YU. P. APAKOV

OLIY MATEMATIKA

I

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

TOSHKENT

I
OLIY MATEMATIKA
YU. P. APAKOV

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

YU. P. APAKOV

OLIY MATEMATIKA

Birinchi jild

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT – 2022

UO‘K: 512/512(075.8)
KBK 22.11ya7
A 72

A 72 **Yu. P. Apakov. Oliy matematika.** Muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari uchun darslik. 1-jild. –T.: «Fan va texnologiyalar nashriyot-matbaa uyi», 2022. 324 bet.

ISBN 978–9943–8122–6–0

Darslik muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari uchun mo‘ljallangan. Kitob ikki jilddan iborat. Ushbu birinchi jild chiziqli algebra, analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. Darslikdan kunduzgi, kechki va sirtqi bo‘lim talabalari foydalanishlari mumkin.

UO‘K: 512/512(075.8)
KBK 22.11ya7

Mas’ul muharrir:

A. S. Sharipov – fizika-matematika fanlari doktori, O‘zMU professori.

Taqrizchilar:

V. R. Xodjibayev – fizika-matematika fanlari doktori, NamQI professori;

M. M. Raxmatullayev – fizika-matematika fanlari doktori, NamDU professori.

ISBN 978–9943–8122–6–0

SO‘Z BOSHI

Mamlakatimizda ta’lim tizimini isloh qilishga va uni zamon talablari bilan uyg‘unlashtirishga katta ahamiyat berilmoqda.

Ayniqsa, matematika fanining o‘rni hamda uning barcha fanlarni o‘zlashtirishga va ularning rivojiga asos ekanligini hisobga olib, unga alohida e’tibor qaratilmoqda. Qolaversa, hozirgi paytda maktabgacha ta’limdan boshlab oliy ta’limga qadar mavjud o‘quv dasturlari va o‘quv adabiyotlarini zamon talablariga moslashtirish jarayoni ketmoqda.

Oliy matematika fani bo‘yicha ma’ruza darslarida va mustaqil ta’lim olishda foydalanish mumkin bo‘lgan o‘zbek tilida, lotin alifbosida yozilgan darsliklarni topish mushkul ishdir. Mavjud adabiyotlarning aksariyati hozirgi o‘quv dasturlar bilan muvofiq emas.

Oliy ta’limni Yevropa ta’lim tizimiga moslash va modul tizimiga o‘tilishi munosabati bilan, muhandis-texnika sohasidagi bakalavriat ta’lim yo‘nalishlari uchun Oliy matematika fanidan ma’ruza mash-g‘ulotlari to‘rt semestr davomida o‘tiladigan 288 soat qisqartirilib, uch semestrda 105 soatga (ayrim yo‘nalishlarda 90 soatga) tushirildi, mustaqil ta’lim uchun esa 255 soat (ayrim yo‘nalishlarda 240 soat) ajratildi. Raqamlarni tahlilidan ma’lum bo‘ladiki talabaning oladigan bilimlarning taxminan 30 foizini dars jarayonida, 70 foizini esa mustaqil ta’limda olishiga to‘g‘ri keladi. Shularni e’tiborga olib, yoziladigan darslikda faqat auditoriyada o‘tiladigan mavzularnigina emas, balki mustaqil ta’lim uchun ajratilgan mavzularni ham yoritishga to‘g‘ri keladi.

Yuqoridagilardan kelib chiqib, ushbu darslik namunaviy o‘quv dasturida ma’ruza mashg‘ulotlarda o‘tishni rejalashtirilgan hamda talabalar mustaqil ta’limda o‘zlashtirishi rejalashtirilgan mavzularni ham bayon etishga e’tibor qaratilgan. Darslikka sharqning buyuk mutafakkirlarining matematika rivojiga qo‘shgan hissalari, uchinchi tartibli tenglamalarni yechishning Kardano formulasi, algebraning asosiy teoremasi, ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish, aniq integralning geometrik, fizik masalalarni yechishga tatbiqlari, aniq integralni taqribiy hisoblash mavzulari bilan to‘ldirilgan.

Darslikning birinchi jildi 7 ta bobdan iborat bo‘lib, chiziqli algebra, tekislikda va fazoda analitik geometriya, matematik analizga kirish, bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi kabi bo‘limlarni o‘z ichiga oladi. Berilgan har bir nazariy ma’lumot misollar yechish bilan mustahkamlangan. Mavzu yakunida o‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar keltirilgan.

Darslikni yozishda foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatida keltirilgan kitoblardan ijodiy foydalanilgan, ayrim mavzular esa muallifning fikri bo‘yicha bayon etilgan.

Muallif darslik qo‘lyozmasini o‘qib, uning sifatini yanada oshirish borasidagi fikr va mulohazalari uchun Namangan muhandislik-qurilish instituti Oliy matematika kafedrasi professor-o‘qituvchilariga va Namangan davlat universiteti professori M.M.Raxmatullayev hamda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti professori A.S.Sharipovlarga o‘z minnatdorligini bildiradi.

Darslikning kamchiliklarini bartaraf etishga oid takliflarni muallif mamnuniyat bilan qabul qiladi. Fikr-mulohaza va takliflar uchun quyidagi elektron manzilga murojaat qilishingiz mumkin: e-mail: yusupjonapakov@gmail.com.

Muallif.

I BOB. OLIY ALGEBRA ELEMENTLARI

Oliy o‘quv yurtlarida oliy matematikani o‘qitishdan maqsad talabalarni mutaxassisligi va iqtisod bo‘yicha nazariy hamda amaliy masalalarni yechish uchun zarur bo‘lgan matematikaviy apparat bilan tanishtirish, talabalarda matematikadan o‘quv adabiyotlarini mustaqil o‘rganish va undan foydalana bilish malakasini hosil qilish, mantiqiy fikrlashni o‘stirish va matematikaviy madaniyatni umumiy saviyasini ko‘tarish, amaliyotda uchraydigan masalalarni matematikaviy tomondan tekshirish malakasini hosil qilish va ularga muhandislik masalalarini matematikaviy tilda ifodalab, hal etishni o‘rgatishdan iborat. Oliy matematika fanini o‘rganish bilan talaba hisoblash texnikasi va uni dastur bilan ta’minlash, fizika, kimyo, chizmachilik, materiallar qarshiligi, iqtisod, nazariy mexanika va boshqa fanlarda uchraydigan masalalarining matematik algoritmini tuzish va uni yechishni o‘rganadi.

1-§. Sharqning buyuk mutafakkirlarining matematika rivojiga qo‘shgan hissasi

Qadimgi Sharq, xususan Markaziy Osiyo mamlakatlari mutafakkirlari matematika rivojiga ulkan hissa qo‘shganlar, ulardan ayrimlariga to‘xtalib o‘tamiz.

Al-Xorazmiy. (783-850) Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy Xorazmda tug‘ilib, diniy maktab va madrasada ta’lim oladi. Bag‘dodda “Bayt Al-Hikmat” (“Donishmandlar uyi”) tashkil etib, o‘z davrining ilg‘or olimlarini to‘plab, ularga rahbarlik qiladi. Xorazmiy “Hind hisobi” nomli risolasida 0,1...,9 dan iborat raqamlar sistemasini birinchi bor arab tilida bayon etadi va undan Yevropaga bu sistema o‘tadi. U “Al-Jabr val-muqobala” asarida birinchi bo‘lib chiziqli va kvadrat tenglamalarni ajratdi hamda ularni yechish usulini bayon etdi. Algebra so‘zi “Al-Jabr” so‘zining lotincha yozuvidan olingan. Al-Xorazmiy birinchi bo‘lib zij-matematik va astronomik jadvalning muallifidir.

Beruniy. (973-1048). Abu Rayhon Beruniy Muhammad ibn Ahmad o‘rta asrning buyuk qomuschi olimidir. U o‘zining “Geodeziya” asarida Qiyot shahrining geografik kengligini aniqlaganini yozadi. Beruniy “Hindiston tarixi” asarida yer shari meridiani 110,895 km ekanini yozadi. Bu esa hozirgi hisobdan (111,1km) kichik, ya’ni 205 m xato qilgan xolos. Uning “Qonuni Mas’udiy“ asari astronomiyaga bag‘ishlangan bo‘lib, unda trigonometriya, sferik trigonometriyaga oid kashfiyotlarini yozadi. Jami matematikaga doir 22 ta, astronomiyaga doir 10 ta, mineralogiyaga, fizikaga doir 38 ta va hokazo asarlar muallifidir.

Ulug‘bek. (1394-1449). Muhammad Tarag‘ay-Ulug‘bek, Shohruh Mirzo farzandi va Amir Temurning nabirasi bo‘lib, buyuk olim va davlat arbobidir. Ulug‘bekning asosiy asari “Ziji Ko‘ragoniy” deb atalib, unda yil hisobi, to‘rtta xonagacha aniqlikdagi trigonometrik jadval mavjud bo‘lib, bunda sinus va kosinuslarning bir daqiqa oraliq bilan farqlanuvchi qiymatlari keltirilgan. Trigonometrik jadvallari 10 ta o‘nli xona aniqligida hisoblangan va bu jadvallarda sinus va kosinusning qiymatlari bir daqiqa oraliq bilan tuzilgan.

Zijda Ulug‘bek bir gradusni sinusini hisoblash uchun alohida risola yozgan. Astronomiyaga taalluqli ekvator og‘ishi, osmon yoritgichlari koordinatasini aniqlash, yerning ixtiyoriy nuqtasining geografik kengligini aniqlash, yulduz va sayyoralar orasidagi masofani aniqlash masalalari bayon etilgan. Ulug‘bek Oy va Quyosh tutilishlari kalendarini va 1018 yulduzning ro‘yxatini hamda ularning joylashishini hisoblab chiqqan, 1437-yildagi teng kunlilik nuqtasiga nisbatan uzunligi kengligi berilgan. U 55 yoshida ilm-fan dushmanlari tomonidan qatl ettirilgan.

Ahmad Farg‘oniy. (797-865) Abul Abbos ibn Muhammad ibn Kasr Farg‘oniy-buyuk astronom, matematik va geograf bo‘lgan. Ahmad Farg‘oniy, Muso Xorazmiy va boshqa olimlar bilan Bag‘dodda “Bayt Al-Hikmat” da ishlab izlanishlar olib borgan. Uning “Astronomiyaga kirish” nomli asarida o‘zigacha bo‘lgan astronomlar ishlarini bayon qilib, kamchiliklarini tuzatib, 812 yildagi quyosh tutilishini oldindan aytib bergan. Farg‘oniyning “Osmon harakatlari va astronomiya fani to‘plami haqida” kitobi bo‘lib u arab tilidagi astronomiyaga taalluqli birinchi kitobdir. Unda astronomik asboblar yasash va undan foydalanish, eng zarur asboblardan biri bo‘lgan quyosh soati bayon etilgan. Farg‘oniy “Asturlab yasash haqida” asarida sfera va uning turli holatdagi kesimlarining xossalarini bayon etgan.

Umar Xayyom. (1048-1123). G‘iyosiddin Abdulfatx Umar ibn Ibrohim al-Xayyom Noshipurda tug‘ilib, Buxoro va Samarqand shaharlarida ta’lim olgan. Umar Xayyom “Al-Jabr val muqobala isbotlari haqida risola” kitobida son tushunchasini haqiqiy musbat songacha kengaytirdi, ya’ni kvadrat va kub tushunchalarini kiritdi va ayrim kub tenglama va ularni yechish usullarini bayon etdi. Umar Xayyom “Evklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar” kitobida Evklidning mashhur 5 postulatini teorema sifatida bayon etib, uni rivojlantiradi va geometriya rivojiga katta hissa qo‘shadi. U o‘zining “Ziji malik shoxi” nomli asarida taklif etilgan kalendarda 33 yildan 8 tasi kabisa yili bo‘lib, yilning davomiyligi $365\frac{8}{33}$ sutkaga teng, bu kalendarning xatoligi yiliga 19 sekundni tashkil etadi.

G‘iyosiddin Koshiy. (XIV-XV asr). Jamshid ibn Mas’ud ibn Mahmud G‘iyosiddin Al-Koshiy O‘rta Osiyoning atoqli matematik va astronomidir. Koshiy Ulug‘bek astronomiya maktabi qoshidagi madrasada astronomiya va matematika fanlaridan dars bergan. U “Hisob kaliti”, “Aylana haqida risola”, “Vatar va sinus haqida risola” nomli asarlar muallifidir. Uning matematikadagi yangiligi n-darajali ildiz chiqarish amali bo‘lgan. Al-Koshiy aylanaga doir asarida $\pi=3{,}14159265$ ni hisoblagan va Sin3 orqali Sin1 ni topishni keltirgan. U $x^3+q=px$ tenglamaning ildizlarini iteratsiya usulida (ketma-ket yaqinlashish) topishni bayon qilgan. Al-Koshiy o‘zining “Arifmetika kaliti” asarida birinchi bo‘lib o‘nli kasr kashf etdi va ular ustida amallarni bajarish qoidalarini ko‘rsatib berdi va manfiy son tushunchasini kiritdi.

Forobiy. (873-950) Abu Nasr Muhammad ibn Uzlug‘ Tarxon, hozirgi Qozog‘iston Respublikasining Chimkent viloyatining Aris shahrida tug‘ilgan. Dastlabki ta’limni o‘z yurtida, keyinchalik Shosh (Toshkent), Buxoro va Samarqandda madrasada ta’lim oladi. Keyinchalik o‘sha paytdagi sharqning ilm-fan markazi bo‘lgan Bag‘dodda ilmiy faoliyatini davom ettiradi. Forobiy o‘rta asr fanlarining turli sohalariga doir 160 ga yaqin asar yozgan. U “Ilmning kelib chiqishi va tasnifi” nomli asarida o‘rta asrlarda mavjud bo‘lgan 30 dan ortiq fanning ta’rifini berdi va ularning har birining tutgan o‘rni haqida gapiradi. Farobiy matematikaga buyumlarning miqdor va fazoviy nisbatlarini o‘rganuvchi fan deb ta’rif beradi. Son haqidagi fan – mavjud narsalarning bir qismini boshqa bir qismiga ko‘paytirish, bo‘lish, qo‘shish va ayirish, ildizning mavjud qismlarini topish va h.k. haqidagi fan deb ta’riflaydi. Forobiy “Tatbiqlar kitobi” da asosiy trigonometrik chiziqlar, ularni hosil qilish va shu chiziqlar bilan bog‘liq trigonometrik jadvallarni tuzish qoidalarini beradi. U “Geometrik figuralarning tabiiy nozik sirlari va aqliy mohir usullari kitobi” da esa turli geometrik figuralar- doira, uchburchak, to‘rtburchak kvadrat, sferalarning yasash usullarini bayon qilgan.

Ibn Sino. (980-1037) Abu Ali ibn Sino Buxoro viloyati Vobkent tumani Lag‘laqa qishlog‘ida tavallud topgan. Ibn Sino o‘n yasharligida algebra, geometriya va hatto falsafani ham o‘rgandi, hamma yulduz turkumlarining qanday atalishini bilar va aniq ko‘rsatib bera olar edi. Ibn Sino meditsinadagi ulkan tajribasi va falsafa, algebra, astronomiya, kimyo hamda fanning boshqa sohalaridagi beqiyos bilimini “Shifo kitobi”, “Tib qonunlari”, “Bilimlar kitobi”da bayon etgan. Ibn Sino asarlarining hammasi 280 dan oshadi. U o‘zining “Shifo kitobi” ning arifmetikaga doir qismida natural sonlar va ularning xossalarini yoritadi. Ibn Sino natural sonlar ustida amallar bajarilishini 9 yordamida tekshiradi, ya’ni u sonlarni to‘qqiz moduliga ko‘ra taqqoslaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Oliy matematika fanini oliy o‘quv yurtlarida o‘rganishdan maqsad nima?
2. Sharqning buyuk mutafakkirlaridan kimlarni bilasiz?
3. Muso Xorazmiy matematika rivojiga qanday hissa qo‘shgan?

4. Abu Rayhon Beruniy matematika rivojiga qanday hissa qo‘shgan?

5. Muhammad Tarag‘ay-Ulug‘bek matematika rivojiga qanday hissa qo‘shgan?

6. Ahmad Farg‘oniy matematika rivojiga qanday hissa qo‘shgan?

2-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari

1. Ikkinchi tartibli determinantlar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ifoda ikkinchi tartibli determinant, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ayirma esa uning son qiymati deyiladi.

Determinantni tashkil qiluvchi sonlar uning elementlari deb ataladi. Ikkinchi tartibli determinant ikkita satr va ikkita ustunga ega. Birinchi indeks satrining, ikkinchi indeks ustunining tartibini bildiradi.

a_{11}, a_{12} -birinchi satr, a_{21}, a_{22} -ikkinchi satr elementlari,

a_{11}, a_{21} -birinchi ustun, a_{12}, a_{22} -ikkinchi ustun elementlari,

a_{11}, a_{22} - bosh diagonali elementlari,

a_{21}, a_{12} - yordamchi diagonali elementlari deb ataladi.

Demak, ikkinchi tartibli determinantning son qiymati bosh diagonal elementlari ko‘paytmasidan yordamchi diagonali elementlari ko‘paytmasini ayirmasiga teng ekan.

1-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

Yechish: Hisoblash formulasiga asosan:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1) - 3(-2) = -4 + 6 = 2$$

2-misol.

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$$

tenglama yeching.

Yechish: Hisoblash formulasiga asosan:

$$-3x-6=8 \Rightarrow -3x=14 \Rightarrow \quad x=-\frac{14}{3}=-4\frac{2}{3}.$$

2. Uchinchi tartibli determinant

Ta’rif bo‘yicha quyidagicha

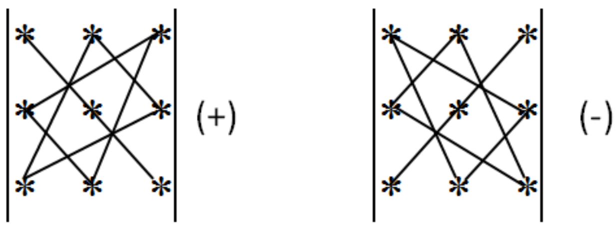
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

belgilanadigan va son qiymati

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

ga teng bo‘lgan ifodaga 3-tartibli determinant deb aytiladi. Uchinchi tartibli determinantlar uchun satr, ustun, bosh va yordamchi diagonal tushunchalari yuqoridagi kabi kiritiladi.

(1) tenglikning o‘ng tomonida qaysi ko‘paytmalar «+», qaysilari «-» ishora bilan olinishini eslab qolish uchun quyidagi uchburchak qoidasidan foydalanish qulaydir:



Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrius usulini ham keltirib o‘tamiz.

$$\begin{array}{ccc} (+) & (+) & (+) \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} (-) & (-) & (-) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (+) \\ (+) \\ (+) \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \begin{array}{c} (-) \\ (-) \\ (-) \\ \\ \\ \end{array}$$

Bu usulda uchinchi tartibli determinant jadvali yoniga 1- va 2- ustunlar takroriy yoziladi, 1- asosiy diagonalga parallel uchta diagonal elementlarni o‘zaro ko‘paytirib, ularni yig‘indisi olinadi. 2- yordamchi diagonal va unga parallel uchta diagonal elementlari ko‘paytirilib, ularning ayirmalari olinadi. Natijada (1) formula hosil bo‘ladi.

3-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-2)+2\cdot(-1)\cdot 3+0\cdot 5\cdot 4-3\cdot 1\cdot 4-5\cdot(-1)\cdot 1-0\cdot 2\cdot(-2)=$$

$$=-2-6+0-12+5+0=-20+5=-15.$$

3. Determinantning xossalari

Determinantning xossalari ularning tartibiga bog‘liq bo‘lmagani uchun, xossalarni asosan uchinchi tartibli determinantlar uchun keltiramiz.

1^0. Determinantning mos satrlari va ustunlari o‘rinlari almashtirilganda uning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaning isboti (1) formulaga asosan kelib chiqadi.

2^0 . Agar determinantning ikki satr (ustun) elementlari o‘zaro almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi, ishorasi esa qarama-qarshisiga almashadi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Bu xossa isboti bevosita hisoblashdan kelib chiqadi.

3^0. Agar determinant ikkita bir xil elementli satrlarga (ustunlarga) ega bo‘lsa, u nolga teng.

Isbot. Ikki parallel bir xil elementli satrlar (ustunlar) o‘zaro almashtirilsa, 2^0- xossaga asosan qiymat o‘zgarishsiz qolib, ishora o‘zgaradi. Demak, $\Delta=-\Delta$, $2\Delta=0$ yoki $\Delta=0$.

4-misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8-2+24-8+2-24=0.$$

4^0. Determinantning biror satr (ustun) elementlarini ixtiyoriy α songa ko‘paytirish determinantni shu songa ko‘paytirishga teng kuchlidir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaning isboti ham bevosita hisoblashlardan kelib chiqadi.

Natija. Biror satr (ustun) elementlardan umumiy ko‘paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

5^0. Agar determinant nollardan iborat satrga (ustunga) ega bo‘lsa, u nolga teng. Bu xossa 4^0-xossadan $\alpha = 0$ da kelib chiqadi.

6^0. Agar determinantning ikkita satr (ustun) elementlari o‘zaro proporsional bo‘lsa, u nolga teng.

Isbot. Proporsional satrdan (ustundan) umumiy ko‘paytuvchini 4^0-xossaga ko‘ra determinant tashqarisiga chiqarsak, hosil bo‘lgan ikkita bir xil satrli (ustunli) determinant 3^0-xossaga asosan nolga teng.

7^0. Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi ikkita qo‘shiluvchining yig‘indisidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant (quyidagi ko‘rinishdagi) ikkita determinantlar yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossani bevosita hisoblash orqali isbotlanadi.

8^0. Agar biror satr (ustun) elementlarini istalgan $\lambda \neq 0$, umumiy ko‘paytuvchiga ko‘paytirib boshqa satrning (ustunning) mos elementlarga qo‘shilsa, determinant qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossaga ishonch hosil qilish uchun 7^0-xossaga asosan o‘ng tomoni ikki determinant yig‘indisi ko‘rinishida yozib, 4^0-xossaga asosan λ ni determinantdan chiqarsak, 3^0-xossaga ko‘ra ikkinchi determinant nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrius usulini aytib bering.
3. Determinant xossalarini aytib bering.

3-§. Yuqori tartibli determinantlar. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli

Avvalgi mavzuda 2, 3-tartibli determinantlar bilan tanishdik, endi n - tartibli$(n \geq 4)$ determinantlar va ularni hisoblashni o‘rganamiz. Ishni osonlashtirish maqsadida yordamchi tushunchalar kiritamiz.

1. Minor va algebraik to‘ldiruvchi

Determinantning biror elementining **minori** deb, determinantning shu element turgan satrini va ustunini o‘chirishdan qolgan elementlardan tuzilgan determinantga aytiladi. Soddalik uchun quyidagi uchinchi tartibli determinantni olaylik.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinant a_{ik} elementining minori M_{ik}, $(i,k=1,2,3)$ bilan belgilanadi. Masalan, a_{12} element minori

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

a_{33} elementning minori esa,

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinant a_{ij} elementining **algebraik to‘ldiruvchisi** deb $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ songa aytiladi. Masalan, a_{11} elementining algebraik to‘ldiruvchisi

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi, a_{32} elementining algebraik to‘ldiruvchisi esa

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi.

Bu kiritilgan tushunchalar yordamida quyidagi xossani isbotlash mumkin (xossalar tartibini saqlab qolamiz).

9°. Determinantning biror satrdagi (ustundagi) barcha elementlarni mos algebraik to‘ldiruvchilari bilan ko‘paytmasidan tashkil topgan yig‘indi shu determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Bu xossani birinchi satr uchun keltiramiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantning birinchi satr elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Bundan

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+$$
$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Demak,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \qquad (2)$$

Xuddi shu kabi ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari orqali (2) formula kabi natijani hosil qilish mumkin. (2) formula determinantning birinchi satr elementlari orqali yoyilmasi deyiladi.

1-misol. Ushbu determinant hisoblansin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Yechish: Birinchi satr elementlari orasida nol bo‘lgani uchun birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyish qulay, ya’ni

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

determinantning biror qatoridagi bitta elementidan tashqari barcha elementlari nolga teng bo‘lganda, bu qator bo‘yicha yoyilmadan foydalanib, natijani hisoblash ishni yanada osonlashtiradi.

2-misol.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

Yechish: 8-xossadan foydalanamiz, ya’ni birinchi ustunni o‘zgarishsiz qoldirib, ikkinchi ustunga birinchi ustunni 3 ga ko‘paytirib qo‘shamiz, uchinchi ustunga birinchi ustunni (-2) ga ko‘paytirib qo‘shamiz, natijada

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & -9 \\ 3 & 11 & -10 \end{vmatrix}$$

bo‘ladi. Birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyilmadan foydalansak,

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 19 & -9 \\ 11 & -10 \end{vmatrix} = -190 + 99 = -91 .$$

2. Yuqori tartibli determinantlar

To‘rtinchi tartibli determinantni qaraymiz.

Determinantlarning yuqorida keltirilgan 9°-xossasini qo‘llab, 4-tartibli determinantni biror ustun yoki satr elementlari bo‘yicha yoyilganda hosil bo‘ladigan determinantlar 3-tartibli bo‘ladi. 3-tartibli determinant tushunchasi esa bizga ma’lum. Shu jarayonni ketma-ket davom ettirib n-tartibli determinantni hisoblash tushunchasi kiritiladi. Uning umumiy ko‘rinishi quyidagicha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

(3) ko‘rinishdagi n-tartibli determinantlar uchun yuqorida aytilgan barcha xossalar, jumladan, determinantning biror satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyish formulasi ham o‘rinli bo‘ladi.

Istalgan tartibli determinantni hisoblashda aynan algebraik to‘ldiruvchilar yordamida satr yoki ustun bo‘yicha yoyish usulidan foydalanish ancha qulay.

3-Misol. Determinant hisoblansin.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish: Determinantni hisoblash uchun uni ikkinchi satrida ikkita 0 turganidan foydalanib, ikkinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib chiqamiz. U holda

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$= -5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5(12+60+3-90+3+8) + (-4+3+30+3-30-4) = 20-2 = 18$$

bo‘ladi. Demak, yuqori tartibli determinantni hisoblash, determinant tartibini ketma-ket pasaytirish yo‘li bilan amalga oshiriladi.

3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yechish

Ikkita $x_1$va x_2 noma’lumli chiziqli tenglamadan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (4)$$

sistema ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - (4) sistemaning koeffitsiyentlari, b_1, b_2 - ozod hadlardir.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

asosiy determinant,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (4) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \tag{5}$$

Xuddi shuningdek, uchta x_1, x_2 va x_3 noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

sistema uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu sistema uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

asosiy determinant,

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

yordamchi determinantlar deb nomlanadi, agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (6) tenglamalar sistemasining yechimi quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \tag{7}$$

(5) va (7) formulalar (4) va (6) tenglamalar sistemasini yechishning Kramer formulasi deyiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi. $\Delta = 0$ hamda $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ lardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistemaning yechimi

mavjud emas. $\Delta = 0$ va $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

4-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 15 = -14, \ \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7,$$

u holda, Kramer formulasiga asosan,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2, \ \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{7}{-7} = -1.$$

Demak, sistemaning yechimi$(2;-1)$.

5-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases}$$

sistemaning yeching.

Yechish:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \ \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16, \ \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Demak, berilgan sistemaning yechimi mavjud emas.

6-misol. Quyidagi sistema yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$$

Yechish: Bu holda asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \ \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \ \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, ixtiyoriy $\left(t; \dfrac{1-2t}{3}\right)$ ko‘rinishdagi $(t \in R)$ sonlar juftligi sistemaning yechimi bo‘ladi, ya’ni cheksiz ko‘p yechim mavjud.

7-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -20$$

U holda, Kramer formulasidan

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-10} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2.$$

Demak, $(1;0;2)$ sistemaning yechimi bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Determinantning minori deb nimaga aytiladi?

2. Determinantning algebraik to‘ldiruvchilarini topish ta’rifini ayting va hisoblash usulini ko‘rsating.

3. Tenglamalar sistemasi Kramer usulida qanday yechiladi?

4. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda bir qiymatli yechimga ega?

5. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda yechim mavjud emas?

6. Tenglamalar sistemasi qanday shart bajarilganda cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi?

4-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Quyidagi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

ko‘rinishdagi jadval $(m \times n)$-tartibli matritsa deyiladi. a_{ik} element xuddi determinantdagi kabi i-satr, k-ustunga joylashgan bo‘ladi. Ba’zan, (8) yozuv, qisqalik uchun, $\|a_{ik}\|$, $\left(i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}\right)$ ko‘rinishda yoki $A=\|a_{ik}\|$ ko‘rinishda ham belgilanadi. Ravshanki, (8) matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat.

Barcha elementlari nolga teng bo‘lgan matritsa nol matritsa deyiladi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Xususiy holda, $m = n$ bo‘lganda,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

ko‘rinishidagi matritsa kvadrat matritsa deyiladi.

$a_{11}, a_{22}, \dots\dots, a_{nn}$ (9) matritsaning bosh diagonal elementlari deyiladi. Agar (9) matritsada bosh diagonalda turgan elementlardan boshqa barcha elementlari nol bo‘lsa, uni diagonal matritsa deyiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

(10) matritsada $a_{11} = a_{22} = \dots\dots = a_{nn} = 1$ bo‘lsa, ya’ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

birlik matritsa deb ataladi.

(9) kvadrat matritsaning elementlaridan tashkil topgan determinant A matritsaning determinanti deyiladi va $\det(A)$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Shu o‘rinda eslatib o‘tamiz: matritsa sonlarning

tartibli jadvali, determinant esa elementlarning ma’lum kombinatsiyasidan hosil qilingan birgina sondir.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Agar $\det(A)=0$ bo‘lsa, bu holda A matritsa xos matritsa, $\det(A)\neq 0$ bo‘lsa, A xosmas matritsa deyiladi. Kvadrat (9) matritsaning satr elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa transponirlangan matritsa deyiladi va A^T kabi belgilanadi. Determinantning 1° xossasiga asosan $\det(A)=\det\left(A^T\right)$

Ikkita

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

matritsalar berilgan bo‘lib, A matritsaning har bir elementi B matritsaning mos elementiga teng, ya’ni $a_{ik}=b_{ik}$ bo‘lsa, u holda A va B o‘zaro teng matritsalar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi. Ta’rif bo‘yicha ikkita (11) ko‘rinishdagi $(n\times n)$ tartibli matritsalarning yig‘indisi va ayirmasi mos ravishda $A\pm B$ kabi belgilanib,

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\pm b_{n1} & a_{n2}\pm b_{n2} & \dots & a_{nn}\pm b_{nn} \end{pmatrix},$$

qoida bo‘yicha hisoblanadi, ya’ni mos elementlari qo‘shiladi yoki ayriladi. Matritsalarni qo‘shish quyidagi xossalarga ega:

1°. $A+0=A$

2°. $A+B=B+A$

A matritsani $\alpha\neq 0$ songa ko‘paytmasi deb, uning har bir elementini α songa ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & ... & \alpha a_{nn}\end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi. Matritsani songa ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:

3°. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

4°. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

5°. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

1-misol. Agar

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

bo‘lsa, $A+B,\ A-B,\ 2A-3B$ matritsalar topilsin.

Yechish:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 4+2 & 1+1\\ -1+1 & 0+1 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0 & 4-2 & 1-1\\ -1-1 & 0-1 & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 2\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4-0 & 8-6 & 2-3\\ -2-3 & 0-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -5 & -3 & -2\end{pmatrix}.$$

Ikki matritsa ko‘paytmasi tushunchasini kiritaylik.

Ta’rif. $(m\times n)$ tartibli A matritsaning $(n\times k)$ tartibli B matritsaga ko‘paytmasi deb $(m\times k)$ tartibli shunday C matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...a_{in}b_{nj}. \qquad (12)$$

Matritsalar ko‘paytmasi $C=A\cdot B$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, ko‘paytiriladigan matritsalar birinchisining ustunlar soni ikkinchisining satrlar soniga teng bo‘lishi talab qilinadi.

2-misol. Matritsalar ko‘paytmasi topilsin.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Yechish: $A\cdot B$ mavjud, chunki A matritsa ikkita ustundan B matritsa esa ikkita satrdan iborat.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2-1\cdot 1 & 1\cdot 1-1\cdot 1\\ 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1\\ 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

$B\cdot A$ ko‘paytma esa mavjud emas, chunki B matritsada 2 ta ustun, A matritsada esa 3 ta satr mavjud.

Agar A va B matritsalar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ni hisoblash mumkin.

3-misol.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix},$$

bo‘lsa, $A\cdot B$ va $B\cdot A$ topilsin.

Yechish:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4-3\cdot 2 & -2\cdot 3-3\cdot 6\\ 5\cdot 4+1\cdot 2 & -5\cdot 3+1\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -24\\ 22 & -9\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2-3\cdot 5 & -4\cdot 3-3\cdot 1\\ 2\cdot 2+6\cdot 5 & -2\cdot 3+6\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -15\\ 34 & 0\end{pmatrix}.$$

Bu misoldan ko‘rinadiki, umuman olganda, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Matritsalarni ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:

1°. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ 2°. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

3°. $(\lambda\cdot A)\cdot B=\lambda(A\cdot B)$ 4°. $A\cdot E=E\cdot A=A$

5°. $A\cdot 0=0\cdot A=0$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deganda nimani tushunasiz?
2. Matritsalarning qanday turlari mavjud?

3. Matritsalar ustida amallar bajarishda nimalarga e’tibor berish kerak?

4. Matritsalar ustida amallarning qanday xossalarini bilasiz?

5-§. Teskari matritsa, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsa usuli

Ushbu kvadrat matritsani qaraylik:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ta’rif. Agar $A\cdot B=B\cdot A=E$ bo‘lsa, B matritsa A matritsaga teskari matritsa deb ataladi. A matritsaga teskari matritsani A^{-1} kabi belgilash qabul qilingan. A kvadrat matritsaga teskari A^{-1} matritsani topish quyidagicha amalga oshiriladi:

1. $\det(A)$ hisoblanadi. (Bu o‘rinda $\Delta=\det(A)\neq 0$ bo‘lishi kerakligini eslatib o‘tamiz, aks holda teskari matritsa mavjud bo‘lmaydi).

2. A matritsa determinantining har bir $a_{ij},\ (i,j=1,2,3,...,n)$ elementi algebraik to‘ldiruvchisi A_{ij} ni hisoblaymiz va A^{-1} matritsani quyidagicha tuzamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Satr bo‘yicha hosil qilingan algebraik to‘ldiruvchilarni mos ustun elementi qilib yozilishiga e’tibor qaratish kerak. Ishonch hosil qilish uchun $A\cdot A^{-1}=E$ ekanini tekshirib ko‘rish yetarli.

1-misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&1&0\\-1&2&4\end{vmatrix}=4-12-2=-10\neq 0.$$

Demak, teskari matritsa A^{-1} mavjud. Matritsa determinantining barcha elementlari algebraik to‘ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}=4,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\-1&4\end{vmatrix}=-12,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0&-2\\2&4\end{vmatrix}=-4,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&-2\\-1&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\-1&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&-2\\1&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix}=-6,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=1.$$

Topilganlarni (13) ga qo‘ysak,

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-12&2&-6\\7&-2&1\end{pmatrix}.$$

Tekshirish.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{-1}{10}\begin{pmatrix}4&-4&2\\-12&2&-6\\7&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&1&0\\-1&2&4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{10}\begin{pmatrix}4-12-2&0-4+4&-8+0+8\\-12+6+6&0+2-12&24+0-24\\7-6-1&0-2+2&-14+0+4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{10}\begin{pmatrix}-10&0&0\\0&-10&0\\0&0&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Demak, A^{-1} matritsa, A matritsaga teskari matritsa ekanligi kelib chiqdi.

Bizga quyidagi uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\qquad(14)$$

Tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari a_{ij}, $(i,j=1,2,3)$, x_1, x_2, x_3 noma'lumlar va b_i, $(i=1,2,3)$ ozod hadlardan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

matritsalarni tuzamiz.

Matritsalarni ko'paytirish amaliga asosan, (14) sistemani, quyidagicha yozish mumkin

$$A\cdot X=B. \tag{15}$$

Bu tenglamalar sistemasining matritsalar ko'rinishidagi yozilishidir. Aytaylik A matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. (15) tenglikning har ikki tomonini A^{-1} ga chapdan ko'paytirib.

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

ni hosil qilamiz.

$A^{-1}\cdot A=E$ va $E\cdot X=X$ ekanini e'tiborga olsak,

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{16}$$

hosil bo'ladi.

Bu (15) tenglamalar sistemasini teskari matritsa yordamida yechish formulasidir.

2-misol. Kramer usuli bilan yechilgan 7-misoldagi tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechilsin.

Yechish: Tegishli matritsalarni tuzamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\Delta=\det(A)=-10\neq 0,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

(13) formulaga asosan

$$A^{-1} = -0,1\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

teskari matritsa topamiz. Bundan (16) formulaga binoan

$$X = A^{-1} \cdot B = -0,1 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -0,1 \cdot \begin{pmatrix} -12-1+3 \\ 20-5-15 \\ 4-3-21 \end{pmatrix} = -0,1\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Javob (1; 0; 2)

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday matritsa berilgan matritsaning teskari matritsasi bo‘ladi?
2. Teskari matritsani qanday topiladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko‘rinishda qanday yoziladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa usulida qanday yechiladi?

6-§. Matritsaning rangi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

Biror $(m \times n)$-tartibli $A = \|a_{mn}\|$ matritsa berilgan bo‘lsin. A matritsaning ixtiyoriy k ta satrini va ixtiyoriy k ta ustunini olib $\left(k \le \min(m,n)\right)$, $(k \times k)-$ tartibli kvadrat matritsa tuzamiz. Bu kvadrat matritsaning determinanti A matritsaning k- tartibli **minori** deyiladi.

1-misol. Quyidagi 4x5-tartibli

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsani qaraylik. Ushbu

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -40, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

determinantlar qaralayotgan matritsaning mos ravishda ikkinchi, uchinchi hamda to‘rtinchi tartibli minorlaridir.

A matritsa yordamida hosil qilish mumkin bo‘lgan barcha minorlar orasida noldan farqli bo‘lgan eng yuqori tartibli minorni topish muhimdir.

Shuni ta’kidlash kerakki, agar A matritsaning barcha k-tartibli $\left(k=\min(m,n)\right)$ minorlari nolga teng bo‘lsa, undan yuqori tartibli bo‘lgan barcha minorlari ham nolga teng bo‘ladi.

Ta’rif. A matritsaning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibi uning **rangi** deyiladi va $rangA$ kabi belgilanadi.

2-misol.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

matritsaning rangini toping.

Yechish:

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1, \qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=0$$

Demak, A matritsaning noldan farqli minorlarining eng katta tartibi 2 ga teng ekan. Bundan $rangA=2$. Ta’rif bo‘yicha 0 matritsaning rangi 0 deb olinadi.

Matritsalarning rangini topish ko‘p hollarda murakkab bo‘ladi. Chunki unda bir qancha turli tartibdagi determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi.

Quyidagi elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi:

1) ikki qator elementlarini o‘zaro almashtirish;

2) biror qatorni o‘zgarmas songa ko‘paytirish;

3) biror qator o‘zgarmas songa ko‘paytirib boshqa qatorga qo‘shish.

Bu tasdiqlar determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

Agar $(m\times n)$ - tartibli A matritsaning asosiy diagonalida joylashgan $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},...,a_{ss},\quad \left(0\le s\le \min(m,n)\right)$ elementlarining har biri noldan farqli bo‘lib, qolgan barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda A diagonal ko‘rinishdagi matritsa deyiladi. Ravshanki, bunday diagonal ko‘rinishdagi matritsaning rangi s ga teng bo‘ladi. Aynan shu va yuqorida aytilgan elementar almashtirishlardan foydalanib, matritsani rangini topishning ikkinchi usulini bayon qilamiz.

Bizga quyidagi A matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

va uning rangini topish talab etilsin. Bu matritsaning rangini yuqorida aytilgan elementar almashtirishlar yordamida diagonal ko‘rinishli matritsaga keltirib topamiz.

A matritsaning hech bo‘lmaganda bitta elementi noldan farqli bo‘lsin. Bu elementning satrlari va ustunlarini o‘zaro almashtirish yordamida birinchi satr birinchi ustunga chiqaramiz va birinchi satr elementlarini shu elementga bo‘lib, ushbu

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \tag{17}$$

matritsani hosil qilamiz. (17) matritsaning birinchi ustunini $-a'_{12}$ ga ko‘paytirib, ikkinchi ustunga qo‘shsak, so‘ng $-a'_{13}$ ga ko‘paytirib uchinchi ustunga qo‘shsak va h. k. birinchi ustunni $-a'_{1n}$ ga ko‘paytirib n-ustunga qo‘shsak, natijada hosil bo‘lgan matritsaning birinchi satrdagi elementi $a'_{11} = 1$, qolgan elementlari esa nollar bo‘lib qoladi.

Xuddi shunga o‘xshash (17) matritsaning birinchi ustundagi $a'_{11} = 1$ dan boshqa elementlari nolga aylantiriladi. Natijada

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsaga ega bo‘lamiz. Bundan $rangA = rangA_1$ kelib chiqadi.

A_1 matritsaga yuqoridagi elementar almashtirishlarni bir necha marta qo‘llash natijasida u diagonal ko‘rinishidagi matritsaga keladi. Bu diagonal ko‘rinishli matritsaning rangi berilgan A matritsaning rangi bo‘ladi.

n ta noma’lumli m ta tenglamalar sistemasini qaraymiz

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{18}$$

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lsa, u birgalikda, agar yechimga ega bo‘lmasa, u birgalikda emas deyiladi. Quyidagi elementar almashtirishlar natijasida tenglamalar sistemasi o‘ziga teng kuchli sistemaga almashadi:

1) istalgan ikki tenglamani o‘rinlarini almashtirilsa;

2) tenglamalardan istalgan birini ikkala tomonini noldan farqli songa ko‘paytirilsa;

3) tenglamalardan birini istalgan haqiqiy songa ko‘paytirib, boshqa tenglamaga qo‘shilsa.

Agar $n > m$ bo‘lsa, $n - m$ ta bir xil noma’lumli hadlarni tengliklarning o‘ng tomoniga olib o‘tib, o‘ng tomonidagi noma’lumlarga ixtiyoriy qiymatlarni qabul qiladi deb, tenglamalar sistemasini $n = m$ holga keltirib olish mumkin. Shuni e’tiborga olib, (18) sistemani $n = m$ holi uchun yechamiz.

Gauss usulining mohiyati noma’lumlarni ikkinchi tenglamadan boshlab, ketma-ket yo‘qotib oxirgi tenglamada bitta noma’lum qolguncha davom ettiriladi va oxirgi tenglamadan yuqoriga qarab noma’lumlarni ketma-ket topib, yechim hosil qilinadi.

1-qadam. (18) sistemada birinchi tenglamaning har ikki tomonini a_{11} ga bo‘lib, teng kuchli ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{19}$$

Birinchi tenglamani a_{21} ga ko‘paytirib ikkinchi tenglamadan, a_{31} ga ko‘paytirib uchinchi tenglamadan va h.k. a_{n1} ga ko‘paytirib, n-tenglamadan ayiramiz. Natijada yana berilgan sistemaga teng kuchli ushbu yangi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ .... \\ \qquad a'_{n2}x_2 + ... + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases} \tag{20}$$

Bu sistemada quyidagicha belgilashlar kiritilgan:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}},\; a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1},\; b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}},\; b'_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1,}\;\; i,k = 2,3,...,n.$$

Agar (20) sistemada biror tenglama chap tomonidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng, o‘ng tomoni esa noldan farqli bo‘lsa, ya’ni

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b_k \tag{21}$$

ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘lsa, (18) sistema birgalikda emas bo‘ladi va ishni shu yerda to‘xtatiladi.

Agar (21) ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘lmasa keyingi qadamga o‘tiladi.

2-qadam. Ikkinchi tenglamani a'_{22} koeffitsiyentga bo‘lamiz, hosil bo‘lgan sistemaning ikkinchi tenglamasini ketma-ket $a'_{32},...,a'_{n2}$ ga ko‘paytirib uchinchi, to‘rtinchi va h.k. tenglamalardan ayiramiz.

Biz bu jarayonni oxirgi tenglamada x_n noma’lum qolguncha davom ettirsak, dastlabki sistemaga teng kuchli

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad x_2 + ... + a''_{2n}x_n = b''_2 \\ .... \\ \qquad x_{n-1} + a''_{n-1n}x_n = b''_{n-1} \\ \qquad\qquad x_n = b''_n \end{cases} \tag{22}$$

ko‘rinishdagi sistemaga ega bo‘lamiz. $x_n = b''_n$ qiymatini (n-1) tenglamaga qo‘yib, x_{n-1} ni topamiz va h.k., bu jarayonni x_1 topilgunga qadar davom ettiramiz.

1-misol**.** Quyidagi tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Yechish: Birinchi tenglamaning barcha hadlarini $a_{11} = 2$ ga bo‘lib,

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Birinchi tenglamani 3 ga ko‘paytirib ikkinchi tenglamadan, so‘ngra uchinchi tenglamadan birinchi tenglamani ayiramiz, natijada quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ \quad 0,5x_2 - 0,5x_3 = -0,5 \\ \quad -1,5x_2 + 2,5x_3 = 4,5 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamani 0,5 ga bo‘lib, so‘ngra uni -1,5 ga ko‘paytirib, uni uchinchi tenglamadan ayiramiz. Natijada

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5 \\ \qquad x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

hosil bo‘ladi. Bundan ketma-ket

$$x_3 = 3,\ x_2 = -1 + 3 = 2,\ x_1 = 0,5 - 0,5x_2 + 0,5x_3 = 1$$

larni topamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning yechimi

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$$

dan iborat ekan.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish: Bu sistemada uchta tenglama beshta noma’lum bo‘lganligi uchun, x_4 va x_5 larni o‘ng tomonga olib o‘tamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 + x_4 - 3x_5 \\ 2x_1 + x_3 = 4 - x_5 \\ x_2 = 6 - 2x_4 + x_5 \end{cases}$$

Misol uchun, $x_4 = 2,\ x_5 = 1$ qiymatlarni qo‘ysak,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

sistema hosil bo‘ladi. $x_2 = 3$ ekanini e’tiborga olsak,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Birinchi tenglamani 2 ga ko‘paytirib, undan ikkinchi tenglamani ayirsak,

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ 7x_3 = -3 \end{cases}$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$x_3 = -\frac{3}{7},\ x_2 = 3,\ x_1 = \frac{12}{7}.$$

Bu sistemada x_4 va x_5 noma’lumlarga boshqa qiymatlar berib, yangi yechim hosil qilish mumkin ekanini, boshqacha aytganda $n > m$ bo‘lganda yechim yagona bo‘lmay cheksiz ko‘p bo‘lishini eslatib o‘tamiz.

Tenglamalar sistemasini birgalikda bo‘lish yoki birgalikda bo‘lmasligini, uni yechmasdan turib aniqlash usuli bilan tanishamiz.

(18) tenglamalar sistemasini koeffitsiyentlaridan tuzilgan $m \times n$ tartibli hamda $m \times (n+1)$ tartibli kengaytirilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{m1} & b_m \end{pmatrix}$$

matritsalarni tuzib olamiz.

Teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi). (18) tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun A va A' matritsalarning ranglari teng bo‘lishi, ya’ni $rangA = rangA'$ bo‘lish zarur va yetarli.

Keltirilgan teoremadan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Agar $rangA > rangA'$ bo‘lsa, (18) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

2. Agar $rangA = rangA' = k$ bo‘lsa, (18) sistema yechimga ega bo‘lib,

a) $k < n$ bo‘lganda, tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi;

b) $k = n$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

3-misol.

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Bu yerda $n = 2,\ m = 3$, ya’ni $m > n$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},\ A' = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix},$$

$rangA = 2$, chunki

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lishini e’tiborga olsak $rangA' = 2$, demak, bu sistemaning yechimi mavjud. Berilgan sistemaning birinchi ikki tenglamasini birgalikda yechsak,

$$x_1 = -\frac{5}{17},\ x_2 = \frac{23}{17},$$

kelib chiqadi. Bu sonlar uchinchi tenglamani ham qanoatlantiradi.

$$4x_1 + 9x_2 = 4\left(-\frac{5}{17}\right) + 9 \cdot \frac{23}{17} = 11.$$

Demak, $\left(-\frac{5}{17}; \frac{23}{17}\right)$ sistemaning yechimi bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning rangi qanday hisoblanadi?
3. Qanday elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi ?
4. Kroneker-Kapelli teoremasini ayting.

5. Tenglamalar sistemasi Gauss usuli bilan qanday yechiladi?

7-§. *n* ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi. Bir jinsli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{23}$$

(23) tenglamalar sistemasi n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

(23) tenglamalar sistemasini yechishning Kramer va matritsalar usullarini ko‘ramiz. Noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan asosiy determinantni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

va uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasidagiga o‘xshash yordamchi $\Delta x_1, \Delta x_1, ..., \Delta x_n$ determinantlarni tuzamiz. Ular yuqori tartibli determinantlarni hisoblash usuli bilan hisoblanadi. Bu yerda ham agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, Kramer formulasiga asosan

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, ..., \; x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

yechimni hosil qilamiz. Bu yechim yagona yechim bo‘ladi. Agar (23) sistemaning koeffitsiyentlari va noma’lumlaridan A, B va X matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

ko‘rinishida tuzilsa (23) sistemasini $AX = B$ holda yozish mumkin.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo‘ladi va berilgan sistemaning matritsalar ko‘rinishidagi yechimi $X = A^{-1}B$ bo‘ladi.

Agar $\Delta=0$ bo‘lib, $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ lardan aqalli birortasi noldan farqli bo‘lsa, (23) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

Agar $\Delta=0$ bo‘lib, $\Delta x_1=\Delta x_2=...=\Delta x_n=0$ bo‘lsa, (23) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: Sistemani Kramer usulida yechamiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=27$$

Xuddi shu usul bilan hisoblashni davom ettirib, quyidagilarni topamiz:

$$\Delta x_1=81,\ \Delta x_2=-108,\ \Delta x_3=-27,\ \Delta x_4=27.$$

Demak, sistema yagona yechimga ega, chunki $\Delta\neq 0$. Bu yechim esa

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{81}{27}=3,\ \ x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-108}{27}=-4,$$
$$x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{-27}{27}=-1,\ \ x_4=\frac{\Delta x_4}{\Delta}=\frac{27}{27}=1$$

(3;-4;-1;1) bo‘ladi.

(23) tenglamalar sistemasini $b_1=b_2=...=b_n=0$ bo‘lgan holini ko‘ramiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{24}$$

(24) tenglamalar sistemasini bir jinsli, chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Osonlik bilan ishonch hosil qilish mumkinki,

$$x_1=x_2=...=x_n=0$$

(24) sistemaning yechimlari bo‘ladi va bu yechimni trivial yechim deb ataladi. Agar (24) bir jinsli sistemaning asosiy determinanti Δ noldan farqli bo‘lsa, bu sistema faqat trivial yechimga ega bo‘ladi. Chunki bu holda $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = 0$ va Kramer formulasiga asosan $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ bo‘ladi.

Demak, (24) sistemaning notrivial, ya’ni noldan farqli yechimi mavjud bo‘lishi uchun $\Delta = 0$ bo‘lishi zarur ekan.

2-misol.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ \ \ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish: $x_1 = x_2 = 0$ trivial yechim ekani ravshan.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

bundan ko‘rinadiki, sistemaning notrivial yechimi bo‘lishi mumkin. Haqiqatan ham $x_1 = x_2 = t$ (t-ixtiyoriy haqiqiy son) sistemaning notrivial yechimi bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tenglamalar sistemasini yechishning qanday usullarini bilasiz?
2. Tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo‘ladi?
3. Tenglamalar sistemasi qachon cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi?
4. Tenglamalar sistemasi qachon yechimga ega bo‘lmaydi?
5. Bir jinsli tenglamalar sistemasi qachon noldan farqli yechimga ega?

8-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

$x^2 - 4x + 5 = 0$ tenglamani haqiqiy sonlar to‘plamida yechimi mavjud emasligi bizga ma’lum, chunki $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$. Lekin $i^2 = -1$ ga teng bo‘lgan mavhum birlik tushunchasini kiritish bilan bu muammo hal bo‘ladi va yechim $x_{1,2} = 2 \pm i$ ga teng bo‘ladi.

1-ta’rif: z kompleks son deb

$$z = x + yi \tag{25}$$

ko‘rinishidagi ifodaga aytiladi, bunda x va y haqiqiy sonlar, i esa $i = \sqrt{-1}$ yoki $i^2 = -1$, tenglik bilan aniqlanuvchi mavhum birlik, x va y ni z kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlari deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z .$$

(25) ko‘rinish kompleks sonning algebraik ko‘rinishi deyiladi.

Xususiy holda, agar $x = 0$ bo‘lsa, u holda $z = 0 + yi = yi$ soni sof mavhum son, agar $y = 0$ bo‘lsa, u holda $z = x + 0 = x$, ya’ni haqiqiy son hosil bo‘ladi. Shunday qilib, haqiqiy va mavhum sonlar z kompleks sonning xususiy hollaridir.

2-ta’rif. Agar ikkita $z_1 = x_1 + y_1 i$ va $z_2 = x_2 + y_2 i$ kompleks sonlarining haqiqiy qismlari haqiqiy qismiga, mavhum qismlari mavhum qismiga mos ravishda teng bo‘lsa, bu kompleks sonlar o‘zaro teng, ya’ni $z_1 = z_2$ bo‘ladi, boshqacha aytganda $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$, ya’ni faqat $x_1 = x_2$ va $y_1 = y_2$ bo‘lsa, $z_1 = z_2$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3-ta’rif. $z = x + yi$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo‘lsagina, u nolga teng bo‘ladi, ya’ni agar $x = 0$ va $y = 0$ bo‘lsagina $z = 0$ va aksincha.

4-ta’rif. Mavhum qismlari faqat ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z = x + yi$ va $\bar{z} = x - yi$ kompleks sonlar qo‘shma kompleks sonlar deyiladi.

Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar, xuddi ko‘phadlar ustidagi amallar kabi bajariladi, ularni ko‘rib chiqamiz.

Bizga $z_1 = x_1 + y_1 i$ va $z_2 = x_2 + y_2 i$ berilgan bo‘lsin :

Kompleks sonlarning yig‘indisi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \tag{26}$$

kompleks sonlarning ayirmasi

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \tag{27}$$

kompleks sonlarning ko‘paytmasi

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \tag{28}$$

qo‘shma kompleks sonlarning ko‘paytmasi

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2,$$

kompleks sonlarni bo‘lish

$$\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{(x_1+y_1i)(x_2-y_2i)}{(x_2+y_2i)(x_2-y_2i)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i, \qquad (29)$$

kompleks sondan ildiz chiqarish

$$\sqrt{x+yi}=\pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+i\,signy\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right), \qquad (30)$$

formulalar bilan hisoblanadi, (30) formuladagi $sign(y)=\begin{cases}1, & y>0,\\ 0, & y=0,\\ -1, & y<0,\end{cases}$

ko‘rinishda olinadi.

1-misol. $z_1=3+i$ va $z_2=1-2i$ kompleks sonlarning yig‘indisi va ayirmasini toping.

Yechish: (26) va (27) formulalarga asosan:

$$z_1+z_2=3+i+1-2i=4-i, \quad z_1-z_2=(3+i)-(1-2i)=2+3i.$$

2-misol. $z_1=1-\sqrt{3}i,\ z_2=\sqrt{3}+i$ kompleks sonlarni ko‘paytiring va bo‘ling.

Yechish: (28) va (29) formulaga asosan:

$$z_1\cdot z_2=\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)=\sqrt{3}+i-3i-\sqrt{3}i^2=2\sqrt{3}-2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\sqrt{3}-i-3i+\sqrt{3}i^2}{3-i^2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}-\frac{1+3}{4}i=-i$$

3-misol. $z=3+2i$ va $\overline{z}=3-2i$ qo‘shma kompleks sonlarni ko‘paytiring.

Yechish: $z\cdot\overline{z}=(3+2i)(3-2i)=9-4i^2=13.$

Demak, qo‘shma kompleks sonlarning ko‘paytmasi haqiqiy sondan iborat bo‘lar ekan.

4-misol. i^{79} ni hisoblang.

Yechish: $i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$ ekanidan va $79=4\cdot19+3$ bo‘lishidan

$$i^{79}=i^{4\cdot19+3}=\left(i^4\right)^{19}\cdot i^3=1^{19}\cdot(-i)=-i.$$

5-misol. $\sqrt{15+8i}$ ildizdan chiqaring.

Yechish: (30) formulaga asosan, $y=8>0$ bundan $sign(8)=1$

$$\sqrt{15+8i}=\pm\left(\sqrt{\frac{15+\sqrt{15^2+8^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-15+\sqrt{15^2+8^2}}{2}}\right)=\pm(4+i).$$

6-misol. $\sqrt{-8-6i}$ ildizdan chiqaring.

Yechish: (30) formulaga asosan, $y=-6<0,$ bundan $sign(-6)=-1$

$$\sqrt{-8-6i}=\pm\left(\sqrt{\frac{-8+\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{8+\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}}{2}}\right)=\pm(1-3i).$$

Har bir $z=x+yi$ kompleks sonning Oxy tekislikda x va y koordinatali $A(x;y)$ nuqta shaklida tasvirlash mumkin va aksincha, tekislikning har bir nuqtasiga bittadan kompleks sonni mos qo‘yish mumkin.

Kompleks sonlar tasvirlanadigan tekislik z kompleks o‘zgaruvchining tekisligi deyiladi.

Kompleks tekislikda z sonni tasvirlovchi nuqtani z nuqta deb ataymiz. Ox o‘qida yotuvchi nuqtalariga haqiqiy sonlar mos keladi (bunda $y=0$), Oy o‘qida yotuvchi nuqtalari sof mavhum sonlarni tasvirlaydi (bunda $x=0$). Shu sababli Ox o‘q haqiqiy o‘q, Oy o‘q mavhum o‘q deyiladi. $A(x;y)$ nuqtani koordinatalari boshi bilan birlashtirib, OA vektorni hosil qilamiz, bu $z=x+yi$ kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.

Kompleks sonning trigonometrik shakli

A nuqtaning $\overrightarrow{OA}$ vektor bilan Ox o‘q orasidagi burchak φ, z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\arg z$ kabi belgilanadi.

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2k\pi$ qo‘shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k butun son. Argumentning hamma qiymatlari orasidan $0\le\varphi\le 2\pi$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va bunday belgilanadi $\varphi=\arg z$.

Ushbu

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

tengliklarni hisobga olib, z kompleks sonni bunday ifodalash mumkin.

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{31}$$

bunda $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ kompleks sonning moduli deyiladi.

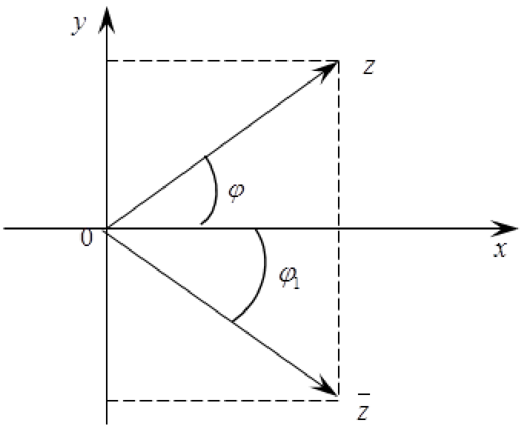
$-\pi < \arg z \le \pi$ bo‘lgani uchun, argumentni $tg\varphi = \frac{y}{x}$ tenglikdan topamiz:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, & \text{I,IV choraklarning ichki nuqtalarida,} \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, & \text{II chorakning ichki nuqtalarida,} \\ arctg\frac{y}{x} - \pi, & \text{III chorakning ichki nuqtalarida.} \end{cases}$$

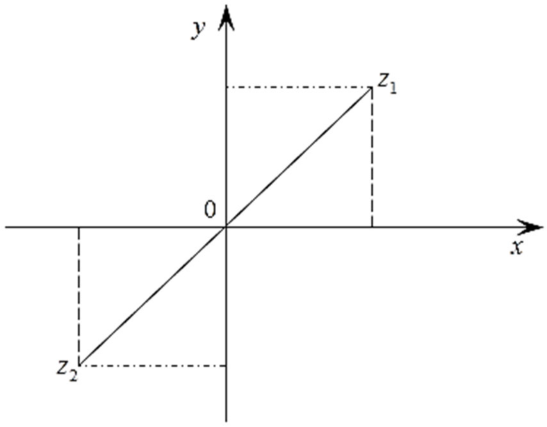
Agar nuqta haqiqiy yoki mavhum o‘qlarining birida yotsa, $\arg z$ ni bevosita topiladi. Yozuvning (31) ko‘rinishi kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

7-misol.

$z = x + iy$ va $\bar{z} = x - iy$ qo‘shma kompleks sonlar, (1-shakl) shuningdek $z_1 = x + iy$ va $\bar{z}_2 = -x - iy$ qarama-qarshi sonlar (2-shakl) tasvirlangan.



1-shakl.



2-shakl.

Chizmadan $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ va $|\bar{z}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ekani, ya’ni $|z| = |\bar{z}|$ va $\arg z = -\arg \bar{z}$ ekani kelib chiqadi.

Qo‘shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo‘yicha teng argumentlarga ega bo‘lib, haqiqiy o‘qqa simmetrik bo‘lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi (1-shakl).

Chizmadan $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_2 = \pi + \arg z_1$ ekani kelib chiqadi. Qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi. (2-shakl).

8-misol. $z = -2i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

Yechish: $z = -2i,\ \ x = 0,\ \ y = -2$ bo‘lgani uchun $r = 2,\ \ \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$,

$$z = -2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Trigonometrik ko‘rinishdagi kompleks sonlarni ko‘paytirish

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik shaklda berilgan bo‘lsin:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ va } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Shu sonlarning ko‘paytmasini hisoblaymiz.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

shunday qilib,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right], \tag{32}$$

ya’ni ikkita kompleks son ko‘paytirilganda ularning modullari ko‘paytiriladi, argumentlari esa qo‘shiladi.

Qo‘shma kompleks sonlarni ko‘paytmasi esa ularning moduli kvadratiga teng bo‘lgan haqiqiy son hosil bo‘ladi.

Trigonometrik ko‘rinishdagi kompleks sonlarni bo‘lish

Agar kompleks sonlar $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ trigonometrik shaklda berilgan bo‘lsa, u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Shunday qilib,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right], \qquad (33)$$

ya'ni kompleks sonlarni bo'lishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

Trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlarni darajaga ko'tarish

Kompleks sonlarni ko'paytirish amalini $z_1=z_2$ bo'lganda bajarsak, darajaga ko'tarish qoidasi kelib chiqadi. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ uchun natural n deb,

$$z^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right) \qquad (34)$$

ekani kelib chiqadi. Bu formula Muavrning darajaga ko'tarish formulasi deyiladi. Bu formula kompleks sonni natural darajaga ko'tarish uchun modulni shu darajaga ko'tarish, argumentni esa daraja ko'rsatkichiga ko'paytirish kerakligini ko'rsatadi.

Muavr formulasidan $r=1$ deb olib quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Bu formula $\sin n\varphi$ va $\cos n\varphi$ larni $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ larning darajalari orqali ifodalash imkonini beradi.

Masalan, $n=3$ da $\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^3=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$ ga ega bo'lamiz, bundan

$$\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi+3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi+i^3\sin^3\varphi=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$$

$$\left(\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi\right)+i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$$

ikki kompleks sonning teng bo'lish shartidan foydalanib topamiz:

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi, \quad \cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

Trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlardan ildiz chiqarish

Bu amal darajaga ko'tarish amaliga teskari amaldir. Kompleks sonning n-darajali ildizi $\sqrt[n]{z}$ deb shunday w kompleks songa aytiladiki, bu sonning n-darajasi ildiz ostidagi songa tengdir, ya'ni agar $w=\sqrt[n]{z}$ bo'lsa $w^n=z$.

Agar $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ bo'lsa, u holda

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

Muavr formulasiga asosan

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

bo'lib, $\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2k\pi.$ Bundan $\rho=\sqrt[n]{r},\ \theta=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n},$ bu yerda k istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ ning arifmetik ildizi. Demak,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,...n-1 \quad (35)$$

formula Muavrning ildiz chiqarish formulasi deyiladi. (35) formula yordamida n ta ildiz topilishini ta'kidlab o'tamiz.

9-misol. $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=-3$, $z_3=-2i$ sonlarni trigonometrik shaklda ifodalang.

Yechish:

1) $r_1=\sqrt{3+1}=2,\ \sin\varphi_1=-\dfrac{1}{2},\ \cos\varphi_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi_1=2\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{11}{6}\pi$ larni e'tiborga olsak, $z_1=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right).$

2) $r_2=3,\ \sin\varphi_2=0,\ \cos\varphi_2=-1,\ \varphi_2=\pi\ \Rightarrow z_2=3(\cos\pi+i\sin\pi).$

3) $r_3=2,\ \sin\varphi_3=-1,\ \cos\varphi_3=0,\ \varphi_3=\dfrac{3\pi}{2}\ \Rightarrow z_3=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right).$

10-misol. $z_1=1-\sqrt{3}i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ trigonometrik shaklga keltiring va ularni ko'paytiring.

Yechish:

$$r_1=2,\ \cos\varphi_1=\frac{1}{2},\ \sin\varphi_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\varphi_1=\frac{5\pi}{3}\ \Rightarrow z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

$$r_2=2,\cos\varphi_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\varphi_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_2=\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z_1\cdot z_2=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

11-misol. $z_1=1+i$, $z_2=-2+2i$ kompleks sonlarni algebraik va trigonometrik shakllarda bo'ling.

Yechish:

1) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+i}{-2+2i}=\dfrac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)}=\dfrac{0-4i}{4+4}=-\dfrac{1}{2}i$

2) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

12-misol. $(1+i)^{10}$ ni hisoblang.

Yechish: $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. (34) formulaga asosan:

$$z^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10\frac{\pi}{4}+i\sin 10\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=32\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=32(0+i)=32i.$$

13-misol. $\sqrt[3]{1}$ ning barcha qiymatlarini toping.

Yechish: $z=1+0i=\cos 0+i\sin 0.$ (35) formulaga asosan quyidagi uchta turli ildizlar topildi:

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\quad k=0,1,2.$$

$$k=0,\quad w_1=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$k=1,\quad w_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2,\quad w_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Kompleks sonning ta’rifini ayting.
2. i soni qanday son?
3. Kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing.
4. Kompleks sonlar ustida qanday amallar bajariladi?
5. Muavrning darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish formulalarini yozing.

9-§. Uchinchi tartibli tenglamani yechishning Kardano formulasi. Algebraning asosiy teoremasi

1. Uchinchi tartibli

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{36}$$

tenglamaning yechimini topamiz. (36) tenglamada $x = y + \alpha$ almashtirish bajaramiz, natijada

$$y^3 + (3\alpha + a)y^2 + \left(3\alpha^2 + 2a\alpha + b\right)y + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c + \alpha^3\right) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada $\alpha = -\frac{a}{3}$ tanlasak, y^2 oldidagi koeffitsiyent 0 ga aylanadi, ya'ni $x = y - \frac{a}{3}$ almashtirish bajarsak,

$$y^3 + py + q = 0 \tag{37}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu uchinchi darajali tenglamaning normal shakli deb ataladi, bu yerda $p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$

(37) ning yechimini

$$y = u + v \tag{38}$$

ko'rinishda izlaymiz. (38) ni (37) ga qo'yib,

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \text{ yoki } \left(u^3 + v^3 + q\right) + (3uv + p)(u+v) = 0 \tag{39}$$

tenglamani hosil qilamiz. Agar

$$3uv + p = 0 \text{ yoki } uv = -\frac{p}{3} \tag{40}$$

deb talab qilsak,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

hosil bo'ladi.

Bundan esa u^3 va v^3 Viyet teoremasiga asosan

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari bo'ladi. Bu tenglamani yechib quyidagilarni topamiz:

$$z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

yoki

$$u^3 = z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ va } v^3 = z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Bundan (38) formulaga asosan:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (41)$$

(41) tenglik Kardano formulasi deb ataladi.

Bu tenglik ikkita ildizning yig‘indisidan iborat bo‘lib, har bir ildiz uchta qiymatga ega, ya’ni u ning har bir qiymatini v ning har bir qiymati bilan olsak, $y = u + v$ uchun hammasi bo‘lib to‘qqizta qiymatni hosil qilamiz. Ammo (37) tenglama faqat uchta ildizga ega. Shu sababli, yuqoridagi to‘qqizta qiymatdan uchtasini, ya’ni $y = u + v$ yig‘indining (40) shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarini olishimiz kerak. Shu maqsadda avval

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ildizning uchta qiymatini topamiz. Buning uchun, ma’lumki, u ning bitta, masalan u_1 ildizini 1 ning uchinchi darajali

$$\sqrt[3]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon,$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2$$

ildizlariga ko‘paytirish lozim. Natijada u ning uchinchi darajali ildizlari

$$u_1,\ u_2 = \varepsilon u_1, \quad u_3 = \varepsilon^2 u_1$$

bo‘ladi. Endi v ning tegishli qiymatlarini (40) shartdan topamiz:

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}, \quad v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3\varepsilon u_1} = \varepsilon^2\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon^2 v_1,$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 u_1} = \varepsilon\left(-\frac{p}{3u_1}\right) = \varepsilon v_1,$$

bundan $\varepsilon^3 = 1$ ekanligidan foydalandik.

Shunday qilib, u ning har bir qiymatini v ning mos qiymatiga qo‘shsak, y uchun quyidagi uchta qiymat kelib chiqadi:

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1, \quad y_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1.$$

Agar bu tengliklarga ε va ε^2 larning qiymatlarini qo‘ysak, (37) normal tenglamaning ildizlari quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\begin{gathered} y_1 = u_1 + v_1, \quad y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1), \\ y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1). \end{gathered} \tag{42}$$

U holda (36) tenglamaning ildizlari $x_i = y_i - \dfrac{a}{3}$ ekanini e’tiborga olsak,

$$\begin{gathered} x_1 = u_1 + v_1 - \frac{a}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}, \\ x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3} \end{gathered} \tag{43}$$

izlangan yechim hosil bo‘ladi.

1-misol. $x^3 + 3x^2 + 15x + 13 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamada $a = 3,\ b = 15,\ c = 13$ bo‘lgani uchun $p = 15 - \dfrac{9}{3} = 12,\ q = \dfrac{2\cdot 3^3}{27} - \dfrac{3\cdot 15}{3} + 13 = 0.$ Endi $u = \sqrt[3]{0 + \sqrt{0 + \dfrac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = 2,$ agar $u_1 = 2$ desak, $v_1 = -\dfrac{12}{3\cdot 2} = -2$ hosil bo‘ladi.

Demak, (42) ga asosan:

$$\begin{gathered} y_1 = 2 - 2 = 0, \quad y_2 = -\frac{1}{2}(2-2) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2) = 2\sqrt{3}i, \\ y_3 = -\frac{1}{2}(2-2) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2) = -2\sqrt{3}i. \end{gathered}$$

(43) ga asosan berilgan tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1 = 0 - \frac{3}{3} = -1, \quad x_2 = 2\sqrt{3}i - 1, \quad x_3 = -2\sqrt{3}i - 1.$$

2-misol. $x^3 - 6x + 9 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamada $a = 0,\ b = -6,\ c = 9$ bo‘lgani uchun $p = -6,\ q = 9.$

U holda

$$u = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{6^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{-8} = -2,$$

bundan

$$y_1=-1-2=-3,\ \ y_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad y_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_1=-1-2=-3,\ \ x_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad x_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

izlangan yechimlar bo‘ladi.

2. Bizga quyidagi *n*-darajali ko‘phad berilgan bo‘lsin:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n\,. \qquad (44)$$

Bu yerda $n\geq 0$ butun son, $a_0\neq 0, a_1,a_2,...a_n$ lar ko‘phadning koeffitsiyentlari.

$P_n(x)$ ko‘phadning ildizi deb x o‘zgaruvchining shu ko‘phadni nolga aylantiradigan qiymatlariga aytiladi, ya’ni $P_n(\alpha)=0$ bo‘lsa, u holda $x=\alpha$ ko‘phadning ildizidir.

$P_n(x)$ ko‘phadni $x-\alpha$ ga bo‘lishdan chiqadigan qoldiqni bo‘lish jarayonini bajarmay turib topish imkonini beradigan muhim teoremani keltiramiz.

Bezu teoremasi. $P_n(x)$ ko‘phadni $x-\alpha$ ikkihadga bo‘lishdan chiqadigan qoldiq $P_n(x)$ ko‘phadning $x=\alpha$ dagi qiymatiga teng. $P_n(x)$ ko‘phadni $x-\alpha$ ikkihadga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_n(x)=(x-\alpha)Q_{n-1}(x)+R,$$

$Q_{n-1}(x)-$bo‘linma, $R-$qoldiq.

3-misol. $P_3(x)=8x^3+4x^2+1$ ko‘phadni 1) $x-1$, 2) $x+i$ ikkihadlarga bo‘lishdan chiqadigan qoldiqni toping.

Yechish: 1) $P(1)=8+4+1=13,\ \ R_1=13,$

2) $P(i)=8(-i)^3+4(-i)^2+1=-8i^3+4i^2+1=-3+8i,\ \ R_1=-3+8i\,.$

Bezu teoremasining natijasi. Agar α $P_n(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsa, ya’ni $P_n(\alpha)=0$ bo‘lsa, u holda $P_n(x)$ ko‘phad $x-\alpha$ ga qoldiqsiz bo‘linadi, ya’ni

$$P_n(x)=(x-\alpha)Q_{n-1}(x)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Algebraning asosiy teoremasi. Har qanday n-darajali ko‘phad kamida bitta ildizga ega.

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Bu teoremaning natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz:

Teorema. n-darajali har qanday

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

ko‘phad $x-\alpha$ ko‘rinishidagi n ta chiziqli ko‘paytuvchiga ajraladi, ya’ni

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots+(x-\alpha_n).$$

Xulosa: n-darajali ko‘phad n tadan ortiq ildizga ega bo‘la olmaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Uchinchi tartibli tenglamani yechishning Kardano formulasini yozing.
2. n-darajali ko‘phadning umumiy ko‘rinishini yozing.
3. Algebraning asosiy teoremasini ayting.
4. n-darajali ko‘phadni nechta chiziqli ko‘paytuvchiga ajratish mumkin.

II BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI ELEMENTLARI

10-§. Vektor. Vektorlar ustida amallar. Ikki vektorning skalyar koʻpaytmasi

Vektor tushunchasini kiritishdan avval tekislik va fazodagi toʻgʻri burchakli koordinatalar sistemasi toʻgʻrisida eslab olaylik. Bizga maktab kursidan ma’lumki, tekislikda O nuqtada kesishuvchi ikkita oʻzaro perpendikular Ox, Oy oʻqlardan tashkil topgan sistemani tekislikda ikki oʻlchovli Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi. Bu sistemada Ox oʻqni abssissalar oʻqi, Oy oʻqni ordinatalar oʻqi deb ataladi. Tekislikdagi istalgan nuqtaning vaziyatini uning ikkita koordinatalari bilan $M(x;y)$ koʻrinishda aniqlanadi va aksincha, ixtiyoriy $M(x;y)$ koordinatali nuqtaga tekislikda bitta nuqta mos keladi. Bu toʻgʻrida 12-§ da batafsil toʻxtalamiz.

O nuqtada kesishuvchi uchta oʻzaro perpendikular Ox, Oy, Oz oʻqlardan tashkil topgan sistemani fazoda uch oʻlchovli Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi. Bu sistemada Ox oʻqni abssissalar oʻqi, Oy oʻqni ordinatalar oʻqi, Oz oʻqni applikatalar oʻqi deb ataladi. Fazodagi ixtiyoriy nuqtaning vaziyatini uning uchta koordinatalari bilan $M(x;y;z)$ koʻrinishda aniqlanadi va aksincha, ixtiyoriy $M(x;y;z)$ koordinatali nuqtaga fazoda bitta nuqta mos keladi. (6-shakl).

Vektorlar. Fizika, mexanika, texnika va matematikada asosan ikki xil kattaliklar bilan ish koʻriladi.

Ulardan biri oʻzining son qiymati bilan toʻla xarakterlanib, skalyar miqdorlar yoki skalyarlar deb ataluvchi miqdorlar.

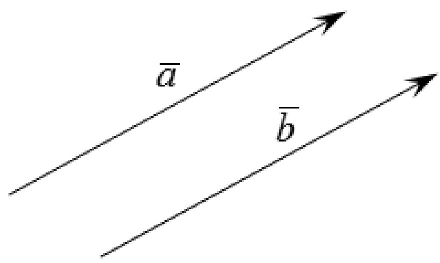
Ikkinchi tur kattaliklarni toʻla xarakterlash uchun ularning son qiymatlarigina yetarli boʻlmay, balki yoʻnalishi ham berilgan boʻlishi kerak.

Oʻzining son qiymati bilan birga yoʻnalishi ma’lum boʻlganda toʻla xarakterlanadigan kattaliklar vektor miqdorlar yoki vektorlar deb ataladi.

1-ta'rif. Yo'nalishga ega bo'lgan kesma vektor deb ataladi. Vektorlar boshlanish va tugash nuqtalari orqali $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \ldots$ kabi yoki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ko'rinishida belgilanadi.

Vektorning son qiymati uning moduli yoki uzunligi deyiladi va $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ bilan belgilanadi.

Ikki $\vec{a}$, va $\vec{b}$ vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, **kollinear vektorlar** deb ataladi.

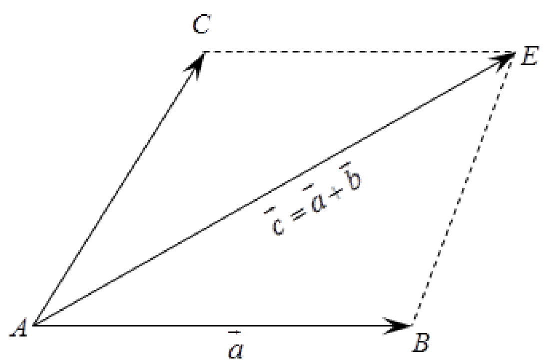


3-shakl.

Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar **komplanar vektorlar** deb ataladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ kollinear, bir xil yo'nalishli, uzunliklar teng vektorlar bo'lsa, o'zaro teng vektorlar bo'ladi. 3-shaklda o'zaro teng vektorlar tasvirlangan.

Bundan vektorlarni o'zini o'ziga parallel ko'chirish mumkinligi kelib chiqadi.

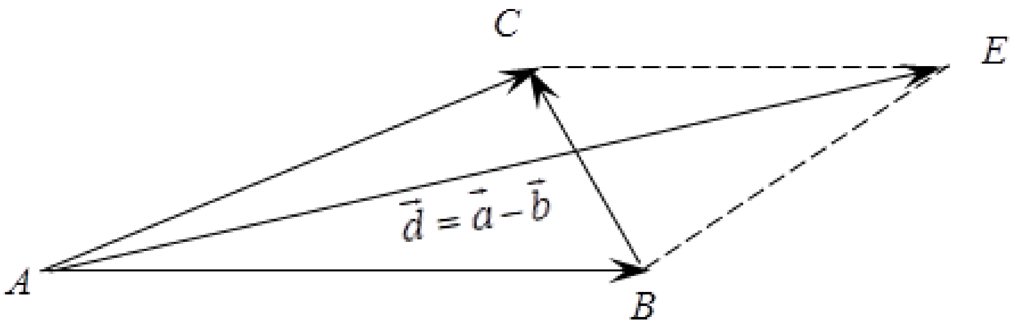


4-shakl.

Vektorlar ustida amallar

1. Vektorlarni qo‘shish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlarning boshini biror A nuqtaga ko‘chiramiz. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni yig‘indisi deb tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning A uchidan chiqqan AE diagonaliga teng $\vec{c}$ vektorga aytiladi (parallelogramm qoidasi). $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (4-shakl)

2. Vektorlarni ayirish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlarning boshini biror A nuqtaga ko‘chiramiz. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni ayirmasi deb tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning B uchidan chiqqan BC diagonaliga teng $\vec{d}$ vektorga aytiladi (parallelogramm qoidasi). $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ (5-shakl). Parallelogrammning ikkinchi diagonali $\overline{BC}$ ga teng $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



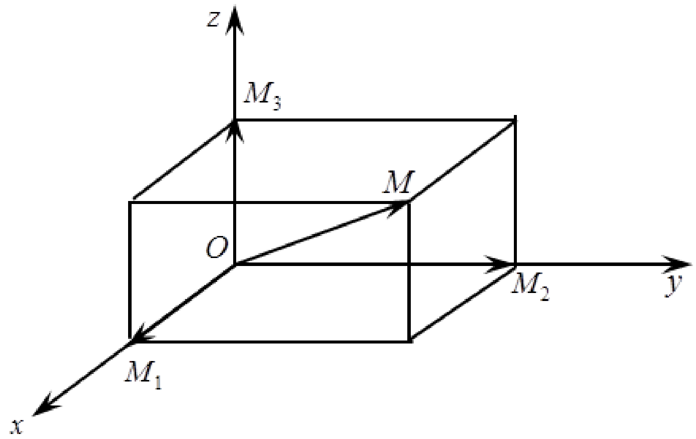
5-shakl.

3. Vektorni songa ko‘paytirish.

$\vec{a}$ vektorni k (k-const) soniga ko‘paytmasi deb, uzunligi $|k\vec{a}|$ ga teng bo‘lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi. $\vec{c} = k\vec{a}$. Agar k>0 bo‘lsa, $\vec{c}$ vektor yo‘nalishi $\vec{a}$ vektor yo‘nalishi bilan bir xil , aks holda esa $\vec{c}$ vektor yo‘nalishiga qarama-qarshi bo‘ladi. Agar $k \neq 0$ bo‘lsa, $\vec{c} = k\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$ bo‘ladi.

4. Vektorlarning proyeksiyasi. $Oxyz$ fazoda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida koordinata boshi 0 dan chiqqan $\overrightarrow{OM}$ vektor berilgan bo‘lsin. (6-shakl).

Bu vektorning Ox, Oy, Oz o‘qlaridagi proyeksiyalarini topish uchun, $\overrightarrow{OM}$ vektor oxiridan Oyz tekisligiga parallel tekislik o‘tkazib, bu tekislikning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtasini M_1, Oxz tekisligiga parallel tekislik o‘tkazib, bu tekislikning Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtasini M_2, Oxy tekisligiga parallel tekislik o‘tkazib, bu tekislikning Oz o‘qi bilan kesishgan nuqtasini M_3 deb belgilaymiz.



6-shakl.

$\overrightarrow{OM}$ vektorning Ox, Oy, Oz koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari mos ravishda OM_1, OM_2, OM_3 ga teng bo‘ladi.

Bu proyeksiyalarning har biri $\overrightarrow{OM}$ vektorning o‘qlardagi komponentalaridir. 6-shakldan ko‘rinib turibdiki, $\overrightarrow{OM}$ vektor $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ vektorlarning yig‘indisiga teng.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} \qquad (1)$$

Vektorlarni (1) ko‘rinishda tasvirlash vektorning komponentalari yoki tashkil etuvchilari orqali ifodalash deb ataladi.

Ko‘pincha koordinata o‘qlariga mos keluvchi asosiy birlik vektorlarni tanlab olish qulay bo‘ladi.

Ox, Oy, Oz o‘qlaridagi birlik vektorlarni mos ravishda i, j, k lar bilan belgilaylik. Bular ko‘pincha ortogonal vektorlar deb ham aytiladi.

$\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ vektorlar $\overrightarrow{OM}$ vektorning bazis vektorlari deyiladi. $\overrightarrow{OM_1} = x, \overrightarrow{OM_2} = y, \overrightarrow{OM_3} = z$ larni (1) ga qo‘yib, $\overrightarrow{OM} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$ tenglikni hosil qilamiz. 6-shakldan ko‘rinadiki, $\overrightarrow{OM}$ vektorning uzunligi parallelepiped diagonalining uzunligiga teng bo‘lganidan:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, ularning yig‘indisi va ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \;\Rightarrow\; \vec{c} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} \;\Rightarrow\; \vec{d} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}.$$

$\vec{a}$ vektorni k (k-const) soniga ko‘paytmasi esa quyidagicha topiladi:

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a} \;\Rightarrow \vec{c}\left(kx_1, ky_1, kz_1\right).$$

5. Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi.

Ta’rif: Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko‘paytmasiga teng bo‘lgan songa aytiladi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi\,. \tag{2}$$

Bu yerda φ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak, $|\vec{a}|\cos\varphi$ ifoda $\vec{b}$ vektorning $\vec{a}$ vektor yo‘nalishidagi proyeksiyasi. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \Pi p_{\vec{a}} \vec{b}$, shuningdek, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \Pi p_{\vec{b}} \vec{a}$.

Skalyar ko‘paytmaning ba’zi xossalarini keltirib o‘tamiz.

1^0. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $\qquad$ 2^0. $\left(\lambda\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$

3^0. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ $\qquad$ 4^0. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

5^0. Agar $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo‘lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ va teskarisi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ va $\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$ bo‘lsa, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

1^0 va 2^0 xossalarning isboti (2) formuladan birdaniga kelib chiqadi.

3^0 xossani isbot qilamiz. $\vec{b} + \vec{c}$ vektorning $\vec{a}$ vektor yo‘nalishidagi proyeksiyasi formulasidan

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left|\vec{c}\right| pr_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left|\vec{c}\right|\left(pr_{\vec{c}}\vec{a} + pr_{\vec{c}}\vec{b}\right) = \left|\vec{c}\right| \cdot pr_{\vec{c}}\vec{a} + \left|\vec{c}\right| \cdot pr_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}\,.$$

4^0 va 5^0 xossalardan $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ bazis vektorlar uchun quyidagi tengliklarni topamiz.

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0\,.$$

Teorema. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, ularning skalyar ko‘paytmasi ushbu formula bilan topiladi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{3}$$

Isboti. Vektorlarning koordinatalari orqali yoyilmasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Vektorlarni skalyar ko‘paytiramiz va

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k} =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Oxirgi tenglikdan va bazis vektorlar skalyar ko‘paytmasidan foydalandik, natijada (3) formula kelib chiqdi. Teorema isbotlandi.

Teoremadan quyidagi ikkita muhim natijalar kelib chiqadi:

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{4}$$

formula bilan aniqlanadi.

2)
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \tag{5}$$

vektorlarning perpendikularlik sharti.

1-misol. $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 4,\ \varphi = 60^\circ,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = ?.$

Yechish: (2) formulaga asosan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}.$$

2-misol. $\vec{a}(2;-3;4),\ \vec{a}(5;1;-6),\ \vec{a} \cdot \vec{b} = ?.$

Yechish: (3) formulaga asosan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 6 = -17.$$

3-misol. $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b},\ \left|\vec{a}\right| = 4,\ \left|\vec{b}\right| = 5,\ \varphi = 60^\circ,\ \left|\vec{c}\right| = ?.$

Yechish: 4-xossaga asosan

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\left(\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2}.$$

$$\overline{\left|a\right|}^2 = 16,\ \overline{\left|b\right|}^2 = 25,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 10,$$

bo‘lgani uchun

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409} \approx 20{,}22.$$

4-misol. $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \cos\varphi = ?.$

Yechish: (4) formulaga asosan

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 0,703.$$

5-misol. m ning qanday qiymatida $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k},$ vektorlar perpendikular bo‘ladi.

Yechish: Vektorlarning perpendikularlik sharti (5) ga asosan

$$2\cdot 1 + 3\cdot(-5) + (-1)m = 0, \quad m = -13.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Vektor va skalyar kattaliklar qanday kattaliklar?
2. Vektor deb nimaga aytiladi?
3. Vektorning o‘qlardagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
4. Vektorlarni qanday qo‘shiladi va ayriladi?
5. Vektorning moduli nima?
6. Qanday vektorlar o‘zaro kollinear vektorlar bo‘ladi?
7. Qanday vektorlar o‘zaro komplanar vektorlar bo‘ladi?
7. Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi qanday topiladi?
8. Ikki vektorning perpendikularlik shartini yozing.

11-§. Vektorlarning vektor va aralash ko‘paytmasi

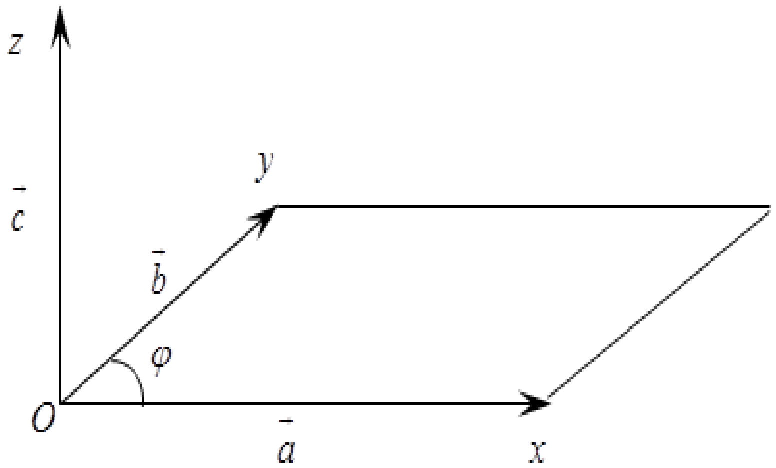
1. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi

Ta’rif: $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytmasi deb quyidagicha aniqlangan $\vec{c}$ vektorga aytiladi: 1) $\vec{c}$ vektorning moduli son jihatidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga tomonlari qilib yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya’ni

$$|\vec{c}| = \left|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi \tag{6}$$

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikular,

3) $\vec{c}$ vektorning yo‘nalishi shundayki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga o‘tishning eng qisqa yo‘l soat strelkasiga qarama-qarshi bo‘lishi kerak. (7-shakl).



7-shakl.

Vektor ko‘paytma $\vec{a}\times\vec{b}$ yoki $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ ko‘rinishda yoziladi.

Ta’rifga asosan, φ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Vektor ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1°. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\vec{a}\right]$ 2°. $\lambda\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left[\lambda\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\,\lambda\vec{b}\right]$

3°. $\left[\vec{a}+\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left[\vec{a}\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\vec{c}\right]$ 4°. Agar $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lsa, $\left[\vec{a}\vec{b}\right]=0$

1° va 4° xossalardan foydalanib $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ bazis vektorlar uchun quyidagi formulalarni topamiz:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,\ \vec{k}\times\vec{k}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},$$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

Teorema. $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar berilgan bo‘lsin. U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi quyidagi formula bilan topiladi:

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Isbot. Vektorlarning koordinatalari orqali yoyilmasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Vektorlarni vektor ko‘paytiramiz va

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+$$

$$+ y_1 z_2 \vec{j} \times \vec{k} + z_1 x_2 \vec{k} \times \vec{i} + z_1 y_2 \vec{k} \times \vec{j} + z_1 z_2 \vec{k} \times \vec{k} =$$

$$= x_1 y_2 \vec{k} - x_1 z_2 \vec{j} - y_1 x_2 \vec{k} + y_1 z_2 \vec{i} + z_1 x_2 \vec{j} - z_1 y_2 \vec{i} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Teorema isbotlandi.

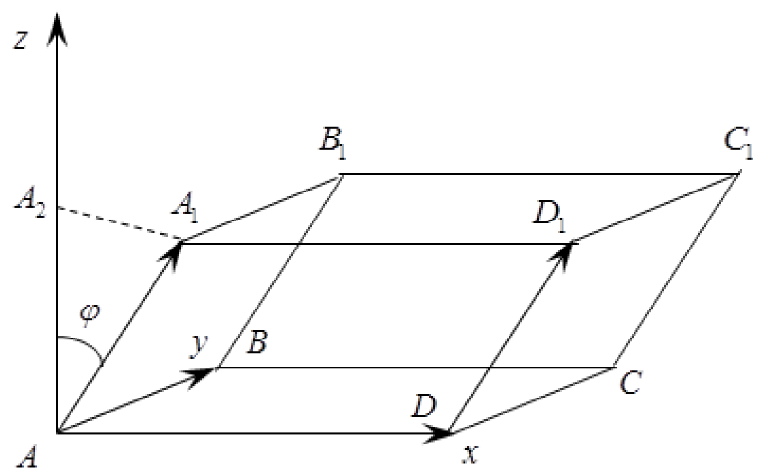
1-misol: $\vec{a}(2;5;7)$ va $\vec{b}(1;2;4)$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ topilsin.

Yechish: (7) formuladan foydalansak,

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 20\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k} - 5\vec{k} - 14\vec{i} - 8\vec{j} = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

2. Uch vektorning aralash ko‘paytmasi

Biz ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun skalyar va vektor ko‘paytma tushunchalari bilan tanishdik. Bizga ixtiyoriy 3 ta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytirib, $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ vektorni hosil qilamiz. $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ vektorni $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytiramiz.



8-shakl.

Berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni bunday tartibda ko‘paytirish vektor-skalyar yoki aralash ko‘paytma deb ataladi.

Quyidagi muhim teorema yordamida aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini anglab olamiz.

Teorema. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasining absolut qiymati, shu vektorga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng.

Isboti. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ ning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzi S ga teng ekanligi bizga ma’lum. U holda aralash ko‘paytma ta’rifidan

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right)=\left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\varphi=S\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\varphi. \tag{8}$$

Bu yerda φ $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchak.

Ammo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan qurilgan parallelepiped hajmi, asosining yuzi S va balandligi h ko‘paytmasiga teng (8-shaklga qarang). $h=\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\cos\varphi\right|$ ekanidan

$$V=Sh=S\left|\vec{c}\right|\left|\cos\varphi\right|. \tag{9}$$

(8) va (9) dan $V=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ ni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Natija.

$$V_{pir.}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \tag{10}$$

$\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

$$\left[\vec{a}\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{\mathrm{j}}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

vektorni $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{\mathrm{j}}+z_3\vec{k}$ vektorlarga skalyar ko‘paytiramiz.

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}x_3+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Demak,

$$\left(\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Shunday qilib, isbotlangan teoremadan $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ va $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi nolga teng, ya’ni

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lgandagina ularning komplanar bo‘lishi kelib chiqadi.

2-misol: $\vec{a}(1,2,3)$, $\vec{b}(-1,3,4)$ va $\vec{c}(2,5,2)$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmini toping.

Yechish: (11) formulaga asosan

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = |6+16-15-18-20+4| = |-27| = 27 \text{ kub birlik.}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Vektor ko‘paytma xossalarini aytib bering.
3. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni vektor ko‘paytmasi qanday topiladi?
4. Vektorlarni aralash ko‘paytmasi qanday topiladi?
5. Vektor ko‘paytma yordamida parallelepipedning hajmi qanday hisoblanadi?

III BOB. TEKISLIKDA VA FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

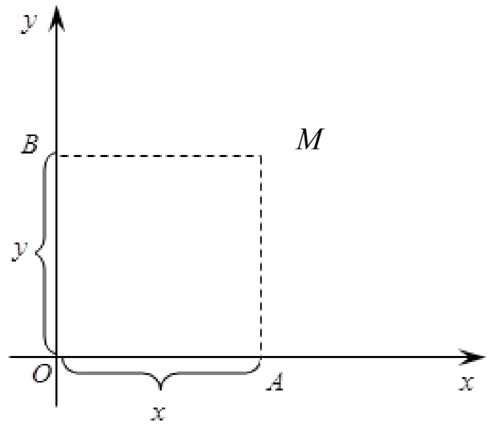
12-§. Analitik geometriya fani. To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi. Qutb koordinatalar sistemasi

1. Analitik geometriya fani geometrik obyektlarni ularning koordinatalari yoki tenglamalari orqali o‘rganuvchi oliy matematikaning bir bo‘limidir.

2. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi

Ikkita o‘zaro perpendikular, bir xil masshtabli bo‘lgan Ox va Oy o‘qlar tekisligidagi to‘g‘ri burchakli koordinatalar, umumiy bog‘lanishi O nuqtaga ega sistemasini hosil qiladi (10-shakl).

Ox o‘qi abssissa, Oy o‘qi ordinata o‘qi deb aytiladi.



10-shakl.

O‘qlarning kesishish nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Ox va Oy o‘qlar joylashgan tekislik, koordinatalar tekisligi deb ataladi va Oxy kabi belgilanadi.

M nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Bu nuqtadan Ox va Oy o‘qlariga mos ravishda MA va MB perpendikularlar tushiramiz.

$OA = x$ va $OB = y$ kesmalarni M nuqtaning Oxy koordinatalar sistemasidagi koordinatalari deb ataymiz. x M nuqtaning abssissasi, y ordinatasi deyiladi.

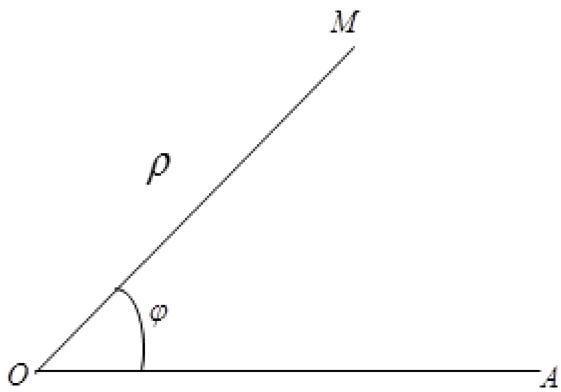
x va y koordinatalarga ega bo‘lgan M nuqta shartli ravishda $M(x;y)$ ko‘rinishida yoziladi. Bunda qavs ichidagi birinchi koordinata abssissasini, ikkinchi koordinatasi ordinatani bildiradi.

Koordinatalar boshi $(0;0)$ koordinataga ega. Masalan: $M(-1;2)$ nuqtaning abssissasi $x=-1$, ordinatasi $y=2$. Shunday qilib, to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidagi har bir M nuqtaga yagona $(x;y)$ juftlik mos keladi.

3. Qutb koordinatalar sistemasi

Biz qutb koordinatalar sistemasi deb ataluvchi sistemani o‘rganamiz. Bu sistema to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kabi juda muhim bo‘lib, u ko‘p qo‘llaniladi.

Qutb koordinatalar sistemasi, qutb deb ataluvchi O nuqtadan chiquvchi va qutb o‘qi deb ataluvchi OA nur, uzunlikni o‘lchash uchun masshtabning berilishi bilan xarakterlanadi. Bundan tashqari, qutb sistemasini berilishida O nuqtaning atrofida qanday burilish musbat burilish ekanligini bilish kerak. Odatda musbat burilish deb, soat strelkasiga qarama-qarshi burilish qabul qilinadi. Qutb va qutb o‘qi berilgan bo‘lsin. (11-shakl).



11-shakl

M nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqtadan O nuqtagacha bo‘lgan masofani ρ, $(\rho = OM)$ bilan belgilaymiz. φ bilan OA nur OM nurning ustiga tushish uchun burilishi kerak bo‘lgan burchakni belgilaymiz. $\varphi = \measuredangle AOM \Rightarrow 0 \le \varphi < 2\pi$ bo‘lgan qiymatlarni qabul qiladi.

4. Qutb va Dekart koordinatalari sistemalari orasidagi bog‘lanish

Tekislikdagi M nuqta koordinatalarni qutb va to‘g‘ri burchakli koordinatalari orasidagi bog‘lanishni ko‘ramiz.

Bunda koordinatalar boshi bilan, qutb boshini ustma-ust, qutb o‘qini abssissa o‘qi bilan bir xil yo‘nalishda joylashtiramiz.

Faraz qilaylik, M nuqtaning to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi x va y koordinatalariga, qutb koordinatalar sistemasi esa ρ va φ koordinatlarga ega bo‘lsin. Bunda

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \tag{1}$$

bo‘lishi ravshan.

(1) formula Dekart koordinatalarini qutb koordinatalari orqali ifodalovchi formulalardir.

Qutb koordinatalarining Dekart koordinatalari orqali ifodalarni shu formulalarning o‘zidan yoki bevosita hosil qilish mumkin.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Ammo shuni eslatamizki, bu formuladan φ ni ikkita qiymati topiladi, bu qiymatlardan biz (1) tenglamani qanoatlantiradigan qiymatini olamiz.

5. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirish

Analitik geometriyaning qator masalalarini hal qilishda, biz o‘rgangan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidan boshqa to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritishni ham talab qiladi.

Bunda tabiiy holda nuqtaning koordinatalari va egri chiziq tenglamasi ham o‘zgaradi. Bizning oldimizda bir koordinatalar sistemasida biror nuqtaning koordinatalarini bilgan holda, ikkinchi koordinatalar sistemasida shu nuqtaning koordinatalarini qanday topish mumkin degan masala qo‘yiladi.

Bu masalani yechishda bizga koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi yordam beradi.

Ulardan ikkitasi bilan tanishamiz:

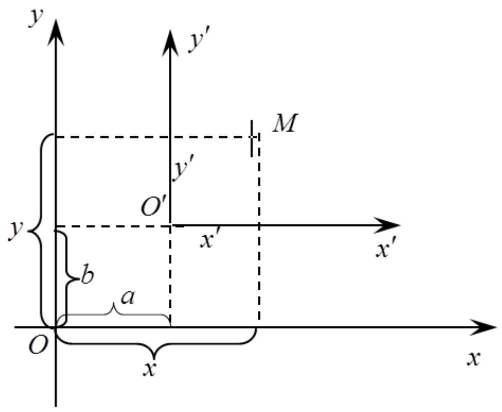
1. Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish, bunda koordinata o‘qlari yo‘nalishi o‘zgarishsiz qoladi, koordinatalar boshi o‘zgaradi.

2. Koordinata o‘qlarini burish, bunda koordinata o‘qlarining har ikkalasi ham bir xil burchakka bir tomonga buriladi, koordinatalar boshi o‘zgarishsiz qoladi.

6. Koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish

Yangi koordinatalar sistemasining boshi O' eski koordinatalar sistemasida $(a;b)$ koordinatalarga ega bo‘lsin, (12-shakl).

Eski koordinatalar sistemasida $(x;y)$ koordinataga ega bo‘lgan M nuqta yangi koordinatalar sistemasida $(x';y')$ koordinatalarga ega bo‘ladi. 12-shakldan quyidagini yozamiz.



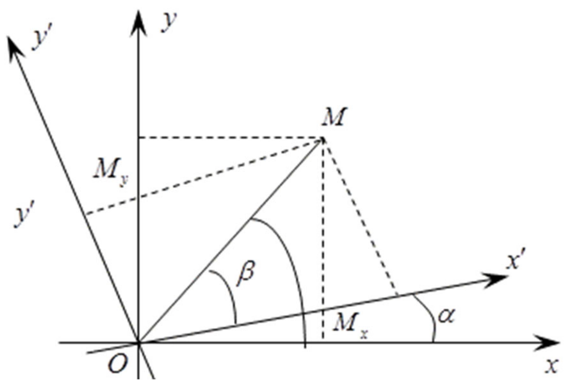
12-shakl.

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \tag{3}$$

ya’ni M nuqtaning yangi koordinatalari eski koordinatalaridan yangi koordinatalar sistemasining eski koordinatalar sistemasidagi boshining koordinatalarini ayrilganiga teng.

7. Koordinata o‘qlarini burish

Faraz qilaylik yangi koordinatalar sistemasi $Ox'y'$, Oxy koordinatalar sistemasi boshi O ni o‘zgartirmay uning o‘qlarini α burchakka burish natijasida hosil bo‘lsin, ya’ni $\angle xOx' = \alpha$ (13-shakl)



13-shakl.

M nuqtaning radius vektori $r = |OM|$ ning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchagi $\alpha + \beta$ ga teng bo‘ladi, bundan:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \\ y &= r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \qquad (4)$$

M nuqtaning yangi koordinatalari x' va y' mos ravishda $x' = r\cos\beta$ va $y' = r\sin\beta$ larga teng bo‘lganligi uchun, bularni (4) ga qo‘yib,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (5)$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasidan x' va y' larni x va y orqali ifodalab,

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (6)$$

tengliklarga ega bo‘lamiz.

1-misol: Markazi $O(-2;1)$ nuqtada bo‘lgan, o‘qlari Oxy koordinatalar sistemasiga parallel bo‘lgan $Ox'y'$ koordinatalar sistemasida $M(3;5)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish: (3) formulaga asosan

$$x' = 3 + 2 = 5, \quad y' = 5 - 1 = 4 .$$

M nuqtaning yangi koordinatalar sistemasidagi koordinatalari $M(5;4)$ ekan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi qanday sistema?
2. Qutb koordinatalar sistemasini tushuntiring.
3. Qutb koordinatalar sistemasiga Dekart koordinatalar sistemasidan qanday o‘tiladi?
4. Koordinatalar sistemasini berilgan burchakka burish va parallel ko‘chirishni tushuntirib bering.

13-§. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. Uchburchakning yuzi

1.Ikki nuqta orasidagi masofa

Oxy tekislikda ikkita $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, bu nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. $|AB| = d$ ikki nuqta orasidagi masofa bo‘lsin. 14-shakldan ko‘rinadiki, ΔABC to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lib, tomonlarining uzunliklari $|AC| = |x_2 - x_1|,\ |BC| = |y_2 - y_1|,$ bo‘ladi. Pifagor teoremasiga asosan

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 .$$

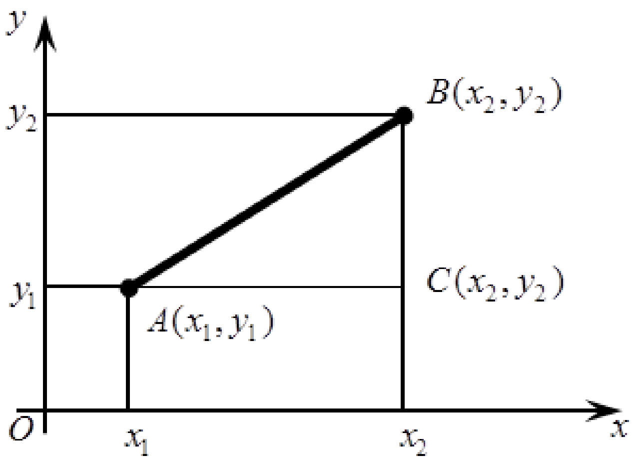
Bundan

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

yoki

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \qquad (7)$$

Demak, berilgan $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa bu nuqtalarning bir xil ismli koordinatalari ayirmalari kvadratlarining yig‘indisidan olingan kvadrat ildizning arifmetik qiymatiga teng.



14-shakl.

Xususan, koordinata boshi $O(0;0)$ dan $A(x;y)$ nuqtagacha bo‘lgan masofa

$$|OA| = d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

bo‘ladi. Agar nuqtalar Ox o‘qda yotgan bo‘lib, $P(x_1;0)$ va $Q(x_2;0)$ koordinatalarga ega bo‘lsa, bu masofa quyidagicha topiladi: $|PQ| = |x_2 - x_1|$. Agar nuqtalar Oy o‘qda yotgan bo‘lib, $M(0;\mathrm{y}_1)$ va $N(0;\mathrm{y}_2)$ koordinatalarga ega bo‘lsa, bu masofa quyidagicha topiladi: $|MN| = |y_2 - y_1|$.

1-masala. Ushbu $A(1;2)$ va $B(4;6)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish: Bu misolda $x_1 = 1,\ y_1 = 2$ va $x_2 = 4,\ y_2 = 6$ bo‘lgani uchun (7) formuladan foydalanib,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

ni topamiz.

2.Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

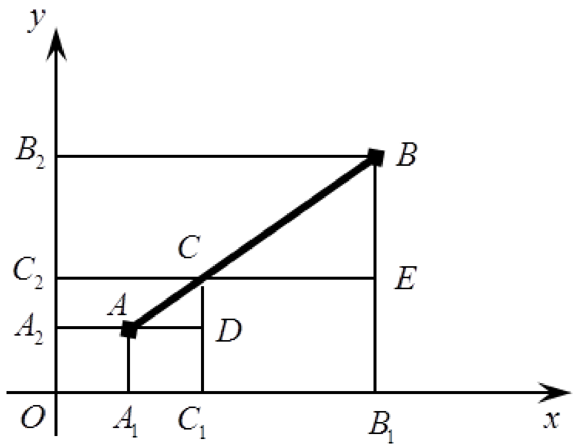
Oxy tekisligida $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ularni tutashtirish natijasida $|AB|$ kesma hosil qilingan. $|AB|$ kesmadan shunday C nuqtani topish kerakki, $|AC|$ kesmaning $|CB|$ kesmaga nisbati o‘zgarmas λ songa teng bo‘lsin, ya’ni

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\lambda.$$

Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalari x va y bo‘lsin. 15-shakldan ko‘rinadiki,

$$OA_1=x_1,\ OC_1=x,\ OB_1=x_2,$$
$$OA_2=y_1,\ OC_2=y,\ OB_2=y_2\ .$$

Bundan



15-shakl.

$$|A_1C_1|=|x-x_1|,\quad |C_1B_1|=|x_2-x|,\quad |A_2C_2|=|y-y_1|,\quad |C_2B_2|=|y_2-y|$$

kelib chiqadi. ΔACD hamda ΔCBE uchburchaklar o‘xshashligidan

$$\frac{|AD|}{|CE|}=\frac{|CD|}{|BE|}=\frac{|AC|}{|CB|} \tag{8}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

$$|AD|=|A_1C_1|=|x-x_1|,\quad |CE|=|C_1B_1|=|x_2-x|,$$
$$|CD|=|A_2C_2|=|y-y_1|,\quad |BE|=|C_2B_2|=|y_2-y|$$

bo‘lishini hamda

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda$$

ekanini e’tiborga olsak, (8) dan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarning birinchisidan x ni topamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \Rightarrow x-x_1=\lambda x_2-\lambda x \Rightarrow x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Xuddi shu usul bilan, ikkinchi tenglikdan y ni topamiz:

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Demak $|AB|$ kesmani berilgan λ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning x va y koordinatalari

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{9}$$

formula bilan topiladi. Xususan, $C(x;y)$ nuqta $|AB|$ kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqta bo‘lsa, $(AC=CB)$ u holda

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\lambda=1$$

bo‘lib, (9) formula

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \tag{10}$$

ko‘rinishni oladi.

Shuni ham ta’kidlash lozimki, $0<\lambda<1$ bo‘lsa, C nuqta markazdan A nuqta tarafda, $\lambda=1$ bo‘lsa markazda, $\lambda>1$ bo‘lsa C nuqta markazdan B nuqta tarafda joylashadi.

2-masala. $A(-2;2)$ va $B(6;4)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $\lambda=0,2$ nisbatda bo‘ladigan $C(x;y)$ nuqta topilsin.

Yechish: $C(x;y)$ nuqtaning koordinatalarini (9) formuladan foydalanib, topamiz.

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-2+0,2\cdot 6}{1+0,2}=\frac{-2+1,2}{1,2}=-\frac{2}{3},$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+0,2\cdot 4}{1+0,2}=\frac{2+0,8}{1,2}=\frac{7}{3}.$$

Demak, AB kesmani $\lambda=0,2$ nisbatda bo‘luvchi nuqta $C\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

3. Uchburchakning yuzi

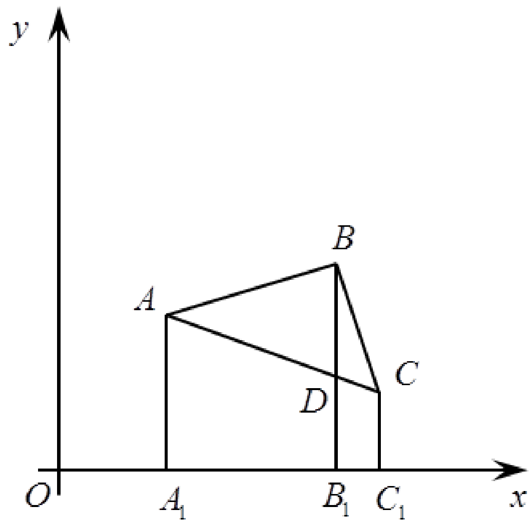
Ma’lumki, o‘rta maktab matematika kursidan uchburchak yuzini tomonlarining uzunliklari orqali topishni bilamiz.

Uchburchak yuzini uchlarini koordinatalari orqali topishni o‘rganamiz. Oxy tekisligida ΔABC o‘zining $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ koordinatalari bilan berilgan bo‘lsin, (16-shakl).

A, B, C nuqtalarni Ox o‘qdagi proyeksiyalari $A_1(x_1;0)$, $B_1(x_2;0)$, $C_1(x_3;0)$ nuqtalardan iborat bo‘ladi.

Izlanayotgan ΔABC ning yuzi ΔABD va ΔDBC larning yuzlarini yig‘indisidan iborat.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} \tag{5}$$



16-shakl.

Shakldan ko‘rinadiki, A_1ABB_1, B_1BCC_1 va A_1ACC_1 lar trapetsiyalardir.

Demak,

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{A_1A + BB_1}{2} \cdot A_1B_1$$

bo‘ladi. Koordinatalarini e’tiborga olsak,

$$S_{A_1ABB_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1). \tag{11}$$

Xuddi shuningdek,

$$S_{B_1BCC_1} = \frac{B_1B + CC_1}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2), \tag{12}$$

$$S_{A_1ACC_1} = \frac{A_1A + CC_1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) \tag{13}$$

natijalar hosil bo‘ladi. Ravshanki

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC} = S_{A_1ABB_1} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$$

bo‘ladi. (6), (7), (8) natijalardan foydalanib topamiz:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{y_1+y_2}{2}\cdot(x_2-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)-\frac{y_1+y_3}{2}(x_3-x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)-(y_1+y_3)(x_3-x_1)\right],$$

$S_{\Delta ABS}=\pm\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)-(y_1+y_3)(x_3-x_1)]$. (14) formula ΔABC ni yuzini uchlarining koordinatalari orqali ifodalovchi formula bo‘ladi. (14) formulani

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (14^1)$$

holda ham yozish mumkin.

3-masala. Uchlari $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish:

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\qquad y_1=1,\ y_2=4,\ y_3=3$$

ekanligidan (9) formulaga qo‘ysak,

$$S_{\Delta ABC}=\pm\frac{1}{2}[(1+4)(2-1)+(4+3)(3-2)-(3+1)(3-1)]=\pm\frac{1}{2}(5+7-8)=2$$

(kv.birl.)

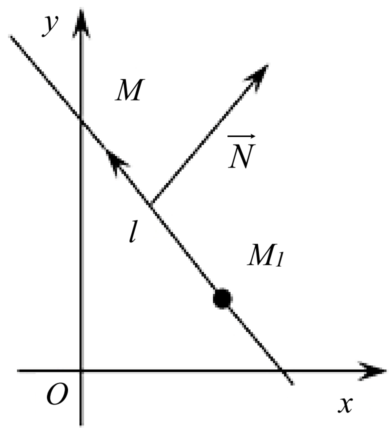
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Analitik geometriya fani nimani o‘rganadi?
2. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
3. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish formulasini yozing.
4. Uchburchakning yuzini topish formulalarini yozing.

14-§. To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari. Berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikular o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

1. Oxy tekislikda l to‘g‘ri chiziqni qaraymiz. Bu to‘g‘ri chiziqning birorta $M_1(x_1;y_1)$ nuqtasi va bu to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu vektor to‘g‘ri chiziqning normal vektori deyiladi. M_1 nuqta va $\vec{N}$ normal vektor l

to‘g‘ri chiziqning Oxy tekislikdagi holatini to‘la aniqlaydi. l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani tanlab,



17-shakl.

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}$$

vektorni quramiz. $\vec{N}$ va $\overrightarrow{M_1M}$ vektorlar o‘zaro perpendikular bo‘lganligidan ularning skalyar ko‘paytmasi nolga teng: $\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$. Skalyar ko‘paytmani proyeksiyalar orqali ifodalab, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0 \tag{15}$$

l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalari (15) ni qanoatlantiradi va u berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikular o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi.

4-masala. $M_1(-1;3)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{N}=2\vec{i}-5\vec{j}$ vektorga perpendikular to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Bu masalada $a=2, b=-5, x_1=-1, y_1=3$ bo‘lganligidan (15) formulaga asosan

$$2(x+1)-5(y-3)=0 \text{ yoki } 2x-5y+17=0$$

tenglamani hosil qilamiz.

2. (15) tenglamani soddalashtiramiz. Buning uchun

$$ax+by-ax_1-by_1=0, \qquad c=-ax-by$$

belgilash kiritib,

$$ax+by+c=0 \tag{16}$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. (16) to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

x va y o‘zgaruvchiga nisbatan birinchi tartibli tenglama Oxy tekislikda l to‘g‘ri chiziqni ifodalar ekan.

(16) tenglamada $c=0$ bo‘lsa, $ax+by=0 \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x$ tenglama hosil bo‘ladi, bu esa koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.

$a=0$ bo‘lsa, $y=-\frac{c}{b}$, Ox o‘qqa parallel o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq kelib chiqadi.

$b=0$ bo‘lsa, $x=-\frac{c}{a}$, Oy o‘qqa parallel o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi.

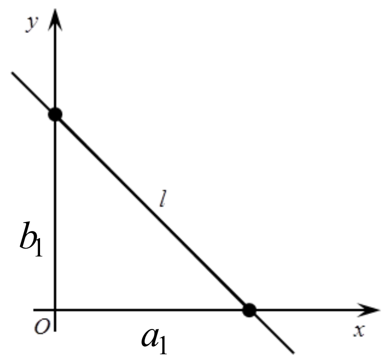
3. (16) tenglamadan ozod had $c \neq 0$ ni tenglikni o‘ng tomoniga o‘tkazib, $ax+by=-c$ hosil bo‘lgan tenglikning har ikki tomonini $-c$ ga bo‘lib, shakl almashtirish bajarilgandan so‘ng

$$\frac{x}{-c/a}+\frac{y}{-c/b}=1, \quad a_1=-\frac{c}{a}, \quad b_1=-\frac{c}{b}$$

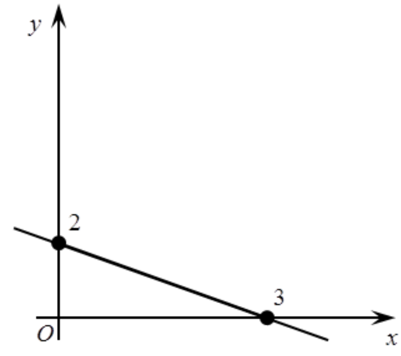
belgilash kiritsak,

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1 \tag{17}$$

to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi hosil bo‘ladi. Bu tenglamada a_1 Ox o‘qdan, b_1 esa Oy o‘qdan ajratgan kesmalari bo‘ladi (18-shakl).



18-shakl.

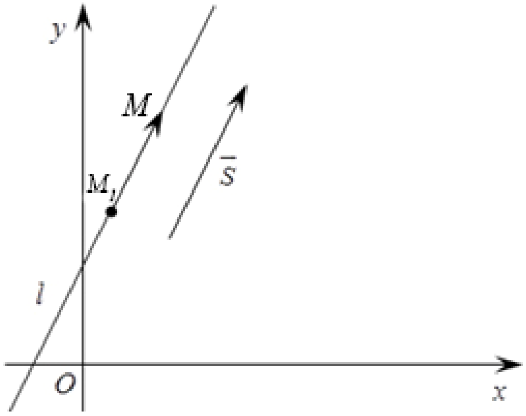


19-shakl.

5-masala. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ to‘g‘ri chiziq yasalsin.

Yechish: Ox o‘qdan $x=3$ va Oy o‘qdan $y=2$ nuqtalarni belgilab (19-shakl), birlashtirsak, izlangan to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi.

4. Oxy tekislikda ixtiyoriy l to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lgan $M_1(x_1;y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. l to‘g‘ri chiziqqa parallel $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}$ vektor berilgan bo‘lsin. $\vec{S}$ vektor l to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.



20-shakl.

M_1 nuqta va $\vec{S}$ vektor l to‘g‘ri chiziqni to‘la aniqlaydi. $M(x;y)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin.

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j} \text{ va } \vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}$$

vektorlar kollinear bo‘lganligidan mos koordinatalari nisbatiga teng

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \tag{18}$$

Hosil bo‘lgan (18) tenglama l to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

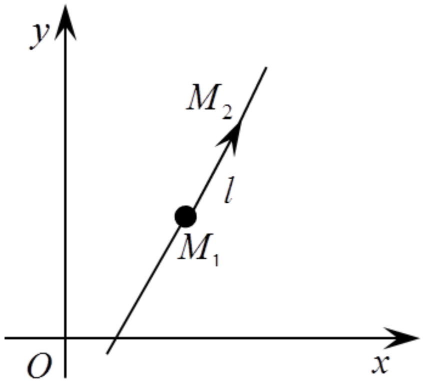
5. Oxy tekislikda $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘l-sin. Bu nuqtalardan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziqni kanonik tenglamasini tuzamiz.

Yo‘naltiruvchi $\vec{S}$ vektor sifatida

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$$

vektorni olamiz. $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$ bo‘lganligidan (18) formulaga asosan

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{19}$$



21-shakl.

ga ega bo‘lamiz. (19) tenglama berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi, (19) tenglamani quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (19')$$

6-masala. $M_1(1;2)$ *va* $M_2(-2;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: (19) formulada $x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ \ x_2 = -2,\ y_2 = 3$ ekanini e’tiborga olsak,

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{-2-1} \Rightarrow x + 3y - 7 = 0$$

ni hosil qilamiz.

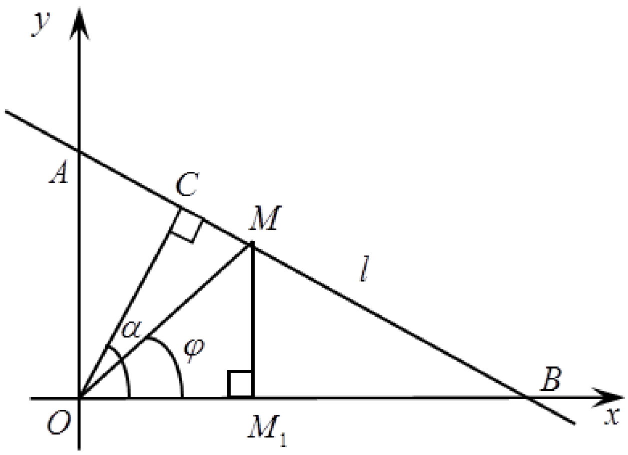
6. Oxy tekislikda l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziq Oxy koordinata boshidan o‘tkazilgan perpendikularning uzunligi P va bu perpendikular bilan Ox o‘qning musbat yo‘nalishi orasidagi burchak α bo‘lsin (22-shakl).

Berilgan P va α tekislikdagi l to‘g‘ri chiziqni to‘la aniqlaydi.

To‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasini tanlab bu nuqtadan Ox o‘qqa perpendikular tushirsak, M_1 nuqta perpendikularning asosi bo‘ladi. Ravshanki, $OM_1 = x,\ \ MM_1 = y$. Koordinata boshi bilan M nuqtani tutashtirsak, ΔOMM_1 to‘g‘ri burchakli uchburchak hosil bo‘ladi. $\angle MOM_1 = \varphi$ desak,

$$x = OM_1 = OM\cos\varphi, \quad y = MM_1 = OM\sin\varphi \tag{20}$$

bo‘ladi.



22-shakl.

Endi to‘g‘ri burchakli OCM uchburchakni qaraylik. Bu uchburchakda $\angle COM = \alpha - \varphi$ bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{CO}{OM} = \frac{P}{OM} = \cos(\alpha - \varphi).$$

Demak,

$$P = OM\cos(\alpha - \varphi). \tag{21}$$

Ma’lumki,

$$\cos(\alpha - \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi. \tag{22}$$

(20), (21) va (22) munosabatlardan

$$P = OM\cos\alpha\cos\varphi + OM\sin\alpha\sin\varphi = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Bu tenglikdan esa

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - P = 0 \tag{23}$$

to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi hosil bo‘ladi.

Endi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko‘rinishga keltirishni ko‘raylik. Berilgan to‘g‘ri chiziq (16) umumiy va (23) normal tenglamalarga ega bo‘lsin. (16) va (23) bitta to‘g‘ri chiziqni anglatgani uchun ularning koeffitsiyentlari proporsional bo‘ladi. Demak, (16) tenglamani biror μ songa ko‘paytirsak,

$$\mu ax + \mu by + \mu c = x\cos\alpha + y\sin\alpha - P$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa

$$\mu a = cos\alpha, \quad \mu b = \sin\alpha, \quad \mu c = -P$$

natijaga ega bo‘lamiz.

$$\mu^2 a^2 + \mu^2 b^2 = cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

bundan esa

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{24}$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini normallovchi ko‘paytuvchi deb ataluvchi μ ga ko‘paytirib normal holga keltirilar ekan. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had c ning ishorasiga teskari olinadi.

7-masala. To‘g‘ri chiziqning $5x + 12y - 26 = 0$ umumiy tenglamasi normal tenglamaga keltirilsin.

Yechish: Normallovchi ko‘paytuvchini hisoblaymiz.

$$\mu = +\frac{1}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}.$$

Berilgan tenglamani μ ga ko‘paytirib,

$$\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$$

normal tenglamaga ega bo‘lamiz.

9-shaklda $OM = \rho$ qutb radiusi Ox o‘qni esa qutb o‘qi sifatida qarasak, (21) dan

$$\rho = \frac{P}{\cos(\alpha - \varphi)} \tag{25}$$

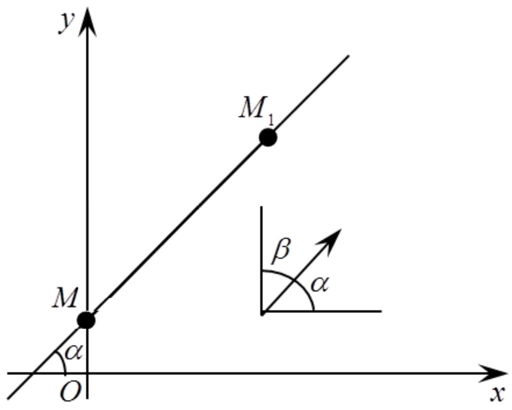
to‘g‘ri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi hosil bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini yozing.
2. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasini yozing.
3. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.
4. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
5. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini yozing.

15-§. Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

1. Oxy tekislikda Oy o‘qni M nuqtada kesib o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin (23-shakl). Ox o‘q bilan l to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni α deb belgilaylik.



23-shakl.

l to‘g‘ri chiziqning holati unda yotuvchi $M_1(x_1;y_1)$ nuqta va α burchakning berilishi bilan to‘la aniqlanadi.

Yo‘naltiruvchi vektor sifatida Ox o‘q bilan α burchak tashkil qiluvchi

$$\overrightarrow{S_0} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j}$$

birlik vektorni olamiz. Ravshanki,

$$\cos\beta = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

bo‘lgani uchun

$$\overrightarrow{S_0} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}\ .$$

Shuning uchun $m = \cos\alpha,\ n = \sin\alpha$ deb olishga to‘g‘ri keladi. U holda (18) tenglamadan

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\sin\alpha} \qquad (26)$$

hosil bo‘ladi. (26) ni shakl almashtirib,

$$y - y_1 = tg\alpha \cdot (x - x_1) \qquad (27)$$

ni hosil qilamiz. $tg\alpha = k$ belgilash bajarsak,

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (28)$$

tenglama hosil bo‘ladi. $k = tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi. (28) tenglama berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi.

8-masala. $M_1(2;-1)$ nuqtadan o‘tib, Ox o‘q bilan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

(28) formulaga asosan

$$y + 1 = \sqrt{3}(x - 2)$$

yoki

$$\sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Shunga e’tibor qaratish kerakki, agar l to‘g‘ri chiziq Oy o‘qqa parallel bo‘lsa, ya’ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ uni burchak koeffitsiyenti $k = tg\alpha$ aniqlanmagan bo‘ladi va bu to‘g‘ri chiziqni (28) ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. Bu holda to‘g‘ri chiziq $x = x_1$ ko‘rinishida bo‘ladi.

Tekislikdagi biror M nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami to‘g‘ri chiziqlar dastasi deyiladi. M nuqta esa dasta markazi deyiladi.

k ning turli qiymatlarida markazi $M_1(x_1;y_1)$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasini ($x = x_1$ chiziq hisobga olinmaydi) aniqlaydi.

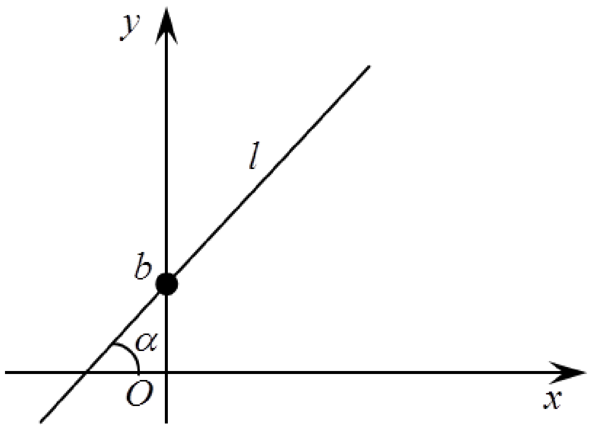
2. Ox o‘qni α burchak ostida kesuvchi to‘g‘ri chiziq Oy o‘qni $B(0;b)$ nuqtada kesib o‘tsin.

U holda $x = 0,\ y = b$ deb olib, bu to‘g‘ri chiziqni tenglamasini tuzamiz.

$$y - b = k(x - 0)$$

yoki

$$y = kx + b \qquad (29)$$



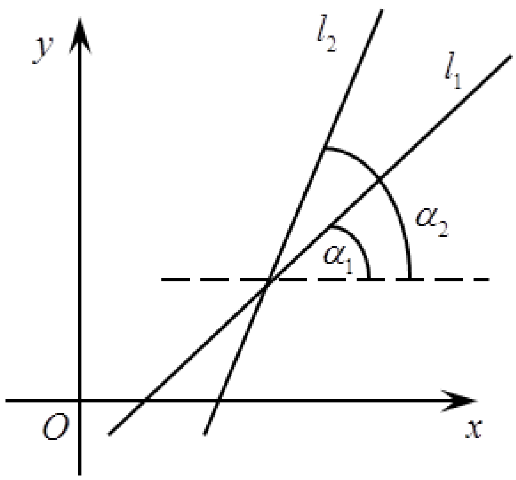
24-shakl.

ni hosil qilamiz. (29) tenglama l to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi. l to‘g‘ri chiziqning tenglamasi umumiy tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uni y ga nisbatan yechib,

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

ni hosil qilamiz va $k=-\frac{a}{b}$, $b=\frac{c}{b}$ belgilash kiritsak, (29) tenglama kelib chiqadi.

9-masala. $2y-2x+3=0$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘qi bilan hosil qiluvchi burchak, Oy o‘qni kesuvchi nuqtaning esa koordinatasi aniqlansin.



25-shakl.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziqni y ga nisbatan yechsak, $y = x - 1{,}5$ hosil bo‘ladi. Bu yerda $k = tg\alpha = 1,\ b = -1{,}5$. Shunday qilib, ordinata o‘qini $b = -1{,}5$ da kesadi, Ox o‘qni kesishuvidan hosil bo‘lgan burchak $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

3. Oxy tekislikda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar

$$y = k_1x + b_1 \text{ va } y = k_2x + b_2$$

tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. Bu ikki to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchakning tangensini topamiz. l_1 to‘g‘ri chiziq Ox o‘qni α_1 burchak ostida, l_2 to‘g‘ri chiziq esa α_2 burchak ostida kesib o‘tsin. 25-shakldan ko‘rinadiki, l_2 $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ yoki $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, demak,

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1}.$$

$tg\alpha_1 = k_1,\ tg\alpha_2 = k_2$ ekanidan

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \tag{30}$$

Shunday qilib, agar ikkita kesishuvchi l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lmasa, ular orasidagi burchak (30) formula bo‘yicha topiladi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, yoki ustma-ust tushsa, $\alpha_2 = \alpha_1$ va $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, ya’ni

$$k_2 = k_1 \tag{31}$$

Aksincha, agar $k_2 = k_1$ bo‘lsa, $\alpha_2 = \alpha_1$ bo‘ladi hamda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi yoki ustma-ust tushadi. (31) ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti deyiladi.

Agar l_1 va l_2 chiziqlar perpendikular bo‘lsa, (30) formula ma’nosini yo‘qotadi. Biroq bu holda to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakning kotangensini qarash mumkin. U holda (30) formula quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$ctg\varphi = ctg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}.$$

To‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lganida $ctg\varphi = ctg\frac{\pi}{2} = 0$, demak,

$$\frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0$$

bundan esa

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{yoki} \quad k_1 = -\frac{1}{k_2} \tag{32}$$

to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hosil bo‘ladi.

10-masala. $3x + y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq bilan $x + 2y + 1 = 0$, $6x + 2y - 1 = 0$ va $x - 3y + 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan burchakni toping.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamalarini burchak koeffitsiyentli tenglama shakliga keltiramiz:

$$y = -3x + 6, \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad y = -3x + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Burchak koeffitsiyentlari mos ravishda

$$k_1 = -3, \quad k_2 = -\frac{1}{2}, \quad k_3 = -3, \quad k_4 = \frac{1}{3},$$

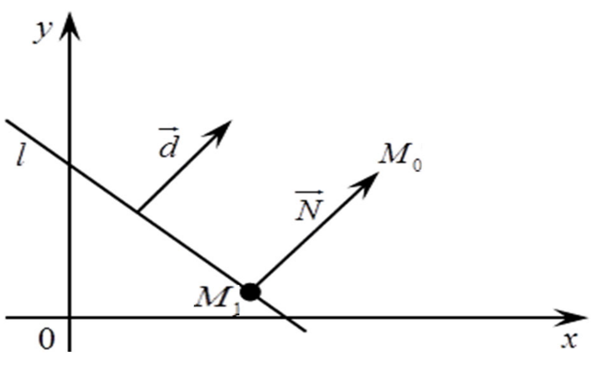
$$tg\varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = 1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

$k_1 = k_3 = -3$ bo‘lgani uchun $l_2 \parallel l_1$ ekan. $k_1 k_4 = k_3 k_4 = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1.$ Bundan $l_1 \perp l_4$, va $l_3 \perp l_4$ ekanligi kelib chiqadi.

4. Oxy tekislikda l to‘g‘ri chiziq $ax + by + c = 0$ formula bilan va $M_0(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin.

M_0 nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan d masofani topamiz.

M_0 nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning asosi $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada bo‘lsin. Izlanayotgan d masofa unga mos



26-shakl.

$$\vec{d}=\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1)\vec{i}+(y_0-y_1)\vec{j}$$

vektorning moduliga teng.

$\vec{d}$ bilan l to‘g‘ri chiziqning normal vektori $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}$ o‘zaro kollinear bo‘lganidan ular orasidagi burchak $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ bo‘ladi. Bundan esa $\cos\varphi=\pm1$.

Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasidan ushbu tenglik o‘rinli:

$$\vec{N}\cdot\vec{d}=|\vec{N}||\vec{d}|\cos\varphi=\pm|\vec{N}||\vec{d}|. \tag{33}$$

Ikkinchi tomondan skalyar ko‘paytmani koordinatalar orqali ifodasi quyidagicha:

$$\vec{N}\cdot\vec{d}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=ax_0+by_0+(-ax_1-by_1).$$

M_1 nuqta l to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun $ax_1+by_1+c=0$ bo‘ladi. Bundan $c=-ax_1-by_1$ bo‘lishini hisobga olsak, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\vec{N}\cdot\vec{d}=ax_0+by_0+c. \tag{34}$$

(33) va (34) taqqoslab,

$$\pm|\vec{N}||\vec{d}|=ax_0+by_0+c \text{ yoki } d=\pm\frac{ax_0+by_0+c}{|\vec{N}|}$$

ni hosil qilamiz.

$|\vec{N}|=\sqrt{a^2+b^2}$ bo‘lgani uchun $d=\pm\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ yoki

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{35}$$

formula hosil bo‘ladi.

(35) $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $ax+by+c=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish formulasidir.

11-masala. $M_0(3;2)$ nuqtadan $3x+4y+8=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish: $a=3,\ b=4,\ c=8$ va $x_0=3,\ y_0=2$ bo‘lganidan (35) formulaga asosan

$$d=\frac{|3\cdot3+4\cdot2+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

5. $ax+by+c=0$ va $a_1x+b_1y+c_1=0$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning kesishish nuqtasini topish talab etilgan bo‘lsin. Bu nuqta to‘g‘ri chiziqlarning har ikkisiga ham tegishli bo‘lgani uchun uning koordinatalari har ikki to‘g‘ri chiziqni ham qanoatlantirishi kerak.

Shunday qilib, ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatasini topish uchun

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \tag{36}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

6. $ax + by + c = 0$ va $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisalarining tenglamalari

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \tag{37}$$

formula bilan topiladi.

12-masala. $2x + y - 1 = 0$ va $x + 2y + 1 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping va burchak bissektrisasining tenglamasini tuzing.

Yechish: 1) (36) formulaga asosan

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, $(1;-1)$ nuqta kesishish nuqtasining koordinatalari bo‘lishini ko‘ramiz.

2) (37) formulaga asosan

$$\frac{2x + y - 1}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{x + 2y + 1}{\sqrt{4+1}}, \quad 2x + y - 1 = \pm(x + 2y + 1),$$

$$x - y - 2 = 0, \quad x + y = 0.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing.
2. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
3. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasini yozing.
4. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini topish formulasini yozing.

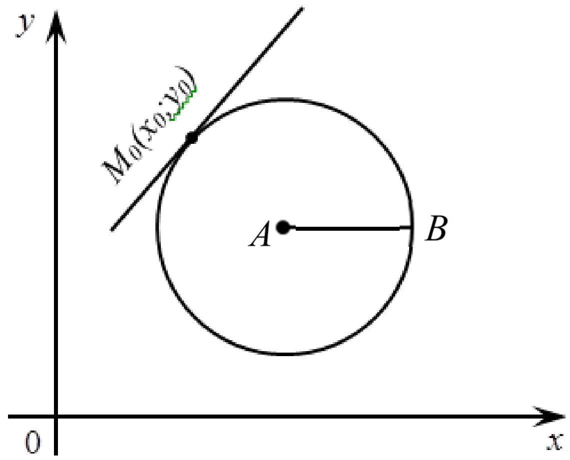
16-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.
Aylana va ellips tenglamalari

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (38)$$

Odatda (38) tenglamani ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamaga keyinroq batafsil to‘xtalamiz. Sodda ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni ko‘rib chiqamiz.

Ularni tenglamalarini tuzib, geometrik xossalarini o‘rganamiz.



27-shakl

1. Aylana va uning tenglamasi.

Tekislikda biror $A(a;b)$ nuqtadan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plami aylana deb ataladi.

Aylanada ixtiyoriy nuqta olib, uni $B(x;y)$ bilan belgilaylik (27-shakl). Aylana ta’rifiga asosan $|AB|$ masofa o‘zgarmas. Uni R bilan belgilaylik:

$$|AB| = R.$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$|AB|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

bo‘ladi. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, quyidagi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{39}$$

tenglamaga kelamiz. Demak, aylanada yotuvchi ixtiyoriy $B(x;y)$ nuqtaning koordinatalari (39) tenglamani qanoatlantiradi. (39) tenglama aylananing tenglamasini ifodalaydi. $A(a;b)$ nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deyiladi.

Masalan, markazi $A(-3;4)$ nuqtada, radiusi $R=3$ ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=9.$$

Agar (39) aylana markazining koordinatalaridan biri yoki ikkalasi nolga teng bo‘lsa, aylana markazi koordinata o‘qlaridan birida yoki koordinata boshida joylashgan bo‘ladi.

Bu holda aylana tenglamasi (39) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{40}$$

Bizga (39) tenglama, ya’ni $A(a;b)$ markazli, R radiusli aylana tenglamasi berilgan bo‘lsin. Bu tenglamani qavslarni ochib, quyidagicha yozish mumkin:

$$x^2-2ax+y^2-2by+a^2+b^2-R^2=0.$$

Agar $-a=D,\ -b=E,\ a^2+b^2-R^2=F$ deb olinsa, unda yuqoridagi tenglama

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$$

ko‘rinishga keladi. Bu esa $A=C=1,\ B=0$ bo‘lgan holdagi ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi ekanini bildiradi. Demak, aylana ikkinchi tartibli egri chiziqdan iborat.

Aksincha, (38) tenglamada $A=C,\ B=0$ bo‘lsa, bu ikkinchi tartibli egri chiziq aylana bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$A=C,\ B=0$ bo‘lgan holda (38) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$Ax^2+2Dx+Ay^2+2Ey+F=0. \tag{41}$$

Agar (41) dan to‘la kvadrat ajratsak,

$$A\left[\left(x+\frac{D}{A}\right)^2-\frac{D^2}{A^2}+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2-\frac{E^2}{A^2}\right]+F=0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Endi tenglikni har ikki tomonini A ga bo‘lib, qulay holda yozsak,

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A} \tag{42}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar

$$\frac{D}{A}=-a,\ \frac{E}{A}=-b,\ \frac{D^2}{A^2}+\frac{E^2}{A^2}-\frac{F}{A}=R^2$$

deb belgilasak, (42) tenglamaning ko‘rinishi, (39) holga keladi. Bu esa aylana tenglamasidir.

13-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq ushbu

$$x^2+y^2+2x-4y-20=0$$

tenglama bilan berilgan. Uning aylana tenglamasi ekanini ko‘rsatib, aylana markazi va radiusini toping.

Yechish: Berilgan tenglamadan to‘la kvadrat ajratsak,

$$x^2+y^2+2x-4y-20=(x+1)^2+(y-2)^2-25=0$$

bo‘lib, berilgan tenglama ushbu

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$$

ko‘rinishni oladi. Demak, aylananing markazi $A(-1;2)$ nuqtada bo‘lib, radiusi $R=5$ ga teng bo‘ladi.

Aylana bilan bitta $M_0(x_0;y_0)$ umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq aylanaga o‘tkazilgan urinma deb ataladi.

(40) formula bilan berilgan aylananing $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasidan o‘tuvchi urinma tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$x\cdot x_0+y\cdot y_0-R^2=0. \tag{43}$$

$A(a;b)$ markazli aylanaga $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma esa

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)=R^2 \tag{44}$$

ko‘rinishda bo‘ladi

14-masala. $x^2+y^2=8$ aylananing $M_0(2;2)$ nuqtasidan o‘tuvchi urinma tenglamasini tuzing.

Yechish: Bu urinmaning tenglamasi (43) formulaga asosan:

$$2x+2y-8=0 \Rightarrow x+y-4=0.$$

R radiusli aylanani parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0;2\pi] \tag{45}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

3. Ellips va uning tenglamasi

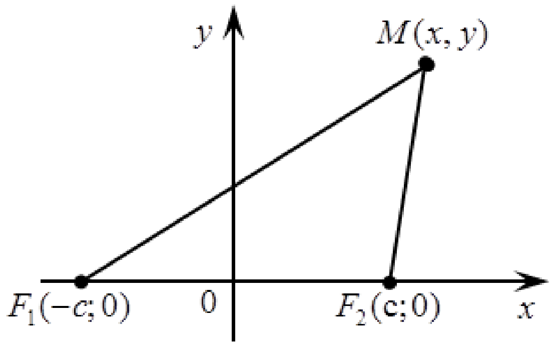
Ellips deb tekislikning barcha shunday nuqtalari to‘plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas kattalikdir (bu kattalik fokuslar orasidagi masofadan katta).

Fokuslarni F_1 va F_2 orqali, ular orasidagi masofani $2c$ orqali, ellipsning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisiga teng o‘zgarmas miqdorni $2a$ (shartga ko‘ra $2a > 2c$) orqali belgilaymiz.

Dekart koordinatalar sistemasini F_1 va F_2 fokuslar abssissa o‘qida, koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o‘rtasida qilib tanlaymiz (28-shakl). U holda fokuslar $F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.

Ellipsning ixtiyoriy nuqtasi $M(x;y)$ ni qaraymiz. Ellipsning ta’rifiga ko‘ra, bu nuqtadan F_1 va F_2 fokuslargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi $2a$ ga teng:

$$|F_1M|+|F_2M|=2a\,.$$



28-shakl.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib,

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ni hosil qilamiz, demak, ellips tenglamasi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (46)$$

Bu tenglamani soddalashtirish uchun uni

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ko‘rinishda yozib olamiz va tenglikni har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, qavslarni ochsak,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

ifodaga ega bo‘lamiz. Soddalashtirishdan so‘ng:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamani ikkala tomonini yana kvadratga ko‘tarib,

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right)$$

ni hosil qilamiz. Ayniy almashtirishdan so‘ng:

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right). \qquad (47)$$

Ellipsning ta’rifiga asosan $2a > 2c$ bo‘lgani uchun $a^2 - c^2$ son musbat.

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (48)$$

belgilashni kiritamiz. U holda (47) tenglama

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (49)$$

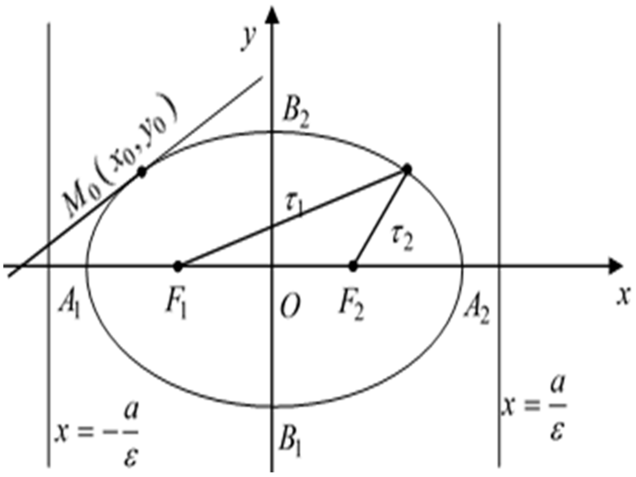
ko‘rinishni oladi. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (46) tenglamani qanoatlantiradi. (49) tenglama esa (46) ning natijasidir. Demak, ellipsni ixtiyoriy nuqtalarining koordinatalari ham bu tenglamani qanoatlantiradi. (49) tenglama ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Ellipsning shaklini aniqlaymiz. Dastlab (49) tenglamada $y = 0$ deb olsak $\frac{x^2}{a^2} = 1$ yoki $x^2 = a^2$. Demak ellips $x_1 = -a,\ x_2 = a$ nuqtalarda Ox o‘qni kesib o‘tadi. Bu nuqtalarni $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ bilan belgilaymiz. Endi (49) tenglamada $x = 0$ deb olsak, $y^2 = b^2$ hosil bo‘ladi, bundan $y_1 = -b,\ y_2 = b$ kelib chiqadi. Bu nuqtalarni $B_1(0;-b)$ va $B_2(0;b)$ bilan belgilaymiz. A_1A_2 va B_1B_2 kesmalarning uzunliklari mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo‘lib, ular ellipsning katta va kichik o‘qlari deyiladi. Odatda a ellipsning katta yarim o‘qi, b esa kichik yarim o‘qi deyiladi.

Ellipsning fokuslari orasidagi masofani katta o‘qi uzunligiga nisbati ellipsning ekssentrisiteti deyiladi.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \tag{50}$$

Ravshanki, ellipsda $\varepsilon < 1$ bo‘ladi. Agar $a = b$ bo‘lsa, $\varepsilon = 0$ bo‘lib, ellips aylanadan iborat bo‘lib qoladi.



29-shakl.

$$r_1 = a + \varepsilon x \text{ va } r_2 = a - \varepsilon x$$

formula bilan aniqlanuvchi chiziqlar fokal r radiuslar deb ataladi.

Ellips bilan bitta $M_0(x_0;y_0)$ umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq ellipsga o‘tkazilgan urinma deb ataladi. Bu urinmaning tenglamasi

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{51}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi quyidagi ko‘rinishida bo‘ladi:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad p = a - \varepsilon c.$$

Ellipsning parametrik tenglamasi esa

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Ellips uchun $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ham o‘zgarmas miqdor bo‘lib, u kichik o‘qqa parallel bo‘lgan l_1 va l_2 chiziqlar. Ularga ellipsning direktrisalari deyiladi.

15-masala. Katta yarim o‘qi $a = 5$ va ekssentrisiteti $\varepsilon = 0,6$ bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Shartga ko‘ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$ bundan $c = 0,6a = 0,6 \cdot 5 = 3$. Kichik yarim o‘q esa

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

16-masala. $M_1(2;-3)$ nuqta orqali o‘tuvchi, katta yarim o‘qi $a = 4$ bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish: $a = 4$ ekanidan ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$M_1(2;-3)$ nuqta koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirishi kerak. Demak,

$$\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1,$$

bundan $b^2 = 12$ bo‘ladi. U holda ellipsning kanonik tenglamasi esa

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

17-masala. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ellipsga $M_0\left(3; \frac{16}{5}\right)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

Yechish: (51) formulaga asosan $\frac{x\cdot 3}{25}+\frac{y\cdot\frac{16}{5}}{16}=1$ ga ega bo‘lamiz. Bu tenglikni soddalashtirib $3x+5y-25=0$ urinma tenglamasiga ega bo‘lamiz.

O‘z o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Aylana deb nimaga aytiladi?
2. Aylanaga $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.
3. Ellipsni ta’rifini ayting va kanonik formulasini yozing.
4. Ellipsni fokuslari, katta va kichik o‘qlari uchlarining koordinatalarini yozing.
5. Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
6. Ellipsga urinma tenglamasini yozing

17-§. Giperbola va parabola tenglamalari

1. Giperbola

Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to‘plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo‘lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o‘zgarmas bo‘ladi (bu kattalik nolga teng bo‘lmagan va fokuslar orasidagi masofadan kichik).

F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$ orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo‘lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo‘lgan o‘zgarmas miqdorni $2a$ orqali $(0<2a<2c)$ belgilaymiz. Ellipsdagi kabi (28-shakl) koordinatalar sistemasini tanlaymiz. Bunday sistemada fokuslar $F_1(-c;0)$va $F_2(c;0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi.

Giperbolaning ta’rifiga asosan $M(x,y)$ nuqta uchun

$$\left||MF_1|-|MF_2|\right|=2a \qquad \text{yoki} \qquad |MF_1|-|MF_2|=\pm 2a,$$

biroq

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{va} \quad |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Demak,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{52}$$

(52) ni ellips tenglamasi kabi soddalashtirishdan so‘ng, quyidagi tenglamaga keladi:

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right). \tag{53}$$

Giperbola uchun $2a<2c$ ekanligidan $a^2-c^2<0 \Rightarrow c^2-a^2>0$, shuning uchun,

$$c^2-a^2=b^2 \tag{54}$$

deb belgilaymiz. U holda (53) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{55}$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

2. Giperbolani shaklini aniqlaymiz. Dastlab (55) tenglamada $y=0$ deb olsak $x^2=a^2$ hosil bo‘ladi, bundan esa $x_1=-a,\ x_2=a$ nuqtalarda Ox o‘qni kesib o‘tishi ma’lum bo‘ladi. Bu nuqtalarni $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ bilan belgilaymiz. Endi (55) tenglamada $x=0$ deb olsak $y^2=-b^2$ hosil bo‘ladi, bundan $y_1=-bi,\ y_2=bi$ kelib chiqadi, ya’ni giperbola ordinata o‘qini kesib o‘tmaydi.

Giperbola uchlarini tutashtiruvchi A_1A_2 uzunligi $2a$ kesma giperbolaning haqiqiy o‘qi deb ataladi. $B_1(0;-b)$ va $B_2(0;b)$ nuqtalarni tutashtiruvchi $2b$ uzunlikdagi kesma giperbolaning mavhum o‘qi deb ataladi.

Endi giperbolaning 1-chorakda joylashgan va

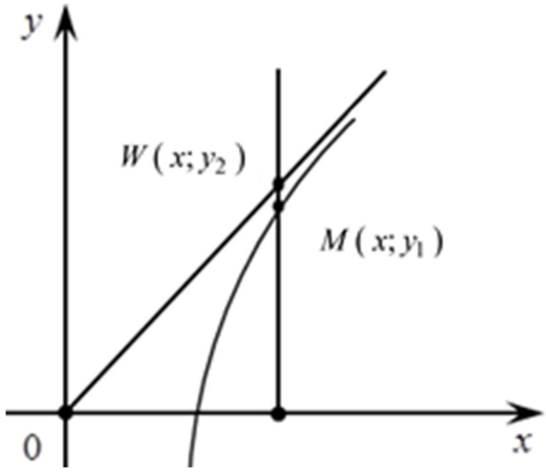
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{56}$$

funksiyasining grafigi bo‘lgan bo‘lagini qaraymiz.

Bu grafikning koordinatalar boshida yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari koordinatalar boshidan o‘tuvchi

$$y=\frac{b}{a}x \tag{57}$$

to‘g‘ri chiziqqa istalgancha yaqin bo‘lishini ko‘rsatamiz.



30-shakl.

Bitta x abssissali (56) egri chiziqda va (57) to‘g‘ri chiziqda (30-shakl) yotuvchi ikkita $M(x; y_1)$ va $W(x; y_2)$ nuqtalarni qaraymiz hamda bu nuqtalarning ordinatalari ayirmasini tuzamiz:

$$y_2 - y_1 = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Bu kasrni surati o‘zgarmas son bo‘lib maxrajdagi x cheksiz o‘sganda kasr nolga intiladi. Shuning uchun $y_2 - y_1$ ayirma nolga intiladi, ya’ni abssissa cheksiz o‘sishi bilan M va W nuqtalar bir-biriga juda ham yaqinlashadi.

Giperbolaning koordinatalar o‘qiga nisbatan simmetriyasiga asosan $y = -\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqqa ham giperbola nuqtalari juda ham yaqinlashadi. $y = \frac{b}{a}x$ va $y = -\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar, giperbolaning asimptotalari deyiladi. (31-shakl)

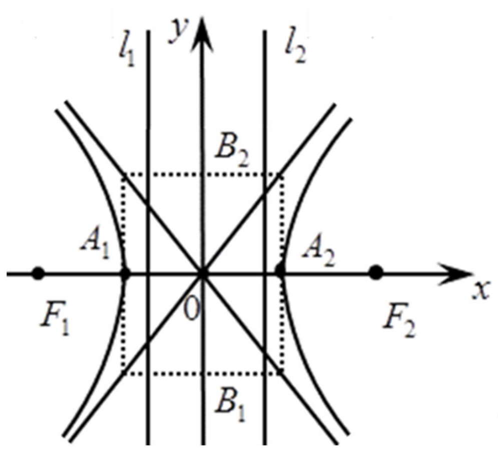
Fokuslar orasidagi masofani yarmini giperbola haqiqiy o‘qiga nisbati giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi va ε harfi bilan belgilanadi:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{58}$$

Giperbolada $a < c$ bo‘lganligi sababli $\varepsilon > 1$. Agar giperbolada $a = b$ bo‘lsa,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ yoki } x^2 - y^2 = a^2$$

ko‘rinishidagi kanonik tenglamaga ega bo‘lib, bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi.



31-shakl.

Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamasi

$$y = x, \quad y = -x$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Giperbolaning fokal radiuslari

$$x > 0 \text{ bo‘lganda } r_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a,$$

$$x < 0 \text{ bo‘lganda } r_1 = -\frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = -\frac{c}{a}x - a,$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Giperbola bilan bitta $M_0(x_0; y_0)$ umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq giperbolaga o‘tkazilgan urinma deb ataladi. Bu urinma tenglamasi

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \qquad (59)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Giperbolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi o‘ng va chap tarmoqlar uchun mos holda

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \qquad \rho = -\frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \qquad p = a - \varepsilon c$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda qutb markazi fokuslardan biriga joylashtiriladi.

Giperbolaning direktrisasi $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ formula bilan aniqlanadi hamda l_1 va l_2 (31-shakl) chiziqlardan iborat bo‘ladi.

18-masala. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, ekstsentrisiteti esa $\frac{13}{12}$ ga teng bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish: Shartga ko‘ra $2c=26$ va $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$. Demak, giperbolaning katta yarim o‘qi $a=\frac{12}{13}\cdot c=\frac{12}{13}\cdot\frac{26}{2}=12$. $b=\sqrt{c^2-a^2}$ formuladan $b=\sqrt{13^2-12^2}=5$.

Giperbolaning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.$$

19-masala. $16x^2-25y^2=400$ giperbolaning fokuslari, ekssent-risiteti topilib, asimptotalarining tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Berilgan giperbola tenglamasining har ikki tomonini 400 ga bo‘lib $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ ko‘rinishga keltiramiz. Bundan

$$a^2=25,\ b^2=16,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$

Demak,

$$F_1\left(-\sqrt{41};0\right),\ F_2\left(\sqrt{41};0\right),\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}.$$

Giperbola asimptotasi tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{5}x.$$

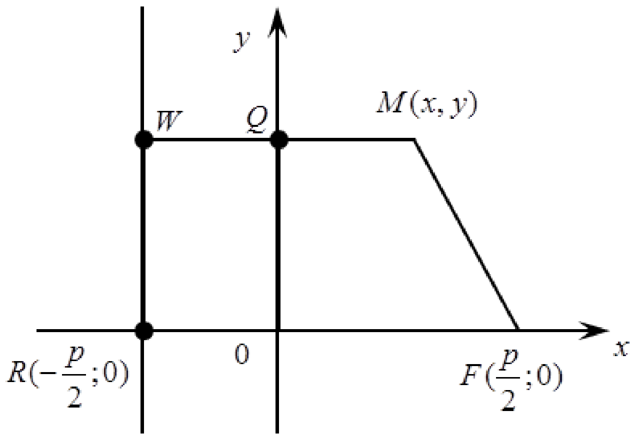
2. Parabola

Parabola deb, tekislikning fokus deb ataluvchi berilgan F nuqtasidan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to‘g‘ri chiziqdan barobar uzoqlashgan barcha nuqtalar to‘plamiga aytiladi (fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofani p orqali bel-gilaymiz. Bu kattalik parabolaning parametri deyiladi.

Parabolani tenglamasini chiqarish uchun abssissalar o‘qini shunday joylashtiramizki, u direktrisaga perpendikular bo‘lib, fokus orqali o‘tsin va direktrisadan fokusga qarab musbat yo‘nalishga ega bo‘lsin (32-shakl).

Koordinatalar boshi sifatida fokusdan direktrisaga o‘tkazilgan p perpendikularning o‘rtasini tanlaymiz.



32-shakl.

Shunday qilib, tanlangan sistemada fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinataga ega. Direktrisa tenglamasi $x=-\frac{p}{2}$ ko‘rinishni oladi, ya’ni $R\left(-\frac{p}{2};0\right)$.

Aytaylik, $M(x;y)$ parabolaga tegishli nuqta bo‘lsin. Parabolaning ta’rifiga asosan: $|MW|=|MF|$, 32-shakldan ko‘rinadiki,

$$|MW|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

demak,

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

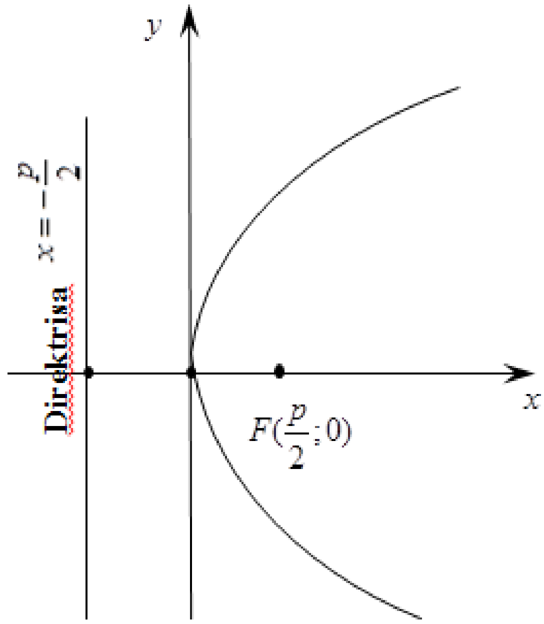
Bu tenglamani har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib,

$$\frac{p^2}{4}+px+x^2=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

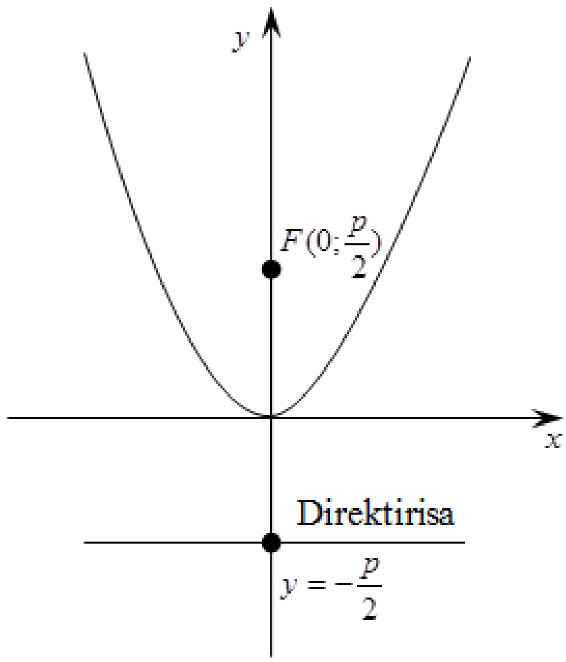
soddalashtirilgach quyidagi hosil bo‘ladi:

$$y^2 = 2px. \tag{60}$$

(60) tenglama parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Bu tenglamani parabolada yotuvchi nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi.



33-shakl.



34-shakl.

(60) tenglama bilan berilgan parabola Ox o‘qqa nisbatan simmetrik ekani ravshan.

Oy o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgan parabolaning kanonik tenglamasi

$$x^2 = 2py \tag{61}$$

ko‘rinishda bo‘ladi (34-shakl).

(61) tenglama bilan berilib 33-shaklda tasvirlangan parabolada x faqat musbat qiymatlarni qabul qilishga va $x=0$ da $y=0$ bo‘lishiga osonlik bilan ishonch hosil qilinadi x cheksiz o‘sganda y ning absolyut qiymati ham cheksiz o‘sadi.

Parabolaning simmetriya o‘qi fokal o‘q deyiladi.

Parabola bilan bitta $M_0(x_0, y_0)$ umumiy nuqtaga ega bo‘luvchi to‘g‘ri chiziq parabolaga o‘tkazilgan urinma deyiladi va u

$$y \cdot y_0 = p(x + x_0) \tag{62}$$

tenglamaga ega bo‘ladi.

Parabolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \tag{63}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Umuman olganda, (63) tenglama qutb koordinatalar sistemasida:

1) $\varepsilon < 1$ bo‘lsa, ellipsni aniqlaydi va $\varphi \in [0; \pi]$

2) $\varepsilon = 1$ bo‘lsa, parabolani aniqlaydi va $\varphi \in [0; \pi]$

3) $\varepsilon > 1$ bo‘lsa, giperbolani o‘ng tarmog‘ini aniqlaydi va $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$,

φ_0 - asimptota bilan Ox o‘q orasidagi burchak.

20-masala. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish: Berilgan tenglamani (60) bilan taqqoslansa $p=3$ kelib chiqadi. Parabola direktrisasining tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{3}{2}$$

va fokusi

$$F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

bo‘ladi.

21-masala. Parabolaning fokusi $F(5;0)$ nuqta bo‘lsa, shu parabolaning tenglamasi topilsin.

Yechish: Masala shartiga ko‘ra $\frac{p}{2}=5$ va $p=10$. Bundan esa parabola tenglamasi

$$y^2=2\cdot 10x=20x$$

bo‘lishini topamiz.

22-masala. $y^2=8x$ parabolaga $M_0(2;4)$ nuqtada o‘tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin.

Yechish: (60) tenglama bilan $y^2=8x$ ni solishtirib, $p=4$ ekanini aniqlaymiz. (62) formulaga asosan

$$y\cdot 4=4(x+2)\ \Rightarrow y=x+2,$$

izlangan urinma tenglamasi bo‘ladi

O‘z o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday egri chiziq giperbola deb aytiladi?
2. Giperbolaning kanonik tenglamasini yozing.
3. Giperbolani uchlari va fokuslarini ayting.
4. Giperbolaning asimptota formulalarini yozing.
5. Giperbolaga urinma tenglamasini yozing.
6. Qanday chiziq parabola deb ataladi va uning kanonik tenglamasini yozing.
7. Parabolani fokus va direktrisasi nima?
8. Parabolaga urinma tenglamasini yozing

18-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish

Bizga ma’lumki, tekislikda

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (64)$$

tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb atalgan edi. Bu tenglamada $A^2+B^2+C^2\neq 0$, ya’ni A,B,C koeffitsiyentlarni kamida bittasi albatta 0 dan farqli.

(64)-tenglamada

$A = C = 1,\ F = -R^2,\ B = D = E = 0$ bo‘lganida aylanani,

$A = \frac{1}{a^2},\ C = \frac{1}{b^2},\ F = -1$ va $B = D = E = 0$ bo‘lsa, ellipsni,

$A = \frac{1}{a^2},\ C = -\frac{1}{b^2},\ F = -1$ va $B = D = E = 0$ bo‘lganida giperbolani,

$D = p$ va $C = -1$ bo‘lib, qolgan koeffitsiyentlar 0 bo‘lsa, parabolani ifodalaydi.

Quyidagicha savol paydo bo‘ladi: aylana, ellips, giperbola va paraboladan tashqari (64) tenglama bilan ifodalanadigan chiziqlar mavjudmi?

Bu savolga javob berish uchun (64) tenglamani soddalashtiramiz. $B \neq 0$ bo‘lgan holda $R = \{0; i; j\}$ sistemani $R' = \{0; i'; j'\}$ ga o‘tkazuvchi

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{65}$$

almashtirishni bajaramiz. (65) ni (64) ga qo‘yib soddalashtirilgandan so‘ng

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{10}x' + 2a_{20}y' + a_{00} = 0 \tag{66}$$

tenglama hosil bo‘ladi. (66) tenglamada:

$$\begin{cases} A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\cdot\sin\alpha + C\sin^2\alpha = a_{11}, \\ -A\cos\alpha\cdot\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\cos\alpha\cdot\sin\alpha = a_{12}, \\ A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\cdot\sin\alpha + C\cos^2\alpha = a_{22}, \\ D\cos\alpha + E\sin\alpha = a_{10} \\ -D\sin\alpha + E\cos\alpha = a_{20} \\ F = a_{00} \end{cases} \tag{67}$$

belgilash kiritilgan.

(67) dan ko‘rinadiki, a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlar A, B, C va α burchakka bog‘liq. a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli, chunki

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & \sin^2\alpha \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & -\sin 2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & \sin^2\alpha \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \end{vmatrix} = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha = -1 \neq 0$$

asosiy determinant noldan farqli.

(66) tenglama koeffitsiyentlari uchun $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = AC - B^2$ tenglik o‘rinli bo‘lib, bu ikkinchi tartibli egri chiziqning invarianti deyiladi.

(66) tenglamada a_{12} koeffitsiyentni nolga aylantiruvchi α ni topamiz:

$$a_{21} = -A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\cos\alpha\sin\alpha =$$
$$-(A\cos\alpha + B\sin\alpha)\sin\alpha + (B\cos\alpha + C\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

U holda

$$(A\cos\alpha + B\sin\alpha)\sin\alpha = (B\cos\alpha + C\sin\alpha)\cos\alpha$$

yoki

$$\frac{A\cos\alpha + B\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{B\cos\alpha + C\sin\alpha}{\sin\alpha} = \lambda, \tag{68}$$

ya’ni aynan bitta o‘zgarmas songa teng bo‘lishi kerak. (68) tenglikdan esa

$$\begin{cases} A\cos\alpha + B\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ B\cos\alpha + C\sin\alpha = \lambda\sin\alpha, \end{cases} \tag{69}$$

yoki

$$\begin{cases} (A-\lambda)\cos\alpha + B\sin\alpha = 0, \\ B\cos\alpha + (C-\lambda)\sin\alpha = 0 \end{cases} \tag{70}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Bu sistema yagona yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti 0 bo‘lishi kerak.

Demak,

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\lambda^2-(A+C)\lambda+AC-B^2=0 \tag{71}$$

bo‘lgandagina (70) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi. (71) tenglama (64) ikkinchi tartibli chiziqning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(71) tenglamaning ildizlari

$$\lambda_{1,2}=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2}=\frac{(A+C)\pm\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Agar $B\neq 0$ bo‘lsa,

$$\Delta=(A+C)^2-4(AC-B^2)=(A+C)^2+4B>0,$$

demak, $\lambda_1\neq\lambda_2$ ikkita ildiz mavjud bo‘ladi. (69) sistemani $\cos\alpha\neq 0$ bo‘lganda

$$\begin{cases} A+Btg\alpha=\lambda, \\ B+Ctg\alpha=\lambda tg\alpha, \end{cases}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bundan

$$tg\alpha=\frac{\lambda-A}{B}=\frac{B}{\lambda-C}. \tag{72}$$

Bu esa (71) tenglamaning aynan o‘zi bo‘lib, uning yechimlari

$$tg\alpha_1=\frac{\lambda_1-A}{B}, \qquad tg\alpha_2=\frac{\lambda_2-A}{B} \tag{73}$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan degan xulosaga kelamiz.

Viyet teoremasidan

$$\lambda_1+\lambda_2=A+C, \qquad \lambda_1\cdot\lambda_2=AC-B^2. \tag{74}$$

$$tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2=\frac{\lambda_1-A}{B}\cdot\frac{\lambda_2-A}{B}=\frac{\lambda_1\lambda_2-A(\lambda_1+\lambda_2)+A^2}{B^2}=$$

$$=\frac{AC-B^2-A^2-AC+A^2}{B^2}=-1$$

bundan esa $|\alpha_2-\alpha_1|=\frac{\pi}{2}$ ekani kelib chiqadi.

Demak, $tg\alpha$ Ox' o‘qning R sistemadagi burchak koeffitsiyenti bo‘lganda $tg\alpha_2=tg\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)$ Oy' o‘qning shu sistemadagi burchak koeffitsiyenti bo‘ladi.

U holda $j'(\cos\alpha_1;\sin\alpha_1)$

$$\sin\alpha_1=\frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}}, \qquad \cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}},$$

formula bilan,

$$j(\cos\alpha_2;\sin\alpha_2)$$

$$\sin\alpha_2 = \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha_1, \quad \cos\alpha_2 = \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha_1,$$

formula bilan aniqlanadi.

$\lambda = \lambda_1$ bo‘lganda (69) dan

$$\begin{cases} A\cos\alpha_1 + B\sin\alpha_1 = \lambda_1\cos\alpha_1 \\ \mathrm{B}\cos\alpha_1 + C\sin\alpha_1 = \lambda_1\sin\alpha_1 \end{cases}$$

hosil bo‘ladi, natijada

$$a_{12} = (B\cos\alpha_1 + C\sin\alpha_1)\cos\alpha_1 - (A\cos\alpha_1 + B\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 =$$
$$= \lambda_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - \lambda_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = 0.$$

$a_{11} + a_{22} = A + C = \lambda_1 + \lambda_2$ va $a_{11} = \lambda_1$ va $a_{22} = \lambda_2$ deb olsak, (66) ni ko‘rinishi:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_{10}x' + a_{20}y' + a_{00} = 0 \tag{75}$$

holga keladi.

(75) da λ_1 va λ_2 lardan kamida bittasi 0 dan farqli bo‘lsin:

1. $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$, ya’ni $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

U holda $\lambda_1\lambda_2 = AC - B^2$ ekanidan $AC - B^2 \neq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. U holda (75) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\lambda_1\left(x'^2 + 2\frac{a_{10}}{2\lambda_1}x' + \frac{a_{10}^2}{4\lambda_1^2}\right) + \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a_{20}}{2\lambda_2}y' + \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2^2}\right) -$$
$$-\frac{a_{10}^2}{4\lambda_1} - \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2} + a_{00} = 0$$

yoki

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_{10}}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_{20}}{2\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} = 0$$

bu yerda

$$a'_{00} = a_{00} - \frac{a_{10}^2}{4\lambda_1} - \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2}.$$

Oxirgi tenglikda

$$X = x' + \frac{a_{10}}{2\lambda_1}, \quad Y = y' + \frac{a_{20}}{2\lambda_2}$$

formula yordamida parallel ko‘chirish bajarsak,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{00} = 0 \tag{76}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu esa koeffitsiyentlarni ishorasiga qarab ellips yoki giperbolani ifodalaydi.

2. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ va $a_{10} \neq 0$ bo‘lsin yoki $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0$ va $a_{20} \neq 0$ bo‘lsin, bu hollardan birini ko‘rib chiqish yetarli, chunki

$$\begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$$

almashtirish yordamida birini ikkinchisiga keltirish mumkin.

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ va $a_{10} \neq 0$ holga to‘xtalamiz. U holda (75) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a_{20}}{2\lambda_2} + \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2^2}\right) + a_{10}\left(x' + a_1\right) = 0$$

yoki

$$\lambda_2\left(y'^2 + \frac{a_{20}}{2\lambda_2}\right)^2 + a_{10}\left(x' + a_1\right) = 0$$

bunda,

$$a_1 = \frac{a_{00}}{a_{10}} - \frac{a_{20}}{4\lambda_2 a_{10}}.$$

Hosil bo‘lgan tenglikni

$$\begin{cases} X = x' + a_1 \\ Y = y' + \dfrac{a_{20}}{2\lambda_2} \end{cases}$$

almashtirish yordamida parallel ko‘chirsak,

$$\lambda_2 Y^2 + a_{10} X = 0 \tag{77}$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bu esa parabolani ifodalaydi.

3. $\lambda_1 = 0,\ a'_{10} = 0$ yoki $\lambda_2 = 0,\ a'_{20} = 0$ hollardan $\lambda_1 = 0,\ a'_{10} = 0$ bo‘lgan holga to‘xtaymiz. U holda (75) tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\lambda_2 y'^2 + a_{20} y' + a_{00} = 0,\ \Rightarrow \lambda_2\left(y'^2 + 2\frac{a_{20}}{2\lambda_2}y' + \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2^2}\right) + a_{00} - \frac{a_{20}^2}{4\lambda_2^2} = 0,$$

bundan esa

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a_{20}}{2\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} = 0,$$

bu yerda $a'_{00} = a_{00} - \dfrac{a_{20}^2}{4\lambda_2}.$

Oxirgi natijada

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y' + \dfrac{a_{20}}{2\lambda_2} \end{cases}$$

formula yordamida almashtirishni bajarsak,

$$\lambda_2 y^2 + a'_{00} = 0 \qquad (78)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan (78) tenglama ikkita bir-birini kesuvchi mavhum to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

tenglama yuqori darajali hadlari koeffitsiyentlaridan tuzilgan.

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantlar qiymatiga qarab quyidagi geometrik chiziqlarni aniqlaydi:

Δ / δ	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Bir juft parallel chiziq (haqiqiy yoki mavhum)

23-masala. $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$ tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring.

Yechish: $A = 5,\ B = 2,\ C = 8,\ D = 4,\ E = 7,\ F = 5.$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -81 \neq 0,$$

demak, jadvalga asosan ellips hosil bo‘lishi kerak. (67) formulaga asosan $a_{12} = 0$ tenglikdan α ni aniqlaymiz.

$$a_{12} = A\cos\alpha\sin\alpha + B^2\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\cos\alpha\sin\alpha =$$

$$= -5\cos\alpha\sin\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 8\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

tenglamadan

$$2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+3\cos\alpha\sin\alpha=0$$

hosil bo‘ladi. Tenglikni har ikki tomonini $-\cos^2\alpha$ ga bo‘lib,

$$2tg^2\alpha-3tg\alpha-2=0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglamaning yechimi

$$tg\alpha_1=2,\quad tg\alpha_2=-\frac{1}{2}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Yechimdan ko‘rinadiki, $tg\alpha$ o‘zaro perpendikular yo‘nalishli o‘qlardan iborat ekan, chunki

$$k_1\cdot k_2=tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2=-1.$$

Shuning uchun, $tg\alpha_1=2$ ni olish bilan x' va y' ni o‘zaro almashtirish orqali $tg\alpha_2=-\frac{1}{2}$ ni hosil qilinadi.

Agar $tg\alpha=2$ deb olsak, $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ hosil bo‘ladi. Musbat qiymatlarni olib koeffitsiyentlarni hisoblaymiz.

$$a_{11}=5\cdot\frac{1}{5}+2\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{4}{5}=1+\frac{8}{5}+\frac{32}{5}=9,$$

$$a_{22}=5\cdot\frac{4}{5}-2\cdot2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{1}{5}=4-\frac{8}{5}+\frac{8}{5}=4,$$

$$a_{10}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+7\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}},\quad a_{20}=-4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad a_{00}=5.$$

Demak, berilgan tenglama

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0\Rightarrow 9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)=-5$$

ko‘rinishga keladi. To‘la kvadratga ajratsak, quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5\Rightarrow 9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

$$\begin{cases}X=x'+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\[2mm] Y=y'-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\end{cases}$$

almashtirishni bajarsak,

$$9X^2+4Y^2=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{4}}+\frac{Y^2}{\frac{9}{16}}=1$$

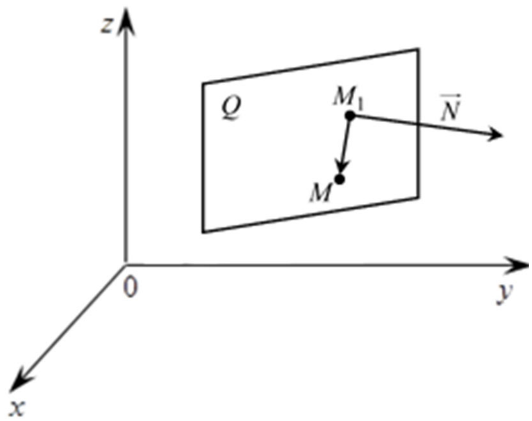
ellipsning tenglamasi hosil bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi qanday shart bajarilganda ellipsni tenglamasi bo‘ladi.
2. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi qanday shart bajarilganda giperbolani tenglamasi bo‘ladi.
3. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi qanday shart bajarilganda parabolani tenglamasi bo‘ladi.
4. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi qanday shart bajarilganda to‘g‘ri chiziqlarni tenglamasi bo‘ladi.

19-§. Fazoda tekislik va uning tenglamalari. Tekisliklarning o‘zaro joylashuvi. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa

1. $Oxyz$ fazoda Q tekislikni qaraymiz. Uning holati bu tekislikka perpendikular bo‘lgan $\vec{N}$ vektorning va Q tekislikda yotuvchi $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtani berilishi bilan aniqlanadi.



35-shakl.

Q tekislikka perpendikular bo‘lgan $\vec{N}(A;B;C)$ vektor shu tekislikning normal vektori deyiladi. Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektorga ega bo‘lgan tekislikning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Q tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olib,

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$$

vektorni quramiz. $\overrightarrow{MM_1}$ va $\vec{N}$ vektorlar o‘zaro perpendikular bo‘lgani uchun $\vec{N} \cdot \overrightarrow{MM_1} = 0$ skalyar ko‘paytmani koordinatalar orqali ifodalasak, berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta orqali $\vec{N}$ vektorga perpendikular o‘tuvchi

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (79)$$

tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, har qanday tekislikka o‘zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali tenglama mos kelar ekan.

31-masala. $\vec{N} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$ vektorga perpendikular bo‘lgan va $M_1(1;-2;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

Yechish: Bu masalada $A = 2,\ B = 0,\ C = 4$ va $x_1 = 1,\ y_1 = -2,\ z_1 = 3$ bo‘lgani uchun (79) ga asosan

$$2(x - 1) + 0(y + 2) + 4(z - 3) = 0$$

yoki

$$x + 2z - 7 = 0$$

tenglama hosil bo‘ladi.

(79) tenglamada A, B, C koeffitsiyentlarga turli qiymatlar berib, M_1 nuqtadan o‘tuvchi turli tekisliklarni hosil qilish mumkin. U holda (79) tenglama tekisliklar bog‘lami tenglamasi deyiladi.

32-masala. Berilgan uchta $M_1(1;-1;0)$, $M_2(2;1;-3)$ va $M_3(-1;0;1)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi tekislikning tenglamasi tuzilsin.

Yechish: 1-usul. M_1 nuqta orqali o‘tuvchi tekisliklar bog‘lami tenglamasini yozamiz:

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 0) = 0.$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar izlangan tekislikda yotganligi uchun ularning vektor ko‘paytmasi bu tekislikka perpendikular bo‘ladi. Demak, shu vektorni tekislikning normal vektori sifatida qabul qilish mumkin. $\overrightarrow{M_1M_2}(1;2;-3)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(-2;1;1)$, bundan

$$\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}.$$

Shunday qilib, $A=5,\ B=5,\ C=5$ va izlangan tenglama quyidagicha bo‘ladi:

$$5(x-1)+5(y+1)+5(z-0)=0$$

yoki

$$x+y+z=0.$$

2. Ixtiyoriy uchta $M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini $\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3},\ \overrightarrow{M_1M}$ vektorlarning komplanarlik shartiga asosan (36-shakl)

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0 \tag{80}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu formuladagi $M(x;y;z)$ tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqta. (80) tenglama berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi deyiladi.

32-masalani yechishning 2-usuli, (80) formulaga asosan

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-0\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

determinantni hisoblasak, $x+y+z=0$ tenglama hosil bo‘ladi.

3. (79) tenglamada qavslarni ochib, quyidagini hosil qilamiz:

$$Ax+By+Cz+(-Ax_1-By_1-Cz_1)=0.$$

Agar

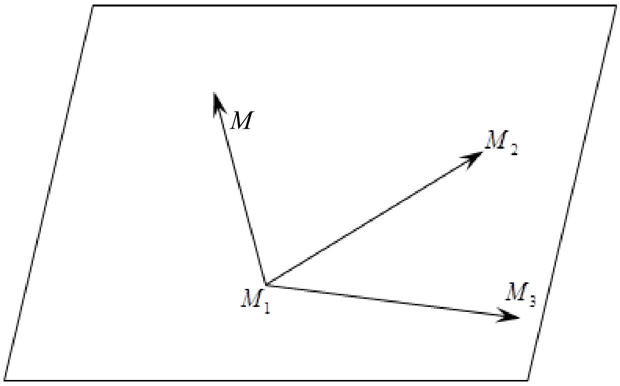
$$D=-Ax_1-By_1-Cz_1$$

belgilash kiritsak,

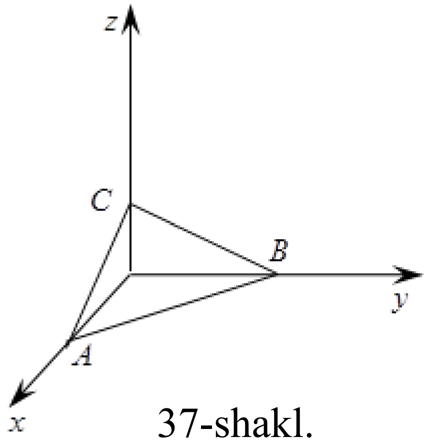
$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{81}$$

tenglama hosil bo‘ladi. (81) tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamadagi $A,\ B,\ C$ koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak, aks holda, $D=0$ ayniyatga ega bo‘lamiz. Tekislikning umumiy tenglamasida $A=0$ bo‘lsa, $By+Cz+D=0$ Ox o‘qqa parallel o‘tuvchi tekislik hosil bo‘ladi. $B=0$ bo‘lsa, $Ax+Cz+D=0$ Oy o‘qqa parallel o‘tuvchi tekislik tenglamasi kelib chiqadi. $C=0$ bo‘lsa, $Ax+By+D=0$ Oz o‘qqa parallel tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi. $D=0$ bo‘lsa, $Ax+By+Cz=0$ ya’ni koordinata boshidan o‘tuvchi tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi.

$A=B=0$ bo‘lsa, $Cz+D=0$, ya’ni Oxy tekislikka parallel tekislik hosil bo‘ladi. $A=C=0$ bo‘lsa, $By+D=0$, ya’ni Oxz tekislikka parallel tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi. $B=C=0$ bo‘lsa, $Ax+D=0$, ya’ni Oyz tekislikka parallel o‘tuvchi tekislik tenglamasi kelib chiqadi.



36-shakl.



37-shakl.

Agar $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta (81) tekislikka tegishli bo‘lsa, uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, aksincha, tekislikda yotmasa, tenglamani qanoatlantirmaydi.

33-masala. $M_1(1;2;-3)$ va $M_2(4;2;1)$ nuqtalar $2x+3y-5z-23=0$ tekislikda yotish-yotmasligini aniqlang.

Yechish: Ma’lumki, nuqtaning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantirsagina u tekislikda yotadi.

M_1 va M_2 nuqta koordinatalarini tekislik tenglamasiga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$2\cdot1+3\cdot2-5\cdot(-3)-23=2+6+15-23=0,$$

$$2\cdot4+3\cdot2-5\cdot1-23=8+6-5-23=-14\neq0.$$

Demak M_1 tekislikka tegishli, M_2 esa tekislikda yotmaydi.

(81) tekislikni yasash uchun uni bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtasini topish kifoya. Buning uchun ikkita o‘zgaruvchiga ixtiyoriy qiymatlar berib, uchinchi o‘zgaruvchini topiladi. Tekislikni $D\neq0$ holda koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtasining

koordinatasini topib yasash yanada oson. Buning uchun ikkita koordinataga nol qiymat berib uchinchi koordinata topiladi.

34-masala. $2x+3y+6z-6=0$ tekislik yasalsin.

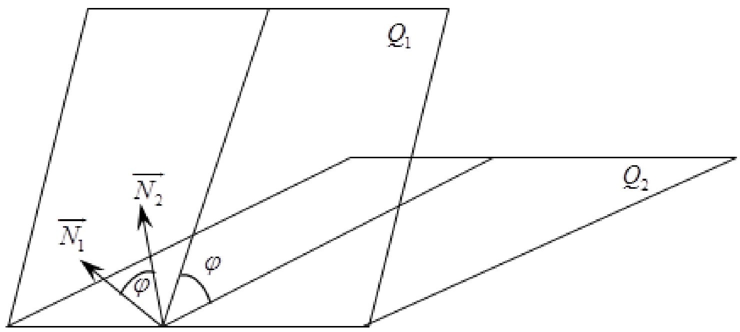
Yechish: Ox o‘q bilan kesishgan nuqta koordinatasini topish uchun $y=0$ va $z=0$ deb olamiz va $2x-6=0 \Rightarrow x=3$ kelib chiqadi. Xuddi shu kabi

$$x=0,\ \ y=0,\ \ 6z-6=0\ \Rightarrow z=1,$$
$$x=0,\ \ z=0,\ \ 3y-6=0\ \Rightarrow y=2$$

natijada $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$ nuqtalar tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi. (37-shakl).

4. Q_1 va Q_2 tekisliklar o‘zining umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

$$Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$



38-shakl.

Bu ikki tekislik orasidagi burchak deganda, bu tekisliklar kesishishi natijasida hosil bo‘lgan ikki yoqli burchakni tushunamiz.

Ma’lumki, bu burchak tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchakka teng. Demak,

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}$$

$$\overrightarrow{N_1}=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k},\quad \overrightarrow{N_2}=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k},$$

bo‘lgani uchun, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\,. \tag{82}$$

(82) formula ikki tekislik orasidagi burchak kosinusini topish formulasi deyiladi.

35-masala. $x+2y-3z+4=0$ va $2x+3y+z+8=0$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlang.

Yechish:

$$A_1=1,\ \ B_1=2,\ \ C_1=-3,\ \ A_2=2,\ \ B_1=3,\ \ C_1=1, \qquad (82)$$

formulaga qiymatlarni qo‘ysak,

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+(-3)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{5}{14}\ \Rightarrow\varphi=\arccos\frac{5}{14}\approx 69^0 05'$$

izlangan burchak bo‘ladi.

Ikkita Q_1 va Q_2 tekislik:

A) ularning normal vektorlari $\overrightarrow{N_1}$ va $\overrightarrow{N_2}$ kollinear bo‘lgandagina va faqat shundagina bir-biriga parallel, ya’ni

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

B) ularning normal vektorlari $\overrightarrow{N_1}$ va $\overrightarrow{N_2}$ perpendikular bo‘l-gandagina va faqat shundagina, ya’ni $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ bo‘lsagina bir-biriga perpendikular bo‘ladi.

C) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ da esa har ikki tekislik ustma-ust tushishadi.

36-masala. $M_1(-2;1;4)$ nuqtadan $3x+2y-7z+8=0$ tekislikka parallel o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: M_1 nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar bog‘lami tenglamasi

$$A(x+2)+B(y-1)+C(z-4)=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Izlangan tekislik $3x+2y-7z+8=0$ tekislikka parallel bo‘lgani uchun $\vec{N}=3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ normal vektor vazifasini bajarishi mumkin. $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)$ vektor $\vec{N}$ vektorga kollinear bo‘lgani uchun $\overrightarrow{N_1}(3;2;-7)$, demak,

$$3(x+2)+2(y-1)-7(z-4)=0$$

yoki

$$3x+2y-7z+32=0$$

5. Uchta

$$Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$Q_3:\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

tekisliklarning kesishish nuqtasi quyidagi tenglamalar sistemasining yechimi ko‘rinishida bo‘ladi:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases} \tag{83}$$

Agar bu sistemaning determinanti noldan farqli bo‘lsa, ya’ni

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

holda sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

37-masala. $x+y-2z+3=0,\ \ 2x-2y+3z-7=0,\ x+3y-z-4=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasining koordinatalarini toping.

Yechish: (83) formulaga asosan

$$\begin{cases} x+y-2z+3=0, \\ 2x-2y+3z-7=0, \\ x+3y-z-4=0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘lamiz. Bu sistemani yechib, tekisliklarning kesishish nuqtasi koordinatalarini topamiz: $x=1,\ \ y=2,\ z=3.$

6. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta va $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamaga ega Q tekislik berilgan bo‘lsin. Ular orasidagi d masofa, ya’ni M_1 nuqtadan Q tekislikka tushirilgan perpendikular uzunligi nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi.

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{84}$$

38-masala. $M_1(1;0;-2)$ nuqtadan $2x-y+2z-4=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish: (84) formulaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$d=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+2\cdot(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Fazoda tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
2. Berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
3. Ikki tekislik orasidagi burchak formulasini yozing.
4. Uch tekislikning kesishish nuqtasi formulasini yozing.
5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasini yozing.

20-§. Fazoda to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

1. $Q_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad Q_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$
tekisliklar berilgan bo‘lsin. Agar bu tekisliklar o‘zaro parallel bo‘lmasa, ya’ni $\overrightarrow{N_1}(A_1;B_1;C_1)$ va $\overrightarrow{N_2}(A_2;B_2;C_2)$ normal vektorlari o‘zaro kollinear bo‘lmasa,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{85}$$

sistema to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. (85) tenglama to‘g‘ri chiziqning fazodagi umumiy tenglamalari deyiladi.

39-masala. Quyidagi umumiy tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziq yasalsin:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

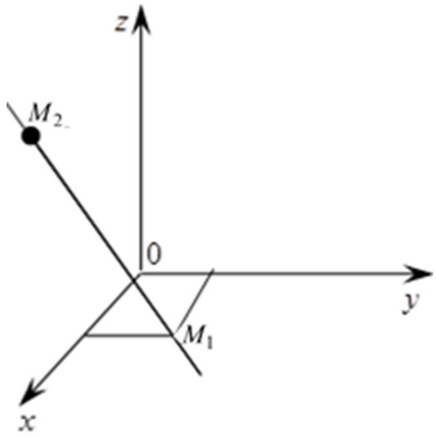
Yechish: Bu to‘g‘ri chiziqni yasash uchun bitta o‘zgaruvchiga ixtiyoriy qiymatni berib, qolgan ikki o‘zgaruvchining qiymatini topish qulay. $z = 0$ bo‘lsa,

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - 3y = -5, \end{cases} \Rightarrow 4x = 4 \ \Rightarrow x = 1, \quad y = 2.$$

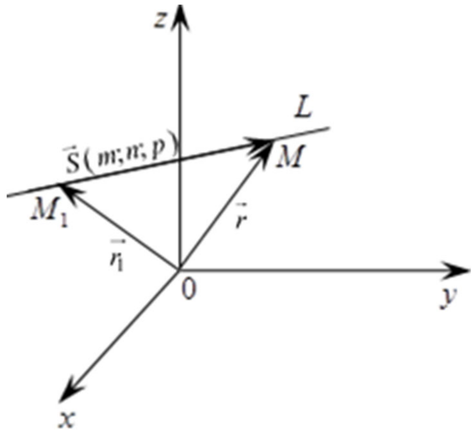
demak, $M_1(1;2;0)$ bo‘lar ekan. $y = 0$ deb olsak,

$$\begin{cases} x + z = 3, \\ x - z = -5 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \ \Rightarrow \ x = -1, \ z = 4,$$

bundan $M_2(-1;0;4)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq biz izlagan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (39-shakl).



39-shakl.



40-shakl.

2. L to‘g‘ri chiziqning fazodagi vaziyati unda berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta va bu to‘g‘ri chiziqqa parallel yoki unda yotuvchi $\vec{S}$ vektorning berilishi bilan to‘la aniqlanadi. $\vec{S}$ vektor L to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.

Aytaylik, L to‘g‘ri chiziq o‘zining $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi va $\vec{S}(m;n;p)=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ yo‘naltiruvchi vektori bilan berilgan bo‘lsin.

L to‘g‘ri chiziqdan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani tanlab,

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M} \tag{86}$$

ni hosil qilamiz (40-shakl). $\overrightarrow{M_1M}$ vektor $\vec{S}$ vektorga kollinear bo‘lgani uchun

$$\overrightarrow{M_1M}=t\cdot\vec{S} \tag{87}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. t parametr, M nuqtaning joylanishiga qarab turli qiymatlarni qabul qiladi. M_1 va M nuqtalarning radius vektorlarini $\vec{r_1}=\overrightarrow{OM_1}$ va $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ orqali belgilab, (86) ni quyidagicha yozamiz:

$$\vec{r}=\vec{r_1}+t\vec{S} \tag{88}$$

(88) tenglama to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi. (88) tenglamani koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\quad \vec{r_1}=\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$

$$t\vec{S}=tm\vec{i}+tn\vec{j}+tp\vec{k}$$

ekanini e’tiborga olsak,

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x_1+tm)\vec{i}+(y_1+tn)\vec{j}+(z_1+tp)\vec{k},$$

bundan

$$\begin{cases} x = x_1 + tm, \\ y = y_1 + tn, \\ z = z_1 + tp \end{cases} \tag{89}$$

hosil bo‘ladi. (89) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.

3. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi va $\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ vektor esa uning yo‘naltiruvchi vektori bo‘lsin. L to‘g‘ri chiziqda yotuvchi $M(x; y; z)$ nuqta bilan M_1 nuqtani tutashtiruvchi $\overline{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ vektor $\vec{S}$ vektorga parallel (40-shakl).

$\vec{S}$ va $\overline{M_1M}$ vektorlarning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{90}$$

hosil bo‘ladi. (90) fazoda berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalari yoki to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalari deyiladi. Xususiy holda $\vec{S}$ yo‘naltiruvchi vektor birlik vektor bo‘lganda, ya’ni

$$\vec{S} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} \ \Rightarrow m = \cos\alpha,\ n = \cos\beta,\ p = \cos\gamma$$

bo‘lgani uchun (90) formuladan

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} \tag{90'}$$

hosil bo‘ladi.

L to‘g‘ri chiziqning umumiy, parametrik va kanonik tenglamalari o‘zaro ekvivalent tenglamalar bo‘lib, ularning biridan doim ikkinchisini keltirib chiqarish mumkin. (90') umumiy tenglama berilgan bo‘lsa, ularni kesishish chizig‘i L: $\overline{N_1}$ va $\overline{N_2}$ vektorlarga perpendikular bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektorini $\vec{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$ vektor ko‘paytma sifatida olish mumkin.

40-masala. To‘g‘ri chiziqning quyidagi umumiy tenglamasini

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 8 = 0, \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

kanonik va parametrik ko‘rinishga keltiring.

Yechish: $z = 0$ deb olib, quyidagi sistemani hosil qilamiz va uning yechimi:

$$\begin{cases} 2x+3y=-8, \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x=-9, \quad x=-3, \quad y=-\frac{2}{3}.$$

Natijada $M_1\left(-3;-\frac{2}{3};0\right)$ hosil bo‘ladi. $\overrightarrow{N_1}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ va $\overrightarrow{N_2}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ bo‘lgani uchun

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=3\vec{i}-5\vec{j}-9\vec{k}.$$

Demak, $m=3,\ n=-5,\ k=-9$ ekan. (90) formulaga asosan

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2/3}{-5}=\frac{z-0}{-9}$$

kanonik tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamani parametrik holga keltirish uchun tenglamadagi har bir ifodani alohida t parametrga tenglaymiz:

$$\frac{x+3}{3}=t \Rightarrow x=3t-3, \quad \frac{y+2/3}{-5}=t \Rightarrow y=-5t-\frac{2}{3}, \quad \frac{z-0}{-9}=t \Rightarrow z=-9t.$$

Natijada izlangan parametrik tenglama

$$\begin{cases} x=3t-3, \\ y=-5t-\frac{2}{3}, \\ z=0-9t \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

4. L to‘g‘ri chiziq $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orqali o‘tsin. Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz.

Yo‘naltiruvchi vektor sifatida

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$$

vektorni tanlasak, $m=x_2-x_1,\ n=y_2-y_1,\ k=z_2-z_1$, demak, (90) tenglama

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{91}$$

ko‘rinishni oladi. (91) tenglama berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi.

41-masala. $M_1(1;3;-5)$ va $M_2(1;4;2)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: $x_1=1,\ y_1=3,\ z_1=-5$ va $x_2=1,\ y_2=4,\ z_2=2$ bo‘lganidan (91) ga asosan

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-3}{4-3}=\frac{z+5}{2+5}\ \Rightarrow \frac{x-1}{0}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{7}$$

$m=0$ bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa perpendikular bo‘ladi va uning tenglamasini

$$\begin{cases} x-1=0, \\ 7y-z-26=0, \end{cases}$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

5. $L_1:\ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1},\quad L_2:\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ to‘g‘ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Ma’lumki fazoning biror nuqtasidan berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan burchaklarning biri ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deb qabul qilinadi. Bu burchak esa $\vec{S}_1$ va $\vec{S}_2$ yo‘naltiruvchi vektorlar orasidagi burchakka teng. Vektorlar orasidagi burchak kosinusi formulasiga asosan

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|}$$

yoki

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (92)$$

(92) ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak kosinusi formulasi deyiladi.

42-masala. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{-2},\quad \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{5}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish: $m_1=5,\ n_1=3,\ p_1=-2,\ m_2=3,\ n_2=2,\ p_2=5$ bo‘lganidan (92) formulaga asosan

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+3\cdot2+(-2)\cdot5}{\sqrt{25+9+4}\sqrt{9+4+25}}=\frac{11}{38}\approx0,2895$$

ni hosil qilamiz, jadvaldan foydalanib, $\varphi=73^0 10'$ ni topamiz.

43-masala. $M_1(1;2;3)$ nuqta orqali $\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0, \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Izlangan to‘g‘ri chiziq $\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-3}{p}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Ravshanki, bu to‘g‘ri chiziq berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel, bundan esa uning yo‘naltiruvchi $\vec{S}$ vektori to‘g‘ri chiziqni tashkil etuvchi tekisliklarning normal vektorlariga perpendikular. Demak $\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}$ sifatida olish mumkin.

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & -4 & 1\end{vmatrix}=23\vec{i}+13\vec{j}-17\vec{k},$$

buni e’tiborga olsak,

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-17}$$

izlangan tenglamaga ega bo‘lamiz.

44-masala. $M_1(-4;0;2)$ nuqta orqali $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ va $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$ to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish: Izlangan to‘g‘ri chiziqni kanonik tenglamasi

$$\frac{x+4}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-2}{p}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. L to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ vektori, $\overrightarrow{N_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ va $\overrightarrow{N_2}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarga perpendikular bo‘lgani uchun

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+8\vec{j}-5\vec{k}.$$

Bundan esa,

$$\frac{x+4}{-2}=\frac{y-0}{8}=\frac{z-2}{-5}$$

kerakli chiziqning tenglamasi hosil bo‘ladi.

6. Fazoda M_0 nuqtadan L_1 to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa yoki L_0 va L_1 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa quyidagi formula bilan topiladi:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ p_1 & m_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \qquad (93)$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Fazoda to‘g‘ri chiziqning vektor, parametrik, kanonik tenglamalarini yozing.
2. Fazoda ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
3. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
4. Fazoda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish formulasini yozing.

21-§. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik

1. Fazoda

$$L: \quad \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

to‘g‘ri chiziq va

$$Q: \quad Ax+By+Cz+D=0$$

tekislikni qaraymiz.

A) L to‘g‘ri chiziqning $\vec{S}(m;n;p)$ yo‘naltiruvchi vektori va Q tekislikning $\vec{N}(A;B;C)$ normal vektori kollinear bo‘lsin. U holda L to‘g‘ri chiziq Q tekislikka perpendikular bo‘ladi.

B) $\vec{S}$ vektor $\vec{N}$ vektorga perpendikular bo‘lganda bu to‘g‘ri chiziq va tekislik parallel bo‘ladi.

45-masala. $M_1(2;-3;4)$ nuqta orqali o‘tuvchi $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ va $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$ to‘g‘ri chiziqlarga parallel tekislik tenglamasi yozilsin.

Yechish: M_1 nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi $A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0$ ko‘rinishda bo‘ladi. $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$

vektorni $\overrightarrow{S_1}=\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$ va $\overrightarrow{S_2}=4\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi shaklida yozamiz:

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}.$$

Demak, $A=4,\ B=30,\ C=-8$ larni e’tiborga olsak, izlangan

$$4(x-2)+30(y+3)-8(z-4)=0$$

yoki

$$2x+15y-4z+57=0$$

tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi.

2. $L:\ \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ to‘g‘ri chiziq bilan $Q:\ Ax+By+Cz+D=0$ tekislikni kesishish nuqtasi topilsin.

Buning uchun ikkala tenglamalar sistemasini yechish kerak. To‘g‘ri chiziq tenglamasini (89) parametrik holga keltirib uni Q tekislik tenglamalariga qo‘yib, t parametrni shunday qiymatini topamizki, natijada ayniyat hosil bo‘lsin.

$$A(x_1+tm)+B(y_1+tn)+C(z_1+tp)+D=0$$

yoki

$$t(Am+Bn+Cp)=-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)\ \Rightarrow t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp} \qquad (94)$$

hosil bo‘ladi. Bunda $\vec{S}$ va $\overrightarrow{N}$ vektorlar perpendikular emasligidan maxraj noldan farqli. (94) dan t ning topilgan qiymatini (89) parametrik tenglamaga qo‘yib, izlangan nuqtaning koordinatalarini topamiz.

46-masala. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ to‘g‘ri chiziqning $2x+3y-2z+2=0$ tekislik bilan kesishish nuqtasini koordinatalarini toping.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik holga keltiramiz.

$$\begin{cases} x=2t+1\\ y=3t-1\\ z=2t+5\end{cases}.$$

Bu qiymatlarni tekislik tenglamalariga qo‘yib, t ni topamiz.

$$2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0\Rightarrow\ t=1.$$

t ning topilgan qiymatini parametrik tenglamaga qo‘ysak,

$$x = 2\cdot 1 + 1 = 3, \quad y = 3\cdot 1 - 1 = 2, \quad z = 2 + 5 = 7.$$

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishgan nuqtasi $M(3;2;7)$ ekan.

3. Berilgan L to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi tekisliklarni tekisliklar dastasi deyiladi, L to‘g‘ri chiziq esa dasta o‘qi deyiladi (41-shakl).

Dasta o‘qi (85) to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin.

(85) sistemani ikkinchi tenglamasini λ songa ko‘paytirib, birinchi tenglamaga qo‘shamiz:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0. \tag{95}$$

(95) tekisliklar dastasining tenglamasi deyiladi. λ ning turli qiymatida dastaga tegishli turli tekisliklar hosil bo‘ladi.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi dastaga tegishli tekislik tenglamasini hosil qilish uchun bu nuqta koordinatalari (95) formulani qanoatlantiradi, ya’ni

$$\begin{gathered} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + \lambda\left(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2\right) = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 \neq 0 \end{gathered} \tag{96}$$

bo‘lsa, ya’ni M_0 nuqta ikkinchi tekislikda yotmasa,

$$\lambda = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}$$

λ aniqlanadi. λ ni topilgan qiymatini (96) ga qo‘yib $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasini hosil qilinadi.

47-masala. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 = 0 \\ 3x - y + z + 28 = 0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq va $M_1(1;-2;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasini yozamiz:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \lambda\left(3x - y + z + 28\right) = 0$$

dasta tenglamasiga M_1 nuqta koordinatalarini qo‘ysak,

$$2\cdot 1 + 3\cdot(-2) - 5\cdot 3 + 1 + \lambda\left(3\cdot 1 - (-2) + 3 + 28\right) = 0 \;\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2},$$

topilgan qiymatini dasta tenglamasiga qo‘yib, izlangan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$$2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}(3x-y+z+28)=0 \Rightarrow 7x+5y-9z+30=0.$$

48-masala. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi hamda $3x+3y-z+1=0$ tekislikka perpendikular bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: Berilgan to‘g‘ri chiziqni $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$ va $\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ yoki $3x-2y-5=0, \quad y-3z+1=0$ tekisliklar ko‘rinishida yozib olsak, ularning kesishmasi

$$\begin{cases} 3x-2y-5=0, \\ y-3z+1=0 \end{cases}$$

dastlabki to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun

$$3x-2y-5+\lambda(y-3z+1)=0$$

to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik bo‘ladi. Tekislikni

$$3x+(\lambda-2)y-3\lambda z-5+\lambda=0,$$

ko‘rinishda yozsak, masala shartiga ko‘ra bu tekislik $3x+3y-z+1=0$ tekislikka parallel bo‘ladi. Ular $\overrightarrow{N_1}(3;\lambda-2;-3\lambda)$ va $\overrightarrow{N_1}(3;3;-1)$ normal vektorlarga ega. Ikki vektorning parallellik shartidan

$$\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=3\cdot3+3\cdot(\lambda-2)-1\cdot(-3\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2},$$

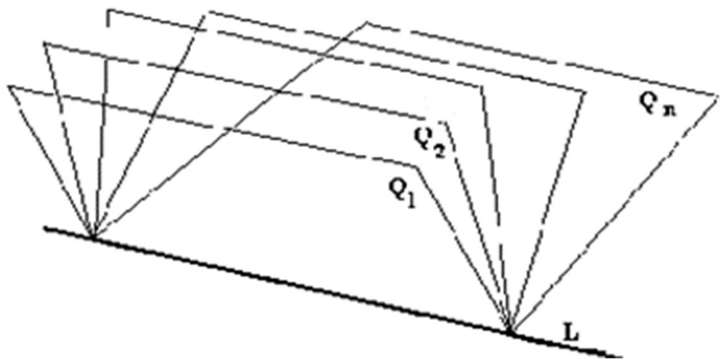
natija kelib chiqadi. Bu qiymatni dasta tenglamasiga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$3x-2y-5+\left(-\frac{1}{2}\right)(y-3z+1)=0 \quad \Rightarrow 6x-5y+3z-11=0.$$

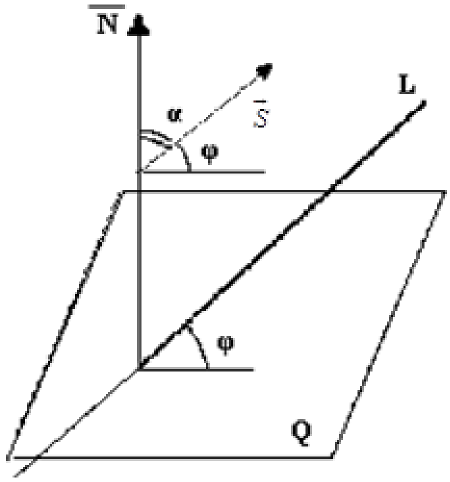
Bu esa izlangan tekislik tenglamasi bo‘ladi.

4. $L: \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ to‘g‘ri chiziq va $Q: \; Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchakni topishni ko‘raylik.

Q tekislik bilan L to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak φ bo‘lsin. Q tekislikning $\overrightarrow{N}(A;B;C)$ normal vektori bilan L to‘g‘ri chiziqning $\vec{S}(m;n;p)$ yo‘naltiruvchi vektori orasidagi burchakni α bilan belgilasak, 42-shakldan $\alpha=90-\varphi$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan



41-shakl.



42-shakl.

$$\cos\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

hosil bo‘ladi.

$$\cos\alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi$$

ekanini e’tiborga olsak,

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (97)$$

(97) formula Q tekislik va L to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak sinusini topish formulasidir.

A) Agar $Am + Bn + Cp \neq 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tekislikni kesib o‘tadi.

B) Agar $Am+Bn+Cp=0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel.

C) Agar $Am+Bn+Cp=0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi.

49-masala. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$ to‘g‘ri chiziq va $3x+2y-z+7=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

Yechish: $m=2,\ n=3,\ p=1$ va $A=3,\ B=2,\ C=-1$ bo‘lgani uchun (97) formulaga asosan

$$\sin\varphi=\frac{3\cdot 2+3\cdot 2-1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{11}{14}$$

yoki $\varphi=\arcsin\frac{11}{14}$.

Masalalar yechish uchun kerak bo‘ladigan hosilaviy formulalarni keltirib o‘tamiz:

5. $L_1:\ \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},\quad L_2:\ \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$ to‘g‘ri chiziqlarni bir tekislikda yotish sharti quyidagicha bo‘ladi: $\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{S_1},\ \overrightarrow{S_2}$ vektorlarning komplanarlik shartiga asosan

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \tag{98}$$

6. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan $Q:\ Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikular o‘tuvchi tekislik tenglamasi: $\overrightarrow{MM_1},\ \overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{N}$ vektorlarning komplanarlik shartiga asosan:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0. \tag{99}$$

7. M_0 nuqta va L_1 to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasi $\overrightarrow{M_0M},\ \overrightarrow{M_0M_1},\ \overrightarrow{S}$ vektorning komplanarlik shartidan quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0. \tag{100}$$

8. M_0 nuqtadan va $L_1 \| L_2$ to‘g‘ri chiziqlarga parallel o‘tuvchi tekislikning tenglamasi $\overrightarrow{MM_0}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$ vektorlarning komplanarlik shartidan quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (101)$$

9. Parallel bo‘lmagan L_1 dan L_2 ga to‘g‘ri chiziqlarga parallel o‘tuvchi tekislik tenglamasi $\overrightarrow{MM_1}$, $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$ vektorlarning komplanarlik shartiga asosan quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (102)$$

10. L_1 to‘g‘ri chiziqdan Q tekislikka perpendikular o‘tuvchi tekislik tenglamasi $\overrightarrow{MM_1}$, $\vec{S_1}$, $\vec{N}$ vektorlarni komplanarlik shartiga asosan quyidagi tenglama bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \qquad (103)$$

11. M_0 nuqtadan L_1 to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular tenglamasi

$$\begin{cases} m_1(x-x_0)+n_1(y-y_0)+p(z-z_0)=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

sistema ko‘rinishida, perpendikularning $k(x;y;z)$ asosi koordinatalari esa

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1} \\ m_1(x-x_0)+n_1(y-y_0)+p_1(z-z_0)=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad (104)$$

sistemaning yechimi ko‘rinishida topiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak formulasini yozing.
2. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasini topish formulasini yozing.
3. Fazoda tekisliklar dastasi tenglamasini yozing.
4. To‘g‘ri chiziqlar va to‘g‘ri chiziq bilan tekisliklar orasidagi burchak formulasini yozing.

22-§. Ikkinchi tartibli sirtlar

1. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi. Ma’lumki, fazoda sirtlar uchta o‘zgaruvchi x, y, z ni bog‘laydigan tenglama bilan aniqlanadi. x, y, z ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan aniqlangan sirt ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.

Bunday sirtning umumiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Eyz + 2Fxy + ax + by + cz + d = 0 \qquad (105)$$

Bunda A, B, C, D, E, F koeffitsiyentlardan aqalli bittasi noldan farqli.

(105) tenglama o‘zgarmas koeffitsiyentlarning qiymatiga bog‘liq ravishda turli sirtlarni aniqlashi mumkin.

Masalan; $A = B = C = 1,\ D = E = F = 0,\ a = b = c = 0,\ d = -R^2$ bo‘lsa, bu tenglama

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ko‘rinishni oladi. Bu esa R radiusli $O(0;0;0)$ markazli sfera tenglamasidir. Agar sferani markazi $O_1(x_0; y_0; z_0)$ nuqtada bo‘lsa, uning tenglamasi

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Qavslarni ochib soddalashtirsak,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 = 0$$

holga keladi. (105) tenglama bilan solishtiramiz.

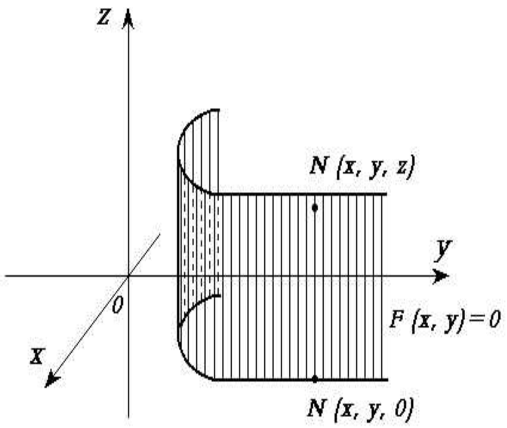
$$A = 1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = E = F = 0,\ a = -2x_0,\ b = -2y_0,\ \mathrm{c} = -2z_0,$$

$$\mathrm{d} = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \mathrm{R}^2$$

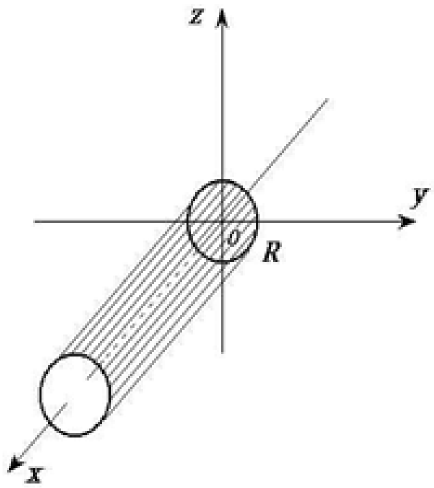
bo‘lishi kelib chiqadi. Bundan ko‘rinadiki, sfera ikkinchi tartibli sirtdir.

2. Yasovchisi koordinata o‘qlaridan biriga parallel bo‘lgan sirtlar.

Biror berilgan chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziqning bu chiziq bo‘ylab va berilgan yo‘nalishga parallel harakatidan hosil bo‘lgan sirt silindrik sirt deb ataladi. Harakatlanuvchi to‘g‘ri chiziq yasovchi, berilgan chiziq esa yo‘naltiruvchi deb ataladi (43-shakl).



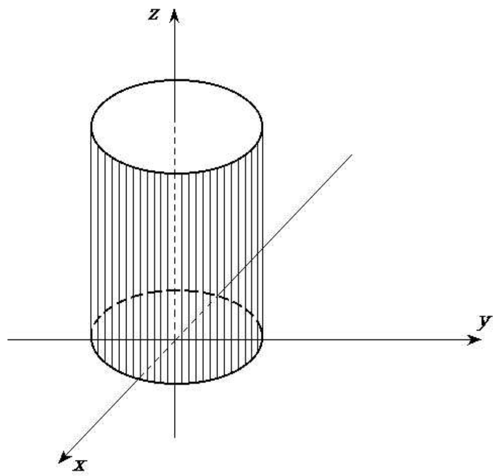
43-shakl.



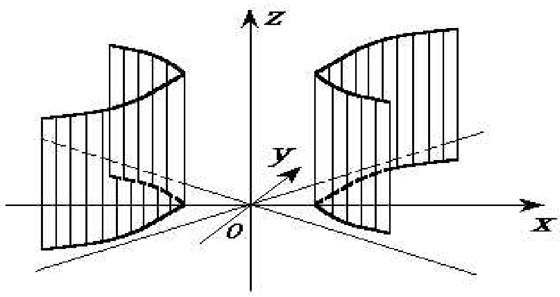
44-shakl.

$y^2 + z^2 = R^2$ tenglama bilan aniqlangan sirt silindrik sirt bo‘lib, u doiraviy silindr deb ataladi. Uning yasovchisi Ox o‘qqa parallel Oyz tekislikdagi yo‘naltiruvchisi esa radiusi R ga va markazi $O(0;0)$ bo‘lgan $y^2 + z^2 = R^2$ aylana tenglamasidir (44-shakl).

Ushbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt elliptik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o‘qqa parallel, Oxy tekislikdagi yo‘naltiruvchisi esa yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsdan iborat (45-shakl).



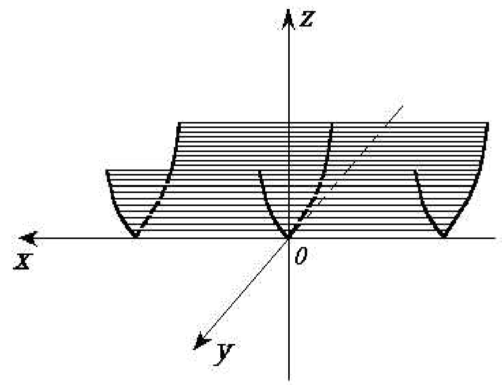
45-shakl.



46-shakl.

Ushbu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt giperbolik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o‘qqa parallel, Oxy tekislikdagi yo‘naltiruvchisi esa haqiqiy o‘qi a va mavhum o‘qi b bo‘lgan giperboladir (46-shakl).

Ushbu $x^2=2pz$ tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt parabolik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Ox o‘qqa parallel, Oxz tekislikdagi yo‘naltiruvchisi esa paraboladir (47-shakl).



47-shakl.

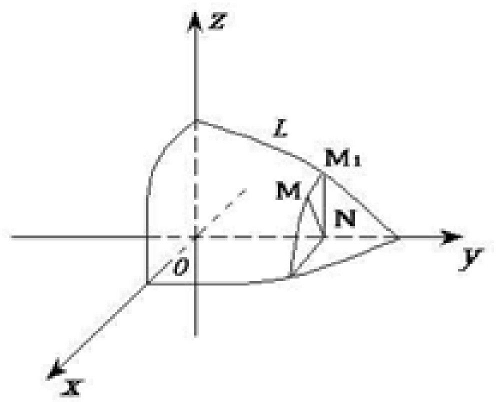
3. Aylanish sirtlar

Oyz tekislikdagi $F(y,z)=0$ tenglama bilan berilgan L chiziqni qaraylik. Bu chiziqni Oy o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtni tenglamasini hosil qilamiz. Bu sirtdan ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz va bu nuqtadan Oy o‘qqa perpendikular tekislik o‘tkazamiz. Kesimda markazi aylanish o‘qidagi $N(0;y;0)$ nuqtada bo‘lgan aylana hosil bo‘ladi. Bu aylananing radiusi $\sqrt{x^2+z^2}$ ga teng.

Lekin ikkinchi tomondan bu radius L chiziq $M_1(0;y;z)$ nuqtasi applikatasining absolyut qiymatiga teng. Bu nuqtaning ordinatasi y ga teng. Demak, berilgan tenglamada

$$y=y, \quad z=\pm\sqrt{x^2+z^2}$$

deb izlanayotgan aylanish sirtning



48-shakl.

$$F\left(y;\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

tenglamasini hosil qilamiz (48-shakl). L chiziqning Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini olish uchun bu chiziq tenglamasida z ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtirish kerak. Ushbu qoida boshqa o‘qlar atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtlar uchun ham o‘rinlidir.

Oxz tekislikda joylashgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ ellipsni Ox o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini z ni $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ ga almashtirib,

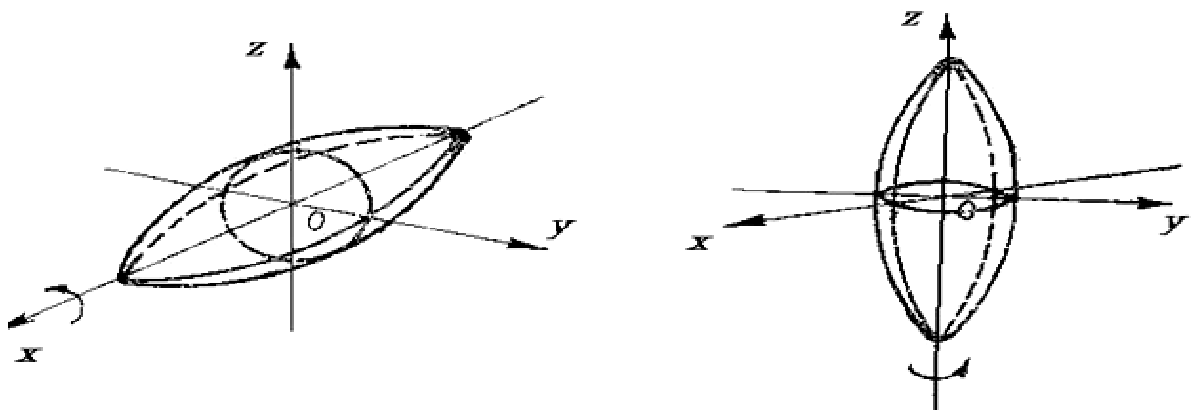
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

hosil qilamiz.

Agar ellips Oz o‘q atrofida aylansa x koordinatani $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ga almashtirib, quyidagi sirt tenglamasini hosil qilamiz.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Bu hosil bo‘lgan sirtlar aylanish ellipsoidlar deb ataladi. $a=c$ bo‘lsa $R=a$ sfera hosil bo‘ladi (49-shakl).



49-shakl.

Oyz tekislikda joylashgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolaning Oz o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasi

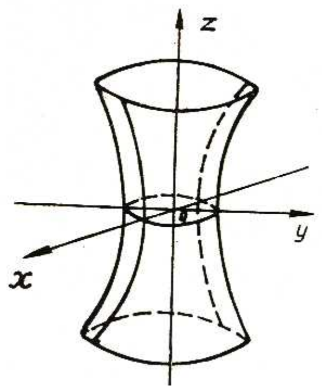
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

bo‘ladi. Bu bir pallali aylanish giperboloid deb ataluvchi sirtdir (50-shakl). Agar shu giperbolani o‘zini Oy o‘q atrofida aylantirilsa,

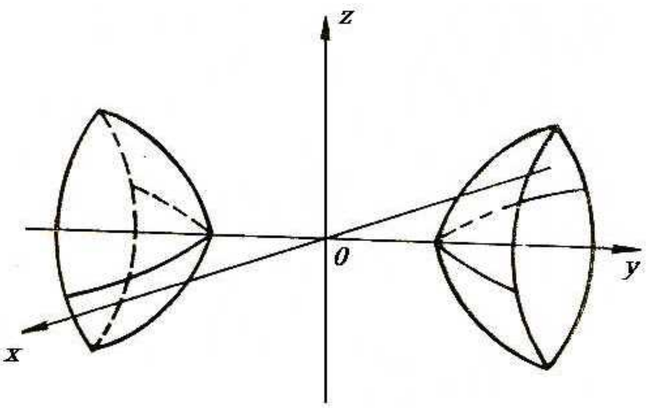
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$$

sirt tenglamasi hosil bo‘ladi.

Bu esa ikki pallali giperboloid deb ataluvchi sirtdir (51-shakl).



50-shakl.

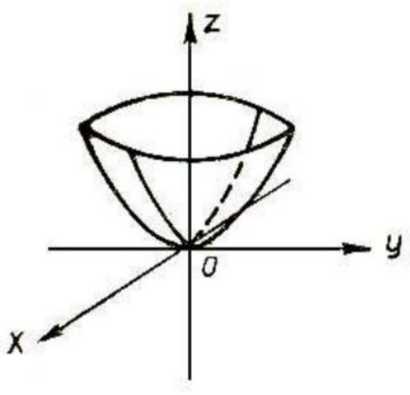


51-shakl.

Oyz tekislikda joylashgan $y^2=2pz$ parabolaning Oz o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasi

$$x^2+y^2=2pz$$

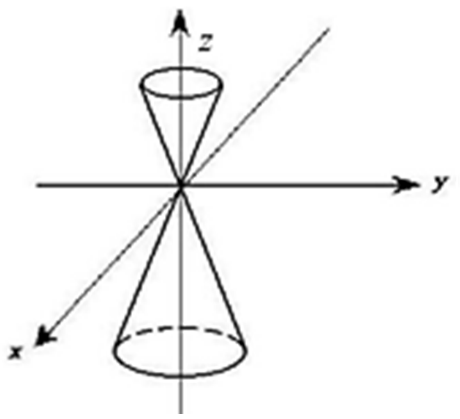
bo‘ladi. Bu aylanish paraboloid deb ataluvchi sirtdir (52-shakl).



52-shakl.

4. Konussimon sirtlar

Konussimon sirt konusning uchi deb ataladigan nuqta bilan berilgan egri chiziqning hamma nuqtalaridan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirtga aytiladi. Bunda berilgan nuqta berilgan egri chiziqda yotmaydi. Konussimon sirt tashkil etadigan to‘g‘ri chiziqlarning har biri konusning yasovchisi deb ataladi.



53-shakl.

Uni koordinatalar boshida bo‘lgan doiraviy konusning

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

tenglamasi bilan beriladi (53-shakl).

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi yozilsin.
2. Yasovchi koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan sirtlarni ayting.
3. Silindrik sirt tenglamasini yozing.
4. Giperbolik sirt tenglamasini yozing.
5. Elliptik sirt tenglamasini yozing.
6. Konussimon sirt tenglamasini yozing.

IV BOB. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

23-§. To‘plam va ular ustida amallar. Haqiqiy sonlar to‘plami. Sonli ketma - ketliklar. Ketma - ketlikning limiti

1. To‘plam va ular ustida amallar

To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biridir, shuning uchun unga ta’rif berilmaydi. To‘plam tushunchasi-predmet yoki obyektlarning umumiy belgi yoki xususiyatlari bo‘yicha birlashmasini bildiradi.

To‘plamlar Lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: A, B, C, D,…, uning elementlari esa Lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi: $a, b, c, d, \ldots$

Masalan, $A-$auditoriyadagi jami talabalar to‘plami. $B-$ auditoriyadagi talaba yigitlar to‘plami. $C-$auditoriyadagi talaba qizlar to‘plami.

$$D=\{a,b,c,d\},\ E=\{a,b,c,f,x,y\},\ F=\{\varnothing\},\ M=\{1,2,3,4,0\},\ \mathrm{P}=\{1,2,3\}.$$

Quyidagi belgilashlardan foydalaniladi: $a\in D-$“a element D to‘plamga tegishli”, $e\notin D-$“e element D to‘plamga tegishli emas”.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va $\varnothing$- ko‘rinishda belgilanadi.

Agar B to‘plamning barcha elementlari A to‘plamni ham elementlari bo‘lsa, B to‘plam A to‘plamning **to‘plam osti** deyiladi va $B\subset A$ ko‘rinishda belgiladi.

A yoki B to‘plamning biriga yoki har ikkalasiga tegishli elementlardan tuzilgan to‘plamga **to‘plamlarning birlashmasi** deyiladi va $A\cup B$ ko‘rinishda belgilanadi.

A hamda B to‘plamning har ikkalasiga tegishli elementlardan tuzilgan to‘plamga **to‘plamlarning kesishmasi** deyiladi va $A\cap B$ ko‘rinishda belgilanadi.

E to‘plam doska tekisligi bo‘lib, A to‘plam unga chizilgan aylana bo‘lsin, u holda $A\subset E$ ko‘rinishda yoziladi va doska tekisligining aylanaga kirmagan qismi $\overline{A}$-ko‘rinishda belgilanib, A to‘plamning E gacha **to‘ldiruvchisi** deyiladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan misolda

$$A\cup B=A,\ A\cap B=B,\ \mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{A},\ \ \mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\varnothing,\ D\cup E=\{a,b,c,d,f,x,y\},$$

$$D\cap E=\{a,b,c\},\ D\cup M=\{a,b,c,d,1,2,3,4,0\},\ D\cap M=\{\varnothing\},$$

$$M\cup P=\{1,2,3,4,0\}=M,\ \ \overline{P}=\{4,0\}.$$

$\overline{P}$- P ni M gacha to‘ldiruvchisi.

2. Haqiqiy sonlar to‘plami

Son tushunchasi qadim zamonlarda paydo bo‘lib, uzoq vaqt davomida kengaygan va umumlashgan. Butun, musbat va manfiy kasr sonlar **ratsional sonlar** deb ataladi. Har bir ratsional sonni ikkita butun p va q $(q\neq 0)$ sonlarning nisbati $\frac{p}{q}$ shaklida tasvirlash mumkin.

Ratsional sonlarni chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasrlar ko‘rinishida ham tasvirlash mumkin. Ratsional bo‘lmagan sonlarni irratsional sonlar deb ataladi. Irratsional sonlarni chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasrlar ko‘rinishida tasvirlab bo‘lmaydi. Shuning uchun ularni cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar ko‘rinishida tasvirlash mumkinligi kelib chiqadi.

Barcha ratsional va irratsional sonlar birgalikda **haqiqiy sonlar to‘plamini** tashkil qiladi. Natural sonlar to‘plamini N, butun sonlar to‘plamini Z, ratsional sonlar to‘plamini Q, haqiqiy sonlar to‘plamini R deb belgilasak, $N\subset Z\subset Q\subset R$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Haqiqiy sonlar qiymatlari bo‘yicha tartibga solingan, ya’ni x va y haqiqiy sonlarning har bir jufti uchun ushbu, $x<y,\ x=y,\ x>y$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli bo‘ladi.

Son o‘qi, haqiqiy sonning absolyut qiymati tushunchalari o‘rta maktab kursida kiritilgani uchun ularga ortiqcha to‘xtab o‘tirmaymiz va haqiqiy sonlar to‘plamining quyidagi ikkita muhim xossasini isbotsiz keltiramiz:

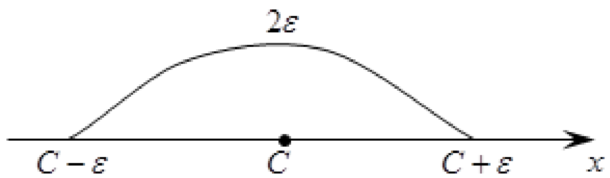
1) Ixtiyoriy ikkita haqiqiy son orasida ratsional sonlar ham, irratsional sonlar ham topiladi;

2) Har bir irratsional λ son istalgan darajadagi aniqlikda ratsional sonlar yordamida ifodalanishi mumkin.

Haqiqiy sonlarni son oʻqining nuqtalari bilan belgilanadi. Bu nuqtalar va haqiqiy sonlar orasida oʻzaro bir qiymatli moslik mavjud. Bu son oʻqi nuqtalarini ularga mos sonlar bilan almashtirish imkonini beradi.

a va b sonlar (yoki ikkita nuqta) berilgan, shu bilan birga $a<b$ boʻlsin. $a \le x \le b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x sonlar toʻplami segment yoki **kesma** deb ataladi va u $[a;b]$ kabi belgilanadi, a va b sonlar kesmaning oxirlari deyiladi. $a<x<b$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x sonlar toʻplami **interval** yoki **oraliq** deb ataladi va u $(a;b)$ kabi belgilanadi. $a \le x < b$, $a < x \le b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar toʻplami **yarim ochiq kesma** yoki **yarim yopiq interval** deyiladi va u $[a;b)$, $(a;b]$ kabi belgilanadi. Xususan, quyidagilarni ham cheksiz interval yoki yarim intervallar deb qarash mumkin: $(-\infty;+\infty)$, $(-\infty;a)$, $(-\infty;a]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$.

Markazi C nuqta bilan ustma-ust tushadigan, uzunligi $2\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ boʻlgan $(C-\varepsilon;C+\varepsilon)$ interval C nuqtaning ε atrofi deb ataladi (54-shakl).



54-shakl.

C nuqtaning ε atrofiga tegishli boʻlgan istalgan x nuqta $C-\varepsilon<x<C+\varepsilon$ yoki $|x-C|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

3. Sonli ketma-ketliklar

Bizga natural sonlar toʻplamida aniqlangan tartiblangan quyidagi sonlar qatori berilgan boʻlsin:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

1-ta’rif. Agar natural sonlar to‘plamidagi har bir n songa mos ravishda x_n haqiqiy son mos keltirilgan bo‘lsa, bu holda (1) sonlar to‘plami sonli ketma-ketlik yoki ketma-ketlik deb ataladi.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ sonlarning har biri sonli ketma-ketlikning hadlari, x_n umumiy hadi, n -soni esa uning nomeri deyiladi. (1) ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ ko‘rinishida ham yozish mumkin.

Masalan, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ sonli ketma-ketlik bo‘lib, uni $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ko‘rinishida ham yozish mumkin. Agar ketma-ketlikning ixtiyoriy hadini topish imkonini beruvchi qoida yoki formula berilgan bo‘lsa, ketma-ketlik berilgan deyiladi. Masalan, $x_n = 1 + (-1)^n$ formula $0, 2, 0, 2, \ldots$ ketma-ketlikni beradi.

$\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lsa, bu ketma-ketliklar ustidagi arifmetik amallarni quyidagicha yozish mumkin:

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \ \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}, \ \{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\},$$

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}, \ \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \ y_n \neq 0.$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy x_n hadi uchun $x_n \leq M$, $(x_n \geq m)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M (m) son mavjud bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy hadi uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi m va M sonlar mavjud bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Agar har qanday musbat A son olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x_n-hadi mavjud bo‘lsa, bu holda $\{x_n\}$- chegaralanmagan ketma-ketlik deyiladi.

Barcha hadlar bir xil qiymat qabul qiladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘zgarmas ketma-ketlik deb ataladi. Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ o‘smaydigan ketma-ketlik deb ataladi.

Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan, demak, u o'suvchi ketma-ketlikdir.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ketma-ketlik kamayuvchi chegaralangan ketma-ketlikdir, chunki ixtiyoriy n uchun $0 < \frac{1}{n} \le 1$ bo'ladi.

4. Ketma-ketlikning limiti

2-ta'rif. Agar har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday, N nomerni topish mumkin bo'lsaki, $n \ge N$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va uni $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ kabi yoziladi. («Limit» so'zi lotincha «limes»-«chegara» ma'noni bildiradi)

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli bo'lgani uchun yuqoridagi ta'rifni quyidagicha tushuntirish mumkin: agar istalgan musbat ε son uchun shunday N son topilsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n \ge N$ dan boshlab barcha hadlari a nuqtaning ε atrofida yotsa, ya'ni a nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadlaridan boshqa barcha hadlari yotsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

1-misol. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lishini isbotlaymiz.

Yechish: Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olaylik. $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ yoki $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ tengsizlikni tuzamiz. Biroq $n > 0$, shuning uchun, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'ladi. Bundan $N > \frac{1}{\varepsilon}$ deb olinsa, $n > N$ lar uchun $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ yoki $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Bundan ta'rifga asosan $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ kelib chiqadi.

Ushbu teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u limitga ega bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo‘lsa, u limitga ega bo‘ladi.

5. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass teoremasi

3-ta’rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik, aks holda esa uzoqlashuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

1-misolda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ bo‘lgani uchun $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchidir.

$\{n\}$ ketma-ketlik monoton o‘suvchi va yuqoridan chegaralanmagan bo‘lgani uchun chekli limitga ega emas. Shuning uchun u uzoqlashuvchi ketma-ketlik bo‘ladi, uning limitini $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ deb yozamiz.

Ixtiyoriy sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ ni qaraymiz. Undan cheksiz sondagi elementlar to‘plamini ajratsak, yangi ketma-ketlik hosil bo‘ladi, uni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deb ataymiz. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning istalgan qismiy ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligidan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin.

Masalan. $\{x_n\}=\left\{(-1)^n\right\}=\{-1;1;-1;1;...\}$ uzoqlashuvchi ketma-ketlik, biroq uning $\{1;1;1;...\}$ qismiy ketma-ketligi 1 ga yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘lsa, u holda u $(-\infty)$ ga yoki$(+\infty)$ ga yaqinlashadigan qismiy ketma-ketlikni o‘z ichiga oladi.

Bolsano-Veyershtrass teoremasini isbotsiz keltiramiz.

3-teorema: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lsa, u holda undan chekli songa yaqinlashadigan qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

bo‘ladi.

2^0. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

bo‘ladi.

3^0. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, $y_n \neq 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan xossalar ketma-ketliklarning limitini hisoblashda katta amaliy ahamiyatga ega.

2-misol. $\{C\}$ ketma-ketlikni qaraymiz, bu yerda $C = const$.

Yechish: Har qanday $\varepsilon > 0$ son olganda ham $x_n = C$ bo‘lgani uchun $|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ bo‘ladi. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$ bo‘lishi kelib chiqadi.

3-misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$ limitni hisoblang.

Yechish: Berilgan kasr uchun 3-xossani bevosita qo‘llab bo‘lmaydi. Chunki, $n\to\infty$ da kasrning surat va maxrajining limitlari ∞ ga teng bo‘lib, $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslik hosil bo‘ladi. Shuning uchun avval kasrning surat va maxrajini n^2 ga bo‘lib, so‘ngra yuqorida keltirilgan xossalardan foydalanamiz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{2+\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty^2}}{3-\dfrac{1}{\infty^2}} = \frac{2}{3}.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. To‘plam tushunchasini ayting. To‘plam ustida qanday amallarni bilasiz?
2. Haqiqiy sonlar to‘plami va uning tarkibiy qismlarini ayting.
3. Sonli ketma-ketliklar va uning limitiga ta’rif bering.
4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar haqidagi teoremalarni ayting.

24-§. Funksiya. Elementar funksiyalarning asosiy klassifikatsiyasi. Funksiyaning limiti

1. Funksiya va uning berilish usullari

Matematika miqdorlar bilan, ularning aniq mazmunini e’tiborga olmagan holda shug‘ullanadi. Turli son qiymatlar qabul qiladigan miqdor o‘zgaruvchi miqdor deyiladi. Son qiymatlari o‘zgarmaydigan miqdor o‘zgarmas miqdor deyiladi. O‘zgaruvchi miqdorlar $x, y, z, u, \dots$ harflar bilan, o‘zgarmas miqdorlar $a, b, c, \dots$ harflar bilan belgilanadi. Tabiatning turli hodisalarini o‘rganishda va turli texnikaviy masalalarni yechishda, matematikada ham bir miqdorning o‘zgarishini boshqa miqdorning o‘zgarishiga bog‘liq ravishda o‘rganishga to‘g‘ri keladi. Masalan, harakatni o‘rganishda o‘tilgan yo‘lni vaqtga bog‘liq ravishda o‘rganiladi. Doira yuzining o‘zgarishi, radiusning o‘zgarishiga bog‘liq ravishda o‘rganiladi.

1-ta’rif. Agar o‘zgaruvchi x ning biror sohadagi har bir qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi y ning faqat bitta ma’lum qiymati to‘g‘ri kelsa, u holda y o‘zgaruvchi x o‘zgaruvchining funksiyasi deb ataladi va $y = f(x)$, $y = \varphi(x), \dots$ va hokazo ko‘rinishida yoziladi.

Bu yerda x erkli o‘zgaruvchi yoki argument deb ataladi. x va y orasidagi bog‘lanish esa funksional bog‘lanish deyiladi.

2-ta’rif. x ning berilgan $f(x)$ qoidaga binoan y funksiyaning qiymatlari topiladigan qiymatlar to‘plami $D(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi. y funksiyaning topilgan qiymatlar to‘plami $E(y)$ esa o‘zgarish sohasi deyiladi.

x argumentning qiymatlari bo‘yicha y funksiyaning qiymatlarini topish usuli funksiyaning berilish usuli deyiladi.

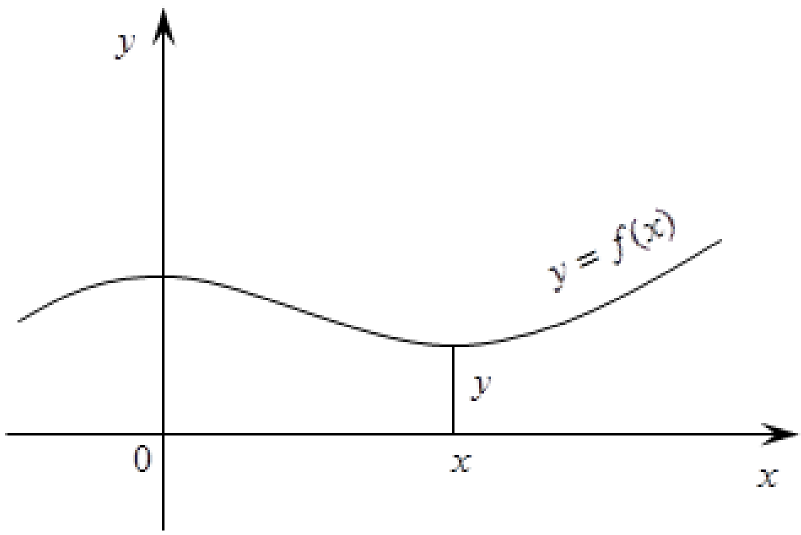
Funksiya berilishining quyidagi usullarini ko‘rib chiqamiz:

1. Jadval usuli. Bu usulda argumentning ma’lum tartibdagi $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ qiymatlari va funksiyaning shularga mos $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ qiymatlari quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Trigonometrik funksiyalarning qiymatlari jadvallari, logarifmlar jadvallari va hokazolar funksiyaning jadval usulida berilishiga misol bo‘ladi.

2. Grafik usuli. Agar tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida qandaydir $M(x;y)$ nuqtalar to‘plamiga ega bo‘lsak va bunda shu to‘plamning har qanday ikkita nuqtasi Oy o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziqda yotmasa, u holda bu nuqtalar to‘plami biror $y = f(x)$ funksiyani grafigini aniqlaydi, argumentning qiymatlari nuqtalarning abssissalaridan, funksiyaning qiymatlari tegishli ordinatalaridan iborat bo‘ladi.



55-shakl.

Abssissalari erkli o‘zgaruvchining qiymatlaridan, ordinatalari esa funksiyaning tegishli qiymatlaridan iborat bo‘lgan Oxy tekislikdagi nuqtalar to‘plami berilgan funksiyaning grafigi deyiladi.

3. Analitik usul. O‘zgarmas yoki o‘zgaruvchi miqdorlarni belgilovchi sonlar va harflar ustida ma’lum tartibda bajariladigan ma’lum matematik amallar to‘plamining simvolik tarzda belgilanishi analitik ifoda deyiladi.

Agar $y=f(x)$ funksional bog‘lanishda f analitik ifoda bo‘lsa, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi. Analitik usul ba’zan funksiyaning «formula bilan berilishi» deb ham yuritiladi. x ning tenglikni o‘ng tomonida turuvchi analitik ifoda butunlay aniq qiymatga ega bo‘ladigan qiymatlarining to‘plami analitik usulda berilgan funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi deyiladi.

1-misol. $y=\sqrt{4-x^2}$ funksiyaning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini toping.

Yechish: Berilgan funksiya $4-x^2\geq 0$ bo‘lganda ma’noga ega. Bu tengsizlikning yechimi $4\geq x^2$ yoki $|x|\leq 2$ yoki $-2\leq x\leq 2$ bo‘lgani uchun $D(y)=[-2;2]$ bo‘ladi. $0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2$ bo‘lgani uchun esa $E(y)=[0;2]$ bo‘ladi.

2. Asosiy elementar funksiyalar

Asosiy elementar funksiyalar deb, quyidagicha analitik usul bilan berilgan funksiyalarga aytiladi.

I. Chiziqli funksiya: $y=ax+b,\ a,b\in R.$

II. Darajali funksiya: $y=x^\alpha$, bunda $\alpha-$ haqiqiy son.

III. Ko‘rsatkichli funksiya: $y=a^x$, bunda $a\neq 1,\ a>0.$

IV. Logarifmik funksiya: $y=\log_a x$, bunda $a\neq 1,\ a>0.$

V. Trigonometrik funksiyalar:

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx,\ y=\sec x,\ y=\cos ecx.$$

VI. Teskari trigonometrik funksiyalar:

$$y=arc\sin x,\ y=arc\cos x,\ y=arctgx,\ y=arcctgx,$$

$$y=arc\sec x,\ y=arc\cos ecx.$$

Asosiy elementar funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$, qiymatlar sohasi $E(f)$ quyidagicha bo‘ladi:

$$D(ax+b)=(-\infty;+\infty),\quad E(ax+b)=(-\infty;+\infty),$$
$$D(a^x)=(-\infty;+\infty),\quad E(a^x)=(0;+\infty),$$
$$D(\log_a x)=(0;+\infty),\quad E(\log_a x)=(-\infty;+\infty),$$
$$D(\sin x)=(-\infty;+\infty),\quad E(\sin x)=[-1;1],$$
$$D(\cos x)=(-\infty;+\infty),\quad E(\cos x)=[-1;1],$$
$$D(tgx)=\left\{\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{n};\frac{\pi}{2}+\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in\mathrm{Z}\right)\right\},\quad E(\mathrm{tg}\,x)=(-\infty;+\infty),$$
$$D(ctgx)=\{(\pi\mathrm{n};\pi+\pi\mathrm{n},\ \mathrm{n}\in\mathrm{Z})\},\quad E(\mathrm{ctg}\,x)=(-\infty;+\infty),$$
$$D(\arcsin x)=[-1;1],\quad E(\arcsin x)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],$$
$$D(\arccos x)=[-1;1],\quad E(\arccos x)=[0;\pi],$$
$$D(\mathrm{arc}\,tgx)=(-\infty;\infty),\quad E(\mathrm{arc}\,tgx)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),$$
$$D(\mathrm{arcc}\,tgx)=(-\infty;\infty),\quad E(\mathrm{arcc}\,tgx)=(0;\pi).$$

Faraz qilaylik, biror X to‘plamda qiymatlar sohasi Z bo‘lgan $z=\varphi(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Z to‘plamda $y=f(z)$ funksiya aniqlangan bo‘lsa, u holda X to‘plamda $y=f[\varphi(x)]$ **murakkab funksiya** (yoki $z=\varphi(x)$ va $y=f(z)$ funksiyaning superpozitsiyasi) aniqlangan deyiladi. Bunda $z=\varphi(x)$ murakkab funksiyaning **oraliq argumenti** deb ataladi. Murakkab funksiyaning oraliq argumenti bir nechta bo‘lishi ham mumkin.

Masalan, 1. $y=\sin 3x$ murakkab funksiya, chunki $y=f(z)=\sin z$ va $z=\varphi(x)=3x$ funksiyalarning superpozitsiyasidan iborat.

2. $y=\log_3\cos 4x$ murakkab funksiya, chunki $y=f(z)=\log_3 z$ va $z=\varphi(x)=\cos t$ hamda $t=4x$ funksiyalarning superpozitsiyasidan iborat.

3. Elementar funksiyalarning asosiy xossalari

3-ta’rif. Elementar funksiya deb $y=f(x)$ ko‘rinishidagi birgina formula bilan berilishi mumkin bo‘lgan funksiyaga aytiladi, bunda o‘ng tomonda turuvchi ifoda chekli sonda qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish va murakkab funksiya amallari yordamida asosiy elementar funksiyalardan va o‘zgarmaslardan tuzilgan ifoda bo‘ladi. Bu ta’rifdan elementar funksiyalar analitik usulda berilgan funksiyalar ekanligi kelib chiqadi.

Masalan, $y=|x|=\sqrt{x^2}$, $y=\sqrt{1-3\cos^2 x}$, $y=\dfrac{ctgx-\lg x+7\sqrt[3]{x}}{5x-x^2+7}$ funksiyalar elementar funksiyalardir.

$y=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n=n!$ $\left(y=f(n)\right)$ funksiya esa elementar funksiya emas, chunki y ni topish uchun n ning ortishi bilan cheklanmagan sondagi amallarni bajarishga to‘g‘ri keladi.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ \ 0\le x\le 1\ bo'lsa, \\ 2(x-1), & agar\ \ 1<x\le 2\ bo'lsa, \end{cases}$$

bo‘lsa, funksiya ham elementar funksiyadir. Uni $0\le x\le 2$ oraliqda $y=\dfrac{3}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2}$ kabi yozish mumkin.

Elementar funksiyalarning ba’zi xossalarini ko‘rib chiqamiz.

$y=f(x)$ funksiya biror $D(f)=[a;b]$ sohada aniqlangan bo‘lsin.

4-tarif. Agar x ning shu sohaga tegishli ixtiyoriy ikkita $x_1$va x_2 qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo‘lganda $f(x_1)<f(x_2)$ (yoki $f(x_1)>f(x_2)$) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya D sohada o‘suvchi (yoki kamayuvchi) deyiladi.

5-ta’rif. Agar $x_1<x_2$ bo‘lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ (yoki $f(x_1)\ge f(x_2)$) bo‘lsa, $f(x)$ funksiya D sohada kamaymaydigan (yoki o‘smaydigan) funksiya deyiladi. $D(f)=[a;b]$ soha esa $f(x)$ funksiyaning mos ravishda o‘sish (yoki kamayish) oralig‘i deyiladi.

6-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiyada har bir $x\in D(f)$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya juft funksiya deyiladi. Agar har bir $x\in D(f)$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x^2$, $y=\cos x$, $y=\ln\left(1+x^2\right)$ juft funksiyalardir, $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=x+\dfrac{1}{x}$ toq funksiyalardir.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o‘qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

7-ta’rif. Agar $y=f(x)$ da har bir $x\in D(f)$ va $(x\pm T)\in D(f)$ uchun $f(x\pm T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya T davrli funksiya deyiladi, bu yerda T-biror haqiqiy sonning T eng kichik musbat qiymati T_0, $f(x)$ funksiyaning asosiy davri deyiladi.

4. Elementar funksiyalarning asosiy klassifikatsiyasi

Elementar funksiyalarning quyidagi asosiy klassifikatsiyasi ma’lum.

Elementar funksiyalar jumlasiga kiruvchi quyidagi funksiyalar **algebraik funksiyalar** deb ataladi.

1. Butun ratsional funksiya yoki ko‘phad:

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,\ \ a_0,a_1,...,a_n$$

koeffitsiyentlar o‘zgarmas sonlar bu yerda sonlar, $n\geq 0$ butun son bo‘lib, ko‘phadning darajasi deyiladi.

2. Ratsional kasr funksiya. Bu funksiya ikkita ko‘phadning nisbati kabi qaraladi:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}$$

masalan, $y=\dfrac{c}{x}$ funksiya ham kasr-ratsional funksiyadir.

3. Irratsional funksiya. Agar $y=f(x)$ formulaning o‘ng tomonida qo‘shish, ayrish, ko‘paytirish, bo‘lish va butun bo‘lmagan ratsional darajaga ko‘tarish amallari bajarilsa, y ga x ning irratsional funksiyasi deyiladi.

Masalan, $y=\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{\sqrt{1+3x^2}}$, $y=\sqrt{x}$ irratsional funksiyalardir.

Algebraik bo‘lmagan funksiyalar transsedent funksiyalar deyiladi. Masalan, $y=\cos x$, $y=10^x$ transsedent funksiyalardir.

5. Funksiyaning limiti

8-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida yoki bu atrofning ba’zi nuqtalarida aniqlangan bo‘lib, har bir $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, x ning a dan farqli va $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, x argument a ga intilganda $(x\to a)$, $y=f(x)$ funksiya b limitga intiladi deyiladi.

Agar $x\to a$ da funksiyaning limiti b bo'lsa, u holda

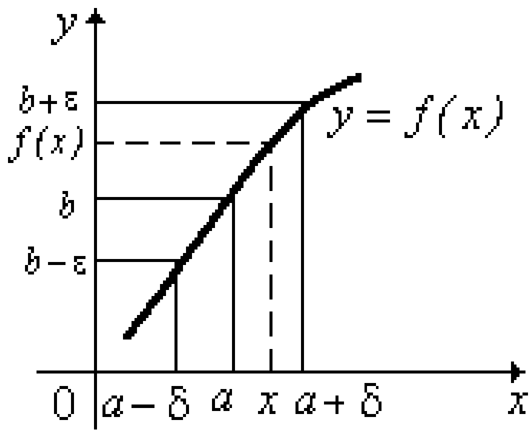
$$\lim_{x\to a} f(x)=b \tag{2}$$

yoki $x\to a$ da $f(x)\to b$ kabi yoziladi.

Yuqoridagi ta'rifning geometrik talqini quyidagicha:

Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, a dan δ dan ortiq bo'lmagan masofada yotuvchi $(a-\delta;a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon;b+\varepsilon)$ intervalga tushsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'ladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$ ekanini ta'rifdan foydalanib isbotlang.



56-shakl.

Yechish: $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ funksiyani $x=4$ nuqtaning atrofida, masalan, $(3;5)$ intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ni olamiz va $|f(x)-2|$ ni $x\neq 4$ deb quyidagicha o'zgartiramiz: $x\in(3;5)$ ya'ni $x>3$ ni hisobga olsak, ushbu tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{|x-4|}{3},$$

bundan ko‘rinib turibdiki, $\delta=3\varepsilon$ deb olsak, u holda $|x-4|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\in(3;5)$ uchun ushbu tengsizlik bajariladi:

$$\left|\frac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\frac{\delta}{3}=\varepsilon.$$

Bundan 2 soni $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ funksiyaning $x=4$ nuqtadagi limiti bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi, $x\to\infty$ da funksiya o‘zgarishining ba’zi hollarini ko‘ramiz.

9-ta’rif. Har bir ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday musbat N sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, x ning $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik qanoatlantirilsa, $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiya b limitga intiladi deyiladi va uni $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ yoki $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ kabi yoziladi.

2-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x}=1$ ekanligini isbotlang.

Yechish: $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ funksiyani qaraymiz. $b=1$ deb olamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ni olamiz va $|f(x)-b|$ ni o‘zgartiramiz:

Agar $N=\dfrac{2}{\varepsilon}$ deb olsak, $\left|\dfrac{x+2}{x}-1\right|=\left|1+\dfrac{2}{x}-1\right|=\dfrac{2}{|x|}$ u holda barcha $|x|>N$ uchun ushbu tengsizlik bajariladi: $\left|\dfrac{x+2}{x}-1\right|<\dfrac{2}{N}=\varepsilon.$

Bundan $b=1$ soni $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti bo‘lishi kelib chiqadi.

10-ta’rif. $(a;\mathrm{b})$ intervalda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $M>0$ son mavjud bo‘lsaki, barcha $x\in(a;b)$ lar uchun $|f(x)|<M$ tengsizlik bajarilsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda chegaralangan deb ataladi. Agar bunday M son mavjud bo‘lmasa, u holda $y=f(x)$ funksiya bu intervalda chegaralanmagan deyiladi.

3-misol. $y=\sin x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda chegaralangan, chunki bu intervaldagi barcha x lar uchun $|\sin x|\leq 1$, ya'ni $M\leq 1$ bo'ladi.

1-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli son bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'ladi.

Isboti. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ tanglikdan istalgan $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, a nuqtaning δ atrofida ushbu tengsizlik bajariladi:

$$|f(x)-b|<\varepsilon \quad yoki \quad |f(x)|-|b|\leq \varepsilon.$$

Bundan $|f(x)|\leq |b|+\varepsilon$ kelib chiqadi. Agar $M=|b|+\varepsilon$ deb olsak, $|f(x)|\leq M$ bo'lib, $f(x)$ funksiyaning chegaralangan bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

11-ta'rif. Agar x biror a sondan kichik qiymatlarnigina qabul qilib, shu a songa intilganda $f(x)$ funksiya b_1 limitga intilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ yoziladi va b_1 ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deyiladi. x faqat a dan katta qiymatlarnigina qabul qilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ kabi yoziladi va b_2 ga funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti deyiladi.

Agar $b_1=b_2=b$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'ladi va aksincha, agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning ta'rifini va uning berilish usullarini ayting.
2. Asosiy elementar funksiyalarni ayting.
3. Elementar funksiyalarning asosiy xossalarini ayting.
4. Elementar funksiyalarning asosiy klassifikatsiyasini ayting.
5. Funksiya limiti ta'rifini ayting.

25-§. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar

1. Limitlar haqidagi asosiy teoremalar

Limitlar haqidagi quyidagi teoremalarda birgina x argumentga bog'liq funksiyalar to'plamini tekshiramiz, bunda $x \to a$ yoki $x \to \infty$. Soddalik uchun $x \to a$ ni ham, $x \to \infty$ ni ham yozmaymiz.

7-teorema. Agar $\lim f(x) = b$, $\lim g(x) = c$ bo'lsa, bu holda

$$\lim\left[f(x) \pm g(x)\right] = b \pm c, \quad \lim\left[f(x) \cdot g(x)\right] = b \cdot c, \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \ c \neq 0$$

bo'ladi.

8-teorema. Agar uchta $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ funksiyalarning tegishli qiymatlari orasida $u \leq z \leq v$ tengsizliklar bajarilsa, bunda $x \to a$ (yoki $x \to \infty$ da) $u(x)$ va $v(x)$ birgina limitga intilsa, u holda $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) $z = z(x)$ ham shu limitga intiladi.

9-teorema. Agar $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) funksiya $y \geq 0$ qiymatlarni qabul qilib, $\lim\limits_{x \to a} y = b$ bo'lsa, u holda $b \geq 0$ bo'ladi.

10-teorema. Agar $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) intiluvchi $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning tegishli qiymatlari orasida $u \geq v$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim u \geq \lim v$ bo'ladi.

11-teorema. Agar $f(x)$ o'suvchi va chegaralangan funksiya bo'lsa, ya'ni $f(x) < M$ bo'lsa, bu funksiya $\lim f(x) = a$ limitga ega bo'lib, $a \leq M$ bo'ladi. Bu teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz.

Quyidagi limitlarni hisoblang.

1-misol. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$

2-misol. $\lim\limits_{x \to 2} 5x^3 = 5\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40.$

3-misol. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 5}{4x - 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(3x + 5)}{\lim\limits_{x \to 2}(4x - 2)} = \dfrac{3\lim\limits_{x \to 2} x + 5}{4\lim\limits_{x \to 2} x - 2} = \dfrac{3 \cdot 2 + 5}{4 \cdot 2 - 2} = \dfrac{11}{6}.$

4-misol. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x + 2) = 2 + 2 = 4.$

2. Birinchi ajoyib limit.

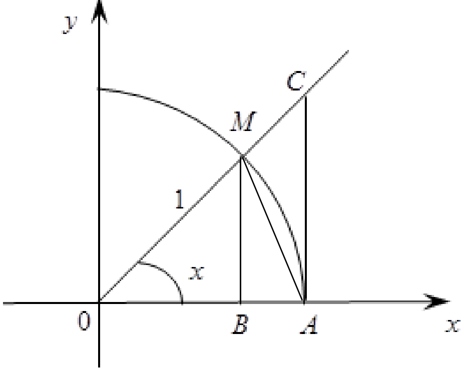
12-teorema.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (3)$$

Isbot. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ da aniqlanmagan. Bu funksiyaning $x\to 0$ dagi limitini topamiz. Radiusi 1 bo‘lgan aylanani qaraymiz. 57-shakldan ko‘rinadiki,

$S_{\Delta MOA}<S_{SekMOA}<S_{\Delta COA}$ va $\measuredangle MOB=x$ deb belgilaymiz, bunda $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Bu yuzlar quyidagicha:



57-shakl.

$$S_{\Delta MOA}=\frac{1}{2}OA\cdot MB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{SekMOA}=\frac{1}{2}OA\cdot \smile{MA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x,$$

$$S_{\Delta COA}=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\frac{1}{2}tgx.$$

Demak, $\sin x<x<tgx.$

Bu tengsizlikni $\sin x$ ga hadlab bo‘lamiz: $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ yoki $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$ Bu tengsizlikni $x>0$ bo‘lgan hol uchun chiqardik. $x<0$ bo‘lganda $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x},$ $\cos(-x)=\cos x$ bo‘lgani uchun $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Ammo $\lim_{x\to 0}\cos x=1,$ $\lim_{x\to 0}1=1$ bo‘lgani uchun $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Birinchi ajoyib limitga doir misollarni yechamiz

5-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$

6-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k,$ $k=const.$

7-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ limitni toping.

Yechish:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

3. e soni

13-teorema.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{4}$$

Isbot. Nyuton binomi formulasiga asosan

$$(a+b)^n=a^nC_n^0+a^{n-1}C_n^1b+a^{n-2}C_n^2b^2+a^{n-3}C_n^3b^3+...+C_n^nb^n.$$

Bunda, $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$, $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n$, $1!=0!=1$, $n>m$, $a=1$, $\text{b}=\frac{1}{n}$.

U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+...$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=2+b_n.$$

bo‘ladi.

$$2<a_n=2+b_n\le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}\le$$

$$=2+\frac{1/2}{1-1/2}=2+1=3, \qquad 2<a_n<3.$$

Demak,

$$2<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3, \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

12-ta’rif. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ o‘zgaruvchi miqdorning $n\to\infty$ da limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

$2<e<3$ bo‘lgan irratsional son bo‘lib, $e=2{,}7182818284...$ bo‘lishi aniqlangan.

4. Ikkinchi ajoyib limit

14-teorema.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5}$$

Isbot. Teoremani isboti 13-teoremani isbotidan oson kelib chiqadi.

(3) formulada $\alpha=\dfrac{1}{x}$ almashtirish yordamida

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \tag{6}$$

natijaviy formulani hosil qilamiz.

Asosi e bo‘lgan $y=e^x$ funksiya eksponental funksiya deyiladi va matematika kursida juda katta rol o‘ynaydi.

8-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = e\cdot 1 = e.$$

9-misol. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^3 = e^3.$

10-misol. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4} =$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^4 = \left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{\frac{y}{4}}\right)^4\cdot 1 = e^4.$$

11-misol. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ ni toping.

Yechish: $t=\dfrac{2}{x}$ deylik, $x\to\infty$ da $t\to 0$, (4) formuladan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{2}{t}}=\left(\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}=e^{2}.$$

5. Natural logarifmlar

Matematikada asosi e bo‘lgan logarifmlar asosiy rol o‘ynaydi. e asosli logarifm natural logarifm deyiladi va $\ln x$ deb belgilanadi, shunday qilib: $\ln x=\log_e x$.

Natural va o‘nli logarifmlar orasidagi bog‘lanishni topamiz. $y=\ln x$ bo‘lsin. U holda logarifmning ta’rifiga ko‘ra $x=e^{y}$ ga egamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini 10 asos bo‘yicha logarifmlab, quyidagini hosil qilamiz: $\lg x=\lg e^{y}\Rightarrow \lg x=y\lg e$ yoki $\lg x=\ln x\cdot\lg e.$ $\lg e\approx\lg 2,7183\approx 0,4343$ bo‘lgani uchun $\lg x\approx 0,4343\ln x.$

Bu formuladan

$$\ln x\approx\frac{1}{0,4343}\lg x \tag{7}$$

yoki

$$\ln x\approx 2,3026\lg x \tag{8}$$

ekani kelib chiqadi.

(7) va (8) formulalar natural va o‘nli logarifmlar orasidagi bog‘lanishni beradi.

12-misol. $\ln 32,94$ ni toping.

Yechish: $\lg 32,94\approx 1,5177$ bo‘lgani uchun (8) formulaga ko‘ra quyidagini topamiz: $\ln 32,94\approx 2,3026\cdot 1,5177=3,4947.$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Limitlar haqida asosiy teoremalarni ayting.
2. Birinchi ajoyib limitni formulasini ayting.
3. Ikkinchi ajoyib limitni formulasini ayting.

26-§. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar

1-ta'rif. Har qanday katta $M>0$ son uchun shunday $\delta>0$ qiymatni topish mumkin bo'lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlarida $|f(x)|>M$ bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ cheksiz katta funksiya deyiladi va uni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ kabi yoziladi. Bunda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ tangliklardan biri bo'lishi mumkin.

2- ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da $\alpha=\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Bu ta'rifdan $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $|x-a|<\delta$ dan $|\alpha(x)|<\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya b o'zgarmas son bilan cheksiz kichik $\alpha=\alpha(x)$ funksiyaning yig'indisi $y=b+\alpha$ ko'rinishida berilsa, u holda $x\to a$ yoki $x\to\infty$ bo'lganda $\lim y=b$ bo'ladi. Aksincha, agar $\lim y=b$ bo'lsa, $y=b+\alpha$ ni yozish mumkin, bu yerda α cheksiz kichik funksiya.

Isbot. $y=b+\alpha$ tenglikdan $|y-b|=|y+\alpha-b|=|\alpha|$ bo'ladi.

Har qanday $\varepsilon>0$ son olinganda ham biror qiymatdan boshlab α ning barcha qiymatlari $|\alpha|<\varepsilon$ munosabatni qanoatlantiradi. Bundan esa $\lim y=b$ bo'lishi kelib chiqadi. Aksincha, agar $\lim y=b$ bo'lsa, $|y-b|<\varepsilon$ bo'ladi. $y=b+\alpha$ deb belgilasak, u holda α ning biror qiymatidan boshlab barcha qiymatlar uchun $|\alpha|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa α cheksiz kichik funksiya deganidir.

2-teorema. Agar $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) $\alpha=\alpha(x)$ nolga intilsa-yu, lekin nolga aylanmasa, u holda $y=\dfrac{1}{\alpha}$ cheksizlikka intiladi.

Isbot. $M>0$ istalgancha katta bo‘lganda $|\alpha|<\frac{1}{M}$ bo‘lsa, $\frac{1}{|\alpha|}>M$ bo‘ladi. $|\alpha|<\frac{1}{M}$ tengsizlik α ning biror qiymatidan boshlab, barcha qiymatlari uchun bajariladi, chunki $\alpha(x)\to 0$.

Quyidagi teoremalarni ham xuddi shu kabi isbotlash mumkin:

3-teorema. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig‘indisi cheksiz kichik funksiyadir.

4-teorema. Cheksiz kichik $\alpha=\alpha(x)$ funksiyaning chegaralangan $z=z(x)$funksiya bilan ko‘paytmasi yoki $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) cheksiz kichik funksiyadir.

5-teorema. Cheksiz kichik $\alpha(x)$ funksiyaning limiti noldan farqli $z=z(x)$ funksiyaga bo‘lishdan chiqqan $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ bo‘linma cheksiz kichik funksiyadir.

2. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

$\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar nisbatining $x\to+\infty$ dagi limitini qaraylik va quyidagi ta’riflarni kiritaylik. (Shunga o‘xshash ta’riflar $x\to-\infty$ da, $x\to+\infty$ da o‘ngdan va chapdan, shuningdek, $x\to x_0$ da ham kiritiladi.)

3- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ mavjud va nolga teng bo‘lmasa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$funksiyalar $x\to+\infty$ bir xil kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiyalar deyiladi.

4- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$ bo‘lsa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiya deyiladi.

5- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\infty$ bo‘lsa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyaga nisbatan quyi kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiya deyiladi.

6- ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ mavjud bo‘lmasa yoki ∞ ga teng bo‘lsa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar deyiladi.

1-misol. $x\to 0$ da $y=x^2$ funksiya $y=5x$ funksiyaga nisbatan yuqori kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiya ekanini ko‘rsating.

Yechish: Ikki funksiyaning nisbatini limitini ko‘ramiz:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{5x}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}x=0$, ya’ni x nolga intilganda $y=x^2$ funksiya $y=5x$ funksiyaga nisbatan tezroq nolga intiladi.

2-misol. $y=x^2-4$ va $y=x^2-5x+6$ funksiyalar $x\to 2$ da bir xil kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiya ekanini ko‘rsating.

Yechish: Ikki funksiya nisbatining limitini ko‘ramiz:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=-4\neq 0.$$

3-misol. $\varphi(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ va $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiyalar $x\to+\infty$ da taqqoslanmaydigan cheksiz kichik funksiyalar ekanini ko‘rsating.

Yechish: Ikki funksiyaning nisbatini $x\to+\infty$ dagi limitini ko‘ramiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}:\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\cos x=?$$

ning limiti mavjud emas, demak, bu ikki funksiya $x\to+\infty$ da taqqoslanmaydigan funksiyalar ekan.

3. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar

7- ta’rif. Ikkita $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiya nisbatining $x\to+\infty$ dagi limiti birga teng bo‘lsa, bu funksiyalar ekvivalent (yoki teng kuchli) funksiyalar deyiladi. Ta’rifdan ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bir xil kichiklik tartibiga ega bo‘lishi kelib chiqadi.

Masalan, x, $\sin x$, $\mathrm{tg}\,x$ funksiyalar $x\to 0$ da ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$$

$\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar $x \to x_0$ da ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsin, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. U holda x ning x_0 ga yaqin qiymatlari uchun $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\approx 1$ yoki $\varphi(x)\approx\psi(x)$ taqribiy tenglik o‘rinli bo‘lib, uning aniqligi x qiymatining x_0 ga yaqinlashishi bilan ortib boradi.

$\sin x$ va x funksiyalar $x\to 0$ da ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bo‘lgani uchun x ning 0 ga teng yaqin qiymatlari uchun $\sin x\approx x$ bo‘ladi. Bu hol amalda keng foydalaniladi. Demak, x cheksiz kichik bo‘lganda $\sin x$ va x argumenti bilan almashtirish mumkin. Masalan, agar $x=0{,}1$ bo‘lsa, $\sin x=\sin 0{,}1\approx 0{,}0998\approx 0{,}1$.

Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar bo‘lsa, uni quyidagicha belgilanadi: $\varphi(x)\approx\psi(x)$.

6-teorema. $x\to+\infty$ da $\varphi(x)\approx\varphi_1(x)$ va $\psi(x)\approx\psi_1(x)$ bo‘lsin. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ham mavjud va bu ikkala limit o‘zaro teng bo‘ladi.

Bu teorema qisqacha quyidagicha bayon qilinadi: ikkita cheksiz kichik funksiya nisbatining limiti ularga ekvivalent funksiyalar nisbatining limitiga teng.

Isbot. Quyidagiga egamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Isbotlangan teorema ko‘p hollarda limitni topishni yengillashtirishga imkon beradi.

4-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg3x}$ ni toping.

Yechish: $x\to 0$ da $\sin 5x\approx 5x,\ tg3x\approx 3x$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

Ikkita cheksiz kichik funksiyaning ekvivalentli alomatini keltiramiz.

7-teorema. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ cheksiz kichik funksiyalarning ayirmasi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ga nisbatan yuqori kichiklik tartibidagi bo‘lganda va faqat shundagina ular ekvivalent bo‘ladi.

Isbot. $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar, masalan $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo‘lsin, ularning ayirmasini $\beta(x)$ orqali aniqlaymiz.

Agar $\varphi(x) \approx \psi(x)$ bo‘lsa, $\beta(x)$ funksiya $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarga nisbatan yuqori kichiklik tartibidagi cheksiz kichik bo‘lishini, ya’ni

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}=0 \text{ va } \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}=0$$

ekanini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1-1=0.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}=0$ ekanligi shunga o‘xshash isbotlanadi.

Aksincha $\beta(x)$ funksiya $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ga nisbatan yuqori kichiklik tartibidagi cheksiz kichik funksiya bo‘lsin. $\varphi(x) \approx \psi(x)$, ya’ni $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$ ekanini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, $\beta(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ bo‘lgani uchun $\varphi(x)=\beta(x)+\psi(x)$.

Demak,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)+\psi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}+1=0+1=1,$$

chunki shartga ko‘ra $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}=0$.

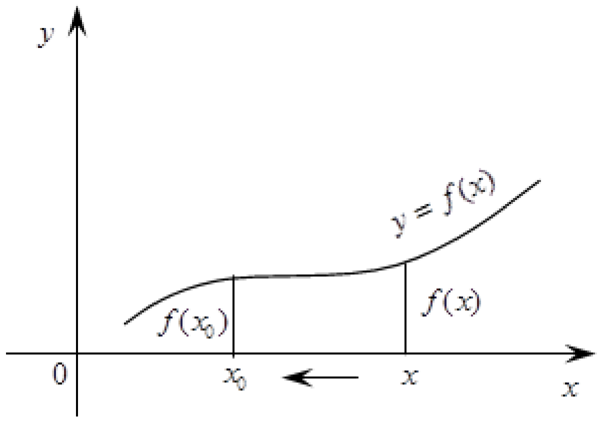
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar ta’rifini ayting.
2. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash teoremalarini ayting.
3. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar deganda nimani tushunasiz ?

27-§. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi. I va II tur uzilish nuqtalari. Funksiyaning kesmadagi uzluksizligi, funksiya uzluksizligi

1. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi

Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi bizning bu funksiyaning grafigi silliq hech qayerda uzilmaydigan bo‘lishi haqidagi intuitiv tasavvurlarimiz bilan bog‘liq. Bunday $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qarayotganimizda biz ko‘ramizki, argumentning x_0 ga yaqin qiymatlariga funksiyaning x_0 dagi qiymatiga yaqin qiymatlari to‘g‘ri keladi. Agar x erkli o‘zgaruvchi x_0 nuqtaga yaqinlashsa, $y = f(x)$ funksiyaning qiymati funksiyaning x_0 dagi qiymatiga chegaralanmagan holda yaqinlashadi (58-shakl).



58-shakl.

Endi funksiyaning uzluksizligi tushunchasining qat’iy ta’rifini beramiz. Ushbu shartlar o‘rinli bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va bu nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror atrofida aniqlangan;

2) funksiya $x \to x_0$ da limitga ega;

3) funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (9)$$

Agar x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo‘lsa, u holda bu x_0 nuqta berilgan funksiyaning **uzluksizlik nuqtasi** deyiladi.

1-eslatma. (9) formulani

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \tag{10}$$

ko‘rinishda yozish mumkin, chunki

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

formula uzluksiz funksiyaning limitini topayotganda funksiya belgisi ostida limitga o‘tish mumkinligini ko‘rsatadi.

2-eslatma. Ko‘pincha funksiyaning x_0 nuqtadan o‘ngda yoki chapda uzluksizligini (ya’ni bir tomonlama uzluksizligini) qarashga to‘g‘ri keladi. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lsin. Agar

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **o‘ngdan uzluksiz** deyiladi; agar

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

1-misol. $y = 5x^3$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyani $x = 2$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

Yechish: Buning uchun funksiya uzluksizligi ta’rifiga kiruvchi uchta shartning bajarilishini ko‘rsatish kerak:

1) funksiya $x = 2$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ mavjud;

3) bu limit funksiyaning $x = 2$ nuqtadagi qiymatiga teng.

$f(x) = 5x^3$ funksiya butun son o‘qida aniqlangan bo‘lgani uchun birinchi shart avtomatik ravishda bajariladi. So‘ngra $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 40.$

Shunday qilib, ikkinchi shart bajarildi. Nihoyat, $f(2) = 5\cdot 2^3 = 40$ ekanligini e’tiborga olsak, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ekanligini ko‘ramiz, ya’ni funksiyaning $x = 2$ nuqtada uzluksizligini aniqlovchi shart ham bajarildi. Shunday qilib, $y = 5x^3$ funksiya $x = 2$ nuqtada uzluksiz, xuddi shunga o‘xshash, bu funksiya son o‘qining istalgan nuqtasida uzluksizligini ko‘rsatish mumkin.

2. Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Agar x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga yoki uning chegarasiga tegishli bo‘lsa va uzluksizlik nuqtasi bo‘lmasa, bu nuqta shu funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

Agar x_0 nuqtaning istalgan atrofi funksiyaning aniqlanish sohasining nuqtalarini ham, aniqlash sohasiga tegishli bo‘lmagan nuqtalarini ham o‘z ichiga olsa, x_0 nuqta funksiya aniqlanish sohasining chegaraviy nuqtasi deyiladi. Barcha chegaraviy nuqtalar to‘plami sohasining chegarasi deyiladi. Masalan, $y=1/\sqrt{1-x^2}$ funksiya uchun $(-1;1)$ interval aniqlanish sohasi bo‘ladi, uning chegarasi esa ikkita $x=-1$ va $x=1$ nuqtadan iborat.

Bu holda funksiya $x=x_0$ da uzilishga ega deyiladi. Bu hol agar funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lsa yoki $x=x_0$ da funksiyaning limiti mavjud bo‘lmasa yoki, funksiyaning limiti mavjud, lekin u funksiyaning x_0 dagi qiymatiga teng bo‘lmasa, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ bo‘lsa, ro‘y berishi mumkin.

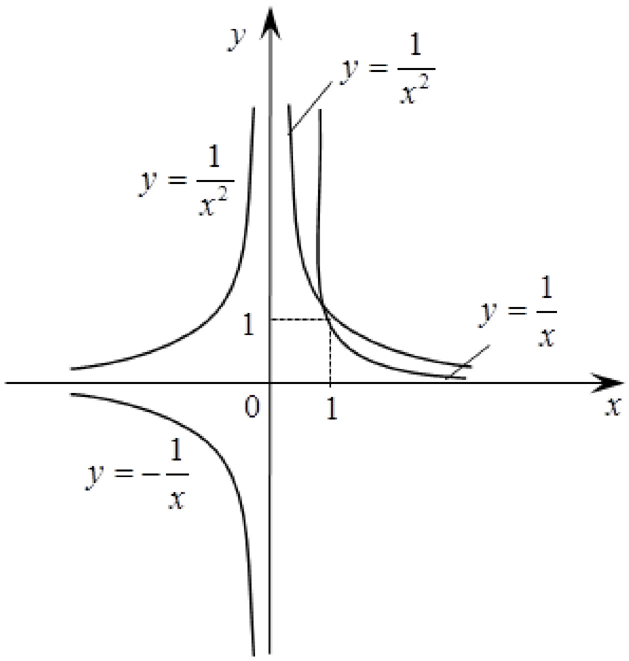
2-misol. $f(x)=\begin{cases} x-1, & agar\ \ 0\le x<3\ \ bo'lsa, \\ 3-x, & agar\ \ 3\le x<4\ \ bo'lsa \end{cases}$ funksiyaning uzilish nuqtasini aniqlang.

Yechish: Bu funksiya $[0;4]$ kesmaning barcha nuqtalarida aniqlangan va uning $x=3$ dagi qiymati 0 ga teng. Biroq $x=3$ nuqtada funksiya uzilishga ega, chunki u $x\to 3$ da limitga ega emas: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0.$ $f(x)$ funksiya $[0;4]$ kesmaning $x=3$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lishini eslatib o‘tishimiz kerak. Bunda u $x=0$ nuqtada o‘ngdan, $x=4$ nuqtada chapdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=f(0)=-1,\ \lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(3-x)=f(4)=-1.$$

3-misol. $y=\dfrac{1}{x}$ va $y=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring.

Yechish: Bu funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohasining chegaraviy nuqtasi $x=0$ da uzilishga ega, chunki ular bu nuqtada aniqlanmagan, $y=\dfrac{1}{x}$ va $y=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyalar $x\to 0$ da (59-shakl) cheksiz katta funksiyalardir. Shuning uchun $x=0$ nuqtada bu funksiyalar cheksiz uzilishga ega deyiladi.



59-shakl.

Funksiyaning uzilish nuqtalarini ikki tirga ajratish mumkin.

Agar ikkala bir tomonli limit $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ mavjud bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **1-tur uzilish** nuqtasi deyiladi. 1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish **2-tur uzilish** nuqtasi deyiladi.

2-misolda keltirilgan $y=f(x)$ funksiya $x=3$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki u funksiya uchun $x\to 3$ da chap va o‘ng limitlar mavjud, demak, bu nuqta 1-tur uzilish nuqta ekan.

3-misolda ko‘rilgan $y=\frac{1}{x}$ va $y=\frac{1}{x^2}$ funksiyalar $x=0$ nuqtada 2-tur uzilishga ega, chunki bu funksiyalar $x=0$ nuqtada chap limitga ham o‘ng limitga ham ega emas.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lsa, bu bartaraf qilinishi mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi deyiladi.

x_0 nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘lsin. U holda $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ayirmani funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi. 2-misolda ko‘rilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada $0-2=-2$ ga teng sakrashga ega ekan.

3. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Uzluksiz funksiyalar ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish (bo‘luvchi noldan farqli bo‘lgan shartda) amallar bajarilsa, buning natijasida hosil bo‘lgan funksiyalar ham uzluksiz bo‘ladi.

1-teorema. Agar $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ularning yig‘indisi va ko‘paytmasi ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Agar, bundan tashqari $\psi(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $\varphi(x)/\psi(x)$ funksiya ham uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. Masalan, $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ ko‘paytmaning uzluksizligini isbotlaylik. x_0 nuqtada $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ aniqlangan, shu bilan birga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$ kelib chiqadi. Ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremaga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\cdot\psi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0).$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bu esa $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini ko‘rsatadi. Teoremaning boshqa tasdiqlari ham shunga o‘xshash isbotlanadi. Teorema ixtiyoriy chekli sondagi qo‘shiluvchilar yoki ko‘paytuvchilar uchun umumlashtiriladi.

4. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Ishora turg‘unligi

2-teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada $y=f(u)$ funksiya esa $u_0=\varphi(x_0)$nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))$ ni ko‘rsatish yetarli. Haqiqatan ham, $u=\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligiga asosan $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$ ga egamiz, ya’ni $x\to x_0 \Rightarrow u\to u_0$.

Shuning uchun, $y=f(u)$ funksiyaning uzluksizligidan:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0))$$

Isbotlangan teoremaning qisqacha bayonini keltiramiz.

Haqiqatan ham, ikkita uzluksiz $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyadan tuzilgan murakkab funksiya $y = f(\varphi(x))$ uzluksiz funksiyadir.

Masalan, $y=\sin(x^3+4x-2)$ murakkab funksiya x ning barcha qiymatlari uchun uzluksiz, chunki $y=\sin(u)$ va $u=x^3+4x-2$ funksiyalar barcha qiymatlarda uzluksiz. $y=\ln(1-x^2)$ murakkab funksiya x ning $1-x^2>0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun, ya'ni $(-1;1)$ intervalda uzluksiz.

Biz bilamizki, elementar funksiya deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi murakkab funksiyalarni berish mumkin bo'lgan funksiyaga aytiladi. Asosiy elementar funksiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lgani uchun 1 va 2-teoremalardan quyidagi natija kelib chiqadi: har qanday elementar funksiya o'zining aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi**.**

Bu muhim natija agar elementar funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lsa, bu funksiyaning $x \to x_0$ dagi limitini oson topish imkonini beradi. Buning uchun funksiyaning bu nuqtadagi qiymatini hisoblash yetarli:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4} 5^{tgx}$ ni toping.

Yechish: 5^{tgx} funksiya $x=\pi/4$ nuqta uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to\pi/4} 5^{tgx} = 5^{\lim\limits_{x\to\pi/4} tgx} = 5^{tg\pi/4} = 5^1 = 5.$$

Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning yana bitta xossasini ta'kidlab o'tamiz. x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada musbat (manfiy) qiymatga ega bo'lsa, u x_0 nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda musbat (manfiy) bo'lib qoladi.

Haqiqatan ham, masalan, $f(x_0)>0$ bo'lsin. Shunday $\varepsilon>0$ ni olamizki, $f(x_0)-\varepsilon>0$ bo'lsin. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)>0$ bo'lgani uchun (funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligiga asosan) funksiyaning $x \to x_0$

nuqtada uzluksizligi haqidagi ta'rifga asosan shunday N va M sonlar mavjudki, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lgani uchun

$$x\in[N;M]\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon.$$

Biroq $f(x_0)-\varepsilon>0$ bo'lgani sababli $[N;M]$ intervalning barcha nuqtalari uchun $f(x)>0$. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida musbat.

5. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

Uzluksiz funksiyalarning ba'zi xossalarini qarab chiqamiz. Bunda, odatda, isbotlarni keltirmasdan bayon qilish va tushuntirish bilangina chegaralanamiz.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning chegaralarida, ya'ni a va b nuqtalarda mos ravishda chapdan va o'ngdan uzluksiz bo'lsa $[a;b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

3-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Bu teorema bunday tasdiqlanadi: $[a;b]$ kesmada shunday x_1 nuqta topiladiki, $y=f(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati uning kesmadagi barcha qiymatlari ichida eng kattasi bo'ladi (60-shakl):

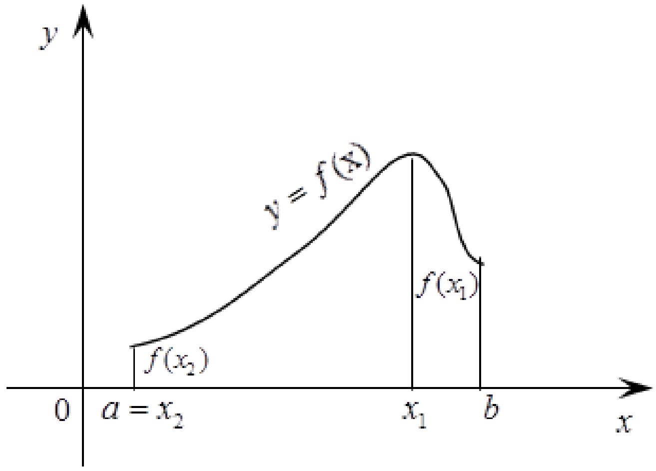
$$f(x)\le f(x_1).$$

Shunga o'xshash, kesmada shunday x_2 nuqta topiladiki, $y=f(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati uning kesmadagi barcha qiymatlari ichida eng kichigi bo'ladi, ya'ni $f(x_2)\le f(x)$.

Eslatma. Agar teoremaning bayonida kesmani $(a;b)$ intervalga almashtirsak, umuman aytganda, tasdiq to'g'ri bo'lmaydi.

Masalan: $(0;1)$ intervalda uzluksiz bo'lgan $y=5x$ funksiya bu intervalda eng katta qiymatga erishmaydi. U 5 ga yaqin ixtiyoriy qiymatni qabul qilish mumkin biroq $(0;1)$ intervalda funksiya 5 ga teng bo'la oladigan bitta ham nuqta yo'q, $1\notin(a,b)$.

Bu funksiya $(0;1)$ intervalda eng kichik qiymatga ham erishmaydi. Xuddi shunga o'xshash, agar funksiya kesmada aniqlangan bo‘lib, kesmaning biror nuqtasida uzilishga ega bo‘lsa, teoremaning xulosasi umuman aytganda, o‘rinli bo‘lmay qolishi mumkin.



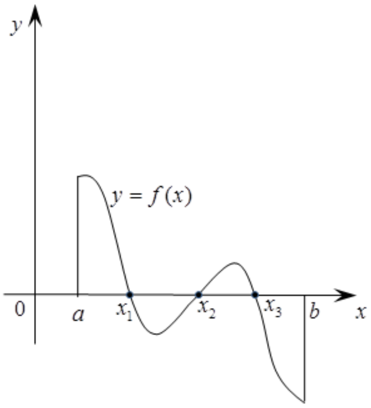
60-shakl.

4-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa va uning chetki nuqtalarida turli ishoralarni qabul qilsa u holda kesma ichida bu funksiya nolga teng bo‘ladigan kamida bitta nuqta topiladi.

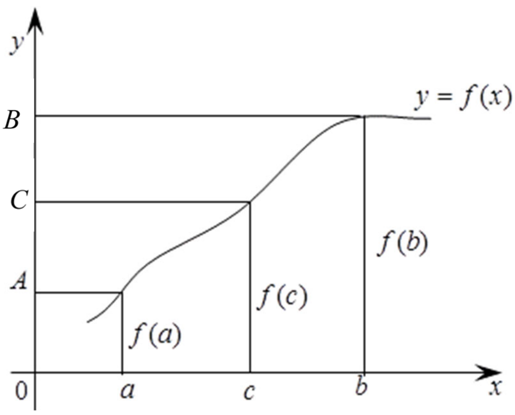
Teoremaning geometrik ma’nosi quyidagicha: agar $y=f(x)$ funksiya grafigining $[a;b]$ kesmaning chakkalariga tegishli nuqtalari Ox o‘qdan har xil tomonda yotsa, u holda bu funksiyaning grafigi Ox o‘qni kamida bitta nuqtada kesadi. 61-shakldа ko‘rsatilgan funksiya grafigida bunday nuqtalar uchta: x_1, x_2, x_3. Bu teoremani quyidagicha umumlashtirish mumkin:

5-teorema. (Oraliq qiymatlar haqidagi teorema) $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A,\ f(b)=B$ bo‘lsin. U holda A va B orasida yotgan ixtiyoriy C son uchun bu kesma ichida shunday c nuqta topiladiki, $f(c)=C$ bo‘ladi.

Bu teorema geometrik jihatdan tushunarli. $y=f(x)$ funksiyaning grafigini qaraylik. $f(a)=A$, $f(b)=B$ bo‘lsin. U holda $y=C$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigini kamida bitta nuqtada kesib o‘tadi, bu yerda C berilgan A va B orasida yotgan ixtiyoriy son (62-shakl).



61-shakl.



62-shakl.

Shunday qilib, uzluksiz funksiya bitta qiymatdan ikkinchisiga o‘tayotib, albatta, barcha oraliq qiymatlardan o‘tadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning nuqtada uzluksizligini ta’rifini ayting.
2. Uzilish nuqtalari va ularning turlari nechtadan iborat?
3. Uzluksiz funksiyalar ustida qanday amallarni bajarish mumkin.
4. Murakkab funksiyaning uzluksizligi qanday ta’riflanadi?
5. Kesmada uzluksiz funksiyalar qanday xossalarga ega bo‘ladi?

V BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIAL HISOBI

28-§. Funksiya hosilasining ta’rifi. Hosilaning geometrik ва mexanik ma’nosi. Funksiyaning uzluksiz bo‘lishi bilan uning hosilaga ega bo‘lishi orasidagi bog‘lanish. Yig‘indi, ko‘paytma, bo‘linmaning hosilalari. Trigonometrik funksiyalarning hosilasi

1. Hosilaning ta’rifi. Biror oraliqda aniqlangan

$$y = f(x) \tag{1}$$

funksiya x argumentning shu oraliqdagi har bir qiymatida ma’lum y qiymatga ega bo‘lsin. Argument x biror Δx orttirmani olsin. U vaqtda y funksiya biror Δy orttirma oladi. Shunday qilib, argumentning $x+\Delta x$ qiymatida $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ ga ega bo‘lamiz. Funksiyaning orttirmasi Δy ni topamiz:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{2}$$

funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Bu nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz. Agar bu limit mavjud bo‘lsa, u berilgan $y = f(x)$ funksiyaning **hosilasi** deyiladi va $f'(x)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta’rifga asosan,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

yoki

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

1-ta’rif. Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning argument x bo‘yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilgan holda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo'lishini qayd qilib o'tamiz.

Hosila uchun $f'(x)$ belgi qatorida boshqacha belgilar ham ishlatiladi, masalan,

$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx}.$$

Hosilaning $x = x_0$ nuqtadagi mos qiymati $f'(x_0)$ yoki $y'|_{x_0}$ bilan belgilanadi.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani **differensiallash** deyiladi.

1-misol. $y = x^2$ funksiya berilgan. Uning: 1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) $x = 3$ nuqtadagi hosilasi y' topilsin.

Yechish: 1) Argumentning x ga teng qiymatida $y = x^2$ ga egamiz. Argumentning $x + \Delta x$ ga teng qiymatida $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$ ga egamiz. Funksiyaning orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. Limitga o'tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Demak, $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y' = 2x$.

2) $x = 3$ dagi hosilani topamiz: $y'_{|x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$

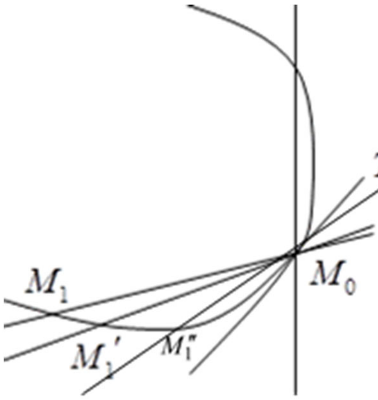
2-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning y' hosilasi topilsin.

Yechish: Bundan oldingi misoldagi kabi muhokama qilib, quyidagini hosil qilamiz:

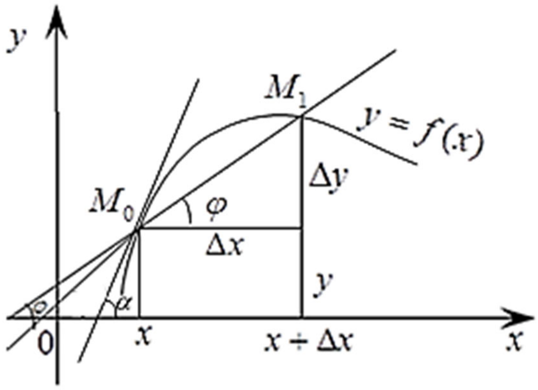
$$y = \frac{1}{x},\ \ y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} \ \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)} \ \Rightarrow y' = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Hosilaning geometrik ma'nosi. Hosilaning juda muhim geometrik ma'nosini beramiz. Buning uchun eng avvalo egri chiziqqa uning berilgan nuqtasida o'tkazilgan urinmaning ta'rifini berishimiz kerak bo'ladi.



63-shakl.



64-shakl.

$y = f(x)$ egri chiziq va unda tayin M_0 nuqta berilgan bo'lsin. Egri chiziqda M_1 nuqtani olamiz va M_0M_1 kesuvchini o'tkazamiz. Agar M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borsa, u holda M_0M_1 kesuvchi M_0M_1', M_0M_1'' va h.k. turli vaziyatlarni ishg'ol qiladi.

Agar M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha istalgan tomondan M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borganda kesuvchi ma'lum M_0T to'g'ri chiziq vaziyatini egallashga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq M_0 nuqtada egri chiziqqa urinma deyiladi. («egallashga intiladi» degan tushuncha quyida aniqlanadi) (63-shakl).

Biz $y = f(x)$ funksiyani va to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida unga mos egri chiziqni ko'zdan kechiramiz (64-shakl). x ning biror qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatga ega. Egri chiziqda x va y ning bu qiymatlariga $M_0(x_0; y_0)$ nuqta to'g'ri keladi. Argument x ga Δx orttirmani beramiz. Argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning «orttirilgan» $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati to'g'ri keladi. Egri chiziqning bunga mos nuqtasi $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ nuqta bo'ladi.

M_0M_1 kesuvchini o‘tkazamiz va uning Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi \tag{5}$$

ekanligini bevosita asoslaymiz.

Endi agar Δx nolga intilsa, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo‘yicha harakat qilib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. M_0M_1 kesishuvchi M_0 nuqta atrofida aylanadi va Δx o‘zgarishi bilan φ burchak ham o‘zgaradi. Agar $\Delta x \to 0$da φburchak biror α limitga intilsa, u holda M_0 nuqtadan o‘tuvchi va abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq izlangan urinma bo‘ladi. Uning burchak koeffitsiyentini topish qiyin emas.

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Demak,

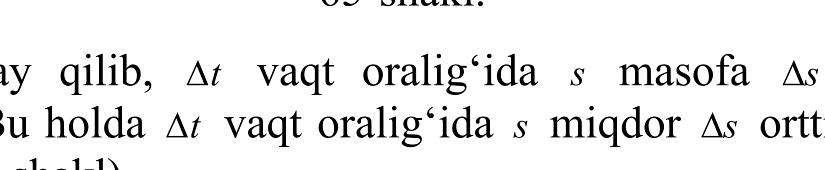
$$f'(x) = tg\alpha. \tag{6}$$

ya’ni argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $y = f(x)$funksiyaning grafigiga uning $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasidagi urinmaning Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

3. Tezlik haqida masala. M moddiy nuqtaning yo‘l formulasi

$$s = f(t) \tag{7}$$

bo‘lsin. Faraz qilaylik, harakat qiluvchi M nuqta t vaqtning biror momentida M_0 boshlang‘ich holatdan s masofada bo‘lsin, undan keyingi biror $t + \Delta t$ momentda esa nuqta boshlang‘ich holatdan $s + \Delta s$ masofada bo‘lib, M_1 holatni olgan bo‘lsin.



65-shakl.

Shunday qilib, Δt vaqt oralig‘ida s masofa Δs miqdorga o‘zgaradi. Bu holda Δt vaqt oralig‘ida s miqdor Δs orttirmani oldi deyiladi (65-shakl).

Endi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatni tekshiraylik. U bizga nuqta harakatining Δt vaqtdagi o‘rtacha tezligini beradi:

$$v_{o'rta} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{8}$$

O‘rtacha tezlik M nuqta harakatining t momentdagi tezligini hamma vaqt ham aniq xarakterlayvermaydi. Masalan, jism Δt oraliqning boshida juda tez, oxirida esa juda sekin harakatlangan bo‘lsa, u holda o‘rtacha tezlik nuqta harakatining ko‘rsatilgan xususiyatlarini aks ettira olmasligi va bizga nuqta harakatining t momentdagi haqiqiy tezligi haqida tasavvur bera olmasligi ravshan. Bu haqiqiy tezlikni o‘rtacha tezlik yordami bilan aniqroq ifodalash uchun Δt kichik vaqt oralig‘ini olish kerak. Nuqta harakatining t momentdagi tezligini $\Delta t \to 0$ dagi o‘rtacha tezlikning intilgan limiti to‘la xarakterlaydi. Bu limit harakatning **berilgan momentdagi tezligi** deyiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{9}$$

Shunday qilib, vaqt orttirmasi Δt nolga intilgan holda yo‘l orttirmasi Δs ning vaqt orttirmasi Δt ga nisbatining limiti harakatning berilgan momentdagi tezligi deyiladi.

Biz (9) tenglikni yoyilgan shaklda yozamiz. Masofaning orttirmasi

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

bo‘lgani uchun

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Demak,

$$v = s'_t = f'(t), \tag{9'}$$

ya’ni tezlik yo‘ldan t vaqt bo‘yicha olingan hosilaga teng.

Buning o‘zi notekis harakatning tezligi bo‘ladi. Shunday qilib, notekis harakat tezligi tushunchasi limit tushunchasi bilan uzviy ravishda bog‘langanligiga asoslanamiz. Faqat limit tushunchasi yordami bilan notekis harakat tezligini topish mumkin.

Yuqoridagi (9') formuladan tezlik v vaqt orttirmasi Δt ga bog‘liq bo‘lmasdan, balki t ning qiymatiga va $f(t)$ funksiyaning xarakteriga bog‘liqligi kelib chiqadi.

4. Funksiyalarning differensiallanuvchanligi

2-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{10}$$

mavjud bo‘lsa, u holda berilgan $x=x_0$ qiymatda funksiya differensiallanuvchi yoki hosilaga ega deymiz.

Agar funksiya biror $[a;b]$ kesmaning yoki $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya $[a;b]$ kesmada yoki $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya biror $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Haqiqatan, agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

bo‘lsa,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\gamma$$

bu yerda, $\gamma-$ cheksiz kichik miqdor bo‘lib, $\Delta x\to 0\ \Rightarrow \gamma\to 0$. U holda

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\gamma\Delta x\,.$$

Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ dagi limitga otsak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\gamma\Delta x\right]=0.$$

Demak, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqdi. Shunday qilib, uzilish nuqtasida funksiya hosilaga ega bo‘la olmaydi. Teskari xulosa to‘g‘ri emas, ya’ni biror $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishidan bu nuqtada u differensiallanuvchi ham bo‘ladi degan xulosa kelib chiqmaydi. x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiya hosilaga ega bo‘lmasligi ham mumkin.

Masalan. $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya erkli o‘zgaruvchining barcha qiymatlari uchun aniqlangan va uzluksizdir. Bu funksiya $x=0$ da hosilaga egami-yo‘qmi ekanligini aniqlaymiz, buning uchun $x=0$ da $y=0$ va $x=0+\Delta x$ da funksiyaning qiymatlarini topamiz: $y+\Delta y=\sqrt[3]{0+\Delta x}$, demak,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}\,.$$

Endi funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining limitini topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

Demak, tekshirilayotgan funksiya $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchi emas. Bu nuqtada egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma abssissa o‘qi bilan $\frac{\pi}{2}$ burchak hosil qiladi, ya’ni Oy o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

5. O‘zgarmas miqdorning, yig‘indining, ko‘paytmaning va bo‘linmaning hosilalari

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblash uchun hosilaning umumiy ta’rifiga asosan ushbu amallarni bajarish zarur:

1) argument x ga Δx orttirma berish, funksiyaning orttirilgan qiymatini hisoblash:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

2) funksiyaning orttirmasini topish:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

3) funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzish:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4) $\Delta x \to 0$ da bu nisbatning limitini topish:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2-teorema. O‘zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya’ni

$$y' = (C)' = 0 \tag{11}$$

bo‘ladi, bu yerda $C = const$.

3-teorema. O‘zgarmas ko‘paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$y' = \left[C \cdot u(x)\right]' = C \cdot u'(x). \tag{12}$$

4-teorema. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig‘indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$y' = \left[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \right]' = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x). \qquad (13)$$

5-teorema. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko‘paytmasi qo‘shilgan birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \qquad (14)$$

6-teorema. Kasrning (ya’ni ikkita funksiya bo‘linmasining) hosilasi kasrga teng bo‘lib, uning maxraji berilgan kasr maxrajining kvadratidan, surati esa maxrajining surat hosilasi bilan va suratning maxraj hosilasi bilan ko‘paytmalari orasidagi ayirmadan iborat, ya’ni

$$y' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (15)$$

Bu teoremalardan 6-teoremaning isbotini ko‘rib chiqamiz, 2-5-teoremalar ham shu kabi isbotlanadi.

Isboti. Agar Δy, Δu va Δv lar y, u va v funksiyalarning argument x ning orttirmasiga mos orttirmalari bo‘lsa, u holda

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \quad \Rightarrow \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

Bundan, biz v funksiyaning uzluksizligidan, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ ekanidan foydalandik.

6. Trigonometrik funksiyalarning hosilasi

7-teorema. $(\sin x)' = \cos x$.

Isbot. Argument x ga Δx ottirma berilsa, Δy quyidagi ko‘rinishni oladi:

1) $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$,

2) $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right),$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x \tag{16}$$

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x. \tag{17}$$

Shu kabi boshqa trigonometrik funksiyalarning hosilalarini ham topish mumkin.

8-teorema. $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Isbot. Bo‘linmaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

$$(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}. \tag{18}$$

Xuddi shuningdek,

$$(\mathrm{ctg}\,x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{19}$$

Misollar.

1. $y=\cos x-tgx$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y'=(\cos x)'-(tgx)'=-\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

3. $y=x^2\cdot\sin x$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \left(x^2 \cdot \sin x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

4. $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \left(\frac{x^3}{\cos x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'\cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos^2 x}.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta’rifini ayting.
2. Hosilaning mexanik ma’nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
4. Qanday funksiya nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi?

29-§. Murakkab funksiyaning hosilasi. Teskari funksiyaning hosilasi. Oshkormas funksiyaning hosilasi. Logarifmik, darajali va ko‘rsatkichli funksiyalarning hosilasi. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilasi

1. Murakkab funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ murakkab funksiya, ya’ni shunday funksiya berilganki, uni

$$y = F(u),\ u = \varphi(x) \text{ yoki } y = F\left[\varphi(x)\right]$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lsin. $y = F(u)$ ifodada u o‘zgaruvchi oraliq argument deyiladi. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini chiqaramiz.

1-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya biror x nuqtada $u'_x = \varphi'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, $y = F(u)$ funksiya esa u ning mos qiymatida $y'_u = F'(u)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda ko‘rsatilgan x nuqtada $y = F\left[\varphi(x)\right]$ murakkab funksiya ham

$$y'_x = F'_u(u)\varphi'(x)$$

ga teng hosilaga ega bo‘ladi, bu yerda u o‘rniga $u = \varphi(x)$ ifoda qo‘yilishi zarur.

Qisqacha,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

ya'ni murakkab funksiyaning hosilasi berilgan funksiyaning oraliqdagi argument u bo'yicha hosilasining oraliqdagi argumentning x bo'yicha hosilasi bilan ko'paytmasiga teng.

Isbot. Argument x ning ma'lum qiymatida

$$u=\varphi(x), \quad y=f(u),$$

argumentga Δx orttirma bersak,

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x), \quad y+\Delta y=F(u+\Delta u).$$

Shunday qilib, berilgan funksiyalarning uzluksiz ekanligidan Δx orttirmaga Δu orttirma mos keladi, bunga esa Δy orttirma mos keladi, shu bilan birga $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. Shartga muvofiq

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u.$$

Bu munosabatdan limit ta'rifidan foydalanib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha \tag{20}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $\Delta u \to 0$ da $\alpha \to 0$. Bu tenglikni

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha\Delta u \tag{21}$$

ko'rinishda yozamiz. (21) tenglik ixtiyoriy α da $\Delta u \to 0$ bo'lganda ham to'g'riligicha qoladi, chunki u $0=0$ ayniyatga aylanadi. $\Delta u=0$ da $\alpha=0$ deb hisoblaymiz. (21) tenglikning barcha hadlarini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{22}$$

Shartga asosan

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_x, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\alpha=0.$$

(22) tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

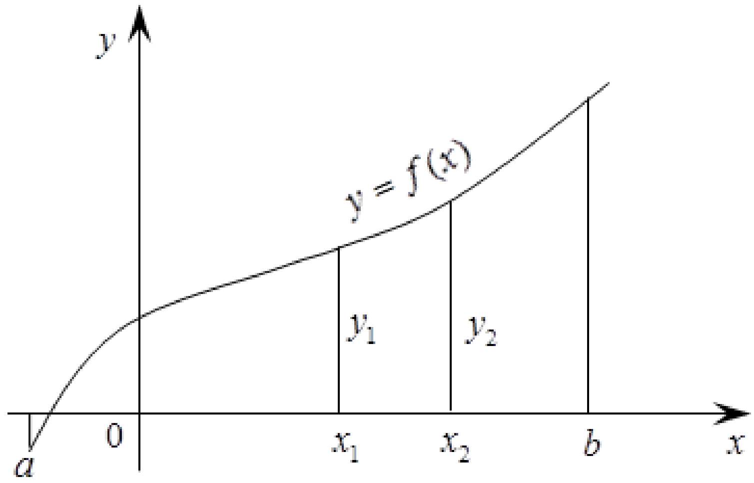
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \tag{23}$$

Bu esa talab qilingan isbotdir.

2. Teskari funksiya va uni differensiallash

Faraz qilaylik, biror $(a;b)$ intervalda aniqlangan o'suvchi yoki kamayuvchi funksiya $y=f(x)$ berilgan, $f(a)=c, \quad f(b)=d$ bo'lsin.

Aniqlik uchun bundan buyon o‘suvchi funksiyani tekshiramiz. $(a;b)$ intervalga qarashli ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarni qaraymiz. O‘suvchi funksiyaning ta’rifidan agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo‘lsa, $y_1 < y_2$ bo‘lishi kelib chiqadi.



66-shakl.

Demak, ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarga funksiyaning ikkita y_1 va y_2 turli qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to‘g‘ri, ya’ni agar $y_1 < y_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo‘lsa, o‘suvchi funksiyaning ta’rifidan $x_1 < x_2$ bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik aniqlanadi. y ning bu qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning unga mos qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni y ning funksiyasi sifatida olamiz:

$$x = \varphi(y).$$

Bu funksiya $y = f(x)$ funksiya uchun teskari funksiya deyiladi. Xuddi shuningdek, $y = f(x)$ funksiya ham $x = \varphi(y)$ funksiya uchun teskari ekanligi ravshan. Shunga o‘xshash muhokama bilan kamayuvchi funksiya ham teskari funksiyaga ega ekanligini isbotlash mumkin.

Endi teskari funksiya hosilasini bilgan holda $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini topishga imkon beruvchi teoremani keltiramiz.

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun tekshiriladigan y nuqtada noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo‘lgan, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u holda tegishli x nuqtada $y = f(x)$ funksiya $\frac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo‘lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo‘ladi, ya’ni

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \tag{24}$$

formula to‘g‘ri bo‘ladi.

Isbot. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ hamda $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ ekanidan:

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Shunday qilib, ikkita o‘zaro teskari funksiyalardan birining hosilasi bir sonini bu funksiyalardan ikkinchisining x va y ning tegishli qiymatlaridagi hosilasiga bo‘linganiga teng.

3. Logarifmik funksiyaning hosilasi

3-teorema. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Isbot. $y = \ln x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun x argumentga Δx ottirma berilsa, Δy quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Demak,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{25}$$

$y=\log_a x$ funksiya uchun

$$\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\left(\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}\Rightarrow\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}. \quad (26)$$

4. Oshkormas funksiya va uni differensiallash

Ikkita x va y o‘zgaruvchilarning qiymatlari o‘zaro biror tenglama bilan bog‘langan bo‘lsin, biz uni simvolik tarzda bunday belgilaymiz:

$$F(x,y)=0. \quad (27)$$

Agar $y=f(x)$ funksiya biror $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo‘lib, (27) tenglamada y o‘rniga $f(x)$ ifoda qo‘yilganda tenglama x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda $y=f(x)$ funksiya (27) tenglama bilan aniqlangan, oshkormas funksiya bo‘ladi. Masalan,

$$x^2+y^2=a^2$$

tenglama mana bu

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ \ y=-\sqrt{a^2-x^2}$$

elementar funksiyalarni nooshkor tarzda aniqlaydi. Endi oshkormas funksiyani oshkor ko‘rinishga keltirmasdan, uning hosilasini topish qoidasini quyidagi misolda ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, funksiya ushbu

$$x^2+y^2-a^2=0$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Agar y bu yerda x ning shu tenglik bilan aniqlanadigan funksiyasi bo‘lsa, u holda bu tenglik ayniyatdir. Uni x ning funksiyasi deb hisoblab, bu ayniyatning ikkala tomonini x bo‘yicha differensiallab (murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalangan holda), quyidagini topamiz:

$$2x+2yy'_x=0 \quad \Rightarrow y'_x=-\frac{x}{y}\ .$$

5. Darajali funksiyaning hosilasi

4-teorema. $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Isbot. $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$ funksiyani qaraymiz. Tenglikning har ikki tomonini e asosga ko‘ra logarifmlaymiz:

$$\ln y=\ln x^\alpha=\alpha\cdot\ln x\,.$$

Oshkormas funksiyalarni differensiallash qoidasiga asosan tenglikning har ikki tomonidan hosila olamiz:

$$(\ln y)' = (\alpha \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot \frac{y}{x} = \alpha \cdot \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Demak,

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{28}$$

6. Ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasi

5-teorema. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

Isbot. $y = a^x$, $a > 0$ funksiyani qaraymiz. Tenglikning har ikki tomonini e asosga ko‘ra logarifmlaymiz:

$$\ln y = \ln a^x = x \cdot \ln a .$$

Oshkormas funksiyalarni differensiallash qoidasiga asosan tenglikning har ikki tomonidan hosila olamiz:

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln a)' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Demak,

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a. \tag{29}$$

(29) formulada $a = e$ bo‘lsa, $\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x.$

$$\left(e^x\right)' = e^x. \tag{30}$$

7. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilasi

6-teorema. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Isbot. $y = \arcsin x$ funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz va monoton o‘suvchi bo‘lgani uchun unga $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan $x = \sin y$ teskari funksiya mavjud bo‘ladi. (24) formulaga asosan:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (31)$$

Xuddi shuningdek,

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (32)$$

7-teorema. $\left(\mathrm{arc}\,tgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Isbot. $y = \mathrm{arc}\,tgx$ Bu funksiya $(-\infty;\infty)$ kesmada uzluksiz va monoton o‘suvchi bo‘lgani uchun unga $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ kesmada aniqlangan $x = tgy$ teskari funksiya mavjud bo‘ladi. (24) formulaga asosan:

$$\left(\mathrm{arc}\,tgx\right)' = \frac{1}{\left(tgy\right)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (33)$$

Xuddi shuningdek,

$$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (34)$$

Misollar.

1. $y = e^{x^3}$ funksiya berilgan. y' ni toping.

$$y' = \left(e^{x^3}\right)' = e^{x^3}\left(x^3\right)' = 3x^2 e^{x^3}.$$

2. $\mathrm{y} = \arcsin^2 x$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \left(\arcsin^2 x\right)' = 2\arcsin x\left(\arcsin x\right)' = 2\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $\mathrm{y} = \mathrm{arcctg}\, 7x$ funksiyaning hosilasini toping.

$$y' = \left(\mathrm{arcctg}\, 7x\right)' = \frac{1}{1+\left(7x\right)^2}\left(7x\right)' = \frac{7}{1+49x^2}.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
2. Qanday funksiya teskari funksiya deyiladi?
3. Teskari funksiyani differensiallash qoidasi qanday?

4. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini keltirib chiqaring.

30-§. Parametrik va giperbolik funksiyalar. Ularning hosilalari

1.Funksiyalarning parametrik berilishi

Ikkita tenglama berilgan:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \tag{35}$$

bu yerda $t\in[t_1;t_2]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning bittadan qiymatlari to‘g‘ri keladi (φ va ψ funksiyalarni bir qiymatli deb faraz qilamiz). Agar x va y ning qiymatlariga koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma’lum bir nuqtasi to‘g‘ri keladi. t ning qiymatlari t_1 dan t_2 gacha o‘zgarsa, bu nuqta tekislikda biror egri chiziqni chizadi. (35) tenglamalar sistemasi bu egri chiziqning parametrik tenglamalari, t parametr, egri chiziqni (35) tenglamalar bilan berish usuli esa parametrik usul deyiladi. Endi faraz qilaylik, $x=\varphi(t)$ funksiya $t=\Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo‘lsin. U holda y o‘zi x ning funksiyasidan iborat bo‘lishi ravshan:

$$y=\psi(\Phi(x)) \tag{36}$$

Shunday qilib, (35) tenglamalar y ni x ning funksiyasi kabi aniqlaydi va x ning funksiyasi parametrik ravishda berildi deyiladi. y ni x bilan bevosita bog‘liqligining ifodasi $y=f(x)$ ni (35) tenglamadan parametr t ni yo‘qotish yo‘li bilan hosil qilish mumkin. Egri chiziqlarning parametrik tarzda berilishi mexanikada keng qo‘llaniladi. Agar Oxy tekislikda biror moddiy nuqta harakat qilsa va bizga bu nuqtaning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarining harakat qonunlari ma’lum bo‘lsa, bu yerda parametr t vaqt, u holda (35) tenglamalar harakatlanuvchi nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalaridan iborat bo‘ladi. Bu tenglamalardan parametr t ni yo‘qotib, $y=f(x)$ yoki $F(x;y)=0$ shaklda trayektoriya tenglamasini hosil qilamiz.

1-misol. To‘g‘ri chiziqning tekislikdagi ushbu $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$ (bunda m, n -yo‘naltiruvchi vektorning koordinatalari) parametrik tenglamalarini $\frac{x - x_0}{m} = t,\ \frac{y - y_0}{n} = t$ deb yozsak, bundan $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi kelib chiqadi.

2. Parametrik berilgan funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik, x ning funksiyasi y (35) parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. Bu funksiyalar hosilalarga ega va $x = \varphi(t)$ funksiya hosilaga ega bo‘lgan $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega deb faraz qilamiz. U holda parametrik tenglamalar bilan aniqlangan $y = f(x)$ funksiyani murakkab funksiya deb qarash mumkin:

$$y = \psi(t), \quad t = \Phi(x),$$

t – oraliqdagi argument. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga muvofiq

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x). \tag{37}$$

Teskari funksiyani differensiallash haqidagi teoremaga asosan

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Oxirgi ifodani (37) tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{38}$$

Chiqarilgan formula y ni x ga bevosita bog‘lanishining ifodasini topmay turib, parametrik berilgan funksiyaning y'_x hosilasini topishga imkon beradi.

1-misol. x ning funksiyasi y ushbu parametrik tenglamalar bilan berilgan:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad 0 \le \mathrm{t} \le \pi \end{cases}$$

1) t ning istalgan qiymatida; 2) $t = \frac{\pi}{4}$ qiymatida y'_x hosila topilsin.

Yechish: 1) $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt,$

2) $y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -ctg\frac{\pi}{4} = -1.$

2-misol. Ixtiyoriy $(0 \le t \le 2\pi)$ nuqtada ushbu $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ formulaga asosan $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$ bo‘ladi. Bundan

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\frac{t}{2}.$$

3. Giperbolik funksiyalar

Matematik analizning ko‘pgina tadbiqlarida $\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ va $\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ ko‘rinishidagi ko‘rsatkichli funksiyalarning kombinatsiyalari uchraydi. Bu kombinatsiyalar yangi funksiyalar sifatida qaraladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\left.\begin{aligned} shx &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ chx &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{39}$$

Bu (39) funksiyalardan birinchisi giperbolik sinus, ikkinchisi giperbolik kosinus deyiladi. Bu funksiyalar yordami bilan yana ikkita $thx = \frac{shx}{chx} -$ giperbolik tangens va $cthx = \frac{chx}{shx} -$ giperbolik kotangens funksiyani aniqlash mumkin:

$$\begin{cases} thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ cthx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{cases},$$

funksiyalar x ning barcha qiymatlari uchun aniqlangan. $cthx$ funksiya esa $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan. Giperbolik funksiyalarning grafiklari 67, 68 va 69-shakllarda berilgan.

shx va chx funksiyalarning (39) formulalardagi ta'riflaridan trigonometrik funksiyalar orasidagi munosabatlarga o'xshash munosabatlar kelib chiqadi:

$$ch^2x - sh^2x = 1, \tag{40}$$

$$ch(a+b) = cha \cdot chb + sha \cdot shb, \tag{41}$$

$$sh(a+b) = sha \cdot chb + cha \cdot shb, \tag{42}$$

Haqiqatan,

$$ch^2x - sh^2x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

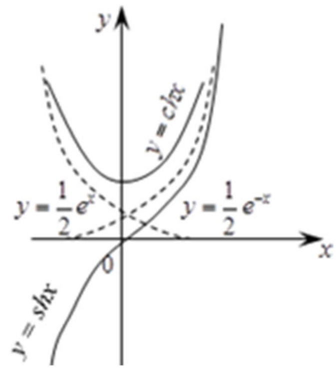
So'ngra

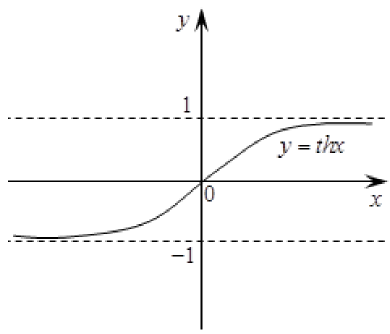
$$ch(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

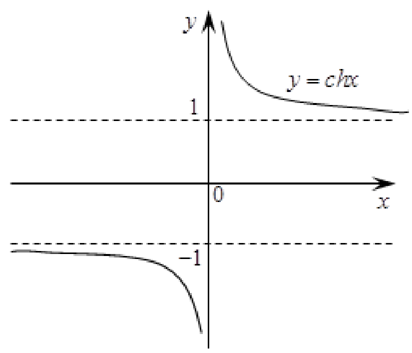
ekanini nazarga olib, quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$cha \cdot chb + sha \cdot shb = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = ch(a+b).$$







67-shakl. 68-shakl. 69-shakl.

(42) munosabatning to'g'riligi ham shu kabi isbotlanadi. «Giperbolik funksiyalar» deyilishining sababi shu bilan izohlanadiki,

$$x^2 + y^2 = 1$$

aylanani parametrik tasvirlash uchun $\sin t$ va $\cos t$ trigonometrik funksiyalar qanday ahamiyatga ega bo'lsa,

$$x^2 - y^2 = 1$$

giperbolani parametrik tasvirlash uchun sht va cht funksiyalar ham shunday ahamiyatli hisoblanadi.

Haqiqatan,

$$x = \cos t,\ \ y = \sin t$$

tenglamalardan t parametrni yo‘qotish bilan

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

(aylana tenglamasi) tenglikni hosil qilamiz. Shunga o‘xshash, $x = cht,\ \ y = sht$ tenglamalar giperbolaning parametrik tenglamalaridir. Haqiqatdan bu tenglamalarni hadma-had kvadratga ko‘tarib, birinchisidan ikkinchisi ayrilsa, ushbu tenglik hosil bo‘ladi:

$$x^2 - y^2 = ch^2 t - sh^2 t = 1.$$

Bu esa giperbolaning tenglamasidir.

Ushbu

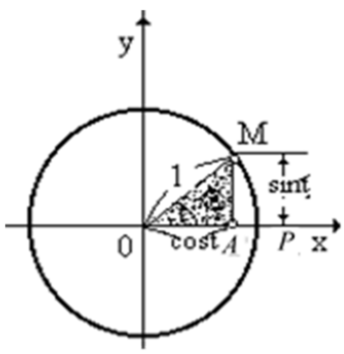
$$x^2 + y^2 = 1$$

tenglama bilan ifodalangan aylanani tekshiramiz (70-shakl). $x = \cos t,\ \ y = \sin t$ tenglamalarda t parametr son jihatdan AOM markaziy burchakka yoki AOM sektor yuzi S ning ikklanganiga teng, chunki $t = 2S$.

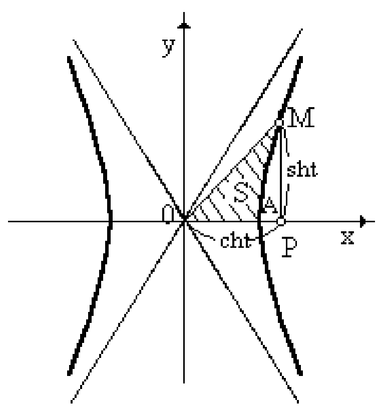
Giperbolaning

$$x = cht,\ \ y = sht$$

parametrik tenglamalarida t parametr ham son jihatdan AOM «giperbolik sektor» yuzining ikkilanganiga tengligini isbotsiz qayd etamiz (71-shakl).



70-shakl.



71-shakl.

4. Giperbolik funksiyalarning hosilalari

Giperbolik funksiyalarning hosilalari giperbolik funksiyalarning ta'riflaridan kelib chiqadigan ushbu

$$(shx)' = chx, \quad (chx)' = shx, \quad (thx)' = \frac{1}{ch^2x}, \quad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2x} \tag{43}$$

formulalar bilan aniqlanadi;

Isbot. 1- va 3-formulalarni isbot qilamiz:

$$1).\ (shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx,$$

$$3).\ (thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}.$$

2- va 4-formulalar ham shu usulda isbotlanadi.

5. Differensiallashning asosiy formulalari jadvali

Differensiallashning barcha asosiy formulalarini va qoidalarini bir jadvalda keltiramiz.

№	Funksiya va hosilasi	№	Funksiya va hosilasi
1	$(C)' = 0$	11	$(secx)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
2	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	12	$(cosecx)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
3	$(e^x)' = e^x$	13	$(shx)' = chx$
4	$(a^x)' = a^x \ln a$	14	$(chx)' = shx$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15	$(thx)' = \frac{1}{ch^2x}$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	16	$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	17	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	18	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	19	$(\mathrm{arc}tgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	20	$(\mathrm{arcc}tgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
Hosilani hisoblash qoidalari			
1	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	5	$y = F[\varphi(x)] \Rightarrow y'_x = F'_u(u)\varphi'(x)$
2	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	6	$F(x,y) = 0 \ \Rightarrow y'_x = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$
3	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	7	$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$
4	$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$	8	$y = f(x),\ x = \varphi(y) \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyalar va chiziqlar tenglamalarining parametrik berilishi nimadan iborat?
2. Parametrik berilgan funksiyalarni differensiallash qanday bajariladi?
3. Giperbolik funksiyalar ta’rifini ayting.
4. Giperbolik funksiyalarning grafiklari qanday bo‘ladi?
5. Giperbolik funksiyalarning hosilalari formulasini chiqaring.

31-§. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma’nosi. Funksiyalarni differensiallashning sodda qoidalari. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

1. Differensialning ta’rifi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiyaning $[a;b]$ kesmaga tegishli biror x nuqtadagi hosilasi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

tenglik bilan aniqlanadi. $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat ma'lum $f'(x)$ songa intiladi, demak, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'(x)$ hosiladan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi, ya'ni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

bu yerda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Oxirgi tenglikning barcha hadlarini Δx ga ko'paytirib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{44}$$

Umumiy holda $f'(x) \neq 0$, shuning uchun o'zgarmas x va o'zgaruvchi $\Delta x \to 0$ da $f'(x)\Delta x$ ko'paytma Δx ga nisbatan bir xil tartibli cheksiz kichik miqdordir. $\alpha \cdot \Delta x$ ko'paytma esa Δx ga nisbatan doimo yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Shunday qilib, funksiyaning Δy orttirmasi ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lib, bulardan orttirmaning bosh bo'lagi deb ataladigan birinchisi $(f'(x) \neq 0)$ da Δx orttirmaga nisbatan chiziqlidir. $f'(x)\Delta x$ ko'paytma funksiyaning differensiali deb ataladi va dy yoki $df(x)$ bilan belgilanadi.

Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(x)$ hosilaning argument orttirmasi Δx bilan ko'paytmasi funksiyaning differensiali deb ataladi va dy simvol bilan belgilanadi:

$$dy = f'(x)dx. \tag{45}$$

$y = x$ funksiyaning differensialini topamiz: bu holda $y' = (x)' = 1$ demak, $dy = dx = \Delta x.$ Shunday qilib, erkli o'zgaruvchi x ning differensiali dx uning orttirmasi Δx bilan bir xil bo'lar ekan. $dx = \Delta x$ tenglikni erkli o'zgaruvchining differensiali deb qaralganda tekshirilgan misol, funksiya differensialining ta'rifiga buning zid kelmasligini ko'rsatadi. (45) formuladan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Demak, $f'(x)$ hosilani funksiya differensialini erkli o‘zgaruvchining differensialiga nisbati deb qarash mumkin.

(44) ifodaga qaytamiz va uni (45) ni hisobga olgan holda, bunday yozamiz:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x, \qquad (46)$$

shunday qilib, funksiya orttirmasi funksiya differensialidan Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Agar $f'(x) \neq 0$ bo‘lsa, u holda $\alpha\Delta x$ ko‘paytma dy ga nisbatan ham yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir va

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Shuning uchun taqribiy hisoblashlarda ba’zan ushbu

$$\Delta y \approx dy \qquad (47)$$

taqribiy tenglikdan yoki yoyiqroq ko‘rinishdagi

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (48)$$

taqribiy tenglikdan foydalaniladi, bu esa hisoblashni qisqartiradi.

2. Murakkab funksiyaning differensiali, differesial shaklining invariantligi

Faraz qilaylik,

$$y = f(u),\ u = \varphi(x) \text{ yoki } y = f[\varphi(x)]$$

bo‘lsin. U holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga muvofiq:

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\varphi'(x) \Rightarrow dy = f'_u(u)\varphi'(x)dx, \qquad (49)$$

lekin $\varphi'(x)dx = du$, shuning uchun,

$$dy = f'(u)du.$$

Shunday qilib, oraliq argument u erkli o‘zgaruvchi bo‘lgan holda funksiyaning differensiali qanday ko‘rinishda bo‘lgan bo‘lsa, murakkab funksiyaning differensiali shunday ko‘rinishda bo‘ladi. Boshqacha aytganda, differensialning shakli funksiyaning argumenti erkli o‘zgaruvchi yoki boshqa argumentning funksiyasi bo‘lishiga bog‘liq emas, **differensial shaklining invariantligi** deb ataladigan bu muhim xossadan bundan buyon keng ravishda foydalaniladi.

1-misol. $y=\ln^2 x$ funksiya differensialini toping.

Yechish: $dy=f_u'(u)\varphi'(x)dx=f_u'(u)du$ formulaga asosan:

$$dy=2\ln xd(\ln x)=\frac{2}{x}\ln xdx.$$

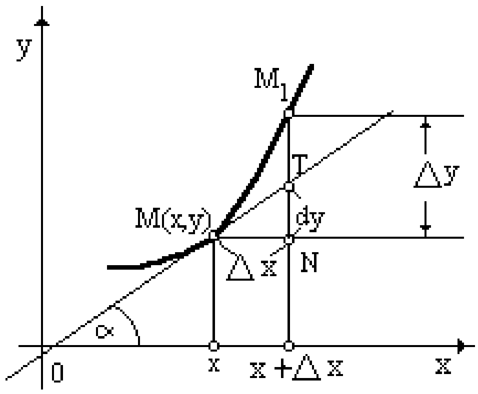
2-misol. $y=\arcsin\sqrt{x}$ funksiya differensialini toping.

Yechish: $dy=f_u'(u)\varphi'(x)dx=f_u'(u)du$ formulaga asosan:

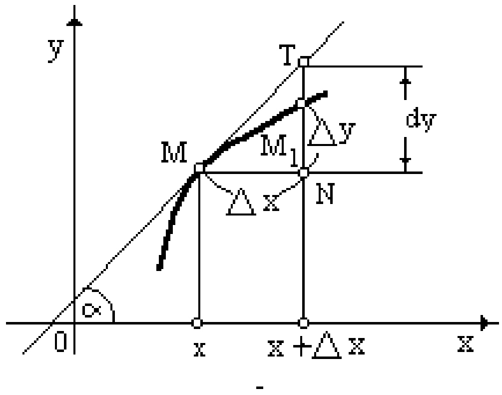
$$dy=\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1-x}}=\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}.$$

3. Differensialning geometrik ma'nosi

$y=f(x)$ funksiyaning grafigini tekshiramiz.



72-shakl.



73-shakl.

Tenglamasi $y=f(x)$ bo'lgan egri chiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta olib, bu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz va bu urinma Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini α bilan belgilaymiz. Erkli o'rgaruvchiga Δx orttirmani beramiz, u holda funksiya $\Delta y=NM_1$ orttirmani oladi. $y=f(x)$ egri chiziqda $x+\Delta x,\ y+\Delta y$ qiymatlarga $M_1(x+\Delta x;y+\Delta y)$ nuqta mos keladi.

MNT uchburchakdan

$$NT=MN\cdot tg\alpha,$$

lekin

$$tg\alpha=f'(x),\quad MN=\Delta x,$$

shuning uchun,

$$NT = f'(x)\Delta x,$$

ammo differensialning ta'rifiga muvofiq $f'(x)\Delta x = dy.$

Shunday qilib,

$$NT = dy.$$

Oxirgi tenglik $y = f(x)$ funksiyaning berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $y = f(x)$ egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi urinma ordinatasining orttirmasiga teng ekanini bildiradi.

72-shakldan bevosita $M_1T = \Delta x - dy$ ekanligi chiqadi. Ilgari isbot qilinganiga asosan $\Delta x \to 0$ da $\frac{M_1T}{NT} \to 0$ orttirma doimo dy dan katta deb o'ylash yaramaydi. Chunonchi, 73-shakldan $\Delta y = M_1N,\ dy = NT$, bundan $\Delta y < dy.$

5. Yuqori tartibli hosilalar

$y = f(x)$ funksiya biror $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. $f'(x)$ hosilaning qiymatlari, umuman aytganda, x ga bog'liq, ya'ni $f'(x)$ hosila ham x ning funksiyasidan iborat. Bu funksiyani differensiallab, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladigan hosilani topamiz.

Birinchi hosiladan olingan hosila ikkinchi tartibli hosila yoki dastlabki funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ simvol bilan belgilanadi:

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Masalan, $y = x^5$ bo'lsa, u holda:

$$y' = \left(x^5\right)' = 5x^4, \quad y'' = \left(5x^4\right)' = 20x^3.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi uchinchi tartibli hosila yoki uchinchi hosila deyiladi va y''' yoki $f'''(x)$ bilan belgilanadi.

Umuman $f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb – uning $(n-1)$-tartibli hosilasining hosilasiga aytiladi va $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ simvoli bilan belgilanadi.

Demak,

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

(Hosilaning tartibi daraja ko‘rsatkichi deb tushunilmasligi uchun qavs ichiga olinadi.)

To‘rtinchi, beshinchi va undan yuqori tartibli hosilalar rim raqamlari bilan belgilanadi; y^{IV}, y^{V}, y^{VI},... bunday holda hosilaning tartibini qavssiz yozish mumkin. Masalan, agar $y = x^5$ bo‘lsa, u holda

$$y' = 5x^4,\ \ y'' = 20x^3,\ \ y''' = 60x^2,\ \ y^{IV} = 120x,\ \ \ y^{V} = 120,\ y^{VI} = 0,...$$

1-misol. $y = e^{kx}$ funksiya $(k - const)$ berilgan. Uning istalgan n-tartibli hosilasining ifodasini toping.

Yechish: $y' = ke^{kx},\ \ \ y'' = k^2 e^{kx},..., y^{(n)} = k^n e^{kx}.$

2-misol. $y = \sin x$ bo‘lsa, $y^{(n)}$ toping.

Yechish: $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ \ y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ y^{IV} = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),..., y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

hosilalarini topish formulasini keltirib chiqardik.

$x^2 + y^2 = a^2$ oshkormas funksiyaning 1-tartibli hosilasi $y'_x = -\frac{x}{y}$ ko‘rinishda hisoblangan edi. Ikkinchi hosilani hisoblaymiz:

$$y''_{xx} = -\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y - x\cdot y'_x}{y^2} = -\frac{y - x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

Parametrik ko‘rinishda berilgan

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

funksiyaning 1-tartibli hosilasi (38) formula bilan topilar edi. Ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz:

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2}\cdot\frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \qquad (50)$$

3-misol. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ funksiyaning 2-tartibli hosilasini toping.

Yechish: $x'_t = -a\sin t,\ \ x''_{tt} = -a\cos t,\ \ \ y'_t = b\cos t,\ \ y''_{tt} = -b\sin t.$ (50) formulaga asosan:

$$y''_{xx}=\frac{-b\sin t\cdot(-a\sin t)-b\cos t\cdot(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}=\frac{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t}=-\frac{2b}{a^2\sin^3 t}.$$

5. Yuqori tartibli differensiallar

Bizga $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin, bu yerda x – erkli o‘zgaruvchi. Bu funksiyaning differensiali

$$dy=f'(x)dx$$

x ning biror funksiyasidir, ammo x ga faqat birinchi ko‘paytuvchi $f'(x)$ bog‘liq bo‘lishi mumkin, ikkinchi ko‘paytuvchi (dx) esa erkli o‘zgaruvchi x ning orttirmasidan iborat bo‘lib, o‘zgaruvchining qiymatiga bog‘liq emas. dy o‘zi x ning funksiyasi bo‘lganligidan, biz funksiyaning differensiali haqida gapirishga haqlimiz.

Funksiya differensialining differensiali bu funksiyaning ikkinchi differensiali yoki ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d^2y bilan belgilanadi:

$$d(dy)=d^2y.$$

Ikkinchi differensialning ifodasini topamiz. Differensialning umumiy ta’rifiga asosan

$$d^2y=(f'(x)dx)'dx.$$

dx *o‘zi* x ga bog‘liq emas, shuning uchun differensiallashda dx hosila ishorasidan tashqariga chiqariladi va biz

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

ni hosil qilamiz. Differensialning darajasini yozishda qavslarni tushirib qoldirish qabul qilingan, masalan, $(dx)^2$ o‘rniga dx^2 yozish qabul qilingan, bundan dx ifodaning kvadrati tushuniladi; $(dx)^3$ o‘rniga dx^3 yoziladi va hokazo.

Uchinchi differensial yoki funksiyaning uchinchi tartibli differensiali deb uning ikkinchi differensialining differensialiga aytiladi:

$$d^3y=d(d^2y)=(f''(x)dx^2)'dx=f'''(x)dx^3. \qquad (51)$$

Umuman n-tartibli differensial deb $(n-1)$–tartibli differensialning birinchi differensialiga aytiladi:

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=(f^{n-1}(x)dx^{n-1})'dx \;\Rightarrow d^ny=f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (52)$$

Turli tartibli differensiallardan foydalangan holda, istalgan tartibli hosilani tegishli tartibli differensiallarning nisbati shaklida berish mumkin:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx};\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2};...;f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}. \tag{53}$$

Izoh: (52) va (53) tengliklar $n>1$ da x faqat erkli o‘zgaruvchi bo‘lgan hol uchungina to‘g‘ridir. Haqiqatan, ushbu murakkab funksiyani olaylik:

$$y=F(u),\ u=\varphi(x). \tag{54}$$

Biz u ning erkli o‘zgaruvchi yoki x ning funksiyasi bo‘lishiga qaramay, birinchi differensial invariant formada bo‘lishini ko‘rdik:

$$dy=F'_u(u)du. \tag{55}$$

Ikkinchi differensial va undan keyingi differensiallar bu xossaga ega emas.

Haqiqatan, (50) va (51) formulaga asosan:

$$d^2y=d\left(F'_u(u)\right)du\,,$$

lekin bu yerda $du=\varphi'(x)dx$ *o‘zi* x ga *bog‘liq*, shuning uchun,

$$d^2y=d\left(F'_u(u)\right)du+F'_u(u)(ddu) \tag{56}$$

yoki

$$d^2y=F''_{uu}(u)(du)^2+F'_u(u)d^2u.$$

Bunda $d^2u=\varphi''(x)(dx)^2$, d^3u va hokazolar ham shu tartibda topiladi.

1-misol. Ushbu $y=\sin u,\ u=\sqrt{x}$ murakkab funksiyadan dy va d^2u toping.

Yechish: $dy=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\cos u du.$ So‘ngra (55) formula bo‘yicha quyidagini hosil qilamiz:

$$d^2u=-\sin u(du)^2+\cos u d^2u=-\sin u(du)^2+\cos u\cdot u''(dx)^2=$$

$$=-\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2+\cos u\left(-\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya differensialining geometrik ma’nosi qanday?

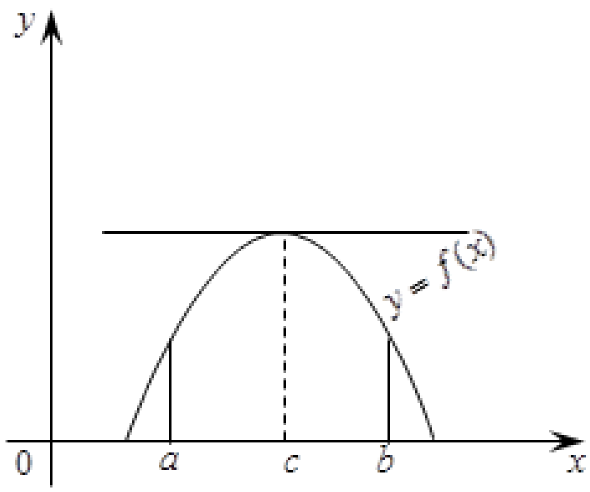
3. Differensial shaklining invariantlik xossasi nimadan iborat?

4. Berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?

5. Berilgan funksiyaning n-tartibli differensiali deb nimaga aytiladi?

32-§. Differensial hisobning asosiy teoremalari. Ferma, Roll, Lagranj, Koshi teoremalari

1. Ferma teoremasi. $(a;b)$ intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya bu intervalning biror $x=c$ nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatini qabul qilsin. Bunday holda, agar bu funksiyaning $x=c$ nuqtada hosilasi mavjud bo‘lsa, u nolga teng bo‘ladi.



74-shakl.t

Isboti. Aniqlik uchun funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi eng katta qiymati $f(c)=M$ bo‘lsin. $f'(c)=0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Hosilaning ta’rifiga asosan:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Funksiya c nuqtada eng katta qiymatni qabul qilgani uchun Δx ning ixtiyoriy qiymatida quyidagiga egamiz:

$$f(c)\geq f(c+\Delta x) \quad \Rightarrow f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0.$$

Bundan, agar $\Delta x>0$ bo‘lsa,

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \;\Rightarrow f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0.$$

Agar $\Delta x<0$ bo‘lsa,

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \;\Rightarrow f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0.$$

Shunday qilib, $f'(c)$ hosila musbat ham, manfiy ham bo‘la olmaydi. Demak, $f'(c)=0$.

Ferma teoremasining geometrik ma’nosini quyidagicha tushuntirish mumkin. Hosila, funksiya grafigiga urinma absissalar o‘qi bilan hosil qilgan α burchak tangensiga teng bo‘lgani uchun $f'(c)=tg\alpha=0$ tenglik funksiya eng katta yoki eng kichik qiymatga teng bo‘lgan c absissali nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma Ox o‘qiga parallel bo‘ladi (74-shakl).

2. Roll teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, uning ichki nuqtalarida differensialanuvchi va kesmaning oxirlarida teng qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, u holda $f'(x)$ hosila bu kesmaning juda bo‘lmaganda ichki bir $x=c$ nuqtasida nolga teng bo‘ladi.

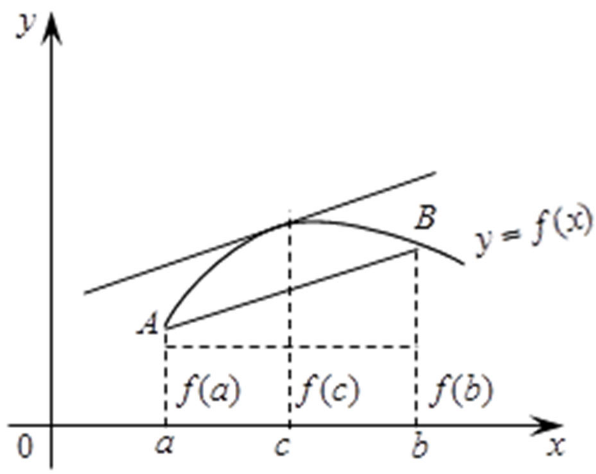
Isbot. Bu funksiya kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun u o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatiga erishadi.

Agar $M=m$ bo‘lsa, funksiya $[a;b]$ segmentda o‘zgarmas va demak, segmentning ixtiyoriy nuqtasida uning hosilasi $f'(x)=0$. Endi $M\ne m$ bo‘lsin, u holda bu sonlardan biri, masalan $M\ne 0$. Shuning uchun, agar eng katta qiymat M ga c nuqtada erishilsa, $f(c)=M$, u holda c nuqta $[a;b]$ segmentning ichki nuqtasi bo‘lishi, ya’ni $(a;b)$ intervalga (chunki kesmaning oxirlarida $f(a)=f(b)$) tegishli bo‘lishi kerak. Demak, Ferma teoremasiga asosan $f'(c)=0$.

Roll teoremasining geometrik ma’nosini quyidagicha tushuntirish ham mumkin: agar $[a;b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi funksiyaning grafigi Ox o‘qni ikkita $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda kesib o‘tsa, u holda bu nuqtalarning orasida hech bo‘lmaganda bitta c, $a<c<b$ nuqta topiladiki, bunda funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma abssissalar o‘qiga parallel bo‘ladi. (74-shakl).

M i s o l. $[0;\pi]$ kesmada $f(x)=\sin x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U $[0;\pi]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi hamda uning chegaralarida nolga aylanadi: $\sin 0=\sin\pi=0$. Bu funksiyaning $f'(x)=\cos x$ hosilasi $[0;\pi]$ segmentning ichida yotgan $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada nolga aylanadi.

3. Lagranj teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu kesma ichida juda bo‘lmaganda bitta $x=c$ nuqta topiladiki, bunda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:



75-shakl.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{57}$$

Isbot. 75-shaklda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi ko‘rsatilgan. Ikkita $A(a;f(a))$ va $B(\mathrm{b};f(b))$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidan foydalanib, AB vatar tenglamasini yozamiz. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidan

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}\Rightarrow y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Endi funksiya grafigi va vatar ordinatalari ayirmasiga teng bo‘lgan x ning bitta shu qiymatiga mos keladigan $F(x)$ funksiyani qaraylik:

$$F(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right).$$

Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirishini oson tekshirish mumkin. Haqiqatan, bu funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, chunki $f(x)$ va $x-a$ lar bu kesmada uzluksiz.

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (58)$$

Hosila $(a;b)$ intervalda mavjud, chunki unda $f'(x)$ mavjud. Kesmaning oxirlarida $F(a)=F(b)=0$. Roll teoremasiga asosan $[a;b]$ kesma ichida shunday $x=c$ nuqtani topish mumkinki, unda $F'(c)=0$ bo‘ladi. (58) tenglik asosida quyidagini topamiz:

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Bundan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosini quyidagicha tushuntirish mumkin. Teorema shartini qanoatlantiradigan $y=f(x)$ funksiyaning grafigini qaraylik (75-shaklga qarang). $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nisbat yoyning oxirlarini tutashtiruvchi AB vatarning burchak koeffitsiyentini tasvirlaydi. $f'(c)=tg\alpha$ urinmaning burchak koeffitsiyenti bo‘lgani uchun Lagranj teoremasi $y=f(x)$ funksiya grafigida hech bo‘lmaganda bitta nuqta topilishini, bu nuqtada urinma yoy oxirlarini tutashtiruvchi vatarga parallel bo‘lishini tasdiqlaydi. (57) formula ko‘pincha quyidagicha yoziladi:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (59)$$

Bu tenglik quyidagicha o‘qiladi: $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi funksiyaning orttirmasi kesma uzunligining (ya’ni argumentning orttirmasi) bu kesma ichidagi biror nuqtasidagi funksiya hosilasining ko‘paytmasiga teng ekan.

(59) formulani Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi.

Misol. $f(x)=x^4$ funksiya $[0;1]$ kesmada berilgan. x ning funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma grafik yoyi oxirlarini tutashtiruvchi vatarga parallel bo‘lgandagi qiymatlarini toping.

Yechish: $f(b)=f(1)=1,\ f(a)=f(0)=0$ bo‘lgani uchun (59) formulaga asosan topamiz:

$$1-0=(1-0)f'(c)\Rightarrow f'(c)=1.$$

Ikkinchi tomondan $f'(x)=4x^3$ va demak,

$$f'(c)=4c^3=1\Rightarrow c=\frac{1}{\sqrt[3]{1/4}}=\sqrt[3]{4}\approx 0,63.$$

Ma’lumki, $y=c$ o‘zgarmasning hosilasi nolga teng. Lagranj teoremasi yordamida teskarisini isbot qilamiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa va uning barcha ichki nuqtalarida $f'(x)=0$ hosilaga ega bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o‘zgarmas bo‘ladi.

Isboti. x-argumentning a nuqta bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. (59) Lagranj formulasini $[a;x]$ segmentga moslab yozamiz. $f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)$, c-bu yerda a va x orasidagi biror son $c\in(a;b)$ intervalga tegishli bo‘lgani uchun $f'(c)=0$. Demak, $f(x)-f(a)=0$, ya’ni $(a;b)$ intervalning ixtiyoriy x nuqtasi uchun $f(x)=f(a)$ bu esa $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o‘zgarmas ekanini bildiradi.

Natija. Agar $\Phi(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning hosilalari $[a;b]$ kesmaning barcha nuqtalarida teng bo‘lsa, bu funksiyalarning ayirmasi bu kesmada o‘zgarmas bo‘ladi.

Isboti. $f(x)=\Phi(x)-F(x)$ bo‘lsin. U holda $f'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=0$, bundan esa $\Phi'(x)=F'(x)$. Demak, hozirgina isbot qilingan teoremaga asosan $f(x)=\Phi(x)-F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o‘zgarmas ekan.

4. Koshi teoremasi. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsa, shu bilan birga $\varphi'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda bu kesmaning ichida shunday c nuqta topiladiki, bunda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{60}$$

Isboti: Quyidagi yordamchi funksiyani qaraylik:

$$F(x)=\left(f(x)-f(a)\right)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left(\varphi(x)-\varphi(a)\right).$$

Ravshanki, bu funksiya $(a;b)$ intervalning barcha nuqtalarida differensiallanuvchi va uning oxirlarida nolga aylanadi: $F(a)=F(b)=0.$

Demak, Roll teoremasiga asosan shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c).$$

Bundan

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

(60) tenglik Koshi formulasi deyiladi.

Izoh. Teorema shartidan $\varphi(b)\neq\varphi(a)$ ekani kelib chiqadi, chunki, aks holda Roll teoremasiga asosan shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, uning uchun

$\varphi'(c)=0$ bo‘lar edi. Bu esa $x\in(a;b)$ lar uchun $\varphi'(x)\neq 0$ shartga zid.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ferma teoremasini ifodalang va isbotlang.
2. Roll teoremasini ifodalang va isbotlang.
3. Lagranj teoremasini ifodalang va isbotlang.
4. Koshi teoremasini ifodalang va isbotlang.

33-§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari. Teylor formulasi

1. Ikkita cheksiz kichik miqdor nisbatining limiti

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlikni ochish.

Faraz qilaylik, biror $[a;b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantirsin va bu kesmaning $x=a$ nuqtasida nolga aylansin, ya'ni $f(a)=0$ va $\varphi(a)=0$ bo'lsin.

Bu $x=a$ qiymatda $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nisbat aniqlanmagan, ammo $x \neq a$ qiymatlarda to'la aniq ma'noga ega. Demak, $x \to a$ da bu nisbatning limitini topish masalasini qo'yish mumkin. Bu xildagi limitlarni hisoblash odatda «$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish» deyiladi.

Ushbu turdagi masalaga ilgari ham duch kelingan, masalan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitni tekshirishda elementar funksiyalardan hosilalar topishda uchrashgan edik. $x=0$ da $\frac{\sin x}{x}$ ifoda ma'noga ega emas, ya'ni $F(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ da aniqlanmagan, ammo biz $x\to 0$ da $\frac{\sin x}{x}$ ifodaning limiti mavjud va 1 ga tengligini ko'rgan edik.

1-Teorema. (Lopital qoidasi). Biror $[a;b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar Koshi shartlarini qanoatlantirsin va uning biror $x=a$ nuqtasida nolga aylansin, ya'ni $f(a)=\varphi(a)=0$ bo'lsin, u holda agar $x\to a$ da $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nisbatning limiti mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ham mavjud bo'ladi, shu bilan birga

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Isbot. $[a;b]$ kesmada biror $x \neq a$ nuqtani olamiz. Koshi formulasini qo'llab, ushbu tenglikni yozamiz:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

bu yerda ξ nuqta a va x orasida yotadi, ya'ni $a<\xi<x$. Ammo shartga asosan $f(a)=\varphi(a)=0$ demak,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{61}$$

Agar $x\to a$ bo'lsa, u holda $\xi\to a$, chunki ξ ning qiymati a bilan x orasida yotadi. Bunda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=A$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ ham mavjud va A ga teng. Bundan ravshanki,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=A,$$

Demak, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

1-izoh. Agar $x=a$ da $f(x)$ yoki $\varphi(x)$ funksiyalar aniqlanmagan, lekin $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo'lgan holda ham teorema o'rinlidir.

Bu holni ilgari tekshirilgan holga keltirish uchun $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarni $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladigan qilib aniqlab olamiz. Buning uchun

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \varphi(a)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

deb faraz qilish kifoya, chunki $x\to a$ da $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nisbatning limiti $x=a$ nuqtada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar aniqlanganmi yoki aniqlanmagan ekanligiga bog'liq emasligi ravshan.

2-izoh. Agar $f'(a)=\varphi'(a)=0$ va teorema shartlarida $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarga qo'yilgan shartlarni $f'(x)$ va $\varphi'(x)$ hosilalar ham qanoatlantirsa, u holda $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nisbatga Lopital qoidasini qo'llab, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ formulaga kelamiz va hokazo.

3-izoh. Agar $\varphi'(a)=0$ lekin $f'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda teorema $x\to a$ da $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ da nolga intiladigan teskari nisbatga qo‘llaniladi. Demak, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ nisbat cheksizlikka intiladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos 5x}{3}=\dfrac{5}{3}.$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=\dfrac{1}{1}=1.$

2. Ikkita cheksiz katta miqdor nisbatining limiti

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi noaniqlikni ochish.

Endi $x\to a$ ga (yoki $x\to\infty$ ga) intilganda cheksizlikka intiluvchi ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar nisbatining limiti haqidagi masalani tekshiramiz.

Teorema. Faraz qilaylik, a nuqta atrofidagi barcha $x\neq a$ nuqtalarda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar uzluksiz va differensiallanuvchi bo‘lsa hamda

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty,\ \varphi'(x)\neq 0$$

bo‘lsa va

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \tag{62}$$

limit mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit mavjud va ushbu tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \tag{63}$$

Isbot. Tekshirilayotgan a nuqta atrofida $\alpha<x<a$ (yoki $a<x<\alpha$) bo‘ladigan ikkita α va x nuqta olamiz. Koshi teoremasiga binoan

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{64}$$

bu yerda $\alpha < x < a$. (63) tenglikning chap tomonini quyidagicha almashtiramiz

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \qquad (65)$$

(64) va (65) munosabatlardan:

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \qquad (66)$$

Bundan

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

(62) shartdan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ da α ni a ga shunday yaqin qilib tanlab olish mumkinki, barcha $x = c$ uchun

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right|<\varepsilon$$

yoki

$$A-\varepsilon<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}<A+\varepsilon \qquad (67)$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $\alpha < c < a$. So‘ngra $\dfrac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}$ kasrni tekshiramiz.

(67) tengsizlik o‘rinli bo‘lishi uchun α ni tayinlab qo‘yib, x ni a ga yaqinlashtiramiz. $x \to a$ da $f(x)\to\infty$ va $\varphi(x)\to\infty$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}=1$$

va demak, avval tanlangan $\varepsilon > 0$ da a ga yetarli yaqin x uchun

$$\left|\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow 1-\varepsilon<\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon\,. \tag{68}$$

(67) va (68) tengsizliklarning mos hadlarini bir-biriga ko‘paytirsak,

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\frac{1-\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(\alpha)}{f(x)}}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

yoki (66) tenglikka asosan

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f(x)}{\varphi(x)}<(A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

kelib chiqadi. x ni a ga yetarli darajada yaqin qilib olganda ε ixtiyoriy kichik son bo‘lganligi uchun oxirgi tengsizliklardan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$$

yoki (62) ga asosan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$$

kelib chiqadi.

Bu esa talab qilingan isbotdir.

1-izoh. Agar (62) shartda $A=\infty$ ya’ni, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty$ bo‘lsa, unda (63) tenglik ham to‘g‘ri bo‘ladi. Haqiqatan, oldingi ifodadan $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0$ kelib chiqadi. U holda isbotlangan teoremaga asosan

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0$$

bundan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

2-izoh. Isbotlangan teorema $x\to\infty$ hol uchun ham osongina umumlashtiriladi. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty,$ va $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{69}$$

Isbotlashda $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi noaniqlikka $x=\frac{1}{z}$ almashtirish yo‘li bilan o‘tkaziladi.

3-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-b}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c}.$

5-misol. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{1}=3\cdot\frac{(-1)}{1}\cdot\frac{(-1)}{1}=3.$$

6-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

Umuman istalgan butun $n>0$ da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x}=0.$$

3. $0\cdot\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni yechish

Simvolik tarzda

a) $0\cdot\infty;$ b) $0^0;$ c) $\infty^0;$ d) $1^\infty;$ e) $\infty-\infty$

ko‘rinishida yoziladigan boshqa noaniqlik hollari bundan oldingi hollarga keltiriladi va ma’nosi quyidagidan iborat bo‘ladi.

a) Faraz qilaylik, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo‘lsin. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]$ ni topish talab qilinadi. Bu $0\cdot\infty$ xildagi noaniqlik. Agar berilgan ifodani

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ yoki } \lim_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ko‘rinishda yozsak, u holda $x \to a$ da $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqlik kelib chiqadi.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{lnx}{\frac{1}{x^n}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^n}{n} = 0.$

b) Faraz qilaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$ bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$ ni topish, ya’ni 0^0 ko‘rinishdagi noaniqlikni ochish talab qilinsin. Bunda $y = \left[f(x) \right]^{\varphi(x)}$ deb faraz qilib, bu tenglikning ikkala tomonini logarifmlaymiz;

$$\ln y = \varphi(x) \ln\left[f(x) \right].$$

o‘ng tomonda $x \to a$ da $0 \cdot \infty$ ko‘rinishdagi noaniqlikni hosil qilamiz. $\lim\limits_{x\to a} \ln y$ ni topib, so‘ngra $\lim\limits_{x\to a} y$ ni topish oson. Haqiqatan, logarifmik funksiyaning uzluksizligiga asosan, $\lim\limits_{x\to a} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to a} y$ va $\ln \lim\limits_{x\to a} y = b$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} y = e^b$.

Agar $b = +\infty$ yoki $b = -\infty$ bo‘lsa, u holda mos ravishda $\lim\limits_{x\to a} y = \infty$ yoki 0 bo‘ladi.

8-misol. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ ni topish talab qilinadi. $y = x^x$ faraz qilib, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x^x\right) = \lim\limits_{x\to 0} (x \ln x)$ ni topamiz.

$$\lim_{x\to 0} (x \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Demak, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$ bunda $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x^x\right) = \lim\limits_{x\to 0} (x \ln x)$ $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$ ya’ni $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ boshqa hollarda ham limitlar shunga o‘xshash yo‘l bilan topiladi.

4. Teylor formulasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror oraliqda $(n+1)$-tartibgacha barcha hosilalarga ega bo‘lsin. Darajasi n dan oshmaydigan, $x = a$ nuqtadagi qiymati $f(x)$

funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng, uning n-tartibigacha $x=a$ nuqtadagi hosilalarining qiymatlari $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi mos hosilalarining qiymatlariga teng, ya'ni

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n'(a)=f'(a),...,P^{(n)}{}_n(a)=f^{(n)}(a). \quad (70)$$

bo'lgan $y=P_n(x)$ ko'phadni topamiz. Bunday ko'phadni biror ma'noda $f(x)$ funksiyaga «yaqin» deb kutmoq tabiiydir. Bu ko'phadni $x-a$ darajalari bo'yicha noma'lum koeffitsiyentli

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+...+C_n(x-a)^n. \quad (71)$$

ko'phad ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum $C_1,C_2,...,C_n$ koeffitsiyent-larni (70) shartlar qanoatlantiriladigan qilib aniqlaymiz.

Avvalo $P_n(x)$ ning hosilalarini topamiz:

$$\begin{cases} P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+...+nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x)=2\cdot1\cdot C_2+3\cdot2\cdot C_3(x-a)+...+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{P}_n^{(n)}=n(n-1)...2\cdot1\cdot C_n \end{cases} \quad (72)$$

(71) va (72) tengliklarning chap va o'ng tomonlarida x o'rniga a ning qiymatini qo'yib va (70) tenglikka asosan $P_n(a)$ ni $f(a)$ orqali $P_n'(a)=f'(a)$ va shunga o'xshash almashtirib quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} &f(a)=C_0, \\ &f'(a)=C_1, \\ &f''(a)=2\cdot1\cdot C_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)...2\cdot1\cdot C_n. \end{aligned}$$

Bundan koeffitsiyentlarning qiymatini topamiz:

$$\begin{cases} C_0=f(a), \quad C_1=f'(a), \quad C_2=\dfrac{1}{1\cdot2}f''(a), \\ C_3=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}f'''(a),...,C_n=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot...\cdot n}f^{(n)}(a). \end{cases} \quad (73)$$

$C_1,C_2,...,C_n$ larning topilgan qiymatlarini (11) formulaga qo'yib, izlangan ko'phadni hosil qilamiz:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot2}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n}f^{(n)}(a). \quad (74)$$

Bu ko‘phad Teylor ko‘phadi deyiladi.

5. Teylor va Makloren formulalari

Berilgan $f(x)$ funksiya bilan tuzilgan $P_n(x)$ ko‘phad qiymatlarining ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz (76-shakl):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

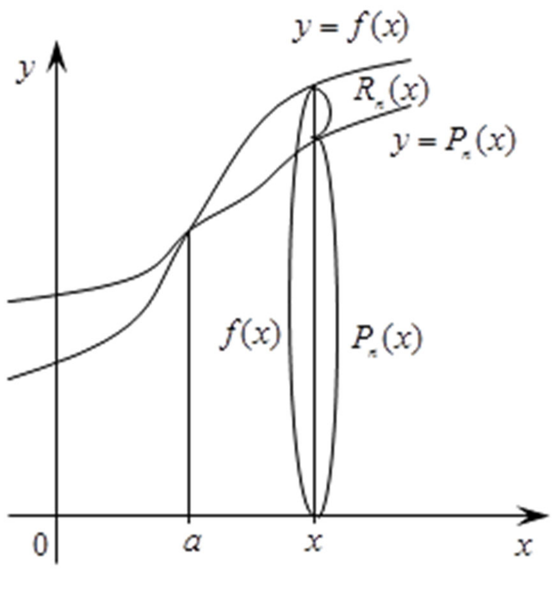
bundan

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

yoki yoyilgan ko‘rinishda

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + .. + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} f^{(n)}(a) + \mathrm{R}_n(x). \quad (75)$$

$R_n(x)$ ga qoldiq had deyiladi. x ning qoldiq had $R_n(x)$ juda kichik bo‘ladigan qiymatlari uchun $P_n(x)$ ko‘phad $f(x)$ funksiyaning taqribiy tasvirini beradi. Shunday qilib (75) formula $y = f(x)$ funksiyani, qoldiq had $R_n(x)$ qiymatiga teng bo‘lgan tegishli darajadagi aniqlikda $y = P_n(x)$ ko‘phad bilan almashtirishga imkon beradi.



76-shakl.

Endigi vazifamiz x ning turli qiymatlarida miqdorni baholashdan iborat.

Qoldiq hadni

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \tag{76}$$

shaklda yozamiz, bu yerda $Q(x)$-aniqlanishi kerak bo‘lgan biror funksiya. Bunga moslab (75) formulani qaytadan yozamiz:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \quad (75^1)$$

x va a ning tayin qiymatlarida $Q(x)$ funksiya ma’lum qiymatga ega; uni Q bilan belgilaymiz.

So‘ngra t ga bog‘liq (t ning qiymati a bilan x ning orasida yotadi) yordamchi

$$F(x)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-...-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

funksiyani tekshiramiz, bu yerda Q (75^1) munosabat bilan aniqlangan qiymatga ega; bunda a va x ni aniq sonlar deb hisoblaymiz.

Endi $F'(x)$ hosilani topamiz:

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-\frac{x-t}{1}f''(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f''(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)+...$$

$$-\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q.$$

yoki qisqartirgandan keyin

$$F'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q. \tag{77}$$

Demak, a abssissali nuqta ($a<x$ da $a\le t\le x$ va $a>x$ da $a\ge t\ge x$) yaqinida yotuvchi barcha t nuqtalarda $F(t)$ funksiya hosilaga ega.

So‘ngra (75^1) formulaga asosan

$$F(x)=0, \quad F(a)=0$$

ekanligiga asoslanamiz. Shuning uchun $F(t)$ funksiyaga Roll teoremasini qo‘llasa bo‘ladi, demak, a va x orasida yotuvchi shunday $t=\xi$ qiymat mavjudki, bu qiymatda $F'(\xi)=0$ bo‘ladi. Bunda (77) munosabatga asosan

$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+\frac{(x-t)^n}{n!}Q=0$$

dan $Q=f^{(n+1)}(\xi)$.

Bu ifodani (76) formulaga qo‘yib,

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

qoldiq had uchun *Lagranj formulasini* hosil qilamiz.

ξ miqdor x va a orasida yotgani uchun uni $\xi=a+\theta(x-a)$ shakldа tasvirlash mumkin, bu yerda θ, 0 bilan 1 orasida yotuvchi son, ya’ni $0<\theta<1$. U holda qoldiq had formulasi

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big).$$

ko‘rinishini oladi.

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) \quad (78)$$

formula $f(x)$ funksiya uchun *Teylor formulasi* deyiladi.

Agar Teylor formulasida $a=0$ deb faraz qilinsa, u holda formula

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0). \quad (79)$$

ko‘rinishda yoziladi, θ bu yerda 0 bilan 1 sonlari orasida. Teylor formulasining bu xususiy holi ba’zan Makloren formulasi deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. $x\to a$ (chekli) va $x\to\infty$ da $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni yechish uchun Lopital qoidasini keltirib chiqaring.

2. $x\to a$ va $x\to\infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikni yechish uchun Lopital qoidasini keltirib chiqaring.

3. 1^∞, ∞^0, 0^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklarni yechish uchun Lopital qoidasini qo‘llanilishini bayon qiling.

4. Teylor ko‘phadi nima?

5. Qoldiq had uchun Lagranj formulasini keltirib chiqaring.

34-§. Funksiyaning o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lishi. Funksiyaning ekstremumlari. Funksiya ekstremumining zaruriy sharti. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

1. Funksiyaning o‘sishi va kamayishi

1-ta’rif. Agar $[a;b]$ kesmada yotuvchi $x_1 < x_2$ nuqtalarda $f(x_1) < f(x_2)$ bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o‘suvchi deyiladi.

Agar $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ deb belgilasak, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$ bo‘lgani uchun o‘suvchi funksiya uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

2-ta’rif. Agar $[a;b]$ kesmada yotuvchi $x_1 < x_2$ nuqtalarda $f(x_1) > f(x_2)$ bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada kamayuvchi deyiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada kamayuvchi bo‘lsa, $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) < 0$ bo‘lgani uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ bo‘lishi kelib chiqadi.

1-teorema. 1) Agar $[a;b]$ kesmada hosilaga ega bo‘lgan $y = f(x)$ funksiya shu kesmada o‘suvchi bo‘lsa, uning hosilasi $[a;b]$ kesmada manfiy bo‘lmaydi, ya’ni $f'(x) \ge 0$.

2) Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa va $a < x < b$ uchun $f'(x) > 0$ bo‘lsa, bu funksiya $[a;b]$ kesmada o‘sadi.

Isbot. Avval teoremaning birinchi qismini isbot qilamiz. $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o‘sadi deb faraz qilamiz. x argumentga Δx orttirmani beramiz va

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{80}$$

nisbatni qaraymiz.

$y = f(x)$ o‘suvchi funksiya, shunga asosan $\Delta x > 0$ bo‘lganda $f(x+\Delta x) > f(x)$ va $\Delta x < 0$ bo‘lganda $f(x+\Delta x) < f(x)$.

Ikkala holda ham

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \tag{81}$$

demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0,$$

ya'ni $f'(x)\geq 0$. Shuni isbotlash talab qilingan edi. (Agar $f'(x)<0$ bo'lsa, Δx ning yetarli darajada kichik qiymatlarida (80) nisbat manfiy bo'lar edi, bu esa (81) munosabatga ziddir).

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz. x ning $[a;b]$ oraliqdagi hamma qiymatlarida $f'(x)>0$ deb faraz qilamiz.

$[a;b]$ kesmaga tegishli ikkita ixtiyoriy x_1 va x_2, $(x_1<x_2)$ qiymatni qaraymiz.

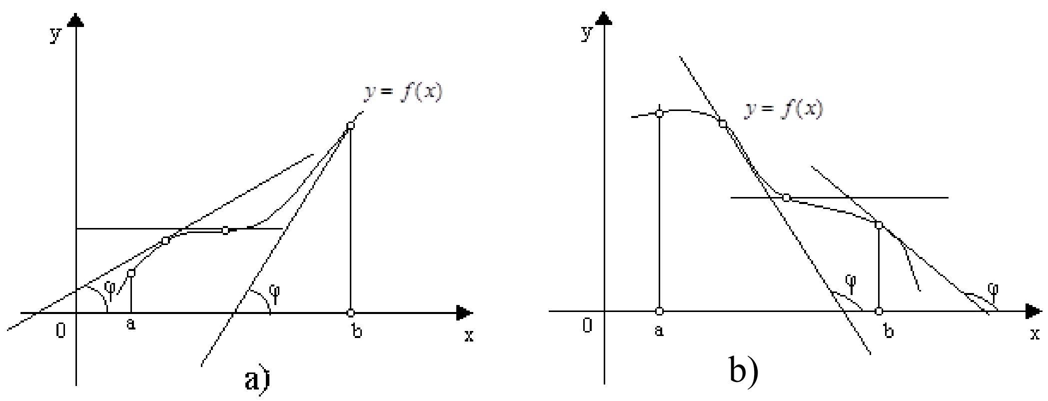
Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga binoan ushbu tenglikni yozishimiz mumkin:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad x_1<\xi<x_2.$$

Shartga asosan $f'(\xi)>0$ demak, $f(x_2)-f(x_1)>0$, bundan esa $y=f(x)$ o'suvchi funksiya ekani kelib chiqadi.

Kamayuvchi (differensiallanuvchi) funksiya uchun ham shunga o'xshash teoremani aytish mumkin, ya'ni:

1. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada kamaysa, shu kesmada $f'(x)\leq 0$ bo'ladi. Agar $(a;b)$ oraliqda $f'(x)<0$ bo'lsa $[a;b]$ kesmada $y=f(x)$ kamayadi. (Albatta, bu yerda ham funksiya $[a;b]$ kesmaning hamma nuqtalarida uzluksiz va $(a;b)$ oraliqning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi deb faraz qilamiz).

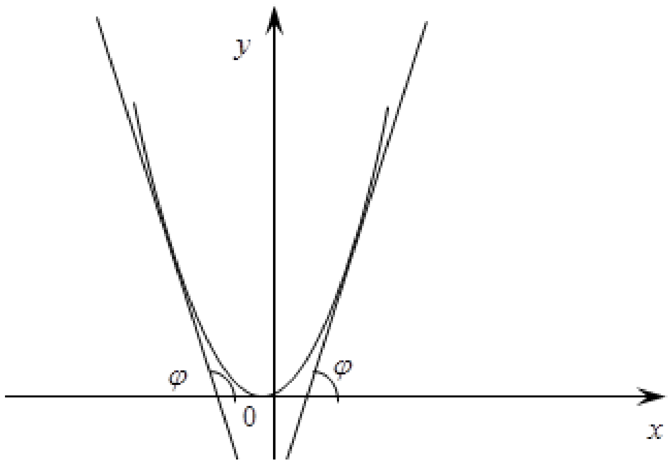


77-shakl.

Izoh. Isbotlangan teorema ushbu geometrik faktni ifodalaydi. Agar $[a;b]$ kesmada $y=f(x)$ funksiya o‘ssa, shu kesmaning har bir nuqtasida $y=f(x)$ egri chiziqqa urinma Ox o‘q bilan φ o‘tkir burchakni hosil qiladi yoki ayrim nuqtalarda gorizontal bo‘ladi; bu burchakning tangensi manfiy bo‘lmaydi: $f'(x)=tg\varphi\geq 0$ (77-a shakl). Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiya kamaysa, urinma Ox o‘q bilan o‘tmas burchak hosil qiladi (yoki ayrim nuqtalarda urinma gorizontal bo‘ladi); bu burchakning tangensi musbat bo‘lmaydi (77-b shakl).

Teoremaning ikkinchi qismi ham shu kabi tasvirlanadi. Teorema hosilaning ishorasiga qarab funksiyaning o‘sishi yoki kamayishini aniqlashga imkon beradi.

1-misol. $y=x^4$ funksiyaning o‘sish va kamayish sohalari aniqlansin.

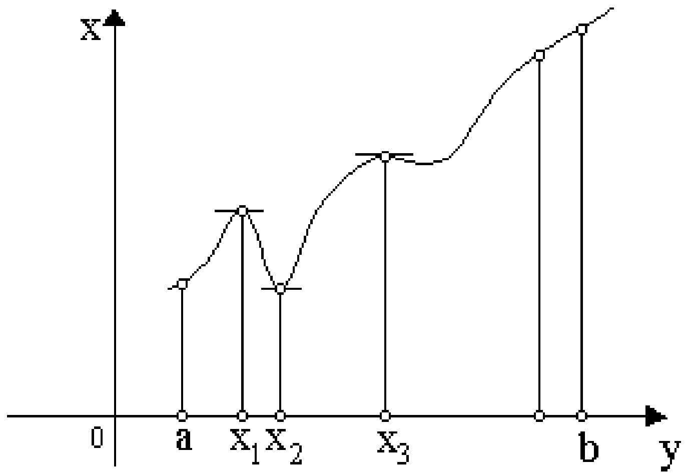


78-shakl.

Yechish: berilgan funksiyaning hosilasi $y'=4x^3$, $x>0 \Rightarrow y'>0$ bo‘ladi, funksiya o‘sadi; $x<0 \Rightarrow y'<0$ bo‘ladi, funksiya kamayadi (78-shakl).

2. Funksiyaning maksimumi va minimumi

Maksimumning ta’rifi. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_1 nuqtadagi qiymati x_1 ni o‘z ichiga olgan birorta intervalning barcha nuqtalaridagi qiymatlaridan katta bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_1 nuqtada maksimum (**maximum**)ga ega bo‘ladi. Boshqacha aytganda, agar absolyut miqdori bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lgan har qanday (musbat va manfiy) Δx uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.



79-shakl.

Masalan, grafigi 79-shaklda tasvirlangan $y=f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega.

Minimumning ta’rifi.

Agar absolyut miqdori bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lgan har qanday (musbat va manfiy) Δx uchun $f(x_2+\Delta x)>f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_2$ nuqtada minimum (**minimum**) ga ega bo‘ladi (79-shakl).

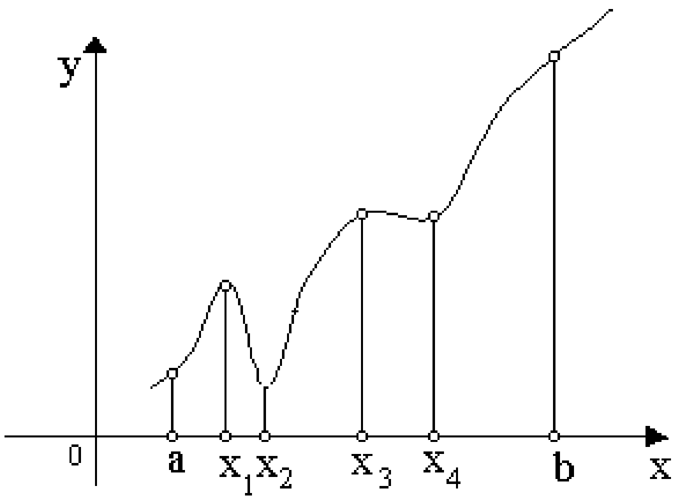
Masalan, $y=x^4$ funksiya (78-shakl) $x=0$ nuqtada minimumga ega, chunki $x=0$ bo‘lganda $y=0$ va x ning boshqa qiymatlarida $y>0$

Maksimum va minimum ta’riflari munosabati bilan quyidagi hollarga e’tibor qilish lozim.

1. Kesmada aniqlangan funksiyaning x ning faqat qaralayotgan kesmaning ichidagi qiymatlarida maksimal va minimal qiymatlariga yetishi mumkin.

2. Funksiyaning maksimumi va minimumini qaralayotgan kesmada uning eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo‘ladi. Funksiyaning maksimum nuqtadagi qiymati shu maksimum

nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan hamma nuqtalardagi qiymatlariga nisbatan eng katta bo‘ladi, minimum nuqtadagi qiymati esa shu minimum nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan nuqtalardagi qiymatlariga nisbatangina eng kichik bo‘ladi. 80-shaklda $[a;b]$ kesmada aniqlangan funksiya tasvirlangan, bu funksiya $x = x_1$ va $x = x_3$ nuqtalarda maksimumga ega, $x = x_2$ va $x = x_4$ nuqtalarda minimumga ega, lekin funksiyaning $x = x_4$ dagi minimum $x = x_1$ dagi maksimumdan katta. Funksiyaning $x = b$ dagi qiymati qaralayotgan kesmadagi maksimumlarining har biridan kattadir. Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari yoki ekstremal qiymatlari deb ataladi.



80-shakl.

Funksiyaning ekstremal qiymatlari va ularning $[a;b]$ kesmada joylanishi argumentning o‘zgarishi bilan bog‘lanishda funksiyaning o‘zgarishini ma’lum darajada xarakterlaydi.

3. Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

2-teorema. Agar differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo‘lsa, uning hosilasi shu nuqtada nolga aylanadi, ya’ni $f'(x_1) = 0$ bo‘ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $x = x_1$ nuqtada funksiya maksimumga ega deb faraz qilamiz. Bu holda x_1 ga absolyut qiymat jihatidan yetarli darajada kichik Δx, $(\Delta x \neq 0)$ orttirma berib, ushbu tengsizlikni yozish mumkin:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

ya'ni

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Lekin bunday holda

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

nisbatning ishorasi Δx ning ishorasi bilan belgilanadi, ya'ni $\Delta x < 0$ bo'lganda

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0,$$

$\Delta x > 0$ bo'lganda

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0.$$

Hosilaning ta'rifiga muvofiq

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \tag{82}$$

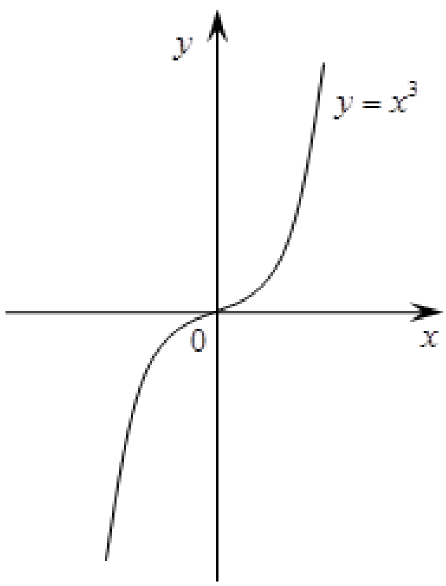
Agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, o'ng tomondagi limit Δx ning qanday (musbat va manfiyligicha qolgan holda) nolga intilishiga bog'liq bo'lmaydi, ammo Δx manfiyligicha qolgan holda intilsa, u holda $f'(x_1) \geq 0$. Agar Δx musbatligicha qolgan holda nolga intilsa, u holda $f'(x_1) \leq 0$. $f'(x_1)$ ning qiymati Δx ning qanday holda nolga intilishiga bog'liq bo'lmagan aniq son uchun so'nggi ikki tengsizlik faqat $f'(x_1) = 0$ bo'lgandagina birgalikda bo'ladi.

Funksiyaning minimumi bo'lgan hol uchun ham teorema shu kabi isbotlanadi. Isbotlangan teoremaga ushbu ravshan ko'rinib turgan geometrik fakt mos keladi: agar $f(x)$ funksiya maksimum va minimum nuqtalarda hosilaga ega bo'lsa, $y = f(x)$ egri chiziqning shu nuqtalarida o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi.

Haqiqatan, $f'(x_1) = tg\varphi = 0$ tenglikdan, bu yerda φ urinma bilan Ox o'qi orasidagi burchak, $\varphi = 0$ ekanligi kelib chiqadi (79-shakl). 2-

teoremadan bevosita ushbu natija chiqadi: agar argument x ning qaralayotgan hamma qiymatlarida $f(x)$ funksiya hosilaga ega bo‘lsa, u holda funksiya x ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlaridagina ekstremumga (maksimum va minimumga) ega bo‘ladi. Bunga teskari xulosa to‘g‘ri emas: hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda albatta maksimum yoki minimum mavjud bo‘lavermaydi. Masalan, 80-shaklda tasvirlangan funksiyaning hosilasi $x = x_3$ nuqtada nolga aylanadi (urinma gorizontal). Lekin bu nuqtada funksiya na maksimumga va na minimumga ega emas. Xuddi shuningdek, $y = x^3$ funksiyaning hosilasi (81-rasm) $x = 0$ nuqtada nolga teng:

$$(y)'_{x=0} = (x^3)'_{x=0} = 3x^2\Big|_{x=0} = 0,$$



81-shakl.

ammo bu nuqtada funksiya na maksimumga va na minimumga ega emas. Haqiqatan, x nuqta 0 nuqtaga har qancha yaqin bo‘lsa ham, hamma vaqt $x < 0$ bo‘lganda $x^3 < 0$ va $x > 0$ bo‘lganda $x^3 > 0$ bo‘ladi.

Biz birorta kesmaning hamma nuqtalarida funksiya hosilaga ega bo‘lgan holni tekshirdik. Hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalarda ahvol qanday bo‘ladi?

Argumentning hosila nolga aylanadigan yoki uziladigan qiymatlari kritik nuqtalar yoki kritik qiymatlar deyiladi.

Yuqorida aytilganlardan har qanday kritik qiymatda funksiya maksimumga yoki minimumga ega bo‘lavermasligi kelib chiqadi. Lekin funksiya birorta nuqtada maksimumga yoki minimumga erishsa, u nuqta shubhasiz kritik nuqta bo‘ladi. Shunga asosan funksiyaning ekstremumlarini topish uchun quyidagicha ish bajariladi: hamma kritik nuqtalar topiladi, so‘ngra har bir kritik nuqtani ayrim tekshirib, u nuqtada funksiyaning maksimumi va minimumi bo‘lishi yoki na maksimumi va na minimumi bo‘lmasligi aniqlanadi.

4. Ekstremum mavjudligining yetarli shartlari

3-teorema. $f(x)$ funksiyaning kritik nuqta x_1 ni o‘z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma (balki x_1 nuqtaning o‘zidan boshqa) nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar shu nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgarsa, funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Agar chapdan $x = x_1$ nuqta orqali o‘ngga o‘tishda hosilaning ishorasi manfiydan musbatga o‘zgarsa, funksiya shu nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

Shunday qilib, agar:

a) $x < x_1$ bo‘lganda $f'(x) > 0$ hamda $x > x_1$ bo‘lganda $f'(x) < 0$ bo‘lsa, funksiya x_1 nuqtada **maksimumga** ega;

b) $x < x_1$ bo‘lganda $f'(x) < 0$ hamda $x > x_1$ bo‘lganda $f'(x) > 0$ bo‘lsa, funksiya x_1 nuqtada **minimumga** ega bo‘ladi.

Bunda shuni nazarda tutish lozimki, a) va b) shartlar x ning x_1 ga yetarli darajada yaqin bo‘lgan hamma qiymatlarida, ya’ni x_1 kritik nuqtalarning yetarli darajada kichik atrofining hamma nuqtalarida bajarilishi kerak.

Isbot. Avvalo, hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi, ya’ni x ning x_1 nuqtaga yetarli darajada yaqin bo‘lgan hamma qiymatlari uchun $x < x_1$ bo‘lganda $f'(x) > 0$, $x > x_1$ bo‘lganda esa $f'(x) < 0$ tengsizliklarga egamiz deb faraz qilamiz. $f(x) - f(x_1)$ ayirmaga Lagranj teoremasini qo‘llab, $f(x) - f(x_1) = f(\xi)(x - x_1)$ tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $\xi \in (x; x_1)$.

1) $x < x_1$ bo‘lsin, u holda $\xi < x_1$, $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f'(\xi)(x - x_1) < 0$ va demak,

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ yoki } f(x) < f(x_1). \qquad (83)$$

2) $x > x_1$ bo‘lsin, u holda $\xi > x_1$, $f'(\xi) < 0 \Rightarrow f'(\xi)(x - x_1) < 0$ va demak,

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ yoki } f(x) < f(x_1). \qquad (84)$$

(83) va (84) tengsizliklar x ning x_1 ga yetarli darajada yaqin hamma qiymatlarida x_1 nuqtadagi qiymatidan kichik ekanini ko‘rsatadi. Demak, x_1 nuqtada $f(x)$ funksiya maksimumga egadir.

Teoremaning minimum uchun yetarli shart haqidagi ikkinchi qismi ham shu kabi isbot qilinadi.

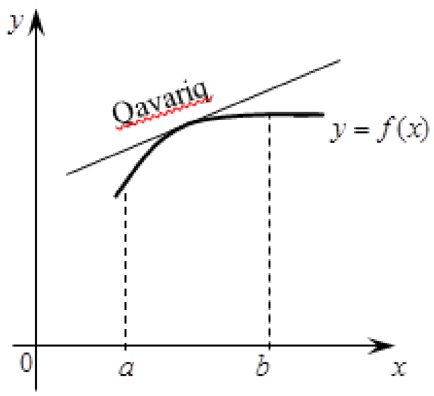
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Kesmada o‘suvchi va kamayuvchi funksiya ta’rifini ifodalang.
2. Funksiya o‘suvchi va kamayuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini isbotlang. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?
3. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini, funksiyaning ekstremal qiymatlarini ta’riflang.
4. Ekstremumning zaruriy shartini isbotlang.
5. Funksiya ekstremumi yetarlilik shartini birinchi hosila yordamida isbotlang.

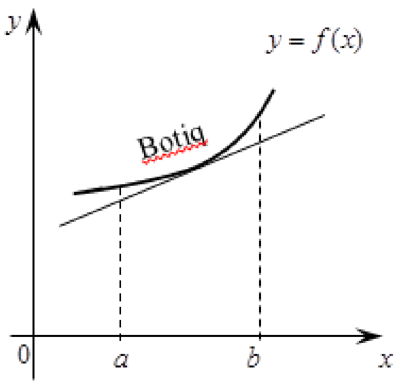
35-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Bukilish (egilish) nuqtasi. Egri chiziqning asimptotalari. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi

1. Funksiya grafigining botiqligi va qavariqligi.

Funksiya grafigining botiqligi va qavariqligi bilan bog‘liq bo‘lgan xossalarni o‘rganamiz. Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya grafigi uning $(a;b)$ intervaldagi barcha nuqtalarida o‘tkazilgan urinmalaridan pastda joylashgan bo‘lsa, **qavariq** deyiladi (82-a shakl).



a)



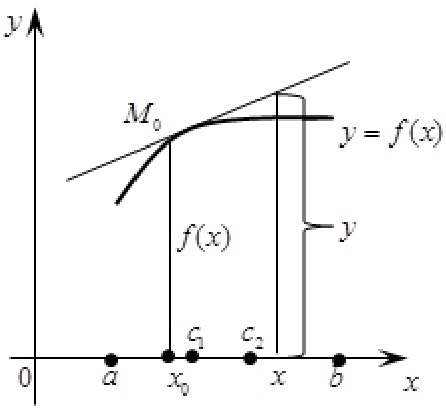
b)

82-shakl.

Agar $y=f(x)$ funksiya grafigi $(a;b)$ intervaldagi har bir nuqtasidagi urinmalaridan yuqorida joylashgan bo‘lsa, bu differensiallanuvchi funksiyaning grafigi $(a;b)$ intervalda **botiq** deyiladi (82-b shakl).

Shunga o‘xshash, masalan, $y=\sqrt{1-x^2}$ yarim aylana $(-1;1)$ intervalda qavariq, $y=x^2$ parabola $(-\infty;\infty)$ intervalda botiq. Funksiya grafigi berilgan intervalda qavariq yoki botiq bo‘lishining yetarli shartini qaraymiz.

1-teorema. $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning barcha nuqtasida ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ ga ega bo‘lsin. Agar bu intervalning barcha nuqtasida $f''(x)<0$ bo‘lsa, funksiya grafigi bu intervalda qavariq, $f''(x)>0$ bo‘lsa, botiq bo‘ladi.



83-shakl.

Isbot. Aniqlik uchun $f''(x)<0$ bo‘lsin va grafikning qavariqligini isbot qilamiz. Funksiya grafigida $(a;b)$ intervalga tegishli x_0 abssissali ixtiyoriy M_0 nuqtani olamiz va M_0 nuqta orqali urinma o‘tkazamiz (83-shakl). Teoremani isbot qilish uchun biz funksiyaning grafigi urinmadan pastda joylashganligini ko‘rsatishimiz kerak. Boshqacha aytganda, bitta o‘sha x abssissa uchun egri chiziq ordinatasidan kichik bo‘lishi kerak. Grafik tenglamasi: $y=f(x)$ urinmaning M_0 nuqtasidagi tenglamasi quyidagicha:

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Bu yerda x abssissaga mos keladigan Y ordinata bilan belgilangan.

Grafik va urinmaning bitta shu x abssissadagi ayirmasi quyidagiga teng:

$$y-Y=f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)\Rightarrow y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

$f(x)-f(x_0)$ ayirmani Lagranj formulasi bo‘yicha almashtiramiz:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0) \text{ bu yerda } c\in(x;x_0).$$

U holda

$$y-Y=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(x-x_0)\left(f'(c)-f'(x_0)\right). \qquad (85)$$

$f'(c)-f'(x_0)$ ayirmani Lagranj formulasi bo‘yicha yana almashtiramiz:

$$f'(c)-f'(x_0)=(c-x_0)f''(c_1),$$

bu yerda $c_1\in(x_0;c)$. Ayirma ifodasini (85) tenglikka qo‘yib,

$$y-Y=(x-x_0)(c-x_0)f''(c_1) \qquad (86)$$

ni hosil qilamiz, $x-x_0$ va $c-x_0$ ayirmalar bir xil ishoraga ega, chunki c kattalik x va x_0 orasida joylashgan, demak, ularning ko‘paytmasi $(x-x_0)(c-x_0)>0$. Shartga asosan $(a;b)$ intervalda $f''(x)<0$ bo‘lgani uchun, xususan, $f''(c_1)<0$. Shuning uchun, $y-Y=(x-x_0)(c-x_0)f''(c_1)<0$. Shunday qilib, $(a;b)$ intervaldagi nuqtalar uchun urinmaning ordinatasi grafik ordinatasidan katta, ya’ni grafik qavariq.

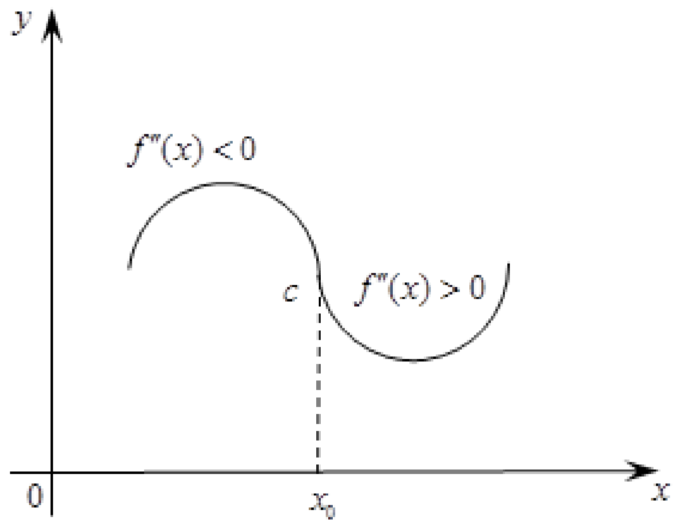
Xuddi shunga o‘xshash $f''(x)>0$ da grafik botiq bo‘lishi isbotlanadi.

2. Bukilish nuqtalari

Uzluksiz funksiya grafigining qavariqlik qismidan botiqlik qismini (yoki botiqdan qavariqqa) ajratadigan nuqtasi **bukilish nuqtasi** deyiladi. Funksiya grafigining bukilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslangan.

2-teorema. (bukilish nuqtasi mavjudligining zaruriy sharti). $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz ikkinchi $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin u holda, agar abssissasi $x_0 \in (a;b)$ bo'lgan nuqta berilgan funksiyaning grafigining bukilish nuqtasi bo'lsa, $f''(x)=0$ bo'ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f''(x) \neq 0$ bo'lsin. Aniqlik uchun $f''(x)>0$ bo'lsin. U holda ikkinchi hosilaning uzluksizligi haqidagi farazga asosan x_0 nuqtaning biror atrofida musbat bo'ladi va demak, funksiya grafigi botiq.



84-shakl.

Lekin bu x_0 nuqta bukilish nuqtasining abssissasi deyilishiga qarama-qarshidir. Bu qarama-qarshilik $f''(x)=0$ to'g'riligini ko'rsatadi.

$y=f(x)$ funksiya grafigi abssissasi $x=x_0$ bo'lgan bukilish nuqtasiga ega bo'lsin. Agar $x=x_0$ da ikkinchi hosila uzluksiz bo'lsa,

$f''(x)=0$ bo'ladi. Biroq boshqa hollar, ya'ni uzluksiz funksiyaning ikkinchi hosilasi uzilishiga ega bo'lgan hol ham bo'lishi mumkin.

Masalan, $y=\sqrt[3]{x^5}$ funksiyaning ikkinchi hosilasi $y''=\dfrac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. Ravshanki, $-\infty<x<0$ da $y''<0$ va $0<x<+\infty$ da $y''>0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiyaning grafigi $x=0$ da bukilish nuqtasiga ega. Biroq bu nuqtada funksiyaning ikkinchi hosilasi mavjud emas.

Shunday qilib, uzluksiz funksiya grafigining bukilish nuqtalari abssissalarini ikkinchi hosila nolga teng yoki uzilishga ega bo'lgan (xususan, mavjud bo'lmagan) nuqtalardan izlash kerak ekan.

3-teorema. (bukilish nuqtasi mavjudligining yetarli sharti). Agar uzluksiz funksiyaning ikkinchi $f''(x)$ hosilasi x_0 nuqtadan o'tayotganda o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda $x=x_0$ abssissali nuqta funksiya grafigining bukilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Masalan, $x<x_0$ da $f''(x)<0$ va $x>x_0$ da $f''(x)>0$ bo'lsin. Bu holda x_0 dan chapda funksiya grafigi qavariq, o'ngda esa botiq. Demak, x_0 nuqta qavariqlik intervalini botiqlik intervalidan ajratadi, ya'ni funksiya grafigining $(x_0;f(x_0))$ nuqtasi bukilish nuqtasi bo'ladi (84-shakl).

1-misol. $f(x)=x^3-3x$ funksiya grafigining qavariq va botiqligini tekshiring.

Yechish: Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:
$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow y''=6x$.
$f''(x)$ ni nolga tenglaymiz: $6x=0 \Rightarrow x=0$. Agar $x<0 \Rightarrow f''(x)=6x<0$, agar $x>0 \Rightarrow f''(x)=6x>0$ ni e'tiborga olsak, $(-\infty;0)$ intervalda grafik qavariq, $(0;+\infty)$ intervalda botiq bo'lishini xulosa qilamiz: $x=0$ nuqtada funksiya grafigi $C(0;0)$ bukilish nuqtasiga ega.

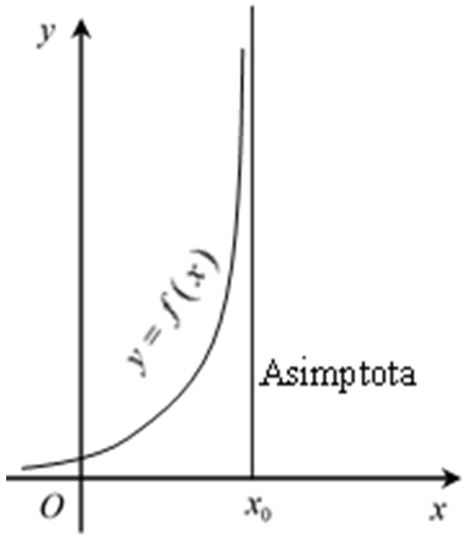
3. Funksiya grafigining vertikal asimptotalar

Funksiyani tekshirayotganda funksiya grafigining nuqtasi koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda yoki boshqacha aytganda uning o'zgaruvchi nuqtasi cheksizlikka intilganda grafik shaklini bilib olish muhim.

O‘zgaruvchisi cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib boradigan hol alohida qiziqish tug‘diradi.

O‘zgaruvchi nuqta grafik bo‘yicha koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda funksiya grafigidagi o‘zgaruvchi nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa nolga intilsa, bunday xossaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining **asimptotasi** deyiladi. Oy o‘qqa parallel Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalarni ayrim-ayrim holda qaraylik.

Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptotalar. $x\to x_0$ da $y=f(x)$ funksiya absolyut qiymat bo‘yicha cheksiz o‘ssin, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$. U holda ta’rifga asosan $x=x_0$ to‘g‘ri chiziq asimptotadir (85-shakl). Oy o‘qqa parallel asimptotalar vertikal asimptotalar deb ham ataladi.



85-shakl.

Shunga o‘xshash, agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ bo‘lsa ham $x=x_0$ to‘g‘ri chiziq asimptota bo‘ladi. Teskarisi ham o‘z-o‘zidan ravshan, ya’ni $x=x_0$ asimptota bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ limitlardan kamida bittasi cheksizdir.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya grafigining Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptotalarni izlash uchun funksiya cheksizlikka aylanadigan (cheksiz uzilishga ega bo‘lgan) $x = x_0$ ning qiymatlarini topish kerak. U holda Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptota $x = x_0$ tenglamaga ega bo‘ladi.

2-misol. $f(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$ funksiya grafigining Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptotasini toping.

Yechish: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(x + \dfrac{1}{x-2}\right) = \infty$ bo‘lgani uchun $x = 2$ asimptotaga ega.

3-misol. $f(x) = tgx$ funksiya grafigining Oy o‘qqa parallel asimptotasini toping.

Yechish: $\lim\limits_{x\to\frac{(2n+1)\pi}{2}} tgx = \infty$ bo‘lgani uchun $f(x) = tgx$ funksiyaning grafigi cheksiz ko‘p asimptotalarga ega:

$$x = \pm\frac{\pi}{2},\ x = \pm\frac{3\pi}{2}, x = \pm\frac{5\pi}{2}, \dots .$$

4. Funksiya grafigining og‘ma asimptotalari

Ox va Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalar og‘ma asimptotalar deyiladi.

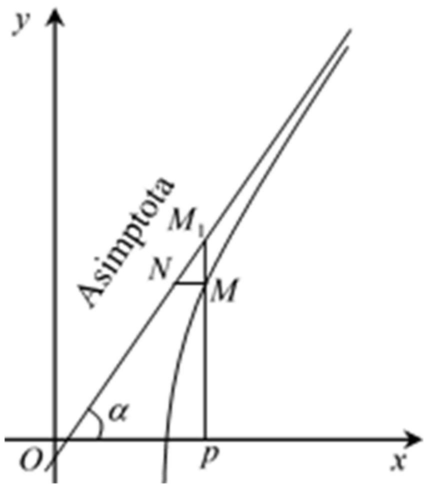
$y = f(x)$ funksiyaning grafigi og‘ma asimptotaga ega bo‘lsin. U holda og‘ma asimptota tenglamasi $y = kx + b$ ko‘rinishda bo‘ladi. k va b ni topish uchun quyidagi ishni bajaramiz: funksiya grafigining M nuqtasidan asimptotagacha MN perpendikular tushiramiz (86-shakl).

Asimptotaning ta’rifiga asosan $x \to +\infty$ da $MN \to 0$, M_1MN uchburchakdan quyidagiga egamiz: $M_1M = \dfrac{MN}{\cos\alpha}$ bunda α – asimptotaning Ox o‘qqa og‘ish burchagi. α o‘zgarmagan holda M_1M kattalik MN bilan bir vaqtda nolga intiladi, ya’ni

$$M_1M = PM_1 - PM = y_{asimp} - y_{grafik} = (kx + b) - f(x),$$

bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left[(kx + b) - f(x)\right] = 0. \qquad (87)$$



86-shakl.

(87) dan qavs ichidagi ayirma $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiya $f(x)-(kx-b)=\beta(x)$ ekani kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni hadma-had x ga bo‘lib, limitga o‘tamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\beta(x)}{x}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ va $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{x}=0$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k\right)=0$ ga egamiz.

Bundan asimptotaning burchak koeffitsiyenti

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{88}$$

bo‘ladi. Endi b ni aniqlaymiz. $f(x)-kx-b=\beta(x)$ bo‘lgani uchun $b=f(x)-kx-\beta(x)$. $x\to+\infty$ da limitga o‘tib, quyidagini hosil qilamiz:

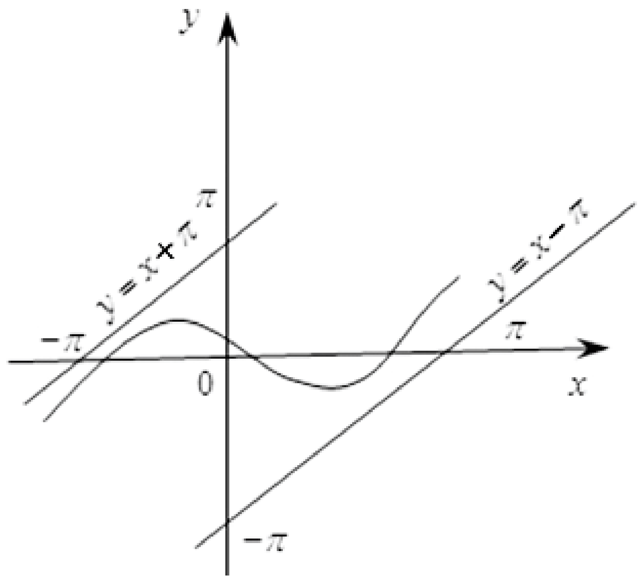
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \tag{89}$$

Bundagi k (88) formula bo‘yicha topiladi.

Shunday qilib, og‘ma asimptotani topish uchun (88) va (89) limitlarni topish kerak ekan. Teskarisini, ya’ni (88) va (89) limitlar mavjud bo‘lsa, $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq asimptota ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Agar hech bo‘lmaganda limitlardan bittasi mavjud bo‘lmasa, $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\to+\infty$ da og‘ma asimptotaga ega bo‘lmaydi.

Xususiy holda asimptota tenglamasidagi k koeffitsiyent nolga teng bo‘lishi mumkin. Bu holda asimptota Ox o‘qqa parallel bo‘ladi va **gorizontal asimptota** deyiladi.



87-shakl.

$x \to -\infty$ da asimptotalar shunga o‘xshash topiladi. Aytib o‘tish joizki, (88) va (89) formulalar $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ da har xil bo‘lishi mumkin, ya’ni funksiya grafigi ikkita har xil og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi mumkin.

4-misol. $y = x - arctgx$ funksiyaning asimptotalarini toping.

Yechish: Berilgan funksiya barcha son o‘qida aniqlangan va uzluksiz. Demak, grafik Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptotalarga ega emas. Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalarni topamiz.

$$1)\ x \to +\infty:\ k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - 2\frac{arctgx}{x}\right) = 1 - 2\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 2arctgx - x\right) = -2\lim_{x\to+\infty} arctgx = -2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

$x \to +\infty$ da asimptota tenglamasi $y = x - \pi$.

$$2)\ x \to -\infty:\ k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2arctgx}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - 2\frac{arctgx}{x}\right) = 1 - 2\lim_{x\to-\infty}\frac{arctgx}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 2arctgx - x\right) = -2\lim_{x\to-\infty} arctgx = -2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$x \to -\infty$ da asimptota tenglamasi $y = x + \pi$.

Shunday qilib, $y = x - arctgx$ funksiyaning grafigi Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan ikkita har xil asimptotaga ega ekan: $x \to +\infty$ da $y = x - \pi$ va $x \to -\infty$ da $y = x + \pi$. $y = x - arctgx$ funksiyaning grafigi 87-shakldа tasvirlangan.

5. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi va uning grafigini yasash

Yuqorida bayon qilinganlarga asoslanib, funksiyani tekshirishning quyidagi rejasini tavsiya qilish mumkin.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini, uzluksizlik intervallarini, uzilish nuqtalarini topish.
2. Funksiya monotonlik intervallarini va uning ekstremumlarini (maksimum va minimumini) topish.
3. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini hamda funksiya grafigining bukilish nuqtalarini topish.
4. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.
5. Funksiya grafigini yasash.

1-izoh. Funksiya grafigini yasashda grafikning koordinatalar o‘qi bilan kesishish nuqtalarini bilish foydali.

2-izoh. Funksiya grafigini yasashdan avval uni toq yoki juftligini bilish ham foydali. Juft yoki toq funksiyaning grafigini yasayotganda grafikni ordinata o‘qiga yoki koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligidan foydalanish tavsiya qilinadi.

5-misol. $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

Yechish: 1. Funksiya x ning barcha qiymatlarida aniqlangan va uzluksiz.

2. Funksiyaning monotonlik intervallarini, maksimum va minimumini aniqlaymiz. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Argumentning kritik qiymatlarini topamiz:

$$2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow \frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}-1 \Rightarrow x=1.$$

Bundan tashqari $x=0$ da hosila cheksiz uzilishga ega bo‘lgani uchun $x=0$ qiymat ham kritik hisoblanadi.

$(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ intervallarning har birida hosilaning ishorasini aniqlaymiz, bunda 0 va 1 nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini ajratadi va quyidagiga egamiz:

$$(-\infty;0) \Rightarrow f'(-1)>0;\ (0;1)\Rightarrow f'\left(\frac{1}{8}\right)<0;\ (1;+\infty)\Rightarrow f'(8)>0.$$

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<\infty$
y'	+	mavjud emas	−	0	+
y	↗	$y_{\max}=0$	↘	$y_{\min}=-1$	↗

Shunday qilib, $y_{\max}=f(0)=0,\ y_{\min}=f(1)=-1.$

3. Grafikning qavariqlik va botiqlik intervallarini aniqlaymiz. Ikkinchi hosilani topamiz:

$$f''(x)=-2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

$f''(x)$ hosila x ning hech qanday qiymatida nolga aylanmaydi, lekin $x=0$ da mavjud emas (cheksiz uzilishga ega).

Ikkinchi hosilaning $(-\infty;0)$ va $(0;\infty)$ intervallarning har biridagi ishorasini aniqlaymiz va jadval tuzamiz:

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<\infty$
y''	+	mavjud emas	+
y	botiq	bukilishga ega emas	botiq

4. Funksiya grafigining Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalarini topamiz:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3\sqrt[3]{x^2}\right)=-\infty.$$

b uchun chekli limit mavjud bo‘lmagani uchun $x \to +\infty$ da funksiya grafigining Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalari yo‘q. $x \to -\infty$ da ham funksiya grafigi Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotalari yo‘qligini oson tekshirish mumkin. Oy o‘qqa parallel bo‘lgan asimptotalar ham yo‘q, chunki $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ funksiya x ning barcha qiymatlarida uzluksiz.

5. Grafikning koordinatalar o‘qi bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow 8x^3 = 27x^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = \frac{27}{8}.$$

6. Grafikni yasayotganda $x \to 0$ da $f'(x) \to \infty$ ni ko‘zda tutish kerak, ya’ni koordinatalar boshida grafik vertikal urinmaga ega (88-shakl).

6-misol. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

Yechish: 1. Funksiya $0 < x < +\infty$ intervalda aniqlangan va uzluksiz. Aniqlanish sohasining $x = 0$ chegaraviy nuqtasida funksiya cheksiz uzilishga ega, chunki

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

2. Hosilani va kritik nuqtalarni topamiz

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e.$$

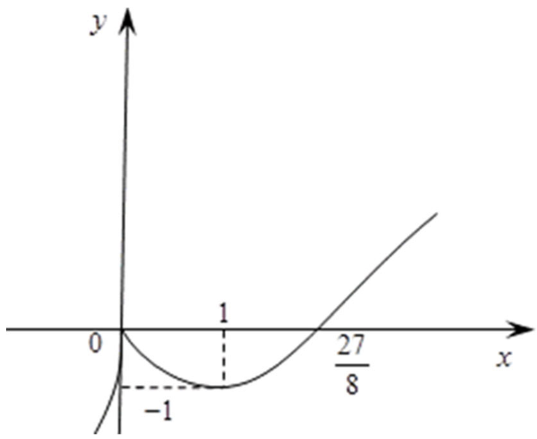
$x = e$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasidan ajratadigan intervallarda hosila ishorasini tekshiramiz:

$$(0;e) \Rightarrow f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = 1 > 0,$$

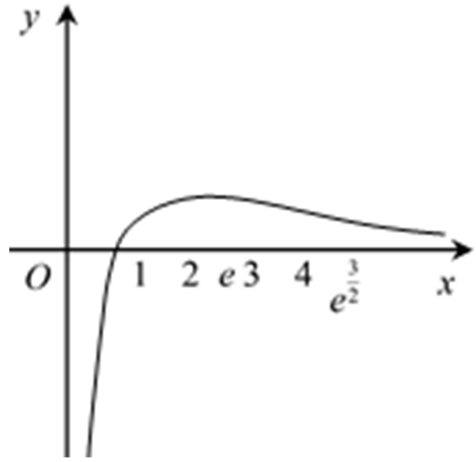
$$(e;\infty) \Rightarrow f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{1 - 2\ln e}{e^4} = \frac{1-2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} < 0.$$

Jadval tuzamiz:

x	$0 < x < e$	e	$e < x < +\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$y_{\max} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$	$\searrow$



88-shakl.



89-shakl.

3. $f(x)$ funksiyaning ikkinchi hosilasini topamiz: $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$ ni nolga tenglab, grafik bukilish nuqtalariga ega bo‘ladigan argumentning qiymatlarini topamiz:

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Rightarrow 2\ln x-3=0 \Rightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=e^{3/2}.$$

Ikkinchi hosilaning $\left(0;e^{3/2}\right)$ va $\left(e^{3/2};+\infty\right)$ intervallarning har biridagi ishorasini aniqlaymiz:

$$\left(0;e^{3/2}\right) \Rightarrow f''(e)=\frac{2\ln e-3}{e^3}=\frac{2-3}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0,$$

$$\left(e^{3/2};+\infty\right) \Rightarrow f''\left(e^2\right)=\frac{2\ln e^2-3}{e^6}=\frac{4-3}{e^6}=\frac{1}{e^6}>0.$$

Jadval tuzamiz:

x	$0<x<e^{3/2}$	$e^{3/2}\approx 4,48$	$e^{3/2}<x<+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	qavariq	bukilish nuqtasi $y\approx 0,33$	botiq

4. $x=0$ nuqtada funksiya cheksiz uzilishga ega bo‘lgani uchun $x=0$ (Oy o‘q) to‘g‘ri chiziq asimptotadir. Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan asimptotani topamiz:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{\substack{x\to+\infty}}\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(limitlarni topishda biz Lopital qoidasidan foydalandik).

Shunday qilib, $k=b=0$ va $y=0$ asimptota tenglamasi, ya'ni Ox o'q gorizontal asimptota ekan. Grafik asimptotalari Ox va Oy o'qlar ekan.

5. Koordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Grafik Oy o'q bilan kesishish nuqtasiga ega emas, chunki funksiya $0<x<+\infty$ oraliqda aniqlangan. Ox o'q bilan kesishish nuqtasi $y=0$ tenglamadan topiladi, bunda

$$\frac{\ln x}{x}=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1.$$

Hosil qilingan natijalarga asoslanib, $y=\frac{\ln x}{x}$ funksiyaning 89-shaklda tasvirlangan grafigini hosil qilamiz.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi qavariqlik va botiqlik ta'riflarini bering.
2. $y=f(x)$ funksiya grafigining bukilish nuqtasi ta'rifini bering.
3. $y=f(x)$ funksiya botiqligi xarakteri bilan funksiya ikkinchi hosilasi ishorasi orasidagi bog'lanish haqidagi teoremani ifodalang va isbotlang.
4. Chiziq asimptotasining ta'rifini ifodalang. Qanday asimptotalar mavjud?
5. Vertikal asimptotaning mavjudlik sharti qanday va u qanday topiladi?
6. Og'ma asimptotalar qanday topiladi?

VI BOB. ANIQMAS INTEGRALLAR

36-§. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral

Differensial hisobning asosiy masalalaridan biri, bu berilgan $f(x)$ funksiyaga asosan uning hosilasi $f'(x)$ ni topishdan iborat edi. Bu masalaga teskari masalani qaraymiz. Shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, hosilasi $f(x)$ ga teng, ya’ni $F'(x)=f(x)$ bo‘lsin. Bu masala integral hisobning asosiy masalalaridan biri hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda berilgan bo‘lib, $F(x)$ funksiya esa shu oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar $(a;b)$ oraliqning barcha nuqtalarida $F'(x)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi deyiladi.

1-misol. $f(x)=x^5$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $F(x)=\frac{1}{6}x^6$, chunki

$$F'(x)=\left(\frac{x^6}{6}\right)'=\frac{1}{6}\cdot 6x^5=x^5.$$

2-misol. $F(x)=2\sqrt{x}$ funksiya $(0,+\infty)$ oraliqda $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasidir, chunki $(0,+\infty)$ da $\left(2\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo‘ladi.

3-misol. $F_1(x)=\arcsin x$ va $F_2(x)=-\arccos x$ funksiyalar $(-1;1)$ oraliqda $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridir, chunki $(-1;1)$ da

$$F_1'(x) = F_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4-misol. $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 3$, $F_3(x) = x^2 + C$ (C - const) funksiyalar $(-\infty,+\infty)$ da $f(x) = 2x$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridir.

Berilgan ta’rif va keltirilgan misollar asosida quyidagi ikki savolning qo‘yilishi tabiiydir.

1) Qanday funksiyalarining boshlang‘ich funksiyalari mavjud bo‘ladi?

2) Berilgan funksiyalarning boshlang‘ich funksiyalari nechta bo‘lishi mumkin?

Berilgan savollariga javob quyidagi teoremani mazmunidan iborat.

1-teorema. Agar funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda shu kesmada uning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘ladi.

Ikkinchi savolning javobi esa ushbu teoremadan kelib chiqadi.

2-teorema. Biror *D* sohada $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsa, u holda ularning ayirmasi o‘zgarmas bo‘ladi.

Isbot. Shartga asosan *D* sohaning ichki nuqtalarida $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$. Differensiallash qoidasiga asosan:

$$\left[F_1(x) - F_2(x)\right]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

bo‘ladi. Demak, bu ikki funksiya (C-o‘zgarmas) songa farq qiladi, ya’ni $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Teoremaning isbotidan ko‘rinadiki, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $f(x)$ ning shu sohadagi boshlang‘ich funksiyalarining umumiy ko‘rinishi $\Phi(x) = F(x) + C$ bo‘ladi.

Boshqacha aytganda $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalar to‘plamidir.

2-ta’rif. Berilgan $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, $F(x) + C$ ifodani $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va ushbu simvol

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{1}$$

bilan belgilanadi.

Bunda $\int$ –integral belgisi, $f(x)$ –integrallanuvchi funksiya, dx – integrallovchi ko‘paytuvchi, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalaridan biri, C ixtiyoriy o‘zgarmas son. $\int f(x)dx$ simvolini nemis olimi G. Leybnis (1646-1716) tomonidan 1686-yilda kiritilgan. Integral termini 1696-yilda I. Bernulli tomonidan fanga kiritilgan. Integral so‘zi, lotin tilidagi «integer» - butun, ya’ni hamma yuza degan ma’noni anglatadi

5-misol. $\int x^2\, dx$ aniqmas integralni toping.

Yechish: $(-\infty,+\infty)$ oraliqda $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ funksiya uchun

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 = x^2.$$

Demak,

$$\int x^2 dx = F(x) + C = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

6-misol. $\int \cos x dx$ integral toping.

Yechish: $(-\infty;+\infty)$ da $f(x) = \cos x$ funksiya, $(\sin x)' = \cos x$ bo‘lganligi uchun $\int \cos x dx = \sin x + C$.

2. Aniqmas integralning xossalari

Quyida aniqmas integralning xossalarini keltiramiz.

1^0. $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning hosilasi aniqmas integral ostidagi funksiyaga teng:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2^0. $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differesiali aniqmas integral ostidagi ifodaga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3^0. Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o‘zgarmas son yig‘indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4^0. Agar $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy k son uchun

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

5^0. Agar $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang‘ich funksiyalari mavjud bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisining ham boshlang‘ich funksiyasi mavjud, ya’ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Bu xossalarning isboti bevosita aniqmas integralni ta’rifidan kelib chiqadi. Biz ulardan birini, masalan, 3^0-xossaning isbotini keltiramiz.

Isbot. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. Ta’rifga asosan

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + \mathrm{C}.$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

3. Asosiy integrallar jadvali

Ma’lumki, berilgan ixtiyoriy elementar funksiyalarning hosilasi yana elementar funksiya bo‘ladi. Lekin har qanday funksiyani integrallash har doim ham elementar funksiyaga keltiriladi deb bo‘lmaydi. Masalan, $\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int e^{x^2}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}$ kabi integrallarning hech bir elementar funksiya orqali ifodalanmaydi. Bu kabi funksiyalarni elementar funksiyalar yordamida integrallanmaydigan funksiyalar (chekli holda integrallab bo‘lmaydigan) deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalarni differensiallash jadvalidan foydalanib, quyidagi asosiy integrallar jadvalini keltiramiz:

Asosiy integrallar jadvali.

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$	12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$

3. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C$, $(a \neq 1, a > 0)$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int cos\,x dx = sin\,x + C$

9. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

10. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

16. $\int tg\,x\,dx = -ln|cos\,x| + C$

17. $\int ctg\,x\,dx = ln|\,sin\,x| + C$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

Eslatma. 12-19 integrallarni kelgusi mavzuda isbotlaymiz.

Yuqoridagi formulalarni to‘g‘riligini, ta’rifdan foydalanib, boshlang‘ich funksiyani differensiallash bilan tekshiriladi.

7-misol. $\int (x^2+1)^2 dx$ ni toping.

Yechish:

$$\int (x^2+1)^2 dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x + C.$$

8-misol. $\int tg^2 x dx$ ni toping.

Yechish:

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Demak, $\int tg^2 x dx = tgx - x + C$ bo‘ladi.

4. Aniqmas integrallarni topish qoidalari

Aniqmas integralni topishda quyidagi qoidalarni foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

I. Agar

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bo‘lsa, u holda quyidagi formulalar o‘rinli:

I. $\int f(a\cdot x)dx=\frac{1}{a}F(a\cdot x)+C$,

II. $\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$,

III. $\int f(a\cdot x+b)dx=\frac{1}{a}F(a\cdot x+b)+C$.

9-misol. $\int\frac{1}{2x+5}dx$ ni toping.

Yechish: 3-formulaga va III-qoidaga asosan

$$\int\frac{1}{2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+5|+C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Boshlang‘ich funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
2. Aniqmas integral qanday topiladi?
3. Aniqmas integralni asosiy xossalarini ayting.
4. Asosiy integrallash jadvalini yozing.

37-§. Integrallash usullari. Bevosita integrallash, o‘zgaruvchini almashtirib integrallash, bo‘laklab integrallash

1. Aniqmas integralda bevosita integrallash usuli

Bizga ma’lumki, integrallar jadvalida ko‘rsatilgan 1-11 integrallarni hosilalar jadvali yordamida tuzish mumkin. Lekin integrallar jadvalidagi 12-17 integrallarni sodda almashtirishlar yordamida jadvaldagi integrallardan biriga keltirish mumkin. Bu usulni bevosita integrallash usuli deb yuritiladi. Bu usullar yordamida jadvaldagi 12-17 formulalarni isbotini keltiramiz:

12. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$,

13. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]=$

$$=\frac{1}{2a}\left[ln|x-a|-ln|x+a|\right]+C=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C$, chunki

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c\right)'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

16. $\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

17. $\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$

18-19- formulalarni 39-§ da isbotlanadi.

Bevosita integrallash usulida integral ostidagi funksiyani sodda funksiyalar yig‘indisiga yoyish va aniqmas integrallar xossalaridan foydalanib ham integrallash mumkin.

1-misol. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ aniqmas integralni toping.

Yechish: $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+arctgx+C$

2-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$ aniqmas integralni toping.

Yechish: $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-5}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x-5)}{\sqrt{3x-5}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x-5}+C$.

2. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usuli

Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. x o‘zgaruvchini t o‘zgaruvchiga biror $x=\varphi(t)$ munosabatdan foydalanib almashtiramiz. Bunda $\varphi'(t)$ uzluksiz va $x=\varphi(t)$ ga nisbatan teskari funksiya $t=\psi(x)$ mavjud deb faraz qilinadi. Endi $x=\varphi(t)$ $dx=\varphi'(t)dt$, $(t=\psi(x))$ ifodalarni $\int f(x)dx$ ga qo‘yamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Bu yerda $\varphi(t)$ ni shunday tanlab olish kerakki, o‘ng tomondagi integral soddaroq bo‘lsin. Agar $f_1(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri $\Phi(t)$ bo‘lsa, berilgan integral

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C=\Phi(\psi(x))+C$$

bo‘ladi. Ba’zi hollarda, ya’ni o‘zgaruvchini $t=\psi(x)$ formula orqali kiritish foydadan holi emas.

3-misol. $\int sin^3 x\, cosx dx$ aniqmas integral toping.

Yechish: $t=sin\,x$ deb olsak, $dt=cos\,xdx$ bo‘ladi.

$$\int sin^3 x\cos xdx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}sin^4 x+C$$

4-misol. $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ aniqmas integralni toping.

Yechish:

$$J=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{2x-9} \\ x=\frac{1}{2}\left(t^2+9\right), \quad dx=tdt \end{array}\right|=2\int\frac{tdt}{t\left(t^2+9\right)}=2\int\frac{dt}{9+t^2}$$

Oxirgi integralni (13) formulaga asosan:

$$J=\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$$

deb olishimiz mumkin.

3. Aniqmas integralni bo‘laklab integrallash

u va ϑ funksiyalar x o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Ko‘paytmani differensiali

$$d(u\cdot\vartheta)=ud\vartheta+\vartheta du \qquad (3)$$

ga teng. (3) tenglikning ikkala tomonini integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int d(u\vartheta)=\int ud\vartheta+\int\vartheta du$$

Aniqmas integralning 3-xossasiga asosan:

$$u\vartheta=\int ud\vartheta+\int\vartheta du$$

bo‘ladi. Ikkinchi qo‘shiluvchini tenglikni chap tomoniga olib o‘tib,

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du \qquad (4)$$

formulani hosil qilamiz. Odatda (4) formula bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

(4) formula yordamida integral ostidagi u bilan $d\vartheta$ ning ko‘paytmasi ko‘rinishida tasvirlaganda $d\vartheta$ differensialdan ϑ funksiyani topish bilan dastlabki integraldan osonroq integrallanadigan holga keltiriladi. Ayrim hollarda bir necha marotaba bo‘laklab integrallash formulasidan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Integral ostidagi u va $d\vartheta$ funksiyalarni tanlash malakasi masalalar yechishda shakllanib boradi. Shunday bo‘lsada, ba’zi bir hollarga to‘xtalib o‘tish mumkin.

I. Agar integral ostida teskari trigonometrik yoki logarifmik funksiya kelganda, bu funksiyalarni u va $d\vartheta = dx$ deb olish bilan integral oson topiladi.

5-misol. $\int arctg\, x\, dx$ ni toping.

Yechish: Bo‘laklab integrallash formulasiga asosan

$$\int arctg\, x\, dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot arctg\, x - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= x \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

II. $\int x^m \sin x dx, \quad \int x^m \cos x dx, \quad \int x^m e^x dx$ ko‘rinishidagi integrallarda mos ravishda $\left[\, u = x^m, d\vartheta = (\quad)dx \,\right]$ deb olinadi.

6-misol. $\int x \cos x dx$ aniqmas integralni topilsin.

Yechish:

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ d\vartheta = \cos x dx, & \vartheta = \sin x \end{matrix} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

III. $\int x^m \arcsin x dx, \quad \int x^m \arccos x dx, \quad \int x^m \ln x dx$ ko‘rinishidagi integrallarda mos ravishda $\left[\, u = (\quad), d\vartheta = x^m dx \,\right]$ deb olinadi.

7-misol. $\int \ln^2 x dx$ ni toping.

Yechish: Bu integral ketma-ket ikki marta integrallash orqali hisoblanadi.

$$\int \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dx = d\vartheta, & x = \vartheta \end{vmatrix} = x\ln^2 x - 2\int x \cdot \frac{1}{x} \ln x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ d\vartheta = dx\ , & \vartheta = x \end{vmatrix} == x\ln^2 x - 2x\ln x + 2\int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

IV. $J_1 = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ va $J_2 = \int e^{ax}\sin(bx)dx$ ko‘rinishdagi integrallarni topish talab qilinsin.

Birinchi integralda bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llab,

$$J_1 = \int e^{ax}\cos(bx)dx \ = \begin{vmatrix} u = e^{ax} & du = a \cdot e^{ax}dx \\ d\vartheta = \cos(bx)dx & \vartheta = \frac{1}{b}\sin(bx) \end{vmatrix} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax} \cdot \sin(bx)dx,$$

ni hosil qilamiz. So‘ngra yana bir marta bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llab,

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \begin{vmatrix} u = e^{ax}, & du = ae^{ax}dx \\ d\vartheta = \sin(bx)dx, & \vartheta = -\frac{1}{b}\cos(bx) \end{vmatrix} = \tag{6}$$

$$= -\frac{1}{b}\cos(bx)e^{ax} + \frac{a}{b}\int \cos(bx)dx,$$

ni hosil qildik. (6) ni (5) ga qo‘yib,

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx) + \frac{a}{b^2} \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx) - \frac{a^2}{b^2} \cdot \int e^{ax}\cos(bx)dx$$

Bu tenglikdan J_1 ni topsak,

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax} cos(bx)dx = e^{ax} \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot sin(bx) + \frac{a}{b^2} \cdot cos(bx)\right) + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot C$$

ekanidan,

$$J_1 = \int e^{ax} cos(bx)dx = \frac{e^{ax} \cdot \left(b \cdot sin(bx) + a \cdot cos(bx)\right)}{a^2 + b^2} + C. \tag{7}$$

V. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$ integralni toping.

Yechish: Bu integralni topish uchun avval quyidagicha ish bajaramiz:

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Oxirgi tenglikda qatnashayotgan $\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ ni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\left|\begin{array}{ll} u=x\,, & du=dx, \\ d\vartheta=\dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, & \vartheta=\dfrac{1}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(1-n)}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

Demak,

$$I_n=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{x}{2a^2(1-n)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(1-n)}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}=$$

$$=\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1}-\frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Shunday qilib, I_n integral quyidagi rekurrent formula yordamida hisoblanadi:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2a^2(1-n)}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}},\quad n=2,3,...$$

yoki

$$I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2a^2(1-n)}I_{n-1}. \tag{8}$$

8-misol. $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$ integralni toping.

Yechish: Bu integralda $n=3,\ a=1$ rekurrent (8) formulani qo‘llaymiz:

$$I_3=\frac{1}{2(3-1)}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2(3-1)}\ I_{3-1}=\frac{1}{4}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}I_2,$$

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{2\cdot2-3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Demak,

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3x}{8\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{8}arctgx+C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Aniqmas integralni bevosita integrallash usulini maqsadi nima?
2. O‘zgaruvchini almashtirish usuli haqida ayting.
3. Bo‘laklab integrallash usulida nimaga e’tibor berish kerak?
4. Qanday integrallarni bo‘laklab integrallanadi?

38-§. Kasr-ratsional funksiyalarni integrallash. Sodda kasrlarga yoyib integrallash

1. Kasr-ratsional funksiyalar

Integrallarni hisoblash uchun umumiy usullar mavjud bo‘lmaganligi tufayli ayrim funksiyalar sinflarini integrallash yo‘llari bilan tanishamiz. Ma’lumki,

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+,...+a_{n-1}x+a_n \quad \left(a_n\neq 0\right)$$

ko‘phad butun ratsional funksiya

$$\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+,...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+,...b_{m-1}x+b_m} \quad \left(a_0,b_0\neq 0\right) \tag{9}$$

(9) kasr-ratsional funksiya deb ataladi. (Barcha koeffitsiyentlar haqiqiy sonlar)

Butun va kasr ratsional funksiyalar ratsional funksiyalar deb yuritiladi.

Agar $n<m$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ to‘g‘ri kasr ratsional funksiya, $n\geq m$ bo‘lganda noto‘g‘ri kasr ratsional funksiya deyiladi.

Noto‘g‘ri kasr funksiyalarning suratini maxrajiga bo‘lib,

$$f(x)=\frac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}=r\left(x\right)+\frac{P_k\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$$

ni hosil qilamiz, bunda $r(x)-$ butun ratsional funksiya, $k<m$.

1-misol. $\dfrac{x^4-x^2+x}{x(x-2)(x+2)}$ kasrni butun qismini ajrating.

Yechish: $\dfrac{x^4-x^2+x}{x(x-2)(x+2)}=x+\dfrac{3x^2+x}{x(x-2)(x+2)}$.

Algebradan ma'lumki, har qanday haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad $(x-a)^{\alpha}$ va $\left(x^2+px+q\right)^{\beta}$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchilar ko‘paytmasiga ajraydi, bunda a - berilgan ko‘phadning α karrali haqiqiy ildizi, $\left(x^2+px+q\right)^{\beta}$ esa α karrali qo‘shma kompleks ildizlarga mos keladi. Shuning uchun, $x^2+px+q,\quad \left(p^2-4q<0\right)$ ko‘phad ko‘paytuvchilarga ajramaydi.

Demak, ko‘phad

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}$$

shaklda yoziladi, bunda $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda=m$.

2. Sodda kasrlarga yoyish usuli

Ushbu

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{(x-a)^m},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m},\quad m>1. \tag{10}$$

(10) ko‘rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deb ataladi. Bunda $A, B, C, a, p,$ q– o‘zgarmas haqiqiy sonlar, m-natural son, x^2+px+q kvadrat uchhad uchun$\left(p^2-4q<0\right)$ bo‘lib u haqiqiy ildizga ega emas.

Algebra kursida $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to‘g‘ri kasr ratsional funksiya (10) da ko‘rsatilgan 4 xil sodda kasrlar yig‘indisi shaklida yozilishi ko‘rsatilgan:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=&\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{(x-c)^{\beta}}+\ldots\\&+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\ldots+\frac{C_{\gamma}}{(x-c)^{\gamma}}+\ldots\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}}+\ldots\end{aligned} \tag{11}$$

Bunda $A_k, B_k ... C_k, ..., M_k, N_k, ...$ $(m \ \ ta)$ noma'lum koeffitsiyentlardir. (11) ayniyatni umumiy maxrajga keltirib va hosil bo'lgan kasrlarni suratlarini tenglashtirib, $n-$darajali ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phadlarni tenglashtirib, m noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shu sistemani yechib, noma'lum koeffitsiyentlarni aniqlaymiz.

2-misol. $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}$ ratsional kasr funksiyani sodda kasrga yoying.

Yechish: $\dfrac{x^3+1}{x\cdot(x-1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3} =$

$$= \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3}.$$

Bundan

$$x^3+1 = (A+B)x^3 + (-3A-2B+C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A$$

x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlari tenglashtiramiz:

$$\begin{matrix} x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B+C=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $A=-1,\ B=2,\ C=1,\ D=2$ hosil qilamiz.

Demak,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}.$$

3 - misol. $\dfrac{1}{x^3+1}$ ni sodda kasrlarga yoying.

Yechish: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ va x^2-x+1 da $p^2-4q<0$ ekanidan

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{x^3+1}.$$

Demak,

$$1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$$

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^1: \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=2/3 \end{cases}$$

Shunday qilib, $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$.

3. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+,...a_{n-1}x+a_n$$

butun ratsional funksiyaning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx=\int\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\right)dx=$$

$$=\frac{1}{n+1}a_0x^{n+1}+\frac{1}{n}a_1x^n+...+\frac{1}{2}a_{n-1}x^2+a_nx+C$$

Agar $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ noto'g'ri kasr $(n>m)$ bo'lsa, uning butun qismi ajratilib butun ratsional funksiya va to'g'ri kasr ratsional funksiya yig'indisi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=P_k(x)+\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}$$

bu yerda $k+l=n$ bo'ladi. U holda

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int P_k(x)dx+\int\frac{P_l(x)}{Q_m(x)}dx \qquad (12)$$

bo'ladi.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri kasr bo'lsin. Bu to'g'ri kasrni integrallash uchun, avval uni sodda kasrlarga ajratiladi, so'ngra ularning integrallari topiladi.

Avval sodda kasrlarni integrallashni ko'rib chiqamiz.

I. $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning aniqmas integralini topamiz:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$ sodda kasrning aniqmas integralini topamiz:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int\frac{dx}{(x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C.$$

III. $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning aniqmas integralini topamiz, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ bo‘lgan holni qaraymiz:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2 \qquad (a^2=q-\frac{p^2}{4})$$

U holda

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\left|\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t, \\ dx=dt \\ x=t-\frac{p}{2}\end{array}\right|=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+c}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\int\frac{Bt+C-\frac{p}{2}B}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}=\frac{B}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}arctg\left(\frac{t}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+C.$$

4-misol. $\int\dfrac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$ integralni toping.

Yechish:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+4x+8\right)}{x^2-4x+8}+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+5\int\frac{dx}{\left(x-2\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C.$$

IV. $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, $m>1$ kasrni integrallash uchun xuddi III holdagi kabi o‘zgaruvchini almashtiramiz:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left| \begin{array}{l} x+\dfrac{p}{2}=t \\ x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \end{array} \right| = \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$$

$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$ integralni esa, avvalgi mavzudagi (8) rekurrent formula yordamida topiladi, ya'ni

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{t}{2a^2(1-m)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} - \frac{2m-3}{2a^2(1-m)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} \quad m=2,3,...$$

5-misol. . $\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$ integralni toping

Yechish: Kasr ratsional funksiyani suratida ba'zi algebraik almashtirishlar bajaramiz:

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-1-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx - 2\int \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+3\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2} - 2\int \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+3} - 2\int \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$$

Oxirgi integralda $x+1=t$ almashtirishni bajaramiz:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left((x+1)^2+2\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(t^2+2\right)^2}dt. \qquad (13)$$

Rekurrent formulaga asosan

$$J_1 = \int \frac{1}{\left(2+t^2\right)}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$J_2 = \int \frac{1}{\left(2+t^2\right)^2}dt = \frac{t}{4\left(2+t^2\right)} + \frac{1}{4}J_1 = \frac{t}{4\left(2+t^2\right)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{x+1}{4\left(x^2+2x+3\right)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \qquad (14)$$

(14) ni (13) ga qo‘ysak,

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = -\frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - 2\left(\frac{x+1}{4\left(x^2+2x+3\right)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= -\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Demak,

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = -\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Kasr-ratsional funksiyaning umumiy ko‘rinishini yozing?
2. Kasr-ratsional funksiyani qanday integrallanadi?
3. Sodda kasrlar nima, ularni qanday integrallanadi?

39-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

I. $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz (m va n lar butun sonlar).

Bu integralni hisoblashda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

Agar

a) n toq va m juft bo‘lsa, $z=\sin x$, $dz=\cos x\, dx$, almashtirish bajariladi;

b) m toq va n juft bo‘lsa, $z=\cos x$, $dz=\sin x\, dx$ almashtirish bajariladi;

d) m va n har ikkalasi juft musbat son bo‘lsa,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) \qquad (15)$$

formulalardan foydalanib, integral ostidagi funksiyani darajasini pasaytirib, a) va b) hollardan foydalanib almashtirish bajariladi;

d) m va n har ikkalasi toq musbat son bo‘lsa, u holda darajasi yuqorisini yangi o‘zgaruvchi bilan almashtirib oson integrallanadi.

e) m va n lar juft hamda aqalli bittasi manfiy bo‘lsa, u holda $tgx = z$, $x = arctgz$, $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$ almashtirish lozim.

f) $m = n$ bo‘lsa, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ formuladan foydalanib integrallanadi.

1-misol. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 xdx$ integralni hisoblang.

Yechish: $m=4,\ n=5.$ $m-$juft musbat son bo‘lganligi uchun $z=\sin x,\ dz=\cos x\ dx$ almashtirishni bajaramiz:

$$\int \sin^4 x\cdot \cos^4 x\cos xdx = \int \sin^4 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx = \begin{vmatrix} z=\sin x \\ dz=\cos xdx \end{vmatrix} =$$

$$= \int z^4\left(1-z^2\right)^2 dz = \int z^4dz - 2\int z^6dz + \int z^8dz = \frac{1}{5}z^5 - \frac{2}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

II. $$I = \int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (16)$$

integralni hisoblashning universal usuli mavjud bo‘lib, bu usul bilan integralni $tg\dfrac{x}{2} = z$ almashtirish yordamida z ning ratsional funksiyasiga keltirib integrallanadi, ya’ni

$$tg\frac{x}{2} = z \quad ; \quad x = 2arctgz \quad ; \qquad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$sin\ x = \frac{2tg\,\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\,\dfrac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2} \qquad cos\ x = \frac{1-tg^2\,\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\,\dfrac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad (17)$$

(17) ni (16) ga qo‘ysak,

$$I = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2} = \int R_1(z)dz$$

hosil bo‘ladi. R o‘z argumentlarning ratsional funksiyasi bo‘lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo‘ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltirildi.

2-misol. $\int \dfrac{dx}{\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish: Yuqoridagi (17) almashtirishni bajarib,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

hosil qilamiz.

III. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko‘rinishdagi ba’zi bir integrallarni universal almashtirish yordamida hisoblash ba’zi bir qiyinchilik tug‘dirishi mumkin. Shuning uchun ba’zi bir qulay usullarni ham qarab o‘tamiz.

1. Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\sin x$ ga nisbatan toq funksiya bo‘lsa, ya’ni $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ u holda $\cos x = z$ almashtirish yordamida $R(\sin x, \cos x)$ funksiyani z ning ratsional funksiyasiga keladi.

2. Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\cos x$ ga nisbatan toq funksiya bo‘lsa, ya’ni $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ u holda $\sin x = z$ almashtirish yordamida $R(\sin x, \cos x)$ funksiya z ning ratsional funksiyasiga keladi.

3. Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ funksiyaga nisbatan juft bo‘lsa, ya’ni $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ u holda $tgx = z$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

3-misol. $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$ integral hisoblansin.

Yechish:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \Rightarrow R(\sin x, -\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

2-holga asosan $z = \sin x$ almashtirishni bajaramiz:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^4 x}dx = \begin{vmatrix} z = \sin x \\ dz = \cos x dx \end{vmatrix} = \int \frac{1-z^2}{z^4}dz =$$

$$= \int \frac{dz}{z^4} - \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{z} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Natijani hosila yordamida tekshiring.

IV. $\int tg^m x dx$ va $\int ctg^m x dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash.

a) Bu ko‘rinishdagi integrallarni $tg^2x=\frac{1}{cos^2 x}-1$ (yoki $ctg^2x=\frac{1}{sin^2 x}-1$) almashtirish bilan tgx yoki $ctgx$ darajasini pasaytirib integrallanadi;

b) $z=tgx \Rightarrow\ x=arctg\, z\ \Rightarrow\ dx=\frac{1}{1+z^2}dz$

(yoki $z=ctgx\ \Rightarrow\ x=arcctg\, z\ \Rightarrow\ dx=-\frac{1}{1+z^2}dz$) almashtirish bajarib integrallanadi.

4-misol. $\int tg^7 xdx$ integral hisoblang.

Yechish: Ushbu integralni ikki usul bilan topamiz.

1-usul. Darajani pasaytirish usuli:

$$\int tg^7 xdx = \int tg^5 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int tg^5 xd\left(tgx\right)-\int tg^5 xdx=$$

$$=\frac{1}{6}tg^6 x-\int tg^3 x(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\int tg^3 xdx=$$

$$=\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\int tgx(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx==\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\frac{1}{2}tg^2 x-\int tgxdx=$$

$$=\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\frac{1}{2}tg^2 x+\ln\left|\cos x\right|+C$$

2-usul.

$$\int tg^7 xdx=\left|\begin{array}{l} tgx=z \\ x=arctg\, z \\ dx=\frac{1}{1+z^2}dz \end{array}\right|=\int\frac{z^7}{1+z^2}dz=\int\left(z^5-z^3+z-\frac{z}{1+z^2}\right)dz=$$

$$=\frac{z^6}{6}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left|1+z^2\right|+C=\frac{tg^6 x}{6}-\frac{tg^4 x}{4}+\frac{tg^2 x}{2}-\frac{1}{2}ln\left|1+tg^2 x\right|+C$$

V. $\int sin\ ax\cdot cos\, bx\ dx$, $\int cos\ ax\cdot cos\, bx\ dx$ va $\int sin\ ax\cdot sin\ bx\ dx$ ko‘rinishidagi integrallarni

$$sin\ ax\cdot cos\, bx=\frac{1}{2}\left(sin\ (ax+bx)+sin(ax-bx)\right) \qquad (18)$$

$$cos\ ax\cdot cos\, bx=\frac{1}{2}\left(cos\ (ax-bx)+cos(ax+bx)\right) \qquad (19)$$

$$sin\ ax\cdot sin\ bx=\frac{1}{2}\left(cos\ (ax-bx)-cos(ax+bx)\right) \qquad (20)$$

formulalar yordamida ko‘paytmani yig‘indi ko‘rinishiga keltirib integrallanadi.

5-misol. $\int sin\,5x\cdot sin\,3x\,dx$ integralni toping.

Yechish: (14) formula yordamidan foydalanib, berilgan integralni topamiz.

$$\int \sin 5x\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\left(5x-3x\right)-\cos\left(5x+3x\right)\right)dx=$$

$$\int\left(\cos 2x-\cos 8x\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x dx-\frac{1}{2}\int\cos 8x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Universal almashtirishda qaysi funksiyani qanday almashtiriladi?
2. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ ni qanday hisoblanadi?
3. $\int \sin^m x\cos^n x dx$ ni qanday hisoblanadi?
4. $\int tg^m x dx$ qanday hisoblanadi?
5. $\int\sqrt{1+\cos^3 x}dx$ integral elementar funksiya bo‘ladimi?

40-§. Irratsional funksiyalarni integrallash

1. Irratsional funksiyalarni integrallash

Ratsional funksiyalarni boshlang‘ich funksiyalari hamma vaqt elementar funksiya bo‘lishini va ratsional funksiyalarni integrallash usullarini oldingi mavzuda ko‘rib chiqdik. Lekin har qanday irratsional yoki transsendent elementar funksiyalarning boshlang‘ich funksiyalari elementar funksiya bo‘lavermaydi. Bu mavzuda faqat boshlang‘ich funksiyalari elementar funksiya bo‘ladigan ba’zi bir sodda irratsional va transsendent funksiyalarni integrallash bilan shug‘ullanamiz.

I. $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ ko‘rinishdagi integrallarni topish uchun o‘zgaruvchini almashtirib integrallash usulidan foydalanamiz, ya’ni

$$ax+b=z^n \Rightarrow x=\frac{1}{a}\left(z^n-b\right) \Rightarrow dx=\frac{n}{a}z^{n-1}dz \qquad (21)$$

Bu almashtirishni bajarib, berilgan integralni z ning ratsional funksiyasiga keltirib integrallaymiz.

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\int R\left(\frac{z^n-b}{a},z\right)\cdot\frac{n}{a}\cdot z^{n-1}\ dz\ .$$

1-misol. $\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$ integralni toping.

Yechish: $\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx=\left|\begin{matrix}z=\sqrt{x},\ \ x=z^2\\ dx=2zdz\end{matrix}\right|=\int\frac{1-z}{z^2-2z}2zdz=2\int\frac{1-z}{z-2}dz=$

$$=-2\int dz-2\int\frac{dz}{z-2}=-2z-2\,ln|z-2|+C=-2\sqrt{x}-2\,ln\left|\sqrt{x}-2\right|+C\,.$$

2-misol. $\int\frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx$ integralni toping.

Yechish: $\int\frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx=\int\frac{2x+\sqrt[4]{(2x-3)^2}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}dx=$

$$=\left|\begin{matrix}z=\sqrt[4]{2x-3}\\ x=\dfrac{z^4+3}{2},dx=2z^3dz\end{matrix}\right|=\int\frac{z^4+3+z^2}{3z+z^3}\cdot 2z^3dz=2\int\frac{z^6+z^4+3z^2}{3+z^2}dz=$$

$$=2\int\left(z^4-2z^2+9-\frac{27}{z^2+3}\right)dz=2\left(\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+9z-\frac{27}{\sqrt{3}}arctg\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt[4]{(2x-3)^5}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(2x-3)^3}+18\sqrt[4]{2x-3}-\frac{54}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt[4]{2x-3}}{\sqrt{3}}+C\,.$$

II. $\int R(x,x^{\alpha_1},x^{\alpha_2},x^{\alpha_3},....,x^{\alpha_k})\,dx$

Bunda R-o‘z argumentlarining ratsional funksiyasi,

$\alpha_1=\frac{n_1}{m_1};\ \alpha_2=\frac{n_2}{m_2};\ ....;\ \alpha_k=\frac{n_k}{m_k}$ ratsional sonlar bo‘lib, ularning umumiy maxraji m ga teng bo‘lsin. U holda

$$z=\sqrt[m]{x} \Rightarrow x=z^m \Rightarrow dx=m\cdot z^{m-1}dz \qquad (22)$$

almashtirishdan so‘ng, integral z ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

Xuddi shunday,

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\alpha_1},(ax+b)^{\alpha_2},....,(ax+b)^{\alpha_k}\right)dx \qquad (23)$$

va

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1},....,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_k}\right)dx \tag{24}$$

ko'rinishidagi integrallarni ham ratsional funksiyani integraliga keltirib integrallash mumkin. Bunda R-o'z argumentlarining ratsional funksiyasi,

$\alpha_1=\frac{n_1}{m_1};\ \alpha_2=\frac{n_2}{m_2};\ ....;\ \alpha_k=\frac{n_k}{m_k}$ ratsional sonlar bo'lib, ularning umumiy maxraji m bo'lsin. U holda:

(23) da

$$z=\sqrt[m]{ax+b}\Rightarrow z^m=ax+b\Rightarrow x=\frac{z^m-b}{a}\Rightarrow dx=\frac{m}{a}z^{m-1}dz \tag{25}$$

almashtirishdan so'ng integral z ga nisbatan ratsional funksiyani integraliga keltiriladi.

(24) da esa

$$z=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow z^m=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{z^m d-b}{a-cz^m}\Rightarrow dx=\frac{m(ad-bc)z^{m-1}dz}{\left(a-cz^m\right)^2} \tag{26}$$

almashtirishdan so'ng, integral z ga nisbatan ratsional funksiyani integraliga keltiriladi.

3-misol. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x+5}-\sqrt[3]{2x+5}}$ ni integralini toping.

Yechish: Bunda

$$m=6,\quad z^6=2x+5\Rightarrow x=\frac{1}{2}(z^6-5)\Rightarrow dx=3\cdot z^5dz,$$

$$\sqrt{2x+5}=z^3,\qquad \sqrt[3]{2x+5}=z^2.$$

Ushbu almashtirishlarni bajarib, integralni topamiz

$$I=\int\frac{3z^5dz}{z^3-z^2}=3\int(z^2+z+1+\frac{1}{z-1})dz+z^3+\frac{3}{2}z^2+3z+3\ln|z-1|+C=$$

$$=\sqrt{2x+5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+5}+3\sqrt[6]{2x+5}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+5-1}\right|+C.$$

2. Eyler almashtirishlari

$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ bunda R-o'z argumentining ratsional funksiyasi, ko'rinishdagi integralni hisoblaylik.

Bunday integralni hisoblash bilan XVIII asrda yashagan buyuk matematik Leonard Eyler shug‘ullangan. U o‘zining «Integral hisobi» kitobida (1768-1769-yilda yozilgan) quyidagicha hal qilgan:

Agar ildiz ostidagi kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari bo‘lmasa va $a<0$ bo‘lsa, u manfiy bo‘lib, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ildiz mavjud bo‘lmaydi hamda integrallash masalasi o‘z ma’nosini yo‘qotadi. Shunday qilib, quyidagi hollar qoladi.

1). Eylerning birinchi almashtirishi. $a>0$ bo‘lsin, u holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a} \qquad (\text{ yoki } z+x\sqrt{a}) \tag{27}$$

almashtirishni bajaramiz. (27) dan

$$ax^2+bx+c=z^2-2z\cdot x\sqrt{a}+a\,x^2,$$

$$x=\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}} \Rightarrow dx=\frac{2z^2\sqrt{a}+2bz+2c\sqrt{a}}{(b+2z\sqrt{a})^2}\,dz,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\frac{z^2-c}{b+2z\sqrt{a}}\sqrt{a}$$

kelib chiqadi. Topilganlarni berilgan integralga qo‘yib, z ga nisbatan ratsional funksiyaning integrallashga keltiramiz.

2) Eylerning ikkinchi almashtirishi. $c>0$ bo‘lsin, u holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=x\cdot z\pm\sqrt{c} \tag{28}$$

almashtirishni bajaramiz. U holda

$$ax^2+bx+c=x^2z^2+2z\cdot x\sqrt{c+c}$$

$$x=\frac{2z\sqrt{c-b}}{a-z^2} \Rightarrow \; dx=\frac{2z^2\sqrt{c}+2a\sqrt{c}-2zb}{(a-z^2)^2}\,dz,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z\cdot\frac{2z\sqrt{c}-b}{a-z^2}+\sqrt{c}$$

Topilgan ifodalarni integralga qo‘ysak, z ning ratsional funksiyasidan olingan integralga keladi.

3) Eylerning uchinchi almashtirishi. $a<0$, lekin ax^2+bx+c ikkita α va β $(\alpha<\beta)$ haqiqiy ildizlarga ega. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)z \tag{29}$$

almashtirish bajaramiz. Bundan

$$x=\frac{\alpha z^2-a\beta}{z^2-a} \;\Rightarrow\; dx=\frac{2a(\beta-\alpha)z}{\left(z^2-a\right)^2}dz$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\alpha-\beta)z^2}{t^2-a}$$

Topilganlarni berilgan integralga qo‘yib, yana z ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz.

Agarda $\beta=\alpha$ bo‘lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}$ funksiya mavjud bo‘lmaydi, chunki $a<0$.

(27), (28) va (29) almashtirishlarni Eyler almashtirishlari deb ataladi.

4-misol. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ integralni toping.

Yechish: (27) almashtirishga asosan

$$\sqrt{x^2+a^2}=z-x \;\Rightarrow\; x^2+a^2=z^2-2zx+x^2,$$

$$x=\frac{z^2-a^2}{2z} \;\Rightarrow\; dx=\frac{4z^2-2(z^2-a^2)}{4z^2}dz=\frac{z^2+a^2}{2z^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=z-\frac{z^2-a^2}{2z}=\frac{z^2+a^2}{2z}$$

bo‘ladi. Topilganlarni berilgan integralga qo‘ysak, u holda

$$ax^2+bx+c=x^2z^2+2z\cdot x\sqrt{c+c}$$

$$I=\int\frac{(z^2+a^2)\cdot 2\cdot z}{(z^2+a^2)\cdot 2\cdot z^2}dz=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln(x+\sqrt{x^2=a^2})+C.$$

3. Binomial differensialni integrallash. Chebishev teoremasi

Ushbu $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$ bunda $m,n,p-$ratsional sonlar, a va b haqiqiy sonlar, integralni hisoblash bilan shug‘ullanaylik.

$a+bx^n$ binom tufayli integral ostidagi ifoda binomial differensial deb ataladi.

Binomial differensiallarni integrallash masalasi bilan rus olimi P.A.Chebishev (1821-1894) shug‘ullangan.

Chebishev teoremasi. Quyidagi uch holdagina binomial differensialning integrali elementar funksiya bo‘ladi:

1-hol. $p-$ butun son bo‘lsa, $x = z^s$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, bunda s soni m va n sonlarni eng kichik umumiy maxraji.

2-hol. $p = \frac{r}{s}$-kasr son, $\frac{m+1}{n}$ –butun son bo‘lsa, $a + bx^m = z^s$ (s son r kasrni maxraji) almashtirish yordamida integral hisoblanadi.

3-hol. $p = \frac{r}{s}$ va $\frac{m+1}{n}$ –kasr sonlar, lekin $\frac{m+1}{n} + p$ –butun son, u holda $ax^{-n} + b = z^s$ ($s-$ kasrni maxraji) almashtirish yordamida integral hisoblanadi.

5-misol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x^2})}$ integral toping.

Yechish: $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -1$. Bunda $x = z^3$ almashtirish bajaramiz, ya’ni

$$z = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x^{-\frac{2}{3}} = z^{-2}, \quad (1 + x^{\frac{2}{3}})^{-1} = (1 + z^2)^{-1}, \; dx = 3z^2 dz$$

$$I = \int z^{-2}\left(1 + z^2\right)^{-1} \cdot 3z^2 dz = 3\int \frac{dz}{1 + z^2} = 3arctg\, z + C = 3arctg\sqrt[3]{x} + C$$

6-misol. $I = \int \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{4}} dx$ integralni toping.

Yechish: $m = 0,\; n = 2,\; p = \frac{1}{4},\; s = 4.$ Bunda $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ butun sonlar emas, shuning uchun, bu integral $\int \sqrt[4]{1 + x^2} dx$ elementar funksiya bo‘lmaydi.

4. Ba’zi bir sodda irratsional funksiyalarni integrali

Integral ostida $\sqrt{a^2 - x^2}$ va $\sqrt{a^2 + x^2}$ irratsional funksiya ishtirok etsa, u holda trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash maqsadga muvofiq bo‘ladi.

Agar integral ostida $\sqrt{a^2 - x^2}$ irratsional funksiya qatnashsa, u holda

$$x = a \cdot sin t \tag{30}$$

almashtirishdan, integral ostida $\sqrt{a^2+x^2}$ irratsional funksiya qatnashsa, u holda

$$x = a \cdot tg\, t \tag{31}$$

almashtirishdan foydalanish qulaydir.

7-misol. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}}$ integralni toping.

Yechish: $x = a\,sint$ almashtirishni bajarsak,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \cdot \sin t)^2} = a \cdot \cos t, \quad dx = a \cdot \cos t\, dt$$

bo‘ladi. Topilganlarni berilgan integralga qo‘ysak, u holda

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}} = \left| \begin{matrix} x = a\,\text{sint} \\ dx = a\cos t \end{matrix} \right| = \int \frac{a\cos t\, dt}{a^3 \cos^3 t} = \int \frac{dt}{a^2 \cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2} tg\, t + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Irratsional funksiyalarni qanday almashtirish yordamida integrallanadi?
2. Eyler almashtirishlarini yozing.
3. Chebishev teoremasi yordamida qanday integrallar hisoblanadi?
4. Elementar funksiya bilan boshlang‘ich funksiyasi ifodalanmaydigan integrallarga misollar toping?

VII BOB. ANIQ INTEGRALLAR

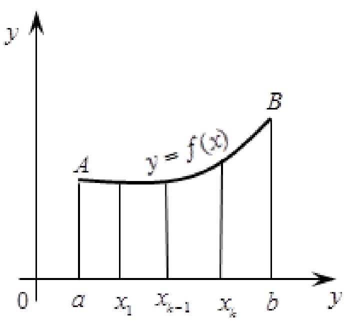
41-§. Aniq integral tushanchasiga olib keladigan masalalar. Aniq integralning ta'rifi. Aniq integralning xossalari

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi

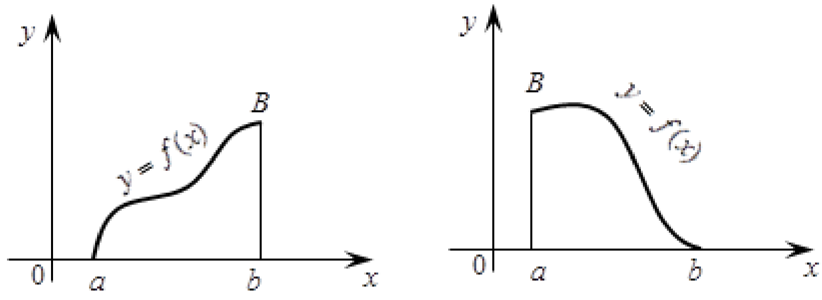
$[a;b]$ kesmada uzluksiz va $f(x)\geq 0$ bo'lgan funksiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o'qi, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura $aABb$ egri chiziqli trapetsiya deb ataladi (90-shakl).

Xususiy holda A bilan a nuqta yoki B bilan b nuqta ustma-ust tushishi ham mumkin (91-shakl).



90-shakl.



91-shakl.

1) Shu trapetsiyaning yuzini topish talab qilinsin. Buning uchun $[a;b]$ ni $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. $aABb$ egri chiziqli trapetsiya n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratiladi. Endi har bir $[x_{k-1},x_k]$ segmentchadan ixtiyoriy ξ_k nuqta tanlab olamiz. Har bir egri chiziqli trapetsiyada asosi $[x_{k-1},x_k]$, balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak chizamiz. Bu to'g'ri to'rtburchaklarning yuzalari

$$f\left(\xi_k\right)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)\cdot\Delta x_k, \qquad \left(k = 1,2,...n\right)$$

bo‘ladi. Bunda $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ deb belgilaymiz. $n-$ta to‘g‘ri to‘rtburchaklarni yuzlarining yig‘indisi, quyidagiga teng:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

$[x_{k-1}, x_k]$, $\left(k = \overline{1,\mathrm{n}}\right)$ segmentchalarning uzunliklarining eng kattasini λ orqali (ya’ni $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$) belgilab, $\lambda \to 0$ da S_n ifoda egri chiziqli trapetsiyaning yuziga tobora yaqinlasha borishini aniqlaymiz.

Shunday qilib,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\max\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ni egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb olamiz.

2) Kuch ta’sirida bajariladigan ishni hisoblash masalasi. Moddiy nuqtaga $F = f(x)$ kuch ta’sir qilsin. U F kuch ta’sirida a nuqtadan b nuqtagacha harakatlanganda bajargan ishni topish talab qilinsin. $[a;b]$ ni n ta bo‘lakka bo‘lamiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ bo‘lakda F kuchni deyarli o‘zgarmas deb qaraymiz. Bu ish taqriban $f\left(\xi_k\right)\Delta x_k$ ga teng bo‘ladi, bunda $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. U holda $[a;b]$ da $f(x)$ kuch bajargan ish taqriban

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k$$

ga teng bo‘ladi. Endi $[x_{k-1}, x_k]$ eng kattasi $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k \to 0$ bo‘lsa, u holda

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, bir-biriga o‘xshash geometrik, mexanik va h.k. masalalar yig‘indini limitini izlashga keltiramiz.

2. Aniq integralni ta’rifi

$[a;b]$ kesmada $y = f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin.

1. $[a;b]$ kesmani $x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ $\left(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b\right)$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz, ya’ni

$$[x_0;x_1],\ [x_1;x_2],\ [x_2;x_3],...,[x_{n-1};x_n]$$
bu bo‘lakchalarni qismiy intervallar deb ataymiz.

2. Qismiy intervallar uzunliklarini quyidagicha belgilaymiz:
$$\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \cdots,\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\cdots,\ \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

3. Har bir qismiy intervalning ichida bittadan ixtiyoriy nuqta tanlab olamiz
$$\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots,\xi_n$$

4. Tanlangan nuqtada berilgan funksiyani qiymatini hisoblaymiz
$$f(\xi_1),\ f(\xi_2),\cdots\cdots\ f(\xi_i),\cdots\cdots f(\xi_n)$$

5. Funksiyaning hisoblangan qiymatlarini mos ravishda qismiy intervallarning uzunligiga ko‘paytirib, so‘ngra qo‘shib, S_n yig‘indisini hosil qilamiz:
$$S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_i)\Delta x_i + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \quad (1)$$

Ushbu yig‘indini $y = f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi integral yig‘indisi deb ataladi. $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k|$ bilan belgilaymiz. Ravshanki, λ ning kattaligi $[a;b]$ ni bo‘luvchi sonlar to‘plamiga bog‘liq. Bu to‘plamni T bilan belgilaymiz. λ ning kattaligi T ga bog‘liq, ya’ni $\lambda = \lambda(T)$.

Shunday qilib, $[a;b]$ ning T bo‘linishlari va $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ nuqtalarni tanlash usullari cheksiz ko‘p bo‘lganligi sababli $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi (1) integral yig‘indilari to‘plami cheksiz to‘plamdir.

2-ta’rif. Agar $\lambda(T)$ nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi (1) integral yig‘indisi chekli limitga ega bo‘lib, bu limit $[a;b]$ ning T bo‘linishlariga va ξ_k nuqtalarni tanlash usuliga bog‘liq bo‘lmasa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi aniq integrali deyiladi va uni $\int\limits_a^b f(x)dx$ orqali belgilanadi:
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

$f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $[a;b]$ kesma integral oralig‘i, a – quyi, b – yuqori chegara deyiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, aniq integral har doim ham mavjud bo‘lavermaydi.

1-misol. $\int_a^b f(x)dx$ integralni $f(x)\equiv 1$ bo‘ganda ta’rif bo‘yicha hisoblang.

Yechish: Qulaylik uchun $[a;b]$ kesmani ixtiyoriy usul bilan 6 bo‘lakka ajratamiz, u holda (1) integral yig‘indi, quyidagicha bo‘ladi:

$$\sum_{k=1}^{6} f(x)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{6} 1\cdot\Delta x_k = \Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+\Delta x_4+\Delta x_5+\Delta x_6 =$$

$$=(x_1-a)+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+(x_5-x_4)+(b-x_5)=b-a.$$

(2) formulaga asosan:

$$\int_a^b 1\cdot dx = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{6} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to\infty}(b-a)=b-a \quad \Rightarrow \int_a^b 1\cdot dx = b-a.$$

3. Aniq integralning xossalari

1°. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2°. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

3°. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $c\cdot f(x)$, $(c-const)$ ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx$$

kelib chiqadi.

4°. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $f_1(x)\pm f_2(x)$ ham $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Bu ham oldingi xossa kabi isbotlanadi.

5°. Agar $[a;b]$ kesma $[a;\text{c}]$ va $[\text{c};b]$ kesmalardan iborat bo‘lib, $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^c f(x)\,dx$ va $\int_c^b f(x)\,dx$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

6°. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo‘lib, $\forall x \in [a;b]$ da $f(x) \geq 0$ o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi.

7°. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar integrallanuvchi bo‘lib, $f(x) \leq \varphi(x),\quad a \leq x \leq b$ o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

bo‘ladi.

1-teorema. (O‘rta qiymat haqida teorema) Agar $[a;b]$ da $f(x)$ funksiya uzluksiz, u holda $(a;b)$ oraliqda kamida bitta c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad c \in (a;b) \tag{3}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $[a;b]$ da $f(x)$ funksiya uzluksiz ekanligidan, u bu kesmada o‘zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya’ni

$$m \leq f(x) \leq M$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Tengsizlikni har uch tomonini $[a;b]$ kesmada integrallab, 3-xossadan va 1-misolning natijasidan foydalansak,

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \quad \Rightarrow m\int_a^b 1\cdot dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b 1\cdot dx \Rightarrow$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Tengsizlikni har uch tomonini $b-a$ ga bo‘lib,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Har doim m va M orasida yotuvchi $m \le \mu \le M$ son topiladiki,

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

2-teorema. (O‘zgaruvchi yuqori chegara bo‘yicha hosila) $f(x)$ funksiyani o‘zgaruvchi yuqori chegara bo‘yicha hosilasi, integrallash o‘zgaruvchisi yuqori chegara bilan almashtirilgan integral osti funksiyaga teng:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x). \tag{4}$$

Isbot. Quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \; a \le x \le b$$

va bu funksiyani tekshiraylik.

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

O‘rta qiymat haqidagi teoremaga asosan

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x, \quad \xi \in (x, x+\Delta x) \;\Rightarrow \Delta\Phi(x) = f(\xi)\Delta x.$$

Bu tenglikdan $\dfrac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi)$ kelib chiqadi.

$\Delta x \to 0$ da $\xi \to x$ ni va $f(x)$ ning uzluksizligini nazarda tutsak,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x).$$

Shunday qilib, $\Phi'(x) = f(x)$ hosil bo‘ladi. Bu tenglik, birinchidan, $[a;b]$ da $\Phi(x)$ ni hosilasi mavjudligini, ikkinchidan, $[a;b]$

da uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $\Phi(x)$ mavjudligini ko‘rsatadi.

Demak, aniq integralning o‘zgaruvchi yuqori chegara bo‘yicha hosilasi integral ostidagi funksiyaning yuqori chegaradagi qiymatiga teng ekan.

Shunga o‘xshash,

$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)_x' = \left(-\int_b^x f(t)dt\right)_x' = -\left(\int_b^x f(t)dt\right)_x' = -f(x). \qquad (5)$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Aniq integralga olib keladigan masalalarni ayting.
2. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
3. Aniq integral qanday xossalarga ega bo‘ladi?

42-§. Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integralni o‘zgaruvchini almashtirib va bo‘laklab integrallash

1. Nyuton-Leybnis formulasi

3-teorema. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz va integrallanuvchi funksiya bo‘lsin, uning shu kesmadagi boshlang‘ich funksiyasi $F(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad (6)$$

formula o‘rinli.

Isbot. $f(x)$ $[a;b]$ kesmada berilgan va integrallanuvchi bo‘lsin, u holda $f(x)$ funksiya $[a;x]$, $(x\in[a;b])$ da ham integrallanuvchi bo‘ladi hamda $F(x)$ uning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lgani uchun, quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + \mathrm{C}. \qquad (7)$$

(7) tenglikda $x = a$ deb olsak,

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow F(a) = -C.$$

$x = b$ deb olsak,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Demak,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(6) formula integral hisobning asosiy formulasi bo‘lib, ingliz matematigi I. Nyuton (1643-1727) va nemis matematigi G.V.Leybnis (1646-1716) sharafiga Nyuton-Leybnis formulasi deb ataladi. I.Nyuton mexanika masalalari uchun, G. Leybnis esa geometriya masalalari uchun differensial va integral hisobni kashf qilganlar.

1-misol. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ aniq integralni Nyuton-Leybnis formulasi yordamida hisoblang.

Yechish: $$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

2-misol. $\int\limits_1^2 e^x dx$ aniq integralni Nyuton-Leybnis formulasi yordamida hisoblang.

Yechish: $$\int\limits_1^2 e^x dx = e^x \Bigg|_1^2 = e^2 - e\ .$$

2. Aniq integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirish usuli

Aniqmas integrallarni hisoblashda yangi o‘zgaruvchini kiritish usuli soddaroq integralga kelib,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

munosabatdan foydalangan edik. Shunga o‘xshash masalani aniq integral uchun ham ko‘rib chiqamiz.

4-teorema. Agar $\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ bo‘lib, $f(x)$ funksiya $\varphi(t)$ funksiyaning o‘zgarish sohasida uzluksiz bo‘lsa, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{8}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin: $F'(x)=f(x)$. U holda (6) Nyuton-Leybnis formulasi o‘rinli bo‘lar edi.

$[\alpha,\beta]$ da $F(\varphi(t))$ funksiya $y=F'(x)$ va $x=\varphi(t)$ munosabat bilan aniqlangan bo‘lib, murakkab funksiyaning hosilasi qoidasiga asosan

$$\left[F(\varphi(t))\right]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

bo‘ladi. Demak, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ uchun $F(\varphi(t))$ boshlang‘ich funksiya bo‘ladi, u holda

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) \tag{9}$$

bo‘ladi. Shartga ko‘ra, $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$ bo‘lgani uchun

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(b)-F(a). \tag{10}$$

(8) va (10) ni solishtirsak,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

kelib chiqadi.

Eslatma. Ko‘p hollarda $x=\varphi(t)$ almashtirish o‘rniga $t=\varphi(x)$ ko‘rinishdagi almashtirishdan foydalaniladi. Bu holda $t=\varphi(x)$ ga teskari funksiya mavjud bo‘lishi va bu teskari funksiya teorema talablariga javob berishi kerak.

3-misol. $\int_0^{ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$ aniq integral hisoblansin.

Yechish: Yuqorida eslatmaga asosan, $\sqrt{e^x-1}=t$ deb belgilaymiz:

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\left|\begin{array}{ll} t=\sqrt{e^x-1}, & x=\ln\left|t^2+1\right| \\ e^x=t^2+1, & dx=\dfrac{2t\,dt}{1+t^2} \\ x=0, & t_1=0, \\ x=\ln 2, & t_2=1 \end{array}\right|=$$

$$=2\cdot\int_0^1\frac{t^2dt}{1+t^2}=2\cdot\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=2\left[t-arctg\,t\right]\Big|_0^1=\frac{4-\pi}{2}.$$

4-misol. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Irratsional funksiyalarni integrallash qoidasidan foydalanib,

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ x=0, t_1=0 \\ x=1, t_2=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

3. Bo‘laklab integrallash usuli

Ma’lumki, aniqmas integrallarni hisoblashda bo‘laklab integrallash usuli asosiy usullardan biri edi. Nyuton-Leybnis formulasiga asosan aniq integral va aniqmas integral bir-biri bilan muayyan bog‘lanishga ega. Shu sababli, bu usulni aniq integralni hisoblashda ham tatbiq etish mumkin. Buning uchun $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funksiyalarni $[a;b]$ da uzluksiz hosilaga ega deb olamiz. U holda $[a;b]$ da $(u\vartheta)'=u'\vartheta+u\vartheta'$ bo‘lib, $u\cdot\vartheta$ funksiya $u'\vartheta+u\vartheta'$ uzluksiz funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi va Nyuton-Leybnis formulasiga asosan

$$\int_a^b[u'\vartheta+u\vartheta']dx=[u\vartheta]\Big|_a^b \tag{11}$$

bo‘ladi.

Bundan

$$\int_a^b u'\vartheta dx+\int_a^b u\vartheta' dx=u\cdot\vartheta\Big|_a^b$$

yoki

$$\int_a^b u\vartheta' dx=u\cdot\vartheta\Big|_a^b-\int_a^b u'\vartheta dx.$$

So‘ngra, $u'dx=du$ va $\vartheta' dx=d\vartheta$ ni e’tiborga olsak,

$$\int_a^b u\,d\vartheta=u\cdot\vartheta\Big|_a^b-\int_a^b \vartheta\,du \tag{12}$$

formulasini hosil qilamiz. Bu formula aniq integrallarni bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

5-misol. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasiga asosan:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ d\vartheta=e^{-x}dx, & \vartheta=-e^{-x}\end{vmatrix}=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^1-e^{-x}\Big|_0^1=-e^{-1}-e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}.$$

6-misol. $\int_0^1 arctgxdx$ ni hisoblang.

Yechish: Bu aniq integralni ham bo‘laklab integrallash formulasiga asosan hisoblash mumkin:

$$\int_0^1 arctg\,x\,dx=\begin{vmatrix} u=arctg\,x, & du=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ d\vartheta=dx, & \vartheta=x\end{vmatrix}=x\cdot arctg\,x\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=1\cdot arctg1-0-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln|1+1|+\frac{1}{2}\ln|1+0|=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

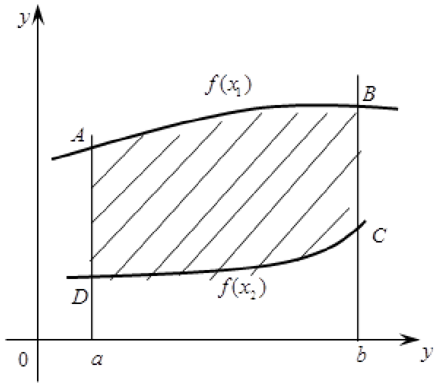
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Nyuton-Leybnis formulasi qanday hosil bo‘ladi?
2. O‘zgaruvchini almashtirib integrallash formulasini yozing.
3. Bo‘laklab integrallash formulasini yozing.

43-§. Aniq integral yordamida yuzalarni hisoblash

1. Figura yuzlarini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash

Bizga ma'lumki, $[a;b]$ kesmada funksiya $f(x)\geq 0$ bo'lsa, $y=f(x)$ egri chiziq, Ox o'qi va $x=a$ hamda $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi



92-shakl.

$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{13}$$

ga teng edi. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx\leq 0$ bo'ladi, hosil bo'lgan yuza esa $S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ ga teng bo'ladi. Umumiy holda, tegishli yuza

$$S=\int_a^b |f(x)|dx \tag{14}$$

ko'rinishda hisoblanib, integral ostidagi funksiya musbat bo'lganda funksiyaning o'zi, manfiy bo'lganda absolyut miqdori olinib, $[a;b]$ kesma esa tegishli oraliqlarga ajratilib, umumiy yuza esa tegishli yuzalarning algebraik yig'indisidan iborat bo'ladi.

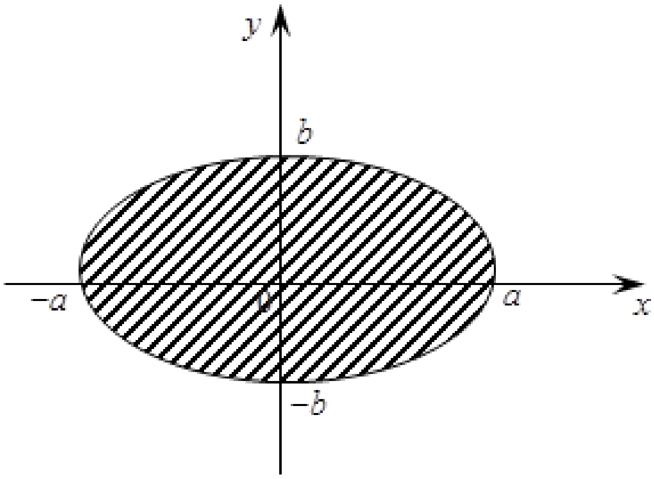
D soha yuqoridan $y_1=f_1(x)$ egri chiziq, quyidan $y_2=f_2(x)$ egri chiziq hamda yon tomonlaridan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin (92-shakl). Bunday shaklning yuzi quyidagi formula yordamida topiladi:

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx. \tag{15}$$

1-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish: Izlanayotgan yuza $S=4S_1$ ga teng. Shakldan (93-shakl).

$$S=4\int_0^a y\ dx\ ,$$



93-shakl.

bunda $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

Agar $x=a\sin t,\ dx=a\cos t dt$ almashtirish bajarsak, $x_1=0\Rightarrow t_1=0$ va $x_2=a\Rightarrow t_2=\frac{\pi}{2}$ da integral quyidagi ko'rinishga keladi:

$$S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{c} x=a\sin t\\ dx=a\cos t dt\\ t_1=0,\ t_2=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=2ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2ab\cdot\frac{\pi}{2}=ab\pi.$$

Demak, ellips bilan chegaralangan figuraning yuzi $S = \pi\, ab$ (kv. birlik) ga teng. Xususan, $a = b$ bo‘lsa, doiraning yuzi hosil bo‘lib, $S = \pi\, a^2$ ga teng bo‘ladi.

2-misol. $y=\cos x$, $y=0$, chiziqlar bilan chegaralangan yuzani $[0;2\pi]$ oraliqda hisoblang.

Yechish: $y = \cos x$ funksiyasi $\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ oraliqda musbat va $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ oraliqda esa manfiy ekanini e’tiborga olib (14) dan va (15) formulalar foydalanamiz:

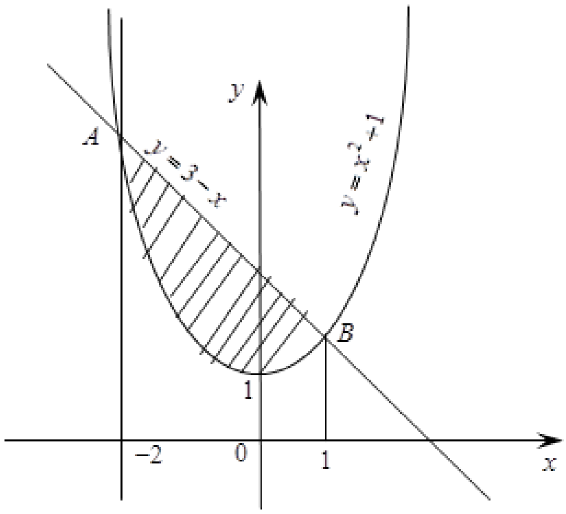
$$S = \int_0^{2\pi} |\cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx\right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right| + \sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \left|\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right| + \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1 - 0 + |-1-1| + 0 - (-1) = 4.$$

3-misol. $y = x^2 + 1$ va $y = 3 - x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish: Figurani yasash uchun $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$ sistemani yechib chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.

Bundan $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1,$ ildizlarga ega bo‘lamiz.



94-shakl.

Mos ravishda $y_1=5, \quad y_2=2$ nuqtalarni topiladi, (94-shakl).

$$S=\int_{-2}^{1}(y_2-y_1)dx=\int_{-2}^{1}\left(3-x-\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=$$

$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=2(1+2)-\frac{1}{2}(1-4)-\frac{1}{3}(1+8)=\frac{9}{2}.$$

Egri chiziq tenglamasi parametrik shaklda berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

U holda $\alpha\le t\le\beta$ va $\varphi(\alpha)=a, \ \varphi\ (\beta)=\mathrm{b}$ egri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblaymiz.

$$\left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \ \Rightarrow dx=\varphi'(t)dt, & y=\psi(t) \\ \varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=\mathrm{b} & \end{matrix}\right|$$

ekanini e’tiborga olsak, (13) formuladan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$S=\int_{a}^{b}y\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt, \text{ yoki}$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi\ (t)\varphi'(t)dt \tag{16}$$

(16) formula parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziqli trapetsiyani yuzini hisoblash formulasidir.

4-misol. Ox o‘q va $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ sikloidaning bir arkasi bilan chegaralangan yuzani hisoblang.

Yechish: (16) formulaga asosan, bir arkasida $0\le t\le 2\pi$ ekanidan

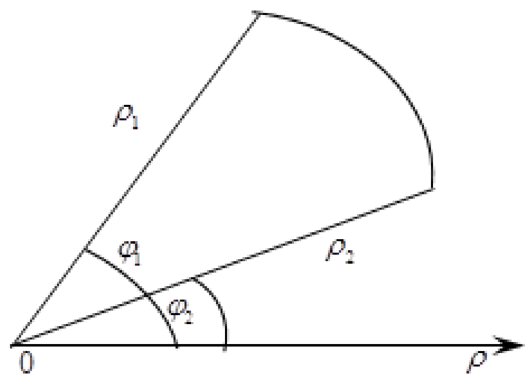
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi\ (t)\varphi'(t)dt=\int_{0}^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos\ t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\int_{0}^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=a^2\frac{3}{2}2\pi=3a^2\pi.$$

2. Figuralar yuzini qutb koordinatalar sistemasida hisoblash

AB egri chiziq qutb koordinatalarida $x=\rho\sin\varphi\,, y=\rho\cos\varphi,\ \rho=\rho(\varphi)$ formula bilan berilgan bo‘lsin, bunda $\rho(\varphi)$ funksiya $[\varphi_1;\varphi_2]$ kesmada uzluksiz. φ_1 va φ_2 burchaklar orasida hosil bo‘lgan egri chiziqli sektorning yuzi



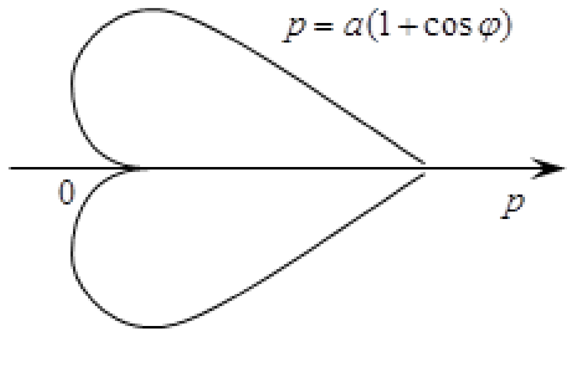
95-shakl.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi \tag{17}$$

formula bilan topiladi.

5-misol. $\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0$ kardioida bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish: Qutb koordinatalarida berilgan egri chiziqli sektorning yuzini hisoblash formulasiga ko‘ra topamiz.



96-shakl.

Bu yerda $\varphi=0$ va $\varphi=\pi$ chegaralarga ega bo‘lamiz (96-shakl).

$$S=\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi = = a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$=a^2(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi\ a^2$$

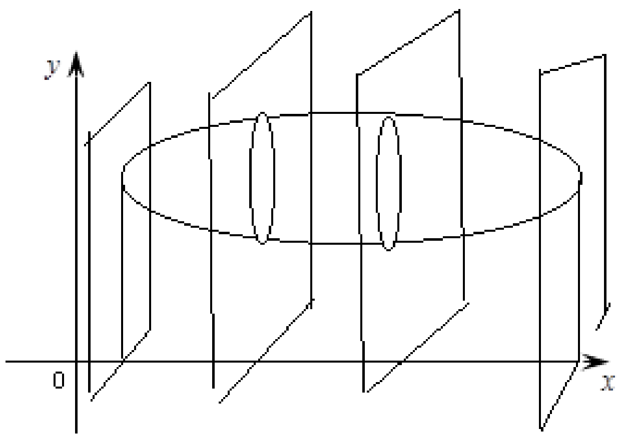
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Dekart koordinatalar sistemasida figura yuzini qaysi formula orqali hisoblanadi?
2. Qutb koordinatalar sistemasida figura yuzini hisoblash formulasini yozing.

44-§. Aniq integralning geometriya masalalarini yechishga tatbiqi

1. Jismning hajmini ko‘ndalang kesim yuzi bo‘yicha hisoblash

Jismni hajmini hisoblash uchun, uni Ox o‘qqa perpendikular tekislik bilan kesimning yuzi ma’lum bo‘lsin. Bu yuza, ya’ni x ning funksiyasi bo‘lishi ravshan hamda u uzluksiz funksiya bo‘lsin.



97-shakl.

Berilgan jism hajmini hisoblash uchun $[a,b]$ kesmani $a=x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy uzunlikdagi n ta bo‘lakka bo‘lamiz va bu nuqtalar orqali Ox o‘qqa perpendikular tekisliklar o‘tkazamiz. Bu tekisliklar jismni n ta qatlamga ajratadi, ularning hajmlarini $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_i, \cdots, \Delta V_n$ bilan belgilaymiz. U holda $V = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i$ bo‘lishi ravshan, x_{i-1} va x_i abssissali kesimlar hosil qilgan qatlamlardan birini qarab chiqamiz.

Uning ΔV_i hajmli balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, asosi biror ξ_i abssissali jismning kesimi bilan mos tushadigan to‘g‘ri silindrning hajmiga taqriban teng, bundan $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ va shuning uchun ham $S(\xi_i)$ yuzaga ega bo‘ladi.

Bunday silindrning hajmi $S(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng. Shunday qilib, $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$. Shuning uchun butun jismning hajmi uchun quyidagi taqribiy tenglik hosil bo‘ladi:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$$

Bundan esa $\max \Delta x_i = \lambda \to 0$ bo‘lganda uning limiti $\int\limits_a^b S(x)dx$ aniq integral bo‘ladi, jismning hajmi esa son jihatidan shu aniq integralga teng bo‘ladi, ya’ni

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$$

yoki

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{18}$$

1-misol. Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jismning hajmini hisoblang.

Yechish: Ellipsoidni Ox o‘qiga perpendikular va Oyz koordinatalar tekisligidan x birlik masofada yotuvchi tekislik bilan kesimida

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

yarim o‘qli

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

ellips hosil bo‘ladi. Lekin bu ellipsning yuzi $S=bc\pi$ ga teng bo‘lishini avvalgi mavzuda ko‘rib o‘tgan edik. Demak,

$$S(x)=bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

ga ega bo‘lamiz. Buni e’tiborga olsak, ellipsoidning hajmi quyidagiga teng bo‘ladi:

$$V=bc\pi\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=bc\pi\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=bc\pi\left(a-\frac{a}{3}+a-\frac{a}{3}\right)=$$

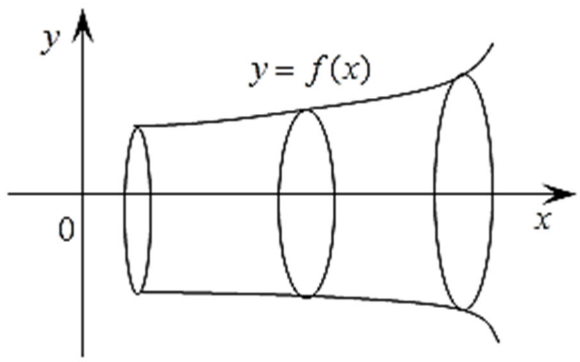
$$=bc\pi a\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}abc\pi.$$

Shunday qilib, yarim o‘qlari a, b, c bo‘lgan ellipsoidning hajmi $V=\frac{4}{3}abc\pi$ ga teng bo‘ladi. Xususan, $a=b=c=R$ bo‘lsa, sharning hajmini hosil qilamiz:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. Aylanma jismlar hajmini hisoblash

Agar qaralayotgan jism $y=f(x)$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning Ox o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lsa, Ox o‘qqa perpendikular x abssissali kesim



98-shakl.

doiradan iborat bo‘lib, uning radiusi $y=f(x)$ ordinataga mos keladi.

Bu holda $S(x)=\pi y^2$ yoki $S(x)=\pi[f(x)]^2$ va Ox o‘qi atrofida aylanayotgan jismning hajmi formulasini hosil qilamiz.

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

yoki

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx. \qquad (19)$$

Oy o‘q atrofida aylanayotgan jismning hajmi formulasi ham yuqoridagi kabi hosil qilinadi:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy$$

yoki

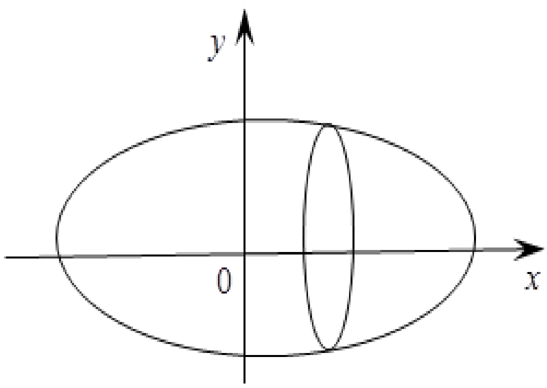
$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]dy. \qquad (20)$$

bunda $x=\varphi(y)$ aylanish jismning hosil qiluvchi chiziqning tenglamasi $c\le y\le d$.

2-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni Ox o‘qi va Oy o‘qi atrofida aylantirish bilan hosil qilingan jismlarning hajmlarini hisoblang.

Yechish: Ellipsning tenglamasidan

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\text{va } x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right).$$



99-shakl.

Ellipsni Ox o‘qi atrofida aylantirish bilan hosil qilingan jismning hajmi:

$$V = 2V_1 = 2\pi\int_0^b y^2dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^b\left(a^2 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

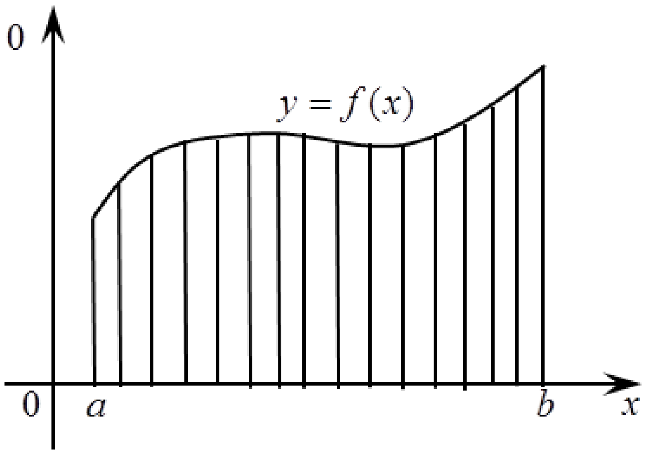
Ellipsni Oy o‘qi atrofida aylantirish bilan hosil qilingan jismning hajmini shunga o‘xshash hisoblash mumkin:

$$V = 2V_1 = 2\pi\int_0^b x^2dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b\left(b^2 - y^2\right)dy =$$

$$= 2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^2b.$$

3. Yoy uzunligini hisoblash

AB yassi egri chiziq berilgan bo‘lsin. Uni $A = N_0,\ N_1,\ \ldots,\ N_{i-1},\ N_i,\ \ldots,\ N_n = B$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo‘lakka bo‘lamiz. Qo‘shni bo‘linish nuqtalarni kesmalar bilan tutashtirib AB yoyga ichki chizilgan siniq chiziqni hosil qilamiz.



100-shakl.

Bu siniq chiziq $AN_1,\ N_1N_2,\ N_{i-1}N_i, \ldots, N_{n-1}B$ bo‘g‘inlardan iborat bo‘lib, biz bu bo‘g‘inlarni $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_i, \ldots, \Delta l_n$ bilan belgilaymiz

(100-shakl). U holda siniq chiziqning perimetri quyidagiga teng bo‘ladi:

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i$$

Egri chiziq bo‘g‘inlari soni n ning ortishi va bu bo‘g‘inlar uzunligi Δl_i kamayishi bilan bu perimetrning limiti AB egri chiziqning uzunligiga yaqinlashishi ravshan. $N_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$ va $N_i(x_i,y_i)$ nuqtalar orasidagi masofa $\Delta l_i=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$ tengligi va $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i,\ \ y_i-y_{i-1}=\Delta y_i$ ekanidan,

$$\Delta l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i.$$

Lagranj teoremasiga asosan, $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(\xi)$, bu yerda $\xi\in[x_{i-1},x_i]$

Bundan, siniq chiziq parametri quyidagicha bo‘ladi:

$$l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\Delta x_i. \tag{21}$$

(21) ifodadan $\max\Delta x_i\to 0$ olingan limit

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx \tag{22}$$

aniq integralga teng bo‘ladi. (22) formulaga AB egri chiziqning uzunligini hisoblash formulasi deyiladi.

3-misol. $y=chx$ funksiya grafigining $[0;1]$ oraliqdagi yoy uzunligini hisoblang.

Yechish: $y'=ch'x=shx\Rightarrow 1+(y')^2=1+sh^2x=ch^2x$ bundan (22) formulaga asosan

$$l=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+sh^2x}dx=\int_0^1\sqrt{ch^2x}dx=$$

$$=\int_0^1 chxdx=shx\Big|_0^1=sh1-sh0=sh1\approx 1{,}17.$$

Agar AB chiziq $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ parametrik tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning uzunligini topish talab qilinsin.

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyasini hosilasini topish qoidasiga ko‘ra $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ va $dx = \varphi'(t)dt$ bo‘ladi. Topilganlarni (22) formulaga qo‘ysak,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'}{\varphi'}\right)^2}\,\varphi' dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt.$$

ko‘rinishini oladi, bu yerda $a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$.

Shunday qilib, parametrik formula bilan berilgan egri chiziq yoy uzunligini hisoblash formulasi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt. \tag{23}$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

4-misol. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ sikloidaning bir arki uzunligi hisoblansin.

Yechish: $x'_t = a(1 - \cos t), \ y'_t = a \sin t$, $\alpha = 0$ va $\beta = 2\pi$ larni (23) formulaga qo‘yib, yoy uzunligini topamiz:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

Egri chiziq $\rho = \rho(\varphi)$ formula bilan qutb koordinatalar sistemasida berilgan bo‘lsin. Bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi \tag{24}$$

formula bilan hisoblanadi.

5-misol. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ kardiodaning uzunligini hisoblang.

Yechish: Qutb koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziqni yoyini uzunligi quyidagiga teng:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\left[a(1+\cos\varphi)\right]^2+\left[a(1+\cos\varphi)'\right]^2}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=4a\int_{0}^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_{0}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

4. Aylanish jismlar sirtini yuzini hisoblash

$y=f(x),\ a\le x\le b$ egri chiziq AB yoyining Ox o‘qi atrofida aylanish jismlar sirtini yuzi

$$S=2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=2\pi\int_{a}^{b}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (25)$$

formula bilan hisoblanadi.

6-misol. $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ sinusoida yoyining aylanishidan hosil bo‘lgan jism sirtining yuzini hisoblang.

Yechish: $y'=(\sin x)'=\cos x$ (25) formuladan

$$S=2\pi\int_{0}^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\begin{vmatrix}\cos x=t,\ dt=-\sin t\,dt\\ t_1=1,\ t_2=-1\end{vmatrix}=$$

$$=-2\pi\int_{1}^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{2\pi}{2}\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\pi\left[2\sqrt{2}+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right]\approx 14{,}38. \text{ (kv. birlik)}$$

Agar AB egri chiziq $x=\varphi(y),\ c\le y\le d$ formula bilan berilgan bo‘lsa, shu egri chiziq yoyini Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism sirtining yuzi:

$$S=2\pi\int_{a}^{b}\varphi(y)\sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}\,dy \qquad (26)$$

yoki

$$S=2\pi\int_{a}^{b}x\sqrt{1+[x']^2}\,dy \qquad (27)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar AB egri chiziq $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ parametrik tenglama bilan berilgan bo‘lib, $\psi(t)\geq 0$ va $\varphi(t)$ a dan b gacha o‘zgarsa, u holda t parametr α dan β gacha o‘zgaradi. Shu egri chiziq yoyining Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism sirtini yuzini topish talab etilsin.

Parametrik tenglama bilan berilgan funksiyani hosilasini topish qoidasiga asosan $y'_x=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ ва $dx=\varphi'(t)dt$ bo‘ladi. O‘zgaruvchini almashtirib integrallash usulidan foydalanib, (25) formula

$$S=\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt=$$

$$=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}dt=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left[x'_t(t)\right]^2+\left[y'_t(t)\right]^2}dt.$$

ko‘rinishni oladi.

Shunday qilib, parametrik formula bilan berilgan egri chiziq yoyining Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism sirtini yuzini hisoblash formulasi

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}dt$$

yoki

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left[x'_t(t)\right]^2+\left[y'_t(t)\right]^2}dt \tag{28}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Jismlar hajmini hisoblash formulasini yozing.
2. Aylanma jismlar hajmini hisoblash formulasini yozing.
3. Yoy uzunligini hisoblash formulasini yozing.
4. Aylanish jismlar sirtini yuzini hisoblash formulasini yozing.

45-§. Aniq integralning mexanika va fizika masalalarini yechishga tatbiqi

1. Egri chiziq va tekis shaklning statik momenti

Oxy tekisligida massalari

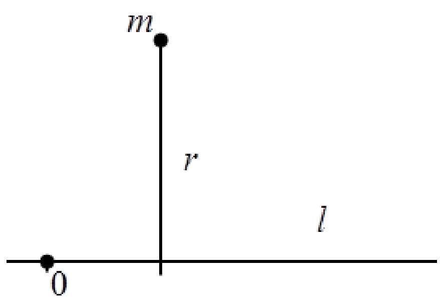
$$m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n$$

bo‘lgan moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

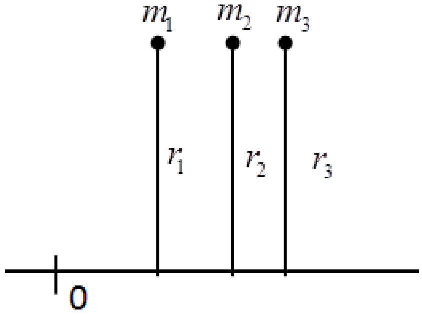
$$M_x = x_i \cdot m_i \text{ va } M_y = y_i \cdot m_i$$

ko‘paytmalar m_i massaning mos ravishda Ox va Oy o‘qlarga nisbatan olingan statik momentlari deyiladi.

Biror l o‘qdan r masofadagi m massali moddiy nuqtaning l o‘qqa nisbatan **statik momenti** deb $M_l = m \cdot r$



101-shakl.



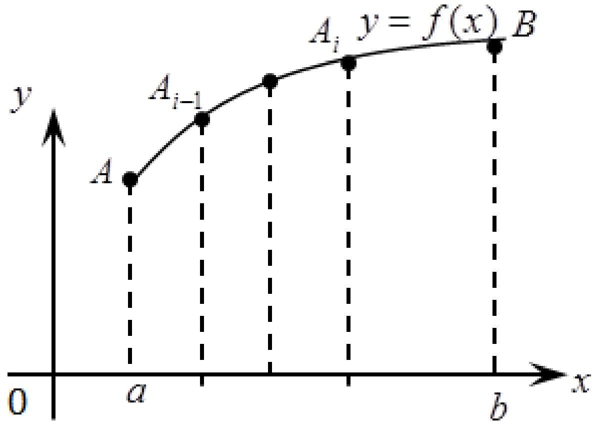
102-shakl.

ga aytiladi. Tekislikdagi l o‘qdan $r_1, r_2, ..., r_n$ masofadagi $m_1, m_2, ..., m_n$ massali moddiy nuqtalarning l o‘qqa nisbatan statik momenti deb

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \tag{30}$$

ga aytiladi. Uni hisoblash uchun aniq integraldan foydalanish mumkinligi kelib chiqadi.

Oxy tekislikdagi AB egri chiziq tenglamasi $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ bo‘lsin. Egri chiziqning har bir nuqtasidagi chiziqli zichlik $\gamma = \gamma(x)$



103-shakl.

x-o‘zgaruvchining chiziqli funksiyasi. M_x-x o‘qdagi statik momentni hisoblash uchun Ox o‘qini ixtiyoriy usul bilan $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ bo‘lakchalarga ajratib Δl_i bo‘lakdan $P_i(x_i, 0)$ nuqtani tanlaymiz. Bunda bo‘lakchaga mos massa

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\Delta l_i . \tag{31}$$

U holda

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i .$$

Bu tenglikning o‘ng tomonida $\gamma(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}$ funksiya uchun integral yig‘indi turibdi. Bundan esa

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \int_a^b \gamma(x) dl$$

yoki

$$m = \int_a^b \gamma(x) dl = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2} dx . \tag{32}$$

AB egri chiziqni Ox o‘q bo‘yicha statik momenti

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) y \cdot dl = \int_a^b \gamma(x) y \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx, \qquad (33)$$

bu yerda $y = f(x)$ AB chiziq tenglamasi.

AB egri chiziqni Oy o‘qqa nisbatan statik momenti esa

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \cdot dl = \int_a^b \gamma(x) x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \qquad (34)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar egri chiziq bir jinsli bo‘lsa $\gamma(x) = \gamma = const$ bo‘ladi, u holda

$$M_x = \gamma \int_a^b y \cdot dl \text{ va } M_y = \gamma \int_a^b x \cdot dl$$

ko‘rinishini oldi.

1-misol. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \le r$, yarim aylana uchun, $\gamma(x) \equiv 1$ bo‘lganda Ox va Oy o‘qqa nisbatan statik momentlari topilsin.

Yechish: $\gamma(x) \equiv 1$ bo‘lgani uchun (33) va (34) formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$M_x = \int_{-r}^{r} y \cdot dl = \int_{-r}^{r} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad M_y = \int_{-r}^{r} x \cdot dl = \int_{-r}^{r} x \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

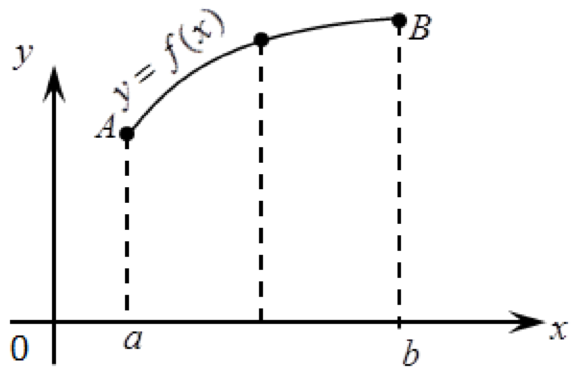
Berilgan funksiyani hosilasini va yoy differensialini hisoblaymiz:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \; dl = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Bularni e’tiborga olsak, statik momentlar quyidagiga teng bo‘ladi:

$$M_x = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int_{-r}^{r} dx = 2r^2, \quad M_y = \int_{-r}^{r} \frac{xrdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -r\sqrt{r^2 - x^2} \Big|_{-r}^{r} = 0.$$

Oxy tekislikda $y = f(x)$ egri chiziq, Ox o‘q va $x = a$, $x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya berilgan. Uni har bir nuqtasidagi zichligi $\gamma(x)$ bo‘lsin.

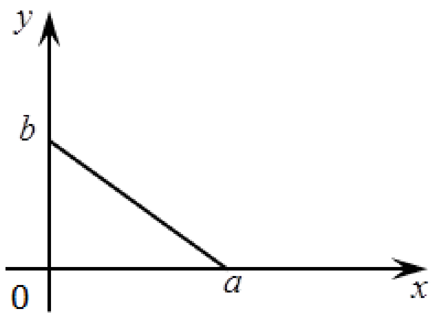


104-shakl.

U holda egri chiziqli trapetsiyaning statik momenti

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x) y^2 dx, \qquad M_y = \int_a^b \gamma(x) xydx \tag{35}$$

formulalar bilan hisoblanadi.



105-shakl.

Agar egri chiziqli trapetsiya bir jinsli bo‘lsa, ya’ni $\gamma(x) = \gamma$ bo‘lsa statik momentlar:

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma\int_a^b y^2 dx, \; M_y = \gamma\int_a^b xydx.$$

ko‘rinishni oladi.

2-misol. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\quad x = 0,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakni koordinata o‘qlariga nisbatan statik momenti $\gamma(x) = 1$ bo‘lganda hisoblang.

Yechish: $\gamma = 1$ bo‘lsa $y = b\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$ formulaga asosan:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}b^2\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = -\frac{ab^2}{6}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\Bigg|_0^a = \frac{ab^2}{6},$$

$$M_y = \int_0^a xydx = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)dx = \frac{b}{a}\int_0^a \left(ax - x^2\right)dx = \frac{b}{a}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{b}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{a^2 b}{6}.$$

2. Egri chiziq va tekis shaklning og‘irlik markazi

Oxy tekisligida massalari $m_1, m_2, ..., m_n$ bo‘lgan moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin. x_c va y_c orqali berilgan sistemaning og‘irlik markazi koordinatalarini belgilaymiz. Bu holda yuqorida keltirilgan moddiy sistema og‘irlik markazining koordinatalari

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i-1}^{n} m_i}, \qquad (36)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + ... + y_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (37)$$

formulasi orqali aniqlanar edi.

AB egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan $(a \le x \le b)$ va bu egri chiziq moddiy chiziq bo‘lsin. Bunday moddiy egri chiziqning chiziqli zichligini γ deb faraz qilamiz. Chiziqli uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo‘lgan n - ta bo‘lakka bo‘lamiz. Bu bo‘laklarning massalari ularning uzunliklari bilan zichlik ko‘paytmasiga teng, ya’ni $\Delta m_i = \gamma \cdot \Delta S_i$, bu yerda ΔS_i yoyning har bir bo‘lagida abssissasi ξ_i bo‘lgan ixtiyoriy nuqta olamiz. Endi ΔS_i yoyning har bir bo‘lagining massasi $\gamma \cdot \Delta S_i$ bo‘lgan $P_i\left[\Sigma_i f\left(\xi_i\right)\right]$ moddiy nuqta bilan tasvirlab, (36) va (37) formulalarda x_i o‘rniga Σ_i qiymatni, y_i o‘rniga $f(\xi_i)$ qiymatni, m_i o‘rniga $\gamma \cdot \Delta S_i$ (ΔS_i-bo‘laklar massasi) qiymatni qo‘ysak, yoyning og‘irlik markazini aniqlash uchun quyidagi taqribiy formulalarni hosil qilamiz:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi \cdot \gamma \cdot \Delta S_i}{\sum \gamma \cdot \Delta S_i}, \; y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \cdot \gamma \cdot \Delta S_i}{\sum \gamma \cdot \Delta S_i}.$$

Agar $y = f(x)$ uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin, u holda har bir kasrning suratidagi va maxrajidagi yig‘indilar $\max \Delta S_i \to 0$ da mos integral yig‘indilari limitlariga teng bo‘lgan limitlarga teng bo‘ladi. Shunday qilib, yoy og‘irlik markazining koordinatalari quyidagi aniq integrallar bilan ifodalanadi:

$$x_c = \frac{\int_a^b x ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x) ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx}. \quad (38)$$

3-misol: Ox o‘qining yuqorisiga joylashgan $x^2 + y^2 = a^2$ yarim aylana og‘irlik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish: Og‘irlik markazining ordinatasini topamiz: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yoki

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \qquad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx, \qquad ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

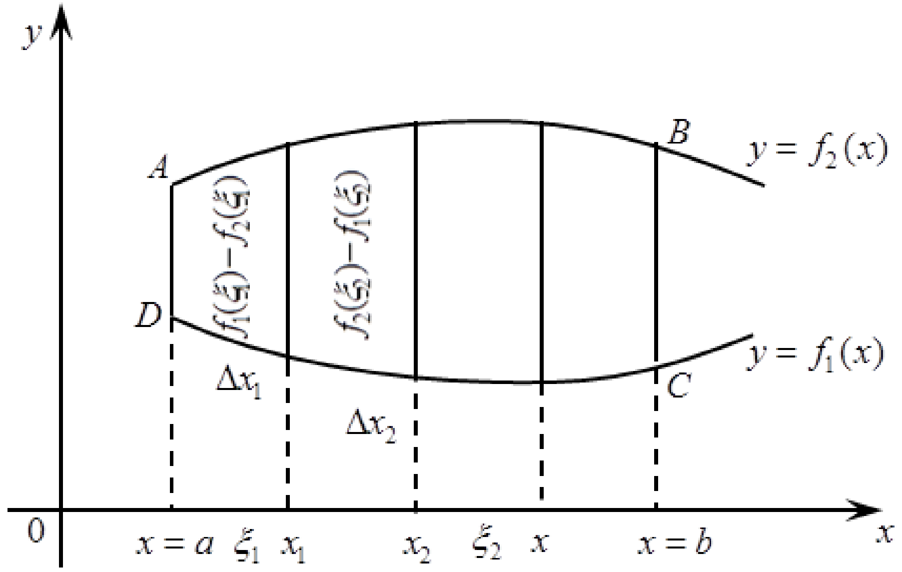
topilganlarni (38) ga qo‘yib,

$$y_c = \frac{\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx}{\pi a} = \frac{a\int_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}, \qquad x_c = 0$$

ga ega bo‘lamiz, chunki yarim aylana Ox o‘qqa nisbatan simmetrikdir.

3. Og‘irlik markazining koordinatalarini hisoblash

Bizga quyidagi shakllar berilgan va ular $y = f_1(x),\; y = f_2(x),\; x = a,\; x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lib, tekis shakldan iborat bo‘lsin. Sirt zichligini, ya’ni sirt birlik yuzining massasi shaklning hamma bo‘laklari uchun o‘zgarmas va σ ga teng deb hisoblaymiz.



106-shakl.

Berilgan shaklni $x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan kengligi $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ bo‘lgan polosalarga ajratamiz. Har bir polosaning massasi polosa yuzi bilan σ zichlik ko‘paytmasiga teng bo‘ladi. Agar har bir polosani asosi Δx_i va balandligi $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ bo‘lgan (bunda $\xi_1 = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$) to‘g‘ri to‘rtburchak bilan almashtirsak, u holda polosaning massasi taqriban

$$\Delta m_i = \sigma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ga teng bo‘ladi.

Bu polosaning og‘irlik markazi taxminan tegishli to‘g‘ri to‘rtburchakning markazida bo‘ladi

$$(x_i)_c = \xi_i, \qquad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Endi har bir polosani massasi tegishli polosaning massasiga teng bo‘lgan va shu polosaning og‘irlik markaziga to‘plangan moddiy nuqta bilan almashtirib, butun shakl og‘irlik markazi koordinatalarining taqribiy qiymatini topamiz.

(36), (37) formulalarga asosan

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \sigma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}{\sum \sigma\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2}\sum\left[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)\right]\sigma\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}{\sum\sigma\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i}.$$

$\Delta x_i \to 0$ limitga o‘tib, berilgan shakl og‘irlik markazining koordinatalarini ushbu ko‘rinishda topamiz:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}{\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}, \tag{39}$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b\left[f_2(x)+f_1(x)\right]\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}{\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx}. \tag{40}$$

Bu formulalar har qanday bir jinsli (ya’ni hamma nuqtalarida bir xil zichlikka ega bo‘lgan) tekis shakllar uchun o‘rinli. Og‘irlik markazining koordinatalari shaklning σ zichligiga bog‘liq emas.

4. Aniq integral yordamida ishni hisoblash

Biror F kuch ta’siri ostida M moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo‘nalishi harakat yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lsin. M nuqta $s=a$ vaziyatdan $s=b$ vaziyatga ko‘chganda F kuchning bajargan ishini topish talab etiladi.

1) Agar F kuch o‘zgarmas bo‘lsa, u holda A ish F kuch bilan o‘tilgan yo‘l uzunligi ko‘paytmasi bilan ifodalanadi, ya’ni

$$A = F\cdot(b-a).$$

2) F kuch moddiy nuqtaning olgan o‘rniga qarab uzluksiz o‘zgaradi, ya’ni $a \le s \le b$ kesmada $F(s)$ uzluksiz funksiyani ifodalaydi deb faraz qilamiz.

$[a;b]$ kesmani uzunliklari

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$$

bo‘lgan n ta ixtiyoriy bo‘lakka bo‘lamiz, undan keyin har bir $[s_{i-1}, s_i]$ qismiy kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va $F(s)$ kuchning

$$\Delta s_i, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

yo‘lda bajargan ishini $F(\xi_i)\Delta s_i$ ko‘paytma bilan almashtiramiz. Bu esa bir qismiy kesmada biz F kuchni o‘zgarmas miqdor deb qabul qilishimizni, chunonchi $F = F(\xi_i)$ deb faraz qilishimizni bildiradi. Bunday holda $F(\xi_i)\Delta s_i$ ifoda Δs_i yetarlicha kichik bo‘lganda F kuchning Δs_i yo‘lda bajargan ishining taqribiy qiymatini beradi, yig‘indi

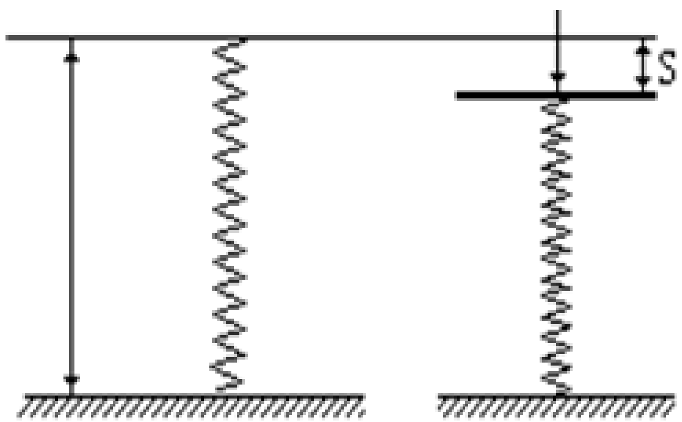
$$A = \sum_{i-1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$$

esa F kuchning butun $[a;b]$ kesmada bajargan ishining taqribiy ifodasi bo‘ladi.

A yig‘indi $[a;b]$ kesmada $F = F(s)$ kuch uchun tuzilgan integral yig‘indi ekani o‘z-o‘zidan tushunarli. Bu yig‘indining $\max \Delta s_i \to 0$ dagi limiti mavjud va $F(s)$ kuchning $s = a$ nuqtadan $s = b$ nuqtagacha bo‘lgan yo‘lda bajargan ishini ifodalaydi:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds. \tag{41}$$

4-misol. Vint prujinasining S qisilishi unga ta’sir etuvchi F kuchga proporsional. Agar prujinani 1 sm siqish uchun 1 kg kuch kerak bo‘lsa, F kuch prujinani 5 sm siqishi uchun qancha ish bajarishi kerak bo‘lishini hisoblang.



107-shakl.

Yechish: Shartga ko‘ra F kuch va S siljish $F = k \cdot S$ munosabat orqali bog‘langan, bunda k o‘zgarmas son.

S metr bilan, F ni kilogramm bilan ifodalaymiz. $S = 0{,}01$, $F = 1$ bo‘lganda $1H = k \cdot 0{,}01$ ekanidan, $k = 100$ va $F = 100S$ bo‘ladi. Formulaga asosan

$$A = \int_{0}^{0,05} 100SdS = 100\frac{S^2}{2}\bigg|_0^{0,05} = 0{,}125\, j.$$

5-misol. e_1 elektr zaryadi o‘zidan r masofada turgan (ishorasi bir xil) e_2 zaryadni F kuch bilan itarsa, bu kuch $F = k\frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$ formula bilan ifodalanadi, bunda k-o‘zgarmas son. e_1 zaryad sanoq boshlanadigan nuqta deb qabul qilingan. A_0 nuqtaga joylashgan deb faraz qilib, e_2 zaryadning e_1 zaryaddan r_1 masofa uzoqda bo‘lgan A_1 nuqtadan e_1 zaryaddan r_2 masofada bo‘lgan A_2 nuqtaga ko‘chishida F kuchning bajargan ishi aniqlansin.

Yechish: (41) formulaga asosan

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}dr = -ke_1e_2\frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = ke_1e_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$r_2 = \infty$ bo‘lganda

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{ke_1 \cdot e_2}{r^2}dr = \frac{ke_1 \cdot e_2}{r_1}$$

bo‘ladi. $e_2 = 1$ bo‘lsa, $A = k\frac{e_1}{r}$. Keyingi miqdor e_1 zaryad hosil qilgan maydon potensiali deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Egri chiziqning statik momentlari qanday aniqlanadi.
2. Tekis shakllarning statik momentini topish formulasini yozing.
3. Jismlarni og‘irlik markazini topish usulini ayting.
4. Ishni miqdori qanday hisoblanadi.

46-§. Xosmas integrallar va ularning xossalari

1. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar

Aniq integral tushunchasi bilan tanishganda biz integral ostidagi funksiyani berilgan kesmada uzluksiz bo‘lishini talab qilgan edik. Lekin ayrim hollarda berilgan kesmada uzilishga ega bo‘lgan funksiyalarni integrallash talab qilinadi. Bunday integrallar xosmas integrallar deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo‘lsin. Bu funksiyaning $[a;+\infty)$ oraliqning istalgan chekli $[a;y]$, $a<y<+\infty$ qismidagi $\int_a^y f(x)dx$ integral y ga bog‘liq bo‘ladi:

$$F(y)=\int_a^y f(x)dx$$

1-ta’rif. Agar $y\to+\infty$ da $F(y)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty)$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{y\to\infty}F(y)=\lim_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx. \qquad (42)$$

Bunda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral chegarasi cheksiz xosmas integral deb ham ataladi. Agar $y\to+\infty$ da $F(y)=\int_a^y f(x)dx$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $y\to+\infty$ da $F(y)$ funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-\infty;a]$ yoki $(-\infty;+\infty)$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo‘lsin.

Bu funksiyaning $(-\infty;a]$ yoki $(-\infty;+\infty)$ oraliqlar bo‘yicha xosmas integrallari ham yuqoridagi kabi ta’riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{y\to-\infty}\int_{y}^{a} f(x)dx \ (-\infty < y < a) \qquad (43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{y\to-\infty \\ t\to+\infty}} \int_{y}^{t} f(x)dx \ (-\infty < y < t < +\infty) \qquad (44)$$

1-misol. $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx$ xosmas integral hisoblansin.

Yechish: Chegarasi cheksiz xosmas integral ta’rifidan foydalanib topamiz:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx = \lim_{y\to+\infty}\int_{0}^{y} e^{-2x}dx = \lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{2}\int_{0}^{y} e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty} e^{-2x}\Big|_{0}^{y} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{y\to+\infty}(e^{-2y} - e^{0}) = \frac{1}{2}.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi va $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{2}$.

2-misol. $I = \int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0, a > 0)$ integralni hisoblang.

Yechish: Agar $\alpha > 1$ bo‘lsa,

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty}\int_{a}^{y}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{a}^{y} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{y\to+\infty}\left(y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

xosmas integral yaqinlashadi.

Agar $\alpha < 1$ bo‘lsa,

$$\int_{a}^{+\infty} x^{-\alpha}dx = \lim_{y\to+\infty}\int_{0}^{y} x^{-\alpha}dy = \lim_{y\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{0}^{y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty.$$

bo‘ladi. Xosmas integral uzoqlashadi.

Agar $\alpha = 1$ bo‘lsa,

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{y\to\infty}(\ln y - \ln a) = +\infty.$$

Shunday qilib, berilgan $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha>0, a>0)$ xosmas integral $\alpha>1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi $\alpha\le 1$ bo‘lganda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2. Yaqinlashuvchi xosmas integralning xossalari

Xosmas integrallar ham aniq integrallarga o‘xshash xossalarga ega bo‘ladi.

1°. Agar $f(x)$ funksiyaning $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integrali yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu funksiyaning $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ $(a<b<+\infty)$ xosmas integrali ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va aksincha. Bunda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{b} f(x)dx+\int_b^{+\infty} f(x)dx$$

bo‘ladi.

2°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi va k o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ ham yaqinlashadi va $\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)dx=k\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]dx$ integral ham yaqinlashadi va

$$\int_a^{+\infty}\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx\pm\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

4°. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lib, $\forall x\in[a;+\infty]$ uchun $f(x)\ge 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx\ge 0$ bo‘ladi.

5°. Agar $\forall x \in [a;+\infty]$ uchun $f(x) \le g(x)$ bo‘lib, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$ bo‘ladi.

3. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

$f(x)$ funksiya $[a;b)$ yarim intervalda berilgan bo‘lib, $(t;b)$ da $(a<t<b)$ chegaralanmagan bo‘lsin. Bu funksiyaning $[a;b)$ ning istalgan $[a;t]$ qismidagi $\int_a^t f(x)dx$ integral t ga bog‘liq bo‘ladi.

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx .$$

Ta’rif. Agar $t \to b-0$ da $F(t)$ funksiya mavjud bo‘lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b-0} F(t) = \lim_{t \to b-0} \int_b^t f(x)dx \tag{45}$$

Agar $t \to b-0$ da $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ ning limiti mavjud va chekli bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $t \to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a;\text{b}]$ (yoki $(a;b)$) oraliq bo‘yicha xosmas integral ham yuqoridagidek ta’riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+0} \int_t^b f(x)dx, \quad a<t<b, \tag{46}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{y\to b-0\\ t\to a+0}} \int_t^y f(x)dx, \quad a<t<y<b. \tag{47}$$

3-misol. Ushbu $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: $x=1$ nuqta atrofida $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funksiya chegaralanmagan. Ta'rifga asosan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{t\to 1-0}\left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]\Bigg|_0^t = -2\lim_{t\to 1-0}\left[\sqrt{1-t}-1\right]=2.$$

Demak, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=2$ bo'lib xosmas integral yaqinlashuvchidir.

4-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish: $x=0$ nuqta $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyaning maxsus nuqtasi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to +0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to +0}\ln|x|\Big|_t^1 = \lim_{t\to +0}[\ln 1-\ln t] = \lim_{t\to +0}\left[\ln\frac{1}{t}\right]=+\infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi.

4. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallar

Xosmas integrallarni kelgusida yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini bilish maqsadida quyidagi solishtirish alomatlaridan foydalanamiz.

1-teorema. Agar $\forall x\in[a;+\infty]$ uchun $0\le f(x)\le g(x)$ tengsizlik bajarilsa va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-teorema. Agar $\forall x \in [a;+\infty]$ uchun $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ tengsizlik bajarilsa hamda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3-teorema. Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Bunday $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lib, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

5-misol. $\int_1^{\infty} \frac{cos\, x}{x^3}dx$ xosmas integralni yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: Ma’lumki, $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$, $|x| > 1$, lekin $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ integral yaqinlashuvchi $(\alpha = 3)$, u holda $\int_1^{\infty} \left|\frac{cos\, x}{x^3}\right| dx$ yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Demak, $\int_1^{\infty} \frac{cos\, x}{x^3}dx$ absolyut yaqinlashuvchi integraldir.

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Xosmas integral deb nimaga aytiladi?
2. Xosmas integralni turlarini aniqlang.
3. Xosmas integral qanday xossalarga ega bo‘ladi?
4. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi xosmas integrallarni ta’rifini ayting.

47-§. Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari

1. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi bilan aniq integralni taqribiy hisoblash

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsin. Ushbu $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblash talab qilinsin.

$[a;b]$ kesmani $a=x_0,x_1,...,x_n=b$ nuqtalar bilan n ta bo‘lakka ajratamiz. Har bir bo‘lakning uzunligi

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

ga teng bo‘ladi.

$f(x)$ funksiyaning $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ nuqtalardagi qiymatini mos ravishda

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ldots,y_n=f(x_n)$$

belgilaymiz va quyidagi yig‘indini tuzamiz (108-shakl):

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+......+y_{n-1}\Delta x,\qquad y_1\Delta x+y_2\Delta x+......+y_n\Delta x.$$

Bu yig‘indilarning har biri $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning integral yig‘indisi bo‘lishi ravshan va shuning uchun taqribiy integralni ifodalaydi:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+...+y_{n-1}),\tag{48}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+...+y_n).\tag{49}$$

Biz aniq integralni taqribiy hisoblash uchun to‘g‘ri to‘rtburchak formulasini hosil qildik.

To‘g‘ri to‘rtburchak formulasining absolyut xatosi $M_1\frac{(b-a)^2}{4n}$ dan katta emas, bu yerda M_1 funksiya birinchi tartibli hosilasi $|f'(x)|$ ning $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

1-misol. Ushbu $J=\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ integralni taqribiy qiymatini to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi bo‘yicha hisoblang.

Yechish: $n=10$, $\Delta x=\frac{1-0}{10}=0{,}1$ (48) formula bo‘yicha ortig‘i bilan hosil qilamiz.

$$J\approx 0{,}1\left(1{,}000+0{,}9091+\cdots+0{,}5263\right)=0{,}71877,$$

(49) formula bo‘yicha kami bilan hosil qilamiz.

$$J\approx 0{,}1\left(0{,}9091+0{,}8333+\cdots\cdots+0{,}5000\right)=0{,}66877.$$

Ma’lumki, J integralni qiymatini Nyuton-Leybnis formulasiga asosan:

$$J=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=ln\,2\approx 0{,}69315$$

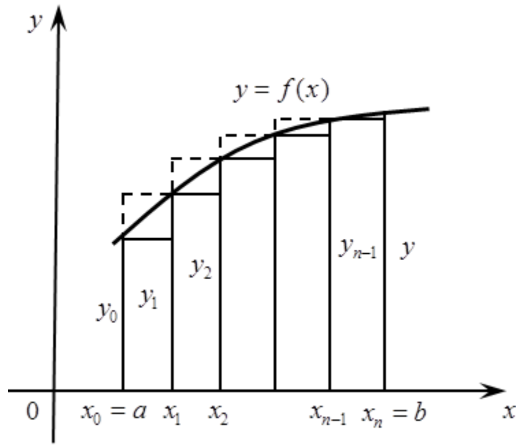
Agar $f(x)\geq 0$ va $f(x)$ o‘suvchi bo‘lsa, u holda (48) formula «ichki» to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onali figuraning yuzini ifodalaydi. (49) formula esa «tashqi» to‘g‘ri to‘rtburchakli pog‘onali figurani yuzini ifodalaydi. Bu formulada yo‘l qo‘yilgan xato n ni kattaligiga bog‘liq. N katta bo‘lsa, xato kam bo‘ladi.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi uchun M_1 ni hisoblaymiz.

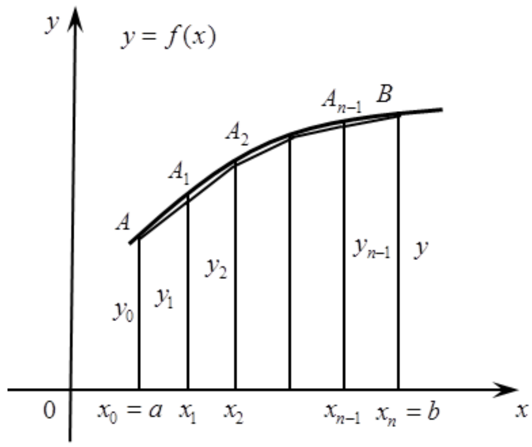
$f(x)=\frac{1}{1+x}$ uchun $f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ bo‘lgani uchun $[0;1]$ kesmada $|f'(x)|\leq 1$ bo‘ladi, shuning uchun $M_1=1$.

Demak, $\frac{M_1(b-a)^2}{4n}=\frac{1}{4\cdot 10}=0{,}025$

$$\delta=|0{,}69315-0{,}66877|=|0{,}02435|<0{,}025.$$



108-shakl.



109-shakl.

2. Trapetsiyalar formulasi bilan aniq integralni taqribiy hisoblash

$[a;b]$ kesmani n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $y = f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning uchlarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz.

Berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini n ta to‘g‘ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig‘indisi bilan almashtiramiz.(109-shakl)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x \right) =$$

$$= \Delta x \left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right),$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right). \tag{50}$$

(50) formula aniq integralni taqribiy hisoblash uchun trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasining absolyut xatosi $M_2 \cdot \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas, bunda M_2, $|f''(x)|$ ning $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2-misol $J = \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x}$ integralni trapetsiya formulasi orqali taqribiy hisoblang.

Yechish: $n = 10$ bo‘lganda (50) formulaga asosan

$$J \approx 0,1\left(\frac{1,000 + 0,5000}{2} + 0,9091 + \cdots\cdots + 0,5263 \right) = 0,69377$$

hosil bo‘ladi.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ bo‘lganligi uchun $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $[0;1]$ kesmada $|f''(x)| \le 2.$

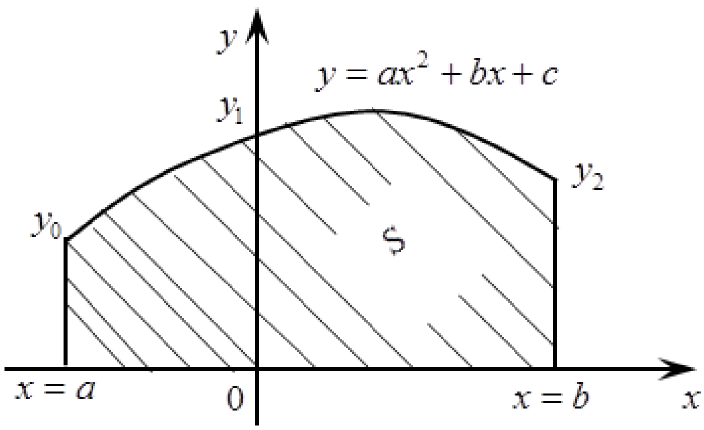
Demak, $M_2 = 2$.

Natijaning xatosi $\frac{M_2(b-a)^2}{12n^2}=\frac{2}{12\cdot 100}=\frac{1}{600}<0,02$ kattalikdan ortiq bo‘lmaydi. Integralning absolyut xatosi

$$|0,69315-0,69377|=0,00062.$$

3. Simpson formulasi yordamida aniq integralni hisoblash

$[a;b]$ kesmani $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz. Uchta nuqta olamiz va bu $(x_0;y_0)$ $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ nuqtalar orqali $Y=Ax^2+Bx+C$ parabolani o‘tkazamiz, (110-shakl).



110-shakl.

Bu parabola bilan $y=f(x)$ funksiya grafigini almashtiramiz.

Xuddi shunga o‘xshash $y=f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmani $[x_2;x_4]$, $[x_4;x_6]$ va boshqa kesmalarga almashtiramiz.

Shunday qilib, $y=f(x)$ egri chiziqli trapetsiya yuzini bu kesmadagi parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarini yig‘indisi bilan almashtiramiz.

Bunday egri chiziqli trapetsiyalar parabolik trapetsiyalar deyiladi.

Parabola tenglamasining A,B,C koeffitsiyentlari parabolaning berilgan uchta nuqtadan o‘tish shartidan aniqlanadi.

A,B,C koeffitsiyentlarni parabolaning $(-h;y_0)$, $(0;y_2)$, $(h;y_2)$ nuqtalardan o‘tish shartidan topamiz.

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

$$\begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C, \\ y_1 = C, \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib,

$$A = \frac{1}{2h^2}(\, y_0 - 2y_1 + y_2 \,),\ C = Y_1,\ B = \frac{1}{2h}(\, y_2 - y_0 \,)$$

ni aniqlaymiz.

Endi parabolik trapetsiyaning S yuzasini aniq integral yordamida topamiz.

$$S_1 = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C \right) dx = \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right)\Bigg|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}\left(2Ah^3 + 6C \right).$$

A va B ning topilgan qiymatlarini o‘rniga qo‘yib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$S_1 = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 \right), \qquad S_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$S_4 = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6), \ldots\ldots\ldots, S_{2m} = \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Hosil bo‘lgan yuzalarni qo‘shib, izlangan integralning taqribiy qiymatini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1} \right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2} \right) \right],$$

bunda

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{2m}.$$

Shunday qilib, h ni e’tiborga olsak, aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson formulasi (parabolik trapetsiyalarning formulasi) bunday ko‘rinishni oladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1} \right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2} \right) \right] \quad (51)$$

Simpson formulasining absolyut xatosi $M_4 \dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta bo‘lmaydi, bu yerda M_4, $\left| f^{IV}(x) \right|$ ning $[\, a; b \,]$ kesmadagi eng katta qiymati.

3-misol. Simpson formulasi bilan $J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish: $n=2$, $m=10$ bo‘lsa, $\Delta x=\frac{b-a}{3n}=\frac{1}{30}$

$$J=\frac{1}{30}\Big[1{,}0000+0{,}5000+4\big(0{,}9091+0{,}7692+0{,}6667+0{,}5882+0{,}5263\big)+$$

$$+2\big(0{,}8333+0{,}7143+0{,}6250+0{,}5556\big)\Big]=0{,}693146.$$

Natijani absolyut xatosini topamiz.

$$f^{(IV)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$$

bo‘lganligi uchun

$$M_4=\max_{[0;1]}\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right|\le 24,$$

$$M_4\frac{(b-a)^5}{2880n^4}=\frac{24}{2880\cdot 10000}\approx 0{,}000008.$$

Natijalarni taqqoslab, Simpson formulasi bo‘yicha topilgan natijaning aniqligi yuqori ekaniga ishonch hosil qilamiz.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Aniq integralni taqribiy hisoblashni to‘g‘ri to‘rtburchak usulini ayting va formulasini yozing.
2. Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiya usulini ayting va formulasini yozing.
3. Aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson usulini ayting va formulasini yozing.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. David C. Lay. Linear algebra and its applications. Copyright, 2012.

2. Keith W. Linear algebra. Third Echtion. Copyright, 2095.

3. Blyth T.S., Robertson E.F. Basis Linear algebra. Springer-Verlag London Limited, 2007.

4. Erving Kreyszing, Herbert Kreyszing, Edward Normuton. Advanced enjinering Mathematikc. New York, Copyrigth, 2011.

5. Keith Nicholson W. Linear algebra with Applications. December. 2011. www. mccc.edu/course/203/documents/student Solution Manual.

6. Lal A.K.,Pati S. Lekture Notes on Linear Algebra. Februare 10, 2015. hhttps://www.Conrsehero.com>…>MATH 211.

7. Devid J.Jeffrey, Robert M. Corless. Linear Algebra in Maple. www.apmaths. uwo.ca/-diffrey/Offprintc/C5106_C072. 2006.

8. Thomas Jr. Calculus. Copyright, 2005.

9. Vaisman Lzu. Analytical Geometry. Copyright, 1997.

10. Siceloff L.P., Wentworth G., Smith D.E. Analytic Geometry. Copyright, 1922.

11. Additional Topics in Analytic Geometry. http:salkha-teeb.kau.edu.sa/… /20 section -chapter5-6.

12. Analytic geometry in calculus. http://higheredbcs.wi-ley.com/.../analytic_ geometry_ in_ calculus.

13. Plane and sold Analytic Geometry. www.forgottenbooks.com,Copyrigt, 2016,

14. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2008.

15. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis II. Sprinder-Verlag Italia, Milan 2010.

16. Hyperbolic functions-Mathcentre. https://www.mathcentre.ac.uk/resources/workbooks/mathcentre/hyperbolicfunctions.pdf . January 9, 2006.

17. Understanding and computing limits by means of infinitesimal quantities kifri.fri.unuza.sk/ojs/ index.php/JICMS/ article/viewFILE/…/598.

18. Stewart J. Calculus, Brooks/C ole, Cengage Leering, 2012.

19. Advanced Integration Techniques. https://zaidalyafeai.files.wordpress.com /2015/09/advanced-integration-techniques6.pdf.

20. Baumann Gerd. Mathematics for Engineers I. Munchen, 2010.

21. Wolfgang Ertel. Advanced Mathematics for ingineers.2012.

22. Konev V.V. Linearalgebra, Vektor algebra, Analytical geometry. TextBook. Tomsk, TPU press, 2009.

23. Соболев А.Б., Рыбалко А.Ф. Математика. Екатеринбург, Часть 1, 2004.

24. Писменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: польный курс-М: Айрис-пресс, 2009.

25. Jo‘rayev T., Sa’dullayev A., Xudoyberdiyev G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. 1-qism.T: “O‘zbekiston”, 1998.

26. Xurramov Sh.R. Oliy matematika. 1-jild. –T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2018.

27. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика учебник. М.: Едиториал УРСС, 2003, Т. I. -328 с.

28. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика учебник. М.: Едиториал УРСС, 2004, Т. II. -192 с.

29. Шипачев В.С. Высшая математика. Базовый курс. М. Юрист. -447с.

MUNDARIJA

YUSUPJON PULATOVICH APAKOV

OLIY MATEMATIKA

Birinchi jild

Toshkent – «Fan va texnologiyalar nashriyot-matbaa uyi» – 2022

Muharrir: M.Hayitova
Tex. muharrir: Sh.Mirqosimova
Rassom: U.Ortiqov
Kompyuterda sahifalovchi: N.Rahmatullayeva

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Tel: 97-450-11-14, 93-381-22-07.
Bosishga ruxsat etildi 16.06.2022.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 20,75. Nashriyot bosma tabog'i 20,25.
Tiraji 100. Buyurtma № 82.

«Fan va texnologiyalar nashriyot-matbaa uyi»
bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Foziltepa ko'chasi, 22 b uy.