Muhamediyeva Dildora Kabilovna

MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINI YECHISH YONDASHUVLARI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALAR UNIVERSITETI
HUZURIDAGI AXBOROT-KOMMUNIKATSIYA
TEXNOLOGIYALARI ILMIY-INNOVATSION MARKAZI

Muhamediyeva Dildora Kabilovna

MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINI YECHISH YONDASHUVLARI

TOSHKENT – 2021
"NAVRUZ" NASHRIYOTI

UO'K: 73.31.(11+23)12
KBK 72.4(5O`z)
M 32

D.K.Muhamediyeva. «Muqobillashtirish masalalarini yechish yondashuvlari». Toshkent: Monografiya – Toshkent; «Navruz» nashriyoti, 2021.320 bet.

Mazkur ishda sust shakllangan jarayonlarning muqobillashtirish, modellarini qurish, ularni noravshan axborotni qayta ishlash asosida hamda genetik algoritmlar yordamida amaliyotga tadbiq etish kabi dolzarb nazariy-uslubiy masalalar ko'rib chiqilgan. Qo'llanilayotgan matematik apparatning noan'anaviyligi hisobiga kitobda noravshan kattaliklar va genetik algoritmlar asosida modellashtirish masalalarini tizimlashtirilgan izohiga katta e'tibor qaratiladi. Izoh qat'iy, ayni vaqtda tushunarli shaklda olib boriladi. Hamma asosiy holat va amallar ko'pgina misollar bilan tasvirlanadi.

Kitob keng doiradagi o'quvchilar, shu jumladan, amaliy matematika bo'yicha mutaxassislar, injenerlar, hamda matematik iqtisodiyot, tizimlar nazariyasi, qaror qabul qilishning umumiy masalalariga qiziquvchi shaxslarga mo'ljallangandir.

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalar universiteti huzuridagi axborot-kommunikatsiya texnologiyalari ilmiy-innovatsion markazi ilmiy kengashi tomonidan bosmaga tavsiya etilgan

Mas'ul muharrir
O'zR FA ning akademigi Bekmuratov T.F.

ISBN 978-9943-659-48-3

M U N D A R I J A

Kirish

Muqobillashtirish masalasini yechish tadqiqotchidan ushbu masalaning yechimini olish uchun hisoblashlar eng kam sarf-harajatlar bilan amalga oshiradigan yoki mazkur yechim haqida yetarlicha axborot olish imkonini beradigan matematik usulni tanlab olishni talab qiladi. U yoki bu usulni tanlash ma'lum darajada muqobillashtirish masalasining qo'yilishi va uning matematik modeliga bog'liq.

Hozirgi vaqtda haqiqiy jarayonlarni modellashtirish va muqobillashtirishda noaniqliklarni hisobga olish zaruriyati hech kimda shubha tug'dirmay qo'ydi. Ayni vaqtda noaniqlikni qo'llashga doir klassik nazariy-ehtimollik yondashuvning cheklanishlarini anglash oxirgi uchta o'n yillik ichida ko'p sonli ustvor nazariyalar va usullarning paydo bo'lishiga olib keldi. Ulardan noravshan to'plamlar nazariyasini, uning asosida qurilgan imkoniyatlar nazariyasi va noravshan mantiqni, amaliy interval tahlil, neyron to'rlar, genetik algoritmni ajratib ko'rsatish mumkin. Ushbu asosiy nazariyalarning ko'pgina zamonaviy ko'rinishlari, shu jumladan relyativistik va kvant nazariyalari, noravshan to'plamlarning intuitiv nazariyasi va h.k.lar mavjud. Jumladan yangi yondashuvlar klassik nazariya-ehtimolli uslubiyatni rad etmasdan, aksincha usullarni to'g'ri birlashtirish yo'li bilan amaliy muammolarni samarali yechishga imkoniyat yaratgan holda uni to'ldiradilar va kengaytiradilar.

Genetik algoritmlar muqobillashtirish masalalarni yechishning stoxastik usuli bo'lib, ular haqidagi dastlabki ma'lumotlar Xollandning ilmiy ishlarida o'z aksini topgan. Keyinchalik Goldberg ilmiy izlanishlari natijasida ommalashdi.

Genetik algoritmlarda evolyutsiyaning ikki asosiy mexanizmi, ya'ni avlod qoldirish va raqobat yoki eng yaxshilarni yashab ketishi mexanizmi qo'llaniladi. Bunda individlar vazifasini maqsad funktsiya aniqlanish sohasi elementlari bajaradi va ularning atrof-muhitga moslashishi maqsad funktsiya qiymati bilan baholanadi.

Genetik yondoshuv va genetik algoritmlar amaliy va nazariy jihatdan turli sohalarda jumladan, konstruktsiyalash, boshqaruv, muqobillashtirish masalalarini yechish, jadvallar tuzish, marshrutlashtirish va boshqa sohalarda keng qo'llanilishi kutilmoqda.

1-bob. YUMSHOQ HISOBLASHLAR VA MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINI YECHISH USULLARINING ANALITIK TAHLILI

Mazkur bo’limda yumshoq hisoblashlar va muqobillashtirish masalalarini yechishning mavjud usullari va ularning tahlillari keltirilgan.

1.1. F-kattaliklar ustida algebraik amallar

Haqiqiy sonlar to’plamida aniqlangan qo’shish, ko’paytirish, ayirish va bo’lish amallari *F(R)* sinfga quyidagi tarzda tarqaladi. *R* dagi har bir binar amal [10,44]

$$f{:}\ R * R \to R$$

akslantirishdan iboratdir. Agar $A=[a,b]$, $B=[c,d]$ ikkita oraliq olinadigan bo’lsa, u holda ularning yig’indisi

$$f{:}\ A * B \to R$$

akslantirish orqali aniqlanib, u $\forall x \in A, \forall y \in B$ ga nisbatan

$$f(x,y) = z = x+y$$

ko’rinish qabul qiladi, bu yerda $(x,y) \in A \times B$. Demak,

$$A+B = [a+c,\ b+d].$$

F-kattaliklar ustidagi algebraik amallarga o’tish qonuni endilikda tushunarlidir.

$A, B \in F(R)$ va **° - {+, - , *, /}** to’plamdan olingan ixtiyoriy amal bo’lsin. Akslantirish munosabatlarini hisobga olgan holda, quyidagicha yozuv kiritish mumkin:

$$\begin{gathered}\mu_{A\circ B}(z) = \sup_U \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\},\\ U = \{x,y) \in \sigma(A \times B) \big| x \circ y = z\}.\end{gathered} \qquad (1.1.1)$$

Agar dekart ko’paytma ikkinchi tur bo’yicha aniqlansa, u holda

$$\mu_{A\circ B}(z) = \sup_U \{\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)\} \qquad (1.1.2)$$

munosabatga ega bo’lamiz.

Dekart ko’paytmaning to’rtta turiga nisbatan umumiy hol quyidagi ko’rinish qabul qiladi:

$$\mu_{A\circ B}(z) = \sup_U f_i\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, i = \overline{1,4}. \qquad (1.1.3)$$

Bu yerda f_i - funksiyaning yuqorida kiritilgan to'rtta turidan biridir.

Shunday qilib $\mu_{A\circ B}$ *F*-funksiyani hosil qilish uchun shartli ekstremumni topishga oid parametrik masalani yechish, ya'ni $z \in R$ *ga* $\mu_{A\circ B}$ funksiyaning quyidagi chegaralanish (bog'lanish tenglamasi) bilan berilgan *U* to'plamdagi yuqori chegarasini topish kerak:

$$g(x, y; z) = x \circ y - z = 0. \qquad (1.1.4)$$

Shuni qayd etish joizki, qo'yilgan masalaning yechimi funksiyaning berilgan to'plamdagi maksimumini topish masalasidan farqli o'laroq har doim mavjud bo'ladi [19,28,134].

(1.1.4) dagi o'zgaruvchilardan birini boshqasi, masalan *y* ni *x* orqali $y = u(x,z)$ ko'rinishda ifodalaydigan bo'lsak, u holda *y* ga nisbatan hosil bo'lgan ifodani (1.1.3) ga qo'yib, berilgan masalani yagona *x* elementdan iborat bo'lgan quyidagi cheklanishsiz ekstremal masalaga keltirish mumkin:

$$\mu_{A\circ B}(z) = \sup_{x} f_i\{\mu_A(x), \mu_\beta(u(x,z))\}. \qquad (1.1.5)$$

Boshqa bir yondashuv Lagranj ko'phadlaridan foydalanishdir. Bunday holda (1.1.3) masala (1.1.4) ning hisobiga quyidagi ko'rinish qabul qiladi

$$\mu_{A\circ B}(z) = \sup_{x,y,z}\{ f_i[\mu_A(x), \mu_B(y)] + \lambda g(x,y;z)\}, \lambda \in R. \qquad (1.1.6)$$

Kelgusida, o'zgartirishlar kiritilmagan bo'lsa, algebraik amallar birinchi tur bo'yicha, ya'ni (1.1.1) munosabat orqali aniqlanadilar.

F-kattaliklar ustidagi algebraik amallar quyidagi xossaga egadirlar [9,47,97]:

1. Qo'shish va ko'paytirishning kommutativligi. Dekart ko'paytmaning to'rttala turiga nisbatan

$$A \times B = B \times A$$

ekanligi va haqiqiy sonlarni qo'shish hamda ko'paytirish amali kommutativ bo'lganligi hisobiga (1.1.3) dagi $A, B \in F(R)$ lar uchun

$$A+B=B+A, AB=BA. \qquad (1.1.7)$$

2. Qo'shish va ko'paytirishning assotsiativligi. Agar qo'shish va ko'paytirish (1.1.1) yoki (1.1.2) orqali aniqlansa, u holda ushbu amallar assotsiativdir, ya'ni

$$(A+B)+C=A+(B+C), (AB)C=A(BC). \qquad (1.1.8)$$

Haqiqatdan ham, agar * ko'paytirish yoki minimum olish amalini anglatsa, u holda $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in R$.

$$\mu_{A+B}(\xi) = \sup_{U_1}\{\mu_A(x) * \mu_B(y)\}$$

bo'lsin, bu yerda $U_1 = \{(x,y)|x + y = \xi\}$. U holda

$$\mu_{(A+B)+C}(t) = \sup_{U_2}\{\mu_{A+B}(\xi) * \mu_C(z)\}.$$

Bu yerda $U_2 = \{(\xi,z)|\xi + z = t\}$. (1.1.5) dan foydalangan holda

$$\mu_{(A+B)+C}(t) = \sup_z\{\mu_{A+B}(t-z) * \mu_C(z)\} =$$
$$= \sup_z\{\sup_{U_1}[\mu_A(x) * \mu_B(y)] * \mu_C(z)\} =$$
$$\sup_z\{\sup_x[\mu_A(x) * \mu_B(t-z-x)] * \mu_C(z)\} =$$
$$\sup_z \sup_x\{\mu_A(x) * \mu_B(t-z-x) * \mu_C(z)\} =$$
$$= \sup_{z,x}\{\mu_A(x) * \mu_B(t-z-x) * \mu_C(z)\}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Boshqa tomondan,

$$\mu_{B+C}(\xi) = \sup_{U_3}\{\mu_B(y) * \mu_C(z)\}$$

(bu yerda $U_3 = \{(y,z)|y + x = \xi\}$) bo'lganligi uchun

$$\mu_{A+(B+C)}(t) = \sup_{U_4}\{\mu_A(x) * \mu_{B+C}(\xi)\},$$

bu yerda $U_4 = \{(x,\xi)|x + \xi = t\}$. Demak,

$$\mu_{A+(B+C)}(t) = \sup_x\{\mu_A(x) * \mu_{B+C}(t-x)\} =$$
$$= \sup_x(\mu_A(x) * \sup_{U_3}[\mu_B(y) * \mu_C(z)]\} =$$
$$= \sup_x\{\mu_A(x) * \sup_z[\mu_B(t-z-x) * \mu_C(z)] =$$
$$= \sup_x \sup_z\{\mu_A(x) * \mu_B(t-z-x) * \mu_C(z)\} =$$
$$= \sup_{z,x}\{\mu_A(x) * \mu_B(t-z-x) * \mu_C(z)\}.$$

Shunday qilib, $\mu_{(A+B)+C} = \mu_{A+(B+C)}$. Bundan tashqari

$$\mu_{A+B+C}(t) = \sup_U\{\mu_A(x) * \mu_B(y) * \mu_C(z)\}$$

(bu yerda $U = \{(x,y,z)|x + y + z = t\}$) bo'lganligi uchun uni F-kattalikni qo'shishning uch bosqichli amali sifatida talqin qilish mumkin. $y = t - z - x$ almashtirish kiritib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(A+B)+C=A+(B+C) =A+B+C\ .$$

3. Distributivlik. Umumiy holda amallarning ushbu xususiyati bajarilmaydi, ya’ni:

$$A(B+C) \neq AB+AC .$$

Distributivlik qonunining aniq izohiga ega bo’lish uchun ma’lum bir munosabatlarni keltirib chiqarish darkor. Avvalo

$$\mu_{A(B+C)}(t)=\sup_{U}\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(z)\} \qquad (1.1.9)$$

(bu yerda $U=\{(x,y,z)|x(y+z)=t\}$) bo’lishini ko’rsatamiz. $z=t/x-y$ ni (1.1.9) ga qo’yib

$$\mu_{A(B+C)}(t)=\sup_{x,y}\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(t/x-y)\}$$

munosabatga ega bo’lamiz.

Boshqa tomondan

$$\mu_{B+C}(\tau)=\sup_{U}\{\mu_B(y)\wedge\mu_C(z)\},$$

bu yerda $U=\{(y,z)|y+z=\tau\}$ va demak

$$\mu_{B+C}(\tau)=\sup_{y}\{\mu_B(y)\wedge\mu_C(\tau-y)\}.$$

U holda

$$\mu_{A(B+C)}(t)=\sup_{U}\{\mu_A(x)\wedge\mu_{B+C}(\tau)\},$$

bu yerda $U=\{(x,\tau)|x\tau=t\}$, ya’ni

$$\begin{aligned}
&\mu_{A(B+C)}(t)=\sup_{x}\{\mu_A(x)\wedge\mu_{B+C}(t/x)\}= \\
&=\sup_{x}\{\mu_A(x)\wedge\sup_{y}[\mu_B(y)\wedge\mu_C(t/x-y)]\}= \\
&=\sup_{x}\sup_{y}\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(t/x-y)\}= \\
&=\sup_{x,y}(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(t/x-y)\}.
\end{aligned}$$

Aynan shuni isbotlash talab qilingan edi. Huddi shunday tarzda

$$\mu_{AB+AC}(t)=\sup_{xy}\{\mu_A(\xi)\wedge\mu_A(\zeta)\wedge\mu_B(y)\wedge\mu_C(z)\} \qquad (1.1.10)$$

ekanligi isbotlanadi, bu yerda $U=\{(\xi,\zeta,y,z)|\xi y+\zeta z=t\}$.

$\mu_{A(B+C)}$ va μ_{AB+AC} qiymatlarni ma’lum bir t_0 nuqtada solishtiramiz. x_0,y_0,z_0 lar $x_0(y_0+z_0)=t_0$ munosabatni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz va bundan tashqari

$$\mu_{A(B+C)}(t_0)=\mu_A(x_0)\wedge\mu_B(y_0)\wedge\mu_C(z_0).$$

Agar $\xi_0=\zeta_0=x_0$ deb olsak, u holda

$$\mu_A(\xi_0) \wedge \mu_A(\zeta_0) \wedge \mu_B(y_0) \wedge \mu_C(z_0) = \mu_{A(B+C)}(t_0)$$

tenglikka asoslanib (1.1.10) dan $\xi y + \zeta z = t_0$ shartni qanoatlantiruvchi ξ, ζ, y, z larning mavjud bo'lishi ehtimoldan holi emas. Ular

$$\mu_{A(B+C)}(t_0) < \mu_{AB+AC}(t_0)$$

shartni, demak bevosita

$$A(B+C) \subseteq AB + AC \qquad (1.1.11)$$

munosabatni qanoatlantiradilar. Agar *A*-qavariq *F* kattalik va *b,c* $|b+c| = |b| + |c|$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda

$$(b+c)A = bA + cA \qquad (1.1.12)$$

tenglik bajariladi.

Ushbu bobda qayd qiladigan oxirgi xossaning mazmuni ixtiyoriy $A = \langle 1, a \rangle$ da har qanday $B, C \in F(R)$ lar uchun (1.1.9) va (1.1.10) dan

$$a(B+C) = aB + aC \qquad (1.1.13)$$

tenglik kelib chiqadi.

1.1.1.Algebraik amallarning natijalarini topishning to'g'ridan-to'g'ri va analitik usuli

F-kattaliklar ustidagi algebraik amallarning natijalarini topish uchun bir qancha analitik va sonli usullardan foydalaniladi [10,112]. Jumladan, agar yechim (1.1.3) masalaning umumiy holi uchun qidirilsa, berilgan usul "to'g'ridan-to'g'ri" deb ataladi. Agar usul joriy masalaning α-darajadan foydalanishga asoslangan ma'lum bir o'zgargan ko'rinishida bo'lsa, uni "teskari" yoki α-darajali kesimlar usuli deb atashadi. Avvalgidagidek, asosiy e'tibor birinchi turdagi amallarga qaratiladi.

F-kattaliklarni skalyarga ko'paytirish. Agar $B = \lambda = (1, \lambda)$ bo'lsa, (1.1.1) dagi $z = \lambda x$ ning o'zaro bir qiymatli akslantirilishi hisobiga quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu_{\lambda A}(z) = \mu_A(z/\lambda), \lambda \neq 0. \qquad (1.1.14)$$

Agar $\lambda = 0$ bo'lsa

$$\lambda A = \left\langle \sup_x \mu_A(x), 0 \right\rangle, \qquad (1.1.15)$$

ya'ni agar *A*-normal *F*-kattalik bo'lsa, u holda $0 \cdot A = 0$.

F-kattalik bilan skalyarning yig'indisi. Yuqoridagi hol singari, agar $B=\lambda=(1,\lambda)$, va, demak $z=x+\lambda$ bo'lsa, u holda

$$\mu_{A+\lambda}(z)=\mu_A(z-\lambda),\lambda\in R, A\in F(R). \qquad (1.1.16)$$

Shu asosda μ_A funksiya haqiqiy o'q bo'ylab $|\lambda|$ katalikka o'ngga yoki chapga suriladi.

(1.1.14)-(1.1.16) munosabatlarning ikkinchi turdagi algebraik amallarga nisbatan ham o'rinli ekanligini tekshirish qiyin emas.

$A=(1-(x-1)^2, (0,1))$ bo'lsin. U holda (1.1.14) va (1.1.15) ga ko'ra

$$\lambda A=\left\langle 1-(x-\lambda)^2/\lambda^2,(0,2\lambda)\right\rangle,\lambda>0,$$

$$\lambda A=\left\langle 1-(x-\lambda)^2/\lambda^2,(2\lambda,0)\right\rangle,\lambda<0,$$

$$\lambda A=0,\lambda=0$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

(1.1.15) ga ko'ra

$$\lambda+A=\left\langle 1-(x-(\lambda+1))^2,(\lambda,\lambda+2)\right\rangle$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ushbu bobda $A\circ B$ F-kattalikni, ya'ni uning F-funksiyasini topishni (1.1.3) parametrik ekstremal masalani yechishga keltirilishi qayd etilgan edi. Jumladan, $x\circ y=z$ bog'lanish tenglamasiga o'zgartirish kiritish orqali berilgan masala (1.1.5) shartsiz ekstremum topish masalasiga aylanadi, ya'ni birinchi turdagi amallar uchun

$$\mu_{A\circ B}(z)=\sup_x\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(u(x,z))\}. \qquad (1.1.17)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Ekstremal masalalar nazariyasidan ma'lumki [24,27,41,67,80], U to'plamda berilgan ma'lum bir funksiyaning R ichida global maksimumini topish ushbu funksiya unimodal, ya'ni U da yagona maksimumga ega bo'lsa ancha soddalashadi.

Agar A F-kattalik qat'iy qavariq bo'lsa va μ_A funksiya $\sigma(A)$ da o'zining yuqori chegarasiga erishsa, u holda μ_A $\sigma(A)$ da unimodaldir. Agar A- qavariq bo'lsa, unday bo'lmaydi. Shunga qaramay, hattoki qavariq F-kattalik uchun uning F-funksiyasi yuqori chegarasini topish ixtiyoriy F-funksiyali F-kattalikka nisbatan ancha osondir.

Demak, qavariq F-kattaliklarga nisbatan (1.1.17) masalani yechish afzalroqdir, zero $\mu_A(x)\wedge\mu_B(u(x,z))$ funksiya qavariq F-kattalikni aniqlaydi. $\sigma(A)$ va $\sigma(B)$ to'plamlar ichki nuqta sifatida nolga ega bo'lgan ko'paytirish amali bundan mustasnodir. Bundan tashqari qavariq *F*-kattaliklar uchun quyidagi tasdiq o'rinlidir .

Agar *A* va *B* – qavariq bo'lsa, u holda $C = A \circ B$- qavariq *F*-kattalikdir.

Qo'shish amalini ko'zdan kechiraylik. $z_1, z_2 \in \sigma(C)$, $z_1 = x_1 + y_1$, $z_2 = x_2 + y_2$ va $\mu_C(z_1) = \mu_A(x_1) \wedge \mu_B(y_1)$, $\mu_C(z_2) = \mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_2)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\gamma \in [0,1]$ ga nisbatan

$$\begin{aligned}
&\mu_C(\gamma z_1 + (1-\gamma)z_2) = \mu_C(\gamma(x_1 + y_1) + (1-\gamma)(x_2 + y_2)) = \\
&= \mu_C(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2 + \gamma y_1 + (1-\gamma)y_2) \geq \\
&\geq \mu_A(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \wedge \mu_B(\gamma y_1 + (1-\gamma)y_2) \geq \\
&\geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_1) \wedge \mu_B(y_2) = \\
&= (\mu_A(x_1) \wedge \mu_B(y_1)) \wedge (\mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_2)) = \\
&= \mu_C(z_1) \wedge \mu_C(z_2).
\end{aligned}$$

Aynan shuni isbotlash kerak edi.

C=*A*-*B*=*A*+(-*B*), (-*B*)- esa *F*-kattalik bo'lgani uchun, *C*=*A*-*B* ham qavariq *F*-kattalikdir.

Ko'paytirish amali, ya'ni $C = A \cdot B$ ni ko'zdan kechiraylik. $z_1, z_2 \in \sigma(C)$, $z_1 = x_1 \cdot y_1$, $z_2 = x_2 \cdot y_2$ va $\mu_C(z_1) = \mu_A(x_1) \wedge \mu_B(y_1)$, $\mu_C(z_2) = \mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_2)$ bo'lsin. Aniqlik maqsadida $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $z_1 < z_2$ deb olaylik. U holda ixtiyoriy $z \in (z_1, z_2)$ ga nisbatan $z = x \cdot y$ shartni qanoatlantiruvchi $x \in (x_1, x_2)$ va $y \in (y_1, y_2)$ lar topiladi. $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$ bo'lsin, ularga nisbatan

$$\begin{aligned}
z &= \gamma_0 z_1 + (1-\gamma_0)z_2, \\
x &= \gamma_1 x_1 + (1-\gamma_1)x_2, \\
y &= \gamma_2 y_1 + (1-\gamma_2)y_1
\end{aligned}$$

shartlar bajariladi.

U holda

$$\begin{aligned}
&\mu_{AB}(z) = \mu_{AB}(\gamma_0 z_1 + (1-\gamma_0)z_2) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \geq \\
&\geq \mu_A(x_1) \wedge \mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_1) \wedge \mu_B(y_2) = \\
&= (\mu_A(x_1) \wedge \mu_B(y_1)) \wedge (\mu_A(x_2) \wedge \mu_B(y_2)) = \\
&= \mu_{AB}(z_1) \wedge \mu_{AB}(z_2)
\end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz, aynan shuni isbotlash kerak edi.

Bo'lish amali uchun tasdiq huddi shunday usulda isbotlanadi, jumladan, agar *C*=*A*/*B* bo'lsa, u holda $0 \notin \sigma(B)$.

F-kattaliklarning qavariqligi to'g'risidagi faraz ko'pgina tegishlilik funksiyalari amaliyotda qavariq bo'lishi bilan izohlanadi. Ayrim hollarda (1.1.3) masalani yechishning *dekompozitsiya tamoyili* deb ataluvchi yondashuvi o'rinli bo'ladi. Agar *A* va *B*-qavariq bo'lmagan holat vujudga kelsa, u holda ularni qavariq *F*-kattaliklarning umumlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin. *F*-kattaliklar ustidagi algebraik amallar ta'rifidan $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B=\bigcup_{j=1}^{n} B_j$ da

$$A\circ B=\bigcup_{i,j}(A_i\circ B_j), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \qquad (1.1.18)$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Demak, agar *A* va *B* – noqavariq bo'lsa, ularni qavariq *F*-kattaliklar umumlashmasi ko'rinishida tasvirlash ayrim hollarda (1.1.3) masalani yechishda osonlik yaratishi mumkin. Yuqorida qayd etilgan hollarni hisobga olgan holda, kelgusida barcha *F*-kattaliklarni qavariq deb olamiz.

Binar amallarning to'g'ri analitik usuli asosida *R* ning ma'lum bir to'plamida funksiyaning ekstremum nuqtalarini qidirishga oid klassik yondashuvi yotadi.

μ_A funksiya har doim σ**(A)** nuqtada o'zining yuqori chegarasiga erishadi deb olamiz, yuqori chegara - ∞ va nuqtada bo'lgan hollar bundan mustasnodir. Bunday hollarda [41] ga ko'ra μ_A**(x)** funksiyaning σ(A) dagi ekstremum nuqtasi quyidagi shartlar bajariladigan nuqtalar bo'ladi:

1. μ_A**(x)** uzilishga uchraydi;
2. μ_A**(x)** uzluksiz, lekin μ'_A hosila mavjud emas;
3. μ'_A hosila mavjud bo'lib, nolga teng;
4. σ(A)=[a, b] bo'lsa, *x=a* yoki *x=b*.

Agar $\sigma(A)$ to'plam cheklanmagan bo'lsa**,** μ_A**(x)** funksiyaning ***x*** $\to$ - yoki +∞ dagi hatti-harakatini o'rganish darkor.

F-kattaliklar ustidagi har bir amalni ko'rib chiqamiz.

F-katalliklarni qo'shish. Bunday holda bog'lanish tenglamasi *x+y=z* ko'rinish qabul qiladi, ya'ni ixtiyoriy z_0 ga nisbatan $y=z_0-x$ tenglama bilan aniqlanuvchi $\mu_{A+B}(z_0)$ kattalik R^2 to'g'ri chiziqda (1.1.1) $f_1(x,y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$ funksiayning yuqori chegarasiga teng. (1.1.17) munosabat

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_x\{\mu_A(x) \wedge \mu_B(z-x)\} \qquad (1.1.19)$$

ko'rinishda yozib olinadi.

(1.1.19) dan ko'rinib turibdiki, μ_{A+B} funksiyaning qiymatlari $A \cap (-B-z)$ *F*-kattaliklar oilasining *z* ga parametr sifatida bog'liq bo'lgan yuqori chegaralari bo'ladilar. Agar *z* ga qarab $\mu_A(x) \wedge \mu_B(z-x)$ funksiyaning ekstremal nuqtalarini

$$x=\varphi_1(z),\ x=\varphi_2(z),\ ...,\ x=\varphi n(z)$$

munosabat orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda

$$C = A + B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

munosabatga ega bo'lamiz, ya'ni

$$\mu_{C_i}(z) = \mu_A(\varphi_i(z)) \wedge \mu_B(z - \varphi_i(z)).$$

$\mu_A(x) \wedge \mu_B(z-x)$ funksiyaning global maksimum nuqtasi ayrim hollarda

$$\mu_A(x) = \mu_B(z-x)$$

tenglamani yechish orqali hosil qilinib olinishi mumkin. Yuqorida bayon etilgan fikrlarni bir qator misollar ko'rinishida tasvirlaylik.

$\mu_A(x) = \exp\{-(x-a)^2/b\}$, $\mu_B(y) = \exp\{-(y-d)^2/c\}, b, c > 0$ bo'lsin. U holda $\mu_A(x) = \mu_B(z-x)$ tenglamadan $(x-a)/\sqrt{b} = \pm(z-x-d)/\sqrt{c}$ ga ega bo'lamiz, bu yerdan esa

$$x_1 = \varphi_1(z) = (z\sqrt{b} + a\sqrt{c} - d\sqrt{b})/(\sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

$$x_2 = \varphi_2(z) = (-z\sqrt{b} + a\sqrt{c} + d\sqrt{b})/(\sqrt{c} - \sqrt{b}).$$

Demak , $\mu_{C_1}(z) = \mu_A(\varphi_1(z))$, $\mu_{C_2}(z) = \mu_A(\varphi_2(z))$.

Kerakli o'rinlashtirishlar kiritib, sodda almashtirishlardan so'ng

$$\mu_{C_1}(z) = \exp\{-z - (a+d))^2/(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2\},$$

$$\mu_{c_2}(z) = \exp\{-(z - a + d))^2/(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2\}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. $(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$ bo'lgani uchun, $C = C_1 \cup C_2 = C_1$, ya'ni $\mu_{A+B}(z) = \mu_{C_1}(z)$.

Agar $A = \left\langle 1 - (x-a)^2/b, (a - \sqrt{b}, a + \sqrt{b}) \right\rangle$ va $B = \left\langle 1 - (y-d)^2/c, (d - \sqrt{c}, d + \sqrt{c}) \right\rangle$ bo'lsa, u holda oldingi misol kabi

$$1 - (x-a)^2/b = 1 - (z-x-d)^2/c$$

tenglamani tahlil qilish orqali

$$C = A + B = \left\langle 1 - (z - a - d)^2 /(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2, (a + d - (\sqrt{b} + \sqrt{c}), a + d + (\sqrt{b} + \sqrt{c})) \right\rangle$$

munosabatga ega bo'lamiz.

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \text{ va } B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

bo'lsin, bu yerda

$$A_1 = \langle a_1 x + b_1, [-b_1 / a_1, (1 - b_1)/a_1] \rangle, a_1 > 0,$$

$$A_2 = \langle 1, [(1 - b_1)/a_1, (1 - b_2)/a_3] \rangle,$$

$$A_3 = \langle a_2 x + b_2, [(1 - b_2)/a_2, -b_3 / a_2] \rangle, a_2 < 0,$$

$$B_1 = \langle a_3 y + b_3, [-b_3 / a_3, (1 - b_3)/a_3] \rangle, a_3 > 0,$$

$$B_2 = \langle 1, [1 - b_3)/a_3, (1 - b_4)/a_4] \rangle,$$

$$B_3 = \langle a_4 y + b_4, [(1 - b_4)/a_4, -b_4 / a_4] \rangle, a_4 < 0.$$

Berilgan holda dekompozitsiya tamoyiladan foydalanish mumkin, jumladan mos tahlil

$$C = A + B = (A_1 \cup B_1) \cup (A_2 \cup B_2) \cup (A_3 \cup B_3)$$

ekanligini ko'rsatadi.

$$a_1 x + b_1 = a_3 (z - x) + b_3$$

tenglamadan

$$x = \varphi(z) = a_3 x /(a_1 + a_3) + (b_3 - b_1)/(a_1 + a_3)$$

bevosita

$$C_1 = A_1 + B_1 = \langle a_1 a_3 z + b_1 a_3 + b_3 a_1)/(a_1 + a_3), [-(b_1 a_3 + b_3 a_1)/(a_1 + a_3), (1 - b_1)/a_1 + (1 - b_3)/a_3] \rangle$$

ekanligini aniqlaymiz.

Huddi shu usulda C_3 ga nisbatan

$$C_3 = A_3 + B_3 = \langle a_2 a_4 z + b_2 a_4 + b_4 a_2)/(a_2 + a_4), [(1 - b_2)/a_2 + (1 - b_4)/a_4, -(b_2 a_4 + b_4 a_2)/(a_2 + a_4)] \rangle$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Va nihoyat

$$C_2 = A_2 + B_2 = \langle 1, [(1 - b_1)/a_1 + (1 - b_3)/a_3, (1 - b_2)/a_2 + (1 - b_4)/a_4] \rangle.$$

(1.1.2) bo'yicha aniqlanuvchi ikkinchi tur yig'indiga bitta misol keltiraylik.

$\mu_A(x) = \exp\{-(x - a)^2 / b\}$ va $\mu_B(y) = \exp\{-(y - d)^2 / c\}, b, c > 0$ bo'lsin. U holda

$$\frac{d}{dx} \mu_A(x) \cdot \mu_B(z - x) = 0$$

tenglamadan

$$x = \varphi(z) = (bz - bd + ac)/(b + c)$$

va bevosita

$$\mu_{A+B}(z) = \mu_A(\varphi(z)) \cdot \mu_B(z - \varphi(z)) = \exp\{-(z-(a+d))^2 /(b+c)\}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

F-kattaliklarni ayirish. Bunday holatda bog'lanish tenglamasi

$$z = x - y$$

ko'rinishda bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy z_0 qiymatga nisbatan $\mu_{A-B}(z_0)$ kattalik $y = z_0 - x$ tenglamali R^2 to'g'ri chiziqda $f_1(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$ funksiyaning yuqori chegarasiga teng. (1.1.17) munosabat

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_x \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(x - z)\}$$

ko'rinishda yozib olinadi.

A-B=A+(-B) bo'lgani uchun ayirish yig'indiga keltiriladi.

$A = \left\langle 1-(x-a)^2, (a-1, a+1)\right\rangle$ va $B = \left\langle 1-(y-b)^2, b-1, b+1)\right\rangle$ bo'lsin. U holda $1-(x-a)^2 = 1-(x-z-b)^2$ tenglamadan

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - xz - bx - xz + z^2 + bz - bx + bz + b^2,$$

$$2x(z - a + b) = z^2 + 2bz + b^2 - a^2,$$

$$x = \frac{(z+b)^2 - a^2}{2(z-a+b)} = \frac{z+a+b}{2}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

$\mu_C(z) = \mu_A(\varphi(z))$ almashtirish kiritib,

$$\mu_C(x) = 1 - \left(\frac{z+a+b}{2} - a\right)^2 = 1 - \left(\frac{z-a+b}{2}\right)^2$$

ekanligini aniqlaymiz.

Shunday qilib,

$$C = A - B = \left\langle 1-(z-a+b)^2/4, (a-b-2, a-b+2)\right\rangle.$$

F-kattaliklarni ko'paytirish. Bunday holda bog'lanish tenglamasi

$$z = x\,y$$

ko'rinish qabul qiladi, ya'ni ixtiyoriy z_0 da $\mu_{A \cdot B}(z_0)$ kattalik $y=z_0/x$ tenglama bilan berilgan R^2 dagi giperbolada joylashgan $f_1(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$ funksiyaning yuqori chegarasiga tengdir. (1.1.17) munosabat

$$\mu_{AB}(z) = \sup_x \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(z/x)\}$$

ko'rinishda yozib olinadi.

Cheklanishlarning nochiziqliligi hisobiga F-kattaliklarning ko’paytmasini topish masalasi yig’indi va ayirishga nisbatan ancha qiyindir.

$$A = \left\langle 1 - \frac{1}{x^2}, (1, +\infty) \right\rangle \text{ va } B = \left\langle 1 - \frac{1}{y^2}, (2, +\infty) \right\rangle$$

bo’lsin. U holda

$$1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{4}{(z/x)^2}$$

tenglamadan

$$4x^4 = z^2,$$
$$x_{1,2} = \varphi(z) = \pm\sqrt{z/2}$$

munosabatlarga ega bo’lamiz.

$\mu_A(z) = \mu_A(\varphi(z))$ deb olgan holda

$$C = A \cdot B = \left\langle 1 - \frac{2}{z}, (2, +\infty) \right\rangle$$

munosabatga ega bo’lamiz.

$\mu_A(x) = \exp\{-(x-a)^2 / b\}$ va $\mu_B(y) = \exp\{-(y-d)^2 / c\}, b, c > 0$ bo’lsin. $\mu_A(x) = \mu_B(z/x)$ tenglamadan $x\sqrt{c}(x-a) = -\sqrt{b}(z - xd)$, $x\sqrt{c}(x-a) = \sqrt{b}(z - xd)$ munosabatlarni hosil qilib olamiz.

Birinchi tenglamadan $x^2\sqrt{c} - x(a\sqrt{c} + d\sqrt{b}) + z\sqrt{b} = 0$ munosabatga, undan esa $x_{1,2} = \left(a\sqrt{c} + d\sqrt{b} \pm \sqrt{(a\sqrt{c} + d\sqrt{b})^2 - 4z\sqrt{bc}} \right) / 2\sqrt{c}$ munosabatga ega bo’lamiz.

Demak,

$$\mu_{C_1}(z) = \exp\{-(d\sqrt{b} - a\sqrt{c} + \sqrt{L(z)})^2 / 4bc\},$$
$$\mu_{C_2}(z) = \exp\{-(d\sqrt{b} - a\sqrt{c} - \sqrt{L(z)})^2 / 4bc\},$$

bu yerda

$$L(z) = (a\sqrt{c} + d\sqrt{b})^2 - 4z\sqrt{bc}.$$

Yana bitta tenglama $x^2\sqrt{c} - x(a\sqrt{c} - d\sqrt{b}) - z\sqrt{b} = 0$ ni ko’rib chiqqan holda, undan

$$x_{3,4} = \left(a\sqrt{c} - d\sqrt{b} \pm \sqrt{(a\sqrt{c} - d\sqrt{b})^2 + 4z\sqrt{bc}} \right) / 2\sqrt{c}$$

munosabatni keltirib chiqaramiz. $M(z) = (a\sqrt{c} - d\sqrt{b})^2 + 4z\sqrt{bc}$ deb olgan holda

$$\mu_{C_3}(z) = \exp\{-(a\sqrt{c} + d\sqrt{b} - \sqrt{M(z)})^2 / 4bc\},$$

$$\mu_{C_4}(z) = \exp\{-(a\sqrt{c} + d\sqrt{b} + \sqrt{M(z)})^2 / 4bc\}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

$\mu_{AB}(ad) = 1$ ekanligini hisobga olgan va ildizlarning arifmetik qiymatini ko'zdan kechirgan holda:

$$C = AB = C_1 \cup C_3, |a+d| = |a| + |d|,$$

$$C = AB = C_2 \cup C_4, |a+d| \neq |a| + |d|$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Berilgan misolning xususiy holini ko'rib chiqaylik. $a = d, b = c$, ya'ni A=B bo'lsin. U holda $a \geq 0$ ga nisbatan

$$\mu_{C_1}(z) = \exp\{-(a^2 - z)/b\}, z \leq a^2,$$

$$\mu_{C_3}(z) = \exp\{-(a - \sqrt{z})^2 / b\}, z \geq 0$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. $0 < z < a^2$ da

$$(a^2 - z) - (a - \sqrt{z})^2 = a^2 - z - a^2 + 2a\sqrt{z} - z = 2\sqrt{z}(a - \sqrt{z}) > 0$$

bo'lganligi uchun, oxir oqibat

$$\mu_{AA}(z) = \begin{cases} \exp\{-a - \sqrt{z})^2 / b\}, z \geq 0 \\ \exp\{-a^2 - z)/b\}, z \leq 0 \end{cases}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Agar $a \leq 0$ bo'lsa, u holda

$$\mu_{C_2}(z) = \exp\{-(a^2 - z)/b\}, z \leq a^2,$$

$$\mu_{C_4}(z) = \exp\{-(a - \sqrt{z})^2 / b\}, z \geq 0.$$

Shunday qilib, $C_1 = C_2, C_3 = C_4$, ya'ni natija a nuqtaning vaziyatiga bog'liq emas. $a=0$ da

$$\mu_A(z) = \begin{cases} \exp\{-z/b\}, z \geq 0 \\ \exp\{z/b\}, z \leq 0 \end{cases}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Agar $z = x^2$ akslantirishni A F-kattalikning kvadratga ta'siri sifatida talqin etadigan bo'lsak, u holda $a=0$ da

$$\mu_{A^2}(z) = \exp\{-z/b\}, z \geq 0$$

munosabatga, ya'ni bu borada $A \cdot A \neq A^2$ munosabatga ega bo'lamiz. Bu mulohaza tashuvchisi ichki nuqta sifatida nolni saqlagan ixtiyoriy F-katalikka nisbatan o'rinlidir.

F-kattaliklarning bo'linmasi. Bunday holda bog'lanish tenglamasi

$$z = x / y, y \neq 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy z_0 ga nisbatan $\mu_{A/B}(z_0)$ kattalik R^{2} dagi $x=z_0y$ tenglamali to'g'ri chiziqda $f_1(x,y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$ funskiyaning yuqori chegarasiga tengdir. Demak

$$\mu_{A/B}(z)=\sup_x\{\mu_A(zy)\wedge\mu_B(y)\}$$

deb yozib olish mumkin.

Umuman olganda, *A* F-kattalikning *B* ga bo'linma amalini *A* ni *1/B* ga ko'paytirish amaliga keltiriladi. Boshqa tomondan, *x=zy* cheklanishning chiziqliligi hisobiga bo'lish amali ko'p hollarda ko'paytirish amaliga nisbatan ancha osondir.

1.1.2. Algebraik amallarning natijalarini topishning teskari analitik usuli

X va *Y* – ixtiyoriy bazali to'plamlar, $A\in F(X)$ bo'lsin va $f\colon X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $\forall y\in Y\ \exists x\in X$ lar $\mu_{f(A)}(y)=\mu_A(x)$ shartni qanoatlantirsalar, u holda

$$\sigma_\alpha(f(A))=f(\sigma_\alpha(A))$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$y_0\in f(\sigma_\alpha(A))$ va $V\subseteq\sigma_\alpha(A)$ lar $f(x)=y_0, x\in V$ shartni qanoatlantirsin. U holda $\mu_{f(A)}(y_0)=\sup_V\mu_A(x)>\alpha$, ya'ni $y_0\in\sigma_\alpha(f(A))$ va demak, $f(\sigma_\alpha(A))\subseteq\sigma_\alpha(f(A))$.

Boshqa tomondan $y_0\in\sigma_\alpha(f(A))$, ya'ni $\mu_{f(A)}(y_0)>\alpha$ ekanligi qayd etilgan bo'lsin. U holda, shartga ko'ra shunday $x_0\in\sigma_\alpha(A)$ mavjudki, $y_0=f(x_0)$. $y_0=f(x_0)\in f(\sigma_\alpha(a))$ bo'lgani uchun $\sigma_\alpha(f(A))\in f(\sigma_\alpha(A))$.

Agar $A, B\in F(R)$ bo'lsa , u holda

$$\sigma_\alpha(A\circ B)=\sigma_\alpha(A)\circ\sigma_\alpha(B).$$

Yuqorida qayd etilganidek, algebraik amallar $f{:}R*R\to R$ akslantirishga, ya'ni *A* va *B* *F*-kattaliklarga nisbatan $f(A*B)=A\circ B$ munosabatga egadirlar. Berilgan holda $\sigma_\alpha(A\times B)=\sigma_\alpha(A)\times\sigma_\alpha(B)$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun, $\sigma_\alpha(f(A))=f(\sigma_\alpha(A))$ hisobiga

$$\sigma_\alpha(A\circ B)=\sigma_\alpha(f(A\times B))=f(\sigma_\alpha(A\times B))=f(\sigma_\alpha(A)\times\sigma_\alpha(B))=\sigma_\alpha(A)\circ\sigma_\alpha(B)$$

munosabatga ega bo'lamiz, aynan shuni isbotlash talab etilgandi.

F-kattalik $\sigma(A)$-chekli to'plam bo'lsa, *A* cheklangan deyiladi. *F(R)* dan ajratib olingan cheklangan va qavariq *F*-kattaliklar sinfini $\overline{F}(R)$ orqali belgilaymiz.

Masalani yechishning teskari usuli mazmuni

$$\mu_{A\circ B}(z) = \max_{U}\{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\},$$

$$U = \{(x,y) \in \sigma(A \times B) | x \circ y = z\}$$

chekli va qavariq F-kattaliklarga nisbatan quyidagidan iboratdir. Agar $A, B \in \overline{F}(R)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy α uchun *[0,1]* da qayd etilgan ta'rifdan foydalangan holda $A \circ B$ α-darajali to'plamni topish mumkin. Shu asosda

$$f_{A\circ B}(\alpha) = (z_1(\alpha), z_2(\alpha))$$

munosabatga ega bo'lamiz.

α ga bog'liq $z_1 = z_1(\alpha)$ va $z_2 = z_2(\alpha)$ tenglamalarni $f_{A\circ B}$ elementning $\overline{F}(R)$ sinfdagi obrazini, $\mu_{A\circ B}$ F-funksiyani hosil qilib olamiz. Shunday qilib, berilgan usulning nomi uning asosida yotgan g'oya bilan mos tushadi.

$\mu_A(x) = \exp\{-(x-a)^2/b\}$, $\mu_B(y) = \exp\{-(y-d)^2/c\}, b, c > 0$ bo'lsin. $A+B$ F- kattalikni topamiz.

$$\mu_A(x) = \exp\{-(x-a)^2/b\} = t, \quad \mu_B(y) = \exp\{-(y-d)^2/c\} = t$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu yerdan esa

$$-b \cdot \ln t = (x-a)^2, \quad -c \cdot \ln t = (y-d)^2,$$

demak,

$$x_1(t) = a - \sqrt{-b \cdot \ln t}, \quad x_2(t) = a + \sqrt{-b \cdot \ln t},$$

$$y_1(t) = d - \sqrt{-c \cdot \ln t}, \quad y_2(t) = d + \sqrt{-c \cdot \ln t}.$$

Endilikda

$$z_1(t) = x_1(t) + y_1(t) = (a+d) - \sqrt{-\ln t}(\sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

$$z_2(t) = x_2(t) + y_2(t) = (a+d) + \sqrt{-\ln t}(\sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Bu yerdan

$$-\ln t = (z_1(t) - (a+d))^2 / (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2, i = 1,2,$$

ya'ni barcha z larga nisbatan

$$t = \mu_{A+B}(z) = \exp\{-(z-(a+d))^2 / (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2\}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Bu esa to'g'ri usulda olingan natija bilan mos tushadi.

$A = \langle 1-(x-a)^2, (a-1, a+1)\rangle$ va $B = \langle 1-(y-b)^2, (b-1, b+1)\rangle$ ga nisbatan ayirish amalini ko'rib chiqaylik. Bunda

$\mu_A(x) = 1-(x-a)^2 = t$, $\mu_B(y) = 1-(y-b)^2 = t$ tenglamalardan

$$x_1(t) = a - \sqrt{1-t}, \quad x_2(t) = a + \sqrt{1-t},$$

$$y_1(t) = b - \sqrt{1-t}\ , \quad y_2(t) = b + \sqrt{1-t}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Keyinchalik

$$z_1(t) = x_1(t) - y_2(t) = (a-b) - 2\sqrt{1-t}\ ,$$

$$z_1(t) = x_1(t) - y_2(t) = (a-b) - 2\sqrt{1-t}$$

tenglamalardan barcha *z* lar uchun

$$t = \mu_{A-B}(z) = 1 - (z-a+b)^2/4\,,$$

ya'ni.

$$C = A - B = \left\langle 1-(z-a+b)^2/4, (a-b-2, a-b+2)\right\rangle$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa to'g'ri yo'l bilan olingan natija bilan ustma-ust tushadi.

$A = \left\langle 1-\dfrac{1}{x^2}, (1,+\infty)\right\rangle$ va $B = \left\langle 1-\dfrac{4}{y^2}, (2,+\infty)\right\rangle$ ga nisbatan ko'paytirish amalini ko'rib chiqaylik. Bunday holda

$$\mu_A(x) = 1 - 1/x^2 = t\,, \quad \mu_B(y) = 1 - 4/y^2 = t$$

munosabatlarga ega bo'lamiz, bu yerdan esa

$$x_{1,2}(t) = \pm 1/\sqrt{1-t}, \quad y_{1,2}(t) = \pm 2/\sqrt{1-t}.$$

Bizning holimizda

$$z(t) = x_1(t)\cdot y_1(t) = \frac{2}{1-t}\,.$$

Shunday qilib, barcha $z>0$ larga nisbatan

$$t = \mu_{A\cdot B}(z) = 1 - 2/x\,,$$

ya'ni

$$C = A\cdot B = \left\langle 1-2/z, (2,+\infty)\right\rangle$$

munosabatga ega bo'lamiz, bu esa to'g'ri usulda olingan natija bilan ustma-ust tushadi.

$A = \left\langle 1-(x-a)^2, (a-1, a+1)\right\rangle$ va $B = \left\langle 1-(y-b)^2, (b-1, b+1)\right\rangle$ ga nisbatan bo'lish amalini ko'rib chiqaylik.

$$\mu_A(x) = 1-(x-a)^2 = t\,, \quad \mu_B(y) = 1-(y-b)^2 = t$$

tenglamalardan

$$x_1(t) = a - \sqrt{1-t}, \quad x_2(t) = a + \sqrt{1-t}\ ,$$

$$y_1(t) = b - \sqrt{1-t}\ , \quad y_2(t) = b + \sqrt{1-t}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Bunda

$$z_1(t) = x_1(t)/y_2(t)\,, \quad z_2(t) = x_2(t)/y_1(t)\,.$$

Yechish uchun bitta tenglama yetarlidir. Demak,

$$z(t) = (a - \sqrt{1-t})/(b + \sqrt{1-t}).$$

Bu yerdan

$$\sqrt{1-t} = (a - bz)/(z+1),$$

ya'ni

$$t = \mu_{A/B}(z) = 1 - (a - bz)^2/(z+1)^2.$$

a=4 va *b=2* da

$$C = A/B = \left\langle 1 - \frac{4\cdot(2-z)^2}{(z+1)^2}, (1,5) \right\rangle.$$

$\mu_{A\circ B}$ tegishlilik funksiyasini qurishning ko'rilgan analitik usullari natijani analitik ko'rinishda olish imkonini beradi, bu esa amaliy ilovalarda juda qo'l keladi. Lekin amaliyotda joriy *F*-kattaliklarga bog'liq yanada murakkabroq analitik ifodalar uchrashi mumkin, ularning analitik yechimini topishda ayrim qiyinchiliklarga duch kelinadi. Shu bilan bir qatorda, ayrim hollarda diskret ko'rinishda berilgan *F*-kattaliklar ustida ishlashning sonli usullariga zarurat tug'iladi. Bunday holda $A \circ B$ *F*-kattalik ham diskret bo'ladi. Amaliy ilovalarga bu odatda yetarli bo'ladi. Zaruratga qarab olingan yechimni ma'lum bir funksional bog'lanish yordamida approksimasiyalash mumkin.

1.1.3. F-kattaliklar ustidagi amallarga nisbatan sonli usullar

Noravshan kattaliklar bilan ishlashda asosiy qiyinchilik shundan iboratki, eng sodda tegishlilik funksiyalari holida ham ular ustida olib borilgan elementar amallar natijasida ko'p sonli parametrlarni talab qilgan murakkab shakldagi tegishlilik funksiyalari hosil bo'ladi. Shuning uchun ko'pgina ishlarda [23,35,110,121] joriy tegishlilik funksiyalari va ular ustida bajarilgan amallarning natijalarini belgilangan sonli parametrlarga bog'liq ma'lum sinfdagi uchburchaksimon, eksponensial, trapesiyasimon funksiyalar orqali approksimatsiyalash taklif etiladi. Bunday holatda tanlangan funksiyalar sinfini o'zining chegarasidan chiqarib yubormaydigan nisbatan sodda asosiy amallarni qurish imkoniyati mavjuddir [109].

Noravshan sonning chegaralari. Agar *a* songa nisbatan quyidagi munosabat bajarilsa

$$\forall \delta \mu_A = 0; \quad \mu(a-\delta) \neq 0, \mu(a+\delta) \neq 0, \tag{1.1.20}$$

u holda u tegishlilik funksiyaning chegarasi deyiladi. Agar bunday chegaralar ikkita: yuqori (b) va quyi(a) ekanligini hisobga olsak, A noravshan sonni quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$A = \int_{a}^{\bar{a}} (x-a)/x + \int_{\bar{a}}^{b} (b-x)/x. \tag{1.1.21}$$

Oldingi boblarda keltirilgan u*mumlashtirish tamoyili* quyidagi ko'rinishni oladi**.** Haqiqiy R to'g'ri chiziqda A va B noravshan sonlar berilgan bo'lsin. A va B lar ustida * amalini quyidagi munosabatdan foydalangan holda amalga oshirish mumkin

$$A*B = \int_{R} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))/(x*y). \tag{1.1.22}$$

Oldingi bobda aytilgan fikrlarni qollab, * gipotetik amalining o'rniga arifmetik +, -, $\times$, : lardan foydalangan holda A va B ustidagi to'rtta arifmetik amalni hosil qilib olish mumkin:

$$A+B = \int_{R} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))/(x+y), \tag{1.2.23}$$

$$A-B = \int_{R} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))/(x-y), \tag{1.1.24}$$

$$A\times B = \int_{R} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))/(x\times y), \tag{1.1.25}$$

$$A:B = \int_{R} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))/(x:y). \tag{1.1.26}$$

(1.1.21) dan foydalangan holda quyidagini hosil qilib olish mumkin:

$$\begin{aligned} A*B &= \left(\int_{a}^{\bar{a}} \mu_A(x)/x + \int_{\bar{a}}^{b} \mu_A(x)/x \right) * \left(\int_{a'}^{\bar{b}} \mu_B(x)/x + \int_{\bar{b}}^{b'} \mu_B(x)/x \right) = \\ &= \int_{a''}^{\bar{a}*\bar{b}} \mu_{A*B}(x)/x + \int_{\bar{a}*\bar{b}}^{b''} \mu_{A*B}(x)/x. \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

Bu yerda a'',b'' - a, b dan hosil qilib olinadi, a',b' esa ma'lum amalga qarab hosil qilinadi, $\mu_{A*B}(x)$ amalga qarab va μ ning normallashinuviga qarab aniqlanadi. $A+B$ ni hisoblaymiz:

$$A+B=\left(\int_{a}^{\bar{a}}\mu_A(x)/x+\int_{\bar{a}}^{b}\mu_A(x)/x\right)+\left(\int_{a'}^{\bar{b}}\mu_B(x)/x+\int_{\bar{b}}^{b'}\mu_B(x)/x\right)=$$
$$=\int_{a''}^{\bar{c}}\mu_C(x)/x+\int_{\bar{c}}^{b''}\mu_C(x)/x=C, \tag{1.1.28}$$

bu yerda

$$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}\,,\ a''=a+a'\,,\ b''=b+b'\ . \tag{1.1.29}$$

μ_C $\mu_C=k_1x+k_2$ ko'rinishda aniqlanadi. Normallashtirishdan kelib chiqqan holda $a''\le x\le \bar{c}$ ga nisbatan (1.1.28) ni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$A+B=\int_{a''}^{\bar{c}}\frac{x-a''}{\bar{c}-a''}\Big/x+\int_{\bar{c}}^{b''}\frac{b''-x}{b''-\bar{c}}\Big/x=C\,. \tag{1.1.30}$$

Qolgan arifmetik amallar uchun shunga o'xshash usulda quyidagilarni hosil qilish mumkin [5]:

$$A-B=\int_{a''}^{\bar{c}}\frac{x-a''}{\bar{c}-a''}\Big/x+\int_{\bar{c}}^{b''}\frac{b''-x}{b''-\bar{c}}\Big/x=C\ , \tag{1.1.31}$$

bu yerda

$$a''=a-b'\,,\ b''=b-a'\,,\ \bar{c}=\bar{a}-\bar{b}\,. \tag{1.1.32}$$

Tegishlilik funksiyasini $\mu_c=k_1\sqrt{x}+k_2$ ko'rinishda qabul qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A*B=\int_{a''}^{\bar{c}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a''}}{\sqrt{\bar{c}}-\sqrt{a''}}\Big/x+\int_{\bar{c}}^{b''}\frac{\sqrt{b''}-\sqrt{x}}{\sqrt{b''}-\sqrt{\bar{c}}}\Big/x=C\,. \tag{1.1.33}$$

Bu yerda

$$a'' = a * a',\ b'' = b * b',\ \bar{c} = \bar{a} * \bar{b}\ . \qquad (1.1.34)$$

μ_C tegishlilik funksiyasini $\mu_C = \frac{k_1}{x} + k_2$ ko'rinishda qabul qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A : B = \int_{a''}^{\bar{c}} \frac{(x - a'')\bar{c}}{(\bar{c} - a'')x} \Big/ x + \int_{\bar{c}}^{b''} \frac{(b'' - x)\bar{c}}{(b'' - \bar{c})x} \Big/ x = C\ . \qquad (1.1.35)$$

Bu yerda

$$a'' = a' : a,\ b'' = b' : b,\ \bar{c} = \bar{b} : \bar{a}\ . \qquad (1.1.36)$$

Misollar. A=taxminan 6=$\tilde{6}$; B=taxminan 8=$\tilde{8}$.

$$\tilde{6} = \int_5^6 (x-5)/x + \int_6^7 (7-x)/x,$$

x=5 da: $\tilde{6}\big|_{x=5} = \int_5^6 (x-5)_{x=5}$=5-5=0;

x=5,5 da: $\tilde{6}\big|_{x=5,5} = \int_5^6 (x-5)_{x=5,5}$=5,5-5=0,5;

x=6 da: $\tilde{6}\big|_{x=6} = \int_5^6 (x-5)_{x=6}$=6-5=1;

x=6,5 da: $\tilde{6}\big|_{x=6,5} = \int_6^7 (7-x)_{x=6,5}$=7-6,5=0,5;

x=7 da: $\tilde{6}\big|_{x=7} = \int_6^7 (7-x)_{x=7}$=7-7=0.

Demak

$$\tilde{6} = \{0/5; 0,5/5,5; 1/6; 0,5/6,5; 0/7\}\ .$$

$\tilde{8}$ uchun x=6, 7, 8, 9 va 10 da shunga o'xshash usulda quyidagiga ega bo'lish mumkin:

$$\tilde{8}=\{0/6;0{,}5/7;1/8;0{,}5/9;0/10\}.$$

Noravshan sonlarning grafiklari 13.1-rasmda keltirilgan. Quyi va yuqori chegaralar hamda ushbu sonlarning balandliklari quyidagicha: $\tilde{6}$ uchun: a=5, b=7, $\bar{a}=6$; $\tilde{8}$ uchun: $a'=6, b'=10, \bar{b}=8$. Quyida $\tilde{6}$ va $\tilde{8}$ ustidagi to'rtta amal keltirilgan.

Qo'shish. Avvalo (1.1.29) ga ko'ra ($\tilde{6}+\tilde{8}$) yig'indining chegaralari va balandligini hisoblaymiz:

$$a''=a+a'=5+6=11;\quad b''=b+b'=7+10=17;\quad \bar{c}=\bar{a}+\bar{b}=6+8=14.$$

(1.1.30) ni hisobga olgan holda quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\tilde{6}+\tilde{8}=\int_{11}^{14}\frac{x-11}{3}\Big/x+\int_{14}^{17}\frac{17-x}{3}\Big/x=\tilde{14}.$$

$\tilde{14}$ ni har xil *x* larda hisoblab*: x=12,5; x=15,5* $\tilde{14}$={0/11; 0,5/12,5; 1/14; 0,5/15; 0/17} larni hosil qilib olish mumkin, ular 1.1.1-rasmda grafik tasvirlangan.

Ayirish. $\tilde{8}$-$\tilde{6}$ ayirmaning chegaralari va balandligi (1.1.32) ga binoan quyidagicha aniqlanadi:

$$a''=a'-a=6-5=1;\quad b''=b'-b=10-7=3;\quad \bar{c}=\bar{b}-\bar{a}=8-6=2.$$

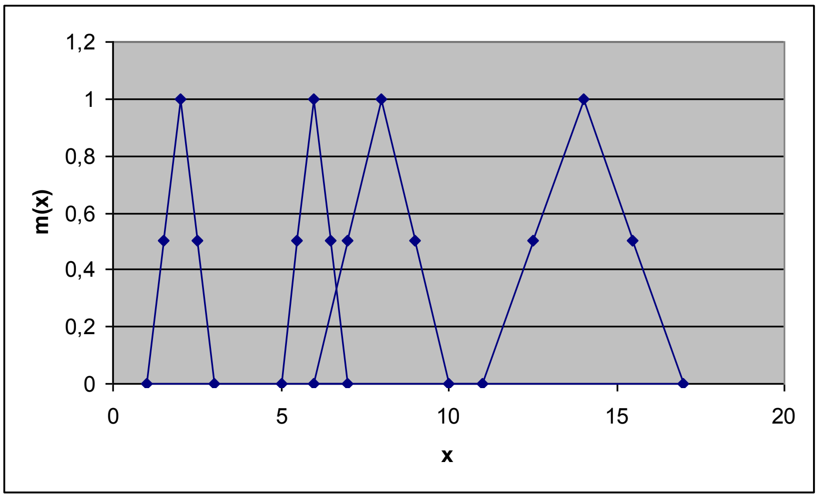
(1.1.32) ni hisobga olib, quyidagilarni hosil qilish mumkin:

$$\tilde{8}-\tilde{6}=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{3-2}\Big/x+\int_{2}^{3}\frac{3-x}{3-2}\Big/x=\tilde{2}.$$

Tegishlilik funksiyasining *x*=1,5 va *x*=2,5 dagi qiymatlari mos ravishda 0,5 va 0,5 ga teng bo'ladi. U holda

$$\tilde{2}=\{0/1;0{,}5/1{,}5;1/2;0{,}5/2{,}5;0/3\},$$

U 1.1.1-rasmda grafik tasvirlangan.



1.1.1. Noravshan sonlar:

TAXMINAN 2. TAXMINAN 6.TAXMINAN 8. TAXMINAN 14

Ko'paytirish. (1.1.34) munosabat orqali $\tilde{6}\times\tilde{8}: a''=a\times a'=5\times 6=30;\quad b''=b\times b'=7\times 10=70;\quad \bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=6\times 8=48$ chegara va balandlikni aniqlaymiz.

(1.1.33) ni hisobga olib $\mu_{\tilde{6}\times\tilde{8}}$ tegishlilik funksiyasini quyidagicha tasvirlash mumkin:

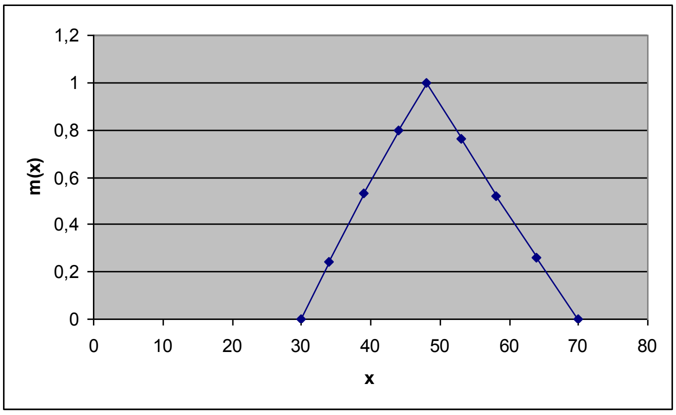
$$\tilde{6}\times\tilde{8}=\int_{30}^{48}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{30}}{\sqrt{48}-\sqrt{30}}\Big/x+\int_{48}^{70}\frac{\sqrt{70}-\sqrt{x}}{\sqrt{70}-\sqrt{48}}\Big/x=$$

$$=\int_{30}^{48}\frac{\sqrt{x}-5{,}48}{1{,}45}\Big/x+\int_{48}^{70}\frac{8{,}37-\sqrt{x}}{1{,}44}\Big/x=\widetilde{48}.$$

Tegishlilik funksiyasining *x=34; x=39; x=53; x=58* nuqtalardagi qiymati mos ravishda 0,24; 0,53; 0,76; 0,52 ga teng bo'ladi. Shunday qilib

$$\tilde{6}\times\tilde{8}=\widetilde{48}=\{0/30;\,0{,}24/34;\,0{,}53/39;\,0{,}8/44;\,1/48;\,0{,}76/53;\,0{,}52/58;\,0{,}26/64;\,0/70\}.$$

U 1.1.2-rasmda grafik tasvirlangan.



1.1.2-rasm. Noravshan son TAXMINAN 48

Bo'lish. (1.1.36) ga ko'ra $\tilde{8}$ ni $\tilde{6}$ ga bo'lish natijasining chegarasi va balandligi quyidagiga teng bo'ladi:

$$a'' = a : b' = 6 : 7 = 0{,}86;\ b'' = b : a' = 10 : 5 = 2{,}0;\ \bar{c} = \bar{b} : \bar{a} = 8 : 6 = 1{,}33\,.$$

Tegishlilik funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

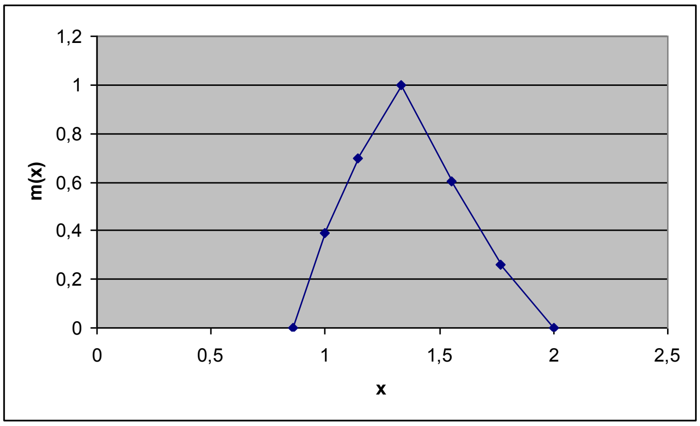
$$\tilde{8} : \tilde{6} = \int\limits_{0,86}^{1,33} \frac{(x-0{,}86)\cdot 1{,}33}{(1{,}33-0{,}86)\cdot x}\Big/ x + \int\limits_{1,33}^{2,0} \frac{(2{,}0-x)\cdot 1{,}33}{(2{,}0-1{,}33)\cdot x}\Big/ x =$$

$$= \int\limits_{0,86}^{1,33} \frac{(x-0{,}86)\cdot 1{,}33}{0{,}47\cdot x}\Big/ x + \int\limits_{1,33}^{2,0} \frac{(2{,}0-x)\cdot 1{,}33}{0{,}67\cdot x}\Big/ x = 1{,}3\tilde{3}.$$

Tegishlilik funksiyasining *x=1,0; x=1,14; x=1,55; x=1,77* nuqtalardagi qiymatlarini hisoblab va mos ravishda 0,39; 0,70; 0,60; 0,26 natijalarni olib, quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\tilde{8} : \tilde{6} = \{0/0{,}86;\ 0{,}39/1{,}0;\ 0{,}70/1{,}14;\ 1/1{,}33;\ 0{,}60/1{,}55;\ 0{,}26/1{,}77;\ 0/2{,}0\}\,.$$

U grafik ravishda 1.1.3-rasmda tasvirlangan.



1.1.3-rasm. Noravshan son TAXMINAN 1,33

Quyida darajali ko'phadlardan foydalanishga asoslangan noravshan sonlar ustida amallar bajarishning boshqa usulini ko'rib chiqamiz, undagi hisoblashlar umumlashtirish tamoyiliga asoslangan amallarga nisbatan soddalashtirilgan [2-5]. Bunda qo'shimcha ravishda quyidagi ta'riflardan foydalanish lozim [5]: R dagi * binar amal o'suvchi deyiladi, agar $(x_1 > y_1, x_2 > y_2) \Rightarrow x_1 * x_2 > y_1 * y_2$ bo'lsa. * amal kamayuvchi deyiladi, agar $(x_1 > y_1, x_2 > y_2) \Rightarrow x_1 * x_2 < y_1 * y_2$.

Agar μ_A va μ_B tegishlilik funksiyali noravshan A va B sonlar berilgan bo'lsa, u holda ular ustidagi umumlashgan * amalning natijasi quyidagi tegishlilik funksiyasi orqali berilgan $C = A * B$ noravshan sondir:

$$\mu_C(z) = \sup_{Z=X*Y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \tag{1.1.37}$$

Aniqroq qilib aytganda, to'rtta arifmetik amalni quyidagicha tasvirlash mumkin:

Qo'shish.

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{Z=X+Y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \sup_X \min(\mu_A(x), \mu_B(z-x)). \tag{1.1.38}$$

Ayirish.

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{Z=X-Y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \sup_X \min(\mu_A(x), \mu_B(x-z)). \tag{1.1.39}$$

Ko'paytirish.

$$\mu_{A\times B}(z)=\sup_{Z=X\times Y}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))=\sup_X\min(\mu_A(x),\mu_B(z:x)),\ x\neq 0. \quad (1.1.40)$$

Bo'lish.

$$\begin{aligned}\mu_{A:B}(z)&=\sup_{Z=X:Y}\min(\mu_A(x),\mu_B(y))=\sup_X\min(\mu_A(x),\mu_B(x:z))=\\&=\sup_Y\min(\mu_A(yz),\mu_B(y)).\end{aligned} \quad (1.1.41)$$

Agar *A* va *B* noravshan sonlar quyidagicha tasvirlansa:

$$A=\{\omega_1/x_{11};\ \omega_2/x_{21};\ \omega_1/x_{12}\};\qquad B=\{\omega_1/y_{11};\ \omega_2/y_{21};\ \omega_1/y_{12}\},$$

u holda ular ustidagi * umumlashgan amalning natijasi quyidagi noravshan son bo'ladi:

$$C=A*B=\{\omega_1/(x_{11}*y_{11});\ \omega_2/(x_{21}*y_{21});\ \omega_1/(x_{12}*y_{12}\}. \quad (1.1.42)$$

Bu * amal o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lganida o'rinlidir. Ayirish va bo'lish amallari bunday emas, lekin ularni quyidagicha tasvirlash mumkin [101]:

$$A-B=A+(-B);\qquad A:B=A\times(B^{-1}). \quad (1.1.43)$$

Misollar. Ikkita noravshan son berilgan

$$\tilde{2}=\{0/1;\ 0{,}5/1{,}5;\ 1/2;\ 0{,}5/2{,}5;\ 0/3\},$$

$$\tilde{3}=\{0/2;\ 0{,}5/2{,}5;\ 1/3;\ 0{,}5/3{,}5;\ 0/4\}.$$

Quyida ular ustida to'rtta umumlashgan amal bajariladi $(+,-,\times,:)$.

Qo'shish:

$$\begin{aligned}\tilde{3}+\tilde{2}&=\{0/(2+1);\ 0{,}5/(2{,}5+1{,}5);\ 1/(3+2);\ 0{,}5/(3{,}5+2{,}5);\\&0/(4+3)\}=\{0/3;\ 0{,}5/4;\ 1/5;\ 0{,}5/6;\ 0/7\}.\end{aligned}$$

Ko'paytirish:

$$\tilde{3}\times\tilde{2}=\{0/2;\ 0{,}5/3{,}75;\ 1/6;\ 0{,}5/8{,}75;\quad 0/12\}.$$

Ayirish:

$$-\tilde{2}=\{0/(-3);\ 0{,}5/(-2{,}5);\ 1/(-2);\ 0{,}5/(-1{,}5);\ 0/(-1)\};$$

$$\tilde{3}-\tilde{2}=\tilde{3}+(-\tilde{2})=\{0/(2-3);\ 0{,}5/(2{,}5-2{,}5);\ 1/(3-2);\ 0{,}5/(3{,}5-1{,}5);$$
$$0/(4-1)\}=\{0/(-1);\ 0{,}5/0;\ 1/1;\ 0{,}5/2;\ 0/3\}.$$

Bo'lish:

$$\tilde{2}^{-1}=\{0/(1:1);\ 0{,}5/(1:1{,}5);\ 1/(1:2);\ 0{,}5/(1:2{,}5);\ 0/(1:3)\}=$$
$$=\{0/1;\ 0{,}5/0{,}66;\ 1/0{,}5;\ 0{,}5/0{,}4;\ 0/0{,}33\}=\{0/0{,}33;\ 0{,}5/0{,}4;\ 1/0{,}5;\ 0{,}5/0{,}66;\ 0/1\};$$

$$\tilde{3}:\tilde{2}=3\times(2^{-1})=\{0/0{,}66;\ 0{,}5/1;\ 1/1{,}5;\ 0{,}5/2{,}33;\ 0/4\}.$$

Qo'shimcha ayirish va bo'lish amallari. Noravshan tenglamalarni yechsihda qarama-qarshi va teskari sonlarni hisoblash kerak bo'ladi [5]. Yuqorida ko'rib chiqilgan arifmetik amallar, umumlashtirish tamoyiliga asoslangan bo'lib, qarama-qarshi A' ($A+A'=0$ bo'ladigan) va teskari sonni *A''*($A\times A''=1$) topishga imkon bermaydi. Shuningdek, quyidagi tengsizliklar o'rinlidir:

$$(A-B)+B\neq A;\quad (A:B)\times B\neq A.$$

Quyidagi tenglikni aniq yechish uchun qo'shimcha ayirish (--) va qo'shimcha bo'lish (//) amalidan foydalaniladi:

$$AX+B=D, \tag{1.1.44}$$

bu yerda *A*, *B*, *D* – noravshan sonlar, *X*-noma'lum,

Xususiy holda (1.1.44) ning yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$X=D—B. \tag{1.1.45}$$

B va *D* to'plamning tashuvchilari mos ravishda $S_B=[b_1,b_2]$ va $S_D=[d_1,d_2]$ oraliqlardir. Qo'shimcha ayirish yordamida aniqlanuvchi *X* to'plamning tashuvchisi quyidagi ko'rinishda bo'ladi :

$$S_X = [d_1 - b_1, d_2 - b_2], \qquad (1.1.46)$$

tegishlilik funksiyasi yordamida ifodalangan ko'rinishi esa quyidagicha bo'ladi [5]:

$$\mu_X(x) = \inf_z \begin{cases} 1, & agar\ \mu_D(z-x) < \mu_D(z); \\ \mu_D, & agar\ \mu_B(z-x) \geq \mu_D(z). \end{cases} \qquad (1.1.47)$$

Ko'rib chiqilayotgan ayirish amali kamayuvchining tashuvchisi uzunligi ayiriluvchinikidan kichik bo'lgandagina aniqlangan.

Qo'shimcha bo'lish. *AX=B* tenglamaning yechimi *X=D//A* to'plam bo'ladi. Agar *A* va *D* to'plamning tashuvchilari $S_A = [a_1, a_2]$ va $S_D = [d_1, d_2]$ bo'lsa, u holda *X* to'plamning tashuvchisi quyidagicha aniqlanadi [5,101]:

$$S_X = [d_1, d_2] // [a_1, a_2] = \begin{cases} d_1 : a_1, d_2 : a_2, \ agar & S_A > 0; S_D > 0, \\ d_1 : a_2, d_2 : a_1, \ agar & S_A > 0; S_D < 0, \\ d_2 : a_1, d_1 : a_2, \ agar & S_A < 0; S_D > 0, \\ d_2 : a_2, d_1 : a_1, \ agar & S_A < 0; S_D < 0, \end{cases}$$

yoki uning tegishlilik funksiyasi orqali ifodalangan ko'rinishi:

$$\mu_X(x) = \inf_t \begin{cases} 1, & agar\ \mu_A(t/x) < \mu_D(t), \\ \mu_D(t), & agar\ \mu_A(t/x) \geq \mu_D(t). \end{cases}$$

Bu amal ixtiyoriy *A* va *D* sonlarning ixtiyoriysi uchun aniqlanmagan, u oraliq tashuvchilari ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi sonlarga nisbatan aniqlangandir [5].

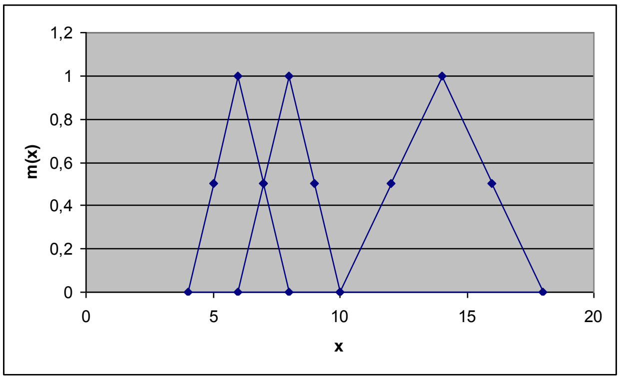
Misollar. Quyidagi tenglamani yechamiz:

$$X+B=D, \qquad (1.1.48)$$

bunda B=$\tilde{8}$={0/6; 0,5/7; 1/8; 0,5/9; 0/10),

D=$\tilde{14}$={0/10; 0,5/12; 1/14; 0,5/16; 0/18}.

Ularning tegishlilik funksiyalari 1.1.4-rasmda tasvirlangan.



1.1.4-rasm. Qo’shimcha ayirish amali uchun to’plamlarning tegishlilik funksiyasi

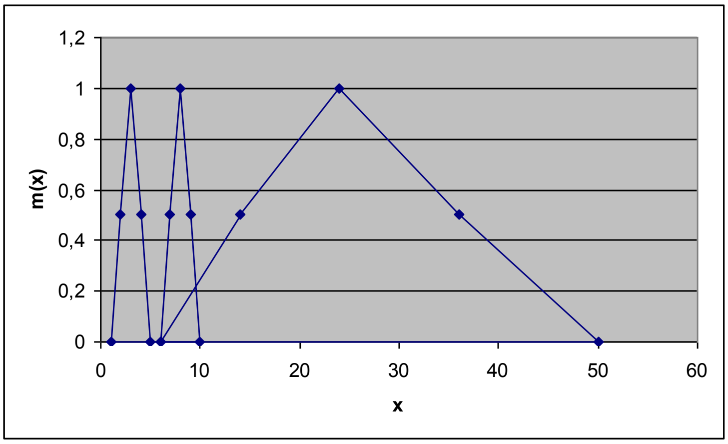
B va D uchun oraliq-tashuvchilar $S_B=[6{,}10]$; $S_D=[10{,}18]$. (1.1.46) ga ko’ra $S_X=[4{,}8]$. (1.1.47) formulaga ko’ra 1.1.4-rasmda grafik usulda tasvirlangan $\mu_X(x)$ tegishlilik funksiyasini aniqlash mumkin.

Mos ravishda, $X=(0/4;\ 0{,}5/5;\ 1{,}0/6;\ 0{,}5/7;\ 0/8)$.

$A=\tilde{8}=\{0/6;\ 0{,}5/7;\ 1/8;\ 0{,}5/9;\ 0/10\}$ va $D=\tilde{24}=\{0/6;\ 0{,}5/14;\ 1{,}0/24;\ 0{,}5/36;\ 0/50\}$ da quyidagi tenglamani yechamiz:

$$AX=D. \tag{1.1.49}$$

μ_A va μ_D tegishlilik funksiyalari 1.1.5-rasmda tasvirlangan.



1.1.5-rasm. Qo’shimcha bo’lish amali uchun to’plamlarning tegishlilik funksiyalari

A va D to'plamlarning oraliq-tashuvchilari $S_A = [6,10]$; $S_D = [6,50]$. (1.1.46) ga ko'ra $S_X = [6:6,50:10] = [1,5]$.

(1.1.47) ga ko'ra, 1.1.5-rasmda keltirilgan $\mu_X(x)$ tegishlilik funksiyasining qiymatini aniqlash mumkin.

Tenglamaning yechimi:

X={0/1; 0,5/2; 1/3; 0,5/4; 0/5}.

L-R turdagi noravshan sonlar.

L yoki *R* orqali belgilanuvchi funksiya quyidagi shartlarni bajarsa, noravshan sonni ifodalovchi funksiyadir:

1) *L(x)=L(-x)*;
2) *L(0)=1*;
3) *L* $[0,\infty)$ oraliqda os'maydi.

Misollar.

а) $L(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1]; \\ 0, & aksholda. \end{cases}$

б) $L(x) = \max(0; 1 - |x|^P), \quad p \geq 0$.

в) $L(x) = \theta^{-|x|p}, \quad p > 0$.

г) $L(x) = 1/(1 + |x|^p), \quad p \geq 0$.

M noravshan son *L-R* turda deyiladi, agar u quyidagi tarzda berilsa:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m\, da, \ \alpha > 0; \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & x \geq m\, da, \ \beta > 0. \end{cases}$$

L chap ifoda deyiladi; *R*-o'ng ifoda; *m* - *M* ning o'rta qiymati; α va β mos ravishda chap va o'ng kengaytma deyiladi. Kengaytmalar nolga teng bo'lganida, *M* sodda son bo'ladi. Kengaytmani oshirib borgan sari, *M* shunchalik noravshanlashib boradi. *L*-*R* turdagi sonning belgili yozuvi $M=(m,\alpha,\beta)_{LR}$.

L-*R* turdagi sonlar ustida algebraik amallarni ko'rib chiqamiz.

M va *N* – uzluksiz tegishlilik funksiyali ikkita noravshan son; * - uzluksiz o'suvchi binar amal; $[\lambda_M,\rho_M]$ - *M* noravshan sonning tegishlilik funksiyasi kamaymaydigan ma'lum bir oraliq ($\lambda_m=\rho_m$); $[\lambda_N,\rho_N]$ - *N* ga nisbatan o'xshash oraliq, jumladan

$$\forall x\in[\lambda_M,\rho_M],\ \forall y\in[\lambda_N,\rho_N] \text{ uchun } \mu_M(x)=\mu_N(y)=\omega .$$

$M*N$ tegishlilik funksiyasi umumlashtirish tamoyili bo'yicha aniqlangan noravshan to'plam bo'lsa, undagi uzluksiz tegishlilik funksiyali noravshan son ixtiyoriy $t\in[\lambda_M*\lambda_N,\rho_M*\rho_N]$ nuqtada $\mu_{M*N}(t)=\omega$ formula bo'yicha aniqlanadi.

Noravshan sonlarni qo'shish. Ikkita noravshan sonning o'suvchi qismlarini ko'rib chiqamiz

$$M=(m,\alpha,\beta)_{LR} \text{ va } N=(n,\gamma,\delta)_{LR} .$$

x va *y* –yagona haqiqiy sonlar bo'lib, bunda

$$L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right)=\omega=L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right).$$

Bu yerda ω - [0,1] kesmadagi qo'zg'almas nuqta. Bu quyidagiga ekvivalent

$$x=m-\alpha L^{-1}(\omega),\quad y=n-\gamma L^{-1}(\omega), \qquad (1.1.50)$$

(1.1.50) dan quyidagilar kelib chiqadi:

$$z=x+y=m+n-(\alpha-\gamma)L^{-1}(\omega) \text{ va } L\left(\frac{m+n-z}{\alpha+\gamma}\right)=\omega .$$

Huddi shunday, M va N ning kamyuvchi qismlariga nisbatan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$R\left(\frac{z-(m+n)}{\beta+\delta}\right)=\omega .$$

Bu yerdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\oplus(n,\gamma,\delta)_{LR}=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR} . \qquad (1.1.51)$$

Umumiy ko'rinishda:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\oplus(n,\gamma,\delta)_{LR}=(m+n,1,1)_{L''R''} ,$$

bu yerda $L''=(\alpha L^{-1}+\gamma L^{-1})^{-1}, \quad R''=(\beta L^{-1}+\delta L^{-1})^{-1}$.

Norvahsan sonni inkor etish formulasining ko'rinishi quyidagicha

$$-(m,\alpha,\beta)_{LR}=(-m,\beta,\alpha)_{RL} . \qquad (1.1.52)$$

Noravshan sonni ifodalovchi L va R funksiyalarning o'rni almashdi. (1.1.51) va (1.1.52) dan ayirish formulasini keltirib chiqarish mumkin

$$(m,\alpha,\beta)_{LR}-(n,\gamma,\delta)_{RL}=(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR} .$$

Ko'paytirish. Oldindagi kabi, quyidagiga ega bo'lish mumkin:

$$z=xy=mn+(m\gamma+n\alpha)L^{-1}(\omega)+\alpha\gamma(L^{-1}(\omega))^{2} . \qquad (1.1.53)$$

(1.1.53) tenglama $L^{-1}(\omega)$ ga nisbatan ikkinchi tartibli tenglama deyiladi va $z\le mn$ holda bitta musbat ildizga ega. $\mu_{M\otimes N}$ ko'paytmaning tegishlilik funksiyasini aniqlash mumkin. Odatda bu $M\otimes N$ ko'paytma L-R turdagi noravshan son bo'lmaydi. Shunga qaramay, agar α va β m va n ga nisbatan kichik bo'lsa hamda (yoki) ω 1 atrofida joylashgan bo'lsa, $\alpha\gamma(L^{-1}(\omega))^{2}$ hadni hisobga olmasa bo'ladi. Bunda tenglama soddalashadi va taqribiy formualarni hosil qilish mumkin:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(n,\gamma,\delta)_{LR}=(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)_{LR}, \quad M>0,\ N>0\,da ,$$

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \otimes (n,\gamma,\delta)_{LR} = (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{LR}, \quad M<0,\ N>0\, da\ ,$$

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \otimes (n,\gamma,\delta)_{LR} = (mn, -n\beta - m\delta, n\alpha - m\gamma)_{LR}, \quad M<0,\ N<0\, da\ .$$

Agar kengaytmalar o'rta qiymatlarga nisbatan kichik bo'lmasa, boshqa taqribiy formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, agar $M>0$ va $N>0$ bo'lsa, u holda

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \otimes (n,\gamma,\delta)_{LR} \approx (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta)_{LR}\ .$$

Ushbu tenglik orqali aniqlangan tegishlilik funksiyasi μ bilan kamida uchta nuqtada ustma-ust tushsa, u holda:

$$(mn,1);\ [(m-\alpha)(n-\gamma), L(1)];\ [(m+\beta)(n+\delta), R(1)]\ .$$

Skalyarga ko'paytirish. Quyidagi formulalar o'rinli:

$$\forall\lambda>0\ \lambda\in R:\quad \lambda\otimes(m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}\ ,$$

$$\forall\lambda<0\ \lambda\in R:\quad \lambda\otimes(m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\alpha, -\lambda\beta)_{LR}\ .$$

Bo'lish. Musbat, noravshan L-R va R-L turdagi sonlar uchun quyidagi taxminiy natijalar olingan:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \div (n,\gamma,\delta)_{LR} \approx \left(\frac{m}{\tilde{n}}, \frac{\delta m + \alpha n}{n^2}, \frac{\gamma m + \beta n}{n^2}\right)_{LR}\ .$$

Noravshan sonlarni solishtirish.

Noravshan sonlarni solishtiranda ikki turdagi savol paydo bo'ladi:

1. Berilgan noravshan sonlar oilasidagi eng katta (eng kichik) sonning noravshan qiymati qanday?

2. "$\tilde{m}$ $\tilde{n}$ dan katta (kichik)" mulohazaning chinlik qiymati nimaga teng". Boshqa so'z bilan aytganda, $\tilde{m}$ ning $\tilde{n}$ dan katta (kichik) bo'lishi ehtimoli qanday?

Birinchi savolga javob berish uchun quyidagi funksiyaga nisbatan qo'llanilgan umumlashtirish tamoyilidan foydalanamiz:

$$z(m,n)=max\{m;n\};$$

$$t(m,n)=min\{m;n\}.$$

Agar $\mu_1(m), \mu_2(n)$ - $\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ noravshan sonlarning tegishlilik funksiyalari bo'lsa, u holda umumlashtirish tamoyiliga binoan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu_3(z) = \sup_{z=\max(m;n)} \min\{\mu_1(m), \mu_2(n)\};$$

$$\mu_4(t) = \sup_{z=\min(m;n)} \min\{\mu_1(m), \mu_2(n)\}.$$

μ_3 va μ_4 tegishlilik funksiyali $\tilde{z}$ va $\tilde{t}$ noravshan to'plamlar $\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ dan farqli qavariq normal sonlar bo'ladi.

Ikkinchi savolga javob berishga harakat qilamiz. "$\tilde{n}$ $\tilde{m}$ dan katta" mulohazaning chinlik darajasi $v(\tilde{n} > \tilde{m})$ ko'rinishda yozib olinadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$v(\tilde{n} > \tilde{m}) = \max_{n \geq m} \min\{(\mu_1)\}.$$

«$\tilde{n}$ $\tilde{m}$ dan katta» hol uchun:

$$v(\tilde{n} > \tilde{m}) = \min\{\mu_1(A), \mu_2(B)\} = \min\{1,1\} = 1;$$

$$v(\tilde{m} > \tilde{n}) = \min\{\mu_1(C), \mu_2(C)\} = d.$$

D soni $\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ sonlarning farq qilish darajasini xarakterlaydi. *C* nuqtaning ordinatasi 1 ga qanchalik yaqin bo'lsa, $\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ sonalrdan qaysi biri kattaroq ekanligiga javob berish shunchalik qiyin bo'ladi.

$\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ *L*-*R* va *R*-*L* turdagi noravshan sonlar bo'ladi; $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$, $\tilde{n} = (n, \gamma, \delta)$, bunda *C* quyidagi tenglikdan topiladi:

$$(C - m)/\beta = (n - C)/\gamma.$$

Bu yerdan

$$C = (\beta n + \gamma m)/(\beta + \gamma) \text{ и } d = R[(n-m)/(\beta+\gamma)]. \tag{1.1.54}$$

Shunday qilib, ikkita noravshan sonning kesishmasi bo'lgan noravshan to'plamning balandligi (1.1.54) formula bo'yicha aniqlanadi (biz $m<n$ holni ko'rib chiqmoqdamiz). Demak, $\tilde{m}$ va $\tilde{n}$ ni solishtirish uchun ham $v(\tilde{m} > \tilde{n})$, ham $v(\tilde{m} < \tilde{n})$ ni bilish kerak. Agar, masalan $v(\tilde{m} > \tilde{n})$=1 bo'lsa, bu degani yoki $\tilde{m}$ $\tilde{n}$ dan katta, yoki ikkala noravshan son ularni ajratish mumkin bo'lishi uchun, juda uzoqda joylashgan. Bunday holda ma'lum bir τ chegaraviy qiymatni tanlab, agar $v(\tilde{n} > \tilde{m}) \le \tau$ bo'lsa, $\tilde{m}$ $\tilde{n}$ dan katta deb olish mumkin. Bu quyidagicha belgilanadi: $\tilde{m} \underset{\tau}{>} \tilde{n}$. *L-R* turdagi noravshan sonlar uchun qoida quyidagicha aniqlanishi mumkin:

$$\tilde{n} > \tilde{m} \Leftrightarrow n - m \ge \beta + \gamma; \ (\tau = R(1));$$

$$\tilde{m} > \tilde{n} \Leftrightarrow m - n \ge \alpha + \delta; \ (\tau = L(1)).$$

Bu yerda qisqalik uchun $\underset{\tau}{>}$ ning o'rniga > belgilash kiritilgan. "*n m* dan katta" uchun boshqa ta'rifni kiritish ham mumkin:

$$\tilde{n} \ge \tilde{m} \Leftrightarrow \max(\tilde{m}, \tilde{n}) = \tilde{n} \text{ va } \min(\tilde{m}, \tilde{n}) = \tilde{m}.$$

1. Noravshan $\tilde{n}$ soni noravshan $\tilde{m}$ sondan katta, agar

$$\begin{aligned} &n > m, \\ &n - \underline{n} \ge m - \underline{m}, \\ &n + \overline{n} \ge m + \overline{m}. \end{aligned} \tag{1.1.55}$$

2. $\tilde{m}$ norvashan son $\tilde{n}$ noravshan sondan kichik, agar

$$\begin{aligned} &m \le n, \\ &m - \underline{m} \le n - \underline{n}, \\ &m + \overline{m} \le n + \overline{n}. \end{aligned} \tag{1.1.56}$$

3. $\tilde{n}$ norvashan son $\tilde{m}$ norvashan songa teng, agar

$$
\begin{aligned}
&n = m, \\
&n - \underline{n} = m - \underline{m}, \\
&n + \overline{n} = m + \overline{m}.
\end{aligned}
\tag{1.1.57}
$$

Parametrlar noravshanlik darajasi va ko’rinishining sonli muqobillashtirish funksiyasining sezgirligiga ko’rsatadigan ta’sirining bir nechta turdagi funksiyalarga nisbatan o’tkazilgan tahlili [135] ishda keltirilgan. ARGUMENT tag prossessorda interval tahlillarni o’tkazish uchun ko’chiriladigan, universal, tuzilmaviy paketlarni yaratish bo’yicha qilingan urinishlar amallarning bajarilish vaqtini an’anaviy hisoblashlarga nisbatan 50-200 baravar ortishiga olib keldi [13]. Noravshan kattaliklar bilan ishlash maqsadida FUZZY turidagi o’zgaruvchilarni kiritish orqali dasturlashning standart tilini original tarzda kengaytirish [23] ishda keltirilgan. FAGOL tili noravshan kattaliklar ustida ularni uchburchaksimon tegishlilik funksiyasi yordamida *F*-funksiyaga approksimatsiyalash orqali hisoblashlar olib borish imkonini berdi.

Shuningdek universal mikroprosessor, OXQ noravshan to’plamlar ustida hisoblashlar olib borishga mo’ljallangan maxsus prosessorlar; lingvistik o’zgaruvchilarning boshlang’ich term-qiymatlarni saqlashga mo’ljallangan DXQ-termlardan iborat bo’lgan lingvistik terminal komplekslar yaratish bo’yicha ishlar olib borilmoqda[54,82].

Lekin ushbu usullarning barchasi natijaviy tegishlilik funksiyalarining ma’lum bir funksiyalar tomonidan approksimatsiyasiga asoslanadilar, bu esa axborotning yo’qolishi va noravshanlik sohasining ortishiga olib keladi.

1.2.Evolyutsion algoritmlarda genetik algoritmlarni tutgan o'rni

Genetik algoritmlar 50-yillarning boshlarida bir necha biologlar biologik tizimlarni simulyatsiyasi uchun kompyuterdan foydalanishganda paydo bo'la boshlangan[151,154]. Biroq genetik algoritmlar hozirgi darajadagidek mashhurlikka 1960-yillar oxiri va 1970-yillar boshlarida Michigan Universitetidan Jon Xolland boshchiligida o'tkazilgan ilmiy ishlar natijasida erishdi.

Genetik algoritm potentsial yechimlar populyatsiyasini ko'rib chiqish asosida ko'p yo'nalishli qidiruvni amalga oshiradi va u ushbu yo'nalishlar o'rtasida axborot almashinuvi va shakllanishini ta'minlaydi. Populyatsiyalar simulyatsiyalashgan evolyutsiyaga uchraydi: har bir generatsiyada nisbatan "yaxshi" yechimlar reproduktsiya uchun saqlanib qoladi, "yomon"lari esa chiqarib yuboriladi. Turli yechimlarni farqlash uchun muhit vazifasini bajaruvchi maqsad (baholash) funktsiyasidan foydalaniladi.

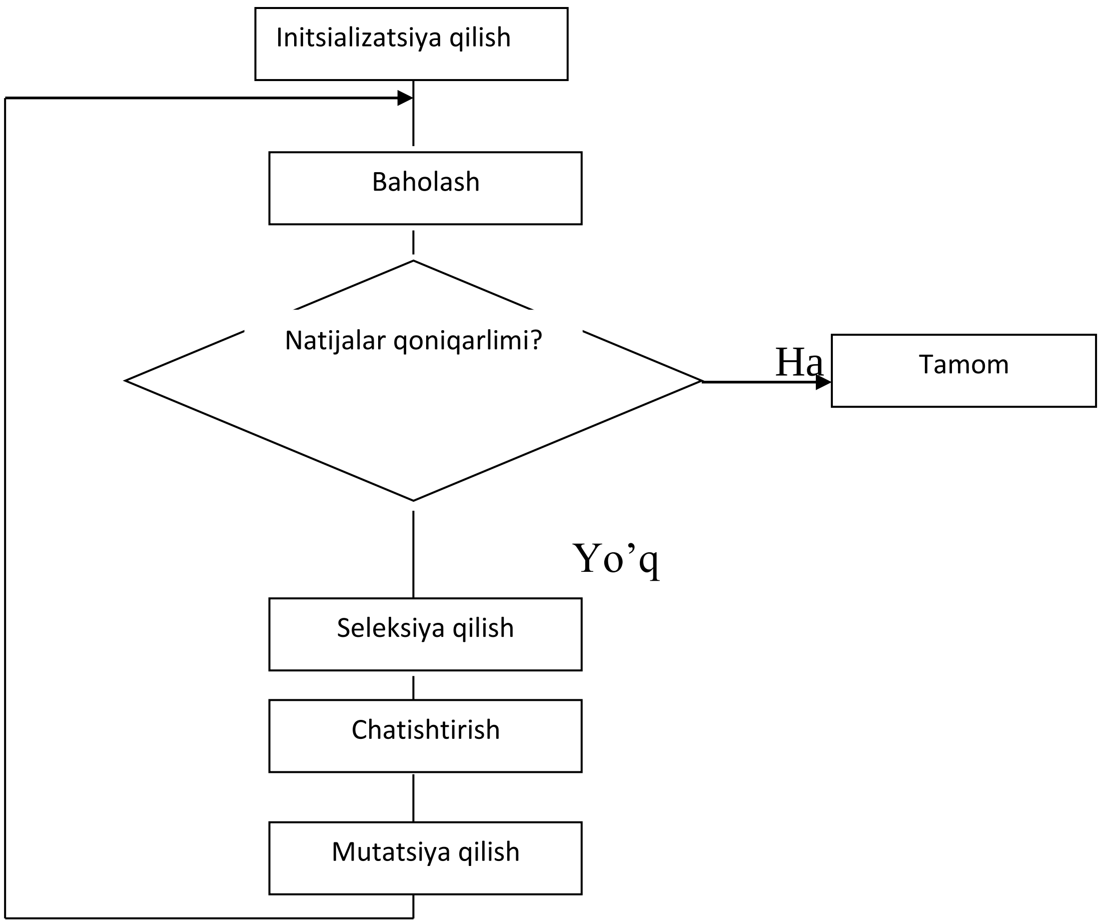
Sodda genetik algoritmni tuzilishi ixtiyoriy evolyutsion dasturning shakliga o'xshash bo'ladi. Aniq masala uchun genetik algoritm quyidagi blok-sxemaga ega (1.2.1-rasm).

Genetik algoritmning ishlash mexanizmi juda sodda bo'lib, amallarning soddaligi va samaraning yuqorililigi uning asosiy yutuqlaridan biri hisoblanadi.

Genetik algoritmlarning asosiy xossalarini ko'rib chiqaylik. Boshida individlar populyatsiyasi (xromosomalar deb ataluvchi bitlar satri) olinadi. Har bir individga qidiruv fazosidagi bitti nuqta mos qo'yiladi. Populyatsiya o'lchami masala o'lchamiga bog'liq bo'lib, u individlar soniga teng bo'ladi va uni tadqiqotchi beradi.

Har bir individ 0 va 1 lar yordamida kodlangan satrdir. Masalan, 0 dan 31 gacha bo'lgan butun sonlarni ikkilikda quyidagicha kodlashimiz mumkin.

(00000)
(00001)
(00010)
………
(11111)



1.2.1-rasm. Sodda GA ning tuzilishi

Bunda har bir satr 5 ta belgidan iborat, ya'ni 5 bit. Ularni bitlar, satr esa xromosoma deb ataladi.

O'zgaruvchilarni kodlash turli usullarda amalga oshirilishi mumkin. Bundan tashqari o'zgaruvchilari ikkili bo'lgan masalalar ham uchrab turadi, ularda kodlash shart emas. Shunday qilib, tasodifiy ravishda *n* ta individ olamiz va boshlang'ich populyatsiyani tuzamiz.

$$x_1 = (01100)$$
$$x_2 = (11001)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = (00011)$$

Bu nuqtalarda funktsiyaning qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n).$$

f(x) –tadqiq etiladigan funktsiya. Bu optimallashtiriladigan funktsiya ham bo'lishi mumkin.

Quyidagi yig'indini hisoblaymiz:

$$F = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

$f(x_i)$ - (x_i) - individid sifati (yaroqliligi)ning bahosi.

Barcha individlar va populyatsining yaroqliligi aniqlangach, har bir individning yashab ketish ehtimolligi quyidagicha hisoblanadi.

$$P_s^1 = f(x_1)/F,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_s^n = f(x_n)/F.$$

Har bir individning kumulyativ ehtimolliklari quyidagicha hisoblanadi.

$$P_{cum}^1 = P_s^1,$$

$$P_{cum}^2 = P_s^1 + P_s^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_{cum}^n = \sum_{i=1}^{n} P_s^i,$$

$$0 < P_{cum}^1 < P_{cum}^2 < \ldots < P_{cum}^n = 1.$$

Bu selektsiyani amalga oshirish uchun bajariladi. Selektsiya sun'iy ravishda tabiiy genetik selektsiya kabi amalga oshiriladi. Selektsiya natijasi yaroqliligi yuqori bo'lgan individlar yashash va ko'payish imkoniyati ko'proq, yaroqliligi past bo'lgan individlar yashash va ko'payish imkoniyati kamroq bo'lishidan iborat.

Selektsiyani amalga oshirish uchun [0,1] oraliqdan r_1 tasodifiy son olinadi. Agar $P_{cum}^k < r_1 < P_{cum}^{k+1}$, bo'lsa, bu x_{k+1}^1 xromosomani navbatdagi nasl uchun tanlanishini bildiradi. Bu jarayon r tasodifiy son bilan n marta takrorlanadi va n ta xromosoma navbatdagi nasl uchun tanlanadi. Shuning uchun yaroqliligi yuqori bo'lgan individlar yangi naslda bir nechta nusxalariga ega bo'lishi mumkin. Yaroqliligi kamlari esa yangi naslda umuman bo'lmasligi mumkin.

Genetik algoritmning ikkinchi asosiy operatori chatishtirish hisoblanadi. Chatishtirish uchun populyatsiyaning bir necha xromasomalari tanlanadi. Ularning soni P_c dastlabki chatishtirish ehtimolligiga bog'liq bo'ladi. Agar $P_c = 0.25$ bo'lsa, populyatsiya o'lchami 16 ga teng va har bir nasl olishda 4 tadan xromosoma qatnashadi. Agar x_m va x_k chatishtirish uchun tasodifiy tanlangan va xromosoma uzunligi 1 ga teng bo'lsa, u holda qabul qiluvchi tasodifiy j son $1 \leq j < I$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Faraz qilaylik, $x_m = (1101101)$, $x_k = (1110010)$ va j=3 bo'lsin.

Bu x_m va x_k avlodlar chatishtirish natijasida quyidagi ko'rinishga ega bo'lishini bildiradi:

$$x'_m = (1100010),$$
$$x'_k = (1111101).$$

j ning qiymati chatishtirish nuqtasi deb ataladi. Ushbu nuqtadan xromosomalar kesiladi va avlodlar olish uchun ularning o'rinlari almashtiriladi. Mazkur amalni qolgan tanlangan juftliklar uchun ham qo'llab, chatishtirish jarayonini yakunlaymiz va olingan yangi avlodlarni ularning ota-onasi bilan populyatsiyaga kiritamiz.

Genetik algoritmlardagi uchinchi asosiy amal – bu mutatsiyadir. Tabiiy mutatsiyaga o'xshash bo'lgan sun'iy mutatsiyada xromosomadagi bitta bit o'zgaradi. Ya'ni, agar $x_k = (1110010)$ xromosoma mutatsiya uchun ajratib olingan bo'lsa, u holda yana j (j ning qiymati qatordagi bitlar sonidan oshib ketmasligi kerak) tasodifiy soni beriladi va 0 dan 1 ga o'zgaruvchi (yoki aksincha) genning tartib raqati aniqlanadi. Faraz qilaylik, j=1. Bu x_k xromosomaning birinchi geni 1 dan 0 ga o'zgarishini bildiradi, ya'ni $x'_k = (0110010)$, qolgan genlar esa o'zgarmasdan qoladi. Olingan yangi xromosoma populyatsiyaga qo'shiladi. Keyin selektsiya o'tkaziladi, so'ngra boshlang'ich o'lchamli populyatsiya tuziladi.

Bu amallarni ketma-ket o'tkazib va yangi generatsiyalarni yaratib, har bir generatsiyada populyatsiyaning o'rtacha yaroqliligi yaxshilanganini kuzatish mumkin. Bir necha generatsiyalardan so'ng, populyatsiyaning yaroqliligining yaxshilanishi juda kichikligi ko'rinadi, shunda oxirgi generatsiyaning eng yaxshi organizmini masalaning yechimi deb tanlab, jarayonni to'xtatish mumkin.

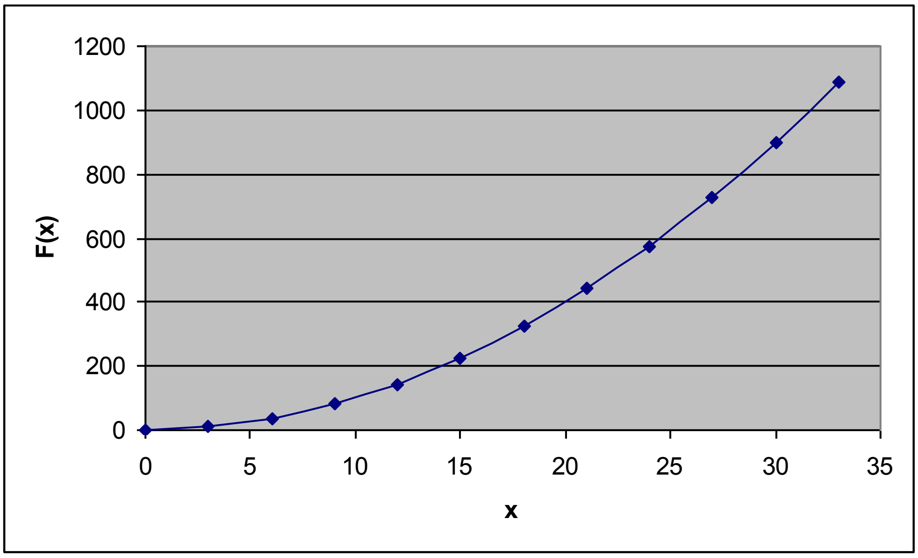
Odatda generatsiyalar soni avvaldan beriladi. Shuningdek P_m mutatsiyaning ehtimolligi ham oldindan beriladi. Bu qiymat mutatsiyaga uchraydigan xromosomalar sonini aniqlaydi. Ya'ni, agar populyatsiyaning o'lchami 20 va $P_m = 0.05$ ga teng bo'lsa, bu mutatsiyada 1 ta xromosoma ($20 \cdot 0.05 = 1$) qatnashishini bildiradi.

1.2.1. Muqobillashtirish masalasini genetik algoritm yordamida yechish

Mazkur bo'limda genetik algoritmning asosiy xususiyati ko'rib chiqiladi. Soddaroq bo'lishi uchun dastlab genetik algoritm yordamida bir o'zgaruvchili funktsiya optimizatsiyasini ko'rib chiqaylik. Masalan, $F(x) = x^2$ funktsiyaning $x \in [0,31]$ dagi maksimizatsiyani (1.2.2-rasm).

Genetik algoritmdan foydalanishdan oldin, birinchi navbatda o'zgaruvchini bitli satr ko'rinishida kodlab olishimiz zarur. 0 va 31 orasidagi ixtiyoriy butun sonni 5 xonali ikkilik son bilan ifodalash mumkin ((00000)=0 va (11111)=31). Bunda xromosoma uzunligi 5ga teng bo'ladi.

Boshlang'ich populyatsiya sifatida 5 ta genli ixtiyoriy 4 ta xromosomani olamiz. Masalan, 01101; 11000; 01000; 10011.



1.2.2-rasm. F(x) ni maksimizatsiyalash uchun

Navbatdagi qadamda olingan xromosomalarning yaroqliligi funktsiyaga o'zgaruvchining haqiqiy qiymatini qo'yish orqali tekshiriladi. Masalan, $x = 01000_2$ da $F(01000)_2 = F(8) = 64$. Shu tariqa barcha individlarni yaroqliligi tekshiriladi va quyidagi formula yordamida har bir individning yashab ketish ehtimolliklari hisoblanadi.

$$P_s^i = F_i / \sum_{j=1}^{4} F_j, \qquad i = \overline{1,4},$$

Quyidagi formula yordamida esa kumulyativ ehtimolliklari hisoblanadi.

$$P_{sum}^{i} = \sum_{j=1}^{i} F_s^{\,j}\,, \quad i = \overline{1,4}\,.$$

Olingan barcha ma'lumotlarni jadval ko’rinishida yozib olamiz.

1.2.1-jadval

Boshlang’ich populyatsiya	Butun qiymat	$F(x) = x^2$	P_s	P_{cum}	Selektsiyadan keyingi son
01101	13	169	0.14	0.14	1
11000	24	576	0.49	0.63	2
01000	8	64	0.06	0.69	0
10011	19	361	0.31	1	4
O’ртacha		293	0.25		1
Maksimal		576	0.49		2
Jami		1170	1		4

Selektsiyani amalga oshirish uchun oraliqdagi ixtiyoriy 4 ta son olamiz. Faraz qilaylik biz 0.1; 0.25; 0.5 va 0.8 sonlarini tanlagan bo’laylik. U holda bu sonlarni kumulyativ ehtimolliklar bilan solishtirib quyidagiga ega bo’lamiz:

$$0.1 < P_{cum}^{1},$$

$$P_{cum}^{1} < 0.25 < P_{cum}^{2},$$

$$P_{cum}^{1} < 0.5 < P_{cum}^{2},$$

$$P_{cum}^{3} < 0.8 < P_{cum}^{4}.$$

Tengsizliklarning o’ng tomoniga qarab, 1-chi va 4-chi xromosomalar yangi generatsiyada birinchi o’rinni olib selektsiyadan o’tganligini ko’rish mumkin [151-170].

Navbatdagi qadamda chatishtirish amali bajariladi. Agar chatishtirish ehtimolligi ($p_c = 1$) 1 ga teng bo’lsa, chatishtirish jarayonida 4 ($4 \cdot 1 = 4$) ta xromosomaning ishtirok etishini bildiradi. Bu xromosomalarni ixtiyoriy tanlab olamiz. 1-chi va 2-chi satrlarda chatishtirish nuqtasi 4, 3-chi va 4-chi satrlarda esa chatishtirish nuqtasini 2 deb olaylik. Olingan natijalar 1.2.2-jadvalda keltirilgan.

1.2.1 va 1.2.2-jadvallarni solishtirish orqali populyatsiyaning yaroqliligi oshganligini ko’rishimiz mumkin, ya'ni biz yechimga yaqinlashdik.

Oxirgi amal mutatsiya deb ataladi va bu bitlarda amalga oshiriladi. Agar $p_m = 0.05$ bo'lsa, bu 20 bitli populyatsidan faqat 1 ($20 \cdot 0.05 = 1$) tasi o'zgarishini bildiradi. Faraz qilaylik 4-satrning 3-biti mutatsiyani talab etsin, ya'ni $x_4' = 10100$. Yuqoridagi amallarni bir necha marta takrorlash orqali masalani optimal yechimni beruvchi xromosomaga (11111) ega bo'lamiz.

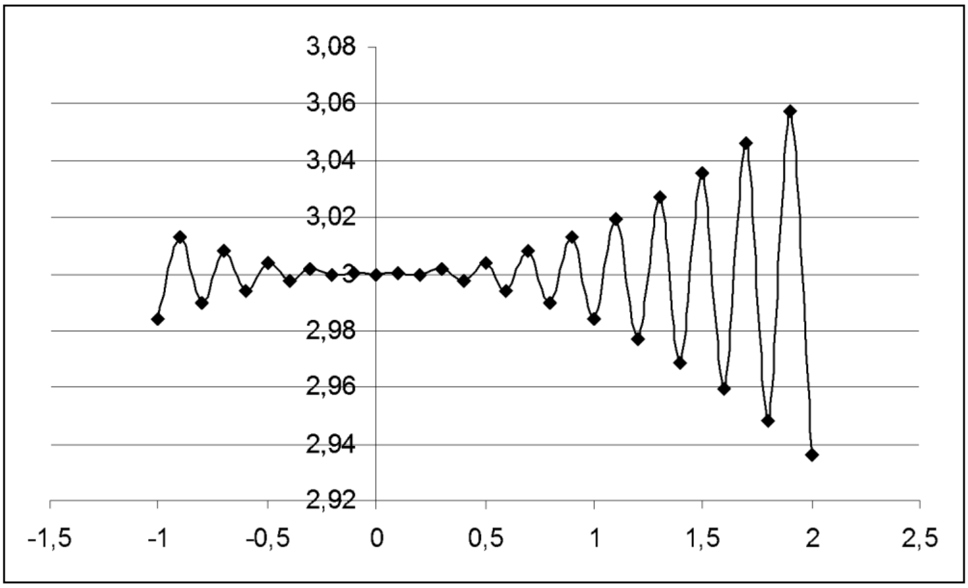
1.2.2-jadval

Chatishtirishdan keyingi populyatsiya	Chatishtirish nuqtasi	Yangi populyatsiya	X ning qiymati	$F(x) = x^2$
01101	4	01100	12	144
11000	4	11001	25	625
11000	2	11011	27	729
10011	2	10000	16	256
O'rtacha				439
Maksimal				729
Jami				1754

Shuni alohida ta'kidlash joizki, genetik algoritmdan ko'p ekstremal masalalarni global yechimini topishda foydalanish yaxshi samara beradi. Masalan, agar funktsiya 1.2.3-rasmda keltirilgan ko'rinishga ega bo'lsa uni global maksimumini odatiy usullar yordamida topish yetarli darajada murakkab bo'ladi.

Faraz qilaylik, funktsiya $f(x) = x \cdot \sin(10\pi x) + 3$ ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bu funktsiya grafigi 1.2.3-rasmda keltirilgan.

$[-1, 2]$ oraliqda x ni shunday qiymatini topish kerakki, $f(x) = \max$ bo'lsin, ya'ni $x \in [-1,2]$ shunday x_0 ni topish kerakkki $f(x_0) \geq f(x)$ bo'lsin.



1.2.3-rasm. Ko’p ekstremumli funktsiya grafigi

$f(x)$ funktsiyani oson tahlil qilish mumkin. $f(x)$ ni birinchi tartibli hosilasini 0 ga teng qiymatlari quyidagi tenglama orqali aniqlanadi.

$$f'(x) = \sin(10\pi x) + 10\pi x \cdot \cos(10\pi x) = 0 \qquad (1.2.1)$$

(1.2.1) tenglama quyidagi tenglamaga ekvivalent:

$$\tan(10\pi x) = -10\pi x.$$

Bu tenglamalar cheksiz ko’p yechimga ega:

$$x_i = \frac{2i-1}{20} + \xi_i, \ \text{i=1,2,\ldots}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_i = \frac{2i+1}{20} + \xi_i, \ \text{i=-1,-2,\ldots}$$

bu yerda ξ_i nolga yaqinlashuvchi kamayuvchi haqiqiy sonlar ketma-ketligi.

$f(x)$ funktsiya *i* toq bo’lganda lokal maksimumga juft bo’lgada esa lokal minimumga erishadi (1.2.3-rasm).

Qaralayotgan sohaning quyidagi nuqtasida funktsiya maksimumga erishadi.

$$x_{19} = \frac{37}{20} + \xi_{19} = 1{,}85 + \xi_{19},$$

bu yerda $f(x_{19})$ quyidagidan aniq katta

$$f(1{,}85) = 1{,}85 \cdot \sin\left(18\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 3{,}0 = 2{,}85.$$

Quyida genetik algoritm yordamida funktsiyani maksimizatsiyalashni batafsil bayoni keltirilgan.

X haqiqiy o'zgaruvchini ifodalovchi va xromosoma vazifasini bajaruvchi binar vektordan foydalanamiz. Vektor uzunligi talab qilingan aniqlikka bog'liq bo'ladi. Olingan masalada o'nli verguldan keyin 6 ta xona bor.

X ning sohasi uzunligi 3 ga teng. [-1,2] oraliq hech bo'lmaganda 3000000ta teng kesmalarga ajratiladi.

Bu 22 bitni talab qiladi.

$$2097152 = 2^{21} < 3000000 \le 2^{22} = 4194304 .$$

$(b_{21}b_{20}...b_0)$ binar satrni [-1,2] oraliqdagi songa o'tkazish ikki qadamda amalga oshiriladi.

1. $(b_{21}b_{20}...b_0)$ ikkilik satr ko'rinishida berilgan sonni 2 likdan 10 likka o'tkazish.

$$\left(\langle b_{21}b_{20}...b_0\rangle\right)_2 = \left(\sum_{i=0}^{21} b_i \cdot 2^i\right)_{10} = x' .$$

2. *x* ga mos oraliqdagi sonni topish

$$x = -1.0 + x' \cdot \frac{3}{2^{22}-1},$$

Bu yerda -1.0 – sohaning chap chegarasi va 3 soha uzunligi.

Masalan, (1000101110110101000111) xromosoma 0.637197 sonni ifodalaydi, ya'ni

$$x' = (1000101110110101000111)_2 = 2288967$$

va

$$x = -1.0 + 2288967 \cdot \frac{3}{4194303} = 0.637197 .$$

(0000000000000000000000) va (1111111111111111111111) xromosomalar soha chegaralarini mos ravishda -1.0 va 2.0 ni ifodalaydi.

Boshlang'ich populyatsiya. Xromosomalar populyatsiyasi yaratiladi. Bunda har bir xromosoma 22 bitli ikkili vektor bo'lib, uning barcha bitlari (22 tasi) tasodifiy tanlanadi.

Baholash funktsiyasi. Eval baholash funktsiyasi *V* binar vektor uchun eval baholash funktsiyasi *f* funktsiyaga ekvivalent:

eval(V)=f(x),

bu yerda *V* xromosoma *x* haqiqiy sonni ifodalaydi.

Yuqorida ta'kidlanganidek, baholash funktsiyasi foydali potentsial yechimlarini baholab, muhit vazifasini bajaradi. Masalan, quyidagi uch xromosomaga mos haqiqiy qiymatlar $x_1 = 0,637197$, $x_2 = -0,958973$ ва $x_3 = 1,627888$ ga teng.

$$V_1 = (1000101110110101000111),$$
$$V_2 = (0000001110000000010000),$$
$$V_3 = (1110000000111111000101),$$

Bularga mos baholash funktsiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$eval(V_1) = f(x_1) = 1.586345,$$
$$eval(V_2) = f(x_2) = 0.078878,$$
$$eval(V_3) = f(x_3) = 2.250650.$$

Baholash funktsiyasining natijasidan V_3 xromosoma bu uch xromosomadan eng maqbuli ekanligi ko'rinib turibdi.

Genetik operatorlar. Qayta tiklash bosqichida ikki genetik operatordan foydalaniladi: mutatsiya va chatishtirish.

Chatishtirish operatorini V_2 vaV_3 xromosomalarda tadbiq etib ko'raylik. Chatishtirish nuqtasi tasodifan tanlangan va u 5ga teng bo'lsin. U holda

$$V_2 = (00000|\ 01110000000010000),$$
$$V_3 = (11100|\ 00000111111000101),$$

dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$V_2^{'} = (0000000000111111000101),$$
$$V_3^{'} = (1110001110000000010000).$$

Bu avlodlar quyidagicha baholanadi:

$$f(V_2^{'}) = f(-0.9981113) = 0.940865,$$
$$f(V_3^{'}) = f(1.666028) = 2.459245.$$

2-chi avlod ikki ota-onadan ko'ra eng yaxshi qiymatga ega.

Mutatsiyada bir yoki bir necha genlar mutatsiya normasiga teng ehtimollikda almashadi.

Faraz qilaylik, V_3 xromosomaning beshinchi geni mutatsiya uchun tanlangan bo'lsin. Bu xromosomaning 5-chi geni 0 ga teng va uni o'rniga 1 qo'yiladi.

Mutatsiyadan so'ng V_3 xromosoma quyidagicha bo'ladi:

$$V_3' = (1110100000111111000101).$$

Ushbu xromosomaga mos qiymatlar $x_3 = 1.721638$ va $f(x_3) = -0.082257$ ga teng. Bu qismiy mutatsiya baholash funktsiyasining qiymati sezilarli darajada kamaytirganini bildiradi. Agar mutatsiya uchun v_3 xromosomaning 10-chi geni tanlansa, u holda

$$V_3'' = (1110000001111111000101)$$

bo'lib, unga mos qiymatlar $x_3'' = 1.630818$ va $f(x_3'') = 2.343555$ bo'ladi. Bu esa baholash funktsiyasining dastlabki qiymatidan ortganligini bildiradi: $f(x_3) = 2.250650$.

Parametrlar. Bu masala uchun genetik algoritmning quyidagi parametrlaridan foydalanildi: populyatsiya o'lchami – pop_size=50, chatishtirish ehtimolligi- $p_c = 0.25$, mutatsiya ehtimolligi $p_m = 0.01$.

Quyidagi bo'limda bu tipdagi genetik tizimda o'tkazilgan tajribalar natijalari keltirilgan.

Tajribaviy natijalar. Berilgan generatsiya uchun generatsiyalar soni va funktsiyaning qiymatini 1.2.3-jadvalda keltirilgan. 150 ta generatsiyadan so'ng eng yaxshi xromosoma $V_{\max} = (1111001101000100000101)$ ekanligi aniqlandi. Bunga mos qiymat $x_{\max} = 1.850773$.

1.2.3-jadval

Generatsiyalar soni	Baholash funktsiyasi qiymati
1	1.441942
6	2.250003
8	2.250283
9	2.250284
10	2.250363
12	2.328077
39	2.344251
40	2.345087
51	2.738930
99	2.849246
137	2.850217
145	2.850227

Kutilganidek $x_{\max} = 1.85 + \xi$ va $f(x_{\max})$ yetarli darajada 2.85 ga yaqin.

$f(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$ funktsiyani qaraylik.

Berilgan funktsiya ko'p ekstremalli va ko'p chastotali funktsiyadir. Mazkur funktsiyaning optimumini topish uchun klassik usullardan foydalanish maqsadga muvofiq emas. Buning uchun keng masalalar sinfiga muvafaqqiyatliqo'llanadigan gradient usulini ko'rib chiqaylik. qo'yilgan masala funktsiya juda kichik davrga ega. Bundan tashqari qadam uzunligini davr uzunligidan bir necha marta kichik qilib olish talab qilinadi. Qadam uzunligini muvafaqqiyatli tanlansa ham biz lokal ekstremumga erishamiz. Olingan natijani global ekstremum bilan ustma-ust tushish ehtimolligi ham juda kam. Funktsiya davrini har doim ham aniqlash imkoni yo'qligini inobatga olsak, bu turdagi masalalarda global ekstremumni aniqlash masalasi juda murakkablashib ketadi. Shunday qilib, klassik usullar orqali global ekstremumni aniqlash masalasi o'ta murakkab bo'lib, bu masalani genetik algoritm orqali tezda yechish mumkin[4,151-157].

Shunday funktsiyalar sinfini misol sifatida keltirish mumkinki ularda odatiy usullarning samaradorligi genetik algoritmlar samaradorligidan ancha past bo'ladi.

1.2.2. Guruhli qoida va yo'naltirilgan mutatsiyali genetik algoritmlar

Mazkur bo'limda individlarni guruhlash printsipiga asoslangan yangi genetik algoritm ko'riladi. Bu algoritm boshqaruv va o'qitish kabi muqobillashtirish masalalari keng targ'ib etiladigan sohalarda keng qo'llaniladi. Ushbu algoritmni yaratishdan maqsad qidiruv samaradorligi va yechim aniqliligini oshirishdan iboratdir[151-157].

Birinchi bosqichda o'zgaruvchilar fazosini ko'proq qamrab olish uchun populatsiya o'lchami odatiy genetik algoritmlarda olinadigan populatsiya o'lchamidan bir necha marta katta qilib olinadi. U baholanadi va yaroqliligi barcha populatsiyalarning o'rtacha yaroqliligidan past bo'lganlari tashlab yuboriladi. Saqlabqolinganlari asosida guruhlar (qism populitsiyalar) tashkil etiladi. Qidiruv esa guruhlarda amalga oshiriladi.

Quyida yo'nalgan mutatsiyaga asoslangan guruhli genetik algoritm batafsil bayoni keltirilgan (GGA-NM).

1. N tasodifiy individlardan tashkil topgan boshlang'ich populatsiya tuziladi. (parametrlar fazosida N nuqta) $x_i \quad (i=\overline{1,N})$.

2. Barcha nuqtalarda funktsiyaning qiymati hisoblanib, populyatsiyaning o'rtacha yaroqliligi topiladi va individlarning yaroqliligi baholanadi

$$f = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right).$$

3.2. Selektsiya bosqichida yaroqliligi barcha populyatsiyalarning o’rtacha yaroqliligidan yuqori bo’lgan individlar qoldiriladi

$$f(x_j) > f, \quad j = \overline{1, N}.$$

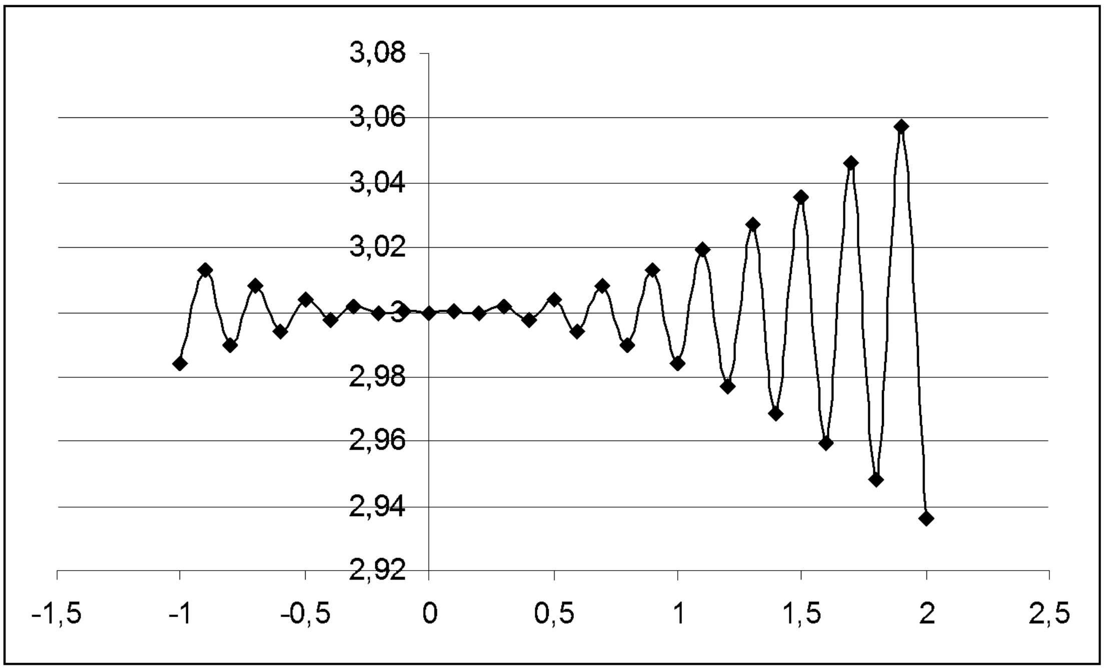
4. Fazoviy yaqinllika ko’ra guruhlar tashkil etiladi [2]

$$\left\| x_i - x_j \right\| \le \delta,$$

bu yerda δ -qo’shnichilik parametri: $\delta = 1.5L^k / N$ bo’lib, L^k - x_i va x_j vektorlarning k-chi komponentasi berilgan kesma uzunligi.

1.2.4-rasmdan yaroqliligi kam bo’lgan individlar chiziqli ko’rinishda ajratilgan va har bir guruh aloxida uchga ega ekanligi ko’rinib turibdi.

Berilgan funktsiyani tadqiqoti natijasida OGA doim ham populyatsiya yaroqliligi va qidiruv yo’nalishini yaxshilash imkonini bermaydigan ko’p yig’ish, mutatsiya va selektsiya amallarini bajaradi.



1.2.4-rasm. Ko’p ekstremalli funktsiya

5. Har bir guruhdan bir dona eng yaxshi individni qoldirish orqali selektsiya amalga oshiriladi.

6. Barcha individlar uchun mutatsiya quyidagicha amalga oshiriladi:

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + r, & агар \quad f(x_i^t + r) > f(x_i^t), \\ x_i^t - r, & агар \quad f(x_i^t - r) > f(x_i^t), \\ x_i^t, & акс\ холда. \end{cases}$$

bu yerda r – $[0, \delta(1 - t/T)]$ oraliqdagi tasodifiy son, t –generatsiya nomeri, T – berilgan maksimal generatsiya soni. Bu jarayon barcha individlarni yaxshilash imkoni qolmaguncha davom ettiriladi.

Agar talab etilgan natijaga erishilmasa t=0 deb olinadi va 1-qadamga qaytiladi.

Mutatsiya formulasi quyidagicha: qancha generatsiya ko'p bo'lsa, shuncha kam o'zgarishlarga individ ega bo'ladi. Mutatsiyaning bunday formasi individ uch atrofida bo'lsa, u kam sarf bilan uchga yetib olish ishonchini beradi.

Agar [a,b] kesmaning uzunligini L bilan, global maksimum atrofi uzunligini l bilan belgilasak, [a,b] kesmaga tashlangan N ta tasodifiy nuqtaning hech bo'lmaganda bittasining [c,d] kesmaga tushush ehtimolligi quyidagiga teng.

$$P = 1 - \left(\frac{L-1}{L}\right)^N .$$

P_0 ning fiksirlangan P dan katta bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi talab etiladi.

$$N > 1/\log_{1-P_0}[(L-1)/l].$$

Boshqacha qilib aytganda, boshlang'ich populyatsiyani yaratish uchun $0.5L/N < h < 1.5L/N$ shartni qanoatlantiruvchi [a,b] kesmada h tasodifiy qadamli teng taqsimlanmagani to'r hosil qilinadi.

Bunday yondashuv guruh tashkil etishda qulay bo'lib, $N \geq 1.5L/l$ shart bajarilganda [c,b] kesmaga tushish ehtimolligi 1 ga teng bo'ladi (1.2.4-rasm).

Ikkala holda ham yaxshi natija olish populyatsiya o'lchami N ni to'g'ri tanlashga bog'liq bo'ladi. Fizik jarayonning tasvirlanayotgan funktsiyasi xarakteri haqidagi yoki boshqa aprior bilimlardan foydalanib l ning qiymatini oldindan bashoratlash mumkin.

Yuqorida keltirilgan algoritm samaradorligini ko'rsatish uchun quyidagi funktsiyalarda tajribalar o'tkazildi. (1.2.5-rasm).

$$f_1(x,y)=\begin{cases}|x+y|/2, & agar\, trunc(x/2)\; va\; trunc(y/3.5)\; toq\, bo'lsa\\ 1, & aks\, holda\end{cases}$$

$$f_2(x,y)=0.022e^{-2\sqrt{x^2+y^2+3(\cos 5x+\sin 4y)}},$$

$$f_3(x,y)=0.5x\sin x+0.6\sin(y/2)+1.5\sin(9(x-y)),$$

$$f_4(x,y)=|x-y|(4e^{-2\sqrt{(x^2+y^2)/2}}+e^{\cos x+\sin y}).$$

bu yerda *trunc(x)* – *x* ning butun qismi.

Har bir tajribada global maksimumga erishish aniqligini 10^{-2} deb olinib, 10 martadan takrorlandi.

1.2.4-jadvalda olingan natijalarni o'rtacha qiymatlari keltirilgan. Jadvaldagi son hisoblash vaqtini ko'rsatadi. Taqqoslash uchun "Iterated genetik hillclimbing" (CAI) [153], odatiy genetik algoritm [151] va guruh printsipli genetik algoritm (GAGP) [152] tanlandi.

1.2.4-jadval

Usul	f_1	f_2	f_3	f_4
GGA-NM	11	91	6	7
GAGP	20	69	10	12
OGA	31	107	12	25
CAI	24	97	10	19

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, olingan 4 funktsiyadan uchtasi uchun GGA-NM algoritm qolgan algoritmlarga nisbatan tezkor ekan. f_2 funktsiya uchun GAGP algoritmi yaxshi ishlaydi. Bu esa f_1, f_3 ва f_4 funktsiyalar uchun ham guruhli "xulqi" nazorat etilishi bilan izohlanadi. Bunda har bir gruruh katta sondagi lokal uchlarga ega bo'lib, guruhlar ichida global qidiruvni amalga oshirilganligi uchun GAGP GGA-NMga qaraganda ishonchli bo'ladi.

Demak, genetik algoritmlarning guruhli variantlari OGA kabi universal hisoblanmaydi [4,154-162], biroq guruhli xarakterga ega bo'lgan funktsiyalar uchun bu kabi usullar yo'naltirilgan evolyutsiya hisobiga samaraliroqdir. Guruhli yondashuvning yana bir o’ziga xos yutug’i funktsiya ekstremumini topishda faqat global emas, balki lokal ekstremumlarini ham tadqiq qilishdan iborat.

Shuni alohida ta'kidlab o’tish joizki, guruhlash printsipiga asoslangan GAni ko’p mezonli muqobillashtirish masalalari va bir qancha o’yinlar nazariyasi masalalariga tadbiq etish yaxshi samara beradi.

1.2.3. Genetik algoritmlarda o’nli va ikkili ifodalarni taqqoslash

Odatda genetik algoritmlarda binar ifodalash yuqori aniqlik talab etiladigan ko’p o’lchamli masalalarni yechishdagi tadbiqida bir qancha noqulayliklarni keltirib chiqaradi. Masalan, [-500,500] oraliqdagi 100 ta o’zgaruvchi va aniqligi 10^{-6} teng bo’lgan masala uchun yechim binar vektorining uzunligi 3000ga teng bo’ladi. Bu o’z navbatida qidiruvni taxminan 10^{3000} marta amalga oshirishni talab qiladi. Bunday masalalar uchun genetik algoritm samarador hisoblanmaydi. Bundan tashqari, qidiruv fazosini binar kodlash oldindan fiksirlangan nuqtalar bilan chegaralanib qoladi. Bunday kodlash nazariy tahlil qilishni qulay qilmaydi va elegant genetik operatorlarni qurishni talab qiladi. Biroq natija bitli satrlardan foydalanishga boglliq bo’lmaydi va kodlashning boshqa keng alfavitidan foydalanish mumkin. Xususan, o’zgarish sohasi katta bo’lgan o’zgaruvchili muqobillashtirish masalalarini yechishda genlarni o’nli kodlash va ular uchun maxsus genetik operatorlardan foydalanishimiz mumkin.

Goldberg “o’nli genlarning qo’llanilishi sun'iy genetik algoritmlarda uzoq tarixga ega va ularning qo’llanilishi fundamental genetik algoritmlar bilan ishlovchi olimlar uchun kutilmagan yangilik bo’ldi” deb aytgan edi. Hozirgi vaqtda esa o’nli ko’rinishdagi genetik operatorlarning turli modifikatsiyalari mavjud bo’lib, bunday yondoshuvning asosiy maqsadi – genetik algoritmni masala fazosiga yaqinlashtirishdir. Bunday yondoshuv operatorlarga real fazoning o’ziga xos xususiyatlaridan foydalanib masalaning spetsifikasiga muvofiq bo’lishga majbur qiladi, shuningdek imkonini beradi. Masalan, bunday yondoshuv quyidagi xossaga ega: berilgan fazoda ikki bir-biriga yaqin nuqtalar masala fazosida ham bir-biriga yaqin bo’lishi kerak va aksincha.

Bu umuman ikkilik yondoshuv uchun har doim ham to'g'ri emas. Masalan, yondoshuvda turli bitli holatlar yordamida masofa normasi aniqlangan bo'lsa.

Ikkita misolni ko'rib chiqamiz [154]. O'rganish uchun ko'rinishlari turlicha bo'lgan ikkita genetik algoritm tanlanadi. Bunday yondoshuv bizga ancha to'g'ri taqqoslash uchun yaxshi asos bo'ladi.

Ikkili ifodalash. Binar kodlashda xromosomaning har bir elementi dekodirovkani qulay va tezkor bo'lishi uchun har bir element xotirada bitta so'zni saqlash uchun ketgan bitlar soni bilan kodlanadi. Bunda har bir xromosoma *N* ta so'zdan iborat vektor bo'lib, xromosomalar soni xromosomalar elementi soniga teng (katta o'lchamli xromosomalar uchun so'z soni katta bo'lishi talab etiladi).

Bunday yondashuvda (fiksirlangan soha uchun) aniqlik foydalaniladigan bitlar soniga bog'liq bo'ladi va u $(V\Gamma - N\Gamma)/(r^n - 1)$ ga teng.

VG va *NG* mos ravishda sohaning yuqori va quyi chegarasi *n* esa xromosomadagi bitlar soni.

O'nli ifodalash. Bunda har bir xromosoma komponentalari o'nli sonlardan iborat vektor ko'rinishida ifodalanadi. Har bir elementi esa talab qilingan oraliq bilan chegaralanadi va u bu chegaradan chiqib ketmaydi. Taklif etilgan operatorlar bu talablarni bajaradigan qilib qurilgan.

Bunday yondashuvda aniqlik bajarilayotgan kompyuterga bog'liq bo'lib, u ikkili ifodalashdan birmuncha yaxshi hisoblanadi.

Albatta ikkili ifodalashda bitlar sonini oshirish evaziga aniqlikni oshirish mumkin, biroq bu algoritmni ishlash tezligini tushib ketishiga sabab bo'ladi. Bundan tashqari o'nli ifodalash juda katta sohalarni (hattoki aniqlanmagan sohalarni ham) ko'rsatishga qodir. Ikkili ifodalash esa soha kattalashganda aniqlikni pasayishiga olib keladi.

Tasodifiy chatishtirish va mutatsiya.

Binar. Binar ifodalash mutatsiya va chatishtirishning odatiy operatorlarida qo'llaniladi.

O'nli. Chatishtirishningo'nli operatori – binar operatorning o'nli analogi.

Tasodifiy deb atalgan mutatsiya, bitdan ko'ra o'nli songa ko'proq qo'llaniladi; bunday mutatsiyaning natijasi - [NG, VG] sohaning qiymatidir. Bunday mutatsiya tasodifiy bitning o'zgarishi umuman tasodifiy son bo'lmaydigan binar holatga qaraganda "ancha" tasodifiy bo'ladi.

Turli mutatsiya. U quyidagicha aniqlanadi: $S_v^t = (v_1,...,v_m)$ - xromosoma (t- generatsiyaning tartibi), v_k mutatsiya uchun tanlangan element, u holda yangi vektor $S_v^{t+1} = (v_1,...,v_k,...,v_m)$ bo'ladi, bu yerda

$$v_k = \begin{cases} v_k + \Delta(t, V\Gamma - v_m), & agar\, tasodifiy\, son\ 0, \\ v_k - \Delta(t, v_k - N\Gamma), & agar\, tasodifiy\, son\ 1. \end{cases}$$

Bu yerda *NG* va *VG* v_k o'zgaruvchining quyi va yuqori chegaralari. $\Delta(t,y)$ funktsiya [0,y) oraliqdagi qiymatni qabul qiladi, shuning uchun *t* ning oshishi bilan $\Delta(t,y)$ ning 0 ga yaqinlashish ehtimolligi o'sadi. Bu xossa ushbu operatorni qidiruv fazosiga turlicha jalb qiladi: boshida (*t* – kichik bo'lganda) kengroq, keyingi bosqichlarda ma'lum darajada. Quyidagi funktsiyadan ham foydalanish mumkin

$$\Delta(t,y) = y(1 - r^{(1-t/T)b}).$$

Bu yerda *r* –[0,1] oraliqdagi tasodifiy son. *T* – generatsiyalarning maksimal soni, *b* esa iteratsiyalar soniga bog'liqlik darajasini aniqlovchi parametr.

Ikki yondoshuvning bajarilishini taqqoslash uchun ko'plab tajribalar o'tkazildi. Ular shuni ko'rsatdiki, o'nli ko'rinish tez, ketma-ket va ancha yuqori aniqlikni beradi. Shu bilan birga uning bajarilishi maxsus operatorlarning qo'llanilishi bilan kuchayishi mumkin. O'nli ko'rinish masala fazosiga nisbatan yaqin, bu yerda masalaning spetsifikasini hisobga oluvchi boshqa yordamchi operatorlarni qurish mumkin [157-170].

1.2.4. Qidiruvning klassik va genetik algoritmlarini taqqoslash

Ekstremumni qidiruvchi genetik algoritm ko'plab xususiyatlari bilan an'anaviy usullardan farq qiladi:

1. Genetik algoritmlar o'zgaruvchilar bilan emas, balki ularning ikkilik kodlari bilan ishlaydi.

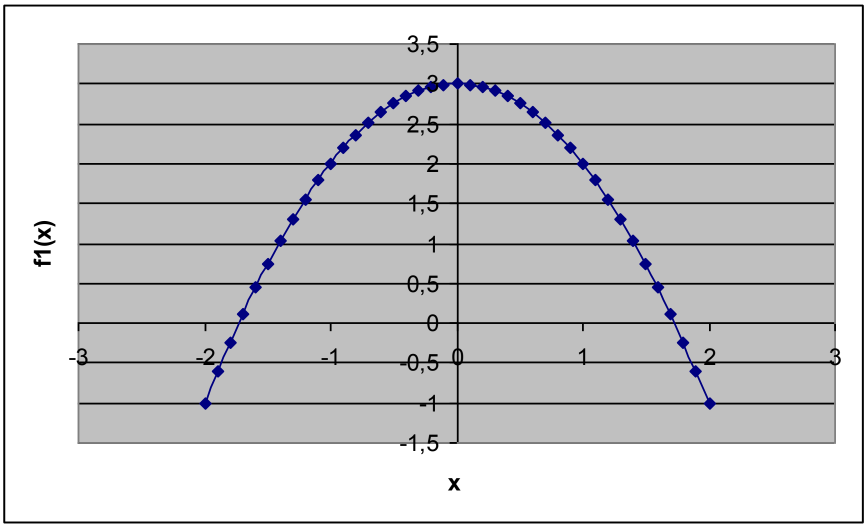
2. Genetik algoritmlar maqsad funktsiyaning hosilasi yoki ob'ekt haqidagi qandaydir ma'lumotdan emas, balki uning o'zidan foydalanadi. Bu funktsiya differentsiallanmaydigan yoki diskret bo'lganda qulay.

3.2. Genetik algoritm qidiruvni bitta nuqtada emas, balki nuqtalar populyatsiyasida olib boradi, bu funktsiya haqidagi katta axborot bilan ta'minlaydi va funktsiyaning lokal ekstremumlarda qotib qolishini oldini oladi. Qidiruvning an'anaviy usullari kabi gradient usullar ham bu muammoni yecha olmaydi.

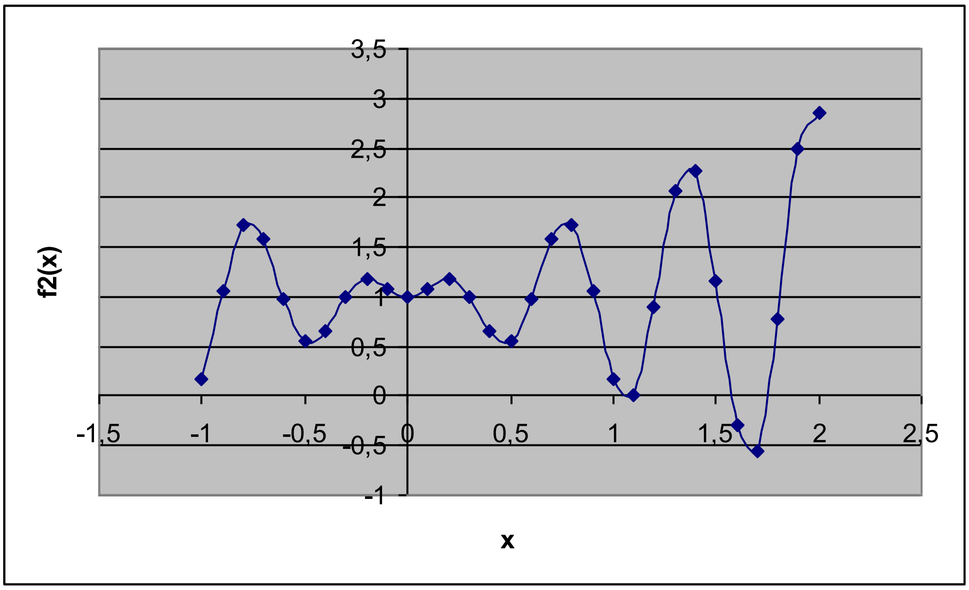
4. Genetik algoritm determinalashgan qoidalar o'rniga ehtimol-tranzitiv qoidalarni qo'llaydi.

Bundan tashqari genetik algoritmlar kompyuterda yechish uchun qulay hisoblanadi.

$f_1(x)$ funktsiyaning tadqiqida uning maksimumini topish uchun gradient usulidan foydalanish maqsadga muvofiq (1.2.6-rasm). Ushbu usul boshlang'ich nuqtadan oxirgi uchiga asta-sekin yaqinlashib masalani tezda yechish imkonini beradi. Biroq bu usuldan $f_2(x)$ funktsiyaning global uchini topishda foydalansak, boshlang'ich yaqinlashish atrofida olingan lokal uchda qotib qolamiz (1.2.7-rasm). Genetik algoritm esa nuqtalar populyatsiyasi bilan harakatlanib, global uchga hech qanday xavfsiz yaqinlashadi. Biroq genetik algoritm qayta ishlanayotgan ma'lumotlarning soni ko'pligi nuqtai nazaridan katta va evolyutsion jarayondir. Shuning uchun jarayonni tezlashtirish, algoritmni samarador qilish maqsadida turli mualliflar tomonidan genetik algoritmlarning ko'plab turlari ishlab chiqilgan. Masalan, gradient tushish, hill-climbing, koordinatalar bo'yicha tushish va boshqalar kabi genetik algoritmlar va an'anaviy algoritmlarning birikmasidan tashkil topgan gibrid algoritmlar. Ma'lum sinf masalalari uchun ular yuqori samaradorlikni ko'rsatgan.



1.2.6-rasm. $f_1(x)$ funktsiyaning grafigi



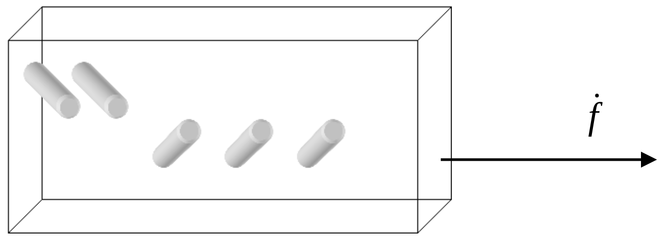
1.2.7-rasm. $f_2(x)$ funktsiyaning grafigi

Genetik algoritmlar o'yinlar nazariyasi, klassifikatsiya, kodlash, o'rgatish va h.k. masalalarda keng qo'llaniladi [151-170].

Genetik algoritmning eng ahamiyatli ustunligi – bu "qora quti" printsipidir, u usulni juda qulay qiladi. Ya'ni, tadqiqotchiga ob'ektning xossalarini bilish shart emas. *X* kirish ma'lumotlarni berish yetarli, chiqishda Y ma'lumotlar olinadi (1.2.8-rasm).

1.2.8-rasm. «Qora quti»

«Qora quti» haqidagi bitta misolni ko'rib chiqamiz. 5 ta o'chirgichli qora quti mavjud bo'lib, 1.2.9-rasmda birinchi ikkita o'chirgich yoqilgan, qolganlari esa o'chirilgan holati berilgan.



1.2.9-rasm. «Qora quti» haqidagi misol

O’chirgichlar turli tartibda yoqilganda chiqish signallari f turlicha bo’ladi. Ushbu masala f signalni nisbatan kuchli qiladigan o’chirgichlar holatlarining kombinatsiyasini topishdan iborat. Bunday masalalarni genetik algoritm yordamida yechish qulay. Agar yoniq holatni 1, o’chiq holatni esa 0 bilan belgilansa, o’chirgichlarni ixtiyoriy holatini 5 bitli satr yordamida ifodalash mumkin. Masalan, 1.2.9-rasmda (11000) satrga mos qora quti holati keltirilgan.

Faraz qilaylik, boshlang’ich populyatsiya quyidagicha berilgan bo’lsin:

10010
00110
11001
00011

Bir necha generatsiyalarda genetik operatorlarni qo’llash orqali yechimga ega bo’lamiz. Bunda har bir generatsiyada o’zgaruvchilarni o’nlikdan ikkilikka va aksincha ikkilikdan o’nlikka kodlash talab etilmaydi. Shuningdek, f funktsiyaning hosilasini hisoblashni va ob'ekt haqidagi qo’shimcha ma'lumotlarni talab qilmaydi. Qidiruvning an'anaviy usullarida esa odatda funktsiyaning uzluksizligi, differentsiallanuvchiligi yoki hech bo’lmaganda uning analitik ko’rinishi talab qilinadi. Yuqorida keltirilgan ustunliklar genetik algorimni ishonchli va murakkab masalalarni yechishda qo’llash mumkinligidan dalolat beradi.

Quyida genetik algoritmlarning klassik algoritmlar bilan qiyosiy tahlilini keltiriladi. Uchta algoritm sodda optimizatsion masalaga qo’llaniladigan hill-climbing, simulated annealing va genetik algoritmni ko’rib chiqiladi. Ushbu misolning qiyosiy tahlili GA asosidagi yondoshuvning yagona ekanligini bildiradi.

Qidiruv fazosi – uzunligi 30 ga teng bo’lgan V binar satrlar to’plami. f maqsad funktsiya quyidagi ko’rinishda berilgan bo’lib, maksimallashtirish talab etiladi:

$$f(V) = |11 \cdot one(V) - 150|,$$

bu yerda one(V) funktsiya V satrdagi 1 lar sonini aniqlaydi.

Masalan,

$$V_1 = (110110101110101111111011011011),$$

$$V_2 = (111000100100110111001010100011),$$

$$V_3 = (000010000011001000000010001000)$$

uchun funktsiyaning qiymati mos ravishda quyidagicha bo’ladi:

$$f(V_1) = |11 \cdot 22 - 150| = 92,$$

$$f(V_2) = |11 \cdot 15 - 150| = 15,$$

$$f(V_3) = |11 \cdot 6 - 150| = 84,$$

$$(one(V_1) = 22, \quad one(V_2) = 15, \quad one(V_3) = 6).$$

f chiziqli funktsiya bo’lib, optimizatsion masalani dolzarbligini talab qilmaydi. Biroq ushbu funktsiya bitta nuqtada ekstremumga ega bo’ladi.

$$V_q = (111... \qquad ...111),$$

$$f(V_q) = |11 \cdot 30 - 150| = 180,$$

va yagona lokal maksimumga

$$V_l = (000... \qquad ...000),$$

$$f(V_l) = |11 \cdot 0 - 150| = 150.$$

hill-climbing algoritmning bir nechta ko’rinishlari mavjud bo’lib, ular bir-birida oldingi satrni taqqoslash uchun yangi satrni tanlash usuli bilan farqlanadi. Hill-climbing algoritmning ko’rinishlaridan biri “tik chiqish” algoritmidir.

Dastlab barcha qo’shni satrlar ko’rib chiqiladi va $f(V_n)$ ni katta qiymatga erishtirgan V_n satr tanlanadi, shu bilan birga joriy V_c satrga mos $f(V_c)$ qiymati hisoblanadi. Agar $f(V_c) < f(V_n)$ bo’lsa, yangi satr joriy satr deb olinadi. Aks holda, algoritm optimumga erishadi. Bunda lokal yaxshilashni talab etilishi mumkin. Bunday hollarda algoritm yangi tasodifiy tanlangan satrni joriy satr sifatida foydalanib navbatdagi qadamni $(t \leftarrow t+1)$ amalga oshiradi. Hill-climbing algoritmining “tik chiqish” ko’rinishining yutug’i yoki muvaffaqqiyatsizligi tasodifiy tanlangan satrga bog’liq bo’ladi. Agar boshlang’ich satrdagi birlar soni

13 ta yoki undan kam bo'lsa, algoritm doim lokal optimumga erishadi. Bu muvaffaqqiyatsizlikni bildiradi. Satrdagi 1 lar sonini ortirish orqali global optimumga erishish mumkin bo'ladi.

```
Procedure iterated hill-climber
begin
  t←0
     repeat
       local←FALSE
       select a current string V_c at random
         evaluate V_c
          repeat
               select 30 new strings in the neighborhood of V_c
                  by flipping single bits of V_c
               select the string V_n     from the set of new strings
                  with the largest value of objective function f
               if f(V_c) < f(V_n)
                  then V_c ← V_n
                  else local     ←TRUE
            until local
           t←t+1
       until t=MAX
end.
```

1.2.10-rasm. Sodda siklik hillclimber.

Ko'p lokal optimumli masalalarda global optimumni topish murakkab jarayondir. Bu turdagi masalalarni yechish uchun simulated annealing usuli taklif etilgan. Quyida simulated annealing usulining tuzilishi keltirilgan:

```
Procedure simulated annealing
begin
  t←0
   initialize temperature T
       select a current string V_c at random
         evaluate V_c
          repeat
          repeat
              select a new string V_n
                in the neighborhood of V_c
                       by flipping a single bit of V_c
              if f(V_c) < f(V_n)
                 then V_c ← V_n
                 else if random (0,1) < exp{(f(V_n) − f(V_c))/T}
                     then V_c ← V_n
             until (termination-condition)
            T←g(T,t)
             t←t+1
                   until (stop-criterion)
end.
```

1.2.11-rasm. Simulated annealing

random [0,1] funktsiyasi [0,1] oraliqdagi tasodifiy sonlarni beradi. “thermal equilibration” (energiya tengligi) ga erishganligi tekshiriladi, ya'ni tanlangan yangi satrning ehtimollik taqsimotlari Boltzman [5,6] taqsimotiga mos kelishi. Ba'zi hollarda takrorlanish faqat 2 marta bajariladi.

Qadamlarning bajarilishida T haroratning kamayishi kuzatiladi, g(T,t)<t va kutilgan o’zgarishga erishganda algoritm ishi yakunlanadi.

Yuqorida ta'kidlanganidek, simulated annealing algoritm lokal ekstremumdan qochishi mumkin. Quyidagi satrni ko’rib chiqaylik:

$$V_4 = (111000000100110111001010100000),$$

V_4 satr 12 ta birlardan iborat bo’lib, $f(V_4) = |11 \cdot 12 - 150| = 18$. V_4 hill climbing algoritmining boshlang’ich satri bo’lib, $V_1 = (0...0)$ da lokal maksimumga erishadi.

Ixtiyoriy uzunligi 13 ga teng bo’lgan satr funktsiyaning qiymati 18 dan kichik bo’ladi. simulated annealing algoritmi uzunligi 13 ga teng bo’lgan satrni *P* ehtimollik bilan qabul qiladi.

$$P = \exp[(f(V_n) - f(V_c))/T] = \exp[(7-18)/T] = \exp(-11/T),$$

Masalan, T=20 uchun $P = e^{-11/20} = 0{,}57695$ ga teng bo’lib, yaqinlashishi 50 % dan ortiq bo’ladi. Genetik algoritmlar “yomon” satrlar populyatsiyasidan foydalanish imkonini beradi. Masalan, ikki nisbatan yomon satrlar berilgan bo’lsin:

$$V_5 = (111110000000110111001110100000),$$

$$V_6 = (000000000001101110000011111111).$$

Har bir satrda maqsad funktsiyaning qiymati 16 ga bo’lib, bu satrlarni chatishtirish (chatishtirish nuqtasi 5 va 12 pozitsiyalar orasida bo’lsa) natijasida nisbatan yaxshi avlod hosil qilinishi mumkin.

$$V_7 = (111110000000110111001010111111).$$

V_7 yangi avlod quyidagi qiymatni beradi:

$$f(V_7) = |11 \cdot 19 - 150| = 59.$$

1.3. Muqobillashtirish masalalarini yechishning klassik usullari

Hozirgi kunda muqobillashtirish masalalarini yechishning ko’plab usullari ishlab chiqilgan bo’lib, amaliy masalalarni yechishda quyidagi usullardan keng foydalaniladi [1,26,28]:

- klassik tahlil funktsiyalarini tadqiq qilish usullari;
- Lagranj noaniq ko’paytuvchilaridan foydalanishga asoslangan usullar;
- variatsion hisob;
- dinamik dasturlash;
- maksimum printsipi;
- chiziqli dasturlash;
- nochiziqli dasturlash.

Qo’yilgan masalani yechishga eng yaroqli muqobillashtirish usulini tanlash maqsadga muvofiq bo’ladi. Shuni alohida ta'kidlab o’tish joizki, ayrim muqobillashtirish masalalari uchun usullar maxsus ishlab chiqilgan yoki ma'lum turdagi matematik modellarga mos keladi. Masalan, chiziqli dasturlashning matematik apparati maxsus yaratilgan bo’lib, u optimallikning chiziqli mezonlari va o’zgaruvchilarning chiziqli cheklanishlari bilan berilgan masalalarni yechish uchun maxsus ishlab chiqilgan hamda ushbu turdagi ko’plab masalalarni yechish imkonini beradi. Bundan tashqari geometrik dasturlash ham optimallik va cheklanishlar mezonlari maxsus funktsiya polinomlar ko’rinishida bo’lgan muqobillashtirish masalalarini yechishga mo’ljallangan.

Dinamik dasturlash ko’p bosqichli jarayonlarning muqobillashtirish masalalarini yechishga mo’ljallangan bo’lib, ayniqsa u bosqichlar kam sonli o’zgaruvchilarga ega bo’lganda yaxshi natija beradi. Biroq o’zgaruvchilar soni katta bo’lgan har bir bosqichda dinamik dasturlashdan foydalanish hisoblash mashinalarini xotira hajmi va tezligi cheklanganligi sababli turli noqulayliklarni keltirib chiqaradi [28,40].

Quyida muqobillashtirish masalalarini yechishning matematik usullari va ulardan foydalanish yo’llarining qisqacha bayoni keltirilgan. Shuningdek, keltirilgan usullarning qisqacha xarakteristikasi va qo’llanilish sohasi berilgan bo’lib, bu qaysidir darajada aniq muqobillashtirish masalasini yechish uchun u yoki bu usulni tanlashni osonlashtiradi.

Klassik tahlil funktsiyalarining tadqiq usullari nomurakkab optimal masalalarni yechishning matematik tahlil kursidan ma'lum bo’lgan mashhur usullarini o’zida mujassamlashtiradi. Mazkur usullarning odatiy qo’llash sohasi optimallik mezoni va hosilasi uncha murakkab bo’lmagan analitik ko’rinishda ifodalash mumkin bo’lgan masalalar hisoblanadi. Bunda olingan tenglamaning hosilasi nolga tenglanib, ekstremal yechimlar aniqlanadi. Bunday tenglamalar esa analitik yo’l bilan kamdan-kam va ko’pincha hisoblash mashinalaridan foydalanib yechiladi. Bunda chekli tenglamalar tizimini (odatda nochiziqli) yechish nochiziqli dasturlash usullari va shunga o’xshash sonli usullardan foydalanish orqali amalga oshiriladi [26,28,94].

Klassik tahlil funktsiyalarining tadqiq usullari ham kamchiliklardan xoli emas. Jumladan, muqobillashtirish masalasini klassik tahlil funktsiyalarini tadqiq usullaridan foydalanib yechishda hosil qilingan tenglamalar tizimi faqatgina optimallikning zaruriy shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun ushbu tenglamalar tizimini barcha yechimlarini (ular bir nechta bo’lishi mumkin) yetarlilik shartlariga tekshirilishi shart. Yetarlilik shartlariga tekshirishda avvalo optimallik mezoni uchun ekstremal bo’lmagan yechimlar tashlab yuboriladi va qolgan ekstremal yechimlar orasidan optimal masalaning shartlarini qanoatlantiruvchi yechimlar tanlanadi. Bunda yechim sifatida muqobillashtirish masalasining qo’yilishiga qarab, ya'ni optimallik mezonining eng katta yoki eng kichik qiymati olinadi.

Tadqiq usullari yordamida ekstremal yechimlarni qidirish erkin o’zgaruvchilarning aniqlanish sohasi chegaralanganda amalga oshiriladi va ekstremal yechim mazkur sohadan izlanadi. Bu usul asosan ko’p sondagi (ikkidan ortiq) erkin o’zgaruvchili masalalarni yechishda qo’llaniladi. Ekstremal yechimni aniqlash o’zgaruvchilarning mumkin bo’lgan o’zgarish sohasi chegaralarida amalga oshiriladi. Bu esa optimallik mezoni qiymatlarini tahlil qilishda murakkabliklarni vujudga keltiradi [26,28,121].

Lagranj ko’paytuvchilari usuli funktsiyalar tadqiqida murakkabligi odatiy usullarni qo’llash mumkin bo’lgan masalalar sinfidagi kabi, biroq erkin o’zgaruvchilarga nisbatan tengliklar mavjud bo’lgan masalalarni yechishda foydalaniladi. Bunda optimallik mezonini hosilasining analitik ifodasini olish uchun mos cheklanishlar tenglamalarining analitik ko’rinishi talab etiladi.

Lagranj ko’paytuvchilar usuli qo’llanilganda asosan cheklanishli va cheklanishsiz masalalarni yechishga to'g'ri keladi.

Cheklanishsiz masalalar qo'shimcha noma'lum ko'paytuvchilarni kiritish orqali yechiladi va bu bir qator murakkabliklarni keltirib chiqaradi. Jumladan, optimallik mezoni ekstremumini topish maqsadida yechilayotgan tenglamalar tizimining tartibi cheklanishlar soniga mos ravishda oshadi. Qolgan holda yechimni topish va uni optimallikka tekshirish jarayoni cheklanishsiz masalani yechish orqali amalga oshiriladi [19].

Lagranj ko'paytuvchilari usulidan ob'ektlarni hususiy hosilali tenglamalar asosida muqobillashtirish masalalari va dinamik muqobillashtirish masalalarini yechishda foydalanish mumkin. Bunda optimumni topish uchun differentsial tenglamalar tizimini integrallash orqali chekli tenglamalar tizimini yechish zarur.

Shuni ta'kidlash joizki, Lagranj ko'paytuvchilari usulidan tenglik ko'rinishdagi cheklanishli boshqa sinf masalalarini maxsus usullar bilan yechishda yordamchi vosita sifatida foydalanish mumkin. Masalan, variatsion hisob va dinamik dasturlashda.

Ayniqsa, Lagranj ko'paytuvchilari usulini dinamik dasturlash usullariga tadbiqi samarali bo'lib, ba'zi hollarda yechiladigan masala o'lchamini kamaytirish imkonini beradi.

Variatsion hisob usullari odatda yechimlari noma'lum funktsiyalar bo'lgan va optimallik mezoni funktsionallar ko'rinishidagi masalalarni yechishda qo'llaniladi. Bunday masalalar odatda taqsimlangan parametrli statik muqobillashtirish jarayonlar yoki dinamik muqobillashtirish masalalarida paydo bo'ladi.

Bu holda variatsion hisob usullari yordamida muqobillashtirish masalasini yechishda chegaraviy shartli ikkinchi tartibli nochiziqli differentsial tenglamalardan iborat bo'lgan Eyler differentsial tenglamalar tizimini integrallashni talab etadi. Bunda hosil bo'lgan tenglamalar tizimidagi tenglamalar soni optimal masalani yechishda aniqlanadigan noma'lum funktsiyalar soniga teng bo'ladi va har bir funktsiya olingan tizimni integrallash natijasida topiladi. Eyler tenglamalaridan funktsional ekstremumining zaruriy sharti sifatida foydalaniladi. Shuning uchun differentsial tenglamalarni integrallashdan hosil qilingan funktsiyalar albatta ekstremumga tekshirilishi kerak.

Lagranj ko'paytuvchilari usulini funktsional ko'rinishidagi tenglik orqali berilgan cheklanishlar mavjud bo'lganda qo'llash shartli masaladan shartsiz masalaga o’tish imkonini beradi.

Tengsizlik ko’rinishidagi cheklanishli masalalarni yechishga variatsion usullarni qo’llash bir qator noqulaylik va qiyinchiliklarni vujudga keltiradi.

Odatda funktsionallarning muqobillashtirish masalalarini yechishning to’g’ridan-to’g’ri usullari - berilgan variatsion masalani nochiziqli dasturlash masalasiga olib kelish Eyler tenglamasi uchun chegaraviy masalani yechishdan soddaroq bo’ladi.

Matematik dasturlash – bu ma'lum cheklanishlarda maqsad funktsiyaning mumkin bo’lgan qiymatlari sohasidan ekstremal qiymatlarni topish usullarini ishlab chiqadigan matematik yo’nalishdir.

Funktsiyalarni ekstremal qiymatlarini topishda cheklanishlarning mavjudligi matematik dasturlashni matematik tahlilning klassik masalalaridan farqlab turadi.

Matematik tahlilning funktsiya ekstremumini topish usullari matematik dasturlash masalalari funktsiyalari ekstremumini topishda yaroqsiz hisoblanadi.

Matematik dasturlash masalalarini yechishning maxsus usul va nazariyalari ishlab chiqilgan hamda ishlab chiqilmoqda. Matematik dasturlash masalalarini yechishda katta hajmli hisoblashlarni bajarishga to’g’ri keladi. Biroq, yechish usullarini qiyosiy baholash ularni kompyuterda qo’llash qulayligi va samaradorligi asosida amalga oshiriladi.

Matematik dasturlash ma'lum sinf masalalarini yechish usullarini o’rganish va ishlab chiqish bilan shug’ullanuvchi mustaqil bo’limlar to’plamidir.

Maqsad va chegara funktsiyaning xossalariga ko’ra matematik dasturlash masalalari asosiy ikki guruhga ajratiladi:

- chiziqli dasturlash masalalari;
- nochiziqli dasturlash masalalari.

Maqsad va chegara funktsiyalari chiziqli bo’lgan matematik dasturlash masalasi chiziqli dasturlash masalasi, aks holda ushbu masala nochiziqli dasturlash masalasi deb ataladi [26,28,40].

Chiziqli dasturlash masalasi.

Chiziqli dasturlash (ChD) – matematik dasturlashning birinchi va mukammal o’rganilgan bo’limlaridan biridir. “Matematik dasturlash” chiziqli dasturlashdan boshlab rivojlangan.

“Dasturlash” atamasi bilan “kompyuter uchun dasturlash”, ya'ni dastur tuzish atamasi o’rtasida umumiylik yo’q. Matematik, muhandislik, iqtisod va boshqa sohalar masalalarini yechishda kompyuterlarni keng qo’llanilishidan ancha avval “chiziqli dasturlash” fani paydo bo’lgan.

“Chiziqli dasturlash” atamasi inglizcha "linear programming" so’zining noaniq tarjimasi natijasida paydo bo’lgan. "Programming" so’zining o’zbekcha ma'nolaridan biri – reja tuzish, rejalashtirishdir. "Linear programming" so’zining to’g’ri tarjimasi “chiziqli dasturlash” emas, balki “chiziqli rejalashtirish” bo’lsada, biroq, chiziqli dasturlash, nochiziqli dastulash, matematik dasturlash va shu kabi atamalar bizning adabiyotimizda umumiy qabul qilindi va saqlab qolindi.

Chiziqli dasturlash o’tgan asrning 40-yillaridan so’ng keskin rivojlana bordi va amaliyotga keng targ’ib etila boshlandi. Chiziqli dasturlash matematiklar, iqtisodchilar va muhandislarni matematik qat'iyligi bilan o’ziga jalb qildi va yanada rivojlandi. Shuni aytish mumkinki, chiziqli dasturlash real dunyoni chiziqli tasvirlash gipotezasiga asoslangan jarayonlar va tizimlarni matematik modellarini yechishda qo’llanildi [26,28,40,94].

Chiziqli dasturlash ishlab chiqarishni rejalashtirish va boshqarish kabi masalalarda jumladan, jihozlarni optimal joylashtirish, yukni tashishning optimal rejasini aniqlash (transport) va kadrlarni optimal taqsimlash kabi boshqa bir qator masalalarni yechishda qo’llaniladi.

Chiziqli dasturlash masalasi yuqorida aytib o’tilganidek, chiziqli cheklanishlarda chiziqli funktsiyaning minimumi (yoki maksimumi)ni topishdan iborat.

Masalaning umumiy ko’rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} a_i x - b_i \geq 0, i \in I_1, \\ a_i x - b_i = 0, i \in I_2, \\ \quad cx \to min \\ x_j \geq 0, \quad j \in J_1 \end{cases}$$

bu yerda $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, m\}, I_1 \cap I_2 = \emptyset, J_1 \subset \{1, \dots, n\}, x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$.

Bundan keyin c va a_i vektorni – satr, x va $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ vektorlarni esa ustun deb ataymiz.

Chiziqli dasturlash masalasini yechishda uning umumiy shakli bilan bir qatorda kanonik va standart shakllaridan keng foydalaniladi.

Kanonik va standart shaklda $J_1 = \{1, \ldots, n\}$ bo'lib, ya'ni barcha o'zgaruvchilar masalaning ixtiyoriy mumkin bo'lgan yechimlarida nomanfiy qiymatlarni qabul qilishi kerak (bunday o'zgaruvchilarni erkin o'zgaruvchilar nomidan farqli ravishda nomanfiy o'zgaruvchilar deb nomlash qabul qilingan). Kanonik va standart shakl chegaraviy shartlari bilan bir-biridan farq qiladi, ya'ni kanonik shaklda $I_2 = \emptyset$, bo'lsa, standart shaklda $I_1 = \emptyset$ bo'ladi.

Quyida chiziqli dasturlash masalasining kanonik

$$w = cx \to min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

va standart shaklllari keltirilgan:

$$w = cx \to min$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Har ikki shaklda ham A $m \times m$ o'lchamli matritsa bo'lib, uning i-satri a_i vektor bilan ustma-ust tushadi.

Umumiy shakldagi chiziqli dasturlash masalasi kanonik (standart) shaklidagi chiziqli dasturlash masalasiga (ma'lum ma'noda) keltirilib yechiladi. Bu qo'yilgan masalani (umumiy shakldagi) yechimi yangi ko'rinishdagi (qulay bo'lgan) chiziqli dasturlash masalasining yechimi orqali ifodalash mumkinligini bildiradi. Bunga asoslanib, umumiylikni yo'qotmagan holda kanonik yoki standart shaklda berilgan chiziqli dasturlash masalasini yechish orqali chiziqli dasturlash masalasini yechish imkoniyatiga ega bo'lamiz.

Dinamik dasturlash ayrim bosqichlarning optimallik mezonlari additiv funktsiya ko'rinishdagi berilgan ko'p bosqichli diskret jarayonlar muqobillashtirish masalasini yechishning effektiv usulidir.

Dinamik dasturlash usulini optimallik mezoni boshqa shaklda bo'lgan hollarga ortiqcha qiyinchiliklarsiz qo'llash ham mumkin, biroq ayrim bosqichlarning o'lchami kattalashib ketadi.

Mohiyati bo'yicha dinamik dasturlash usuli jarayonning barcha bosqichlarida boshqarishning optimal strategiyasini aniqlash algoritmini ifodalaydi. Bunda jarayonning barcha bosqichlarini boshqarish qonuni har bir bosqich boshqarish qonunlari muqobillashtirish masalalarini yechishning klassik tahlilning funktsiyalari tadqiqi usullari yoki nochiziqli dasturlash usullari yordamida xususiy muqobillashtirish masalasini yechish yo'li bilan aniqlanadi. Odatda olinadigan natijalar analitik shaklda emas, balki jadvallar ko'rinishida bo'ladi [26,28,40].

Masalaning o'zgaruvchilariga qo'yilgan cheklanishlar yechishning umumiy algoritmiga ta'sir ko'rsatmaydi, balki jarayonning har bir bosqichida muqobillashtirishning xususiy masalasini yechishni hisobga oladi.

Tenglik turidagi cheklanishlar mavjud bo'lgan ayrim xususiy masalalar o'lchamini ba'zida Langranj ko'paytuvchilaridan foydalanish orqali kamaytirish mumkin.

Taqsimlangan parametrli jarayonlarni muqobillashtirishga yoki dinamik muqobillashtirish masalalariga dinamik dasturlash usullarini qo'llash xususiy hosilali differentsial tenglamalarni yechishni talab qiladi. Bu tenglamalarni yechish o'rniga, ko'pincha, uzluksiz jarayonni yetarlicha katta sondagi diskret bosqichlar orqali ifodalab yechish osonroq bo'ladi. Bunday usul ayniqsa, masala o'zgaruvchilariga cheklanishlar mavjud bo'lib, ko'rsatilgan cheklanishlarni hisobga olgan holda differentsial tenglamalarni to'g'ridan-to'g'ri yechishda o'zini oqlaydi.

Dinamik dasturlash usuli bilan masalalarni yechishda qoida bo'yicha odatda jadval ko'rinishida olinadigan yechimning oraliq natijalarini saqlash uchun yetarlicha xotira hajmiga ega bo'lgan hisoblash mashinalaridan foydalaniladi.

Maksimumlik printsipi differentsial tenglamalar tizimi ko'rinishida ifodalangan jarayonlarning muqobillashtirish masalasini yechishda qo'llaniladi.

Maksimumlik printsipi matematik apparatining afzalligi yechimni bo'lak funktsiyalar ko'rinishida aniqlanishidir. Bu ko'plab muqobillashtirish masalalariga xosdir. Jumladan, chiziqli differentsial tenglamalar bilan ifodalangan ob'ektlarni optimal boshqarish masalalariga.

Maksimumlik printsipidan foydalanib optimal yechimni topishda jarayonni ifodalovchi differentsial tenglamalar tizimini integrallash masalasiga va chegaraviy shartlarda integrallash intervalining uchlarida berilgan yordamchi funktsiyalar uchun qo'shimcha tizimni yechishga, ya'ni chegaraviy masalani yechishga keltiriladi. Bunda o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasida cheklanishlar qo'yish va bu differentsial tenglamalar tizimini kompyuter dasturlari yordamida integrallash mumkin.

Differentsial tenglamalar ko'rinishida ifodalangan jarayonlar uchun maksimumlik printsipi ba'zi hollarda optimallikning yetarlilik sharti bo'ladi. Shuning uchun olingan yechimni optimumga tekshirish talab etilmaydi [26,28,40].

Diskret va uzluksiz jarayonlar uchun maksimumlik printsipi ifodasidan to'g'ridan to'g'ri foydalanib bo'lmaydi. Biroq, maksimumlik printsipini ko'p bosqichli jarayonlarga qo'llab olingan optimallik sharti yetarlicha qulay optimallik algoritmlarini yaratish imkonini beradi.

Nochiziqli dasturlash usullari maqsad funktsiyasi nochiziqli bo'lgan muqobillashtirish masalasini yechishda qo'llaniladi. Erkin o'zgaruvchilarga qo'yilgan cheklanishlar nochiziqli tenglik va tengsizliklar ko'rinishida bo'lishi mumkin. Yuqorida keltirilgan usullar qo'yilgan muqobillashtirish masalasini yechimiga yaqinlashish imkonini bermagan hollarda nochiziqli dasturlash usullari qo'llaniladi. Shuning uchun keltirilgan usullar ba'zida muqobillashtirish masalasini yechishning to'g'ri usullari deb ataladi.

Dinamik dasturlash, maksimumlik printsipi va shu kabi usullarning ma'lum bir bosqichlarida natijalarni olishda nochiziqli dasturlash masalasi muhim ahamiyat kasb etadi.

Nozichiqli dasturlash usullari o'zida ko'plab sonli usullar guruhini mujassamlashtirgan bo'lib, ularning katta qismi muqobillashtirish masalalarining yechishga ixtisoslashgan. Biror bir usul optimallik mezonini hisoblash va chegaraviy shartlarning murakkabligi, talab qilingan yechimning aniqligi, hisoblash mashinasining quvvati va shu kabi omillarga bog'liq ravishda tanlanadi. Nochiziqli dasturlashning bir nechta usullari boshqa muqobillashtirish usullari bilan birga qo'llaniladi. Bundan tashqari, bu usullar avtomatik muqobillashtirish tizimlarini qurishda asosiy vazifalardan birini bajaradi [26,28,94,121].

Geometrik dasturlash nozichiqli dasturlash masalasining maxsus sinfini yechishga mo'ljallangan bo'lib, bunda optimallik mezoni va cheklanishlar polinom ifodalar ko'rinishida beriladi. Polinom – erkin o'zgaruvchilarning darajali funktsiyalari ko'paytmalarini yigiindilari shaklidagi ifodadir. Bunga o'xshash masalalar ba'zan loyihalashtirishda paydo bo'ladi. Bundan tashqari nozichiqli dasturlashning ayrim masalalarini maqsad funktsiya va cheklanishlarni approksimatsiyalashgan ko'rinishlaridan foydalanib geometrik dasturlash ko'rinishiga keltirish mumkin.

Muqobillashtirish masalalarini yechish usullarining asosiy xususiyati muqobillashtirish masalasini yechishning qandaydir bosqichigacha yechishni analitik ko'rinishda amalga oshiriladi, ya'ni aniq analitik ifodalar topiladi. Masalan, optimal yechimi topilishi lozim bo'lgan chekli yoki differentsial tenglamalar tizimi.

Har qanday muqobillashtirish masalasining muhim xarakteristikasi uning o'lchamidir. Masalaning o'lchami optimallashtiriladigan ob'ektning holatini bir qiymatli aniqlovchi o'zgaruvchilar soniga teng deb olinadi. Ma'lumki, katta o'lchamdagi masalani yechish katta hajmdagi hisoblashni talab etadi. Ko'plab usullar (masalan, dinamik dasturlash va diskret maksimumlik printsipi) aynan katta o'lchamli jarayonlarni muqobillashtirish masalasini yechishga mo'ljallangan [28,40].

Ko'p muhandislik masalalarining matematik modelini chiziqli dasturlash masalasiga keltirib bo'lmaydi.

Real ob'ektlar va texnologik jarayonlarni loyihalashning matematik modellari o'zida fizik va nochiziqli jarayonlarni aks etishini talab qiladi. Bunday jarayon va ob'ektlarning o'zgaruvchilari o'zaro energiya yoki massaning saqlanish qonuni kabi nochiziqli fizik qonunlar bilan bog'langan bo'ladi.

Faraz qilaylik, loyihalashtirilayotgan ob'ekt yoki jarayonning matematik modelini maqsad funktsiyasi $F(\bar{X})$ uzluksiz funktsiya bo'lsin. $h_1(\bar{X}), h_2(\bar{X}), h_3(\bar{X}), \dots, h_m(\bar{X})$ funktsiyalar tenglik, $g_{m+1}(\bar{X}), g_{m+2}(\bar{X}), g_{m+3}(\bar{X}), \dots, g_p(\bar{X})$ funktsiyalar esa tengsizlik ko'rinishdagi cheklanishlarni ifodalasin. Bu yerda $i = \overline{1, m},\ j = \overline{m+1, p}$ bo'lib, $\bar{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], \bar{X} \in E^n$ loyihalashtirilayotgan ob'ekt, jarayon yoki tizimning parametrlar vektori.

U holda nochiziqli dasturlash masalasi quyidagicha:

$F(\bar{X})$ maqsad funktsiyani $h_i(\bar{X}) = 0, i = \overline{1, m}$ m ta chiziqli yoki nochiziqli tengliklar va $g_j(\bar{X}) > 0,\ j = \overline{m+1, p}$ $(p - m)$ ta chiziqli yoki nochiziqli tengsizliklar ko'rinishida berilgan cheklanishlarni qanoatlantiruvchi hamda maksimum (yoki minimum)ga erishtiruvchi $\bar{X} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], \bar{X} \in E^n$ vektorni topish.

So'nggi yillar ichida nochiziqli dasturlash masalalaridan qavariq dasturlash, kvadratik dasturlash, butun sonli dasturlash, stoxastik dasturlash, dinamik dasturlash va shu kabilar mustaqil bo'lim sifatida ajralib chiqdi [26,28,40].

Qavariq dasturlash masalasi – qavariq yopiq sohada berilgan qavariq funktsiyaning minimumini (botiq sohada maksimumini) topish masalasidir.

Qavariq dasturlash masalalari nochiziqli dasturlash masalalarining batafsil o'rganilgan bo'limidir.

Qavariq dasturlash masalalari ichidan chuqurroq o'rganilgani kvadratik dasturlash bo'lib, bunda maqsad funktsiya kvadratik, cheklanishlar esa chiziqli bo'ladi. Butun sonli dasturlash masalasida esa no'malum parametrlar faqat butun sonlarni qabul qilishi mumkin.

Maqsad va cheklanishlarida ehtimollar nazariyasi qonunlariga bo'ysunuvchi tasodifiy kattaliklar qatnashgan masala stoxastis dasturlash masalasi deb ataladi.

Dinamik dasturlash masalasida cheklanishlar vaqt kabi parametrga ega bo'lganligi uchun differentsial tenglamalar shaklida ifodalanadi va yechim topish jarayoni ko'p etaplarda amalga oshiriladi.

Hozirgi kunda nochiziqli dasturlash masalalarini yechishni ko'plab usullari ishlab chiqilgan va ularni farq qiluvchi belgilari yordamida klassifikatsiyalash mumkin.

Maqsad funktsiyaning lokal mezonlari soni bo'yicha:

- bir mezonli,
- ko'p mezonli.

Vektor o’lchamiga ko’ra:

- bir parametrli yoki bir o’lchovli (n=1),
- ko’p parametrli yoki ko’p o’lchovli (n>1).

Cheklanishlarga ko’ra:

- cheklanishsiz (shartsiz muqobillashtirish),
- cheklanishli (shartli muqobillashtirish).

Ekstremum qidirish algortmidagi axborotning turiga ko’ra:

- to’g’ri qidiruv usullari, ya'ni maqsad funktsiyaning ekstremumini topishda faqat uning qiymatidan foydalanuvchi usullar;
- birinchi tartibli gradient usullari – funktsiya esktremumini topishda birinchi tartibli hosilaning qiymatidan foydalanadi;
- ikkinchi tartibli gradient usullari – funktsiya esktremumini topishda birinchi tartibli hosilalar bilan birga ikkinchi tartibli hosilalardan foydalanadi.

Nochiziqli dasturlash masalasining har qanday usuli universal emas. Har bir aniq holat uchun yechiladigan masala mohiyatiga ko’ra unga qo’llaniladigan usulni moslashtirish kerak[26,28,40,94].

Shartli ekstremumni aniqlashning klassik usuli

Nochiziqli dasturlash masalasi umumiy ko’rinishda quyidagicha:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0; \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max \end{cases}$$

bu yerda $f(x_1, x_2, \dots, x_n), g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, i = \overline{1, m}$ funktsiyalar nochiziqli.

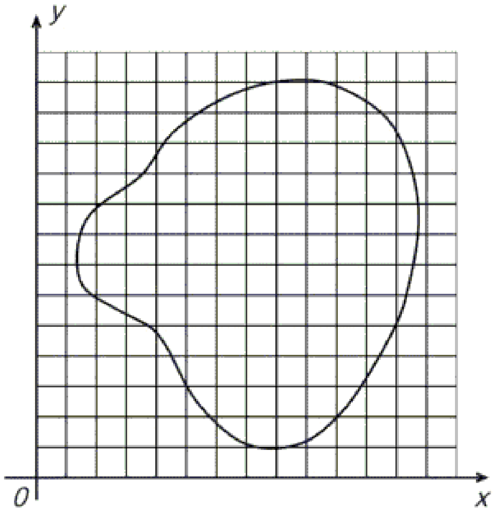
Chiziqli dasturlash masalasidagi kabi nochiziqli dasturlash masalasini yechishning universal usuli mavjud emas.

Chiziqli dasturlash masalasida mumkin bo’lgan R to’plam doim qavariq bo’lib, u chekli sondagi chetki nuqtalarga ega. Shuning uchun chetki nuqtalarning birida simpleks usulini qo’llash orqali sanoqli qadamda optimal yechim olinadi. Nochiziqli dasturlash masalalarida aksincha, ya'ni bunda mumkin bo’lgan to’plamning qavariqligi va chetki nuqtalar soning chekliligi talab etilmaydi. Bu esa nochiziqli dasturlash masalasini yechish murakkabligini asosiy sababidir [26,28,40].

1.3.1. To’la tanlov (to’rlar) usuli

Ko’p o’lchovli masalalar bir o’lchovli masalalarga qaraganda o’ta murakkab bo’lib, odatda ularni yechishda o’lchamni o’sishi murakkabliklarni o’sishiga olib keladi. Funktsiya eng kichik qiymatini topishning sodda usulini qarab chiqaylik.

G soha h qadamli to’r bilan qoplanadi (1.3.1-rasm) va uning tugunlarida funktsiyaning qiymatlari hisoblanadi. Olingan qiymatlar o’zaro taqqoslanib, ichidan eng kichigi tanlanadi va uni butun sohadagi funktsiyaning taqribiy eng kichik qiymati deb olinadi.

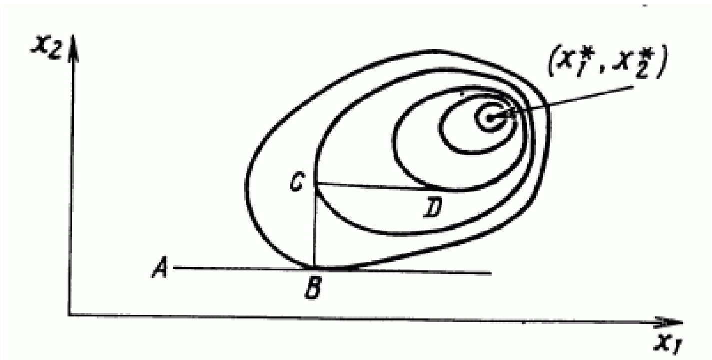


1.3.1-rasm. Sohani *h* qadamli to’r bilan qoplash

Yuqorida ta'kidlanganidek, mazkur usul bir o’lchovli masalalarni yechishda qo’llaniladi. Ba'zi hollarda ushbu usulni ikki yoki uch o’lchamli masalalarga qo’llash mumkin. Hisoblashlarga ko’p vaqt talab qilgani uchun ushbu usulni katta o’lchamli masalalarni yechishda qo’llab bo’lmaydi. Faraz qilaylik, maqsad funktsiya esa besh noma'lumli va uning G aniqlanish sohasi besh o’lchamli kub va kubning har bir tomoni 40 ta bo’lakka bo’lingan bo’lsin. U holda hosil bo’lgan to’rdagi tugunlar soni $41^5 \approx 10^8$ ga teng. Agar har bir tugunda funktsiyaning qiymatini hisoblash uchun 1000 ta arifmetik amal hisoblanadi deb olsak, umumiy amallar soni 10^{11} ga teng bo’ladi. Tezligi sekundiga 1000000 amal bajaruvchi kompyuter ushbu masalani yechish uchun 10^5 sekund vaqt sarflaydi va u elektron hisoblash mashinasini bir sutkadan oshiqroq uzluksiz ishlashini talab qiladi. Yana bir o’zgaruvchining qo’shilishi ishlash vaqtini 40 marta oshishiga olib keladi. Yuqoridagilarga asoslanib shuni aytish mumkinki, muqobillashtirishning katta masalalari uchun to’la tanlov usuli yaroqsiz. Ba'zida to’la tanlov usuli o’rniga tasodifiy tanlov foydalanish yaxshi natijalar beradi [3,26,28,40]. Tasodifiy tanlov usulida to'r nuqtalari ketma-ket emas balki tasodifiy tanlanadi. Bunda maqsad funktsiyaning eng kichik qiymatini topish jarayoni tezlashadi, biroq ishonchliligi kamayadi.

1.3.2. Koordinatalar bo'yicha tushish usuli

1.3.2-rasmda keltirilgan ikki o'zgaruvchili funktsiyani qarab chiqaylik. Uning chizig'i o'zgarmas pog'onali bo'lib, minimumi (x_1^*, x_2^*) nuqtada. (O'zgarmas pog'ona chizig'i deb ikki o'lchamli perametrlar fazosining kesishmasi (bunda funktsiyaning qiymati o'zgarmas) qaraladi. Koordinatalar bo'yicha tushish usuli qidirishning eng sodda usuli hisoblanadi. A nuqtadan boshlab, x_1 o'qi bo'yicha minimumni qidirish amalga oshiriladi va dastlab V nuqta topiladi. V o'zgarmas pog'ona chizig'iga urinish nuqtasi va x_1 o'qqa parallel. V nuqtadan x_2 o'q yo'nalishi bo'yicha qidiruvni davom ettirib, S nuqtani aniqlaymiz va bu jarayonni bir necha marta takrorlab, optimal nuqta(x_1^*, x_2^*)ga erishamiz [26,28,40]. Ixtiyoriy bir o'lchamli usullardan o'qlar bo'yicha yechimni topishda foydalanish va bu usullarni n o'zgaruvchili funktsiyalarga tadbiq etish mumkin.



1.3.2-rasm. Ikki o'zgaruvchili funktsiya

Biror bir maqsad funktsiyada mazkur usulni batafsil ko'rib chiqaylik.

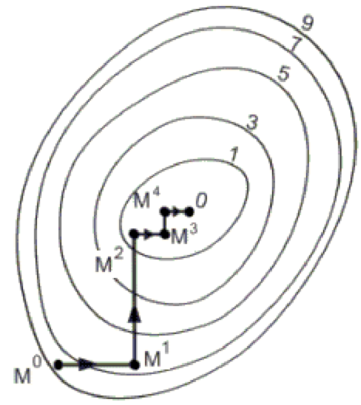
Faraz qilaylik $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maqsad funktsiyaning eng kichik qiymatini topish talab qilinsin. M orqali n-o'lchovli fazoning biror bir $x_1, x_2, \dots, x_n$: $M = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasini belgilab olamiz.

$M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ boshlang'ich nuqtani tanlab, uni birinchi koordinatasi o'zgaruvchi qolganlarini esa fikserlangan deb faraz qilib f funktsiya olamiz, ya'ni $f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$. U holda funktsiya bir noma'lumli funktsiyaga aylanadi. x_1 ni qiymatini boshlang'ich nuqtadan boshlab funktsiyani kamayish tomoniga minimumi topilguncha siljitib boramiz, agar x_1 nuqtadan keyingi nuqtada funktsiya o'ssa, $x_1 = x_1^1$ deb olamiz. $f(x_1^1, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ ni M^1 orqali belgilab olamiz. Bunda $f(M^0) \geq f(M^1)$ bo'ladi. $x_1 = x_1^1, x_3 = x_3^0, \ldots, x_n = x_n^0$ nuqtalarni fiksirlab, x_2 nuqtada $f(x_1^1, x_2^1, x_3^0, \ldots, x_n^0)$ ni M^2 orqali belgilab olamiz. Бунда $f(M^0) \geq f(M^1) \geq f(M^2)$ bo'ladi. Bu jarayonni barcha $x_3, x_4, \ldots, x_n$ lar uchun takrorlaymiz. Ushbu jarayonlar yana x_1 dan boshlab qayta takrorlanadi. Mazkur jarayon usul nomini to'laliga o'z ichiga oladi. Bu usul yordamida $M^0, M^1, M^2, \ldots$ nuqtalar ketma-ketligini qurib olamiz. Bu ketma-ketlik uchun $f(M^0) \geq f(M^1) \geq f(M^2) \ldots$ bo'lib, funktsiyani qiymatlari monoton o'suvchidir.

Biror k –qadamda jarayonni to'xtatish orqali $f(M^k)$ funktsiyaning qaralayotgan sohadagi taqribiy eng kichik qiymatini olish mumkin.

Mazkur usul bir o'zgaruvchili muqobillashtirish masalasini bir necha marta yechish orqali ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning eng kichik qiymatini topish masalasini yechish imkonini beradi. Agar maqsad funktsiya aniq shaklda berilgan bo'lib, differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda uning xususiy hosilalari orqali har bir o'zgaruvchiga nisbatan funktsiyani kamayish yo'nalishini va mos bir o'lchamli minimumlar topish masalasini yechish mumkin.

1.3.3-rasmda biror bir $u = f(x, y)$ ikki o'zgaruvchili funktsiya grafigi keltirilgan. Bu funktsiyaning grafigi 1, 3, 5, 7, 9 o'zgarmas qiymatlarga ega va u O nuqtada eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Bundan tashqari 1.3.3-rasmda koordinatalar orqali tushish usuli yordamida ushbu funktsiyaning eng kichik qiymatga erishish traektoriyasi keltirilgan.



1.3.3-rasm. Funktsiyaning eng kichik qiymatga erishish traektoriyasi

Nazariy jihatdan ushbu usul funktsiya yagona minimumga ega bo'lganda effektiv hisoblanadi. Amaliy jihatdan esa mazkur usul o'ta sekin hisoblanadi. Shuning uchun ko'p o'zgaruvchili muqobillashtirish masalasini yechishning ko'plab murakkab usullari ishlab chiqilgan.

Bu usullarga o'zining xossalariga ko'ra test vazifasini bajaruvchi bir nechta funktsiyalar taklif etilgan. Quyida shunday funktsiyalarining bir nechtasi keltirilgan [169].

Rozenbrok funktsiyasi:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2; \;\; x^* = (1; 1).$$

Pauell funktsiyasi:

$$f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2X_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4; \qquad x^* = (0; 0; 0; 0)$$

Ikki o'lchovli eksponentsional funktsiya:

$$f(x_1, x_2) = \sum_a [(e^{-az_1} - e^{-az_2}) - (e^{-a} - e^{-10a})]^2,$$

bu yerda $a = 0{,}1(0{,}1)1^*; \;\; x^* = (1; 10).$

1.3.3. Gradient tushish usuli

x, y, z o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan uch o'zgaruvchili f funktsiyani qarab chiqaylik. Bu funktsiyani $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ xususiy hosilalari orqali funktsiya gradienti deb ataluvchi

$$gradf(x, y, z) = \frac{df}{dx}(x, y, z)i + \frac{df}{dy}(x, y, z)j + \frac{df}{dz}(x, y, z)k$$

vektorni shakllantirib olamiz.

Bu yerda i, j, k – koordinata o'qlariga parallel bo'lgan birlik vektorlar. Xususiy hosilalar har bir erkin o'zgaruvchiga nisbatan funktsiyani o'zgarishini xarakterlaydi. Xususiy hosilalar yordamida tashkil etilgan gradient vektor *(x, y, z)* nuqta atrofida funktsiyaning umumiy holatini xarakterlaydi. Bu vektor yo'nalishi berilgan nuqtada funktsiyani tezroq o'stirish yo'nalishi bo'ladi. Qarama-qarshi yo'nalish esa antigradient yo'nalish deb ataladi va u funktsiyani tezroq kamayish yo'nalishini ifodalaydi[28,40].

Funktsiyani gradient yoki antigradient bo'yicha o'sish yoki kamayish tezligini gradient moduli ko'rsatadi va u quyidagicha hisoblanadi.

$$|grad\, f(x,y,z)| = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x,y,z)i\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}(x,y,z)j\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}(x,y,z)k\right)^2}.$$

(x,y,z) nuqtadagi boshqa barcha yo'nalishlarda funktsiyani o'zgarish tezligi gradient modulidan kichik bo'ladi.

Bir nuqtadan boshqa bir nuqtaga o'tishda gradient yo'nalis kabi uning moduli ham o'zgaradi. Ixtiyoriy sondagi o'zgaruvchili funktsiya gradienti tushunchasi bir o'zgaruvchili funktsiya gradienti tushunchasi kabi kiritiladi.

Mazkur usulning g'oyasi funktsiyani antigradienti orqali aniqlangan tezroq kamayish yo'nalishi asosida funktsiyaning minimumini topishdan iborat. Bu g'oya quyidagicha tadbiq etiladi.

Biror bir usulda boshlang'ich nuqta tanlanadi va bu nuqtada funktsiyaning gradienti hisoblanadi. Antigradient yo'nalishiga teskari ravishda dastlabki qadam amalga oshiriladi. Natijada funktsiyaning dastlabki qiymatidan kichik bo'lgan boshqa bir nuqtaga o'tiladi. O'tilgan nuqtada yana funktsiya gradienti hisoblanadi va qarama-qarshi yo'nalishda navbatdagi qadam amalga oshiriladi. Bu jarayonni davom ettirish orqali funktsiyani kamayish tomoniga siljish amalga oshiriladi. Har bir qadamda maxsus yo'nalishni tanlash va u asosida harakatlanish funktsiyaning eng kichik qiymatiga yaqinlashishni koordinatalar usuliga qaraganda tezroq amalga oshiradi.

Gradient tushish usuli har bir qadamda maqsad funktsiyani gradientini hisoblashni talab qiladi. Agar maqsad funktsiya analitik ko'rinishda berilgan bo'lsa, xususiy hollarlari uchun aniq bir formulani olish mumkin, aks holda kerakli nuqtalarda mos ayirmali munosabatlar yordamida xususiy hosilalarni taqribiy hisoblash lozim bo'ladi:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Shuni alohida ta'kidlash joizki, hisoblashlarda Δx_i qiymatini juda kichik olish kerak emas. Biroq funktsiya qiymatini yetarli darajada katta aniqlikda hisoblash mumkin. Agar hisoblashlarda Δx_i qiymati juda kichik olinsa, $\Delta f = f(x_1, \dots, x_i, +\Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ ayirmalarni hisoblashda xatoliklar ortib ketadi.

1.3.4. Tezkor tushish usuli

Mazkur usul koordinatali tushish usuli kabi berilgan nuqtadan koordinata o'qining biriga parallel yo'nalishda minimum nuqtagacha qidiruvni amalga oshiradi. So'ngra boshqa koordinata o'qiga parallel ravishda qidiruv amalga oshiriladi [26,28,40]. Bu jarayonni bir necha marta takrorlash orqali global minimum aniqlanadi. Biroq yo'nalish fiksirlangan bo'lishiga qaramay, ushbu algoritmda eng yaxshi yo'nalishni aniqlash orqali uni rivojlantirish masalasi paydo bo'ladi. Albatta eng yaxshi yo'nalish gradient yo'nalishi hisoblanadi. Bu xossani quyidagicha asoslash mumkin.

Faraz qilaylik x nuqtadan d yo'nalishda h qadam bilan navbatdagi $x + hd$ nuqtaga ko'chish amalga oshirilgan bo'lsin. Bundan $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtadan $(x_1 + zx_1, x_2 + zx_2, ..., x_n + zx_n)$ nuqtaga ko'chish amalga oshiriladi. Bu yerda

$$zx_i = hd_i \tag{1.3.1}$$

d_j -d ning yo'nalishlari kosinusi bo'lib, quyidagi shartni bajaradi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 1 \tag{1.3.2}$$

Funktsiya qiymatining o'zgarishi quyidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$df = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n,) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n \tag{1.3.3}$$

Bunda funktsiya qiymatining o'zgarishi zx_i ning birinchi tartibli aniqligigacha hisoblanadi. Xususiy hosilalar esa x nuqtada hisoblanadi.

df funktsiya o'zgarishini katta qiymatini olish uchun d_i yo'nalishni (1.3.2) shartni qanoatlantiruvchi qilib tanlash lozim. Bu yerda cheklanishli maksimizatsiya masalasi paydo bo'ladi. Lagranj ko'paytuvchilari usulini qo'llash orqali quyidagi funktsiyalarga ega bo'lamiz.

$$\varphi(d_1, d_2, \dots, d_n) = df + \lambda(\sum d_1^2 - 1). \tag{1.3.4}$$

$\varphi(d_1, d_2, \dots, d_n) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}d_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}d_n\right) + \lambda(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 - 1$ funktsiya maksimumga erishganda (1.3.2) cheklanishni qanoatlantiruvchi df kattalik maksimumga erishadi va uning hosilalari quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial d_j} = h\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \lambda d_j, \qquad j = 1,2, \dots, n$$

.

Agar $\frac{\partial\varphi}{\partial d_j} = 0\ bo'lsa, u\ holda\ d_j = -\frac{h}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_j}$
bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial\varphi}{\partial d_j} = 0\ bo'lsa, u\ hola\ d_j = -\frac{h}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

. (1.3.5)

Yuqoridagilarga ko'ra,

$$\frac{d_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{d_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{d_n}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

(1.3.6)

bo'ladi.

$d_i \sim \frac{df}{dx_j}$ bo'lib, x nuqtada d ning yo'nalishi $\frac{V}{(x)}$ ning yo'nalishiga parallel bo'ladi.

d yo'nalish *Vf(x)* yoki *g(x)* yo'nalishida bo'lganda berilgan *h* kichik qadamli funktsiyaning o'sishi katta lokal o'sishga to'g'ri keladi. Shuning uchun nisbatan tezkor tushish yo'nalishi quyidagilardan biri bo'ladi:

$$-\nabla f(x) \text{ yoki } -g(x) \qquad (1.3.7)$$

(1.3.3) tenglamani soddaroq ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$df - |\nabla f(x)||dx|cos\theta,$$

bu yerda θ - *Vf(x)* va *dx* vektorlar orasidagi burchak. *dx* ning yo'nalishi bilan -*Vf(x)* ning yo'nalishi ustma-ust tushishi uchun $\theta = 180^0$ deb olib, berilgan *dx* kattalik uchun *df* ni minimallashtiramiz.

Eslatma. Gradient yo'nalishi doimiy pog'ona chizig'ining ixtiyoriy nuqtasiga perpendikulyar va ushbu chiziq atrofida funktsiya o'zgarmas bo'ladi. Agar (d_1, d_2, ..., d_n) – pog'ona chizig'i atrofidagi kichik qadam bo'lsa, u holda quyidagi tenglik bajariladi:

$$f(x_1 + d_1, x_2 + d_2, \dots, x_n + d_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Yuqoridagidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} d_j = [\nabla f(x)]^T d = 0. \qquad (1.3.8)$$

Ushbu usulda gradient yo'nalishidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi. Shuning uchun ham x_i nuqtani aniqlagan bo'lsak, muqobillashtirishning bir nechta qadamidan so'ng funktsiyani minimumini topish yana -*Vf(x_j)* yo'nalishida amalga oshiriladi. Mazkur usul iteratsion usul hisoblanadi va i- qadamdagi minimum nuqtasi x_i nuqta bilan approksimallashtiriladi. Navbatdagi approksimatsiya nuqtasi quyidagicha aniqlanadi.

$$x_{i+1} = x_i - \lambda \nabla f(x_i), \tag{1.3.9}$$

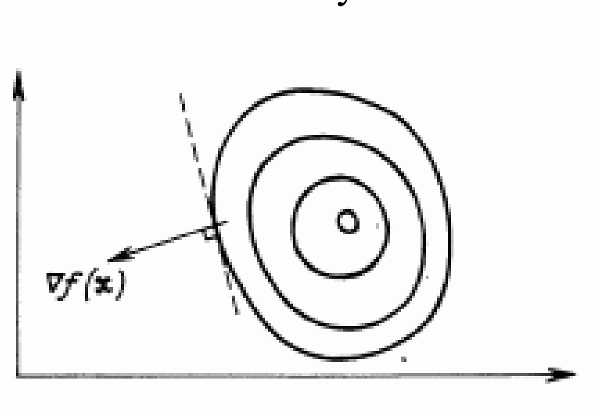
Bu yerda λ_i – (1.3.10) funktsiyaning minimallashtiradigan λ ning qiymati.

$$\varphi(\lambda) = f[x_i - \lambda \nabla f(x_i)]. \tag{1.3.10}$$

λ_i qiymatni biror bir bir o'lchamli qidiruv usullari yordamida aniqlash mumkin.

Yuqorida tushish usullarning 3 turini ko'rib chiqildi. Bu usullar yordamida ko'plab muqobillashtirish masalalari yechilsada, biroq daraja chizig'i bir yo'nalishda cho'zilgan va o'ta yassi bo'lgan funktsiyali muqobillashtirish masalalarini yechishda noqulayliklar keltirib chiqaradi.

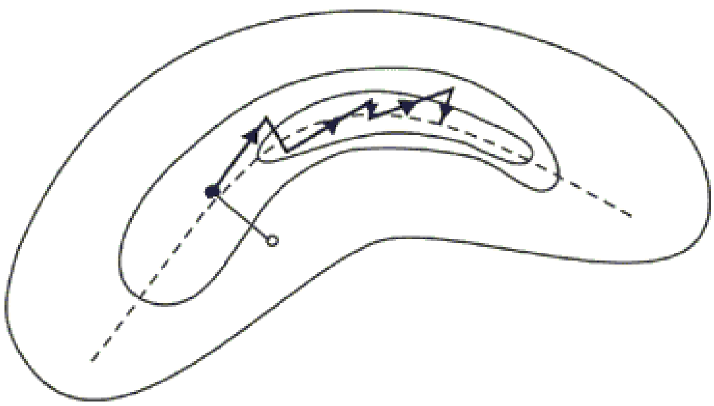
1.3.4-rasmda qandaydir funktsiyaning pog'ona chizig'i keltirilgan bo'lib, u bir yo'nalishda cho'zilgan va o'ta yassidir. Bu rasm "jarli" joy relefini eslatib yuboradi. Bunday holdagi masalalar uchun yuqorida keltirilgan usullar samarador hisoblanmaydi.



1.3.4-rasm. Funktsiyaning pog'ona chizig'i

Gradientli tushish usulida bu kabi funktsiyani eng kichik qiymatini topishga harakat qilib ko'raylik. Har doim antigradient yo'nalishida harakatlanib, harakat sekin bo'lsada sanoqli qadamda biz tezda "jarlik"ning chuqur joyiga tushib olishimiz mumkin. "Jarlik"ning bir tomonida turib, funktsiya gradientiga teskari yo'nalishda bir yoki bir nechta qadamda "jarlik"ning oldingi tomoniga o'tib qolamiz. Bu jarayonni davom ettirib "jarlik" tubiga tushishning zigzagli o'tishini amalga oshiramiz, bunda yechimga erishish juda murakkab bo'lib, ba'zida usul sikllanib qolishi mumkin. Shuning uchun yuqorida keltirilgan usullar “jarlik” ko’rinishida berilgan funktsiyalar uchun samarador hisoblanmaydi.

“Jarlik” bilan kurashish maqsadida bir necha maxsus misollar ishlab chiqilgan. Ulardan biri quyidagicha: ikki yaqin nuqtadan biridan gradientli tushish orqali “jarlik” tubiga tushish amalga oshiriladi. So’ngra topilgan nuqtalar to’g’ri chiziq yordamida tutashtiriladi va yana tushish amalga oshiriladi. Topilgan nuqtalardan yana “jarlik” tubiga tushish amalga oshiriladi va ikkinchi marta tushish amalga oshiriladi. “Jarlik” tubiga tushishni tezlik bilan amalga oshirib, maqsad funktsiyani qidirilayotgan eng kichik qiymatiga yaqinlashamiz (1.3.5-rasm). Bunday usul ikki o’zgaruvchili funktsiyalar uchun o’ta qulay bo’lsada, biroq ko’p o’zgaruvchili funktsiyalar uchun murakkabliklarni vujudga keltiradi.



1.3.5-rasm. “Jarlik” holida funktsiyaning eng kichik qiymatini topish

Yuqorida ko’rib chiqilgan barcha usullar funktsiyaning eng kichik qiymati soha ichida bo’lganda yaxshi ishlaydi, biroq bu qiymat soha chetida yoki unga yaqin bo’lganda kam samara berishi mumkin. Bu turdagi masalalarni yechish uchun maxsus usullarni ishlab chiqish zarur.

1.4. Chiziqli dasturlash masalalarini yechish muammolari

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning asosiy qismlaridan biri bo’lib, ko’p o’zgaruvchi funksiyalarning ekstremumlarini topishni o’rganadi va matematik modellarni tekshirishda matematik apparat hisoblanadi [9,,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

Matematik model quyidagicha talqin qilanadi: Tenglamalar yoki tengsizliklar tizimini qanoatlantiruvchi o’zgaruvchilarning shunday manfiy bo’lmagan qiymatlarini topish talab qilinadiki, bunda o’zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo’lgan miqdor (maqsad funksiyasi) eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo’lsin.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \\ &x_j \ge 0 \qquad\qquad (j=\overline{1,n}), \\ &Z=\sum_{j=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

(1.4.1) - formulaning birinchisi izlananayotgan miqdorlarga qo’yiladigan cheklanishlarni ifodalaydi. Ular resurslar miqdori, ma’lum talablarni qondirish zarurati, texnologiya sharoiti va boshqa texnikaviy omillardan kelib chiqadi. Ikkinchi shart - o’zgaruvchilarning, yani izlanayotgan miqdorlarning manfiy bo’lmaslik sharti hisoblanadi. Uchinchisi, maqsad funksiyasi deyilib, izlanayotgan miqdorning biror bog’lanishini ifodalaydi (ishlab chiqarish mahsulotlarini sotishdan keladigan foyda, ma’lum miqdordagi ishni bajarishga sarf bo’lgan xarajat va h.k.).

Noma’lumlarning son qiymatlari to’plami masalaning rejasi deyiladi.

Cheklanishlar tizimini qanoatlantiruvchi har qanday reja (yechim) mumkin bo’lgan reja (yechim) deyiladi.

Maqsad funksiyasiga maksimal (yoki minimal) qiymat beruvchi mumkin bo’lgan reja (yechim) masalaning optimal rejasi (yechimi), deyiladi.

Maqsad funksiyasining cheklanishlarini qanoatlantiradigan maksimum yoki minimumini topishning (1.4.1) - ko’rinishi standart chiziqli dasturlash masalasi deyiladi.

Tengsizliklar tizimi ko’rinishida berilgan cheklanish shartlarini qo’shimcha o’zgaruvchilar, ya’ni x_{n+i} kiritib tenglamalar tizimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \ , \quad x_{n+i} \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max(\min).$$

U holda bu, kanonik ko'rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasi deyiladi.

Chiziqli modelga keltiriladigan quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Misol. Korxona uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi, uni buyurtmachilarga yetkazadi va bozorga sotuvga chiqaradi.

Bozordagi talab sharti birinchi turdagi mahsulot sonini 2000, ikkinchinikini 3000, uchinchinikini 5000 tadan ortishiga yo'l qo'ya olmaydi**.**

Mahsulotni ishlab chiqarishda 4 turdagi resurs qo'llaniladi. Bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf bo'ladigan resurs miqdori hamda har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda 1.4.1-jadvalda keltirilgan.

Buyurtmachilarni ta'minlash uchun, mahsulot miqdori oshib ketmasligi uchun, maksimal foydani olish uchun ishlab chiqarish jarayonini qay tarzda tashkillashtirish kerak?

1.4.1-jadval

Resurs turi	**Mahsulot turi**			**Jami resurslar**
	1	2	3	
1	500	300	1000	25 000000
2	1000	200	100	3 0000000
3	150	300	200	2 0000000
4	100	200	400	4 0000000
Foyda	20	40	50	

Matematik modelni qurish.

Matematik modelni qurish bosqichlarini ketma-ket bajaramiz.

1) Maqsad-maksimal foyda olish.

2) O'zgaruvchilar bo'lib masalaning shartida keltirilgan hamma sonli ma'lumotlar xizmat qiladi.

3) Bosh o'zgaruvchilar:

x_1-birinchi turdagi mahsulotlar soni;
x_2- ikkinchi turdagi mahsulotlar soni;
x_3- uchinchi turdagi mahsulotlar soni;

4) Cheklanishlar: buyurtmachilar ta'minlansin, resurslar zahirasi doirasidan chiqib ketilmasin, bozor mahsulotga to'lib ketmasin.

Ushbu cheklanishlarni hisobga olgan holda, masalaning mavjud yechimlar sohasini yozib olaylik:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000, \\ x_2 \geq 2000, \\ x_3 \geq 2500, \\ x_1 \leq 2000, \\ x_2 \leq 3000, \\ x_3 \leq 5000 \\ 500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 \leq 25000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 \leq 20000000, \\ 150x_1 + 300x_2 + 200x_3 \leq 20000000, \\ 100x_1 + 200x_2 + 400x_3 \leq 40000000. \end{cases}$$

Tizimdagi birinchi uchta tengsizlik buyurtmachilar talabiga to'g'ri keladi. 4 dan 6 gacha bo'lgan tengsizliklar bozordagi talabni ifodalaydi. Oxirgi to'rtta tengsizlik resurs bo'yicha cheklanishlarni ko'rsatadi.

5) Masalaning maqsad funksiyasi yoki samaradorlik mezonining ko'rinishi quyidagicha:

$$P = 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \max .$$

Formulada foyda P harfi bilan belgilangan. Uni maksimallashtirish kerak. x_1, x_2, x_3 bilan belgilangan har bir qo'shiluvchi berilgan turdagi mahsulotni ishlab chiqarishdan olingan foydani anglatadi.

Cheklanishlar hamda maqsad funksiyasi bosh o'zgaruvchilar bo'yicha chiziqli, bundan kelib chiqadiki berilgan model chiziqlidir.

1.4.1. Ishlab chiqarishni rejalashtirishning matematik modeli

Har xil turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarishda turli xil resurslar qo'llaniladi. Har bir resursning umumiy zahirasi, har bir turdagi bitta maxsulotni tayyorlash uchun sarf bo'ladigan har bir turdagi resurs miqdori, har bir turdagi mahsulotni sotishdan olinadigan foyda berilgan. Mahsulotni ishlab chiqishning shunday rejasini tuzish kerakki, u mahsulotni sotishda maksimal foyda bersin.

Matematik modelni qurish.

Matematik modelni yuqorida bayon etilgan bosqichlar bo'yicha quramiz.

1) Maqsad - foydani maksimallashtirish.
2) Masala umumiy holda yechiladi, uning o'zgaruvchilarni aniqlash uchun shartli belgilash kiritamiz:

n - har xil turdagi mahsulotlar soni;

m - har xil turdagi resurslar soni;

b_i - i -turdagi resurs zahirasi, $i=\overline{1,m}$

a_{ij} - j-turdagi bitta mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketadigan i-turdagi resurslar miqdori. $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

p_j - j-turdagi bitta mahsulotni sotishdan olinadigan foyda.

3) x_j, $j=\overline{1,n}$ bosh o'zgaruvchilar - j-turdagi mahsulotlar soni.
4) Masalaning cheklanishlari - bu resurslar bo'yicha cheklanishlar hamda bosh o'zgaruvchilarning nomanfiylik sharti.

Shu yo'sinda matematik modelni qurish mumkin:

$$P=\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \qquad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Bu - masalaning chiziqli matematik modelidir. Uni hisoblash natijasida ishlab chiqarishning muqobil rejasi, ya'ni foyda maksimal bo'ladigan hamda resurslar zahirasidan oshib ketmaydigan har bir turdagi mahsulotlar soni aniqlanadi.

1.4.2. Materialni bichishning matematik modeli

Bichish uchun bir necha turdagi material ma'lum bir miqdorda kelib tushadi. Bu materialdan har xil mahsulot tayyorlash kerak. Material har xil usulda bichilishi mumkin. Har bir tur o'zining tannarxiga ega va har bir turga mansub mahsulotning ma'lum miqdorini olishga imkon beradi. Shunday bichish usulini topish kerakki, uning jami tannarxi minimal bo'lsin.

Matematik modelni qurish.
1) Maqsad - bichish tannarxini minimallashtirish;
2) O’zgaruvchilar:
n - bichishga kelib tushgan har xil turdagi material soni;
d_j - j-turdagi material miqdori, $j=\overline{1,n}$
m - tayyorlash kerak bo’lgan turli xil mahsulotlar soni;
b_i -i -turdagi mahsulot soni, $i=\overline{1,m}$;
l - bichishning turli xil usullari soni;
a_{ijk} - bichishning k-usulida j-turdagi birlik materialdan olish mumkin bo’lgan i-turdagi mahsulotlar soni, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;
s $_{jk}$ -j-turdagi materialni k-usulda bichish tannarxi, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;
3) Bosh o’zgaruvchilar x_{jk}- k-usulda bichilgan j-turdagi material miqdori, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,l}$;
4) Mavjud yechimlar sohasi joriy materialning miqdori, chiqarish bo’yicha cheklanishlar hamda bosh o’zgaruvchilarning nomanfiylik sharti asosida aniqlanadi.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+...+x_{1l}=d_1; \\ x_{12}+x_{22}+...+x_{2l}=d_2; \\ .... \\ x_{1n}+x_{2n}+...+x_{nl}=d_n; \\ a_{111}x_{11}+a_{112}x_{12}+...+a_{1n1}x_{1n}=b_1; \\ a_{211}x_{11}+a_{22}x_{12}+...+a_{2nl}x_{nl}=b_2; \\ \qquad\qquad .... \\ a_{m11}x_{11}+a_{m12}x_{12}+...+a_{mnl}x_{nl}=b_m; \qquad x_{jk}\geq 0,\ j=\overline{1,n}, \quad k=\overline{1,n}. \end{cases}$$

5) Muqobillik mezoni quyidagi funksiya bilan beriladi:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{jk}x_{jk}\rightarrow \min .$$

Modelni hisoblagandan so’ng har xil usulda bichilgan har bir turdagi material miqdori aniqlanadi.

Tannarxni minimallashtirish mezoni o’rniga, masalada chiqindilarni minimallashtirish mezoni olinishi mumkin. Bu holatda - shartda har bir turdagi materialni ixtiyoriy usulda bichishda olinadigan chiqindilar miqdori berilishi lozim.

1.4.3. Transport masalasining matematik modeli

Yuklarni jo’natish punktlaridan qabul qilish punktlariga tashib berishning optimal rejasini topish masalasiga transport masalasi deyiladi va u quyidagicha ta’riflanadi:

Aytaylik, $A_1,A_2,..,A_m$ punktlarida ularga mos $a_1,a_2,...,a_m$ miqdordagi bir jinsli yuklar joylashgan bo’lsin. Buni $A_1,A_2,..,A_m$ ga jo’natish punktlari deymiz. Yuklarni n-ta $V_1,V_2,...,V_n$ punktlari qabul qilishi kerak va ularning talablari mos ravishda $b_1,b_2,...,b_n$ bo’lsin. Har bir x_{ij} -birlikdagi yukni i-chi jo’natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga olib borish narxi (xarajati) - c_{ij} ma’lum deylik. Bu yuklarni tashish rejasini shunday tuzishimiz kerakki, talabgor punktlar talabi maksimal bajarilsin va hamma yuklarni olib borish uchun ketgan harajatlar yig’indisi minimal bo’lsin.

Transport masalasini shartli ravishda jadval ko’rinishda beramiz. Jadvalda quyidagilar ko’rsatiladi: qabul qilish punktlari, jo’natish punktlari, yuk zahiralari, yukka bo’lgan ehtiyoj va har bir i-chi jo’natish punktidan j-chi qabul qilish punktiga yuboriladigan yuk birliklarining narxi (yani tarif matritsasi) beriladi.

1.4.2-jadval

Jo’natish punktlari	**Qabul qilish punktlari**				**Yuk zahiralari**
	B_1	**B_2**	**. . . .**	**B_n**	
A_1	s_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . . .	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	s_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . . .	c_{2n} x_{2n}	a_2
. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
A_m	s_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . . .	c_{mn} x_{mn}	a_n
Yukka bo’lgan ehtiyoj	b_1	b_2	. . . .	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

Bu yerda $C=\{c_{ij}\}$ matritsasi ta’rif matritsasi yoki transport harajatlari deyiladi. $X=\{x_{ij}\}$ matritsa esa - transport masalasining rejasi deyiladi. Bu yerda x_{ij} - i-chi punktdan j-chi punktga yetkaziladigan yuklar hajmi (soni).

Tashish rejasi bilan bog'liq ketgan xarajatlarning umumiy yig'indisi quyidagi maqsad funksiyasi orqali ifodalanadi:

$$Z= c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+ \ldots +c_{1n}x_{1n}+ c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+ \ldots +c_{2n}x_{2n}+ \ldots$$
$$c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+ \ldots +c_{mn}x_{mn}.$$

Bu yerda x_{ij} - o'zgaruvchilar yuk zahirasi, yukka bo'lgan ehtiyoj va manfiy bo'lmaslik shartlarini (chegaralanishlarni) bajargan bo'lishi kerak.

Yuqoridagilarni hisobga olgan holda transport masalasining matematik modelini quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Transport masalasining matematik jihatdan qo'yilishi quyidagicha talqin qilinadi: Chegaraviy tizimlar, manfiy bo'lmaslik sharti va maqsad funksiyasi berilgan, deylik. Talab qilinadiki tizimning yechimlar to'plamidan shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini (rejasini) topish kerakki, bunda maqsad funksiyasi minimal qiymatga erishsin.

Transport masalasi ikki turga bo'linadi, ochiq va yopiq turdagi. Agar yuk zahiralari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

masala yopiq turdagi masala bo'ladi

Agar yuk zahiralari yig'indisi talab qilingan yuklar yig'indisiga teng bo'lmasa, ya'ni:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ ,$$

u ochiq turdagi masala sanaladi.

1.4.4.Korxonalar o'zaro qarzlarini bartaraf etishi

Ixtiyoriy iqtisodiy tizim bir-biri bilan tovar va xizmatlar almashinuvchi o'n minglab korxona (firma, korporatsiya va boshqalar) larni o'z ichiga oladi. Xattoki, nisbatan uncha ko'p bo'lmagan bevosita hamkorlarga ega bo'lgan kichik bir korxona ikkilamchi tarzda (ikkilamchi hamkorlari aloqalari orqali) katta miqdordagi korxonalar bilan bog'langan. Ushbu korxonaning iqtisodiy o'sishi hamkorlarning iqtisodiy holatiga to'g'ridan-to'g'ri bog'liq. Aynan bu tasdiq yuzlab va minglab hamkorlar bilan aloqa qiluvchi katta korporatsiya va korxonalar uchun juda o'rinli [1,22,60].

Iqtisodiy tizimni barcha zvenolarining bir-biriga o'zaro bog'liqligi sotilgan tovarlar yoki ko'rsatilgan xizmatlar uchun to'lovlarni amalga oshirishda korxonalar o'rtasida bo'ladigan hisob-kitobda yaqqol ko'rinadi. Haqiqatdan ham, korxona sotilgan tovari uchun mijozlardan olinadigan to'lovni korxonani faoliyatini samarali yuritish maqsadida boshqa firmalardan yangi mahsulotlar va mashinalar sotib olishga, oylik maoshni to'lashga (ya'ni, ishchi kuchi sotib olishga), reklamaga va boshqa xarakatlarga sarflaydi. Shu sababli ushbu korxona hamkorlarining kattagina qismi qo'shimcha tarzda iqtisodiy aylanmaga jalb etiladi. O'z navbatida korxonadan tovar sotib olgan mijoz ushbu tovardan qayta sotish yoki o'zini mahsulotini ishlab chiqarish va boshqa maqsadlar uchun foydalanib, iqtisodiy faoliyatda ishtirok etuvchi agentlar sonini oshiradi.

Agar tovarlar o'z vaqtida mijozlarga yetkazib berilsa va o'z navbatida mijozlar ushbu tovarlarga to'lovlarni vaqtida amalga oshirsalar moliyaviy tomondan iqtisodiy tizimga hech narsa xavf solmaydi. Shu sababli korxonalar o'z faoliyatlarini davom ettirish uchun bank hisob raqamlaridagi moliyaviy resurslarini kattagina qismini foydalanishlariga boz ustiga asosiy fondlarini (yer, ko'chmas mulk, qurilma, texnologiya) sotishlariga hech narsa to'sqinlik qila olmaydi. Amalda tovarni yetkazib berish va uni to'lovi (yoki barcha tovarlar uchun yoxud bundan keyin yetkazib beriladigan tovarlar uchun oldindan to'lovlar) o'rtasida doimo vaqt bo'yicha kechikish mavjud. Bu kechikishning minimal qiymati sof texnik sabablar bilan aniqlanadi, chunki tovarni transportirovka va rasfasovka qilish, bankdan pul ko'chirish uchun doimo vaqt talab qilinadi.

Ammo, shunday holatlar ham mavjudki, qandaydir iqtisodiy, moliyaviy, ichki va tashqi siyosat, ijtimoiy va boshqa sabablarga ko'ra to'lovlarni (tovarlarni yetkazib berishni) kechikish vaqtini moliyaviy aylanma vaqti bilan taqqoslash mumkin bo'lib qoladi. Amalga oshirilmagan to'lovlar yoki yetkazib berilmagan tovarlarning hajmi esa korxonaning erkin aylanmadagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo'lgan darajadagi miqdorga ega bo'ladi. Bu holda butun iqtisodiy tizimni jiddiy krizisga olib keluvchi to'lay olmaslik krizisi kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, yetkazib berilgan tovarga pul olmagan (yoki tovarga pul to'lagan, lekin uni olmagan) korxona tovarni sotganlar (birinchi sotuvchilar) ga tovar uchun to'lashi lozim bo'lgan to'lovni amalga oshira olmaydi (chunki korxonaning qarzlari xajmi erkin aylanmadagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo'lgan darajada, ulardan foydalanish vaziyatni yaxshi tomonga o'zgartira olmaydi). O'z navbatida tovarni yetkazib beruvchilar o'z mijozlari bilan, bu mijozlar esa o'zlarini mijozlari bilan va x.k. hisob-kitob qila olmaydilar. Natijada butun iqtisodiy tizimda to'lay olmaslikning uzun zanjiri paydo bo'ladi. Bu zanjir N ta zvenodan iborat bo'lib, ularning umumiy soni $N!$ (N - korxonalarning umumiy soni) ga yetishi mumkin. Zanjirdagi qarzlar miqdorlarining absolyut qiymatlari yigindisi korxonaning nafaqat erkin aylanmadagi vositalaridan oshib ketadi, balki ularning asosiy fondlari narxlari bilan solishtirish mumkin bo'lgan darajaga yetadi (ixtiyoriy korxona bir vaqtning o'zida o'z hamkorlarining qarzdori va kreditori bo'lishi mumkin, shu sababli bu yerda gap aynan qarzlar miqdorlarining absolyut qiymatlari yigindisi haqida ketmoqda). Bu holatda tizim boshi berk ko'chaga kirib qoladi – korxona ishlab chiqarishni to'xtatishi kerak yoki jami qarzlar miqdorini oshirib, bir-biridan qarz olib, faoliyatini davom etirishi mumkin.

Umuman olganda vaziyatdan chiqish uchun quyidagicha yondoshish mumkin: qandaydir vakolatli muassasa (masalan, markaziy bank) barcha korxonalarga qarzlari miqdorida bir vaqtning o'zida kredit berish. U holda bu korxonalar bir-biri bilan hisob-kitob qilib, kreditlarni qaytarishadi. Ammo, bunday kredit siyosati salbiy oqibatlarga olib keluvchi kuchli inflyatsiyani paydo bo'lishiga turtki bo'lishi mumkin (tovarlarni ishlab chiqarish ko'paytirilmadi, aylanmadagi pul esa birdaniga ko'payib ketdi).

Ixtiyoriy to'lay olmaslik krizisida hisob-kitoblar jarayoni o'zini nomukamalligi bilan bog'liq bo'lgan sof «texnik» komponentalari doimo hal qiluvchi rolni bajaradi. Keyinchalik iqtisodiy, siyosiy va boshqa sabablar bilan paydo bo'lmagan krizislarni, ya'ni aynan hisob-kitoblar jarayoni nomukamalligi bilan bog'liq bo'lgan krizislarni o'rganamiz.

Masalaning mohiyatini avval uchta korxonadan tashkil topgan tizim uchun sonli misolda tushuntiramiz. Ushbu korxonalardan har biri shartli bitta moliyaviy birlikka teng bo'lgan erkin aylanma vositasiga va 10 birlikka teng asosiy fondlarga ega. Birinchi korxona ikkinchisiga 100 birlik, ikkinchisi uchinchisiga 100 birlik va uchinchisi birinchisiga 100 birlik qarz bo'lsin. Korxonalarning qarzlari absolyut yigindilari 600 birlikka teng bo'lib, ularning asosiy fondlari (30 birlik) ga nisbatan ancha katta, erkin aylanma vositalari (3 birlik) ga nisbatan solishtirmasa ham bo'ladi. Shu bilan bir vaqtda ushbu tizimning moliyaviy axvoli juda yaxshi, chunki korxonalar har birining alohida jami qarzlari (ya'ni, korxona berishi lozim bo'lgan va olishi lozim bo'lgan vositalar) yigindisi nolga teng. Bu holatda o'zaro hisob-kitob qilish jarayoni bir vaqtning o'zida barcha qarzlarni bekor qilishdan iborat: hech kim hech kimdan qarz emas va qarz g'avg'osidan xolis holda hamkorlar o'z ishini davom ettirishi e'lon qilinadi. Bu holda markazlashgan kreditga hojat qolmaydi.

Katta moliyaviy majburiyatlar zimmasida bo'lgan ko'p sondagi korxonalar uchun bu yondoshishni amalga oshirib bo'lmaydi. Buning uchun masalani formallashtirish va chuqur tahlil qilish lozim bo'ladi.

Iqtisodiy tizim o'zaro bir-biriga qarz berishi va bir-biridan qarz olishi mumkin bo'lgan N ta moliyaviy baquvvat korxonalardan iborat bo'lsin. x_{nm} $(n \geq 1,\ m \leq N)$ orqali n-chi korxonaning m-chi korxonadagi qarzini (agar $x_{nm} < 0$ bo'lsa birinchi korxona ikkinchisidan qarzdor bo'ladi va $x_{nm} > 0$ bo'lsa aksincha bo'ladi) belgilaymiz. Bu belgilashga asosan

$$x_{nm} = -x_{mn}, \qquad x_{nn} = 0$$

ekanligi ko'rinib turibdi. Demak, jami qarzlar to'plamini diagonali nollardan iborat (chunki, $x_{nn} = 0$, ya'ni korxona o'zidan qarzdor bo'la olmaydi) $N \times N$ o'lchamli kososemmetrik matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin.

Barcha o’zaro qarzlar yigindisini individual qarzlar orqali quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin:

$$X = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} |x_{nm}| . \qquad (1.4.2)$$

Agar (1.4.2) formula bilan aniqlanadigan miqdorni korxonalarning barcha erkin vositalari yigindisi X_0 bilan taqqoslash mumkin bo’lsa, u holda bu miqdor tizim moliyaviy holatining miqdoriy xarakteristikasi sifatida xizmat qilishi mumkin, ya’ni

$$X > X_0 = \sum_{n=1}^{N} x_n . \qquad (1.4.3)$$

(1.4.3) tengsizlik bilan ifodalanadigan holat to’lay olmaslik krizisini anglatadi, bu yerda $x_n \geq 0$ bilan n-chi korxonaning individual erkin vositasi belgilangan.

Har bir korxonaning kredit va qarzlari (saldo) balansi korxonalarning yana bitta muhim bo’lgan xarakteristikasidir, u quyidagicha aniqlanadi:

$$S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm} . \qquad (1.4.4)$$

(1.4.4) ga asosan quyidagi hollardan biri bo’lishi mumkin: $S_n > 0$, $S_n < 0$ va $S_n = 0$. $S_n > 0$ da korxona $S_n < 0$ balansga ega bo’lgan qarzdor korxonalar uchun qarz beruvchi – kreditor vazifasini o’taydi. $S_n = 0$ korxonani kreditor ham debitor ham emasligini, ya’ni korxona xech kimdan hech qanaqa qarzi yo’qligini anglatadi. $|S_n| < x_n$ bo’lgan xol korxonaning individual moliyaviy holati normal holatda ekanligini, korxonani qarzlari (yoki uning boshqa korxonalarga bergan kreditlari)ning real yigindisi uning erkin vositalaridan kichiq ekanligidan dalolat beradi.

Xuddi shunga o’xshash, iqtisodiy tizimning absolyut saldolari yigindisi

$$S = \sum_{n=1}^{N} |S_n| \qquad (1.4.5)$$

bu tizimning moliyaviy ahvolini anglatuvchi makroko’rsatkich sifatida xizmat qiladi. Agar $S < X_0$ bo’lsa, ushbu iqtisodiy tizimda erkin vositalar qarzlar hajmidan katta bo’lib, bu tizim normal faoliyat yuritishi mumkin (yuqorida keltirilgan misoldagi uchta korxonadan iborat tizim kabi).

X va S miqdorlar o'rtasida doimo ma'lum munosabat mavjud. Ixtiyoriy qarzlar matritsasi uchun

$$X \geq S, \tag{1.4.6}$$

o'rinli, ya'ni qarzlar yigindisi hech qachon saldolari yigindisidan kichik bo'lishi mumkin emas.

O'zaro qarzlarni bartaraf qilish masalasi x_{nm} larni matritsasini bilgan holda $X' < X$ shartni qanoatlantiruvchi «yangi» x'_{nm} qarzlar matritsasini topishdan iborat. (1.4.6) tengsizlikdan ko'rinib turibdiki, $X' = S$ bu masalaning ideal yechimidir. U holda normal moliyaviy holat ($S \leq X_0$) dagi tizim uchun $X' = S \leq X_0$ munosabat bajariladi va o'zaro qarzlar uzilgandan so'ng bu tizim normal faoliyatini yuritishi mumkin.

O'zaro qarzlarni uzish (bartaraf etish) jarayonining matematik modelini qurishda quyidagi ketma-ket xarakatlardan foydalaniladi. Birinchi navbatda ma'lum bir bosqichda individual qarzlar to'plamini va korxonalar o'rtasidagi aloqalarni chuqur taxlil qilishdan voz kechish lozim.

Yuqorida keltirilgan misolda uchta korxonaga qo'llanilgan qarzlarni to'lay olmaslik zanjirini kuzatish jarayonini N ta korxona uchun nafaqat bajarish qiyin, balki bu jarayon kamchiliklardan holi emas. Har bir M ta korxona birinchisi ikkinchisiga, ikkinchisi uchinchisiga va hokazo M-chisi birinchisiga bir xil miqdordagi qarzdor bo'lgan zanjirni qaraymiz. Ko'rinib turibdiki, bu yopiq zanjir va har bir korxona qarzlaridan qutilishlari mumkin, ya'ni korxonalarni qarzlari bekor qilinadi. Agar M-chi korxona birinchisiga qarzdor bo'lmasa, hosil bo'lgan zanjir ochiq bo'lib, endi yuqoridagi usulni bu zanjirga qo'llab bo'lmaydi. Bu holda qarzdorlikdan qutilishni yo'li ikkinchi, uchinchi va hokazo $(M-1)$ chi korxonalarni qarzlari bekor qilinib, birinchi korxona o'z qarzini M-chi korxonaga to'lashni birinchi korxona zimmasiga yuklashdan iborat. Qarzni bir korxonadan ikkinchi korxonaga yo'naltirish moxiyati va mazmuni bo'yicha veksel bilan muomala qilishga mos keladi. Bu holda qarz bergan xo'jayin o'zgarib, natijada qarzdor korxona (birinchi) da yangi kreditor (M-chi korxona) paydo bo'ladi.

Qarzdorlikning yopik zanjirida $x_{nm} = -x_{mn}$ ekanligini hisobga olsak, quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{nm} = 0. \tag{1.4.7}$$

Bu tenglikdan $S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm}$ ekanligini nazarda tutib, har bir korxonaning kreditlari va qarzlari (saldo) balansi uchun quyidagiga ega bo'lish mumkin:

$$\sum_{n=1}^{N} S_n = 0 \quad . \tag{1.4.8}$$

(1.4.7) munosabatdan ko'rinib turibdiki, korxonaning musbat saldolari yig'indisi uning manfiy saldolari yig'indisiga teng. Ko'rib chiqilgan o'zaro qarzlardan qutilish tizimi «simmetrik konservativlik» (1.4.8) xususiyatiga ega, shuningdek bu tizim uchun «saqlanish qonunlari» (massaning, energiyaning va boshqalarning saqlanish qonunlari) (1.4.7) o'rinli bo'ladi.

(1.4.8) munosabatga asoslanib, o'zaro qarzlardan ideal qutilishning matematik modelini qurishda quyidagi shartlardan foydalanish mumkin:

1) barcha x_{nm} qarzlar ma'lum va bu qarzlarni korxonalar tan olishadi;

2) o'zaro qarzlarni uzishda korxonalarni S_n saldosi o'zgarmasdan qoladi: $S'_n = S_n$, ya'ni bu holda korxonalarning individual moliyaviy holati o'zgarmaydi:

3) x_{nm} qarzlarni bir qismi bekor qilinadi, bir qismi boshqa korxonalarga yo'naltirilishi mumkin, ya'ni korxona yangi debitorlarga va kreditorlarga ega bo'lishi hamda eski qarzlarining bir qismidan qutilishi mumkin.

O'zaro qarzlardan qutilish jarayonining mohiyati x_{nm} qarzlarni o'rniga korxonalarni S_n saldosini o'rganishdan iborat. $S_n < 0$ bo'lgan korxonalar qarzdor, saldosi $S_n > 0$ korxonalar kreditor deb e'lon qilinadi. Keyin esa saldosi $S_n < 0$ bo'lgan korxonalarning qarzlari kreditorlar o'rtasida qanaqadir yo'llar bilan taqsimlanadi, ya'ni «yangi» x'_{nm} qarzlar tizimi topiladi. Bunda (1.4.7) saqlanish qonuni va 2) shart hamda $X' = S$ tenglik bajariladi. Shu sababli o'zaro qarzlardan qutilish masalasining bu yechimi optimal yechim deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan optimal yechim juda ko'plab variantda bo'lishi mumkin. Chunki kreditorlar o'rtasida qarzlarni har xil yo'llar bilan taqsimlash mumkin. Bunga ikkita sodda misol keltiramiz. Birinchisida yangi qarzlar eskilari orqali quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$x'_{nm} = \frac{S_n|S_m| - S_m|S_n|}{S}. \qquad (1.4.9)$$

(1.4.9) formulaga asosan qarzi $S_n\,(S_n < 0)$ bo'lgan ixtiyoriy korxonaning qarzi kreditor-korxonalar o'rtasida ularning saldolari $(S_m > 0)$ ga proportsional ravishda taqsimlanadi. Musbat saldosi katta bo'lgan korxonalar zimmasiga har bir qarzdor korxonalar qarzlarining kattagina qismi yuklanadi. Bu qarzlarning umumiy miqdori S_m ga teng bo'ladi.

Agar $S_n < 0,\ S_m < 0$ yoki $S_n > 0,\ S_m > 0$ bo'lsa, u holda (1.4.9) formulaga asosan yangi qarzlar $x'_{nm} = 0$ bo'ladi (ya'ni, korxonalar o'zaro qarzlaridan qutulganlaridan so'ng qarzdorlar qarzdorlarga, kreditorlar kreditorlarga qarz emas). Bu shuni anglatadiki, korxonalar o'zaro qarzlaridan qutilganlaridan so'ng hosil bo'lgan moliyaviy aloqalar soni har bir korxona boshqa korxona uchun debitor yoki qarzdor bo'lgan, ya'ni qarzlar matritsasi nol bo'lmagan (bosh diagonal elementlaridan boshqa) elementlardan iborat holdagi moliyaviy aloqalar sonidan ancha kam.

1.4.5. Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli

Bozor iqtisodiyoti jarayonida ixtiyoriy ishtirok etuvchi o'zining individual manfaatdorligi bo'yicha xarakat qiladi (ya'ni foyda olish, mehnat sharoitini yaxshilash, iqtisodiy xavfni kamaytirish, vositalarni tejash va boshqalar). Har bir sub'ekt iqtisodiy nochor axvolda, ya'ni ishlab chiqarishga, narxlarga, oylik maoshiga va boshqa makroko'rsatkichlarga bevosita ta'sir qila olmaydigan darajada bo'lsa bunday tizimning eng sodda varianti – raqobatdan iqtisod qilishdir. Shu bilan birgalikda iqtisodiy tizimda mavjud oldi-sotdi munosabatlari ish beruvchilar va yollanma ishchilar, moliyachilar hamda sarmoya kirituvchilar va boshqalarning muvofiqlashgan harakati iqtisodiy agentlarning harakati natijasida bo'lishi mumkin. Agar bunday jamoaviy o'zaro harakat natijasida tizimda tovar va xizmatlarni umumiy ishlab chiqarish ularga bo'lgan umumiy ehtiyojlarga muvofiqlashsa, u holda iqtisodiyotni bunday holati muvozanatli, bu holdagi turg'un narxlar turg'un bozor narxlari deyiladi. Talab va taklif o'rtasidagi balans aynan shu turg'un bozor narxlarida o'rinli bo'lib, xususan, talabni to'lanish qobiliyatini anglatadi [1,22,60].

Iqtisodiy fanlarni muhim masalalaridan biri – iqtisodiyotni muvozanat shartlarini, shu jumladan, turg'un bozor narxlarini aniqlashdan iborat. Iqtisodiy muvozanatning eng sodda matematik modellari quyidagi farazlarga asoslanib quriladi:

1) yirik ishlab chiqaruvchi korporatsiya (ya'ni, monopoliya) larni shuningdek, butun tizim uchun o'zlarini shartlarini himoya (diktovka) qiladigan ishchilar birlashmasining mavjud emasligini anglatuvchi mukammal bozor raqobati;

2) tizim ishlab chiqarish imkoniyatining o'zgarmasligi: asbob-uskunalar, ishlab chiqarish inshootlari va texnologiyalari vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi;

3) vaqt o'tishi bilan hamkorlar iqtisodiy manfaatdorligini o'zgarmasligi: tadbirkorlarni o'z foydalarini, ishchilar o'z oylik maoshlarini oshirishga intilmasliklari hamda investorlarni qimmatli qog'ozlardan va boshqalardan tushayotgan foizlarni qanoatlantirishi.

Yuqorida ko'rsatilgan farazlarga javob beruvchi modellar ideal bozor iqtisodiyotining vaqt bo'yicha «qotib qolgan» (sovub qolgan) xollarini ifodalaydi. Ammo, bu modellar bozor «xaos»idan shakllanuvchi iqtisodiy muvozanatni mavjudlik imkoniyati haqidagi savolga javob beradi va bundan tashqari iqtisodiy tizimning asosiy makroko'rsatkichlarini o'zaro bog'laydi.

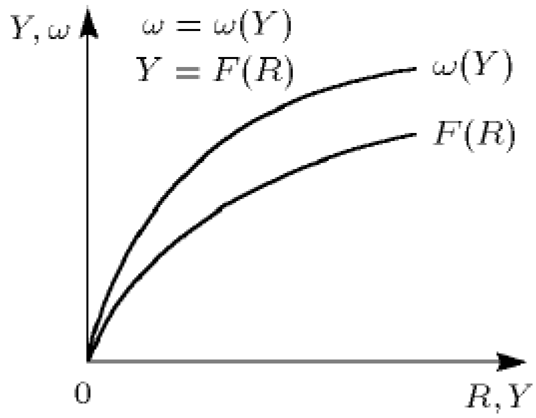
Ushbu modellardan bittasi – Keyns modelidir. Ushbu modelda ishga yollovchilar va yollanuvchilar, iste'molchilar va jamg'aruvchilar, ishlab chiqaruvchilar va ishchi kuchi bozorida harakat qiluvchi investorlar, mahsulotlar va pul, ya'ni bu tovar (mehnat, mahsulot, pul) larni o'zaro taqsimlovchilar va almashuvchilar agentlar sifatida qaraladi.

Milliy daromad Y tizimning birinchi makroko'rsatkichi bo'lib, vaqt birligi ichida ishlab chiqariladigan yagona mahsulotdir. Ushbu mahsulot iqtisodiyotning ishlab chiqarish sektorida ishlab chiqariladi, uning miqdori F funksiya orqali ifodalanadi. F funksiya resurs (vosita) larni miqdori va sifatiga, asosiy fondlar tarkibiga va band bo'lgan ishchilar soni R (ikkinchi makrokursatkich) bilan bog'liq. 2) farazga asosan iqtisodiy muvozanat holatida ishlab chiqarish funksiyasi R va Y faqatgina bandlik orqali aniqlanadi, ya'ni

$$Y = F(R). \tag{1.4.10}$$

$F'(R) > 0,\ R > 0$ munosabatga nisbatan quyidagilar o'rinli deb hisoblaniladi: $F(0) = 0$, $F'(R) > 0,\ R > 0$ va $F''(R) < 0,\ R > 0$ da (1.4.1-rasm). $F(R)$ funksiyasi to'yinganlik xususiyatiga ega: R oshishi bilan tovar ishlab chiqarish sekinlashadi. Bunday yondoshish amalda o'zini oqlaydi:

ishlab chiqarishda band bo'lganlar soni xaddan tashqari oshib ketsa, ularga mos keluvchi ish frontini topish ancha mushkullashadi.



1.4.1-rasm

Shuningdek, ishchilar soni me'yoriga nisbatan ko'pchilikni tashkil etsa, ular bir-biriga xalaqit bera boshlaydi va individual foydali ish koeffitsienti tushib ketadi. (1.4.10) munosabat mehnat bozori R va Y mahsulotlar o'rtasidagi o'zaro aloqani ifodalaydi. Qo'shimcha munosabatlar esa klassik siyosiy iqtisodning asosiy postulatlaridan bittasi orqali aniqlanadi:

4) ishchining s mehnat xaqi ish o'rnini bitta birlikka kamaytirilganda yuqotilgan mahsulotni narxiga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki, 4) farazda ish o'rnini bittaga kamaytirishdan hosil bo'ladigan zararlar (resurslarga, asbob-uskunalarga va boshqalarga sarflanadigan harajatlar) hisobga olinmagan. Shunday qilib, 4) farazidan quyidagiga ega bo'lish mumkin:

$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s$, bu yerda $\Delta Y^{(1)}$ - ish o'rnini bitta birlikka kamaytirilganda yuqotilgan mahsulotlar sonini, p - yuqotilgan mahsulot narxi. Agar ish bilan bandlik ΔR miqdorga o'zgarsa, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin: $\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R$, bu yerda $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R$ ishchilar soni ΔR miqdorga o'zgarganda yuqotiladigan yoki qo'shimcha paydo bo'ladigan mahsulotlar soni. ΔR va ΔY miqdorlarni R va Y miqdorlarga taqqoslaganda kichik deb hisoblab, oxirgi tenglikni differentsial ko'rinishda yozish mumkin: $\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{s}{p}$.

(1.4.10) tenglikni e'tiborga olsak, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \qquad (1.4.11)$$

$F(R)$ funksiya berilgan (bunga asosan $F'(R)$ ni ham aniqlash mumkin) ligini hisobga olsak, s va p makroko'rsatkichlarning ma'lum qiymatlarida (1.4.10) dan bandlik darajasi R ni va (1.4.1) dan mahsulotlar miqdori Y ni aniqlash mumkin. Bu yerda aniqlangan bandlik darajasi iqtisodiy tizimda mavjud narxlar va boshqa xarakteristikalarga mos keluvchi ushbu kundagi oylik maoshlariga rozi bo'lib ishlayotgan ishchilar sonini ifodalashini ta'kidlash joiz. Bandlik darajasi muvozanatini ta'minlovchi, mavjud sharoitlarda ishlashni istagan ishchilrni hamma vaqtlarda ham topish mumkin, ya'ni quyidagicha faraz qilinadi:

5) (1.4.10) va (1.4.11) tenglamalarda to'rtta miqdorlar qatnashmoqda. Ishchining s mehnat haqiga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

6) modelda ishchining s mehnat haqi berilgan deb hisoblanadi.

s miqdor ish beruvchilar va yollanuvchilar o'rtasidagi kelishuv natijasida aniqlanadi (real ish xaqi narxlar darajasiga ham bog'liq).

Yopiq matematik model qurish uchun mahsulot bozorlari va moliyaviy bozorlarni ham o'rganish lozim bo'ladi. Ishlab chiqarilgan mahsulotni bir qismi ehxtiyojni qondirishga va ma'lum bir qismi jamgarilib boriladi:

$$Y = S + \omega,$$

bu yerda ω - iste'mol qilinadigan (iqtisodiyotga qaytmaydigan) qismi, S esa iqtisodiy tizimga qaytuvchi, jamgarib boriladigan (yoki fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar) qismini ifodalaydi. S va ω miqdorlar o'rtasidagi munosabat quyidagi mulohazalardan aniqlanadi. ω miqdorga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

7) ishlab chiqarilgan mahsulotning iste'mol qilinadigan qismi ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y ning o'ziga bog'liq, ya'ni $\omega = \omega(Y)$. Bu yerda $\omega(Y)$ funksiyasi $F(R)$ funksiyasi singari to'yinganlik xususiyatiga ega: ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori qancha katta bo'lsa, iste'mol qilishga sarflanadigan qo'shimcha ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori ΔY ning ulushi shuncha kichiq bo'ladi va katta qismi jamgarilib boriladi. $d\omega / dY = c(Y)$ miqdor *iste'mol qilishga moyillik deyiladi.* $0 < c < 1$, aks holda kichiq miqdorda ishlab chiqarilgan mahsulotlarda ishlab chiqarilgan miqdoriga nisbatan ko'proq iste'mol

talab qilinar edi. $d = 1 - c$ miqdor jamgarish (yigish) ga moyillikni anglatadi.

$$S = Y - \omega(Y) \tag{1.4.12}$$

fondni tashkil qiluvchi mahsulot kelgusida foyda olish maqsadida investitsiya sifatida investorlar tomonidan iqtisodiyotga kiritiladi. Matematik modelda kiritilayotgan investitsiya kelgusida iste'mol uchun tashlab qo'yilgan mahsulotga ekvivalent deb hisoblaniladi va shu sababli tizimning yana bitta moliyaviy makroko'rsatkichi – bank foizining normasi r bilan aniqlanadi. Haqiqatdan ham A miqdorda investitsiya kiritib, bir yildan keyin $D = A \cdot r$ daromad olib, ushbu vositalarni bankka r foizga qo'yishga solishtiriladigan bo'lsa, investor hech narsa yutqazmaydi (bu misolda yutmaydi ham). Ikkala holda ham keyingi yilda katta miqdordagi iste'mollik imkoniyati sababli bugungi iste'mol keyinga qoldirilmoqda. Investitsiyaga talab $A(r)$ funksiya bilan beriladi. Agar $0 < r < r_1$ bo'lsa $A'(r) < 0$ va $r \geq r_1$ bo'lsa $A'(r) = 0$ bo'ladi – investitsiyaning katta foizli normasida investitsiyaga talab bo'lmaydi.

Muvozanat sharoitida fondni tashkil qiluvchi mahsulotga bo'lgan talab $S(Y)$ investitsiyaga bo'lgan talab $A(r)$ bilan balanslashadi:

$$S(Y) = A(r).$$

Agar (1.4.12) ifodani e'tiborga olsak,

$$Y - \omega(Y) = A(r). \tag{1.4.13}$$

Modelni yopiq ko'rinishda ifodalash uchun moliyaviy bozor o'rganiladi. Iqtisodiy agentlar uchun pul fondini tashkil qiluvchi mahsulotlar sotib olishga, iste'mol uchun, shuningdek, jamg'arishning bir vositasi sifatida kerak. Faraz qilinadiki, pulni davlat chiqaradi va ularning miqdori (taklif) Z iqtisodiy tizimning berilgan boshqariluvchi parametri deyiladi. Pulga bo'lgan talabga nisbatan quyidagicha faraz qilinadi:

8) pulga bo'lgan talab operatsion va biznes talablari yigindisidan iborat.

Operatsion talab Y tovarni sotib olish uchun (ham fondni tashkil qiluvchi sifatida hamda iste'mol uchun) qo'lda bo'lishi lozim bo'lgan pul miqdori bilan aniqlanadi. Agar mahsulot narxi p ga teng, muomala vaqti τ ga teng bo'lsa, u holda operatsion talab τpY miqdorga teng.

Biznes talabi foiz normasi miqdori r bilan bog'liq. Agar foiz normalari yuqori bo'lsa, katta pulga ega bo'lgan puldorlar yaxshi daromaddan umid qilib, pullarining anchagina qismini bankda saqlaydilar. Bunda ular bankga nisbatan banknotlarni yuqori darajada likvidatsiya qilish (bu pullarni mahsulotlarga almashtirish) imkoniyatini qurbon qiladilar. Kichkina foiz stavkasida biznes talabi oshadi: puldorlar o'z qo'llariga ko'proq miqdordagi pullarni ushlab turishni xohlaydilar. Shuning uchun biznes talabi $I(r)$ funksiya orqali beriladi. $r > r_2$ bo'lganda $I'(r) < 0$ bo'ladi, $r \to r_2$ da $I(r)$ funksiya juda tez usadi ($r \to r_2$ da $\lim I(r) = \infty$; pul egalari bank majburiyatlariga ega bo'la olmaydilar). $r_2 < r_1$ deb hisoblash tabiiy, aks holda yoki investitsiya nolga teng va iqtisodiy muvozanat haqida gapirishga hojat qolmaydi yoxud $I(r)$ funksiya aniqlanmagan va uni o'rganish ma'no kasb etmaydi.

Moliyaviy bozor muvozanat holatida bo'lganida pullarni balansi («saqlanish qonuni») iqtisodiy tizimda quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$Z = \tau\, pY + I(r). \tag{1.4.14}$$

(1.4.10)-(1.4.14) tenglamalarni birlashtirib, 1)-8) farazlar asosida hosil qilingan bozor muvozanatining matematik modeliga ega bo'lish mumkin:

$$Y = F(R), \quad F'(R) = \frac{s}{p}, \quad Y - \omega(Y) = A(r) \quad Z = \tau\, pY + I(r) \tag{1.4.15}$$

matematik modelda tizimning parametri s (oylik maosh stavkasi) va τ texnik parametrlar beriladi. F, F', ω, A, I funksiyalar har biri o'z argumentlarining ma'lum funksiyalari bo'lib, ular yuqorida bayon etilgan xossalarga ega. Ushbu berilganlarga asosan modeldan to'rtta noma'lum miqdorlar: Y (ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori), R (bandlik), p (mahsulot narxi) va r (daromad normasi) aniqlanadi.

(1.4.15) dan p, r, Y miqdorlarni yo'qotib, (1.4.15) tenglamani R ga nisbatan quyida keltirilgan bitta tenglama ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$\frac{\tau sF(R)}{F'(R)} + Z = I\left(A^{-1}[F(R) - \omega(F(R))]\right), \tag{1.4.16}$$

bu yerda A^{-1} funksiya A funksiyaga teskari funksiyadir. (1.4.16) dan R ni qiymatini aniqlab, (1.4.15) tenglamalardan boshqa noma'lum miqdorlarni ham aniqlash mumkin.

(1.4.16) tenglamani chap va ung tomonlariga kiruvchi funksiyalarni grafiklari tahliliga asoslanib, bu tenglama yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz.

$F(R)-\omega(F(R))$ funksiya $R=0$ da nolga teng bo'lib, R ning monoton o'suvchi funksiyasidir. Uning monotonligi $d\omega(F(R))/d(F(R))=c<1$ shartdan, bu funksiya R ni o'sishi bilan o'suvchi ekanligi esa $dF(R)/dR>0$ shartdan kelib chiqadi. Shuningdek, bu funksiya A^{-1} monoton funksiyaning argumentidir. A funksiyaning xossasidan A^{-1} funksiyaning R argumentga sifat jihatdan qaysi ko'rinishda bog'liqligini ko'rish mumkin. Rasmdan ko'rinib turibdiki, $R>R_1$ (R_1 R ning qandaydir qiymati bo'lib, $0<R_1<\infty$) shart bajarilsa, $A^{-1}\equiv 0$. O'z navbatida A^{-1} funksiya tenglamada I funksiyaning argumenti sifatida ishtirok etayapti.

Endi (1.4.16) tenglamaning chap tomonini ko'rib chiqamiz. $-\tau sF(R)/F'(R)$ funksiya $R=0$ da nolga teng ($F'(R)\neq 0$deb faraz qilinadi). uning R bo'yicha birinchi tartibli hosilasi funksiyaning $F'(R)>0$, $F''(R)<0$ xossalariga asosan manfiy, ya'ni bu funksiya monoton kamayuvchidir.

(1.4.15) matematik model muvozanat holatiga yaqin bo'lgan turli holatlarni qiyosiy tahlili uchun ham ishlatilishi mumkin (qanday qilib tizim muvozanat holatiga keladi yoki muvozanat holatidan chiqadi degan savollarga javob bermasdan).

1.4.6. Iqtisodiy o'sishning makromodeli

O'suvchi iqtisodda vaqt o'tishi bilan ishlovchilar soni ko'payib boradi. Eng oddiy holda ish bilan ta'minlanganlarning o'sish sur'ati ishlayotganlar soni bilan proportsional [1,60]

$$\frac{dR}{dt}=\alpha R(t)\ . \tag{1.4.17}$$

Shuning uchun $R(t) = R_0e^{\alpha t}$ vaqtning ma'lum bir funksiyasi, $R_0 = R(0)$ - boshlang'ich vaqtdagi ishlovchilar soni, α - ma'lum miqdor.

Ishchilar mehnati tufayli $y(t)$ milliy daromad keltirsak, bu daromad qisman extiyojlarni qondirishga va jamg'arishga ketadi, ya'ni

$$y(t) = W + A. \tag{1.4.18}$$

Bu yerda W – extiyojlarni qondirishga sarf bo'ladigan A – jamg'arilgan daromadning qismlaridir.

Jamg'arilgan A qism esa o'z navbatida qatordan chiqib qolgan sanoat quvvatini tiklash va yangi quvvatlar yaratish uchun sarf etilib, yana iqtisodga qaytadi. $M(t)$ – quvvat deyilganda mahsulotni mumkin qadar maksimal ishlab chiqarilishi tushiniladi.

Mahsulotni real ishlab chiqarish ishlovchilar soniga bog'liq bo'ladi.

$$y(t) = M(t)\, f(x(t)). \qquad (1.4.19)$$

(1.4.19) da - $x(t) = R(t) / M(t)$– bir birlik quvvatda ishlovchilar soni.

$f(x)$ funksiya to'g'risida quyidagicha faraz qilinadi:

$f(0) = 0,\ f'(x) > 0$, ya'ni ishlovchilar soni oshishi bilan ishlab chiqarilayotgan mahsulot ham oshib boradi va $f''(x)<0$ iqtisodni mahsulot bilan to'lganligini (ta'minlanganligini) bildiradi.

$f(x)$ funksiya $x[0;X_M]$da aniqlangan, $X_M = R_M / M$, $R_M(t)$ – $M(t)$ quvvatni ta'minlovchi xo'jalikdagi ishchilar soni. Agar hamma ish joylari ishchilar bilan ta'minlangan bo'lsa, u holda mahsulotni ishlab chiqarish miqdori $Y(t)$ ta'rifga ko'ra $Y(t)=M(t)$, ya'ni $f(X_M)=1$ bo'ladi.

Ishlab chiqarishdan topilgan daromadni extiyojni qondirishga va jamg'arishga ajratishning optimal usullarini aniqlash iqtisodiyot masalalarining asosiy masalalaridan biridir. Optimallikni mezoni sifatida jon boshiga (1 ishchiga) sarf bo'ladigan extiyojni $C(t)=W(t) / R(t)$ ni qabul qilish mumkin.

Vaqt birligi ichida jamg'arilgan $A(t)$ daromad yangi quvvatlarni yaratishga sarf bo'ladi:

$$A(t) = a\, I(t). \qquad (1.4.20)$$

Bu yerda a > 0 yangi quvvat birligini yaratish uchun zarur bo'ladigan fondni tashkil etuvchi berilgan o'zgarmas miqdor. $I(t)$ – yangi quvvat birligi soni.

Mavjud quvvatni ishdan chiqish tezligi quvvatning o'ziga proportsional, ya'ni $\beta M(t)$ deb hisoblanadi, u holda quvvat quyidagiga o'zgaradi:

$$\frac{dM}{dt} = I(t) - \beta M(t)\ , \qquad (1.4.21)$$

$\beta > 0$ - ishdan chiqish koeffitsienti.

(1.4.18), (1.4.19) va (1.4.21) tenglamalarda 4 ta noma'lum $y(t)$, $W(t)$, $M(t)$, $I(t)$lar qatnashyapti. Modelni to'ldirish uchun yangi quvvat miqdori mavjud quvvat miqdoriga proportsional $I(t) = \gamma M(t)$ deb faraz qilamiz. γ - *b*erilgan o'zgarmas miqdor bo'lib, $\gamma > \beta$.

U holda (1.4.21) quyidagi yechimga ega bo'ladi:

$$M(t) = M_0 e^{(\gamma-\beta)t} \qquad (1.4.22)$$

va shu orqali boshqa miqdorlar ham aniqlanadi.

Oddiy

$$\gamma - \beta = \alpha \tag{1.4.23}$$

holni qaraymiz. Bu esa quvvat *R(t)* va *y(t)*lar bilan bir xil surat bilan o'sar ekan, chunki $f(x(t)) = f(x = \frac{R_0}{M_0} = const)$.

Jon boshiga sarf bo'ladigan extiyojni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$C(t) = \frac{W(t)}{R(t)} = \frac{y(t) - A(t)}{R(t)}.$$

(1.4.19–1.4.20) va (1.4.22–1.4.23) larni hisobga olsak

$$C(t) = c = \frac{f(t) - \alpha(\alpha + \beta)}{x} = const.$$

Uning maksimumi quyidagi shartdan topiladi:

$$\frac{dC}{dX} = \frac{d}{dX}\left(\frac{f(x) - \alpha(\alpha + \beta)}{x}\right) = 0.$$

Ya'ni quyidagi tenglamadan:

$$X_m f'(X_m) - f(X_m) + \alpha(\alpha + \beta) = 0 \tag{1.4.24}$$

$0 < X_m \le X_m$ va $X_m = R_0 / M_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimni aniqlash mumkin.

Jon boshiga sarf bo'ladigan maksimum ehtiyoj C_m ni ta'minlaydigan jamg'arish normasi quyidagicha:

$$n_m = \frac{A_m}{y_m}$$

va u $y_m = M_m f(X_m)$, $A_m = \alpha\gamma M_m$ va (1.4.19), (1.4.22) munosabatlardan aniqlanadi:

$$n_m = 1 - X_m \frac{f'(X_m)}{f(X_m)}. \tag{1.2.25}$$

Bu norma iqtisod o'sishini oltin qoidasining normasi (Solou) deyiladi.

Agar (1.2.25) shart bajarilmasa, iqtisod o'sishi rejimi murakkab jarayondan iborat bo'ladi.

1.5. Chiziqsiz dasturlash masalalarini yechish muammolari

Umumiy holda chiziqsiz dasturlash masalasi matematik modeli quyidagicha ta'riflanadi [9,10,,40,70,73,74,101,135,146]:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \\ .... \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \\ .... \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min(\max),$$

bu yerda x_j – boshqarish parametrlari yoki chiziqsiz dasturlash masalasi yechimi, $j=1,2,...,n$; b_i – fiksirlangan parametrlar, $i=1,2,...,m$; f, g_i – n ta o'zgaruvchiga bog'liq berilgan funksiyalar, $i=1,2,...,m$.

Chiziqsiz dasturlash quyidagi bo'limlardan iborat: qavariq dasturlash; kvadratik dasturlash; butun sonli dasturlash; stoxastik dasturlash; dinamik dasturlash.

Qavariq dasturlash masalasi – bu shunday masalaki, berilgan yopiq qavariq to'plamda qavariq funksiya minimumi (yoki maksimumi) aniqlanadi. Bu masala chiziqsiz dasturlash masalalari ichida ko'proq o'rganilgan.

Kvadratik dasturlash masalasi to'liq o'rganilib chiqilgan. Unda maqsad funksiyasi – kvadratli, cheklanishlar esa chiziqli bo'ladi.

Stoxastik dasturlash masalasida maqsad funksiyasi yoki cheklanishlardagi funksiyalar ehtimollar nazariyasi qonuniyatlariga bo'ysunuvchi tasodifiy miqdorlarni o'z ichiga oladi.

Dinamik dasturlash masalasida cheklanishlar vaqt bo'yicha parametrlarni o'z ichiga olib, differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Dinamik dasturlash masalasi yechimlarini topish ko'p bosqichli.

Chiziqsiz dasturlash masalasining chiziqli dasturlash masalasidan farqli tomoni shundaki, uning uchun aniq bir yagona yechish usuli mavjud emas. Maqsad funksiyasi va chegaralanishlar ko'rinishiga qarab bir necha maxsus yechish usullar ishlab chiqilgan. Lagranj ko'paytuvchisi usuli, kvadratli va qavariq dasturlash, gradient usullar, qator taqribiy usullar va grafik usullar shular jumlasidan.

1.5.1. Chiziqsiz dasturlash masalalarini chiziqli dasturlash masalalarini yechishga olib kelish

1.5.1.1. Kasr-chiziqli dasturlash masalasi

Masalada maqsad funksiyasi kasr-chiziqli bo'lib, mavjud U to'plam esa chiziqli cheklanishlar (tenglik va yoki tengsizliklar) va o'zgaruvchilarning nomanfiylik shartlari bilan aniqlanadigan noravshan yechimlar to'plami bo'lsin:

$$f(x)=\frac{<c,x>+c_0}{<d,x>+d_0}=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j+d_0}\to \min, \qquad (1.5.1)$$

$$<a^i,x>=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \subseteq b_i, \quad i=1,2,...,p, \qquad (1.5.2)$$

$$<a^i,x>\supseteq b_i,\ i=p+1,...,m, \qquad (1.5.3)$$

$$x_j\ge 0, \quad j=1,2,....,n, \qquad (1.5.4)$$

bu yerda $c, d - E_n$ dagi noravshan o'zgarmas vektorlar.

(1.5.1)-(1.5.4) masalaning chiziqli dasturlash masalasiga qanaqa usulda olib kelinishini ko'rib chiqaylik.

(1.5.1)- (1.5.4) masalaning mavjud U to'plamida funksiyaning mahraji nol elementga ega bo'lmagan noravshan to'plam, demak ishorasini saqlaydi deb olamiz. Agar mahraji manfiy noravshan son bo'lsa, u holda (1.5.1) kasrning sur'at va maxrajini minus birga ko'paytirib, hamma $x\in U$ lar uchun $<d,x>+d_0>0$ shart bajariladi deb faraz qilamiz.

$y_0=1/(<d,x>+d_0)$ deb olamiz, bu yerdan ko'rinib turibdiki $x\in U$ da $y_0>0$. Yangi o'zgaruvchilar kiritamiz: $y_j=y_0x_j, \quad j=1,2,...,n$. Bu o'zgaruvchilarda (1.5.1)-(1.5.4) masalaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\tilde{f}(y)=\sum_{j=0}^{n} c_j y_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j - b_i y_0 = 0, \quad i=1,...,p,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j - b_i y_0 \ge 0, \quad i=p+1,...,m,$$

$$\sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n,$$

ya'ni, kasr-chiziqli dasturlash masalasi E_{n+1} fazodagi umumiy holda yozilgan chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi.

Simpleks usulda uning yechimi $y^* = (y_0^*,...,y_n^*)$ni va $x_j^* = y_j^* / y_0^*,\ j = 1,...,n,\ f^* = \min_{x \in U} \tilde{f}^*$ tengliklar yordamida (1.5.1)- (1.5.4) kasr-chiziqli dasturlash boshlang'ich masalasining yechimini topamiz.

Agar $y_0^* = 0$ bo'lsa, u holda (1.5.1)- (1.5.4) masalaning mavjud yechimlar soni cheklanmagan va unda $f(x)$ funksiya minimumga erishmaydi[34,40,70,73,,87,101,135,146].

1.5.2. Kvadratik dasturlash masalalalari

Kvadratik dasturlash masalalalarini noravshan ma'lumotlar holida yechish uchun qavariq kvadratik funksiyani chiziqli cheklanishlar bilan berilgan mavjud U to'plamda minimallashtirish kerak, ya'ni:

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c \to \min, \tag{1.5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j \subset \beta_i, \quad i = 1,...,m, \tag{1.5.6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,....,n, \tag{1.5.7}$$

bu yerda $A = (a_{ij})$ - $n \times n$ o'lchovli simmetrik noravshan musbat matritsa; $b \in E_n$ - fiksirlangan usul; c –berilgan noravshan son.

(1.5.5) dagi funksiya qavariq, (1.5.6)-(1.5.7) cheklanishlar chiziqli bo'lgani uchun (1.5.5)-(1.5.7) masala qavariq dasturlash masalasi bo'ladi. (1.5.6) cheklanishlarni $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \leq 0$ ko'rinishda, (1.5.7) – cheklanishlarni esa $\bar{g}_j(x) = -x_j \leq 0$ ko'rinishda yozib olish mumkin.

Masalaning Lagranj funksiyasini tuzamiz, shu maqsadda (1.5.6) dagi cheklanishlar uchun $\lambda_i,\quad i = 1,...,m$, (1.5.7) dagi cheklanishlar uchun $\mu_j,\quad j = 1,...,n$ Lagranj ko'phadlarni kiritib olamiz:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum \alpha_{ij} x_j - \beta_i \right) + \sum_{j+1}^{n} \mu_j (-x_j).$$

(1.5.5)-(1.5.7) masala uchun Kun-Takker shartini qo’llaymiz:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = 0, \quad j = 1,...,n,$$

$$\lambda_i g_i = \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \right) = 0, \quad i = 1,...,m, \qquad (1.5.8)$$

$$\mu_j \bar{g}_j = -\mu_j x_j = 0, \quad j = 1,...,n,$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,...,m, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1,...,n.$$

U o’z ichiga masalaning (1.5.6)-(1.5.7) cheklanishlarini ham oladi:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j \leq 0, \quad i = 1,...,m, \qquad (1.5.9)$$

$$\bar{g}_j(x) = -x_j \leq 0, \quad j = 1,...,n.$$

Qo’shimcha $x_{n+i} \geq 0$ o’zgaruvchilarni kiritgan holda, (1.5.9) tengsizliklardan $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j - \beta_j + x_{n+i} = 0$ tengliklarga o’tamiz. U holda (1.5.8) munosabatlar $\lambda_i x_{n+i} = 0$ ko’rinishda yozib olinadi.

Shunday qilib, (1.5.8)-(1.5.9) kvadratik dasturlash masalalari uchun mo’ljallangan shartlarni quyidagi ko’rinishda ham yozib olish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = -b_j, \quad j = 1,...,n, \qquad (1.5.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + x_{n+i} = \beta_i, \quad i = 1,...,m, \qquad (1.5.11)$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1,...,n+m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1,...,m, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1,...,n, \qquad (1.5.12)$$

$$\lambda_i x_{n+i} = 0, \quad i = 1,...,m, \quad \mu_j x_j = 0, \quad j = 1,...,n. \qquad (1.5.13)$$

f(x) funksiyaning $x^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ yechimi U to’plamda qidirilayotgan minimum nuqta bo’ladi.

Shuni qayd etish joizki, (1.5.10)-(1.5.13) tenglamaning $n+m$ ta *2(n+m)* x_k, λ_i, μ_j nomanfiy noma'lumli (1.5.10) va (1.5.11) tenglamasi bor, ulardan (1.5.13) shartga ko’ra kamida $n+m$ tasi nolga teng.

Bu tizimning mavjud bazis yechimi sun'iy bazis usulida topilishi mumkin. Bu usulni amalga oshirish paytida (1.5.13) shartni hisobga olish, ya'ni bazis o’zgaruvchilarga bir paytning o’zida bir hil *i* nomerli

λ_i va x_{n+i} o’zgaruvchilarni hamda bir hil j nomerli μ_j, x_j o’zgaruvchilarni kiritish kerak emas.

Quyidagi kvadratik dasturlash masalasini ko’raylik:

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 2,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

f(x) funksiyанинг A matritsasi musbat aniqlangan. Demak, bu qavariq dasturlash masalasidir. Bu holda (1.5.10)-(1.5.13) quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\begin{gathered} 2x_1 - 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 = 2, \\ -2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_2 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1, ..., x_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \ge 0, \\ \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 x_3 = \lambda_2 x_4 = 0. \end{gathered} \tag{1.5.14}$$

Bu tizimning mavjud bazis yechimini topamiz. Buning uchun birinchi ikkita cheklanishlar-tengliklarning chap qismlariga yordamchi x_5 va x_6 o’zgaruvchilarni kiritamiz (qolgan bazislar sifatida x_3 va x_4 larni olish mumkin) va yordamchi maqsad funksiyasi $\Phi = x_5 + x_6$ ning minimumini topamiz. Uni $x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ va μ_2 ozod hadlar orqali ifodalaymiz: $\Phi = -2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + 8$.

Masalaning yechimiga olib keluvchi simpleks jadvallar ketma-ketligi berilgan. Yordamchi x_5 va x_6 elementlarni ozod hadga o’tkazganda, ularga to’g’ri keluvchi koeffitsientlar ustuni simpleks ustunda o’chirib tashlanadi. Oxirgi jadvalda quyi qatorning elementlari manfiy emas, yordamchi funksiyaning minimumi $\Phi^* = 0$ va unga to’g’ri keluvchi bazis yechimlar $(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (4/5, 6/5, 0, 2/5, 14/5, 0, 0, 0)$. Shuning uchun kvadratik dasturlash masalasining qidirilayotgan yechimi $x^* = (4/5, 6/5), \quad f^* = f(x^*) = 36/5$.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	2	-2	1	-1	-1	0	2
x_6	-2	4	1	2	0	-1	6
x_3	1	1	0	0	0	0	2
x_4	-1	2	0	0	0	0	2
	0	-2	-2	-1	1	1	-8

	x_1	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	1	1	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_3	3/2	-1/2	0	0	0	0	1
x_2	-1/2	½	0	0	0	0	1
	-1	1	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	-2/3	4/3	1	-1	-1	0	4
x_6	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	1
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	1
	2/3	2/3	-2	-1	1	1	-6

	x_3	x_4	x_6	λ_2	μ_1	μ_2	
x_5	-2/3	10/3	-1	-3	-1	1	4/3
λ_1	0	-2	1	2	0	-1	2
x_1	2/3	-1/3	0	0	0	0	2/3
x_2	1/3	1/3	0	0	0	0	4/3
	2/3	-10/3	2	3	1	-1	-4/3

	x_3	x_5	λ_1	μ_1	μ_2	
x_4						4/10
λ_1						28/10
x_1						4/5
x_2						6/5
	0	1	0	0	0	0

1.5.3. Shartsiz ketma-ket minimallashtirish usullari

Bu usullar guruhining asosiy g'oyasi chiziqli bo'lmagan dasturlash masalasi $f(x) \to \min,\ x \in U$ ni shartsiz minimallashtirish masalalarining ketma-ketligiga olib kelishdan iborat:

$$f_k(x) = f(x) + \varphi_k(x) \to \min, \quad x \in E_n, \quad k = 1,2,\dots . \qquad (1.5.15)$$

Bu yerda $\varphi_k(x)$ - k ning o'sib borishi bilan, joriy masalaning mavjud U to'plaminining chegaralanishini tobora aniqroq o'lchaydi.

Joriy masalaning taqribiy yechimi sifatida (1.5.15) yordamchi masalaning k ning katta qiymatiga to'g'ri keluvchi x^k qiymati olinadi.

1.5.3.1. Jarimali funksiyalar usuli

Bu usulda $\varphi_k(x)$ funksiyalar shunday tanlanadiki, *k* ning katta qiymatida (1.5.15) dagi $f_k(x)$ funksiyasi $x \in U$ da *f(x)* dan katta farq qilmasin va mavjud to'plamdan uzoqlashgan sayin $x \notin U$ da o'sib borsin.

Ta'rif. $U \in E_n$ - berilgan to'plam bo'lsin. E_n da aniqlangan $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi quyidagi xususiyatga ega bo'lib:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & agar\ x \in U \\ \infty, & agar\ x \notin U \end{cases}$$

unga U to'plamning jarimali funksiyalar ketma-ketligi deb ataladi.

$\{A_k\}$ - musbat hadli biron-bir o'suvchi sonli ketma-ketlik va $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \infty$ bo'lsin, $\varphi(x)$ funksiya esa $x \in U$ da nol qiymat, $x \notin U$ da esa musbat qiymat qabul qilsin. U holda $\varphi_k(x) = A_k \varphi(x)$ tenglik (1.5.15) shartni qanoatlantiradi .

Amaliyotda, ko'pincha, $A_k = k, \quad k = 1,2,\dots$ deb olinadi. $\varphi(x)$ funksiya sifatida $\rho(x,U)$- x nuqtadan *U* to'plamgacha bo'lgan masofani olish mumkin. U holda jarimaviy funksiyalar ketma-ketligi quyidagi ko'rinishni qabul qiladi:

$$\varphi_k(x) = k\rho(x,U) . \qquad (1.5.16)$$

$\rho(x,U)$ masofani hisoblash, bu degani $A_k \rho(x,U)$ jarimali funkiya qiymatini topish qiyin bo'lib qolishi mumkin, shuning uchun, ko'pincha, *U* to'plamning chegaralarini hisobga olgan jarimaviy funksiyalar qo'llaniladi. *U* to'plam tengsizliklar bilan berilgan bo'lsin:

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,\dots,m , \qquad (1.5.17)$$

bu yerda $g_i(x)$ - qavariq funksiyalar. U holda $\varphi_k(x) = A_k\varphi(x)$ ifodadagi $\varphi(x)$ funksiya sifatida $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \Psi(g_i(x))$ munosabatni olish mumkin, bu yerda $\Psi(t)$ - uzluksiz funksiya, jumladan $t = 0$ bo'lganda $\Psi(t) = 0$, $t > 0$ bo'lganda esa $\Psi(t) > 0$. Agar $\lim\limits_{k\to\infty} = \infty$ va $A_k > 0$ bo'lsa, u holda $\{\varphi_k(x)\}$, $\varphi_k(x) = A_k\varphi(x)$ ketma-ketlik uchun (1.5.16) shartlar bajariladi, ya'ni u jarimali funksiyalar ketma-ketligi bo'ladi. $\Psi(t)$ funksiyani shunday tanlash mumkinki, bunda $\varphi_k(x)$ funksiyalar (1.5.15) minimallashtirish masalasining yordamchi masalalarini yechishni soddalashtiruvchi xususiyatlar, masalan qavariqlik, hosilalarning mavjudligi, hisoblash soddaligiga ega. Ko'pincha

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} [g_i^*(x)]^2 \tag{1.5.18}$$

deb olinadi, bu yerda $g_i^*(x) = \max\{0, g_i(x)\} = \frac{1}{2}(g_i(x) + |g_i(x)|$.

Quyidagi masalani jarimali funksiyalar usulida yechib ko'raylik:

$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$x_2 - x_1 - 2 \le 0,$$
$$2x_2 - x_1^2 - 2 \le 0.$$

Minimallashtirishning yordamchi masalalar ketma-ketligini yozib olamiz:

$$f_k(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 + k\cdot[g_1^+(x)]^2 + k[g_2^+(x)]^2 \to \min,$$
$$g_1^+ = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + 2 + |x_2 - x_1 - 2|), \qquad g_2^+ = \frac{1}{2}(2x_2 - x_1^2 + |2x_2 - x_1^2|).$$

1.5.1. jadvalda bu masalalarning ayrim k lar uchun yechimi keltirilgan.

1.5.1-jadval

k	x_1^k	x_1^k
0	0	4
1	0,66	3,33
5	0,91	3,09
10	0,95	3,05
100	0,995	3,004

Masalaning aniq yechimi $x^* = (1;3)$.

Eslatma:

1.To’xtash mezoni sifatida $\|x^k - x^{k/2}\| \le \varepsilon$ tengsizlikni ishlatish mumkin, bu yerda $\varepsilon > 0$ aniqlik parametri, juft son. Agar u bajarilsa $x^* = x^k$, $f^* = f(x^k)$.

2. Jarimali funksiyalar usuli bilan olingan yechimning aniqligini baholash uchun quyidagi omildan foydalanish mumkin. z nuqta $f(x) \to \min,\ g_i(x) \le 0,\ i = 1,...,m$ qavariq dasturlash masalasining mavjud U to’plamidagi biron-bir ichki nuqtasi (ya'ni hamma i larda $g_i(z) < 0$), x^k esa yordamchi k-masalaning yechimi bo’lsin. U holda U to’plamdagi *f(x)* funksiyaning minimal qiymatini quyidagicha ikki tomonlama baholash o’rinli:

$$f(x^k) \le f^* \le f^*(\bar{x}^k).$$

Bu yerda $\bar{x}^k = a_k z + (1 - a_k)x^k$, a_k - esa barcha $i = 1,...,m$ lar uchun $g_i(a_k z + (1 - a_k)x^k \le 0$ shartning bajarilishini ta'minlovchi eng kichik qiymat. Amaliyotda a_k ning qiymatini, masalan, razryadma-razryad qidirish usuli bilan ham topish mumkin [9,10].

3. Jarimali funksiyalar usulining kamchiligi katta k larda $f_k(x)$ minimallashgan funksiyaning yaxshi ta'minlanmaganligidadir.

1.5.3.2. To’siqli funksiyalar usuli

Bu usulda chiziqli bo’lmagan dasturlashning joriy masalasi ham shartsiz minimallashtirish masalalarining ketma-ketligi (1.5.15) ga olib kelinadi, lekin $\varphi_k(x)$ funksiyalar shunday tanlanadiki, katta k larda mavjud U to’plamning ichki qiymatlarida (1.5.15) dagi $f_k(x)$ funksiyalar *f(x)* funksiyalardan uncha farq qilmaydi, shuningdek, ular $x \in U$ nuqta U to’plam chegarasiga yaqinlashganida cheksiz o’sib ketadi.

Ta'rif. U to’plamning hamma ichki nuqtalarida aniqlangan $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi quyidagi shartlar bajarilganida bu to’plamning to’siqli funksiyalar ketma-ketligi deb ataladi:

1) U to’plamning ihtiyoriy ichki nuqtasi uchun $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = 0$;

2) bu to’plamning biron bir chekli qiymatiga yaqinlashuvchi U to’plamdagi ichki nuqtalarning ixtiyoriy $\{x^r\}$ ketma-ketligi uchun $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi_k(x^r) = +\infty$.

Shunday qilib, katta k larda $\varphi_k(x)$ to'siq funksiyanning ta'siri mavjud to'plamning chegaralari bo'ylab havfli «to'siqlar» ni yaratishdan iboratdir[9,10,,101,135,146].

$\{B_k\}$ - musbat hadli biror bir ketma-ketlik va $\lim_{k\to\infty} B_k = 0$, $\varphi(x)$ funksiya esa U to'plamning hamma ichki nuqtalarida aniqlangan va x nuqta U to'plam chegarasiga yaqinlashganda $+\infty$ ga intiladi. U holda $\varphi_k(x) = B_k\varphi(x)$ ketma-ketlik (1.5.3) shartni qanoatlantiradi.

Amaliyotda ko'pincha $B_k = 1/k,\ k = 1,2,...$ deb olinadi.

Agar chiziqli bo'lmagan dasturlashning mavjud U to'plami tengsizliklar tizimi bilan aniqlansa, u holda

$$g_i(x) \le 0, \quad i = 1,...,m \qquad (1.5.19)$$

bo'ladi.

$\varphi(x)$ funksiya sifatida, masalan

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)} \qquad (1.5.20)$$

ifodani olish mumkin.

Bunda (1.5.15) dagi $f_k(x)$ yordamchi funksiya quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f_k(x) = f(x) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}. \qquad (1.5.21)$$

To'siqli funksiyalar usuli ko'p o'lchovli minimallashtirish masalasida qo'llanilsa ham, bu usulni bir o'lchovli holda ko'rib chiqamiz:

$$f(x) = x \to \min,$$
$$-x + 2 \le 2.$$

$\varphi(x)$ sifatida (1.5.20) dagi funksiyani qo'llash orqali, masalani to'siqli funksiyalar usulida yechamiz.

Shartsiz minimallashtirish masalalarining ketma-ketligini ko'rib chiqaylik.

$$f_k(x) = x + \frac{1}{k}\frac{1}{x-2}.$$

Mavjud to'plamning ixtiyoriy nuqtasi, masalan $x^0 = 5$ uchun, uning har hil k dagi qiymatini topamiz:

$$x^{0*} = 3; \quad x^{9*} = 7/3; \quad x^{100*} = 21/10;...$$

(1.5.19) dagi U to'plam uchun to'siqli funksiyalar boshqa usulda beriladi. Masalan,

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}|g_i(x)|^{-p},\ p>0$$

yoki

$$\varphi(x)=-\sum_{i=1}^{n}\ln[-g_i(x)]. \qquad (1.5.22)$$

Jarimali funksiyalar usulidagi kabi, hisoblashni tugatish sharti sifatida $\|x^k-x^{k/2}\|\le\varepsilon$ tengsizlikni olish mumkin, bu yerda ε - aniqlik parametri, k - juft son.

(1.5.22) to'siqli funksiyalarni qo'llagan holda, quyidagi masalani yechamiz:

$$f(x)=x_1^2+2x_2^2\to\min,$$
$$g_1(x)=-x_1+x_2\le 0,$$
$$g_2(x)=1-x_1-x_2\le 0,$$

$\|x^k-x^{k/2}\|\le 0{,}002$ shart bajarilganda hisoblash jarayonini to'xtatamiz.

Shartsiz minimallashtirish masalalari ketma-ketligining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$f_k(x)=x_1^2+2x_2^2-\frac{1}{k}[\ln(x_1-x_2)+\ln(x_1+x_2-1)]\to\min.$$

Ularni Nyuton usulida yechib, boshlang'ich nuqta $x^0=(2{,}0)$ dan x^{*k} nuqtalar ketma-ketligini hosil qilamiz. *k=500* va *k=1000* da bevosita $x^{500}=(0{,}6696;0{,}3319)$ larga ega bo'lamiz. $x^{1000}=(0{,}6696;0{,}3326)$, $\|x^{1000}-x^{500}\|=1{,}65\cdot10^{-3}<0{,}002$ bo'lgani uchun, $x^*=x^{1000}=(0{,}6696;0{,}3326)$, $f^*=f(x^{1000})=0{,}6687$ deb olamiz. x^{1000} nuqta ikkinchi cheklanish bilan berib qo'yilgan to'plam chegarasiga yaqin joyda joylashgan.

1.5.4.Gradiyent usullar

Chiziqsiz dasturlash masalalarini yechishda eng ko'p qo'llaniladigan usullardan biri gradiyent usullaridir. Funksiyalarning minimumini topishda qo'llaniladigan gradiyent usullar dastlabki tanlab olingan *X* taqribiy yechimni tenglamaning aniq yechim yo'nalashi bo'yicha ketma-ket aniqligini oshirishga asoslangandir [40,70, ,101,135,146].

T a ' r i f. *n* o'lchovli *R* fazoda berilgan *F(X)* funksiyaning *X* nuqtadagi gradiyenti grad $F(X_0)=\dfrac{dF(X_0)}{\partial x}$ deb *F(X₀+ΔX) – F(X₀)* chekli orttirmaning chiziqli qismiga aytiladi, ya'ni $F(X_0+\Delta X) - F(X_0) =$ $grad\, F(X_0)\Delta X+0(\Delta X)$.

Gradiyent usullar chiziqli bo'lmagan masalalarni yechishning taqribiy usullariga kiradi, chunki ular aniq qiymatni faqatgina cheksiz (faqatgina alohida hollarda chekli) qadamda beradi.

Gradiyent usulda chiziqli bo'lmagan dasturlashning ixtiyoriy masalasini yechish mumkin, buning uchun faqatgina lokal ekstremumni topish yetarli. Shuning uchun ularni qo'llash qavariq dasturlash masalalarini yechishda ko'proq samara beradi, chunki bu yerda lokal ekstremum bir vaqtning o'zida global hamdir.

X ning o'zgarish sohasida chegaralanmagan $f(x)$ funksiyani maksimallashtirish masalasini ko'rib chiqaylik. $f(x)$ funksiyaning ekstremal qiymatini ihtiyoriy mavjud yechimdan, masalan $x_k = (x_{1k};...;x_{nk})$ nuqtadan boshlab qidirish mumkin.

$f(x)$ funksiyaning x_k nuqtadagi $\nabla f(x)$ gradiyenti deb shunday vektorga aytiladiki, uning koordinatalari mos o'zgaruvchi bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilalarning qiymatiga teng, ya'ni:

$$\nabla f(x_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1k}};\cdots;\frac{\partial f}{\partial x_{nk}} \right).$$

Berilgan nuqtadagi funksiya gradiyenti $f(x)$ funksiyaning tezroq o'sish yo'nalishini ko'rsatadi.

x_k nuqtaning gradiyent bo'ylab yangi x_{k+1} nuqtaga ko'chirilish tenglamasi

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k) = 0 \qquad (1.5.23)$$

munosabatga teng bo'lgan to'g'ri chiziq orqali amalga oshiriladi. Bu yerda λ_k-shunday sonli o'zgaruvchiki, unga qarab $\Delta x_k = \lambda_k \nabla f(x_k)$ ko'chish qadamining kattaligi o'zgaradi. Funksiya eng katta qiymatga erishadigan λ_k kattaligi funksiya ekstremumining zaruriy shartidan topilishi mumkin:

$$\frac{d[\Delta f(\lambda_k)]}{d\lambda_k} = \nabla f(x_{k+1}) \nabla f(x_k) = 0. \qquad (1.5.24)$$

λ_k parametrni hisoblagandan so'ng ($\lambda_k$ning qiymatini (1.5.23) ga qo'yib) navbatdagi x_{k+1} nuqta topiladi. x_{k+1} nuqtada yana gradiyent topamiz, harakat esa $x_{k+2} = x_{k+1} + \lambda_{k+1} \nabla f(x_{k+1})$ to'g'ri chiziq orqali yangi $\nabla f(x_{k+2})$ gradiyent bo'ylab funksiya ushbu yo'nalishda eng katta qiymatga erishadigan x_{k+2} nuqtagacha amalga oshiriladi va h.k. Yechish jarayoni funksiya gradiyenti nolga teng bo'lgan x^*nuqta topilguncha davom etadi. x^* nuqtada f(x^*) maqsad funksiyasi maksimal qiymatga erishadi.

$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$ funksiyaning maksimumini topaylik. Yechish jarayoni $x_0 = (4;4)$ nuqtadan boshlansin.

Yechish. *f(x)* funksiyaning har bir o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz. $\partial f / \partial x_1 = 2 - 2x_1$; $\partial f / \partial x_2 = 4 - 2x_2$. x_0 nuqtadagi funksiya gradiyentlari $\nabla f(x_0)$=(2-2*4; 4-2*4)=(-6;-4)ga teng bo'ladi. x_0 nuqtadan $\nabla f(x_0)$gradiyent bo'ylab yangi x_1 nuqtaga ko'chiramiz:

$x_1 = (4;4) + \lambda_0(-6;4) = (4-6)\lambda_0;4-4\lambda_0).$

x_1 nuqtadagi funksiya gradiyentlari:

$$\nabla f(x_1) = \begin{cases} [(2-2(4-6\lambda_0);4-2(4-4\lambda_0)], \\ (-6+12\lambda_0;\ -4+8\lambda_0). \end{cases}$$

Ekstremumning zaruriy sharti quyidagi tenglamani beradi:

$$\frac{d[\Delta f]}{d\lambda_0} = \nabla f(x_1)\nabla f(x_0) = (-6+12\lambda_0)(-6) + (-4+8\lambda_0)(-4) = 13 - 26\lambda_0 = 0.$$

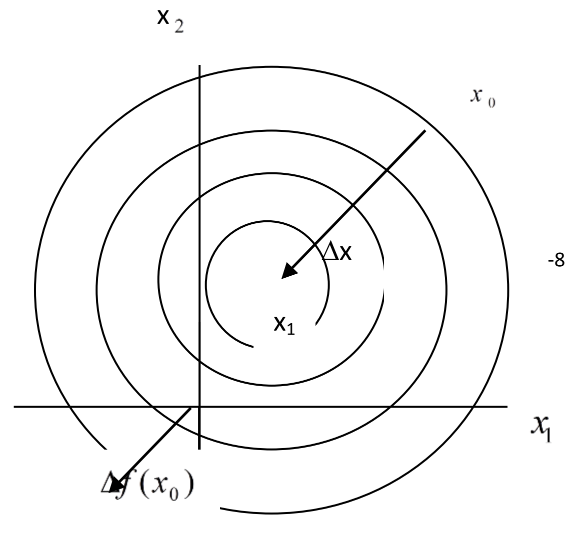
Bundan kelib chiqadiki $\lambda_0^* = 0.5$. $d^2\Delta f / d\lambda_0^2 = -26 < 0$ bo'lgani uchun, topilganλ_0^* qiymat $\Delta f(\lambda_0)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo'ladi.

Qidiruv traektoriyasidagi navbatdagi nuqta $x_1 = (4 - 6\cdot 0,5;\ 4 - 4\cdot 0.5) = (1;2)$ va $\nabla f(x_1)$=(2-2*1; 4-2*2)=(0;0). Demak $x_1 = (1;2)$ shunday nuqtaki, unda funksiya o'zining maksimal $f(x_1) = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1 - 4 = 5$qiymatiga erishadi (boshlang'ich nuqtada $f(x_0) = -8$). 1.5.1 rasmda berilgan masalaning grafik ko'rinishi keltirilgan.

Endi chiziqli bo'lmagan dasturlashning chegaralangan masalalarini yechishga o'taylik. Masalaning mazmuni quyidagicha:

$$\begin{gathered} a_i x \le b_i, \\ x \ge 0, \\ x = (x_1;...;x_n); \quad a_i = (a_{i1};...;a_{in}) \end{gathered} \tag{1.5.25}$$

chegarali *f(x)* funksiyaning maksimumi topilsin.



1.5.1 расм. Masalaning grafik ko'rinishi

f(x) funksiya botiq differentsiallanuvchi funksiyadir.

Bu kabi masalalarni yechishda ikkita hol uchraydi: 1) maqsad funksiyasi yagona ekstremumga ega va u mavjud yechimlar sohasining ichida joylashgan. Bu holda masalani yechish jarayoni (x_0 optimal nuqtani qidirish) yuqorida bayon etilgandan mutlaqo farq qilmaydi; 2) maqsad funksiyasi mavjud sohaning chegarasida joylashgan nuqtada ekstremal qiymat qabul qiladi. Bu holda masalani yechish ketma-ketligi quyidagicha bo'ladi: Agar boshlang'ich x_k nuqta mavjud sohaning ichida joylashsa (hamma cheklanishlar qat'iy tengsizlik ko'rinishida tasvirlanadi), ko'chishni gradiyent bo'ylab amalga oshirish darkor. Lekin navbatdagi nuqtaning $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)$ koordinatalari (1.5.25) dagi shartlarni qanoatlantirishi kerak, ya'ni quyidagi tengsizliklar bajarilishi shart:

$$\left.\begin{aligned} a_i\left[x_k + \lambda_k \nabla f(x_k)\right] \le b_i \quad (i = 1,. \ . \ ., m); \\ x_k + \lambda_k \nabla f(x_k) \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.26)$$

(1.5.26) tenglamalar tizimini yechish natijasida x_1 nuqta mavjud oraliqqa tegishli bo'ladigan λ_k o'zgaruvchining mavjud qiymatlar oralig'i $\left[\lambda_k^{'}; \lambda_k^{''}\right]$ topiladi. $\nabla f(x_k + \lambda_k \nabla f(x_k) \nabla f(x_k) = 0$, (1.5.24) tenglamalarni yechish natijasida topilgan λ_k qiymat $\left[\lambda_k^{'}; \lambda_k^{''}\right]$ oraliqqa tegishli bo'lishi kerak. Agar λ_k qiymat oraliqdan tashqarida yotsa, λ_k^* sifatida $\lambda_k^{''}$ olinadi. Jumladan qidiruv traektoriyasining navbatdagi nuqtasi (1.5.26) tizimning tengsizligiga mos keluvchi chegaraviy gipertekislikda yotadi, shuni hisobga olib, tizimni yechishda λ_k'' topiladi.

Agar boshlang'ich x_k nuqta chegaraviy gipertekislikda yotsa (yoki qidiruv traektoriyasining navbatdagi nuqtasi chegaraviy traektoriyada yotib qolsa), u holda matematik dasturlashning

$$a_i r_k = b_i, \tag{1.5.27}$$

$$|r_k| = 1 \tag{1.5.28}$$

tengliklar bajariladigan *i* lar uchun quyidagi yordamchi masalani yechish orqali yo'nalish aniqlanadi:

$$T_k = \nabla f(x_k) r_k (\max) \;, \tag{1.5.29}$$

$$a_i r_k \le 0\,. \tag{1.5.30}$$

Bu yerda

$$r_k = (r_{k1};...;r_{kn}); \qquad |r_k| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} r_{kj}^2}\;.$$

(1.5.27) shart x_k nuqtaning mavjud soha cherasiga tegishli bo'lish yoki bo'lmasligini, (1.5.29) shart x_k nuqtadan r_k vektor bo'yicha ko'chirish mavjud sohaning ichiga yoki chegarasi bo'ylab yo'nalganligini aniqlaydi, (1.5.28) shart r_k kattalikni chegaralash uchun zarur. Qidiruv trayektoriyasining keyingi $x_{k+1} = x_k + \lambda_k^* r_k$ nuqtasi uchun λ_k^* o'zgaruvchining qiymati topiladi. Bunda ekstremumning zaruriy sharti $(\nabla f(x_{k+1}^*) r_k) = 0$ hisobga olinadi.

Yechish jarayoni $T_k = \nabla f(x_{k+1}^*) r_k = 0$ bo'lishini ta'minlovchi x_{k+1}^* nuqta topilganda to'xtaydi.

1.5.5. Matritsali o'yinni chiziqli dasturlash masalasiga keltirish

Ishlab chiqarish va iqtisodiyot sohasida ko'plab amaliy masalalarni yechishda ziddiyatli jarayonlar (holatlar) kelib chiqadi. Ziddiyatli jarayonlar o'z ichiga juda ko'plab omillarni oladi. Ko'p hollarda, jarayonni o'rganish qulay bo'lishi uchun, asosiy omillarni hisobga olib, ikkinchi darajali omillarni hisobga olmay uning matematik modelini tuzamiz. Bunday ziddiyatli jarayonning qisqartirilgan modeli o'yin deyiladi. O'yin aniq bir qoidaga binoan olib boriladi [70,73,74,86,87, 135,146].

O'yin ma'nosi shundan iboratki, har bir qatnashuvchi shunday bir yechimni qabul qiladiki, u o'yin oxirida eng yaxshi natijaga erishsin.

O'yin natijasi – bu bir necha funksiyalar qiymati bo'lib, unga yutuq funksiyasi yoki to'lov funksiyasi deyiladi. Agar o'yinchilar yutuq summasi nolga teng bo'lsa, unda o'yinga nolinchi summali o'yin deyiladi.

Har qanday juft o'yinni matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.5.31)$$

Aytaylik, matritsaning qatorlari birinchi o'yinchining mumkin bo'lgan $A_1, A_2, ..., A_m$ yurishlarini, ustunlari esa ikkinchi o'yinchining mumkin bo'lgan $B_1, B_2, ..., B_m$ yurishlarini aniqlasin. A matritsaga to'lov yoki yutuq matritsasi deyiladi. Matritsaning har bir a_{ij} elementi birinchi o'yinchi A_i yurishni tanlab, ikkinchi o'yinchi B_j yurishni tanlagandagi birinchi o'yinchining yutug'ini (ikkinchi o'yinchining yutqazuvini) anglatadi.

O'yinning maqsadi birinchi o'yinchini maksimal yutuqqa va ikkinchi o'yinchini minimal yutqazishga erishishni ta'minlash uchun eng ma'qul strategiyani tanlashdan iborat.

Agar birinchi o'yinchi biror A_i strategiyani tanlasa, u hech bo'lmaganda $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ yutuqqa erishadi. Buni hisobga olib, o'yinchi o'zining eng kam yutuqlarini maksimallashtiruvchi, ya'ni $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ tenglikni ta'minlovchi yurishni tanlaydi. Bu yerda α kattalik o'yinning quyi bahosi va unga mos strategiya maxsmin deyiladi.

Ikkinchi o'yinchi, o'z navbatida, o'zining eng katta mumkin bo'lgan yutqazuvlarini minimallashtiruvchi, ya'ni $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ tenglikni ta'minlovchi yurishni tanlaydi. Bu yerda β kattalik o'yinning yuqori bahosi va unga mos strategiya minimax deyiladi.

Agar $\alpha=\beta$ bo'lsa, ya'ni $V = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$ tenglik bajarilsa, u holda V o'yinning bahosi deyiladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi A matritsaning a_{ij} elementiga o'yinning egar nuqtasi deyiladi.

Demak, matritsali o'yin egar nuqtaga ega bo'lsa, uning yechimi maxsmin va minimax usullari bilan topiladi.

Berilgan matritsali o'yin uchun quyi va yuqori baholarni hamda o'yinning optimal bahosini topaylik:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matritsa qatoridagi eng kichik elementlar quyidagilardan iborat:

$$\min_j (3,\ 1,\ 2) = 1,$$

$$\min_j (2,\ 4,\ -1) = -1,$$

$$\min_j (5,\ 7,\ 6) = 5.$$

Demak o'yinning quyi bahosi

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (1,\ -1,\ 5) = 5 \qquad (1.5.32)$$

bo'ladi. Endi har bir ustundagi eng katta elementni topamiz:

$$\max_i (3,\ 2,\ 5) = 5,$$

$$\max_i (1,\ 4,\ 5) = 7,$$

$$\min_i (2,\ -1,\ 6) = 6.$$

U holda, o'yinning yuqori bahosi quyidagiga teng bo'ladi:

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}) = mix_j (5,\ 7,\ -6) = 5 \qquad (1.5.33)$$

Bu o'yinning quyi va yuqori baholari o'zaro teng bo'lgani uchun o'yinning optimal bahosi $V=\beta=\alpha=5$ bo'ladi. Bu bahoni ta'minlovchi a_{31} element o'yinning egar nuqtasi A_3 va B_1 strategiyalar optimal strategiya bo'ladi.

Agar yutuqlar matritsasi egar nuqtaga ega bo'lmasa, u holda maksmin va minimax usullar bilan o'yinning yechimini topib bo'lmaydi. Bu holda o'yinning yechimini topishda aralash strategiyalar usulidan foydalaniladi.

Birinchi o'yinchining aralash strategiyasi deb, komponentalari quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \ x_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m} \qquad (1.5.34)$$

$X=(x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_m)$ vektoriga aytiladi. Bunda har bir x_i birinchi o'yinchining A_i yurishini tanlash imkoniyatini bildiradi.

Ikkinchi o'yinchining aralash strategiyasi deb, komponentalari quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi:

$$\sum_{j=1}^{n} y_i = 1,\ \ y_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n} \qquad (1.5.35)$$

$Y=(y_1,\ y_2,\ \dots\ ,\ y_n)$ vektoriga aytiladi. Bunda har bir y_j ikkinchi o'yinchining B_j yurishini tanlash imkoniyatini bildiradi.

Aralash strategiyalar usulida birinchi o'yinchi A_i yurishini tanlab, ikkinchi o'yinchi B_j yurishini tanlagandagi birinchi o'yinchining yutug'i sifatida uning yutishining matematik kutilishi olinadi, ya'ni u quyidagiga teng bo'ladi:

$$V(x,y)=\sum_{i=}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j\ , \tag{1.5.36}$$

bu yerda *V(x,y)* funksiya to'lov yoki yutuq funksiyasi deyiladi.

Agar birinchi o'yinchi o'zining $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)$ optimal strategiyasini qo'llasa, u holda ikkinchi o'yinchi qanday strategiyani tanlashdan qat'iy nazar, uning yutug'i o'yinning V bahosidan kam bo'lmaydi, ya'ni:

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^*\ge V,\quad j=\overline{1,n}\ . \tag{1.5.37}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^*\le V,\quad i=\overline{1,m}\,. \tag{1.5.38}$$

Matritsali o'yinni chiziqli dasturlash masalasiga keltirish jarayonini ko'rib chiqamiz. Eng avval *i*-o'yinchining optimal aralash strategiyasi va o'yinning bahosi V ni topamiz. Buning uchun (1.5.37) tengsizliklar tizimini va (1.5.34) shartlarini umumlashtirib, quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\ge V\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\ge V\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\ge V\end{array}\right\}, \tag{1.5.39}$$

$$x_1+x_2+...+x_m=1, \tag{1.5.40}$$

$$x_1\ge 0\qquad (i=\overline{1,m})\,. \tag{1.5.41}$$

O'yining bahosi V ni musabat deb hisoblab $(V>0)$, (1.5.39) tizimning hamma tengsizliklarini V ga bo'lib quydagi tizimni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}t_1+a_{21}t_2+...+a_{m1}t_m\ge 1\\ a_{12}t_1+a_{21}t_2+...+a_{m2}t_m\ge 1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+...+a_{mn}t_m\ge 1\end{array}\right\}, \tag{1.5.42}$$

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{V} \ , \qquad (1.5.43)$$

$$t_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \ . \qquad (1.5.44)$$

bu yerda $$t_1 = \frac{x_1}{V} \ .$$

Birinchi o'yinchi o'z yutug'ini, ya'ni o'yinning bahosi V ni maksimum qilishga harakat qiladi. Demak, birinchi o'yinchi uchun

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{V}$$

eng kichik (minimum) qiymat qabul qilish kerak. Ushbu talablarda (1.5.42) - (1.5.44) tizim quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1 \end{array}\right\}, \qquad (1.5.45)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, ..., t_m \geq 0 \ , \qquad (1.5.46)$$

$$Z = t_1 + t_2 + ... + t_m \to \min \qquad (1.5.47)$$

Xuddi shunday yo'l bilan ikkinchi o'yinchining optimal aralash strategiyasi va V o'yinning bahosini topish uchun quyidagi chiziqli dasturlash masalasini yechish kerak:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq V \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq V \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq V \end{array}\right\}, \qquad (1.5.48)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_n \geq 0 \ , \qquad (1.5.49)$$

$$F = \frac{1}{V} = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max \ . \qquad (1.5.50)$$

(1.5.45)-(1.5.47) va (1.5.48-1.5.50) masalalar o'zaro ikkilamchi chiziqli dasturlash masalalaridan iborat bo'ladi. Ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkalasining yechimini osonlikcha topish mumkin.

Masalan quyidagi:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsali o'yinning aralash strategiyalardagi yechimini topish talab qilinsin.

Birinchi o’yinchi uchun o’yinni chiziqli dasturlash masalasiga aylantiramiz. Buning uchun eng avval quyidagi tizimni hosil qilamiz.

$$\left.\begin{array}{l} 5_{x_1} + 3_{x_2} + 6_{x_3} \ge V \\ 3_{x_1} + 5_{x_2} + 3_{x_3} \ge V \\ 2_{x_1} + 5_{x_2} + 4_{x_3} \ge V \end{array}\right\}, \tag{1.5.51}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \tag{1.5.52}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \tag{1.5.53}$$

(1.5.51) tizimdagi har bir tengsizlikning ikki tomonini $(V > 0)$ga bo’lib va $t_1 = \frac{x_1}{V}$ belgilash kiritib quyidagi tizimni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \ge 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \ge 1 \end{array}\right\}, \tag{1.5.54}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V}, \tag{1.5.55}$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0. \tag{1.5.56}$$

Bu tizimni quyidagi chiziqli dasturlash masalasi ko’rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \ge 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \ge 1 \end{array}\right\}, \tag{1.5.57}$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0, \tag{1.5.58}$$

$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \to \min. \tag{1.5.59}$$

II o’yinchi uchun berilgan matritsali o’yin quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi:

$$\left.\begin{array}{l} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 \le 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 \le 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 \le 1 \end{array}\right\}, \tag{1.5.60}$$

$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0, \tag{1.5.61}$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \to \max. \tag{1.5.62}$$

(1.5.57)-(1.5.59) va (1.5.60)-(1.5.62) masalalar o’zaro ikkilamchi masalalardir. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining yechimini osonlikcha topish mumkin.

1.6. Tasodifiy qidiruv asosida muqobillashtirish masalalarini yechish muammolari

Muqobillashtirish muammosi barcha sohalarda vujudga keladi. Ma'lumki, tajribaviy masalalarning har xil sinflari uchun turli global qidiruv usullari yaxshi natijalar beradi. Hozirgi kunda mavjud bo’lgan usullarni quyidagi katta uch guruhga ajratish mumkin [34,40,70,73,74,86,87,101,135]:

- determinarlashgan;
- tasodifiy;
- kombinirlashgan.

Tasodifiy qidiruv usullari diskret-uzluksiz muqobillashtirish masalalarini yechishda oddiy qidiruv usullariga nisbatan ancha ustun va yaxshi samaralar beradi. Bu usul funktsiyani ortiqcha tadqiq qilishni talab etmaydi va parametrlar soni katta bo’lganda qo’llaniladi. Shuni aloxida ta'kidlab o’tish joizki, bunga o’xshash algoritmlarda aniq minimumni topish talab etilmaydi, balki yechim sifatida berilgan kattalikdan yaxshiroq bo’lgan ixtiyoriy qiymat yechim sifatida olinadi.

Tasodifiylik quyidagilarda paydo bo’lishi mumkin:

- tushish yo’nalishi taqsimot qonuni modellashtirilganda;
- tushish qadami uzunligi taqsimoti qonunida;
- xq<x1,…,xn> vektor koordinatalarida;
- qidiruv atrofi o’lchami va shu kabilarda.

Mazkur monografiyada adaptiv usullar oilasiga mansub bo’lgan optimumga erishish ehtimolligini kattalashishi va uning ishlash jarayonida maqsad funktsiya haqida axborot yig’ishni xarakterlovchi algoritm ko’riladi [4].

Effektiv qidiruv xarakteristikalari

Qidiruv jarayoni samaradorligi tanlangan mezon orqali olingan xarakteristikalar bilan aniqlanadi. Bu xarakteristikalar jarayonni muqobillashtirishi kabi qidiruvning asosiy xossalarini ifodalaydi[34,40,70, 87,101,135].

Qidiruvning barcha xarakteristikalari ikki sinfga ajratiladi: lokal va lokal bo'lmagan xarakteristikalar va integral xarakteristikalar.

Birinchi sinf bitta bosqichda (bir martalik axborot yig'ish va qaror qabul qilish jarayoni qidiruv qism bosqichi hisoblanadi, ya'ni qidiruv qadamlar seriyasi bir ishchi qadamli) qidiruv samaradorligini aniqlovchi xarakteristikalardan tashkil topgan.

Ikkinchi sinf ancha katta bo'lib, u muqobillashtirishni boshidan oxirigacha bo'lgan barcha qidiruv jarayonlarini effektivligi bilan aniqlanadigan xarakteristikalardan tashkil topgan.

Qidiruvning lokal xarakteristikalari:

- qidiruvda yo'qotishlar (muqobillashtirishning o'rtacha lokal tezligi, ya'ni bir bosqichdagi qidiruv tezkorligi);
- xatoliklar ehtimolligi (qidiruv jarayonida ishchi qadam paydo bo'lish ehtimolligi, ya'ni yangi holatda funktsiyaning qiymati joriy holatdagi qiymatdan ortib ketsa).

Qidiruvning lokal bo'lmagan xarakteristikalari:

- yechimning aniqlilik mezonlari;
- berilgan aniqlikda masalani yechish uchun qadamlar soni mezoni; qo'yilgan masalani o'rtacha aniqligi berilgan aniqlikdan kam bo'lishini va qidiruv qadamlari soni kichik bo'lishini ta'minlagan algoritm yaxshi algoritm deb hisoblanadi;
- qidiruv ishonchlilik mezonlari (tizim muqobillashtirishini berilgan aniqlikda yechish ehtimolligi) va boshqalar.

1.6.1. Tasodifiy qidiruv algoritmining umumiy ko'rinishi

Barcha global tasodifiy qidiruv algoritmlarini quyidagi algoritm ko'rinishida yozish mumkin [9,10, 135,146].

1. B da biror bir $P_0(dx)$ ehtimollar taqsimotini tanlanadi (bu yerda $B - X$ to'plamning borel qism to'plamlari -algebrasi), $k = 0$ deb olinadi.

2. $P_k(dx)$ taqsimotni qandaydir son N_k marta modellashtiramiz va Φ ni qiymatini hisoblash uchun zarur bo'lgan $x_1^{(k)}, \dots, x_{N_k}^{(k)}$, nuqtalarga ega bo'lamiz (tasodifiy xatoliklar bo'lishi mumkin).

3. Aniq bir qoidaga ko'ra $P_{k+1}(dx)$ ehtimollar taqsimotini B da quramiz.

4. To'xtatish shartlarini tekshiriladi, agar to'xtatish sharti bajarilmasa k ni bittaga ortirib 2-qadamga o'tiladi.

1.6.2. Global yechim qidirish masalasi

Faraz qilaylik, X —kompakt metrik fazo (muqobillashtirish to'plami), Φ – X to'plamda quyidan chegaralangan funktsiya (maqsad funktsiya) bo'lsin.

Φ funktsiyani minimumini topish masalasi X da shunday $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, nuqtalar ketma-ketligini ularning birida Φ funktsiya global minimumga $(x^* = \arg\min \Phi)$ yaqinlashishi uchun qurishdan iborat. Yaqinlashish turli tiplarda bo'lishi mumkin: X fazo metrikasida yaqinlashishidan to qandaydir ehtimollik bilan yaqinlashishgacha.

X ning yopiqligi farazi bilan birga, maqsad funktsiyaning x^* nuqta atrofida uzluksizligi $x^* \in X$ ekanligini tasdiqlaydi, ya'ni Φ funktsiya X da global maksimumga erishadi [9,10,26-28,34,40,70,87,101,135,146].

Φ(x^*) maqsad funktsiya minimal qiymatga ega bo'ladigan $x^* = (x_{1,}^* x_2^*, \ldots, x_n^*)^T,\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i \in 1{:}n$ vektorni aniqlash talab etilsin.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga qo'shimcha cheklanishlar maqsad funktsiyani qurishda inobatga olingan deb hisoblaymiz (masalan, jarima funktsiyalari yordamida). Qo'yilgan masalani umumiy ko'rinishda quyidagicha yozib olamiz:

$$\Phi(x) \rightarrow \min_{x \in X} \qquad (1.6.1)$$

bu yerda $x^* = (x_{1,}^* x_2^*, \ldots, x_n^*)^T \in [0,1]^n$.

1.6.3. Masalaning qo'yilishi

Quyidagi masalalarni ko'rib chiqaylik:

- Global muqobillashtirish algoritmining statistik tadqiqoti va uning mantiqiy chiziq doirasidagi modernizatsiyasi hamda ko'rsatkichli qonun asosidagi taqqoslamasi.
- Natijalarning mantiqiy chiziq parametrlariga b'ogliqligi tadqiqoti.
- Qaror qabul qilish usullari yordamida barcha funktsiyalar sinfiga universal, eng yaxshi parametrni ko'rsatish (eng yaxshi parametrlar to'plami).

1.6.4. Qidiruv algoritmining joriy qilinishi

Butun qidiruv foydalanuvchi tomonidan berilgan n_{step} ta qadamga ajratiladi. Har bir qadamda aniqlangan qoida bo'yicha tasodifiy tarzda *X* vektorning x^k (k –qadam nomeri) parametrlari qiymati tanlanadi va bu qiymatda maqsad funktsiyaning qiymati hisoblanadi, ya'ni $\Phi^k = \Phi(x^k)$.

Quyidagi formula qidiruv jarayonining k ta qadamidan olingan maqsad funktsiya qiymatlaridan eng kichik qiymatini aniqlaydi [34,40,70,73,74,86,87,101,135,156].

$$\Phi^k_{min} = min\{\Phi^k, \Phi^{k-1}_{min}\}. \qquad (1.6.2)$$

(1.6.2) formula bo'yicha har bir hisobdan so'ng o'zgaruvchilarni qiymatlari, tanlash qonuni masala yechimining talab qilingan aniqligidan kelib chiqqan holda, global minimumning foydalanuvchi tomonidan berilgan atrofiga tushish ehtimolligi o'suvchi qilib o'zgartirishdan iborat. Buning uchun qidiruvning oldingi qadamlaridan olingan ma'lumotlardan foydalaniladi.

Istiqbol oraliq deb – oldingi qadamlarda olingan ma'lumotlarga ko'ra optimal qiymat bo'lish etimolligi yuqori bo'lgan oraliqqa aytiladi.

Foydalanuvchi tomonidan variatsiya qilish mumkin bo'lgan n_{step}-qadamlar soni, $\epsilon = 1/_{2\epsilon}$-minimumga erishish aniqligi va p_{min} hamda q_{min} tasodifiy qidiruvning parametrlari hisoblanadi.

q_{min} parametr n –o'lchovli s_{min} yuzani aniqlaydi va $s_k > s_{min}$ «istiqbol» sohadan tashqarida modellashtirish zichligi h_k o'zgarmaydi.

s_k parameter s_{min} parametrdan kichik bo'lganda h_k nolga yaqinlashishni boshlaydi, ya'ni qidiruv I^k sohada jadallik bilan olib boriladi.

p_{min} qiymat qidiruv jarayonining minimumi I^k sohada bo'lish ehtimoligiga va h_k balandlik qiymatiga bog'liq. Shunday qilib, p_{min} va q_{min} parametrlar lokal va global qadamlar soni orasidagi munosabatni berish imkonini beradi.

Qidiruv jarayonida maqsad funktsiya haqida axborot to'planib boriladi, shuning uchun I_i^k «istiqbol» oraliqning eni har bir qadamda $p_1 = 1$ dan $p_{k_m} = p_{min} < 1$ gacha siqib boriladi, bunda p_k ning I^k ga tushish ehtimolligi kamayadi. Shu tariqa qidiruv jarayoni gloval minimumni topishga olib keladi. Bunda $\lim_{k\to\infty} p_k = 1$, $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$ bo'lib, $p_{k_m} = p_{min}$ dan boshlab p_k funktsiyaning qiymati 1 gacha oshadi.

Testlash jarayoni ma'lum test funktsiyalari sinfida va ularning modifikatsiyalarida o'tkazildi [6].

1.6.5. Logistik chiziq yordamida qidiruv algoritmlarini modifikatsiyalash

Quyidagi logistik tenglamadan foydalanishga asoslangan tasodifiy qidiruv algoritmining modifikatsiyasi ko'rib chiqiladi [1]:

$$\frac{dv}{dt} = \mu\left(1 - \frac{v}{V_\infty}\right)v, \tag{1.6.3}$$

bu yerda v– muqobillashtirish masalasining «istiqbol» sohasi hajmi, $v = (2q)^n, q$ -uning radiusi, n –muqobillashtirish masalasining o'lchami, V_∞=$\lim_{t\to\infty} v(t) = const$, μ –maltuzian parametri bo'lib, mazkur holda u yechilayotgan muqobillashtirish masalasi haqidagi bilimlarning o'zgarish tezligini xarakterlaydi. Qidiruv n-o'lchamli birlik giperkubda amalga oshiriladi.

(1.6.3) tenglamani yechib, (1.6.4) yechimga ega bo'lamiz:

$$v = \frac{1}{\frac{1}{V_\infty} + \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_\infty}\right)e^{-\mu t}}, \tag{1.6.4}$$

bu yerda $V_0 = v(0)$. t ning kichik qiymatlarida (1.6.4) eksponentsial o'sadi, katta qiymatlarida esa aniq bir qiymatga yaqinlashadi, ya'ni $V_\infty = const$ bo'ladi. Bizning masalada q parameter 0.5 dan 0 gacha o'zgaradi, shuning uchun $V_\infty = 1, 0 \le V_0 \le V_\infty$ deb olamiz. U holda

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{V_0}-1\right)e^{-\mu k_{step}/n_{step}}}\right), \tag{1.6.5}$$

bu yerda k_{step} –qadam nomeri.

$V_0 = V_0(\mu, \varepsilon), \mu = \mu(V_0, \varepsilon)$ deb olamiz (qidiruv aniqligi global minimum atrofi radiusi bilan ustma-ust tushadi). Oxirgi qadamda $2q = \varepsilon$ bo'lishidan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$V_0 = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}e^{\mu}+1}, \tag{1.6.6}$$

$$\mu = -ln\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{V_0}{1-V_0}\right). \tag{1.6.7}$$

Shunday qilib, mazkur ishda μ parametrli logistik qonun va har bir qadamda o'lchami $k' = const$ marta kamayuvchi «istiqbol» intervalning ko'rsatkichli qonuni ko'riladi.

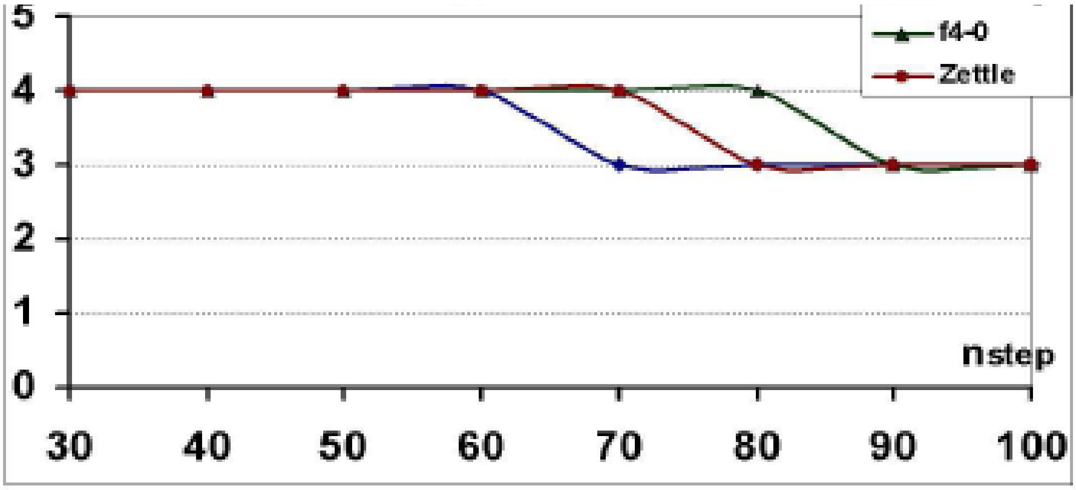
Chetki parametrlarda logistik chiziq algoritmini ko'rib chiqaylik.

1. Deyarli o'zgarmaydigan «istiqbol» soha radiusini olamiz, ya'ni $2q = const \simeq \varepsilon\ (\mu \to 0)$. Har bir qadamda ko'chish yo'nalishi tasodifiy bo'lgan n o'lchamli shar radiusi doirasida nuqtalarni teng taqsimlagan tashlash amalga oshiriladi. Shunday qilib, qandaydir minimumga tushish amalga oshiriladi. Bu holda tasodifiy qidiruvning teng taqsimlagan holidan minimumga yaqinlashish etimolligi katta bo'lib, u maqsad funktsiyaning ko'rinishiga ham bog`liq bo'ladi.

2. $q: 2q = const \simeq \varepsilon\ (\mu \to 0)$ deb olamiz. Bu holda oraliqning uzunligi umuman toraymaydi va tasodifiy qidiruv teng taqsimlangan tasodifiy qidiruvga ekvivalent bo'ladi. (Φ maqsad funktsiyaning qiymatlari hisoblanadigan nuqtalari X taqsimotning tasodifiy olinishiga bog'liq bo'lmaydi).

3. μ parametrga bog'liqlik ehtimolligi (1)-holda o'sadi, (2)-holda esa kamayadi. Shuning uchun ehtimollik eng katta qiymat qabul qiladigan parametr mavjud bo'ladi va uni μ ning optimal parametri deb ataymiz. Quyida bu parametrni tanlash amalga oshiriladi. Turli funktsiyalarning har xil n_{step} parametrlari uchun turli xil optimal parametrlar mavjud ekanligi ta'kidlab o'tilgan edi.

n_{step} parametr ortib boradigan unimodal funktsiyalar uchun μ parametr 4 dan 3 gacha kamayadi (1.6.1-rasm).



1.6.1-rasm. Unimodal funktsiyalarda optimal parametrning qadamlar soniga bog'liqlik grafigi

Bir necha ko'p ekstremalli va "jarlik" funktsiyalarda optimal μ qiymat o'sadi. Mazkur yo'nalish qo'shimcha tadqiqotlarni talab qiladi.

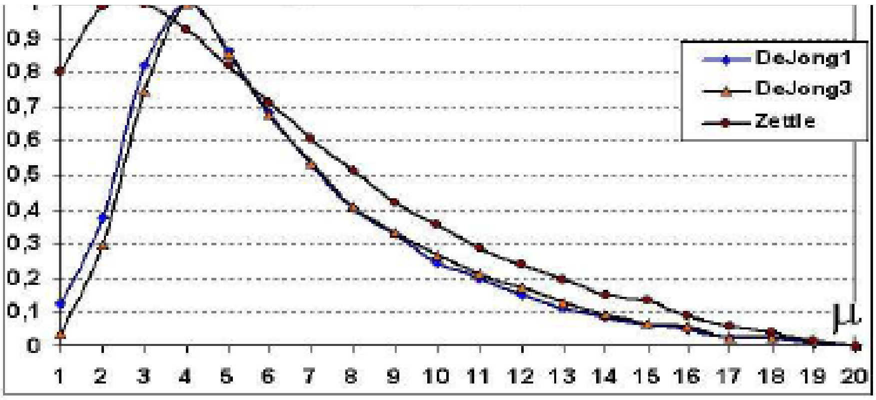
Optimal parametrni topish

Effektivlik mezoni sifatida logistik chiziqning μ parametri qiymatiga bog'liq bo'lgan global minimum topish ehtimolligi tanlanadi.

Φ^* ga tasodifiy qidiruv yaqinlashishining P ehtimolligini baholash uchun x^* da maqsad funktsiyaning optimal yechim bilan farqi 0.01 dan ortmasligi talab etiladi.

Minimumni topish ehtimolligi maksimal bo'lgan parametrlar to'plami barcha funktsiyalar to'plami uchun universal ekanligini izohlash talab etiladi.

Eslatma: $f_i(x)$ funktsiyalar turli "tabiat"ga ega. Bunga ko'ra barcha $f_i(x)$ larni $\max_{\mu \in M} f_i(x)$ga bo'lish orqali normallashtirish zarur.



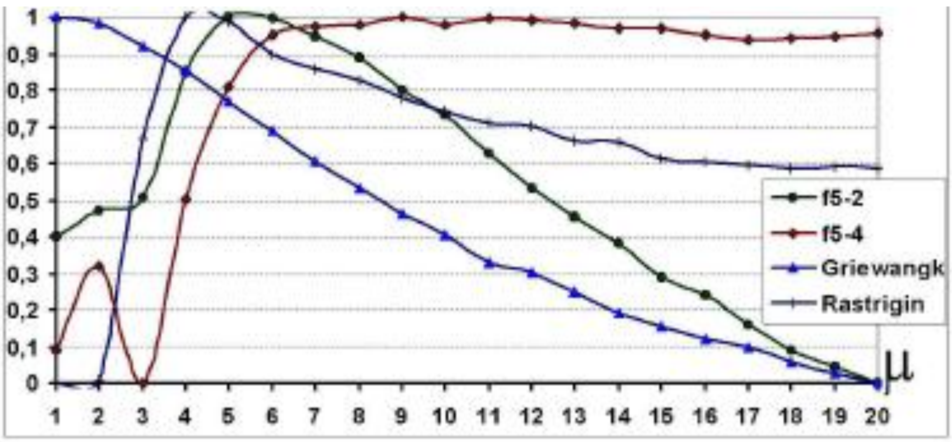
1.6.2-rasm. Unimodal funktsiyalarda optimal parametrning *P* ehtimolligi

Har bir funktsiyalar sinfi uchun quyidagi ishlarni amalga oshirish lozim.

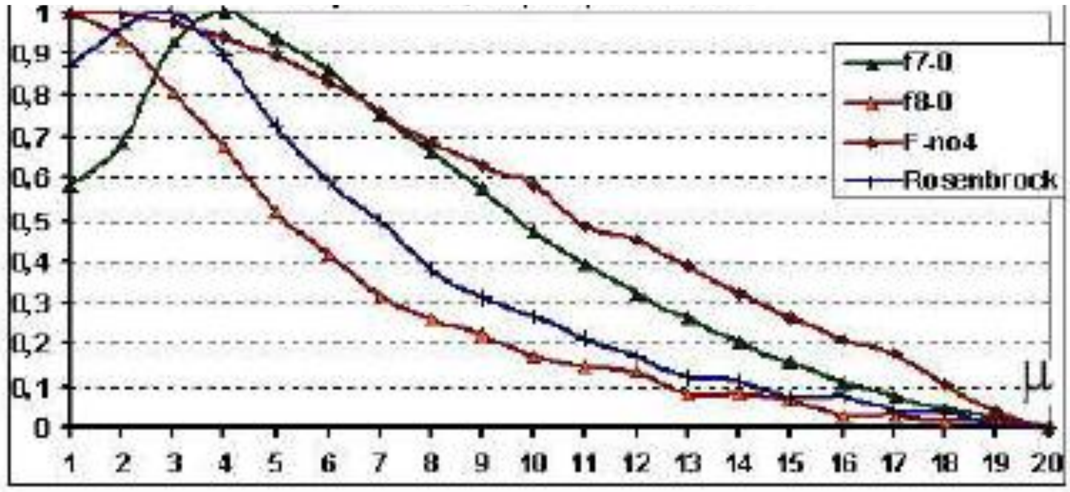
Har bir test funktsiya uchun logistik chiziq parametrlarining turli qiymatlarida ehtimolliklarni hisoblash. Unimodal funktsiyalar uchun optimal parametrni topish. Deyarli barcha funktsiyalar uchun u 4ga teng bo’ladi. (1.6.2-rasm).

Ko’p ekstremalli funktsiyalar uchun barcha amallar o’ta murakkab. Chunki mazkur funktsiyalar turlicha bo’lib, ko’p ekstremalligining o’zi qidiruvni murakkablashtiradi va har bir funktsiya uchun optimal parametr alohida olinadi. (1.6.3-rasm).

“Jarlik” funktsiyalar xarakteriga ko’ra unimodal funktsiyalarga o’xshash va ehtimolliklarning μ ga bog’liqlik grafiklari ham o’xshash bo’ladi (1.6.4-rasm).



1.6.3-rasm. Ko’p ekstremalli funktsiyalar uchun ehtimolliklarning μ ga bog’liqlik grafiklari



1.6.4-rasm. “Jarlik” funktsiyalar uchun ehtimolliklarning μ ga bog’liqlik grafiklari

Shuni aloxida ta'kidlash joizki, deyarli barcha unimodal funktsiyalar uchun eng maqbul parametr $\mu = 4$ bo’ladi. Bu funktsiyaning global tendentsiyalarini muhim emasligini bildiradi va bunday parametrda «istiqbol» sohada u n_{step} qadamda yagona global minimumga erishadi.

“Jarlik” funktsiyalarda ham shu kabi bo’ladi, biroq optimal μ parametrning qiymati kamayadi. Bunda muqobillashtirish masalasi qadamlar minimumni aniqlashga emas, balki unga yetishga xizmat qiladi[70,73,74,86,87,101].

μ optimal parametr unimodal va “jarlik” funktsiyalarga nisbatan ko’p ekstremalli funktsiyalarda katta bo’ladi. Bu global tendentsiyani paydo bo’lishi bilan bog’liq va muhim hisoblanadi (f5-4). Funktsiya qancha murakkab bo’lsa, μ parametr shuncha katta bo’ladi.

Agar logistik chiziq parametrlarining qiymatlari dispersiyasini bog’lanish mezoni sifatida olinsa, μ optimal parametr ehtimollik mezonidagi kabi bo’ladi. Ko’p ekstremallik funktsiyalarda optimal parametrni aniqlash murakkab bo’lib, umumiy tendentsiyalar saqlanadi. Universal parametrni hisoblashda dispersiya mezonidan foydalanish mumkin.

Shunday qilib, funktsiyalar o’zining asosiy xossalari va parametrlari bilan mos funktsiyalar sinfini tashkil qiladi. Bunda barcha funktsiyalar sinfi uchun universal parametrni topish masalasi paydo bo’ladi.

Har bir sinf uchun μ parametrlar hisoblanadi va barcha sinflar uchun yaxshi hisoblangan parametr qaror qabul qilish usullari yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib, har bir test funktsiyalar sinfi uchun parametrlarning ehtimollik qiymatlari bo'yicha optimal tartiblashni amalga oshirildi. Bunda F1 –unimodal funktsiyalar, F2 –ko'p ekstremalli funktsiyalar, F3 –"jarlik" funktsiyalardan mezon sifatida foydalanildi. Alternativ sifatida μ parametrning qiymati xizmat qiladi.

Eslatma: Barcha mezonlar uchun chegara bir xil olinadi. Har bir sinf funktsiyalari chegralari qo'yilgan masalaga bog'liq ravishda olinadi.

F1, F2, F3 mezonlar ehtimollik qiymatlari bo'yicha μ parametrning tartiblangan optimal giymatlari jadvali:

F1	**4**	**3**	**5**	**6**	**7**	**2**	**8**	**9**	**10**	**1**
F2	**5**	**6**	**4**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
F3	**3**	**2**	**1**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Agar barcha mezonlar chegarasi uchun 5 olinsa, u holda kesishmasi {4,5} bo'ladi va bu nisbatan yaxshi natija beradi. Yakunida $\mu = \{4\}$ parametr eng maqbul parametr ekanligi ma'lum bo'ladi.

Natijalar

Modellashtirish natijasida har bir funktsiyalar sinfi uchun quyidagi hollarda ehtimolliklar qiymatlariga ega bo'ldik:

1) μ -berilgan funktsiya uchun optimal,
2) Ko'rsatkichli qonun $(q = qk')$,
3) μ –barcha funktsiyalar sinfi uchun optimal.

Unimodal funktsiyalar

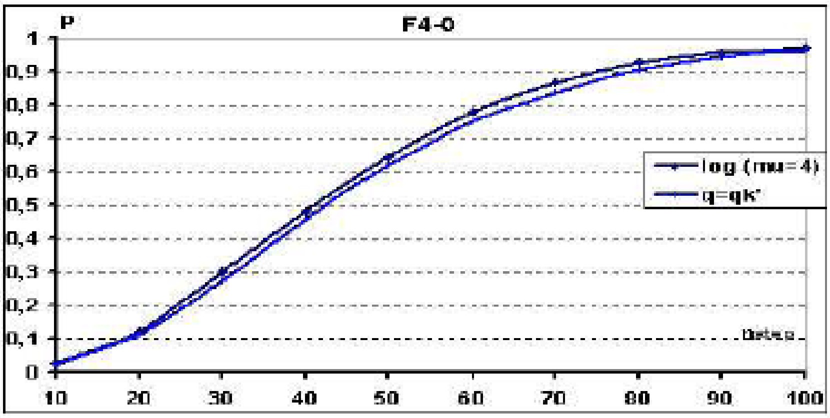
Ushbu funktsiyalar sinfida logistik chiziqdan foydalanish ko'rsatkichli qonunga teng kuchli ekan. (1.6.5-rasm).

Ko'p ekstremalli funktsiyalar

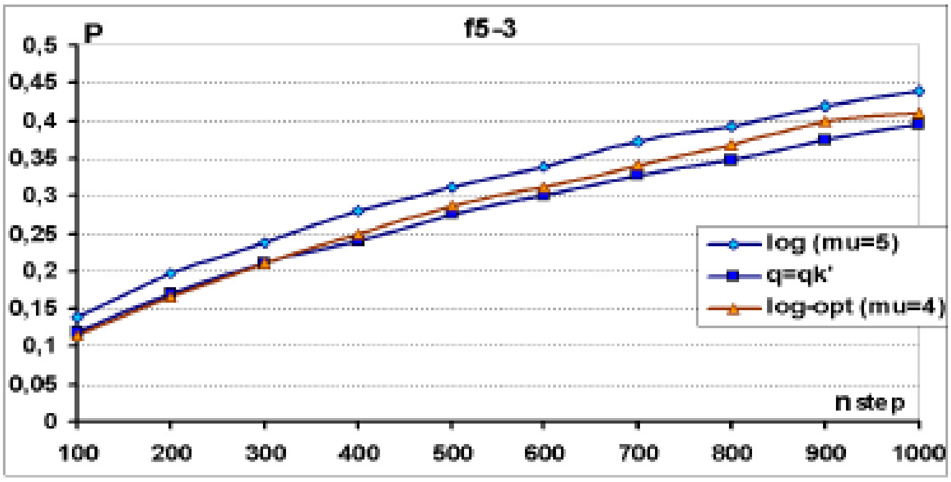
Bu yerda barcha funktsiyalar uchun eng yaxshi parametrli logistik qonun yuqori natija berdi (1.6.6-rasm). Optimal parametrli logistik qonun bilan ko'rsatkichli qonun deyarli bir xil, ammo aniq sonlarda logistik qonun (universal parametr bilan) yaxshiroq hisoblanadi. Shuning uchun ko'p ekstremalli funktsiyalarda universal parametrli logistik chiziqdan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

“Jarlik” funktsiyalar

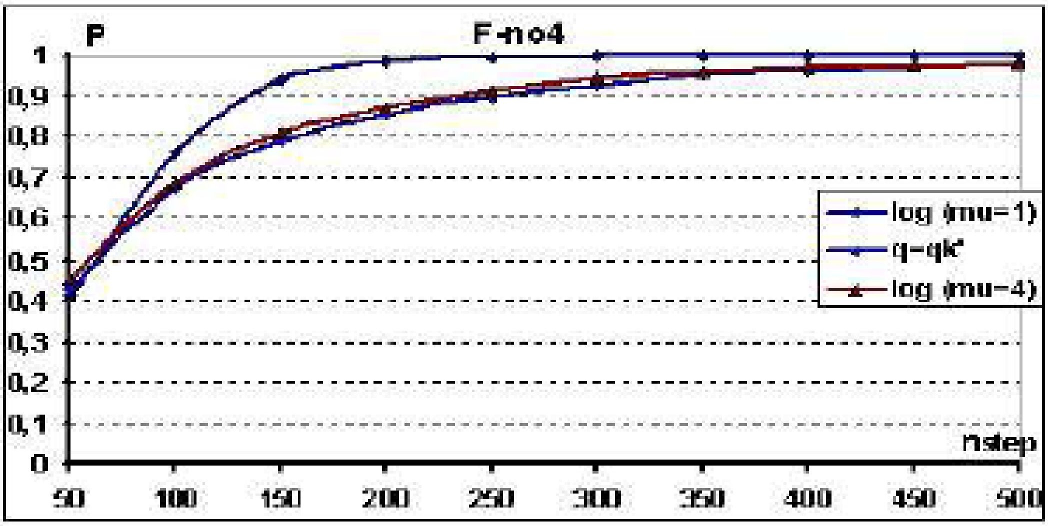
Bu turdagi funktsiyalar sinfi uchun logistik chiziqdan foydalanish samaradorligi boshqalariga nisbatan yuqoriroq bo’ladi (1.6.7-rasm). Boshqa turdagi funktsiyalar sinfi uchun optimal parametrli funktsiyalardagi logistik qonun yaxshi natija berdi. Barcha sinflar uchun optimal bo’lganda dastlab mazkur qonun, so’ngra ko’rsatkichli qonun qo’llaniladi. Jarlik funktsiyalarda F3 mezon parametrlari yoki universal parametrdan foydalanish tavsiya etiladi.



1.6.5-rasm. f4-0 unimodal funktsiyalarda μ va $q = qk'$ optimal parametrlarini n_{step} qadamlar soniga bog’liqligining ehtimolligi grafigi



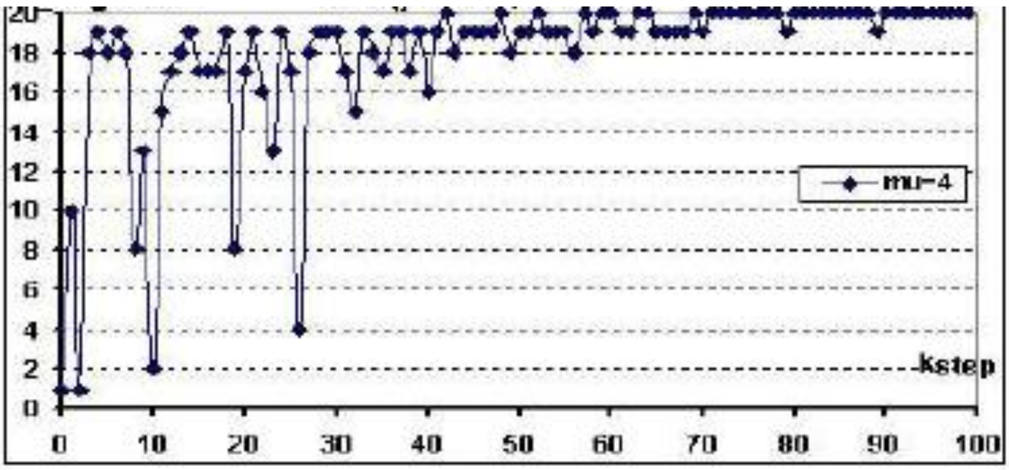
1.6.6-rasm. F5-3 ko’p ekstremalli funktsiyalarda μ va $q = qk'$ optimal parametrlarini n_{step}qadamlar soniga bog’liqligining ehtimolligi grafigi



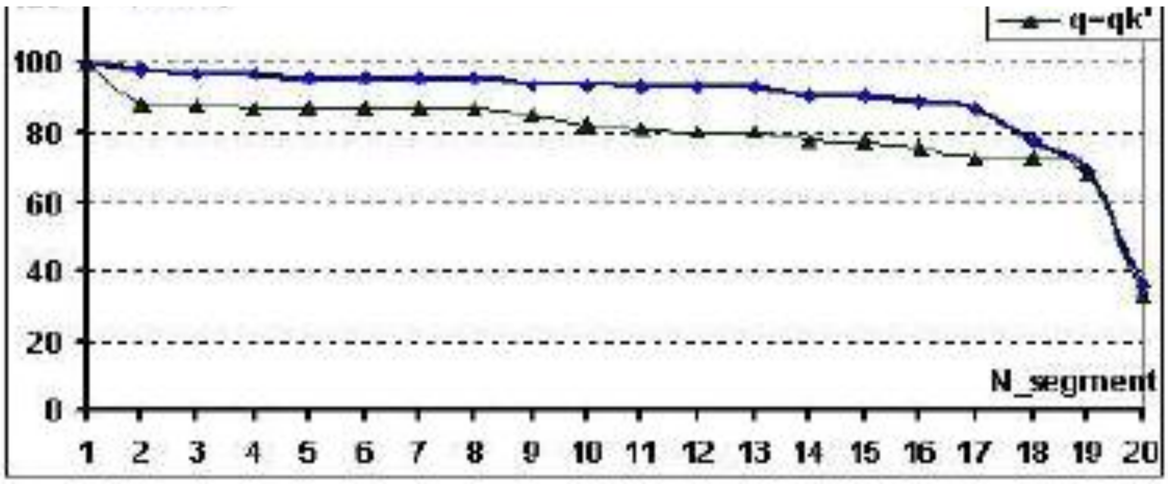
1.6.7-расм. F-no4 “jarlik” funktsiyalarda μ va $q = qk'$optimal parametrlarini qadamlar soniga bog’liqligining ehtimolligi grafigi

Quyida minimumga yaqinlashish grafigini qurish keltiriladi. Buning uchun $\Phi(x)$ segmentlarga ajratiladi (segmentlar soni 20 ga teng). Quyi va yuqori chegaralar yechiladigan optimal masala va uning empirik ma'lumotlari asosida foydalanuvchi tomonidan tanlanadi. Qidiruvning har bir k_{step} qadamida $\Phi(x_{k_{step}})$ ning qiymati tushgan segment hisoblanadi (1.6.8-rasm).

1.6.8-rasmdan har bir segmentga tushish taqsimotiga ega bo’lamiz (1.6.9-rasm).



1.6.8-rasm. f4-0 funktsiyada($\mu = 4$) logistik chiziqli qidiruvning har bir qadamidagi segmentga tushish grafigi



1.6.9-rasm. Har bir segmentga tushish taqsimoti grafigi

p_{min}, q_{min} algoritm parametrlarini tanlash qaror qabul qilish usullaridagi kabi amalga oshiriladi [4].

Ko’p mezonli va jarlik funktsiyalarda logistik chiziqdan foydalanish maqsadga muvofiq bo’lib, yaxshi natija beradi. Unimodal funktsiyalarda logistik qonun ko’rsatkichli qonunga ekvivalent ekan. Masalani yechish jarayonida barcha funktsiyalar sinfi uchun universal algoritm parametri aniqlandi va turli funktsiyalar sinfi uchun bu parametrdan foydalanish usullari ishlab chiqildi.

2-bob. SUST SHAKLLANGAN JARAYONLARDA MUQOBILLASHTIRISH MODELLARINI ISHLAB CHIQISH

2.1. Noravshan chiziqli muqobillashtirish modellarini ishlab chiqish muammolari

Matematik muqobillashtirish masalalarida mavjud variantlar o’rtasida eng maqbulini tanlash variantlarning berilgan to’plamida maqsad funksiyalari yordamida ta’riflanadi. Maqsad funksiyasining qiymati har bir variantning ta’sirini (ahamiyatini) ta’riflaydi, bunda ko’proq afzalikkka ega bo’lgan variantlar unchalik afzal bo’lmaganlarga qaraganda katta qiymatlarga ega bo’ladi. Masalan, iqtisodiy masalalarda bu qiymatlar ishlab chiqarishning turli xil usullaridan olinuvchi daromadlarni akslantirishi mumkin. Muqobillashtirish masalalarida joiz variantlar to’plami cheklanishlar - variantlar o’rtasidagi kerakli aloqalarni ifodalaovchi tenglamalar yoki tengsizliklar yordamida ta’riflanadi. Tahlil natijalari haqiqiy tizimning har xil omillari maqsad funksiyasi yoki cheklanishlarda naqadar to’g’ri ta’riflanganligiga bog’liqdir [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

Muqobillashtirish masalalarida maqsad funksiyasi va cheklanishlarning matematik bayoni, odatda, bir qancha parametrlarni o’z ichiga oladi. Masalan, resurslarni taqsimlash masalalarida parametrlar har xil turdagi mahsulotning ishlab chiqarish narxi, yetkazib berish narxi kabi iqtisodiy ko’rsatkichlarni ifodalashi mumkin.

Bunday parametrlarning qiymatlari masalaning bayoniga kiritilmagan ko’pgina parametrlarga bog’liq bo’ladi. Modelni mazmunliroq qilib ko’rsatish maqsadida biz unga murakkab aloqalarni kiritamiz, bu esa modelni kattalashtiradi va analitik jihatdan yechib bo’lmaydigan ko’rinishga keltiradi. Modelning “aniqligini” oshirishning bunday sai-harakatlari parametrlarni aniq o’lchab bo’lmasligi tufayli deyarli foydasizdir. Boshqa tomondan, parametrlarining qiymatlari oldindan berib qo’yilgan model juda ham qo’pol bo’lishi mumkin, chunki bu qiymatlar, ko’pincha, tasodifiy ravishda tanlanadi.

Mazkur bobda parametrlari noravshan to’plamlarning umumiy ko’rinishida ifodalanashi mumkin bo’lgan yondashuv ko’rib chiqiladi. Bu yondashuvda noravshan parametrlarni o’z ichiga olgan matematik muqobillashtirish masalalarining yangi turiga ega bo’lamiz. Shu yondashuv asosida chiziqli muqobillashtirish masalasini ko’rib chiqish noravshan chiziqli dasturlashning mazmunini tashkil etadi. Quyida ko’rsatilganidek, noravshan parametrlarning maxsus shakllari hisoblangan ravshan parametrlarga (ya’ni sodda haqiqiy sonlarga) nisbatan chiziqli muqobillashtirish masalasining bayoni oldingi boblardagi bayonlar bilan ustma-ust tushadi.

Turli xil yondashuvlar asosida bayon qilingan ko’pgina ilmiy tadqiqotlarda noravshan chiziqli muqobillashtirish masalasini (va ular bilan bog’liq boshqa masalalar) o’rganish jadal suratlar bilan rivojlantirildi. Noravshan chiziqli dasturlash masalasiga nisbatan ko’pgina yondashuvlar maqsad va cheklanishlarni ifodalovchi noravshan to’plamlarning kesishmasidan to’g’ridan-to’g’ri foydalanishga asoslanadi, bundan so’ng natijaviy tegishlilik funksiyasi maksimallashtiriladi. Bu yondashuv Bellman va Zade [18] tomonidan aytib o’tilgan edi. Keyinchalik har xil nom ostida mashhur, ko’pincha - noravshan chiziqli dasturlash, lekin ayrim hollarda, ehtimolli chiziqli dasturlash, egiluvchan chiziqli dastulash, noaniqlik sharoitida dasturlash deb yuritiluvchi chiziqli dasturlash masalalarini yechish muammolariga bir qator ishlar bag’ishlangan edi. Bu yerda chiziqli dasturlash masalasining an’anaviy bayonini tizimli ravishda kengaytirishga asoslangan yondashuv taqdim etiladi [87,91,100].

Mazkur bobda noravshan chiziqli dasturlash o’zining shaxsiy tuzilmasi va keng doirali muqobillashtirish masalalarining sinflarini o’rganish vositalariga ega ekanligi bilan stoxastik dasturlashdan katta darajada farq qilishi ko’rsatilgan. Noravshan chiziqli dasturlash parametrli chiziqli dasturlashdan ham farq qiladi. Parametrli chiziqli dasturlashda yechiladigan masalalar, o’zining mazmuniga ko’ra parametrlar deb nomlanuvchi, maxsus o’zgaruvchili determinantlashgan muqobillashtirish masalalari hisoblanadi. Parametrli chiziqli dasturlash masalalarni yechimini qidirishda parametrlarning qiymatlari va chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimlari o’rtasida funksional aloqalarni izlashga asosiy e’tibor qaratiladi[9,10,26-28, 86,87,101].

Noravshan chiziqli dasturlash masalalarini tahlil qilishda maxsus vositalarni mantiqiy kelishilgan usul bilan qo’llash talab qilinadi. Mazkur yondashuvda umumlashgan qavariq tegishlilik funksiyalari va noravshan aloqalar katta ahamiyat kasb etadi.

Avvalambor, biz muqobillashtirish masalasini va, xususan, klassik chiziqli dasturlash masalalarining oilasi bilan bog'liq noravshan chiziqli dasturlash masalasini bayon qilamiz. So'ngra noravshan chiziqli dasturlash masalalarining joiz yechimini aniqlaymiz va bunday masalalarning "muqobil yechimi" muammosini ko'rib chiqamiz [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146]. Biz ikkita yondashuvni rivojlantiramiz: birinchisi, qanoatlantiruvchi yechim deb atalib, u noravshan kattaliklar bilan modellashtiriluvchi tashqi muhitlarga asoslanadi; ikkinchisi samarali (ustuvor bo'lmagan) yechim qoidasiga asoslanadi. So'ngra, bizning tadqiqotimiz noravshan chiziqli dasturlash masalalarida ikkilamchilikka qaratiladi. Bobning oxirida, shuningdek, muqobillashtirishning ko'p mezonli holi o'rganiladi. Biz ko'p mezonli noravshan chiziqli dasturlash masalasini bayon qilamiz, kelishuvli yechimni aniqlaymiz va mos nazariy natijalarni olamiz. Bob sonli misol bilan yakunlanadi.

2.1.1-ta'rif. A to'plam X to'plamning ma'lum bir noravshan qism to'plami bo'lsin. A to'plamning yadrosi Core(A) ni quyidagi ko'rinishda aniqlaymiz:

$$\mathrm{Core}(A) = \{x\in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$$

A qism to'plamning to'ldiruvchisi C(A)

$$\mu_{CA}(X) = 1- \mu_A(X) \qquad (2.1.1)$$

tegishlilik funksiyali noravshan to'plam sifatida aniqlanadi. Agarda A qism to'plamning yadrosi bo'sh bo'lmasa, u holda A normal deyiladi. A qism to'plamning tashuvchisi Supp(A) quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\mathrm{Supp}(A) =C1\{x\in X \mid \mu_A(x) > 0\},$$

bu yerda C1 topologik berklikni angalatadi. A qism to'plamning Hgt(A) balandligi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\mathrm{Hgt}(A) = \sup \{\mu_A(x) \mid x\in X\}.$$

A qism to'plamning $\mu_A \in[0, 1]$ tegishlilik funksiyasining α qiymatga nisbatan darajalar to'plami $(A)_\alpha$ kabi belgilanadi va A qism to'plamning α-kesimi deb ataladi, ya'ni:

$$[A]_\alpha =\{x\in X \mid \mu_A(x) \ge\alpha \}. \qquad (2.1.2)$$

A qism to'plamning $\mu_A \in[0, 1]$ tegishlilik funksiyasining α qiymatga nisbatan qat'iy darajalar to'plami $(A)_\alpha$ kabi belgilanadi va A qism to'plamning qat'iy α-kesimi deb ataladi, ya'ni:

$$(A)_\alpha =\{x\in X \mid \mu_A(x) > \alpha \}. \qquad (2.1.3)$$

Agarda A normal bo'lsa, u holda Hgt(A) = 1 bo'ladi, lekin teskarisi noto'g'ri.

2.1.2-ta'rif. $\mathbb{R}^T$ – T – o'lchovli evklid fazosi bo'lsin va X C $\mathbb{R}^T$. Noravshan A = $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ qism to'plam har bir $\alpha \in (0,1]$ ga nisbatan X ning berk, chegaralangan, kompakt yoki qavariq A_a qism to'plami bo'lsa, mos ravishda berk, chegaralangan, kompakt yoki qavariq deyiladi.

Berilgan noravshan to'plamga nisbatan, (2.1.2) yordamida ifodalanuvchi har bir $[A]_\alpha$, kesim A_a bilan ustma-ust tushadi.

2.1.3-ta'rif. μ: X→[0,1] – ma'lum bir funksiya va A = $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ – uning darajalar to'plamlarining oilasi bo'lsin. U holda A to'plam X to'plamning noravshan qism to'plami, μ - esa A ning tegishlilik funksiyasi bo'ladi.

2.1.4-ta'rif. A = $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ – X dan olingan ma'lum bir qism to'plam va μ_A: X→ [0, 1] – A to'plamning tegishlilik funksiyasi bo'lsin. U holda har bir $\alpha \in [0,1]$ ga nisbatan $[A]_\alpha$ - to'plamning α - kesimi A_α bilan ustma-ust tushadi.

Biz haqiqiy o'qning noravshan qism to'plamlarini o'rganamiz, bunda X = $\mathbb{R}$ va F(X)=F($\mathbb{R}$) deb olinadi [9,10, 101,135,146].

2.1.5-ta'rif.

(i) Agarda A_α hamma $\alpha \in [0,1]$ larga nisbatan bo'sh bo'lmasa va $\mathbb{R}$ ning qarariq qism to'plami bo'lsa, A = $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,\ 1]}$ norvshan to'plam noravshan oraliq deyiladi. Bunday noravshan to'plam oraliqlar to'plami kabi belgilanadi.

(ii) A noravshan oraliqning yadrosi bir nuqtali to'plam bo'lsa, noravshan son deyiladi. Barcha noravshan sonlarning to'plami $F_N(\mathbb{R})$ kabi belgilanadi.

Shuni qayd etish joizki, A noravshan oraliqning μ_A: $\mathbb{R}$ →[0, 1] tegishlilik funksiyasi R da kvazibotiqdir.

2.1.6-ta'rif. X⊆ $\mathbb{R}$ bo'lgan f funksiya : $\mathbb{R}$ → [0, 1]

(i) ixtiyoriy x,y ∈ X va har qanday $\lambda\in(0,1)$ ga nisbatan $x\lambda + (1-\lambda)y \in X$ da quyidagi munosabat bajarilsa:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min\{f(x),\ f(y)\}$$

X da kvazibotiq deyiladi;

(ii) ixtiyoriy x, y ∈ X, x ≠ y va $x\lambda + (1 - \lambda)y \in X$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $\lambda\in (0,1)$ ga nisbatan

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\min\{f(x),\ f(y)\} \qquad (2.1.4)$$

munosabatni qanoatlantirsa X da qat'iy kvazibotiq deyiladi;

(iii) f funksiya X da kvazibotiq va ixtiyoriy $x,y \in X$, $x\neq y$ va $x\lambda+(1-\lambda)y \in X$, $f(\lambda x+(1-\lambda)y)>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday $\lambda \in (0,1)$ ga nisbatan hamda $f(x)\neq f(y)$ da (2.1.4) shart bajarilsa, yarim qat'iy kvazibotiq deyiladi.

M ravshan qism to'plamlarning tegishlilik funksiyasi kvazibotiq bo'lsada, lekin qat'iy kvazibotiq hisoblanmaydi. Biroq, ular R da yarim qat'iy kvazbotiq bo'ladi.

2.1.7-ta'rif. R dan olingan noravshan A qism to'plam normal, kompakt va yarim qat'iy kvazibotiq μ_A tegishlilik funksiyasiga ega bo'lsa, u noravshan kattalik deyiladi. Jami noravshan kattaliklar to'plami $F_0(\mathbb{R})$ kabi belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra, $F_0(\mathbb{R}) \subseteq F_I(\mathbb{R})$, bundan tashqari $F_0(\mathbb{R})$ oddiy haqiqiy (ravshan) sonlar, oddiy (ravshan) oraliqlarni, uchburchak shaklidagi noravshan sonlar, qo'ng'iroqsimon shakldagi noravshan sonlarni o'z ichiga oladi.

2.1.8-ta'rif. X va Y – bo'sh bo'lmagan to'plamlar bo'lsin. To'plamlar nazariyasida X va Y to'plamdagi elementlar o'rtasidagi R binar munosabat $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmaning qism to'plami sifatida aniqlanadi, ya'ni $R \subseteq X \times Y$.

$X\times Y$ dagi o'lchamli R munosabat ta'rifga ko'ra, ma'lum bir noravshan $X\times Y$ qism to'plamdir. X dagi o'lchamli R munosabat noravshan $X \times X$ qism to'plamdir.

Ixtiyoriy R binar munosabat, $R \subseteq X \times Y$, o'zining xarakteristik funksiyasi yordamida o'lchamli munosabatlar sinfiga izomorf ravishda kiritilgan bo'ladi. Shu ma'noda har qanday binar munosabat o'lchamli hisoblanadi.

R - $X \times Y$ da o'lchovli munosabat bo'lsin. Noravshan chiziqli dasturlash masalalarida har bir noravshan qism to'plamlar juftligiga [0,1] oraliqdan olingan haqiqiy sonni mos qo'yuvchi noravshan munosabatni ko'zdan kechiramiz. Boshqa so'z bilan aytganda, $F(X)\times F(Y)$ dagi $\mu_{\tilde{A}}:F(X)\times F(Y)\to[0,1]$ shartni qanoatlantiruvchi $\tilde{R}$ o'lchovli munosabatlar qaraladi.

$x \in X$ va $\boldsymbol{y} \in Y$ lar tegishlilik funksiyalari vazifasini bajaruvchi $\aleph_x$ va $\aleph_y$ xarakteristik funksiyali X va Y noravshan qism to'plamlar sifatida qaraladi. Bunda, *F(X)* ga nisbatan izomorf X kiritish va F(Y) ga nisbatan Y izomorf kiritishlarga ega bo'lamiz va, mos ravishda, $X \subseteq F(X)$ va $Y \subseteq F(Y)$ kabi yozib olamiz.

Sodda «=», «<» va «^» binar munosabatlar o'lchovli munosabatlar sifatida qabul qilinishi mumkin [9,10, 70,73,74,86,87,101,135,146].

Muqobillashtirish masalalarining o'ng va chap qismlarini solishtirish uchun qo'llaniluvchi noravshan munosabatlarni aniqlab olaylik.

2.1.9-ta'rif. F(X) × F(Y) to'plamning noravshan qism to'plami X × Y dagi noravshan munosabat deyiladi. F(X) × F(Y) dagi jami munosabatlar to'plami F(F(X) × F(Y)) kabi belgilanadi. X × X qism to'plam X to'plamdagi noravshan munosabat deyiladi.

2.1.10-ta'rif. R - X×Y dagi o'lchovli munosabat bo'lsin. $\mu_{\tilde{R}} : F(x) \times F(Y) \to [0,1]$ tegishlilik funksiyasi orqali beriluvchi X×Y dagi noravshan R munosabat ixtiyoriy x ∈ X va y ∈ Y larga nisbatan

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_R(x, y) \qquad (2.1.5)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, R munosabatning noravshan kengaytmasi deyiladi.

(2.1.5) ning chap qismida *x* va *y* lar {*x*} va *{y}* birlik elementlarning xarakteristik funksiyalariga mos kelgan tegishlilik funksiyalari bilan aniqlangan X va Y to'plamlarning noravshan qism to'plamlari sifatida tushuniladi.

2.1.11-ta'rif. ψ : Ғ(X × Y) → Ғ(F(X) × F(Y)) – biror bir akslantirish bo'lsin. ψ(R) – barcha R ∈ ψ : Ғ(X × Y) larga nisbatan R munosabatning noravshan kengaytmasi bo'lsin. U holda ψ o'lchovli munosabatlarning noravshan kengaytmasi deyiladi.

2.1.12-ta'rif. Φ va ψ:F(X×У)→F(F(X)× F(Y)) –akslantirishlar bo'lsin. Φ akslantirish ψ akslantirishga nisbatan ikkilamchi deyiladi, agarda

$$\Phi\,(C\,R) = C\,\psi\,(R) \qquad (2.1.6)$$

munosabat barcha R ∈ Ғ(X × Y) larga nisbatan to'g'ri bo'lsa. ψ ga nisbatan ikkilamchi Φ uchun va R ∈ Ғ(X × Y) o'lchovli munosabatga nisbatan Φ(R) munosabat ikkilamchi deyiladi

2.1.13-ta'rif. Faqat va faqat ψ akslantirish Φ akslantirishga nisbatan ikkilamchi bo'lganida, Φ akslantirish ψ ga nisbatan ikkilamchi deyiladi.

Ushbu ta’rif (2.1.6), (2.1.1) va ayniyatdan kelib chiqadi.

Huddi shunga o’xshash tasdiq Φ(*R*) va Φ (*R*) ikkilamchi munosabatlarga nisbatan ham o’rinli bo’ladi. Endilikda, o’lchovli munosabatlarning muhim noravshan kengaytmalarini ifodalovchi bir qator maxsus akslantirishlarni aniqlaymiz. Bunda t-norma va t-konorma tushunchalaridan foydalaniladi [9,10,26-28,37,40,70,73,74,86,87,146].

Kommutativ, assotsiativ, har bir o’zgaruvchi bo’yicha kamaymaydigan va barcha $a \in [0,1]$ larga nisbatan $T(a, 1) = a$ chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ funksiyalar sinfi uchburchak normalar yoki t-normalar deyiladi. T-normaning to’rtta mashhur ko’rinishi quyidagilardir:

$$T_M(a, b) = \min\{a, b\},$$
$$T_P(a, b) = a\text{-}b,$$
$$T_L(a,b) = max\ \{0, a+b\text{-}1\},$$
$$T_D(a,b) = \begin{cases} \min\{a,b\}, & agar\ \max\{a, b\} = 1, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases}$$

Bu yerda T_M – minimal t-norma, T_p – multiplikativ t-norma, T_L – Lukasevichning t-normasi, T_D - kuchli (drastic) ko’paytma deb ataladi.

t-normalar sinfi bilan uzluksiz bog’liq funksiyalar sinfi- $S{:}[0,1]^2 \to [0,1]$ funksiyalar bo’lib, ular kommutativ, assotsiativ, har bir o’zgaruvchi bo’yicha kamaymaydigan va barcha $a \in [0,1]$ larga nisbatan S(a, 0) = a chegaraviy shartni qanoatlantiradi.

Yuqorida sanab o’tilgan barcha shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar uchburcak konormalar yoki t-konormalar deyiladi, Masalan, $a, b \in [0,1]$ da

$$S_M(a, b) = max\{a, b\},$$
$$S_P(a, b) = a+b\text{-}\ a\cdot b,$$
$$S_L(a,b) = min\ \{1, a+b\text{-}1\},$$
$$S_D(a,b) = \begin{cases} \max\{a,b\}, & agar\ \min\{a, b\} = 0\ bo'lsa, \\ 1, & aks\ holda \end{cases}$$

ifodalar bilan aniqlangan S_M, S_P, S_L VA S_D funksiyalar konormalar hisoblanadi. S_M, S_P, S_L VA S_D, lar mos ravishda maksimum, imkoniyatli yig’indi, chekli yig’indi va kuchli (drastic) yig’indi deb ataladi [9,10, 34,40,70,73,74,,101,135,146]. Har bir t-norma uchun T dagi barcha $a, b \in [0,1]$ larga nisbatan

$$T^*(a, b) = 1\text{-}T(1\text{-}a,\ 1\text{-}b) \qquad (2.1.7)$$

ifoda orqali aniqlangan T*: $[0,1]^2 \to [0,1]$ funksiya t-konorma bo'ladi. Teskari tasdiq ham to'g'ridir. Aniqrog'i, agarda S - t-konorma bo'lsa, u holda barcha $a, b \in [0,1]$ larga nisbatan

$$S^*(a, b) = 1\text{-}S(1\text{-}a, 1\text{-}b) \qquad (2.1.8)$$

ifoda bilan aniqlangan $S^* : [0,1]^2 \to [0,1]$ funksiya t-norma bo'ladi. T* - T-konorma va S* - t-norma mos ravishda T - t-norma va S - t-konormaga nisbatan ikkilamchi deyiladi.

$$T_M^* = S_M, \quad T_P^* = S_P, \quad T_L^* = S_L, \quad T_D^* = S_D$$

ekanligini tekshirish qiyin emas. T uchburchak norma uzluksiz va qat'iy monoton bo'lsa, qat'iy deyiladi. Barcha $x, y \in (0,1)$ ga nisbatan $T^{n-1}(x,...,x)<y$ shartni qanoatlantiruvchi musbat butun n soni mavjud bo'lsa, bunday norma arximed norma deyiladi. Ushbu normaning kommutativlik va assotsiativlik xossasidan foydalanib, uning ikkitadan ortiq argumentga kengaytmasini quyidagi formula bo'yicha hisoblash mumkin:

$$T^{n-1}(x_1, x_2,..., x_n) = T(T^{n-2}(x_1, x_2,..., x_{n-1}),\ x_n), \qquad (2.1.9)$$

bu yerda:

$$T^1(x_1, x_2)=\mathrm{T}(x_1, x_2).$$

Agarda T-qat'iy norma bo'lsa, u arximed norma hisoblanadi.

2.1.14-ta'rif. X-normaning additiv T generatori - bu o'ng tomondan nolda uzluksiz va f(1) = 0 shartni qanoatlantiradigan, hamda barcha $x, y \in [0,1]$ larga nisbatan

$$f(x) + f(y) \in Ran(f) \cup [f(0), +\infty], \qquad (2.1.10)$$

$$T(x, y)=f^{(-1)}(f(x) + f(x)) \qquad (2.1.11)$$

munosabatlar o'rinli bo'lgan $f : [0,1] \to [0, \infty)$ kamaymaydigan funksiyadir, bu yerda $\mathrm{Ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in [0,1]\}$ – f ning [0,1] oraliqdagi qiymatlar sohasi.

Additiv generatorlar (yoki ularga o'xshash multiplikativ generatorlar) yordamida qurilgan uchburchak normalar (t-konormalar) har doim arximed normadir [9,10,26-28,34,40].

2.1.15-ta'rif. T - t-norma, S esa t-konorma bo'lsin. R - X dagi o'lchovli munosabat bo'lsin. X da o'lchangan R munosabatning $\Phi^T(R)$ va $\psi(R)$ funksiyalari $\mu_A \to [0,1]$, $\mu_B: Y \to [0,1]$ tegishlilik funksiyali A,B to'plamlarda

$$\mu_{\Phi^T(R)}(A,B) = \sup\{T(\mu_R(x,\ y)),\ T(\mu_A(x),\ \mu(y)))\,|\,x, y \in X\}, \qquad (2.1.12)$$

$$\mu_{\psi^S(R)}(A,B) = \inf\{S(S(1-\mu_A(x),1-\mu_B(y)),\ \mu_R(x,\ y))\,|\,x, y \in X\} \qquad (2.1.13)$$

ifodalar bilan aniqlangan funksiyalar mos ravishda R munosabatning T-noravshan kengaytmasi va R munosabatning S-noravshan kengaytmasi deyiladi.

R munosabatning T-noravshan kengaytmasi va R munosabatning S-noravshan kengaytmasi R munosabatning 2.1.10-ta'rif bilan qamrab olinuvchi noravshan kengaytmalari deyiladi.

Keyingi ta'rifda biz o'lchovli munosabatlarning noravshan kengaytmalari o'rtasidagi ikkilamchilikni isbotlaymiz.

2.1.16-ta'rif. T - t-norma, S esa T ga nisbatan ikkilamchi t-konorma bo'lsin. U holda Φ^T kengaytma ψ^S ga nisbatan ikkilamchi hisoblanadi.

Isbot. $R \subseteq F(X + Y)$ bo'lsin, bizga (2.1.6) munosabatni o'rnatish kerak, ya'ni

$$\Phi^T(CR) = C\Phi^S(R), \qquad (2.1.14)$$

$A \in F(X)$ va $B \in \mathrm{F}(Y)$ deb olib,

$$\mu_{\Phi^T(CR)}(A,B) = \mu_{C\Phi^S(R)}(A,B)$$

ekanligini ko'rsatamiz. 2.1.13-ta'rifga ko'ra, hamda T va S normalarning ikkilamchi ekanligidan ((2.1.7) va (2.1.8) ga qarang) quyidagi munosabatlarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
&\mu_{\Phi^T(CR)}(A,B) = \sup\{T(T(\mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_{CR}(x,\ y))\,|\,x \in X, y \in Y\} = \\
&\sup\{1 - S(1 - T(\mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\,|\,x \in X, y \in Y\} = \\
&\qquad 1 - \inf\{S(S(\mu_{CA}(x),\mu_{CB}(y),\ \mu_R(x,\ y))\,|\,x \in X, y \in Y\} = \\
&\qquad 1 - \mu_{\Phi^S(R)}(A,B) = \mu_{C\Phi^S(R)}(A,B).
\end{aligned}$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

2.1.17-ta'rif. R munosabat – «≤» tengsizlik, ya'ni R dagi sodda "kichik yoki teng" binar munosabat bo'lsin, shuningdek T=min va S=max bo'lsin. (2.1.12) va (2.1.13) munosabatlardagi $\Phi^T(R)$ va $\Phi^S(R)$ larni mos ravishda $\tilde{\leq}^{\min}$ va $\tilde{\leq}^{\max}$ kabi belgilaymiz. (2.1.12) va (2.1.13) munosabatdan "≤" munosabatning ikkita noravshan kengaytmasiga ega bo'lamiz, ular quyidagi munosabatlar yordamida aniqlanadi :

$$\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(A,B) = \sup\{\min(\mu_A(x),\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\,|\,x, y \in X\}, \qquad (2.1.15)$$

$$\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(A,B) = \inf\{\max(1-\mu_A(x),1-\mu_B(y),\ \mu_R(x,\ y))\,|\,x, y \in R\}. \qquad (2.1.16)$$

Ekvivalent ravishda $\mu_{\tilde{\leq}\min}(A,B)$ va $\mu_{\tilde{\leq}\max}(A,B)$ larning o'rniga mos ravishda $A\tilde{\leq}^{\min} B$ va $A\tilde{\leq}^{\max} B$ deb yozamiz. $A\tilde{\geq}^{\min} B$ deganda biz $B\tilde{\leq}^{\min} A$ni nazarda tutamiz.

Noravshan chiziqli dasturlash masalalarini o'rganish uchun quyidagi natija ahamiyatlidir.

2.1.1-tasdiq. R munosabat - «≤» tengsizlik bo'lib, T= min va S = max bo'lsin. $A,B\in F(R)$ - normal va kompakt noravshan to'plamlar va α $\in (0,1)$ bo'lsin. U holda :

(i) $\mu_{\tilde{\leq}\min}(A,B)\geq\alpha$ munosabat faqat va faqat $\inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$ bo'lganida bajariladi;

(ii) $\mu_{\tilde{\leq}\max}(A,B)\geq\alpha$ munosabat faqat va faqat, $\sup[A]_{1-\alpha} \leq \inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$ bo'lganida bajariladi.

Isbot. Oldin (i) ni isbotlaymiz. $\alpha\in(0,1)$ va $\mu_{\tilde{\leq}\min}(A,B)\geq\alpha$ bo'lsin. U holda (2.1.15) hisobiga quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sup\{\min(\mu_A(x)),\ \mu_B(y))|x\leq y\}\geq\alpha.$$

[A] $_\alpha$ va *[B]* $_\alpha$ bo'sh bo'lmganligi va kompaktligi hisobiga $\inf[A]_\alpha \leq \sup[B]_\alpha$ ga ega bo'lamiz.

Boshqa tomondan, $\alpha\in$ (0,1) va inf $[A]_\alpha$ ≤ $\sup[B]_\alpha$ bo'lsin. Kompaktlik xossalaridan $x' \leq y'$ shartni qanoatlantiruvchi $x' \in [A]_\alpha$ va $y'\in [B]_\alpha$ larning mavjudligi kelib chiqadi.

U holda $\mu_A(X') \geq \alpha$, $\mu_B(Y') \geq \alpha$ va $\min\{\mu_A(x'),\mu_B(y')\}\geq\alpha$, shuning uchun

$$\sup\{\min(\mu_A(x),\mu_B(y))|x\leq y\}\geq\alpha,$$

ya'ni

$$\mu_{\tilde{\leq}\min}(a,B)\geq\alpha.$$

Endi (ii) ni isbotlaymiz. $a \in$ (0,1) va $\mu_{\tilde{\leq}\max}(A,B)\geq\alpha$ bo'lsin. U holda (2.1.16) ga ko'ra

$$\inf\{\min(1-\mu_A(x),1-\mu_B(y),\mu_R(x,y))|x,y\in \mathrm{R}\}\geq\alpha$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu tengsizlik

$$\sup\{\min(\mu_A(x),\mu_B(y))|x>y\}\leq 1-\alpha \qquad (2.1.17)$$

tengsizlikka ekvivalentdir. Ixtiyoriy $x' \in (A)_{1-\alpha}$ va $y' \in (B)_{1-\alpha}$ larni olib $x' \geq y'$ deb faraz qilamiz. U holda $\min\{\mu_A(x''), \mu_B(y')\} > 1-\alpha$, bu esa (2.1.17) ga zid. Shunday qilib, $x' \leq y'$ munosabat har qanday $x'\in(A)_{1-\alpha}$

va y' $\in$ $(B)_{1-\alpha}$ larga nisbatan o'rinlidir, bu esa $\sup(A)_{1-\alpha} \leq \inf(B)_{1-\alpha}$ ni beradi.

Boshqa tomondan, $\alpha \in (0,1)$ va $\sup(A)_{1-\alpha} \leq \inf(B)_{1-\alpha}$ bo'lsin. $x' \geq y'$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x', y' \in$ M larni olamiz. U holda $x' \notin (A)_{1-\alpha}$, yoki $y' \in (B)_{1-\alpha}$, , aks holda $x' \leq y'$. Shu sababga ko'ra $\min\{\mu_A(x'), \mu_B(y')\} \leq 1-\alpha$ va natijada $\sup\{\min\{\mu_A(x'), \mu_B(y')\} \mid \{x \leq y\} \leq 1-\alpha$, bu esa $\mu_{\lesssim_{\min}}(A,B) \geq \alpha$ ga ekvivalentdir.

Endilikda T ni t-norma va S ni t-konorma deb faraz qilamiz.

2.1.18-ta'rif.

(i) Har qanday R $\in$ F(X $\times$ Y) hamda barcha A $\in$ F(X) va B $\in$ F(Y) to'plamlar uchun $\psi^{T,S}$: F(X$\times$Y)$\rightarrow$F(X$\times$Y)$\rightarrow$F(F(X)$\times$F(Y) noravshan akslantirishni quyidagi ifoda bilan aniqlaymiz:

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{T(\mu_A(x), S(\mu_{CB}(y), \mu_R(x,y))) \,\middle|\, y \in Y\right\} \middle| x \in X\right\}. \quad (2.1.18)$$

(ii) Har qanday $R \in F(X \times Y)$ o'lchovli munosabat, $A \in F(X)$, B$\in F(Y)$ noravshan to'plamlariga nisbatan $\psi_{T,S}: (X \times Y) \rightarrow F(F(X) \times F(Y))$ akslantirishni quyidagi ifoda bilan aniqlaymiz:

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{S(T(\mu_A(x), \mu_R(x,y), \mu_{CB}(y))) \,\middle|\, x \in X\right\} \middle| y \in Y\right\}. \quad (2.1.19)$$

(iii) Har qanday $R \in F(X \times Y)$ o'lchovli munosabatlar va barcha $A \in (X)$ hamda B$\in(Y)$ noravshan to'plamlarga nisbatan $\psi^{S,T}: F(X \times Y) \rightarrow F(F(X) \times (Y))$ akslantirishlarni quyidagi ifoda bilan aniqlaymiz:

$$\mu_{\psi^{T,S}(R)}(A, B) = \sup\left\{\inf\left\{T(S(\mu_{CA}(x), \mu_R(x,y), \mu_B(y))) \,\middle|\, y \in Y\right\} \middle| x \in X\right\}. \quad (2.1.20)$$

(iv) Har qanday $R \in F(X \times Y)$ o'lchovli munosabat va barcha $A \in F(X)$ hamda $B \in (Y)$ noravshan to'plamlarga nisbatan $F(X \times Y) \rightarrow F(F(X) \times (F(Y))$

akslantirishni quyidagi ifoda bilan aniqlaymiz:

$$\mu_{\psi_{S,T}(R)}(A, B) = \inf\{\sup(\mu_{CA}(x), \mu_B(y), \mu_R(x, y))) \,|\, y \in Y\} | x \in X\} \quad (2.1.21)$$

Kiritilgan to'rtta o'lchovli noravshan munosabatlar 2.1.11-ta'rifga ko'ra ma'lum bir o'lchovli munosabatlarning noravshan kengaytmalari hisoblanadi.

2.1.1. Noravshan chiziqli muqobillashtirish masalalari

Endilikda muqobillashtirish nazariyasiga murojaat qilib, quyidagi muqobillashtirish masalasini ko'rib chiqamiz [26-28,34,40, 87,101,135]:

$x \in X$ cheklanishlarda

$$f(x) \to max\ (min) \tag{2.1.22}$$

topilsin, bu yerda f- maqsad funskiyasi deb nomlanuvchi $\mathbb{R}^n$ fazodagi haqiqiy qiymatli funksiya, X - $\mathbb{R}^n$ fazoda $g_1, g_2, \dots, g_m$ haqiqiy qiymatli funksiyalar yordamida berilgan bo'sh bo'lmagan qism to'plam bo'lib, u

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1,2, ...,m_1,$$
$$g_i(x) \le b_i, \quad i = m_1+1, m_1+2,\dots,m,$$
$$x_j \ge 0, \qquad j=1, 2, \dots, n$$

tenglamalar va tengsizliklar yechimlarining to'plamidir.

X to'plamning elementlari (2.1.22) masalaning joiz yechimlari, f maqsad funksiyasi o'zining X dagi global maksimumiga erishadigan x^* joiz yechim esa muqobil yechim deyiladi.

Eng ko'p tarqalgan muqobillashtirish masalalari - chiziqli muqobillashtirish masalalari bo'lib, mazkur bobda quyidagi ko'rinishdagi chiziqli muqobillashtirish masalalari bilan izchil bog'langan noravshan chiziqli muqobillashtirish masalalari o'rganiladi [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

$M=\{1, 2,..., m\}$ va $N = \{1,2,..., n\}$ bo'lsin, bu yerda m va n – musbat butun sonlar. Faraz qilaylik, $c = (c_1, c_2,\dots,c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ga nisbatan $f(\cdot, c)$ va $g(\cdot, c)$ funksiyalar $\mathbb{R}^n$ fazoda quyidagi ifodalar bilan aniqlangan bo'lsin:

$$f(x, c_1, c_2, \dots ,c_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \tag{2.1.23}$$

$$g_i(x, a_{i1}, a_{i2}, \dots ,a_{in}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n, \ i \in M, \tag{2.1.24}$$

ya'ni $\mathbb{R}^n$ fazoda chiziqli bo'lsin. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ va $i \in M$ larga nisbatan klassik chiziqli dasturlash masalasini ko'rib chiqamiz:

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

ifodani

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le b_i, i \in M, \tag{2.1.25}$$
$$x_j \ge 0, j \in N$$

cheklanishlarda maksimallashtirilsin.

(2.1.25) masalaning joiz qiymatlari to'plamini X bilan belgilaymiz, bunda quyidagi farazlar va mulohazalarga tayanamiz:

1. f, g_i – mos ravishda (2.1.23) va (2.1.24) da aniqlangan chiziqli funksiyalar bo'lsin. Ushbu bobning hamma joyida c_j, a_{ij} va b_i, parametrlar $\mathbb{R}^n$ fazodagi noravshan kattaliklar, ya'ni yarim qat'iy kvazibotiq tegishlilik funksiyali normal va kompakt noravshan to'plamlardir (2.1.7-ta'rifga qarang). Bu faraz klassik chiziqli dasturlash masalasini noravshan chiziqli dasturlash masalalarining sinfiga kiritish imkonini beradi. Noravshan kattaliklar mos kattaliklar ustidagi "tilda" belgisi bilan belgilanadi. $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ va $\tilde{b}_i$ noravshan parametrlarning tegishlilik funksiyalari mos ravishda $\mu_{\tilde{c}_j}: \mathbb{R} \to [0,1]$, $\mu_{\tilde{a}_j}: \mathbb{R} \to [0,1]$ va $\mu_{\tilde{b}_j}: \mathbb{R} \to [0,1]$, $i \in M$, $j \in N$ ko'rinishida berilgan. Kelgusida ravshan parametrlar "tilda" belgisi bilan belgilanmaydi.

2. $\tilde{R}_i, i \in M$, - $\mathbb{R}^n$ fazodagi noravshan munosabatlar bo'lsin. Ular cheklanishlarning "chap va o'ng qismlarini solishtirish" uchun ishlatiladi. Avvaliga biz barcha $i \in M$ larga nisbatan $\tilde{R}_i = \tilde{R}$ holni, ya'ni cheklanishdagi barcha noravshan munosabatlar bir xil bo'lgan holni o'rganib chiqamiz.

3. "Muqobillashtirish", ya'ni maqsad funksiyasini "maksimallashtirish" yoki "minimallashtirish" maxsus tahlilni talab qiladi, chunki maqsad funksiyasining noravshan qiymatlari to'plami chiziqli tartiblanmagan. Maqsad funksiyasini "maksimallashtirish" uchun mos "muqobil yechim" tushunchasini aniqlashtirib olish kerak. Buni har xil ikkita usul bilan amalga oshirish mumkin. Birinchi yondashuvdan foydalanganda tashqaridan $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ noravshan maqsad va $\mathbb{R}$ fazodagi $\tilde{R}_0$ noravshan munosabat beriladi. Ikkinchi yondashuvda noravshan chiziqli dasturlash masalalarining α - qanoatlantiruvchi (yoki α - ustuvor bo'lmagan) yechimi topiladi.

(2.1.25) chiziqli dasturlash masalasi bilan bog'liq noravshan chizili dasturlash masalasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n \tag{2.1.26}$$

ifodani quyidagi cheklanishlar asosida "maksimallashtirilsin" ("minimallashtirilsin"):

$$\begin{gathered} (\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n) \tilde{R}_i \tilde{b}_i, \quad i \in M \\ x_j \geq 0, \quad j \in N. \end{gathered} \tag{2.1.27}$$

Bu yerda $\tilde{R}_i, i \in M$, - R dagi noravshan munosabatlar. Maqsad funksiyasining qiymati va (2.1.27) cheklanishdagi chap qismlarning qiymati tahmin tamoyili bo'yicha hosil qilib olinadi:

Berilgan $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n \in F_0(\mathbb{R})$ larga nisbatan $\tilde{f}(x, \tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n)$ funksiya $f(x, c_1, ..., c_n)$ funksiyaning noravshan kengaytmasi bo'lib, uning tegishlilik funksiyasi har bir $t \in \mathbb{R}$ ga nisbatan quyidagi ifoda bilan aniqlangan:

$$\mu_{\tilde{f}}(t) = \begin{cases} \sup\left\{ T(\mu_{\tilde{c}_1}(c_1), ..., \mu_{\tilde{c}_n}(c_n)) \middle| \begin{matrix} c_1, ..., c_n \in R, \\ c_1 x_1 + ... + c_n x_n = t \end{matrix} \right\}, \\ \qquad\qquad agar \ f^{-1}(x, t) \neq \varnothing \ bo'lsa, \\ 0, \qquad\qquad aks \ holda, \end{cases} \tag{2.1.28}$$

bu yerda $f^{-1}(x, t) = \{(c_1, ..., c_n)^T \in R | f(x, c_1, ..., c_n) = t\}$.

Xususan, $f(x, c_1, ..., c_n) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$ ga nisbatan $\tilde{f}(x, \tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n)$ noravshan to'plam $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ ko'rinishda aniqlanadi, ya'ni:

$$\tilde{f}(x, \tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n) = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n \tag{2.1.29}$$

Huddi shu yo'l bilan $\tilde{g}_i(x, \tilde{a}_{i1}, ..., \tilde{a}_{in})$ cheklanishlar funksiyasiga va har bir $t \in \mathbb{R}$ ga nisbatan tegishlilik funksiyasi quyidagi ifoda bilan aniqlanadi:

$$\mu_{\tilde{g}_i}(t) = \begin{cases} \sup\left\{ T(\mu_{\tilde{a}_{i1}}(a_1), ..., \mu_{\tilde{a}_{in}}(a_n)) \middle| \begin{matrix} a_1, ..., a_n \in R, \\ a_1 x_1 + ... + a_n x_n = t \end{matrix} \right\}, \\ \qquad\qquad agar \ g_i^{-1}(x, t) \neq \varnothing, \\ 0, \qquad\qquad aks \ holda, \end{cases} \tag{2.1.30}$$

bu yerda

$$\tilde{g}_i^{-1}(x, t) = \{(a_1, ..., a_n)^T \in R^n | a_1 x_1 + ... + a_n x_n = t\}.$$

$\tilde{g}_i(x, \tilde{a}_{i1}, ..., \tilde{a}_{in})$ noravshan to'plam $\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n$ kabi belgilanadi, bunda har bir $i \in M$ va ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}^n$ ga nisbatan

$$\tilde{g}_i(x, \tilde{a}_{i1}, ..., \tilde{a}_{in}) = \tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n .$$

Keltirilgan ta'rifdan quyidagi ta'rif keltirib chiqarilishi mumkin.

2.1.19-ta'rif. $\tilde{a}_j \in F_0(\mathbb{R})$, $x_j \geq 0$, $j \in N$ bo'lsin. U holda taxmin tamoyili orqali aniqlanuvchi $\tilde{a}_1 x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_n x_n$ ifoda ham noravshan kattalik bo'ladi.

(2.1.27) da $\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n \in F_0(\mathbb{R})$ qiymat $\tilde{b}_i \in F_0(\mathbb{R})$ kattalik bilan $\tilde{R}_i, i \in M$ noravshan munosabat yordamida solishtiriladi. Odatda, (2.1.27) munosabat, cheklanishlarning chap va o'ng qismlarini solishtiruvchi $\mathbb{R}$ fazodagi $\tilde{R}_i$ noravshan munosabatlarning, xususan, «≤» yoki «≥» tengsizliklarning binar munosabatlari kengaytmasidir. Agarda T - $R_i, i \in M$ ning $\tilde{R}_i$ noravshan kengaytmasi bo'lsa, u holda *i*– cheklanishning tegishlilik funksiyasi quyidagi tarzda yozib olinadi:

$$\mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n, \tilde{b}) = \sup\{T(\mu_{\tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in} x_n}(u), \mu_{\tilde{b}_i}(\upsilon)) | u R_i \upsilon\} .$$

Noravshan cheklanishlarni (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasiga birlashtirish uchun mos xossali ayrim operatorlar kerak bo'ladi. Bunday operatorlar - ularni agregatlovchi deb ataymiz - har bir elementlar majmuiga bitta haqiqiy sonni mos qo'yishi kerak va shu maqsadda t-normalar yoki t-konormalardan foydalanish mumkin. Lekin sodda t-norma yoki t-konormalarni umumlashtiruvchi boshqa foydali operatorlar ham mashhurdir. R dagi ixtiyoriy [a,b] oraliq o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish mumkin, shuning uchun operatorlarning [a,b] oraliqdagi ta'sir natijasi operatorlarning [0,1] birlik oraliqdagi ta'sir natijasiga keltirib olinishi mumkin va aksincha. Bundan tashqari, [0,1] dagi agregatlovchi operatorlar, kamida nazariy nuqtai nazardan, yetarli darajada umumiylikka ega bo'lishi kerak [9,10,26-28,101,135,146].

2.1.20-ta'rif. Agregatlashtirish operatori G deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $G_n : [0, 1]^n \to [0,1]$ akslantirishlar ketma-ketligi (agregatlovchi akslantirish) $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ga aytiladi:

(i) har bir $x \in [0,1]$ ga nisbatan $G_i(x) = x$;

(ii) har bir i= 1, 2, ..., n ga nisbatan va barcha $n = 2$, 3, ... lar uchun $)\ x_i \leq y_i$ shartda $G_n\{x_1, x_2, ..., x_n) \leq G_n(y_1, y_2, ..., y_n)$ bo'ladi;

(iii) barcha n = 2, 3, ... lar uchun $G_n(0, 0,..., 0) = 0$ va $G_n(1, 1,..., 1) = 1$ bo'ladi.

(i) shart G_1 – unar ayniyatli amal ekanligi, (ii) har bir agregatlovchi G_n akslantirish monoton ekanligi, xususan o'zining x_i argumentlari bo'yicha kamaymaydi, (iii) shart esa chegaraviy shartlarni belgilaydi. Agregatlash operatorining bir nechta namunasi mavjud:

(1) t-normalar va t-konormalar;

(2) sodda o'rtachalar: arifmetik o'rta, geometrik o'rta, garmonik o'rta va o'rta darajali;

(3) k-tartibli statistik agregatlovchi operatorlar;

(4) tartibli o'lchovli o'rtalashtirishning operatorlari;

(5) Sugeno va Shoke integrallari.

Bu paragrfning bayonini noravshan chiziqli dasturlash masalasi (2.1.27) ning joiz yechimini aniqlashdan boshlaymiz.

2.1.21-ta'rif. $g_i \in M$ - (2.1.24) da aniqlangan chiziqli funksiyalar bo'lsin. $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i \in M$, $j \in N$ - $\tilde{a}_{ij}$ va $\tilde{b}_i$ noravshan kattaliklarning tegishlilik funksiyalari. $\mu_{\tilde{R}}, i \in M$ - R fazodagi noravshan munosabatlar bo'lsin. G_A – agregatlashtirish operatori va T-t-norma.

$\mu_{\tilde{X}}$ tegishlilik funksiyasi hamma $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan aniqlangan $\tilde{X}$ noravshan to'plamdir.

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} G_A(\mu_{\tilde{R}_1}(\tilde{a}_{11}x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{1n}x_n, \tilde{b}_1), \ldots, \mu_{\tilde{R}_m}(\tilde{a}_{m1}x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{a}_{mn}x_n, \tilde{b}_m)), \\ \qquad\qquad agar\ barcha\ j \in N\ larga\ nisbatan\ x_j \geq 0\ bo'lsa, \\ 0, \qquad qolgan\ hollarda, \end{cases} \quad (2.1.31)$$

(2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi deyiladi.

$\alpha \in (0,1]$ ga nisbatan $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ vektor (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlashning α - joiz yechimi deyiladi.

$\mu_{\tilde{X}}(x) = Hgt(\tilde{X})$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x \in \mathbb{R}^n$ vektor max-joiz yechim deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, noravshan chiziqli dasturlash masalasining $\tilde{X}$ to'lami noravshan to'plam hisoblanadi. Boshqa tomondan, α-joiz yechim $\tilde{X}$ joiz yechimning α-kesimiga tegishli vektordir, huddi shu narsa $\alpha = Hgt(\tilde{X})$ dagi joiz yechimning max-joiz yechim uchun ham o'rinlidir. Berilgan joiz $\tilde{X}$ yechimlar va $\alpha \in (0, 1]$ uchun (bu ehtimollik, joizlik, qanoatlanganlik va h.k darajalar bo'lishi mumkin) $\mu_{\tilde{X}}(x) \geq \alpha$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^n$ vektor mos noravshan chiziqli dasturlash masalasining α-joiz yechimidir.

$i \in M$, $x \in \mathbb{R}^n$ uchun X_i belgisi bilan $\mu_{\tilde{X}}(x)$ tegishlilik funksiyali $\mathbb{R}^n$ fazodagi noravshan qism to'plamni aniqlaymiz:

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) = \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i). \qquad (2.1.32)$$

(2.1.32) noravshan to'plam r-noravshan cheklanish sifatida talqin etiladi. Hamma noravshan $\tilde{X}_i$ cheklanishlar (2.1.31) joiz yechimga G_A agregatlashtirish operatori bilan umumlashtiriladi, odatda cheklanishlarni umumlashtirish uchun G_A = min operatordan foydalaniladi; huddi shu yo'l bilan T = min - t-normani aniqlashda, «$\tilde{+}$» belgi arifmetik amallarni kengaytirish uchun foydalaniladi [9,10,26-28, 135,146].

Agarda a_{ij} va b_i – ravshan parametrlar (ya'ni haqiqiy sonlar) bo'lsa, u holda joiz yechim ham ravshan to'plam hisoblanadi. Bundan tashqari, hamma $i \in M$ larga nisbatan $\tilde{R}_i$ munoabatlar T-noravshan kengaytmalar hisoblanadi va ikkita noravshan parametrlar to'plamiga nisbatan $\tilde{a}'_{ij} \subseteq \tilde{a}''_{ij}$ va $\tilde{b}'_i \subseteq \tilde{b}''_i$ birikmalar bajariladi, bu esa joiz yechimlar to'plami, ya'ni $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$ uchun ham to'g'ridir, bu borada 2.1.25-ta'rifga qarang.

Endilikda (2.1.27) noravshan dasturlash masalasining joiz yechimlari $x \in [\tilde{X}_\alpha]$ ni hisoblashga imkon beruvchi maxsus formulalarni kiritamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlardan foydalaniladi. $\alpha \in (0, 1]$, $i \in M$, $j \in N$ berilgan bo'lsin va $\tilde{a} \in F_0(\mathbb{R})$ bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^L(\alpha) &= \inf\{t \in \mathrm{R} \,|\, t \in |\tilde{a}|_\alpha\} = \inf |\tilde{a}|_\alpha \\ \tilde{a}^R(\alpha) &= \sup\{t \in \mathrm{R} \,|\, t \in |\tilde{a}|_\alpha\} = \sup |\tilde{a}|_\alpha . \end{aligned} \qquad (2.1.33)$$

2.1.2-tasdiq. $\tilde{a}_{ij}$ *va* $\tilde{b}_i$ - barcha $i \in M$, $j \in N$, $\alpha \in (0, 1]$ larga nisbatan $x_j \geq 0$ noravshan kattaliklar bo'lsin. $\tilde{\leq}^{\min}$ *va* $\tilde{\leq}^{\max}$ «≤» binar munosabatning noravshan kengaytmalari bo'lsin. U holda $i \in M$ lar uchun quyidagi tasdiqlar o'rinlidir:

(i) $$\mu_{\tilde{\leq}^{\min}}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i) \geq \alpha \qquad (2.1.34)$$

faqat va faqat quyidagi shart bajarilganda:

$$\sum_{j \in N} \tilde{a}^L_{ij}(\alpha)x_j \leq \tilde{b}^R_i(\alpha);$$

(ii) $$\mu_{\tilde{\leq}^{\max}}(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}_{in}x_n, \tilde{b}_i) \geq \alpha \qquad (2.1.35)$$

faqat va faqat quyidagi shart bajarilganda:

$$\sum_{j\in N}\tilde{a}_{ij}^{R}(1-\alpha)x_j \le \tilde{b}_i^{L}(1-\alpha).$$

Isbot.

(i) Talab qilingan munosabat 2.1.19-ta'rifdan, (2.1.33) munosabatdan va 2.1.1-tasdiqning (i) bo'limidan kelib chiqadi.

(ii) (i) ni isbotlash uchun $\tilde{a}_{ij}$ va $\tilde{b}_i$ kattaliklarning faqatgina normallik va kompaktligidan foydalanildi, qavariqlik to'g'risidagi faraz esa zarur emasdi. Endilikda, 2.1.1-tasdiqning (i) bo'limini qo'llash uchun $\inf[\tilde{a}_{ij}]_\alpha = \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$, $\sup[\tilde{a}_{ij}]_\alpha = \sup(\tilde{a}_{ij})_\alpha$, $\inf[\tilde{b}_i]_\alpha = \inf(\tilde{b}_i)_\alpha$ va $\sup[\tilde{b}_i]_\alpha = \sup(\tilde{b}_i)_\alpha$ ekanligini ko'rsatish yetarlidir. (2.1.33) hisobiga $\tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha) = \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$ va h.k. Quyidgai tengliklarni ixtiyoriy $\tilde{a}\in F_0(\mathbb{R})$ noravshan kattalik, ya'ni yarim qat'iy kvazibotiq tegishlilik funksiyali normal kompakt qism to'plamlarga nisbatan isbotlash yetarlidir:

$$\inf[\tilde{a}]_\alpha = \inf(\tilde{a})_\alpha, \qquad (2.1.36)$$

$$\sup[\tilde{a}]_\alpha = \sup(\tilde{a})_\alpha. \qquad (2.1.37)$$

Quyida (2.1.36) uchun batafsil isbot keltiriladi, (2.1.37) ayniyat huddi shunday yo'l bilan isbotlanadi. $\alpha \in (0,1)$ bo'lsin, u holda:

1) α-kesim va α-qat'iy kesimning ta'rifiga ko'ra $(\tilde{a})_\alpha \subseteq [\tilde{a}]_\alpha$ ga ega bo'lamiz, u holda $\inf[\tilde{a}]_\alpha \le \inf(\tilde{a})_\alpha$;

2) Faraz qilaylik, $\inf[\tilde{a}]_\alpha < \inf(\tilde{a})_\alpha$ bo'lsin; u holda $\inf[\tilde{a}_{ij}]_\alpha < x < x_0 < \inf(\tilde{a}_{ij})_\alpha$ tengsizlik o'rinli bo'lgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi x, x_o vektorlar mavjud bo'ladi:

$$\mu_{\tilde{a}}(x_0) = \alpha = \min\{\mu_{\tilde{a}}(x),\ \mu_{\tilde{a}}(y)\}. \qquad (2.1.38)$$

Boshqa tomondan $\inf(\tilde{a})_\alpha < y$ va $\mu_{\tilde{a}}(x) > \alpha$ bo'lgan ma'lum bir y vektor mavjud bo'ladi, bu yerdan $x < x_o < y$ ekanligi kelib chiqadi, u holda shunday $\lambda \in (0;\ 1)$ topiladiki, bunda $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$ munosabat o'rinli bo'ladi va (2.1.38) munosabatga ko'ra:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \alpha = \min\{\mu_{\tilde{a}}(x),\ \mu_{\tilde{a}}(y)\}. \qquad (2.1.39)$$

Lekin, $\mu_{\tilde{a}}(x) < \mu_{\tilde{a}}(y)$ va $\mu_{\tilde{a}}(x) = \mu_{\tilde{a}}(\lambda x + (1-\lambda)y) > 0$ bo'lgani uchun, $\mu_{\tilde{a}}$ funksiyaning yarim qat'iy kvazibotiqligi xossasiga ko'ra :

$$\mu_{\tilde{a}}(x_0) > \min\{\mu_{\tilde{a}}(x),\ \mu_{\tilde{a}}(y)\}$$

bo'lishi kerak, bu esa (2.1.39) munosabatga zid. Natijada $\inf[\tilde{a}]_\alpha \ge \inf(\tilde{a})_\alpha$ bo'ladi.

Isbotning qolgan qismi 2.1.19-ta'rifdan va 2.1.1-tasdiqning (ii) bo'limidan kelib chiqadi.

Tegishlilik funksiyasining yarim qat'iy kvazibotiqligi 2.1.2 tasdiqning (ii) bo'limida ekvivalentlikni ta'minlovchi xossadir, u kelgusida noravshan chiziqli dasturlash masalalarida ikkilamchilik tamoyilini keltirib chiqarishda asosiy rolni o'ynaydi [9,10,,34,40, 135].

Keyingi misolda 2.1.2-tasdiq maxsus hosilaviy funksiyalarni silgitish va siqiqsh yo'li bilan hosil qilinadigan tegishlilik funksiyali (L,R)-noravshan kattaliklarning sinfiga nisbatan qo'llaniladi.

$l,\ r\ \in \mathbb{R}$ va $l \le r$ bo'lsin. γ, δ $[0, \infty)$ va o'smaydigan, yuqoridan yarim uzluksiz, yarim qat'iy kvazibotiq funksiyalar $[0, \infty)$ oraliqni [0,1] oraliqqa akslantirsin, ya'ni L, R: $[0, \infty) \to [0,1]$ bo'lsin. Bundan tashqari, faraz qilaylik $L(0)=R(0)=1$ va $\lim_{x\to+\infty} L(x) = \lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$ bo'lsin, ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$. ga nisbatan tegishlilik funksiyasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{l-x}{\gamma}\right), & agar \quad x \in (l-\gamma, l),\ \gamma > 0\ bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x \in [l,\ r]\ bo'lsa, \\ R\left(\dfrac{x-r}{\delta}\right), & agar \quad x \in (r, r+\delta), \delta > 0\ bo'lsa, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases} \tag{2.1.40}$$

$A = \{l,r,\gamma,\delta)_{LR}$ deb yozamiz va har bir noravshan A kattalikni (L,R)-noravshan oraliq deb ataymiz. Barcha $(L,\ R)$ – noravshan kattaliklar to'plami $F_{LR}(\mathbb{R})$ kabi belgilanadi. Ma'lumki, Core(A) = $[l,\ r]$ va $[A]_a$ — har bir $a \in (0,1]$ ga nisbatan kompakt oraliq.

Noravshan oraliqlar sinfi $(L,\ R)$ sodda berk $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ oraliqlarning sinfini kengaytirib, $a = b$ holni ham hisobga oladi. Huddi shunday, agar barcha $x \in \mathbb{R}$, $i \in$ M va $j \in N$ larga nisbatan $\tilde{a}_{ij}$ va $\tilde{b}_i$ tegishlilik funksiyalari quyidagi analitik ifoda bilan berilsa:

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{l_{ij}-x}{\gamma_{ij}}\right), & agar \quad x \in (l_{ij}-\gamma_{ij}, l_{ij}),\ \gamma_{ij} > 0, \\ 1, & agar \quad x \in [l_{ij},\ r_{ij}], \\ R\left(\dfrac{x-r_{ij}}{\delta_{ij}}\right), & agar \quad x \in (r_{ij}, r_{ij}+\delta_{ij}), \delta_{ij} > 0, \\ 0, & aks\ holda, \end{cases} \tag{2.1.41}$$

$$\mu_{b_i}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{l_i-x}{\gamma_i}\right), & agar \quad x\in(l_i-\gamma_i,l_i),\ \gamma_i>0,\\ 1, & agar \quad x\in[l_i,\ r_i],\\ R\left(\dfrac{x-r_i}{\delta_i}\right), & agar \quad x\in(r_i,r_i+\delta_i),\delta_i>0,\\ 0, & aks\,holda \end{cases} \tag{2.1.42}$$

u holda (2.1.33) kattalik quyidagi ko'rinishda hisoblanadi:

$$\tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha)=l_{ij}-\gamma_{ij}L^{(-1)}(\alpha), \qquad \tilde{a}_{ij}^{R}(\alpha)=r_{ij}+\gamma_{ij}R^{(-1)}(\alpha),$$

$$\tilde{b}_{i}^{L}(\alpha)=l_{i}-\gamma_{i}L^{(-1)}(\alpha), \qquad \tilde{b}_{i}^{R}(\alpha)=r_{i}+\gamma_{i}R^{(-1)}(\alpha).$$

Bu yerda $L^{(-1)}$ va $R^{(-1)}$ – L va R funksiyalarga nisbatan psevdoteskari funksiyalar bo'lib, $L^{(-1)}(\alpha)=\sup\{x\,|\,L(x)\geq\alpha\}$ и $R^{(-1)}(\alpha)=\sup\{x\,|\,R(x)\geq\alpha\}$ ko'rinishda aniqlanadi.

Agregatlashtirish operatori G_A = *min* ko'rinishda beriladi. 2.1.2-tasdiqga ko'ra $\tilde{R}_i=\tilde{\leq}^{\min},\ i\in M$ munosabatga nisbatan (2.1.27) joiz yechimlar to'plamining α-kesimi $[\tilde{X}]_\alpha$ quyidagi tengsizliklar tizimini yechich yo'li bilan olinishi mumkin:

$$\sum_{j\in N}(l_{ij}-\gamma_{ij}L^{(-1)}(\alpha))x_j\leq r_i+\delta_i R^{(-1)}(\alpha),\ i\in M\,. \tag{2.1.43}$$

Boshqa tomondan, (2.1.27) joiz yechimlar to'plamining α - kesimi $\tilde{R}_i=\tilde{\leq}^{\min},\ i\in M$ munosabatlarga nisbatan quyidagi tengsizliklar tizimini yechish yo'li bilan hosil qilinishi mumkin [87,101,135,146]:

$$\sum_{j\in N}(r_{ij}-\delta_{ij}R^{(-1)}(\alpha))x_j\leq l_i+\gamma_i L^{(-1)}(\alpha),\ i\in M\,. \tag{2.1.44}$$

Bundan tashqari, (2.1.43) va (2.1.44) munosabatlarning hisobiga $[\tilde{X}]_\alpha$ to'plam chekli sondagi yarim fazolarning kesishmasidir, shuning uchun bu qavariq ko'pyoqli to'plamdir.

2.1.2. "Muqobil" yechimni topish

Maqsad funksiyasini "maksimallashtirish" yoki "minimallashtirish" maxsus e'tiborni talab qiladi, chunki u qabul qiladigan noravshan qiymatlar chiziqli tartiblangan to'plamlarni tashkil etadi. Maqsad funksiyasini "maksimallashtirish" uchun biz "muqobil yechim" tushunchasini kiritamiz, bu esa 1) qanoatlantiruvchi yechim va

2) α-samarali yechimni o'z tarkibiga olgan ikkita har xil yondashuv yordamida qilinadi [10,26-28,34,40,101,135].

2.1.2.1. Qanoatlantiruvchi yechimni topish

Faraz qilaylik, tashqaridan ma'lum bir $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ noravshan maqsad berilgan bo'lsin. $\tilde{d}$ maqsad funksiyasining $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ noravshan qiymatlari $\tilde{R}_0$ noravshan munosabat bilan beriladi. Shu bilan birga noravshan maqsad funksiyasi yana bir noravshan cheklanish deb qaraladi:

$$(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n)\, \tilde{R}_0 \tilde{d} \ .$$

Qanoatlantiruvchi yechim tushunchasi joiz yechimning ta'rifini o'zgartirish yo'li bilan hosil qilinadi.

2.1.22-ta'rif. f va g_i – (2.1.23) va (2.1.24) ifodalar bilan aniqlangan chiziqli funksiyalar bo'lsin. $\mu_{\tilde{c}_j} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, va $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $i \in M$, $j \in N$, - mos ravishda $\tilde{c}'_j, \tilde{a}_{ij}\; va\; \tilde{b}_i$ noravshan kattaliklarning tegishlilik funksiyalaridir. Bundan tashqari, $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ – noravshan maqsad deb ataluvchi noravshan oraliq bo'lsin. $\tilde{R}_i,\ i \in \{0\} \cup M$,- M dagi noravshan munosabatlar va T-ma'lum bir t-norma, G va G_A – esa agregatlovchi operatorlar bo'lsin.

Barcha x $\in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan quyidagi ifoda orqali aniqlangan $\mu_{\tilde{X}}$ tegishlilik funksiyali $\tilde{X}^*$ noravshan to'plamdir:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x) = G_A\left(\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}), \mu_{\tilde{X}}(x)\right), \qquad (2.1.45)$$

bu yerda $\mu_{\tilde{X}}(x)$ - joiz yechimning tegishlilik funksiyasi bo'lib, u (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimi deyiladi.

a$\in$(0,1] ga nisbatan $x \in \left[\tilde{X}^*\right]_\alpha$ vector (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlashning α-qanoatlantiruvchi yechimi deyiladi:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = Hgt(\tilde{X}^*) \,. \qquad (2.1.46)$$

Xossaga ega bo'lgan $x^* \in \mathbb{R}^n$ vector max-qanoatlantiruvchi yechim deyiladi.

2.1.22-ta'rifga ko'ra noravshan chiziqli dasturlash masasining ixtiyoriy qanoatlantiruvchi yechimi noravshan to'plam hisoblanadi.

Boshqa tomondan, α-qanoatlantiruvchi $\left[\tilde{X}^*\right]_\alpha$ yechim α-kesimga tegishli bo'ladi. Huddi shu yo'l bilan, max-qanoatlantiruvchi $\alpha = Hgt(\tilde{X}^*)$ yechimga nisbatan α-qanoatlantiruvchi yechim bo'ladi.

Bu yerda biz arifmetik amallarni kengaytirish uchun t-norma T dan, alohida cheklanishlarni joiz yechimga bog'lash uchun agregatlashtirish operatori G dan foydalanamiz, G_A agregatlashtirish operatori joiz yechimning noravshan to'plamini barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan quyidagi tegishlilik funksiyasi bilan aniqlanuvchi:

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}) \qquad (2.1.47)$$

noravshan maqsad to'plamini $\tilde{X}_0$ bilan ulash uhun qo'llaniladi.

$\tilde{X}^*$ muqobil yechimning tegishlilik funksiyasi barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan quyidagi ifoda bilan aniqlanadi [40,70,73,74,86,87,101]:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x) = G_A\left(\mu_{\tilde{X}_0}(x), \mu_{\tilde{X}}(x)\right).$$

Agar (2.1.27) "katta kattalik afzalroq" ni maksimallashtirish masalasi bo'lsa, u holda berilgan noravshan maqsad $\tilde{d}$ ning tegishlilik funksiyasi $\mu_{\tilde{d}}$ o'suvchi yoki kamayuvchi deb faraz qilinadi. Agarda (2.1.27) "kichik kattalik afzalroq" ni minimallashtirish masalasi bo'lsa, u holda berilgan noravshan maqsad $\tilde{d}$ ning tegishlilik funksiyasi $\mu_{\tilde{d}}$ kamayuvchi yoki o'smaydigan deb faraz qilinadi. $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ va $\tilde{d}$ larni solishtiruvchi $\tilde{R}_0$ noravshan munosabat «≥» yoki «≤» solishtirish amallarining noravshan kengaytmalari hisoblanadi.

2.1.21 va 2.1.22-ta'riflar o'xshash shaklga egadir. Boshqa so'z bilan aytganda, joiz yechim tushunchasi muqobil yechim tushunchasiga o'xshashdir. Shuning uchun kelgusida biz oldingi paragrfda o'rganilgan joiz yechim xossalaridan foydalanishimiz mumkin.

Ravshan $\tilde{c}'_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$ parametrlar holidagi kabi (2.1.46) tomonidan berilgan barcha max-muqobil yechimlar to'plami klassik chiziqli dasturlash masalasining barha muqobil yechimlari to'plami bilan ustma-ust tushadi. Quyidagi natija o'rinlidir:

2.1.23-ta'rif $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$ - barcha i∈M, j∈N larga nisbatan ravshan sonlar bo'lsin. $\tilde{d} \in$F(ℝ) – qat'iy o'sib boruvchi $\mu_{\tilde{d}}$ tegishlilik funksiyali noravshan maqsad bo'lsin. i ∈ M ga nisbatan $\tilde{R}_i$ noravshan munosabat R dagi «≤» munosabatning noravshan kengaytmasi, $\tilde{R}_0$ esa-«≥»

munosabatning T-noravshan kengaytmasidir. T, G va G_A - X-normalar bo’lsin.

U holda masalaning barcha max-qanoatlantiruvchi yechimlar to’plami (2.1.25) chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimlarining X* to’plami bilan ustma-ust tushadi.

Isbot (2.1.27) masalaning joiz yechimi $\tilde{X}$ ravshandir, ya’ni barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan $\mu_{\tilde{X}}(x) = X_x(x)$, bu yerda X – (2.1.25) ravshan chiziqli dasturlash masalasining barcha joiz yechimlari (2.1.26) to’plamidir. Bundan tashqari, (2.1.47) ga ko’ra, ravshan $c \in \mathbb{R}^n$ ga nisbatan

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \mu_{\tilde{R}_0}(f(x,c)), \tilde{d}) = \mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n)$$

munosabatga ega bo’lamiz, bu yerda f (2.1.23) da aniqlangan. Bu ifodani (2.1.48) ga qo’yib, quyidagi munosabatga ega bo’lamiz:

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = G_A(\mu_{\tilde{d}}(f(x,c)),\ X_x(x)) = \begin{cases} \mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n), & agar\ \ x \in X\ bo'lsa, \\ 0, & aks\ holda \end{cases}$$

$\mu_{\tilde{d}}$ - funksiya qat’iy o’suvchi bo’lgani uchun, aytib o’tilganlardan:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = Hgt(\tilde{X}^*)$$

munosabat faqat va faqat

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \sup\{\mu_{\tilde{d}}(c_1x_1 + ... + c_nx_n), | x \in X\}$$

bo’lgandagina o’rinli bo’lishi kelib chiqadi, shuni isbotlash talab qilingan edi.

2.1.24-ta’rif. $\tilde{c}_j', \tilde{a}_{ij}'\, va\, \tilde{b}_i'$ hamda $\tilde{c}_j', \tilde{a}_{ij}''\, va\, \tilde{b}_i''$, i∈M, j∈N – (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining parametrlari hisoblangan noravshan kattaliklarning ikkita to’plami bo’lsin. T, G va G_A - X-normalar bo’lsin. $\tilde{R}_i,\ i \in \{0\} \cup M$, R dagi R_i o’lchovli munosabatlarning T-noravshan kengaytmalari, $\tilde{d} \in F_i(\mathbb{R})$ – esa noravshan maqsad bo’lsin.

Agarda $\tilde{c}_j', \tilde{a}_{ij}'\, va\, \tilde{b}_i'$ parametrli (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlashning $\tilde{X}^{*'}$ qanoatlantiruvchi yechimi, $\tilde{X}^{*''}$ esa barcha i∈M, j∈N larga nisbatan

$$\tilde{c}_j' \subseteq \tilde{c}_j''\ \tilde{a}_{ij}' \subseteq \tilde{a}_{ij}''\, \tilde{b}_i' \subseteq \tilde{b}_i''$$

munosabat bajariladigan $\tilde{c}_j'', \tilde{a}_{ij}''\, va\, \tilde{b}_i''$ parametrli noravshan chiziqli dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimi bo’lsa, u holda quyidagi kiritish o’rinli bo’ladi:

$$\tilde{X}^{*'} \subseteq \tilde{X}^{*''}.$$

Isbot. Oldin $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$ ekanligini ko'rsatamiz. $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in M$ bo'lsin. Bizga

$$\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n \subseteq \tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n$$

ekanligi to'g'risida ishonch hosil qilish kerak.

Har qanday $u \in \mathbb{R}$ ga nisbatan

$$\mu_{\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n}(u) =$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{a}'_{i1}x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{a}'_{in}x_n}(a_n)) \big| \tilde{a}_{i1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in}x_n = u\} \le$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{a}''_{i1}x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{a}''_{in}x_n}(a_n)) \big| \tilde{a}_{i1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in}x_n = u\} =$$

$$\mu_{\tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n}(u)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Endi, $\tilde{b}'_i \subseteq \tilde{b}''_i$ bo'lgani uchun R_i munosabatlarning T- noravshan $\tilde{R}_i$ kengaytmalarining monotonligidan foydalanib, quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}'_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}'_{in}x_n, \tilde{b}'_i) \le \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{a}''_{i1}x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{a}''_{in}x_n, \tilde{b}''_i).$$

Yana G ning (2.1.31) dagi monotonligini qo'llab, $\tilde{X}' \subseteq \tilde{X}''$ ga ega bo'lamiz. $\tilde{X}'_0 \subseteq \tilde{X}''_0$, ekanligini ko'rsatish qoldi xolos, bu yerda:

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \mu_{\overline{R}_0}(f(x, \tilde{c}')), \tilde{d}), \mu_{\tilde{X}''_0}(x) = \mu_{\overline{R}_0}(f(x, \tilde{c}'')), \tilde{d}),$$

f esa (2.1.23) da aniqlanganligini ko'rsatish qoldi xolos.

$\tilde{f}(x, \tilde{c}') \subseteq \tilde{f}(x, \tilde{c}'')$ ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $j \in N$ ga nisbatan barcha $c \in \mathbb{R}$ larda $\mu_{\tilde{c}'_j}(c) \le \mu_{\tilde{c}''_j}$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun, $u \in \mathbb{R}$ larga nisbatan [40, 74,86,87,101]

$$\mu_{\tilde{c}'_1x_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}'_nx_n}(u) =$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{c}'_1x_1}(c_1),....,\mu_{\tilde{c}'_nx_n}(c_n)) \big| c_1x_1 + ... + c_nx_n = u\} \le$$

$$\sup\{T(\mu_{\tilde{c}''_1x_1}(a_1),....,\mu_{\tilde{c}''_nx_n}(a_n)) \big| c_1x_1 + ... + c_nx_n = u\} =$$

$$\mu_{\tilde{c}''_ix_1 \tilde{+} ... \tilde{+} \tilde{c}''_nx_n}(u)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

$\tilde{R}_0$ ning monotonligidan foydalanib,

$$\mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}'_1x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}'_nx_n, \tilde{d}) \le \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}''_1x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}''_nx_n, \tilde{d})$$

tengsizlikka kelamiz.

Va nihoyat, G_A ning (2.1.48) dagi monotonligidan foydalanib, $\tilde{X}^{*''} \subseteq \tilde{X}^{*''}$ munosabatga ega bo'lamiz.

Endilikda 2.1.2-tasdiqni noravshan chiziqli dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimi holiga nisbatan kengaytiramiz. Shu maqsadda quyidagi belgilashlar kiritamiz. Berilgan $a \in (0,1]$, $j \in N$ larga nisbatan

$$\tilde{c}_j^L(\alpha) = \inf\{c \,|\, [\tilde{c}_j]_\alpha\},$$
$$\tilde{c}_j^R(\alpha) = \sup\{c \,|\, [\tilde{c}_j]_\alpha\},$$
$$\tilde{d}_j^R(\alpha) = \inf\{d \,|\, [\tilde{d}_j]_\alpha\}$$

bo'lsin.

2.1.3-tasdiq. $\tilde{c}_j'', \tilde{a}_{ij}'' \, va \, \tilde{b}_i''$ - noravshan kattaliklar bo'lsin, bunda $i \in M$, $j \in N$. $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ – quyidagi:

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{d}} \text{ yuqoridan yarim uzluksiz,} \\ &\mu_{\tilde{d}} \text{ qat'iy o'suvchi,} \\ &\lim_{t\to\infty} \mu_{\tilde{d}}(t) = 0 \end{aligned} \tag{2.1.49}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\mu_{\tilde{d}}$ tegishlilik funksiyali noravshan maqsad bo'lsin.

$i \in M$ ga nisbatan $\tilde{R}_i$ - «≤» binar munosabatning R dagi T – noravshan kengaytmasi, $\tilde{R}_0$- esa «≥» binar munosabatning R dagi T-noravshan kengaytmasidir. T = G = G_A = min bo'lsin. Va nihoyat, $\tilde{X}^*$- (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimi hamda $a \in (0,1)$ bo'lsin.

$x = \{x_1, ..., x_n)^T \geq 0$ vektor

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j \geq \tilde{d}^l(\alpha),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^L(\alpha) x_j \geq b_i^R(\alpha), \qquad i \in M.$$

bo'lgandagina $[\tilde{X}^*]_\alpha$ ga tegishli bo'ladi.

Isbotni keltirmaymiz, chunki u 2.1.22-ta'rifdagi (i) bo'limining isbotiga o'xshashdir, lekin bunda bitta o'zgarish bo'ladi: $\tilde{d}$ to'plamning kompaktligi o'rniga (2.1.49) faraz qilinadi.

Agarda $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij} \; va \; \tilde{b}_i$ noravshan parametrlarning tegishlilik funksiyasini oshkor shaklda, masalan (L, R) – noravshan kattaliklar ((2.1.42) qa qarang)) ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda max-qanoatlantiruvchi yechim klassik muqobillashtirish masalasining muqobil yechimi sifatida topilishi mumkin [34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

2.1.25-ta'rif.

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) \le \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d})$$

- noravshan maqsadning tegishlilik funksiyasi bo'lsin va

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) \le \mu_{\tilde{R}_0}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d})$$

-noravchan cheklanishlarning tegishlilik funksiyasi bo'lsin, bu yerda x = (x_1, ..., $x_п$) ∈ ℝ. T = G = G_A = min bo'lsin va (2.1.49) munosabat $\tilde{d}$ noravshan maqsad uchun ham o'rinli bo'lsin. U holda (t^*, x^*) ∈ $\mathbb{R}^{n+1}$ muqobillashtiruvchi masalaning muqobil yechimi bo'ladi.

x^* ∈ R^n vector (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining max-qanoatlantiruvchi yechimi bo'lgandagina

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{X}_i}(x) \ge t, \quad i \in \{0\} \cup M, \\ x_j \ge 0, \ j \in N \end{cases}$$

bajariladi.

ISBOT. *(t^*, x^*)*∈K^{n+1} vektor masalaning muqobil yechimi bo'lsin. (2.1.45) va (2.1.46) ga ko'ra quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\mu_{\tilde{X}^*}(x^*) = \sup\{\min\{\mu_{\tilde{X}_0}(x), \mu_{\tilde{X}_i}(x)\} \big| x \in R^n\} = Hgt(\tilde{X}^*)$$

Demak, *x** max-qanoatlantiruvchi yechim bo'ladi.

Teskari tasdiqning isboti 2.1.22-ta'rifdan kelib chiqadi.

2.1.2.2. α-samarali yechimni topish

Endilikda *a* va *b* – noravshan kattaliklar, $\tilde{R}$ - R dagi noravshan munosabat va α∈(0,1] bo'lsin. Biz quyidagicha yozib olamiz:

$$\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}, \ agar \ \ \mu_{\tilde{R}}(\tilde{a}, \tilde{b}) \ge \alpha. \qquad (2.1.50)$$

Shuningdek quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}, \ \ agar \ \ \tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b} \ \ u \ \ \mu_{\tilde{R}}(\tilde{a}, \tilde{b}) < \alpha. \qquad (2.1.51)$$

Shuni qayd etish joizki, $\underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}}$ belgi barcha noravshan kattaliklar to'plami F(R) dagi binar munosabatni anglatadi. Agar *a* va *b* – a va b haqiqiy sonlarga mos kelgan ravshan sonlar va *R* - «≤» munosabatning noravshan kengaytmasi bo'lsa, u holda $\tilde{a} \underset{\sim\alpha}{\overset{\tilde{R}}{\prec}} \tilde{b}$ munosabat *a* ≤ *b* bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Endilikda chiziqli dasturlash masalasini samarali yechish g'oyasini o'zgartirib, (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining maqsad funksiyasini "maksimallashtirish" (yoki "minimallashtirish") tushunchasiga tavsif beramiz.

2.1.26-ta'rif. $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$, i∈M, j∈N - R dagi noravshan kattaliklar bo'lsin. $\tilde{R}$,i ∈ 0, 1, …, m - R dagi noravshan munosabatlar va α ∈ (0, 1] bo'lsin. x = (x$_1$,... , x$_п$)^T – (2.1.27) masalaning α - joiz yechimi bo'lsin va uni $\tilde{c}^T x = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} .... \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ kabi belgilaymiz. x ∈ ℝ^n vector $\tilde{c}^T x \prec_{\alpha}^{\tilde{R}} \tilde{c}^T x'$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$ vector bo'lmasa, u masalaning (2.1.27) maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchu α-samarali yechimi bo'ladi. Huddi shu tarzda, x ∈ ℝ^n vector $\tilde{c}^T x \prec_{\alpha}^{\tilde{R}} \tilde{c}^T x'$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$ vector bo'lmasa, u masalaning (2.1.27) maqsad funksiyasini minimallashtiruvchi α-samarali yechimi bo'ladi.

Shuni qayd etish joizki, noravshan chiziqli dasturlash masalasining ixtiyoriy α-samarali yechimi huddi shu masalaning qo'shimcha xossali α-joiz yechimi bo'ladi. Agarda (2.1.27) masalaning samarali yechimi bo'lsa, u huddi shu masalaning qo'shimcha xossali α-joiz yechimi bo'ladi. Agarda (2.1.27) masalaning barcha koeffitsiyentlari ravshan bo'lsa, u holda noravshan α-samarali yechimi mos chiziqli dasturlash masalasining klassik muqobil yechimiga ekvivalentdir [10, 87,101,135,146].

Quyidagi «≤» binar munosabatning maxsus noravshan kengaytmalari holi uchun mo'ljallangan tasdiqda (2.1.27) masalaning yechimi α-samarali yechim bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari keltiriladi.

2.1.4-tasdiq. $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$, i∈M, j∈N - R dagi noravshan kattaliklar va α ∈ (0,1) bo'lsin.

(i) $\tilde{R}_i = \tilde{\leq}^{\min}$ bo'lsin, ya'ni $\tilde{R}_i$ - barcha i∈ 0,1, ... m larga nisbatan (2.1.15) va (2.1.16) ko'ra aniqlangan R dagi «≤» binar munosabatning noravshan kengaytmalari bo'lsin. $x^* = \{x_1^*, ..., x_n^*\},\ x_j^* \geq 0,\ j \in N$ - (2.1.27) masalaning α - joiz yechimi bo'lsin. x* ∈ ℝ vektor faqat va faqat, x* quyidagi chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo’lgandagina maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi (2.1.27) masalaning α-samarali yechimi bo’ladi:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_1^R(\alpha)x_1+...+\tilde{c}_n^R(\alpha)x_n \to \max,\\ &\tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1+...+\tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i\in M,\\ &x_j \ge 0,\ j\in N. \end{aligned} \qquad (2.1.52)$$

(ii) $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\min}$, $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\max}$ i $\in$ 1,2, ... ,т bo’lsin. $x^* = \{x_1^*,...,x_n^*\}$, $x_j^* \ge 0,\ j\in N$ - (2.1.27) masalaning α - joiz yechimi bo’lsin. x^* quyidagi cheklanishlarda:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1+...+\tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i\in M,\\ &x_j \ge 0,\ j\in N \end{aligned} \qquad (2.1.53)$$

$\tilde{c}_1^R(\alpha)x_1+...+\tilde{c}_n^R(\alpha)x_n$ ifodani maksimallashtiruvchi chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo’lgandagina $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektor maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi (2.1.27) masalaning α-samarali yechimi bo’ladi .

(iii) $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\max}$ $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\min}$ *i* $\in$ *1,2, ... ,m* bo’lsin. $x^* = \{x_1^*,...,x_n^*\}$, $x_j^* \ge 0,\ j\in N$ - (2.1.27) masalaning α - joiz yechimi bo’lsin. $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektor faqat va faqat x* quyidagi cheklanishlarda:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{i1}^L(\alpha)x_1+...+\tilde{a}_{in}^L(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i\in M,\\ &x_j \ge 0,\ j\in N \end{aligned} \qquad (2.1.54)$$

$\tilde{c}_1^L(\alpha)x_1+...+\tilde{c}_n^L(\alpha)x_n$ ifodani maksimallashtiruvchi chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo’lgandagina maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi (2.1.27) masalaning α - samarali yechimi bo’ladi.

(iv) $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\min}$, $\tilde{R}_0 = \tilde{\le}^{\max}$ i $\in$ 1,2, ... ,т bo’lsin. $x^* = \{x_1^*,...,x_n^*\}$, $x_j^* \ge 0,\ j\in N$ - (2.1.27) masalaning α - joiz yechimi bo’lsin. x^* quyidagi cheklanishlarda:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}_{i1}^R(\alpha)x_1+...+\tilde{a}_{in}^R(\alpha)x_n \le \tilde{b}_i^L(\alpha),\ i\in M,\\ &x_j \ge 0,\ j\in N \end{aligned} \qquad (2.1.55)$$

$\tilde{c}_1^L(\alpha)x_1+...+\tilde{c}_n^L(\alpha)x_n$ ifodani maksimallashtiruvchi chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo’lgandagina $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektor maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi (2.1.27) masalaning α - samarali yechimi bo’ladi.

Isbot. Avvalambor (i) ni isbotlaymiz. $x^* = \{x_1^*,...,x_n^*\}, \quad x_j^* \geq 0, \ j \in N$ - (2.1.27) masalaning maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi α - samarali yechimi bo'lsin. 2.1.2-tasdiqning (i) bo'limi, (2.1.50), (2.1.51) formulalar va 2.1.3-ta'rifni ni e'tiborga olib, x* (2.1.52) chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo'ladi degan xulosaga kelish mumkin. Boshqa tomondan, agar x* - (2.1.52) chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo'lsa, u holda 2.1.2 tasdiqga ko'ra x* (2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasining a-joiz yechimi bo'ladi. U holda (2.1.50) va (2.1.51) qanoatlanadi. Demak, x* vektor maqsad funksiyasini maksimallashtiruvchi α-samarali yechimi bo'ladi.

(ii)-(iv) tasdiqlarning isbotlari o'xshashdir. Bunda 2.1.2-tasdiqning (ii) bo'limidan mos ravishda foydalaniladi.

Keyingi paragrfda ikkilamchi masalalar- chiziqli muqobillashtirishning fundamental tushunchasi o'rganiladi. Biz noravshan chiziqli dasturlash masalasining "muqobillik" masalasiga nisbatan ikkita yuqorida keltirilgan yondashuvni ajratib ko'rsatamiz [10,26-28,34,40,70,73, 87,101,135,146].

2.1.3. Noravshan muqobillashtirish masalalarida ikkilamchilik

Ushbu paragrfda chiziqli dasturlashning ikkilamchilik qonuni noravshan chiziqli dasturlash masalasida umumlashtiriladi. Biz noravshan chiziqli dasturlash masalasidagi mashhur natijalarni kengaytiruvchi sust va kuchli ikkilamchilik to'g'risidagi tasdiqlarni keltirib chiqaramiz.

Quyidagi noravshan dasturlash masalasini ko'rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_1^L(\alpha)x_1 + ... + \tilde{c}_n^L(\alpha)x_n \to \max, \\ &(\tilde{a}_{i1}x_1 + ... + \tilde{a}_{in}x_n)\,\tilde{R}\,\tilde{b}_i, \ i \in M, \\ &x_j \geq 0, \ j \in N. \end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Bu yerda $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$ - $\mu_{\tilde{c}_j}$: ℝ →[0, 1], $\mu_{\tilde{a}_{ij}}$: ℝ →[0, 1] va $\mu_{\tilde{b}_i}$: ℝ →[0, 1] ($i \in M, \ j \in N$) tegishlilik funksiyali normal noravshan kattaliklardir.

Φ : *F*(ℝ × ℝ) → *F*(*F*(ℝ) × *F*(ℝ)) – ma'lum bir akslantirish, ψ : *F* *F*(ℝ × ℝ) → *F*(*F*(ℝ) × *F*(ℝ)) – esa Φ ga ikkilamchi akslantirish bo'lsin. *R* – R dagi ma'lum bir o'lchovli munosabat va $\tilde{R} = \Phi(R)$ hamda

$\widetilde{R}^D = \Psi(R)$ bo'lsin (2.1.12-ta'rifga qarang). U holda $\widetilde{R}$ *va* $\widetilde{R}^D$ - ikkilamchi noravshan munosabatlardir.

(2.1.56) noravshan chiziqli dasturlash masalasi noravshan chiziqli dasturlashning to'g'ri masalasi (P) deyiladi.

Noravshan chiziqli dasturlashning (D) ikkilamchi masalasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{b}_1 y_1 \widetilde{+} \ldots \widetilde{+} \widetilde{b}_m y_m \to \min, \\
&(\widetilde{c}_j \widetilde{R}^D (\widetilde{a}_{1j} y_1 \widetilde{+} \ldots \widetilde{+} a_{mj} y_m)), \quad j \in N, \\
&y_i \geq 0, \; i \in M.
\end{aligned}
\tag{2.1.57}
$$

(2.1.56) (P) va (2.1.57) (D) masalalar juftligi noravshan chiziqli dasturlash masalalarining to'g'ri-ikkilamchi juftligi deyiladi.

R - «≤» binar munosabat, *T = min* va *S = max* bo'lsin. «< » va « $\widetilde{\leq}^{\min}$ » - « $\widetilde{\leq}^{\max}$ » ga nisbatan mos ravishda (2.1.15) va (2.1.16) orqali aniqlangan noravshan kengaytmalardir. T norma S normaga nisbatan ikkilamchi t-norma bo'lgani uchun, 2.1.12 –ta'rifga ko'ra « $\widetilde{\leq}^{\max}$ » « $\widetilde{\leq}^{\min}$ » ga nisbatan ikkilamchi noravshan munoabat bo'ladi. Noravshan chiziqli dasturlash masalalarining to'g'ri-ikkilamchi juftligini quyidagi ko'rinishda olamiz:

(P)

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{c}_1 x_1 \widetilde{+} \ldots \widetilde{+} \widetilde{c}_n x_n \to \max, \\
&\widetilde{a}_{i1} x_1 + \ldots + \widetilde{a}_{in} x_n \;\widetilde{\leq}^{\min}\; \widetilde{b}_i, \; i \in M, \\
&x_j \geq 0, \; j \in N.
\end{aligned}
\tag{2.1.58}
$$

(D)

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{b}_1 y_1 \widetilde{+} \ldots \widetilde{+} \widetilde{b}_m y_m \to \min, \\
&\widetilde{c}_j \;\widetilde{\leq}^{\max}\; \widetilde{a}_{1j} y_1 \widetilde{+} \ldots \widetilde{+} a_{mj} y_m, \quad j \in N, \\
&y_i \geq 0, \; i \in M.
\end{aligned}
\tag{2.1.59}
$$

$\widetilde{X}$ orqali noravshan chiziqli dasturlashning (P) to'g'ri masalasining joiz yechimini belgilaymiz, ikkilamchi masalaning joiz yechimi (D) ni esa $\widetilde{Y}$ orqali belgilaymiz. Ma'lumki, $\widetilde{X}$ yechim $\mathbb{R}^n$ ning noravshan qism to'plami, $\widetilde{Y}$ yechim esa $\mathbb{R}^n$ ning noravshan qism to'plami bo'ladi.

Shuni qayd etish joizki, ravshan ma'lumotlar holidagi kabi, ya'ni $\widetilde{c}_j, \widetilde{a}_{ij}\, va\, \widetilde{b}_i$ parametrlar haqiqiy sonlar bo'lgan holda, 2.1.2-tasdiqga ko'ra, « $\widetilde{\leq}^{\min}$ » va « $\widetilde{\leq}^{\max}$ » munosabatlar «≤» tengsizlik bilan ustma-ust tushadi. Demak, (P) va (D) chiziqli dasturlash masalasining klassik ma'nodagi to'g'ri-ikkilamchi masalalar juftligi bo'ladi. Keyingi ta'riflar 2.1.2-tasdiqning o'zgartirilgan ko'rinishlaridir.

2.1.27-ta'rif. $\tilde{c}_j \; va \tilde{a}_{ij}$ - noravshan kattaliklar bo'lsin, barcha $i \in M$, $j \in N$ larga nisbatan, $y_t \geq 0$ bo'lsin va $\alpha \in (0,1)$ bo'lsin. > — 2.1.17-ta'rifda keltirilgan «>» binar munosabatning noravshan kengaytmasidir. U holda $j \in N$ uchun quyidagi ekvivalentlik o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{i\in M} \tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha) y_i \geq \tilde{c}_R^{\,j}(\alpha) \tag{2.1.60}$$

shart bajarilgandagina

$$\mu_{\tilde{\geq}^{\max}} = (\tilde{a}_{1j} y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} a_{mj} y_m, \tilde{c}_j) \geq 1-\alpha$$

Ifoda "maksimallashadi"

2.1.27-ta'rifning isboti 2.1.2-tasdiqdan oson kelib chiqadi.

Keyingi tasdiqda noravshan chiziqli dasturlash masalalari uchun ikkilamchilik tasdiqining sust shakli isbotlanadi [70,73,74,86,87,101,135,146].

2.1.5-tasdiq (Sust ikkilamchilik to'g'risidagi birinchi tasdiq). $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij} \; va \; \tilde{b}_i$ - barcha $i \in M$, $j \in N$ larga nisbatan noravshan kattaliklar bo'lsin. $A = T_M = min$, $S = S_M = max$ va $\alpha \in (0,1)$ bo'lsin. $\tilde{X}$ - (2.1.56) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimidir, $\tilde{Y}$ - (2.1.57) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi bo'lsin.

Agarda $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \geq 0$ vektor $[\tilde{X}]_\alpha$ ga tegishli bo'lsa, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T \geq 0$ vektor esa $[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$ ga tegishli bo'lsa, u holda:

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^{R}(\alpha) x_j \leq \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^{R}(\alpha) y_i \tag{2.1.61}$$

bo'ladi. Barcha

Isbot . Barcha $i \in M$, $j \in N$ larga nisbatan $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ va $y \in [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, $x_j \geq 0$, $y_i \geq 0$ bo'lsin. U holda 2.1.27-ta'rifga ko'ra ikkala tomonni x_j ga ko'paytirib, yig'indini amalga oshirib

$$\sum_{j\in N} \sum_{i\in M} \tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha) y_i x_j \geq \sum_{j\in N} \tilde{c}_j^{R}(\alpha) x_j \tag{2.1.62}$$

bahoga kelamiz.

Huddi shunday, (2.1.2)-tasdiqga ko'ra:

$$\sum_{j\in N}\sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha)x_j y_i \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^{R}(\alpha)y_i\,. \qquad (2.1.63)$$

(2.1.62) va (2.1.63) tengsizliklarni birgalikda qo'llab,

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j \le \sum_{j\in N}\sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^{L}(\alpha)x_j y_i \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^{R}(\alpha)y_i$$

munosabatga ega bo'lamiz, huddi shuni isbotlash talab qilingan edi.

2.1.6-tasdiq (Ikkilamchilikning sustligi to'g'risidagi ikkinchi tasdiq). $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ *u* $\tilde{b}_i$ - barcha $i \in M$, $j \in N$ larga nisbatan noravshan kattaliklar bo'lsin. $A = T_M = min$, $S = S_M = max$ va $\alpha \in (0,1)$ bo'lsin. $\tilde{X}$ - (2.1.56) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi $\tilde{Y}$ esa- (2.1.57) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi bo'lsin.

Agarda ma'lum bir $x = (x_1,\dots , x_n)^T \ge 0$ vektor $[\tilde{X}]_\alpha$ ga tegishli va $y= (y_1, \dots, y_m)^T \ge 0$ vektor $[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$ ga tegishli bo'lsa va quyidagi tengsizlik o'rinli bo'lsa:

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j \le \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^{R}(\alpha)y_i\,, \qquad (2.1.64)$$

u holda x - (P) to'g'ri noravshan chiziqli dasturlash masalasining α-samarali yechimi bo'ladi, y esa (D) noravshan chiziqli dasturlash masalasining ikkilamchi (1 - α)-samarali yechimi bo'ladi.

Isbot . $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ va $y \in [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, $x_j \ge 0$, $y_i \ge 0$ bo'lsin. U holda 2.1.27-ta'rifga ko'ra (2.1.61) tengsizlik bajariladi va (2.1.64) munosabat o'rinli bo'ladi. Faraz qilaylik, $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ (P) noravshan chiziqli dasturlash masalasining α-samarali yechimi bo'lsin. U holda $\tilde{c}^T x \prec_\alpha \tilde{c}^T x'$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x' \in [\tilde{X}]_\alpha$ vektor mavjud bo'ladi. Lekin 2.1.26 ta'rif va (2.1.50) hamda (2.1.51) munosabatlarga ko'ra quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x_j < \sum_{j\in N}\tilde{c}_j(\alpha)x'_j\,.$$

Bu esa (2.1.61) munosabatga ziddir. Demak, x (P) noravshan chiziqli dasturlash masalasining α-samarali yechimi bo'ladi. Ushbu tasdiqning ikkinchi qismi, ya'ni noravshan (D) chiziqli dasturlash ikkilamchi masalasining (1-α)-samarali yechimi y bo'ladi.

Eslatma

1. Ravshan ma’lumotlar holida 2.1.5 va 2.1.6-tasdiqlar sust ikkilamchilik to’g’risidagi chiziqli dasturlashning standart tasdiqlari bo’ladi.

2. Sust ikkilamchilik to’g’risidagi birinchi tasdiqning natijasi masalaning turi- “maksimallashtirish” yoki “minimallashtirishga” bog’liq bo’lmaydi.

3. Huddi shunday usul bilan noravshan chiziqli dasturlash masalalarining $\tilde{\leq}^{\min}$» va «$\tilde{\leq}^{\max}$» maqsad funksiyalarida to’g’ri-ikkilamchi munosabatlar o’rinli bo’ladi. U holda sust ikkilamchilikni quyidagi tarzda qayta bayon etish kerak.

4. α ≥ 0.5 bo’lsin. Ma’lumki $[\tilde{Y}]_\alpha \subseteq [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$. Sust ikkilamchilik tasdiqlarda farazlarni quyidagi tarzda almashtirish mumkin: $x \in [\tilde{X}]_\alpha$ va $y \in [\tilde{Y}]_\alpha$. Bu yerda tasdiqlarning natigalari o’zgarmaydi.

Endilikda kuchli ikkilamchilikka murojaat qilamiz. “Maksimallashtirish” yoki “minimallashtirishga” “qanoatlantiruvchi” yondashuvdan boshlaymiz.

Buning uchun tashqaridan berilgan $\tilde{d} \in F(\mathbb{R})$ va $\tilde{h} \in F(\mathbb{R})$ qo’shimcha maqsadlar mavjud deb faraz qilamiz. $\tilde{d}$ noravshan maqsad (P) noravshan chiziqli dasturlashning to’g’ri masalasidagi $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n$ maqsad funksiyasining noravshan qiymatlari bilan «$\tilde{\geq}^{\min}$» noravshan munosabat yordamida solishtiriladi. Boshqa tomondan, $\tilde{h}$ noravshan maqsad (D) noravshan chiziqli dasturlashga ikkilamchi maqsad funksiyasining $\tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{b}_m y_m$ qiymatlari bilan «$\tilde{\leq}^{\max}$»noravshan munosabat yordamida solishtiriladi. Bu borada noravshan maqsadlar bilan biz

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n \;\tilde{\geq}^{\min}\; \tilde{d},$$
$$\tilde{b}_1 y_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{b}_m y_m \;\tilde{\leq}^{\max}\; \tilde{h}$$

cheklanishlar sifatida ishlaymiz.

$\tilde{X}^*$ bilan 2.1.22-ta’rifda kiritilgan noravshan chiziqli dasturlashning to’g’ri yechimining qanoatlantiruvchi yechimi (P) ni kiritamiz, noravshan chiziqli dasturlashning ikkilamchi masalasining qanoatlantiruvchi yechimini esa $\tilde{Y}^*$ kabi belgilaymiz. Ma’lumki, $\tilde{X}^*$ - $\mathbb{R}^n$ dagi noravshan qism to’plam, $\tilde{Y}^*$ esa - $\mathbb{R}^m$ dagi noravshan qism to’plam va bundan tashqari, $\tilde{X}^* \subseteq \tilde{X}$ va $\tilde{Y}^* \subseteq \tilde{Y}$.

2.1.7-tasdiq (Kuchli ikkilamchilik to’g’risidagi birinchi tasdiq).

$\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\ va\ \tilde{b}_i$- barcha $i \in M$, $j \in N$ larga nisbatan noravshan kattaliklar bo'lsin. $\tilde{d}, \tilde{h} \in F(\mathbb{R})$ - $\mu_{\tilde{d}}\ va\ \mu_{\tilde{h}}$ tegishlilik funksiyali noravshan maqsadlar bo'lib, ular quyidagi xossalarga egadirlar [26-28,34,40,70,73,74,86,87]:

$\mu_{\tilde{d}}$ ham, $\mu_{\tilde{h}}$ ham yuqoridan yarim uzluksizdir,

$\mu_{\tilde{d}}$ qa'tiy o'suvchi, $\mu_{\tilde{h}}$ qat'iy kamayuvchi,

$$\lim_{t\to-\infty} \mu_{\tilde{d}}(t) = \lim_{t\to\infty} \mu_{\tilde{h}}(t) = 0. \qquad (2.1.65)$$

G = T= min S = max bo'lsin. «$\tilde{\le}^{\min}$» - «≤» binar munosabatning R dagi T-noravshan kengaytmasi va «$\tilde{\le}^{\max}$» - «≤» binar munosabatning R dagi S-noravshan kengaytmasi bo'lsin. $\tilde{X}^*$ - (2.1.58) noravshan chiziqli dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimlari to'plami, $\tilde{Y}^*$- (2.1.59) noravshan chiziqlu dasturlash masalasining qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami va $\alpha \in (0,1)$ bo'lsin.

Agarda $x = (x_1, ..., x_n)^T \ge 0$ vektor $[\tilde{X}]_\alpha$, ga tegishli bo'lsa, u holda $[\tilde{Y}]_{\alpha-1}$ga tegishli bo'lgan hamda

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j^* \le \sum_{i\in M} \tilde{b}_i^R(\alpha) y_i^* \qquad (2.1.66)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $y = (y_1,...,y_m)^T \ge 0$ vektor mavjud bo'ladi.

Isbot. 2.1.27-ta'rif va 2.1.2-tasdiqga ko'ra $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)^T \ge 0,\ x^* \in [\tilde{X}^*]_\alpha$ va quyidagi munosabatlar o'rinli :

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j^* \ge \tilde{d}^L(\alpha), \qquad (2.1.67)$$

$$\sum_{j\in N} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) x_j^* \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i \in M. \qquad (2.1.68)$$

Chiziqli dasturlashning quyidagi masalasini qaraylik:

(P1)

$$\sum_{j\in N} \tilde{c}_j^R(\alpha) x_j \to \max,$$

$$\sum_{j\in N} \tilde{a}_{ij}^L(\alpha) x_j^* \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i \in M,$$

$$x_j \ge 0,\ j \in N.$$

$\tilde{d}$ noravshan maqsad to'g'risidagi (2.1.65) farazga ko'ra, (2.1.67) va (2.1.68) tengsizliklar tizimi yordamida berilgan (P1) masalaning muqobil yechimi x^* bo'ladi. U holda kuchli ikkilamchilik to'g'risidagi standart tasdiqga ko'ra, chiziqli dastulashning sodda masalasi uchun quyidagi :

(D1)

$$\sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \to \min,$$

$$\tilde{c}_j^R(\alpha) \le \sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)y_i \quad j\in N,$$

$$y_i \ge 0,\ i\in M$$

ikkilamchi masalaning muqobil yechimi bo'lgan $y^*\in\mathbb{R}^m$ vector mavjud bo'ladi, shuning uchun aslida (2.1.66) o'rinli bo'ladi.

Endilikda, $y^*\in[\tilde{Y}^*{}_{1-\alpha}]$ ekanligini isbotlaymiz. Bu omil $\tilde{h}$ noravshan maqsadga nisbatan (2.1.65) farazdan kelib chiqadi.

Ravshan ma'lumotlar holidagi kabi (2.1.66) tenglik chiziqli dasturlash masalasiga nisbatan ikkilamchilik to'g'risidagi standart tasdiq bo'ladi.

Endilikda noravshan chiziqli dasturlash masalasidagi muqobillashtirishning α-samarali yondashuviga murojaat qilamiz [70,73,74,86,87,101,135,146]. $X^*{}_\alpha$ belgisi bilan 2.1.26-ta'rifda keltirilgan noravshan chiziqli dasturlash to'g'ri masalasi (P) ning α-samarali yechimini belilaymiz; huddi shunday $Y^*{}_\alpha$ belgisi bilan noravshan chiziqli dasturlashning ikkilamchi masalasining α-samarali yechimini belgilaymiz.

2.1.8-tasdiq (Kuchli ikkilamchilik to'g'risidagi ikkinchi tasdiq). $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}\, va\, \tilde{b}_i$ - barcha $i\in M,\ j\in N$ larga nisbatan noravshan kattaliklar bo'lsin. «$\tilde{\le}^{\min}$» va «$\tilde{\le}^{\max}$» - R va α ∈ (0,1) dagi «≤» binar munosabatning noravshan kengaytmalaridir. Agarda $[\tilde{X}]_\alpha\ va\,[\tilde{Y}]_{1-\alpha}$ bo'sh bo'lmasa, u holda noravshan chiziqli dasturlashning to'g'ri masalasi (P) ning α-samarali yechimi hisoblangan shunday x^* vektor, hamda (D) ikkilamchi masalasining (1 - α)-samarali yechimi hisoblangan shunday y* vektor mavjud bo'ladiki, bunda

$$\sum_{j\in N}\tilde{c}_j^R(\alpha)x_j^* = \sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i^* \tag{2.1.69}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Isbot. Klassik chiziqli dasturlashning quyidagi masalalar juftligini qaraylik :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in N}\tilde{c}_j^R(\alpha)x_j \to \max, \\
&\sum_{j\in N}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)x_j \le \tilde{b}_i^R(\alpha),\ i\in M, \\
&x_j \in 0,\ j\in N,
\end{aligned}
\qquad (2.1.70)
$$

va

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i\in M}\tilde{b}_i^R(\alpha)y_i \to \min, \\
&\tilde{c}_j^R(\alpha) \le \sum_{i\in M}\tilde{a}_{ij}^L(\alpha)y_i \ \ j\in N, \\
&y_i \ge 0,\ i\in M.
\end{aligned}
\qquad (2.1.71)
$$

(2.1.70) va (2.1.71) chiziqli dasturlash masalalari oddiy ma'noda bir-biriga ikkilamchidir. U holda farazlarga ko'ra (2.1.70) va (2.1.71) masalalar joiz hisoblanib, ikkilamchilikning standanrt tasdiqiga ko'ra, (2.1.66) o'rinli bo'lgan (2.1.70) masalaning joiz yechimi hisoblangan x^*, (2.1.71) masalaning joiz yechimi hisoblangan y^* vektor mavjud bo'ladi. 2.1.2-tasdiqga ko'ra $x^* \in [\tilde{X}]_\alpha$ va $y^* \in [\tilde{Y}]_{1-\alpha}$, 2.1.6-tasdiqga ko'ra esa x^* noravshan chiziqli dasturlashning (P) to'g'ri masalasing α-samarali yechimi, y^* vektor noravshan chiziqli masalaga ikkilamchi masala (D) ning (1-α)-samarali yechimi bo'ladi.

Xususan, ravshan ma'lumotlar holida, 2.1.8-tasdiq chiziqli dasturlash standart masalasining kuchli ikkilamchiligi to'g'risidagi tasdiq bo'ladi. Yuqorida isbotlangan tasdiqlarni umumiy t-norma va t-konormalar holi uchun o'zgartirish masalasi paydo bo'ladi [9,10, ,101,135,146].

2.1.4. Kengaytirilgan qo'shuv

Shu paytgacha 2.1.19-ta'rifda, (2.1.29), (2.1.31) va boshqa bir qator formulalarda noravshan qiymatlar T_M = min t-normasi yordamida qo'shildi. Mazkur paragrfda umumiyroq T t-normani qo'llovchi noravshan kattaliklarni qo'shish o'rganiladi. Barcha $x \in \mathbb{R}$ larga nisbatan

$$\tilde{f} = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n \qquad (2.1.72)$$

va

$$\tilde{g}_i = \tilde{a}_{i1} x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{a}_{in} x_n \qquad (2.1.73)$$

belgilashlar kiritamiz, bu yerda har qanday $i \in M$, $j \in N$ ga nisbatan $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij} \in F(\mathbb{R})$ bo'ladi. (2.1.72) va (2.1.73) dagi kengaytirilgan yig'indi $\tilde{+}_T$ mos ravishda (2.1.28) va (2.1.30) ga ko'ra, ya'ni kengaytirish tamoyili asosida aniqlanadi. (2.1.72) va (2.1.73) munosabatlardagi tegishlilik funksiyalari quyidagi tarzda ifodalanishi mumkin:

$$\mu_{\tilde{f}}(t) = \sup\{T(\mu_{\tilde{c}_1}(c_1), ..., \mu_{\tilde{c}_n}(c_n)) \mid t = c_1x_1 + ... + c_nx_n\}, \qquad (2.1.74)$$

$$\mu_{\tilde{g}_i}(t) = \sup\{T(\mu_{\tilde{a}_{i1}}(a_{i1}), ..., \mu_{\tilde{a}_{in}}(a_{in})) \mid t = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n\}. \qquad (2.1.75)$$

(2.1.72) va (2.1.73) yoki (2.1.74) va (2.1.75) formulalarga nisbatan oshkor ko'rinishlarni yozib olish juda qiyin bo'ladi, lekin ayrim hollarda ular uchun analitik ifodalarni chiqarish mumkin [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,101,135].

Qisqalik uchun faqatgina (2.1.72) ni ko'rib chiqamiz, (2.1.73) ga nisbatan formula huddi shu tarzda hosil qilinishi mumkin.Quyida biz shunday funksiyalar tufayli kelib chiqqan noravshan chiziqli dasturlash masalalari koeffitsiyentlarining keng sinfiga nisbatan maxsus formulalarni keltirib chiqaramiz.

Φ, ψ : $(0, +\infty) \to [0,1]$ – o'smaydigan, yarim qat'iy kvazibotiq va yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Berilgan γ, $\delta \in (0, +\infty)$ lada $x \in (0, +\infty)$ ga nisbatan Φ_γ, ψ_δ : $(0, +\infty) \to [0,1]$ funksiyalarni quyidagi ifodalar orqali aniqlaymiz:

$$\Phi_\gamma(x) = \Phi\left(\frac{x}{\gamma}\right), \qquad \psi_\delta(x) = \psi\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

$l_j, r_j \in \mathbb{R}$ - $l_j \le r_j$ munosabatni qanoatlantirsin, γ, $\delta \in (0, +\infty)$ bo'lsin va

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_{\gamma j}, \Phi_{\delta i}), \qquad j \in N$$

quyidagi

$$\mu_{\tilde{c}_j}(x) = \begin{cases} \Phi_{\gamma j}(l_j - x), & agar \;\; x \in (-\infty, l_j), \\ 1, & agar \;\; x \in [l_j, r_j], \\ \psi_{\delta_i}(x - r_j), & agar \;\; x \in (r_j, +\infty). \end{cases}$$

ifodalar bilan berilgan tegishlilik funksiyali noravshan oraliqlarni ifodalasin. Quyidagi ta'rif $\tilde{c}_1x_1 \tilde{+}_T ... \tilde{+}_T \tilde{c}_nx_n$ ifoda T t-normaning ma'lum bir xususiy holiga nisbatan huddi shu ko'rinishdagidagi berk noravshan kattalik bo'lishini ko'rsatadi. Isbot bevosita tekshirishdan hosil bo'ladi, shuning uchun keltirilmaydi.

2.1.28-ta'rif.

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_\gamma, \Phi_\delta), \qquad j \in N \qquad (2.1.76)$$

orqali beriluvchi tegishlilik funksiyali noravshan kattaliklar bo'lsin. $x = (x_1,\dots ,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ va $x_j \geq 0$ uchun barcha $j \in N$ larga nisbatan indekslar to'plamini quyidagi ko'rinishda aniqlaymiz:

$$I_x = \{ j \mid x_j > 0,\ j \in N \}.$$

U holda

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_M} \dots \tilde{+}_{T_M} \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_M}, \psi_{r_M}), \qquad (2.1.77)$$

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} \dots \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_D}, \psi_{r_D}), \qquad (2.1.78)$$

bo'ladi, bu yerda T_M - minimal t-norma, T_D – kuchli ko'paytma va

$$l = \sum_{j \in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in I_x} r_j x_j,$$

$$l_M = \sum_{j \in I_x} \frac{\gamma_j}{x_j}, \qquad r_M = \sum_{j \in I_x} \frac{\delta_j}{x_j},$$

$$l_D = \max\left\{ \frac{\gamma_j}{x_j} \mid j \in I_x \right\}, \qquad r_D = \max\left\{ \frac{\delta_j}{x_j} \mid j \in I_x \right\}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Agarda barcha $\tilde{c}_j$ lar (L, R) – noravshan oraliqlar bo'lsa, u holda huddi shunga o'xshash va aniqroq natijani olish mumkin. $l_j, r_j \in \mathbb{R}$ lar l_i $r_i \in \mathbb{R}$ munosabatni qanoatlantirsin va $[0, +\infty)$, L hamda R - $(0,1]$ ni $[0, +\infty)$ ga akslantiruvchi o'smaydigan, yarim qat'iy kvazibotiq, yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Bundan tashqari $L(1) = R(1) = 0$ bo'lib, $L(0) = \lim_{x \to 0} L(x)$ va $R(0) = \lim_{x \to 0} R(x)$ ni aniqlaymiz.

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_\gamma, \Phi_\delta), \qquad j \in N$$

(L, R) – har qanday $x \in \mathbb{R}$ va $j \in N$ ga nisbatan

$$\mu_{\tilde{c}_j}(x) = \begin{cases} L^{(-1)}\left(\dfrac{l_j - x}{\gamma_j} \right), & agar\ \ x \in (l_j - \gamma_j, l_j),\ \ \gamma_j > 0, \\ 1, & agar\ \ x \in [l_j - r_j], \\ R^{(-1)}\left(\dfrac{x - r_j}{\delta_j} \right), & agar\ \ x \in (r_j, r_j + \delta_j),\ \ \delta_j > 0, \\ 0, & aks\ holda \end{cases}$$

ifoda bilan aniqlangan tegishlilik funksiyalari bilan berilgan noravshan oraliqdir, bu yerda $L^{(-1)}$, $R^{(-1)}$ – L va R ga psevdotasodifiy funksiyalardir. Quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

2.1.29-ta'rif.

$$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \gamma_j, \delta_j)_{LR}, \qquad j \in N \ (L, R) \qquad (2.1.79)$$

bilan berilgan tegishlilik funksiyali noravshan oraliq bo'lib, barcha $j \in N$ larga nisbatan $x = (x_1,...,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ bo'lsa, u holda:

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_M} ... \tilde{+}_{T_M} \tilde{c}_n x_n = (l, r, A_M, B_M)_{LR}, \qquad (2.1.80)$$

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} ... \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n = (l, r, A_D, B_D)_{LR} \qquad (2.1.81)$$

bo'ladi, bu yerda T_M – minimal t-norma, T_D – kuchli ko'paytma va

$$l = \sum_{j \in N} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in N} r_j x_j,$$

$$A_M = \sum_{j \in N} \gamma_j x_j, \qquad B_M = \sum_{j \in N} \delta_j x_j,$$

$$A_D = \max\{\gamma_j \mid j \in N\}, \qquad B_D = \max\{\delta_j \mid j \in N\}.$$

2.1.28 va 2.1.29-ta'rifdagi (2.1.78) va (2.1.81) natijalar mos ravishda quyidagi tarzda kengaytirilishi mumkin.

2.1.30-ta'rif. *T* - additiv *f* generatorli arximed t-norma bo'lsin. $\Phi : (0, +\infty) \to [0,1]$ akslantirish har qanday $x \in (0, +\infty)$ ga nisbatan quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\Phi(x) = f^{(-1)}(x).$$

$\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \Phi_{\gamma_j}, \Phi_{\delta_j})$, $\qquad j \in N$, - (2.1.76) orqali beriluvchi tegishlilik funksiyali noravshan oraliqlar bo'lib, barcha $j \in N$ larga nisbatan $I_x = \{ j \mid x_j > 0, \ j \in N \}$ bo'lsin va $x = (x_1,...,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$.

U holda:

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T ... \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_D}, \Phi_{r_D}),$$

bu yerda:

$$l = \sum_{j \in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in I_x} r_j x_j, \qquad l_D = \max\left\{\frac{\gamma_j}{x_j} \mid j \in I_x\right\}, \qquad r_D = \max\left\{\frac{\delta_j}{x_j} \mid j \in I_x\right\}.$$

2.1.30-ta'rifning farazlarini qanoatlantiruvchi uzluksiz arximedli t-norma T va berk $\tilde{c}_j$ noravshan oraliqqa nisbatan quyidagi tenglikni keltirib chiqarish oson

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = \tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_{T_D} \ldots \tilde{+}_{T_D} \tilde{c}_n x_n .$$

Bu degani biz $T' \leq T$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy T' t-normaga tayangan holda huddi shu noravshan funksiyani hosil qildik.

Keyingi faraz uzluksiz arximed t-normalarga asoslangan berk oraliqlarni qo'shish to'g'risidagi natijalarni umumlashtiradi.

2.1.31-ta'rif. T – additiv generatorli uzluksiz arximedli X-norma. $K : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – uzluksiz qavariq funksiya va $K(0) = 0$. $\alpha \in (0, +\infty)$ va barcha $x \in [0,+\infty)$ laga nisbatan

$$\Phi_\alpha(x) = f^{(-1)}(\alpha K(\frac{x}{\alpha}))$$

bo'lsin. $\tilde{c}_j = (l_j, r_j, \gamma_j, \delta_j, \Phi_{\gamma j}, \Phi_{\delta j}),\quad j \in N$, - (2.1.76) orqali beriladigan tegishlilik funksiyali noravshan oraliqlar va barcha $j \in N$ larga nisbatan $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ bo'lsin. U holda:

$$\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+}_T \ldots \tilde{+}_T \tilde{c}_n x_n = (l, r, \Phi_{l_K}, \Phi_{r_K}),$$

bu yerda:

$$l = \sum_{j \in I_x} l_j x_j, \qquad r = \sum_{j \in I_x} r_j x_j,$$

$$l_K = \sum_{j \in I_x} \frac{\gamma_j}{x_j}, \qquad r_K = \sum_{j \in I_x} \frac{\delta_j}{x_j}. \tag{2.1.82}$$

2.1.31-ta'rifdan natijani oson keltirib chiqarish mumkin.

Multiplikativ t-norma T_p ga asoslangan noravshan gauss sonlarining yig'indisi ham gauss soni bo'ladi.

Haqiqatdan ham, multiplikativ t-norma T_p ning f additiv generatori $f(x) = \log(x)$ kabi beriladi va $K(x) = x^2$ bo'lsin. U holda:

$$\Phi_\alpha(x) = f^{(-1)}\left(\alpha K\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = e^{-\frac{x^2}{\alpha}} .$$

Bu formula 2.1.31-ta'rifni qo'llash natijasida hosil bo'ladi.

Markazlashgan noravshan sonlarga asoslangan huddi shunday yondashuv mazkur bobning kelgusi qismlarida ko'rib chiqilgan.

2.1.5. Noravshan chiziqli dasturlashning maxsus modellari

Mazkur paragrfda adabiyotdan ma'lum bo'lgan noravshan chiziqli dasturlashning uchta turi o'rganiladi. Dasturlashning noravshan masalasi deb ataluvchi noravshan chiziqli dasturlashning eng eski versiyasidan boshlaymiz. Keyinchalik bu masala egiluvchan chiziqli dasturlash masalasi deb ataldi.

2.1.5.1. Egiluvchan chiziqli dasturlash

Egiluvchan chiziqli dasturlash – (2.1.25) chiziqli dasturlashning standart masalalari va maqsad funksiyasida ma'lum bir egiluvchanlikka yo'l qo'yuvchi yondashuvdir. Quyidagi masalani qaraylik:

$$\begin{aligned} &c_1x_1+...+c_nx_n \to \max, \\ &a_{i1}x_n+....+a_{in}x_n \le b_i,\ \ i\in M, \\ &x_j \ge 0,\ \ j\in N. \end{aligned} \qquad (2.1.83)$$

c_j, a_{ij} *va* b_i parametrlarning qiymatida ma'lum bir noaniqlik bor. Maqsad va cheklanishlardan joiz chetlashishlar (2.1.83) modelga kiritilgan hamda subyektiv ravishda tanlangan p_i, $i \in \{0\} \cup M$ nomanfiy qiymatlar bilan xarakterlanadi.

Shunigdek, maqsad funksiyasining qiymati berilgan d_0 qiymatdan katta bo'lgan shartda qaror qabul qiluvchi shaxsni butunlay qanoatlantiruvchi $d_0 \in \mathbb{R}$ joiz boshqaruv subyektiv ravishda beriladi. Boshqa tomondan, agarda maqsad funksiyasi ($d_0 - P_0$) dan kichik bo'lib qolsa, u holda qaror qabul qiluvchi shaxs bunday javobga qoniqmaydi. (d_0 – P_0, d_0) oraliq doirasida qaror qabul qiluvchi shaxsning qanoatlanganlik darajasi 0 dan 1 ga ortadi. Bunday farazlarda $\tilde{d}$ noravshan maqsadning $\mu_{\tilde{d}}$ tegishlilik funksiyasi quyidagi tarzda aniqlanadi:

$$\mu_{\tilde{d}}(t)=\begin{cases} 1, & agar\ \ t\ge d_0, \\ 1+\dfrac{t-d_0}{p_0}, & agar\ d_0-p_0\le t\le d_0, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases} \qquad (2.1.84)$$

Endilikda, (2.1.83) dagi i-cheklanish, $i\in M$ funksiyasi uchun qaror qabul qiluvchi shaxs butunlay vaziyat bilan qanoatlangan, chap qism shu qiymatdan kichik yoki teng bo'lgan $b_i \in \mathbb{R}$ o'ng qism ma'lum bo'ladi. Boshqa tomondan, agarda maqsad funksiyasi ($b_i + p_i$) dan katta bo'lsa, qaror qabul qiluvchi shaxs umuman qanoatlanmagan. *(b_i, b_i+p_i)* oraliq doirasida qanoatlanganlik darajasi 1 dan 0 ga qarab kamayadi. Bunday farazlarda noravshan o'ng qism b_i ning $\mu_{\tilde{b}_i}$ tegishlilik funksiyasi quyidagi tarzda aniqlanadi:

$$\mu_{\tilde{b}_i}(t) = \begin{cases} 1, & agar \quad t \le b_i, \\ 1 + \dfrac{t - b_i}{p_i}, & agar \;\; b_i \le t \le b_i, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases} \tag{2.1.85}$$

Egiluvchan chiziqli dasturlashda maqsad funksiyasi va cheklanishlar o'tasidagi bog'lanish simmetrikdir, ya'ni ular o'rtasida farq yo'q. "Maksimallashtirish" deganda (2.1.84) va (2.1.85) noravshan to'plamlar kesishmasining tegishlilik funksiyasi maksimallashuvchi $x \in \mathbb{R}$ vektorni izlash tushuniladi. Bu masala muqobillashtirishning quyidagi masalasiga ekvivalentdir:

λ ni quyidagi shartlarda maksimallashtiring.

$$\begin{gathered} \mu_{\tilde{d}}\left(\sum_{j\in N} c_j x_j\right) \ge \lambda, \\ \mu_{\tilde{b}_i}\left(\sum_{j\in N} a_{ij} x_j\right) \ge \lambda, \; i \in M, \\ 0 \le \lambda \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j \in N. \end{gathered} \tag{2.1.86}$$

(2.1.86) masalani chiziqli dasturlashning ekvivalent masalasiga keltirish mumkin [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

λ ni quyidagi cheklanishlarda maksimallashtiring:

$$\begin{gathered} \sum_{j\in N} c_j x_j \ge d_0 + \lambda p_0, \\ \sum_{j\in N} a_{ij} x_j \le b_i + (1-\lambda) p_i, \; i \in M, \\ 0 \le \lambda \le 1, \\ x_j \ge 0, j \in N. \end{gathered} \tag{2.1.87}$$

Endilikda chiziqli noravshan dasturlashning o'ziga xos masalasini qaraylik:

$$
\begin{aligned}
& c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max, \\
& a_{i1}x_n + ... + a_{in}x_n \tilde{\leq}^T \tilde{b}_i, \quad i \in M, \\
& x_j \geq 0, \; j \in N,
\end{aligned}
\tag{2.1.88}
$$

bu yerda c_j, a_{ij} *va* b_i - sodda (ravshan) sonlar, $\tilde{d}$ va $\tilde{b}_i$ esa- (2.1.84) va (2.1.85) ga ko'ra aniqlangan noravshan kattaliklardir. Bundan tashqari, «$\tilde{\leq}^T$» - *T-min* normali «≤» tengsizlikning ma'lum bir T-noravshan kengaytmasidir. $x \in \mathbb{R}^n$ vector (2.1.88) noravshan chiziqli dasturlash masalasining max-qanoatlantiruvchi yechimi bo'lgandagina egiluvchan chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo'ladi. Bu natija 2.1.25-farazdan kelib chiqadi.

2.1.5.2. Oraliqli chiziqli dasturlash

Mazkur paragrfda biz berilgan bobdagi natijalarni noravshan chiziqli dasturlashning maxsus holi - oldingi boblarda ko'rilgan oraliqli chiziqli dastulash masalasiga nisbatan qo'llaymiz. Oraliqli chiziqli dasturlash deganda biz noravshan chiziqli dasturlashning quyidagi masalasini tushunamiz:

$$
\begin{aligned}
& \tilde{c}_1x_1 + ... + \tilde{c}_nx_n \to \max, \\
& \tilde{a}_{i1}x_n + ... + \tilde{a}_{in}x_n \tilde{R}\tilde{b}_i, \quad i \in M, \\
& x_j \geq 0, \; j \in N.
\end{aligned}
\tag{2.1.89}
$$

Bu yerda $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ *va* $\tilde{b}_i$ R dagi kompakt oraliqlar deb qaraladi. Boshqa so'z bilan aytganda, $\tilde{c}_j = [\underline{c}_j, \bar{c}_j]$, $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ va $\tilde{b}_i = [\underline{b}_i, \bar{b}_i]$, bu yerda $\underline{c}_j, \bar{c}_j, \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}$ va $\underline{b}_i, \bar{b}_i$ - mos oraliqlarning yuqori va quyi chegaralari. $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_{ij}$ *va* $\tilde{b}_i$ oraliqlararning tegishlilik funksiyalari ushbu oraliqlarning xarakteristik funksiyalaridir, ya'ni $X_{[\underline{c}_j, \bar{c}_j]}: \mathbb{R} \to [0, 1]$, $X_{[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]}: \mathbb{R} \to [0, 1]$ va $X_{[\underline{b}_i, \bar{b}_i]}: \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i \in M$, $j \in N$.

Shuningdek, R – sodda «≤» binar munosabat, A - $T = min$ va $S=max$ deb olamiz. $\tilde{R}$ noravshan munosabat «≤» o'lchovli munosabatning noravshan kengaytmasidir. Biz «≤» binar munosabatning kengaytmalari hisoblangan hamda (2.1.15), (2.1.16) va (2.1.18)-(2.1.21) ifodalar bilan aniqlangan 6 ta $\tilde{R}$ noravshan munosabatlarni qaraymiz, ya'ni :

$$\tilde{R} \in \{\tilde{\leq}^{\min}, \tilde{\leq}^{\max}, \tilde{\leq}^{T,S}, \tilde{\leq}_{T,S}, \tilde{\leq}^{S,T}, \tilde{\leq}_{S,T}\}.$$

2.1.2-tasdiqga ko’ra ularga (2.1.89) noravshan chiziqli dasturlash masalasining 6 ta turdagi joiz yechimlari mos keladi:

(i)

$$X_{\underset{\sim}{\leq}\min} = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \leq \overline{b}_i, x_j \geq 0, j \in N \right. \right\}, \qquad (2.1.90)$$

(ii)

$$X_{\underset{\sim}{\leq}\max} = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \leq \underline{b}_i, x_j \geq 0, j \in N \right. \right\}, \qquad (2.1.91)$$

(iii)

$$X_{\underset{\sim}{\leq}T,S} = X_{\tilde{\leq}_{T,S}} = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j \leq \overline{b}_i,\ x_j \geq 0, j \in N \right. \right\}, \qquad (2.1.92)$$

(iv)

$$X_{\underset{\sim}{\leq}T,S} = X_{\tilde{\leq}_{T,S}} = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij} x_j \leq \underline{b}_i,\ x_j \geq 0, j \in N \right. \right\} \qquad (2.1.93)$$

Ravshanki, (2.1.90)-(2.1.93) joiz yechimlar $\mathbb{R}^n$ ning ravshan qism to’plamlari bo’ladi [40,70,73,74, 87,101,135,146].

(2.1.89) oraliqli chiziqli dasturlash masalasining ma’lum bir qanoatlantiruvchi yechimini topish uchun $d \in F(\mathbb{R})$ noravshan yechimni hamda hosil bo’lgan natijani ravshan maqsad bilan solishtirish uchun kerak bo’lgan «≥» sodda binar munosabatining noravshan kengaytmasi $\tilde{R}_0$ ni aniqlaymiz.

Keyingi ta’rifda oraliqli chiziqli dasturlashning joiz yechimi ravshan to’plam bo’lsa, u holda uning max-qanoatlantiruvchi yechimi maxsus ko’rinishdagi maqsad funksiyasi joiz yechimlar to’plami bo’yicha maksimallashtiriluvchi chiziqli dasturlash masalasining klassik muqobil yechimlarining to’plami bilan ustma-ust tushishini ko’rsatamiz.

2.1.32-ta’rif. X – (2.1.89) oraliqli chiziqli dasturlash masalasining ravshan joiz yechi bo’lsin. $d \in F(\mathcal{R})$ – $\mu_{\tilde{d}}$ tegishlilik funksiyali (2.1.49) shartlarni qanoatlantiruvchi noravshan maqsad bo’lsin. G_A - $G = T = min$ va $S = max$ bo’lsin. U holda:

(i) agarda $\tilde{R}_0$ - « $\tilde{\geq}^{\max}$ » munosabat bo’lsa, u holda oraliqli chiziqli dasturlash (2.1.89) masalasining max-qanoatlantiruvchi yechimlar to’plami quyidagi masalaning barcha muqobil yechimlari bilan ustma-ust tushadi:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max ,$$

$$x \in X. \tag{2.1.94}$$

(ii) Agarda $\tilde{R}_0$ - «^ » munosabat bo'lsa, u holda (2.1.89) oraliqli chiziqli dasturlash masalasining barcha max-qanoatlaniruvchi yechimlar to'plami quyidagi masalaning barcha muqobil yechimlar to'plami bilan ustma-ust tushadi:

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j \to \max ,$$

$$x \in X .$$

Isbot. (i) tasdiq: x∈X – (2.1.89) oraliqli chiziqli dasturlash masalasining max-qanoatlantiruvchi yechimi va $\underline{c} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j$, $\bar{c} = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$ bo'lsin. Bizning farazlarimizga ko'ra:

$$\mu_{\tilde{\geq}^T}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}) = \sup\left\{\min\left\{\mu_{\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\}\ u \geq \upsilon\right\} =$$

$$\sup\left\{\min\left\{X_{[\underline{c},\, \bar{c}]}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\}\ u \geq \upsilon\right\} = \mu_{\tilde{d}}\left(\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j\right).$$

Demak x (2.1.94) ga nisbatan muqobil yechim bo'ladi. Aksincha, agar $x \in X$ – (2.1.94) ga nisbatan muqobil yechim bo'lsa, u holda 2.1.22-ta'rifga ko'ra va (2.1.49) hisobiga x (2.1.89) masalaning max-qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi.

(ii) (i) bo'limning isbotiga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu_{\tilde{\geq}^T}(\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n, \tilde{d}) = \inf\left\{\max\left\{1 - \mu_{\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} \ldots \tilde{+} \tilde{c}_n x_n}(u), 1 - \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\}\ u \geq \upsilon\right\} =$$

$$\inf\left\{\max\left\{X_{[\underline{c},\, \bar{c}]}(u),\ \mu_{\tilde{d}}(\upsilon)\right\}\ u \leq \upsilon\right\} = \mu_{\tilde{d}}\left(\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_j x_j\right).$$

Mazkur tasdiqi (i) ning isbotidagi kabi huddi shu mulohazalar yordamida isbotlanadi.

Biz berilgan paragrfni oraliqli chiziqli dasturlash masalalarining ikkilamchiligiga oid bir nechta eslatmalar bilan yakunlaymiz.

(P) oraliqli chiziqli dasturlashning to'g'ri masalasi «$\tilde{\leq}^{\min}$» ko'rinishdagi $\tilde{R}$ noravshan munosabatda (2.1.89) masala bo'lsin, ya'ni o (2.1.58) o'rinlidir. U holda oraliqli chiziqli dasturlashning ikkilamchi masalasi (D) (2.1.59) masala bo'ladi. (P) masalaning $X_{\tilde{\leq}^{\min}}$ joiz yechimi (2.1.90) orqali, (D) ikkilamchi masalaning joiz yechimi $Y_{\tilde{\geq}^{\max}}$ (2.1.91) orqali quyidagi ko'rinishda hosil qilinishi mumkin:

$$Y_{\gtrsim \max} = \left\{ y \in R^m \middle| \sum_{i=1}^{m} \underline{a}_{ij} y_i \geq \overline{c}_j ,\ y_i \geq 0, i \in M \right\}.$$

Shuni qayd etish joizki, quyidagi masalalar:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{c}_j x_j \to \max ,$$

$$x \in X_{\gtrsim \min}$$

va

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{b}_i y_i \to \min ,$$

$$y \in Y_{\gtrsim \max}$$

bir-biriga nisbatan barcha $i \in M$, *va* $j \in N$ larda $\underline{c}_j = \overline{c}_j$, hamda $\underline{b}_i = \overline{b}_i$ munosabatlar o'rinli bo'lgandagina ikkilamchi bo'ladi.

2.1.5.3. Markazlashgan parametrli noravshan chiziqli dasturlash masalalari

Noravshan chiziqli dasturlashning qiziq masalalar sinfi masalaning parametrlari B-noravshan oraliqlar bo'lgan holda hosil bo'ladi .

2.1.33-ta'rif. μ_A: $\mathbb{R} \to [0, 1]$ tegishlilik funksiyasi bilan berilgan A noravshan munosabat:

$$0 \in \text{Core (A)}$$

(i) μ_A R da kvazibotiq bo'lsa, u R dagi generator deyiladi.

Har bir hosilaviy noravshan munosabat (i) ni qanoatlantiruvchi maxsus noravshan A oraliq bo'ladi.

2.1.34-ta'rif. R dagi barcha B generatorlar to'plami:

(i) $X_{\{0\}} \in B$, $X_{\mathbb{R}} \in B$ bo'lsa, R dagi generatorlar bazisi deyiladi.

(ii) agar f, g $\in$ B bo'lsa, u holda max{f, g} $\in$ B va min{ f, g}$\in$ B bo'ladi.

2.1.35-ta'rif. B - R dagi generatorlar bazisi bo'lsin. Har bir x $\in \mathbb{R}$ ga nisbatan μ_A: $\mathbb{R} \to [0,1]$ tegishlilik funksiyasi orqali beriluvchi A noravshan to'plam $a_A \in \mathbb{R}$. va $g_A \in B$ lar mavjud bo'lsa, B – noravshan oraliq deyiladi.

Barcha B-noravshan oraliqlar to'plami $F_B(\mathbb{R})$ kabi belgilanadi. Har qanday A $\in$ F($\mathbb{R}$) oraliq (a_A, g_A) juftligi orqali ifodalanib, A = (a_A, g_A) ko'rinishda yozib olinadi.

$F_B(\mathbb{R})$ da «$\leq_B$» tartibli munosabat quyidagi tarzda aniqlanadi: A,B$\in$ $F_B(\mathbb{R})$, A =(a_A, g_A) va B = (a_A, g_A) ga nisbatan

$$(a_A < a_B) \text{ yoki } (a_A = a_B \text{ va } g_A \leq g_B) \qquad (2.1.95)$$

bo'lgandagina A $\leq_B$ B kabi yozishimiz mumkin. «^B» munosabat $F_B(\mathbb{R})$ dagi qisman tartiblashish xolosdir. Keyingi ta'rif 2.1.34-ta'rifning sodda natijasidir.

2.1.36-ta'rif. {B, $\leq$) juftlik, bu yerda B – generatorlar bazisi va « $\leq$ » - munosabat nuqtalar bo'yicha tartiblangan funksiya bo'lib, u $x_{\mathbb{R}}$ maksimal elementli va X{0} minimal elementli to'r bo'ladi.

Masalan quyidagi funksiyalar to'plami R dagi generatorlar bazislarini shakllantiradi:

(i) $B_D = \{X_{\{0\}}, X_{\mathbb{R}}\}$ –diskret bazis,

(ii) $B_I = \{X_{[a,b]} \mid -\infty \leq a \leq b \leq +\infty\}$ – oraliqli bazis,

(iii) $B_G = \{\mu_d \mid \mu_d(x) = g^{(-1)}(|x|/d), x \in \mathbb{R}, \text{d} > 0\} \cup \{X_{\{0\}}, X_{\mathbb{R}}\}$,

bu yerda

g : (0,1] $\to$ [0, + ∞) – konstantadan farqli o'smaydigan funksiya,

$g(1) = 0$ va $g(0) = lim_{x\to 0}\, g(x)$.

Ma'lumki, funksiyalarning qiymatlari o'rtasida hosil bo'lgan « $\leq$ » nuqtaviy munosabat B_G dagi tartiblangan munosabat bo'ladi.

2.1.37-ta'rif. $F_{B_G}(\mathbb{R})$ barcha B_G – noravshan oraliqlarning to'plami bo'lsin. U holda «^g_G» munosabat $F_{B_G}(\mathbb{R})$ dagi chiziqli tartibli munosabat hisoblanadi.

Bu natijani quyidagi tarzda kengaytirish mumkin. *B* – to'plamlar generatorlarining bazisi bo'lsin, «$\leq_{B_G}$» esa- 2.1.35-ta'rifda (2.1.95) ga ko'ra berilgan xususan tartiblashtirish bo'lsin. Agarda *B* «$\subseteq$» munosabat orqali chiziqli tartiblansa, u holda $F_{B_G}(\mathbb{R})$ «$\leq_{B_G}$» munosabat orqali chiziqli tartiblanadi. Bu yerdan, har bir $\tilde{c} \in F_{B_G}(\mathbb{R})$ noravshan vektor (*c*, μ) juftlik orqali bir marta ifodalanishi mumkinligi kelib chiqadi, bu yerda $c \in$R va $\mu \in B$, shuning uchun

$$\mu_{\tilde{c}}(t) = \mu(c-t).$$

Huddi shunday $\tilde{c} = \mu(c,\mu)$ deb yozib olish mumkin.

«o» ℝ dagi qo'shish yoki ko'paytirish kabi arifmetik amal, «*» — B dagi min yoki max amal bo'lsin. FB(R) to'plamda barcha (a, f) va $(b,g)\in F_B(\mathbb{R})$ larga nisbatan quyidagi amallarni kiritamiz:

$$(a, f) \circ *(b, g) = (a \circ b, f * g) . \qquad (2.1.96)$$

$(+^{(\min)}, \cdot^{(\max)})$, $(+^{(\min)}, \cdot^{(\max)})$, $(+^{(\max)}, \cdot^{(\min)})$ va $(+^{(\max)}, \cdot^{(\max)})$ amallar juftligi distributivdir.

Endilikda $\tilde{c}_j = (c_j, f_j)$, $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, g_{ij})$ $\tilde{b}_i = (b_i, h_i)$ B-noravshan oraliqlarni qaraymiz, bu yerda $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}, b_i \in F_B(\mathbb{R})$, $i \in M$, $j \in N$. «◊» va «*» - B dagi min yoki max amallari bo'lsin. Muqobillashtirishning quyidagi masalasini qaraymiz:

$$\tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n \to \max,$$
$$\tilde{a}_{i1} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{a}_{in} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n \le_B \tilde{b}_i, \ i \in M,$$
$$\tilde{x}_j \ge_B \tilde{0}, \ j \in N. \qquad (2.1.97)$$

(2.1.97) da «$\le_B$» tartiblashga nisbatan maksimallashtirish amalga oshiriladi. Bundan tashqari, $\tilde{x}_j = (x_j, \xi_j)$, bu yerda $x_j \in \mathbb{R}$, $\xi_j \in B$ va $\tilde{0} = (0, X_{\{0\}})$. $x_j \ge_B \tilde{0}, j \in N$ tengsizliklar $x_j \ge 0$, $j \in N$ tengsizliklarga ekvivalentdir. Shu masalaning joiz va muqobil yechimlarini aniqlaylik.

(2.1.97) masalaning joiz yechimi:

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T \in F_B(\mathbb{R}) \times F_B(\mathbb{R}) \times \ldots \times F_B(\mathbb{R})$$

quyidagi cheklanishlarni qanoatlantiruvchi:

$$\tilde{a}_{i1} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{a}_{in} \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n \le_B \tilde{b}_i, \ i \in M,$$
$$\tilde{x}_j \ge_B \tilde{0}, \ j \in N$$

vector bo'ladi.

(2.1.97) masalaning barcha joiz yechimlar to'plamini X_B kabi belgilaymiz. (2.1.97) masalaning muqobil yechimi quyidagi:

$$(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, ..., \tilde{x}_n^*)^T \in F_B(\mathbb{R}) \times F_B(\mathbb{R}) \times \ldots \times F_B(\mathbb{R})$$

vector bo'ladi, bunda:

$$\tilde{z}^* = \tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1^* +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n^*$$

vektor

$$X_B^* = \{\tilde{z} \,|\, \tilde{z}\, \tilde{c}_1 \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_1 +^{(*)} \ldots +^{(*)} \tilde{c}_n \cdot^{(\Diamond)} \tilde{x}_n, (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T \in X_B \}$$

to'plamning «$\le_B$» tartibga nisbatan maksimal elementi bo'ladi.

Min va max operatorlari, «$\cdot^{\Diamond}$» va «$+^{*}$» amallarining to'rtta kombinatsiyalaridan har birida (2.1.97) masala muqobillashtirishning ma’lum bir maxsus masalasi bo’ladi. Quyidagi natijani oson keltirib chiqarish mumkin.

2.1.38-ta’rif. B – generatorlarning chiziqli tartiblangan bazisi bo’lsin. $(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, ..., \tilde{x}_n^*)^T \in F_B(\mathbb{R})$ – (2.1.97) masalaning muqobil yechimi bo’lib, bu yerda $\tilde{x}_j^* = (x_j^*, \tilde{\xi}_j^*)$, j $\in$ N. U holda $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)^T$ vector quyidagi chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bo’ladi:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{2.1.98}$$

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \ , \ i \in M, \ x_j \ge 0, \ j \in N.$$

A_x belgisi bilan (2.1.98) dagi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtadagi faol cheklanishlarining indekslari to’plamini begilaymiz, ya’ni:

$$A_x = \{i \in M | a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i\}.$$

Quyidagi ta’rif (2.1.97) masalaning joiz yechimining mavjudligining zaruriy shartini beradi.

2.1.39-ta’rif. B – generatorlarning chiziqli tartiblangan bazisi bo’lsin. $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T \in X_B(\mathbb{R})$ – (2.1.97) masalaning joiz yechimi bo’lib, bu yerda $\tilde{x}_j = (x_j, \tilde{\xi}_j)$, j $\in$ N. U holda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ (2.1.98) chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi bo’lib, quyidagi munosabatlar o’rinli bo’ladi:

(i) agar ◊ = max va * = min bo’lsa, u holda

barcha $i \in A_x$ larga nisbatan $\min\{a_{ij} \mid j \in N\} \le_B b_i$ bo’ladi;

(ii) agar ◊ = max va * =max bo’lsa, u holda

barcha $i \in A_x$ larga nisbatan $\max\{a_{ij} \mid j \in N\} \le_B b_i$ bo’ladi.

Shuni qayd etish joizki, mazkur paragrfda noravshan chiziqli dasturlash masalasini yechishning ustuvor yondashuvi taqdim etildi. Oldinroq ko’rilgan yondashuvga nisbatan, x_j o’zgaruvchilar nomanfiy deb faraz qilingan. Ular noravshan chiziqli dasturlash masalasining mos koeffitsiyentlari singari, noravshan oraliqlar sifatida qaralgan. Hisoblash nuqtai nazaridan, mazkur yondashuvning xarakterli jihati soddalikdir, chunki unda klassik chiziqli dasturlash masalasini yechish talab qilinadi xolos.

2.1.6. Noravshan chiziqli dasturlashning ko'p mezonli masalasi

Shu paytgacha bitta mezonli, ya'ni bitta maqsad funksiyali noravshan chiziqli dasturlash masalalari o'rganilgan. Bizning yondashuvimiz ko'p mezonli holga nisbatan tarqatilishi mumkin [9, 26-28,34,40,70,73,74, 87,101,135,146].

(2.1.27) noravshan chiziqli dasturlash masalasiga mos kelgan noravshan chiziqli dasturlashning ko'p mezonli masalasi quyidagi tarzda aniqlanadi:

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_{k1}\tilde{x}_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_{kn}x_n \to \max,\ k \in K, \\ &(\tilde{a}_{i1}x_1 \tilde{+} .. + \tilde{a}_{in}x_n)\tilde{R}_i\tilde{b}_i,\ i \in M, \\ &x_j \ge 0,\ j \in N. \end{aligned} \qquad (2.1.99)$$

Bu yerda $K = \{1,2, \dots , q\}$ – noravshan mezonlar to'plami, $\mu_{\tilde{c}_{kj}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{a}_{ij}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $\mu_{\tilde{b}_i} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $k \in K, i \in M, j \in N$ - esa mos ravishda $\tilde{c}_{kj}, \tilde{a}_{ij}\ va \tilde{b}_i$ noravshan parametrlarning tegishlilik funksiyalari.

Maqsad funksiyalarini "maksimallashtirish" uchun, bitta mezon holida amaliyotga tadbiq etilganlarga o'xshash "muqobil yechim" tushunchalari, aniqrog'i: 1) qanoatlantiruvchi yechim g'oyasi; 2) α-samarali yechim g'oyasidan foydalanish mumkin. Noravshan chiziqli dasturlashning ko'p mezonli masalasini kelishuvli yechimini topish uchun biz qanoatlantiruvchi yechim asosidagi yondashuvni rivojlantiramiz holos. Boshqa yondashuv huddi shu tarzda amaliyotga tadbiq etilishi mumkin.

Shunday qilib, har bir

$$\tilde{f}_k(x,\tilde{c}_k) = \tilde{c}_{k1}x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \tilde{c}_{kn}x_n,\ k \in K \qquad (2.1.100)$$

mezonga nisbatan qo'shimcha $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ maqsad - haqiqiy o'qdagi noravshan to'plam mavjud deb faraz qilamiz. Maqsadning ta'rifi "muqobil" yechim sifatiga ta'sir ko'rsatishi mumkin. Uning ma'nosi ma'lum jihatdan mos mezonlarning ideal qiymatlari hisoblangan mezonlarning tabiatiga bog'liq bo'ladi. Maqsad funksiyasining $\tilde{f}(x,\tilde{c}_k)$ noravshan qiymati $\tilde{d}_k$ maqsad bilan tashqaridan berilgan S_k, noravshan munosabat yordamida solishtiriladi. U holda noravshan mezonlar $\tilde{f}(x,\tilde{c}_k)\tilde{S}_k\ \tilde{d}_k$ cheklanishlar sifatida qayta ishlanadi.

2.1.40-ta'rif. f_k, $k \in K$ - (2.1.100) chiziqli funksiyalar bo'lsin. $\mu_{\tilde{c}_{kj}}: \mathbb{R} \to [0,\ 1]$ - $\tilde{c}_{kj}$ noravshan parametrlarning tegishlilik funksiyasi va $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ – R ning noravshan maqsadlar deb ataluvchi qism to'plamlari bo'lsin, bu yerda $k \in K$, $j \in N$. Bundan tashqari, $\tilde{S}_k, k \in K$ - $\mu_{\tilde{S}_k}: F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to [0,\ 1]$ tegishlilik funksiyalari orqali beriluvchi noravshan munosabatlar va G_F – agregatlashtirish operatori bo'lsin.

Barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan $\mathbb{R}^n$ dagi $\mu_{\tilde{F}}$ tegishlilik funksiyali noravshan qism to'plam $\tilde{F}$

$$\mu_{\tilde{F}}(x) = G_F\left(\mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x, \tilde{c}_1),\ \tilde{d}_1\right),\ ...,\ \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k),\ \tilde{d}_k\right)\right), \qquad (2.1.101)$$

ko'rinishda aniqlanib, (2.1.99) noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalaning mezonli noravshan to'plami deyiladi.

$k \in K$ ga nisbatn biz $\tilde{F}_k$ orqali $\mu_{\tilde{F}_k}$ tegishlilik funksiyasi yordamida berilgan noravshan to'plamni belgilaymiz, u $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan quyidagi ko'rinishda yozib olinadi:

$$\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_k}\left(\tilde{f}_k(x, \tilde{c}_k),\ \tilde{d}_k\right). \qquad (2.1.102)$$

Bir mezonli holda (ya'ni, q=l bo'lganda) G_F agregatlashtirish operatori ayniyatli operator bo'ladi va mezonli noravshan to'plamning tegishlilik funksiyasi barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan $\mu_{\tilde{F}_k}(x) = \mu_{\tilde{S}_1}\left(\tilde{f}_1(x, \tilde{c}_1),\ \tilde{d}_1\right)$ ko'rinishda aniqlanadi [26-28,34,40,70,73,74,86,87,101].

2.1.41-ta'rif. f_k, $k \in K$, g_i, $i \in M$ - ma'lum bir funksiyalar, $\tilde{c}_{k_j}, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ - noravshan parametrlar va $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$ – noravshan maqsadlar bo'lsin. Bundan tashqari, $\tilde{R}_i$ *va* $\tilde{S}_k$ - 2.1.21 va 2.1.40-ta'rif orqali beriluvchi noravshan munosabatlar bo'lsin. Va nihoyat, G_X, G_F va G – agregatlashtirish operatorlari bo'lsin.

Barcha $x \in \mathbb{R}^n$ larga nisbatan $\mu^*_{\tilde{X}}$ tegishlilik funksiyasi bilan berilgan $\tilde{X}^*$ to'plam

$$\mu^*_{\tilde{X}}(x) = G(\mu_{\tilde{X}}(x),\ \mu_{\tilde{F}}(x)) \qquad (2.1.103)$$

(2.1.99) noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalasining kelishuvli yechimi deyiladi, bu yerda $\mu_{\tilde{F}}$ va $\mu_{\tilde{X}}$ mos ravishda mezonli noravshan to'plam va joiz yechimning tegishlilik funksiyalari bo'ladi.

$\alpha \in (0,1]$ ga nisbatan $x \in [\widetilde{X}^*]_\alpha$ vektor (2.1.99) noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalaning α-darajali yechimi deyiladi. $\mu^*_{\widetilde{X}}(x^*) = Hgt(\widetilde{X}^*)$ xossaga ega bo'lgan $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektor max-kelishuvli yechim deyiladi.

Noravshan chiziqli dasturlashdagi $\widetilde{X}^*$ kelishuvli yechim $\mathbb{R}^n$ dagi noravshan to'plam bo'ladi. Bitta mezonli masala holida kelishuvli yechim haqiqatda 2.1.22-ta'rifga ko'ra qanoatlantiruvchi yechim bo'ladi. Bundan tashqari, $\widetilde{X}^* \subseteq \widetilde{X}$, bu yerda $\widetilde{X}$ — joiz yechim.

Boshqa tomondan, α - darajali yechim α-kelishuvli yechim $\alpha = Hgt(\widetilde{X}^*)$ bo'ladigan max-kelishuvli yechim singari vektor bo'ladi.

2.1.41-ta'rifda 3 ta agregatlashtirish operatori G_X, G_F va G qaraladi. Birinchi operator G_X alohida cheklanishlarni 2.1.21 ga ko'ra joiz yechimga birlashtirish uchun qo'llanilgan; ikkinchi G_F operator – alohida mezonlarni agregatlashtirish uchun qo'llanilgan, uchinchi G operator yordamida esa mezonlar va cheklanishlar birlashtirilgan. Ayrim hollarda mezonlar va cheklanishlarni kombinatsiyalash uchun mos agregatlovchi operatorni tanlash qiyin bo'ladi yoki buning umuman iloji bo'lmaydi. Bunday holatda, Pareto–muqobil yechim g'oyasi - $\mu_{\widetilde{X}}$ va $\mu_{\widetilde{F}}$ tegishlilik funksiyalari orqali ifodalangan "yangi mezonlar" ga moslashtirilgan g'oyasini qo'llash mumkin [9,10,26-28,34,40,70,146].

2.1.42-ta'rif. $\mu_{\widetilde{X}}$ va $\mu_{\widetilde{F}}$ - mos ravishda 2.1.40-ta'rifdagi mezonli noravshan to'plam va 2.1.41-ta'rif orqali berilgan joiz yechimning tegishlilik funksiyalaridir.

$x^p \in \mathbb{R}^n$ vektor

$$\mu_{\widetilde{X}}(x^p) \le \mu_{\widetilde{X}}(x) \qquad va \quad \mu_{\widetilde{F}}(x^p) < \mu_{\widetilde{F}}(x)$$

yoki

$$\mu_{\widetilde{X}}(x^p) < \mu_{\widetilde{X}}(x) \qquad va \quad \mu_{\widetilde{F}}(x^p) \le \mu_{\widetilde{F}}(x)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi $x \in \mathbb{R}^n$ vektor bo'lmasa, (2.1.99) noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalaning muqobil yechimi bo'ladi. Shuni qayd etish joizki, (2.1.99) masalaning Pareto-muqobil yechimi x^p ravshan vektor bo'ladi.

(2.1.99) masala maksimallashtirish masalasi (ya'ni "mezonning qiymati qanchalik katta bo'lsa shunchalik yaxshi" tamoyili bo'yicha muqobillikni izlash) bo'lgani uchun, $\widetilde{d}_k$ noravshan maqsadlarning $\mu_{\widetilde{d}_k}$ tegishlilik funksiyasi o'smaydigan yoki kamaymadigan bo'lishi kerak.

Huddi shu tufayli $\tilde{f}_k(x,\tilde{c}_k)$ va $\tilde{d}_k$ larni solishtirish uchun qo'llaniluvchi $\tilde{s}_k$ munosabatlar "katta yoki teng" turida bo'lishi kerak. Bu yerda $\tilde{s}_k$ munosabatlar « ≥ » sodda binar solishtirish amalining noravshan kengaytmasi bo'lib, bu yerda T - t-normadir.

Rasman 2.1.21 va 2.1.41-ta'riflarda joiz yechim va kelishuvli yechim tushunchalari bir-birga juda o'xshashdir. Shunday qilib, mazkur bobning oldingi qismida olingan natijalardan foydalanish mumkin. Max-kompromisli yechim bitta mezonli va c_1, a_i va b parametrli masala holida $\tilde{d}_1$ ning o'sishi shartida klassik chiziqli dasturlash masalasining muqobil yechimi bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, agar $\tilde{X}^{*'}$ - $\tilde{c}_1'$, $\tilde{a}_i'$, $va\ \tilde{b}'$ parametrli (2.1.99) noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalaning kelishuvli yechimi, $\tilde{X}^{*''}$ - esa o'xshash masalaning $\tilde{c}_1' \subseteq \tilde{c}_1''$, $\tilde{a}_i' \subseteq \tilde{a}_i''$ $u\ \tilde{b}' \subseteq \tilde{b}''$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $i \in M$ larga nisbatan $\tilde{c}_1''$, $\tilde{a}_i''\ va\ \tilde{b}''$ muqobil yechimi bo'lsa, u holda $\tilde{X}^{*'} \subseteq \tilde{X}^{*''}$ bo'ladi. Xususan, ravshan muqobil yechim x holida bitta mezonli va ravshan sonlar ko'rinishidagi chiziqli dasturlash masalalari x kelishuvli yechimning ko'p mezonli noravshan chiziqli dasturlashga mos keluvchi x kelishuvli yechimning tegishlilik darajasi birga tengdir. Bu omil chiziqli dasturlashning ravshan ko'p mezonli masalalar sinfini noravshan chiziqli dasturlash masalalarining ko'p mezonli sinfiga biriktiradi [9,10,26-28,34,40].

Keyingi ta'rif bitta mezonli masala uchun 2.1.25-ta'rifga o'xshashdir.

2.1.43-ta'rif. Barcha x ∈ $\mathbb{R}^n$ larga nisbatan

$$\mu_{\tilde{F}_j}(x) = \mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x,\tilde{c}_j),\tilde{d}_j\right),\ j \in K$$

va

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) = \mu_{\tilde{R}_i}(\tilde{g}_i(x,\tilde{a}_i),\tilde{b}_i), \quad i \in M$$

(2.1.99) noravshan chiziqili dasturlashdagi mos ravishda noravshan mezonlar va noravshan cheklanishlarning tegishlilik funksiyalari bo'lsin. $G_X = G_F = G = \min$, bo'lsin va $\tilde{d}_k \in F(\mathbb{R})$, k ∈ K — noravshan maqsadlar bo'lsin.

$(t^*,x^*) \in {}^{+1}$ vektor quyidagi masalaning muqobil yechimi bo'ladi:

$$\mu_{\tilde{F}_j}(x) \geq t,\ k \in K,$$

$$\mu_{\tilde{X}_i}(x) \geq t, \quad i \in M,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1.104}$$

shartlar bajarilganda va x* (2.1.99) masalaning max-kelishuvli yechimi bo'lgandagina t maksimallashtirilsin.

Isbot. x^* (2.1.99) masalaning max-kelishuvli yechimi bo'lsin va

$$t^* = \min\{\mu_{\tilde{X}}(x^*), \mu_{\tilde{F}}(x^*)\}$$

bo'lsin va (2.1.101) hisobiga:

$$\mu_{\tilde{F}}(x^*) = \min_{j\in K}\left\{\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*,\tilde{c}_j),\, \tilde{d}_j\right)\right\}$$

va (2.1.13) ko'ra:

$$\mu_{\tilde{X}}(x^*) = \min_{i\in M}\left\{\mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*,\tilde{a}_i),\, \tilde{b}_i\right)\right\}$$

bo'lsin. U holda:

$$t^* = \max_{x\in R^n}\min\left\{\mu_{\tilde{X}}(x), \mu_{\tilde{F}}(x)\right\},$$

$$\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*,\tilde{c}_j),\, \tilde{d}_j\right) \ge t^*, \quad j\in K,$$

$$\mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*,\tilde{a}_i),\, \tilde{b}_i\right) \ge t^*, \quad i\in M.$$

Natijada, (t^*, x^*) $\in \mathbb{R}^{n+1}$ vektor (2.1.104) masalaning muqobil yechimi bo'ladi.

Boshqa tomondan, (t^*, x^*) $\in \mathbb{R}^{n+1}$ (2.1.104) masalaning muqobil yechimi bo'lsin. U holda:

$$t^* = \min_{j\in K, i\in M}\left\{\mu_{\tilde{S}_j}\left(\tilde{f}_j(x^*,\tilde{c}_j),\, \tilde{d}_j\right), \mu_{\tilde{R}_i}\left(\tilde{g}_i(x^*,\tilde{a}_i),\, \tilde{b}_i\right)\right\}.$$

Demak, x^* vector (2.1.106) masalaning max-kelishuvli yechimi bo'ladi.

2.1.7. Kompuyterda tajriba o'tkasish

Quyidagi masalani qaraylik. Ko'rilayotgan vaqt momentining boshida investorda 12 mln.dollar bo'lsin va u ikkita investisiya loyihalarida ishtirok etish to'g'risidagi masalani hal qilsin. Ikkala loyihaning davomiyligi uch yil. Umumiy foydalanilmay qolgan qoldig'ini vaqtinchalik zahiraga olib qo'yish mumkin. Ko'rilayotgan daromadlar va xarajatlar noaniqlik bilan xarakterlanadi va noravshan sonlar singari shakllantirilishi mumkin. Masala uch yillik davrning oxirida resurslar kattaligini maksimallashtirish strategiyasini (noravshan bo'lmagan) topishdan iborat. Muqobil investisiyalash masalasi noravshan chiziqli dasturlashning modelli masalasi sifatida bayon etilishi mumkin.

$$\begin{array}{lll}\tilde{a}_{11}x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{12}x_2 \tilde{+} p_1 & & \cong 12, \\ \tilde{a}_{12}x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{22}x_2 \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_1) p_1 \simeq p_2 & & \cong 0, \\ \tilde{a}_{31}x_1 \tilde{+} \tilde{a}_{32}x_2 & \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_2) p_2 \simeq p_3 & \cong 0, \\ & x_1, x_2 & \le 1, \\ & x_1,\ x_2, p_1, p_2, p_3 & \ge 0,\end{array} \qquad (2.1.105)$$

cheklanishlarda $\tilde{c}_1 x_1 \tilde{+} c_2 x_2 \tilde{+} (1 \tilde{+} \tilde{u}_3) p_3$ ni maksimallashtiring, bu yerda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

$\tilde{c}_i$ - qayd etilgan davrning oxirida i-loyihadan tushgan noravshan daromad, $i = 1,2$;

$\tilde{a}_{ij}$ - j-yilda (j= 1, 2, 3) i-loyihadan (i = 1,2) tushgan noravshan daromad/ xarajat;

$\tilde{u}_i$ - j = 1, 2, 3 yildagi noravshan foiz qo'yilishi;

x_i – i-loyihada ishtirok etish darajasi, i = 1,2;

p_j – j-yilda resurslarning taqsimoti, j = 1,2,3;

$\cong$ - noravshan tenglik munosabati.

$\tilde{a} = (a_L, a_C, a_R)$ - uchburchaksimon noravshan son va $a_L < a_c < a_R$ bo'lsin, bu yerda a_L - $\tilde{a}$ sonning chap qiymati, a_R esa $\tilde{a}$ sonning o'ng qiymati deyiladi. U holda $\tilde{a}$ sonning tegishlilik funksiyasi quyidagi ifoda orqali beriladi:

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - a_L}{a_c - a_L},\ \frac{a_R - t}{a_R - a_C}\right\}\right\} \qquad (2.1.106)$$

Agarda $a_L = a_C = a_R$ bo'lsa, u holda $\tilde{a} = (a_L, a_C, a_R)$ - X_{a_C} xarakteristik funksiya bilan ustma-ust tushuvchi tegishlilik funksiyali ravshan (ya'ni oddiy haqiqiy son) son deymiz.

Bizning masalamizda $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ parametrlar quyidagi ko'rinishdagi uchburchaksimon noravshan sonlar deb faraz qilinadi:

$$\begin{array}{lll}\tilde{c}_1 = (4,\ 6,\ 8), & \tilde{a}_{21} = (-4, -2,\ 0), & \tilde{u}_1 = (0.01,\ 0.02,\ 0.03), \\ \tilde{c}_2 = (3,\ 5,\ 7), & \tilde{a}_{22} = (1,\ 2,\ 3), & \tilde{u}_2 = (0.01,\ 0.02,\ 0.03), \\ \tilde{a}_{11} = (6,\ 10,\ 14), & \tilde{a}_{31} = (6,\ 8,\ 10), & \tilde{u}_3 = (0.01,\ 0.03,\ 0.05), \\ \tilde{a}_{12} = (3,\ 6,\ 9). & \tilde{a}_{32} = (6,\ 12,\ 18). & \end{array}$$

$x_1 = x_2 = 0$ holni hisobga olmagan holda, $x_1,\ x_2 \geq 0$ bo'lsin. Shunday qilib, investor bitta ham loyihada ishtirok etmagan hol bartaraf etiladi.

(a) *Tegishlilik funksiyasi.* Kengaytirish tamoyili bo'yicha uchta (2.1.105) cheklanishlarning $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2\ va\ \widetilde{L}_3$ kabi belgilangan chap qismlari quyidagi ko'rinishdagi uchburchaksimon noravshan normalar bo'ladi :

$$\widetilde{L}_1 = (6x_1 + 3x_2 + p_1, 10x_1 + 6x_2 + p_1, 14x_1 + 9x_2 + p_1)\,,$$
$$\widetilde{L}_2 = (-4x_1 + x_2 + 1.01p_1 - p_2, -2x_1 + 2x_2 + 1.02p_1 - p_2,$$
$$3x_2 + 1.03p_1 - p_2),$$
$$\widetilde{L}_3 = (6x_1 + 6x_2 + 1.01p_2 - p_3, 8x_1 + 12x_2 + 1.02p_2 - p_3,$$
$$10x_1 + 1.03x_1 - p_3).$$

(2.1.106) ni qo'llab $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2\ va\ \widetilde{L}_3$ ga nisbatan tegishlilik funksiyalarini hisoblaymiz:

$$\mu_{\widetilde{L}_1}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 6x_1 - 3x_2 - p_1}{4x_1 + 3x_2}, \frac{14x_1 + 9x_2 + p_1 - t}{4x_1 + 3x_2}\right\}\right\},$$

$$\mu_{\widetilde{L}_2}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t + 4x_1 - x_2 - 1.01p_1 + p_2}{2x_1 + x_2 + 0.01p_1}, \frac{3x_2 + 1.03p_1 - p_2 - t}{2x_1 + x_2 + p_3}\right\}\right\},$$

$$\mu_{\widetilde{L}_2}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 6x_1 - 6x_2 - 1.01p_2 + p_3}{2x_1 + 6x_2 + 0.01p_1}, \frac{10x_2 + 18x_2 - 1.03p_2 - p_3 - t}{2x_1 + 6x_2 + 0.01p_2}\right\}\right\}.$$

So'ngra «=» o'lchovli munosabatning noravshan kengaytmasi bo'lgan $\cong$ noravshan munosabatning tegishlilik funksiyasi $\mu_{\cong}$ ni hisoblaymiz:

$\mu_{\cong}(\widetilde{L}_i, \widetilde{P}_i) = \sup\{\min\{0, \mu_{\widetilde{L}}(u), \mu_{\widetilde{P}_i}(\upsilon)\} u = \upsilon\},\ i = 1,2,3,$ bu yerda $\widetilde{P}_i$ — quyidagi tegishlilik funksiyalari orqali berilgan ravshan sonlardir:

$$\mu_{\widetilde{P}_1}(t) = \begin{cases} 1, & agar\quad t = 12, \\ 0, & aks\ holda, \end{cases} \qquad \mu_{\widetilde{P}_2}(t) = \begin{cases} 1, & agar\quad t = 0\ bo'lsa, \\ 0, & aks\ holda, \end{cases}$$

$$\mu_{\widetilde{P}_3}(t) = \begin{cases} 1, & agar\quad t = 0, \\ 0, & aks\ holda. \end{cases}$$

Xususan,

$$\mu_{\cong}(\widetilde{L}_1, \widetilde{P}_1) = \mu_{\widetilde{L}_1}(12),\ \mu_{\cong}(\widetilde{L}_i, \widetilde{P}_i) = \mu_{\widetilde{L}_i}(0),\ i = 2,3\,.$$

Shuni qayd etish joizki, ravshan sonlarga nisbatan «$\cong$» noravshan munosabat «=» tenglik munosabatiga o'xshashdir.

(b) *Joiz yechim.* 2.1.21-ta'rifga ko'ra T^A = T = min da (2.1.105) noravshan chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi $\tilde{X}$ noravshan to'plam bo'ladi va u quyidagi tegishlilik funksiyasi orqali aniqlanadi:

$$T_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) = \min\{\mu_{\tilde{L}_1}(12), \mu_{\tilde{L}_2}(0),\ \mu_{\tilde{L}_3}(0)\}\,.$$

$\alpha \in (0,1]$ nisbatan α-joiz yechim

$$\min\{\mu_{\tilde{L}_1}(12), \mu_{\tilde{L}_2}(0),\ \mu_{\tilde{L}_3}(0)\} \geq \alpha \qquad (2.1.107)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi

$$x=(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3)^T$$

vektorlar to'plamidir.

(2.1.107)-tengsizlik ekvivalent ravishda quyidagi tengsizliklar orqali ifodalanishi mumkin:

$$\begin{gathered}(6 + 4\alpha)x_1 + (3 + 3\alpha)x_2 + p_1 \leq 12,\\ (6 + 4\alpha)x_1 + (9 - 3\alpha)x_2 + p_1 \geq 12,\\ (4 - 2\alpha)x_1 - (1 - \alpha)x_2 +(1.01+0.01\alpha)\, p_1 +p_2 \geq 0, \qquad (2.1.108)\\ - 2\alpha x_1 + (3 - \alpha)x_2 +(1.03 + 0.01\alpha)\, p_1 - p_2 \geq 0,\\ (6 + 2\alpha)x_1 + (6 +6\alpha)x_2 + (1.01 + 0.01\alpha)\, p_2 - p_3 \leq 0,\\ (10 - 2\alpha)x_1 + (18 - 6\alpha)x_2 + (1.03 + 0.01\alpha)\, p_2 - p_3 \geq 0,\\ x_1\, , x_2 \leq 1,\\ x_1, x_2, p_1, p_2, p_3 \geq 0.\end{gathered}$$

(c) *Qanoatlantiruvchi yechim.* Barcha $t \geq 0$ larga nisbatan $\mu_{\tilde{d}}(t) = \min\{1, \max\{0,\ (t-21)/6\}\}$ tegishlilik funksiyasi orqali beriluvchi $\tilde{d}$ noravshan maqsadni qaraymiz. $\tilde{z}$ maqsad to'plamining tegishlilik funksiyasiga nisbatan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu_{\tilde{Z}}(t) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{t - 4x_1 - 3x_2 - 1.01p_3}{2x_1 + 2x_2 + 0.02p_3}, \frac{8x_1 + 7x_2 - 1.05p_3 - t}{2x_1 + 2x_2 + 0.02p_3}\right\}\right\}.$$

Endilikda $\mu_{\tilde{\geq}}(\tilde{Z}, \tilde{d}) = \sup\{\min\{0, \mu_{\tilde{Z}}(u), \mu_{\tilde{d}}(\upsilon) \,|\, u \geq \upsilon$

o'lchovli munosabatning noravshan kengaytmasi hisoblangan $\mu_{\tilde{\geq}}$ noravshan munosabatning funksiyasini hisoblaymiz.

Maqsad funksiyasining tegishlilik funksiyasi quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$\mu_{\tilde{\geq}}(\tilde{Z}, \tilde{d}) = \max\left\{0,\ \min\left\{\frac{8x_1 + 7x_2 + 1.05p_3 - 21}{2x_1 + 2x_2 + 0.02p_3 + 6}, 1\right\}\right\}$$

va shuning uchun $\tilde{x}_0$ muqobil yechim uchun

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \min\{\mu_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3), \mu_{\tilde{\geq}}(\tilde{Z}, \tilde{d})\}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. $\alpha \in$ (0,1] da α - samarali yechim $\mu_{\tilde{X}}(x_1, x_2, p_1, p_2, p_3) \geq \alpha$ hamda $\mu_{\tilde{\geq}}(\tilde{Z}, \tilde{d}) \geq \alpha$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha $x^{\circ} = (x_1, x_2, p_1, p_2, p_3)$ vektorlarning to'plami bo'ladi. Ushbu tengiszliklardan birinchisi (2.1.108) tengsizliklarga, oxirgisi esa

$$(8 - 2\alpha)x_1 + (7 - 2\alpha)x_2 + (1.05 + 0.02\alpha)\, p_3 \geq 21+6\alpha \quad (2.1.109)$$

tengsizlikka ekvivalentdir.

Shunday qilib, barcha α - qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami - bu (2.1.108) va (2.1.109) shartlar bajariluvchi $x^* = (x_1, x_2, p_1, p_2, p_3)$ vektorlar to'plamidir.

(2.1.105) noravshan chiziqli dasturlash masalasining max-qanoatlantiruvchi yechimini topish uchun quyidagi nochiziqli dasturlash masalasini yechgan holda, 2.1.25-ta'rifdan foydalanamiz:

$$(2.1.115), (2.1.116),$$
$$0 \leq x_1, x_2, \alpha \leq 1,$$
$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$

cheklanishlarda α ni maksimallashtiring. Kompyuterda tajriba o'tkazish quyidagi muqobil yechimni hisoblashga imkon beradi:

$x_1 = 0.605$, $x_2 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.811$, $p_3 = 17.741$, $\alpha = 0.990$.

Huddi shunday, lekin ravshan masala uchun, ya'ni noravshan parametrlarning o'rta qiymatiga teng bo'lgan haqiqiy sonlar hisoblanuvchi $\tilde{c}_i, \tilde{a}_{ij}, \tilde{u}_j$ parametrli (2.1.105) chiziqli noravshan dasturlash masalasi uchun quyidagi muqobil yechimlarga ega bo'lamiz:

$x_1 = 0.6$, $x_2 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.8$, $p_3 = 17.611$, $z = 26.744$.

Tabiiyki, parametrlarning o'rta qiymatlaridan foydalanilganligi uchun ikkala yechim bir-biriga yaqin bo'ladi.

Boshqa tomondan, biz $\alpha < 1$ ga nisbatan, masalan $\alpha = 0.7$ uchun, ya'ni quyi samaradorlik darajasiga nisbatan α - samarali yechimni hiosblaymiz. Qo'shimcha p_3 maksimallashtirish shartida bunday yechim

$x_1 = 0.62$, $x_2 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0.811$, $\alpha = 0.7$ va $p_3 = 17.744$ kabi bo'ladi.

Shunday qilib, noravshan chiziqli dasturlash masalasining bayoni model parametrlarining noaniqligi sharoitida "muqobil" yechimlarning har xil turlarini topish hamda qo'shimcha talablarni hisobga olish imkonini beradi.

Mazkur bobda noravshan koeffitsiyentli noravshan chiziqli dasturlashdagi ko'p mezonli masalalarni yechishning umumiy yondashuvi taklif etilgan. Bu yondashuvning umumlashtiruvchi qoidalasi noravshan munosabat, xususan tenglik yoki tengsizlik munosabatlari hamda agregatlashtirish operatori tushunchasidir.

Biz noravshan chiziqli dasturlash masalasini bayon qildik, bunday masalaning joiz yechimini aniqladik, noravshan chiziqli dasturlash masalalariga nisbatan “muqobil” yechimni hisoblash muammosini ko'rib chiqdik. Ikkita yondashuv taklif etildi: birinchi yondashuv noravshan kattaliklar bilan modellashtiriluvchi tashqaridan berilgan maqsadlarga asoslangan qanoatlantiruvchi yechimga asoslanadi; ikkinchisi esa α-samarali (noustuvor) yechimga asoslanadi. Keyingi tadqiqotlar noravshan dasturlashning ikkilamchiligiga qaratilgan [9,10,26-28,34, 87,101,135].

Va nihoyat, biz ko'p mezonli holni qaradik va noravshan chiziqli dasturlashning ko'p mezonli masalasini bayon qildik. Kelishuvli yechim aniqlanganidan so'ng, bunday yechimlarni topish masalasini sodda nochiziqli muqobillashtirish masalasiga olib kelishga oid natijalar chiqarildi.

2.2. Chiziqli dasturlash masalalarini imkoniyatli muntazamlashtirish muammolari

Matematik dasturlashda, alohida, turg'un bo'lmagan masalalar sinfi o'rganib chiqiladi [87,91]. Ularni yechish uchun muntazamlashtirishlarning turli xil usullari ishlab chiqilgan bo'lib, ular [18,73] da batafsil ko'rib chiqilgan. Mazkur ishda joriy turg'un bo'lmagan masalani imkoniyatli muqobillashtirish masalasiga keltirishga asoslangan chiziqli dasturlash masalasining yangi muntazamlashtirish usullari taklif etiladi. Chiziqli dasturlash masalalarining turg'unligi va noravshan muqobillashtirish masalalari o'rtasidagi aloqa oldin ham o'rnatilgan edi. Masalan, [100] ishda muntazamlashtirish kontekstida to'g'ri burchakli yoki o'tkir noravshan sonlarni simmetrik trapesiyasimon yoki triangulyatsiyalangan kattaliklar bilan silliqlashtirish g'oyasi ko'rib chiqilgan. Imkoniyatli dasturlash masalalarining turg'unlik shartlarini belgilovchi umumiy natijalar [73] da olingan. Ushbu ishda ko'rib chiqilgan muntazamlashtirish usuli yechimlar to'plamini kengaytirish g'oyasidan foydalandi va imkoniyatli yondashuv doirasida, aprior ekspert baholarga asoslangan holda, yeshimlarning imkoniyatlilik o'lchovlarini hisobga olishga imkon beradi.

2.2.1. Imkoniyatlar nazariyasining asosiy tushunchalari

Imkoniyatlar nazariyasining quyida keltirilgan matematik apparati [18,87] natijalarga asoslangan. Γ – elementlarning sodda (ravshan) to'plami bo'lib, quyida u $\gamma \in \Gamma$ kabi belgilanadi, bu yerda $P(\Gamma)$ - hamma Γ qism to'plamlar sinfi.

2.2.1-ta'rif. Imkoniyatlilik o'lchovi deb shunday to'plamlar funksiyasiga aytiladiki:

$\pi : P(\Gamma) \to [0,1]$

ixtiyoriy I - indekslar to'plami va $A_i \in P(\Gamma)$ to'plamga nisbatan quyidagi xossalar bajariladi:

1) $\pi\{\varnothing\}=0$, $\pi\{\Gamma\}=1$,

2) $\pi\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} \pi\{A_i\}$,

2.2.2-ta'rif. Zarurlik o'lchovi deb shunday to'plamlar funksiyasiga aytiladiki:

$\nu : P(\Gamma) \to [0,1]$

bunda ixtiyoriy I - indekslar to'plami va $A_i \in P(\Gamma)$ to'plamga nisbatan quyidagi xossalar bajariladi:

1) $\nu\{\varnothing\}=0$, $\nu\{\Gamma\}=1$,

2) $\nu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \inf_{i \in I} \nu\{A_i\}$,

Quyidagi muhim xossa zarurlik va imkoniyatlilik o'lchovlari o'rtasidagi ikki taraflamalik munosabatni ifodalaydi:

$\nu\{A\} = 1 - \pi\{\bar{A}\}$,

bu yerda $\bar{A}$ - A ning *P(Γ)* dagi to'ldirmasi.

2.2.3-ta'rif. Imkoniyatli kattalik - aprior imkoniyatli qiymatlari Z kattalik imkoniyatlarining taqsimoti

$$\mu_Z(z) = \pi\{\gamma \in \Gamma | Z(\gamma) = z\} \quad \forall z \in E^1$$

deb ataluvchi $\mu_Z : E^1 \to [0,1]$ funksiya bilan chegaralangan $Z : \Gamma \to E^1$ akslantirishdir, $\mu_z(z)$ esa - «Z kattalik z qiymatni qabul qilish imkoniyati" dir. Bu yerda va kelgusida E^1, E^n – mos o'lchovli evklid fazolari.

2.2.4-ta'rif. $\mu_Z(m)=1$ bo'lsa, M haqiqiy son Z imkoniyatli kattalikning modal qiymati deyiladi.

2.2.5-ta'rif. Z-imkoniyatli kattalikning tashuvchisi quyidagi to'plamdir:

$$\sup p(Z) = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) > 0\}.$$

2.2.6-ta'rif. **Z** imkoniyatli kattalikning α - darajali to'plami deb

$$[Z]^\alpha = [\underline{Z}(\alpha), \overline{Z}(\alpha)] = \{z \in E^1 | \mu_Z(z) \geq \alpha\}.$$

$$\alpha \in (0,1]$$

to'plamga aytiladi. Kelgusida $[Z]^0$ =cl(supp(Z)) to'plamni kompakt deb qaraymiz.

2.2.7-ta'rif. Z imkoniyatli kattalik taqsimot funksiyasi kvazibotiq bo'lsa, qavariq deyiladi:

$$\mu_Z(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \geq \min\{\mu_Z(z_1), \mu_Z(z_2)\}$$

$$\forall z_1, z_2 \in E^1, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

$Z_1,\ldots,Z_n$ – imkoniyatli kattaliklar bo'lsin. Imkoniyatli kattaliklar majmuining taqsimot funksiyasi quyidagi yo'l bilan aniqlanadi:

$$\mu_{Z_1,\ldots,Z_n}(z_1,\ldots,z_n) = \pi(\gamma \in \Gamma | Z_1(\gamma) = z_1,\ldots,Z_n(\gamma) = z_n),$$

$$(z_1,\ldots,z_n) \in E^n.$$

2.2.8-ta'rif. $\{1,\ldots,n\}$ to'plamning ixtiyoriy $\{i_1,\ldots,i_k\}$ qism to'plamiga nisbatan

$$\mu_{Z_{i_1},\ldots,Z_{i_k}}(z_1,\ldots,z_k) = \min\{\mu_{Z_{i_1}}(z_1),\ldots,\mu_{Z_{i_k}}(z_k)\}, \quad \forall (z_1,\ldots,z_k) \in E^n$$

shart bajarilgan bo'lsa, $Z_1,\ldots, Z_n$ imkoniyatli kattaliklar minialoqali deyiladi. Bu yerda $\mu_{Z_{i_s}}$ - imkoniyatlar taqsimotining bir o'lchovli funksiyalari.

Z_1,Z_2 – R munosabatning $E^1 \times E^1$ da berilgan imkoniyatli kattaliklari bo'lsin. Z_1 imkoniyatli kattalik Z_2 ga R munosabatda bo'lish imkoniyati quyidagiga teng:

$$\pi\{R(Z_1, Z_2)\} = \pi\{\gamma \in \Gamma | R(Z_1(\gamma), Z_2(\gamma))\}.$$

Kvazibotiq taqsimotlar bilan tavsiflanuvchi, kompakt tashuvchilar va α-darajali ($\forall \alpha \in (0,1]$) berk to'plamlarga ega bo'lgan jami imkoniyatli kattaliklar to'plamini $\Im(E^1)$ bilan belgilaymiz. $\Im(E^1)$ to'plamda o'lchovni quyidagicha aniqlaymiz:

$$d(Z_1, Z_2) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([Z_1]^\alpha, [Z_2]^\alpha),$$

bu yerda $d_H(A,B)=max[\Delta(A,B),\Delta(B,A)]$ - Xausdorf o'lchovi, $\Delta(A,B)=\sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|$, $\Delta(B,A)=\sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A}\|a-b\|$ - yarim o'lchov.

$\Im_c(E^1) \subseteq \Im(E^1)$ - imkoniyatli kattaliklarning uzluksiz taqsimotli to'plami bo'lsin. $\Im_c(E^1)$ da tekis o'lchovni aniqlaymiz:

$$c(Z_1,Z_2)=\sup_{t\in E^1}\left|\mu_{z_1}(t)-\mu_{z_2}(t)\right|.$$

Ixtiyoriy $Z\in\Im_c(E^1)$ va $\theta\geq 0$ uchun uzluksiz moduli Z deb ataluvchi yordamchi tavsif $\omega(Z;\theta)$ ni kiritamiz:

$$\omega(Z_1;\theta)=\sup_{|t'-t''|\in\theta}\left|\mu_z(t')-\mu_z(t'')\right|.$$

Kelgusida bizga quyidagi tavsif kerak bo'ladi:

$$\Omega(Z_1;\theta)=\inf_{\substack{|t'-t''|\geq\theta \\ t',t''\in[Z]^0\setminus\{Z\}^1}}\left|\mu_z(t')-\mu_z(t'')\right|.$$

$\Im_s(E^1) \subseteq \Im_c(E^1)$ to'plam $(\underline{Z}(0),\underline{Z}(1))$ va $(\overline{Z}(1),\overline{Z}(0))$ da qat'iy monoton taqsimotli Z imkoniyatli o'zgaruvchilarning qism to'plami bo'lsin.

2.2.1-lemma. $\{Z_n|n=1,2,....,\}$ - $\Im_s(E^1)$ dan olingan imkoniyatli o'zgaruvchilar ketma-ketligi bo'lsin, $Z\in\Im_s(E^1)$. U holda

$$\lim_{n\to\infty}d(Z,Z_n)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}c(Z,Z_n)=0.$$

2.2.2-lemma. $\{Z_n|n=1,2,....,\}$ - $\Im_c(E^1)$ dan olingan imkoniyatli o'zgaruvchilar ketma-ketligi bo'lsin, $Z\in\Im_c(E^1)$. U holda

$$\lim_{n\to\infty}d(Z,Z_n)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}c(Z,Z_n)=0.$$

Teskari tasdiq umuman olganda o'rinli emas, ya'ni qat'iy monotonlik sharti zaruriydir.

2.2.3-lemma. $Z_1, Z_2\in\Im_c(E^1)$, $d(Z_1, Z_2)\leq\varepsilon$ bo'lsin. U holda

$$c(Z_1,Z_2)\leq\max\{\omega(Z_1;\varepsilon),\ \omega(Z_2,\varepsilon)\}.$$

2.2.4-lemma. $Z_1, Z_2\in\Im_s(E^1)$ bo'lsin. U holda $\varepsilon_0>0$ shunday bo'ladiki, ixtiyoriy $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ ga nisbatan $d(Z_1, Z_2)\leq\varepsilon$ shart quyidagini keltirib chiqaradi:

$$c(Z_1,Z_2)\geq\min\{\Omega(Z_1;\varepsilon),\ \Omega(Z_2;\varepsilon)\}.$$

Imkoniyatli kattaliklarning oilasini ifodalovchi $\Im_s(E^1)$ to'plamning parametrli darajada hisoblashlar olib borish mumkin bo'lgan maxsus qism to'plamlarini ko'rib chiqamiz. Bu oilalar qo'shish va skalyarga ko'paytirish amallariga nisbatan berkdir. Shu oilalar va mos taqsimotlar yordamida noravshan tizimlar parametrlar qiymatlarining deyarli barcha to'plamlarini modellashtirish mumkin.

2.2.9-ta'rif. $Z:\Gamma \rightarrow E^1$ imkoniyatli kattalik taqsimoti quyidagi tarzda aniqlansa, u normal deyiladi:

$$\mu_z(z) = \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{b^2}\right), \quad -\infty < z < +\infty.$$

Bu yerda *a* va *b* – noravshanlikning mos ravishda modal qiymati va koeffitsiyenti. Bu qiymatlar Z kattalikni bir qiymatli aniqlagani uchun, kelgusida *Z = N(a, b)* belgilashdan foydalanamiz, normal taqsimotlar bilan aniqlanuvchi imkoniyatli kattaliklar to'plamini esa $\Im_N(E^1)$ bilan belgilaymiz.

2.2.10-ta'rif. $Z:\Gamma \rightarrow E^1$ imkoniyatli kattalik o'z imkoniyatlarining taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa, triangulyar deyiladi:

$$\mu_z(z) = \max\{0, \min\{1 - C_z(z-a), 1 + C_z(z-a)\}\}.$$

Bu yerda a,b=2/C_Z –noravshanlikning mos ravishda modal qiymati va koeffitsiyentidir; Z=TR(a,b), $\Im_{TR}(E^1)$.

Imkoniyatliklarining normal va triangulyar taqsimotlari "a ga taqriban yaqin" haqiqiy sonlar to'plamini modellashtiradi. Normal va triangulyar oilalarga tegishli noravshan kattaliklar to'laligicha o'zlarining (a,b) parametrlar juftligi bilan aniqlanadi. Mazkur oilalarning parametrli kattaliklariga nisbatan quyidagi tasdiq isbotlanishi mumkin.

2.2.1-tasdiq. Z_1, Z_2 – (a_1,b_1), (a_2,b_2) parametrli normal (triangulyar) minialoqali kattaliklar bo'lsin. U holda $Z = Z_1 + Z_2$ – (a_1+a_2), $(b_1,+b_2)$ parametrli normal (triangulyar) kattalikdir.

2.2.2-tasdiq. $Z_1,\ldots,Z_n$ – $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ parametrli minialoqali normal (triangulyar) kattaliklar, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ –skalyarlar bo'lsin, u holda

$$Z = \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i Z_i$$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| b_i$ parametrli normal (triangulyar) imkoniyatli kattalikdir.

2.2.2. Imkoniyatli muqobillashtirish masalalarining modellari va ularning turg'unlik mezonlari

Mezonlar va cheklanishlar modellari asosida qurilgan imkoniyatli chiziqli dasturlash masalalarining imkoniyatli qo'yilishlarini ajrataylik [87,91,100], ular maqsadga erishish darajasi va cheklanishlarning bajarilish darajasini noaniqlik o'lchovi orqali aniqlaydi [70,73,74,86,87,101,135,146].

$a_{ij}(\gamma), b_{ij}(\gamma)$ – $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ imkoniyatli fazoda aniqlangan minialoqali imkoniyatli kattaliklardir, σ_0 –π o'lchov yoki ν o'lchov, R_0 – $E^1 \times E^1$ dagi munosabat, $\alpha_i \in (0,1]$ - imkoniyatlik darajasi, $X=\{x \in E^n | x_1, \ldots, x_n \geq 0\}$ - afzalliklar to'plami, $f_i(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma)$.

Asosiy muammo

$$M[f_0(x,\gamma)] \to \max,$$
$$\begin{cases} M[f_i(x,\gamma)] = 0, \; i=1,..,m, \\ x \in X \end{cases}$$

ko'rinishdagi imkoniyatli muqobillashtirish masalalarini yechish muammosidir, bu yerda M- mos imkoniyatli funksiyalarning modal qiymatlariga o'tish operatori.

Quyida imkoniyat bo'yicha cheklanishlarda darajani maksimallashtirish muammosi keltirilgan:

$$k \to \max$$
$$\begin{cases} \pi\{f_0(x,\gamma) = k\} \geq \alpha_0, \\ \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \geq \alpha_i, \quad i=1,\ldots,m, \\ x \in X. \end{cases}$$

Oraliq tahlil doirasida mazkur muamoni qaror qabul qilishning maksimaks modeli sifatida talqin etish mumkin, bunda noravshan maqsad funksiyasining muqobil yechimi yuqorida berilgandan past bo'lishi kerak emas.

Yuqorida keltirilgan modellarda

$$f_0(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\gamma)x_j \;.$$

Imkoniyat bo'yicha satrma-satr cheklanishlarda o'lchovini maksimallashtirish muammosi quyidagi tarzda beriladi:

$$\sigma_0\{f_0(x,\gamma) R_0 0\} \to \max,$$

$$\begin{cases} \pi\{f_i(x,\gamma)=0\}\geq \alpha_i, \quad i=1,....,m, \\ x\in X. \end{cases}$$

Bu yerda:

$$f_0(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\gamma)x_j - b_0(\gamma).$$

Mazkur model noravshan maqsadga erishishning maksimal imkoniyatini yoki zaruratini aniqlash imkonini beradi [26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

Ko'rilayotgan masalalar doirasiga nisbatan turg'unlik tushunchasini kiritaylik. $\Re$ - masalaning joiz $a_1(\gamma)$, …, $a_p(\gamma)$ parametrlarni o'z ichiga olgan maqsad funksionalining (yechish natijasi) muqobil qiymatidir, $\Re$ - $X_0 \subseteq X$ to'plamda erishiladi, $\Re^{\varepsilon}$ - $a_1^{\varepsilon}(\gamma),..,a_p^{\varepsilon}(\gamma)$ parametrli masalani yechish natijasidir, bu natija quyidagiga tengdir:

$$\max_{i=1,..,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq \varepsilon, \qquad (2.2.1)$$

bu yerda $\varepsilon\in E^1$, $\varepsilon>0$, $\Re^{\varepsilon}$ ga $X^{\varepsilon}_0 \subseteq X$ to'plamga erishiladi.

2.2.11-ta'rif. Imkoniyatli muqobillashtirish masalasi natija bo'yicha turg'un hisoblanadi, agarda

$$(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\varepsilon>0)\max_{i=1,...,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0 \Rightarrow \Delta\left|\Re-\Re^{\varepsilon}\right|\leq\delta.$$

2.2.12-ta'rif. Imkoniyatli muqobillashtirish masalasi yechim bo'yicha turg'un hisoblanadi, agarda

$$(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon_0>0)(\forall\varepsilon>0)\max_{i=1,...,p} d(a_i(\gamma),a_i^{\varepsilon}(\gamma))\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0 \Rightarrow \Delta(X_0^{\varepsilon},X_0)\leq\delta.$$

2.2.3. Asosiy natijalar

Ishning asosiy natijalarini bayon qilishdan oldin, turg'unlik va muntazamlashtirish bilan bog'liq asosiy g'oya va usullarni misollarda ko'rib chiqamiz.

$$X=\{(x_1,x_2)\big| x_1,x_2\in E^1; 0\leq x_1,x_2\leq 1\}$$

bo'lsin.

2.2.1-misol.

$$f(x)=x_1+x_2\to\max \qquad (2.2.2)$$

masalani $D \subseteq X$ to'plamda qaraylik, u quyidagi cheklanishlar tizimi orqali aniqlansin:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

$\Re = \max\limits_{x \in D} f(x) = 2$ natijaga x=(1,1) nuqtada erishiladi. Faraz qilaylik, berilgan masaladagi joriy parametrlar xato bo'lsin, buning natijasida (2.2.2) maqsad funksiyaning muqobil qiymati $D^{\varepsilon} \subseteq X$, $D^{\varepsilon} \neq D$ to'plamda hisoblanadi. Bir nechta holni qaraylik.

I) D^{ε} quyidagi ko'rinishdagi tizim bilan berilsin:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -\varepsilon, \\ x_1 - x_2 = \varepsilon. \end{cases}$$

U holda $\bar{x}^{\varepsilon} = (1, 1-\varepsilon)$ nuqtada $\Re = \max\limits_{x \in D^{\varepsilon}} f(x) = 2 - \varepsilon$ bo'ladi. Ravshanki, $\varepsilon \to 0+$ da $\Re^{\varepsilon} \to \Re$, $\bar{x}^{\varepsilon} \to \bar{x}$ bo'ladi, bu esa masalaning ko'rilayotgan xarakterli chetlanishlarda ham natija bo'yicha, ham yechim bo'yicha turg'unligi to'g'risida guvohlik beradi.

II) D^{ε} quyidagi tizim bilan aniqlansin:

$$\begin{cases} -x_1 + (1+\varepsilon)x_2 = 0, \\ (1+\varepsilon)x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Bunday holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ da $\Re^{\varepsilon} = 0$ qiymatga $\bar{x}^{\varepsilon} = (0,0)$ nuqtada va mos ravishda $\Re^{\varepsilon} \not\to \Re$, $\bar{x}^{\varepsilon} \not\to$ x ga $\varepsilon \to 0+$ da erishiladi.

III) Agarda D^{ε} quyidagi ko'rinishdagi tizim bilan berilgan bo'lsa:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -\varepsilon, \\ x_1 - x_2 = \varepsilon \end{cases}$$

u holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ da D^{ε} - bo'sh to'plam bo'ladi va $\Re^{\varepsilon}$ muqobil yechim aniqlanmagan.

Shunday qilib, umumiy holda, (2.2.2), (2.2.3) masala ham yechim, ham natija bo'yicha turg'un emasdir.

2.2.2-misol. Noravshanlik sharoitlarida muqobillashtirish uchun (2.2.2), (2.2.3) masalaning o'xshashligini ko'rib chiqamiz. Imkoniyat bo'yicha satrma-satr cheklanishlar tizimidan foydalanamiz. Joriy parametrlarni normal taqsimotlar orqali modellashtiramiz. U holda masalaning (2.2.2) maqsad funksiyasini muqobillashtirishdan iborat bo'lgan quyidagi tizim ko'rinishida aniqlanuvchi imkoniyatli muqobillashtirish masalasini yechishga o'tamiz:

$$\begin{cases}\pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \\ \pi\{a_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha,\end{cases} \tag{2.2.4}$$

bu yerda a_{12}, a_{21} = N(1, b), a_{11}, a_{22} = N(-1, b). Imkoniyatlik darajasi α va noravshanlik koeffitsiyenti b ni qayd qilib qo'yamiz.

$f_i(x,\gamma) = a_{i1}(\gamma)x_1 + a_{i2}(\gamma)x_2$, i=1,2 ni qaraylik. 2.2.2-tasdiqga ko'ra: $f_1(x,\gamma) = N(-x_1 + x_2,\ b(x_1 + x_2))$ $f_2(x,\gamma) = N(x_1 - x_2, b(x_1 + x_2))$.

Imkoniyatli kattalikning ta'rifiga ko'ra:

$$\pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} = \mu_{f_i(x,\gamma)}(0) = \exp\left(-\frac{1}{b^2}\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}\right).$$

U holda $x \in X$ nuqtalarning joiz yechimlar to'plami D ga tegishlilik imkoniyatlarining taqsimoti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\mu_D(x) = \min_i\{\mu_{f_i(x,\gamma)}(0)\} = \exp\left(-\frac{1}{b^2}\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}\right).$$

Mazkur masalasining yechimi, huddi (2.2.2), (2.2.3) masalaning yechimi singari $\bar{x}$ =(1,1) nuqtadir, bunda maqsad funksionali o'zining $\Re$ = 2 qiymatiga 1 ga teng bo'lgan imkoniyatlik darajasi bilan erishadi.

Joriy noravshan parametrlarning xatoligini beraylik. Soddalik maqsadida fluktuatsiyalarni faqatgina imkoniyatli parametrlarning modal qiymatlarida ishtirok etadi deb faraz qilamiz. U holda (2.2.2), (2.2.3) masalaning o'rniga D^{ε} to'plamda (2.2.2) muqobillashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases}\pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}^{\varepsilon}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha, \\ \pi\{a_{21}^{\varepsilon}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = 0\} \geq \alpha,\end{cases} \tag{2.2.5}$$

bu yerda $a_{12}^{\varepsilon}, a_{21}^{\varepsilon} = N(1+\varepsilon, b)$, $a_{11}, a_{22} = N(-1, b)$. Ko'rinib turibdiki, (2.2.1) shart bajarildi. Bunda $x \in X$ nuqtalarning joiz yechimlar to'plami D^{ε} ga tegishlilik imkoniyatlarining taqsimoti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\mu_{D^{\varepsilon}}(x) = \min_i\{\mu_{f_i^{\varepsilon}(x,\gamma)}(0)\} = \exp\left(-\frac{((1+\varepsilon)\max\{x_1, x_2\} - \min\{x_1, x_2\}^2}{b^2(x_1 + x_2)^2}\right).$$

Cheklanish parametrlarining xatoligini oshirish $x \in X$ nuqtalarning D^{ε} to'plamga tegishli bo'lish imkoniyatini kamaytiradi. ε=0 da $\Re^0$ = 2 natijaga (1,1) nuqtada 1 imkoniyatlik bilan erishiladi. ε_0 bilan imkoniyati α bo'lgan $\Re^{\varepsilon}$ = 2 xatolik qiymatini belgilaymiz, bunda

$\varepsilon_0 = 2b\sqrt{-\ln\alpha}$. U holda $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ da muqobillik nuqtasi $\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4b^2}\right) \geq \alpha$ imkoniyatlik bilan $\Re^{\varepsilon} = 2$ bo'ladigan (1, 1) nuqta bo'ladi. $\varepsilon > \varepsilon_0$ da $D^{\varepsilon} = \varnothing$ to'plam va $\underline{\Re}^{\varepsilon}$ aniqlanmagan. Shunday qilib, yetarlicha kichik ε larda $\bar{x}^{\varepsilon}$ nuqta $\bar{x}$ nuqta bilan ustma-ust tushadi va $\Re^{\varepsilon}=\Re$ larda, ya'ni kichik xatoliklarda imkoniyatli muqobillashtirish masalasi joriy chiziqli dasturlash masalasidan farqli o'laroq, o'zining muqobil yechimini "yo'qotmaydi". Bu yechim faqatgina biroz joizligini yo'qotadi, jumladan mazkur bog'liqlik uzluksizdir, bu esa ko'rilayotgan masalada kuchli turg'unlik xossasining bajarilishi to'g'risida gapirishga imkon beradi.

Berilgan vaziyat 1-misolning II-holiga mos keladi. Huddi shu yo'l bilan qurilgan imkoniyatli model I, III hollarda ham turg'un bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bu klassik matematik dasturlash masalalariga nisbatan imkoniyatli muqobillashtirish masalalarining turg'un hatti-harakatini kafolotlovchi sust sharoitlar to'g'risida, shuningdek, noaniqlik to'g'risidagi axborotni xatolik xarakteri to'g'risidagi aprior farazlar sifatida talqin etilishida amaliyotga tadbiq etish uchun bunday masalalar qo'yilishi afzalroq ekanligi to'g'risida xulosa chiqarishga imkon beradi.

Imkoniyatli dasturlash, aslida, nochiziqli dasturlash masalari hisoblanib, ulardan chiziqli masalalar sinfida turgan holda chiziqli dasturlashning turg'un bo'lmagan masalalarning ravshan korrekt qo'yilishlariga o'tish mumkin [34,40,70,73,74, 87,101,135,146]. Bu imkoniyatli muqobillashtirish modellarining qo'llanilish doirasini kengaytirib, ma'lum nuqtai nazardan u tomonidan amaliyotga tadbiq etiladigan qaror qabul qilish tamoyillarini (taqsimotning mos sinflarida), joriy parametrlarning berilishiga nisbatan ekspertlarning axborotlaridan foydalanish uslubiyatini taqdim etuvchi imkoniyatlar nazariyasining apparatiga asoslangan determinantlashgan muqobil masalalarni, muntazamlashtirish usullari sifatida qarashga imkon beradi. Bunda qo'shimcha parametrlar muntazamlashtirish parametrlari sifatida talqin etiladi. Bizning misolimizda bu α, b juftligidir. Bunday yondashuvda joriy parametrlarning tarqoqligini tavsiflovchi noravshanlik koeffitsiyenti b faraz qilinuvchi xatolik bilan aniqlanadi, jumladan, har bir parametrga o'zining noravshanlik koeffitsiyenti mos kelgani uchun, shu yo'l blan tizimdagi parametrlarning uning turg'unligiga ko'rsatadigan individual ta'sirini hisobga olish mumkin. α imkoniyatli muqobillashtirish va joriy masalalardagi muqobul yechimning imkoniyat bo'yicha chetlashish darajasini chegaralaydi.

Keyingi misol talab qilingan imkoniyatni "noo'rin" tanlash natijasida tizim o'zining turg'un bo'lmagan xatti-harakati bilan chetlashish qiymati o'rtasida aloqa o'rnatishga qaratilgan.

2.2.3-misol. Quyidagi misolni qaraylik:

$$x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} \pi\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}^{\varepsilon}(\gamma)x_2 = \delta\} \geq \alpha, \\ \pi\{a_{21}^{\varepsilon}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 = \delta\} \geq \alpha, \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

Bu yerda $a_{12}^{\varepsilon}, a_{21}^{\varepsilon} = N(1+\varepsilon, b),\ a_{11}, a_{22} = N(-1, b)$ parametrlar, δ - musbat o'zgarmas son. $x \in X$ nuqtalarning D^{ε} joiz yechimlar to'plamiga tegishlilik imkoniyatlarining taqsimoti quyidagi ko'rinishga egadir:

$$\mu_{D^{\varepsilon}}(x) = \exp\left(-\frac{(\delta + (1+\varepsilon)\max\{x_1, x_2\} - \min\{x_1, x_2\})^2}{b^2 (x_1 + x_2)^2} \right).$$

$2b\sqrt{-\ln\alpha} = \delta$ munosabatni α qanoatlantirsin. Bunday holatda $\varepsilon=0$ da masala $\bar{x}^0 = (1, 1)$, $\Re^0 = 2$ yechimga ega bo'ladi. Lekin ixtiyoriy $\varepsilon>0$ da $D^{\varepsilon}=\varnothing$. (2.2.2), (2.2.6) masala turg'un emasdir.

Muntazamlashtirish parametrlari 2.2.3 hamda 2.2.4 lemmalarning natijalari asosida baholanishi mumkin. Muntazamlashtirishning zaruriy sharti chetlanishlarning bajarilish darajasi, imkoniyatlar o'lchovi orqali ifodalanuvchi noaniqlik sharoitlarida, muqobillikning xususiyatini akslantiruvchi kuchli turg'unlik shartining bajarilishidir. Bu shart talab qilingan imkoniyat darajasini biroz oshirishda turg'un masala yechimining mavjudligida ifodalanadi va masaladagi noravshan parametrlari taqsimoti bilan, uning yechimlarining noravshan to'plami tegishlilik funksiyasi xatoligi o'rtasidagi o'zaro aloqani aniqlashga asoslanadi. Berilgan shart bilan yuqorida taklif etilgan imkoniyatli muqobillashtirish masalalarini muntazamlashtirish usuli tubdan bog'liqdir. Chetlanishlarning bajarilish imkoniyati bo'yicha talablar darajasini pasaytirish, parametrlar taqsimotining kvaziegiluvchanligi hisobiga, joiz yechimlar to'plamini kengaytirishga ekvivalentdir. Shuni qayd etish joizki, mazkur usul nafaqat turg'un bo'lmagan, balki, imkoniyatli muqobillashtirishning ayrim korrekt bo'lmagan masalalariga, masalan, chetlanishlarning bajarilish imkoniyati darajasi yuqori bo'lganligi uchun joiz yechimlar to'plami bo'sh bo'lgan masalalarga nisbatan qo'llanilishi mumkin.

Bir qator yordamchi tasdiqlarni isbotlaylik. Kelgusida joriy masalaning joiz yechimlar to'plamini bo'sh deb faraz qilamiz.

$$D_\eta(\alpha) = \{x \in X | \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \geq \alpha_i + \eta\}$$

bo'lsin, u holda

$$f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma).$$

Keyingi natija 2.2.3 -lemmaning umumlashmasidir.

2.2.5-lemma. $a_{ij}(\gamma) \in \Im(E^1)$, j=1,…,n bo'lsin, u holda $\alpha_i \in (0,1]$, $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \min\{\alpha_i,\ 1-\alpha_i\}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy α_i, η_1, η_2 larga nisbatan quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$D_{-\eta}(\alpha_i) = \left\{ x \in X \Big| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta) \right\},$$

$$D(\alpha_i) = \left\{ x \in X \Big| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i) \right\},$$

$$D_{\eta}(\alpha_i) = \left\{ x \in X \Big| \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta)x_j \leq \overline{b}_i(\alpha_i + \eta), \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta)x_j \geq \overline{b}_i(\alpha_i + \eta) \right\},$$

bu yerda $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Shunday qilib, $\mu_{a_{ij}}, \mu_{b_i}$ taqsimotlar kvazibotiq va

$$\alpha - \eta_2 \leq \alpha - \eta_1 \leq \alpha \leq \alpha + \eta_1 \leq \alpha + \eta_2$$

bo'lsa, u holda

$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_2) \leq \underline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_1) \leq \underline{a}_{ij}(\alpha_i) \leq \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_1) \leq \underline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_2),$$

$$\overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_2) \leq \overline{a}_{ij}(\alpha_i + \eta_1) \leq \overline{a}_{ij}(\alpha_i) \leq \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_1) \leq \overline{a}_{ij}(\alpha_i - \eta_2),$$

$$\underline{b}_i(\alpha_i - \eta_2) \leq \underline{b}_i(\alpha_i - \eta_1) \leq \underline{b}_i(\alpha_i) \leq \underline{b}_i(\alpha_i + \eta_1) \leq \underline{b}_i(\alpha_i + \eta_2),$$

$$\overline{b}_i(\alpha_i + \eta_2) \leq \overline{b}_i(\alpha_i + \eta_1) \leq \overline{b}_i(\alpha_i) \leq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta_1) \leq \overline{b}_i(\alpha_i - \eta_2),$$

bundan lemmaning isboti kelib chiqadi.

$$D_\eta(\alpha) = \{x \in X | \pi\{f_i(x,\gamma) = 0\} \geq \alpha_i + \eta,\ i = \overline{1,m}\}$$

to'plamni kiritamiz, bu yerda $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$.

2.2.6-lemma. $a_{ij}(\gamma) \in \Im(E^1)$, j=1,…,n bo'lsin, u holda $\alpha \in (0,1]^m$, $0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \min\{\min_i \alpha_i,\ 1 - \max_i \alpha_i\}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy α, η_1, η_2 larga nisbatan quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$D_{-\eta_2}(\alpha) \supseteq D_{-\eta_1}(\alpha) \supseteq D(\alpha) \supseteq D_{\eta_1}(\alpha) \supseteq D_{\eta_2}(\alpha).$$

Isbot. 2.2.5-lemmaga asosan:

$$D_{-\eta_2}(\alpha)=\bigcap_{i=1}^{m} D_{-\eta_2}(\alpha_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m} D_{-\eta_1}(\alpha_i)=D_{\eta_1}(\alpha),$$

$$D_{-\eta_1}(\alpha)=\bigcap_{i=1}^{m} D_{-\eta_1}(\alpha_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m} D(\alpha_i)=D(\alpha),$$

$$D(\alpha)=\bigcap_{i=1}^{m} D(\alpha_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m} D_{\eta_1}(\alpha_i)=D_{\eta_1}(\alpha),$$

$$D_{-\eta_2}(\alpha)=\bigcap_{i=1}^{m} D_{-\eta_1}(\alpha_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m} D_{-\eta_1}(\alpha_i)=D_{\eta_2}(\alpha)\,.$$

2.2**.**2 tasdiqga ko’ra:

$$D_{\eta_1}(\alpha)=\bigcap_{i=1}^{m} D_{\eta_1}(\alpha_i)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m} D_{\eta_2}(\alpha_i)=D_{\eta_2}(\alpha),$$

demak, lemma isbotlandi.

$$D^{\varepsilon}(\alpha)=\{x\in X\,\big|\,\pi\{f_i^{\varepsilon}(x,\gamma)=0\}\geq\alpha_i,\, i=\overline{1,m}\}$$

to’plamni kiritamiz, bu yerda

$$f_i^{\varepsilon}(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\varepsilon}(\gamma)x_j-b_i^{\varepsilon}(\gamma),$$

ε - (2.2.1)-shartni qanoatlantiruvchi xatolik qiymati.

2.2.7-lemma. $a_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma)\in\Im_c(E^1)$ bo’lsin va η quyidagi munosabatni qanoatlantirsin:

$$\max_{i,j}\{\omega(a_{ij};\varepsilon),\omega(b_i;\varepsilon)\}\leq\eta\leq\min\{\min_i\alpha_i,1-\max_i\alpha_i\}\,.$$

U holda

$$D_{\eta}(\alpha)\subseteq D^{\varepsilon}(\alpha)\subseteq D_{-\eta}(\alpha)\,.$$

Isbot. Ta’rifga ko’ra:

$$\left|\underline{a}_{ij}^{\varepsilon}(\alpha_i)-\underline{a}_{ij}(\alpha_i)\right|\leq\varepsilon,\quad\left|\overline{a}_{ij}^{\varepsilon}(\alpha_i)-\overline{a}_{ij}(\alpha_i)\right|\leq\varepsilon,$$

$$\left|\underline{b}_{i}^{\varepsilon}(\alpha_i)-\underline{b}_{i}(\alpha_i)\right|\leq\varepsilon,\quad\left|\overline{b}_{i}^{\varepsilon}(\alpha_i)-\overline{b}_{i}(\alpha_i)\right|\leq\varepsilon.$$

Agar

$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i)\leq\underline{a}_{ij}^{\varepsilon}(\alpha_i)\leq\overline{a}_{ij}^{\varepsilon}(\alpha_i)\leq\overline{a}_{ij}(\alpha_i),$$

$$\underline{b}_{i}(\alpha_i)\leq\underline{b}_{i}^{\varepsilon}(\alpha_i)\leq\overline{b}_{i}^{\varepsilon}(\alpha_i)\leq\overline{b}_{i}(\alpha_i)$$

bo’lsa, u holda $D(\alpha)\supseteq D^{\varepsilon}(\alpha)$ va $D^{\varepsilon}(\alpha)\subseteq D_{-\eta}(\alpha)$ tasdiq 2.2.6-lemmaga ko’ra o’rinlidir. Aks holda

$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i)-\varepsilon\leq\underline{a}_{ij}^{\varepsilon}(\alpha_i)\leq\overline{a}_{ij}(\alpha_i),$$

$$\underline{a}_{ij}(\alpha_i-\eta)\le \underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i)-\varepsilon$$

tengsizlik

$$\omega(a_{ij};\ \varepsilon)\le\eta\le\min\{\alpha_i,1-\alpha_i\} \qquad (2.2.7)$$

farazdan kelib chiqadi, bu esa $\underline{a}_{ij}(\alpha_i-\eta)\le\underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i)$ ni keltirib chiqaradi.

$\overline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i)>\overline{a}_{ij}(\alpha_i)$ da $\underline{a}_{ij}(\alpha_i)\le\underline{a}^{\varepsilon}_{ij}(\alpha_i)\le\overline{a}_{ij}(\alpha_i-\eta)$ ga ega bo'lamiz. Huddi shu yo'l bilan

$\underline{b}_i(\alpha_i-\eta)\le\underline{b}^{\varepsilon}_i(\alpha_i)\le\overline{b}^{\varepsilon}_i(\alpha_i)\le\overline{b}_i(\alpha_i-\eta)$ $\omega(b_i;\varepsilon)\le\eta\le\min\{\alpha_i,1-\alpha\}$

bahodan kelib chiqishini ham ko'rsatish mumkin. Hosil bo'lgan tengsizliklardan $D^{\varepsilon}(\alpha)\subseteq D_{-\eta}(\eta)$ ekanligi kelib chiqadi.

Teskari kiritish $D^{\varepsilon}(\alpha)\subseteq D_{-\eta}(\alpha)$ ning isboti shunga o'xshash mulohazalarga asoslanadi. Lemma isbotlandi.

2.2.8-lemma. Ixtiyoriy $\alpha\in[0,1]$, $\eta_0\ge 0$ uchun Xausdorf o'lchovida

I. $\lim\limits_{\eta\to\eta_0+} D_{\eta}(\alpha)=D_{\eta_0}(\alpha),$

II. $\lim\limits_{\eta\to\eta_0-} D_{\eta}(\alpha)=D_{\eta_0}(\alpha)$

munosabatlar bajariladi.

Kelgusida, imkoniyatli muqobillashtirish masalasini yechishda, mezon modeli natija bo'yicha turg'un, joiz yechimlar to'plami D(α) chegaralangan deb faraz qilamiz.

2.2.3-tasdiq. $a_{ij}(\gamma)$, $a^{\varepsilon}_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma)$ $\in\Im_c(E^1)$ bo'lsin. Agarda D(α) ichki nuqtaga ega bo'lsa, u holda masala yechim bo'yicha turg'un bo'ladi.

Isbot. Mezon modelining turg'unligi hisobiga

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Delta(D^{\varepsilon}(\alpha),D(\alpha))=0$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

D(α) ichki nuqtaga ega bo'lganligi uchun, $D_{\eta}(\alpha)\subseteq D(\alpha)$ munosabatni qanoatlantiruvchi η>0 mavjud bo'ladi. 2.2.7-lemmaga ko'ra

$$(\forall\overline{\eta}\le\eta)D(\alpha)\supseteq D_{\overline{\eta}}(\alpha)\supseteq D_{\eta}(\alpha),$$

$D_{\overline{\eta}}(\alpha)$ chegaralangan va masala $D_{\overline{\eta}}(\alpha)$ da yechimga egadir. $\{\varepsilon_k\}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. $\{\eta_k|\omega(\varepsilon_k)\le\eta_k\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz, bu yerda

$$\omega(\varepsilon_\kappa) = \max_{i,j}\{\omega(a_{ij};\varepsilon_k), \omega(b_i;\varepsilon_k)\}.$$

Masaladagi imkoniyatli parametrlar taqsimotining tekis uzluksizligi hisobiga, biz $\{\eta_k\}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ deb olishimiz mumkin. Ma'lum bir raqamdan boshlab $\eta_k \le \eta$ munosabat o'rinli bo'ladi, u holda 2.2.7-lemmaga ko'ra

$$D_{-\eta_k}(\alpha) \supseteq D^{\varepsilon_k}(\alpha) \supseteq D_{\eta_k}(\alpha).$$

Lekin 2.2.8-lemmaga ko'ra $k\to\infty$ da $D_{-\eta_k}(\alpha), D_{\eta_k}(\alpha)$ Xausdorf o'lchovi bo'yicha D(α) ga intiladi, bu esa $D^{\varepsilon_k}(\alpha)\xrightarrow[k\to\infty]{}D(\alpha)$ ni keltirib chiqaradi. Tasdiq isbotlandi.

Mazkur tasdiq modal cheklanishlar tizimidan foydalanuvchi masalalarning turg'un bo'lmaslik shartini o'rnatadi.

Natija. $a_{ij}(\gamma)$, $a^{\varepsilon}_{ij}(\gamma)$, $b_i(\gamma)$, $b^{\varepsilon}_i(\gamma) \in \Im_c(E^1)$ bo'lsin. Agarda $D_\eta(\alpha) \neq \varnothing$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\eta>0$ mavjud bo'lsa, u holda masala yechim bo'yicha turg'undir.

Ishda ham determinantlashgan masalalarning, ham imkoniyatli taqsimotlar bilan xarakterlanuvchi noravshan parametrli masalarning turg'unligini o'rganishga imkon beruvchi bir shaklga keltirilgan yondashuv asosida chiziqli dasturlash masalalarni muntazamlashtirish usuli taklif etilgan. Kuchli turg'unlik shartlari hosil qilindi, ularning bajarilishi sozlovchi model rolini o'ynovchi imkoniyatli nusxaning turg'un bo'lishini kafolatlaydi.

2.3. Noravshan joriy axborot holatida parametrli modellashtirish muammolari

Ko'pgina hollarda parametrik modellarning chegaralari ma'lum bir texnik yoki ishlab chiqarish jarayoni bog'liq bo'lgan turli xil shartlarning matematik ta'rifi va sonli ifodasini namoyon qiladi. Bunday xilma-xillik mos chegaralarni ifodalovchi qiymatlarning o'zgarishiga ta'sir qiluvchi sabablarni erkli, lekin bir vaqtda ta'sir qiluvchi deb qaralishiga o'z ta'sirini ko'rsatishi mumkin [73,74,86,87,101,135,146]. Shu kabi masalalarrni bir nechta parametr orqali ifodalash mumkin. Ba'zan parametrik modelning koeffitisiyentlari to'g'risida "tarqoq" - noravshan axborot berilgan bo'ladi xolos. Noravshan axborotni shakllantirishga imkon beruvchi matematik apparat sifatida noravshan to'plamlar nazariyasi qo'llaniladi. S ta $t_1,\ldots,t_s$ erkli o'zgaruvchili parametrik model yoki S parametrli masala matrisaviy ko'rinishda quyidagi tarzda yozib olinadi:

$$
\begin{aligned}
&z=(\bar{a}_0+t'\bar{b})x+\bar{e}t\rightarrow extr,\\
&(\bar{a}+\bar{c}t)x\subset K, \qquad\qquad (2.3.1)\\
&t\in R^s.
\end{aligned}
$$

Bu yerda $K=\{y|\ y\in R^n, y\le \bar{a}_{.0}+\bar{p}t\}$ – R^n to'plamning berilgan qavariq qism to'plami. $\bar{a}_0,\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{e},\bar{p}$ koeffitsiyentlarning qiymatlari noravshan qism to'plamlar shaklida ta'riflangan, ya'ni mos to'plamlarning $\mu_{\bar{a}_0}(a_0)$ $(\bar{a}_0\subset A_0)$, $\mu_{\bar{a}}(a)$ $(\bar{a}\subset A)$, $\mu_{\bar{b}}(b)$ $(\bar{b}\subset B)$, $\mu_{\bar{c}}(c)$ $(\bar{c}\subset C)$, $\mu_{\bar{e}}(e)$ $(\bar{e}\subset E)$ va $\mu_{\bar{p}}(p)$ $(\bar{p}\subset P)$ tegishlilik funksiyalari berilgan.

Bunday turdagi masalani koeffitsiyenti to'plam-qiymatli bo'lgan parametrli dasturlash masalasi deb atash mumkin. Mazkur masala doirasida maqsad funksiyasini maksimallashtirish to'g'risida gapirish ma'noga ega emas, chunki bu funksiyaning qiymatlari son emas, sonlar to'plamidir. Ushbu muammoni hal etishda alternativalar to'plamida mazkur funksiya qanday alternativa munosabatini keltirib chiqarishini aniqlash, so'ngra qanday tanlovlarni shu alternativa munosabati ma'nosida ratsional deb olish masalasini o'rganib chiqish kerak.

Ko'rilayotgan modelni aniqlashtirish yo'lidagi keyingi qadam fazzifikasiya, ya'ni masalaning koeffitsiyentlarini noravshan to'plamlar shaklida ta'riflashdir. Bunda, parametrlarning mavjud qiymatlari to'plamini berishdan oldin, modelga shu noravshan to'plamlarning tegishlilik funksiyasi ko'rinishidagi qo'shimcha axborot kiritiladi. Shunday qilib, biz noravshan parametrli dasturlash masalasining yechish muammosiga duch keldik.

(2.3.1) masala parametrli dasturlashning quyidagi masalasiga keltiriladi:

$$
\begin{aligned}
&z = (a_0 + t^{'}b)x + et \rightarrow extr \quad ; \\
&(a + ct)x \le a_{.0} + pt ; \qquad (2.3.2)\\
&t \in R^s .
\end{aligned}
$$

$\bar{a}_0$ va $\bar{b}$ parametrlarning ta'rifi noravshan bo'lganligi uchun, ixtiyoriy $x(t) \in X$ alternativaning bahosi (ya'ni z(t) funskiyaning qiymati) son o'qidan olingan noravshan qism toplam bo'ladi.

Masalani bayon qilish uchun alternativalar baholarining universal to'plamida (boshqa so'z bilan aytganda, z(t) funksiya qiymatlarining universal to'plamida) alternativa munosabatini ta'riflash kerak. Mazkur holda, bu universal to'plam R^1 son o'qi bo'lib, joriy alternativalar munosabati R^1 dagi tabiiy tartib ($\ge$) bilan ustma-ust tushadi deb hisoblaymiz.

Masalani noravshan matematik dasturlashning umumiy masalasi shaklida bayon etamiz. Bu X to'plamda joriy noravshan axborotga mos kelgan noravshan alternativalar munosabatini qurish imkonini beradi. So'nga biz X to'plamda ustunlik qilmaydigan alternativalar qism to'plamini ajratamiz, u esa o'z navbatida alternativalarni ratsional tanlovi uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Umumiy masalani bayon qilish uchun z(t) va $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + pt)$ funskiyalarning noravshan qiymatlarini aniqlashda, shu funksiyalarga kiruvchi parametrlarning qiymatlarini bevosita qo'llash mumkin. Biz esa, nazarimizda biroz aniqroq hisoblangan, boshqa uslubdan foydalanamiz.

Avvalambor, $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + pt) \le 0$ noravshan chegaralanishga murojaat etib, ularga mos kelgan noravshan alternativalar qism to'plamini quramiz, uning tegishlilik funksiyasini $\mu_t(x)$ bilan belgilaymiz. Bunda quyidagi mulohazalarga tayanamiz.

a_0^0, a^0, c^0, p^0 - $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + pt) \le 0$ cheklanishlarda mos parametrlarning ma'lum bir noravshan sonli qiymatlari, ularning berilgan noravshan to'plamlarga tegishlilik darajalari mos ravishda

$\mu_{\bar{a}_0}(a_0^0), \bar{a}_0 \subset A_0$ $\mu_{\bar{a}}(a^0), \bar{a} \subset A$, $\mu_{\bar{c}}(c^0), \bar{c} \subset C$ va $\mu_{\bar{p}}(p^0), \bar{p} \subset P$ ga teng. μ^0 orqali shu sonlardan eng kichigini belgilaymiz.

Agar ma'lum bir alternativa $\tilde{x} \in X$

$$\psi(t) = (a^0 + c^0 t)\tilde{x} - (a_{.0}^0 + d^0 t) \leq 0,$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda mazkur alternativa mavjud μ^0 alternativalar to'plamiga tegishli bo'ladi, ya'ni $\mu_t(\tilde{x}) \geq \mu^0$. Bu bilan, umuman aytganda, mavjud alternativalarning noravshan to'plami aniqlab beriladi. Uning tegishlilik funksiyasini yozishda qulayliklar yaratish uchun, quyidagi belgilashlar kiritamiz: $\mu_{\bar{a}}(a)$ $(\bar{a} \subset A)$, $\mu_{\bar{c}}(c)$ $(\bar{c} \subset C)$ и $\mu_{\bar{p}}(p)$ $(\bar{p} \subset P)$.

Bunday belgilashlarda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\nu(t) = \inf(\mu_{\bar{a}}(a), \mu_{\bar{c}}(c), \mu_{\bar{p}}(p)),$$

$$\mu_t(x) = \sup \nu(t).$$

Cheklanish parametrlari to'g'risidagi joriy noravshan axborotni hisobga olgan holda, har bir alternativaga μ_t funksiya shu alternativaning o'rinli bo'lish darajasini mos qo'yadi.

Endilikda, berilgan noravshan "minimallashtiriluvchi" z(t) funksiyaga murojaat etamiz va uni $\varphi: X \times R^1 \to [0,1]$ ko'rinishdagi noravshan maqsad funksiyasi ko'rinishida ifodalaymiz. Bu yerdagi mulohalazalar oldingilariga o'xshashdir.

$a_0^{0'}, b^0$ - $z(t) = (a_0^{'} + t^{'} b)x + e^{'} t$ funksiya parametrlarining noravshan sonli qiymatlari bo'lib, ularning berilgan noravshan to'plamlarga tegishlilik darajalari mos ravishda $\mu_o^k(a_{0j}^0), \eta_{jl}^k(b_{jl}^0)$ ga teng. φ^0 - shu sonlarning eng kichigi bo'lsin. $\tilde{x} \in X$ - ma'lum bir alternativa bo'lib,

$$r^0 = (a_0^{0'} + t^{'} b^0)\tilde{x} + e^{'} t$$

noravshan soni esa $\tilde{x}$ alternativaga va $a_0^{0'}, b^0$ parametrlarning qiymatlariga mos keluvchi $z(t) = (a_0^{'} + t^{'} b)x + e^{'} t$ funksiyaning qiymatini ifodalaydi. Ushbu qiymat (r^0 soni) φ^0 darajadan past bo'lmagan $\tilde{x}$ alternativaning noravshan qism to'plamiga tegishli bo'ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, qidirilayotgan $\varphi(x,r(t))$ noravshan maqsad funksiyasi $\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$ ko'rinishda bo'ladi.

Va nihoyat, noravshan ta'riflangan parametrli joriy masala noravshan matematik dasturlashning quyidagi umumiy masalasi shaklida bayon qilinadi [40,70,73,74,86,87,101,135,146]:

$$\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$$

noravshan maqsad funksiyasini

$$\mu_t(x) = \sup \nu(t) .$$

ko'rinishdagi mavjud alternativalarning noravshan to'plamida "minimallashtirish".

Keyingi bosqich - bayon qilingan umumiy masala uchun ustuvor bo'lmagan alternativalarni topish.

Avvalambor, quyidagi maqsad funksiyali

$$\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$$

va parametrlarining qiymati aniq ma'lum bo'lgan

$$\psi(t) = (a+ct)x - (a_{.0} + pt) \le 0$$

tengsizlik orqali berilgan mavjud alternativalar to'plamli sodda masalani ko'rib chiqaylik.

Barcha $\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl})$ joriy noravshan to'plamlar $\sup\limits_{a_{0j} \in R^1} \mu_o^k(a_{0j}) \ge \alpha$ va $\sup\limits_{b_{jl} \in R^1} \eta_{jl}^k(b_{jl}) \ge \alpha$ munosabatlarni qanoatlantiradi. [73] da ko'rsatilishi bo'yicha, bunday holda $\varphi(x,r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$ har qanday $x \in X$ da

$$\sup_{r(t) \in R^1} \varphi(x,r(t)) \ge \alpha$$

xossaga ega bo'ladi. Ustuvor bo'lmaslik darajasi α dan kam bo'lmagan alternativalarni topish uchun, ko'rilayotgan holda, matematik dasturlashning quyidagi masalasini yechish yetarlidir:

$$r(t) \to \max ,$$

$$\varphi(x,r(t)) \ge \alpha ,$$

$$\psi(t) = (a+ct)x - (a_{.0} + pt) \le 0 ,$$

$$r(t) \in R^1 , \quad x \in X .$$

Endi, z(t) funksiyaning a_{0j}, b_{jl} parametrlari, $\psi(t)=(a+ct)x-(a_{.0}+pt)\le 0$ cheklanishlarning a_{ij}, c_{ijl}, p_{il} parametrlari noravshan tarzda ta'riflangan masalani ko'rib chiqamiz.

Mazkur masalada ravshan, $\varphi(x, r(t))=\sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$ funksiya bilan induksiyalangan hamda μ_t funksiya bilan induksiyalangan va R^1 da tabiiy tartibni hisobga olgan holda X alternativalar to'plamida ikkita alternativa baholanishi kerak.

Ustuvor bo'lmaslik darajasi α sondan kichik bo'lmagan alternativani topish uchun matematik dasturlashning quyidagi masalasini yechish yetarli bo'ladi:

$$z(t)=(a_0^{'}+t^{'}b)x+e^{'}t \to \min .$$

Bundagi cheklanishlar quyidagicha aniqlanadi:

$$\psi(t)=(a+ct)x-(a_{.0}+pt)\le 0,$$

$$\mu_o^k(a_{0j})\ge\alpha, \eta_{jl}^k(b_{jl})\ge\alpha,$$

$$\mu_{ij}^k(a_{ij})\ge\alpha,\ \nu_{ijl}^k(c_{ijl})\ge\alpha,\ \xi_{il}^k(d_{il})\ge\alpha,$$

$$x\in X .$$

Ushbu turdagi masalalarni yechish joriy masala uchun aqalli bir nechta ustuvor bo'lmagan(α darajali) alternativalarni aniqlash imkonini beradi.

(2.3.2) masalaning yechimi oshkor ravishda berilgan quyidagi yechim funksiyasi bo'ladi:

$$z_S(t)=\min\{z=(a_0^{'}+t^{'}b)x+e^{'}t \mid (a+ct)x\le(a_0+pt); x\ge 0\}.$$

O_i - (2.3.2) ni qanoatlantiruvchi t parametrning yechimlar to'plami bo'lsin. Koeffitsiyentlarning qiymati noravshan tarzda berilgani uchun, O_i to'plam $\varphi_{0i}(t)$ tegishlilik funksiyali noravshan to'plam bo'ladi. Shunday qilib,

$$O_i=\{t, \varphi_{0i}(t),\ t\in R^S\}.$$

Noravshan yechimga noravshan maksimal qiymat mos keladi:

$$\varphi_{zi}=\sup\varphi_{0i}(t),$$

$$t\in z^{-1}(r).$$

Ixtiyoriy x vektorga nisbatan quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$z_s(t)\le g(t), \qquad (2.3.3)$$

bu yerda

$$g(t)=(a_0^{'}+t^{'}b)x+e't.$$

(2.3.3) bilan beriluvchi q akslantirish

$$\varphi_q(z_S(t),g(t))=\begin{cases}1, agar\ g(t)\geq z_s(t)\\ 0, agar\ g(t)<z_s(t)\end{cases} \tag{2.3.4}$$

ifoda bilan tasvirlanadi.

$z_s(t)$ noravshan to'plam Z_t ning elementi bo'lgani uchun, q akslanitirsh oldidagi Z_t to'plamning obrazi hisoblangan G_t noravshan to'plamga g(t) tegishli bo'ladi. [73] ga ko'ra Z_t to'plam va uning G_t obrazining tegishlilik funksiyalari o'zaro

$$\varphi_{G_t}(g(t))=\max_{z_s(t)}\min\{\varphi_{Z_t}(z_s(t)),\varphi_q(z_S(t),g(t))\} \tag{2.3.5}$$

munosabat bilan bog'langan.

(2.3.2) dan (2.3.5) ga $\varphi_q(z_s(t),g(t))$ ni qo'yib,

$$\varphi_{G_t}(g(t))=\max_{z_s(t)}\{\varphi_{Z_t}(z_s(t)):z_S(t)\leq g(t)\} \tag{2.3.6}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

g(t) uchun O_i to'plam G_t ning obrazi bo'ladi. Bundan, [73, 58 b.] ga ko'ra, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi_{0i}(t)=\varphi_{G_t}(g(t))=\varphi_{G_t}((a_0^{'}+t^{'}b)+e^{'}t). \tag{2.3.7}$$

(2.3.6) ni (2.3.7) ga qo'yib,

$$\varphi_{0i}(t)=\max_{z_s(t)}\{\varphi_{Z_t}(z_s(t)):z_s(t)\leq(a_0^{'}+t^{'}b)+e^{'}t\} \tag{2.3.8}$$

munosabatga ega bo'lamiz.

$\varphi_{Z_t}(z_s(t))$ ga nisbatan (2.3.8) yechimning ko'rinishi

$$\varphi_{z_i}(t)=\exp(-\frac{k_i}{2}[\max(0,z_s(t)-(a_0^{'}+t^{'}b)x-e^{'}t)]^2) \tag{2.3.9}$$

kabi bo'ladi.

Noravshan akslantirish s ta o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi, ya'ni $t=t_1\times\ \ldots\times t_s$ – mos to'plamlarning dekart ko'paytmasi. Umumiy holda mazkur qism to'plamning tegishlilik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\varphi_z(t)=\prod_{i=1}^{s}\varphi_{z_i}(t). \tag{2.3.10}$$

(2.3.9) va (2.3.10) dan

$$\varphi_z(t)=\exp(-\Phi(\mathrm{t})) \tag{2.3.11}$$

munosabatga ega bo'lamiz, bu yerda

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} k_i[\max(0, z_s(t) - (a_0^{'} + t^{'}b)x - e^{'}t)]^2 .$$

Biz tomondan quyidagi 2.3.1. tasdiq isbotlandi: $z_s(t)$ (2.3.2) masalaning noravshan yechimi bo'lsin. U holda yechimlar to'plami (2.3.11) tegishlilik funksiyasiga ega bo'ladi.

Agar noravshan axborot berilgan bo'lsa, u holda t parametrlarning shunday bahosini tanlash kerakki, u $z_s(t)$ ni minimallashtirsin, ayni paytda uning Z_t to'plamga tegishlilik darajasi maksimal bo'lsin, ya'ni:

$$z(t) \to \min, \varphi_z(t) \to \max . \qquad (2.3.12)$$

[74, 61-bet] dagi 2 lemmaga ko'ra, $\varphi_z(t)$ ning musbatligi hisobiga, (2.3.12) dagi ikkinchi mezonni $Ln\varphi_z(t)$ bilan almashtirish mumkin. Shunday qilib, (2.3.12)

$$z(t) \to \min, \Phi(t) \to \min \qquad (2.3.13)$$

masalaga ekvivalentdir.

Bunday masalaning afzal yechimlari deb (2.3.13) dagi bir mezonni orttirmasdan turib, boshqa mezon bo'yicha yaxshilab bo'lmaydiganlari olinadi.

Z(t) funksiya qavariq funksiya, $\Phi(t)$ funksiya qavariq funksiya. Bunday holda Pareto bo'yicha muqobil yechimlar masalaning yechimi bo'ladi [74, 60 bet]:

$$\begin{aligned} &L(t) = z(t) + r\Phi(t) \to \min, \\ &r \in [0, \infty]. \end{aligned} \qquad (2.3.14)$$

Axborotni noravshan to'plamlar ko'rinishida shakllantirish holidagi singari bitta yechim emas, ularning ma'lum bir to'plami aniqlanadi. Ular r ning funksiyasi bo'ladi. Ularni t(r) orqali belgilaymiz.

L(t) funksiyaning qavariqligi hisobiga, $r_2 > r_1 \geq 0$ ga nisbatan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$z(r_1) + r_1\Phi(r_1) < z(r_2) + r_1\Phi(r_2),$$

$$z(r_2) + r_2\Phi(r_2) < z(r_1) + r_2\Phi(r_1).$$

Bundan

$$r_2(\Phi(r_2) - \Phi(r_1)) + r_1(\Phi(r_1) - \Phi(r_2)) < 0,$$

$$(\Phi(r_2) - \Phi(r_1))(r_2 - r_1) < 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan tengsizlikdan 2.3.2-tasdiq kelib chiqadi: agar L(t)-qavariq funksiya bo'lsa, u holda $\varphi_z(t)$ funcsiya r≥0 da qat'iy monoton kamayadi.

Bu degani, O_i to'plamda

$$\varphi_o(t) > \varphi_z(r) > 0 \text{ va } z(t)>r$$

tengsizliklar bir vaqtda bajariladigan alternativa yo'q, ya'ni φ_0 to'plamga tegishlilik darajasi $\varphi_z(r)$ dan katta bo'lmagan va r ga qaraganda kattaroq maksimallashtiruvchi funksiyani beruvchi t element yo'q. Agar qaror qabul qiluvchi shaxs yechim sifatida aniq $t \in T$ alternativani qabul qilmoqchi bo'lsa, u holda uning tanlovi, nafaqat mazkur alternativaning $\varphi_z(t)$ noravshan to'plamga tegishlilik darajasiga, balki z(t) funksiyaning mos qiymatlariga ham tayanishi kerak.

Maqsad funksiyasi koeffitsiyentlarining ko'pgina parametrlarga bog'liq bo'lish holini ko'rib chiqaylik:

$$z = \sum_{i=1}^{n} (a_{0i} + b_{i1}t_1 + ... + b_{is}t_s)x_i \to \max ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i K_{ij} \subset K , \qquad (2.3.15)$$

$$x_i \geq 0 .$$

Bu yerda $x \in E^m$, $K_{ij}, i = 1,2,...,n, j = 1,2,...,m$ va $K = \{y | y \in R^m, y \leq a_{j0}\}$ - E^m fazoda berilgan qavariq qism to'plam. Bunda $\sum_{i=1}^{n} x_i k_j$ quyidagi tarzda talqin etiladi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i K_{ij} = \{y \left| y \in R^m, y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}, a_{ij} \in K_{ij} \subset R^m, i = 1,...,n; j = 1,...,m\right.\} .$$

Ta'rif. (2.3.15) masalaning yechimi deb, oshkor ravishda berilgan

$$\hat{z}_s(t) = \max\{ z = \sum_{i=1}^{n} (a_{0i} + b_{i1}t_1 + ... + b_{is}t_s)x_i \left| \sum_{i=1}^{n} x_i K_{ij} \subset K, x_i \geq 0 \right.\}$$

funksiyalarning to'plamiga aytiladi.

Mos ta'rif, tabiiy ravishda, $t \in P \subset R^s$ shart bajarilishi talab qilingan hol uchun bayon qilinadi.

Kelgusi tahlilda muhim ahamiyat kasb etgan quyidagi tasdiqni qayd etaylik.

2.3.3-tasdiq (noravshan parametrli dasturlashda ikki taraflamalik). O- (2.3.15) masalaning ma'lum bir to'g'ri bazisi uchun noravshan kritik soha va O^1 - mos ikkilamchi bazisning noravshan kritik sohasi bo'lsin. U holda $O = O^1$.

Isbot. $t_0 \in O$ ixtiyoriy bo'lsin. Ikki taraflamalikning birinchi teoremasi hiosbiga, $t = t_0$ da (2.3.15) masalaga ikkilamchi masala ham muqobil yechimga ega bo'ladi. Shuning uchun, $t_0 \in O^1$. Ikkilamchi masalaga ikkilamchi bo'lgan masala (2.3.15) masalaning o'zi bo'lgani uchun, $t_0 \in O^1$ dan $t_0 \in O$ ekanligi kelib chiqadi.

Vektorli muqobillashtirishning umumlashmalari bo'lgan ayrim tasdiqlarni ko'rib chiqaylik.

2.3.4-tasdiq. Simpleks jadval uchun r-kritik soha (r=1,2,...)

$$K^r_{sц} = \{t \mid a^r_{0j}(t) = a^{(r)}_{0j} + b^{(r)}_{j1} t_1 + ... + b^{(r)}_{js} t_s \geq 0, j = 1,...,n+m\}$$

kanonik shakldа qavariq va berk soha bo'ladi.

Isbot. Bitta simpleks jadvaldan boshqasiga o'tganda faqatgina ratsional amallar (ya'ni qo'shish, ko'paytirish va bo'lish amallari) bajarilganligi uchun, formulaga kiruvchi $a^r_{0j}(t)$, j=1,...,n kattaliklar t parametrning ratsional funksiyalari bo'ladi.

Hal qiluvchi funksiyani qurish uchun simpleks usulning quyidagi talqinidan foydalanish o'rinlidir. Simpleks jadvallarning oxirgi satri ostiga b_{ik}, i=1,...n; k=1,...s koeffitisyentlarning yana S ta satri yozib qo'yiladi. Hosil bo'lgan (m+2)- ... (m+s+1)- satrlar qolganlari singari o'zgartiriladi.

$$q_\sigma = \min\{q_i = a^{(r)}_{i0} / a^{(r)}_{i\tau} \mid a^{(r)}_{i\tau} > 0, i \neq 0\},$$

$$a^{(r+1)}_{\sigma t} = a^{(r)}_{\sigma j} / a^{(r)}_{\sigma\tau}, (j = 0,1,...,n+m),$$

$$a^{(r+1}_{ij} = a^{(r)}_{ij} - a^{(r+1)}_{\sigma j} a^{(r)}_{i\tau}, (i = 0,1,...,m; \neq \sigma; j = 0,1,...,n+m)$$

va

$$b^{(r+1)}_{jk} = b^{(r)}_{jk} - a^{(r+1)}_{\sigma j} b^{(r)}_{\tau k}, (j = 0,1,...,n+m; k = 1,...,s)$$

munosabtlar yordamida simpleks jadval quriladi.

Hal qiluvchi element har doim koeffitsiyentlar matrisasining elementlaridan biri bo'lganligi uchun, barcha $a^{(r)}_{0j}(t)$, j=1,...,n+m funksiyalar t vektorni tashkil etuvchi o'zgaruvchilar bo'yicha chiziqli bo'ladi. U holda $K^{(r)}_{sц}$ chekli (n+m) sondagi gipertekisliklarning kesishmasi bo'lib, R^n fazoda ko'p qirrali to'plam bo'ladi. R^n dagi ko'pyoq qavariq va berk to'plam bo'lgani hisobiga, $K^{(r)}_{sц}$ soha qavariq va berk ko'pyoq bo'ladi.

2.3.5-tasdiq. $\hat{z}_{sц}(t)$ yechim funksiyalarning $Z_{sц}(t)$ to'palmini aniqlanish sohasi $Q_{sц}$ qavariq.

Isbot. $Q_{sц}$ soha bo'sh yoki bitta vektordan tashkil topgan hollarda, faraz o'rinlidir. Endilikda, $t^1 \in Q_{sц}; t^2 \in Q_{sц}; t^1 \neq t^2; \lambda \in [0,1]$ bo'lsin (ya'n $0 \leq \lambda \leq 1$ tengsizliklar bajarilgan bo'lsin). *l=1,2* va ixtiyoriy x vektorga nisbatan

$$(a_0 + (t^1)B)x + e^T t^1 \in Z_{sц}(t^1)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Mazkur tengsizliklarni mos ravishda λ va $(1-\lambda)$ ga ko'pytirib, so'ngra ularni qo'shib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$[a_0 + (\lambda(t^1) + (1-\lambda)(t^2)B]x + e^T(\lambda(t^1) + (1-\lambda)(t^2)) \in \lambda Z_{sц}(t^1) + (1-\lambda)Z_{sц}(t^2)\ .$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, $t^0 = \lambda t^1 + (1-\lambda)t^2$ da (2.3.15) masalaning maqsad funksiyasi mavjud sohada chegaralangan va shuning uchun chegaralangan maksimumga ega bo'ladi, bundan t^0 vektor ham$Q_{sц}$ sohaga tegishli bo'ladi.

2.3.6-tasdiq. Agar $Q_{sц} \in F(R)$ qavariq soha bo'lib, $y = f(Q_{sц}) = (a_0 + (t^l)B)x + e^T t^l$ yechim funskiyasi chiziqli funksiya bo'lsa, u holda $\hat{z}_{sц}(A)$ funksiya $Q_{sц}$ sohada qavariq bo'ladi.

Isbot. $t^1 \in Q_{sц}; t^2 \in Q_{sц}; t^1 \neq t^2; \lambda \in [0,1]$ bo'lsin.

F akslantirishning o'zaro bir qiymatliligidan

$$\mu_{f(Q_{sц})} = \mu_A(f^{-1}(y)) = \mu_{Q_{sц}}((y - e^T t^l)/(a_0 + (t^l)B))$$

munosabatga ega bo'lamiz.

$f(Q_{sц})$ kattalik

$$\mu_{f(Q_{sц})}(y) = \sup_z [\mu_{Q_{sц}}(x) \wedge \mu_f(x,t)]$$

ko'rinishdagi F-funksiyaga ega bo'ladi.

$y_1, y_2 \in \sigma(f(Q_{sц}))$ bo'lsin va t^1, t^2 lar

$$\mu_{f(Q_{sц})}(y_1) = \mu_{Q_{sц}}(t^1) \wedge \mu_f(t^1, y_1) = \mu_{Q_{sц}}(t^1) \wedge \mu_{Q_{sц}}((y_1 - e^T t^1)/(a_0 + (t^1)B)),$$

$$\mu_{f(Q_{sц})}(y_2) = \mu_{Q_{sц}}(t^2) \wedge \mu_f(t^2, y_2) = \mu_{Q_{sц}}(t^2) \wedge \mu_{Q_{sц}}((y_2 - e^T t^2)/(a_0 + (t^2)B))$$

munosbatni qanoatlantirisin.

Bunda, ixtiyoriy $\lambda \in [0,1]$ ga nisbatan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\mu_{f(Q_{sц})}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=\sup_z[\mu_{Q_{sц}}(t)\wedge\mu_f(t,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)]=$$

$$=\sup_z[\mu_{Q_{sц}}(t)\wedge\mu_{Q_{sц}}((\lambda y_1+(1-\lambda)y_2-e^T t)/(a_0+(t)B))]\geq$$

$$\geq\mu_{Q_{sц}}(\lambda t^1+(1-\lambda)t^2)\wedge\mu_{Q_{sц}}((\lambda y_1+(1-\lambda)y_2-$$

$$-e^T(\lambda t^1+(1-\lambda)t^2))/(a_0+(\lambda t^1+(1-\lambda)t^2)B)\geq$$

$$\geq\mu_{Q_{sц}}(t^1)\wedge\mu_{Q_{sц}}(t^2)\wedge\mu_{Q_{sц}}((y_1-e^T t^1)/(a_0+(t^1)B))\wedge$$

$$\wedge\mu_{Q_{sц}}((y_2-e^T t^2)/(a_0+(t^2)B))=$$

$$=\mu_{Q_{sц}}(t^1)\wedge\mu_{Q_{sц}}(t^2)\wedge\mu_f(t^1,y_1)\wedge\mu_f(t^2,y_2)=$$

$$=\mu_{f(Q_{sц})}(y_1)\wedge\mu_{f(Q_{sц})}(y_2).$$

2.3.7-tasdiq. Hal qiluvchi $\hat{z}_{sц}(t)$ funksiya $K_{sц}^r$ (r=1,2,...) kritik sohadan olingan barcha t larga nisbatan chiziqli bo’lgani uchun $Q_{sц}$ sohada uzluksizdir.

Isbot. Hal qiluvchi elementlar har doim koeffitisyentlar matrisasidan olingani uchun r ga bog’liq bo’lmaydi, u holda t dan olingan 0-satrning elementlari masalaning tavsiflaridan qo’shish va ayirish amallari yordamida hosil qilib olinadi (bu mulohazalar j=0 da ham o’rinlidir). Shuning uchun, masalaning boshlang’ich yozuvida o’rinli bo’lgan bog’lanishning chiziqlu turi saqlab qolinadi. Har qanday kritik soha berk bo’lgani uchun, $\hat{z}_{sц}(t)$ funksiyaning uzluksizligi to’g’risidagi tasdiq ham o’rinli bo’ladi.

Noravshan parametrik dasturlash masalasining noravshan yechimi $\hat{z}_{sц}(t)$ ko’rinishga ega bo’lsin.

T- alternativalarning universal alternativalar to’plami va $\hat{z}$- T to’plamdan alternativalarni tanlash natijalari baholanuvchi qiymatlarning $T\to R$ funksiyasi bo’lsin. T to’plamda $\mu_c:T\to[0,1]$ noravshan qism to’plam berilgan bo’lib, biz uni mavjud alternativalarning noravshan to’plami deb ataymiz. Masalaning mohiyati, ma’lum ma’noda, $\hat{z}_{sц}(t)$ funksiyani μ_c noravshan to’plamda “maksimallashtirish” dan iboratdir.

Agar $t_0\in T$ alternativa α darajali to’plamda $z_{sц}(t)\to\max$ masalaning yechimi bo’lsa, u holda, qo’pol qilib aytganda, α soni noravshan parametrli dasturlashdagi joriy masalaning noravshan yechimlar to'plamiga t_0 alternativaning tegishlilik darajasi sifatida qaraladi.

Mazkur yondashuvning batafsil ta'rifi va tahliliga o'taylik. C_α orqali mavjud μ_c alternativalar noravshan to'plamidagi α darajali to'plamlarni belgilaylik.

Shunday qilib,

$$C_\alpha = \{t|\ t \in T, \mu_c(t) \geq \alpha\}.$$

$C \neq \varnothing$ munosabat o'rinli bo'lgan ixtiyoriy $\alpha \geq 0$ uchun

$$N(\alpha) = \{t|\ t \in T, \hat{z}_{su}(t) = \sup_{t^1 \in C_\alpha} \hat{z}_{su}(t^1)\}$$

to'plamni kiritaylik, u darajasi α dan kichik bo'lmagan, noravshan parametrli dasturlashning joriy masalasida o'rinli hisoblangan alternativalar to'plamida $\hat{z}_{su}$ funksiyani maksimallashtirish sodda masalasining yechimlar to'plamini ifodalaydi.

Noravshan yechimlar to'plamining tegishlilik funksiyasini qurish uchun, har bir $t \in T$ alternativaning oldiga uning mazkur to'plamga tegishlilik darajasini yozib qo'yish kerak. Buni quyidagi tarzda amalga oshiramiz. t_0 alternativaning noravshan yechimlar to'plamiga tegishlilik darajasi sifatida $t_0 \in N(\alpha)$ munosabat o'rinli bo'lgan α sonlardan eng kattasini (aniqrog'i, yuqori chegarasini) olamiz.

Ta'rif. Noravshan parametrli (2.3.3) masalaning yechimi deb

$$\mu(t) = \sup_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha$$

ko'rinishdagi tegishlilik funksiyasi bilan ta'riflanuvchi μ_c to'plamning noravshan qism to'plamiga aytiladi. Quyidagi tasdiq yechimni soddaroq ko'rinishda ifodalash imkonini beradi.

2.3.8-tasdiq. Agar $t \in \sup p\mu(t)$ bo'lsa, u holda $\mu(t) = \mu_c(t)$, bu yerda $\sup p\mu(t) = \{t|t \in T, \mu(t) > 0\}$.

Isbot. a) Agar $t \in \sup p\mu(t)$ va $\mu(t) > \mu_c(t)$ bo'lsa, u holda $\sup_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha > \mu_c(t)$ va demak, shunday $\overline{\alpha}$ son topiladiki, bunda $\overline{\alpha} > \mu_c(t)$ va $t \in N(\overline{\alpha})$. Lekin ta'rifga ko'ra, $t \in C_\alpha$, shuning uchun $\mu_c(t) \geq \alpha$, ya'ni $\alpha > \mu_c(t)$ tengsizlik o'rinli emas.

b) Agar $t \in \sup p\mu(t)$ va $\mu(t) < \mu_c(t)$ yoki $\sup_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha < \mu_c(t) = \nu$ (*)

bo'lsa, u holda $t \in N(\alpha)$ munosabat o'rinli bo'lgan α songa nisbatan

$t \in C_\nu \subset C_\alpha$ munosabat bajariladi.

Bundan tashqari, $t \in N(\alpha)$, chunki aks holda, (*) dan ma'noga ega bo'lmagan $\nu < \nu$ tengsizlik kelib chiqardi. Bu yerdan

$$\hat{z}_{sц}(t) < \sup_{t^1 \in C_\nu} \hat{z}_{sц}(t^1) \leq \sup_{t^1 \in C_\alpha} \hat{z}_{sц}(t^1) = \hat{z}_{sц}(t).$$

Mazkur ziddiyat tasdiqning isbotini yakuniga yetkazadi.

Bu tasdiq va ta'rifga asoslanib, yechimni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} \mu_c(t), t \in \bigcup\limits_{\alpha>0} N(\alpha) da, \\ 0, aks holda. \end{cases}$$

Bundan esa

$$\sup p\mu(t) = \bigcup_{\alpha>0} N(\alpha).$$

Noravshan yechimga $\mu(t)$ noravshan to'plamning $\hat{z}_{sц}$ akslantirishdagi $\hat{z}_{sц}(t)$ funksiyaning obrazini ifodalovchi noravshan "maksimal" $\mu_z(r)$ son mos keladi. Obrazning ta'rifiga ko'ra:

$$\mu_z(r) = \sup_{t \in z^{-1}(r)} \mu(t) = \sup_{t \in z^{-1}(r)} \sup_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha,$$

bu yerda

$$z^{-1}(r) = \{t | \ t \in T, \hat{z}_{sц}(t) = r.$$

Quyida yechimning ayrim xossalarini kiritamiz, bu mazkur yechimga aniq izoh kiritadi. Biz mazkur xossalarni quyidagi tasdiqlar shaklida bayon qilamiz.

<u>2.3.9-tasdiq.</u>

$$r_0 \in \sup p\mu_z \to \bigcup_{\alpha>0} N(\alpha) \cap \hat{z}_{sц}^{-1}(r_0) \neq \varnothing.$$

Boshqa so'z bilan aytganda, $\mu_z(r_0) > 0$ munosabat o'rinli bo'lgan ixtiyoriy r_0 uchun shunday $\bar{t} \in T$ alternativa topiladiki, bunda, $\bar{z}_{sц}(\bar{t}) = r_0$ va ma'lum bir $\alpha > 0$ da $\bar{t} \in N(\alpha)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

<u>Isbot.</u> $\mu_я$ va $\sup p\mu_z$ to'plamning ta'rifidan $\sup\limits_{t \in z^{-1}(r_0)} \sup\limits_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha > 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni shunday $t^1 \in z^{-1}(r_0)$ alternativa topiladiki, unga nisbatan

$$\sup_{\alpha : t^1 \in N(\alpha)} \alpha > 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bu esa, o'z navbatida, $t^1 \in N(\alpha)$ shartni qanoatlantiruvchi $\alpha > 0$ son mavjud ekanligini anglatadi. Bundan $t^1 \in z^{-1}(r_0) \bigcap N(\alpha)$, ya'ni tasdiq isbotlandi.

2.3.10-tasdiq.

$$r_0 \in \sup p\mu_z \to \sup_{t \in z^{-1}(r_0)} \mu(t) = \sup_{t \in z^{-1}(r_0)} \mu_c(t).$$

Isbot. $\mu(t) = \sup_{\alpha : t \in N(\alpha)} \alpha$ ta'rifga asoslangan holda ixtiyoriy $t \in T$ da $\mu(t) \le \mu_c(t)$ ekanligi kelib chiqishidan, $\sup_{t \in z^{-1}(r_0)} \mu(t) \le \sup_{t \in z^{-1}(r_0)} \mu_c(t)$ bo'ladi.

$r_0 \in \sup p\mu_z$ da qat'iy tengsizlik bajarilgan bo'lsin. U holda, ma'lum bir $t_0 \in z_{sц}^{-1}(r_0)$ ga nisbatan, ixtiyoriy $t \in z^{-1}(r_0)$ da $\mu(t) < \mu_c(t_0)$ munosabat bajariladi.

Quyida, $r_0 \in \sup p\mu_z$ bo'lgani uchun, 2.3.2 tasdiqqa ko'ra, $t^1 \in z^{-1}(r_0) \cap N(\alpha)$ ni qanoatlantiruvchi $t^1 \in T$ va $\alpha > 0$ lar topiladi. $t^1 \in N(\alpha)$ va $\alpha > 0$ ekanligida, ta'rifga ko'ra, $\mu(t^1) = \mu_c(t^1) \ge \alpha$ bo'ladi, demak $\mu_c(t_0) > \mu(t)$ dan $\mu_c(t_0) > \alpha$, ya'ni $t_0 \in C_\alpha$ kelib chiqadi.

$t^1 \in N(\alpha)$ va $t^1 \in z^{-1}(r_0)$, ya'ni $\hat{z}_{sц}(t^1) = r_0$ ekanligidan $t_0 \in z^{-1}(r_0)$ bo'lgani uchun,

$$\hat{z}_{sц}(t^1) = \sup_{t \in C_\alpha} \hat{z}_{sц}(t) = r_0 = \hat{z}_{sц}(t_0)$$

kelib chiqadi. Bu yerdan $t_0 \in N(\alpha)$ va 2.3.6-tasdiqga ko'ra $\mu(t_0) = \mu_c(t_0)$, bu esa $\mu(t_0) < \mu_c(t_0)$ ekanligiga zid. Mazkur ziddiyat 2.3.10-tasdiqning isbotini yakuniga yetkazadi.

2.3.11-tasdiq. $\mu_z(r)$ funksiya $\sup p\mu_z$ to'plamda monoton kamayadi.

Isbot. $r_1 > r_2$ larda, ixtiyoriy $r_1, r_2 \in \sup p\mu_z$ lar uchun $\mu_я(r_1) \le \mu_z(r_2)$ bo'lishini ko'rsatish yetarlidir.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $\sup p\mu_z$ to'plamdan olingan ma'lum bir $r_1 > r_2$ lar uchun $\mu_я(r_1) > \mu_z(r_2)$ tengsizlik bajarilgan bo'lsin. U holda, 2.3.10- tasdiqqa ko’ra:

$$\sup_{t\in z^{-1}(r_1)} \mu_c(t) > \sup_{t\in z^{-1}(r_2)} \mu_c(t)$$

munosabatga ega bo’lamiz, ya’ni ixtiyoriy $t \in T$ da $\mu_c(t_1) > \mu_c(t)$ tengsizlik bajariluvchi $t_1 \in z^{-1}(r_1)$ topiladi.

$r_2 \in \sup p\mu_z$ bo’lgani uchun, 2.3.7-tasdiqga ko’ra, shunday $t_2 \in z^{-1}(r_2)$ va $\alpha > 0$ lar topiladiki, $t_2 \in N(\alpha)$ bo’ladi, ya’ni:

$$r_2 = \hat{z}_{sц}(t_2) = \sup_{t\in C_\alpha} \hat{z}_{sц}(t).$$

Bundan tashqari, $\mu_c(t_1) > \mu_c(t)$ tengsizlikdan $t_1 \in C_\alpha$ ga, demak $r_2 = \hat{z}_{sц}(t_2) = \sup \hat{z}_{sц}(t) \geq \hat{z}_{sц}(t_1) = r_1$ yoki $r_2 \geq r_1$ ga ega bo’lamiz, bu esa $r_1 > r_2$ degan farazimizga zid.

Agar qaror qabul qiluvchi shaxs yechim sifatida aniq bir $t \in T$ alternativani tanlashga moyillik bildirsa, u holda uning tanlovi nafaqat mazkur alternativaning $\mu_c(t)$ noravshan to’plamga tegishlilik darajasiga, balki $\hat{z}_{sц}(t)$ funksiyaning o’ziga xos qiymatlariga tayanishi kerak. 2.3.11-tasdiqqa ko’ra, r_0 ning qiymati qanchalik katta bo’lsa, $\hat{z}_{sц}(t) = r_0$ qiymatni beruvchi alternativaning $\mu_c(t)$ tegishlilik darajasi shunchalik kichik bo’ladi. Shuning uchun qaror qabul qiluvchi shaxs, avvalambor, $\hat{z}_{sц}(t)$ funskiyaning “eng katta” $\mu_z(r)$ noravshan qiymatiga murojaat qilib, tanlangan r_0 ning $\mu_z(r)$ to’plamga tegishlilik darajasi eng katta bo’lishligi istagiga to’g’ri kelgan $(r_0, \mu_z(r_0))$ juftlikni tanlashi kerak. Bunday juftlikni tanlagandan so’ng, $\mu_c(t)$ to’plamga tegishlilik darajasi eng katta bo’lgan $t_0 \in z^{-1}(r_0)$ alternativani (yoki ma'lum ma'noda x_0 ga yaqin bo’lgan alternativani) tanlashi o’rinlidir [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

3-боб. NORAVSHAN MODELLARNI QURISH JARAYONIDA SHAKLLANGAN KO'P MEZONLI MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINI YECHISH ALGORITMINI ISHLAB CHIQISH

3.1. Sust shakllangan jarayonlar holatini sinflashtirish, baholash va bashoratlashning noravshan qoida xulosalariga asoslangan modelini qurish algoritmini ishlab chiqish

Neyronoravshan to'rni o'qitish algoritmi ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqichda ob'ekt chiqishining to'rning berilgan arxitekturasiga mos bo'lgan model qiymatlari qisoblanadi. Noravshan mantiqiy tenglamalar (agar <kirish> bo'lsa, u holda <chiqish> ko'rinishidagi) noravshan termlarning tegishlilik funktsiyalari bilan birgalikda quyidagi algoritmdan foydalanib qaror qabul qilishga imkon beradi [140,141,142,143]:

1. Ob'ekt holatining parametrlari qayd qilinadi.

2. $x_i^*,\ i=\overline{1,n}$ parametrlarning qayd qilingan o'zgarmas qiymatlaridagi $\mu^j(x_i^*)$ tegishlilik funktsiyasining qiymatlari aniqlanadi.

3. Mantiqiy tenglamalardan foydalanib $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$ holatlar vektori berilgan holda $\mu^{r_j}\left(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\right)$ tegishlilik funktsiyalarining qiymatlari hisoblanadi.

4. Quyidagi o'rinli bo'ladigan r_j^* yechim aniqlanadi:

$$\mu^{r_j^*}\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)=\max_{j=\overline{1,n}}\left[\mu^{r_j}\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)\right].$$

Ikkinchi bosqichda bog'lanmaslik qiymati (E_t) hisoblanadi va tegishlilik funktsiyasi parametrlari quyidagi algoritm bo'yicha qayta hisoblanadi.

1 –tanlanmani hosil qilish: Kiruvchi (X_j,r_j), $j=\overline{1,M}$, tanlanma – tajribaviy ma'lumotlarni hosil qilish, bunda $X_j=(x_{j,1},x_{j,2},...,x_{j,n})$- j – satrdagi kiruvchi vektor va r_j- mos ravishda uning chiquvchi vektori qiymati. Tanlanmani olishda undagi ma'lumotlar butun sonlardan, qo'zg'aluvchi vergulli sonlardan, haqiqiy sonlardan va lingvistik ko'rinishidagi qiymatlardan iborat bo'lishi mumkin. Olingan tanlanmani barcha qiymatlarini ma'lum umumiy oraliqqa normallashtiriladi.

2 – normallashtirish: Bunda kiruvchi tanlanma va unga mos chiquvchi *r* vektorlar [0,l] oraliqqa normallashtiriladi.

$$u_i^k = l\frac{x_i^k - x^{\min}}{x^{\max} - x^{\min}},\ u^k = l\frac{r^k - r^{\min}}{r^{\max} - r^{\min}}.$$

Bunda $x^{\min}, x^{\max}$ - X kiruvchi ma'lumotlar matritsasining maksimum va minimum elementlari, $r^{\min}, r^{\max}$ - chiquvchi r vektorning maksimum va minimum elementlari.

3 –fazzifikatsiyalash: Normallashtirilgan u_i^k va u^k ma'lumotlar asosida tegishlilik funktsiyasi yordamida fazzifikatsiya jarayoni amalga oshiriladi. Bunda tegishlilik funktsiyasi sifatida intuitiv tarzda (intuitsiya asosida) qo'ng'iroqsimon funktsiya olingan. Ko'p hollarda aynan qo'ng'iroqsimon tegishlilik funktsiyasi yordamida yechilgan masalalarda aniqlik va unumdorlik darajasi yuqori bo'ladi.

$$\mu^j(u_i^k) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i^k - c_j}{\sigma_j}\right)^2\right), \mu^j(u^k) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^k - c_j}{\sigma_j}\right)^2\right), j = 0,1,2,\ldots,l.$$

Bunda c_j va σ_j funktsiya parametrlari hisoblanadi va ular algoritmning keyingi bosqichlarida neyron to'rlar yordamida sozlanadi.

4 – maksimallashtirish: fazifikatsiyalash natijalari bo'yicha mos ravishda maksimallashtirish amali bajariladi:

$$\mu^*(u_i^k) = \max_j \mu^j(u_i^k),\ \mu^*(u^k) = \max_j \mu^j(u^k).$$

5 – xulosani baholash: Ushbu jarayonda maksimallashtirilgan ma'lumotlar, qoidalar asosida xulosalarni bajarilishi baholanadi:

$$SP^k = \mu^*(u_1^k)\cdot\mu^*(u_2^k)\times\ldots\times\mu^*(u_n^k)\cdot\mu^*(u^k).$$

Bunda k $(k=\overline{1,M})$ –qoida nomeri. Algoritmning keyingi bosqichlarida olingan qoidalar bazasini yana normallashtirish jarayoni amalga oshiriladi.

6 – normallashtirish: Olingan qoidalar bazasi [0,l] oraliqqa normallashtiriladi:

$$\eta^k = l\frac{SP^k - SP^{\min}}{SP^{\max} - SP^{\min}}.$$

7 – fazzifikatsiyalash: Normallashtirilgan qoidalar bazasini mos ravishda tegishlilik funktsiyasi yordamida fazzifikatsiyalashtiriladi:

$$\mu^j(\eta^k) = \frac{1}{1 + \frac{(\eta_k - c_j)}{\sigma_j}}.$$

8 – maksimallashtirish: Ushbu holatda j ($j = 0,1,2,\ldots,l.$) bo'yicha maksimallashtirish amalga oshiriladi:

$$\mu^*(\eta^k) = \max_j \mu^j(\eta^k).$$

9 - Ushbu holatda eng yuqori qiymatlarni beruvchi tegishlilik funktsiyalari ajratiladi. Buning uchun quyidagi jarayonlar amalga oshiriladi:

$$\beta(l) = 0.$$

Agar $\beta(l) < \mu^*(\eta^k)$ bo'lsa, u holda $\beta(l) = \mu^*(\eta^k)$; $\alpha(l) = k; l = \overline{1,m}.$.

10 – model qurish: Bu jarayonda eng yuqori qiymatlarni beruvchi funktsiyalar yordamida noravshan qoida xulosalaridan iborat ikki xil ko'rinishdagi model quriladi:

10 a) Chiqishi chiziqli bog'lanish ko'rinishidagi jarayon holatini baholashning noravshan modeli:

Agar $x_1^1 = u_{11}^1 \bigcap x_2^1 = u_{21}^1 .. \bigcap x_n^1 = u_{n1}^1$ yoki

$x_1^2 = u_{11}^2 \bigcap x_2^2 = u_{21}^1 .. \bigcap x_n^1 = u_{n1}^2$ yoki

----

$x_1^{k_j} = u_{11}^{k_1} \bigcap x_2^{k_j} = u_{21}^{k_j} .. \bigcap x_{n1}^{k_j} = u_{n1}^{k_j}$ bo'lsa,

u holda $y_j = b_{j_0} + b_{j_1} x_1^j + .. b_{j_n} x_n^j, \quad j = 1,\ m.$

10 b) Chiqishi nochiziqli bog'lanish ko'rinishdagi jarayon holatini baholashning noravshan modeli.

Agar $x_1^1 = u_{11}^1 \bigcap x_2^1 = u_{21}^1 .. \bigcap x_n^1 = u_{n1}^1$ yoki

$x_1^2 = u_{11}^2 \bigcap x_2^2 = u_{21}^1 .. \bigcap x_n^1 = u_{n1}^2$ yoki

----

$x_1^{k_j} = u_{11}^{k_1} \bigcap x_2^{k_j} = u_{21}^{k_j} .. \bigcap x_{n1}^{k_j} = u_{n1}^{k_j}$ bo'lsa,

u holda $y_j = b_{j_0} + b_{j_1} x_1^j + .. b_{j_n} x_n^j + b_{j_1} \left[x_1^j\right]^2 + .. b_{j_{2n}} \left[x_n^j\right]^2, \quad j = 1, m.$

Bu yerda
$$x_i^k = \frac{\sum_{p=1}^{q} \mu(x_i^{kp}) x_i^{kp}}{\sum_{p=1}^{q} \mu(x_i^{kp})}.$$

Natijada, b_{ji} *(i=0,1,2,...,n)* koeffitsientlar qiymatlarini topish talab etiladi. Ushbu koeffitsientlarni umumiy holda quyidagi matritsa ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$B = \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1t} \\ b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2t} \\ - & - & - & - \\ b_{m0} & b_{m1} & \dots & b_{mt} \end{pmatrix}.$$

Model chiziqli bo'lgan holatida $t = n$, nochiziqli bo'lgan holatda esa $t = 2n$ bo'ladi·

Topilgan koeffitsientlar qiymatlari quyidagi kvadratik chetlanishni minimallashtiruvchi qiymatlar hisoblanadi:

$$E = \sum_{j=1}^{M} \left(y_r - y_r^f\right)^2 \to \min, \tag{3.1.1}$$

bunda y_r^f -noravshan model asosida olingan chiquvchi natija.

Kiruvchi $X_r = (x_{r,1}, x_{r,2}, \dots, x_{r,n})$ vektor quyidagicha noravshan chiqishga ega bo'ladi: $y_r^f = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} \mu_{d_j} \cdot (x_r) \cdot d_j}{\sum_{j=1}^{m} \mu_{d_j} \cdot (x_r)}$, bunda *j*- qoida xulosasi quyidagicha ifodalanadi:

a) Chiqishi chiziqli bog'lanish ko'rinishida bo'lganida:

$$y_j = b_{j_0} + b_{j_1} x_1^j + .. b_{j_n} x_n^j, \quad j = 1, m.$$

b) Chiqishi nochiziqli bog'lanish ko'rinishida bo'lganida:

$$y_j = b_{j_0} + b_{j_1} x_1^j + .. b_{j_n} x_n^j + b_{j_1} \left[x_1^j\right]^2 + .. b_{j_{2n}} \left[x_n^j\right]^2, \quad j = 1, m.$$

j-qoida xulosasining bajarilish darajasi quyidagi ifoda yordamida amalga oshiriladi:

$$\mu_{y_j}(x_r) = \mu_j^{k_j}(x_{r1}) \cdot \mu_j^{k_j}(x_{r2}) \cdot \ldots \cdot \mu_j^{k_j}(x_{rn}).$$

Quyidagi ifoda orqali esa kiruvchi vektor uchun j-qoida xulosasining bajarilish nisbiy darajasi hisoblanadi:

$$\beta_{jr} = \frac{\mu_{y_j}(x_r)}{\sum_{k=1}^{m} \mu_{y_j}(x_r)}$$

u holda:

a) Chiqishi chiziqli bog'lanish ko'rinishida bo'lganida:

$$y_r^f = \sum_{j=1}^{m} \beta_r y_j = \sum_{j=1}^{m} (\beta_{r_j} b_{j_0} + \beta_{r_j} \cdot b_{j_1} \cdot x_{r_1} + \beta_{r_j} \cdot b_{j_2} \cdot x_{r_2} + \ldots + \beta_{r_j} \cdot b_{j_n} \cdot x_{r_n}).$$

b)Chiqishi nochiziqli bog'lanish ko'rinishida bo'lganida:

$$y_r^f = \sum_{j=1}^{m} \beta_r y_j = \sum_{j=1}^{m} (\beta_{r_j} b_{j_0} + \beta_{r_j} \cdot b_{j_1} \cdot x_{r_1} + \beta_{r_j} \cdot b_{j_2} \cdot x_{r_2} + \ldots + \beta_{r_j} \cdot b_{j_n} \cdot x_{r_n} +$$

$$+ \beta_{r_j} \cdot b_{j_{n+1}} \cdot x_{r_{n+1}} + \beta_{r_j} \cdot b_{j_{n+2}} \cdot x_{r_{n+2}} + \ldots + \beta_{r_j} \cdot b_{j_{2n}} \cdot x_{r_{2n}}),$$

β_{r_j} parametrning qiymatlari tegishlilik funktsiyasining turiga turiga bog'liq ravishda hisoblanadi:

Gauss turidagi:

$$\mu(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - c}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\beta_{r_j} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{x_{r_i} - c_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right] / \sum_{k=1}^{m} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{x_{ri} - c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right)^2\right].$$

Qo'ng'iroqsimon:

$$\mu(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

$$\beta_{r_j}=\prod_{i=1}^{t}\frac{1}{1+\left(\frac{x_{r_i}-c_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2}\Big/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\frac{1}{1+\left(\frac{x_{ri}-c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right)^2}.$$

Parabolik ko'rinishdagi:

$$\mu(x)=1-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2$$

$$\beta_{r_j}=\prod_{i=1}^{t}\left[1-\left(\frac{x_{r_i}-c_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right]\Big/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\left[1-\left(\frac{x_{ri}-c_{ik}}{\sigma_{ik}}\right)^2\right].$$

Uchburchaksimon ko'rinishdagi:

$$\mu(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ \frac{x-c}{b-c}, & b\le x\le c,\\ 0, \text{ бошка холларда.} & \end{cases}$$

$$\beta_{r_j}=\begin{cases}\prod_{i=1}^{t}\left[\frac{x_{r_i}-a_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\right]\Big/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\left[\frac{x_{r_i}-a_{ik}}{b_{ik}-a_{ik}}\right], \text{ агар } a\le x\le b,\\ \prod_{i=1}^{t}\left[\frac{x_{r_i}-c_{ij}}{b_{ij}-c_{ij}}\right]\Big/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\left[\frac{x_{r_i}-c_{ik}}{b_{ik}-c_{ik}}\right], \text{ агар } b\le x\le c.\end{cases}$$

Trapetsiya ko'rinishdagi:

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & b\le x\le c,\\ \dfrac{x-d}{c-d}, & c\le x\le d,\\ 0, \text{ бошка холларда.}\end{cases}$$

$$\beta_{r_j}=\begin{cases}\prod_{i=1}^{t}\left[\dfrac{x_{r_i}-a_{ij}}{b_{ij}-a_{ij}}\right]/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\left[\dfrac{x_{r_i}-a_{ik}}{b_{ik}-a_{ik}}\right], & \text{агар} a\le x\le b,\\ 1/n, & \text{агар} b\le x\le c,\\ \prod_{i=1}^{t}\left[\dfrac{x_{r_i}-d_{ij}}{c_{ij}-d_{ij}}\right]/\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1}^{t}\left[\dfrac{x_{r_i}-d_{ik}}{c_{ik}-d_{ik}}\right], & \text{агар} c\le x\le d.\end{cases}$$

Quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$Y^f=\left(y_1^f,y_2^f,\ldots,y_M^f\right)^T,\ Y=\left(y_1,y_2,\ldots,y_M\right)^T,$$

$$A=\begin{bmatrix}\beta_{1,1},\ldots,\beta_{1,m}, & x_{1,1}\cdot\beta_{1,1},\ldots,x_{1,1}.\beta_{1,m}, & \ldots, & x_{1,n}\cdot\beta_{1,1},\ldots,x_{1,t}\cdot\beta_{1,m}\\ \vdots & & & \\ \beta_{M,1},\ldots,\beta_{M,m}, & x_{M,1}\cdot\beta_{1,1},\ldots,x_{M,1}\cdot\beta_{1,m}, & \ldots, & x_{M,n}\cdot\beta_{M,1},\ldots,x_{M,t}\cdot\beta_{M,m}\end{bmatrix}.$$

U holda (3.1.1) masala quyidagi matritsa ko'rinishiga keltirib olinadi: quyidagi shart qanoatlantiruvchi V vektor topilsin:

$$E=(Y-Y^f)^T\cdot(Y-Y^f)\to\min. \qquad (3.1.2)$$

Ushbu (3.1.2) masala quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$Y=A\cdot B. \qquad (3.1.3)$$

Bunda $n\times m$ ta nomalumli $n\times m$ ta tenglamalar tizimsini olamiz. Analitik matematik usul orqali ushbu masalani osongina yechish mumkin, ya'ni $\det A\neq 0$ bo'lgan holda

$$B=A^{-1}Y$$

ifodani yechish (Kramer formulasi yoki bir qator matematik usullar yordamida) orqali V ni topish mumkin. Ammo ba'zan A – matritsaning ditermenanti mavjud bo'lmagan $(\det A=0)$ hollarda masala nokorrekt masalaga kelib qoladi. Natijada (3.1.3) ifoda Tixonov nazariyasi bo'yicha nokorrekt masalaga aylanadi va bu ifodani

$$\tilde{A}B = \tilde{Y},$$

ko’rinishga keltirib olish mumkin. Bunda $\left\|\tilde{A} - A\right\| \le h, \left\|\tilde{Y} - Y\right\| \le \delta.$

Umumiy holda (3.1.3) tenglama

$$\left\|\tilde{A}B - \tilde{Y}\right\| \to 0 \tag{3.1.4}$$

kabi norma orqali ifodalanadi. Ya'ni (3.1.4) ifodani hisoblash (3.1.3) ifoda natijalariga yaqin bo’lgan qiymatni topishdan iborat. Bu albatta Tixonovning nokorrekt masalani yechish nazariyasiga mosdir [34,40,70,73,74,86,87,101,135,146].

11 – neyron to’rlarni o’qitish: Neyron to’rlarni o’qitishda avvalo uning topologiyasi qurib olinadi. Ushbu algoritmda besh qatlamdan iborat neyron to’rdan foydalanilgan va uni o’qitish uchun quyidagi ifodalardan foydalaniladi:

$$y_i^{(k)}(n) = f\left(s_i^{(k)}(n)\right), \; s_i^{(k)}(n) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} w_{ij}^{(k)}(n) x_j^{(k)}(n),$$

bunda $y_i^{(k)}(n)$ - neyron to’ri k –qatlamining i – chiqishi, $x_j^{(k)}(n)$ - tanlanmadan (X dan) olingan kiruvchi qiymatlar, $w_{ij}^{(k)}(n)$ - k –qatlamning i – neyroniga kiruvchi ma'lumotlarning vazni. k – qatlam neyronlariga kiruvchi ma'lumotlar k-1 – qatlam neyronlari soniga bog’liq holda olinadi. $f\left(s_i^{(k)}(n)\right)$ - faollashtirish funktsiyasi hisoblanadi, ularning bir nechta turlari oldingi bo’limlarda [32] keltirib o’tilgan.

O’qitishning mohiyati tegishlilik funktsiyalarining neyronoravshan approksimatsiyalash natijalari va haqiqiy ob'ekt xususiyatlari o’rtasidagi farqni eng kam darajaga keltiruvchi parametrlarni tanlab olishdan iborat. O’qitish uchun quyidagi rekurrent munosabatlar tizimdan foydalaniladi [32]:

$$c_k^j(t+1) = c_k^j(t) - \eta(r_t - r_t)\frac{r_j \sum_{i=1}^{m} \mu^{r_i}(r_i) - \sum_{i=1}^{m} r_i \mu^{r_i}(r_i)}{\left(\sum_{i=1}^{m} \mu^{r_i}(r_i)\right)^2} \frac{1}{\mu^k(x_i^j)} \prod_{i=1}^{n} \mu^j(x_i^j) \frac{2\sigma_k^j (x_i^j - c_k^j)^2}{((\sigma_k^j)^2 + (x_i^j - c_k^j)^2)^2},$$

$$\sigma_k^j(t+1) = \sigma_k^j(t) - \eta(r_t - r_t)\frac{r_j \sum_{i=1}^{m} \mu^{r_i}(r_i) - \sum_{i=1}^{m} r_i \mu^{r_i}(r_i)}{\left(\sum_{i=1}^{m} \mu^{r_j}(r_i)\right)^2} \frac{1}{\mu^k(x_i^j)} \prod_{i=1}^{n} \mu^j(x_i^j) \frac{2(\sigma_k^j)^2 (x_i^j - c_k^j)}{\left((\sigma_k^j)^2 + (x_i^j - c_k^j)^2\right)^2}.$$

Ushbu algoritm asosida bir qator baholash, bashoratlash, sinflashtirish va klasterlash masalalarini yechish mumkin.

3.2. Sust shakllangan jarayonlar noravshan modelini qurishda muqobillashtirishning ko'p mezonli masalalarini yechish algoritmi

Yechimning optimalligiga bo'lgan talablar sifatida ko'p mezonli muqobillashtirish masalalarini shakllantirishda barcha xususiy mezonlar va cheklanishlarni albatta qanoatlantirish sharti kiritiladi [26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146]. Yana optimum nuqtada mezonlar iloji boricha eng ko'p darajada qanoatlantirilishi ham talab qilinadi. Boshqacha aytganda bir qancha sifat ko'rsatkichlari boshqalarining yomonlashishi hisobiga yaxshilangan holda umumlashgan mezonning qiymatining o'sishi nomaqbul hisoblanadi. Qaror qabul qilish nazariyasi terminologiyasida ushbu so'nggi talab optimum nuqtasining Pareto to'plamiga tegishliligi shartiga teng kuchlidir [39].

Ko'p hollarda parametrik modellarning cheklanishlari ayrim texnik yoki ishlab chiqarish jarayoni bog'liq bo'ladigan har xil shartlarning matematik bayoni va miqdoriy ifodasi ko'rinishida bo'ladi. Bu har xillik, xususan, tegishli cheklanishlarni ifodalashda yordam beruvchi kattaliklarning o'zgarishiga ta'sir ko'rsatuvchi sabablarni o'zaro mustaqil, biroq bir vaqtda ta'sir ko'rsatuvchi sifatida qarash kerakligida ham aks etishi mumkin. Bunday turdagi masalalarni bir nechta parametrlar yordamda bayon qilish tabiiyroq hisoblanadi. Ko'pincha parametrik modelning koeffitsientlari to'g'risida "mavhum" – noravshan ma'lumotlargina mavjud bo'ladi. Noravshan ma'lumotlarni shakllantirishga imkon beruvchi matematik apparat sifatida ushbu ishda noravshan to'plamlar nazariyasi qo'llaniladi. $t_1,\ldots,\ t_s$ yoki S parametrlarga ega bo'lgan parametrik model matritsa ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$f = (\bar{a}_0' + t'\bar{b}) + \bar{e}t \to \min,\ (\bar{a} + \bar{c}t)x \subset K,\ t \in R^s. \qquad (3.2.1)$$

Bu yerda K={y| $y \in R^n, y \le a_{.0} + dt$ } – R^n fazoning berilgan qavariq qism-to'plami.

Bunday turdagi masalani to'plam-qiymatli koeffitsientlarga ega bo'lgan parametrik dasturlash masalasi deb atash mumkin. O'z-o'zidan ayonki, bunday masala doirasida maqsad funktsiyasini maksimallashtirish to'g'risida gapirishdan ma'no yo'q, chunki ushbu funktsiyaning qiymatlari – sonlar emas, balki sonlar to'plamidan iborat. Bu holda muqobillar to'plamida ushbu funktsiya qanday afzallik munosabatini tug'dirishini oydinlashtirish, keyin esa ushbu afzallik munosabati ma'nosida qaysi tanlovlarni oqilona deb hisoblash kerakligi to'g'risidagi masalani o'rganish kerak.

Ko'rib chiqilayotgan modelni aniqlashtirish yo'lidagi keyingi qadam bo'lib fazzifikatsiya, ya'ni masala koeffitsientlarini noravshan to'plamlar shaklida ifodalash hisoblanadi. Bunda parametrlarning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plamini berishdan tashqari modelga ushbu noravshan to'plamlarning tegishlilik funktsiyalari ko'rinishidagi qo'shimcha ma'lumotlar kiritiladi. Shunday qilib biz noravshan parametrik dasturlash masalasining qo'yilishiga keldik.

(3.2.1) masala quyidagi parametrik dasturlash masalasiga keltiriladi:

$$f = (a_0 + t'b)x + e't \to \min,$$
$$(a + ct)x \le a_{.0} + dt,$$
$$t \in R^s.$$

Bunda a, b, c, d, e koeffitsientlarning qiymatlari noravshan qism-to'plamlar shaklida ifodalangan, ya'ni tegishli to'plamlarning $\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}), \mu_{ij}^k(a_{ij}), \nu_{ijl}^k(c_{ijl})$ va $\xi_{il}^k(d_{il})$ tegishlilik funktsiyalari berilgan, bu yerda *i=1,...,m; j=1,...,n; l=1,...,s* . a_0' va *b* parametrlarni bayon qilishning noravshanligi tufayli istalgan muqobil $x(t) \in X$ (ya'ni f(t) funktsiyaning qiymati) ning bahosi son o'qidagi noravshan qism-to'plamdan iborat bo'ladi.

Faraz qilaylik, barcha berilgan $\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl})$ noravshan to'plamlar shunday bo'lsinki, $\sup\limits_{a_{0j} \in R^1} \mu_o^k(a_{0j}) \ge \alpha$ va $\sup\limits_{b_{jl} \in R^1} \eta_{jl}^k(b_{jl}) \ge \alpha$ bo'lsin.

[61] da ushbu holda $\varphi(x, r(t)) = \sup(\mu_o^k(a_{0j}), \eta_{jl}^k(b_{jl}))$ funktsiyaning har qanday $x \in X$ da

$$\sup_{r(t) \in R^1} \varphi(x, r(t)) \ge \alpha$$

xossaga ega bo'lishi ko'rsatib berilgan. Ustunmaslik darajasi α dan kam bo'lmagan muqobillarni topish uchun ko'rib chiqilayotgan holda matematik dasturlashning quyidagi masalasini yechish yetarlidir:

$$r(t) \to \max, \; \varphi(x, r(t)) \ge \alpha, \; \psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0,$$
$$r(t) \in R^1, \quad x \in X.$$

Endi f(t) funktsiyaning a_{0j}, b_{jl} parametrlari ham, $\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0$ cheklanishlarning a_{ij}, c_{ijl}, d_{il} parametrlari ham noravshan bayon qilingan masalani ko'rib chiqamiz.

Eng avvalo shuni ta'kidlab o'tamizki, ushbu masalada muqobillarni tanlab olish X muqobillar to'plamida quyidagi ikkita afzallik munosabatlarini hisobga olgan holda amalga oshirilishi kerak: $\varphi(x, r(t)) = \sup(\mu_{\hat{\imath}}^{k}(a_{0j}), \eta_{jl}^{k}(b_{jl})),$
noravshan induktsiyalashgan funktsiya
ravshan induktsiyalashgan funktsiya μ_t va R^1 dagi tabiiy tartib.

Berilgan α sondan kichik bo'lmagan ustunlik qilinmaslik darajasiga ega bo'lgan muqobilni topish uchun quyidagi cheklanishlarda

$$\psi(t) = (a + ct)x - (a_{.0} + dt) \le 0,\ \mu_o^k(a_{0j}) \ge \alpha, \eta_{jl}^k(b_{jl}) \ge \alpha,$$
$$\mu_{ij}^k(a_{ij}) \ge \alpha,\ \nu_{ijl}^k(c_{ijl}) \ge \alpha,\ \xi_{il}^k(d_{il}) \ge \alpha,\ x \in X$$

quyidagi matematik dasturlash masalasini yechish yetarlidir:

$$f(t) = (a_0^{'} + t^{'}b)x + e^{'}t \to \min .$$

Bunday turdagi masalani yechish berilgan umumiy masala uchun ustunlik qilinmaydigan muqobillardan (α darajali) faqat ayrimlarinigina aniqlashga imkon beradi [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101].

Agar faqat maqsad funktsiyasigina parametrlarga bog'liq bo'lsa, u holda ko'p mezonli muqobillashtirish masalasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)]^T \to \min, \quad x \in X \tag{3.2.2}$$

bu yerda

$$k \in Q = \{1, 2, \ldots, q\},$$
$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j,\ x = \{x \in R^n \mid Ax \ge b, x \ge 0\},$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m}\right).$$

Noravshan maqsadga ega bo'lgan ko'p mezonli muqobillashtirish masalasi quyidagi shartni qanoatlantiradigan x ni topishni nazarda tutadi [137,138,139,145]:

$$f_k(x) \le \tilde{g}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, Q,\ x \in X, \tag{3.2.3}$$

bu yerda $\tilde{g}_k$ -noravshan to'plam.

$$\mu_k\left(f_k(x)\right)=\begin{cases}1, & f_k(x)\le g_k,\\ 1-\dfrac{f_k(x)-g_k}{t_k}, & g_k\le f_k(x)\le g_k+t_k,\\ 0, & f_k(x)\ge g_k+t_k.\end{cases} \qquad (3.2.4)$$

(3.2.3) noravshan masalani yechish quyidagi ravshan masalani yechishga aylantirilishi mumkin:

$$\lambda\to\max, \mu_k\left(f_k(x)\right)\ge\lambda,\ x\in X.$$

Agar barcha y lar uchun

$$\mu_k\left(f_k(y)\right)\le\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)$$

va hech bo'lmaganda bitta y uchun

$$\mu_s\left(f_s(y)\right)<\mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $x^0\in X$ yechim Pareto optimal yechim deb ataladi·

Agar Pareto turidagi mezon bo'yicha x^0 ga nisbatan yaxshiroq bo'lgan $y\in X$ mavjud bo'lmasa, $x^0\in X$ yechim Pareto turidagi mezon bo'yicha optimal deb ataladi [39].

Noravshan muhitda Pareto turidagi mezon bo'yicha yechimning yaxshilanuvchanligi tushunchasinini kiritamiz: agar Pareto turidagi mezon bo'yicha u yechimdan ko'ra yaxshiroq bo'lgan $x^0\in X$ yechim mavjud bo'lsa, $y\in X$ yechim yaxshilanuvchan deb ataladi·

3.2.1-tasdiq. $x^0\in X$ yechim ko'p maqsadli noravshan yechimlar $f(x)=\left[f_1(x), f_2(x),\ldots,f_p(x)\right]$ ni qabul qilishda faqat va faqat barcha $k\in\{1,\ldots,Q\}$ lar va hech bo'lmaganda bitta $s\in\{1,\ldots,Q\}$ uchun

$$\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right)\le c^k,\ \ \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right)<c^s$$

tengsizlik bajariladigan $\gamma\in R^Q$ vektor mavjud bo'lgan holdagina yaxshilanuvchan hisoblanadi, bu yerda $c^k=c-\gamma_k$, $c=\max\limits_y\min\limits_k\left[\mu_k\left(f_k(y)\right)+\gamma_k\right]$.

Isboti. Aytaylik, talab qilingan tengsizliklar bajarilsin, u holda c^k ning ta'rifiga ko'ra barcha $k\in\{1,\ldots,Q\}$ lar va hech bo'lmaganda bitta $s\in\{1,\ldots,Q\}$ uchun $c\le\mu_k\left(f_k(y)\right)+\gamma_k$ tengsizlik, demakki $c^k\le\mu_k\left(f_k(y)\right), \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right)<c^s\le\mu_s\left(f_s(y)\right), \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right)\le c^k\le\mu_k\left(f_k(y)\right)$ tengsizliklar o'rinli bo'ladigan $y\in X$ mavjud.

Ushbu tengsizlik $x^0\in X$ yechimning yaxshilanuvchanligini ko'rsatadi.

3.2.2-tasdiq. Aytaylik, $x^0 \in X$ yechim yaxshilanuvchan va $y \in X$ Pareto mezoni bo'yicha x^0 echimdan yaxshiroq bo'lgan yechim bo'lsin. Barcha $k \in \{1,...,Q\}$ lar uchun $\gamma_k = \mu_s(f_s(y)) - \mu_k(f_k(y))$ ni belgilaymiz, bu yerda

$$s: \mu_s(f_s(y)) > \mu_s(f_s(x^0)).$$

u holda

$$\max_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \min_y[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \mu_s(f_s(y)).$$

Isboti R^Q dan olingan barcha γ uchun

$$\min_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] \le c$$

o'rinli ekanligini hisobga olgan holda quyidagini olamiz:

$$\mu_k(f_k(x^0)) + \gamma_k \le \mu_k(f_k(y)) + \gamma_k \le \max_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \min_y[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] \le c,$$

Barcha $k \in \{1,...,Q\}$lar va hech bo'lmaganda bitta $s \in \{1,...,Q\}$ uchun $\mu_s(f_s(x^0)) + \gamma_s < \mu_s(f_s(y)) + \gamma_s \le c$.

Bundan isbotlanayotgan tengsizliklarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

3.2.3-tasdiq. $x^0 \in X$ yechim ko'p maqsadli noravshan yechimlarni qabul qilishda faqat va faqat

$$\tilde{A} = \{\gamma \in \mathrm{R}^Q : \max_y \mu_k(f_k(y)) - \min_y \mu_\rho(f_\rho(y)) \ge \gamma_\rho - \gamma_k,\ (\rho, k = 1,...,Q, \rho \ne k)\}$$

to'plamdan olingan 1-tasdiqdagi tengsizlik bajariladigan γ vektor mavjud bo'lgan hollardagina yaxshilanuvchan bo'ladi.

Isboti. Barcha $k, \rho \in \{1,...,Q\}$ lar uchun

$$[\mu_k(f_k(x^0)) + \gamma_k] \le (\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k) \le \max_k[\mu_k(f_k(y)) + \gamma_k] = \min_\rho[\mu_\rho(f_\rho(y)) + \gamma_\rho] \le c.$$

$$(\mu_s(f_s(x^0)) + \gamma_s) < (\mu_s(f_s(y)) + \gamma_s) \le c.$$

Bundan isbotlanayotgan tengsizliklarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Natija. Agar baholash funktsionallari $\{\mu_k(f_k(y))\}_{k=1}^Q$ tabiiy normallashtirishdan keyin olingan bo'lsa, u holda Γ soha quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathrm{R}^Q; |\gamma_\rho - \gamma_k| \le 1,\ \ k, \rho = 1,...,Q; \rho \ne k\}.$$

Shunday qilib Pareto mezoni bo'yicha ko'p maqsadli yechim $x^0 \in X$ ning yaxshilanuvchanligi, Pareto bo'yicha optimalligi to'g'risidagi masalani yechish 1-tasdiqdagi tengsizlik bajariladigan vektorning mavjudligiga (mavjud emasligiga) keltiriladi.

3.2.4-tasdiq. $y \in X$ yechim yaxshilanuvchan (Pareto bo'yicha optimal) bo'lishi uchun quyidagi tengsizliklar bajarilishi (birgalikda bo'lmasliklari) zarur va yetarlidir:

$$\mu_k(f_k(y)) \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_z \min_\rho \left[\mu_\rho(f_\rho(z)) + \gamma_\rho\right] - \gamma_k\right\}, (k=1,\dots,Q).$$

Isboti. Barcha $(\rho, k=1,\dots,Q, \rho \ne k)$ lar yoki hech bo'lmasa bitta $s \in \{1,\dots,Q\}$ uchun:

$$\mu_k(f_k(x^0)) + \gamma_k \le \mu_k(f_k(y)) + \gamma_k \le \max_z[\mu_k(f_k(z)) + \gamma_k] = \min_\rho[\mu_\rho(f_\rho(z)) + \gamma_\rho] \le$$

$$\le \max_z \min_\rho[\mu_\rho(f_\rho(z)) + \gamma_\rho] \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_z \min_\rho[\mu_\rho(f_\rho(z)) + \gamma_\rho]\right\},$$

$$(\mu_s(f_s(x^0)) + \gamma_s) < (\mu_s(f_s(y)) + \gamma_s) \le \max_{\gamma\in\Gamma}\left\{\min_z \min_\rho(\mu_s(f_s(z)) + \gamma_\rho)\right\}.$$

Bundan isbotlanayotgan tengsizliklarning o'rinli ekanliklari kelib chiqadi.

3.2.5-tasdiq. Aytaylik, $f_k(y)$ ning (3.2.8) dagi singari aniqlanadigan $\mu_k(f_k(y))$tegishlilik funktsiyasi, x^0- yaxshilanayotgan masalaning optimal yechimi bo'lsin:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k \to \max,\\ \mu_k(f_k(x)) - \gamma_k \ge \lambda^*,\ k=1,\dots,Q,\\ x\in X,\ \gamma_k \ge 0.\end{gathered} \tag{3.2.5}$$

U holda $x^0 \in X$ yechim (3.2.2) masalaning Pareto – optimal yechimidir.

Isboti.Teskarisini faraz qilaylik. Aytaylik, $x^0 \in X$ (3.2.2) ning Pareto – optimal yechimi bo'lmasin. U holda shunday $y \in X$ yechim mavjud bo'ladiki, qandaydir $s \in \{1,..,Q\}$ uchun barcha $(k=1,\dots,Q)$ va $f_s(y) < f_s(x^0)$ larda $f_k(y) \le f_k(x^0)$o'rinli bo'ladi.

$\gamma_k, k=1,\dots,Q$ vektor musbat va x^0 quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\mu_k(f_k(x^0)) - \gamma_k = \lambda^*,\ k=1,\dots,Q \text{ va } \sum_{k=1}^{Q}\gamma_k = \sum_{k=1}^{Q}\mu_k(f_k(x^0)) - Q\lambda^*.$$

Shunga qaramasdan qandaydir $s \in \{1,..,Q\}$ uchun barcha $(k=1,\dots,Q)$ va $f_s(y) < f_s(x^0)$ larda $f_k(y) \le f_k(x^0)$ o'rinli bo'ladigan $y \in X$ mavjud.

Bu quyidagi tengsizliklarga olib keladi:

$$\sum_{k=1}^{Q}\gamma_k = \sum_{k=1}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) - Q\lambda^* = \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{Q}\mu_k\left(f_k\left(x^0\right)\right) + \mu_s\left(f_s\left(x^0\right)\right) - Q\lambda^* <$$

$$< \sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{Q}\mu_k\left(f_k(y)\right) + \mu_s\left(f_s(y)\right) - Q\lambda^*.$$

Bu $x^0 \in X$ ning (3.2.5) ning optimal echimi emasligini bildiradi. Ziddiyat tasdiqqning o'rinli ekanligini ko'rsatadi.

(3.2.4) shartlari holatida (3.2.5) ning Pareto-optimal yechimini topish quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga keltiriladi:

$$\begin{cases} \mathrm{R} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{Q}} \mathrm{c}_{\mathrm{k}} x_k \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k,\ k = 1,\dots,Q+m, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Ushbu masalaning yechimini rekurrent neyron to'rlaridan foydalanib topamiz.

Rekurrent neyron to'rlari bilan modelni hisoblash uchun quyidagi qarama-qarshi ishorali funktsiyaga o'tish

$$R = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{Q} c_k x_k$$

va tegishli jadvalga c_k ning qiymatlarini qarama-qarshi ishora bilan yozish kerak.

To'r kirishiga vektorni berishda neyronlarning holati aniqlanadi, biroq keyin neyronlarning chiqishlari teskari aloqalarga ega bo'lganligi uchun ularning kirishlariga yana yangi vektor kelib tushadi va holati yana o'zgaradi. Rekurrent to'rlarga turg'unlik tushunchasi uzviy bog'liq [61]. Agar chekli sondagi iteratsiyalardan keyin neyronlar holati o'zgarmaydigan holatni qabul qilsa, to'r turg'un deb hisoblanadi. Vektorni turg'un rekurrent to'rlarning kirishiga berishda neyronlarning chiqish signallari ishlab chiqiladi, ular yana kirishlarga tushadi va yangi holatlar vektorini hosil qiladi, biroq iteratsiyalar soni o'sib borishi bilan to'r so'nggi holatga o'rnatilmagunicha tugunlar holatlarining o'zgarishlari soni kamayib boradi. Teskari aloqaga ega bo'lmagan to'rlar doimo turg'un bo'ladilar, chunki bitta vektor kirishga berilganda to'r tugunlari neyronlar kirishlarining doimiyligi oqibatida o'z holatini faqat bir marta o'zgartirishi mumkin.

(3.2.2)-(3.2.3) masalani yechish uchun quyidagi differentsial tenglama bilan ifodalanadigan rekurrent neyron to'ri taklif qilinadi [27]:

$$\frac{\partial u_k(t)}{\partial t} = -\eta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right) + \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Bu yerda $x_k = f(u_k(t)), \quad f(u) = \frac{1}{1+\exp(-\beta u)}$. Xopfild to'ridagi kabi bu yerda ham o'lchamga ega bo'lgan neyronlar matritsasidan foydalaniladi, biroq neyronlar "har bir har biri bilan" tamoyili bo'yicha emas, balki satrlar va ustunlar bo'yicha o'zaro ta'sirlashadilar [135,144].

Ushbu tenglamaning chekli ayirmalarga asoslangan varianti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_k^{t+1} = u_k^t - \Delta t \cdot \left[\eta\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k\right) - \lambda c_k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \qquad (3.2.6)$$

bu yerda Δt -vaqt bo'yicha qadam. $\Delta t, \eta, \lambda, \tau, \beta$ parametrlar tajribalar asosida tanlab olinadi va masala yechimiga erishish tezligi va ushbu yechim sifatiga jiddiy ta'sir ko'rsatadi.

(3.2.6) tenglamalar tizimni yechishni tezlashtirish uchun «Winner takes all» tamoyili taklif qilingan [47]:

$x_k^0 \in [0,1]$ tasodifiy qiymatlarning $\|x_k^0\|$ matritsasi hosil qilinadi.

1. (3.2.2) iteratsiya quyidagi tengsizlik bajarilmagunicha davom ettiriladi: $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k \le \varepsilon$, bu yerda ε - (3.2.3) cheklanishlarning bajarilishining berilgan aniqligi.

1 va 2 qadamlar takrorlanadi.

Sun'iy neyron to'rlarining eng muhim xossalaridan biri bo'lib neyron to'rli modellarning ishonchliligi hisoblanadi.

Ushbu xossa yuqori ishonchlilik talab qilinadigan sohalar uchun amaliy neyron to'rli tizimlarni qurishga imkon beradi.

Neyron to'rlarining o'qituvchanligi ham muhim xususiyatlardan hisoblanadi.

Ushbu xususiyat tufayli ular nafaqat o'zlarining kirishlariga kelib tushayotgan timsollarni tanib oladilar, balki tegishli protseduralar yordamida iloji boricha to'g'ri tanib olishni amalga oshirish uchun ham sozlana oladilar. Shunday qilib neyron to'rlari quyidagi ikki rejim yoki fazada faoliyat ko'rsatishi mumkin: o'qitish rejimida va tanib olish rejimida.

3.3. Noravshan joriy axborot holatida stoxastik modellashtirish muammolari

Masalani matematik dasturlash usullari yordamida berganda va yechganda odatda determinantlashtirilgan yondashuvdan foydalaniladi. Bu degani, modelning barcha parametrlari determinantlashgan, ya’ni, qat’iy belgilangan kattaliklar bo’ladi.

Determinantlashgan yondashuv aniq bir fan sohasida mahsulot ishlab chiqarishning ehtimolli tavsifini hisobga olmaydi.

Amaliyotda boshqaruv qarorlari odatda, tashqi muhitning qayd etib boriluvchi natijasiga mo’ljallangan o’rta me’yor va texnologiyalar asosida bitta variantda qabul qilinadi. Aniq bir fan sohasida boshqaruv qarorlari samaradorligining tashqi muhitga bog’liqligi shu darajada seziladiki, hattoki kichik tebranishlarda ham, oldin qabul qilingan ko’pgina yechimlardagi xatoliklar kattalashib ketadi. Demak, oldin qabul qilingan yechimlarning samaradorligi ancha pasayadi. Bu borada, boshqaruvning samaradorligini oshirish uchun, tasdoifiy, inson tomonidan boshqarilmaydigan omillarni hisobga olgan holda (yog’inlar miqodri va ularning yil davrlari bo’yicha taqsimlanishi, havoning temperaturasi va boshqalar) boshqaruv yechimlarini qabul qilish darkor. Shu maqsadda, tasodifiy parametrlar hisobga olinuvchi stoxastik modeldan foydalaniladi. Tasodifiy parametrlarning ta’siri, masalan, qishloq xo’jaligining jabhalarida, hosildorlik qiymatlarining tebranishi orqali hisobga olinadi. Demak, modelda texnik-iqtisodiy koeffitsiyentlar orqali ifodalanuvchi resurslar xarajati va mahsulotning chiqarilishi ham o’zgaruvchan qiymatlarga ega bo’ladi. Mazkur masalalarni yechishda blokli modeldan foydalaniladi.

Shunday qilib, qishloq xo’jaligining muqobillashtirish masalalarida stoxastik yondashuv o’zini oqladi. Bu, asosi stoxastik dasturlash bo’lgan, muqobil modellarni qurish zaruratini anglatadi.

Stoxastik dasturlash, masalaning barcha mavjud tasdofiy parametrlarini hisobga olgan holda, eng yaxshi variantni tanlash imkoniyatini beradi. Kelgusida, tasodifiy parametrlarning ehtimolli tavsiflari (“xavflilik holati”) ma’lum deb faraz qilinadi.

Umumiy holda, stoxastik dasturlash masalasini yechish matematik dasturlashning aniq masalasini yechishga olib kelinadi. Buning uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak: maqsad funksiyasi matematik kutilmasining maksimumi mavjud; masaladagi tasodifiy parametrlarning amaliyotga tadbiq etilishlari soni chekli va nisbatan katta emas; parametrlarning ehtimoli ma’lumdir.

Muqobil yechimni izlash masalasi xavf-hatar sharoitida qaror qabul qilish masalasi sifatida talqin etilishi uchun, barcha tasodifiy omillar tadqiqotchi uchun statistik jihatdan to’laligicha aniqlangan, ya’ni k-tasodifiy omil y_k uchun, uning alohida $p(y_k)$ qiymatlari paydo bo’lish ehtimollarining taqsimot qonuni ma’lum bo’lishi kerak.

Stoxastik model maqsad funksiyasining qiymatlari boshqariluvchi o’zgaruvchi, o’zgarmaslar va tasodifiy omillarning qiymatlariga bog’liq bo’ladi, shuning uchun, o’rganilayotgan obyektni, yagona axborotni kiritish hisobiga olingan modellashtirish natijalari, obyektiv tavsiflab bera olmaydi:

$$f^l = \varphi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y}^l),$$
$$y^l = (y_1^l, y_2^l, ..., y_k^l),$$

bu yerda f^l- tasodifiy omillarning *l*-tadbig’idagi maqsad funksiyasining tasodifiy qiymati.

Bu borada, o’zgaruvchilarning optimal qiymatlarini izlashda, qaror qabul qilishning stoxastik masalasi modelni ikkita usulning biri orqali: sun’iy yo’l bilan va o’rtacha qiymat bilan determinantlashtirilgan ko’rinishga keltiradi.

Birinchi holda hodisalarning ehtimolli ko’rinishi aniqlashtirilgan ko’rinish bilan taxminiy usulda almashtiriladi. Bu usul modelning muhim omillarini tanlash bosqichida tasodifiy omillarni determinantlashtirilganlar bilan almashtirishda qo’llaniladi.

Modelni determinantlashtirilgan modelga sun’iy yo’l bilan keltirish maqsad funksiyasi va cheklanishlar tasodifiy omillarga faqatgina chiziqli bog’liq bo’lgan holdagina natijaning matematik kutilmasi hisobidagi xatoliklarga olib kelmaydi.

f tizimning funksionallashuv natijasi unga nisbatan *y* tasodifiy miqdorning ta’siriga bo’gliq bo’lsin, ya’ni $f = \varphi(y)$. U holda:

$$M[f] = M[a + by] = a + bM[y],$$

ya’ni:

$$M[f] = \varphi(M[y]).$$

Modelning chiziqli emasligi hisoblashdagi xatoliklarga olib keladi, jumladan, nochiziqlilik qanchalik katta bo’lsa, xatolik ham shunchalik katta bo'ladi.

$f = y^2$ bo'lsin. U holda:

$$M[f] = M[y^2] = M[y]^2 + \sigma^2 y,$$

ya'ni $M[f] = \varphi(M[y])$ tenglik o'rinli bo'lmaydi. Maqsad funksiyasining matematik kutilmasi $\sigma^2 y$ kattalikka siljiydi. .

Shunday qilib, tasodifiy miqdorlarni ularning matematik kutilmasi bilan almashtirish mumkinligi to'g'risida qilingan faraz, umumiy holda, noto'g'ri bo'ladi. Shuning uchun, mazkur usul faqatgina qo'pol, mo'ljallangan hisoblashlarda, shuningdek, tasodifiy qiymatlarning mavjud qiymatlar oralig'i nisbatan kichik, ya'ni ularni tasodifiy miqdor deb olmasa ham bo'ladigan hollarda qo'llaniladi. Uni qo'llashga tasodifiy miqdorning

$$k_y = (\sigma_y / M[y]) * 100\%$$

formula yordamida aniqlanuvchi variasiya koeffitsiyentini bilish asos bo'lib xizmat qilishi mumkin, bu yerda σ_y- *y* tasodifiy omilning o'rta kvadratik chetlashishi; M[y] – *y* tasodifiy omilning matematik kutilmasi.

Agar variasiya koeffitsiyenti 15-20% dan kichik bo'lsa, u holda tasodifiy omilni uning matematik kutilmasi bilan almashtirish sezilarli xatoliklarga olib kelmaydi.

Stoxastik modelni determinantlashtirilgan modelga keltirgandan so'ng, muqobil yechimlarni izlash maqsadida, ekstremumni qidirishning analitik, sonli va tajribaviy usullaridan foydalaniladi.

Natija bo'yicha o'rtalashtirish usuli anchagina murakkab bo'lib, tasodifiy omillarning tarqoqligi katta bo'lgan va ularning har birini matematik kutilma bilan almashtirish katta xatoliklarga olib keluvchi hollarda qo'llaniladi. U tasodifiy maqsad funksiyani o'zining statistik tavsifi - matematik kutilma bilan almashtirishdan iboratdir:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y}) = M[f_{ml}(\bar{x}^m, \bar{a}, \bar{y}^l)] = \sum_{l=1}^{i} p_l f_{ml} ,$$

bu yerda: $x^m = x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m$ - *(m=1,M)* o'zgaruvchilarning *m*-to'plami;

$y^l = y_1^l, y_2^l, ..., y_k^l$ - $(l = (\overline{1, L})$ tasodifiy omillarning *l*-to'plami;

P_l - tasodifiy omillardagi *l*-qiymatlar to'plamining vujudga kelish ehtimoli;

f_{ml} - o'zgaruvchilarning *m*-to'plami va tasodifiy omillarning *l*-qiymatlar to'plami oldidagi maqsad funksiyaning qiymati.

Shu kabi holat to'g'risidagi joriy axborot jadvalga keltiriladi; har bir qatorning oxirgi katagida maqsad funksiyasining matematik kutilmasini hisoblash natijalari yozib boriladi. Matematik kutilmaning maksimal qiymatiga erishiladigan o'zgaruvchilarning qiymatlar to'plami muqobil hisobalanfdi.

Amaliyotda, natija bo'yicha o'rtalashtirish usuli statistik modellashtirish usuli yordamida tadbiq etiladi. Mazkur usulning umumlashgan algoritmi quyidagicha:

1) Har bir y_k tasodifiy qiymatga nisbatan y_k, σ_{yk}^2 parametrli taqsimot qonun asosida tasodifiy tajriba o'tkazilib, uning qiymati hisoblaandi.

2) Mazkur amal barcha $y_1, y_2, ..., y_k$ tasodifiy qiymatlar topilgunga qadar takrorlanadi.

3) Topilgan $y_1, y_2, ..., y_k$ qiymatlardan foydalanib, *f* ning berilgan funskiayaga nisbatan xususiy qiymati hisoblanadi.

4) 1,2,3 bosqichlar *f* funksiyaning *N* ta qiymati olingunicha takrorlanadi.

5) *f* ning topilgan qiymatlari asosida ehtimollarning taqsimot zichligi, so'ngra *f* tasodifiy qiymatning *M[f]* matematik kutilmasi va σ_f^2 dispersiyasi hisoblanadi. Bu qiymat quyidagi ko'rinishda yozib olinishi mumkin:

$$f = \varphi(M[f], \sigma_f^2),$$

bu yerda *M[f]*, σ_f^2 kiruvchi kattaliklar yoki parametrlarning funksiyasi ko'rinishida beriladi.

Tasodifiy omilining natijaga ko'rsatadigan ta'sirini natija bo'yicha o'rtalashtirish bartaraf etmaydi. Oldindan ma'lum bo'lmagan tasodifiy $y_1, y_2, ..., y_k$ qiymatlar asosida olib boriluvchi har bir alohida hisoblashning natijasi kutilayotgan o'rtachadan ham yaxshi tomondan, ham yomon tarafdan farq qilishi mumkin, lekin hisoblashlarni ko'p marotaba takrorlash natijasida mazkur farqlar o'rtacha tekislanib ketadi. Har bir alohida holdagi xavf to'g'risida tasavvurga ega bo'lish uchun, qiziqtirilayotgan ko'rsatkichning matematik kutilmasidan tashqari, uning dispersiyasini ham baholash maqsadga muvofiqdir.

Natija bo'yicha o'rtalashtirish usulini amalga oshiruvchi stoxastik dasturlash usuli ehtimollar nazariyasining umumiy teoremalariga asoslangan bo'lib, hech qanday cheklanishlarni o'z ichiga olmaydi va har qanday masalani yechishda qo'llanilishi mumkin, yetarli miqdordagi tadbiqlarda esa, undan har qanday aniqlikni talab qilish mumkin. Usulning qayd etilgan alternativalari, undan modellashtirishning eng murakkab masalalarini yechishda foydalanishga imkon beradi.

A matrisa tasodifiy bo'lgan hollarda, stoxastik masalalarni chiziqli dasturlash masalalariga olib kelish yo'llarini ko'rib chiqaylik. Ko'rilayotgan hol qishloq xo'jaligida (g'o'zachilikda) muqobillashtirishning stoxastik modellarini qurish uchun katta ahamiyatga ega, chunki qishloq xo'jaligi ekinlari (paxta) ning hosildorlik yillari bo'yicha tebranishlar A matrisaning aynan texnikaviy-iqtisodiy koeffitisyentlari - 1 gektar maydondan mahsulotning chiqishi, 1 gektar yerga sarf bo'lgan mehnat va moddiy vositalar sarf-xarajatining tasodifiy xarakterga ega bo'lishini asoslab beradi. Shu bilan bir qatorda, B vektorning elementlari, ko'pgina hollarda, determinantlashtirilgan, ya'ni hosildorlik yillarining aniq natijalariga bog'liq bo'lmagan qiymatlar (qishloq xo'jaligi ekinlarining maydonlari, mehnat resurslari, …) sifatida qaralishi mumkin.

Shunday qilib, resurslar harajatining o'lchamlari va j-turdagi faoliyat birligiga nisbatan mahsulotning ishlab chiqarilishini ifodalovchi a_{ij} texnikaviy-iqtisodiy koeffitsiyentlarining A matrisasi tasodifiy bo'lsin; B vektor-determinantlashtirilgan. Stoxastik dastulashning mos masalasi blokli tuzilmaga ega:

$$F(x,y) = Cx + p_1\gamma y_1 + p_2\gamma y_2 + \dots p_N\gamma y_N \to \max ,$$

$$\begin{array}{llllll}
A_0 x & & & & \subset & B_0 , \\
A_1 x + & D_1 y_1 & & & \subset & B_1 , \\
A_2 x + & & D_2 y_2 & & \subset & B_2 , \\
 & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
A_N x + & & & D_N y_N & \subset & B_N .
\end{array}$$

Bu yerda $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ - boshqaruvchi o'zgaruvchilarning vektori;

$y_r = \{y_{1r}, ..., y_{1r}\}$- r-natijaga mos kelgan boshqaruvchi o'zgaruvchilar vektori (r=1,2,...,N);

$A_1, A_2, ..., A_N$ - sodir bo'lishi mumkin bo'lgan natijalarga mos kelgan noravshan texnikaviy-iqtisodiy koeffitsiyentlarning matrisalari (mxn);

$D_1, D_2, ..., D_N$ - noravshan texnikaviy-iqtisodiy koeffitsiyentlarning yordamchi matrisalari;

$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ - cheklanishlarning o'zgarmaydigan ozod hadlari vektori;

$C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$- maqsad funksiyasining x o'zgaruvchilari oldidagi noravshan koeffitsiyentlar vektori;

$\gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_l\}$ - maqsad funksiyasining y_r o'zgaruvchilari oldidagi noravshan koeffitsiyentlar vektori;

p_r - r-natijaning ehtimoli (r=1,2,...,N).

$A_0x\subset B_0$ blok tasodiflarga bog'liq bo'lmagan barcha shartlarni akslashtirishga mo'ljallangan.

Bu yerda ko'rilayotgan modelni aniqlashtirish yo'lidagi keyingi qadam masalaning parametrlarini noravshan to'plamlar shaklida ta'riflashdan iboratdir. Bunda, parametrlarning mavjud qiymatlar to'plamidan berishdan tashqari, modelga mazkur noravshan to'plamlarning tegishlilik funksiyasi ko'rinishidagi qo'shimcha axborot kiritiladi. Bu funksiyalarni ekspert tomonidan berilgan parametrning haqiqiy qiymati to'g'risidagi yaxshi shakllanmagan tasavvurini aralashgan ko'rinishda taxminiy akslantirish usuli sifatida qabul qilish mumkin. Ekspert tomonidan mazkur parametrning har xil qiymatlari oldiga yozib qo'yiluvchi koeffitsiyentlar og'irligi tegishlilik funksiyasining qiymatlari yordamida fazzifikasiyalanadi.

Albatta, bunday qo'shimcha axborotni hisobga olish, joriy matematik modelni murakkablashtiradi, lekin, shunga qaramay, u yuqorida aytib o'tilgan, qo'shimcha omillarning xilma-xilligini hisobga oluvchi modelga nisbatan ancha oson (shu bilan bir qatorda, aniqroq) bo'lib chiqishi mumkin.

Joriy masalaning yechishni chiziqli dasturlashning bir qator masalalarini yechishga olib kelaylik. Buning uchun, diskret α - darajalarni kiritamiz. Natijada, noravshan cheklanishlar quyidagi oraliq ko'rinishni qabul qiladi:

$$P=\begin{cases}\sigma_\alpha(a_{i1})x_1+\sigma_\alpha(a_{i2})x_2+...+\sigma_\alpha(a_{in})x_n\subseteq\sigma_\alpha(b_i), i=\overline{1,m}, \alpha=\overline{1,p},\\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}\end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$a_{ij}\in[a_{ij}^-;a_{ij}^+], i=1,...,m,\ j=1,...,n, \quad (3.3.2)$$

Uning o’ziga xosligi shundan iboratki, shartlar matrisasining koeffitsiyentlari qayd etilgan kattaliklar bo’lmaydi - ularning har biri ma’lum bir oraliqdan tanlanishi mumkin. Bunday masalalarni yechishning tamoyilli yondashuvi mashhurdir. Uning mazmuni shundan iboratki, joriy masalaning har bir A_j ustuni koefftsiyentlari mavjud oraliqlardan olingan o’zgarmaslar bo’lgan $A_j^1,...,A_j^{L_j}$ ustunlar to’plami bilan almashtiriladi. Bu ustunlarga $x_j^1,...,x_j^{L_j}$ o’zgaruvchilar mos qo’yiladi. Endilikda masala quyidagi tarzda bayon qilinadi:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_j} c_j x_j^l \to \max, \tag{3.3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_j} a_{ij}^l x_j^l = b_i, i = 1,...,m, \tag{3.3.4}$$

$$x_j^l \geq 0, j = 1,...,n, l = 1,...,L_j. \tag{3.3.5}$$

Joriy masalaning har bir ustuni uni ifodalovchi ustunlarning qavariq chiziqli kombinasiyasi ekanligini ko’rsatamiz. Haqiqatdan ham

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L_j} a_{ij}^l x_j^l = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{L_j} a_{ij}^l x_j^l / \sum_{l=1}^{L_j} x_j^l\right)x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{L_j} a_{ij}^l \lambda_j^l\right)x_j,$$

bu yerda

$$\lambda_j^l = x_j^l / \sum_{l=1}^{L_j} x_j^l.$$

Shunday qilib,

$$A_j = \lambda_j^1 A_j^1 + \lambda_j^2 A_j^2 + ... + \lambda_j^{L_j} A_j^{L_j},$$

bu yerda $\sum_{l=1}^{L_j} \lambda_j^l = 1, \lambda_j^l \geq 0, j = 1,...,n, l = 1,...,L_j.$ Lekin bundan (3.3.3)-(3.3.5) masalaning joriy masalaga ekvivalent ekanligi kelib chiqmaydi. Agarda har bir A_j ustunga nisbatan, o’rinbosar $A_j^1,...,A_j^{L_j}$ ustunlarning qavariq chiziqli kombinasiyalar to’plami mazkur ustundagi koeffitsiyentlarning mavjud qiymatlar to’plami bilan ustma-ust tushadigan qilib tanlab olingandagina ekvivalentlikka erishiladi. Mazkur masalani yechishning ikkita mavjud yondashuvini ko’rib chiqaylik.

1. Birinchi yondashuvda maxsus algoritmdan foydalaniladi. Bunda, masalani shakllantirish bosqichida ustunlarni tanlab olish masalasi bilan

shug’ullanmasa ham bo’ladi. Ular masalani yechish jarayonida quyidagi tarzda generasiyalanadi.

Mavjud to’plamdan shartlar matrisasi koeffitsiyentlarining ixtiyoriy qiymatlari tanlanadi va bazis topiladi. Unga mos kelgan $\pi = c_B B^{-1}$ simpleks ko’paytiruvchilar hisoblanadi, bunda c_B - bazis usutunlar oldidagi maqsad funskiyasining koeffitsiyentlari, B^{-1} - bazis matrisaga teskari matrisa. ν iterasiyada mos bazisga muvofiq kelgan $\pi^{\nu} = (\pi_1^{\nu},...,\pi_m^{\nu})$ vektor olingan bo’lsin. Har bir A_j ustunga nisbatan, uning mavjud to’plamdagi shunday koeffitsiyentlarini tanlaymizki, ular asosida optimumga eng katta qadam qo’yilsin, ya’ni $j = 1,...,n$ ga nisbatan quyidagi yordamichi masalaning A_j^* yechimini topamiz

$$\Delta_j^{\nu} = \min_{A_j}[(\pi^{\nu}, A_j) - c_j \,|\, A_j \in \Gamma_j] \qquad (3.3.6)$$

Bu yerda Γ_j -(3.3.6) shartlarga mos kelgan A_j larning mavjud qiymatlar to’plami. So’ngra barcha o’rinbosar baholar ichida minimalini tanlaymiz. Faraz qilaylik, $\Delta_s^{\nu} = \min_j[\Delta_j^{\nu}]$ bo’lsin. U holda, agar $\Delta_s^{\nu} \geq 0$ bo’lsa, yechim olindi. Aks holda bazisga A_s^* ustunni kiritish hisobiga, B^{-1} ni yangilaymiz. Bu amal muqobillik sharti bajarilmagunicha davom etadi.

Algoritm sodda va samarador. Lekin, unga ko’ra simpleks algoritm doirasida (3.3.6) yordamchi masalalarni yechish prosedurasi kiritilishi kerak. O’zining xususiyati hisobiga, u ilovalarni yaratishda chiziqli dasturlashning tijorat paketlariga tayanuvchi ishlab chiqaruvchilarga to’g’ri kelmasligi mumkin.

2. Ustuvor yondashuv - shartlar matrisasini yaratish bosqichida o’rinbosar ustunlarni shakllantirib, kelgusida standart matematik ta’minotdan foydalanishga zamin yaratish. Lekin bu o’lchov muammosiga olib kelishi mumkin, shuning uchun ayrim cheklanishlar paydo bo’ladi. Lekin, baxtimizga, zamonaviy chiziqli dasturlash paketlari qisqa vaqt ichida minglab o’zgaruvchilarni o’z ichiga olgan masalalarni yechishga qodirdirlar. [91] da (3.3.1)-(3.3.2) masalaning $A_j^1,...,A_j^{L_j}$ ustunlari A_j ustunning quyi va yuqori aniqlanmagan koeffitsiyentlarning qiymatlarini o’z ichiga olgan matrisani tashkil etishi shartida (3.3.3)-(3.3.5) masalaga ekvivalent bo’lishi isbotlangan.

Agar ustunning aqalli bitta aniqmas koeffitsiyenti bo'lsa, masalan $a_1 \in [a_{1j}^-, a_{1j}^+]$, u holda A_j o'rniga modelga ikkita ustundan tashkil topgan matrisa kiritiladi:

$$(A_j^1, A_j^2) = \begin{pmatrix} a_{1j}^- & a_{1j}^+ \\ a_{2j} & a_{2j} \\ \dots & \dots \\ a_{mj} & a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Agarda ular ikkita bo'lsa – u holda A_j to'rtta ustundan iborat matrisa bilan almashtiriladi:

$$(A_j^1, A_j^2, A_j^3, A_j^4) = \begin{pmatrix} a_{1j}^- & a_{1j}^+ & a_{1j}^- & a_{1j}^+ \\ a_{2j}^- & a_{2j}^- & a_{2j}^- & a_{2j}^+ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mj} & a_{mj} & a_{mj} & a_{mj} \end{pmatrix}.$$

O'rinbosar matrisani shakllantirish qoidasini bayon qilamiz: birinchi satrda mos koeffitsiyentning darajalari navbatma-navbat o'zgaradi, ikkinchisida - ikkitadan, uchinchisida - to'rttadan, to'rtinchisida - sakkiztadan va h.k. ikkining darajalari bo'yicha. Bu yerda $L_j = 2^{k_j}$, k_j - ustunning aniqmas koeffitisyentlari soni.

Ko'rib turganimizdek, noravshan stoxastik dasturlashning joriy masalasi mavjud alternativalar to'plami darajasida mavjud to'plamlardagi sxoxastik dasturlashning sodda masalalari majmui ko'rinishida ifodalanadi [9,10,26-28,34,40,70,73,74,86,87,101,135,146]. Agar x_0 alternativa α darajali to'plamda $\min\langle c, x\rangle$ masalning yechimi bo'lsa, u holda α soni x_0 alternativaning joriy masaladagi noravshan to'plamga tegishlilik darajasi bo'ladi. Shu tariqa, α ning barcha qiymatlarini ko'zdan kechirib, noravshan yechimning tegishlilik funksiyasiga ega bo'lamiz.

3.4.Muqobillashtirish masalalarini yechishning evristik usullari

Muqobillashtirish yoki berilgan maqsad funktsiyaning eng maqbul qiymatni (yoki parametrlarini) aniqlash murakkab masala hisoblanadi. Muqobillashtirishning murakkabligi birinchi navbatda global yoki lokal optimumga ega yoki ega bo'lmagan maqsad funktsiyani ko'rinishiga asoslanadi.

Hozirgi paytda ixtiyoriy muqobillashtirish masalasini yechishga mo'ljallangan muqobillashtirish usuli mavjud emas, biroq yechish aniqligi bo'yicha eng yaxshi usul mavjud [9,70,73,74,86,87,101,155,170].

Aniq yechimga yaqinlashish darajasi va qidiruv fazosining xususiyatlariga ko'ra masalalarni quyidagi kategoriyalarga ajratiladi:

Kombinatorik masalalar – qidiruv fazosi chekli va diskretliligi bilan xarakterlanadi. Ixtiyorish kombinatorika masalasini quyidagicha ifodalash mumkin: X to'plamda *K(x)* shartlar majmuasini qanoatlantiruvchi x elementni topish, bunda X qidiruv fazosini qandaydir chekli sondagi turli nuqtalardan tashkil topgan deb hisoblanadi.

Cheklanishlarsiz umumiy masalalar – noziqli va cheklanishlarsiz qidiruv fazosiga ega bo'ladi. Bunday masalalar uchun muqobillashtirish usullari odatda maqsad funktsiyaning analitik ifodasiga asoslanadi.

Cheklanishlarsiz funktsiyaning optimizatsiyasi qandaydir $U(x_1, \dots, x_p)$ funktsiyaning maksimallashtirish yoki minimallashtirishdan iborat.

Cheklanishli umumiy masala - $U(x_1, \dots, x_p)$ funktsiyaning minimizatsiya masalasiga quyidagi cheklanishlarni qo'shish orqali ifodalanadi: $1 \leq i \leq m$ uchun $g_i(x_1, \dots, x_p) \geq o$ va $1 \leq j \leq n$ uchun $h_1\left(x_1, \dots, x_p\right) = 0$. Jarimalar usuli yordamida cheklanishli masalani cheklanishsiz masalaga keltiriladi.

Agar qidiruv fazosi chekli sondagi nuqtalardan iborat bo'lsa, aniq yechimni to'la tanlov usuli yordamida olish mumkin.

Mazkur usulda hisoblashlarning murakkabligi uning kamchiliklaridan biri bo'lib, optimal yechimni qidirishga sarflanadigan vaqt qidiruv fazosining o'lchamiga bog'liq bo'ladi. Tanlov usuli faqat kichik qidiruv fazosida yetarlicha samarador bo'lishi mumkin. Agar bir sekundda milliard (10^9) amallar bajarilishi mumkin deb faraz qilsak va bunda tasodifiy qidiruv jarayoni 15 mlrd. yil avval boshlangan bo'lsa, u holda hozirgacha qidiruv fazosidan taxminan 10^{27} ta nuqta testdan o'tkazilgan bo'lar edi. Bunda fazoning bitta nuqtasi L ($10^{27} \approx 2^{90}$) uzunlikdagi binar qatorni tashkil qiladi.

Chiziqli va nozichiqli, dinamik dasturlashning, shuningdek sonli tahlilning asosi bo'lgan gradient usullar universal hisoblanadi, biroq uning aniqligi kamroq. Bunda qidiruv fazosining landshafti murakkablashishi ushbu usullarning samaradorligini kamayishiga olib keladi. Gradient usullari yagona optimal yechimni olishni kafolatlamaydi, qavariq akslanish fazoli va ikkinchi darajali uchga ega bo'lmagan hollar bundan mustasno.

Boshqa tomondan, evristik usullarga asoslangan genetik algoritmlar nisbatan universal hisoblanadi va yagona yechimga ega bo'lgan masalalarni global optimumini topishni kafolatlamaydi.

Masalalar murakkablik darajasiga ko'ra quyidagilarga ajratiladi:

Chiziqli masalalar –murakkabligi *O(n)* bo'lgan masalalar, bu yerda *n* –kirish ma'lumotlari o'lchami.

Polinomial masalalar (*P*) –kirish o'lchamiga bog'liq bo'lmagan va o'zgarmas murakkab polinomlardan tashkil topgan masalalar.

Eksponentsial masalalar –murakkabligi f^n dan past bo'lmagan masalalar, bu yerda f o'zgarmas yoki *n* ga bog'liq polinom.

Biroq yuqorida keltirilgan masalalar sinfiga tegishli bo'lmagan ko'plab masalalar ham mavjud. Bu turdagi masalalarni yechish murakkabligini dalillarsiz aniqlab bo'lmaydi. Kommivoyajer yo'li optimizatsiyasi, sig'imni optimal taqsimlash, yo'nalish va investitsiyalar optimizatsiyasi va shu kabi masalalar ushbu sinf masalalari toifasiga kiradi.

Ayni vaqtda muqobillashtirish masalasini u yoki bu sinf masalasi deb atab bo'lmaydi.

Genetik algoritmlar stoxastik evristik usul hisoblanadi. Bunda S(t+1) holatni tanlash ehtimolligi avvalgi S(t) holatga bilvosita bog'liq bo'ladi. Stoxastik usullar qat'iy shakllantirishni talab qilmaydigan ko'plab masalalar sinfini yechish imkonini beradi. Shuni alohida ta'kidlash joizki, stoxastik usullar *NP*-murakkab kombinatorik va shu ko'rinishga keltiriladigan masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.

Har bir stoxastik va evristik usulning yutuqlari bilan bir qatorda kamchiliklargaham ega.

Kombinatorik muqobillashtirish masalalarida barcha algoritmlarning o’rtacha samaradorligining bir xil ekanligi matematik isbotlangan.

Qayta-qayta o’tkazilgan tajribalardan olingan natijalar optimumni global qidirish algoritmlari samaradorliklarini taqqoslash mumkinligi to’g’risidagi tasdiqni to’g’ri ekanligini va bir marta ishlaganda esa GA va qidiruv algoritmlari yaxshi samara berishini ko’rsatdi.

http://www.uwasa.fi/cs/publications/2NWGA/node40.html saytida GA S(t+1) holatni tanlash ehtimolligi avvalgi S(t) holatga bilvosita bog’liq bo’lgan Markov Chain Carlo (MCMC) qism sinfi uchun stoxastik usul ekanligi ta'kidlab o’tilgan. Markov Chain Carlo (MCMC) qism sinfi stoxastik usullariga tasodifiy tanlov, “mukkasidan ketgan” tanlov va jiddiylashgan imitatsiya usullarni kiritish mumkin.

Stoxastik usullar qat'iy shakllantirish talab qilmaydigan ko’plab sinf masalalarini yechish imkoniyatini beradi.

[8] va http://www.ee.cornell.edu/bhaskar/msthesis/ da keltirilgan klassifikatsiyaga ko’ra yuqorida sanab o’tilgan barcha usullar hamda taqiqli qidiruv algoritmini qo’shnini qidirish (Neighborhood Search) usullari sinfiga kiritish mumkinligi aytib o’tilgan. Bu klassifikatsiyaga ko’ra bir holatdan ma'lum bir majmua asosida boshqa holatga o’tish qonunlari usullarni umumlashtiradi.

Klassifikatsiyaning turlicha bo’lishiga qaramay GA va taqiqli qidiruv algoritmlari umumiy asosga ega. Bir holatdan boshqasiga o’tishda evristikadan foydalanish bu ikki usulni birlashtiradi. GA ning o’ziga xosligi uning qidiruv fazosida kombinarlashgan yechimdan foydalanishi bo’lsa, taqiqli qidiruv algoritmning o’ziga xosligi holatlar xotirasindan foydalanishidan iboratdir.

GA va taqiqli qidiruv algoritmlari asosida HGT (gibridli strategiya) usuli paydo bo’ldi. Mazkur usul mutatsiya va rekombinatsiya genetik operatorlarining taqiqlarni inobatga olgan holda samaradorligini yaxshilash imkonini beradi[4]. Samaradorligi bo’yicha GA va taqiqli qidiruv algoritmlari taqqoslanganda genetik algoritmning ishonchliligi yuqori hisoblanadi, bu usulda yechimning sifati boshlang’ich holatni (yoki yechimni) qanday tanlanishiga bog’liq. Shuning uchun katta qiymatli baholash funktsiyasining boshlang’ich yechimni tanlash talab qilingan yechimga erishishi tezlashadi va aksincha kichik qiymatli baholash funktsiyasining boshlang'ich yechimni tanlash talab qilingan yechimga erishish tezligi keskin kamayadi.

GA dan olingan natijalar tahlili quyidagi shartli masalalarni samarali yechish imkonini beradi:

- notekis landshaftli katta qidiruv fazoli (bir nechta ekstremumli) bo'lganda;
- yaroqlilik darajasi sifatini baholovchi funktsiya yechimining sifatini shakllantirish murakkab bo'lganda;
- qidiruv ko'p mezonli bo'lganda;
- yagona optimal yechimni qidirishdan farqli berilgan mezon asosida maqbul yechimni topishda.

Tabiiy evolyutsiya jarayonlarini modellashtiradigan evolyutsion algoritmlar o'tgan asrning 60-yillarida taklif etilgan. Ular tabiiy evolyutsiyaning asosiy mexanizmiga (tanlash yoki selektsiya, chatishtirish va mutatsiya) tayanib qurilganligi bilan asoslanadi.

Tabiiy evolyutsiya jarayonini modellashtirishni samarali optimizatsiyasi evolyutsion algoritmlarni nazariy va amaliy jihatdan tadqiq qilishda muhim o'rin egallaydi.

O'tgan asrning 70-yillarida bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda evolyutsion algorimlar sohasining ikki turli yo'nalishi paydo bo'ldi: Xollandning genetik algoritmi va Rechenbarg va Shvefelning evolyutsion strategiyasi.

Evolyutsion strategiya selektsiya va mutatsiya operatorlaridan foydalanadi. Agar biologik terminlardan foydalanilsa, u holda evolyutsion strategiya toq reproduktsiya yordamidagi tabiiy evolyutsiya bilan modellashtiriladi.

Evolyutsion algoritmlarning turli tumanligi - evolyutsion strategiyalar (evolyutsion strategiyalar $(\mu + \lambda)$) quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. λ o'lchamli boshlang'ich populyatsiyani yaratish.

2-qadam. $F(x_i), i = 1, \dots, \lambda$ yaroqliligini hisoblash.

3-qadam. $\mu < \lambda$ yaxshi individlar selektsiyasi(tanlovi).

4-qadam. Har bir μ individdan kichik variatsiyalar bilan λ/μ avlodlarni hosil qilish.

5-qadam. 2-qadamga qaytish.

Juft reproduktsiyani modellashtiradigan qidiruv algoritmlari genetik algoritm deb ataladi. Juft reproduktsiya avlodlar yaratish uchun ikki ota-ona qatorining rekombinatsiyasi bilan xarakterlanadi. Bu rekombinatsiya chatishtirish deyiladi.

Evolyutsion strategiya va genetik algoritmlarda turlicha genetik algoritmlarni qo'llash foydalanilayotgan populyatsiya o'lchoviga munosabatni aniqladi. Xolland katta populyatsiyalarda rekombinatsiyaning muhimligini ta'kidlagan bir vaqtda Rechenberg va Shvefel juda kichik populyatsiyalardagi mutatsiyalarni ko'rgan.

Genetik algoritmdan foydalanganda masalaning yechimlari binar, butun sonli va haqiqiy kodli qator ko'rinishida bo'lishi kerak. Kodlash usulida o'zgarmas yoki o'zgaruvchan uzunlikdagi qatorlar bilan ishlash mumkin, shuningdek, kontekt-bog'liqli kodlashdan ham foydalanish mumkin. Genetik dasturlar bilan genetik algoritmlarning asosiy farqi yechimlar daraxti bilan ishlashidir. Genetik algoritm masalaning genetik ifodasini talab qilmaydi. Masalaning genetik ifodasi esa ma'lumotlar tuzilishini o'zgaruvchanligini talab qiladi, biroq bu o'zgaruvchanlik yechimni samarasiz va katta hajmli bo'lishiga olib kelishi mumkin [2].

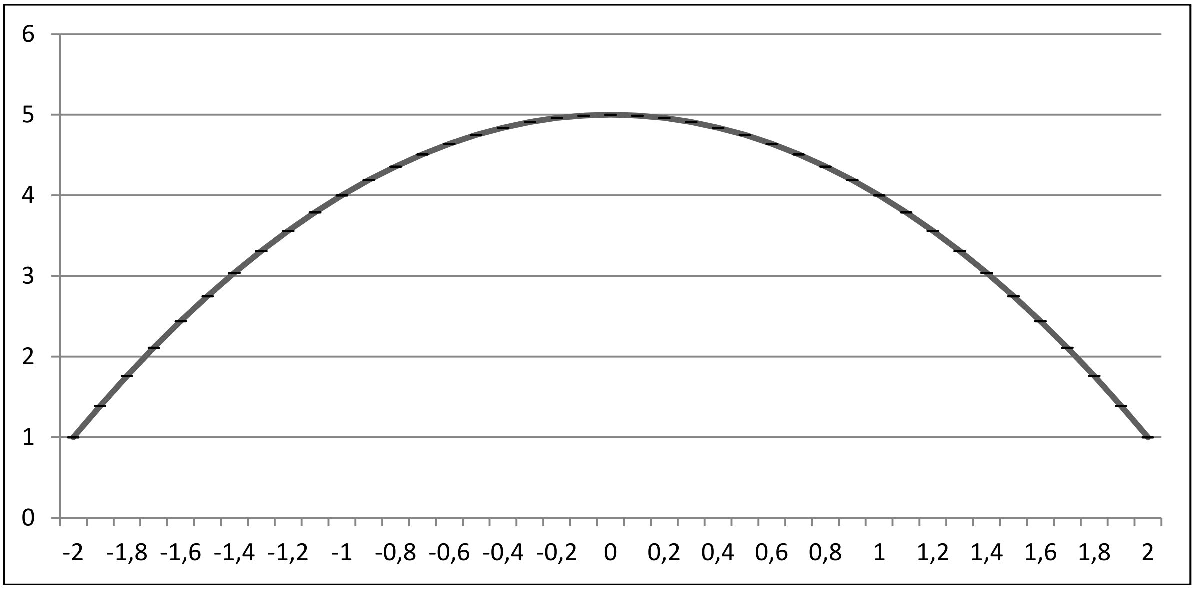
Ekstremum topishning genetik algoritmlari an'anaviy muqobillashtirish usullaridan ko'plab xususiyatlari bilan farq qiladi:

1. o'zgaruvchilarning o'zidan emas, balki ularning ikkilik ifodasidan foydalanashi;
2. ob'ekt haqida biror bir ma'lumot yoki maqsad funktsiyaning hosilasidan emas, balki uning o'zidan foydalanishi;
3. bir nuqtadan emas, balki nuqtalar populyatsiyasidan foydalanishi;
4. deterministik qoidaning o'rniga ehimolli-tranzitiv qoidadan foydalanishi.

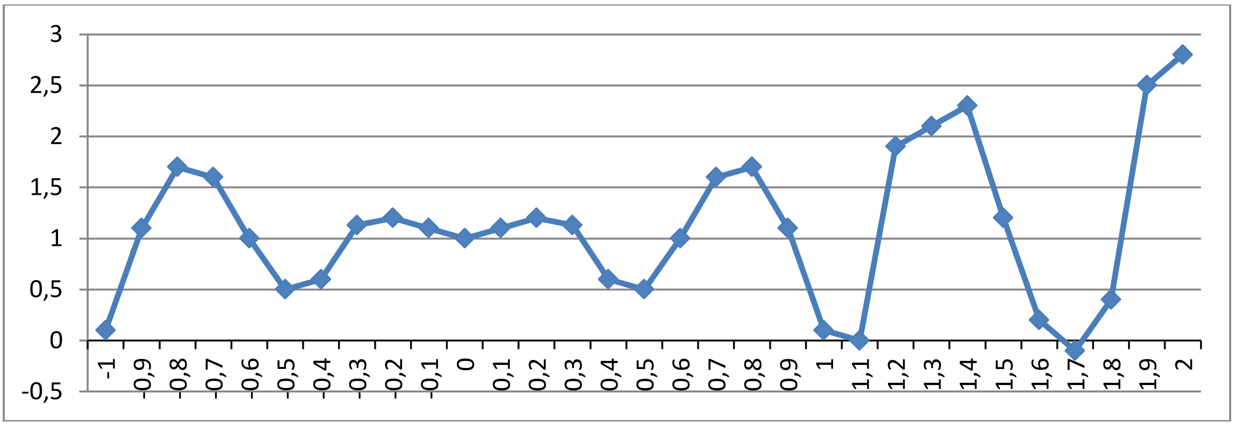
Bundan tashqari genetik algoritm masalani kompyuterda yechishda qulayliklar yaratadi.

$f_1(x)$ funktsiyani (3.4.1-rasm) maksimumini topishda gradient usulidan foydalanish yechimga tezroq erishish imkoniyatini beradi. Biroq $f_2(x)$(3.4.2-rasm) funktsiya uchun ushbu usulni qo'llanganda lokal uchga ega bo'lamiz. Ushbu funktsiyaning global uchini aniqlashda populyatsiya nuqtalaridan foydalanish orqali lokal minimumdan global minimumni aniqlash imkonini beradi. Biroq genetik algoritm evolyutsion va ko'p ma'lumotlarni tahlil qiladi. Shuning uchun genetik algoritmning bir nechta turlari taklif etilgan. Bir qator mualliflar qidiruv jarayonini tezlashtirish va algoritm samaradorligini yaxshilash uchun mavjud genetik algoritmlarning takomillashtirilgan algoritmlarini taklif etishgan. Masalan, gibrid algoritm, an'anaviy genetik algoritmlarning birikmasi, gradient tushish, hill-climbing, koordinatalar usuli va boshqalar. Keltirilgan usullar ma'lum bir sinf masalalarini yechishda yuqori samaradorlikka erishadi.

Genetik algoritmlar o'yinlar nazariyasi, klassifikatsiyalash, kodlash, o'rgatish kabi masalalarni yechishda keng qo'llanilmoqda.



3.4.1-rasm. $f_1(x)$funktsiyaning grafigi



3.4.2-rasm. $f_2(x)$funktsiyaning grafigi

Boshqaruv tizimining parametrlari ko'plab masalalarda statik hisoblanmaydi, biroq tizimning ishlash sharoitiga bog'liq ravishda o'zgarishi mumkin. Tizimda yangi ma'lumotlar paydo bo'lganda, uning parametrlarini qaytadan baholashni talab qiladi. Ba'zan boshqaruvni oldindan tashkil etib bo’lmaydi. Bu atrof-muhit to’g’risidagi ma'lumotlar yetarli bo’lmaganda, tasodifiy omillar ta'sirida vujudga keladi. Ushbu muammoni hal etishning eng sodda usuli maqsad funktsiyani o’zgarishini fiksirlangan holda optimizatsion algoritmni yaytadan ishlatish hisoblanadi. Biroq oldindan to’plangan ma'lumotlardan foydalanish orqali olinadigan yechimni algoritmni takror ishlatmasdan yangi yechim olish imkonini beradigan adaptiv algoritmlarni yaratish eng maqbul yondoshuv hisoblanadi.

Tabiiy evolyutsion jarayonlarni modellashtirish qonuniyatlari asosidagi genetik algoritmlar maqsad funktsiya o’zgarishiga mos topilgan yechimni o’zgarishini talab qiladigan masalalarni yechish imkonini beradi.

Statsionar funktsiyalar optimizatsiyasida qo’llaniladigan standart genetik algoritmdan berilgan sinf masalalarini yechishda to’g’ridan-to’g’ri foydalanib bo’lmaydi. Chunki genetik algoritmning boshlang’ich avlod yaratish jarayonida populyatsiyaning xilma-xilligi tezda yo’qoladi. Bu xilma-xillik maqsad funktsiyani o’zgarishi asosida algoritmning moslashuvchanligi uchun zarur. Mazkur muammoni hal etish uchun populyatsiya xilma-xilligini saqlovchi maxsus usullar qo’llaniladi [50, 51]. Bu usullar uchta asosiy sinfga ajratiladi: populyatsiyada xilma-xillikni saqlovchi algoritmlar, moslashuv tartibidan foydalanuvchi algoritmlar, qo’shimcha “genetik ma'lumotlar” ga ega bo’lgan algoritmlar.

Evolyutsion qidiruv jarayoniga ega populyatsiyada xilma-xillikni saqlovchi algoritmlarni quyidagilarga ajratish mumkin:

- “Tasodifiy migrant” (randomim migrants) usuliga asoslangan algoritmlar [52,53]. Mazkur usulda har bir populyatsiyaning qismi tasodifiy generatsiya orqali hosil qilingan yangi organizmlar bilan to’ldiriladi.
- Termodinamik xususiyatli algoritmlar[54,55]. “Erkin energiya” deb ataluvchi boshqarish yo’li bilan populyatsiyalar xilma-xillagini boshqarishni ta'minlash g’oyasi “termodinamik” genetik algoritmning asosini tashkil etadi.
- Organizmlarni “yosh” ni inobatga oluvchi algoritmlar [56]. Organizm “yosh” ini inobatga olish orqali sifat funktsiyasinii takomillashtirish mazkur algoritmni asosiy g’oyasi hisoblanadi. Bunda

“o’rta yoshli” li organizmlar muhim o’rin tutadi. [56] da bu yondashuv yechimni qidirish jarayonida yangi organizmlarni jalb qilish orqali populyatsiyaning xilma-xilligini saqlashi ko’rsatilgan.

- Adaptatsiya protsedurasidan foydalanuvchi algoritmlar. Bu algoritmlar statistik yoki evristik qonun asosida o’z parametrlarini o’zgartiradi.
- “Adaptiv mutatsiya” usuli (adaptive hyper mutation) [57]. Bu usul algoritmning ishlash sifati yomonlashishi kuzatilganda, mutatsiya darajasini keskin oshirish imkonini beradi.
- “O’zgaruvchan lokal qidiruv” usuli (variable local search) [58]. Mazkur usul sifat funktsiyasining o’rtacha qiymati kamayishi kuzatilganda mutatsiya darajasini oshiradi.
- Chatishtirish ehtimolligi va mutatsiya darajasini moslashtiruvchi usullar. Moslashish algoritmning ishlash jarayonida uzluksiz amalga oshiriladi [59, 60].
- “Xotira” ning (qo’shimcha "genlar" yoki "xromosomalar") qo’shimcha shaklidan foydalanuvchi usullar. Ushbu usullar oldindan aniqlangan eng yaxshi yechimlarni kelgusida foydalanish uchun saqlab qoladi.
- “Tuzilmali genetik algoritm” [61, 62]. Mazkur algoritm organizmlarning ko’p pog’onali tuzilmasidan foydalanishga asoslangan bo’lib, bunda birinchi pog’onali genlar quyi pog’ona genlarini faollashtiradi.

[63] da fiksirlangan o’zgaruvchi muhit sharoitida yangi populyatsiyani tashkil etish uchun eng yaxshi organizmlarni saqlash usuli taklif etilgan. O’zgarish sanoqli avlodlar almashishida yuzaga keladi. Bunda populyatsiyaning eng yaxshi organizmlari berilgan vaqt oraliqlarida saqlanib boradi. Maqsad funktsiya o’zgarganda yangi populyatsiyani oldingi bosqichlarda saqlangan yechimlar bilan qisman (5-10%), qolgan organizmlar esa tasodifiy to’ldiriladi. Ushbu yondoshuvdan foydalanganda algoritmning sifati tasodifiy initsializatsiya algoritmidan yuqori ekanligi [63] da ko’rsatilgan. Biroq saqlangan yechimlarning katta qismini yangi populyatsiyaga o’tkazish (50-100%) yoki funktsiyaning keskin o’zgarishi algoritmning ishlash sifatini pasaytirib yuboradi.

[64] da populyatsiyaning eng yaxshi organizmlarini saqlovchi “bilimlar ombori” deb ataluvchi maxsus yondashuv taklif etilgan bo’lib,

bunda atrof-muhitning turli shartlari inobatga olingan va klassifikatsiyalashgan bo'lishi mumkin. Teng vaqt oraliqidagi eng yaxshi organizmlar omborda saqlanadi va muhit holatiga ko'ra tartiblanadi. Muhitda o'zgarish yuzaga kelsa, algoritm qaytadan ishga tushiriladi va bunda populyatsiyaning bir qismi bilimlar omboridagi organizmlardan tashkil topadi. O'tkazilgan tadqiqotlar bilimlar omboridagi ma'lumotlardan samarali foydalanish tajribasini talab qilishini ko'rsatdi. Biroq bunday yondashuvdan turli tipli atrof-muhit holatlarni klassifikatsiyalashda foydalanish mumkin.

Uchinchi sinf usullari diskret va davriy o'zgaruvchan muhitlar uchun ancha samarali bo'lsada, biroq ularning ko'pchiligini uzluksiz o'zgaruvchan optimumli masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Yuqorida keltirilgan barcha yondoshuvlar evristik bo'lib, ularning samaradorligi maqsad funktsiyasi turli tipda bo'lgan masalalarda turlicha bo'lishi mumkin.

Ayni paytda adabiyotlarda statsionar bo'lmagan funktsiyalar optimizatsiyasida genetik algoritmlarning turli variantlarini taqqoslashga kam e'tibor berilmoqda. Shuning uchun mazkur ishda bir qator tez-tez foydalaniladigan usullar taqqoslangan. Taqqoslash dinamik tizimni optimal boshqarishni qidirish masalasini yechish misolida o'tkazilgan bo'lib, maqsad funktsiyaning turli tipli o'zgarishlariga yaxshi moslashish imkonini beradigan yuqorida ko'rib chiqilgan usullarning modifikatsiyalari taklif etilgan.

4-bob. GENETIK ALGORITMLAR YORDAMIDA MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINI YECHISH

4.1. Genetik algoritm turlari

Genetik algoritmlarning modifikatsiyalari individlarni selektsiyalash usullari bilan farqlanadi. Genetik algoritmlarning asosiy modifikatsiyalarida selektsiyaning bir nechta usullari turli maqsadlarga erishishda, jumladan, oraliq populyatsiyani shakllantirishni qisqartirishda, algoritmni ishlashini paralellashtirishda, genetik algoritmlarning holatini bashoratlash va ularning tahlil qilish imkoniyatlarini oshirishda qo'llaniladi. Biroq ayni paytda selektsiyalashning eng yaxshi usuli mavjud emas.

Genetik algoritmning standart ko'rinishi modifikatsiyasi (Steady State GA) [169], genetik operatorlar yordamida avlodlarni shakllantirish uchun saralash (selektsiyalash)ning natijasi bo'lgan oraliqq populyatsiyaning shakllantirish usuliga turtki bo'ldi. SSGAda standart genetik algoritm kabi oraliq populyatsiya shakllantirilmaydi, lekin eng yaxshi individlar juftliklarini tanlash ketma-ket ravishda amalga oshiriladi. Bunda populyatsiyaning yomon individlarini almashtiruvchi genetik operatorlarni qo'llash orqali avlodlar shakllantiriladi. Genetik algoritmning ushbu Steady State GA modifikatsiyasi quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. Masalaning genetik ifodasini aniqlash

2-qadam. Boshlang'ich populiyatsiyani tashkil etish.

3-qadam. Mos (normallashgan) yaroqlilik darajalarini hisoblash: $f_{\text{н}}(x_i) = f(x_i)/\sum_1^N f(x_i)/N$.

4-qadam. Eng yaxshi va eng yomon individlar juftligini tanlash. Tanlagan eng yaxshi individlar juftliklarda mutatsiya va chatishtirishni qo'llash. Natija yomon individlar bilan almashtiriladi.

5-qadam. $t = t + 1$, 2-qadamga qaytish.

Genetik algoritmni loyihalashda sun'iy selektsiya sohasidagi selektsionerlar tomonidan olingan bilimlardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Selektsionerlarning genetik algoritmi (SGA) aynan sun'iy selektsiya SGA yordamida modellashtiriladi. Virtual selektsioner deganda standart genetik algoritmidan farq qiluvchi SGAning qandaydir selektsiya mexanizmi tushuniladi.

Selektsionerlarning genetik algoritmi quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. Masalaning genetik ifodasini aniqlash.

2-qadam. O'lchamli boshlang'ich individlar populiyatsiyasini yaratish.

3-qadam. Virtual selektsioner avlodlarni yaratish uchun populyatsiyani tanlaydi. Bu saralangan ota-onalar to'plamini yaratish imkonini beradi.

4-qadam. Berilgan to'plam asosida tasodifiy ravishda jufliklar tashkil etishni shakllantirish. Yangi populiyatsiyani tashkil etish orqali har bir juftliklarda mutatsiya va chatishtirishni qo'llash.

5-qadam. $t = t + 1$, 2-qadamga o'tish.

6-qadam. 3-qadamga o'tish.

Selektsiya nazariy tahlil va selektsiya mexanizmlari samaradorligini bashoratlash, selektsiyaning berilgan tenglamalari yordamida mutatsiyalash va qayta o'rinlashtirish, selektsiyaga ta'sir va avlodlanish tushunchasi kabi statistik usullar yutuqlariga tayanadi.

Boshqa bir modifikatsiyalashgan genetik algoritm ko'p mezonli masalalarni yechishda qo'llaniladi. Ko'p mezonli genetik algoritm (KKGA) standart genetik algoritmning modifikatsiyasi bo'lib, u selektsiyalash usuli bilan farqlanadi. Ushbu algoritm ota-ona juftliklarini tanlashda bir emas, bir nechta mezondan foydalanadi. Shuning uchun selktsiya sxemasining ko'plab variantlari va mos KKGA taklif etiladi. Yuqorida keltirilgan algoritmlarning qiyosiy tahlili shuni ko'rsatdiki, VEGA samaradorligi bo'yicha o'rtacha ko'rsatkichga ega, biroq MGAlarda hisoblash murakkabligi inobatga olinsa VEGA ning samaradorlik ko'rsatkichi keskin oshishi mumkin [2].

Ko'p mezonli genetik algoritm quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. Masalaning genetik ifodasini aniqlash.

2-qadam. Boshlang'ich populiyatsiyani tashkil etish.$P(0) = x_1^0, \dots, x_N^0, t = 0$.

3-qadam. 3.1-3.3 qadamlarni ketma-ket bajarish.

3.1-qadam. Mezon yordamida har bir individni yaroqlilik darajasini hisoblash.

3.2-qadam. 1 dan N gacha populyatsiyadan oraliq populyatsiyaga individni selektsiyalashni amalga oshirish.

3.3-qadam. 3.1 o'tish.

4-qadam. Berilgan to’plamdan tasodifiy ravishda juftlik shakllantirish. Har bir juftlikda chatishtirishni amalga oshirish, shuningdek mutatsiyalash kabi boshqa genetik operatorlarni P yangi populyatsiyani shakllantirishda qo’llash.

5-qadam. $t = t + 1$, 2-qadamga qaytish.

Standart genetik algoritm o’zida qat'iy sinxronlashgan ketma-ket algoritmlarni mujassamlashtirgan. Qidiruv fazosi o’lchami katta yoki vaqt bo’yicha murakkab bo’lganda standart genetik algoritm yaxshi samara bermaydi. Bunday hollarda parallel genetik algoritmlardan foydalanish maqsadga muvofiq bo’ladi. Standart genetik algoritmning ixtiyoriy ketma-ket modifikatsiyasini parallel genetik algoritm shaklida ifodalash mumkin.

Parallellashtirish darajasi bo’yicha parallel genetik algoritmlar quyidagi turlarga ajratiladi:

- populyatsiyaga asoslangan parallel genetik algoritm;
- qism populyatsiyaga asoslangan parallel genetik algoritm;
- individlarga asoslangan parallel genetik algoritm.

PGA populyatsiyada genetik algoritmning standart ko’rinishini saqlab qoladi. Parellellashtirish mutatsiya va chatishtirish bosqichida amalga oshiriladi. Jarayonlarni parellellashtirish darajasiga ko’ra modellar quyidagilarga bo’linadi [7]:

- “boshqaruvchi-boshqariluvchi” sinxron modeli, bunda xususiy xotirada butun populyatsiyani saqlash, selektsiya, chatishtirish va mutatsiya amallarini bajarish asosiy jarayon hisoblanadi, biroq yangi individlar yaroqlilik darajasini hisoblash qism jarayonlarda bajariladi;
- “boshqaruvchi-boshqariluvchi” yarimsinxron modeli, bu yerda yangi individlar bo’sh jarayonlarning birida qayta ishlanadi;
- asinxron parallel model, bunda populyatsiyaning individlari parallel foydalanish mumkin bo’lgan umumiy xotirada saqlanadi. Har bir jarayonda yaroqlilik darajasini baholash va genetik amallarni bajarish amalga oshiriladi.

Har bir jarayon bir-biriga bog’liq bo’lmagan holda ishlaydi. Ushbu modelning standart genetik algoritmdan yagona farqi selektsiya mexanizmining turlicha bo’lishidadir [155].

Taqsimlangan parallel genetik algoritm quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. Masalaning genetik ifodasini aniqlash

2-qadam. Individlarning boshlang’ich populyatsiyasini yaratish va qism populyatsiyalarga ajratish $SP_1, \dots, SP_N$.

3-qadam. Qism populyatsiyalar strukturasini shakllantirish.

4-qadam. $SP_1, \dots, SP_N$uchun 4.1-4.3-qadamlarni parallel bajarish.

4.1-qadam. Avlodlar selektsiyasi jarayonini va genetik opratorlarni qo’llash.

4.2-qadam. Xromosomlarni qo’shni qism populyatsiyalarga o’tkazish.

4.3-qadam. Qo’shni qism populyatsiyalardan xromosomlar olish.

5-qadam. 3-qadamga o’tish.

Qism populyatsiyaga asoslangan parallel genetik algoritmning xususiyati berilgan chastotali individlar almashinuvi asosida bog’liqmas raqobatlashuvchi qism populyatsiyalardan foydalanishidan iborat. Bunda har bir hisoblash qismi yaroqlilik darajasining barcha funktsiyalari uchun maksimallashtirish talab etilganda xususiy qism populyatsiyali genetik algoritm ketma-ket amalga oshiriladi. Bu holatda individlarning almashishi uchun qism populyatsiyalarning bog’liqlik tuzilishi aniqlangan bo’lishi kerak. Baholash va samaradorligini taqqoslash nuqtai nazaridan individlar almashishini amalga oshirmaydigan taqsimlangan modellar qo’llanilishi mumkin. Standart genetik algoritm va ushbu xususiy hol samaradorligini baholash natijalari [6] da batafsil keltirilgan.

Individlarning tezkor almashinuvida turli-tumanlik darajasining tushib ketishi ushbu modelning asosiy kamchiligi hisoblanadi. Boshqa tomondan tezkor almashinuv qism populyatsiyalarning tez yaqinlashishiga olib keladi. Bu turdagi modelni qurishda quyidagilarni aniqlab olish zarur:

- individlarni almashishi uchun jarayonlar orasidagi bog’lanish;
- individlarni almashish chastotasi (almashish chastotasi 20 avloddan so’ng optimal hisoblanadi [6]);
- o’tkazish darajasi yoki almashadigan individlar soni (20% qism populyatsiya optimal hisoblanadi [6]);
- almashish uchun individni selektsiyalash usuli;
- olingan individni qism populyatsiya a'zosi bilan almashtira oladigan mezon.

Masalani yechishga sarflanadigan vaqt va avlodlar soniga ko'ra PGA standart genetik algoritmdan ustun va ba'zi masalalar PGA uchun juda sodda hisoblanadi. Qidiruv fazosi murakkab va katta o'lchamli bo'lganda parallel qidiruvdan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi [4]. Berilgan modeldagi hisoblashlarning oshishi yaqinlashish tezligini yaxshilasada, biroq yechim sifatiga ta'sir etmaydi.

Individlarga asoslangan parallel genetik algoritm doimiy hisoblash markazida bo'lgan individ satriga ega bo'ladi. Bunda individlar o'z juftini tanlaydi va boshqa o'ziga yaqin bo'lgan individlar bilan qayta kombinatsiyalashadi. Tanlangan individ doimiy yacheykada bo'lgan individ bilan chatishtiriladi. Natijada yana bir avlod shakllanadi. Shakllangan avlod tanlangan o'rinlashtirish sxemasiga bog'liq holda yacheykadagi individ bilan almashishi yoki almashmasligi mumkin. Shunday qilib, model to'la taqsimlangan va markazlashgan boshqaruvni talab etmaydi.

Individlar majmuasiga asoslangan parallel genetik algoritm quyidagi bosqichlardan iborat:

1-qadam. Masalaning genetik ifodasini aniqlash.

2-qadam. Individlarning boshlang'ich populyatsiyasini yaratish va populyatsiya strukturasini shakllantirish.

3-qadam. Har bir individning yaratilishiga (hill-climbing) ko'ra lokal o'stirishni amalga oshirish.

4-qadam. Juftini topish uchun har bir individni selektsiyalash.

5-qadam. Har bir juftlikda chatishtirish va boshqa mutatsiya kabi genetik operatorlarni qo'llash.

6-qadam. Har bir individning yaratilishiga (hill-climbing) lokal o'stirish. Berilgan sifat mezoniga ko'ra ota-onani avlod bilan almashtirish.

7-qadam. 3-qadamga o'tish.

Individlar asosidagi modellar bilan ishlashda quyidagilarni berish talab etiladi:

- yacheykalar bog'lanish tuzilmasi;
- selektsiya tuzilmasi;
- almashtirish tuzilmasi.

Mazkur modellar tadqiqoti murakkab masalalarni yechishda eng yaxshi yechimni ta'minlash standart genetik algoritmlardan ko'ra yuqori ekanligini ko'rsatdi.

4.2. Genetik algoritm yordamida muqobillashtirish masalalarini yechish

Mazkur paragraf genetik algoritmning vazifasini mukammal tushunish uchun sxema tushunchasidan foydalanishga va genetik algoritmlarga taalluqli bo'lgan "sxema teoremasi" deb ataluvchi asosiy teoremani shakllantirishga bag'ishlangan [163-166].

Sxema tushunchasi bir nechta umumiy xossaga ega bo'lgan xromosomalar to'plamini aniqlash uchun kiritilgan bo'lib, u turli alifbodan tashkil topishi mumkin. Agar bitlar 0 yoki 1 (xromosomalar ikkilik alifboda) qiymatlarni qabul qilsa, u holda sxema oldindan aniqlangan pozitsiyali xromosomalar to'plamini ifodalaydi. Sxemalarni o'rganishda kengaytirilgan alifbodan foydalanish qulay bo'lib, ushbu alifbo 0, 1, * belgilardan iborat. Bunda * belgisi ixtiyoriy mumkin bo'lgan qiymatni, ya'ni 0 yoki 1 ni bildiradi va u aniq pozitsiyada "baribir" ma'nosini bildiradi.

Genetik algoritm nisbatan moslashuvchan xromosomalarning o'zgarish tamoyiliga asoslanadi. Faraz qilaylik, organizmning boshlang'ich populyatsiyasi $P(0)$ va joriy populyatsiyasi $P(k)$ (algoritmning k-iteratsiyasida) bo'lsin. Har bir $P(k)$, $k = 0,1,...$ populyatsiyadan selektsiya usuli yordamida $M(k)$ moslashuvchanligi yuqori bo'lgan xromosomalar tanlanadi. $M(k)$ populyatsiyaning xromosomalarini ota-ona juftliklari bilan birlashtirish va p_c ehtimollik bilan chatishtirish hamda p_m ehtimollik bilan mutatsiya amalini bajarish natijasida $M(k)$ populyatsiya xromosomalarining avlodi bo'lgan yangi $P(k+1)$ populyatsiya shakllantiriladi.

Yuqoridagilarga ko'ra, yaxshi yechimni ta'minlovchi ixtiyoriy sxema uchun sxemadagi xromosomalar soni iteratsiyalar soni k ning oshishi bilan ortishi talab etiladi.

Genetik algoritmda sxemani almashtirishga 3 omil ta'sir qiladi: xromosomalar selektsiyasi, chatishtirish va mutatsiya. Alohida olingan sxemada xromosomalarning kutiladigan sonini ortishi nuqtai nazaridan tahlillarini ko'rib chiqaylik.

Qaraladigan sxemani S belgi bilan, $P(k)$ populyatsiyadagi xromosomalar sonini sxemaga mos ravishda $c(S,k)$ bilan belgilaylik. U holda $c(S,k)$ xromosomalar soni $P(k)\cap S$ to'plam elementlari soniga teng bo'ladi.

Selektsiyani amalini bajarish natijasida $P(k)$ populyatsiyaning xromosomalari $P_s(ch_j)$ ehtimollik bilan $M(k)$ ota-ona xromosomalarga ko'chadi. Bunda ehtimollik quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$P_s(ch_j)=F(ch_j)\Big/\sum_{i=1}^{N}F(ch_j),$$

bu yerda N -populyatsiya soni.

Faraz qilaylik, $F(S,k)$ - S sxemaga mos $P(k)$ populyatsiyadagi xromosomalarning moslashuvchanlik funktsiyasining o'rtacha qiymati bo'lsin.

Agar

$$P(k)S=\{ch_1,...,ch_{c(S,k)}\}$$

bo'lsa, u holda

$$F(S,k)=\frac{\sum_{j=1}^{c(S,k)}F(ch_j)}{c(S,k)}. \tag{4.3.1}$$

$F(S,k)$ kattalik k-chi iteratsiyadagi S sxemaning moslashuvchanligi deb ham ataladi.

$\Im(k)$ orqali quvvati N ga teng bo'lgan $P(k)$ populyatsiya xromosomalarida moslashuvchanlik funktsiyasi qiymatlarini yig'indisini belgilaylik, ya'ni

$$\Im(k)=\sum_{i=1}^{N}F\left(ch_i^{(k)}\right).$$

O'rtacha moslashuvchanlikni $\bar{F}(k)$orqali belgilaymiz va u quyidagicha aniqlanadi:

$$\bar{F}(k)=\frac{1}{N}\Im(k).$$

$M(k)$ ota-ona xromosomalar elementi $ch_j^{(k)}$ bilan belgilaylik. Har bir $ch_j^{(k)}\in M(k)$ va har bir $j=1,...,c(S,k)$ учун $ch_j^{(k)}=ch_j$ bo'lish ehtimolligi $F(ch_j)/F(k)$ ifoda yordamida aniqlanadi. Shuning uchun $M(k)$ populyatsiyadagi ch_j ga teng xromosomalarning kutiladigan soni quyidagicha aniqlanadi:

$$N\frac{F(ch_j)}{\Im(k)}=\frac{F(ch_j)}{\bar{F}(k)}.$$

$P(k)\cap S$ to'plamdagi $M(k)$ ota-ona xromosomalariga qo'shish uchun saralangan kutilgan xromosomalar soni quyidagiga teng

$$\sum_{i=1}^{c(S,k)} \frac{F(ch_i)}{\overline{F}(k)} = c(S,k)\frac{F(S,k)}{\overline{F}(k)}.$$

$M(k)$ ota-ona populyatsiyasidagi har bir xromosoma bir vaqtning o'zida $P(k)$ populyatsiyaga ham tegishli bo'lganligi uchun, $M(k) \cap S$ to'plamni tashkil etuvchi xromosomalar $P(k) \cap S$ to'plamdan $M(k)$ populyatsiyaga qo'shish uchun saralangan xromosomalardan tashkil topadi. S sxemaga mos $M(k)$ ota-ona populyatsiya xromosomalar sonini $b(S,k)$ bilan belgilansa, yuqoridagi mulohazalarga ko'ra quyidagi xulosaga kelish mumkin:

$b(S,k)$ ning kutiladigan qiymati quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$E[b(S,k)] = c(S,k)\frac{F(S,k)}{\overline{F}(k)} \tag{4.3.2}$$

Agar S sxema moslashuvlik funktsiyasining qiymati o'rtacha qiymatidan yuqori qiymatli xromosomalardan tashkil topgan bo'lsa, S sxemaga mos $M(k)$ ota-ona populyatsiya xromosomalarining kutiladigan soni S sxemaga mos $P(k)$ populyatsiyadagi xromosomalar sonidan katta bo'ladi. Shuning uchun selektsiya "o'rtachada yaxshi" moslashuvchan sxemalarni targ'ib etishni va "yomon" moslashuvchan sxemalarni chiqarishni tasdiqlaydi.

Chatishtirish va mutatsiya amallarini tahlili uchun zarur bo'lgan sxema tartibi va qamrovi tushunchasini kiritib olamiz.

Faraz qilaylik, S sxemaga mos xromosomalar uzunligi L ga teng bo'lsin.

S sxema tartibi deb sxemadagi doimiy pozitsiyalar soniga aytiladi, ya'ni $\{0,1,*\}$ alifbo holatida 0 va 1 larga. S sxema tartibi $o(S)$ orqali belgilanadi.

S sxema tartibi $o(S)$ * belgisiz xromosomalar uchun L ga teng. Faqat * belgilardan iborat sxema tartibi 0 ga teng.

S sxema qamrovi deb birinchi va oxirgi o'zgarmas belgi orasidagi masofaga aytiladi va u $d(S)$ orqali belgilanadi.

$d(S)$ $[0, L-1]$ oraliqdagi butun qiymatni qabul qiladi. Yagona o'zgarmas pozitsiyali sxema qamrovi 0 ga teng. Qamrov sxemaga kiritilgan ma'lumotni ma'nosini xarakterlaydi.

$M(k)$ ota-ona xromosomalarida chatishtirish amali ta'sirini tahlili uchun $M(k) \cap S$ to'plamdagi biror bir xromosomani tanlaymiz, ya'ni S sxemaga mos ota-ona populyatsiya xromosomasini. Xromosomaning chatishtirishga tanlash ehtimolligi p_c ga teng. Agar bu xromosomaning hech bir avlodi S sxemaga tegishli bo'lmasa, bu chatishtirish nuqtasini berilgan sxemaning birinchi va oxirgi o'zgarmas belgisi orasida ekanligini bildiradi. Uning ehtimolligi $d(S)/(L-1)$ ga teng. Yuqoridagilardan chatishtirish ta'siri haqida quyidagi xulosalarni qilish mumkin:

$M(k) \cap S$ to'plamning biror bir xromosomasini chatishtirishga tanlash va uning avlodining hech biri sxemaga tegishli bo'lmasligi ehtimolligi yuqoridan $p_c \frac{d(S)}{L-1}$ bilan chegaralangan. Bu kattalik S sxemani yo'qotish ehtimolligi deyiladi.

$M(k) \cap S$ to'plamning biror bir xromosomasini chatishtirishga tanlamaslik va uning hech bo'lmaganda bitta avlodi chatishtirishdan so'ng sxemaga tegishli bo'lish ehtimolligi quyidan $1 - p_c \frac{d(S)}{L-1}$ bilan chegaralangan. Bu kattalik sxemani yashab ketish ehtimolligi deyiladi.

Agar berilgan xromosoma S sxemaga tegishli va chatishtirish uchun tanlangan, ikkinchi ota-ona xromosoma ham sxemaga tegishli bo'lsa, u holda ikkovining avlodi ham S sxemaga tegishli bo'ladi. Natijalar sxemaning yo'qolib yoki yashab ketish ehtimolligini baholash uchun $d(S)$ sxema qamrovi ko'rsatkichining ahamiyatini tasdiqlaydi.

Endi mutatsiyaning $M(k)$ ota-ona xromosomasiga ta'sirini ko'rib chiqamiz. Mutatsiya operatori p_m ehtimollik bilan tasodifiy ravishda aniq pozitsiyada qiymatni 0 dan 1 ga va aksincha 1 dan 0 ga o'zgartiradi. Sxemada mutatsiyaga ushbu amal bajarilgandan so'ng uning barcha doimiy pozitsiyalari o'zgarishsiz qolganda bardosh beradi.

S sxemaga tegishli ota-ona xromosoma populyatsiyasi ushbu xromosomani S sxemaning doimiy belgilariga mos har bir belgisi mutatsiya jarayonida o'zgarishsiz qolgan holda va faqat shu holda, sxemadaqoladi. Bunday hodisaning ehtimolligi $(1-p_m)^{o(S)}$ ga teng. Ushbu natijani mutatsiya ta'siri haqidagi quyidagi xulosa shaklida ifodalash mumkin:

$M(k) \cap S$ to'plamdagi qandaydir xromosoma mutatsiya amalidan so'ng S sxemaga tegishli bo'lish ehtimolligi quyidagi ifoda yordamida aniqlanadi: $(1-p_m)^{o(S)}$

Bu kattalik sxemaning mutatsiyadan so'ng yashab qolish ehtimolligi deyiladi.

Agar mutatsiyaning p_m ($p_m << 1$) ehtimolligi kichik bo'lsa, S sxemaning mutatsiyadan so'ng yashab ketish ehtimolligi taqriban quyidagiga teng bo'ladi:

$$1 - p_m o(S).$$

Agar $M(k) \cap S$ to'plamga tegishli xromosoma S sxemaga tegishli avlodni bersa, u holda u $P(k+1) \cap S$ to'plamga tegishli bo'lishi hqidagi dalilni hisobga olgan holda selektsiya, chatishtirish va mutatsiya amallarini birgalikda qo'llash samaradorligi quyidagi reproduktiv sxemani qurish imkonini beradi [13]:

$$E[c(S,k+1)] \geq c(S,k)\frac{F(S,k)}{\bar{F}(k)}\left(1 - p_c\frac{d(S)}{L-1}\right)(1-p_m)^{o(S)} \qquad (4.3.3)$$

(4.3.3) bog'lanish berilgan sxemaga mos xromosomalar sonini populyatsiyadan populyatsiyaga o'tishdagi o'zgarishini ko'rsatadi. Bu o'zgarish uch omilga bog'liq. (4.3.3) tengsizlikning o'ng tomonidagi ifodadagi $F(S,k)/\bar{F}(k)$ - birinchi omil bo'lib, u moslashish funktsiyasi o'rtacha qiymatining ahamiyatini ifodalaydi, ikkinchi omil $1 - p_c d(S)/(L-1)$ ifoda bo'lib, u chatishtirish ta'sirini ko'rsatadi va uchinchi omil mutatsiya ta'siridir, ya'ni $(1-p_m)^{o(S)}$. Bu omillarning har birini qiymati qancha katta bo'lsa, navbatdagi populyatsiyada S sxemaga mos kelishlarning kutiladigan soni shuncha katta bo'ladi. Bundan (4.3.3) bog'lanish quyidagi ko'rinishga keladi:

$$E[c(S,k+1)] \geq c(S,k)\frac{F(S,k)}{\bar{F}(k)}\left(1 - p_c\frac{d(S)}{L-1} - p_m o(S)\right) \qquad (4.3.4)$$

Katta hajmli populyatsiya uchun (4.3.3) bog'lanishni quyidagi ifoda yordamida approksimatsiyalash mumkin.

$$c(S,k+1) \geq c(S,k)\frac{F(S,k)}{\bar{F}(k)}\left(1 - p_c\frac{d(S)}{L-1} - p_m o(S)\right) \qquad (4.3.5)$$

(4.3.3) va (4.3.4) dan navbatdagi avlodda S sxemaga mos xromosomalarning kutiladigan sonini bu sxemaga tegishli bo'lgan xromosomalar aniq sonining, shuningdek sxema tartibi va qamrovining funktsiyasi sifatida foydalanish mumkin. O'rtachadan yuqori moslashuvchan, kichik tartib va qamrovli sxemalar navbatdagi populyatsiyalarda o'zining vakillari sonini ortishi bilan xarakterlanadi. (4.3.2) ifodadan bunday o'sish ko'rsatkichli xususiyatga ega ekanligini payqash mumkin. Katta populyatsiyada bu formula o'rniga quyidagi rekurent bog'lanishli formuladan foydalanish tavsiya etiladi [166]:

$$c(S,k+1)=c(S,k)\frac{F(S,k)}{\overline{F}(k)}. \qquad (4.3.6)$$

Agar S sxema $\varepsilon\%$ ga o'rtachadan yuqori moslashuvchanlikka ega bo'lsa, ya'ni $F(S,k)=\overline{F}(k)+\varepsilon\overline{F}(k)$, u holda (4.3.5) ifodani (4.3.4) tengsizlikka qo'yish orqali ε ni vaqt oralig'ida o'zgarmasligiga ega bo'lamiz. $k=0$ da quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$c(S,k)=c(S,0)(1+\varepsilon)^k$$

$$\varepsilon=\left(F(S,k)-\overline{F}(k)\right)/\overline{F}(k). \qquad (4.3.7)$$

Moslashuvchanlik o'rtachadan yuqori bo'lganda $\varepsilon>0$ va o'rtachadan past bo'lganda $\varepsilon<0$ bo'ladi.

(4.3.7) tenglik geometrik progressiyani tashkil qilgani uchun, sxemani reproduktsiyalash jarayonida o'rtachadan yuqori (past) bo'lgan xromosomalar genetik algoritmning navbatdagi iteratsiyalarida ko'rsatkichli o'sish (kamayish) bo'yicha tanlanadi. (4.3.2)-(4.3.6) bog'lanishlar moslashish funktsiyasi faqat musbat qiymatlarni qabul qilishiga asoslangan. Genetik algoritmlar yordamida maqsad funtsiyasi manfiy qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan muqobillashtirish masalalari muqobillashtirish va moslashish funktsiyalari orasida qo'shimcha munosabatlarni o'rnatish orqali yechiladi. (4.3.3)-(4.3.5) lardan olingan natijalar asosida genetik algoritmlarning asosiy teoremasini shakllantirish mumkin. Bu teorema sxemalar to'g'risidagi teorema deb ham ataladi [175].

Teorema. O'rtachadan yuqori moslashuvchan, kichik tartib va qamrovli sxemalar navbatdagi populyatsiyalarda o'zining vakillari sonini ortishi bilan shakllanadi.

Mazkur teoremaga ko'ra o'rtachadan yuqori moslashuvchan, kichik tartib va qamrovli sxemalar qurishni ta'minlovchi kodlash masalasi asosiy muammo hisoblanadi.

Evolyutsion algoritmlarda algoritm chekli qadamlarda yechimni aniqlasa va bu yechim navbatdagi populyatsiyada ishtirok etsa, muqobillashtirish masalasida global optimumga yaqinlashishga erishadi [11]. Evolyutsion algoritmlarning o'tish holati stoxastik xarakterga ega bo'lgani uchun yaqinlashishning determinallashgan kontseptsiyasidan algoritmlarni bajarilish davrini aniqlashda qo'llash mumkin. Evolyutsion algoritmlarning stoxastik yaqinlashishning keng qo'llaniladigan to'la va qiymatli mos kelish usullari mavjud [151-177].

5-bob. MUQOBILLASHTIRISH MASALALARINING YECHIMINI TAHLIL QILISH

5.1. Muqobillashtirish masalalaini genetik va gradient usullari yordamida yechishning solishtirma tahlili

Berilgan maqsad funksiyasining eng yaxshi qiymatini muqobillashtirish va izlash murakkab masala hisoblanadi. Muqobillashtirish murakkabligi global yoki local optimumlarga ega maqsad funksiyasining ko'rinishi orqali belgilanadi. Mazkur paragrafda muqobillashtirish masalalarini genetik va gradient usullar yordamida yechish tahlil etilgan. Solishtirma tahlil masalalarini yechish maqsadida birinchisi uchun genetik algoritm, ikkinchisi uchun gradient usullar asosiy qism bo'lib hisoblangan ikkita dasturiy mahsulot ishlab chiqilgan. Har bir usul alohida o'rganib chiqilgan, shuningdek mazkur usullarning solishtirma tahlili amalga oshirilgan.

Chiziqli va nozichiqli dasturlash, dinamik dasturlash, hamda sonli tahlilning asosi hisoblangan gradient usullar mukammalroq, ammo aniqligi pastroq. Jumladan izlash fazosi landshaftining murakkablashuvi bu kabi usullarning samaradorligini pasaytiradi. Gradient usullar akslantiruvchi fazo qavariq bo'lib, ikkinchi darajali qirralar, platalarning vujudga kelishiga yo'l qo'yilmaganda, yagona muqobil yechimning olinishini kafolatlamaydi.

Boshqa tomondan, genetik algoritmlar mansub bo'lgan evristik usullar mukammal hisoblanadi, shuning uchun masalaning yagona yechimi hisoblangan global optimumning topilishi kafolatlanadi [151-173].

Genetik algoritmlar hisoblash usullarining yangi yo'nalishi bo'lib hisoblanadi [173, 174]. Oxirgi yillarda tabiiy saralash va genetika qoidalariga asoslangan genetik algoritm tamoyillarning ta'rifiga oid ko'plab nashrlar paydo bo'ldi. Ko'pincha ularning imkoniyatlari muqobillashtirish va izlash masalalarini yechish misolida namoyish etiladi. Odatda muqobillashtirish masalalari gradient usullar yordamida yechiladi. Shu bois ikkita yondashuvni taqqoslash ilmiy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

Genetik algoritmlar - tabiiy saralsh va tabiiy genetikaga asoslangan izlash algoritmlaridir. Ular ko'rib chiqilgan tuzilmalar orasida “kuchlilarning yashab qolishi” ni amaliyotga joriy etib, izlash evolyutsiyasini modellashtirish asosida izlash algoritmini shakllantiradilar va unga o’zgartirish kiritadilar. Har bir generasiyada sun’iy ketma-ketliklarning yangi to’plami eskilarning qismidan foydalanish hamda “yaxshi xossali” yangi qismlarni qo’shish yo’li bilan yaratiladi.

Bunda GA- nafaqat tasodiy izlashdir, chunki ularda evolyutsiya jarayonida to’plangan axborotdan samarali foydalaniladi [151, 159].

GA boshqa muqobillashtiruvchi va izlovchi tuzilmalardan quyidagilari bilan farq qiladi:

- GA asosan masalaning o’zgaruvchilari bilan emas, kodlangan parametrlar to’plami bilan ish ko’radi;
- GA yagona nuqtadan emas, nuqtalar to’plamidan izlashni amalga oshiradi;
- axborotni baholash uchun GA turli xil xatoliklardan emas, fitness-funksiyadan foydalanadi;
- GA aniq qoidalardan emas, ehtimolli qoidalardan foydalanadi.

GA muqobillashtirish muammosining tabiiy misollari to’plamini olib, ularni chekli alifboda chekli uzunlikdagi ketma-ketlik ko’rinishida kodlaydi.

Genetik algoritm oldindan satr-stringlar (xromosomalar) populyatsiyasini tasodifiy ravishda generatsialaydi. So’ngra boshlang’ich populyatsiyaga nisbatan sodda amallar tadbiq etilib, yangi populyatsiyalar generatsiyalanadi.

Genetik algoritm 3 ta operatordan tashkil topgan:

- reproduksiya;
- chatishtirish;
- mutasiya.

Eng tez tushish usuli har bir iterasiyada $f(x)$ funkisyaning harakat yo’nalishidagi minimumlik shartidan λ_k qadamni tanlab oladi, ya’ni

$$f(x^{(k-1)} - \lambda_k f'(x^{(k-1)})) = \min_{\lambda>0} \varphi(\lambda), \tag{5.1.1}$$

bu yerda

$$\varphi(\lambda) = f(x^{(k-1)} - \lambda f'(x^{(k-1)})).$$

Nyuton usuli shartsiz minimallashtirish masalalarini sonly yechish uchun mo’ljallangan.

Nyuton usuli $f(x)$ minimallashtiruvchi funksiyani x^k nuqta atrofida kvadratik approksimatsiya bilan almashtirish g’oyasiga asoslangan:

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f^T(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k). \qquad (5.1.2)$$

x^{k+1} nuqta sifatida $q(x)$ funksiyaning minimum nuqtasini olamiz. Bunga $\nabla^2 f(x^k)$ musbat aniqlangan matrisa bo’lgandagina erishish mumkin.

U holda $q(x)$ funksiya qat’iy qavariq bo’ladi va$\nabla q(x^{k+1}) = 0$ tenglikdan topiluvchi yagona minimum nuqtasi x^{k+1} ga egadir. Bu $\nabla f(x^k) = -\nabla^2 f(x^k)(x^{k-1} - x^k)$ chiziqli sistemaga olib keladi, undan quyidagi iterasion formula hosil bo’ladi:

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k). \qquad (5.1.3)$$

(5.1.3) formula Nyuton usuli hisoblanadi. Mazkur usul ikkinchi tartibli usul hisoblanadi. Nyuton usuli kvadratik funksiyaning minimumini $x^{(0)}$ boshlang’ich nuqta va xatolik darajasi qanday bo’lishidan qat’iy nazar bir qadamda aniqladi. Ammo maqsad funksiyasi kvadratik bo’lmagan holda Nyuton usulining yaqinlashishi $x^{(0)}$ boshlang’ich nuqtaga bog’liq bo’ladi. Yana bir kamchilik hisoblashlar va matrisaning teskarisini topish jarayonida har bir qadamda minimallashtiruvchi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblash zarurati bilan bog’liq usulning ko’p mehnat talab qilishidir.

Genetik algoritm va gradient usullarga doir ishlar uchta sinov funksiyasi asosida o’rganildi. Tadqiqot jarayonida GA bilan ishlashga mo’ljallangan dasturiy mahsulotdan foydalanildi.

Tadqiqotning asosiy vazifalarini sanab o’tamiz:

• funksiyaning optimumini topish uchun genetik algoritmning faoliyatini o’rganish,

• Berilgan parametrlar majmuiga qarab genetik algoritmning ishlash tezligini o’rganish.

Gradient usullarning faoliyatini o’rganish uchun gradient usullar bilan ishlashga mo’ljallangan dasturiy mahsulotdan foydalanildi. Tadqiqot quyidagi vazifalarga ko’ra olib borildi:

• ikkita gradient usul-tezkor tushish usuli va funksiyaning optimumini topish uchun Nyuton usulini o’rganish,

• tezkor tushish usuli va Nyuton usulini taqqoslash.

Olingan natijalarga asoslanib, gradient usullar va genetik algoritmlarni quyidagi mezonlar bo'yicha taqqoslash talab qilindi:

- yaqinlashish tezligi,
- yaqinlashish aniqligi.

Dasturning bajarilishi

Genetik algoritm bilan ishlovchi dasturiy mahsulot genetik algoritm bilan ishlash uchun kerak bo'ladigan barcha parametrlarni kiritish hamda ishlash natijasini har bir qadamda chiqarish imkonini beradi.

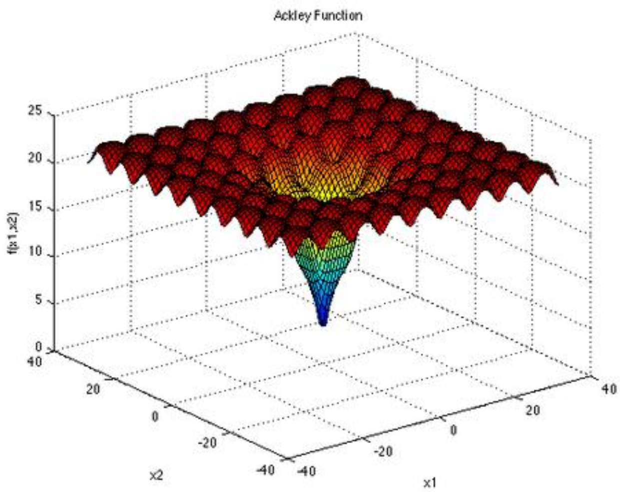
Mazkur dasturiy mahsulotning foydalanuvchilik interfeysi uchta qismdan iborat:

- boshqaruv tugmalari,
- genetik algoritmning ishlash natijasini chiqarish,
- genetik algoritmning ish faoliyati uchun parametrlarni kiritish panellari.

Mazkur ishda usullar ustida tajriba o'tkazish va usullarni sinovdan o'tkazish uchun 3 ta test funksiyasidan foydalaniladi:

- Ackley funksiya (5.1.1-rasm),
- Griewank funksiya (5.1.2-rasm),
- Levy funksiya (5.1.3-rasm).

Ackley funksiyasi:



5.1.1-rasm- Ackley funksiya

$$f(x) = -a\exp\left(-b\sqrt{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\cos(cx_i)\right) + a + \exp(1)$$

Tavsiya etilgan o’zgaruvchilar: a = 20, b = 0.2 и c = 2π. Aniqlanish sohasi:
barcha i = 1, …, *d* larda $x_i \in [-32.768, 32.768]$, Global minimum:
$f(x^*) = 0, \quad x^* = (0,...,0).$

Nyuton usuli: xmin = 0.0000 0.0000; opt = 4.1940e-014;

Gradient usuli xmin =0.0000 0.0000; opt = 1.9116e-011;

Kichik kvadratlar usuli odatda minimallashtirishda eng kam sondagi iterasiyalarni beradi.

xmin = 0.4120 0.3715; opt = 0.1446

Qayd etish joizki, kutilishlardan farqli o’laroq funksiya muvaffaqiyatga olib kelmadi. Iterasiyalar sonining limitidan ortib ketganlik to’g’risida xabar chiqarildi, xmin qiymatlar esa haqiqatdan ancha yiroq.

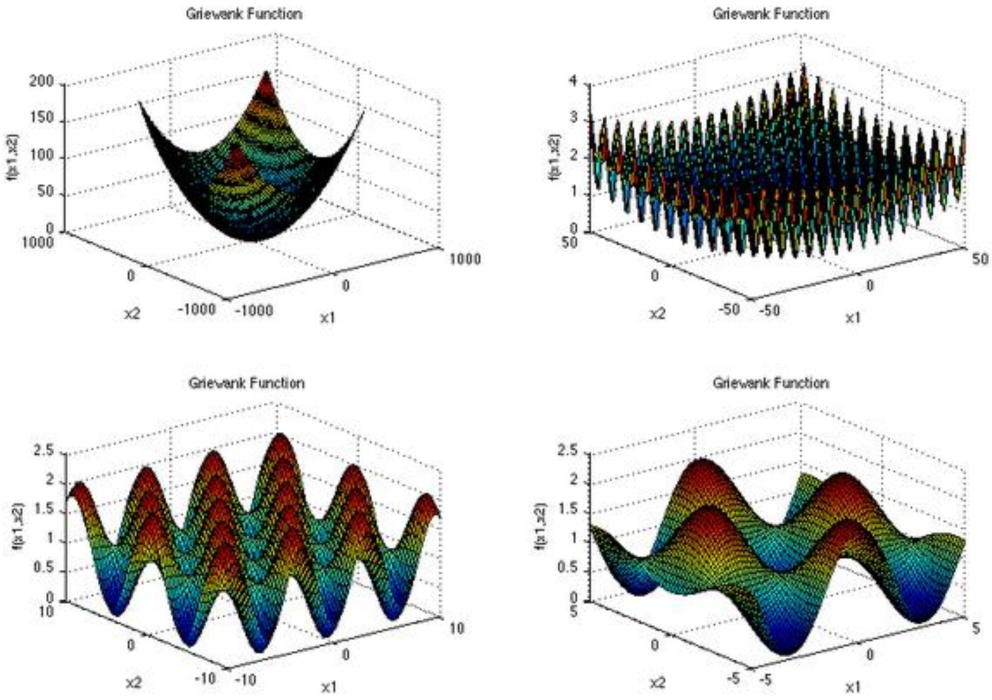
Genetik algoritm:

d=10, global minimumni topish soni 86%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,008325.

d=30, global minimumni topish soni 84%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,108851.

d=50, global minimumni topish soni 76%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 2500 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,016291, chatishtirish uchun 40% populyatsiya saralab olindi.

Griewank funksiyasi:



5.1.2.-rasm – Griewank funksiyasi

$$f(x)=\sum_{i=1}^{d}\frac{x_i^2}{4000}-\prod_{i=1}^{d}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)+1$$

Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [-600, 600]$, i = 1, …, d.

Global minimum:

$f(x^*)=0,\quad x^*=(0,...,0).$

Nyuton usuli: xmin = 0.0000 0.0000; opt = 5.2014e-015;

Gradient usuli xmin =0.0000 0.0000; opt = 2.077e-012;

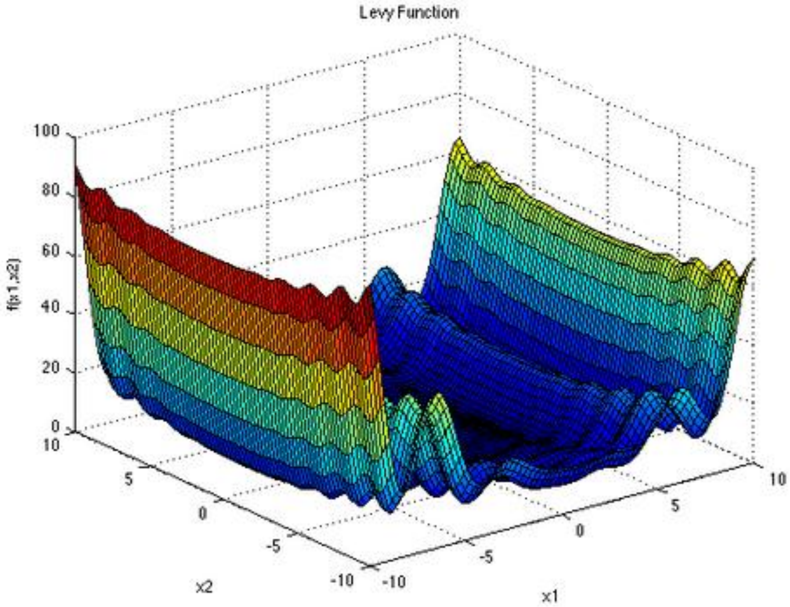
Genetik algoritm:

d=10, global minimumlarni topish soni 88%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,007251.

d=30, global minimumlarni topish soni 83%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,074382.

d=50, global minimumlarni topish soni 75%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 2500 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,027493, chatishtirish uchun 40% populyatsiya saralab olindi.

Levy funksiya:



5.1.3 -rasm- Levy funksiyasi

$$f(x) = \sin^2(\pi w_1) + \sum_{i=1}^{d-1} (w_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi w_i + 1)] + (w_d - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi w_d)],$$

$$w_i = 1 + \frac{x_i - 1}{4}, \; i = 1, ..., d$$

Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [-10, 10]$, i = 1, …, *d*.

Global minimum:

$f(x^*) = 0, \quad x^* = (1,...,1).$

Nyuton usuli: xmin = 1.0000; opt = 7.8379e-017;

Gradient usul xmin =1.0000; opt = 3.5943e-014;

Genetik algoritm:

d=10, global minimumni topish soni 81%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,007437.

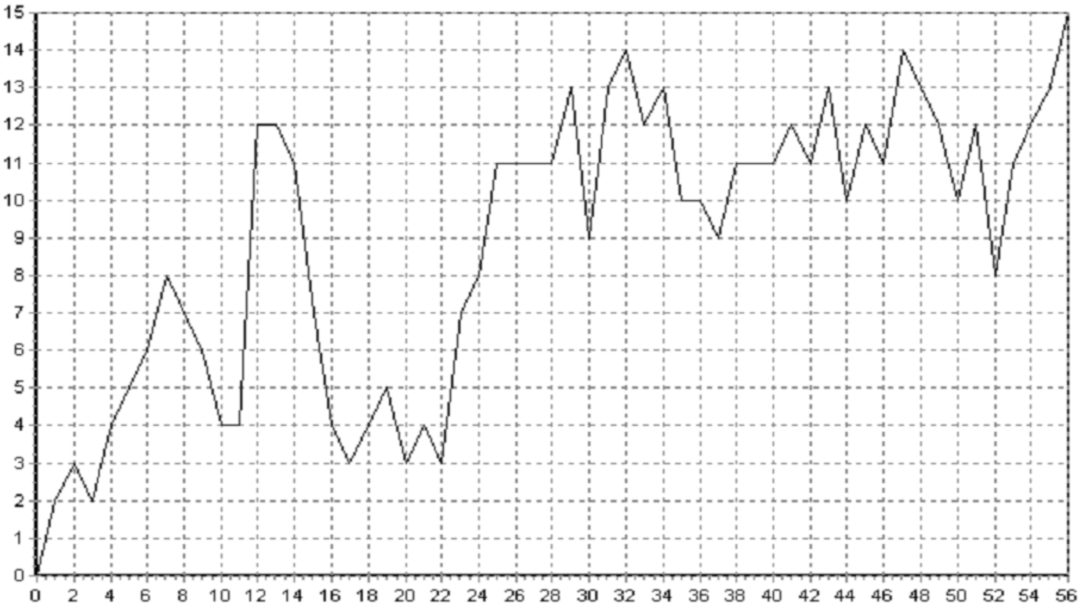
d=30, global minimumni topish soni 79%, maqsad funksiyalarini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,073894.

d=50, global minimumni topish soni 72%, maqsad funksiyasini hisoblashlar soni 2500 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,049284, chatishtirish uchun 40% populyatsiya saralab olindi.

Olingan natijalarni batafsil o'rganish uchun berilgan dasturiy mahsulot 5.1.4-rasmda keltirilgan grafikni quradi.

• Yaqinlashish grafigi (5.1.4-rasm) GA ning yaqinlashishini ko'rsatadi. Berilgan usul uchun yaqinlashish qiymati fitness-funksiya qiymatining ustma-ust tushishi bilan aniqlanadi. Individlarning fitness-funksiyalari qanchalik ko'p bir xil qiymat qabul qilsa, ular optimumga shunchalik yaqin bo'ladi.

Berilgan rasmdan gorizontal yo'nalishda iterasiya raqami, vertikal yo'nalishda esa ushbu itersiyada yaqinlashish qiymati joylashishi ko'rinib turibdi.

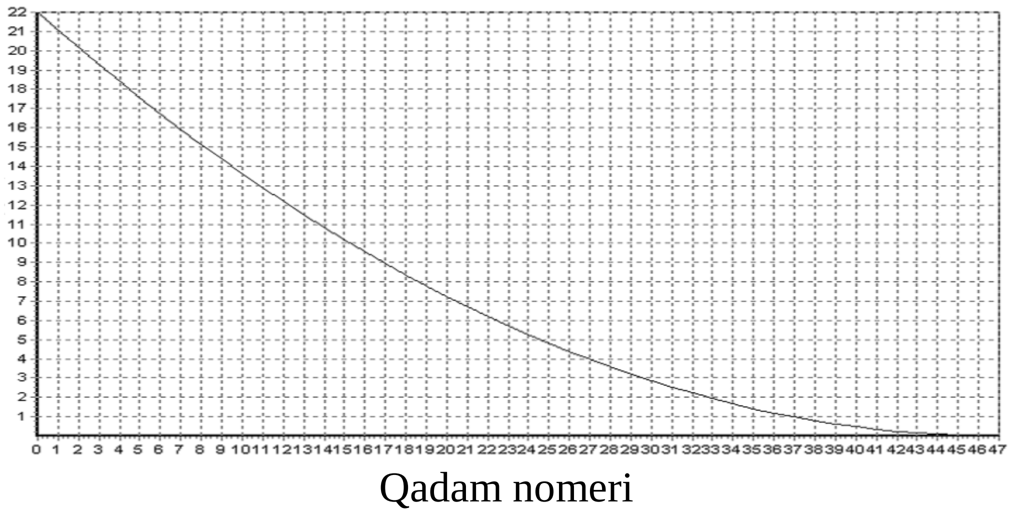


Qadam nomeri

5.1.4-rasm – Populyasiya hajmi

Gradient usullar bilan ishlash uchun mo'ljallangan dasturiy mahsulot genetik algoritm bilan ishlovchi dasturiy mahsulot singari barcha kerakli parametrlarni kiritish va har bir qadamda ishlash natijasini chiqarish imkonini beradi.

Olingan natijalarni batafsil o'rganish uchun berilgan dasturiy mahsulot yaqinlashish grafigini quradi (5.1.5-rasmga qarang). Berilgan rasmdan gorizontal yo'nalish bo'ylab iterasiya raqami, vertikal yo'nalishda esa berilgan iterasiyadagi funksiya qiymati joylashishi ko'rinib turibdi.

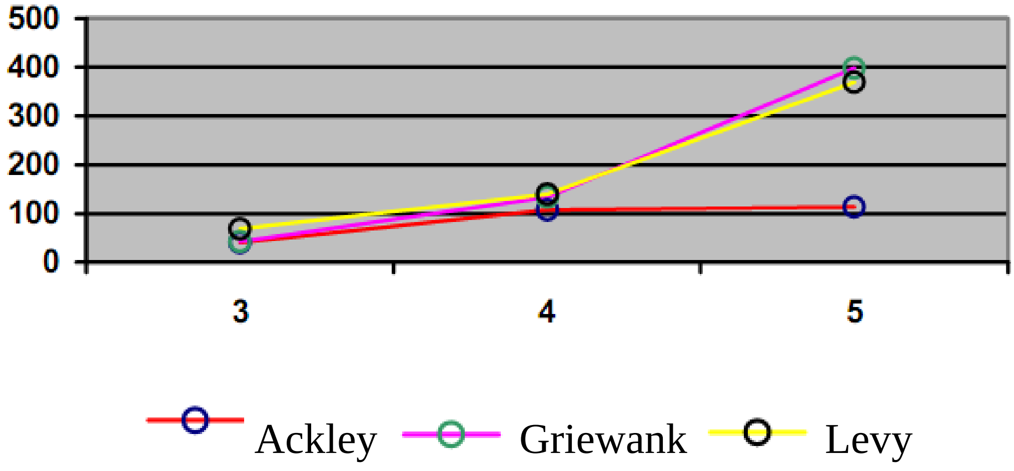


5.1.5-rasm. Yaqinlashish grafigi

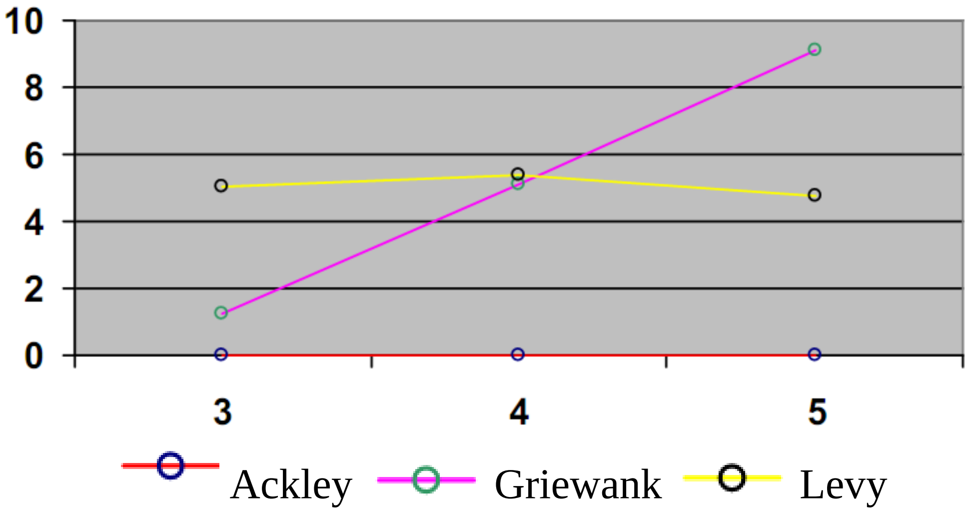
Olingan natijalar

Mutasiyaning genetik algoritmning ishlash natijasiga ko'rsatgan ta'siri

Funksiya optimumini topish uchun genetik algoritm faoliyatini o'rganish Ikkita grafik quramiz: har xil sondagi o'zgaruvchilar uchun o'rtacha iterasiyalar soni (5.1.6-rasm) hamda funksiya optimumining o'rtacha qiymati (5.1.7-rasm).



5.1.6-rasm- O'rtacha iterasiyalar soni

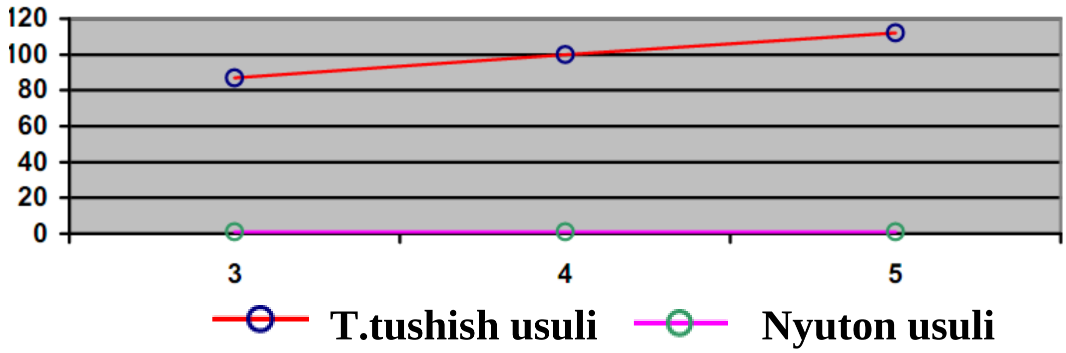


5.1.7-rasm – Funksiya optimumining o’rta qiymati

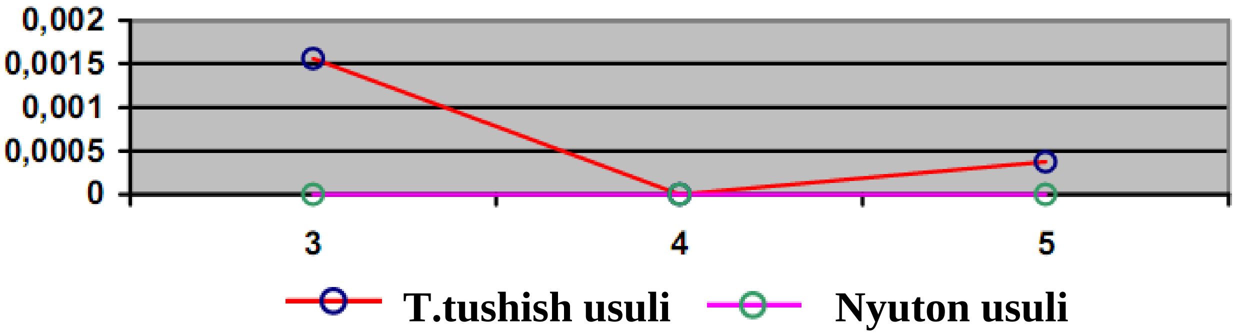
Tajriba davomida olingan natijalarga ko’ra shunday xulosaga kelish mumkinki, o’zgaruvchilarning soni ortishi bilan optimumni izlash vaqti ortadi va iterasiyalar soni ko’payadi. Iterasiyalar soni ortishi bilan har bir funksiya uchun olingan optimumlar qiymatlari unchalik o’zgarmaydi.

Tezkor tushish usuli va Nyuton usuli.

Olingan natijalarni namoyish etish va usullarni taqqoslash uchun grafiklarni quramiz. Grafiklarni qurish uchun 5 boshlang’ich yaqinlashishdagi natijalardan foydalanamiz.



5.1.8-rasm - Ackley usuli uchun iterasiyalar soni

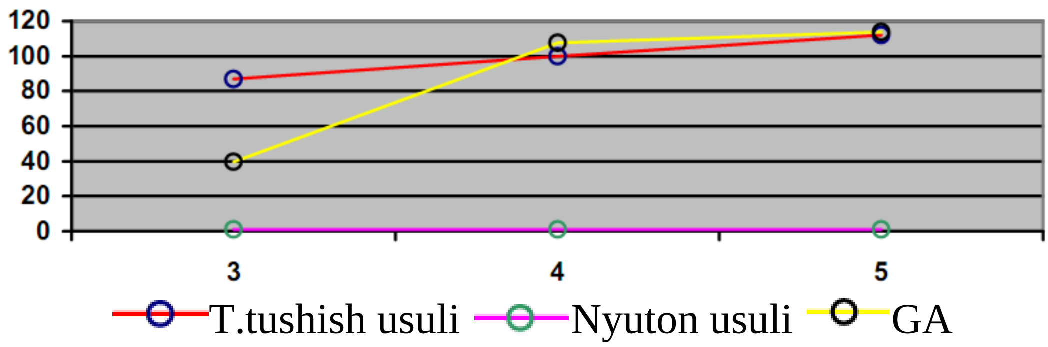


5.1.9-rasm- Ackley funksiya uchun optimum qiymatlar

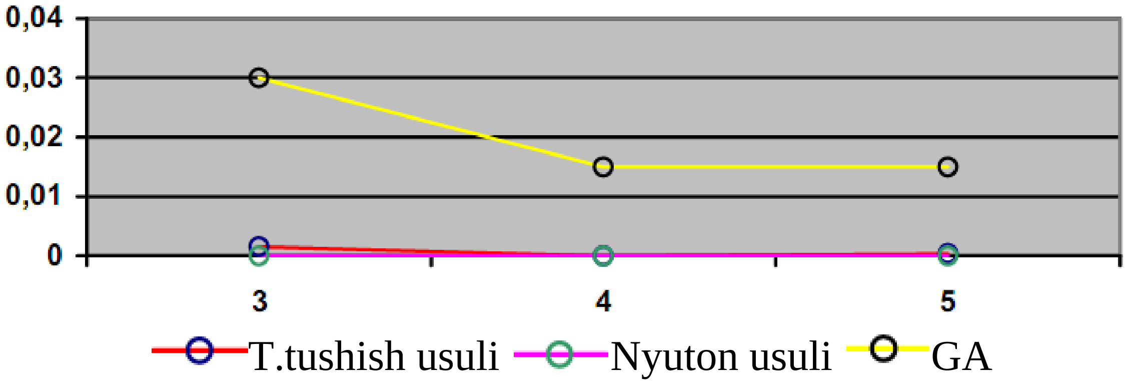
Berilgan ikkita gradient usulni taqqoslab, qo'yilgan masalani Nyuton usuli yaxshiroq yechishini ko'ramiz. Berilgan usul anchagina tezroq va aniqroq natija beradi.

Genetik usul va gradient usullarni o'rganish va taqqoslash

Olingan natijalarni namoyish etish uchun va usullarni taqqoslash uchun grafiklar quramiz. Grafiklarni qurishda gradient usullar uchun 5 boshlang'ich yaqinlashishdagi natijalardan foydalanamiz.



5.1.10-rasm. Optimum topilishidan avval Ackley funksiyasi uchun iterasiyalar soni



5.1.11-rasm- Ackley funksiya uchun optimum qiymati

GA va gradient usullarni olingan natijalar bo'yicha taqqoslash GA ixtiyoriy murakkablikdagi funksiya optimumini topish uchun mukammal usul ekanligini ko'rsatadi. Oddiy funksiyalar uchun GA gradient usullarga qaraganda sekinroq, ayrim paytlarda kamroq aniqlikda, ammo sifat jihatidan qolishmagan holda ishlaydi. Murakkab funksiyalar uchun GA gradient usullar foyda bermaganda optimumni topishga imkon beradi. De Jong va Rozenbrok funksiyalari uchun Nyuton usuli eng muqobil deb topildi. Rastrigin funksiyasi uchun eng muqobil deb GA topildi.

Ishda GA va gradient usullarning tadqiqot natijalari, hamda funksiya optimumlarini topish uchun ushbu usullarning taqqoslanmalari keltirilgan. Genetik algoritmni o'rganishda funksiya optimumini topish uchun muqobil parametrlar tanlandi. Muqobil parametrlarga quyidagilar kiradi:

- mutasiya qiymati 0,18 dan 0,22 gacha,
- chatishtirish qiymati 0,8.

GA bilan ishlash uchun parametrlarni tanlashda ehtiyot bo'lish kerak, chunki algoritm ishining muqobil natijasidan kichik bo'lgan parameter tanlanganda algoritmning ishlash natijasi noaniq bo'ladi, ammo algoritmning ishlash tezligi ortadi. O'z navbatida, muqobildan katta parametrni tanlashda algoritmning ishlash tezligi pasayadi, algoritm yaqinlashmasligi mumkin. Shu bois eng mahsuldor natija beradigan muqobil parametrlarni tanlash lozim.

Funksiya optimumini topish uchun GA ishini o'rganish davomida genetik algoritm optimumni izlash uchun funksiyaning murakkablik darajasiga qaramay universal usul ekanligini ko'rsatadi. Oddiy funksiyaning optimumini izlash uchun GA dan foydalanish yaxshiroq, chunki ular genetik algoritmga qaraganda tezroq ishlaydi. Murakkab funksiyaning optimumini izlash uchun genetik algoritmdan foydalanish yaxshiroq, chunki gradient usullar funksiya xususiyatlari yoki gradient usulning xususiyatlaridan yaqinlashmasligi mumkin.

5.2. Genetik algoritmlarning global optimumga yaqinlashishini tahlil qilish

Genetik algoritmdan foydalanishda vujudga keladigan jiddiy muammolardan biri vaqtdan oldin yaqinlashishdir. Kichik populyatsiyalarda klassik ma’nodagi genetik algoritmlardan foydalanish tavsiya etilmaydi, chunki kichik o’lchamdagi populyatsiyalarda genlar juda tez tarqaladi: barcha populyatsiyalar masala yechimi topilishidan avval bir-biriga o’xhsab ketadi. Ya’ni yaxshi baholi yangi genotip sustroq genlar kombinatsiyasini siqib chiqaradi va bu bilan ular asosida eng yaxshi yechimning olinishiga yo’l qo’ymaydi. Ishda genetik algoritmlarning global optimumga yaqinlashish masalalari o’rganiladi.

Bugungi kunda genetik algoritmlarni nazariy va tajibaviy yo’l bilan o’rganish, turli sinfga mansub masalalarni yechish davomida ularning xossalarini o’rganish bilan bog’liq masalalar dolzarb hisoblanadi. Genetik algoritmlardan foydalanishda vujudga keladigan jiddiy muammolardan biri muddatdan oldin yaqinlashishdir [151-157].

Muddatdan oldin yaqinlashishning oldini olish bo’yicha uchta asosiy yo’lni taklif qilish mumkin: populyatsiya hajmini orttirish, o’z-oz’idan moslashuvchi genetik operatorlarni tadbiq etish va o’rnini bosuvchi populyatsiyalar “banki” ni yaratish [172,173].

Birinchi holatda populyatsiya o’lchamini orttirib populyatsiyada genotipning xilma-xilligiga erishish mumkin. Ammo boshqa tomondan populyatsiyalar sonining ortishi egallangan xotiraning va algoritmning ishlash vaqtini ortishiga olib keladi. Mazkur yondashuv yoki parallel hisoblashlarda, yoki sodda maqsad funksiyasi holida samara beradi.

Ikkinchi va keng tarqalgan usul- o’z-o’zidan moslashuvchi algoritmlardan foydalanish- ko’proq samara beradi. O’z-o’zidan moslashish dinamik mutasiyalarni tadbiq etishga asoslanadi. Dinamik mutasiyalar populyatsiyalarni chatirishga qarab mutasiya ehtimolliklari qiymatini o’zgartiradi va shu bilan algoritm o’z-o’zini boshqara oladi. Bunday holatlarda kichik o’lchamdagi populyatsiya tanlanadi.

Uchinchi yondashuvda yangi avlodlarni shakllantirish jarayonida yo’qolgan genotipli populyatsiyalarni saqlab qolish uchun massiv yaratiladi .

Genetik algoritmlarning global optimumga yaqinlashishini o'rganish

Genetik algoritmlarning yaqinlashishiga oid qo'shimcha ta'riflar kiritamiz:

Ta'rif 5.2.1 $x_t : t \geq 0$ genetik algoritm yordamida generatsiyalangan xromosoma populyatsiyalari ketma-ketligi, F_t t vaqt momentida populyatsiyadagi eng yaxshi xromosomaning qiymati bo'lsin. Genetik algoritm muqobillashtirish masalasining $f : x \rightarrow R$ funksiya bilan aniqlangan f^* global optimumga $D_t = f^* - F_t$ nomanfiy tasodifiy ketma-ketlik 0 ga to'liq yaqinlashganda to'liq yaqinlashadi.

Ta'rif 5.2.2 $x_t : t \geq 0$ genetik algoritm yordamida generatsiyalangan xromosomalar populyatsiyalari ketma-ketligi bo'lib, F_t populyatsiyadagi t vaqt momentidagi eng yaxshi xromosomaning qiymati bo'lsin. Genetik algoritmlar qiymati bo'yicha muqobillashtirish masalasining $f : x \rightarrow R$ funksiya orqali berilgan f^* global optimumiga $D_t = f^* - F_t$ nomanfiy tasodifiy ketma-ketlik 0 ga to'liq yaqinlashsa, u yaqinlashish xususiyatiga ega.

Umumiy ko'rinishda genetik algoritmning bir qadami quyidagicha ifodalanadi:

$$(x'_1,\dots,x'_n) = sel(x_1,\dots,x_n);$$
$$(x''_1,\dots,x''_n) = cross(x'_1,\dots,x'_n);$$
$$(x'''_1,\dots,x'''_n) = mut(x'_1,\dots,x'_n);$$

Bu yerda $(x_1,\dots,x_n) \in x^n$ - joriy xromosomalar populyatsiyasi; $(x'_1,\dots,x'_n)$ - seleksiya natijasida paydo bo'ladigan xromosomalar; $(x''_1,\dots,x''_n)$- chatishtirish natijasida hosil bo'ladigan xromosomalar; $(x'''_1,\dots,x'''_n)$- mutasiya natijasida hosil bo'ladigan xromosomalar.

[153] da evolyutsion algoritmlarning o'rtacha va umuman olganda quyidagi shartlar bajarilganda global optimumga to'liq yaqinlashadi:

1 Populytsiyada har bir xromsoma boshqa ixtiyoriy xoromosomaga yagona mutasiyada $p > 0$ ehtimollik bilan o'zgartirilishi mumkin.

2 Poulyatsiyadagi eng yaxshi xromosoma har bir avlodda $p = 1$ ehtimollik bilan tirik qoladi.

Shartli ravishda ushbu tenglikni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\forall x, y \in X \qquad p\{y = mut(x)\} \geq \delta_m > 0;$$
$$p\{V_n^*(sel(x_1,...,x_k)) = V_k^*(x_1,...,x_k)\} = 1,$$

Bu yerda V_i^* i xromosomalar populyatsiyasidan olingan eng yaxshi xromosoma.

Agar 1-shart rost bo’lsa, u holda evolyutsion algoritm chekli qadamlarda $p=1$ ehtimollik bilan global optimumga yaqinlashadi, ammo optimum topilgandan so’ng, uning populyatsiyada qolishi noaniq bo’lsa buni kafolatlash qiyin. Agar 2-shart ham to’g’ri bo’lsa, u holda evolyutsion algoritmning global optimumga yaqinlashishini ko’rsatish mumkin.

Genetik algoritmda chatishtirish operatori evolyutsion jarayonni tanlash mexanizmida ishtirok etadi. Natijada, 1-shart mutasiya va chatishtrish borasida genetik algoritmga nisbatan tadbiq etilishi mumkin, seleksiya operatorini esa 2-shartning shartli ta’rifidan kelib chiqqan holda ko’zdan kechirish lozim.

U holda
$$p\{V_n^*(sel(x_1,...,x_n)) = V_k^*(x_1',...,x_n')\} = 1$$
$$p\{V_n^*(cross(x_1',...,x_n')) = V_k^*(x_1'',...,x_n'')\} = 1$$
ifoda 2-shartni GA ga nisbatan to’g’ri ta’riflaydi.

Genetik algoritmning global optimumga to’liq va o’rtacha yaqinlashishini ko’rsatamiz. Buning uchun 1 va 2-shartlarning qanoatlantirilishini ko’rsatamiz. Mutasiya va chatishtirish operatorlari xromosomalarga o’zgartirish kiritishi mumkin.

L uzunlikka ega bo’lgan bitli xromosomalar $\{0,1\}^L$ vektor orqali berilgan bo’lsin. Agar taqqoslashda $(L-c)$ bit uzunlikdagi zanjir optimumni ifodalasa, xromosomalar bitida optimum bilan ustma-ust tushmaydi. U holda, bir qadamda global optimumga erishishning mutasiya hamda chatishtirish operatorining ehtimolligi $P_c^{(L)} = \frac{c!}{L_c} \cdot \frac{1}{L}$ ga teng. Bu yerda muqobil tanlovlar soni $c!$ L_c tanlanmalar soni ichidan elementlarning o’rnini almashtirish soni hisoblanadi. Bu ehtimollik mutasiya operatori tasodifiy ravishda bitlarni o’zgartirish ehtimoliga, ya’ni $1/L$ ga, $c=r$ bo’lish ehtimoliga ko’paytirilishi lozim, bu yerda r - mutasiyaga chalingan tasodifiy bitlar soni.

Agar xromosoma $\{0,1,...,k-1\}^L$ vektor orqali berilgan bo'lib, uning har bir elementi k elementdan iborat alifbodan olingan bo'lsa, u holda mutasiya va chatishtirishga chalingan har bir raqamning muqobil zanjir raqami bo'lish ehtimoli

$$P_c^{(L)} = \frac{c!}{L_c} \cdot \frac{1}{(k-1)^c} \cdot \frac{1}{L}.$$

ga teng.

Agar $P_c^{(L)}$ har doim musbat bo'lsa, u holda 1-shart bajariladi. Bunda optimumning populyatsiyaga tasodifiy ravishda seleksiya operatori orqali kiritilish ehtimoli $p_s > 0$ ham mavjudligini yodda tutish lozim, lekin $P_c^{(L)}$ ehtimollikni ko'rib chiqish 1-shartnng bajarilishini ko'rsatish uchun ham yetarli.

2-shartning ham bajarilishini ko'rsatish uchun, populyatsiyaga ta'sir qiluvchi barcha operatorlarni hisobga olish, hamda birortasi ham muqobil yechimning yo'qolishiga olib kelmasligini ko'rsatish lozim. Genetik algoritm operatorlarini tahlil qilaylik.

Seleksiya operatori eng sust xromosomalardan qutilgandan so'ng populyatsiyani yangi xromosomalar bilan to'ldiradi, shuning uchun optimum yo'qolmaydi.

Mutasiya va chatishtirish operatori faqatgina populyatsiya xromosomalariga ta'sir ko'rsatsada, eng yaxshi xromosomaga hech qanday ta'sir ko'rsatmaydi. Natijada, bu operatorlar ham optimumni yo'qotmaydi. Shu tariqa, keltirilgan mulohazalar 2-shartning bajarilishini ko'rsatadi. Agar mutasiya, chatishtirish va seleksiya operatorlari 1 va 2-shartni qanoatlantirsa, genetik algoritm yaqinlashuvchi bo'ladi.

Genetik algoritmning global optimumga initsializatsiyalashdan farqli o'laroq yaqinlashmasligi ham mumkin.

Yuqorida 1-shartning bajarilishi ko'rsatilgan edi, unga ko'ra genetik algoritm mutasiya, chatishtirish va(yoki) seleksiya operatorlaridan foydalanganda o'zining optimumiga erishadi. Yaqinlashishning zaruriy, ammo yetarli bo'lmagan 2-shartning bajarilishini ko'rsatish lozim.

Genetik algoritmning global optimumga to'liq yaqinlashmasligini ko'rsatish uchun, optimum topilganda, genetik algoritm populyyastiyada optimumga ega bo'lmaydigan navbatdagi xromosomalar avlodining mavjud bo'lishini ko'rsatish yetarlidir. Genetik algoritmning optimumdan tashqariga chiqish, boshqa vaqt momentida boshqa muqobil qiymatni topish ehtimoli kichik bo'lsada, mavjud bo'lsa, bu genetik algoritmning 1 ehtimollik bilan to'liq yaqinlashmasligini anglatadi. Ushbu ehtimollik seleksiya operatorining t avloddan so'ng ma'lum bir yoshga to'lish optimizmini ifodalovchi xromosoma populyatsiyada o'zgartirilishi ma'nosidagi noeletizm bilan ham kafolatlanadi.

Seleksiya operatori x_1 muqobil yechimlar va x_2 nomuqobil yechimlar nusxalaridan iborat populyatsiyani yaratadi. Mutasiya operatori har doim, kamida bir bitni o'zgartirgani bois, muqobil yechimlar xromosomalari global optimumga erishmaydi. Boshqa tomondan, har qanday nomuqobil yechim navbatdagi qadamda $p \le p_{d=1}$ shartni qanoatlantiruvchi p ehtimollik bilan muqobil bo'lib qolishi mumkin, bunda $p_{d=1}$ d=1 qadam bilan eng ehtimolli holatdan optimumga erishish ehtimolligi hisoblanadi.

Ushbu mulohazalar quyidagi 1 tasdiqni isbotlaydi.

Tasdiq 5.2.1 Genetik algoritmning yaqinlashish tahlili ikkita shartning bajarilishiga asoslangan:

- Mutasiya va chatishtirish natijasida nomuqobildan muqobil holatga bir qadamda o'tish mumkin;
- Muqobil holat topilishi bilan, u populyatsiyada saqlanib qoladi va yo'qolmaydi.

Genetik algoritmdan foydalangan holda noravshan mantiqiy xulosa va o'qitish asosida muqobillashtirish, tasniflash masalarini yechish mumkin.

Hisoblash eksperimenti

Barcha test funksiyalari har xil sondagi parametrlarga ega bo'lishi mumkin (*d*). Shuning uchun avvalambor kichik d lik (masalan, 10 yoki 20), so'ngra *d*=50, 100, 200,... lik algoritmni ishga tushirish lozim. Bu algoritmning masshtablanishuvini tekshirishga yordam beradi.

GA ning ishlash samarodirligi maqsad funksiyasini hisoblash soni bilan baholash qabul qilingan. Qanchalik kam bo'lsa, shunchalik yaxshi. Ayrim funksiyalardan so'ng, sun'iy tanlanmali GA natijalari keltirilgan. 0.001 dan kichik maqsad funksiyasi natijalari ham global minimum sifatida qabul qilindi.

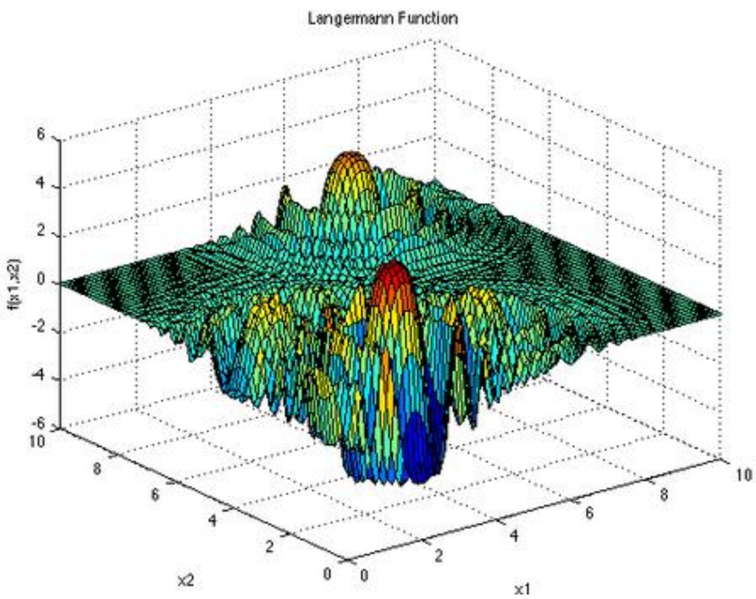
GA tavsiflari:

- Populyatsiyaning fiksirlangan o'lchami;
- Genlarning fiksirlangan razryadi;
- Krossoverning uzilish nuqtalari soni genlar soniga teng (har bir genga aynan bitta nuqta mos keladi);
- Chatishtirish uchun 50% populyatsiya saralab olinadi;
- Mutasiya ehtimolligi 90%;
- Ikkita "oily nav" unsure;
- Bir hil jinslarni poulyatsiyadan o'chirib tashlash (mutasiya yordamida);
- Hisoblash aniqligi: 0.001;
- Natija algoritmning 50 ta ishga tushirilishi bo'yicha hisoblab topilgan

Genetik algoritmlar stoxastiklikdan foydalangani bois, GA ning samaradorligini anqilash uchun uni bitta test funksiyasida bir necha marotaba ishga tushirish, so'ngra esa natijani tahlil qilish lozim. Masalan, 50 ta o'zgaruvchidan iborat Rastrigin funksiyasi uchun GA global minimumni ~40% hollarda, kamida 10000 ta funksiya hisoblashlarida topadi.

Mazkur ishda usullarni sinovdan o'tkazish va ular ustida tajriba o'tkazish uchun3 ta test funksiyasidan foydalaniladi:

Langermann funksiyasi:



5.2.1-rasm – Langermann funksiyasi

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i \exp\left(-\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{d}(x_j-A_{ij})^2\right)\cos\left(\pi\sum_{j=1}^{d}(x_j-A_{ij})^2\right).$$

d = 2: m = 5, c = (1, 2, 5, 2, 3) funksiya uchun tavisya etilgan

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 4\\ 7 & 9\end{pmatrix}.$$

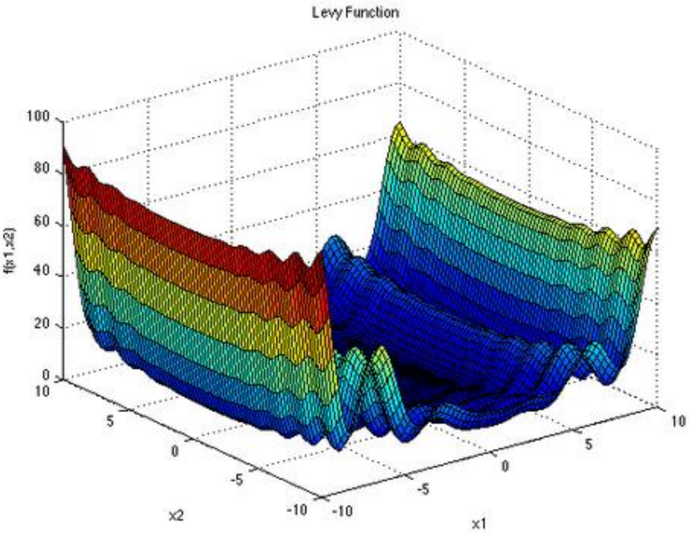
Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [0, 10]$, i = 1, …, d.

Genetik algoritm:

d=2, global minimumni topish soni 84%, maqsad funksiyasini hisoblash soni kamida 1250.

Levy funksiyasi:



5.2.2-rasm- Levy funksiyasi

$$f(x)=\sin^2(\pi w_1)+\sum_{i=1}^{d-1}(w_i-1)^2[1+10\sin^2(\pi w_i+1)]+(w_d-1)^2[1+\sin^2(2\pi w_d)],$$

$$w_i=1+\frac{x_i-1}{4},\ i=1,...,d$$

Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [-10, 10]$, i = 1, …, d.

Global minimum:

$f(x^*)=0,\quad x^*=(1,...,1).$

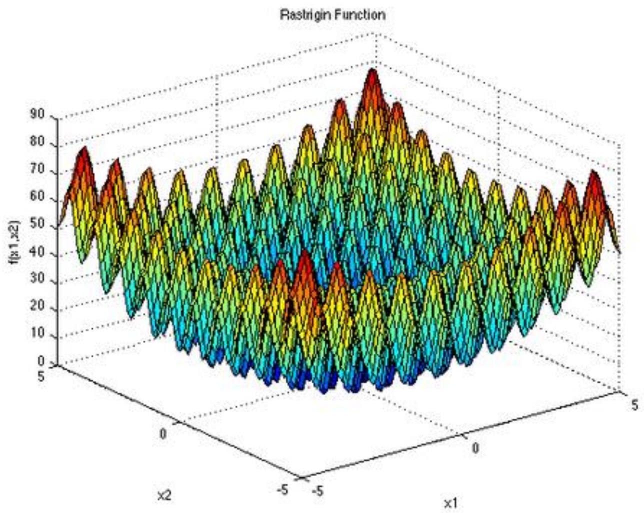
Genetik algoritm:

d=10, global minimumni topish soni 81%, maqsad funksiyasini hisoblash soni ko’pi bilan 1250, maksimal qiymat 0,007437.

d=30, global minimumni topish soni 79%, %, maqsad funksiyasini hisoblash soni kamida 1250, maksimal qiymat 0,073894.

d=50, global minimumni topish soni 72%, maqsad funksiyasini hisoblash soni kamida 2500, maksimal qiymat 0,049284, chatishtirish uchun 40% populyatsiyadan foydalanilgan.

Rastrigin funksiyasi:



5.2.3--rasm - Rastrigin funksiya

$$f(x) = 10d + \sum_{i=1}^{d} [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)]$$

Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [-5.12, 5.12]$, $i = 1, \ldots, d$.

Global minimum:

$$f(x^*) = 0, \quad x^* = (0, \ldots, 0).$$

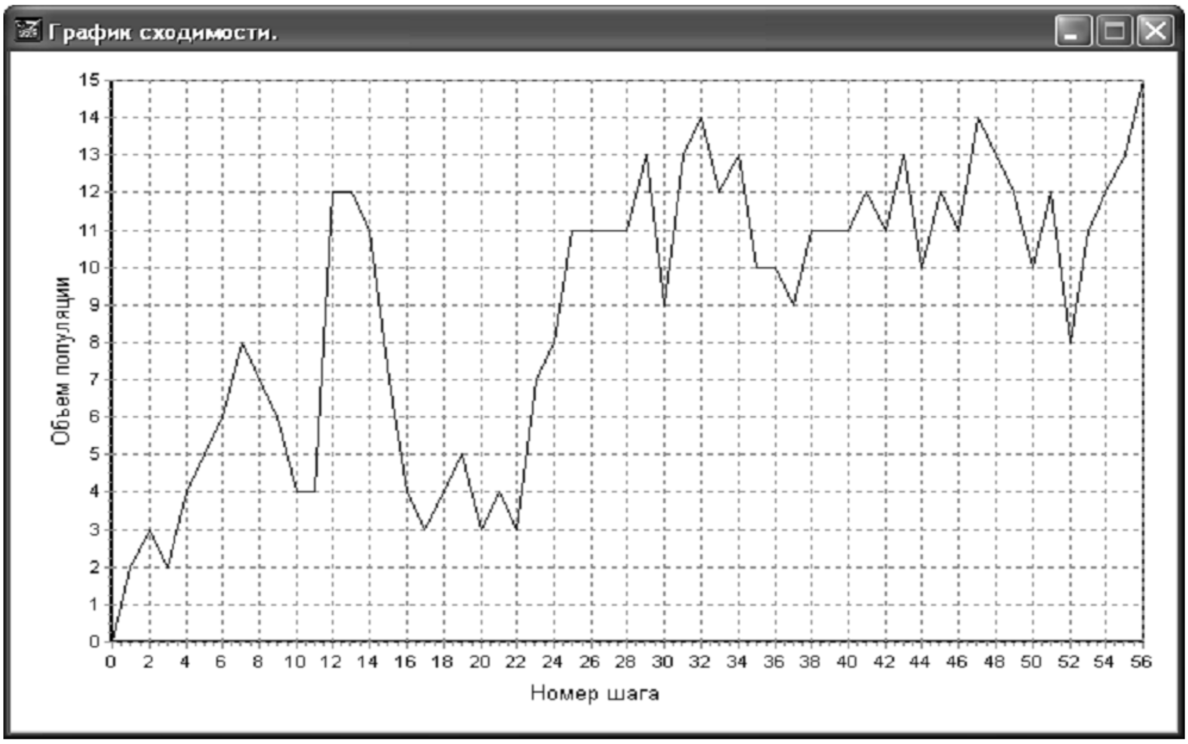
Genetik algoritm:

d=2 global minimumni topish soni 85%, maqsad funksiyasini hisoblahs soni ko’pi bilan 1250, maksimal qiymat 0,007435.

Olingan natijalarni batafsil o’rganish uchun ishlab chiqilgan dasturiy mahsulot 5.2.4--rasmda taqdim etilgan grafikni quradi.

Yaqinlashish grafigi (5.2.4--rasm) GA ning yaqinlashishni ko’rsatadi. Mazkur usul uchun yaqinlashish qiymati fitness-funksiyaning yaqinlashish qiymati bilan aniqlanadi. Individlarning fitness-funksiyalari qanchalik ko'p bir xil qiymat qabul qilsa, ular optimumga shunchalik yaqin bo'ladi.

Berilgan rasmdan gorizontal bo'ylab iterasiya soni, vertikal bo'ylab esa- mazkur iterasiyada yaqinlashish qiymati joylashishi ko'rinib turibdi.



5.2.4--rasm – Yaqinlashish grafigi

Genetik algoritmlar va evolyutsion algoritmlarni o'rganish davomida ko'plab yo'nalishlar paydo bo'ldi va ularning soni uzluksiz ravishda ortib kelmqoda [151-177].

Genetik algoritmlar va evolyutsion algoritmlar sohasidagi tadqiqotlar mazkur usullarning muhim jihatini ajratib ko'rsatishga imkon beradi-evolyutsion algoritmlarning samaradorligi genetik operatorlarni tadbiq etish ehtimoli, ularning turi va o'lchami singari o'zaro bog'langan parametrlarga bog'liq bo'ladi.

5.3. Ko'p ekstremal muqobillashtirish masalalarini yechish uchun sun'iy tanlanmali genetik algoritmlarni qo'llash

Mazkur paragrafda zamonaviy muqobillashtirish usullari muammosi muhokama qilinadi. Imitasion modellashtirish usullari bilan muqobillashtirish analitik usullarga qaraganda yaxshiroq ko'rsatkichlarga erishish imkonini beradi. Ko'p ekstremal masalalar genetik algoritmlar yordamida muvaffaqiyatli yechiladi. Ko'p ekstremal muqobillashtirish masalalarini yechish uchun sun'iy tanlanmali genetik algoritmlarning takomillashgan versiyasi ta'rifi keltirilgan. Algoritm test masalalarda sinovdan o'tkazilgan. Taklif etilgan algoritm maqsad funksiyasini hisoblash katta hisoblash resurslarini talab qilgan amaliy ko'p ekstremal masalalarni yechishda tadbiq etiladi.

Amaliy ko'p ekstremal masalalarda imitasion modellashtirish usullari parametrli muqobillashtirish masalalarini yechishga sifat jihatidan yangi talablarni qo'yadi.

Bir ekstremal masalalarni yechish uchun ko'plab gradient va sonli algoritmlar mavjud.

Umumiy holda oddiy ketma-ket kompleks-usul asosida muqobillashtirish prosedurasi quyidagi ko'rinishga ega: ma'lum bir funksiyani izlab topish talab qilinadi

$$f(x) \to \min \qquad (5.2.1)$$

Bunda funksiya xarakteri to'g'risida deyarli hech qanday aprior farazlar qilinmaydi.

Bugungi kunda ko'p ekstremal muqobillashtirishning eng afzal usullari bu evolyutsiya nazariyasi hamda o'simlik va hayvonlar seleksiyasi tajribalarini amaliyotga joriy qiluvchi genetik algoritmlar(GA) hisoblanadi [4,151-177]. Genetik algoritmlarda muqobil yechimni izlash strategiyasi seleksiya gipotezasiga tayanadi: unsurning moslashganligi qanchalik yuqori bo'lsa, uning ishtirokida olingan avlodda moslashuvchanlikni belgilovchi alomatlar yanada kuchli namouon bo'lish ehtimoli shunchalik yuqori [174].

Populyatsiyaning har bir unsuri $X_i[x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{li}]$ muqobillashtirish masalasining koordinata fazosidagi nuqta, unsurning moslashganligi $f(X_i)$ maqsad funksiyasiga to'g'ri kelsa, u holda unsurni populyatsiyasini fazodagi nuqtalar to'plami sifatida, evolyutsiya jarayonini esa- ushbu nuqtalarning maqsad funksiyasining muqobil qiymatlari tomon harakati sifatida qabul qilish mumkin.

Qayd etish joizki, klassik genetik algoritm global ekstremumni ehtimol ma’nosida topadi. Va bu ehtimollik populyatsiyadagi unsurlar soniga bog’liq bo’ladi. Tadqiqotlarning ko’rsatishicha, murakkab ko’p konturli va ko’p aloqali tizimlar hamda neyro kontrollerli tizimlarni muqobillashtirishda global ekstremumni topish ehtimoli ortadi. Ammo o’tish jarayonining vaqt oralig’ida (5.3.1) ko’rinishdagi maqsad funksiyasini hisoblash ulkan hisoblash resurslarini talab qiladi, bu esa GA ning umumiy faoliyat davriga katta ta’sir ko’rsatadi.

GA ning o’ziga xos xususiyati shundaki, hech bir genetik operator(krossover, mutasiya, inversiya) avlodlarni generatsiyalash jarayonida maqsad funksiyasi sirtining lokal relyefiga oid bilimlarga tayanmaydi. Genetik operatorlar yordamida avlodlarni shakllantirish tasodifiy ravishda kechadi, shuning uchun topilgan yechimlar o’tmishdagiga qaraganda yaxshiroq bo’lishini kafolatlab bo’lmaydi. Natijada evolyutsiya jarayonida maqsad funksiyasiga murojaatlar sonini orttiruvchi va bu bilan global ekstremumni izlash vaqtini orttiruvchi “omadsiz” avlodlar juda ham ko’p uchraydi.

Bundan tashqari, GA muqobil yechimni faqat berilgan izlash oralig’i ichida topadi xolos.Shu bois izlash oraliqlari hamda populyatsiyalar sonini katta zahira bilan berishga to’g’ri keladi, bu esa yechish vaqtini orttiradi.

Sanab o’tilgan xususiyatlar GA ning muhandislik amaliyotida keng qo’llanilishiga yo’l qo’ymaydi. Ammo ushbu algoritmlarni kichik o’lchamdagi amaliy masalalarni yechish uchun tadbiq etishga bo’lgan talab neyrotarmoqli texnologiyalarni boshqarish tizimiga joriy etish tendensiyasi tufayli doimiy ravishda ortib boradi.

Mazkur ishda (5.3.1) masalani yechish uchun sun’iy tanlanmali genetik algoritmdan foydalanamiz [175].

Sun’iy tanlanmali genetik algoritm. Taklif etilgan algoritm asosida moslashuvchi muqobillashtirish g’oyalarini o’zida mujassamlashtirgan evolyutsion genetik yondashuv sintezi [175] hamda avvalambor ko’p o’zgaruvchili funksiyaning ekstremumini izlab toppish kompleks-usuli yotadi [151-177]. Bunda har bir vaqt momentida joriy populyatsiya izlash fazosidagi nuqtalar majmuiga aynan teng qo’yiladi, an’anaviy mutasiya, chatishtirish va seleksiya operatorlaridan tashqari tanlash, akslantirish, cho'zish, siqish singari kompleks-izlash operatorlari kiritiladi. Bunda an'anaviy kompleks-usullaridan farqli o'laroq, bitta eng yomon kompleks uchini emas, eng yomon populyatsiya to'plamini akslantirish taklif qilinadi.

Algoritmning ishi boshlang'ich kompleksni shakllantirishdan boshlanadi

$$x_i(0)=\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_N(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) & \dots & x_{1n}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{2n}(0) \\ \vdots & & & \\ x_{N1}(0) & x_{N2}(0) & \dots & x_{Nn}(0) \end{pmatrix}, \quad i=\overline{1,N}\geq n+1,$$

ular n-o'lcovli izlash fazosida ixtiyoriy tartibda joylashgan xromosomalar populyatsiyasini ifodalaydi. Avvaliga seleksiya, so'ngra chatishtirish va mutasiya amali bajariladi. Bundan yangi xromosomalar populyatsiyasi $x_i(1)$ hosil bo'ladi.

Shundan so'ng tanlash amali bajariladi. Ushbu bosqichda funksiyaning barcha xromosomalardagi qiymati hisoblanadi va populyatsiyaning o'rtacha moyilligi topiladi

$$f_{сред}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(x_i(k)\right).$$

So'ngra o'rtachadan kichik moyillikli xromosomalar "eng yaxshi" xromosoma bilan alamshtiriladi.

Agar $f_{сред}<f\left(x_i(k)\right)$ bo'lsa, u holda $x_i(k+1)=x_i(k)$, bu esa $\min\limits_{i=\overline{1,N}}\left(f\left(x_i(k)\right)\right)$ ni beradi.

Ushbu xromosomalar to'plamidan "eng yomon" $x_i(1)$ topiladi, unda $f(x_H(1))$ funksiya qiymati maksimal bo'ladi, so'ngra bu nuqta qolgan nuqtalarning massalar markazi orqali akslantirilib, yangi $x_i(1),\ i=\overline{1,N}$ majmuani shakllantiradi. Bunday akslantirish cho'zish va siqish bilan birgalikda kompleksning $f(x)$ funksiya ekstremumi tomon harakatlanishini ta'minlaydi, bunda xromosomalarning populyatsiyada tasodifiy taqsimlanishi hisobiga izlash global xarakterga ega bo'ladi.

Rasmiy nuqtai nazardan $x_i(k),\ i=\overline{1,N}$ majmua shakllantirilgan holdagi k-izlash iterasiyasida muqobillashtirish jarayonini ko'rib chiqamiz. $x_i(k)$ to'plamdan

$$f(x_H(k))=\min_i\{f(x_1(k)),...,f(x_H(k))\},$$

shartni qanoatlantiruvchi "eng yomon" xromosoma topiladi, so'ngra eng yomon nuqtasiz populyatsiyaning og'irlik markazi aniqlanadi:

$$x_{cj}(k)=(x_{1j}(k)+x_{2j}(k)+...+x_{Nj}(k)-x_{Hj}(k))/(N-1) \qquad j=\overline{1,n}.$$

So'ngra $x_H(k)$ $x_c(k)$ massalar markazi orqali akslantirilib, yangi kompleks uchini $x_R(k)$ shakllantiradi, u esa nazariy jihatdan $x_H(k)$ va $x_c(k)$ ga qaraganda ekstremumga yaqinroq joylashgan bo'ladi, ya'ni $f(x_R(k))<f(x_c(k))<f(x_H(k))$.

Akslantirish amali shartli ravishda quyidagi ko'rinishga ega:

$$x_R(k)=x_c(k)+\eta_R(x_c(k)-x_H(k))=$$
$$\frac{1}{N-1}x_1(k)+...+\frac{1}{N-1}x_{N-1}(k)+\frac{\eta_R}{N-1}x_1(k)+...$$
$$+\frac{\eta_R}{N-1}x_{N-1}(k)-\eta_R x_H(k)=X(k)R,$$

Bu yerda η_R - akslantirish qadami parametri, $X(k)=(x_H(k),x_1(k),...,x_{N-1}(k))$ - $(n\times N)$-kompleks uchlari koordinatalarining matrisasi, $R=\left(-\eta_R,\frac{1+\eta_R}{N-1},...,\frac{1+\eta_R}{N-1}\right)^T$ - $(N\times 1)$-vektor.

Akslantiruvchi $x_R(k)$ uch qolgan xromosomalar populyatsiyasi ichida "eng yaxshi" bo'lib chiqsa, ya'ni $f(x_R(k))<f(x_i(k))<f(x_H(k))$, $i=1,2,...,N-1$ kompleksni $x_C(k)$ dan $x_R(k)$ gacha massalar markazi yo'nalishi bo'ylab $x_E(k)=x_c(k)+\eta_E(x_R(k)-x_c(k))=X(k)E,$ ifodaga ko'ra cho'zish amalga oshiriladi, bu yerda η_E – cho'zish qadami parametrik bo'lib, u ko'pincha ikkiga teng deb olinadi,

$$E=\left(-\eta_E,\eta_R,\frac{1-\eta_E(1-\eta_R)}{N-1},...,\frac{1-\eta_E(1-\eta_R)}{N-1}\right)^T.$$

Agarda $x_R(k)$ barcha $x_i(k)$ lar ichida eng yomon bo'lib chiqsa, kompleks quyidagi munosabatga ko'ra siqiladi

$$x_S(k)=x_c(k)+\eta S(x_R(k)-x_c(k))=X(k)S,$$

Bu yerda η_S –siqish qadami parametrik bo'lib, u 0,5 ga teng deb olinadi,

$$S = \left(-\eta_S, \eta_R, \frac{1-\eta_S(1-\eta_R)}{N-1}, ..., \frac{1-\eta_S(1-\eta_R)}{N-1} \right)^T.$$

Shu tariqa, muqobillashtiruvchi funksiya ekstremumi tomon harakatlanish jarayonida kompleks har bir iterasiyada bitta eng yomon qirrani yo'qotadi va bitta yangi nuqtaga erishadi, natijada $(k+1)$-iterasiyada yangi kompleks N nuqta-qirraga ega bo'ladi.

Taklif qilingan yondashuv yordamida sun'iy tanlanmali genetik algoritmdan foydalangan holda noravshan mantiqiy chiqish modeli hamda dasturiy mahsulot yaratilgan.

Algoritmnng ishi quyidagi qadamlar ketma-ketligi orqali hosil qilingan:

1 $P(0)$ juftligi-kompleks uchlari orqali hosil qilingan boshlang'ich populyatsiyani yaratish;

2 Populyatsiyani orttirgan holda chatishtirish amali $P_{CR}(0) > P(0)$;

3 Mutasiya amali $P_M(0) > P_{CR}(0)$;

4 Populyatsiyani qisqartirmagan holda birinchi seleksiya(eng yomon juftliklar) ni aniqlash $P_{SEL1}(0) = P_M(0)$;

5 Tanlash amalini butun populyastiya bo'yicha eng yaxshisi bilan almashtirish;

6 Eng yomon unsurlarni akslantirgan holda akslantirish amali P $P_M(0) < P_{SEL1}(0)$;

7 Populyatsiyani orttirmagan holda cho'zish amali $P_E(0) = P_R(0)$;

8 Populyatsiyani orttirmagan holda siqish amali $P_I(0) = P_E(0)$;

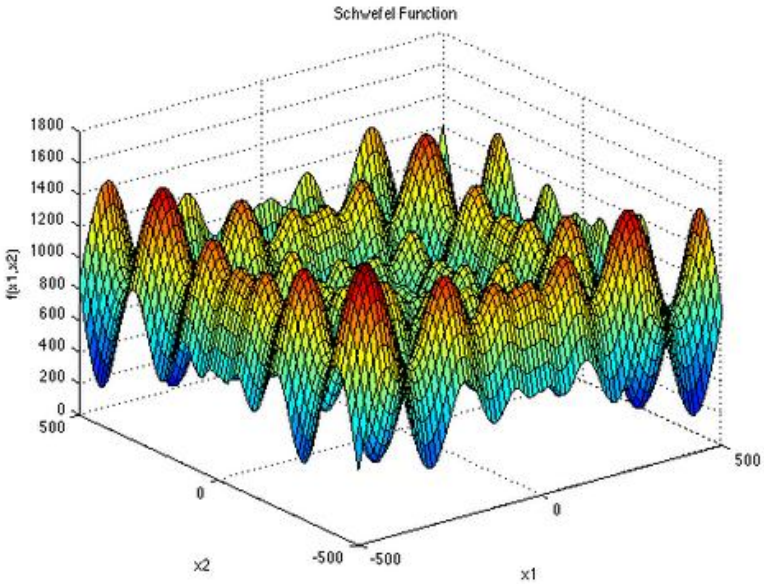
9 Eng yomon jinslarni o'chirgan holda ikkinchi seleksiya $P_W(0)$ $P_{SEL2}(0) = P_I(0) - P_W(0) = P(1)$ va navbatdagi algoritm iterasiyasida $P(1)$ populyatsiyani shakllantirish.

GA samaradorligi krossover, mutasiya usullari, avlod juftligini tanlash, yangi populyatsiyani shakllantirish hamda populyatsiya o'lchami, xromosoma uzunligi singari parametrlarga bog'liq. GA ni turli xil test funksiyalari yordamida baholash mumkin. Barcha test funksiyalari har xil sondagi (n) parametrlarga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun, funksiyani muqobillashtiruvchi algoritmni avvaliga kichik n bilan(masalan, 10 yoki 20), so'ngra =50, 100, 200,.. bilan ishga tushiramiz. Bu algoritmning "masshtablanishi" ni tekshirishga imkon beradi. Genetik algoritmlar GA ning samaradorligini baholash uchun stoxastiklikdan foydalanganligi sabab, uni bitta test funksiyasida bir necha marotaba ishga tushirish, so'ngra o'rta natijani olish lozim.

Hisoblash eksperimenti.

Sinovlar uchta funksiyaga nisbatan o'tkazilgan. Funksiyalarning analitik ifodalari quyidagi ko'rinishga ega.

Schwefel funksiyasi:



5.3.1-rasm – Schwefel funksiyasi

$$f(x) = 418.9829d - \sum_{i=1}^{d} x_i \sin(\sqrt{|x_i|})$$

Aniqlanish funksiyasi:

$x_i \in [-500, 500]$, $i = 1, \ldots, d$.

Global minimum:

$f(x^*) = 0, \quad x^* = (420.9687, ..., 420.9687)$

Sun'iy tanlanmali genetik algoritm:

d=10, global minimumni topish soni 87%, maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,009324.

d=30, global minimumni topish soni 74%, maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,093123.

d=50, global minimumni topish soni 71%, maqsad funksiyasini hisoblash soni 2500 dan ortmaydi, maksimal qiymat 0,028375, chatishtirish uchun 40% populyatsiya saralab olingan.

Michalewicz funksiya :

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{d} \sin(x_i) \sin^{2m}\left(\frac{i x_i^2}{\pi}\right)$$

Tavsiya qilingan o'zgarishlar m = 10.

Aniqlanish sohasi:

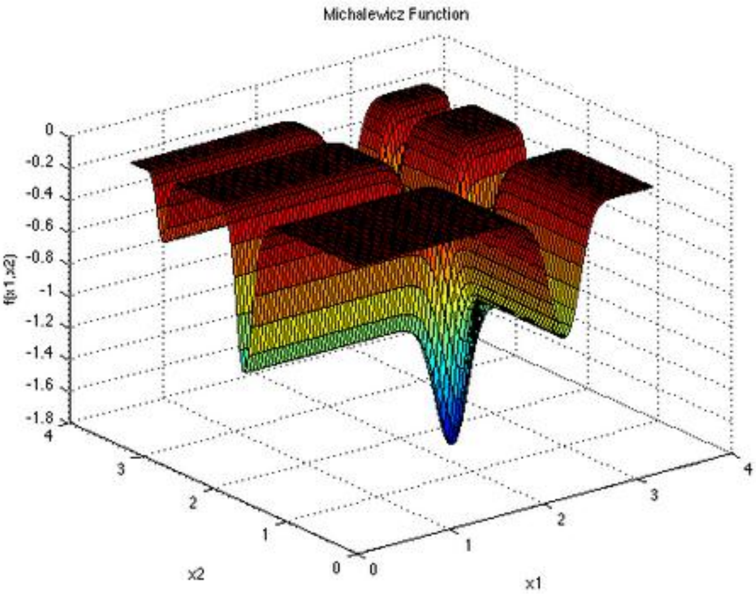
$x_i \in [0, \pi]$, i = 1, …, d.

Global minimum:

$d = 2: \ f(x^*) = -1.8013, \ x^* = (2.20, 1.57)$

$d = 5: \ f(x^*) = -4.687658$

$d = 10: \ f(x^*) = -9.66015$



5.3.2-rasm – Michalewicz funksiyasi

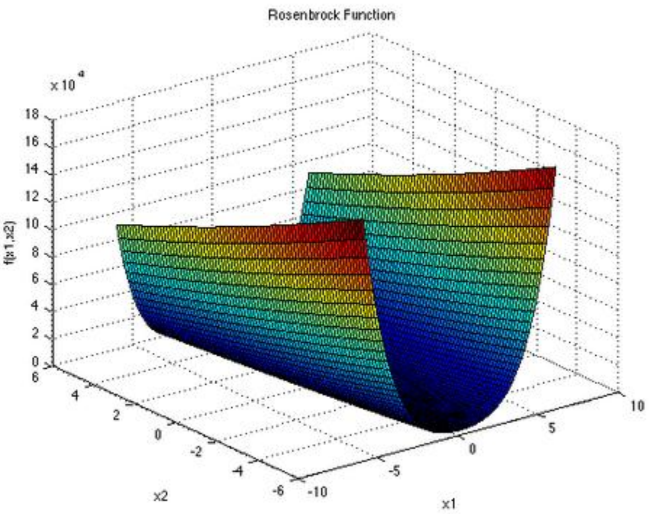
Sun'iy tanlanmali genetik algoritm:

d=2 global minimumlarni topish soni 88 maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat -1,799871

d=5 global minimumlarni topish soni 79 maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, maksimal qiymat -4,675963.

d=10, global minimumni topish soni 75%, maqsad funksiyasini hisoblash soni 2500 dan ortmaydi, maksimal qiymat -9, 650594, chatishtirish uchun 40% populyatsiyalar saralab olingan.

Rosenbrock funksiyasi:



5.3.3-rasm- Rosenbrock funksiyasi

$$f(x)=\sum_{i=1}^{d-1}[100(x_{i+1}-x_i^2)^2+(x_i-1)^2]$$

Aniqlanish sohasi:

$x_i \in [-5, 10]$, i = 1, …, d, $x_i \in [-2.048, 2.048]$, i = 1, …, *d*.

Global minimum:

$f(x^*)=0,\quad x^*=(1,\dots,1)$

Nelder Mid simpleks usuli:

xmin = 1.0000; 1.0000, opt = 4.1940e-014.

Gradient usuli: xmin = 1.0000; 1.0000, opt = 1.9116e-011.

xmin = 0.6120; 0.3715, opt = 0.1446.

Sun’iy tanlanmali genetik algoritm:

d=2, global minimumlarni topish soni 99% maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, funksiyaning maksimal qiymati 0,00169118.

d=4, global minimumlarni topish soni 86% maqsad funksiyasini hisoblash soni 86%, maqsad funksiyasini hisoblash soni 1250 dan ortmaydi, funksiyaning maksimal qiymati 0,00504982.

Taklif qilingan algoritm genetik algoritmning tasodifiy seleksiya xossalari va deformatsiyalanuvchi ko’pyoq usulining regulyar izlashlarini o’zida mujassamlashtiradi. Mavjud GA modifikatsiyasi regulyar izlash amali yordamida talab qilingan ehtimollik bilan maqsad funksiyasiga eng kam murojaatlar soni bilan global ekstremumga erishishga qodir. Sun’iy tanlanmali GA amaliy masalalarda ko’p ekstremal muqobillashtirish masalasini yechishga mo’ljallangan.

Xulosa

Mazkur kitobda bayon qilingan tadqiqotning asosiy vazifalaridan biri mantiqiy asoslangan lingvistik mulohazalar shaklida ifodalangan noravshan joriy axborot asosida sust shakllangan jarayonlarning muqobillashtirish modellarni ishlab chiqish hamda amaliyotga tadbiq etishdan iborat edi. Ish davomida quyidagi natijalar olindi:

1. Noravshan joriy axborotni qayta ishlash orqali noravshan modellarni qurishning matematik usullar majmui ishlab chiqildi. Tizimli yondashuv nuqtai nazaridan muqobillashtirish, boshqaruv hamda qaror qabul qilish masalalari ko’rib chiqilgan bo’lib, u sust shakllangan jarayonlarning yanada to’g’ri modellarini qurishga imkon beradi.

2. Noravshan joriy axborot asosida ko’p mezonli va ko’p ekstremal muqobillashtirishning modellarini qurish usullari ishlab chiqildi hamda nazariy jihatdan asoslab berildi. Noravshan to’plamlar nazariyasining va genetik algoritm usullarini ko’p mezonli va ko’p ekstremal muqobillashtirishning tadqiqotlarida qo’llash sharoitlari hamda sohalari aniqlandi. Ko’p mezonli va ko’p ekstremal muqobillashtirishning noravshan o’xshashliklarini o’z ichiga olgan tasdiqlar isbotlandi.

2. Noravshan joriy axborot asosida muqobillashtirish hamda qaror qabul qilish masalalarini yechishning mezonlari hamda algoritmlari ishlab chiqildi. Masalalarni noravshan ko’rinishda berilgan joriy axborot asosida parametrli dasturlash usuli bilan yechish modifikasilashtirilgan genetik algoritmi ishlab chiqildi. Parametrli dasturlashning joiz sohasi hamda uning maqsad funksiyasining ushbu sohadagi har bir nuqtadagi qiymati t parametrga bog’liq bo’ladi. Parametrli dasturlash masalasini yechish usulining ta’rifi noravshan muhitni ravshan muhitga keltirishdan hamda muqobil noravshan yechim mavjud bo’lgan t qiymatni topishdan boshlanadi.

4. Stoxastik dasturlashning noravshan masalasini t ta shaxsiy qism masalalarni yechish orqali uning yechimlarini kelgusida agregatlash natijasida amaliyotga tadbiq etishning algoritmi ishlab chiqildi.

5. Taklif etilgan yumshoq modellar hamda genetik algoritmni muqobillashtirish hamda qaror qabul qilishning aniq amalaiy masalalariga nisbatan qo’llovchi dasturiy majmualar yaratildi. Ularni qo’llashning eng yaxshi sharoitlari aniqlandi hamda asoslab berildi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1988.
2. Абрамович Ф.П., Вагенкнехт М.А., Хургин Я.И. Решение нечетких систем линейных алгебраических уравнений LR-типа.-В сб.: Методы и системы принятия решений.Рига:РПИ,1987,с.35-47.
3. Абакаров А.Ш., Сушков Ю.А. Адаптация случайного поиска с использованием логистической кривой. – СПб.:СПбГУ. 2005. С.67-75
4. Алиев Р.А., Алиев Р.Р. Теория интеллектуальных систем и ее применение. - Баку, Изд-во Чашыоглы, 2001. – 720 с.
5. Алиев Р.А., Либерзон М.И. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления, -М.: Радио и связь, 1987, - 207с.
6. Алиев Р.А., Церковный А.Е., Мамедова Г.А. Управление производством при нечеткой исходной информации. –М.: Энергеатомиздат, 1991. – 240 с.
7. Алоев Р.Д., Мухамедиева Д.Т. Норавшан ахборотни қайта ишлаш асосида талабалар ўқув-тарбия жараёнини муқобиллаштириш ва ўзлаштиришини башорат қилиш моделлари. –Тошкент. Миллий Университет. 2010. 282 бет.
8. Алтунин А.Е.,Востров Н.Н. Методы определения функций принадлежности в теории размытых множеств. Труды ЗапсибНИГНИ, Тюмень, вып. 154, 1980, с.62-72.
9. Алтунин А.Е., Востров Н.Н. Оптимизация многоуровневых иерархических систем на основе теории размытых множеств и методов самоорганизации. В сб.: "Проблемы нефти и газа Тюмени", Тюмень, вып. 42, 1979, с.68-72.
10. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2000. - 352 с.
11. Алексеев А.В. Проблемы разработки математического обеспечения выполнения нечетких алгоритмов. - В сб.: Модели выбора альтернатив в нечеткой среде.-Рига, 1984, с. 79-82.
12. Алексеев А.В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений. - В сб.: Методы и системы принятия решений. - Рига: РПИ, 1983, с. 38-42.

13. Абуталиев Ф.Б., Мухатдинов М.Я. О проблеме нижней границы решения уравнений нечетких отношений в моделях нечетких систем // Узб. журнал «Проблемы информатики и энергетики». – Ташкент, 2000. -№5. –С.11-14.
14. Архангельский В.И., Богаенко И.Н., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А. Системы фуцци-управления. – К.: Тэхника, 1997. – 208 с.
15. Бекмуратов Т.Ф. Систематизация задач интеллектуальных систем поддержки принятия решений // Проблемы информатики и энергетики. Ташкент, 2003. -№ 4. -С. 24−35.
16. Бекмуратов Т.Ф., Дадабаева Р. А., Мухамедиева Д.Т. Принятие решений в нечеткой среде //Научный журнал «Проблемы информатики» – Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2010, вып.1, с. 52-61.
17. Бекмуратов Т.Ф., Мухамедиева Д.Т., Бобомурадов О.Ж. Нечеткая модель прогнозирования урожайности //Научный журнал «Проблемы информатики» – Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2010, вып.3. С. 11-23.
18. Беллман Р., Заде Л. Принятие решений в расплывчатых условиях - В сб.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М: Мир, 1976, с.172-215.
19. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
20. Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели принятия решений: дедукция, индукция, аналогия. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. - 110 с.
21. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений.- М: Радио и связь. 1989. - 304 с.
22. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования.- Рига:Зинатне, 1990.- 184 с.
23. Борисов А.Н. и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. - Рига: Зинатне, 1982. - 256с.

24. Бокша В.В., Силов В.Б. Нечеткое целевое управление системами с заданным конечным состоянием. Автоматика, N 3, 1985, с.3-8.
25. Бочарников В.П. Fuzzy-Технология: математические основы практика моделирования в экономике. Санкт-Петербург, 2001, 328 с.
26 Введение в нелинейное программирование. М.: Наука 1985.
27. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. - Изд-во МЭИ (СССР) и Техника (НРБ), 1989. – 224с.]
28.Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
29. Гудмен И. Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. М: Радио и связь, 1986, с.241-264.
30. Гусев Л.А., Смирнова И.М. Размытые множества. Теория и приложения (обзор). Автоматика и телемеханика, N 5, 1973, с.66-85.
31.Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.
32. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике.- М: Радио и связь. 1990. - 288 с..
33. Дюбуа Д., Прад А. К анализу и синтезу нечетких отображений. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986, с.229-240.
34. Жиглявский А.А., Жилинкас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. – Наука. Физматлит. 1991.
35.Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976, 165 с.
36. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений.- В кн.: Математика сегодня.- М.:Знание, 1974, с. 5-49.
37. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе. - В сб.: Классификация и кластер. М: Мир, 1980, с.208-247.

38. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Алгебраическое интервальное решение систем линейных интервальных уравнений Ах = в и Ах + d = в. Препринт ВЦ СО АН СССР, N 5, Красноярск, 1987, 17с.
39. Зуенков М.А. Приближение характеристических функций нечетких множеств. Автоматика и телемеханика, N 10, 1984, с.138-149.
40. Зайченко Ю.П. Исследование операций: нечеткая оптимизация: Учеб. пособие.- Киев: Выща школа, 1991.- 191с.
41. Кабулов В.К. Алгоритмизация в социально-экономических системах. –Т.: Фан, 1989.
42. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. Физматлит, 2001. - 224 с
43. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986, 222с.
44. Кандель А., Байатт У.Дж. Нечеткие множества, нечеткая алгебра, нечеткая статистика. Труды американского общества инженеров-радиоэлектроников, т. 66, 1978, N12, с.37-61.
45. Камилов М.М., Акбаралиев Б.Б. Эвристический метод построения информативного признакового пространства в интеллектуальных системах анализа данных алгоритмами распознавания // Труды Восьмой Международный симпозиум «Интеллектуальные системы» (INTELS’2008), г.Нижний Новгород, Россия, -с. 113-116.
46. Кейн Л.А. Искусственный интеллект в обрабатывающих отраслях промышленности. Нефть, газ и нефтехимия за рубежом, N 9, 1986, с.117-122.
47. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. - М: Радио и связь, 1981, 560с.
48. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М: Радио и связь, 1982, 432с.
49. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.- М.: Наука, 1990.- 272 с.
50. Мешалкин В.П. Экспертные системы в химической технологии. - М.: Химия, 1995. - 368 с.
51. Митюшкин Ю.И., Мокин Б.И., Ротштейн А.П. Soft-Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний.- Винница: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002.- 145с.

52. Магомедов И.А. и др. Применение теории нечетких множеств к задачам управления нестационарными процессами. В сб.: Методы и системы принятия решений. - Рига: РПИ, 1984, с.60-65.
53. Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. - М.: Энергоатомиздат, 1991, 136с.
54. Мелихов А.Н. и др. Лингвистический терминальный комплекс. Модели выбора альтернатив в нечеткой среде. Рига: РПИ, 1984, с.140-142.
55. Мухамедиева Д.Т. Нечеткое многокритериальное динамическое моделирование в процессе принятия решений // Естественные и технические науки. –Москва. 2004. №2. С. 174-179.
56. Мухамедиева Д.Т. Задачи стохастического программирования в нечеткой среде // Актуальные проблемы современной науки. – Москва, 2004, №3, с. 175-180.
57. Мухамедиева Д.Т. Статическая модель принятия решений в условиях неопределенности // Вестник ТашГТУ». –Ташкент, 2007. Вып.1. Стр. 57-61.
58. Мухамедиева Д.Т. Статистическое моделирование в сельском хозяйстве с применением теории нечетких множеств. -Ташкент: Институт кибернетики НТЦ «Современные информационные технологии». 2004. –200 с.
59. Мухамедиева Д.Т. Моделирование слабо формализуемых процессов на основе обработки нечеткой информации.-Ташкент: Институт информатики АН РУз, 2007. -231 с.
60. Muhamediyeva D.T. Noravshan axborot holatida sust shakllangan jarayonlarni modellashtirish. -Toshkent. Matematika va axborot texnologiyalar instituti. 2010. 400 bet.
61. Muhamediyeva D.T. Noravshan axborotni qayta ishlash asosida sust shakllangan jarayonlarni tizimli modellashtirish muammolari. -Toshkent. Matematika va axborot texnologiyalar instituti. 2010. 531 bet.
62. Насибов Э.Н. Об идентификации состояний объекта при нечеткой информации // Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям: SCM’2001. –Санкт-Петербург,2001. –1. –С.151-154.
63. Насибов Э.Н. Методы обработки нечеткой информации в задачах принятия решений. –Баку: Элм, 2000. –260с.
64. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. СПб: Изд-во Сезам, 2002. - 181 с.

65. Нечеткие множества в моделях управления искусственного интеллекта /Под ред. Д.А. Поспелова. –М.: Радио и связь, 1987. – 330с.
66. Несенюк А.П. Неопределенные величины в задачах управления с неполной информацией. - Автоматика, N 2, 1979, с.55-64.
67. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. - М: Радио и связь, 1986, 408с.
68. Норвич А.М., Турксен И.Б. Построение функций принадлежности. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986, с.64-71.
69. Норвич А.М., Турксен И.Б. Фундаментальное измерение нечеткости. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. - М: Радио и связь, 1986, с.54-64.
70. Орлов А.И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные.-М.: Знание, 1980.- 64 с.
71. Орлов А.И. Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы.- Математические заметки, т. 30, вып. 4, 1981, с. 561-568.
72. Осуга С. Обработка знаний. - М.: Мир, 1989. - 293 с.
73. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М: Наука, 1981, 203с.
74. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
75. Поспелов Д.А. Логико-лингвистические модели в системах управления.- М.:Энергоиздат, 1981.- 232 с.
76. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика.- М. Наука, 1986.- 288 с.
77. Поспелов Г.С. и др. Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ. М: Наука, 1985, 424с.
78. Потюлкин А.Ю. Решение задач идентификации нечетких систем // Изв. АН России. Теория и системы управления. –1996. - №4. –С.40-46.
79. Прикладные нечеткие системы/Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др./Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугено.- М.: Мир, 1993. - 368 с.
80. Пшеничный Б.Н.. Данилин Ю.М. Численные методы в экстеримальных задачах. М.: Наука, 1975.

81. Райская Н.Н., Френкель А.А. Применение гребневой регрессии в статистическом моделировании // Экономика и мат. методы, 1985. Т. XXI. Вып. 4.
82. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткая логика, генетические алгоритмы, нейронные сети. — Винница: УНИВЕРСУМ—Винница, 1999. — 320 с.
83. Ротштейн А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. — Винница: Континент—ПРИМ, 1996. — 132 с.
84. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений // Известия РАН. Теория и системы управления.- 2001.- №3.- С.150-154.
85. Рахматуллаев М.А. Теория и прикладные методы построения метасистемы генерации решений в детерминированной и нечеткой технологической среде: Автореф. дис….докт. техн. наук., -Ташкент, 1994. –38 с.
86. Рыбкин В.А., Язенин А.В. О сильной устойчивости в задачах возможностной оптимизации // Изв. РАН ТИСУ. 2000. -№2.
87. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер.с польск. И.Д. Рудинского. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.
88. Саттаров Д. Сорт, почвы, удобрение и урожай. –Т.: Мехнат. 1988.
89. Семухин М.В. Разрешимость нечетких и интервальных уравнений. Вестник Тюменского государственного университета, вып.2. - Тюмень, ТюмГУ, 1998, с.23-26.
90. Семухин М.В. Теория нечетких множеств. Учебно-методическое пособие. - Тюмень: ТюмГУ, 1999, 50 с.
91. Степанов В.В. Численное решение некорректно поставленных задач на множествах кусочно-монотонных и выпуклых функций // Вести МГУ. Сер.15. -1985, №3.-С.21-26.
92. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1986.
93. Уткин Л.В., Шубинский И.Б. Нетрадиционные методы оценки надежности информационных систем. – СПб.: Любавич, 2000. – 173 с.

94. Фиакко А, Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной оптимизации. М.: Мир, 1972.
95. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. - М: Мир, 1973, 468с.
96. Хинтон Д.Е. Как обучаются нейронные сети // В мире науки. – 1992. - № 11-12. – С.103-110.
97. Чуклеев С.Н. К вопросу о разрешимости нечетких уравнений. В сб.: Модели выбора альтернатив в нечеткой среде. Рига: РПИ, 1984, с.95-96.
98. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. - М.: Наука,1984.-320с.
99. Шокин И.Ю. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981, 112 с.
100. Ягер Р.Р. Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств. В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. М: Радио и связь, 1986, с.71-78.
101. Язенин А.В. Некоторые методы теории нечетких подмножеств в многокритериальных задачах с приложением. Автореф. дис. на соис. учен. степ. канд. техн. наук.- Рига: Риж. политех. ин-т. 1982. - 22 с.
102. Bellman R., Kalaba K., Zadeh L.A. Abstraction and pattern classification. J.Math. Anal. and Appl., v.13, No1, Jan, 1966.
103. Bellman R.E., Gierts M. On the analitical formalism of theory of fuzzy sets."Inform. Sci.", 1973, v.5, N2, p.149-156.
104. Bonissone P.P., Tong R.M. Editorial: reasoning with uncertainty in expert systems."Int. J. Man-Mach. Stad.", 1985, N3, p.241-250.
105. Bekmuratov T.F., Mukhamedieva D.T. Decision-making problem in poorly formalized processes. // Proceedings of WCIS-2008, b – Quadrat Verlag. 2008. P. 214-218.
106. Bekmuratov T.F., Muhamedieva D.T., Bobomuradov O.J. Model prediction of yield with fuzzy initial conditions / Proceedings of Ninth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing ICAFS, Prague, Czech Republic, 2010,-p.321-328.
107. Chang S.S.L. Application of fuzzy set theory to economics. "Kybernetes", 1977, v.6, p.203-208.

108. Daley S., Gill K.F. The fuzzy logic controller: an alternative design scheme? "Comput. Ind.", 1985, N1, p.3-14.
109. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. Int. J.System sci., 1978, v.5, N2, p.613-626.
110. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applisations. - New York: Acad. Press, 1980, 394p.
111. Dubois D., Prade H. Fuzzy real algebra: Some rezults. - "Fuzzy Sets and Systems". 1979, v.2, N4, p.327-348.
112. Dubois D., Prade H. Systems of linear fuzzy constraints. - "Fuzzy Sets and Systems". 1980, v.3, N1, p.37-48.
113. Dubois D., Prade H. Inverse operations for fuzzy numbers.-In: Proc. of IFAC Symp. "Fuzzy Information, Knowledge Representation, and Decision Analysis". Marceille: IFAC, 1983, p.34-48.
114. Freeling A.N.S. Fuzzy sets and decision analysis. "IEEE Tran. Syst.Man. and Cybern.", v. 10, N7, p.341-354.
115. Flondor P. An example a fuzzy system. "Kybernetes". 1977, p.229-230.
116. Funy J.W., Fu K.S. An axiomatic approach to rational decision making in a fuzzy environment. "Fuzzy Sets and Their Application to Cognitive and Decision Processes", New York, 1975, p.227-257.
117. Gaines B.R. Stochastic and fuzzy logical. "Electron. Lett.", v. 11, 1975, p188-189.
118.Garlott J. Interval Mathematics. A Bibliography. Freiburger, Interval-Berichte, West Germany, N6, 1985, 250p.
119. Gen M., Cheng R. Genetic algoritms and engineering design. – John Wiley&Sons, 1997. – 352 p.
120. Goguen Y.A. The logic of inexact concepts. "Synthese", v. 19, p.329-373.
121. Golden B.L. Nonlinear programming on a microcomputer. "Comput. and Oper. Res.", 1986, N2-3, p.149-166.
122. Gorzalczany M.B. Interval-Valued Decisional Rule in Signal Transmission Problems. "Arhiwum automatyki i telemechaniki", t.XXX, N2, 1985, p.159-168.
123. Govind R. Synthesis of fuzzy controllers for process plants. "Proc. Int. Conf. Cybern. and Soc., Tokio-Kyoto", New York, 1978, v.2-3, p.1228-1232.

124. Hopfield J., Tank D., Neural computation of decision in optimization problems, Biol. Cybernet, 1985, vol.52, pp. 141-152.
125. Hung D.L. Wang J. Digital hardware realization of a recurrent neural network for solving the assignment problem // Neurocomputing, 51, 2003, pp. 447-461.
126. Johnson R.W., Shore J.E. Solving Fuzzy Sets Problems Using Probability Theory, Technical Memorandum NRL 7503-211, Naval Research Laboratory, Washington, D.C., 1979.
127. Kickert W.Y.M. and oth. Application of Fuzzy Controller in a Warm Water Plent. "Automatica", v. 12, N4, 1976, p.301-308.
128. Kelsey J. Immune Inspired Somatic Contiguous Hypermutation for Function Optimisation / J. Kelsey, J. Timmis // Proc. of Genetic and Evolutionary Computation Conference. Springer Lecture Notes in Computer Science 2723. – 2003. –P. 207-218.
129. Mamdani E.H., Efstathion H.J. Higher-order logics for handling uncertainty in expert systems. "Int. J. Man-Mach. Stud.", 1985, N3, p.243-259.
130. Markov S.M. Extended interval arithmetics.- Докл. Болг. АН, 1977, т. 30, № 9, с.1239-1242.
131. Muhamedieva D.T. To one algoritm of finding of analitical deciding a nonlinear programming in fuzzy ambience // Proceedings of WCIS-2004, b –Quadrat Verlag. 2004. P. 94-98.
132. Moor R.E. A servey of interval methods for differential equations. "Proc. 23_rd_ IEEE Conf. Decis. and Contr., Las Vegas, Nev., 1984, v.3", New York, 1984, p.1529-1535.
133. Oden G.S. Integration of fuzzy logical information .- "J. Exp. Psychol.", 1977, v.3, N4, p.505-575.
134. Ogawa Hideo. Labeled point pattern matching by fuzzy relaxation. "Pattern.Recogn.", 1984, v.17, N5, p.569-573.
135. Ostermark R. Sensitivity analysis of linear fuzzy programs: an approach to parametric interdepedence. "Kybernetes", 1987, N2, p.113-120.
136. O'Keefe R. Simulation and experts systems - a taxsonomy and some examples. "Simulation", 1986, 46, N1, p.10-16.
137. Pal S.K., Majumaer D.D. Effect of fuzzyfication on the plosive cognition system. "Int. J. Systems Sci.", 1978, v.9, N8, p.873-886.

138. Pavlak Z. Roufh sets and fuzzy sets. "Pr. IPI PAN", 1984, N540, 10p.
139. Prade H. A computional approach to approximate and plausible reasoning with applications to expert systems. "IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intel.", 1985, N3, p.260-283.
140. Saaty T.L. Multicriteria decision making: the analytical hierarchy process. N.Y.: McGraw Hill, 1990. –502 p.
141. Saaty T.L. The analytic network process. –Pittsburgh: RWS Publ., 1996. –370 p.
142. Schwandt H. Newton-like interval methods for large nonlinear systems of equations on vector computers. "Comput. Phys. Commun.", 1985, N1-3, p.223-232.
143. Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral. -Trans. SICE, 1972, v.8, № 2, -p. 95-102.
144. Shtovba S., Rotshtein A., Pankevich O. Fuzzy Rule Based System for Diagnosis of Stone Construction Cracks of Buldings. In "Advances in Computational Intelligence and Learning, Methods and Applications" (Editors: Zimmermann H-J., Tselentis G., van Someren M., Dounias G.): Kluwer Academic Publishers, 2001, P.401-412.
145.Tanaka H., Asai K. Fuzzy solution in fuzzy linear pogremming problems. "IEEE Trans. Syst. Maan and Cybern.", 1984, N2, p.325-328.
146. Tozan H., Vayvay O. Analyzing Demand Variability Through SC Using Fuzzy Regression and Grey GM(1,1) Forecasting Models, Information Sciences 2007, World Scientific, 2007, pp. 1088-1094.
147. H.Tozan, M.Yagimli A. Fuzzy Prediction Based Trajectory Estimation. // Wseas transactions on systems. Issue 8, vol.-9, august 2010. pp.885-894.
148. Urban B., Hansel V. A fuzzy concept in the theory of strategic decision where several objectives exist. "Fuzzy inf., Proc. IFAC Symp. Marseille, 19-21 July, 1983." Oxford e.a., 1984, p.313-320.
149. Willaeys D. Some of the properties of fuzzy discretisation. "Fuzzy Inf., IFAC Symp. Marseille, 19-21 July, 1983." Oxford, 1984, p.61-69.
150. Yamazaki T., Sugeno M. Самоорганизующийся нечеткий регулятор. "Кэйсоку дзидо сэйге гаккай ромбунсю,Trans. Soc. Instrum. and Contr. Eng.", 1984, N8, p.720-726.
151. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading: Addison Wesley, New York, 1989 - 412p.

152. Батищев Д.И. Генетические алгоритмы решения экстремальных задач // Учеб. пособие. Воронеж, 1995. - 69 с.
153. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние, проблемы, перспективы // Известия Академии наук. 1999. - №1. - С. 144-160.
154. Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems // Univ.of Michigan Press, Ann Arbor. 1975.
155. Ramsey C.L., Grefenstette J.J. Case-based Initialization of Genetic Algorithms // 5th Int. Conf. on Genetic Algorithm. 1993. - P.84-91.
156. Szpiro G.G. Forecasting Chaotic Time Series with Genetic Algorithms // Physical Review E. 1997. - V.55, N3. - P. 2557-2568.
157. Alvarez A. Forecasting the SST Space-Time Variability of the Alboran Sea with Genetic Algorithms // Geophysical Research Letters. 2000.
158. Загоруйко Н.Г. Самообучающийся генетический алгоритм для прогнозирования. // Искусственный интеллект и экспертные системы. Новосибирск, 1997. - Вып. 160, "Вычислительные системы". - С. 80-95.
159. Louis S.J., Xu Z. Genetic Algorithms for Open Shop Scheduling and ReScheduling // ISC A 11th Int. Conf. on Computers and their Applications. -1996. P.99-102.
160. Davidor Y. A. Genetic Algorithm Applied to Robot Trajectory Generation // Parallel Problem Solving from Nature 4. 1996.89
161. Zalzala A.M.S., Fleming P.S. Genetic Algorithms: Principles and Applications in Engineering Systems // Neural Network. 1996. - Vol. 6, N5. -P.803-820.
162. Ono O., Kobayashi B., Kato H. Optimal Dynamic Motion Planning of Autonomous Vehicles by a Structured Genetic Algorithm // Proc. of the 13th World Congress of IFAC, vol. Q. San-Francisco, USA,1996. - P.435-440.
163. Forrest S. Mayer-Kress G. Genetic Algorithms, Nonlinear Dynamical Systems and Models of International Security // Parallel Problem Solving from Nature 4. 1996.
164. Cobb H.G. An Investigation into the Use of Hypermutation as an Adaptive Operator in the Genetic Algorithm Having Continuous Time-Dependent Nonsationary Environments. Naval Research Laboratory Memorandum Report 6760. - 1990.

165. Vavak F., Fogarty T.C., Jukes K. A Genetic Algorithm with Variable Range of Local Search for Tracking Changing Environments // Parallel Problem Solving from Nature 4. 1996.
166. Ярушкина Н.Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004.
167. Zadeh L.A. Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic. // Fuzzy sets and systems. – Vol.90. – 1997. - № 2.
168. Fanabashi M., Maeda A., Morooka Y., Mori K. Fuzzy and Neural Hybrid Systems: Synergetic AI // IEEE Expert. 1995 August. – p. 32 – 40.
169. Кушербаева В.Т. Некоторые тестовые функции для глобальной оптимизации. – СПб.: СПбГУ. 2007.
170. Herrera F., Lozano M. Adaptation of genetic algorithm parameters based on fuzzy logic controllers. In: F. Herrera, J. L. Verdegay (eds.) Genetic Algorithms and Soft Computing, Physica-Verlag, Heidelberg, 1996. - pp. 95-124.
171 Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Теория и практика эволюционного моделирования. – М.: Физматлит, 2003.
172. Голубин А.В., Тарасов В.Б. Нечеткие генетические алгоритмы. // Международные научно-технические конференции AIS'05 и CAD-2005. Труды конференций. – М.: Физматлит, 2005. – с. 39 – 45.
173. Kalyanmoy D., Dhiraj J., Ashish A. Real-Coded Evolutionary Algorithms with Parent-Centric Recombination. Indian Institute of Technology, Kanpur. KanGAL Report N° 2001003.
174. Lozano M., Herrera F., Krasnogor N., Molina D. Real-Coded Memetic Algorithms with Crossover Hill-Climbing. Evolutionary Computation 12(3), 2004. – p. 273 – 302.
175. Herrera F., Lozano M., Sanchez A.M. A Taxonomy for the Crossover Operator for Real-Coded Genetic Algorithms: An Experimental Study. // International Journal of Intelligent Systems, vol. 18, 2003. – p. 309 – 338.
176. Herrera F., Lozano M. Fuzzy Adaptive Genetic Algorithms: design, taxonomy, and future directions. // Soft Computing 7(2003), Springer-Verlag, 2003. – p. 545 – 562.

177. Galantucci L.M., Percoco G., Spina R. Assembly and Disassembly Planning by using Fuzzy Logic & Genetic Algorithms. // International Journal of Advanced Robotic Systems, Vol. 1, № 2, 2004. – p. 67 – 74.