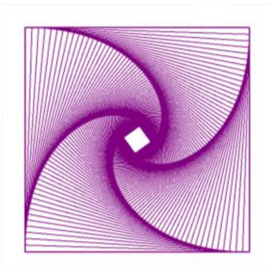
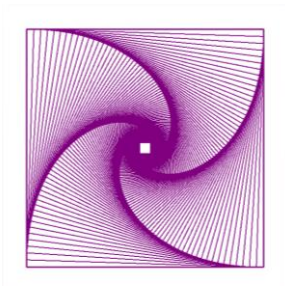
n=20, α=π/20 *n=30, α=π/20* *n=10, α=π/40*

n=20, α=π/40 *n=30, α=π/40* *n=40, α=π/40*

n=80, α=π/40 *n=10, α=π/100* *n=20, α=π/100*

n=40, α=π/100 *n=80, α=π/100* *n=100, α=π/100*

3.33-rasm.(davomi) Spiralsimon fraktallar

3.4. R-funksiya va L-tizimlari usullari integratsiyasi asosida fraktal tuzilishlarni geometrik modelashtirish

O‘ziga o‘xshash iyerarxik shakllar tizimi me’moriy kompozisiyani qurish uchun eng muhim geometrik tamoyillardan biridir. Tabiatdagi va inson ijodidagi fraktal algoritmlarni kashf etgan B.Mandelbrot o‘ziga o‘xshashlikni quyidagicha ta’riflaydi: “Agar shaklning har bir qismi butun geometrik jihatdan o‘xshash bo‘lsa, uning shakli hamda uni tashkil etuvchi qadami ham o‘ziga o‘xshaydi” [1].

Turli xil o‘zgaruvchilar funksiyasi yordamida bir butun geometrik obyektni funksional ko‘rinishi uni $\omega(x, y, z) \geq 0$ shaklidagi yagona real uzluksiz funksiya sifatida belgilaydi. Maqola V.L.Rvachev tomonidan ishlab chiqilgan R-funksiyalar nazariyasining konstruktiv amallari asosida analitik geometriya masalasini 3D yechishga hamda ishlab chiqilgan geometrik modeldan foydalanib, qurulish-me’morchilik obyektlarida A.Lindenmayer tomonidan ishlab chiqilgan L-tizimlar usili asosida uch o‘lchovli geometrik obyektga ishlov berish orqali fraktal me’moriy bino loyihasining 3D kompyuter modelini ishlab chiqishga bag‘ishlangan. L-tizimlari tomonidan ta’minlanadigan o‘ziga o‘xshashlikning asosiy xususiyatlari fraktal tuzilishga ishora qiladi [2-4].

Agar Ω geometrik obyektni shakllantirishda ishtirok etuvchi $\sum_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ turli o‘lchamdagi geometrik obyektlardan iborat bo‘lsa, vazifa yanada murakkablashadi. Murakkab obyektlarni predikat tasvirlashda $\sum_i$ oddiy shakllardan Ω murakkab shakllarni hosil qilish asosiy vazifa hisoblanadi.

R-funksiyasi kiritilgandan so‘ng, bu muammo analitik geometriyada qabul qilingan murakkab geometrik obyektlarning tenglamalarini qurishdan oldingi standart yordamchi protsedura bo‘lib xizmat qiladi. U nafaqat shakl chegaralari tenglamalarini qurish uchun, balki turli o‘lchamdagi elementlardan tashkil topgan geometrik obyektlarni qurish uchun ham qo‘llaniladi [5-8].

Biz aniq misollar yordamida ushbu muammoni hal qilishning ba’zi xususiyatlarini ko‘rsatamiz.

Keling, oddiy sohani olaylik:

$\sum_1 = \left(a^2 - x^2 \geq 0\right) \rightarrow x = \pm a$ chiziqlar orasidagi vertikal chiziq,

$\sum_2 = \left(b^2 - y^2 \geq 0\right) \rightarrow y = \pm b$ chiziqlar orasidagi gorizontal chiziq,

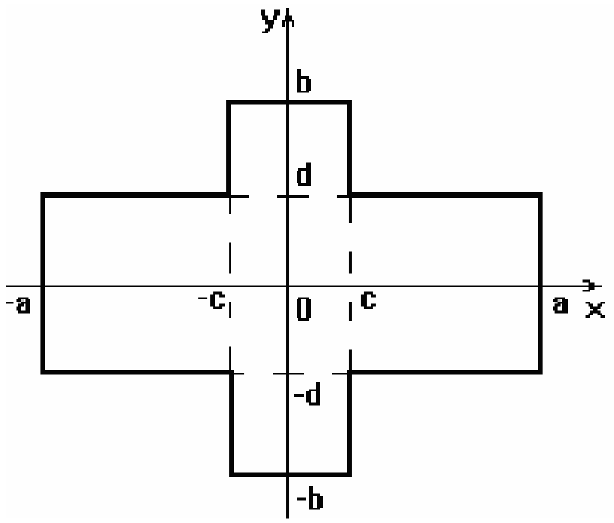
$\sum_3 = \left(c^2 - x^2 \geq 0\right) \rightarrow x = \pm c$ chiziqlar orasidagi vertikal chiziq,

$\sum_4 = \left(d^2 - y^2 \geq 0\right) \rightarrow y = \pm d$ chiziqlar orasidagi gorizontal chiziq,

Ω murakkab geometrik obyekt quyidagi mantiqiy formula bilan aniqlanadi:

$$\Omega = \left(\sum_1 \wedge_1 \sum_2\right) \wedge_1 \left(\sum_3 \vee_1 \sum_4\right) \geq 0.$$

Bu geometrik obyekt $a > c,\ b > d$ sharti bilan 1-rasmda ko‘rsatilgan xoch shaklidagi soha ekanligini payqash qiyin emas.

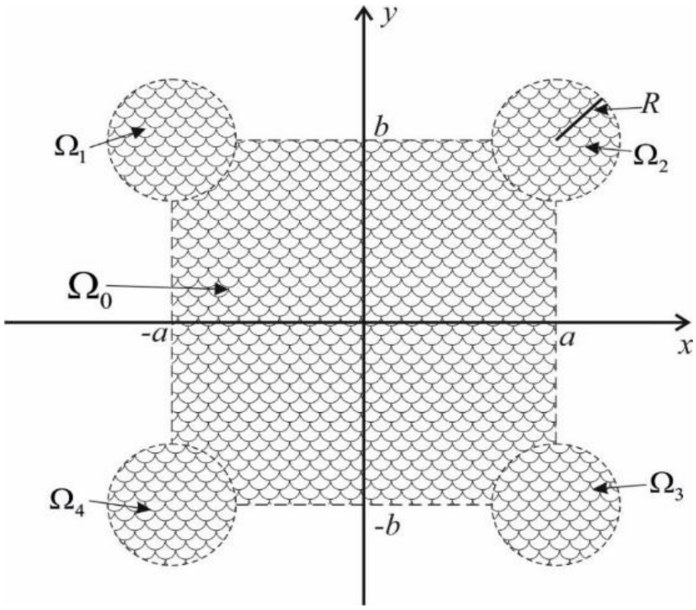


1-rasm. Xoch shaklidagi soha

Yuqorida, mos yozuvlar sohalari va kompleks geometrik obyektni aniqlaydigan mantiqiy formula ko‘rsatilgan. Biroq, ko‘pincha vazifa quyidagicha belgilanadi: murakkab geometrik obyekt berilganda, mos yozuvlar (oddiy) hududlarni tanlash va tegishli mantiqiy formulani qurish kerak [5].

Yuqoridagi misolda xoch shaklidagi sohaning o‘zi, agar uni oldindan ma’lum deb hisoblasak, $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \sum_4$ tasmalari mos yozuvlar sohalari va (1) mantiqiy formula sifatida tanlanishi kerakligini ko‘rsatadi.

Spiral ko‘rinishdagi murakkab fraktal bino loyihasini ishlab chiqish. 2D ma’lumotlar asosida 3D o‘lchovli geometrik obyekt uchun sirtlar tenglamalarini tuzishda foydali yondashuvlardan biri bu $x0y$ tekislikda tenglama orqali Ω geometrik sirtning $\partial\Omega$ chegarasini aniqlashdir 2-rasm.



2-rasm. $x0y$ tekislikdagi Ω geometrik sirtning sohasi

Ma’lumki, $z=0$ uchun Ω_0 geometrik obyektning $\partial\Omega_0$ chegarasi $x=\pm a,\ y=\pm b$ bo‘lgan to‘rtburchak shaklga ega. Agar geometrik obyektlarni tavsiflovchi funksiyalar

$$f_1=(a^2-x^2)\geq 0,$$
$$f_2=(b^2-y^2)\geq 0.$$

R-funksiya tizimda

$$\omega_0 = f_1 \wedge_0 f_2$$

ko‘rinishida bo‘lishini inobatga olsak, u holda to‘rtburchak yuzasi

$$\Omega_0=(\omega_0=(a^2-x^2)\wedge_0(b^2-y^2)\geq 0)$$

tenglama bilan tavsiflanadi. To‘rtburchakning to‘rtta burchagida joylashgan doiralar $(\Omega_1,\ \ \Omega_2,\ \ \Omega_3\ va\ \Omega_4)$ ni mos ravishda

$$\Omega_1=(\omega_1=((x+a)^2+(y-b)^2-R^2)\geq 0),$$
$$\Omega_2=(\omega_2=((x-a)^2+(y-b)^2-R^2)\geq 0),$$
$$\Omega_3=(\omega_3=((x-a)^2+(y+b)^2-R^2)\geq 0),$$
$$\Omega_4=(\omega_4=((x+a)^2+(y+b)^2-R^2)\geq 0).$$

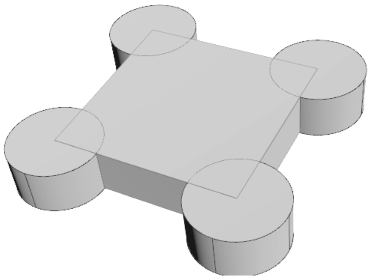
funksiyalar ko‘rinishiga keltiramiz.

Ajratilgan sohaning umumiy sirti quyidagicha ifodalanadi:

$$\Omega = \Omega_0 \vee \Omega_1 \vee \Omega_2 \vee \Omega_3 \vee \Omega_4 = \left(\omega = \omega_0 \vee_0 \omega_1 \vee_0 \omega_2 \vee_0 \omega_3 \vee_0 \omega_4 \geq 0\right)$$

$z = H$ uchun yuqoridagi formulaga asosan, 3D murakkab tuzilishli geometrik obyekt $\partial\Omega$ va $\partial\Omega_H$ni z chiziqli $\omega_z = (H^2 - z^2) \geq 0$ bog‘liqlik bilan bog‘laydigan yon tomon sirt tenglamasi quyidagi shaklida tasvirlanadi (3-rasm).

$$\omega(x, y, z) = (\omega_0 \vee_0 \omega_1 \vee_0 \omega_2 \vee_0 \omega_3 \vee_0 \omega_4) \wedge_0 \omega_z .$$



3-rasm. 3D tuzilishli geometrik obyekt

Keyingi bosqichda R-funksiya tenglamalari asosida qurilgan 3D geometrik shaklni L-tizim yordamida qayta ishlab murakkab fraktal tuzilishga ega bo‘lamiz [9].

L-tizimi – datlabki satrni qayta yozish va ishlab chiqarish qoidalari sintaksisiga rioya qilish orqali yangi satrlarni yaratish uchun ishlatiladigan grammatika (4) hisoblanadi.

$$G = \{V, \omega, P\}$$

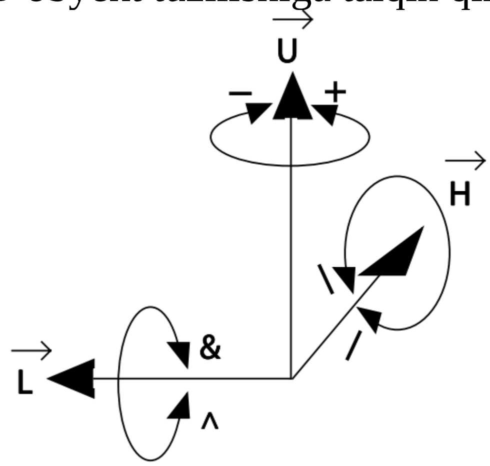
V (alifbo) – almashtirilishi mumkin bo‘lgan (o‘zgaruvchilar) va almashtirib bo‘lmaydigan elementlarni («doimiylar» yoki «terminallar») o‘z ichiga olgan belgilar to‘plami,

$\omega \in V$ (start, aksioma yoki tashabbuskor) – V to‘plamdan olingan tizimning boshlang‘ich holatini belgilovchi belgilar qatori,

$P \in V \times V$ – o‘zgaruvchilarni doimiylar va boshqa o‘zgaruvchilar kombinatsiyasi bilan almashtirish usullarini aniqlaydigan ishlab chiqarish qoidalari yoki ishlab chiqarishlar to‘plami.

$(a, X) \in P$ - ishlab chiqarish a →X shaklida yoziladi, a va X harflari ishlab chiqarishning o‘tmishi va davomchisi deb nomlanadi.

3D modellashtirish talqini. L-tizimidan chiqadigan satrdagi har bir alfavitni fazoda harakatlanadigan 3D obyektning yo‘nalishi va ishlashiga masshtablash orqali 3D obyekt tuzilishiga talqin qilinadi [10-11].



5-rasm. 3D rejimidagi aylanish matritsalari

Obyektning fazodagi yo‘nalishi uchta (5-rasmga qarang), H, L, U vektorlari bilan ifodalanishi mumkin, bu toshbaqaning yo‘nalishini chapga (yoki o‘ngga) va yuqoriga (yoki pastga) yo‘nalishni ko‘rsatadi.

Bu vektorlar birlik uzunligiga ega, bir-biriga perpendikulyar va $\vec{H} \times \vec{L} = \vec{U}$ tenglamani qanoatlantiradi. Obyektning aylanishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\left[\vec{H}' \ \vec{L}' \ \vec{U}'\right] = \left[\vec{H} \ \vec{L} \ \vec{U}\right] R$$

bu yerda $R - 3\times 3$ aylanish matritsasi [11].

Xususan, H, L, U vektorlar atrofida α burchak bilan obyektni *3D* rejimida boshqarish aylanishlar matritsalar bilan ifodalanadi.

$$R_U(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

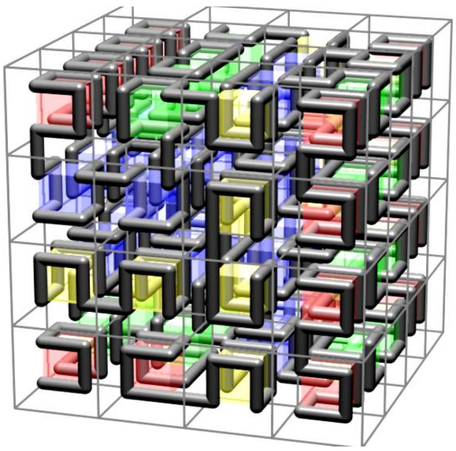
$$R_L(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$R_H(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

3D fazodagi obyekt yo‘nalishini quyidagi operatsiyalar boshqaradi:

$+$ – $R_U(\alpha)$ aylanish matritsasi yordamida α burchak bilan chapga burish;
$-$ – $R_U(-\alpha)$ aylanish matritsasidan foydalanib, α burchak bilan o‘ngga burish;
& – $R_L(\alpha)$ aylanish matritsasidan foydalanib, α burchak ostida pastga tushirish;
^ – $R_L(-\alpha)$ aylanish matritsasidan foydalanib, α burchak bilan yuqoriga ko‘tarish;
\ – $R_H(\alpha)$ aylanish matritsasi yordamida α burchak bilan chapga aylantirish;
/ – $R_H(-\alpha)$ aylanish matritsasidan foydalanib, α burchak bilan o‘ngga aylantirish;
| – $R_U\left(180^0\right)$ matritsasi yordamida aylantirish.

L-tizim yordamida yaratilgan uch o‘lchamli obyektga misol sifatida 6-rasmda ko‘rsatilgan Gilbert egri chizig‘ining kengaytmasi ko‘rib chiqilgan.



6-rasm. Gilbert egri chizig‘ining uch o‘lchovli kengayishi

Ranglar A (qizil), B (ko‘k), C (yashil) va D (sariq) belgilari bilan bog‘langan uch o‘lchamli «ramkalar»ni ifodalaydi.

Uch o‘lchovli Gilbert egri chizig‘ini L-tizimlari yordamida grafik modellashtirish:

Bu yerda: n=2, α=90◦

A

A → B-F+CFC+F-D&F∧D-F+&&CFC+F+B//

B → A&F∧CFB∧F∧D∧∧-F-D∧|F∧B|FC∧F∧A//

C → |D∧|F∧B-F+C∧F∧A&&FA&F∧C+F+B∧F∧D//

D → |CFB-F+B|FA&F∧A&&FB-F+B|FC//

L-tizimining prinsiplari. L-tizimining asosiy buyruqlari shakl yoki obyektlarni qurish uchun ishlatiladi 1-jadval. Har bir buyruq fazoda shakl qurish uchun avvalgisiga amal qiladi. Shaklni oldinga, chapga, o‘ngga burish, yuqori va pastga harakat qilish shuningdek o‘z o‘qi atrofida aylanishini tasavvur qilishga yordam beradi.

1-jadval

L-tizim buyruqlari alifbosi

<table>
<tr><th colspan="2">Shakl qurish buyruqlari</th><th colspan="2">Aylantirish buyruqlari</th></tr>
<tr><td>F</td><td>Oldingi pozitsiyani yangi joyga bog‘laydigan shaklni qurish orqali bir qadam oldinga harakatlaning.</td><td>+</td><td>Bir daraja o‘ngga buriling.</td></tr>
<tr><td>f</td><td>Shaklsiz oldinga qarab harakatlaning.</td><td>-</td><td>Bir daraja chapga buriling (minus belgisi).</td></tr>
<tr><td>H</td><td>Oldingi pozitsiyani yangi holatga bog‘laydigan shaklni qurib, yarim qadam oldinga harakatlaning.</td><td>&</td><td>Bir daraja tepaga ko‘taring.</td></tr>
<tr><td>h</td><td>Shaklsiz yarim qadam oldinga harakatlaning.</td><td>^</td><td>Bir daraja pastga tushiring.</td></tr>
<tr><td>G</td><td>Oldinga siljiting, lekin tepalikka qadar bo‘lgan masofani yozmang.</td><td>\\</td><td>Bir daraja soat yo‘nalishi bo‘yicha aylantiring.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Qo‘shimcha ma’lumotsiz, ushbu buyruqlar uzunlik uchun «qadam kattaligi» qiymatidan foydalanadi.</td><td>/</td><td>Bir daraja soat yo'nalishiga teskari aylantiring.</td></tr>
<tr><td>F(l,w,s,d)
f(l,w,s,d)
etc</td><td>Yuqoridagi buyruqlarning har biri uchun (l, s, w, d) har birining d bo‘limlarning s tasavvurlari yordamida w kengligi l masofani belgilaydi.</td><td>|</td><td>180 daraja buriling (vert.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Qo‘shimcha o‘zgarishlarni qo‘shish</td><td colspan="2">Qiymatlarni ifodalovchi</td></tr>
</table>

(masalan, generatsiya uchun)		**o‘zgaruvchilar**	
«	Joriy uzunlikni qadam kattaligi o‘lchovi bilan ko‘paytiring.	**a**	L tizim burchak parametri.
!	Joriy qalinlikni qalinlik o‘lchovi bilan ko‘paytiring.	**b**	L tizim b parametri
;	Hozirgi burchakni burchak o‘lchovi bilan ko‘paytiring.	**c**	L tizim c parametri
–	Joriy uzunlikni (ostiga chizilgan) qadam o‘lchamlari o‘lchoviga bo‘ling.	**d**	L tizim d parametri
Geometriya Buyruqlari		**Xulq atvor buyruqlari**	
J **K** **M**	J, K yoki M ishchi varag‘idan geometriyani nusxalash.	**%**	Filialning qolgan qismini kesib tashlang
J(s,x,a,b,c)	Geometriya (standart qadam kattaligi) s parametri bilan o‘lchovlanadi va a dan c gacha bo‘lgan qiymatlar bilan belgilanadi	**[** **]**	Toshbaqa holatini surish (filialni ochish) (filialni yopish)

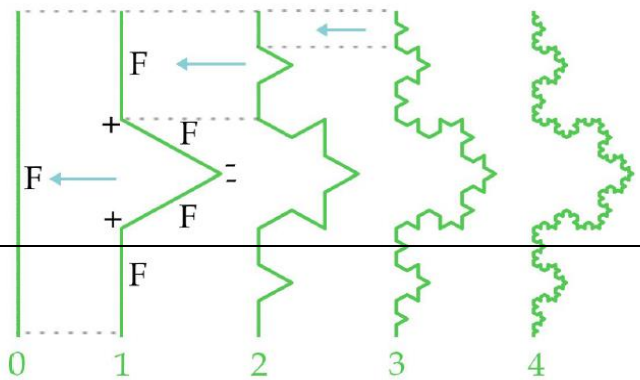
L-tizim qoidalari asosida chiziqli fraktal tasvirlarni ishlab chiqish jarayonlari 2-jadvalda keltirilgan

Bu yerda u F+F--F+F toshbaqalar ketma-ketligi bilan chizilgan uchburchak aylanma chiziqli chiziq bilan almashtiriladi. Har bir avlod barcha F larni qayta almashtiradi.

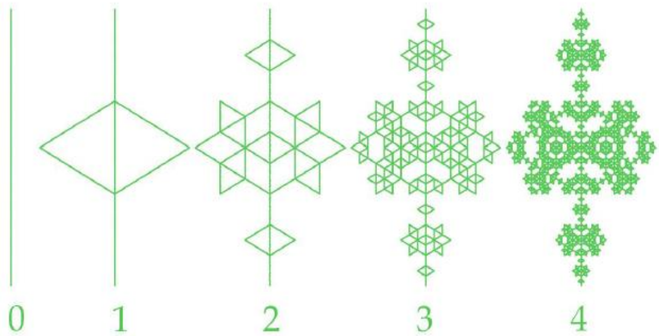
2-jadval

L tizim qoidasi asosida chiziqli fraktal tasvirlarni ishlab chiqish

Dastlabki shart	F
1-qoida	F=F+F--F+F
Burchak	90



<table>
<tr><td colspan="2">Umumiy o‘lchamni doimiy ravishda ushlab turish uchun har bir yangi F o‘lchamini 3 ga bo‘ling:</td><td rowspan="4">Takrorlanishlar</td></tr>
<tr><td>Dastlabki shart</td><td>F(1)</td></tr>
<tr><td>1-qoida</td><td>F(i)=F(i/3)+F(i/3)--F(i/3)+F(i/3)</td></tr>
<tr><td>Burchak</td><td>60</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Bu yerda FF ++ F ++ F + F ++ F-F boshqa ketma-ketligi olmos shaklini qo‘shadi:</td><td rowspan="3">
Takrorlanishlar</td></tr>
<tr><td>1-qoida</td><td>FF ++ F ++ F + F ++ F-F</td></tr>
<tr><td>Burchak</td><td>60</td></tr>
</table>

F - Oldingi holatni yangi joyga bog‘laydigan chiziqni chizish orqali bir qadam oldinga harakatlansin;

J – Boshlang‘ich holatida geometik shaklni nusxalansin;

A – Chiziqning uzunligi, shakl asosidan joriy nuqtasigacha bo‘lsin;

$/$ – Soat yo‘nalishiga teskari aylantirilsin.

$''$ – Joriy uzunlikni qadam kattaligi o‘lchovi bilan ko‘paytirsin;

$!$ – Joriy qalinlikni qalinlik o‘lchovi bilan ko‘paytirsin.

Yuqorida hosil bo‘lgan 3D geometrik shakldan foydalanib L-tizimlari asosida murakkab fraktal tuzilishli me’moriy obyekt quyidagi ketma ketlikda quriladi. Dastlab obyekt na’munasi bilan ishlatiladigan algoritm quyidagicha izohlanadi:

Aksioma: $F\ J\ /\ !\ ''$

Ishlab chiqarish qoidalari: $A = !''FJ\ /\ A$

Parametrlar quyidagicha belgilandi:

Vaziyatni o‘zgartirish burchagi: dastur muhiti tomonidan o‘zgartirish imkoniyati mavjud, dastlab burulish burchagiga $\boldsymbol{\alpha = 0^o}$ qiymat berildi;

O‘lcham koeffitsiyenti: Boshlang‘ich va keyingi shakl o‘rtasidagi nisbat, bu qiymat quyidagi $\varphi = \dfrac{F(n-1)}{F(n)}$ ifoda bilan aniqlanadi.

Generatsiyalar soni: $\mathbf{n=10}$.

Natijada quyidagi fraktal shakldagi me’moriy obyekt hosil bo‘ldi (7-rasm).

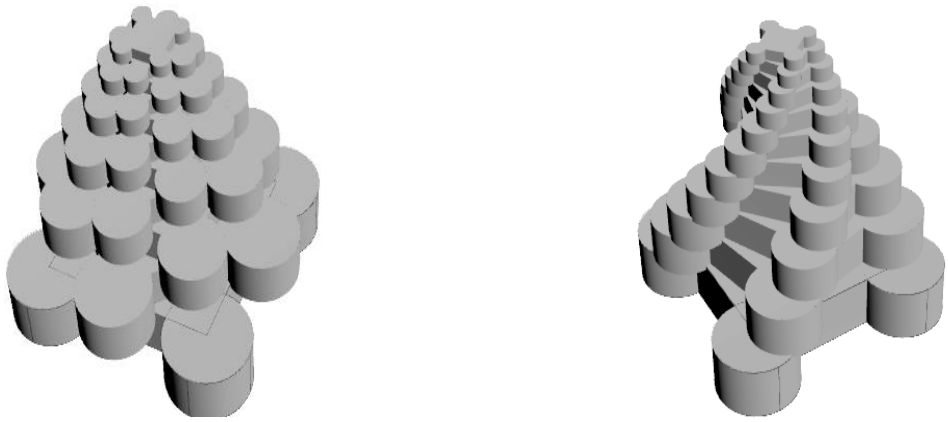
7-rasm. L-tizimlar algoritmidan foydalanib ishlab chiqilgan 3D fraktal bino modeli

Natijadan ko‘rinib turibdiki L-tizimlar usuli orqali fraktal me’moriy obyektlarni qurish dizayni sohasi uchun qulaylik keltiradi va g‘ayrioddiy kompozitsiyalarni taqdim etadi [12-14].

n=10 generatsiyaning har bir qadamida algoritm quyidagi tartibda shakllanadi:

0) J/A
1) J/!»FJ/A
2) J/!»FJ/!»FJ/A
3) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
4) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
5) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
6) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
7) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
8) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
9) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A
10) J/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/!»FJ/A

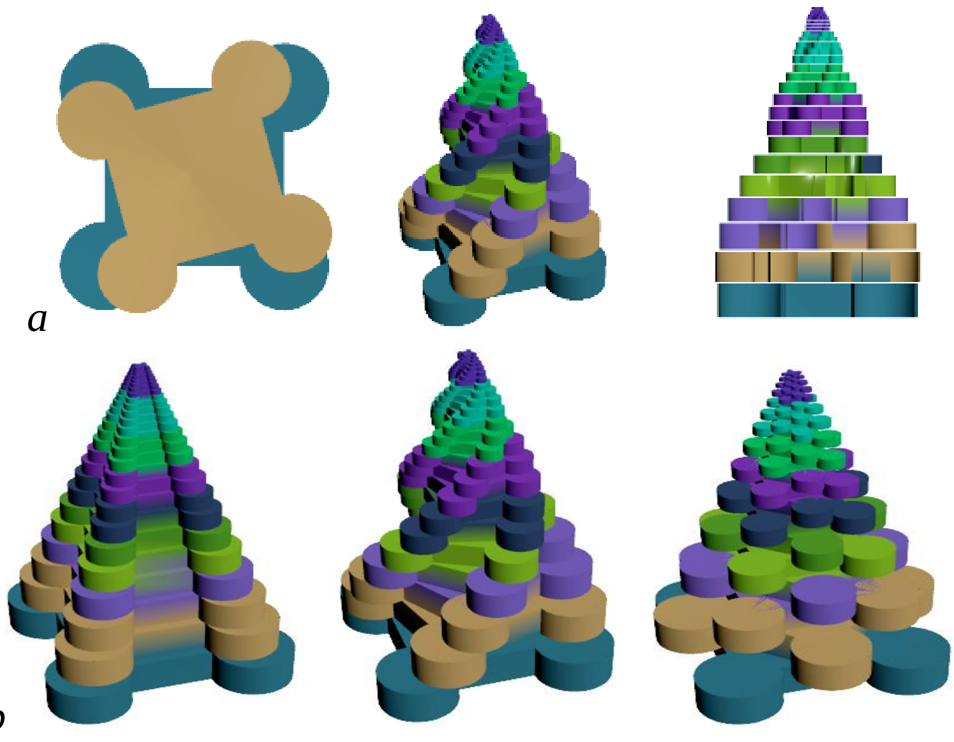
Agar yuqoridagi algoritm parametrlaridan faqat burchak koeffitsiyentini $\alpha = 45^o$ yoki $\alpha = 15^o$ ga o‘zgartirsak obyektlar quyidagi ko‘rinishni oladi 8-rasm.



a *b*

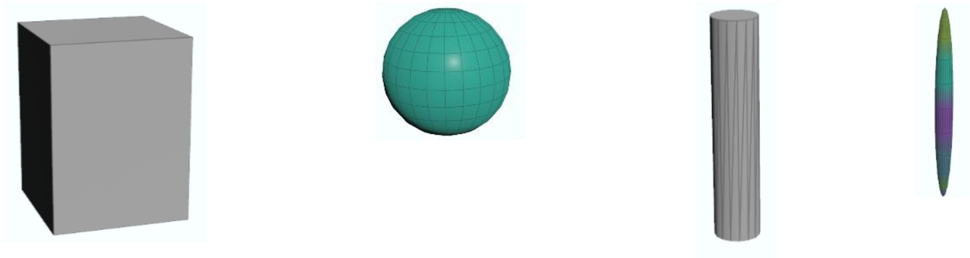
8-rasm. a) $\alpha=45^{o}$ va b) $\alpha=15^{o}$ bo‘lgan holatdagi fraktal bino modeli

Kompyuterning grafik muhiti bizga modellashtirilayotgan obyektni real vaqtda turli rakurslardan kuzatish shuningdek qiymatlarni oson o‘zgartirish va rangbarang 3D grafik modellarni yaratishga qulay vosita hisoblanadi (9-rasm).



9-rasm. Uch o‘lchovli fraktal me’moriy obyektlar: a) bir obyektning turli tomondan ko‘rinishi; b) burchak parametri bo‘yicha farqlanuvchi obyektlar

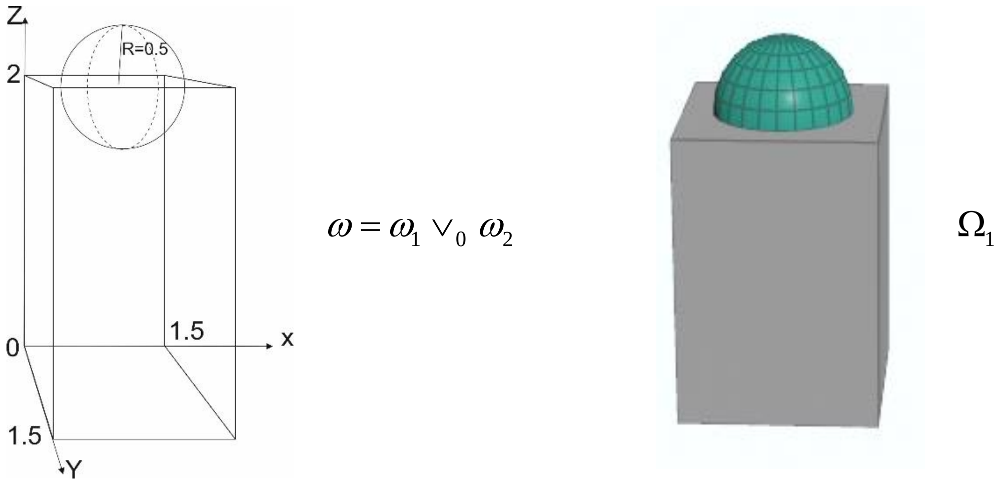
Gumbazli bino loyihasini geometrik modellashtirish. Dastlab geometrik modellashtirsh uchun kerak bo‘ladigan oddiy uch o‘lchovli geometrik shakllar tanlanadi [12]. Gumbazli bino loyihasi uchun to‘rtta geometrik shakl ya’ni: parallelepiped, shar, silindr va ellipsoid (10-rasm)dan foydalaniladi.



parallelepiped shar silindr ellipsoid

10-rasm. Geometrik modellashtirsh uchun tanlangan uch o‘lchovli shakllar

Ikkinchi bosqichda uch o‘lchovli fa’zoda geometrik shakllarni tavsiflovchi funksiyalar aniqlab olinadi. Parallelepiped va sharning fa’zoda joylashish holati (11(a)-rasm) parametrlari asosida tayanch funksiyalar topiladi.



a b

11-rasm. Parallelepiped va sharning fa’zoda joylashish holati. a) Dekart koordinatalar tekistligida, b) Ω_1 murakkab geometrik obyekt sifatida

$$f_1 = (a_1 - x)x \geq 0, \quad a_1 = 1.5;$$
$$f_2 = (b_1 - y)y \geq 0, \quad b_1 = 1.5;$$
$$f_3 = (c_1 - z)z \geq 0, \quad c_1 = 2.$$

Parallelepiped bir nechta tayanch funksiyalar orqali umumiy ko‘rinishda quyidagicha tavsiflanadi.

$$\omega_1 \equiv f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 f_3 \geq 0,$$

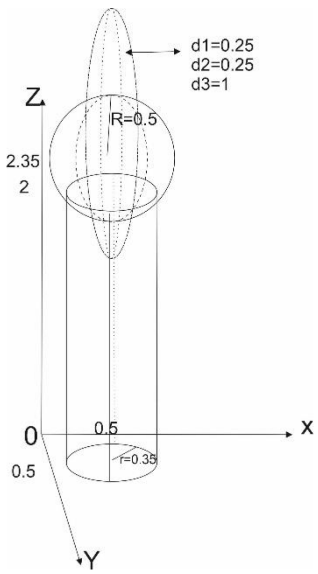
Sharni quyidagi tayanch funksiya orqali ifodalash mumkin.

$$f_4 = \left(R^2 - \left(x - \frac{a_1}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{b_1}{2} \right)^2 - \left(z - c_1 \right)^2 \right) \geq 0, \quad R = 0.5;$$
$$\omega_2 \equiv f_4 \geq 0.$$

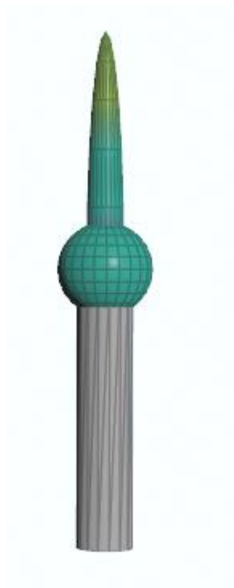
Ω_1 murakkab geometrik obyekt (11b-rasm) quyidagi mantiqiy formula (6) yordamida quriladi.

$$\Omega_1 = \left(\omega \equiv \omega_1 \vee_0 \omega_2 \geq 0 \right).$$

Uchinchi bosqichda silindr, shar va ellipsoidning fa’zoda joylashish holati (12(a)-rasm)ga qarab tayanch funksiyalar topiladi.



$\omega = \omega_1 \vee_0 \omega_2$



Ω_2

a b

12-rasm. Silindr, shar va ellipsoidning fa’zoda joylashish holati: a) Dekart koordinatalar tekistligida, b) Ω_2 murakkab geometrik obyekt

$$f_5 = \left(r^2 - (x-a_2)^2 - (y-b_2)^2\right) \geq 0, \quad r = 0{,}35; a_2 = 0{,}5; b_2 = 0{,}5; c_2 = 2.35.$$

$$\omega_3 = f_3 \wedge_0 f_5 \geq 0,$$

$$f_6 = \left(R^2 - (x-a_2)^2 - (y-b_2)^2 - (z-c_2)^2\right) \geq 0,$$

$$f_7 = \left(1 - \frac{(x-a_2)^2}{d_1^2} - \frac{(y-b_2)^2}{d_2^2} - \frac{(z-c_2)^2}{d_3^2}\right) \geq 0, \quad d_1 = 0{,}25; d_2 = 0{,}25; d_3 = 1.$$

$$\omega_4 = f_6 \vee_0 f_7 \geq 0.$$

Ω_2 murakkab geometrik obyekt (12(b)-rasm) quyidagi mantiqiy formula yordamida quriladi.

$$\Omega_2 = \left(\omega_5 = \omega_3 \vee_0 \omega_4 \geq 0\right).$$

Keyingi qadamda qurilgan murakkab geometrik shakllardan L tizimning geometrik elementlari sifatida foydalaniladi.

Ya’ni $\Omega_1 = J$, $\Omega_2 = K$ deb qabul qilinadi. Ushbu J va K elementlar ishtirokida quyidagi aksioma va qoida ishlab chiqildi.

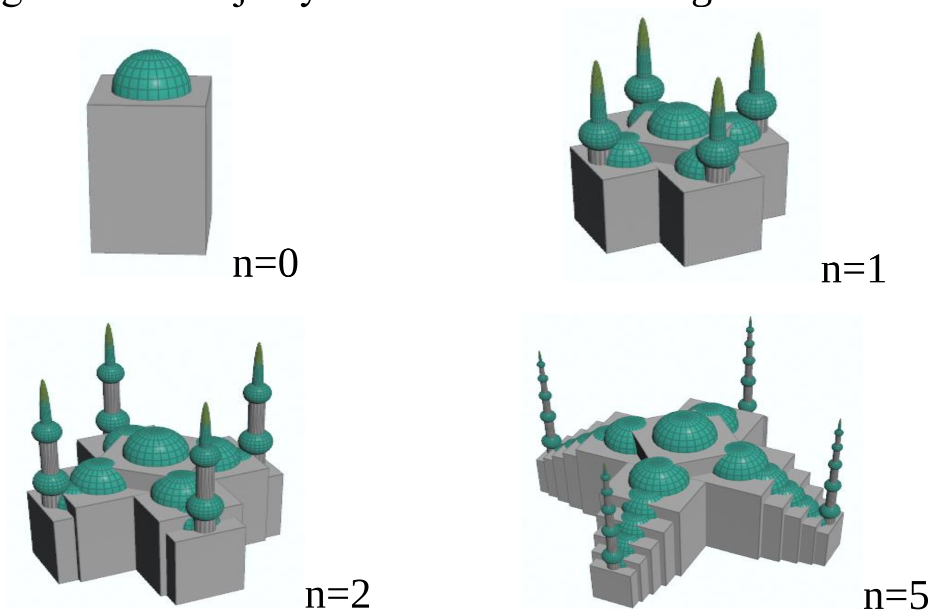
Aksioma: F J K / + **-** [ ] A B h « !

1. Qoida: A=J/(45)[+hh-B]/(90)[+hh-B]/(90)[+hh-B]/(90)[+hh-B]

2. Qoida: B=«J+h-»AFF!»(0.7)K

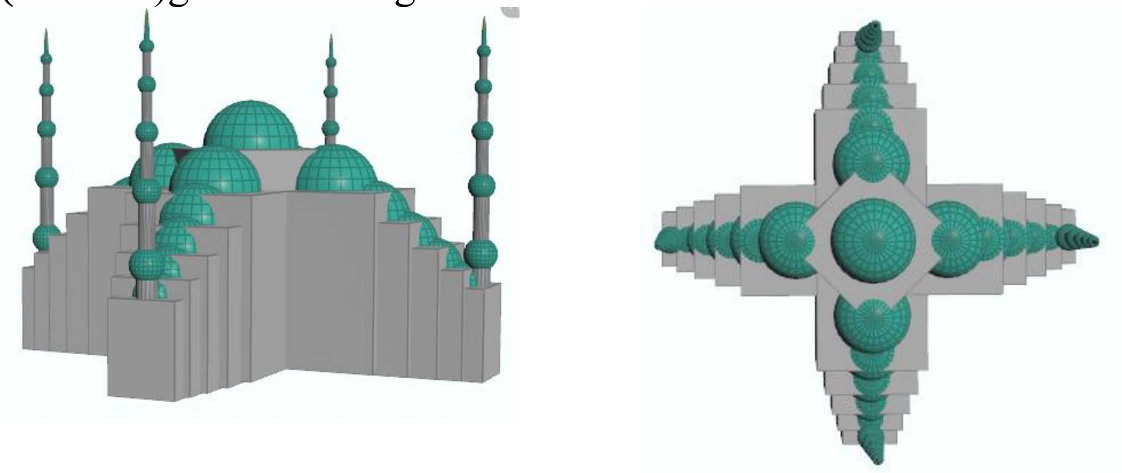
n – takrorlanishlar soni.

R funksiya va L tizimlari usullari integratsiyasi yordamida geometrik modellashtirilgan gumbazli bino loyihasining har bir takrorlanishdan so‘ng shakllanish jarayoni 13-rasmda keltirilgan.



13-rasm. R funksiya va L tizimlari usullari integratsiyasi yordamida geometrik modellashtirilgan gumbazli bino loyihasi

Yuqoridagi 13-rasmdan ko‘rinib turibdiki qurilish me’morchilikda murakkab fraktal tuzilishlarni R-funksiya va L-tizimlari usullari integratsiyasi yordamida geometrik modellashtirish ishlab chiqilayotgan loyihaga o‘ziga xos joziba beradi. Shuningdek kiruvchi parametrlarni o‘zgartirish orqali shakllar xilma-xilligiga erishiladi. Ishlab chiqilgan me’morchilik loyihasining gorizontal hamda yuqoridan ko‘rish rakurslari 14-rasmda keltirilgan. Me’morchilik loyihasining murakkab fraktal tuzilishlari Turkiyaning Istanbul shahridagi Sulton Ahmad masjidi (15-rasm)ga o‘xshashligini ko‘rishimiz mumkin.



14-rasm. Ishlab chiqilgan me’morchilik loyihasining gorizontal hamda yuqoridan ko‘rish rakurslari

15-rasm. Turkiyaning Istanbul shahridagi Sulton Ahmad masjidi

R-funksiyalar nazariyasining konstruktiv operatorloari hamda qo‘llab-quvvatlovchi dasturiy mahsulotlar funksional tasvirga asoslangan murakkab tuzilishli geometrik obyektlarni qurish, modellashtirish va vizuallashtirishning universal vositasidir. 2D formatidagi ma’lumotlardan 3D sirt tenglamalarini ishlab chiqish bo‘yicha tavsiya etilgan usuldan foydalanish murakkab tuzilishli geometrik obyektlarni modellashtirishni amalga oshirishning dizayn imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytiradi. Kompyuter xotirasida saqlangan model, tadqiqotchiga uch o‘lchovli kompyuter grafikasi dasturi yordamida hosil bo‘lgan fazoviy tasvirlarni o‘zgartirish imkoniyatini beradi [12-17].

Hozirgi kunda L-tizimlar turli geometrik obyektlarni matematik hisoblash vositalari bilan geometrik modellashtirish, haqiqiy jarayon va vaziyatni tushunishda har doim hal qiluvchi tizimlardan biri hisoblanadi. Fraktal tuzilishli obyektlarni masalan, binolarni modellashtirishda matematik formulalar va kompyuter grafikasi bilan bir qatorda ular haqidagi bilimlar talab qilinadi. L-tizimlar usuli yordamida murakkab fraktal tuzilishli obyektlarni geometrik modellashtirish bo‘yicha faol tadqiqot yo‘nalishi mavjud va ular har qanday obyektlarni fraktal tuzilish sifatida shakillantirishni osonlashtiradi.

3.5. Arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasi asosida fraktallar qurish

Mazkur paragrafda arifmetik xususiyatlarga asoslangan binomial ko‘phadlar nazariyasi usulida Paskal uchburchaklarini qurish, Paskal uchburchaklari va *s*-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari muhokama qilinadi.

Paskal uchburchagini o‘rganishga qiziqish bugungi kunda ham ko‘plab uchraydi. Bu *p* modul elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi hamda ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek, turli amaliy muammolarga qo‘llanilishi bilan bog‘liq.

Arifmetik tuzilmalar bu kombinatorial sonlardan tashkil topgan arifmetik jadvallar, ularning sodda va aralash modullar bo‘yicha qoldiqlari, yoki boshqa kombinatorial sonlarga bo‘linadigan tub sonlar darajasidir. Ushbu ishda rekkurent munosabatlar asosida qurilgan binomial, trinomial va boshqa kombinatorial sonlar asosida qurilgan uchbuchaklarni o‘rganamiz.

Matematika tarixidagi eng mashhur jadvallardan biri XVII asrning buyuk fransuz matematigi va faylasufi sharafiga ***Paskal uchburchagi*** deb ataladigan arifmetik uchburchakdir. Blez Paskal (1623-1662) tadqiqoti natijalari muallifning vafotidan keyin nashr etilgan “Traite du triangle ametique” risolasida taqdim etildi. U bu risolada Paskal uchburchagining ma’lum bo‘lgan xususiyatlarini umumlashtirdi va ko‘plab yangi xususiyatlarni keltirdi.

Paskal arifmetik uchburchakni tashkil etuvchi sonlarning turli xil xususiyatlarining natijalarini algebraik yozmasdan umumiy ravishda yozgan. Paskalning ba’zi bir prinsipial muhim kashfiyotlari Paskalning arifmetik va nazariy-ehtimoliy izlanishlari bilan bevosita bog‘liq: to‘liq matematik induksiya usuli, arifmetik uchburchakning ehtimollik nazariyasi muammolariga tatbiq etilishi va boshqalar.

Arifmetik uchburchak va uning a’zolarini shakllantirish qo‘shimchalar qonuni miloddan avvalgi Hindistonda ma’lum bo‘lgan. Arifmetik uchburchakning tuzilishi Umar Xayyom (1100) - taniqli O‘rta Osiyolik matematik, shoir va faylasuf edi. Uchburchak keyinchalik Xitoyda paydo bo‘ldi.

Evropada arifmetik uchburchak Paskal risolasi nashr etilishidan ancha oldin paydo bo‘lgan.

Paskal uchburchagiga qiziqish bugungi kunda ham to‘xtagani yo‘q. Bu moduli p elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi va ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek turli amaliy muammolarga qo‘llanilishi bilan bog‘liq. Paskal uchburchagi yangi arifmetik uchburchaklar va to‘rtburchaklar, piramidalar va boshqa arifmetik jadvallarga e‘tibor qaratdi.

Paskal uchburchagi ko‘pincha teng yonli uchburchak shaklida yoziladi, unda yon tomonlarda birliklar mavjud, qolgan har bir son oldingi satrda chapda va o‘ngda turgan ikkita sonning yig‘indisiga teng.

Paskal uchburchagi va binomial koeffisiyentlarining xususiyatlari, shuningdek, bo‘linishga oid ba’zi savollarni V.A.Uspenskiy kitobida, kombinatorial tahlil va sonlar nazariyasi bo‘yicha adabiyotlarda, shuningdek matematik ma’lumotnomalarda topish mumkin. Paskal uchburchagining ko‘plab elementar xususiyatlarining eng batafsil tavsifi T.M. Green, C.L. Hamberg tomonidan o‘rganilgan.

Ma’lumki, Paskal uchburchagi elementlari Paskal uchburchagi paydo bo‘lishidan oldin ham ma’lum bo‘lgan binomial koeffisiyentlardir. Biroq, u birinchi bo‘lib ularni qo‘llagan va Paskalning ta’rifini bergan. Binomial koeffisiyentlar va binomial teoremasi to‘g‘risidagi tarixiy ma’lumotlarni adabiyotlardan topish mumkin.

a) Paskal uchburchaklari va binomial koeffisiyentlar. Evropada arifmetik uchburchak Paskal risolasi nashr etilishidan ancha oldin paydo bo‘lgan. Bu p moduli elementlarining bo‘linishi va tarqalishi, grafikalarni qurish va o‘rganish muammolari bilan bog‘liq yangi va ko‘pincha kutilmagan xususiyatlarning kashf qilinishi, shuningdek turli amaliy muammolarga qo‘llanilishi bilan bog‘liq.

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

3.34 – rasm. Paskal uchburchagi

Shuningdek, biz to‘rtburchaklar jadvalini keltiramiz:

1	1	1	1	1	1	.
1	2	3	4	5	6	.
1	3	6	10	15	21	.
1	4	10	20	35	56	.
1	5	15	35	70	126	.
1	6	21	56	126	252	.
.	.	.	.	.	.	.

3.35 - rasm. To‘rtburchaklar jadvali

Paskal uchburchagi yangi arifmetik uchburchaklar va to‘rtburchaklar, piramidalar va boshqa arifmetik jadvallarga e’tibor qaratdi.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

3.36 - rasm. Paskal uchburchagi

Paskal uchburchagi ko‘pincha teng yonli uchburchak shaklida yoziladi (4.38-rasm), unda yon tomonlarda birliklar mavjud va qolgan sonlarning har biri oldingi satrda chapda va o‘ngda turgan ikkita sonning yig‘indisiga teng. Satr raqami adabiyotda turlicha ko‘rsatilgan binomial kengayish koeffitsientlaridan *(*1 + *x) n* iborat. Bu erda biz ularni 19-asrda paydo bo‘lgan belgi o‘rniga Eyler tomonidan kiritilgan belgilar bilan belgilaymiz.

Paskal uchburchagi va binom koeffisiyentlarining xususiyatlari, shuningdek, bo‘linishga oid ba’zi savollarni V.A. Uspenskiyning kitobida, kombinatorial tahlil va sonlar nazariyasi bo‘yicha adabiyotlarda, shuningdek matematik ma’lumotnomalarda topish mumkin. Paskal uchburchagining ko‘plab elementar xususiyatlarining eng batafsil tavsifi T.M. Green, C.L. Hamberg adayotida keltirilgan.

Ma’lumki, Paskal uchburchagi elementlari Paskal uchburchagi paydo bo‘lishidan oldin ham ma’lum bo‘lgan binomial koeffisiyentlardir. Biroq, u birinchi bo‘lib ularni qo‘lladi va Paskal uchburchagini aniqladi.

Binomial koeffisiyentlar n elementlarning m dan ortiq turli birikmalar sonini aniqlaydigan eng oddiy kombinatorial ob’ektlardir. Binomial koeffisiyentlarni binom darajasiga olib keladigan generasiya funksiyasini kengaytirish orqali olish mumkin:

$$(1+x)^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m$$

bu yerda

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \ldots\, n = 0, 1, 2, \ldots, \; m \le n, \quad n! = 1, 2, 3 \ldots n$$

Binomial koeffisiyentlar quyidagi rekkurent munosabatlarini qanoatlantiradi:

$$\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m},\binom{0}{0}=1 \tag{1}$$

shuningdek, eng sodda tengliklar:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\quad \binom{n}{m}=\binom{n}{n-1}$$

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)\binom{n}{m}=0;\quad \sum_{m=0}^{n}\binom{0}{0}=2^n$$

Binomial koeffisiyentlar o‘rtasida turli xil o‘ziga xosliklar va munosabatlar o‘rnatiladi.

Ularning o‘ziga xosligi va turli munosabatlarning binomial koeffisiyentlari matematika va fizikaning ko‘plab muammolarini hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Bu binom koeffisiyentlarini har xil umumlashtirish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

b) Umumlashtirilgan Paskal uchburchaklar va umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlar. x ning darajalari bo‘yicha yoyilgan koeffisiyentlardan tashkil topgan ifoda:

$$\left(1+x+x^2+...+x^{s-1}\right)^n=\sum_{m=0}^{(s-1)n}\binom{n}{m}_s x^m,\quad s\geq 2.$$

s-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchagi yoki uchburchakli jadvallar deb nomlanadi.

$\binom{n}{m}_s$ koeffisiyentlari, s - tartibli umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlari deb nomlanadi. s = 2 da ular doimiy binomial koeffisiyentlarga aylanadi, yani $\binom{n}{m}_2=\binom{n}{m}$ va Paskal uchburchagiga mos keladigan uchburchak jadvalidir. Ba’zi adabiyotlarda umumlashtirilgan Paskal uchburchaklar ***s-arifmetik uchburchaklar*** deb nomlanadi. Umumlashtirilgan s - tartibli Paskal uchburchaklar, Paskal uchburchagi kabi, to‘g‘ri burchakli yoki teng yonli uchburchaklar shaklida yozilishi mumkin. Oltinchi va to‘rtinchi tartibli Paskal uchburchaklarini teng yonli uchburchaklar shaklida taqdim etamiz.

						1						
					1	1	1					
				1	2	3	2	1				
			1	3	6	7	6	3	1			
		1	4	10	16	19	16	10	4	1		
	1	5	15	31	45	51	45	31	15	5	1	
1	6	21	51	91	127	141	127	91	51	21	6	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

						1						
				1	1		1	1				
			1	2	3	4	3	2	1			
	1	3	6	10	12		12	10	6	3	1	
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

3.37 - rasm. Umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari

Birinchi uchburchakda (s = 3) har bir element oldingi chiziqning uchta sonining yig‘indisiga teng: uning ustidagi son va undan chapda bog‘langan ikkita sonlardir.

Ikkinchi uchburchakning elementlari (s = 4) shunga o‘xshash tarzda hisoblab chiqiladi, ularning har bir elementi oldingi chiziqning to‘rtta sonining yig‘indisiga teng. Xuddi shuningdek har qanday tartibdagi umumlashtirilgan Paskal uchburchagining satrlari ham to‘ldiriladi.

Umumlashtirilgan binomial koeffisiyenti $\binom{n}{m}_s$ m ta o‘xshash elementlarni n ta kataklarga joylashtirishning har xil usullari soni va har bir katakchada s - 1 ta element bo‘lishi kerak.

Avvalo, umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlar uchun rekkurent munosabatni yozamiz:

$$\binom{n+1}{m}_s = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{m-k}, \quad \binom{n}{0}_s = 1.$$

U, $s = 2$ da binomial koeffisiyentlar (1) uchun rekkurent munosabat bilan mos keladi. Umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlar koʻplab tengliklarni, ayniyat va boshqa munosabatlarni, binomial koeffisiyentlari uchun analogik munosabatlarni ham qanoatlantiradi. Masalan,

$$\left.\begin{array}{l} \binom{n}{0}_s = \binom{n}{n}_s = 1, \quad \binom{n}{m}_s = \binom{n}{(s-1)n-m}_s, \\ \sum\limits_{m=0}^{(s-1)n} \binom{n}{m}_s = s^n, \quad \sum\limits_{m=0}^{(s-1)n} (-1)^m \binom{n}{m}_s = \begin{cases} 0, & s = 2t \\ 1, & s = 2t+1. \end{cases} \end{array}\right\}$$

Umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlar oʻrtasidagi rekkurent munosabat s boʻyicha quyidagi koʻrinishga ega:

$$\binom{n}{m}_{s+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m-k}_s ,$$

bu yerda $s \geq 2, \quad k < \frac{m}{s}$ da $\binom{k}{m-k}_s = 0.$

s-tartibli umumlashtirilgan binomial koeffisiyentlarini binomial koeffisiyentlar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\binom{n}{m}_s = \sum_{k=0}^{[m/s]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+m-sk-1}{n-1}.$$

c) Lyuka arifmetik uchburchagi. *a* hamda *b*) boʻlimlarda Paskal uchburchagi va s-tartibli umumlashtirilgan Paskal uchburchaklari qaraldi. Hozirgi vaqtda boshqa turdagi arifmetik uchburchaklar ham oʻrganilgan va ishlatilgan. Bular Lyuka, Fibonachchi, Katalon, Stirling va boshqa arifmetik uchburchaklar va boshqalar.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	.
1	1	2									
2	1	3	2								
3	1	4	5	2							
4	1	5	9	7	2						
5	1	6	14	16	9	2					
6	1	7	20	30	25	11	2				
7	1	8	27	50	55	36	13	2			
8	1	9	35	77	105	91	49	15	2		
9	1	10	44	112	182	195	140	61	17	2	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

3.37-rasm. Lyuka uchburchagi

Lyuka uchburchagi va uning xususiyatlari H.W. Gould va W.E. Greig tomonidan batafsil o‘rganilgan. Lyuka uchburchagining to‘qqizta qatori 3.40-rasmda keltirilgan.

Ushbu uchburchakda har bir element rekkurent munosabatlaridan aniqlanadi:

$$A(n+1,k)=A(n,k-1)+A(n,k)=0,$$

quyidagi boshlang‘ich shartlar *A*(1,0)=1, *A*(1,1)=2 va *A*(*n,k*)=0, agar *k*<0 yoki k>n. Lyuka uchburchagining yuqoriga qaragan diagonallari Paskal uchburchagining yuqoriga ko‘tarilgan diagonallari bilan bir xil tarzda aniqlanadi.

A (n, k) sonlari va binomial koeffisiyentlari o‘rtasida bog‘liqlik mavjud:

$$A(n,k)=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

Lyuka uchburchagidan *i*-ustunni *k* (k = 1, 2, 3, ...) ga o‘zgartirib, yangi uchburchak quriladi, uning elementlari Lyuka sonini o‘z ichiga olgan turli formulalarni olish uchun ishlatiladi.

3.6. Analitik usulda muntazam uchburchakli fraktallarning tenglamalarini qurish

Fraktal grafika kompyuter grafikasining eng tez rivojlanayotgan va zamonaviy sohasidir. Ma’lumki fraktallarning tenglamalarini bir necha usullardan foydalanib qurish mumkin. Fraktallarning turlarini bilgan holda ularni qurish usuli tanlab olinadi Fraktallarning geometrik, algebraik, stoxastik, qo‘l - ijodiy va tabiiy turlari mavjud.

Fraktallarning asosiy xususiyatlaridan biri ularning o‘ziga-o‘zi o‘xshashligidir. Ya’ni ma’lum bir masshtabda fraktallarning tuzilishlari uning boshqa kattaroq masshtabdagi tuzilishiga o‘xshashdir. Buni quyidagicha ta’kidlash mumkin. Agar fraktal tuzilishlarning qaysidir elementini bir necha marta kattalashtirilsa yana o‘sha fraktal tuzilishlari namoyon etadi. Bu xusisiyat aniq bir sinfdagi fraktallar uchun o‘rinli. Ko‘pincha fraktal ob’ektlarning xususiyatlarini o‘rganish matematika usullarida bayon etiladi. Mazkur paragrafda matematika usullarda fraktal ob’ektlarning xususiyatlari o‘rganildi. Fraktal tuzulishlarning xarakteristikalarini (*n*-tartibli to‘g‘ri fraktal piramidalar sirtlari, yuzalari va hajmlari, *n*-tartibli Serpin piramidasining qirralari yig‘indisi va sirtining yuzasini, *n*-tartibli to‘g‘ri fraktal uchburchak parametri va yuzalarining hamda *n*-tartibli Serpin salfetkasi) taqqoslash va hisoblash uchun tenglalar ishlab chiqish maqsadida, shuningdek, mos ravishda topilgan tenglamalar bilan unga mos sonli ekspriment natijalari keltiriladi. Maqsadga erishish uchun quyidagi algoritm amalga oshiriladi.

1. Fraktal ob’ektlarning bir nechta xususiyatlarini hisoblash uchun matematik tenglamalar ishlab chiqish;
2. Sonli ekspriment o‘tkazish;
3. Fraktal tuzilishlarni matematik (fizik) modellashtirish.

Fraktal uchburchakning ta’rifi: Fraktal uchburchak – bu teng qirrali uchburchak, uning tomonlarida teng qirrali uchburchaklar rekursiv takrorlanish natijasida hosil bo‘ladi, ularning tomonlari oldingi uchburchakning yon tomonining uzunligining 1/3ni nisbatini bildiradi. Fraktal uchburchakning formulasini to‘g‘ri fraktal uchburchakning perimetri va yuzasini hisoblashdan foydalanib topiladi. Bunda rekursiv protseduralardan foydalaniladi.

Muntazam fraktal uchburchak perimetri va yuzasi maydoni:

0 - *qadam*: $P_0 = 3a.\ S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

1 - *qadam*: $P_1 = P_0 + a = 4a;$

$$S_1 = S_0 + 3\left(\left(\frac{a}{3}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = S_0 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3*4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{3*4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

2 - *qadam*: $P_2 = P_1 + 4\frac{a}{3} = 4a\left(1 + \frac{1}{3}\right);$

$$S_2 = S_1 + 3\left(\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + 3 * 4\frac{a^2\sqrt{3}}{3^4*4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3}\right).$$

3 - *qadam*: $P_3 = P_2 + 8\frac{a}{3^2} = 4a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2}\right);$

$$S_3 = S_2 + 3\left(\left(\frac{a}{3^3}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4 * 4 = S_2 + 3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3^6*4} * 4^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5}\right).$$

4 - *qadam*: $P_4 = P_3 + 16\frac{a}{3^3} = 4a\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3}\right);$

$$S_4 = S_3 + 3\left(\left(\frac{a}{3^4}\right)^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}\right) * 4^3 = S_3 + 3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{3^8*4} * 4^3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7}\right).$$

....

n – *qadam:*

$$P_n = 4a + 4a\left(\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^3} + \frac{2^6}{3^4} + \cdots + \frac{2^{2(n-2)}}{3^{n-1}}\right);$$

$$S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5} + \frac{2^6}{3^7} + \cdots + \frac{2^{2n-2}}{3^{2n-1}}\right).$$

Yuqorida keltirilgan formulalarda 1-dan 4-tartibgacha fraktal uchburchaklarning konturlari qurilib, fraktal uchburchak yuzasi maydoni va perimetrining uning tartibiga analitik bog‘likligi aniqlandi.

Xulosa: fraktal uchburchak yuzasi maydoni kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=4/9) bo‘lib, u chekli. Fraktal uchburchakning perimetri ortib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=4/3) bo‘lib, tartib raqami oshgan sari u ham ortib boradi.

Serpin salfetkasi fraktali yuzasi va perimetri:

0 - *qadam*: $S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_0 = 3a$.

1 - *qadam*: $S_1 = \frac{3}{4}S_0 = \frac{3}{4} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $\qquad P_1 = 3 * \frac{3}{2}a.$

2 - *qadam*: $S_2 = \frac{3}{4}S_1 = \left(\frac{3}{4}\right) * \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $\qquad P_2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 a.$

3 - *qadam*: $S_3 = \frac{3}{4}S_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $\qquad P_3 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^3 a.$

4 - *qadam*: $S_4 = \frac{3}{4}S_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $\qquad P_4 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^4 a.$

....

n - *qadam*: $S_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n S_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $\qquad P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n a.$

“Serpin salfetkasi” fraktalining 1-dan 4-tartibgacha bo’lgan konturlari qurildi. “Serpin salfetkasi” fraktalining maydoni va perimetrini uning tartibiga analitik bog’liqligi keltirib chiqarildi. Yuqorida keltirilgan formulalarda “Serpin salfetkasi” fraktali maydoni va perimetrining uning tartibiga bog’liqligi olindi.

Xulosa: “Serpin salfetkasi” fraktali maydoni kamayib boruvchi geometrik progressiya (maxraji q=3/4) bo’lib, u tartib bilan cheksiz ortib nolga intiladi. “Serpin salfetkasi” fraktalining perimetri ortib boruvchi geometrik progressiya (maxraji q=3/2) bo’lib, tartib raqami oshgan sari u ham ortib boradi.

“Serpin piramidasi” fraktali sirti yuzasi, hajmi va perimetri:

0 - *qadam*: $S_n = a^2\sqrt{3} = const;\quad V_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{12};\quad P_0 = 6a.$

1 - *qadam*: $V_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2};\quad P_1 = 6a * 2.$

2 - *qadam*: $V_2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^2};\quad P_2 = 6a * 2^2.$

3 - *qadam*: $V_3 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^3};\quad P_3 = 6a * 2^3.$

4 - qadam: $V_4 = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^4};\quad P_4 = 6a * 2^4.$

....

n - qadam: $V_n = \frac{a^3\sqrt{3}}{12*2^n};\quad P_n = 6a * 2^n.$

“Serpin piramidasi” fraktalining 1-dan 4-tartibgacha bo‘lgan konturlari tuzib olindi. Uning tartibiga “Serpin piramidasi” fraktalining qirralarining hajmi va uzunliklari yig’indisining analitik bog‘liqligi keltirib chiqarildi, “Serpin piramidasi” fraktalining qirralari hajmi va uzunliklari yig‘indisini uning tartibiga bog‘liqligi olindi.

Xulosa: “Serpin piramidasi” fraktalining hajmi kamayib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q=1/2) bo‘lib, u chekli. “Serpin piramidasi” fraktali perimetri ortib boruvchi geometrik progressiyaning yig‘indisi (maxraji q = 2) bo‘lib, u tartibning ortib borishi bilan ham ortib boradi.

Muntazam fraktal piramidani aniqlash. Muntazam fraktal piramida tetraedr deb hisoblanganda, uning tashqi sirtlari ham muntazam piramidalardan quriladi, ularning qirralar uzunligi oldingi piramidaning qirra uzunlining 1/2 ga teng bo‘ladi.

Muntazam fraktal piramidani 0-qadami. Tetraedr – tomonlari muntazam uchburchaklardan iborat muntazam ko‘pyoqdir. Tetraedrda 4 ta yuzasi, 4 ta uchi va 6 ta qirrasi bor. Muntazam tetraedrda barcha yuzalar ko‘p qirrali uchburchaklardir. Barcha qirralari, yuzalari va uchubrchak burchaklari tengdir.

Muntazam fraktal piramidani 1-*qadami (yulduzsimon oktaedr)*. Sakkiz qirrali oktaedr yoki kengaytirilgan oktaedr Leonardo Da Vinchi tomonidan kashf etilgan va 100 yil o‘tgach, I. Kepler tomonidan takomillashtirilgan hamda unga “Stella oktangula” sakkiz burchakli yulduz nomi berilgan. Bu ko‘pyoqli tabiatda ikki kristal birlashtirilgan shaklda uchraydi, uni ikkita kesishgan muntazam tetraedrlarning birlashgani kabi tasavvur qilish mumkin.

Muntazam fraktal piramidani sirt yuzasi va hajmi (tetraedr)

0 - *qadam*: $S_0 = a^2\sqrt{3}$; $V_0 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{-1}$.

Muntazam fraktal piramidani sirt yuzasi va hajmi (oktaedr)

1 - *qadam*: $S_1 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$; $V_1 = V_0 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{-1} * 2^{-1}$.

2 - *qadam*: $S_2 = \frac{9}{4}a^2\sqrt{3}$; $V_2 = V_1 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{0} * 2^{-3}$.

3 - *qadam*: $S_3 = \frac{27}{8}a^2\sqrt{3}$; $V_3 = V_2 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{1} * 2^{-5}$.

4 - *qadam*: $S_4 = \frac{81}{16}a^2\sqrt{3}$; $V_4 = V_3 + \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2} * 3^{2} * 2^{-7}$.

....

n - *qadam*: $S_n = \frac{3^n}{2^n}a^2\sqrt{3}$; $V_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^3\sqrt{2}}{2^2}(2^{1-2k} * 3^{k-2})$.

Muntazam fraktal piramidaning hajmi kamayuvchi geometrik progressiya elementlarining yig‘indisi bo‘lib, bu to‘plam chekli bo‘ladi. Muntazam fraktal piramidaning sirt maydoni ortib boruvchi geometrik progressiya bo‘lib, piramidaning tartib raqami ortgan sari u ham ortib boradi.

Mazkur paragrafda ikki o‘lchovli va uch o‘lchovli fraktal ob’ektlarning ba’zi xususiyatlari tahlil qilindi, ular uchun fraktal qiymatlarning ma’lum bir tartibgacha bo‘lgan ba’zi xususiyatlarining analitik bog‘liqliklari o‘rganildi. Hosil qilingan analitik bog‘liqliklar asosida muallif tomonidan amalga oshirilgan hisob-kitoblar matematik formulalar ko‘rinishda bayon etildi. Fraktal ob’ektlarning ba’zi xususiyatlarining qiymatlarini yaqinlashuvi va farqlanishi ko‘rsatildi.

III bob bo‘yicha xulosa

Monografiyaning ushbu bobida fraktallarni qurish uchun qo‘llaniladigan usullar, ularning tavsifi, qo‘llanilish holatlari keltirilgan hamda bu usullar misollarda o‘rganilgan.

Fraktallarni qurish usullarida tenglamalar qurilgan, natijalar olingan va rasmlari keltirilgan.

Aylanalar tenglamasi va algebromantiqiy usuli R-funksiyaning loyihalash vositasidan foydalanib, aylanalar kesishishi, aylanalar birlashishidan iborat fraktallar tenglamasini qurish mumkin. Bu fraktallar juda chiroyli bo‘lib, qaysiki yengil sanoat, telekommunikatsiya, keramik va chinni buyumlarga naqshlarni chizish va boshqalarda qo‘llanilishi mumkin. Mantiq algebrasi, R-funksiya nazariyasi va fraktal arifmetika usullari bo‘yicha olib borilgan ko‘pyillik nazariy tadqiqotlar gazlama va gilam buyumlarning rangli dizaynini zamonaviylashtirishning algoritmik muhitini ishlab chiqishda xizmat qiladi.

Arifmetik xususiyatli binomial ko‘phadlar nazariyasi asosida fraktallar qurish modellari keltirilgan va batafsil bayon etilgan.

Analitik usulda muntazam uchburchakli fraktallarning tenglamalarini ishlab chiqildi va misollarda keltirildi.

IV BOB. GEOMETRIK SHAKLLARDAN IBORAT FRAKTALLARNI REKURSIV ALGORITMINI ISHLAB CHIQISH VA OLINGAN NATIJALAR

Ushbu bobda matematikaning bir qismi hisoblangan geometriyaning asosiy tushunchalaridan foydalangan holda yangi turdagi fraktallar qurish uchun geometrik modellar va rekursiv algoritmlar ishlab chiqilgan [6-9,52-54].

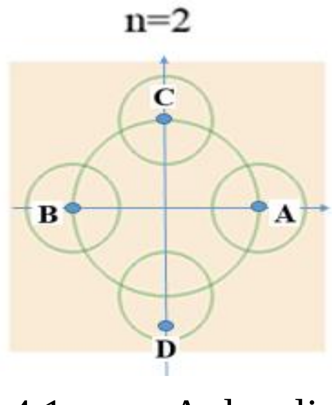
4.1. Geometrik shakllardan iborat fraktallarni qurishning rekursiv modeli va algoritmi

1. Aylanalardan iborat fraktalni qurish algoritmi

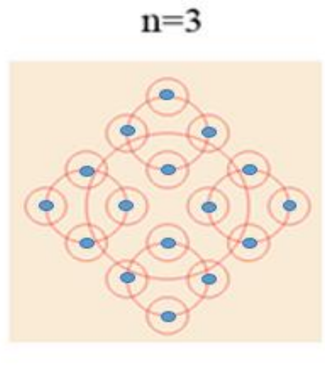
n=1 bo‘lganda: aylana markazining koordinatalari (x,y) aniqlansin, r-radius bilan aylana chizilsin;

n=2 bo‘lganda: *A(x+r;y), B(x-r;y), C(x;y+r)* va *D(x;y-r)* nuqtalarda r/2 radius bilan aylanalar chizilsin, natijada 5 ta aylanalar hosil qilinsin;

n=3 bo‘lganda: r/2 radius bilan hosil qilingan 4 ta aylanalarda 16 ta nuqta koordinatalari aniqlansin, $r/2^2$ radius bilan aylanalar chizilsin, natijada 21 ta aylana hosil qilinsin va h.k. bu jarayon $\sum_{i=1,2,...}^{n} \frac{r}{2^{i-1}}$ marta bajarilsin, 4^{n-1} ta aylanalardan iborat fraktallar hosil qilinsin.



4.1-rasm.Aylanali fraktallar



4.2-rasm. Aylanali fraktallar

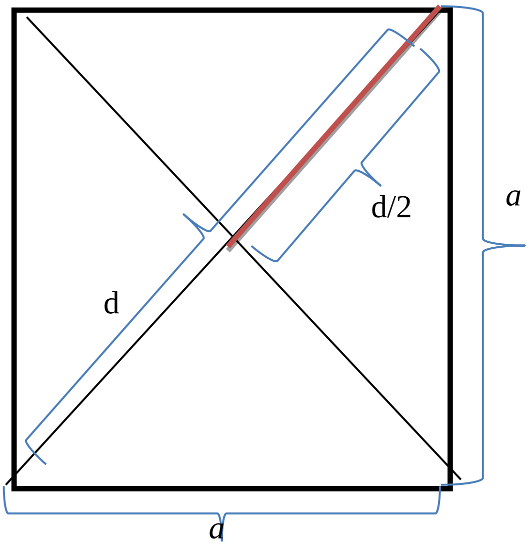
To‘rtburchaklardan iborat fraktallarning qurishni rekursiv algoritmlarini ishlab chiqish. Kvadrat, romb va to‘g‘ri to‘rtburchak kabi geometrik shakllardan foydalanib fraktallarni qurishni ko‘rib chiqamiz.

Kvadratlardan iborat fraktalni qurishda asosan uning diagonaliga murojaat qilamiz 4.3-rasm.

Birinchi qadam: Kvadratlardan iborat fraktalni qurish uchun avvalo bosh kvadratning diagonalini hisoblaymiz. Agar kvadratning tomonlari uzunliklari a dan iborat bo‘lsa, u holda $d = a\sqrt{2}$. Kvadratning chap yuqori uchidagi nuqta koordinatasi A(x,y) va pastki o‘ng uchidagi nuqta koordinatasi V(x1,y1) bo‘lsin.

Ikkinchi qadam: diagonali birinchi kvadratnikidan ikki marta kichik bo‘lgan d/2, markazlari birinchi kvadratning uchlaridan o‘tadigan kvadratlarni chizamiz. Hosil qilingan kvadratning uchlaridagi nuqtalarning koordinatalari aniqlab olinadi, ya’ni

A1(x-d,y-d,x+d,y+d,d/2), V1(x1-d,y1-d,x1+d,y1+d,d/2),
S1(x-d,y1-d,x+d,y1+d,d/2), D1(x1-d,y-d,x1+d,y+d,d/2).



4.3-rasm. Kvadratdan iborat fraktal uchun boshlang‘ich sxema

Uchinchi qadam: diagonali ikkinchi qadamda chizilgan kvadratlarnikidan ikki marta kichik bo‘lgan, markazlari ikkinchi qadamda hosil qilingan kvadratlarning uchlaridan o‘tadigan kvadratlarni chizamiz. Ya’ni hosil qilingan kvadratning uchlaridagi nuqtalarning koordinatalari aniqlab olinadi

A2(x-d-d,y-d-d,x+d+d,y+d+d,d/4), V2(x1-d-d,y1-d-d,x1+d+d,y1+d+d,d/4), *S2(x-d-d,y1-d-d,x+d+d,y1+d+d,d/4), D2(x1-d-d,y-d-d,x1+d+d,y+d+d,d/4)*

va h.k. davom ettiramiz. Natijada kvadratlardan iborat boʻlgan fraktallar hosil boʻladi.

Kvadratlardan iborat fraktalni qurish

Birinchi qadam: Kvadratlardan iborat fraktalni qurish uchun avvalo bosh kvadratning chap yuqori uchidagi nuqta koordinatasi A(x1,y1) va pastki oʻng uchidagi nuqta koordinatasi V(x2,y2) belgilab olamiz.

Ikkinchi qadam: tomoni birinchi kvadratnikidan ikki marta kichik boʻlgan *a*/2, markazlari birinchi kvadratning uchlaridan oʻtadigan kvadratlarni chizamiz. Ya'ni hosil qilingan kvadratning uchlarida hosil qilingan nuqtalarning koordinatalari aniqlab olinadi, ya'ni

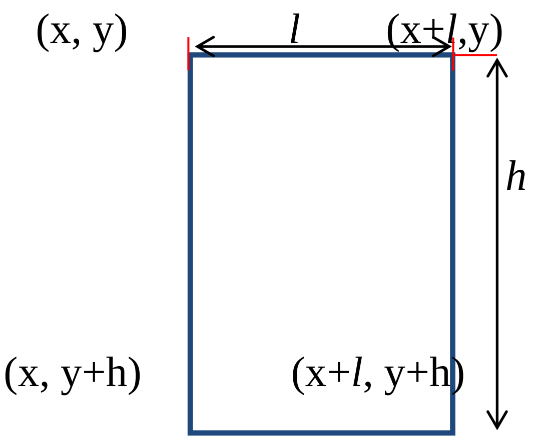
A1(x1–a, y1–a,x1+a,y1+a,a/2); V1(x2–a,y2–a,x2+a,y2+a,a/2),

S1(x1–a,y2–a,x1+a,y2+a,a/2); D1(x2–a,y1–a,x2+a,y1+a,a/2).

Uchinchi qadam: tomonlari ikkinchi qadamda chizilgan kvadratlarnikidan ikki marta kichik boʻlgan, markazlari ikkinchi qadamda hosil qilingan kvadratlarning uchlaridan oʻtadigan kvadratlarni chizamiz va h.k. davom ettiramiz. Natijada kvadratlardan iborat boʻlgan fraktallar hosil boʻladi.

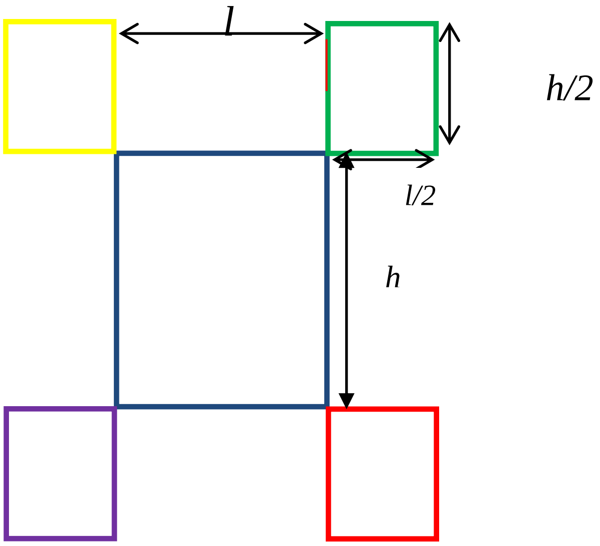
s. Toʻgʻri toʻrtburchaklardan iborat fraktalni qurishda asosan uning uchlari va tomonlariga murojaat qilamiz 3.4-rasm.

Birinchi qadam: Tomonlarning uzunliklari, uchlardagi nuqtalarning koordinatalari aniqlab olinsin. (Bu kattaliklar bevosita algoritmni qurib olish uchun xizmat qiladi)



4.4-rasm. Toʻgʻri toʻrtburchaklardan iborat fraktalni qurish boshlangʻich sxemasi

Ikkinchi qadam: Tomonlar uzunliklari 2 marta kamaytirilsin va toʻrtburchak uchlaridan yana toʻrtta toʻrtburchak chizilsin 4.5-rasm.



4.5-rasm. To‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat fraktalni qurish navbatdagi qadam sxemasi

1-kichik to‘g‘ri to‘rtburchakni chizish uchun uchlaridagi nuqta koordinatalarini aniqlab olinsin; *x* o‘qi bo‘yicha *l/2*ga kamaytirilsin; *y* o‘qi bo‘yicha *h/2* marta kamaytirilsin; u holda tomonlar o‘lchamlari ham ikki martadan kamaytirilsin va

A1(*x1-l/2, y1 - h/2, x1, y1, l/2, h/2)* ega bo‘linsin.

2-kichik to‘g‘ri to‘rtburchakni chizish uchun uchlaridagi nuqta koordinatalarini aniqlab olinsin; *x* o‘qi bo‘yicha *l* ga oshirilsin, *y* o‘qi bo‘yicha *h/2* marta kamaytirilsin; u holda tomonlar o‘lchamlarini ham ikki martadan kamaytirilsin va

B1(x1+l, y1-h/2, x2+l/2, y1,l/2,h/2) ega bo‘lsin.

3-kichik to‘g‘ri to‘rtburchakni chizish uchun uchlaridagi nuqta koordinatalarini aniqlab olinsin; *x* o‘qi bo‘yicha *l/2* ga oshirilsin; *y* o‘qi bo‘yicha *h/2* marta oshirilsin; u holda tomonlar o‘lchamlarini ham ikki martadan kamaytirilsin va

S1(x2, y2, x2+l/2, y2+h/2,l/2, h/2) ega bo‘lsin.

4-kichik to‘g‘ri to‘rtburchakni chizish uchun uchlaridagi nuqta koordinatalarini aniqlab olinsin; *x* o‘qi bo‘yicha *l/2* ga kamaytirilsin, *y* o‘qi bo‘yicha *h* va *3*h/2*ga oshirilsin; u holda tomonlar o‘lchamlarini ham ikki martadan kamaytirilsin va

*D1(x1-l/2, y1+h, x1,y1+3*h/2, l / 2,h/2)* ega bo‘lsin.

bu jarayon n marta takrorlanadi, buni quyidagi

$$1+4+16+64+...+4^{n-1} = \sum_{i=1,2,...}^{n} 4^{i-1}.$$

formula asosida yozish mumkin, ya'ni to'rtburchaklar soni. Bu qadamdagi burchaklar sonining formulasi: 4(n^2 -1)+4n kabi ifodalanadi.

Romblardan iborat fraktallarni qurish

Birinchi qadam: Romblardan iborat fraktalni qurish uchun avvalo bosh rombning yuqori uchidagi nuqta koordinatasi A(x1,y1) va pastki uchidagi nuqta koordinatasi V(x2,y2) belgilab olinsin. Romb tomonlarining uzunliklari *l* va *t* deb olinsin.

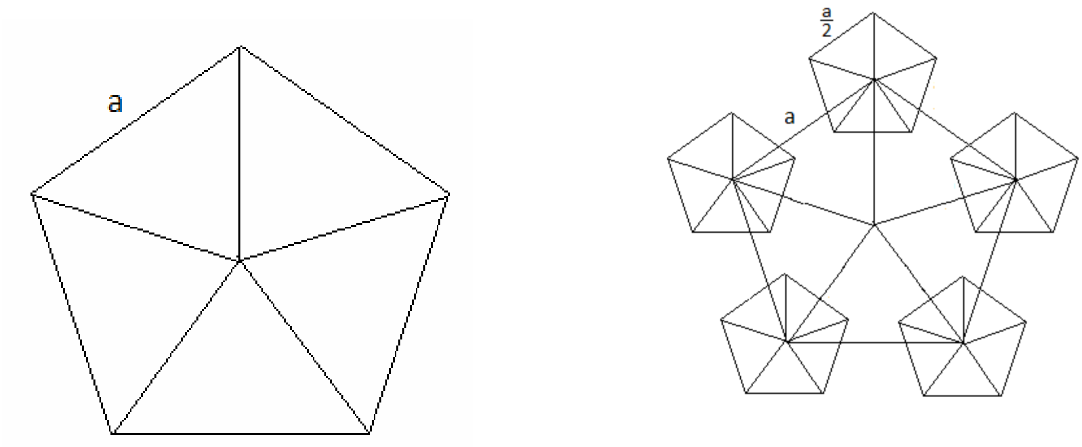
Ikkinchi qadam: tomoni birinchi rombnikidan ikki marta kichik bo'lgan *l*/2 va *t/2* tomonlar tashkil etilsin, hosil qilinishi kerak romblarni diagonallari kesishgan nuqtalari birinchi rombning uchlarida yotadigan romblar chizilsin. Bunda hosil qilingan rombning uchlaridagi nuqtalarning koordinatalari aniqlab olinsin, ya'ni

A1(x, y - l, l / 2, t / 2); V1(x, y + l, l / 2, t / 2),
S1(x - t, y, l / 2, t / 2); D1(x + t, y, l / 2, t / 2).

Uchinchi qadam: tomonlari ikkinchi qadamda chizilgan romblarnikidan ikki marta kichik bo'lgan, markazlari ikkinchi qadamda hosil qilingan romblarning uchlaridan o'tadigan romblarni chizilsin va h.k. davom ettirilsin. Natijada romblardan iborat bo'lgan fraktallar hosil bo'ladi.

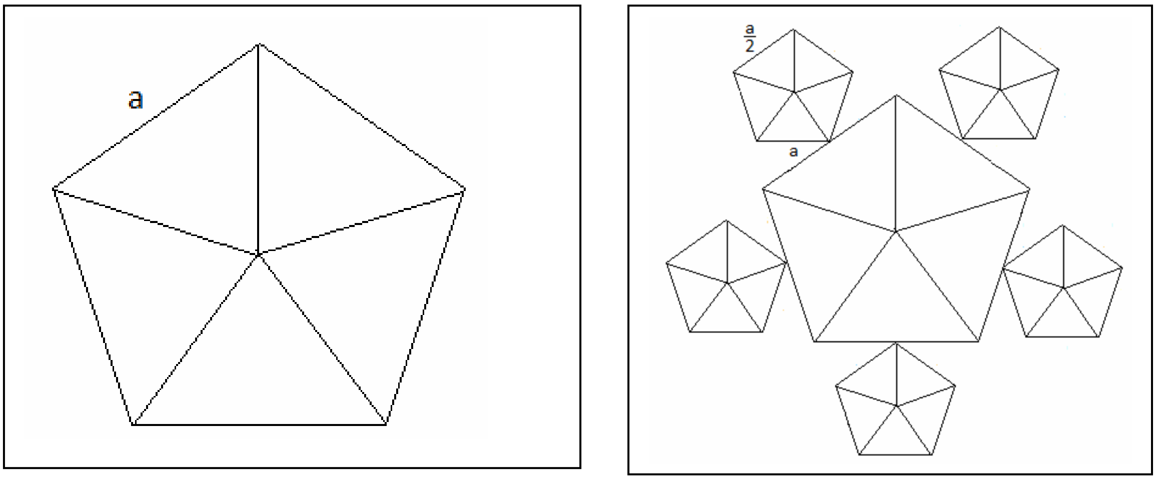
Beshburchaklardan iborat fraktallarni qurish algoritmlari

a) Bu turdagi fraktallari qurishda ham xuddi yuqoridagi algoritmlardagi kabi ish olib boriladi. Avvalo tomoni «a»ga teng bo'lgan beshburchak chizilsin, uning markazi aniqlab olinsin (uning markazi uchlaridan o'tkazilgan balandliklar kesishgan nuqtadir). Bu nuqtaning koordinatasi aniqlansin. Keyingi qadamda hosil bo'lgan beshburchaklar qirralari ikki marta kichik qilib olinsin va u birinchi beshburchakning uchlarida joylashtirilsin (4.6-rasm).



4.6-rasm. Beshburchakli fraktallar, 1-qadam va 2-qadamda

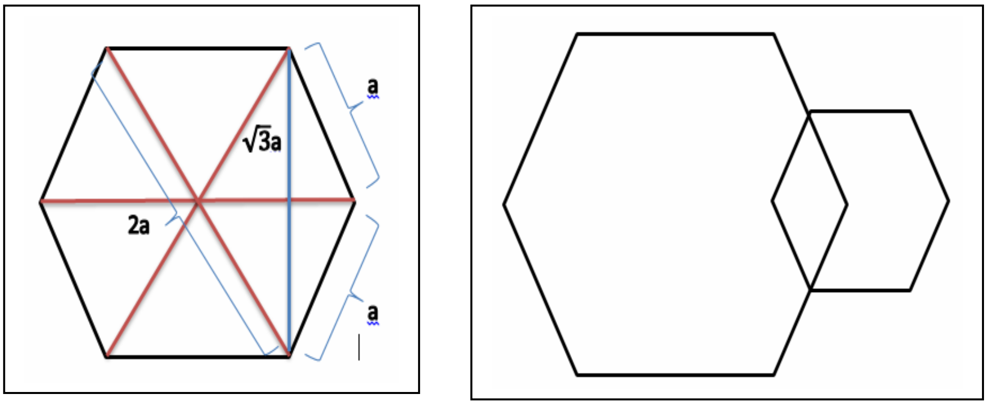
b) Bu turdagi beshburchaklarni qurish uchun a) dagi kabi birinchi qadamda tomoni «a»ga beshburchak chizib olinsin. Ikkinchi qadamda beshburchakning qirralarining oʻrtalari topilsin va oldingi qadamdagi oʻlchamdan ikki barobar kichik oʻlchamda beshburchaklar joylashtirilsin (4.7-rasm).



4.7-rasm. Beshburchakli fraktallar, 1-qadam va 2-qadamda

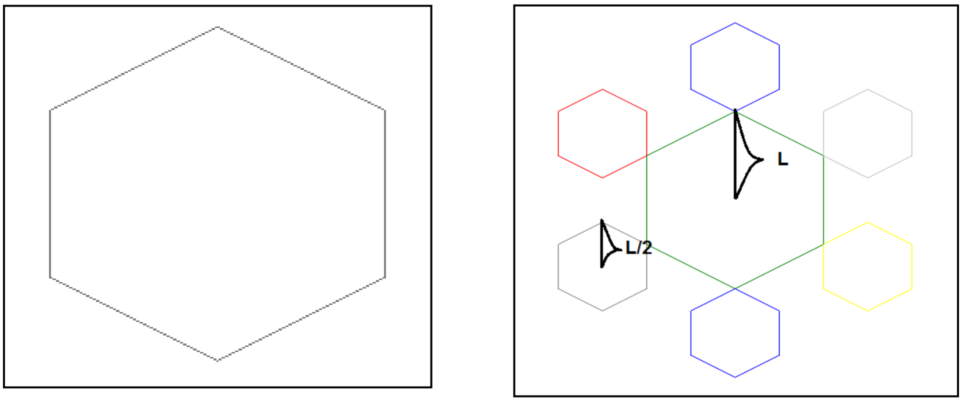
Oltiburchaklardan iborat fraktallarni qurish algoritmlari

a) 1-qadam: avvalo oltiburchak chizilsin, uning markazi aniqlab olinsin. Bu nuqtaning koordinatasi aniqlansin. Bu turdagi fraktallari qurishda uning diagonallaridan keng foydalaniladi. Keyin diagonol yarmi hisoblansin. 2-qadam: shu diagonaldan foydalanib oltiburchaklar chizilsin. Bu oltiburchaklar markazlari topilib, bu oltiburchaklarning markazlari oldingi qadamdagi oltiburchakning uchlarida boʻlsin (4.8-rasm).



4.8-rasm. Oltiburchakli fraktallar, 1-qadam va 2-qadamda

b) 1-qadam: avvalo oltiburchak chizilsin, uning markazi aniqlab olinsin. Bu nuqtaning koordinatasi aniqlansin. Bu turdagi fraktallar qurishda ham uning diagonal ***(L)***laridan foydalaniladi. Keyin diagonal yarmi $L/2$ hisoblansin. 2-qadam: shu diagonaldan foydalanib oltiburchaklar chizilsin. Bu oltiburchaklar uchlarining koordinatalari topilib, bu oltiburchaklar oldingi qadamdagi oltiburchakning uchlarida joylashtirilsin.



4.9-rasm. Oltiburchakli fraktallar, 1-qadam va 2-qadamda

Bu turdagi fraktallarning geometrik modelini ishlab chiqishda geometrik shakl muntazam oltiburchak va uning tegishli tushunchalaridan keng foydalaniladi. 1-qadam: avvalo tomoni “a”ga teng muntazam oltiburchak chizib olinsin. 2-qadam: uning markazi joylashgan nuqta hamda uning koordinatalari O(x,y) aniqlansin. 4.10-rasmdan muntazam oltiburchakning uchlari joylashgan nuqtalar (A,B,C,D,E,F)ning koordinatalari aniqlansin, va kichik oltiburchaklarning markazlari ushbu nuqtalarda yotsin:

$$A\left(x+\frac{h}{\sqrt{3}};\, y-h\right);\;\; B\left(x+\frac{2h}{\sqrt{3}};\, y\right);\;\; C\left(x+\frac{h}{\sqrt{3}};\, y+h\right);$$

$$D\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};\, y+h\right);\ E\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};\, y+h\right);\ F\left(x-\frac{h}{\sqrt{3}};\, y-h\right).$$

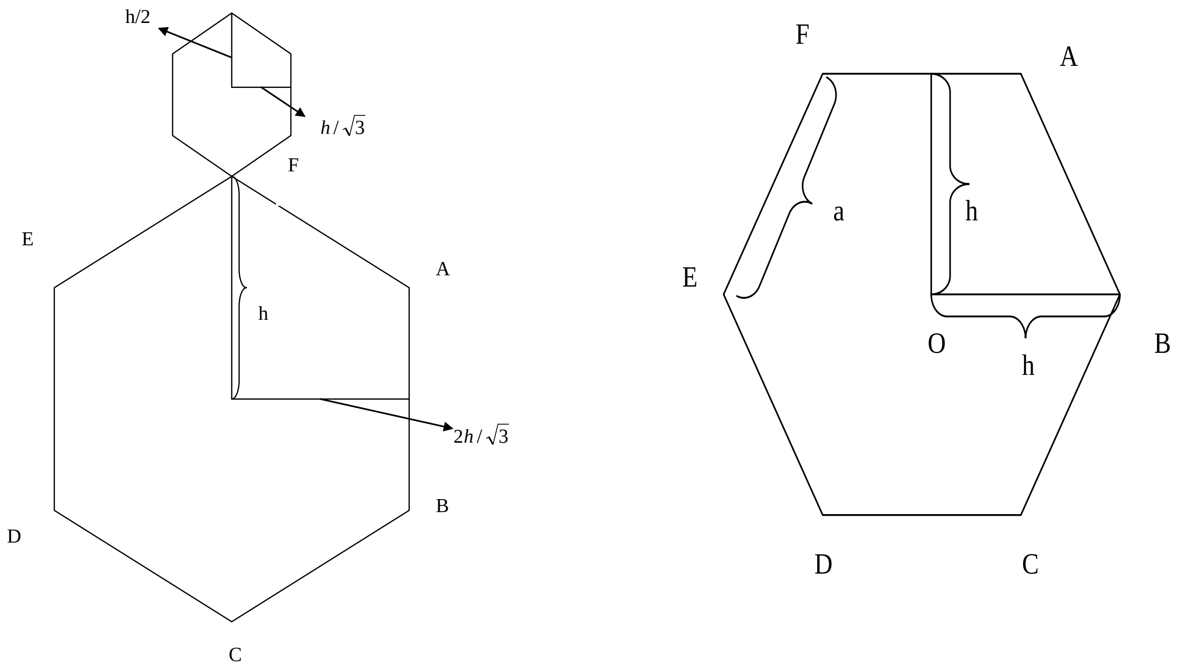
3-qadamda ushbu nuqtalardan tomonlari “a/2”ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchaklar chizilsin.

Agar asosiy oltiburchakka tashqi chizilgan aylani radiusi “h”ga teng bo‘lsa, uning uchlaridan chizilgan muntazam oltiburchaklarga tashqi chizilgan aylananing radiuslari mos ravishda “h/2”ga teng bo‘ladi.

$$A_1\left(x+\frac{h\sqrt{3}}{2};\, y-\frac{3h}{2}\right);\ B_1\left(x+h\sqrt{3};\, y\right);\ C_1\left(x+\frac{h\sqrt{3}}{2};\, y+\frac{3h}{2}\right);$$

$$D_1\left(x-\frac{h\sqrt{3}}{2};\, y+\frac{3h}{2}\right);\ E_1\left(x-h\sqrt{3};\, y\right);\ E_1\left(x-\frac{h\sqrt{3}}{2};\, y-\frac{3h}{2}\right);$$

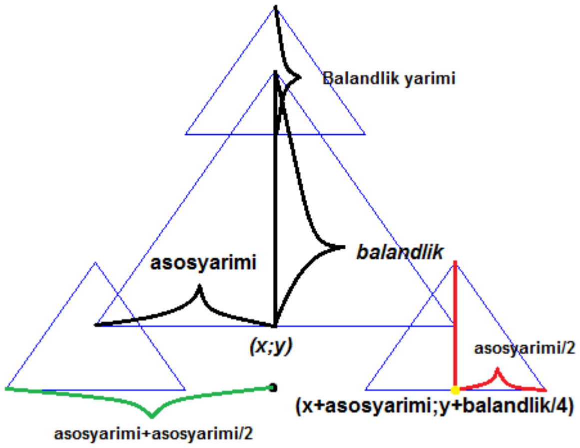
Chizilgan har bir funksiyadan rekursiv funksiya hosil qilib bu jarayonni cheksiz davom ettirilsin.



4.10-rasm. Oltiburchakli fraktallar qurishning boshlang‘ich sxemalari

Uchburchakli fraktallarni qurishning geometrik modeli, rekursiv algoritmi va dasturiy muhitini ishlab chiqish. Bu turdagi fraktallarni qurishda muntazam uchburchak va uning asosiy tushunchalaridan keng foydalanamiz.

1-tur uchburchak



4.11-rasm. Uchburchakli fraktallarni qurish sxemasi

4.11-rasmda uchburchak, uning balandligi va asos yarmidan foydalangan holda uning geometrik modeli ishlab chiqiladi. Bunda to‘rt xil o‘zgaruvchi olinadi. Bular: x,y, balandlik-h, asosyarmi-asya va ular 4.11-rasmda keltirilgan.

x–boshlang‘ich uchburchak asosi yarmi joylashgan nuqta absissasi.

y–boshlang‘ich uchburchak asosi yarmi joylashgan nuqta ordinatasi.

Balandlik(h)–boshlang‘ich uchburchak balandligi.

Asos yarmi(asya)–boshlang‘ich uchburchak asosining yarmi.

Endi rekursiv algoritmni ishlab chiqamiz.

1-qadam:

a) Boshlang‘ich muntazam uchburchak chizib olinsin.

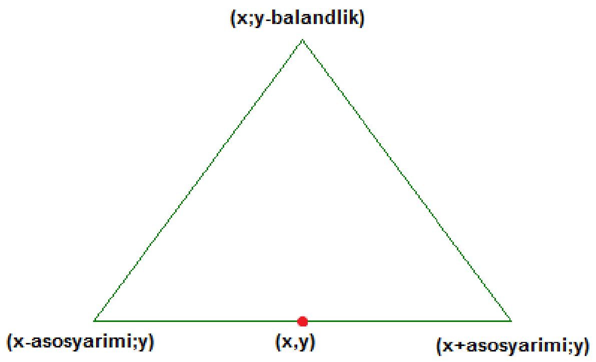
b) Uchburchakning asosining yarmi aniqlansin va bu nuqtaning koordinatasi (x,y) deb olinsin.

s) Uchburchakning balandligi aniqlansin va h harfi bilan belgilansin 4.11-rasm.

d) Uchburchak uchlari joylashgan nuqtalarning koordinatalari aniqlansin A(x, y-h); B(x + asya, y); C(x – asya, y) (4.12-rasm).

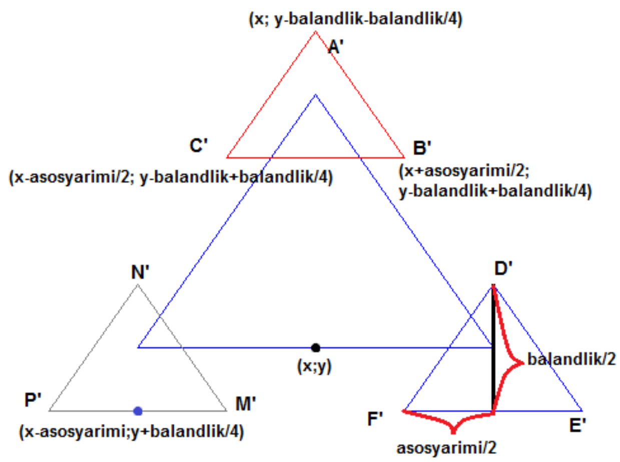
Bu algoritm uchun dastur tuzib, rasm hosil qilinganda faqat bitta uchburchak chiziladi. Bunda dasturga rekursiyalar sonini aniqlash uchun yana bitta paramert kiritiladi, ya’ni uni n deb belgilaymiz.

n=1 bo‘lganida, faqat bitta muntazam uchburchak chiziladi 4.12-rasm.



4.12-rasm, n=1. Uchburchakli fraktallarni qurishning boshlang‘ich sxemasi

2-qadam:
a) muntazam uchburchak va uning har bir uchida o‘lchami asosiy uchburchak o‘lchamidan ikki baravar kichik bulgan uchburchaklar chizilsin.
b) Mavjud muntazam uchburchaklarda
A^I(x, y – 5*h/4); B^I(x – asy/2; y + 3*h/4);
C^I (x – asy/2; y + 3*h/4);
D^I (x + asy; y – h/4); E^I (x + 3*asy/2; y + h/4);
F^I (x – asy/2; y + h/4);
N^I (x – asy; y – h/4); M^I (x – asy/2; y + h/4);
P^I (x – 3*asy/2; y + h/4);
nuqta koordinatalari aniqlansin.
s) Aniqlangan nuqtalarda uchburchaklar chizilsin 3.12-rasm.



4.13-rasm n=2. Uchburchakli fraktallarni qurishning novbatdagi qadam sxemasi

Va bu jarayonni cheksiz davom ettirib muntazam uchburchaklardan iborat fraktalni qurish mumkin. Hosil qilingan fraktallardagi uchburchaklar soni n ga bog‘lik geometrik tarzda o‘zgaradi. Yani uchburchaklar umumiy sonini topish quyidagi formulaga asosan amalga oshiriladi

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}.$$

bu yerda n rekursiyalar soni.

2-tur uchburchak.

Bu turdagi fraktallarni qurishda ham quyidagi muntazam uchburchak va uning asosiy tushunchalaridan keng foydalaniladi.

Bu tur muntazam uchburchakli fraktalning oldingi tur fraktaldan farqi shundaki ularning uchburchakning tashqarilarida hosil qilinadi. Buning uchun avvalo uchburchak tomonlarining o‘rtalari, uning balanligi topib olinadi hamda nuqtalar bilan belgilanib koordinatalari aniqlanadi.

Bunda 4 xil o‘zgaruvchi olinadi. Bular x, y, h, tya.

x–boshlang‘ich uchburchak asosi yarmi joylashgan nuqta absissasi.

y–boshlang‘ich uchburchak asosi yarmi joylashgan nuqta ordinatasi.

h–boshlang‘ich uchburchak balandligi.

tya–boshlang‘ich uchburchak tomonlarining yarmi.

Endi rekursiv algoritmni ishlab chiqamiz.

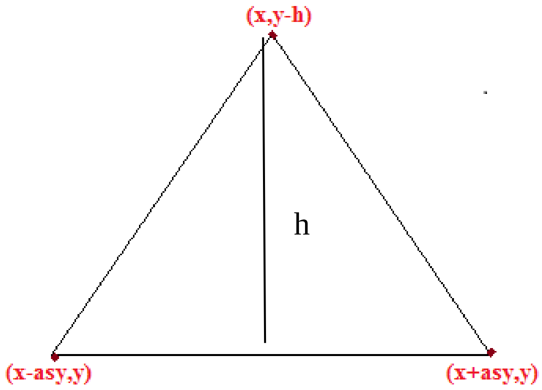
1-qadam:

a) Uchburchak uchlari joylashgan nuqtalarning koordinatalari aniqlansin A(x, y-h); B(x + tya, y); C(x – tya, y) 4.13-rasm.

b) Boshlang‘ich muntazam uchburchak chizib olinsin.

s) Uchburchakning balandligi aniqlansin va h harfi bilan belgilansin 4.13-rasm.

d) Uchburchakning tomonlarining yarimlari aniqlansin va bu nuqtalarning koordinatalari aniqlansin (4.14-rasm).



4.14-rasm. n=1. Uchburchakli fraktallarni qurishning boshlang‘ich sxemasi

Bu algoritm uchun dastur tuzib, rasm hosil qilinganda faqat bitta uchburchak chiziladi. Bunda dasturga rekursiyalar sonini aniqlash uchun yana bitta parametr kiritib, uni n deb belgilaymiz.

n=1 bo‘lganda faqat bitta muntazam uchburchak chiziladi 4.14-rasm.

2-qadam:

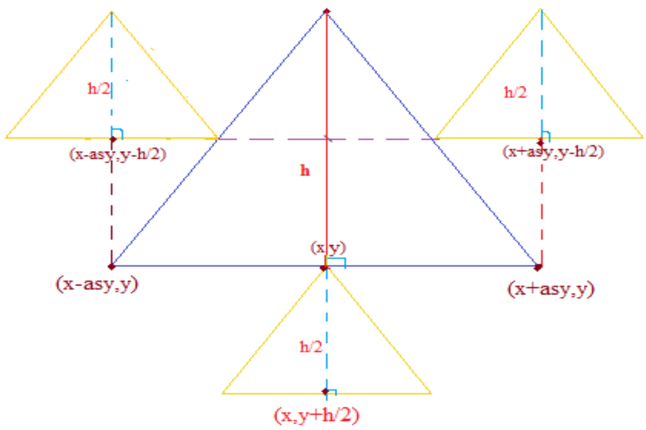
a) muntazam uchburchak va uning har bir uchida o‘lchami boshlang‘ich uchburchak o‘lchamidan ikki baravar kichik bo‘lgan uchburchaklar chizilsin.

b) Mavjud muntazam tomonlari o‘rtalarida nuqta koordinatalari aniqlansin, ya’ni

$$A_1(n-1, x- tya, y - h/2, h / 2, tya / 2);$$
$$B_1(n-1, x + tya, y - h / 2, h / 2, tya / 2);$$
$$C_1(n-1, x , y + h / 2, h / 2, tya / 2);$$

kabidir.

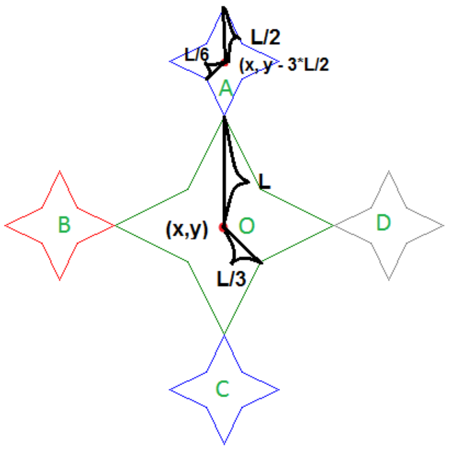
s) Aniqlangan nuqtalarda uchburchaklar chizilsin 4.14-rasm.



4.15-rasm. n=2: Uchburchakli fraktallarni qurishning navbatdagi qadam sxemasi

Va bu jarayonni cheksiz davom ettirib muntazam uchburchaklardan iborat 2-tur fraktalni qurish mumkin. Hosil qilingan fraktaldagi uchburchaklar sonini n ga bog‘liq geometrik tarzda o‘zgaradi. Ya’ni uchburchaklar umumiy sonini topish (1) formulaga asosan amalga oshiriladi, bu yerda n rekursiyalar soni.

To‘rt qirrali yulduzsimon fraktal. Bu turdagi yulduzsimon fraktallarni chizishda quyidagi algoritmini ko‘rib chiqamiz (4.16-rasm).



4.16-rasm. n=2: To‘rt qirrali yulduzsimon fraktal qurish

Bunda 3 xil o‘zgaruvchi olinadi. Bular x, y, L.

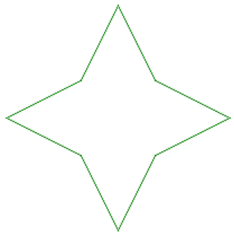
x – asosiy naqsh markazi joylashgan nuqta absissasi.

y – asosiy naqsh markazi joylashgan nuqta ordinatasi.

L – asosiy naqsh markazidan eng uzoq uchlarigacha bo‘lgan masofa.

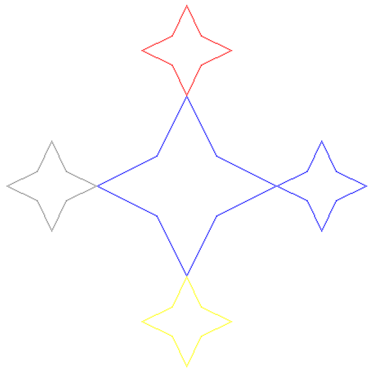
Dasturimizni ishlashda yana bitta o‘zgaruvchi kiritildi. Bu o‘zgaruvchi (n) fraktal takrorlanishi sonini belgilab beradi.

Agar n=1 bo‘lganda, faqatgina asosiy naqsh chiziladi (4.17-rasm).



4.17-rasm. n=1: To‘rt qirrali yulduzsimon fraktal

n=2 bo‘lganda boshlang‘ich naksh va uning har bir uchida o‘lchami asosiy naqsh o‘lchamidan ikki baravar kichik bo‘lgan naqshlar chiziladi (4.18-rasm).



4.18-rasm. n=2: To‘rt qirrali yulduzsimon fraktal

Agar n=3 bo‘lganda asosiy naqsh va uning har bir uchida o‘lchami asosiy naqsh o‘lchamidan ikki baravar kichik bo‘lgan naqshlar chiziladi, uchinchi siklda esa kichkina naqshlar burchaklarida o‘lchami asosiy naqsh o‘lchamidan to‘rt baravar kichik bo‘lgan naqshlar chiziladi (4.19-rasm).

4.19-rasm. n=3: To‘rt qirrali yulduzsimon fraktal

Birinchi siklda 1 ta naqsh
Ikkinchi siklda 5 ta naqshlar
Uchinchi siklda 21 ta naqshlar hosil bo‘ladi.
n-siklda hosil bo‘lgan naqshlar sonini quyidagi formula bo‘yicha topamiz:

$$N = 1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^{n-1} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{n} 4^{i-1}.$$

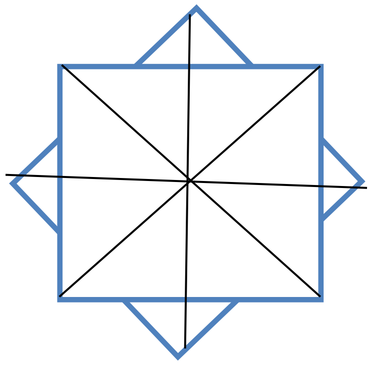
n-qadamdagi shaklning dioganali uzunligini hisoblash formulasini aniqlash:

$$L_n = L + \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{2^{n-1}} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{n} \frac{L}{2^{i-1}}.$$

Har bir shakldagi koordinatalar nuqtasi quyidagicha bo‘ladi:

O nuqta koordinatasi (x;y);
A nuqta koordinatasi (x;y-(3L/2));
B nuqta koordinatasi (x-(3L/2);y);
C nuqta koordinatasi (x;(y+3l/2));
D nuqta koordinatasi ((x+3L/2);y).

Sakkiz qirrali yulduzsimon fraktal. Bu turdagi fraktallarni qurishda fraktallarni chizishda matematikaga ham murojat qilamiz. Sakkiz qirrali yulduz chizishda asosan ikkita kvadratni 45^0 da ustma-ust joylashtiriladi. Bunda kvadratning dioganallari orqali uning uchlariga keyingi yulduzni joylashtiramiz.

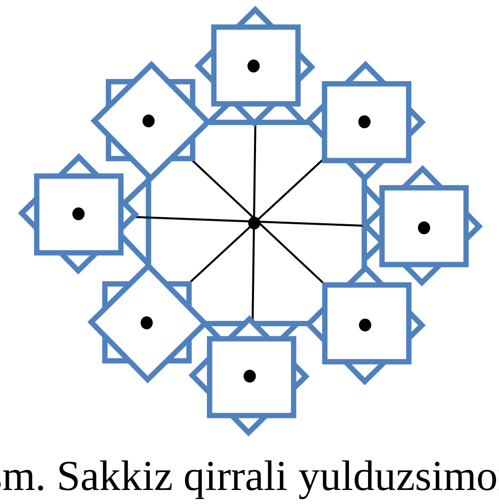


4.20 – rasm. Sakkiz qirrali yulduzsimon fraktal qurishning boshlang‘ich sxemasi

Sakkiz qirrani chizish uchun quyidagi matematik formulaga murojaat etamiz:

$$d = a\sqrt{2}$$

Ikkinchi qadam uchun diaganali birinchi shakldan uch marta kichik shakl chizamiz.



4.21 – rasm. Sakkiz qirrali yulduzsimon fraktal qurishning navbatdagi sxemasi

Ikkinchi qadamda kichik shakl markazini topamiz va birinchi shaklning birinchi qirrasiga joylashtiramiz va bu holatni sakkizta qirraga joylashtiramiz.

A nuqta koordinatasini topish uchun nuqta

(n-1,x - r-l, y-l/16, l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

B nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x - r-l, y +5*l-r/15, l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

C nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x+3*l-r*3/7, y+5*l-r/15, l /3, r /3) formuladan foydalanamiz;

D nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x +3*l-r*3/7, y-l/16 , l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

E nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x, y - l*10/9, l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

F nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x, y + 6*l-r/10 , l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

G nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x+2*l+r, y+ r*2 -l/2 , l / 3, r / 3) formuladan foydalanamiz;

H nuqta koordinatasini topish uchun

(n-1, x-2*l-r, y+ r*2 -l/2 , l / 3, /3) formuladan foydalanamiz;

Ushbu holat navbatdagi sakkiz qirrali yulduzlarda ham takrorlanadi.

Birinchi qadamda 1 ta sakkiz qirrali yulduz chiziladi;

Ikkinchi qadamda 9 ta sakkiz qirrali yulduz chiziladi;

Uchinchi qadamda 73 ta sakkiz qirrali yulduz chiziladi;

Umumiy chizilgan sakkiz qirrali yulduzlarni sonini topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\mathrm{N} = 1 + 8 + 64 + 192 + ... + 8^{n-1} = \sum_{k=1,2,...}^{n} 8^{k-1}.$$

Sakkiz qirrali yulduz chizish uchun, N–sakkiz qirrali yulduz dioganalini quyidagi formula orqali topamiz:

$$D_n = D + \frac{D}{3} + \frac{D}{9} + \frac{D}{27} + ... + \frac{D}{3^{n-1}} = \sum_{k=1,2,...}^{n} \frac{D}{3^{k-1}}.$$

Yuqorida keltirilgan geometrik modellar va rekursiv algoritmlardan foydalanib fraktallar uchun ularning umumiy tushunchalarini keltirib o‘tamiz.

Fraktallar qurishning matematik formulalari. Bunda ko‘pburchaklar soni k ga bog‘liq geometrik tarzda o‘zgaradi. Ya’ni ko‘pburchaklarning umumiy sonini topish formulasi:

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \sum_{k=1}^{n} M^{k-1}.$$

k-qadamda hosil bo‘ladigan ko‘pburchaklar sonini aniqlash formulasi:

$$S_k = M^{k-1}.$$

Bu yerda N_n -hosil bo‘lgan ko‘pburchaklarning umumiy soni; M - ko‘pburchak tomonlari soni; k-qadamlar soni; S_k - k qadamdagi ko‘pburchaklar soni.

Aylanalardan iborat fraktallarni qurish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

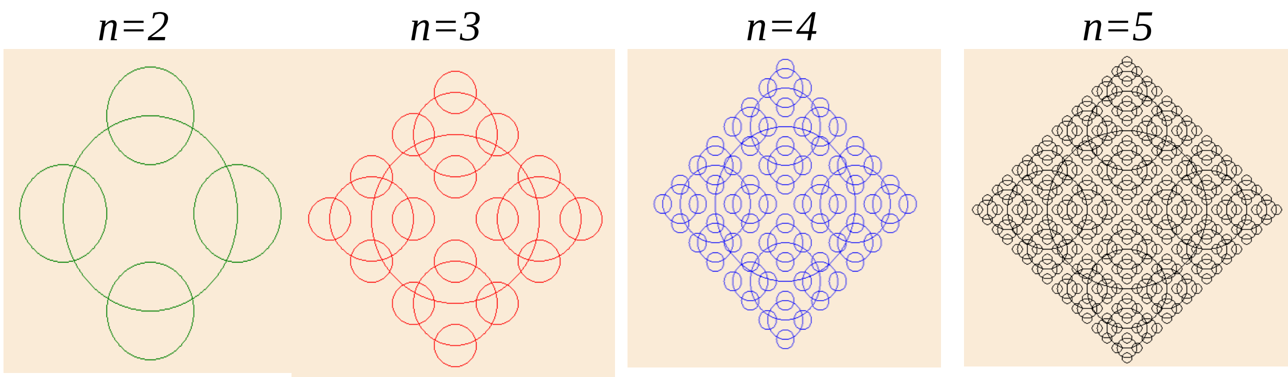
$$S_n = 1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^{n-1} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{n} 4^{i-1}.$$

n-qadamda hosil bo‘ladigan aylanalar soni: $N = 4^{n-1}$.

4.2. Qurilgan fraktallar bo‘yicha hisoblash natijalari tahlili

Endi yuqorida ishlab chiqarilgan geometrik model hamda rekursiv algoritm asosida yaratilgan dasturiy vosita yordamida *n* ning turli qiymatlaridagi olingan natijalarini 4.22-4.38 - keltiramiz.

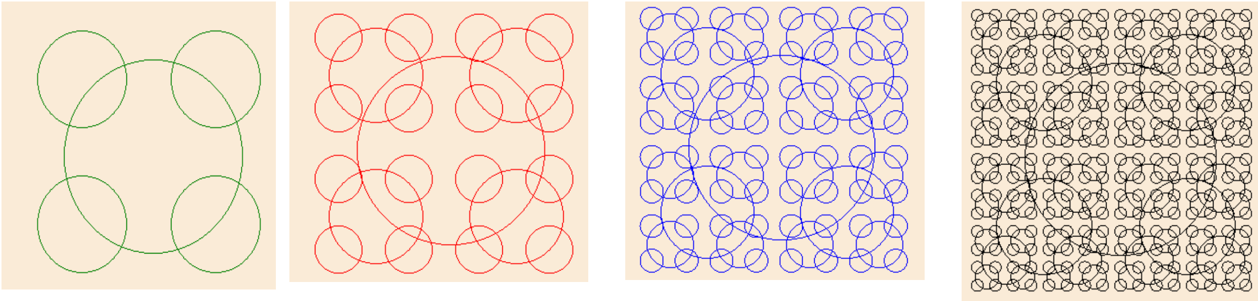
1-tur aylanalardan iborat fraktallar



4.22-rasm. n-ning turli qiymatlarida bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

2-tur aylanalardan iborat fraktallar

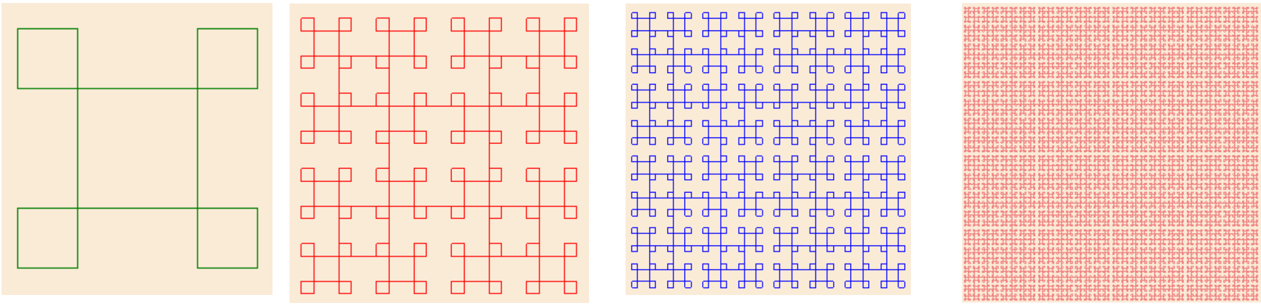
n=2 *n=3* *n=4* *n=5*



4.23-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

1-tur to‘rtburchaklardan iborat fraktallar

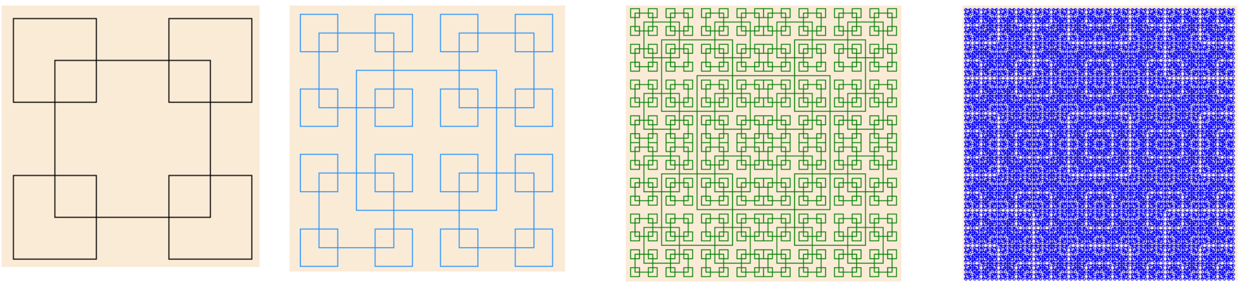
n=1 *n=3* *n=5* *n=7*



4.24-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

2-tur to‘rtburchaklardan iborat fraktallar

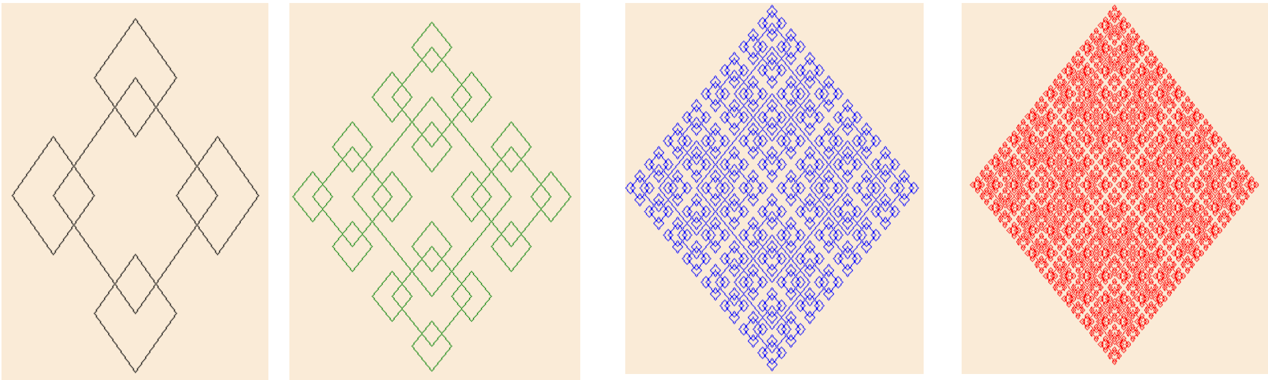
n=2 *n=3* *n=5* *n=7*



4.25-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

Romblardan iborat fraktallar

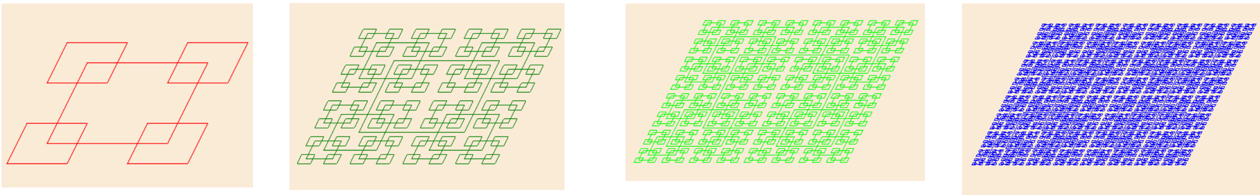
n=2 *n=3* *n=5* *n=6*



4.26-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

Parallellogrammlardan iborat fraktallar

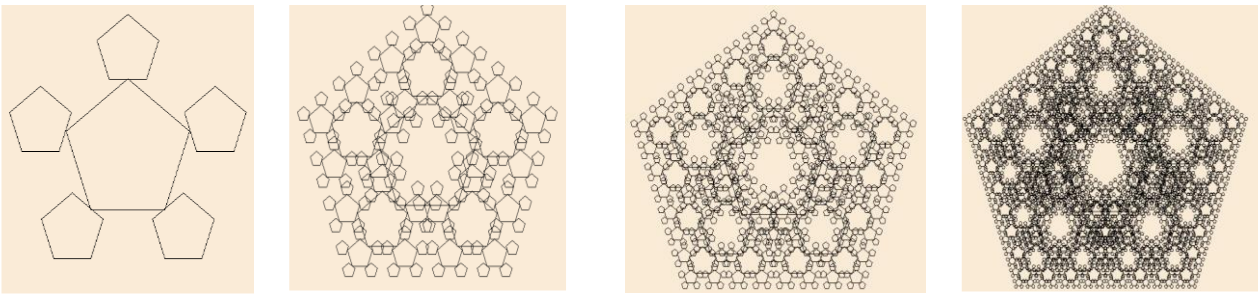
n=2 *n=4* *n=5* *n=6*



4.27-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

1-tur beshburchaklardan iborat fraktallar

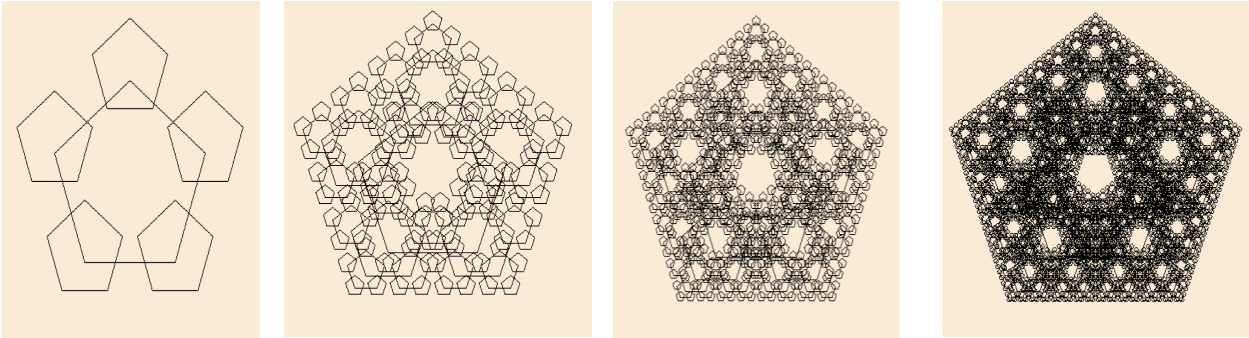
n=2 *n=4* *n=5* *n=6*



4.28-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

2-tur beshburchaklardan iborat fraktallar

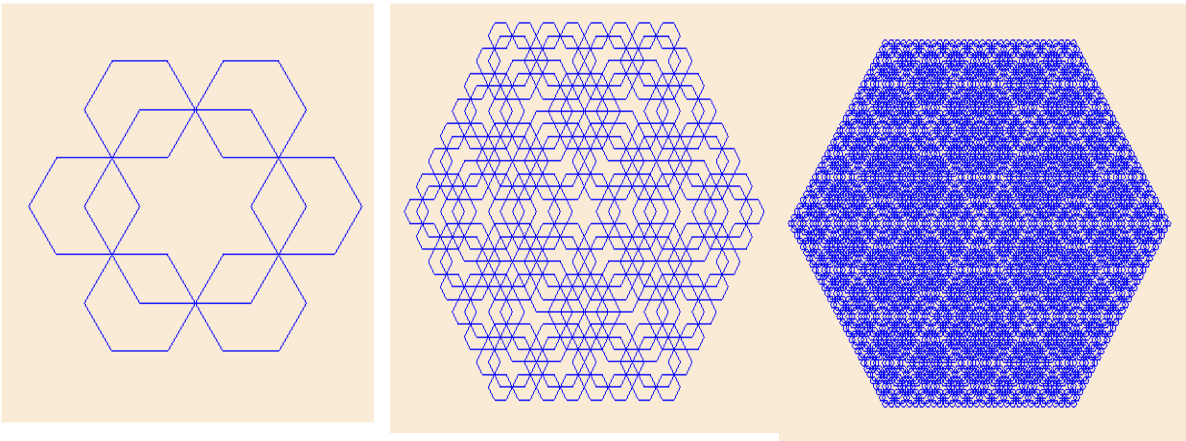
n=2 *n=4* *n=5* *n=6*



4.29-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastrli grafikasi

1-tur oltiburchaklardan iborat fraktallar

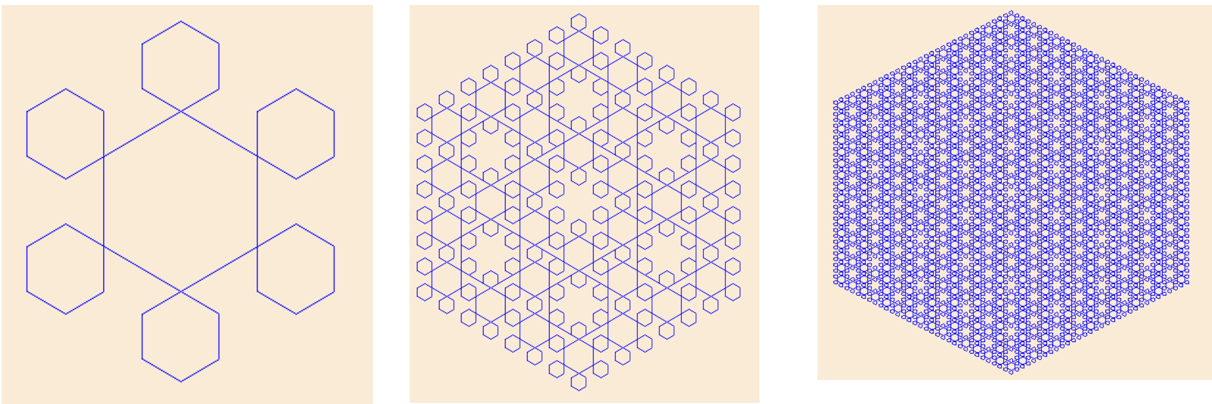
n=2 *n=4* *n=6*



4.30-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

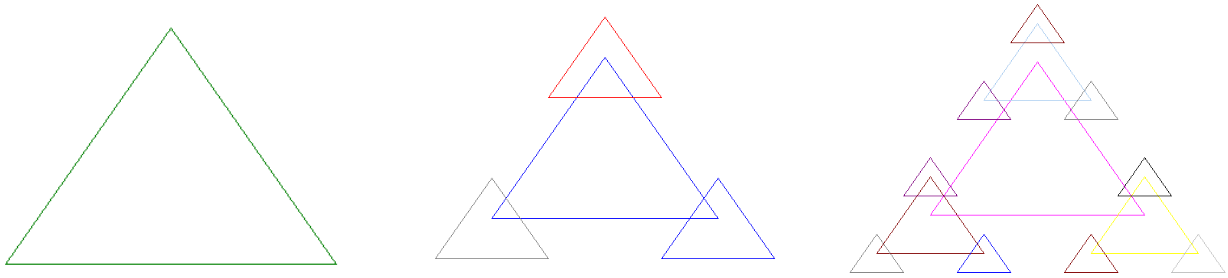
2-tur oltiburchaklardan iborat fraktallar

n=2 *n=4* *n=6*

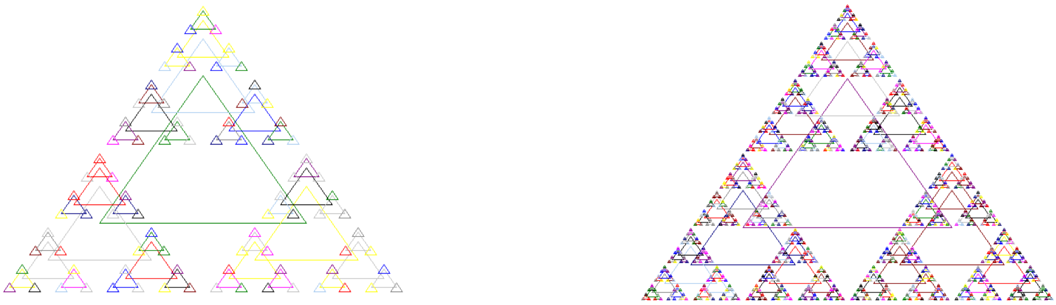


4.31-rasm. n - ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

Muntazam uchburchaklardan iborat 1-tur fraktallar



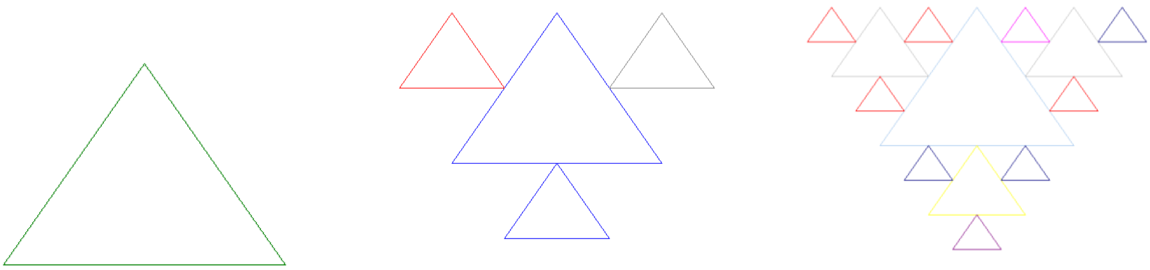
n=1 *n=2* *n=3*



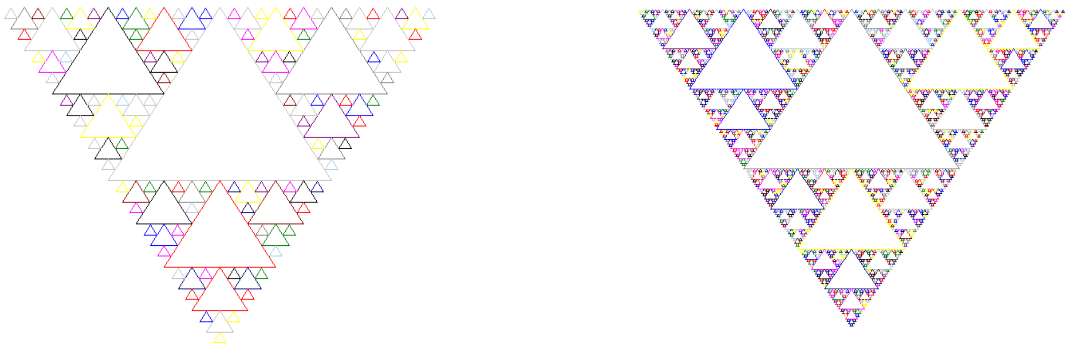
n=5 *n=7*

4.32-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

Muntazam uchburchaklardan iborat 2-tur fraktallar



n=1 *n=2* *n=3*

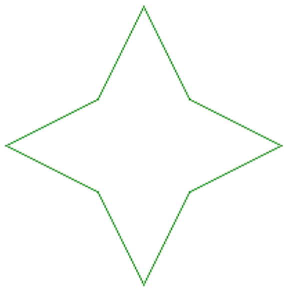


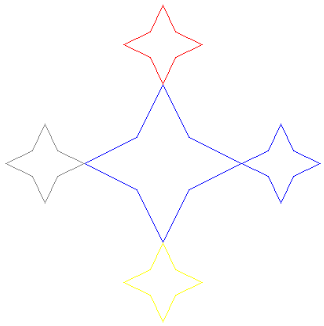
n=5 *n=7*

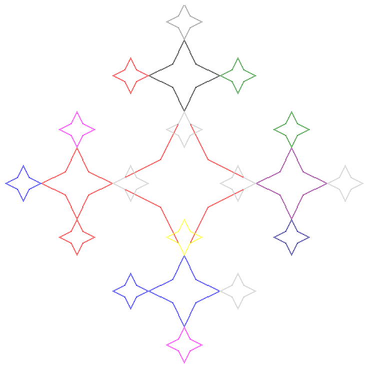
4.33-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

To‘rtqirrali yulduzsimon fraktallar

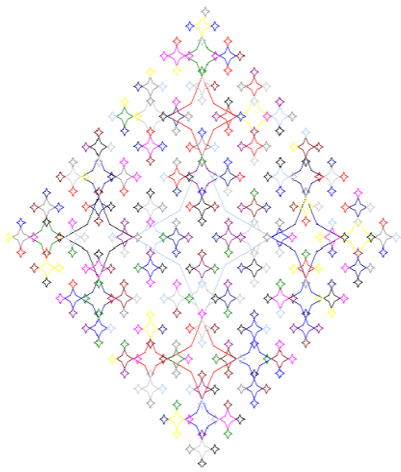
n=1 *n=2* *n=3*

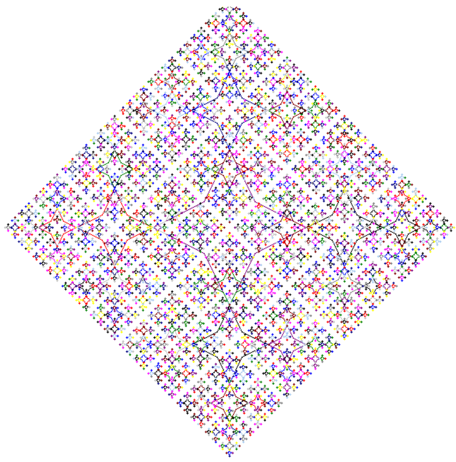






n=5 *n=7*

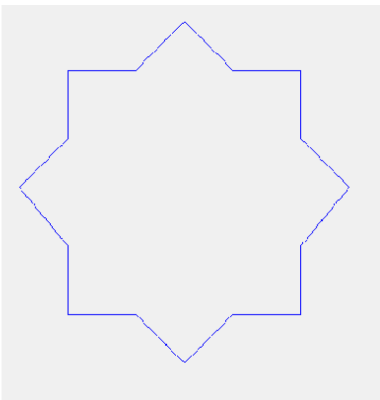


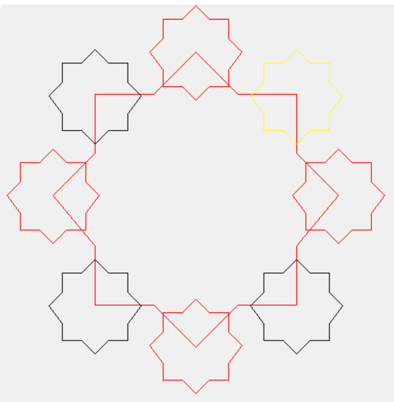


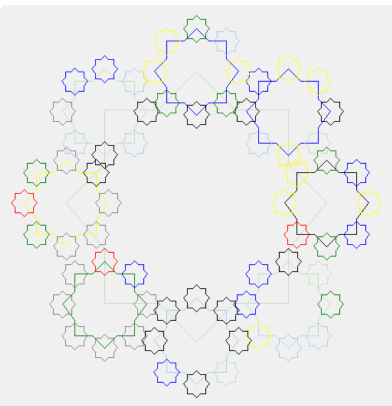
4.34-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

Sakkizqirrali yulduzsimon fraktallar

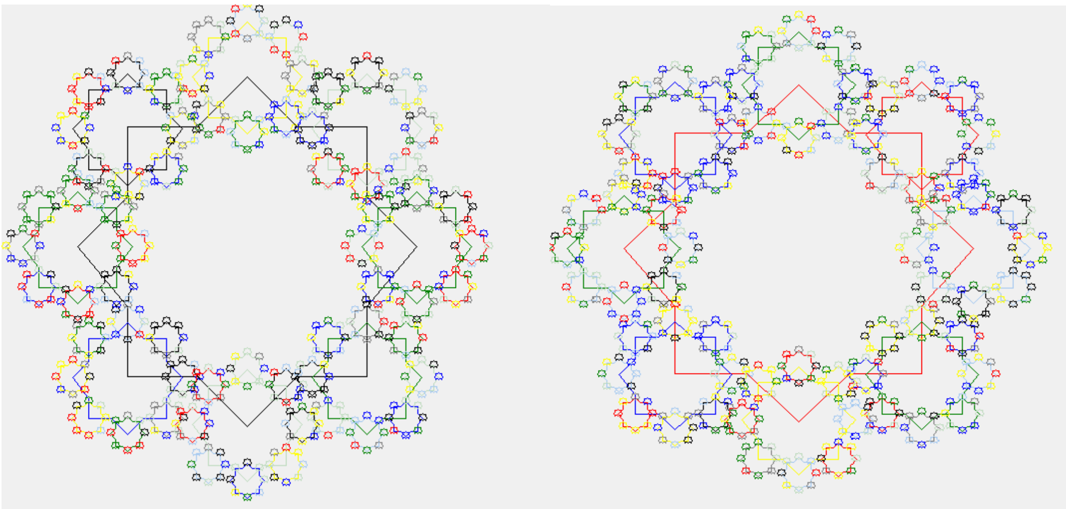
n=1 n=2 n=3





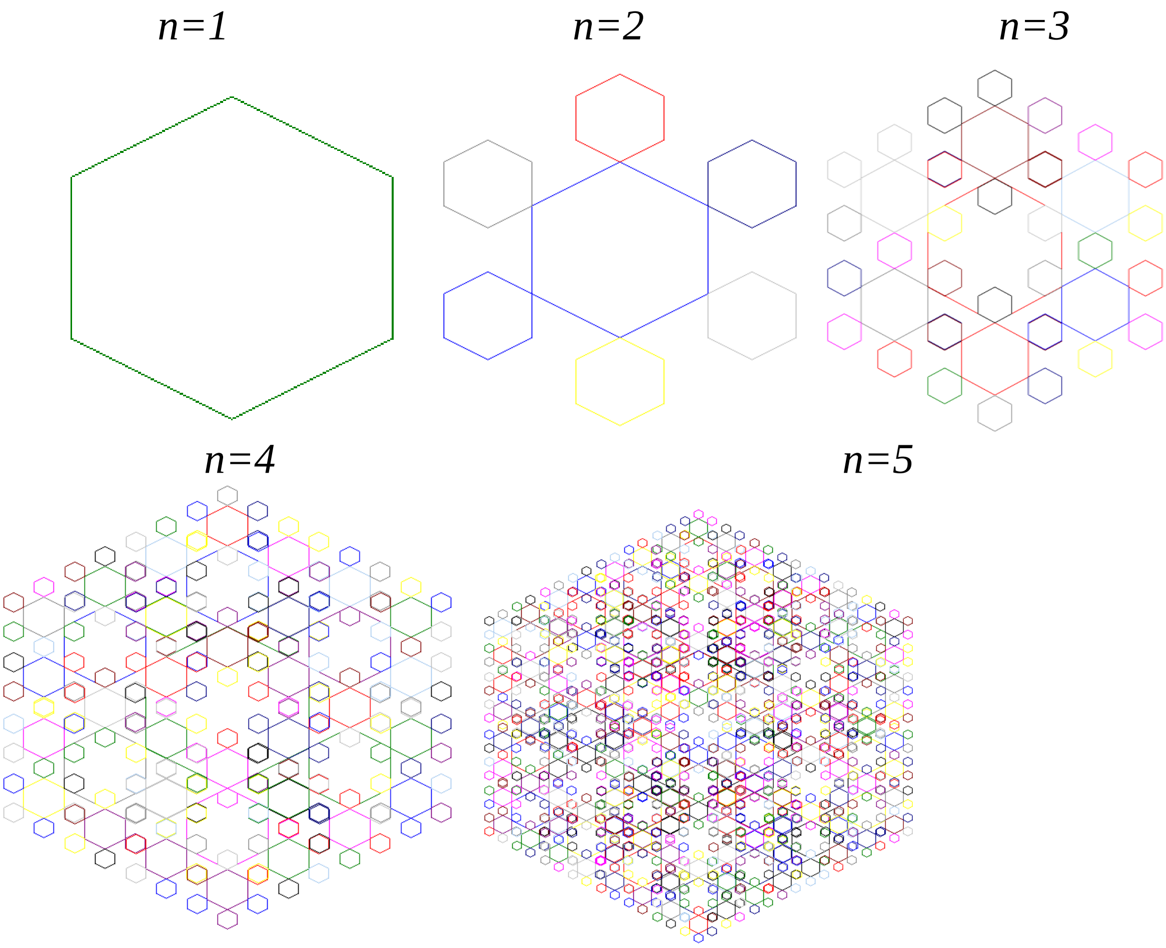


n=5 n=7



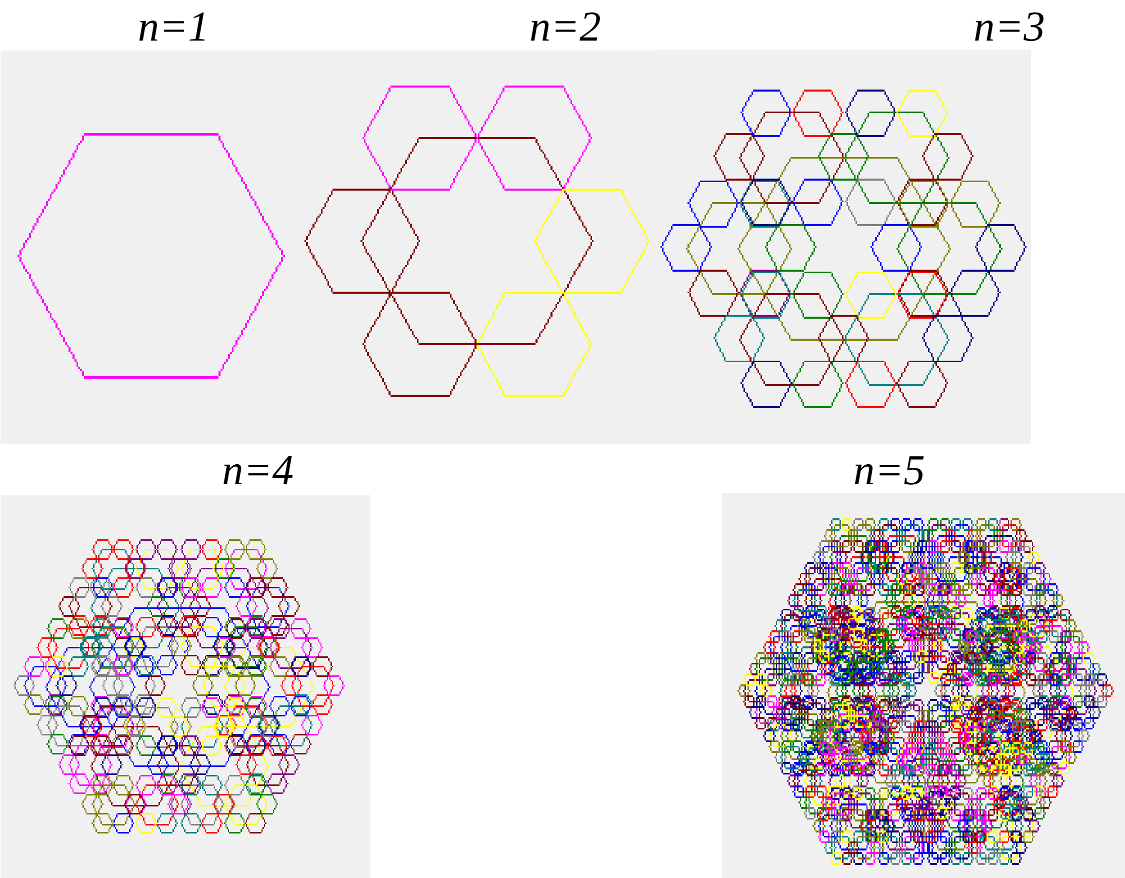
4.35-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

Muntazam oltiburchakli fraktallar(1-tur)



4.36-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

Muntazam oltiburchakli fraktallar (2-tur)



4.38-rasm. n-ning turli qiymatlarida hosil bo‘lgan fraktallarning rastli grafikasi

IV bo‘yicha xulosa

Ushbu bobda geometriyaning asosiy tushunchalari va shakllaridan foydalanib fraktallar uchun geometrik model va rekursiv algoritm ishlab chiqildi. Rekursiyaning turli qiymatlarida, turli ranglarni tanlab, kerakli masshtabda fraktallarni chizish mumkinligi ko‘rsatildi.

V BOB. FRAKTAL HISOB – KITOBLAR

Kitobning mazkur bobida fraktal hisob-kitoblar o‘rganiladi. Fraktal-veyvlet yordamida tibbiy tasvirlarni raqamli ishlash haqidagi ilmiy tushunchalar keltiriladi.

5.1. Fraktal hisob-kitoblar va ularning tadbiqlari

Kasr tartibli differensiallashni matematik tahlil qilish uch asrlik tarixga ega bo‘lib, bu Leybnis va Lopital o‘rtasidagi yozishmalarda birinchi marta qo‘llanilgan. Ya’ni, butun sonli bo‘lmagan hosilalar haqida yozishganlar. Olimlarning 1695 yildagi oxirgi maktubida kasr $f^{\frac{1}{2}}(x)$ tartibli hosilaning imkoniyatlarini muhokama qilib, quyidagi so‘zlarni yozgan: “... Ushbu g‘oyadan vaqt o‘tib, oxir-oqibat foydali natijalar kelib chiqadi” [48].

XIX-asr oxiri va XX-asrning birinchi yarmida matematik tahlilning mustaqil bo‘limi sifatida kasrli natijalarni to‘plash va kasr hisobini shakllantirish davriga aylandi [53]. Shu bilan birga Fure, Laplas, Rimann, Xivisayd, Kuryant, Lyuvil, Grunvald, Abel va shu kabi fiziklar va matematiklarning ilmiy ishlarining nashrlari paydo bo‘ldi. Mashhur rus matematigi A.Letnikov kasr tartibli matematik tahlilning rivojlantirishga katta hissa qo‘shgan. A.Letnikovning 1868-1872 yillarda kasr tartibli hisoblash bo‘yicha birinchi ilmiy maqolalari nashr qilingan [61]. Ilmiy jamoatchilikning kasr tartibli hisoblashga bo‘lgan qiziqishi K.Oldham va J.Spanierlarning 1974 yilda nashr yetilgan “Kasr tartibli hisoblash” deb nomlangan kitobidan so‘ng paydo bo‘ldi. Kitobda kasr tartibli hosilani hisoblash tizimli ravishda keltirilgan va qo‘llash sohalari bayon etilgan. Shu vaqtdan boshlab turli xil ilmiy jurnallarda kasr tartibli hosila va uning tadbiqi, ulardan hisoblashlarda foydalanish haqida maqolalar paydo bo‘la boshladi va tabiatshunoslik, texnika hamda ilm-fanning turli sohalarida qo‘llanila boshladi [62].

Hozirgi vaqtda kasr tartibli hisoblash nazariy hamda amaliy jihatdan qo‘llanilishi jadal rivojlanish bosqichida. Matematik tahlilning an’anaviy hamda fraktal bo‘limi har xil muhitdagi murakkab dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish, sintez, tahlil, diagnostika va yangi boshqaruv tizimlarini yaratishning turli muammolarini hal qilishga imkon beradi [95].

[18] da butun tartibli hosila ta’rifi va tadbiqi keltirilib, kasr tartibli hosila hamda uning tadbiqi misollar yordamida solishtirma tahlil qilinadi.

Funksiya hosilasining ta’rifi. (a, b) intervalda $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lib, (a, b) intervalning biror nuqtasi x_0 bo‘lsin. Bu x_0 nuqtaga Δx orttirma $(\Delta x \neq 0,\ x_0 + \Delta x \in (a, b))$ berib, $y = f(x)$ funksiyaning orttirmasi topiladi [51]:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\ ,$$

ma’lumki, Δx ga funksiya orttirmasi bog‘liq bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

mavjud va chekli bo‘lsa, shu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi, hamda:

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx} \text{ yoki } y'|_{x=x_0}$$

kabi belgilanadi [51].

Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x},$$

agar $x_0 + \Delta x = x$ deb olinsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \to 0$ da $x \to x_0$ bo‘lib,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

hosil bo‘ladi. Bu esa funksiya hosilasini $x \to x_0$ da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

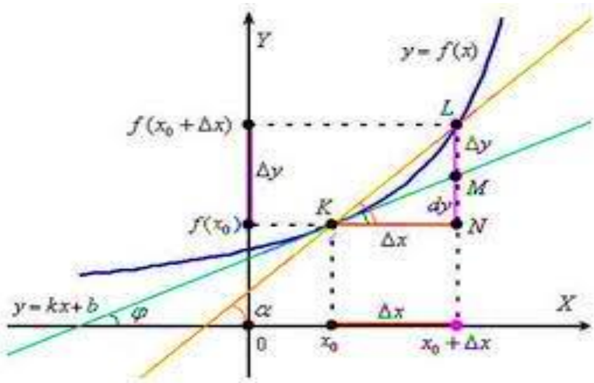
nisbatning limiti sifatida ta’riflash mumkinligini ko‘rsatadi [51].

Hosilaning geometrik ma’nosi. (a, b) intervalda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, x_0 $(x_0 \in (a, b))$ nuqtada $f'(x)$ hosilasi mavjud bo‘lsin [51]. Hosilaning ta’rifiga ko‘ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x},$$

5.1.-rasmda tasvirlangan $y = f(x)$ funksiyaning grafigi L chiziqni ifodalasin [51]. Shu egri chiziqqa $K(x_0,\ f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmasini aniqlash qaraymiz. Ma’lumki, urinma to‘g‘ri chizikdan iborat, to‘g‘ri chizikning tenglamasini topish kerak, buning uchun L nuqtaning koordinatalarini bilish va to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini aniqlash talab etiladi.

Ox o‘qidagi x_0 nuqtaga Δx orttirma berib, $x_0+\Delta x$ nuqta $(x_0+\Delta x \in (a,b))$ tegishli bo‘lsin [51]. Unda egri chiziqning $K(x_0,\ f(x_0))$ va $L(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$ nuqtalari yordamida KL kesuvchi o‘tkaziladi. Ushbu kesuvchining Ox o‘qi bilan hosil qilgan φ burchagi aniqlanadi.



5.1.-rasm. KL kesuvchining x_0 nuqtadagi hosilasin aniqlash

Shu Δx ga $\varphi-$burchak bog‘liq bo‘lib: $\varphi=\varphi(\Delta x)$ K nuqta L chiziq bo‘ylab KL kesuvchining M ga intilganda ya’ni $\Delta x\to 0$ dagi holatini ifodalovchi to‘g‘ri chiziqqa nuqtada o‘tkazilgan urinmasi deyladi. Bunda $\Delta x\to 0$ da $\varphi=\varphi(\Delta x)$ ning limiti aniqlanayotgan urinmaning Ox o‘qi bilan musbat yo‘nalishda tashkil etgan burchakni bildiradi [51]:

$$\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)$$

urinmaning burchak koeffitsienti esa ushbu burchakning tangensiga teng bo‘ladi:

$$tg(\alpha)=k.$$

NKL burchakdan:

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

tengligi aniqlanadi [51]. Bundan esa

$$\varphi(\Delta x)=arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

tenglik yordamida $\Delta x\to 0$ da limitga o‘tiladi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0} arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=arctg\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)=arctgf'(x_0).$$

Demak,

$$\alpha = arctg\, f'(x_0),$$

ushbu tenglik topiladi va quyidagi tenglik

$$f'(x_0)=tg\alpha = k,$$

kelib chiqadi.

Shunga ko‘ra x_0 nuqtadagi hosilasi $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x_0)$ geometrik nuqtai-nazardan K nuqtadagi urinmaning burchak koeffitsientini bildiradi [51].

Bundan ma’lumki urinma tenglamasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

ko‘rinishda aniqlanar ekan. Bundagi x va y koordinatalar urinmaning o‘zgaruvchi nuqtalari hisoblanadi [51].

Hosilaning mexanik ma’nosi shundan iboratki $s=f(x)$ qoida bilan aniqlangan bo‘lsin moddiy nuqtaning xarakati, shunda $s-$ bosib o‘tilgan yo‘l va $t-$ sariflangan vaqt hisoblanadi. Ketgan vaqtning t_0 va $t_0+\Delta t$ teng qiymatlarida $(\Delta t>0)$ $s=f(x)$ funksiyaning qiymatlari $f(t_0)$ hamda $f(t_0+\Delta t)$ larning ayirmasi $f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ va Δt vaqtlar oralig‘ida bosib o‘tilgan Δs yo‘lni bildiradi [13, 51]:

$$\Delta s = f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$$

demak, bundan ma’lumki Δt vaqt oralig‘ida qaralayotgan moddiy nuqta Δs yo‘lni bosib o‘tadi. Shunda $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat orqali moddiy nuqtaning o‘rtacha harakat tezligi aniqlanadi. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ning limiti $\Delta t\to 0$ da qaralayotgan moddiy nuqtaning t_0 vaqtdagi bir ongdagi tezligini ya’ni, oniy tezligini bildiradi va u quyidagiga teng [60]:

$$\vartheta(t_0)=\lim_{t\to 0}(\frac{\Delta s}{\Delta t})=\lim_{t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=f'(t_0)$$

shunga ko‘ra, t_0 nuqtadagi hosilasi $\Delta s=f(t)$ funksiyaning mexanik nuqtai-nazardan qoida asosida xarakat qilayotgan moddiy nuqtaning bir ongdagi oniy tezligini ifodalar ekan.

Yuqorida butun tartibli hosilaga ta’riflar keltirildi. Shu ta’riflar asosida kasr tartibli hosilani keltirib chiqarish [45] da tadqiq qilindi. Kasr tartibli hosilaning matematik tahlilda keng tarqalgan hamda klassik matematik tahlilda qo‘llaniladigan funksiyalar xususan, faktoriallar va eksponent funksiyalarning umumlashtirilishi mavjud bo‘lib, tadqiqot ishida bu funksiyalarni tahlil qilish ularni taqqoslash bilan ko‘rsatilgan.

Kasr tartibli hosilada Koshi formulasi

$$\int dx \int dx \ldots \int f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int (x-t)^{n-1} f(t)dt + P_{n-1}(x)$$

$P_{n-1}(x) - n-1$ tartibli ko‘phad.

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \ldots}\int_a^x f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

$\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$ – ixtiyoriy n tartibli (karrali) intigral. Eyler gamma funksiyasini quyidagicha aniqlash mumkin [51]:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

bu yerda $t -$ixtiyoriy. Gamma funksiyasining argumenti sifatida istalgan sonlardan foydalanish mumkin. Musbat butun $t = n$ uchun gamma funksiyasi faktorial bilan quyidagicha bog‘liq [51]:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$n+1$ tartibli integraldan hosila n tartibli integraldir. $1-\{k\}$ tartibli integraldan hosila $[k]+1$tartibli integraldir, $\{k\}$ – k ning kasr qismi, $[k]$ – k ning butun qismi [51]. k tartibli hosilaning mavjudligi uchun $[k]+1$ tartibli oddiy hosilaning mavjudligi yetarlidir.

Misol. $f(x) = x$.

$n = \frac{1}{2}$ tartibli integral $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} tdt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{x-t}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$

Bu ifodadan birinchi tartibli hosila $f(x) = x$ funksiyaning $\frac{1}{2}$ tartibli hosilasidir [51]. $f^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}.$

Darajali funksiya hosilasi $y = x^n$, $n \in N$,

$$y' = nx^{n-1},$$

$$y^{''}=n(n-1)x^{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}x^{n-2}=\frac{n!}{(n-2)!}x^{n-2},$$

$$k<n \qquad y^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k},$$

$$\alpha<R, \qquad y^{(\alpha)}=\frac{n!}{(n-\alpha)!}x^{n-\alpha},$$

$$D^{1/2}(c)=\frac{0!}{\Gamma\left(0-\frac{1}{2}+1\right)}x^{0-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

O‘zgarmasning hosilasi “0” ga teng emas. Shunday qilib, amaliyotda kasr tartibli Riman-Liuvill hosilasini qo‘llanish muhim kamchilikka ega ekanligini ko‘rsatadi xususan, o‘zgarmas sonning kasr tartibli Riman-Liuvill hosilasi nolga teng emas [51].

L.Eyler “gamma” funksiyani 1729 yil kiritdi. Bu kasr tartibli differensiallash va uning tadbiqlarini keng yoritishda qo‘llanildi.

$$D^{\alpha}(y)=\frac{n!}{\Gamma(n-\alpha+1)}x^{n-1}.$$

$$y=x, \quad n=1, \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

$$D^{1/2}(x)=\frac{1!}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}},$$

$$F(x+1)=x\Gamma(x), \qquad x\in R.$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$D^{1/2}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}.$$

$$y=cx^{0}=c, \; c=const, \quad n=0, \quad \alpha=\frac{1}{2}.$$

Letnikov-Gryunvald ta’rifi esa quyidagicha keltirildi ya’ni [51],

$$f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h},$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)\right]$$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\left[f(x)-3f(x-h)+f(x-2h)-f(x-3h)\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}f(x-jh)$$

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}f(x-jh),\ n\in N,$$

$$\binom{n}{j}=C_n^j=\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$$\alpha\in R\quad f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)^\alpha\sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(x-jh).$$

$$\binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)}.\qquad n=\frac{x-a}{h},\quad \frac{1}{h}=\frac{n}{x-a}$$

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{x-a}\right)^\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)}f\left(x-\frac{j}{n}(x-a)\right)$$

$h=\dfrac{x-a}{n}$ bo‘lganligidan oxirgi ifoda:

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{h}\right)^\alpha\sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(x-jh),\ a<x,$$

kabi yoziladi.

Riman-Liuvill kasr tartibli integrali

$$\binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)},$$

$$\binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-j+1)(\alpha-j)!}{j!(\alpha-j)!}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-j+1)}{j!}$$

endi α manfiy bo‘lsin.

$$\binom{-\alpha}{j}=\frac{-\alpha(-\alpha-1)...(-\alpha-j+1)}{j!}=\frac{(-1)^j(\alpha+j-1)...(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)!}{j!(\alpha-1)!}=$$

$$=\frac{(-1)^j(\alpha+j-1)!}{j!(\alpha-1)!}=\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha+j)}{j!\Gamma(\alpha)},$$

$$f^{(-\alpha)}(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{h}\right)^{-\alpha}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{-\alpha}{j}f(x-jh)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}h^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j(-1)^j\frac{\Gamma(\alpha+j)}{j!\Gamma(\alpha)}f(x-jh)=\lim_{n\to\infty}h^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+j)}{j!\Gamma(\alpha)}f(x-jh),$$

$$f^{(-\alpha)}(x)=\mathrm{I}^{\alpha}(f).$$

Demak,

$$\mathrm{I}^{\alpha}(f)=\lim_{n\to\infty}h^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+j)}{j!\Gamma(\alpha)}f(x-jh)$$

$\alpha=1$ bo‘lsa,

$$\mathrm{I}^{1}(f)=\lim_{n\to\infty}h\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(1+j)}{j!\Gamma(1)}f(x-jh)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}hf(x-jh)=\int_a^x f(t)dt.$$

Bu klassik Riman integralining ta’rifidir. Xuddi shunday

$$\mathrm{I}^{2}(f)=\int_a^x(x-t)f(t)dt,$$

$$\mathrm{I}^{3}(f)=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-t)^2f(t)dt,$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{I}^{n}(f)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt,$$

ixtiyoriy $\alpha\in R$ uchun

$${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}(f)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

bu Riman-Liuvill kasr tartibli integralidir. O‘zgarmas $f=c$ dan integral

$${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}(c)=\frac{c(x-a)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)},\ \alpha=1,\ a=0 \text{ bo‘lsa } {}_a\mathrm{I}_x^{1}(c)=cx.$$

bu to‘g‘ri natija

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\,2}(c)=\frac{cx^2}{2}, $$

bu ham to‘g‘ri natija biroq yuqorida keltirilganidek har doim ham o‘rinli bo‘lmas ekan [51].

Umuman olganda Riman-Liuvill hosilasi kasr tartibli hosilali va

$$ {}_a\mathrm{D}_x^{\,\alpha} f(x)=\frac{d}{dx^n}\ {}_a\mathrm{I}_x^{\,n} f(x)=\frac{d}{dx^n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, $$

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\,n}(c)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, $$

$$ \alpha\in R^{+},\quad n-1<\alpha<n, $$

integralli operatorning bu ta’riflari yagona emas [51]. Integro-differensial operatorlarning Veyl, Grunvald-Letnikov, Kaputo va boshqa ko‘rinishlari ham mavjud.

O‘tkazilgan tahlil shuni ko‘rsatadiki, ta’riflardagi yondashuv Riman-Liuvill integrallari yordamida aniqlanganda bir qator muhim qiyinchiliklarni keltirib chiqarar ekan. Bular, masalan, an’anaviy statistik usullardan foydalanishni imkonsiz ekanligi hamda nostandart xususiyatlarini o‘z ichiga oladi. Shuningdek, kasr operatorlariga o‘tishning o‘zi noaniq ekanligini ta’kidlash joizdir [49]. Kasr hisob nazariyasi jadal rivojlanmoqda integro-differensial operatorlari butun son bo‘lmagan haqiqiy va murakkab qiymatlarni qabul qiladigan, vaqtga yoki boshqa argumentlarga ko‘pincha fazoviy bog‘liq yoki hatto ba’zilariga ko‘ra taqsimlanadigan oddiy va qisman hosilalarda integro-differensial tenglamalarni yechish usullarini ishlab chiqishni boshqarish hamda fraktallar nazariyasiga va butun son bo‘lmagan o‘lchovlarni matematik tahlilini amalga oshirishda qo‘llanilgan [71]. Fraktallar nazariyasida fraktal muhitdagi dinamik jarayonlar hamda dinamik tizimlarga e’tibor kuchaydi, tabiiatshunoslikning asosiy fundamental qonuniyatlari umumlashtirildi, bu esa fraktal mexanika, fraktal elektrodinamika, fraktal kimyo va boshqa fanlarda kasrli o‘lchovlarning qo‘llanilishiga imkon beradi. Nanotexnologiyalar sohasida olingan natijalardan foydalanish radar, gidroakustika, televidenie va telekommunikatsiyalar uchun keng diapazonli antennalarni yaratish shuningdek, yuqori samarali energiya saqlash qurilmalarini sintez qilish yo‘nalishida keng miqiyosda qo‘llanilmoqda [91]. Ikkala holatda ham erishish cheklangan hajmlarda bir o‘lchovli ob’ektlarning juda katta uzunliklarini va ikki o‘lchovli fraktal tuzilmali yuzalar o‘lchovlarini aniqlashda ijobiy natijalarga erishildi. Ushbu g‘oyalarni amalga oshirishga misollar fraktal antennalar va ultrakondensatorlar. Chastota sohasida oldfraktal tizimlarning matematik modellarini o‘rganish muqarrar yo‘l kasr hisoblash apparatidan foydalanishga olib keladi. Fan, texnika, texnologiyaning turli sohalarida jarayonlarning matematik modellarini takomillashtirish identifikatsiyalash va texnik diagnostika muammolarini yangicha shakllantirishga olib keladi [94]. Parametrik identifikatsiya, fraktal tuzulishli, matematik model turi va tizimning tashqi ta’sirlarga reaksiyasi uchun o‘rganilayotgan tizimning noma’lum parametrlarini topishni o‘z ichiga oladi. Integro-differensial operatorlarning butun sonli va o‘zgarmaydigan tartiblarini joriy etish identifikatsiya masalalarini strukturaviy-parametrik masalalarga aylantiradi, chunki matematik modellar tenglamalariga kiritilgan integral va hosilalarning butun son bo‘lmagan tartiblari bilan bog‘liq bo‘lgan tizimning boshqa erkinlik darajasi paydo bo‘ladi [91]. Kasr hisob va uning matematik tahlili keng miqiyosda qo‘llanilmoqda.

5.2. Fraktal-veyvlet yordamida tibbiy tasvirlarni raqamli ishlash

Tibbiy tasvirlarni raqamli ishlashda fraktal tahlilni qo‘llash [24] tadqiqot ishida batafsil tavsiflangan. Tibbiy tasvirlarini raqamli ishlashda tasvirlarni hosil qilayotgan signallar muhim ahamiyatga ega bo‘lib, tasvirlarni hosil qilishda signalning yaqinlashish funksiyasini ikki guruhga bo‘lishdir:

- funksiya grafigi vaqt o‘tishi bilan yaqinlashishi;
- qisqa vaqt ichida yaqinlashishi.

Raqamli signallarni qayta ishlashning yangi yo‘nalishi bo‘lgan fraktal-veyvlet usuli real vaqtda signallarni tahlil qilishning vaqt va chastotasini bog‘lagan holda ham amalga oshirish imkonini berdi. Signallarni tahlil qilishning klassik usuli – Fure qatori bo‘lib, u asosida signalning amplituda-faza chastotasi xususiyatlarini aniqlash mumkin [26]. Uning umumiy ko‘rinishi quyidagi formulada keltirilgan:

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Fure almashtirishi vaqt momentida ortogonal bazis funksiyalari ya'ni sinusoida va kosinusoida bo'yicha berilgan signalni ifodalaydi. Fure almashtirishining natijasi amplituda-chastota spektridir, bu o'rganilayotgan signalda ma'lum bir chastota mavjudligini aniqlash uchun ishlatiladi. Fure almashtirishining kamchiliklari shundaki, chastota o'zgaruvchilarini o'z vaqtida o'zgartirish mumkin emas [24], bu esa ushbu usulni imkoniyatini cheklaydi.

Vaqt oralig'ida signallarning chastota parametrlarining o'zgarishi dinamikasini hisobga olmaganda Fure usuli aniq natijalar beradi. Ammo chastotaning mavjudligi uchun vaqt oralig'ini aniqlash kerak bo'lsa, boshqa usullarni qo'llash afzal bo'ladi. Signallarni tahlil qilishda bir vaqtning o'zida yuqori aniqlik bilan vaqt va chastotani aniqlash mumkin emas, ya'ni:

$$\Delta f \cdot t \geq 1.$$

bunda Δf va t chastota va vaqt bo'yicha farqlanishni ifodalaydi. Agar chastota qiymati yuqori aniqlik bilan aniqlansa [24], u holda chastotaga nisbatan kam aniqlik bilan baholanadi va aksincha. Natijada bir vaqtning o'zida signalni hosil qiluvchi chastotasi va uning paydo bo'lish vaqtini yuqori aniqlik bilan o'lchash murakkab bo'lishi mumkin. Agar signal yuqori chastota bilan hosil qilingan bo'lib, ular vaqt sohasida uzoq davomiyli tashkil etuvchilarga juda ham yaqin joylashsa va turli onlar (vaqtlar)da hosil bo'lsa yuz berishi mumkin. Bunday signallar davriy bo'linadi. Shu sababli, chastota-vaqt tahlilining umumiy muammosini yechish uchun Veyvlet almashtirishdan foydalaniladi. Veyvlet almashtirishdan signallarni filtrlashda, shovqinlarni yo'qotishda va ularning taqsimlanishini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Veyvlet almashtirishida signal qiymati darajasi ko'rsatkichida mavhum koeffitsient bo'lsa va argument garmonik shaklda bo'lib chastotaga bog'liq bo'lmasa, ya'ni sinusoidal tashkil etuvchi bo'lmasa, veyvlet funksiyalardan foydalaniladi [24]. Hamma veyvlet almashtirishlar veyvlet funksiyasi yordamida hosil qilinadi. Veyvlet almashtirishini qo'llashda veyvlet funksiyasining bir qator ba'zi xossalardan foydalaniladi. Masalan, veyvlet funksiya tebranishlar shaklida bo'lib, doimiy tashkil etuvchisi bo'lmasligi kerak, kichik vaqt ichida nolga teng qiymatgacha kichiklashishi va, aksincha, kichik vaqt oralig'ida o'zining eng kata qiymatiga ega bo'lishi kerak. Bu xususiyat veyvlet almashtirishining bir qiymatli bo'lishiga kafolat beradi. Shuning uchun fraktal-veyvlet [42, 47, 102] bunday kamchiliklarga ega emas - ixtiyoriy vaqtda istalgan chastotani lokalizatsiya qilish mumkin. Shu sababli, hozirgi vaqtda fraktal-veyvlet tahlili nostatsionar signallarni real vaqt momentida oʻrganish uchun optimal usul hisoblanadi.

Fraktal-veyvlet usuli asosan nostatsionar signallar, funksiyalarni tahlil qilish va qayta ishlashda qoʻllaniladi. Fraktal-veyvlet nafaqat signalning umumiy chastotasi (signal energiyasini chastota komponentlari boʻyicha taqsimlashi), balki signalning chastota komponentlarining koordinatalar toʻgʻrisidagi maʼlumotlarni ham oʻz ichiga olishi kerak.

Tibbiy tasvirlarini raqamli ishlash uchun tasvirlarni hosil qilayotgan signallarni tahlil qilish kerak, buning uchun fraktal-veyvlet usulidan foydalanish samaralidir. Signal siqish, choʻzish va siljish funksiyalari orqali hosil qilinadi. Bunday funksiya fraktal-veyvlet deb ataladi [24, 25]. Signalni fraktal-veyvlet funksiyasi bilan tekshirish signalning xususiyatlarini ajratib koʻrsatishga imkon beradi. Bir oʻlchovli signallarning veyvlet oʻzgarishi ikki oʻlchovli chastota va koordinata oʻzgaruvchilar sifatida qabul qilinadi, bu esa bir vaqtning oʻzida ikki oʻzgaruvchi funksiya signallarni tahlil qilish imkonini beradi. Bundan tashqari, veyvletlarni Fure almashtirishi bilan solishtirganda, veyvletlar birinchi turdagi uzilishlargacha signallarni shumsiz, toʻsiqsiz yuqori aniqlik bilan aniqlashga imkon beradi [44]. Nostotsionar signallarni tahlil qilishda aniqliligi yuqori boʻlgani uchun fraktal-veyvlet, Fure oʻzgartirishiga nisbatdan optimaldir.

Maʼlumki [38, 44] veyvlet oʻzgartirish algoritmi fraktal xususiyatga ega. Signallarni tahlil qilish uchun fraktal-veyvletlardan foydalanish gʻoyasi shundan iboratki, signal nuqtalar hosil qiladi, nuqtalarni tutashtirish natijasida funksiya grafigi hosil boʻladi. Bu funksiya fraktal tasvirni hosil qilsa (yaʼni, oʻz-oʻziga oʻxshashlik asosida asil tasvirni hosil qilsa), bunday hollarda signallarga fraktal-veyvletni qoʻllab keyingi vaqt momentidagi tibbiy tasvirni hosil qilish mumkin va bu asosida inson tanasida oʻzgarishi mumkin boʻlgan xususiyatlarni aniqlash imkonini beradi.

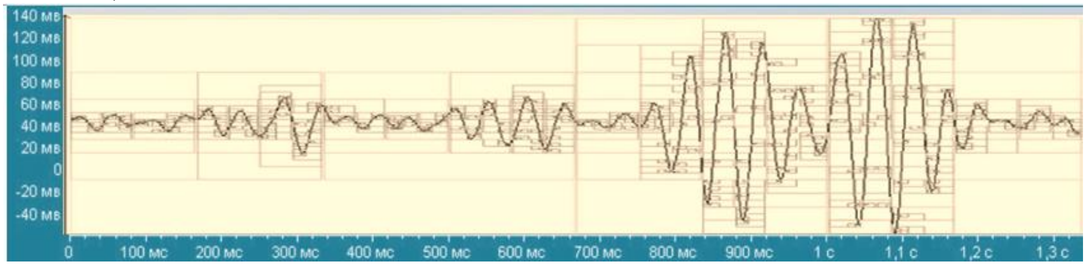
Veyvlet funksiyasi masshtablash, koeffitsientlarni aniqlash kabi algoritm asosida ishlaydi [68].

Fraktal signallarni tahlil qilishning umumiy algoritmi:

1: dastlab kirish maʼlumotlarni ixtiyoriy olinadi;

2: baʼzi transformatsiyalar qoʻllaniladi (tasvirni qirqish, siqish, choʻzish);

3: *Ox* o‘qida vaqtlarning o‘zgarishi *ms* (mikrosekund)larda ifodalanadi;



5.2-rasm. Dastlabki kirish parametrlari: D=92.0, s=0.11, t=0.75, n=315, h_z=0.5 mm

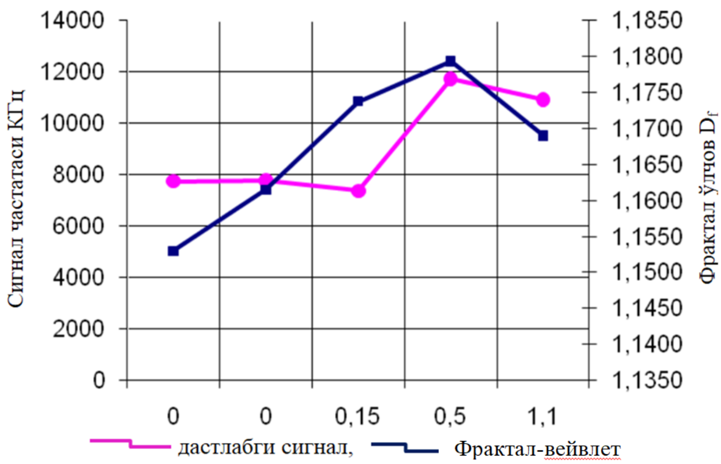
4: vaqt oralig‘ining har bir nuqtasida dastlabki o‘xshashlik koeffitsientlari qidiriladi (odatda eng kichik kvadratlar usuli bilan);

5: boshlang‘ich qism sifatida keyingi vaqt oralig‘i olinadi va algoritm birinchi nuqtadan takrorlanadi;

6: natijada o‘xshashlik koeffitsientlari topiladi va shu bilan o‘xshashlik oraliqlar uning fraktal xossalarini vaqt qatorlari bo‘yicha har bir nuqtasida takrorlanadi.

Shuni ta’kidlash joizki, fraktal-veyvlet tahlil algoritmlari ma’lumotlarni siqish uchun ham samarali usul hisoblanadi, chunki fraktal-veyvlet o‘zgartirish koeffitsientlari kirish ma’lumotlardan bir necha marta kichikroqdir [24].

5.2-rasmda fraktal-veyvlet tahlil yordamida skalogrammalarda butun chastota spektridagi komponentlar aniq ajratilganligi, hamda signal davriyligi aniq ko‘rsatilgan.



5.3-rasm. Signal chastotasining fraktal o‘lchovga bog‘liqligi

5.3-rasmda signal chastotasining fraktal o‘lchovga bog‘liqligi va tebranishlar vizual tasviriga mos kelishi ko‘rsatilgan [100]. Signal takrorlanishi chastota spektrining o‘rta qismida takrorlanadi.

XULOSA

Ushbu monografiyadagi asosiy natijalar quyidagilar:

Fraktallar nazariyasining asosiy tushunchalari fraktallarning tarixi, ta’riflari, xususiyatlari, turlari, qo‘llanish sohalari o‘rganildi va tadqiq qilindi.

Fraktallarni qurish usullari, ularning tavsifi, qo‘llanilish holatlari o‘rganildi, ba’zi klassik va zamonaviy fraktallar uchun matematik formulalar qurildi natijalar olinib rasmlari keltirildi.

Geometrik shakllar va ularning asosiy tushunchalaridan foydalanib fraktallar uchun matematik ta’minot ishlab chiqildi.

Olingan natijalardan foydalanish mumkin:

radiotexnikada - fraktallar antennalarda, antennali qurilmalarni loyihalashda;

kompyuter grafikasida - tabiatda mavjud tabiiy rasmlarni chizish, rasmlarni fraktal qisishda;

yengil sanoatda - gazlama va gilamlarga zamonaviy dizaynlar uchun naqshlar chizishda;

telekommunikatsiyada - signallarni qayta ishlashda;

axborot xavfsizligi sohasi - xususan kriptografiyada;

kino hamda televideniyada maxsus effektlar va vizualizatsiya elementlari sifatida va h.k.

Mantiq algebrasi, R-funksiya nazariyasi va arifmetik xususiyatlar nazariyasi usullari bo‘yicha olib borilgan nazariy tadqiqotlar gazlama va gilam buyumlarning rangli dizaynini zamonaviylashtirishning algoritmik muhitini ishlab chiqishda xizmat qiladi.

O‘z navbatida mamlakatimizda yetishtiriladigan katta hajmdagi paxta va pilla, hamda ularning tolalaridan gazlamalar ishlab chiqish dolzarb hisoblanadi. Tayyorlangan gazlamaning sifati, ularga tushirilgan naqshlarning yetarli darajada chiroyli bo‘lishi mijozni qiziqtiradi. Bundan tashqari gazlamaning narxini aniqlashda gullarning ranglari alohida o‘rin egallaydi.

GLOSSARIY

Fraktal - bu geometrik shakl bo‘lib, aniq bir qismi o‘lchamlari o‘zgargan holda qayta-qayta takrorlanishidir.

Fraktal so‘zi lotincha “fractus” so‘zidan olingan bo‘lib, “bo‘laklangan”, “qismlardan tashkil topgan” degan ma’noni anglatadi va u “fraction, fractional” (bo‘luv, bo‘linma) terminlaridan kelib chiqqan.

Fraktal - bu geometrik fraktal bo‘lib, qismlardan tashkil topgan hamda ularning har biri butun fraktalning nusxasini kichiklashtirgan holatini ifodalaydi.

Fraktal - aniq bir qism o‘lchamini o‘zgartirgan holda qayta va qayta takrorlovchi geometrik shakldir.

Fraktal - qismlardan tashkil topgan, qaysidir ma’noda to‘laligicha o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishdir.

Fraktal - bu singan fazoviy shakl, tekis yoki notekis, xaotik yoki botartib va o‘ziga-o‘zini turli mashstabda takrorlaydigan murakkab tuzilish hisoblanadi.

Fraktal masshtabiga bog‘liq bo‘lmagan tasvirlarning o‘ziga-o‘zi o‘xshash tuzilishlaridir.

Fraktal - Xausdorf o‘lchami topologik o‘lchamidan qat’iy katta bo‘lgan to‘plam.

Fraktal - nobutun o‘lchamli, o‘ziga-o‘zi o‘xshash to‘plamlar va cheksiz o‘ziga-o‘zi o‘xshash shakllardir, o‘lchami kasriy to‘plamdir. Bunday ta’riflardan yana bir nechtasini keltirish mumkin.

Fraktallarning matematik ta’rifi. Fraktallar cheksiz rekursiv jarayonlar natijasida ifodalangan funksional yoki hosil bo‘luvchi to‘plam va quyidagi xususiyatlarga ega:

– o‘ziga-o‘zi o‘xshash yoki masshtabning invariantligi (cheksiz skeyling), ya’ni kichik masshtabda va o‘rta masshtabda xuddi katta masshtabdagi kabi ko‘rinadi;

– kasrli o‘lchami (Xausdorf o‘lchami) topologik o‘lchamidan qat’iy katta;

– differensiallanmaydi va kasrli ko‘paytmalar hamda integrallarda aniqlashtiriladi.

Fraktallarning fizik ta’rifi. Fraktallar - kuchli qirqilgan tuzilishni ifodalovchi hamda chegaralangan masshtabda o‘ziga-o‘zi o‘xshash xususiyatini egallovchi geometrik ob’ektlar (chiziq, sirt, jism)dir.

O‘ziga-o‘zi o‘xshashlik. Eng oddiy holatda fraktallarning katta bo‘lmagan qismi ular haqidagi barcha axborotlarni o‘zida saqlaydi.

Kasriylik. Fraktallarning kasriyligi fraktallar noto‘g‘riligining o‘lchamini matematik ifodalash deyiladi.

Nomuntazamlik. Agar fraktal funksiya ta’riflangan bo‘lsa matematika terminlarida nomuntazam funksiya hech bir nuqtada tekis emas va differensiallanmaydi.

Fraktal o‘lchov tushunchasi. B. Mandelbrot butun bo‘lmagan o‘lchov 2.76 ni fraktal o‘lchov deb nomladi.

dim topologik o‘lchovi. Agar har bir $x \in X\,(\forall x \in X)$ nuqta U_i to‘plamlarning hech bo‘lmaganda birortasiga tegishli ya’ni $\forall x \in X\ \exists U_i \in \{U_i\} \big| x \in U_i$ bo‘lsa, X topologik fazo $\{U_i\}$ qism to‘plamlar tizimining qobig‘i deyiladi.

d_H Xausdorf o‘lchovi (yoki fraktal o‘lchov). Ma’lumki nuqtaning o‘lchovi “0” ga, kesma, aylana, umuman olganda tekislikdagi yoki fazodagi ixtiyoriy egri chiziqning o ‘lchovi “1” ga, doira, sferaning o‘lchovi “2” ga, jismlarning o‘lchovi esa “3” ga tengdir. Barcha keltirilgan misollarda o‘lchov qaralayotgan ob’ektda nuqtani belgilash zarur bo‘lgan bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar soniga tengdir.

d_M ***Minkovskiy o‘lchovi***. Minkovskiy o‘lchovi, Xausdorf - Bezikovich o‘lchovi bilan o‘xshash va amaliy masalalarni yechishda juda qulay hisoblanadi.

Geometrik fraktallar - bu turdagi Kox triad egri chizig‘i, Levi egri chizig‘i, Gilbert egri chizig‘i, Xartera-Xeytueya ajdari nomli siniq chiziqlar, Kontor to‘plami, Serpin uchburchagi, Serpin gilami, Pifagor daraxti va hokazo kabi fraktallar guruhi eng ko‘rgazmali hisoblanadi.

Odatda bu turdagi fraktallarni qurish uchun ma’lum ***“kesma–aksioma–bo‘laklar yig‘indisi”*** kabi qoida o‘rinli.

Algebraik fraktallar - fraktallarning yana bir katta guruhidir. Ular o‘z nomlariga oddiy algebraik formulalarga asosan qurilgani uchun ega bo‘lgan. Ularni nochiziq jarayonlar yordami bilan n-o‘lchovli fazolarda hosil qilinadi. Ma’lumki, nochiziq dinamik tizimlar bir necha barqaror holatlarni o‘zida mujassamlashtiradi. Bulardan bittasi, bir necha takrorlashlar sonidan keyin boshlang‘ich shartga bog‘liq bo‘lib qoladi.

Stoxastik fraktallar - eng taniqli fraktallar guruhi hisoblanadi. Ular iteratsion jarayonda to‘satdan birorta parametrni o‘zgartirishi holatidan paydo bo‘ladi. “Stoxostik” termini grek so‘zidan kelib chiqqan bo‘lib, “faraz” (tasavvur)ni anglatadi.

Qo'l-ijodiy fraktallar - olimlar tomonidan oʻylab topilgan va ixtiyoriy masshtabda fraktallar xususiyatlarini oʻzida namoyon etadigan fraktallar.

Tabiiy fraktallar - mavjudlik sohasida chegaraga ega fraktallar.

Multifractal - bu fraktalning umumlashtirilishi, uning tavsifi uchun bitta o'lchov etarli emas. Buning o'rniga o'lchovlar spektri talab qilinadi.

Fraktal grafikalar - bu kompyuter grafikalarining bir turi. Fraktal grafikaning matematik asosini fraktal geometriya tashkil etadi. Tasvirlarni qurish usuli meros qilib olingan ob'ektlarning geometrik xususiyatlarini "ota-onalar" deb ataladigan meros prinsipiga asoslanadi.

Fraktal oʻlchov - bu metrik fazodagi toʻplam hajmini aniqlash usullaridan biridir.

Paskal uchburchagi - uchburchak shaklga ega boʻlgan binomial koeffisientlarning cheksiz jadvali. Ushbu uchburchakda tepada va yon tomonlarda "1" raqamlari joylashgan. Har bir raqam yuqoridagi ikkita raqamning yigʻindisiga teng.

Serpin uchburchagi - fraktal, Kantor toʻplamining ikki oʻlchovli analoglaridan biri, uning matematik tavsifi 1915 yilda polshalik matematik Vatslav Serpinski tomonidan nashr etilgan. ***Serpin salfetkasi*** deb ham ataladi.

Kox egri chizig'i - 1904 yilda shved matematikasi Xelge fon Kox tomonidan tasvirlangan fraktal egri chiziq. Muntazam uchburchakning yon tomonlariga chizilgan Kox egri chizigʻining uchta nusxasi (tashqi tomonga qarab) cheksiz uzunlikdagi yopiq egri chiziqni hosil qiladi, bu Kox qor parchasi deb nomlanadi.

Gosper egri chizig'i - yoki kashfiyotchi Bill Gosper nomidagi Peano-Gosper egri chizigʻi boʻshliqni toʻldiruvchi egri chiziqdir. Bu ajdaho va Gilbert egri chiziqlariga oʻxshash fraktal egri chiziq.

Gilbert egri chizig'i - bu birinchi boʻlib nemis matematikasi Devid Xilbert tomonidan 1891 yilda boʻshliqni toʻldiruvchi Peano egri chiziqlarining bir varianti sifatida ta'riflagan uzluksiz fraktal boʻshliqni toʻldirish egri chizigʻi.

Nyuton havzalari - Nyuton fraktallari algebraik fraktallarning bir turi. Fraktal chegaralari boʻlgan maydonlar chiziqli boʻlmagan tenglamaning ildizlari taxminan Nyuton algoritmi bilan kompleks tekislikda topilganda paydo boʻladi.

Menger gubkasi - Serpin gilamining uch oʻlchovli analoglaridan biri boʻlgan geometrik fraktal. Kub qirrasi 1 bilan qirralariga parallel tekisliklar tomonidan 27 ta teng kubga boʻlinadi. Markaziy kub va unga bo‘linadigan ushbu bo‘linmaning barcha kublari ikki o‘lchovli yuzlarda olib tashlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Абу Айаш Т.А. Разработка метода фрактального сжатия видеопотоков в автоматизированных системах управления хирургическими операциями // Автореф. дис. канд.т.н. – Одесса, 2005. 19с.

2. Азевич А.И. Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе. 2005. № 4. С. 76-78.

3. Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржонов М.О. Фракталы и метод системы итерируемых функций // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент. 2012 , вып 127. С. 75-86.

4. Анарова Ш.А., Умарова Г.Э. Фракталлар назариясининг асосий тушунчалари // Ҳисоблаш ва амалий математика масалалари, илмий изланишлар тўплами. Тошкент, 2012, №128, 155-166 б.

5. Анарова Ш.А., Рустамова М.Я., Умарова Г.Э. Фракталлар ва уларни қуриш технологиялари //Ҳисоблаш ва амалий математика масалалари, илмий изланишлар тўплами. Тошкент, 2014 №131, 103-112 б.

6. Анарова Ш.А., Мулламуҳамедова М.А. Айланалардан иборат фракталларни қуриш алгоритми // Материалы международная научная конференция «Радиоэлектроника, информационные и телекоммуникационные технологии: проблемы и развитие».Ташкент**,** 21–22 мая 2015. С.187-189.

7. Анарова Ш.А., Эшқораева Н.Г., Хайдарова Л.Ў., Султонов Д.У. Юлдузсимон фракталларни қуришнинг геометрик моделлари ва алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2016 №1(37). 40-43 б.

8. Анарова Ш.А., Ганихаджаева Д., Султонов Д.У. Мунтазам олтибурчаклардан иборат фракталларни қуриш алгоритмлари // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении» Джизак**,** 13–14 сентября 2016. С.41-44.

9. Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М., Миргазиев Ж.У. Учбурчакли фракталларни қуришни математик таъминотини ишлаб чиқиш // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении»Ташкент, 5–6 сентября 2017. С.98-101.

10. Балханов В.К. Моделирование математических и электрических характеристик физико-технических сред фрактальном методом //Автореферат., дис… канд.т.н. Улан-Удэ, 20 с.

11. Балханов В.К. Основы фрактального исчисления. Дельта реки Селенга // Горный информационно-аналитический бюллетень, 2003. №5. С. 21-25.

12. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. Отв. ред. Ю.Б. Башкуев. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. – 224 с.

13. Бирючинская Т.Я. Моделирование фрактальных структур в задачах многомерной классификации // Автореф. дис… канд.ф.-м.н. Воронеж, 2013, 18с.

14. Бондаренко Б.А. Обобщенные треугольники Паскаля, их фрактали, графы и приложения. -Ташкент: Фан, 1990. 192 с.

15. Bondarenko B.A. Generalized Pascal Triangles and Pyramids, their Fractals, Graphs, and Applications – USA, Santa Clara: Fibonacci Associations, The Third Edition. – 2010. – 296 p.

16. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоану //Автоматика и телемеханика. - Моква, 1994.-№5. С.12-20.

17. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – М.: Ижевск: РХД, 2001.

18. Велигоша Д.А. Разработка метода фрактального сжатия графической информации в системах обработки данных // Автореф. дис… канд.т.н. – Ставрополь, 2012. 22 с.

19. Винокуров С.В. Математическое и программное обеспечение методов повышения временной эффективности фрактального сжатия изображений // Дисс…канд.ф.-м. наук.
- Москва, 2007. 126 с.

20. Вирт Н. Алгоритм и структура данных. // Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. Спб.: Невский Диалект, 2001. -302 с.

21. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике //Computerworld-Россия.-1995.-№15.-С.11.

22. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств // Соросовский образовательный журнал. – Москва, 1998. №1, -С.122-127.

23. Голоденко А.Б. Оценка адекватности фрактальной модели атомной структуры аморфного кремния// Физика и техника полупроводников, 2010, том 44, вып. 1. С. 87-91.

24. Голощапов И.В. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел их компьютерная реализация и приложение // Магистр. дис. 2014, 88 с.

25. Громов Ю.Ю., Земской Н.А., Иванова О.Г., Лагутин А.В., Тютюнник В.М. Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях // Учеб. пособие. – 2-е изд., стереотип. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.

25. Дубовиков М.М, Старченко Н.В. Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур //УФН. 2007. №5. -С. 34−39.

26. Иванов А.В., Короновский А.А., Минюхин И.М., Яшков И.А. Определение фрактальной размерности овражно-балочный сети города Саратова. Изв. вузов. «ПНД». Т.14. №2 С. 64-74.

27. Кальмиков А.В., Кальмиков Л.В., Кешелова А.В. Несколько новых биоподобных L-систем // - МКО-10, 2002, стр.50-63.

28. Кравченко В.Ф., Басариб М.А. Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R-функций // Москва:. ЖТФ, 2003, том 29, вып.№24 стр.89-94.

29. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах // – М.: Постмаркет, 2000.

30. Крупенин С.В. Фрактальные излучающие структуры и аналоговая модель фрактального импеданса // Автореф. дисс… канд.ф.-м.н. – Москва, 2009.

31. Леготкин Р.Л. Исследование методов фрактального анализа для целей тематического дешифрирования аэрофотоизображений // Автореф. дис… канд.т.н. – Москва, 2002.

32. Максименко-Шейко К.В., Толок А.В., Шейко Т.И. R-функции в фрактальной геометрии // Информационные технологии. М.: Издательство "Новые технологии", 2011. № 7. С.24-27.

33. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей // Харьков: ИПМаш НАН Украина, 2009. 306 с.

34. *Mandelbrot B.B.* Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension.- Paris: Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995; *Mandelbrot B.B.* Fractals: Forme, Chance and Dimension. - San - Francisco:

Freeman, 1977. - 365 p.; *Mandelbrot B.B.* The Fractals Geometry of Nature. – N.Y.: Freeman, 1982. - 468 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.); *Mandelbrot B.B.* Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. – N.Y.: Springer-Verlag, 1997. - 551 p.; *Mandelbrot B.B.* Fractales, Hasard et Finance (1959-1997). – Paris: Flammarion, 1997. - 246 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Пер. с фр. *В.В. Шуликовской*. - М.: Эдиториал УРСС, 2004. - 256 с.); *Mandelbrot B.B.* Multifractals and 1/*f* Noise: Wild Self – Affinity in Physics. – N.Y.: Springer-Verlag, 1999. - 442 p.; *Mandelbrot B.B.* Gaussian Self – Affinity and Fractals: Globality, the Earth, 1/*f*, and *R*/*S*. – N. Y.: Springer-Verlag, 2002. - 654 p.; *Mandelbrot B.B., M.L. Frame.* Fractals, Graphics, and Mathematics Education. – N.Y.: Springer-Verlag, 2002; *Mandelbrot B.B.* Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. – N.Y.: Springer-Verlag, 2004. - 308 p.; *Mandelbrot B.B., Hudson R.L.* The (mis) Behavior of Markets. – N.Y.: Basic Books, 2004. - 328 p. (Рус. пер.: *Мандельброт Б., Хадсон Р.Л.* (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах. - М.: Вильямс, 2006. - 400 с.).

35. Масюк В.М. Компьютерное моделирование физических процессов на основе нового класса атомарных и фрактальных функций в теории антенн // Автореф. дис… канд.ф.-м.н. – Москва, 2004.

36. Матвеев Е.Н. Многодиапазонные и широкополосные свойства фрактальных антенн и частотно-избирательных структур на их основе // Автореф. дис... канд.ф.-м.н. - Москва, 2009. 23 с.

37. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. - Нижний Новгород: НижГУ, 1999.

38. Музиченко Я.Б. Имитационное моделирование дифракции света на мультифрактальных объектах // Автореф. дис... канд.т.н. - Санкт-Петербург, 2010. 18с.

39. Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржанов М.О. Технология построения фракталов // Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини ахборот коммуникация технологиялари асосида ривожлантириш муаммолари: Республика илмий–амалий анжуман материаллари тўплами. –Қарши, 2012. -60-64 б.

40. Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Адилова Г.П., Эржанов М.О. Размерность фракталов // Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини ахборот коммуникация технологиялари асосида

ривожлантириш муаммолари: Республика илмий–амалий анжуман материаллари тўплами. –Қарши, 2012. -64-71 б.

41. Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Метод R-функций в фрактальной геометрии // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Проблемы информационных технологий и телекоммуникаций». 15-16 марта. Ташкент, 2012. С. 60-62.

42. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Применение метода R-функций в фрактальной геометрии // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып 127. Ташкент, 2012, С. 51-61.

43. Назиров Ш.А., Эржонов М.О., Ташмухамедова Г.Х., Туйчиев Б.О. Методы построения уравнений объектов фрактальной геометрии // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып 130. Ташкент, 2014. С. 5-21.

44. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Алгебро-логический метод R-функции в приложениях фракталов //Ахборот технологиялари ва телекоммуникация тизимларини самарали ривожлантириш истиқболлари. Республика илмий-техник анжумани. 2014 йил 13-14 март.

45. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Метод R-функций во фрактальной геометрии // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Проблемы информационных технологий и телекоммуникаций». 15-16 марта Ташкент 2012., С.60-62.

46. Назиров Ш.А., Эржанов М.О. Алгебро-логический метод построения объектов фрактальной геометрии // Вестник ТУИТ. Ташкент, 2014. №1.С. 21-31.

47. Назиров Ш.А., Эржонов М.О. Построение уравнение детерминированных фракталов // Узб. журнал Проблемы информатики и энергетики. Ташкент, 2014. №1-2. С. 57-65.

48. Назиров Ш.А., Рахманов Қ.С., Эржонов М.О., Юлдашев М.О. Айланалардан иборат фракталларнинг тенгламаларини қуриш // ТАТУ хабарлари журнали. Тошкент, 2014. №4, 98-110 б.

49. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел, их компьютерная реализация и приложения // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Информационные технологии и проблемы телекоммуникаций». Часть 4, 14 марта 2013 г., Ташкент. С. 270-272.

50. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел // Сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Перспективы эффективного развития информационных технологий и телекоммуникационных систем». Часть 4, 14 марта 2013 г., Ташкент. С. 270-272.

51. Нуралиев Ф.М., Голощапов И.Г. Исследование фрактальных структур из комбинаторных чисел // Материалы XIII ежегодной международной научно-практической конференции «Социально-экономическое развитие общества будущего: тенденции, точки роста, эффективные решения». Этюды молодых. Выпуск 13, 27-28 февраля 2014 г. Алматы-Барнаул. С. 379-382.

52. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А. Фракталларни қуриш муаммолари // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари" мавзусидаги Республика илмий-амалий конференцияси материаллари. Навоий, 2015 йил 25- апрел.

53. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А. Тўртбурчакли фракталларни қуриш учун рекурсив алгоритмларни ишлаб чиқиш // Материалы Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы применения информационных технологии в управлении»Ташкент**,** 7–8 сентября 2015. С.59-65.

54. Нуралиев Ф.М., Анарова Ш.А., Мулламухамедова М.А., Султонов Д.У. Айланалардан ва тўртбурчаклардан иборат фракталларни қуришнинг рекурсив алгоритмлари // ТАТУ хабарлари журнали. 2015 №4(36). С. 82-88.

55. Павлов Д.Г., Панчелюга М.С., Малыхин А.В., Панчелюга В.А. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(11), 2009.-С.135-145.

56. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. -М.: Мир, 1993.

57. Паршнев С.В. Реализация в MATLAB алгоритмов построения фрактальных объектов // Мастерская решений (Россия). №3(3), 2003.-С. 72-82.

58. Патопов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Системные принципы и элементная база фрактальной радиоэлектроники. Этапы

становления и состояние // Радиотехника ва электроника, 2008. №9, С. 1033-1080.

59. Потапов А.А. Фракталы, Скейлинг и дробные операторы в радиотехнике и электронике: Современное состояние и развитие // Журнал радиоэлектроники №1, 2010.

60. Перерва Л.М., Юдин В.В. Фрактальное моделирование // Учебное пособие. под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.

61. Пильщиков В.Н., Горячая И.В., Бордаченкова Е.А. Решение задач с использованием рекурсии // Учебно-методическое пособие, М.: МГУ, 2012. - 38 с.

62. Рахманов Қ.С., Юлдашев Ш.А. Метод построения уравнений объектов фрактальной геометрии. // Радиотехника, телекоммуникация ва ахборот технологиялари: муаммолари ва келажак ривожи. Халқаро илмий - техник конференция. Тошкент, 2015 йил 21–22 май, 161–165 б.

63. Рвачев В.Л. Метод R–функция и ее некоторые применения. - Киев, «Науково-думка». 1982.-552с.

64. Ричард М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории - М.: ПОСТМАРКЕТ, 2000. 350с.

65. Саква Д.Ю. Фракталы вокруг нас [Электронный ресурс] - Режим доступа. - URL: http://www.codenet.ru/progr/fract/Fractals-Around/ (дата обращения 20.12.2012).

66. Спиридонов К.Н. Применение спектра обобщённых фрактальных размерностей Реньи для сравнения текстур изображений // Автореф. дис. канд.т.н. – Титрозаводск, 2008. 19 с.

67. Ташмухамедова Г.Х. Разработка логические метод построение фракталов // Магист. дис. 2014-йил, 98 б.

68. Федер Е. Фракталы. Пер. с англ. М.: Мир,1991. -254с. (Jens Feder, Plenum Press, NewYork, 1988).

69. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов // Уральский государственный университет, 2004. 88с.

70. Эржонов М.О. Разработка алгоритмов и программного обеспечения построение геометрические фракталов на базе R-функция // Маг. дис. 2012-йил, 100 с.