O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

“TIZIMLI VA AMALIY DASTURLASHTIRISH” KAFEDRASI

Tizimli va amaliy dasturlashtirish kafedrasi dotsenti

f.-m.f.n. M.X.Akbarova tomonidan

“CH I Z I Q L I A L G E B R A”

fani bo‘yicha tayorlangan

O‘ Q U V - USLUBIY MATERIALLARI

Toshkent– 2022

MUNDARIJA

O`QUV MATERIALLARI

Ma`ruza mashg`ulotlari.

1-Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

Mavzu rejasi:

1. Chiziqli tenglamalarni yechish usullari.
2. Chiziqli tenglamalar ustida elementar almashtirishlar.
3. Gauss metodi

Tayanch iboralar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, birgalikda bo`lish kriteriysi, noma`lum, ozod xad, chiziqli tenglama, koeffitsient, Gauss metodi.

1.Ma'lumki , bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi. Tenglamalar sistemasidagi hamma tenglamalar chiziqli (1 – darajali) bo`lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

ifodani n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sitemasi deyiladi, (1) sistemadagi a_{ij} larni x_i noma'lumlarning koeffitsientlari, b_i larni ozod hadlar deyiladi $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots n$.

1-**Ta'rif**. Agar (1) sistemaning har bir tenglamasi noma'lumning $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ qiymatlarda ayniyatga aylansa, u holda $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlarning sistemasi (1) sistemaning yechimi deyiladi.

2.Aytaylik n noma'lumli S ta chiziqli tenglamalarning

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 + \cdots + b_{sn}x_n = c_s \end{cases} \qquad (2)$$

sistemasi berilgan bo`lsin.

2-Ta'rif. Agar (1) tenglamalar sistemasining har bir yechimi (2) sistemaning yechimlaridan iborat bo`lsa va aksincha (2) sistemaning har bir yechimi (1) sistemaning yechimidan iborat bo`lsa, u holda (1) va (2) sistemalar ***teng kuchli*** yoki ***ekvivalent*** deyiladi.

3-Ta'rif. Agar chiziqli tenglamalar sistemasining aqalli bitta yechimi mavjud bo`lsa, u holda sistemani ***birgalikda***, agarda birorta ham yechimi mavjud bo`lmasa ***birgalikda emas*** sistema deyiladi. Agar sistema birgalikda bo`lib, faqat birgina yechimga ega bo`lsa, uni aniq, bittadan ko`p yechimlarga ega bo`lsa aniqmas sistema deyiladi.

Tenglamalar sistemasi ustida elementar almashtirishlar deganda biz quyidagilarni tushunamiz:

a) tenglamalar sistemasini biror tenglamasini har ikki tomonini noldan farqli elementiga ko`paytirishni;

b) tenglamalar sistemasini biror tenglamasini har ikki tomonini noldan farqli elementiga ko`paytirib, sistemaning boshqa bir tenglamasiga qo`shishni;

v) tenglamalar sistemasida hamma koeffitsientlari va ozod hadi nollardan iborat bo`lsa, uni sistemadan chiqarish yoki sistemaga kiritish;

g) tenglamalar sistemasini ixtiyoriy ikkita tenglamasini o`zaro o`rinlarini almashtirish.

3.Quyida biz chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usuli deb atalgan noma'lumlarni ketma –ket yo`qotish usuli bilan tanishamiz.

Ta'rif. Aytaylik

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a_{1s}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s} \end{cases} \qquad (5)$$

n noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo`lsin. Bu sistema ustida elementar almashtirish natijasida unga ekvivalent bo`lgan maxsus ko`rinishga ega bo`lgan sistemaga keltiramiz. Birinchi tenglama sifatida (5) sistemani x_1 oldidagi koeffitsient noldan farqli bo`lgan tenglamani olamiz. Umumiylikni chegaralamasdan birinchi tenglama sifatida (5) sistemaning birinchi tenglamasini va $a_{11}\neq 0$ deb olamiz.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1 \quad a_{11}\neq 0$$

bu tenglamaning har ikki tomonini $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, ... , $\frac{a_{s1}}{a_{11}}$ larga ko`paytirib, (5) sistemani ikkinchi, uchinchi va hakozo S- tenglamalarini mos tomonlariga qo`shib quyidagiga ega bo`lamiz:

Tarif.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1k_2}x_{k_2}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a^{(1)}_{2k_2}x_{k_2}+\ldots+a^{(1)}_{2n}x_n=b^{(1)}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a^{(1)}_{sk_2}x_{k2}\ldots+a^{(1)}_{sn}x_n=b^{(1)}_s \end{cases} \qquad (6)$$

bunda $a^{(1)}_{2k_2}\neq \mathbf{0}$. (6) tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasining har ikki tomonini

$$-\frac{a^{(1)}_{3k_2}}{a^{(1)}_{2k_2}}, \ldots ,-\frac{a^{(1)}_{sk_2}}{a^{(1)}_{2k_2}}$$

larga ko`paytirib, 2-, ..., s- tenglamalarining mos tomoniga qo`shamiz.

Ta'rif.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1k_2}x_{k_2}+\ldots+a_{1k_3}x_{k_3}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad a^{(1)}_{2k_2}x_{k_2}+\ldots+a^{(1)}_{2k_3}x_{k_3}+\ldots+a^{(1)}_{2n}x_n=b^{(1)}_2 \\ \qquad\qquad a^{(2)}_{3k_3}x_{k_3}+\ldots+a^{(2)}_{3n}x_n=b^{(2)}_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a^{(3)}_{mk_3}x_3+\ldots+a^{(3)}_{rnn}x_n=b^{(3)}_m \end{cases} \qquad (7)$$

bunda $a^{(3)}_{3k_3}\neq \mathbf{0}$. Bu jarayonni r marta davom ettirib, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k_2}x_{k_2} + \ldots + a_{1k_3}x_{k_3} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2k_2}^{(1)}x_{k_2} + \ldots + a_{2k_r}^{(1)}x_{k_r} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rk_r}^{(r-1)}x_{kr} \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bunda $1<k_2<k_3<\ldots<k_r$, , $a_{2k_2}^{(1)}$,..., $a_{rk_r}^{(r-1)}$ lar noldan farqli sonlar, qolgan koeffitsientlar esa ixtiyoriy sonlar. Ozod hadlar b_1 ,... , $b_r^{(r-1)}$, $b_{r+1}^{(r)}$ lar ham ixtiyoriy sonlar.

Ta'rif. Hosil qilingan (8) sistema (5) sistemaga teng kuchli, chunki (8) sistema (5) chekli elementar almashtirishlar natijasida hosil qilingan. SHuning uchun agar (8) sistema birgalikda bo`lsa, (5) sistema ham birgalikda bo`ladi. (8) sistema pog'ona(zina)simon sistema deyiladi.

Teorema. Agar $b_{r+1}^r \neq 0$ bo`lsa, (5) birgalikda emas, $b_{r+1}^r = 0$ va $r = n$ bo`lsa, (5) sistema birgalikda aniq, $b_{r+1}^r = 0$ va $n > r$ bo`lsa, (5) sistema birgalikda aniqmas bo`ladi.

Agar (5) birgalikda aniq sistema ($k = n$) bo`lsa, u holda (5) sistemaning n- tenglamasidan x_n ni (n-1) -tenglamasidan x_{n-1} ni ,...., 1-tenglamasidan x_1 ni mos qiymatlari : $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ larni ketma- ket topiladi. $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ elementlar sistemasi (4) tenlamalar sistemasining (o`z navbatida unga teng kuchli bo`lgan (1) sistemaning) yagona yechimi bo`ladi.

Agar (5) sistemada $b_1 = b_2 = \cdots = b_s = 0$ bo`lsa, unday sistemani ***birjinsli*** deyiladi. Bir jinsli sistemalar hamma vaqt birgalikda bo`ladi. CHunki $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \cdots = \mathrm{x}_m = 0$ uning yechimi bo`lib, bu bir jinsli sistemani ham Gauss usuli bilan yechish mumkin.

Misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish. Berilgan sistemaning 1-tenglamasini har ikki tomonini (-3) ga , (-2) ga, (-1) ga ko`paytirib mos ravishda 2-, 3-, 4- tenglamalariga qo`shamiz (bu bajarilgan elementar almashtirishlarni yuqoridagidek sxematik tasvirlaymiz) natijada berilgan sistemaga teng kuchli bo`lgan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo`lamiz. Bu sistemadagi 2- va 4- tenglamalarning o`rinlarini o`zaro almashtirib, unga ekvivalent bo`lgan (bu almashtirishni sxematik ravishda yuqoridagidek belgilaymiz)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 8 \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7 \end{cases} \quad \blacktriangledown$$

Sistemani hosil qilamiz. Sxemada ko`rsatilgan elementar almashtirishni bajarib,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ -6x_3 - 3x_4 = -3 \\ -3x_3 - 27x_4 = -27 \end{cases} \quad :3$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani 3-tenglamasini 3 ga, 4- tenglamasini (-3) ga qisqartirib (har ikki tomonini bo`lib) ularning o`rinlarini almashtirib yozamiz(sxematik belgilashga qarang).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_3 + 9x_4 = 9 \\ 17x_4 = 17 \end{cases}$$

Oxirgi sistemaning 4- tenglamasidan $x_4 = 1$, x_4 ning bu qiymatini sistemaning 3- tenglamasiga qo`yib $x_3 = 0$ ni topamiz, $x_3$ ,$x_4$ larni bu qiymatlarini 2- tenglamaga qo`yib $x_2 = -1$ ni topamiz, x_2, x_3 ,x_4 larni bu topilgan qiymatlarini 1- tenglamaga qo`yib $x_1 = -1$ ni topamiz. Demak, berilgan sistema yagona $x_1 = -1$, $x_2 = -1$,$x_3 = 0$,$x_4 = 1$ yechimga ega.

Nazorat savollari.

1. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechimini aniqlash?

2. Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo`lish kriteriysi qanday?

3. Gauss metodi mohiyati.

2- Mavzu: Matritsalar va ular ustida amallar

Mavzu rejasi:

1. Matritsa tushunchasi
2. Matritsalar ustida amallar

Tayanch iboralar: Matritsa, matritsa turlari, diogonal matritsa, matritsalarni qo`shish, ayirish va ko`paytirish.

1. 8.1-ta'rif. m ta satrva n ta ustundan iborat bo'lgan quyidagi to'rtburchakli jadvalga

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad (8.1)$$

matritsa deyiladi.

Odatda A matritsani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$A=(a_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (8.2)$$

Bu yerda $a_{i,j}$ sonlar matritsaning *elementlari* deb ataladi. Agar $a_{i,j}\in\mathbb{R}$ $(a_{i,j}\in\mathbb{C})$ bo'lsa A matritsa *haqiqiy* (*kompleks*) *elementli matritsa* deyiladi.

Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lgan, ya'ni $m=n$ bo'lgan matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deb ataladi. m ta satrva n ta ustundan iborat barcha matritsalar to'plamini $M_{m,n}(\mathrm{K})$ orqali belgilanadi, bu yerda matritsa elementlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab, $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ yoki $\mathrm{K}=\mathbb{C}$ bo'ladi. Barcha n-tartibli kvadrat matritsalar to'plami esa $M_n(\mathrm{K})$ orqali belgilanadi.

Mos satr va ustun elementlari teng bo'lgan bir hil tartibli matritsalar teng matritsalar deyiladi.

8.2-ta'rif. Berilgan A matritsaning satrlarini ustunlari, ustunlarini satrlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa A matritsaga *transponirlangan matritsa* deyiladi va A^T kabi belgilanadi, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \text{ bo‘lsa, } A^T=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

2. Endi matritsalar ustida amallarni aniqlaymiz. Matritsalarni qo‘shish amali bir hil tartibli matritsalar uchun aniqlanadi.

8.3-ta’rif. $A,B\in M_{m,n}(\mathrm{K})$ matritsalarning yig‘indisi deb, bu matritsalarning mos satr va ustun elementlarini qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan $m\times n$-tartibli matritsasiga aytiladi. Agar

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}. \qquad (8.3)$$

8.4-xossa. Ixtiyoriy $A,B,C\in M_{m,n}(\mathrm{K})$ matritsalar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) $A+B=B+A;$

b) $(A+B)+C=A+(B+C).$

Barcha elementlari nollardan iborat bo‘lgan matritsa *neytral* (*nol*) *matritsa* deyiladi. $A\in M_{m,n}(\mathrm{K})$ matritsa uchun qarama-qarshi matritsa quyidagi matritsadan iborat:

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & \dots & -a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

8.5-ta'rif. Ixtiyoriy $A \in M_{m,n}(\mathrm{K})$ matritsani $\lambda \in \mathrm{K}$ soniga ko'paytmasi deb quyidagi matritsaga aytiladi:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Endi matritsalarni ko'paytirish amalini kiritamiz. Ikkita matritsaning ko'paytmasi faqat birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan holdagina aniqlanadi.

8.6-ta'rif. $A \in M_{m,n}(\mathrm{K})$ va $B \in M_{n,s}(\mathrm{K})$ matritsalarning ko'paytmasi deb, shunday $A \cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning $i-$satr va $j-$ustunida turgan elementi A matritsaning $i-$satridagi va B matritsaning $j-$ustunidagi mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni $A \cdot B$ matritsaning elementlari

$$a_{i1}b_{1j} + a_2 b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le s \tag{8.4}$$

yig'indidan iborat.

Berilgan ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $A \in M_{m,n}(\mathrm{K})$ va $B \in M_{n,s}(\mathrm{K})$ matritsalarni ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan $A \cdot B$ matritsa $m \times s$-tartibli matritsa bo'ladi, ya'ni $A \cdot B \in M_{m,s}(\mathrm{K})$.

8.7-xossa. Ixtiyoriy $\lambda \in \mathrm{K}, A$ va B matritsalar uchun quyidagilar o'rinli:

a) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;

b) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

c) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$;

d) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$;

e) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

f) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$.

Quyidagi xossada matritsalarni ko'paytirish amali assosiativlik qonuniga bo'ysunishini ko'rsatamiz. Ko'paytmaning ta'rifidan ma'lumki, A, B va C matritsalar uchun $(A \cdot B) \cdot C$ ko'paytma ma'noga ega bo'lishi uchin birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga, ikkinchi matritsaning ustunlari soni esa uchunchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lishi kerak. Ushbu holatda $A\cdot(B\cdot C)$ ko‘paytma ma’noga ega ekanligini ham ko’rish qiyin emas.

8.8-xossa. $A\in M_{m,n}(\mathrm{K})$, $B\in M_{n,s}(\mathrm{K})$ va $C\in M_{s,t}(\mathrm{K})$ matritsa-lar uchun

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

munosabat o‘rinlidir.

Isbot.Aytaylik, $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$ va $C=(c_{i,j})$ bo‘lsin, u holda

$$AB=U=(u_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,s};$$

$$BC=V=(v_{i,j}),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,t}.$$

$$(AB)C=P=(p_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,t};$$

$$A(BC)=Q=(q_{i,j}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,t}.$$

ko‘rinishida yozib olamiz. Ta’rifdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$u_{i,l}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,l},\ v_{k,j}=\sum_{l=1}^{s}b_{k,l}c_{l,j}.$$

Natijada

$$P=UC,\quad Q=AV$$

tengliklarga ko‘ra

$$p_{i,j}=\sum_{l=1}^{s}u_{i,l}c_{l,j}=\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j},$$

$$q_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}v_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s}a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j}.$$

Demak, barcha $i=j=\overline{1,n}$ lar uchun $p_{i,j}=q_{i,j}$ tenglik o‘rinli ekan, ya’ni

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C).$$

Misol 8.1. Quyidagi matritsalar berilgan bo‘lsin:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix}\quad va\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 1 & 12\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot 3+3\cdot 6 & 2\cdot 4+3\cdot 5\\ -5\cdot 3+7\cdot 6 & -5\cdot 4+7\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 23\\ 27 & 15\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirish qoidasidan ma’lumki, $A\in M_{mn}(\mathrm{K})$, $B\in M_{n,s}(\mathrm{K})$ bo‘lib, $m\neq s$ bo‘lsa, u holda $A\cdot B$ ko‘paytmani aniqlash mumkin, lekin $B\cdot A$ ko‘paytmani aniqlab bo‘lmaydi. Agar $m=s\neq n$ bo‘lsa, $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalar aniqlanadi, lekin ularning tartiblari xar hil, ya’ni $A\cdot B\in M_{m,s}(\mathrm{K})$, $B\cdot A\in M_{n,n}(\mathrm{K})$ bo‘lganligi uchun ular teng bo‘lmaydi. $m=s=n$bo‘lgan holda $A\cdot B$ va $B\cdot A$ matritsalar bir hil tartibli bo‘lishiga qaramasdan, umuman olganda ular teng bo‘lishi shart emas.

Misol 8.2. Bizga $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 7\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot 3+3\cdot 6 & 2\cdot 4+3\cdot 5\\ -5\cdot 3+7\cdot 6 & -5\cdot 4+7\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24 & 23\\ 27 & 15\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}3\cdot 2+4\cdot(-5) & 3\cdot 3+4\cdot 7\\ 6\cdot 2+5\cdot(-5) & 6\cdot 3+5\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 37\\ -13 & 53\end{pmatrix}.$$

Demak, matritsalarni ko‘paytirish amali kommutativ emas, ya’ni $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Endi $A,B\in M_{m,n}(\mathrm{K})$, $C\in M_{k,s}(\mathrm{K})$ matritsalar uchun kiritilgan qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bog‘lovchi distributivlik shartini o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

8.9-xossa. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Isbot.Haqiqatdan ham,

$$\sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}+b_{i,l})c_{l,j}=\sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}c_{l,j}+b_{i,l}c_{l,j})=\sum_{l=1}^{n}a_{i,l}c_{l,j}+\sum_{l=1}^{n}b_{i,l}c_{l,j}$$

tenglikning chap tomoni $(A+B)\cdot C$ matritsaning $i-$satri va $j-$ustunida turgan elementini, o‘ng tomoni esa $A\cdot C+B\cdot C$ matritsalarning xuddi shu yerda turuvchi elementini ifodalaydi. □

Shuningdek, $A \in M_{m,n}(\mathrm{K})$, $B, C \in M_{n,s}(\mathrm{K})$ matritsalar uchun $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ tenglikning o‘rinli ekanligi ham yuqoridagi yo‘l bilan ko‘rsatiladi.

8.10-ta’rif. Bosh diagonali elementlari 1 ga teng bo‘lib, qolgan barcha elementlari 0 ga teng bo‘lgan n-tartibli kvadratik matritsa *birlik matritsa* deyiladi va birlik matritsa E kabi belgilanadi, ya’ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma’lumki, ixtiyoriy $A \in M_n(\mathrm{K})$ uchun $A \cdot E = E \cdot A = A$ munosabat o‘rinli.

8.10-ta’rif. Agar $A \in M_n(\mathrm{K})$ matritsa uchun $\exists B \in M_n(\mathrm{K})$ matritsa topilib, $A \cdot B = B \cdot A = E$ tenglik bajarilsa, B matritsa A matritsaning teskarisi deyiladi, A matritsa esa teskarilanuvchi matritsa deyiladi.

Teskarilanuvchi A matritsaning teskarisi A^{-1} kabi belgilanadi. Matritsaning teskarilanuvchanlik sharti va teskarisini topish usulini keyingi mavzularda keltiramiz.

Nazorat savollari.

1. Matritsa va uning turlari
2. Matritsa ustida qanday *elementar almashtirishlar bajarish mumkin.*

3-Mavzu: Kichik tartibli determinantlar

Mavzu rejasi:

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar
2. Determinantlarni hisoblash usullari

*1. 1-**tartibli determinant deb**, berilgan ixtiyoriy haqiqiy songa aytiladi.*

Masalan: $\frac{1}{2}$; 0; -3; $5, \dots$

Bizga ikkinchi tartibli kvadrat matritsa berilgan bo`lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(1) kvadrat matritsaga $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sonini mos qo`yamiz. Bu son A matritsaning determinant deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Quyidagi

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

formula ikkinchi tartibli determinantning hisoblash formulasi deb aytiladi.

1-misol. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. (2) formula yordmida hisoblaymiz. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 - (-10) = 22$

2-misol. $\begin{vmatrix} sint & tgt \\ ctgt & -sint \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} sint & tgt \\ -ctgt & -sint \end{vmatrix} = -\sin^2 t - tgt * (-ctgt) = -\sin^2 t + 1 = \cos^2 t$

Uchunchi tartibli determinant

Bizga uchunchi tartibli kvadrat matritsa berilgan bo`lsin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

(3) kvadrat matritsaga ushbu

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

sonni mos qo`yamiz. Bu son A matritsaning determinant deyildi va $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - -a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (4)$$

(4) formula uchunchi tartibli determinantning hisoblash formulasi deb aytiladi.

(4) formula 3-tartibli determinantni yechishning “**uchburchak usuli” deyiladi.**Uning o`ng tomonidagi ifodalar quyidagicha hosil qilingan:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$ (4) formula hosil bo`ladi.

3-misol. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 5 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

Yechish. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 5 \\ -4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)*(-5)*(-3) + 2*5*(-4) + 4*3*(-2) - 4*(-5)*(-4) - 2*3*(-3) - (-1)*5*(-2) = -15 - 40 - 24 - 80 + 18 - 10 = -151$

Yuqorida keltirilgan uchunchi tartibli determinant qiymatini hisoblash qoidasi esda qolishi uchun quiydagi Sarrus jadvallari ishlatiladi:

2.Determinant xossalari

1-xossa. Agar determinantning satr va ustun elementlarini o`rinlari o`zaro almashtirilsa, uning qiymati o`zgarmaydi. Hamma xossalarning isbotlarini 2-tartibli determinant uchun qarab chiqilsa kifoya.

Isbot. $D = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$ berilgan

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{21} \\ a_{12}\, a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}a_{21} = D$$

2-xossa. Agar determinantning 2 ta satrlar elementlari yoki 2ta ustunlar elementlarini

o`zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshiga o`zgaradi.

Isbot. *D* berilgan bo`lsin.

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{12}\, a_{22} \\ a_{11}\, a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}\, a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -D$$

3-xossa. Agar determinantning 2ta satr yoki 2ta ustun elementlari bir xil bo`lsalar, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Isbot.

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

4-xossa. Determinantning biror ustuni yoki biror satridan umumiy ko`paytuvchini determinant belgisi oldiga chiqarish mumkin.

Isbot.

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & k \cdot a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

5-xossa. Agar determinantning biror satr yoki ustun elementlarining hammasi nollardan iborat bo`lsa, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Isbot.

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

6-xossa. Agar determinantning ikkita satr yoki ustun elementlari proportsional bo`lsalar, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Isbot.

$$D_6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot k \cdot a_{12} - k\, a_{11}a_{12} = 0$$

7-xossa. Agar determinantning biror satr yoki ustun elementlari ikkita qo`shiluvchining yig`indisidan iborat bo`lsa, u holda bu determinant quyidagi ikkita determinantlarning yig`indisiga teng, ya'ni $D_7 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$

8-xossa. Agar determinantning biror satr yoki ustun elementlariga boshqa satr yoki ustun elementlarini biror songa ko`paytirib qo`shilsa, uning qiymati o`zgarmaydi.

Isbot.

$$D_8 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

9-xossa. Agar determinantning biror satr yoki ustun elementlarini ularning mos algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytirib qo`shsak, bu yig`indi determinantning qiymatiga teng bo`ladi.

Isbot.

$$D_9 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot A_{12} + a_{22}\, A_{22} = -a_{12} \cdot a_{21} + a_{22} \cdot a_{11} = a_{11}\, a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Bu xossa 4-5-tartibli determinantlarni hisoblashning asosiy usulidir:

10-xossa. Agar determinantning biror satr yoki ustun elementlari boshqa satr yoki ustun elementlarining algebraik to`ldiruvchilariga ko`paytirib qo`shilsa, uning qiymati nolga teng bo`ladi.

Isbot. $D_{10} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot A_{21} + a_{22}\, A_{22} = -a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} a_{11} = 0$

4-Mavzu: O’rin almashtirishlar va o’rinlashtirishlar

Mavzu rejasi:

1. O’rin almashtirishlar va o’rinlashtirishlar
2. O’rin almashtirishlar inversiyasi.

1. Bizga dastlabki n ta natural sonlar $(1, 2, ..., n)$ berilgan bo‘lsin. Bu sonlarnio‘sish tartibida joylashishdan tashqari boshqa usullar bilan ham tartiblash mumkin. Masalan, $n = 3$ bo‘lgan holda $(1, 2, 3)$ uchlikni $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 2, 1)$ va $(3, 1, 2)$ kabi tartiblarda joylash-tirishimiz mumkin.

7.1-ta’rif. $1,\ 2,\ ...,\ n$ sonlarning ma’lum bir tartibdagi joylashi-shiga n ta sondan tuzilgan *o‘rin almashtirish* deyiladi.

n ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar to‘plami S_n kabi belgilanadi.

7.2-tasdiq. n ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya’ni $|S_n| = n!$.

Isbot. Ushbu tasdiqni isbotlashda matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Ravshanki, $n = 1$ da o‘rin almashtirish soni bitta bo‘ladi, ya’ni $1! = 1$. Shuningdek, $n = 2$ bo‘lgan holda o‘rin almashtirishlar soni ikkita bo‘ladi, ya’ni $(1, 2)$ va $(2, 1)$.

Tasdiqni $n-1$ ta sonli o‘rin almashtirishlar uchun o‘rinli deb faraz qilib, n ta sonli o‘rin almashtirish uchun ko‘rsatamiz.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlarning har biriga unga kirmagan n sonini joylashtirib chiqish natijasida barcha n ta sondan tuzilgan o‘rin almashtirish hosil qilamiz. Xar bir o‘rin almashtirishda n soni n hil usulda joylashadi.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o‘rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta ekanligidan, n ta sondan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni $(n-1)!\cdot n = n!$ ekanligi kelib chiqadi.□

7.3-ta’rif. O‘rin almashtirishning ixtiyoriy ikkita elementini o‘rnini almashtirishga transpozitsiya deyiladi.

Misol 7.1. $(1,2,3,4)$ o‘rin almashtirishni 2 va 4-o‘rinlarini almashtirishdan quyidagi $(1,4,3,2)$ o‘rin almashtirish hosil bo‘ladi.

7.4-teorema. n ta elementdan iborat barcha $n!$ ta o‘rin almashtirishlarni shunday tartibda joylashtirish mumkinki, bunda xar bir keyingi o‘rin almashtirish oldingisidan birgina transpozitsiya yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, transpozitsiyalashni ixtiyoriy o‘rin almashtirishdan boshlash mumkin.

Isbot. Teoremani isbotlashda induksiya metodidan foyda-lanamiz. Ravshanki, $n=2$ bo‘lganda teorema o‘rinli. Teoremani $n-1$ uchun o‘rinli deb faraz qilib, n uchun isbotlaymiz. Bizga

$$(i_1, i_2, ..., i_n) \tag{7.1}$$

o‘rin almashtirish berilgan bo‘lsin. Birinchi o‘rinda i_1 turgan n ta elementdan iborat barcha o‘rin almashtirishlarni qarab chiqamiz. Bunday o‘rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta va ularni teoremaning talablariga moslab tartiblash mumkin.

Bu tartiblashni induktiv farazga muvofiq ixtiyoriy o‘rin almashtirishdan, xususan, $(i_2, ..., i_n)$ o‘rin almashtirishdan boshlash mumkin, n ta simvoldan ana shunday yo‘l bilan hosil qilingan o‘rin almashtirishlarning oxirgisida i_1 simvolni ixtiyoriy boshqa bir simvol bilan, masalan, i_2 bilan transpozitsiyalaymiz va yangi hosil qilingan o‘rin almashtirishdan boshlab, birinchi o‘rinda i_2 turgan barcha o‘rin almashtirishlarni keraklicha tartiblashtiramiz va hokazo. Bunday yo‘l bilan, n ta simvoldan iborat barcha o‘rin almashtirishlarni saralab chiqish mumkin. □

Misol 7.2. S_3 to‘plamning elementlarini quyidagi tartibda joylashtirib chiqamiz:

1,2,3; 1,3,2; 3,1,2; 3,2,1; 2,3,1; 2,1,3;

Bundan tashqari biz o‘rin almashtirishda bir nechta transpozitsiyalar bajarib, boshqa o‘rin almashtirishga o‘tishimiz mumkin. O‘rin almashtirishda ikki elementni transpozitsiyalash quyidagicha ko‘rinishda ham tasvirlashimiz mumkin:

$$..., i, ..., j, ... \xrightarrow{tr(i,j)} ..., j, ..., i, ...$$

7.5-ta’rif. Agar berilgan o‘rin almashtirishda $i > j$ bo‘lib, o‘rin almashtirishda i soni j dan oldin turgan bo‘lsa, i va j sonlar *inversiya tashkil etadi* deyiladi va $inv(i, j)$ shaklda belgilanadi.

O‘rin almashtirishdagi inversiya tashkil etuvchi juftliklar soniga o‘rin almashtirishning *inversiyasi* deyiladi va $inv(i_1, i_2, ..., i_n)$ kabi belgilanadi. Inversiyasi toq va juft son bo‘lgan o‘rin almashtirishlar mos ravishda toq va juft o‘rin almashtirishlar deb ataladi. Berilgan $(i_1, i_2, ..., i_n)$ o‘rin almashtirishning *signaturasi* deb,

$$sign(i_1, i_2, ..., i_n) = (-1)^{inv(i_1, i_2, ..., i_n)}$$

miqdorga aytiladi. Ma’lumki, o‘rin almashtirishning signaturasi uning toq va juftligiga qarab, -1 yoki 1 ga teng bo‘ladi.

7.6-teorema. O‘rin almashtirishda har qanday bajarilgan transpozitsiya uning toq-juftligini o‘zgartiradi.

Isbot. Dastlab, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar yonma-yon turgan holni ko‘raylik, ya’ni

$$(k_1, ..., k_{s-1}, i, j, k_{s+2}, ..., k_n) \text{ va } (k_1, ..., k_{s-1}, j, i, k_{s+2}, ..., k_n)$$

ko‘rinishidagi o‘rin almashtirishlarni qaraymiz. Ma’lumki, bu o‘rin almashtirishlarning inversiyalar soni faqat i va j qa bog‘liq holda farqlanadi. Ya’ni agar $i > j$ bo‘lsa birinchi o‘rin almashtirishning inversiyalar soni ikkinchisidan bittaga ortiq, aks holda bittaga kam bo‘ladi. Ya’ni, transpozitsiyalangandan so‘ng o‘rin almashtirishning toq-juftligini o‘zgaradi.

Endi umumiy holni, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar orasida $k_1, k_2, ..., k_s - s$ ta son joylashgan holni qaraymiz

$$(..., i, k_1, k_2, ..., k_s, j, ...).$$

Bu o‘rin almashtirishda i ni j dan keyingi o‘ringa joylashtirish uchun $s+1$ ta transpozitsiya bajarib, o‘rin almashtirishni $(..., k_1, k_2, ..., k_s, j, i, ...)$ ko‘rinishga keltiramiz. Endi j ni k_1 dan oldin joylashtirish uchun s ta transpozitsiya bajarishimiz kerak va o‘rin almashtirish $(..., j, k_1, k_2, ..., k_s, i, ...)$ ko‘rinishiga keladi. Demak, $2s+1$ ta transpozitsiya bajarildi. Natijada birinchi o‘rin almashtirish bilan hosil bo‘lgan ikkinchi o‘rin almashtirishlarning inversiyasi toq son martaga o‘zgaradi. Demak, birinchi o‘rin almashtirishning inversiyasi toq bo‘lsa, transpozitsiyalash natijasida juft o‘rin almashtirishga va aksincha, juft bo‘lsa, toq o‘rin almashtirishga o‘tadi. □

Ushbu teoremadan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

7.7-natija. $n \geq 2$ bo‘lganda n ta simvoldan tuzilgan juft o‘rin almashtirishlar soni toq o‘rin almashtirishlar soniga, ya’ni $\frac{n!}{2}$ ga teng.

Endi biz o‘rniga qo‘yish tushunchasi va uningxossalarini o‘rganamiz. Bizga $A=\{1,2,\ldots,n\}$ birinchi n ta natural sondan iborat to‘plam berilgan bo‘lsin.

2.7.8-ta’rif. A to‘plamning o‘zini o‘ziga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirishga n*-darajali o‘rniga qo‘yish* deyiladi.

$A=\{1,2,\ldots,n\}$ to‘plamda aniqlangan barcha $f: A \to A$ biyektiv akslantirishlarni quyidagi ustun shaklida yozib chiqamiz:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \ldots & n \\ f: & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ & f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{array}$$

Agar $f(1)=\alpha_1, f(2)=\alpha_2, \ldots, f(n)=\alpha_n$ deb olsak, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o‘rin almashtirish bo‘lib, bu moslikni quyidagi sxema yordamida tasvirlab olamiz:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Demak, bu n -darajali o‘rniga qo‘yish bo‘ladi.

Misol 7.3. $n=4$ da $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=1$ bo‘lsa, bu to‘rtinchi tartibli o‘rniga qo‘yish quyidagicha yoziladi:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sxemadan ko‘rinib turibdiki, xar bir o‘rniga qo‘yishlarga aniq bir o‘rin almashtirish mos qo‘yiladi. Demak, o‘rin almashtirishlar uchun kiritilgan tushunchalar va xossalar to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘rniga qo‘yishlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, hamma o‘rniga qo‘yishlar soni $n!$ ta bo‘ladi.

Bundan tashqari, tuzilgan sxema orqali akslantirishlarning kompozitsiyasini quyidagicha tasvirlaymiz:

Agar $f:A\to A$ va $g:A\to A$ bo‘lsa, u holda ularning $g\circ f:A\to A$ kompozitsiyasi quyidagicha sxema ko‘rinishida ifodalanadi:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ f: & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ & f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ g: & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ & g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{array}$$

Demak,

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ g\circ f: & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ & g(f(1)) & g(f(2)) & \dots & g(f(n)) \end{array}$$

Shunday qilib, ushbu sxemadan

$$\begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ g\big(f(1)\big) & g\big(f(2)\big) & \dots & g\big(f(n)\big) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g\big(f(1)\big) & g\big(f(2)\big) & \dots & g\big(f(n)\big) \end{pmatrix}=g\circ f$$

hosil bo‘ladi.

Misol 7.4. $n=4$ da $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ va $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlarning ko‘paytmasini sxematik ko‘rinishi quyidagicha:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g\circ f: & 2 & 1 & 4 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 3 & 4 & 1 & 2. \end{array}$$

Algebraik ifodasi esa,

$$g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

n-darajali o‘rniga qo‘yishning barcha simvollari o‘z o‘rnida qoladigan bo‘lsa, bunday o‘rniga qo‘yishga *aynan o‘rniga qo‘yish* deyiladi, ya’ni:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\end{pmatrix}$ o‘rniga qo‘yishga teskari f^{-1} o‘rniga qo‘yish

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$$

shakldа bo‘ladi. Quyidagi tenglik o‘rinli ekanini tekshirib ko‘rish qiyin emas:

$$f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=E=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}.$$

Ta’kidlash joizki,

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & \dots & n\\ f: & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow\\ & f(1) & f(2) & \dots & f(n)\end{array}$$

qoidani qaysi tartibda yozilishi ahamiyatga ega emas, shuning uchun f^{-1} o‘rniga qo‘yishning ustunlari bo‘yicha shunday joylashtiramizki, uni birinchi satrida tartiblangan $1,2,\dots,n$ o‘rin almashtirish joylashtiriladi.

Misol 7.7.

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix} \text{ bo‘lsa,}$$

$$f^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \text{ bo‘ladi.}$$

Ravshanki, n-darajali o‘rniga qo‘yishlarni ko‘paytirish assosiativlik qoidasiga bo‘ysunadi, ya’ni $\forall f, g, h$ o‘rniga qo‘yishlar uchun

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h).$$

Ammo o‘rniga qo‘yishlar kommutativlik qoidasiga bo‘ysunmaydi.

Misol 7.8. $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$ o‘rniga qo‘yishlar berilgan bo‘lsa, u holda

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan $f \circ g \neq g \circ f$ ekanligi kelib chiqadi.

5-Mavzu: n- tartibli Detreminantlar

Mavzu rejasi:

1. n-tartibli determinantlar
2. Determinantlarni xossalari
3. Determinantlarni hisoblash usullari

1. Bizga $A \in M_n(\mathrm{K})$ kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \qquad (9.1)$$

bu yerda $\mathrm{K} = □$ yoki □ .

Bu matritsaning ixtiyoriy satr va ustunidan bittadan olingan n ta elementlarining ko‘paytmasini qaraymiz:

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Ko‘paytmaning ko‘paytuvchilaridagi indekslaridan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yishni tuzib olamiz.

Demak, har bir ko‘paytuvchiga bitta o‘rniga qo‘yishni mos qo‘yish mumkin. Aksincha, har bir n-tartibli o‘rniga qo‘yishga matritsadan yuqoridagi kabi olingan ko‘paytmani mos qilib qo‘yishimiz mumkin.

Ko‘paytmaning ishorasini o‘rniga qo‘yishni signaturasi bilan aniqlaymiz, ya’ni

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^{inv\alpha}.$$

Quyidagi ko‘paytmani hosil qilamiz:

$$\operatorname{sgn}(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Hamma o‘rniga qo‘yishlar soni $n!$ bo‘lganligi uchun, tuzilgan ko‘paytmalar soni ham $n!$ ta bo‘ladi. Bu elementlarning

$$\sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{1,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} \tag{9.2}$$

yig‘indisini qaraymiz.

9.1-ta’rif. Yuqorida hosil bo‘lgan (9.2) yig‘indiga berilgan n-tartibli A kvadrat matritsaning determinanti deyiladi. Determinant odatda $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, determinantni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha\in S_n} \operatorname{sgn}(\alpha) a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}. \tag{9.3}$$

Agar (9.3) ifodada $n=1,2,3$ deb olsak, mos ravishda quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\det(a_{11}) = a_{11}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Masalan, uchinchi tartibli determinantning to‘rtinchi ko‘payt-masini olsak, unga $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ uchinchi tartibli o‘rniga qo‘yish mos qo‘yilgan bo‘lib, bu o‘rniga qo‘yishning inversiyasi 3 ga teng. Shuning uchun ko‘paytma manfiy ishora bilan ishtirok etadi.

Misol 9.1. a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 5 - 2\cdot(-3) = 20 + 6 = 26;$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 50 - 12 + 60 + 4 - 45 = -25.$

Endi determinantlarni hisoblashda asosiy vazifalarni bajaruvchi xossalarni keltiramiz.

9.2-xossa. Matritsani transponirlash natijasida determinantning qiymati o‘zgarmaydi, yani $|A| = |A^T|$.

Isbot. Ma’lumki, A matritsaning determinantini hisoblashda har bir satr va ustunlardan bittadan element olinadi. Transponirlangan matritsaning determinantida ham aynan shu ko‘paytmalar ishtirok etadi. Demak, transponirlash natijasida yig‘indidagi ko‘paytmalar o‘zgarishsiz qoladi.

Bu ko‘paytmalarning ishorasini aniqlovchi o‘rniga qo‘yish esa $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ dan $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ ga o‘zgaradi.

Chunki, A determinantdagi $a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$ element A^T de-terminantda $a_{\alpha_{1,1}} \cdot a_{\alpha_{2,2}} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_{n,n}}$ kabi o‘rinda keladi. $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$ ekanligidan, hosil bo‘lgan ko‘paytmalarning ishoralari ham bir hil bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, A^T matritsaning determinanti A matritsaning determinantiga teng ekan.□

Ushbu xossadan determinantning satrlari uchun o‘rinli bo‘ladigan barcha xossalari ustunlari uchun ham o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun determinantning qolgan xossalarini faqat satrlar uchun keltirish kifoya.

Quyidagi ikkita xossa determinantning istalgan satrlari bo‘yicha chiziqli ekanligini anglatadi.

9.3-xossa. Agar determinantning biror satri ikkita qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant satrlari shu qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lgan ikkita determinantning yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i,1} + c_{i,1} & \ldots & b_{i,n} + c_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i,1} & \ldots & b_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i,1} & \ldots & c_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot.

$$\Delta=\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(b_{i,\alpha_i}+c_{i,\alpha_i})\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}=$$

$$=\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot b_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}+\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot c_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo‘lib, bu qo‘shiluvchilar mos ravishda

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ b_{i,1} & \ldots. & b_{i,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1,n} & \ldots. & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ va } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ c_{i,1} & \ldots. & c_{i,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1,n} & \ldots. & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ga teng bo‘ladi.□

Isbotlangan xossa determinantning satri bir nechta qo‘shiluvchilardan iborat bo‘lgan holda ham o‘rinlidir.

9.4-xossa. Agar determinantning biror-bir satri umumiy ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, u holda bu umumiy ko‘paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin, ya’ni

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ ka_{i,1} & \ldots. & ka_{i,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1,n} & \ldots. & a_{n,n} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots. & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1,n} & \ldots. & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Haqiqatan,

$$\Delta=\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot ka_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}=$$

$$k\sum_{\alpha\in S_n}\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot a_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}=k\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots. & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ a_{1,n} & \ldots. & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

9.5-xossa. Agar determinantning biror satri nollardan iborat bo‘lsa, u holda determinantning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan, determinant ta’rifiga asosan yig‘indidagi har bir ko‘paytmada barcha satrlardan bittadan element ishtirok etadi. Xususan, barcha elementlari nolga teng bo‘lgan satrdan ham albatta bitta element, ya’ni nol olinadi. Demak, ko‘paytmalar nolga teng bo‘lib, ularning yig‘indisi bo‘lgan determinantning qiymati ham nolga teng bo‘ladi.□

9.6-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita satri o‘rnini almashtirish natijasida uning faqat ishorasigina o‘zgaradi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Agar birinchi determinantning umumiy hadi $a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$ bo‘lsa, satrlarni almashtirishdan so‘ng hosil bo‘lgan determinantning umumiy hadi

$$a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo‘ladi. Bu hadlarga mos keluvchi o‘rniga qo‘yishlar esa,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{va} \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bo‘lib, ularning ishoralari o‘zaro qarama-qarshi bo‘ladi.

Demak, determinantlarning umumiy hadlari qarama-qarshi ishorali bo‘lganligi uchun determinantlarning qiymatlari ham faqat ishorasi bilan farq qiladi.

□

Bu xossadan to‘g‘ridan-to‘g‘ri quyidagi xossani hosil qilamiz.

9.7-xossa. Bir hil satrlarga ega bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot. Faraz qilaylik, determinantning $i-$satri $j-$satr bilan bir hil bo‘lsin. U holda oldingi xossaga asosan bu satrlarni o‘rinlarini almashtirish natijasi unga ishorasi qarama-qarshi bo‘lgan determinantni hosil qilamiz va ular aynan tengdir, ya’ni $\Delta = -\Delta$ bo‘lib, bundan $2\Delta = 0,\ \Delta = 0$ hosil bo‘ladi.

□

9.4 va 9.7-xossalardan quyidagi xossaga ega bo‘lamiz:

9.8-xossa. Proporsional satrlarga ega bo‘lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i,1} & \dots & ka_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan xossani keltiramiz.

9.9-xossa. Agar determinantning biror satrini λ soniga ko‘paytirib, boshqa bir satriga qo‘shsak, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isbot. Determinantni $i-$satrini λ ga ko‘paytirib, $j-$satriga qo‘shamiz:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i,1} + a_{j,1} & \dots & \lambda a_{i,n} + a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i,1} & \dots & \lambda a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda\cdot 0+\Delta=\Delta.$$

Misol 9.2. Ushbu determinantni xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & -8 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & -12 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 27=-54.$$

6-7 -Mavzu: Algebraik to’ldiruvchi va minorlar. Laplas teoremasi

Mavzu rejasi:

1. Algebraik to’ldiruvchi va minorlar.
2. Laplas teoremasi

1.Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim vositachi vazifasini bajaruvchi minor va algebraik to‘ldiruvchi tushunchalarini kiritamiz. Minorlar va algebraik to‘ldiruvchilar determinantlarning tartibini pasaytirib hisoblashda asosiy rol o‘ynaydi.

Bizga quyidagi n -tartibli determinant berilgan bo‘lsin

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning ixtiyoriy $a_{i,j}$ elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $a_{i,j}$ elementni 1 bilan, i-satr va j-ustun qolgan elementlarini nollar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi, ya'ni $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Berilgan $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{i,j}$ kabi belgilanadi.

10.1-xossa. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satri elementlari bilan mos algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}. \qquad (10.1)$$

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun determinantni qiyudagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}+0+\dots+0 & \dots & 0+\dots+a_{i,j}+\dots+0 & \dots & 0+\dots+0+a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

9.3-xossaga ko‘ra ushbu determinantni n ta determinantlar yig‘indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{i,j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Hosil bo‘lgan determinantlarning i-satrlaridan mos ravishda $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$ sonlarini determinantlar tashqarisiga chiqazib yozamiz:

$$\det(A)=a_{i,1}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}+\dots+$$

$$+a_{i,j}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}+\dots+a_{i,n}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinantlarni algebraik to‘ldiruvchilarga teng ekanligini ko‘rish qiyin emas. Buning uchun birinchi determinantning i-satrini $-a_{1,1}$ ga ko‘raytirib birinchi satrga, $-a_{2,1}$ ga ko‘paytirib ikkinchi satrga, va hokazo $-a_{n,1}$ ga ko‘raytirib oxirgi satrga qo‘shsak $A_{i,1}$ algebraik to‘ldiruvchi hosil bo‘ladi.

Xuddi shunday qolgan determinantlar $A_{i,2}$, …, $A_{i,n}$ algebraik to‘ldiruvchilarni beradi, Demak,

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + ... + a_{i,n}A_{i,n}. \square$$

Determinantning ushbu xossasi uni biror satri bo‘yicha yoyish xossasi deyiladi.

Agar $\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + ... + a_{i,n}A_{i,n}$ yoyilmada *i*-satrining elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, ..., b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo‘ladigan

$$b_1A_{i,1} + b_2A_{i,2} + ... + b_nA_{i,n} \qquad (10.2)$$

ifoda determinantning *i*-satrini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j} & ... & a_{1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_1 & ... & b_j & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j} & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantga teng bo‘ladi.

Demak, biror satr algebraik to‘ldiruvchilarini berilgan n *ta* $b_1, b_2, ..., b_n$ *sonlarga ko‘paytmalarining yig‘indisi shu satr elementlarini berilgan sonlar bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsaning determinantiga teng.*

Bu xulosadan quyidagi xossa osongina kelib chiqadi.

10.2-xossa. Determinantning biror satri elementlarini boshqa bir satr algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisiga nolga teng, ya’ni

$$a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + ... + a_{i,n}A_{k,n} = 0, \text{ bu yerda } i \neq k. \qquad (10.3)$$

Isbot. Ma’lumki,

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,j} & \dots & a_{k,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}=a_{k,1}A_{k,1}+a_{k,2}A_{k,2}+\ldots+a_{k,n}A_{k,n}.$$

Ushbu tenglikning o‘ng tomonidagi $a_{k,1},a_{k,2},\ldots,a_{k,n}$ elementlarni mos ravishda $a_{i,1},a_{i,2},\ldots,a_{i,n}$ lar bilan almashtirsak,

$$a_{i,1}A_{k,1}+a_{i,2}A_{k,2}+\ldots+a_{i,n}A_{k,n}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}=0$$

ekanligini hosil qilamiz. □

Endi minor tushunchasini kiritamiz. Ushbu mavzuda faqat $n-1$-tartibli minorni aniqlash bilan chegaralanib, ixtiyoriy tartibli minor ta’rifini keyingi mavzuda keltiramiz.

Determinantning $n-1$-tartibli *minori* deb, uning i-satr va j-ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $n-1$-tartibli determinantga aytiladi va $\Delta_{i,j}$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$\Delta_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

10.3-tasdiq. $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, ya'ni algebraik to'ldiruvchi unga mos $n-1$ tartibli minor bilan faqat ishoragagina farq qilishi mumkin.

Isbot. Tasdiq isbotini dastlab, $i = j = 1$ bo'lgan hol uchun ko'rsatamiz:

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Determinant ta'rifiga ko'ra

$$A_{1,1} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Lekin, $a_{1,1} = 1$ va $a_{1,k} = a_{k,1} = 0,\ 2 \le k \le n$ bo'lganligi uchun, $\alpha_1 = 1$ bo'lib, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlari esa $2, \dots, n$ sonlaridan hosil bo'lgan o'rin almashtirish bo'ladi. Bundan tashqari

$$inv(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = inv(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$A_{1,1} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$\sum_{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{inv(\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Delta_{1,1}$$

kelibchiqadi.

Enditasdiqniixtiyoriy i va j uchunisbotlaymiz:

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning 9.6-xossasidan foydalanib, ushbu determinant-dagi 1 sonini chap yuqori burchakka ko‘chiramiz. Buning uchun i-satr-ni ketma-ket o‘zidan oldingi starlar bilan, so‘nga j-ustinni o‘zidan oldingi ustunlar bilan almashtirish kifoya. Bu almashtirishlar natijasida determinantning qiymati faqat $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ ga o‘zgarishini hisobga olsak,

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Yuqorida isbotlangan $i = j = 1$ holdan foydalansak, $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ ekanligini hosil qilamiz. □

2.Laplas teoremasi

Biz avvalgi mavzuda $A_{i,j}$ algebraik to‘ldiruvchi va $n-1$-tartibli $\Delta_{i,j}$ minor tushunchalarini kiritgan edik. Ushbu mavzuda ixtiyoriy k-tartibli minor tushunchasini kiritamiz.

Berilgan n-tartibli determinantning ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunining kesishgan joylaridagi elementlardan hosil qilingan k-tartibli determinantga k-*tartibli minor* deyiladi. Determinantning $i_1, i_2, \dots, i_k$ satrlari va $j_1, j_2, \dots, j_k$ ustunlari kesishmasidan tuzilgan minor $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$ kabi belgilanadi. Xususan, determinantning elementlarini ham birinchi tartibli minorlar deb qarash mumkin.

Tanlab olingan k ta satr va k ta ustunlarni o‘chirib tashlash natijasida hosil bo‘lgan $(n-k)$-tartibli determinantga, berilgan minorning *to‘ldiruvchi minori* deyiladi. $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ minorning to‘ldiruvchi minori $\overline{M}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ kabi belgilanadi.

k-tartibli $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ minorning *algebraik to‘ldiruvchisi deb*

$$\overline{A}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k} = (-1)^{S_M}\,\overline{M}_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k} \qquad (11.1)$$

ifodaga aytiladi, bu yerda

$$S_M = (i_1 + i_2 + ... + i_k) + (j_1 + j_2 + ... + j_k).$$

Ta’kidlash joizki, algebraik to‘ldiruvchi tushunchasi minor birinchi tartibli bo‘lgan holda 10-mavzuda kiritilgan tushuncha bilan ustma-ust tushadi, ya’ni $A_{i,j} = \overline{A}_i^j$. $n-1$-tartibli $\Delta_{i,j}$ minor esa birinchi tartibli $a_{i,j}$ minorning to‘ldiruvchi minori bo‘ladi.

Misol 11.1. Ushbu $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ determinant uchun

$$M_{1,3} = 2,\ M_{1,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -86.$$

Berilgan matritsaning bosh diagonalida joylashgan

$$a_{1,1},\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{12,} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix},\ ...,\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & a_{k,2} & ... & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning *bosh minorlari* deb ataladi.

Minor, hamda unga mos keluvchi to‘ldiruvchi minor va algebraik to‘ldiruvchilarni qulaylik uchun M, $\overline{M}$ va $\overline{A}$ lar bilan belgilab olamiz.

11.1-lemma. $M \cdot \overline{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lib, ular bir hil ishorali bo‘ladi.

Isbot. Lemma isbotini dastlab, berilgan M minor k-tartibli bosh minor bo‘lgan hol uchun ko‘rsatamiz:

$$M \cdot \bar{A} = M \cdot (-1)^{S_M} \cdot \overline{M} = (-1)^{S_M} \cdot M \cdot \overline{M} .$$

U holda

$$S_M = (1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k) = 2(1+2+\ldots+k)$$

juft son bo‘ladi. Demak,

$$M \cdot \bar{A} = M \cdot \overline{M} .$$

Ma’lumki, M va $\overline{M}$ minorlarning hadlari mos ravishda

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{k,\alpha_k} \text{ va } \operatorname{sgn}(\beta)\cdot a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdot a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdot\ldots\cdot a_{n,\beta_n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

va $\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^{inv\alpha}$, $\operatorname{sgn}(\beta) = (-1)^{inv\beta}$.

Ushbu hadlarning ko‘paytmasi

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot\operatorname{sgn}(\beta)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{k,\alpha_k}\cdot a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdot a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdot\ldots\cdot a_{n,\beta_n}$$

bo‘lib, bu ko‘paytma determinantning turli satr va ustunlaridan bittadan olingan n ta elementlarning ko‘paytmasidan iborat, ya’ni n-tartibli determinantning hadi bo‘ladi. Endi n-tartibli determinantning ushbu hadi ishorasi $\operatorname{sgn}(\alpha)\cdot\operatorname{sgn}(\beta)$ ga teng ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, bu hadning indekslaridan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

o‘rniga qo‘yishning $inv\alpha + inv\beta$ ta inversiyasi bor, chunki hech qaysi α_i hech bir β_j bilan inversiya tashkil qilmaydi, ya’ni barcha α_i sonlari β_j lardan kichik.

Shunday qilib, biz M minor k-tartibli bosh minor bo‘lgan holda $M \cdot \bar{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lishini ko‘rsatdik.

Endi umumiy holni, ya’ni M minor $M_{i_1,i_2,...,i_k}^{j_1,j_2,...,j_k}$ bo‘lgan holni qaraymiz. Ma’limki, $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $j_1 < j_2 < ... < j_k$ deb olish mumkin.

U holda $|A|$ determinantning $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlari va $j_1, j_2, ..., j_k$ ustunlarini mos ravishda o‘zidan oldingi satrlar va ustunlar bilan $i_1 - 1, i_2 - 2, ..., i_k - k$ va $j_1 - 1, j_2 - 2, ..., j_k - k$ marotaba almashtirsak, hosil bo‘lgan determinantda berilgan M minor bosh minor bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan $|A'|$ determinant oldingi $|A|$ determinant bilan faqat $(-1)^z$ ishora bilangina farq qiladi, ya’ni

$$|A| = (-1)^z \cdot |A'|,$$

bu yerda

$$z = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + ... + (i_k - k) + (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + ... + (j_k - k) =$$

$$= (i_1 + i_2 + ... + i_k) + (j_1 + j_2 + ... + j_k) - 2(1 + 2 + ... + k) =$$

$$= S_M - 2(1 + 2 + ... + k).$$

Demak,

$$|A| = (-1)^{S_M - 2(1+2+..+k)} \cdot |A'| = (-1)^{S_M} \cdot |A'|.$$

Bu yerdagi $|A'|$ determinantda M minor bosh minor bo‘lganligi uchun $M \cdot \overline{M}$ ko‘paytmasining hadlari $|A'|$ determinantning hadlari bo‘lishi kelib chiqadi. $M \cdot \overline{A} = (-1)^{S_M} M \cdot \overline{M}$ ekanligidan $M \cdot \overline{A}$ ko‘paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo‘lishi kelib chiqadi.□

Endi biz determinantni bir nechta satri yoki ustuni bo‘yicha yoyish haqidagi Laplas teoremani keltiramiz.

11.2-teorema. (Laplas teoremasi). Determinantning tanlab olingan k ta ($1 \le k \le n-1$) satri bo‘yicha barcha k-tartibli minorlarining o‘z algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisi determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Teoremaning shartiga asosan biz

$$|A| = M_1 A_1 + M_2 A_2 + ... + M_z A_z \qquad (11.2)$$

yoyilmaning to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bu yerda M_i lar tanlab olingan $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlar bo‘yicha olingan barcha minorlar va A_i lar minorlarga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchilardir.

Yuqoridagi lemmaga asosan $M_i A_i,\ i=\overline{1,z}$ ko‘paytmalarning xar bir hadi determinantning hadi bo‘lib, ular bir hil ishorali bo‘ladi.

Aytaylik,

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot ... \cdot a_{n,\alpha_n}$$

determinantning ixtiyoriy hadi bo‘lsin. Bu ko‘paytmadan tanlab olingan $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlarga tegishli bo‘lgan elementlarning ko‘paytmasini olamiz:

$$a_{i_1,\alpha_{i_1}} \cdot a_{i_2,\alpha_{i_2}} \cdot ... \cdot a_{i_k,\alpha_{i_k}}.$$

Bu ko‘paytma $i_1, i_2, ..., i_k$ satrlar va $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_k}$ ustunlarning kesishmasida turuvchi k-tartibli M minorning umumiy hadi bo‘lib, olinmay qolgan ko‘paytuvchilar $(n-k)$-tartibli $\overline{M}$ to‘ldiruvchi minorning umumiy hadi bo‘ladi.

Shunday qilib, determinantning xar qanday hadi tanlab olingan satrlar bo‘yicha M minor bilan to‘ldiruvchi $\overline{M}$ minorining tarkibiga kiradi. Determinantda bo‘lgan hadni hosil qilish uchun esa, to‘ldiruvchi minorni algebraik to‘ldiruvchi bilan almashtirish kifoya.

Endi biz (11.2) tenglikning o‘ng tomonidagi hadlar soni chap tomonida hadlar soniga teng ekanligini ko‘rsatamiz. Bizga ma’lumki, M_i minorda $k!$ ta had bo‘lib, A_i algebraik to‘ldiruvchida esa $(n-k)!$ ta had mavjud. Demak, $M_i A_i$ ko‘paytmada $k!(n-k)!$ ta had ishtirok etadi. Ma’lumki, tanlab olingan *k* ta satrdan hosil qilinadikan barcha *k*-tartibli minorlar soni n ta sondan k ta sonni tanlab olishlar soniga, ya’ni C_n^k ga teng. Demak, o‘ng tomondagi barcha hadlar soni

$$C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

ga teng. Bu esa chap tomondagi hadlar soni bilan o‘ng tomondagi hadlar soni teng ekanligini bildiradi. Chunki, *n*-tartibli determinantning $n!$ ta hadi mavjud. Demak, biz determinantning barcha hadi o‘ng tomonda ham aynan bir marotaba ishtirok etishini ko‘rsatdik. □

Misol 11.2. Ushbu 4-tartibli determinantni Laplas teoremasidan foydalanib hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantni birinchi va uchinchi satrlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz, ya’ni $i_1 = 1, i_2 = 3$ bo‘lgan holni tanlaymiz. $k = 2$ bo‘lganligi uchun $z = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ bo‘ladi.

Determinantning qiymati esa quyidagiga tengdir:

$$d = M_{1,3}^{1,2} A_{1,3}^{1,2} + M_{1,3}^{1,3} A_{1,3}^{1,3} + M_{1,3}^{1,4} A_{1,3}^{1,4} + M_{1,3}^{2,3} A_{1,3}^{2,3} + M_{1,3}^{2,4} A_{1,3}^{2,4} + M_{1,3}^{3,4} A_{1,3}^{3,4} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3-2)\cdot(-25-6) = -5\cdot(-31) = 155.$$

Yuqoridagi misoldan ko‘rinib turibdiki, Laplas teoremasini qo‘llashda tarkibida nol ishtirok etgan satr yoki ustunlarni tanlab olish, hisob kitoblarni ancha yengillashtiradi. Demak, determinantda yetarlicha nollar ishtirok etgan holda, aynan noli ko‘p satrlar uchun Laplas teoremasini qo‘llash orqali determinantni tez va oson hisoblash mumkin.

8-9 -Mavzu: Xos va xosmas matritsalar. Teskari matritsa

Mavzu rejasi:

1. Xos va xosmas matritsalar.
2. Teskari matritsa

Ushbu mavzuda biz n-tartibli matritsaning determinanti bilan bog‘liq masalalar bilan shug‘ullanamiz.

12.1-ta’rif. Determinanti nolga teng bo‘lgan matritsa *xos* matritsa, noldan farqli bo‘lgan matritsa esa *xosmas* matritsa deyiladi.

Bizga A va B n-tartibli kvadrat matritsalar berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, ushbu matritsalar ko‘paytmasi $A\cdot B$ ham n-tartibli kvadrat matritsa bo‘ladi.

12.2-teorema. Ixtiyoriy A va B kvadrat matritsalar uchun

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

tenglik o‘rinli, ya’ni matritsalarning ko‘paytmasining determinanti determinantlarning ko‘paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, $A=(a_{i,j})$ va $B=(b_{i,j})$ bo‘lib, ularning ko‘paytmasi $A\cdot B=C=(c_{i,j})$ bo‘lsin. A va B matritsalar yordamida quyidagi $2n$-tartibli determinantni tuzib olamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasiga ko‘ra

$$\Delta=\det(A)\cdot\det(B). \qquad (12.1)$$

Ikkinchi tomondan Δ determinantni determinant xossalaridan foydalanib hisoblaymiz. Buning uchun Δ determinantni $1,2,...,n$ ustunlarini mos ravishda $b_{1,1}, b_{2,1}, \dots, b_{n,1}$ larga ko‘paytirib, $(n+1)$-ustu-niga qo‘shamiz, so‘ngra $b_{1,2}, b_{2,2}, \dots, b_{n,2}$ larga ko‘paytirib, $(n+2)$-us-tuniga qo‘shamiz va hokazo, $b_{1,n}, b_{2,n}, \dots, b_{n,n}$ larga ko‘paytirib, $2n$-us-tuniga qo‘shamiz. Natijada, Δ

determinantning $b_{i,j}$ elementlari turgan elementlar nolga aylanadi. Yuqori o‘ng burchagida turgan nollar o‘rniga esa

$$a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\ldots+a_{i,n}b_{n,j},\ (i,j=\overline{1,n})$$

elementlar joylashib, bu element $C=A\cdot B$ ko‘paytmaning aynan $c_{i,j}$ elementlaridan iboratdir. Demak, determinant quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasini yana bir bor qo‘llab, determinantni uning oxirgi n ta ustuni bo‘yicha yoyamiz. $|C|$ minor uchun to‘ldiruvchi minori $\begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}$ bo‘lib, uning qiymati $(-1)^n$ ga teng. $|C|$ minor $1,2,\ldots,n$ satrlarda va $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ ustunlarda joylashganligi sababli

$$\Delta=(-1)^{S_C}\cdot(-1)^n\,|C|,$$

$$S_C=(1+2+\ldots+n)+(n+1+n+2+\ldots+2n)=\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=n+2n^2$$

bo‘ladi. Demak,

$$\Delta=(-1)^{n+2n^2}(-1)^n\,|C|=(-1)^{2n+2n^2}\,|C|=(-1)^{2(n+n^2)}\,|C|=|C|.$$

Bundan esa $|C|=|A|\cdot|B|$ kelib chiqadi, ya’ni $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

□

Ushbu teorema bir nechta matritsalarning ko‘paytmalari uchun ham o‘rinlidir, ya’ni

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_s) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_s,$$

bu yerda $A_i \in M_n(\mathrm{K})$.

12.2.-teoremadan xos va xosmas matritsalar uchun quyidagi xossalar kelib chiqadi.

12.3-xossa. a)Xos matritsalar koʻpaytmasi ham xosdir;

b) Xosmas matritsalar koʻpaytmasi ham xosmasdir;

c) Agar matritsalar koʻpaytmasida biror koʻpaytuvchisi xos matritsa boʻlsa, u holda koʻpaytma ham xosdir.

Biz 8-mavzuda berilgan A kvadrat matritsaning teskarisi tushunchasini kiritgan edik. Endi teskari matritsani topish usulini keltiramiz.

12.4-teorema. A matritsa teskarilanuvchi boʻlishi uchun uning xosmas boʻlishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A matritsa teskarilanuvchi boʻlsin, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud va

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

12.2-teoremaga koʻra,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(E),$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Ushbu tenglikdan $\det(A) \neq 0$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A matritsa xosmas boʻlsin. A matritsaning barcha $a_{i,j}$ elementlari $A_{i,j}$ algebraik toʻldiruvchilardan n-tartibli

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (12.2)$$

matritsani tuzib olamiz. A^* matritsaga A matritsaning biriktirilgan matritsasi deyiladi. Endi AA^* va A^*A koʻpaytmalarni topamiz.

Ravshanki,

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \qquad (12.3)$$

bo‘ladi, bu yerda $d = \det A$.

Haqiqatan ham, A matritsani i-satrini A^* matritsaning i-ustu-nining mos elementlariga ko‘paytirib qo‘shsak, AA^* matritsaning i-satr va i-ustunida

$$a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n} = d$$

element hosil bo‘ladi.

Xuddi shunday A matritsaning i-satrini A^* matritsaning j-ustu-niga mos ravishda ko‘paytirib qo‘shishdan hosil bo‘lgan quyidagi element:

$$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n},\ i \neq j$$

nolga teng bo‘ladi.

A^*A ko‘paytmani ham yuqoridagi kabi hisoblash mumkin.

A matritsa xosmas matritsa bo‘lganligi uchun quyidagi ko‘paytmani qaraymiz.

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \frac{1}{d}\left(AA^*\right) = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Demak, A matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{d} & \frac{A_{2,1}}{d} & \dots & \frac{A_{n,1}}{d} \\ \frac{A_{1,2}}{d} & \frac{A_{2,2}}{d} & \dots & \frac{A_{n,2}}{d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1,n}}{d} & \frac{A_{2,n}}{d} & \dots & \frac{A_{n,n}}{d} \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. □

Teskari matritsa qiyudagi sodda xossalarga ega

12.5-xossa. a) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

c) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

d) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Misol 12.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini toping.

Bu matritsaning determinanti $|A| = -1$ ekanligini hisoblash qiyin emas. Demak, A xosmas matritsa bo‘lib, uning teskarisi mavjud. Aning algebraik to‘ldiruvchilari

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{1,2} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{2,1} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{2,3} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{3,2} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Demak, biriktirilgan matritsa

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

bo‘lib, teskari matritsa esa $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

10-Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish

Mavzu rejasi:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish

Bizga m ta tenglamadan iborat n ta noma’lumlichiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (13.1)$$

bu yerda, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma’lumlar. Tenglamalarni birinchi, ikkinchi, va hokazo m-tenglama deb nomerlab chiqilgan deb hisoblaymiz. $a_{i,j}$ koeffitsient i-tenglamadagi x_j noma’lumning koeffitsientini, b_i esa i-tenglamaning ozod hadi.

Noma’lumlar oldidagi koeffitsientlarni m ta satr va n ta ustundan iborat matritsa ko‘rinishida yozish mumkin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad (13.2)$$

Ushbu matritsa chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Quyidagi $\tilde{A}$ matritsa esa chiziqli tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasi deyiladi:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Agar (13.1) sistemaningbarcha ozod hadlari0 ga teng bo‘lsa, u holda (13.1) sistema*bir jinsli tenglamalar sistemasi* deb ataladi.

Agar (13.1) sistemada $m=n$ bo‘lsa, u holda ushbu sistema n-tartibli sistema deyiladi. Yechimga ega bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi *birgalikda* deyiladi.

Masalan, ixtiyoriy bir jinsli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘ladi, chunki barcha noma’lumlarni 0 ga teng qilib olinsa, u bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

Yagona yechimga ega bo‘lgan sistema *aniq* sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lgan sistema aniqmas sistema deyiladi.

(13.1) sistemani qulaylik uchun qisqacha

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k = b_i,\ (i=\overline{1,m})$$

yig‘indilar ko‘rinishida yozish mumkin.

Berilgan matrtsaning satrlarini $u_1, u_2, ..., u_m$, ustunlarini esa $v_1, v_2, ..., v_n$ orqali belgilabolamiz.

Kvadrat matritsaning bosh diagonaldan pastda turgan barcha elementlari nollardan iborat bo‘lsa, bunday matritsaga *uchburchak ko‘rinishidagi* matritsa deyiladi, ya’ni

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning to‘g‘ri burchakli trapesiyali shaklida joylashgan elementlaridan boshqa elementlari nollardan iborat bo‘lsa, bunday matritsaga *trapesiya ko‘rinishidagi* matritsa deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli sistemadagi tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan hol uchun o‘rinli bo‘ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \tag{13.3}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemalarini qaraymiz.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa determinantini d harfi bilan belgilaylik:

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

10-mavzuda berilgan determinantni satr yoki ustun bo‘yicha yoyish xossalaridan quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \ldots + a_{1,j}A_{n,j}. \tag{13.4}$$

Bundan tashqari,

$$a_{1,i}A_{1,j} + a_{2,i}A_{2j} + \ldots + a_{n,i}A_{n,j} = 0, i \neq j. \tag{13.5}$$

Ya’ni, determinantning birorta ustunidagi hamma elementlarini boshqa ustunning algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalari yig‘indisi nolga teng.

Agar $d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \ldots + a_{1,j}A_{n,j}$ yoyilmada j-ustunning elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, \ldots., b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo‘ladigan

$$b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \ldots + b_nA_{n,j} \tag{13.6}$$

ifoda d determinantning j-ustunini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo‘ladigan ushbu

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantning j -ustun bo‘yicha yoyilmasi bo‘ladi.

13.1.-teorema. Agar (13.3) sistemaning determinanti d noldan farqli bo‘lsa, u holda bu sistema yagona yechimga ega bo‘lib, uning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1 = \frac{d_1}{d},\ x_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ x_n = \frac{d_n}{d}. \tag{13.7}$$

Isbot. Aytalylik, $d \neq 0$ bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

sistemadagi birinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{1,j}$ ga, ya’ni $a_{1,j}$ elementning algebraik to‘ldiruvchisiga ko‘paytiramiz. Ikkinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{2,j}$ ga va hokazo, oxirgi tenglamani $A_{n,j}$ ga ko‘paytiramiz. Bu tengliklarning chap va o‘ng tomonlarini alohida-alohida qo‘shib, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\begin{gathered} (a_{1,1}A_{1,j} + a_{2,1}A_{2,j} + \ldots + a_{n,1}A_{n,j})x_1 + \ldots + \\ +(a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \ldots + a_{n,j}A_{n,j})x_j + \ldots + \\ +(a_{1,n}A_{1,j} + a_{2,n}A_{2,j} + \ldots + a_{n,n}A_{n,j})x_n = \\ = b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + \ldots + b_nA_{n,j}. \end{gathered}$$

Yuqorida qayd qilingan (13.4), (13.5) va (13.6) munosabatlardan, ushbu tenglikda x_j oldidagi koeffitsient d ga, qolgan koeffitsientlarning barchasi nolga teng ekanligini, ozod had esa d_j determinantgateng bo‘lishini hosil qilamiz. Demak, yuqoridagi tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$dx_j = d_j,\ 1 \le j \le n.$$

$d \neq 0$ bo‘lganligi uchun, $x_j = \dfrac{d_j}{d},\ 1 \le j \le n$ kelib chiqadi.

Endi $\alpha_1 = \dfrac{d_1}{d},\ \alpha_2 = \dfrac{d_2}{d},\ \ldots,\ \alpha_n = \dfrac{d_n}{d}$ sonlar haqiqatdan ham (13.3) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Buning uchun sistemaning i -tenglamasiga $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ noma’lumlarning qiymatlarini qo‘yamiz. i -

tenglamaning chap tomonini $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ ko‘rinishda yozish mumkinligi va $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{i,j}$ bo‘lganligi uchun:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,j} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{k,j} \right).$$

Bu almashtirishlarga $\frac{1}{d}$ soni barcha qo‘shiluvchilarda umumiy ko‘paytuvchi bo‘lib kelganligi uchun uni yig‘indi tashqarisiga chiqarishimiz mumkin. Bundan tashqari, qo‘shish tartibi o‘zgartirilgandan so‘ng, b_k ko‘paytuvchi ichki yig‘indi belgisi tashqarisiga chiqarildi, chunki u ichki yig‘indi indeksi j ga bog‘liq emas.

Ma`lumki, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{k,j} = a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k,2} + \ldots + a_{i,n} A_{k,n}$ ifoda $k = i$ bo‘lganda d ga, qolgan barcha k larda esa 0 ga teng. Shunday qilib, k bo‘yicha tashqi yig‘indida faqat bitta qo‘shiluvchi qoladi va u $b_i d$ ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Bundan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar haqiqatdan ham (13.3) tenglamalar sistemasi uchun yechim bo‘lishi kelib chiqadi.

11- Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsalar yordamida yechish

Mavzu rejasi:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsalar yordamida yechish

Bizga bir hil tartibli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = b_i, \; i = \overline{1,m} \qquad (13.8)$$

va

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,k} x_k = d_i,\ i = \overline{1,m}. \qquad (13.9)$$

13.2-ta'rif. Agar (13.8) sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini o'rinlari almashtirish natijasida (13.9) sistema hosil qilinsa, (13.9) sistemani (13.8) dan $I -$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

13.3-ta'rif. Agar (13.8) sistemaning biror tenglamasini biror songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamasiga qo'shish natijasida (13.9) sistema hosil qilinsa, (13.9) sistema (13.8) sistemadan $II -$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

I tur va II tur elementar almashtirishlarni qisqacha elementar almashtirish deb yuritiladi.

Xar bir chiziqli tenglamalar sistemasiga uning kengaytirilgan matritsasini mos qo'ysak, u holda chiziqli tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlarga uning kengaytirilgan matritsasi ustida mos elementar almashtirishlar bajarilgan deb qarash mumkin. Aksincha, kengaytirilgan matritsa ustidagi elementar almashtirishlarga (elementar almashtirishlar ta'rifini to'g'ridan-to'g'ri matritsalar uchun ham aytishimiz mumkin) tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlar mos keladi.

13.4-ta'rif. Agar (13.8) va (13.9) sistemalar bir vaqtning o'zida birgalikda bo'lmasa, yoki bir vaqtda birgalikda bo'lib, bir hil yechimlarga ega bo'lsa, (13.8) va (13.9) sistemalar teng kuchli sistemalar deyiladi va $(9.8) \Leftrightarrow (9.9)$ ko'rinishda yoziladi.

13.5-teorema. Agar (13.9) sistemaga (13.8) sistemadan elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, ular teng kuchlidir.

Isbot. I tur elementar almashtirishlar uchun teoremaning isboti to'g'ridan to'g'ri ko'rinib turibdi. Endi (13.8) sistemaga II tur elementar almashtirishlarni qo'llaymiz, ya'ni (13.8) sistemaning biror-bir i-tenglamasini λ ga ko'paytirib, j-tenglamaga qo'shsak, yangi sistemaning j satrida qolganlari o'zgarmagan holda

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{j,k} + \lambda a_{i,k}) x_k = b_j + \lambda b_i$$

tenglama hosil bo'ladi. Agar $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ sonlar(13.8) sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{j,k}+\lambda a_{i,k})x_k^0=\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}x_k^0+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k^0=b_j+\lambda a_i$$

tenglamaning ham yechimi bo‘ladi va aksincha. Elementar almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan (13.9) tenglamalar sistemasining yechimi (13.8) tenglamalar sistemasining ham yechimi bo‘ladi.

□

Endi biz sistemani yechishning eng qulay va ko‘p qo‘llanadigan usullaridan biri bo‘lgan, noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish usulini ya’ni, *Gauss usulini* keltiramiz.

1) Faraz qilaylik, (13.8) sistemada $a_{11}\neq 0$ bo‘lsin. U holda sistemaning birinchi tenglamasini $-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}},\ i=\overline{2,m}$ ga ko‘paytirib mos ravishda boshqa tenglamalarga qo‘shsak, hosil bo‘lgan sistemaning birinchi tenglamasidan boshqa tenglamalarida x_1 noma’lumi oldidagi koeffitsientlari nolga aylanadi.

2) Agar $a_{1,1}=0$ bo‘lsa, x_1 ning $a_{i,1}$ koeffisientlari orasida noldan farqli bo‘lgan tenglamasini izlaymiz va I tur elementar almashtirish yordamida sistemaning birinchi tenglamasi bilan o‘rnini almashtirib, birinchi holatga kelamiz.

3) Agar x_1 oldidagi hamma $a_{i,1}$ koeffitsientlar nollardan iborat bo‘lsa, biz birinchi yoki ikkinchi holatlarni x_2 noma’lum uchun qo‘llaymiz va hokazo, bu jarayonni davom ettirish natijasida biz (13.8) sistemaga teng kuchli bo‘lgan sistemaga kelamiz. Hosil bo‘lgan sistemaga qarab, quyidagi xulosalarni chiqazishimiz mumkin:

1. Agar sistemaning zinapoyali shaklida chap tomonida nol va o‘ng tomonida noldan farqli hadlar qatnashuvchi tenglamalar hosil bo‘lsa, bunday sistema birgalikda bo‘lmaydi.

2. Agar sistema uchburchaksimon

$$\begin{cases}a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+\ldots+a'_{1,n}x_n=b'_1,\\ a'_{2,2}x_2+\ldots+a'_{2,n}x_n=b'_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1}+a'_{n-1,n}x_n=b'_{n-1}\\ a'_{n,n}x_n=b_n\end{cases}$$

shaklga kelib $a'_{1,1} \neq 0,\ a'_{2,2} \neq 0,\ ...,\ a'_{n,n} \neq 0$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lib, yechim quyidagi algoritm bo‘yicha topiladi.

Hosil bo‘lgan sistemaning oxirgi $a'_{n,n}x'_n = b'_n$ tenglamasidan $x_n^0 = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$ noma’lumni topib, topilgan noma’lumni bitta yuqoridagi tenglamaga qo‘yamiz. So‘ngra, x_{n-1}^0 noma’lumni topib, uni yuqoridagi tenglamaga qo‘yamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijada barcha $x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0$ noma’lumlarni aniqlaymiz.

3. Sistema zinapoyali shaklga kelib, zinapoya uchlarida turuvchi noma’lumlar soni r ta $1 \leq r \leq \min(m,n)$ bo‘lsin. U holda ularni tenglamalarning chap tomonida qoldirib, qolgan $n-r$ ta noma’lumni tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkaziladi va ularni ozod o‘zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi. Natijada tenglamalar sistemasi r ta noma’lumli uchburchak shaklidagi sistemaga keladi. Endi tenglamalarni o‘ng tomoniga o‘tgan $n-r$ ta noma’lumga qiymatlar berib, qolgan r ta noma’lumni topamiz. Demak, bu holatda sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Ya’ni, bunday tenglamalar sistemasi birgalikda aniqmas sistema bo‘ladi.

Bundan tashqari, qaralayotgan sistemada tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik bo‘lsa, u holda sistemani uchburchak shakliga keltirish mumkin emas, chunki Gauss metodi bo‘yicha o‘zgartirish jarayonida tenglamalar soni kamayishi mumkin, ammo ortishi mumkin emas. Demak,bunday holatda sistema zinapoyasimon shaklga keltiriladi va u aniqmas sistema bo‘ladi.

Misol 13.1. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Bu sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib, uni elementar almashtirishlar yordamida o‘zgartiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$0 = 6$ tenglamaga ega bo‘lgan sistemaga keldik, demak, berilgan sistema yechimga ega emas.

Misol 13.2. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasi uchun elementar almashtirishlarni qo‘llab,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -5 & -4 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -10 & 19 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

sistemaning matritsasini uchburchak shaklga keltiramiz. Demak,bu sistema yagona yechimga ega va quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = -11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Bu sistemada pastdan yuqoriga qarab harakat qilib, $x_3 = -1,\ x_2 = -3,\ x_1 = 2$ yagona yechimni topamiz.

Misol 13.3. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -4. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasini qaraymiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistemaning matritsasi zinapoyasimon shaklga kelganligi uchun birgalikda va cheksiz ko‘p yechimga ega. x_1 va x_3 noma’lumlar oldidagi koeffitsientlar uchburchak shaklni berganligi uchun $x_1,\ x_4$ noma’lumlarini o‘ng tomonga o‘tkazib, ozod o‘zgaruvchilar sifatida qabul qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2 + 2x_2 + 4x_4, \\ \quad -5x_3 = 6 \qquad\quad -11x_4. \end{cases}$$

Bu yerdan $x_3 = \dfrac{6 - 11x_4}{-5}$ hosil bo‘ladi. Bu ifodani yuqoridagi tenglamaga olib borib qo‘ysak,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5}$$

hosil bo‘ladi. Shunday qilib,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5},\ x_3 = \frac{-6 + 11x_4}{5}$$

berilgan tenglamalar sistemasi yechimlarining umumiy ko‘rinishi bo‘ladi.

Bu formulada x_2 va x_4 larga ixtiyoriy qiymatlar berib, x_1, x_3 larni topish orqali xususiy yechimlarni hosil qilish mumkin.Masalan, $x_2 = 1, x_4 = 1$ qiymatlar bersak, $x_1 = 1,\ x_3 = 1$ topilib, $(1, 1, 1, 1)$ xususiy yechimga ega bo‘lamiz.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli ham tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan hol uchun o‘rinli bo‘ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Natijada yuqoridagi tenglamalar sistemasi quyidagi matritsaviy tenglamaga teng kuchli bo‘ladi

$$A \cdot X = B.$$

Kramer usulidan ma’lumki, agar $\det(A) \neq 0$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega. Bundan tashqari, $\det(A) \neq 0$ ekanligi A matritsaning teskarilanuvchi bo‘lishini bildiradi. Yuqoridagi matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko‘paytirsak,

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow E\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi $X = A^{-1}\cdot B$ ko‘rinishida bo‘ladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuli teskari matritsa usuli deb ataladi.

12- Mavzu: Chiziqli fazo

Mavzu rejasi:

1. Chiziqli fazo.
2. Chiziqli bog’liqlik.
3. Vektor fazoning bazisi

Bizga

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo‘lsin. Bu matritsaning satrlarini $u_1, u_2, ..., u_m$ kabi ustunlarini esa $v_1, v_2, ..., v_n$ kabi belgilaymiz. Satrlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m$ satrga aytiladi, bu yerda c_i koeffitsientlar berilgan maydondan olingan sonlar. Ko‘rinib turibdiki, agar bu koeffitsientlar nolga teng bo‘lsa, bu chiziqli kombinatsiya ham nol satrga teng bo‘ladi.

Agar bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmagan $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsientlar mavjud bo‘lib, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ bo‘lsa, $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar *chiziqli bog‘liq* deyiladi.

Agarda bunday koeffitsientlar mavjud bo‘lmasa, ya’ni $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ tenglikdan barcha $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsient-larning nolga tengligi kelib chiqsa, u holda $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar *chiziqli erkli* deyiladi.

Misol 14.1. $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (1, 4, 3)$ satrlar chiziqli bog‘liq. Chunki, $2u_1 + u_2 - u_3 = (0, 0, 0)$.

$u_1 = (1, 1, 1)$ va $u_2 = (-1, 2, 1)$ satrlar esa chiziqli erkli, chunki $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$ tenglikdan

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

shartlar kelib chiqadi, ya’ni $c_1 = c_2 = 0$.

14.1-tasdiq. Berilgan satrlarning chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun bitta satrning qolgan satrlar orqali ifodalanishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. Demak, bir vaqtning o‘zida nolga teng bo‘lmaydigan shunday $c_1, c_2, ..., c_m$ koeffitsientlar mavjudki, $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ bo‘la-di. Aytaylik, $c_i \neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$u_i = -\frac{c_1}{c_i}u_1 - ... - \frac{c_{i-1}}{c_i}u_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}u_{i+1} - ... - \frac{c_m}{c_i}u_m,$$

ya’ni u_i satr qolgan satrlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $u_i = c_1u_1 + ... + c_{i-1}u_{i-1} + c_{i+1}u_{i+1} + ... + c_mu_m$ bo‘lsin. U holda $c_1u_1 + ... + c_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + c_{i+1}u_{i+1} + ... + c_mu_m = 0$, ya’ni $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog‘liq. □

Berilgan $u = (a_1, a_2, ..., a_k, ..., a_n)$ satrni dastlabki k ta elementidan iborat $\tilde{u} = (a_1, a_2, ..., a_k)$ satrga berilgan satrning *uzunligi* k *bo‘lgan kesmasi* deb ataladi.

14.2-tasdiq. Agar $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ixtiyoriy uzunlikdagi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_m$ kesmalar ham chiziqli bo‘g‘liqdir.

Isbot. $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m = 0$ tenglik $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_mu_m$ satrning barcha komponentalari nolga tengligini anglatadi. Bundan esa, $c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2 + ... + c_m\tilde{u}_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. □

Yuqoridagi tasdiq kabi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_m$ kesmalarning chiziqli erkli ekanligidan $u_1, u_2, ..., u_m$ satralarning ham chiziqli erkli bo‘lishini kelib chiqadi.

Aytaylik, A matritsaning k ta satri chiziqli erkli bo‘lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsin. Umumiy-likka ziyon yetkazmagan holda, $u_1, u_2, ..., u_k$ satrlar chiziqli erkli va $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_m$ satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deb olish mumkin. Matritsaning $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarining uzunligi k bo‘lgan $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, ..., \tilde{v}_n$ kesmalarini qaraymiz.

14.3-tasdiq. Agarqandaydir $c_1, c_2, ..., c_n$ sonlari uchun $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + ... + c_n\tilde{v}_n = 0$ bo‘lsa, u holda $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n = 0$ bo‘ladi.

Isbot. $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_m$ satrlar $u_1, u_2, ..., u_k$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lganligi uchun

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + ... + b_{k+1,k}u_k, \\ u_{k+2} &= b_{k+2,1}u_1 + b_{k+2,2}u_2 + ... + b_{k+2,k}u_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m &= b_{m,1}u_1 + b_{m,2}u_2 + ... + b_{m,k}u_k. \end{aligned} \qquad (14.1)$$

Aytaylik, $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + ... + c_n\tilde{v}_n = 0$ bo‘lsin. Bu tenglikdan $c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ ustunning dastlabki k ta komponentasi nolga teng ekanligi to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi. Ustunning $(k+1)$ - komponentasini qaraylik:

$$c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + ... + c_na_{k+1,n}.$$

Bu ifodani qiymatini topish uchun (14.1) tenglikning birinchisidan foydalanamiz.

$u_{k+1} = b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + ... + b_{k+1,k}u_k$ ekanligidan

$$\begin{aligned} a_{k+1,1} &= b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + ... + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,1}, \\ a_{k+1,2} &= b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + ... + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,\mathrm{n}} &= b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + ... + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,n} \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Bundan esa,

$$c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + ... + c_na_{k+1,n} =$$

$$
\begin{aligned}
&= c_1(b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,1}) + \\
&+ c_2(b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,2}) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ c_n(b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \ldots + b_{k+1,\mathrm{k}}a_{k,n}) = \\
&= b_{k+1,1}(c_1a_{1,1} + c_2a_{1,2} + \ldots + c_na_{1,n}) + \\
&+ b_{k+1,2}(c_1a_{2,1} + c_2a_{2,2} + \ldots + c_na_{2,n}) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ b_{k+1,\mathrm{k}}(c_1a_{k,1} + c_2a_{k,2} + \ldots + c_na_{k,n}).
\end{aligned}
$$

Qavslarichidagi ifodalar $c_1\tilde{v}_1 + c_2\tilde{v}_2 + \ldots + c_n\tilde{v}_n$ ustunning kompo-nentalarini beradi. Ularning barchasi nolga teng bo‘lganligi uchun $c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \ldots + c_na_{k+1,n} = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Qolgan komponentalarining nolga tengligi ham xuddi shunday ko‘rsatiladi. Demak, $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0.$ □

14.4-tasdiq. Aytaylik, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ va $w_1, w_2, \ldots, w_n$ satrlar jamlanmalari berilgan bo‘lib, ikkinchi jamlanma satrlari birinchi jamlanma satrlarining chiziqli kombinatsiyasi bo‘lsin. Agar $n > m$ bo‘lsa, u holda $w_1, w_2, \ldots, w_n$ satrlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Isbot. Isbotni m ga nisbatan matematik induksiya usuli bilan olib boramiz. $m = 1$ bo‘lganda $w_1 = c_1u_1,\ w_2 = c_2u_1, \ldots, w_n = c_nu_1$ bo‘lib, $c_1 = 0$ bo‘lganida ular chiziqli bo‘g‘liq bo‘lishi ravshan. Agar $c_1 \neq 0$ bo‘lsa, $(-c_2)w_1 + c_1w_2 + 0\cdot w_3 + \ldots + 0\cdot w_n = 0$ ekanligidan ularning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

Tasdiqni $m-1$ uchun o‘rinli deb, m uchun to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz. Tasdiq shartiga ko‘ra,

$$
\begin{aligned}
&w_1 = c_{1,1}u_1 + c_{1,2}u_2 + \ldots + c_{1,m}u_m, \\
&w_2 = c_{2,1}u_1 + c_{2,2}u_2 + \ldots + c_{2,m}u_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&w_n = c_{n,1}u_1 + c_{n,2}u_2 + \ldots + c_{n,m}u_m.
\end{aligned}
$$

Agar $c_{1,1}=c_{2,1}=...=c_{k,1}=0$ bo‘lsa, tasdiq o‘rinli, chunki bu holda $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar $m-1$ ta $u_2, ..., u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi.

Aytaylik, biror $c_{i,1}$ noldan farqli bo‘lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $c_{11}\neq 0$ deb olish mumkin. U holda qiyudagi satrlarni qaraymiz:

$$
\begin{aligned}
&w_2' = w_2 - \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} w_1 = c_{2,2}' u_2 + ... + c_{2,m}' u_m, \\
&.. \qquad (14.2) \\
&w_n' = w_n - \frac{c_{n,1}}{c_{1,1}} w_1 = c_{n,2}' u_2 + ... + c_{n,m}' u_m.
\end{aligned}
$$

Ushbu satrlar $n-1$ ta bo‘lib, ular $m-1$ ta $u_2, ..., u_m$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. $n>m$ bo‘lganligi sababli, $n-1>m-1$, hamda induksiya faraziga ko‘ra, $w_2', ..., w_n'$ satrlar chiziqli bog‘liq. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan $b_2, ..., b_k$ koeffitsientlar topilib,

$$b_2 w_2' + ... + b_n\, w_n' = 0.$$

Bu munosabatga $w_2', ..., w_n'$ satrlarning $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlar orqali yozilgan ifodasini olib borib qo‘ysak,

$$b_2\left(w_2 - \frac{c_{2,1}}{c_{1,1}} w_1\right) + ... + b_k\left(w_k - \frac{c_{n,1}}{c_{1,1}} w_1\right) = 0$$

kelib chiqadi, ya’ni,

$$-\frac{b_2 c_{2,1} + ... + b_n c_{n,1}}{c_{11}} w_1 + b_2 w_2 + ... + b_n w_n = 0.$$

$b_2, ..., b_k$ koeffitsientning kamida bittasi noldan farqli ekanligidan, $w_1, w_2, ..., w_n$ satrlarning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

□

14.5-natija. Uzunligi n ga teng bo‘lgan n tadan ko‘p satrlar chiziqli bog‘liq.

Isbot. Haqiqatdan ham, uzunligi n ga teng bo‘lgan ixtiyoriy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satrni quyidagicha ifodalash mumkin

$$a_1(1,0,...,0)+a_2(0,1,...,0)+...+a_n(0,0,...,1).$$

Demak, ixtiyoriy satr n ta satrning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Yuqorida isbotlangan 14.4-tasdiqqa ko‘ra, satrlar soni n tadan ko‘p bo‘lsa, ular chiziqli bog‘liq.

13-14- Mavzu: Matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi

Mavzu rejasi:

1. Matritsa rangi
2. Kroneker-Kapelli teoremasi

Bizga uzunlikdagi n ga teng bo‘lgan satrlar berilgan bo‘lsin. Bu satrlar ichida qandaydir k ta satr chiziqli erkli bo‘lib, ixtiyoriy k tadan ko‘p satrlar chiqizli bo‘gliq bo‘lsin. Ya’ni, chiziqli erkli satrlarning maksimal soni k ga teng bo‘lsin.

14.6-ta’rif. Berilgan satrlar jamlanmasidagi chiziqli ekrli vektorlarning maksimal soniga bu satrlar jamlanmasining *rangi* deyiladi. Maksimal sondagi chiziqli erkli satrlar esa, satrlar jamlanmasining *bazisi* deb ataladi.

Tabiiyki, chiziqli erklilik, chiziqli bog‘liqlik, rang va bazis tushunchalarini ustunlar uchun ham kiritish mumkin. U holda yuqorida keltirilgan tasdiqlar ham ustunlar jamlanmasi uchun o‘rinli bo‘ladi.

Demak, berilgan A matritsaning $u_1, u_2, ..., u_m$ satrlar jamlan-masining rangini va o‘z navbatida $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlar jamlan-masining rangini ham aniqlash mumkin.

14.7-teorema. Matritsaning satrlari jamlanmasi rangi uning ustunlari jamlanmasi rangiga teng.

Isbot. Aytaylik,

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlar jamlanmasi rangi k va ustunlar jamlanmasining rangi r ga teng bo‘lsin.

Satrlar rangi k ekanligidan shunday chiziqli erkli k ta satr mavjud bo‘lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastlabki k ta satrni bazis deb olish mumkin.

Bu satrlardan iborat quyidagi

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari A matritsa ustun-larining uzunligi k ga teng bo‘lgan kesmalaridan iborat bo‘ladi.

Aytaylik, $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari jamlanmasi rangi $\tilde{r}$ bo‘lsin. $\tilde{A}$ matritsaning ustunlari uzunliklari k ga teng ekanligidan 14.5-natijaga ko‘ra, uning chiziqli erkli ustunlar soni k dan oshmaydi. Demak, $\tilde{r} \leq k$.

Ikkinchi tomondan esa, $\tilde{A}$ matritsada $\tilde{r}$ ta chiziqli erkli ustunlari mavjud bo‘lib, undan ko‘p sondagi ixtiyoriy ustunlar chiziqli bog‘liq. Ushbu ustunlarni A matritsaning ustunlarigacha to‘ldirsak, ular ham chiziqli erkli bo‘ladi. 14.3-tasdiqqa ko‘ra esa, A matritsaning $\tilde{r}$ tadan ko‘p ixtiyoriy ustunlari chiziqli bog‘liq. Bundan A matritsaning ustunlar jamlanmasi rangi ham $\tilde{r}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $r = \tilde{r} \leq k$.

Endi ushbu mulohazalarni ustunlar va satrlarning o‘rnini almashtirgan holda qo‘llasak, $k \leq r$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $r = k$ kelib chiqadi.

□

14.8-ta’rif. Matritsaning satrlari (ustunlari) jamlanmasining rangi *matritsaning rangi* deyiladi.

Endi kvadrat matritsaning rangi va determinanti orasidagi bog‘liqlikni beruvchi teoremani keltiramiz.

14.9-teorema. Kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun uning determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot.*Zaruriylik.* Berilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lib, determinanti noldan farqli bo‘lsin. $u_1, u_2, ..., u_n$ satrlar chiziqli bog‘liq ekanligidan $c_1u_1+c_2u_2+...+c_nu_n=0$ tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik esa, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchlidir:

$$\begin{cases} a_{1,1}c_1+a_{2,1}c_2+...+a_{1,n}c_n=0, \\ a_{1,2}c_1+a_{2,2}c_2+...+a_{2,n}c_n=0, \\ ...., \\ a_{1,n}c_1+a_{2,n}c_2+...+a_{n,n}c_n=0. \end{cases}$$

Matritsaning determinanti noldan farqli bo‘lganligi uchun, ushbu bir jinsli tenglamalar sistemasi yagona nol yechimga ega. Ya’ni $c_1=c_2=...=c_n=0.$ Bu esa, satrlarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Demak, $\det A=0$.

Yetarlilik. Yetarlilik isbotini A matritsaning tartibi bo‘yicha matematik induksiya usuli bilan keltiramiz. $m=1$ uchun teorema tasdig‘i o‘rinli, chunki $\det A=0$ tenglik A nol elementdan iborat ekanligini bildiradi.

$n-1$-tartibli matritsa uchun teorema isbotlangan deb, n-tartibli matritsalar uchun isbotlaylik. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $a_{11}\neq 0$ deb olishimiz mumkin. Matritsaning $u_1, u_2, ..., u_n$ satrlari orqali quyidagi satrlarni hosil qilamiz:

$$w_2=u_2-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}u_1=(0,\, a'_{2,2}, ..., a'_{2,n}),$$

$$..,$$

$$w_n=u_n-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}u_1=(0,\, a'_{n,2}, ..., a'_{n,n}).$$

Determinantlar xossasiga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinant nolga tengligi va $a_{1,1} \neq 0$ ekanligidan

$$\begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi. Induksiya faraziga ko‘ra $(a'_{2,2},\dots,a'_{2,n}),\dots,(a'_{n,2},\dots,a'_{n,n})$ satrlar chiziqli bog‘liq. Bu esa, w_2, ..., w_n satrlarning ham chiziqli bog‘liqligini bildiradi.

Demak, kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan c_2, ..., c_n koeffitsientlar topilib, $c_2 w_2 + c_3 w_3 + \dots + c_n w_n$. Bundan esa,

$$-\left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} c_2 + \dots + \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} c_n \right) u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$$

kelib chiqadi. Ya’ni, u_1, u_2, ..., u_n satrlar chiziqli bog‘liq. □

Yuqoridagi teoremadan n-tartibli kvadrat matritsaning rangi n ga teng bo‘lishi uchun uning determinant noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Ma’lumki, ixtiyoriy noldan farqli matritsadan qandaydir noldan farqli minor tanlab olish mumkin. Quyidagi teorema matritsaning rangini minorlar orqali topish imkonini beradi.

14.10-teorema. Matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga teng.

Isbot. Aytaylik, matritsaning rangi k ga teng bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $(k+1)$ yoki undan katta tartibli minorda chiziqli bog‘liq satrlarlar mavjud bo‘lib, 14.9-teoremaga asosan bunday minorlar nolga teng bo‘ladi.

Bundan tashqari, matritsaning rangi k bo‘lganligi uchun unda k ta satrdan va o‘z navbatida k ta ustundan iborat bazislar mavjud. Bu ustun va satrlar elementlaridan tuzilgan minorni qaraylik.

Ushbu minor satrlari chiziqli erkli, aks holda, 14.3-tasdiqqa ko‘ra avvalgi matritsaning butun satrlari chiziqli bog‘liq bo‘lar edi. Demak, tanlab olingan k-tartibli minor noldan farqli. □

Biz chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini keltirganimizda sistema ustida elementar almashtirishlarni keltirib o‘tgan edik. Matritsaning satrlari ustidagi elementar almashtirishlar ham huddi shu kabi aniqlanadi. Ya’ni, matritsaning satrlari o‘rnini almashtirish, satrlarni noldan farqli songa ko‘paytirish va bir satrni ikkinchi satrga proporsional satrga qo‘shish elementar almashtirishlar hisoblanadi.

Ko‘rinib turibdiki, elementar almashtirishlarning xar birida satrlar jamlanmasi chiziqli ekvivalent satrlar jamlanmasiga aylanadi. Shuning uchun elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o‘zgarmaydi.

Bizga ma’lumki, trapetsiyasimon matritsa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{k,k} & c_{\mathrm{k},k+1} & \dots & c_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda $c_{1,1} \neq 0, c_{2,2} \neq 0, \dots, c_{k,k} \neq 0.$

Trapetsiyasimon matritsaning rangi k ga teng ekanligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,k} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{kk} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot \ldots \cdot c_{k,k}$$

minor noldan farqli. Bundan tashqari, tartibi k dan katta minorlarda kamida bitta nolga teng satr mavjudligi uchun, bu minorlarning qiymati nolga teng.

14.11-tasdiq. Ixtiyoriy matritsani satrlari ustidagi elementar almashtirishlar bajarish va ustunlar o‘rnini almashtirish orqali trapetsiyasimon matritsa ko‘rinishiga keltirish mumkin.

Isbot. Agar matritsa nol matritsa bo‘lmasa, uning noldan farqli elementi mavjud. Bu elementni matritsaning satrlari va ustunlari o‘rnini almashtirish orqali yuqori chap burchagiga ko‘chirish mumkin.

Demak,

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ushbu matritsada qiyudagi almashtirishlarni bajaramiz.

Birinchi satrni $-\dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ga ko‘paytib, i -satrga qo‘shamiz. Bu almashtirishlardan keyin A matritsa quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Agar $\begin{pmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}$ matritsa nolga teng bo‘lsa, jarayon tugatiladi. Noldan farqli bo‘lgan, holda satrlarini va ustunlarini almashtirish hisobiga $a'_{2,2} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ikkinchi satrni $-\dfrac{a'_{i,2}}{a'_{2,2}}$ ga ko‘paytirib, qolgan satrlarga qo‘shish orqali berilgan matritsani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ... & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & ... & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & ... & a''_{3,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & a''_{m,3} & ... & a''_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ushbu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida, matritsaning ma’lum satrlaridan tashqari qolgan satrlari nolga aylantiriladi. Natijada matritsa trapetsiyasimon shaklga ega bo‘ladi.

15.3-teorema. (Kroneker–Kapelli teoremasi) Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy matritsasining rangi kengaytirilgan matritsasining rangiga teng (ya’ni, $rank(A) = rank(\tilde{A})$) bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = B,$$

bu yerda B ozod hadlardan tuzilgan ustun.

Sistema yechimga ega bo‘lishi uchun B ustun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi zarur. Bundan esa, matritsalarning ranglari tengligi kelib chiqadi.

Agar matritsalarning ranglari bir hil bo‘lsa, $v_1, v_2, ..., v_n$ dagi bazis $v_1, v_2, ..., v_n, B$ ustunlar uchun ham bazis bo‘la oladi. Bundan esa B ustun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi.□

15.4-teorema. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi, uning biror xususiy yechimi va xuddi shu koeffitsientlardan tuzilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig‘indisiga teng.

Isbot. Aytaylik, X_0 ustun $A \cdot X = B$ bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining biror yechimi bo‘lsin. U holda $A \cdot X = B$ va $A \cdot X_0 = B$ ekanligidan, $A \cdot X = A \cdot X_0$ sistemaga ega bo‘lamiz.

Demak, berilgan sistema $A \cdot (X - X_0) = 0$ bir jinsli sistemaga teng kuchli. Bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi $X^* = X - X_0$ ekanligidan $X = X^* + X_0$ kelib chiqadi. Ya’ni berilgan tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechim va bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig‘indilaridan iborat.

15- Mavzu: Bir jinsli tenglamalar sistemasi. Fundamental yechim

Mavzu rejasi:

1. Bir jinsli sistemalar
2. Bir jinsli sistemalarni yechish usullari
3. Yechimlarning fundamental sistemalari

Ushbu mavzuda chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy yechimini topish usulini beramiz. Dastlab, bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Bizga

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = 0, \\ ...., \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, ushbu sistemaning matritsasini A va matritsaning ustunlarini $v_1, v_2, ..., v_n$ deb olsak, sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

yoki

$$A \cdot X = 0$$

ko‘rinishlarda ham yozish mumkin, bu yerda $X -$noma’lumlardan iborat bo‘lgan ustun vektor.

15.1-tasdiq. Agar $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ ustunlar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi bo‘lsa, u holda ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi ham yechim bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $A \cdot Z_i = 0$ ekanligidan

$$A \cdot (c_1Z_1 + c_2Z_2 + ... + c_kZ_k) = c_1A \cdot Z_1 + c_2A \cdot Z_2 + ... + c_kA \cdot Z_k = 0$$

kelibchiqadi. □

15.2-teorema. Birjinslichiziqlitenglamalarsistemasiningixtiyoriyyechimi $n-r$ tachiziqlierkliyechimlarningchiziqlikombinatsiyasidaniboratbo‘ladi, buyerda $n-$ noma’lumlarsoni, $r = rank(A)$.

Isbot. Sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

ko‘rinishida yozib olaylik.

$r = rank(A)$ ekanligi uchun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlar jamlanmasida r ta ustun bazis bo‘ladi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastladki r ta $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunni bazis deb olish mumkin. Bu holda qolgan $v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n$ ustunlar $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi, ya’ni

$$\begin{aligned}
&v_{r+1} = b_{r+1,1}v_1 + b_{r+1,2}v_2 + ... + b_{r+1,r}v_r, \\
&v_{r+2} = b_{r+2,1}v_1 + b_{r+2,2}v_2 + ... + b_{r+2,r}v_r, \\
&.., \\
&v_n = b_{n,1}v_1 + b_{n,2}v_2 + ... + b_{n,r}v_r.
\end{aligned}$$

Bu tengliklardan quyidagi $n-r$ ta ustunning yechim ekanligini ko‘rish qiyin emas,

$$Z_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ .... \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, Z_{r+2} = \begin{pmatrix} b_{r+2,1} \\ .... \\ b_{r+2,r} \\ 0 \\ -1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \; ..., \; Z_n = \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ .... \\ b_{n,r} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bu yechimlar chiziqli erkli ekanligi osongina kelib chiqadi, chunki bu ustunlarning oxirgi $n-r$ ta komponentalaridan tuzilgan minorni qarasak, ushbu minor noldan farqli bo‘ladi.

Endi ixtiyoriy yechim bu yechimlar orqali chiziqli ifodalanilishini ko‘rsatamiz. Aytaylik, $X = (x_1^*, ..., x_r^*, x_{r+1}^*, ..., x_n^*)^T$ ustun sistemaning boshqa bir yechimi bo‘lsin. U holda

$$Y = X + x_{r+1}^* Z_{r+1} + ... + x_n^* Z_n$$

ustun ham sistemaning yechimi bo‘ladi. Ma’lumki, bu yechimda $(r+1)$-komponentadan boshlab barcha komponentalar nolga teng, ya’ni $Y=(y_1^*,...,y_r^*,0,...,0)^T$.

Ushbu ustun sistemaning yechimi bo‘lganligi uchun

$$y_1^*v_1+y_2^*v_2+...+y_r^*v_r=0.$$

Ammo, $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunlar chiziqli erkli ekanligidan $y_1^*=y_2^*=...=y_r^*=0$ kelib chiqadi. Demak, $Y=0,$ ya’ni

$$X=-x_{r+1}^*Z_{r+1}-...-x_n^*Z_n.$$

Shunday qilib, $Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n$ chiziqli erkli yechimlar bo‘lib, barcha yechimlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi. □

Teorema isbotida keltirilgan $Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n$ yechimlar jamlan-masi *bazis* yoki *fundamentalyechim* deb ataladi.

Sistemaning *umumiy yechimi* deb fundamental yechimning umuniy chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi. Ularning biror aniq chiziqli kombinatsiyasi esa xususiy yechim bo‘ladi.

16-Mavzu: Kompleks sonlar va ular ustida amallar.

Mavzu rejasi:

1. Kompleks son tushunchasi
2. Kompleks sosnlar ustida amallar

Bizga □ haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin. □ $=$ □ $\times$ □ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad).$$

Ravshanki, □ da aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari uchun quyidagi shartlar bajariladi:

a) qo‘shishning kommutativligi: $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b),$

b) qo‘shishning assotsiativligi:

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)],$$

c) ko‘paytirishning kommutativligi $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b),$

d) ko‘paytirishning assotsiativligi:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)].$$

Ushbu qonunning o‘rinli ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$
$$=ace-bde-adf-bcf+acf-bdf+ade+bcf\,,$$

$$(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=$$
$$=ace-bde-adf-bcf+acf-bdf+ade+bcf.$$

e) distributivlik qonuni:

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f);$$

Qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bog‘lovchi ushbu distributivlik qonuni ham o‘rinli bo‘lishini tekshirish qiyin emas:

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a+c,b+d)\cdot(e,f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de),$$

$$(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)=(ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+df)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,af+cf+be+de).$$

Ta’kidlash joizki, $(0,0)$element $\mathbb{C}$ to‘plamning trivial (nol) elementi, $(1,0)$ element esa birlik elementi bo‘ladi, ya’ni:

$$(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b),$$

$$(a,b)\cdot(1,0)=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b).$$

Ma’lumki, ixtiyoriy $(a,b)\in\mathbb{C}$ element qarama-qarshi $(-a,-b)$ elementga ega.

Endi biz $\mathbb{C}$ to‘plamdagi ixtiyoriy noldan farqli (a,b) elementning teskarilanuvchi ekanligini ya’ni $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$ tenglama yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Ushbu tenglamadan quyidagiga ega bo‘lamiz

$$(ax-by,ay+by)=(1,0).$$

Bu tenglikdan quyidagi ikkinoma’lumli tenglamalar sistemasi hosil bo’ladi

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Ma’lumki, bu sistema $(a,b) \neq (0,0)$ bo‘lganda yechimga ega bo’lib, $x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, (a,b) element uchun teskari element

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

4.1-ta’rif Qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari aniqlangan $\mathbb{C}$ to‘plamga *kompleks sonlarto’plami,* uning elementlari esa kompleks sonlar deb ataladi.

Kompleks sonlar to‘plamining $(a,0)$ ko‘rinishidagi elementlari to‘plamini $\mathbb{C}_1$ orqali belgilaymiz. $\mathbb{C}$ da kiritilgan qo‘shish va ko‘paytirish amallarini $\mathbb{C}_1$ da qaraymiz:

$$(a,0) + (c,0) = (a+c,0),$$

$$(a,0) \cdot (c,0) = (ac,0).$$

Ushbu tengliklardan ko‘rinadiki, $\mathbb{C}_1$ to‘plamdagi qo‘shish va ko‘paytirish amallari, haqiqiy sonlar to‘plamidagi amallar kabi aniqlanadi.

$\mathbb{C}_1$ va $\mathbb{R}$ to‘plamlar orasida $f\left((a,0)\right) = a$ kabi $f : \mathbb{C}_1 \to \mathbb{R}$ moslik o’rnatsak, yuqoridagi tengliklardan ushbu moslik ko‘paytma va yig‘indi amallarini saqlashi kelib chiqadi. Demak, $(a,0) = a$ deb olish mumkin.

Agar $(0,1)$ elementni i orqali belgilasak,

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

bo‘ladi. Ushbu $i \in \mathbb{C}$ elementga *mavhum birlik* deyiladi. Ixtiyoriy $(a,b) \in \mathbb{C}$ uchun

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

tenglikni yozishimiz mumkin. Shunday qilib, $\mathbb{C}$ kompleks sonlar to‘plamining ixtiyoriy elementini $z = a + bi$ shaklda yozish mumkin. Bu shaklga kompleks sonning *algebraik shakli* deyiladi.

Kompleks sonning algebraik shaklidagi a songa kompleks sonnning haqiqiy qismi deyiladi va $\operatorname{Re}(z)$ orqali belgilanadi. Undagi b soni esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $\operatorname{Im}(z)$ orqali belgilanadi. Mavhum qismi nolga teng bo‘lgan kompleks sonlar haqiqiy sonlar bo‘lsa, haqiqiy qismi nol bo‘lgan kompleks sonlar mavhum kompleks sonlar deyiladi.

Ushbu $\overline{z} = a - bi$ kompleks soni $z = a + bi$ kompleks soniga qo‘shma kompleks son deyiladi. Qo‘shma kompleks sonlar uchun

$$z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a,$$

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$$

tengliklar o‘rinli, ya’ni kompleks sonning o‘z qo‘shmasiga yig‘indisi va ko‘paytmasi haqiqiy son bo‘ladi.

4.2-xossa. Kompleks sonlarning qo‘shmasi quyidagi xossalarga ega:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Kompleks sonning teskarisini topishda uning qo‘shmasidan foydalanish juda qulay hisoblanadi:

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

4.3-tasdiq. Bizga $z = a + bi$ kompleks son berilgan bo‘lib, $u + vi$ uning kvadrat ildizi bo‘lsin, u holda

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}.$$

Isbot. Aytaylik, $\sqrt{a+bi} = u + vi$ bo‘lsin. U holda bu tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko‘tarsak,

$$(u+vi)^2 = a+bi$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{cases} \tag{4.1}$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Bu sistemadagi tenglamalarning har birining ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ngra ularni qo‘shsak, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$(u^2-v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2+v^2)^2 = a^2+b^2.$$

So‘nggi tenglikdan $u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (ildiz musbat ishorali, chunki tenglikning chap tomoni musbat sondir). Bu tenglikdan va tenglamalar sistemasi birinchi tenglamasidan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u^2 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Kvadrat ildizdan chiqarib,

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

u va v larni topamiz. (4.1) tenglamalar sistemasning ikkinchi tengligiga ko‘ra uv ko‘paytmaning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni agar $b>0$ bo‘lsa, u va v lar bir vaqtning o‘zida musbat yoki manfiy ishorali, agar $b<0$ bo‘lsa, u va v lar turli ishorali bo‘ladi.□

Shunday qilib, ixtiyoriy kompleks sonnning ikkita kvadrat ildizi mavjud va ular bir-biridan ishorasi bilan farq qiluvchi sonlar bo‘ladi. Xususan, manfiy haqiqiy sonlardan ham kvadrat ildiz chiqarish mumkin. Haqiqatan ham, agar $a<0$ va $b=0$ bo‘lsa, u holda $\sqrt{a^2+b^2}=-a$ (bu ildiz musbat) va $u^2=\frac{1}{2}\left(a-a\right)=0$, ya’ni $u=0$ bo‘ladi. Demak, $\sqrt{u}=\pm\sqrt{-a}\cdot i$ bo‘ladi.

Misol 4.1. $z=-35-12i$ kompleks sonning kvadrat ildizlarini toping. Bu yerda $a=-35, b=-12$ ekanligi uchun

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1225+144}=\sqrt{1369}=37.$$

Shuning uchun

$$u^2=\frac{1}{2}\left(35+37\right)=36,$$
$$v^2=\frac{1}{2}\left(-35+37\right)=1.$$

Demak, $u=\pm 6, v=\pm 1,$ xamda $b<0$ bo‘lganligi sababli, u va v larning ishoralari turli xil bo‘ladi, shuning uchun

$$\sqrt{-35-12i}=\pm(6-i).$$

Misol 4.2. $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$ kvadrat tenglamani kompleks sonlar maydonida yeching.

Kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=2\sqrt{-35-12i}=2(6-i)$ bo‘lib,

$$z_1=\frac{-2-2\left(6-i\right)}{2\left(2+4i\right)}=\frac{-7+i}{2+4i}\cdot\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{-10+30i}{4+16}=\frac{-10+30i}{20}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

$$z_2=\frac{-2+2\left(6-i\right)}{2\left(2+4i\right)}=\frac{5-i}{2+4i}\cdot\frac{2-4i}{2-4i}=\frac{6-22i}{4+16}=\frac{6-22i}{20}=\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i.$$

17-Mavzu:Kompleks sonning trigonometrik shakli. Muavr formulasi

Mavzu rejasi:

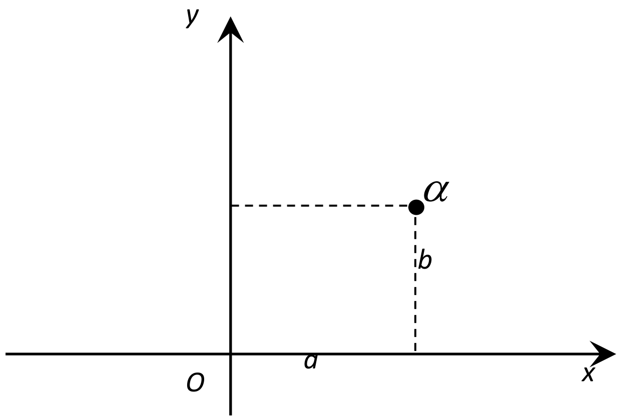
1. Kompleks sonning trigonometrik shakli.
2. Muavr formulasi

Tayanch tushunchalar: Mavxum birlik, kompleks son, haqiqiy son, mavxum qismi, sof mavxum, geometrik talqini, kompleks tekislik, mavxum o`q.

1.Ma’lumki, haqiqiy sonlar to‘plaminining geometrik talqinito‘g‘ri chiziqdan iborat bo’ladi. Ya’ni, haqiqiy sonlar to‘plami bilan to‘g‘ri chiziq o‘rtasida o’zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning ushun $\mathbb{R}$ to’plamni to‘ri chiziq deb qarashimiz mumkin. Bundan esa, $\mathbb{R}^2$ to’plamni tekislik deb qarash mumkinligi kelib chiqadi.

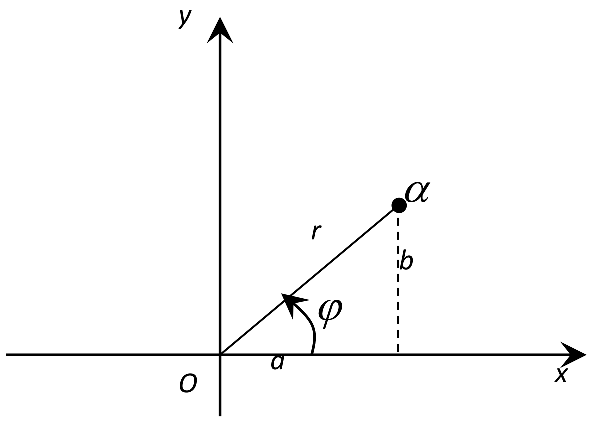
Kompleks sonlar to’plamibilan $\mathbb{R}^2$ to‘plam orasida bir qiymatli moslik mavjudligini hisobga olsak, kompleks sonlar to‘plamining geometrik talqini tekislikdan iborat bo‘lishini payqash qiyin emas.

Kompleks sonlar mos qo‘yilgan tekislik kompleks tekislik deyilib,kompleks tekislikning abssissa o‘qi nuqtalariga haqiqiy sonlar, ordinata o‘qinuqtalariga esa sof mavhum sonlar mos keladi. Shuning uchun kompleks tekislikning abssissa o‘qiga haqiqiy o‘q, ordinata o‘qiga esa mavhum o‘q deyiladi. Demak, $z = a + ib$ kompleks sonning kompleks tekislikdagi o‘rni quyidagi shakldа tasvirlanadi:



6-chizma.

Tekislikdagi z nuqta bilan koordinatalar boshini tutashtiruvchi kesma uzunligini r orqali, bu kesmaning OX o‘qi bilan soat strelkasiga qarama-qarshi yo‘nalishda hosil qilgan burchagini φ orqali belgilaymiz.



7-chizma.

Endi $z = a + ib$ kompleks sonning trigonometrik shaklini ifodalaymiz. 2-chizmadagi to‘g‘ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga asosan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5.1)$$

tenglik kelib chiqadi. Burchak kosinusi, sinusi va tangenslarining ta’rifidanφ burchak aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r} \qquad (5.2)$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (5.3)$$

Kesma uzunligi r ga kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ orqali belgilanadi. Ya’ni, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Kompleks sonning argumenti deb, φ burchakka aytiladi va $\arg z$ orqali belgilanadi.(5.2) tengliklardan a va b larni topamiz:

$$a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi.$$

Ushbu tengliklarni kompleks sonning algebraik shakliga qo‘ysak,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (5.4)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikka z kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

Tabiiyki, kompleks son qo‘shmasining trigonometrik shakli:

$$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

bo‘ladi.

5.1-teorema. Trigonometrik shaklda berilgan ikkita kompleks sonlar ko‘paytmasining moduli, ko‘paytuvchilar modullarining ko‘paytmasiga, argumenti esa ko‘paytuvchilar argumentlarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|,$$

$$\arg(\alpha \cdot \beta) = \arg\alpha + \arg\beta.$$

Isbot. Bizga $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ va $\beta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ kompleks sonlari berilgan bo‘lsin. U holda

$$\alpha \cdot \beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r \cdot \rho(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi + i(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi)) =$$

$$= r \cdot \rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Demak,

$$|\alpha\cdot\beta| = \rho\cdot r = |\alpha|\cdot|\beta| \text{ va } \arg(\alpha\cdot\beta) = \varphi+\psi = \arg\alpha + \arg\beta$$

bo‘ladi. □

Bu teoremadan bevosita quyidagi natijani hosil qilamiz.

5.2-natija. Bir nechta $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sonlar ko‘paytmasining moduli

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot...\cdot|\alpha_n|$$

va argumenti

$$\arg(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + ... + \arg\alpha_n$$

bo‘ladi.

Misol 5.1. $\alpha = 1-i$ kompleks sonini trigonometrik shaklga keltiring. $a=1$, $b=-1$ ekanligidan $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, hamda

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

tengliklardan $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ga ega bo‘lamiz. Natijada

$$\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Misol 5.2. $\alpha = 1-i$ va $\beta = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8})$ kompleks sonlarning ko’paytmasini toping. $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ ekanli-ginihisobgaoslak,

$$\alpha\cdot\beta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}) =$$

$$2\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right).$$

18- Mavzu: Kompleks sondan ildiz chiqarish

Mavzu rejasi:

1. Kompleks sonning trigonometrik ko’rinishi.
2. Kompleks sondan ildiz chiqarish

Ushbu mavzuda trigonometrik shaklda berilgan kompleks sondan n darajali ildiz chiqarish formulasini keltiramiz. Bizga

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ko‘rinishidagi kompleks son berilgan bo‘lsin.

6.1-tasdiq (Muavrformulasi). Har qanday $n \in \mathbb{Z}$ butun sonuchunquyidagi tengliklar o‘rinli:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (6.1)$$

ya’ni,$|\alpha^n| = |\alpha|^n$, $\arg(\alpha^n) = n\arg\varphi.$

Isbot.5.2-natijada

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$$

deb olsak, (6.1) formulaning natural sonlar uchun o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ushbu formulani manfiy butun sonlar uchun o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

tenglik formulani$n = -1$da o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

Endi ixtiyoriy n manfiy butun son uchun $n = -m,\ m \in \mathbb{N}$ deb olib,

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-m} =$$

$$= ((r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1})^m = (r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)))^m =$$

$$= r^{-m}(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

ya’ni (6.1) tenglik manfiy butun sonlar uchun ham o‘rinli.

□

Misol 6.1. Muavr formulasi yordamida $(1-i)^{10}$ ifodani soddalashtiring.

$$(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right) =$$

$$32\left(\cos\left(16\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(16\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$32\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=32\cdot(-i)=-32i.$$

6.2-natija. Ikkita kompleks son nisbatining moduli modullar nisbatiga, argumenti esa argumentlar ayirmasiga teng.

Isbot. $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $\beta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$ vakompleks sonlar berilgan bo‘lsin. U holda

$$\frac{\alpha}{\beta}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho^{-1}(\cos(-\psi)+i\sin(-\psi))=$$

$$=r\cdot\rho^{-1}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi))$$

bo‘lib, bundan

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=r\cdot\rho^{-1}=\frac{r}{\rho}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Shuningdek,

$$\arg\frac{\alpha}{\beta}=\varphi-\psi=\arg\varphi-\arg\psi$$

kelib chiqadi.

6.3-ta’rif. α va ω kompleks sonlari va *n* natural son uchun $\omega^n=\alpha$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, ω kompleks son α sonning *n*-darajali ildizi deyiladi.

Quyidagi teoremada kompleks sondan *n*-darajali ildiz chiqazish formulasini keltiramiz.

6.4-teorema. Ixtiyoriy kompleks son *n* ta turli *n*-darajali ildizga ega bo‘lib, ular quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\omega_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),\ k=\overline{0,n-1}..$$

Isbot. α soning *n*-darajali ω kompleks ildizini $\omega=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ ko‘rinishida izlaymiz. Muavr formulasiga asosan

$$\omega^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Bundan $\rho^n = r, n\theta = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ kelib chiqadi. Bu tenglik-lardan $\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$ ni olamiz. Demak, α ning har bir n-darajali ildizi ushbu

$$\omega = \omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

ko‘rinishga keladi, va aksincha, bunday ko‘rinishga ega bo‘lgan har qanday kompleks son α ning n-darajali ildizidir.

Endi k ga 0, 1, 2, ..., $n-1$ qiymatlar berib, $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ larni topamiz, bularning hammasi turlicha bo‘ladi, chunki k ni bittaga orttirish argumentning $\dfrac{2\pi}{n}$ ga ortishiga olib keladi. Endi $k \geq n$ bo‘lgan holni ko‘ramiz. k ni n ga qoldiqli bo‘lsak,

$$k = nq + r, 0 \leq r \leq n-1,$$

bo‘lib,

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi nq + 2\pi r}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q$$

kelib chiqadi. Natijada,

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi q\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi r}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi r}{n}\right)\right) = \omega_r$$

bo‘ladi, ya’ni $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ larning biriga teng bo‘ladi. □

Misol 6.2.

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right),$$

hosil bo‘ladi, bu yerda $k=0,1,2$. Bundan

$$\omega_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\omega_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

$$\omega_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

uchta turli ildizlari hosil bo‘ladi.

19-20- Mavzu: Birning ildizlari va ularning xossalari. Eyler formulalari

Mavzu rejasi:

1. Birning ildizlari va ularning xossalari.
2. Eyler formulalari

Endi bir sonning$n$-darajali kompleks ildizlari ustida to‘xtalamiz. Agar $\alpha=1=\cos 0+i\sin 0$ deb olsak, u holda 1 ning n-darajali ildizlari

$$\varepsilon_k=\sqrt[n]{1}=\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k=\overline{0,n-1}$$

bo‘ladi va birning barcha n darajali ildizlari n ta $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{n-1}$ kompleks sonlar to‘plamidan iboratdir. Ushbu to‘plamni $<\varepsilon>_n$ kabi belgilab olamiz.

6.5-teorema. Birning barcha ildizlari uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

a) $\varepsilon_k,\varepsilon_m\in<\varepsilon>_n$ uchun $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_m\in<\varepsilon>_n$;

b) $\varepsilon_k\in<\varepsilon>_n$ uchun $(\varepsilon_k)^{-1}\in<\varepsilon>_n$.

Isbot. a) Haqiqatan, agar $\varepsilon_k,\varepsilon_m\in<\varepsilon>_n$, $0\le k,m\le n-1$bo‘lsa,

$$(\varepsilon_k\cdot\varepsilon_m)^n=\varepsilon_k^n\cdot\varepsilon_m^n=1\cdot 1=1.$$

b) ε_k ning teskarisi ε_k^{-1} bo‘lsa, $\left(\varepsilon_k^{-1}\right)^n=\left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)^n=\frac{1}{\varepsilon_k^n}=1$ bo‘ladi.

Muavr formulasiga asosan $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Demak, $<\varepsilon>_n$ to‘plam ε_1 ildizning darajalari orqali ifodalanadi.

6.6-ta’rif. Agarbirning *n*-darajali ildizi ε_k uchun

$$\{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3 ..., \varepsilon_k^n\} = <\varepsilon>_n$$

shart o‘rinli bo‘lsa, u holda ε_k birning *n*-darajali boshlang‘ich ildizi deyiladi.

6.7-tasdiq. $\varepsilon_k = \cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right)$ ildiz birning boshlan-g‘ich ildizibo‘lishi uchun k va n sonlari o‘zaro tub bo’lishi zarur va yetarli.

Isbot. Aytaylik, k va n sonlari o‘zaro tub bo‘lsin. U holda ε_k boshlang‘ich ildiz ekanligini ko’rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni shunday n_1 va n_2, $(0 \le n_1 < n_2 \le n-1)$ sonlari topilib, $\varepsilon_k^{n_1} = \varepsilon_k^{n_2}$ bo‘lsin. U holda $\varepsilon_k^{n_2 - n_1} = 1$ bo’lib, bundan esa, $\dfrac{2\pi k(n_2 - n_1)}{n} = 2\pi t$, ya’ni $k \cdot (n_2 - n_1) = t \cdot n$ hosil bo‘ladi. Ushbu tenglikdan k va n o‘zaro tub va $n_2 - n_1 < n$ ekanligini hisobga olsak, $n_2 = n_1$ kelib chiqadi. Demak, ε_k boshlang‘ich ildiz.

Aytaylik, ε_k boshlang‘ich ildiz bo’lsin, u holda k va n sonlari o‘zaro tub ekanligini ko’rsatamiz. $(k,n) = d$ bo‘lsin, ya’ni $n = n_1 \cdot d, k = k_1 \cdot d$. U holda

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right).$$

Bundan esa, $\varepsilon_k^{n_1} = 1$ ekanligi kelib chiqadi. ε_k boshlang‘ich ildiz ekanligi uchun $n_1 = n,$ ya’ni $d = 1.$ □

Yuqoridagi tasdiqdan ko’rinadiki, agar $n = p$ tub son bo‘lsa, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{p-1}$ larning hammasi boshlang‘ich ildiz bo‘ladi.

Misol 6.3. Birning 3-darajali ildizlarini toping. $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{3} + i\sin\dfrac{2\pi k}{3}$, $k = 0,1,2$ ekanligidan:

$$\varepsilon_0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

kelib chiqadi. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ lar birning 3-darajali boshlang‘ich ildizlaridir.

21- 22- Mavzu: Ko’phadlar va ular ustida amallar. Ko’phadlarning bo’linish nazariyasi, Gorner sxemasi.

Mavzu rejasi:

1. Ko’phadlar va ular ustida amallar.
2. Ko’phadlarning bo’linish nazariyasi, Gorner sxemasi.

Biz ushbu mavzuda K orqali haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ yoki kompleks sonlar to‘plami $\mathbb{C}$ ni belgilaymiz.

16.1-ta’rif. Ixtiyoriy $a_i \in \mathrm{K}$, $i \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ uchun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (16.1)$$

ifoda haqiqiy (kompleks) koeffitsientli ko‘phad deyiladi.

(16.1) ifodadagi x noma’lum o‘zgaruvchi, $a_i \in \mathrm{K}$ lar ko‘phadning koeffitsientlari, $a_i x^i$ lar esa *ko‘phadning hadlari* deyiladi.

Agar $a_n \neq 0$ bo‘lsa, a_n ga bosh koeffitsient $a_n x^n$ esa *bosh had* deyiladi, ko‘phadning a_0 hadiga *ozod had* deyiladi.

Ko‘phadda qatnashgan noma’lumning eng katta darajasiga ko‘phadning darajasi deyiladi va $\deg f(x)$ kabi belgilanadi, ya’ni $a_n \neq 0$ bo‘lsa $\deg f(x) = n$.

Barcha koeffitsientlari nolga teng bo‘lgan ko‘phad *nol ko‘phad* deyiladi. Bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlari teng bo‘lgan ko‘phadlar o‘zaro *teng ko‘phadlar* deyiladi.

K da berilgan barcha ko‘phadlar to‘plamini $\mathrm{K}[x]$ orqali belgilaymiz. Shuningdek, $f(\alpha)$ bilan $f(x)$ ko‘phadning $x = \alpha$ nuqtadagi qiymati belgilanadi.

Endi $\mathrm{K}[x]$ to‘plamda algebraik amallarni aniqlaymiz.

Ko‘phadlarni qo‘shish. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning yig‘indisi deb, ularning mos darajalari oldidagi koeffitsientlarni qo‘shishdan hosil bo‘lgan ko‘phadga aytiladi, ya’ni

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^i, \tag{16.2}$$

bu yerda $c_i = a_i + b_i$ bo‘lib, a_i va b_i lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning koeffitsientlaridir.

Ko‘phadlarni songa ko‘paytirish. $f(x)$ ko‘phadni λ soniga ko‘paytmasi deb, berilgan ko‘phadning barcha koeffitsientlarini shu λ soniga ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan ko‘phadga aytiladi, ya’ni

$$\lambda f(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x^i.$$

Ko‘phadlarni ko‘paytirish. $\mathrm{K}[x]$ to‘plamda ko‘paytirish amalini quyidagicha kiritamiz: $f(x),\ g(x)\in \mathrm{K}[x]$ ko‘phadlarning ko‘paytmasi sifatida koeffitsientlari

$$d_j=\sum_{k+l=0}^{j} a_k b_l \in K, 1\le j\le n+m.$$

tenglik bilan aniqlangan

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j$$

ko‘phadga aytiladi, bu yerda

$$d_0=a_0b_0,\ d_1=a_0b_1+a_1b_0,\ d_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0, \ldots.$$

Ma’lumki, ko‘phadlar ko‘paytmalarining darajasi berilgan ko‘phadlar darajalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\deg\varphi(x)=\deg f(x)+\deg g(x).$$

Misol 16.1. $f(x)=x^3-2x^2+3x-5$ va $g(x)=3x^2-x+2$ ko‘phadlarni yig‘indisi va ko‘paytmasini toping.

$$g(x)+f(x)=(3x^2-x+2)+(x^3-2x^2+3x-5)=$$

$$=x^3+(3-2)x^2+(-1+3)x+(2-5)=x^3+x^2+2x-3.$$

Ushbu ko‘phadlarning ko‘paytmasi quyidagiga teng:

$$g(x)\cdot f(x)=(3x^2-x+2)(x^3-2x^2+3x-5)=$$

$$=3x^5-6x^4+9x^3-15x^2-x^4+2x^3-3x^2+5x+$$

$$+2x^3-4x^2+6x-10=3x^5-7x^4+13x^3-22x^2+11x-10.$$

Kop’hadlar ustida aniqlangan amallar quyidagi xossalarga ega.

16.2-xossa. a) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

b) $\left(f(x)+g(x)\right)+h(x)=f(x)+\left(g(x)+h(x)\right)$;

c) $f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$;

d) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot\left(g(x)\cdot h(x)\right)$;

e) $\left(f(x)+g(x)\right)\cdot h(x)=f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x)$.

Isbot. Dastlabki ikkita xossaning isboti sodda bo‘lganligi uchun biz ularning isbotini keltirmaymiz.

c) $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$ va $g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$ bo‘lsin. U holda

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=0}^{j}a_kb_lx^j=\sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=0}^{j}b_la_kx^j=g(x)\cdot f(x).$$

d) Ko‘phadlarni ko‘paytirish assotsiativ ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,\ h(x)=\sum_{k=0}^{p}c_kx^k$$

bo‘lsin. U holda $\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot h(x)$ ko‘phadning x^t hadi oldidagi koeffitsienti

$$\sum_{l+k=0}^{t}\left(\sum_{i+j=0}^{l}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=0}^{t}a_ib_jc_k$$

bo‘lib, $f(x)(g(x)\cdot\varphi(x))$ ko‘phadning x^i hadi oldidagi koeffitsienti esa,

$$\sum_{i+l=0}^{t}a_i\left(\sum_{j+k=0}^{l}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=0}^{t}a_ib_jc_k$$

bo‘ladi. Bu ikki yig‘indining tengligiga ko‘ra ko‘phadlar ko‘paytma-sining assotsiativligi kelib chiqadi.

e) $\sum_{k+l=0}^{n+m}(a_k+b_k)c_l=\sum_{k+l=0}^{n+m}a_kc_l+\sum_{k+l=0}^{n+m}b_kc_l$ ekanligigidan ko‘phadlar to‘plami ustida qo‘shish va ko‘paytrish amallari distributiv ekanligi kelib chiqadi. □

Endi ko‘phadlar to‘plamlari ustida ko‘paytirish amaliga teskari bo‘lgan bo‘lish amalini o‘rganamiz.

16.3-ta’rif. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar uchun

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x) \qquad (16.3)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi(x)\in \mathrm{K}[x]$ ko‘phad mavjud bo‘lsa, $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linadi deyiladi.

Agar $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linsa, $f(x)$ bo‘linuvchi, $\varphi(x)$ esa bo‘luvchi ko‘phad deyiladi, hamda $\varphi(x)\,|\,f(x)$ yoki $f(x)\vdots\varphi(x)$ kabi belgilanadi.

16.4-xossa. Ko‘phadlar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) agar $g(x)\,|\,f(x)$ va $h(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa u holda $h(x)\,|\,f(x)$;

b) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ va $\varphi(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi(x)\,|\,(f(x)\pm g(x))$.

c) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun $\varphi(x)\,|\,f(x)\cdot g(x)$.

Agar $\varphi(x)\,|\,f_1(x), \varphi(x)\,|\,f_2(x), ..., \varphi(x)\,|\,f_s(x)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g_1(x), g_2(x), ..., g_s(x)$ ko‘phadlar uchun

$$\varphi(x)\,|\,(f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)\cdot g_2(x)+...+f_s(x)\cdot g_s(x)).$$

d) xar qanday $f(x)$ ko‘phad istalgan nolinchi darajali ko‘phadga bo‘linadi.

e) agar $\varphi(x)\,|\,f(x)$ bo‘lsa, $c\varphi(x)\,|\,f(x)$, bu yerda $c\in \mathrm{K}$, $c\neq 0$.

f) agar $g(x)\,|\,f(x)$ va $f(x)\,|\,g(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar bir-biridan o‘zgarmas $c\in \mathrm{K}$. ko‘paytuvchi bilan farq qiladi.

Isbot. a) shartga ko‘ra, $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ va $g(x)=h(x)\cdot\varphi(x)$ ko‘rinishda yozib olsak,

$$f(x)=h(x)\cdot(\varphi(x)\cdot\psi(x)).$$

b) $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ va $g(x)=\varphi(x)\cdot h(x)$ ekanligidan

$$f(x)\pm g(x)=\varphi(x)\cdot(\psi(x)\pm h(x))$$

kelib chiqadi.

c) agar $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun

$$f(x)\cdot g(x)=\varphi(x)\cdot(\psi(x)\cdot g(x))$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

d) $f(x)=c\cdot c^{-1}\cdot f(x)=c\cdot(c^{-1}\cdot f(x))$ tenglikdan xar qanday ko‘phad nolinchi darajali ko‘phadga bo‘linishi kelib chiqadi.

e) $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ tenglik o‘rinli ekanligidan

$$f(x)=(c\cdot\varphi(x))\cdot(c^{-1}\cdot\psi(x))$$

tenglik kelib chiqadi.

f) shartga ko‘ra $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ va $g(x)=f(x)\cdot\psi(x)$, demak, $f(x)=f(x)\cdot(\varphi(x)\cdot\psi(x))$. Bundan $1=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu esa $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ko‘phadlarning xar biri nolinchi darajali ko‘phadlar bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. □

Agar $f(x)$ ko‘phad $g(x)$ ko‘phadga bo‘linmasa qoldiqli bo‘lishni amalga oshirish mumkin.

16.5-ta’rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun ga $q(x)$ va $r(x)$, $\deg r(x)<\deg g(x)$ ko‘phadlar topilib,

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x), \qquad (16.4)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa $f(x)$ ko‘phad $g(x)$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lingan deyiladi.

Bu yerdagi $q(x)$ ko‘phadga *bo‘linma*, $r(x)$ ga *qoldiq* deyiladi, (16.4) tenglikka esa qoldiqli bo‘lish formulasi deb ataladi.

16.6-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x),\ \deg r(x)<\deg g(x),$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x), r(x) \in \mathrm{K}[x]$ ko‘phadlar mavjud va yagonadir.

Isbot: Dastlab (16.4) tenglikni qanoatlantiruvchi ko‘phadlar mavjud ekanligini ko‘rsatamiz. Agar $\deg f(x) < \deg g(x)$ bo‘lsa, u holda (16.3) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Chunki, bu holatda $q(x)=0$ va $r(x)=f(x)$ deb olamiz.

Faraz qilaylik, $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ bo‘lsin. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i},\ g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j},\ a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$$

ko‘rinishlarda bo‘lsin. U holda quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x).$$

Bu ayirmadan ko‘rinib turibdiki, $n_1=\deg f_1(x) < \deg f(x)$. Agar $\deg f_1(x) < \deg g(x)$ bo‘lsa, u holda (16.4) tenglik to‘g‘ri bo‘ladi, aks holda bu jarayonni davom ettirib, quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_2(x)=f_1(x)-\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}g(x),$$

bu yerda $a_{1,0}$ koeffitsient $f_1(x)$ ko‘phadning bosh koeffitsienti.

Ma’lumki,

$$n_2=\deg f_2(x) < \deg f_1(x)=n_1$$

bo‘lib, yuqoridagi mulohazani yana bir bor qo‘llash mumkin. Bu jarayonni davom ettirish natijasida darajalari kamayib boruvchi $n > n_1 > n_2 > \ldots$ sonlariga teng bo‘lgan $f(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots$ ko‘phadlarni hosil qilamiz. $f(x)$ ko‘phadning darajasi chekli bo‘lganligi uchun, chekli qadamdan so‘ng shunday $f_k(x)$ ko‘phad topilib, $n_k=\deg f_k(x) < \deg g(x)$ bo‘ladi. Ya’ni quyidagi tenglik o‘rinli

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)-\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}g(x),$$

bu yerda $a_{k-1,0}$ element $f_{k-1}(x)$ ning bosh koeffitsientidir. Endi hosil bo‘lgan hamma tengliklarni qo‘shsak,

$$f(x)-\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)g(x)=f_k(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}$$

va $r(x)=f_k(x)$ deb olsak,

$$f(x)-q(x)g(x)=r(x)$$

ekanligini hosil qilamiz.

Endi (16.4) tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$ va $r(x)$ ko‘phadlar yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, (16.4) tenglik yana boshqa qandaydir $q_1(x),\ r_1(x)\in \mathrm{K}[x]$ ko‘phadlar uchun ham o‘rinli bo‘lsin, ya’ni

$$f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),\ \deg r_1(x)<\deg g(x) \qquad (16.5)$$

bo‘lsin. (16.4) va (16.5) tengliklarning chap tomonlari tengligidan

$$g(x)\cdot q(x)+r(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),$$

$$g(x)\cdot(q(x)-q_1(x))=r_1(x)-r(x)$$

kelib chiqadi. Bu tenglikdan quyidagiga ega ni bo‘lamiz:

$$\deg(r_1(x)-r(x))=\deg\big(g(x)\cdot(q(x)-q_1(x))\big).$$

Lekin $\deg(r_1(x)-r(x))<\deg g(x)$ bo‘lganligi uchun $q(x)=q_1(x)$ bo‘ladi, bundan $r_1(x)=r(x)$ tenglik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. □

Misol 16.2. $f(x)=3x^3-2x^2+x+4$ ko‘phadni $g(x)=x^2+3x+1$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-2x^2+x+4 & x^2+3x+1 \\ \hline
\underline{3x^3+9x^2+3x} & 3x-11 \\
\quad -11x^2-2x+4 & \\
\quad \underline{-11x^2-33x-11} & \\
\qquad\qquad 31x+15 &
\end{array}$$

Bundan $q(x)=3x-11$ va $r(x)=31x+15$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$f(x) = g(x)\cdot(3x-11)+(31x+15)$$

tenglikni hosil qilamiz.

23- Mavzu: Qoldiqli bo’lish. Ko’phadlarning EKUBi

Mavzu rejasi:

1. Qoldiqli bo’lish.
2. Ko’phadlarning EKUBi

Bizga $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar berilgan bo‘lsin.

17.1-ta’rif. Agar $\varphi(x)$ ko‘phad uchun $\varphi(x)\,|\,f(x)$ va $\varphi(x)\,|\,g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning *umumiy bo‘luvchisi* deyiladi.

Ma’lumki, agar $\varphi(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, $c\varphi(x)$ ko‘phad ham bu ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi. Bundan tashqari, $\varphi(x)$ ko‘phadning bo‘luvchilari ham $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchilari bo‘ladi.

17.2-ta’rif. $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lib, uning o‘zi ham $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning istalgan boshqa bir $\varphi(x)$ umumiy bo‘luvchilariga bo‘linsa, $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning *eng katta umumiy bo‘luvchisi* deyiladi va $\mathrm{EKUB}(f(x), g(x))$ kabi belgilanadi.

Ta’kidlash joizki, $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi darajasi qolgan umumiy bo‘luvchilar darajalaridan kichik bo‘lmaydi.

Ushbu mavzuda ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish usuli bo‘lgan Yevklid algoritmini keltiramiz.

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ deb olamiz.

$f(x)$ ni $g(x)$ ga bo‘lib, $q_1(x)$ bo‘linma va $r_1(x)$ qoldiqni hosil qilamiz

$$f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x).$$

Ma’lumki, $\deg g(x) > \deg r_1(x)$, so‘ngra $g(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo‘lib, $q_2(x)$ bo‘linma va $r_2(x)$ qoldiqni olamiz:

$$g(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x).$$

So‘ngra $r_1(x)$ ni $r_2(x)$ bo‘lib, bu jarayonni shu tarzda davom ettiramiz. Qoldiqlarning darajalari

$$\deg g(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \ldots$$

tartibda pasayib borganligi va $\deg g(x)$ chekli bo‘lganligi uchun tengsizliklar zanjiri ma’lum joyga kelib tugaydi, ya’ni $\deg r_{n+1}(x) = 0.$ Demak, biz qiyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x)\cdot q_1(x) + r_1(x),\\
&g(x) = r_1(x)\cdot q_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x)\cdot q_3(x) + r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (17.1)\\
&r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x)\cdot q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\cdot q_n(x) + r_n(x),\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x)\cdot q_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Endi bu tengliklarning oxirgisidan yuqoriga qarab harakat qilsak,

$$r_n(x) \mid r_{n-1}(x) \Rightarrow r_n(x) \mid r_{n-2}(x) \Rightarrow r_n(x) \mid r_{n-3}(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow r_n(x) \mid r_1(x) \Rightarrow r_n(x) \mid g(x) \Rightarrow r_n(x) \mid f(x)$$

hosil bo‘ladi.

Ravshanki, $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi $r_n(x)$ qoldiq bu ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi. Demak, Yevklid algoritmi $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarni umumiy bo‘luvchilarini topish usulini berar ekan.

17.3-teorema. $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi oxirgi noldan farqli qoldiq $r_n(x)$ ularning eng katta umumiy bo‘luvchisiga teng, ya’ni $\text{EKUB}(f(x), g(x)) = r_n(x).$

Isbot. Yuqorida $r_n(x)$ qoldiq $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi ekanligini aytib o‘tdik. Faraz qilaylik, $d(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)$

larning boshqa bir umumiy bo‘luvchisi bo‘lsin. U holda Yevklid algoritmidan ko‘rish mumkinki, $d(x)\,|\,r_1(x)$ o‘rinli bo‘ladi, shuningdek, $d(x)\,|\,r_2(x)$ munosabat ham o‘rinli ekanligini tekshirish qiyin emas. Bu jarayonni davom attirish natijasida $d(x)\,|\,r_n(x)$ ekanligini hosil qilamiz. □

17.3-teoremadan shuni xulosa qilish mumkinki, berilgan ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini Yevklid algoritmi yordamida topish mumkin. Shuningdek, agar $d(x)$ berilgan ko‘phadlarning EKUBi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy c nolinchi darajali ko‘phad uchun $cd(x)$ ko‘phad ham berilgan ko‘phadlarning EKUBi bo‘ladi.

Misol 17.1. Yevklid algoritmi yordamida $f(x)=x^3+x^2-x-1$ va $g(x)=x^3-1$ ko‘phadlarning EKUBini topaylik.

$$f(x)=g(x)\cdot 1+(x^2-x),$$

$$g(x)=(x^2-x)(x+1)+(x-1),$$

$$(x^2-x)=(x-1)\cdot x.$$

Demak, $\text{EKUB}(f(x),g(x))=x-1.$

17.4-ta’rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar nolinchi darajali ko‘phadlardan boshqa umumiy bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, ushbu ko‘phadlar o‘zaro tub ko‘phadlar deyiladi.

Bundan keyin berilgan ko‘phadlarning EKUBining bosh koeffitsientini hamma vaqt 1 ga teng deb olamiz va shunga asosan o‘zaro tub ko‘phadlarning EKUBi 1 ga teng bo‘ladi. O‘zaro tub ko‘phadlar $(f(x),g(x))=1$ kabi yoziladi.

Endi Yevklid algoritmidan foydalanib, quyidagi teoremani isbot qilamiz.

17.5-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun $\deg u(x)<\deg g(x)$ va $\deg v(x)<\deg f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $u(x)$, $v(x)$ ko‘phadlar topiladiki,

$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=\text{EKUB}(f(x),g(x)) \qquad (17.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarga Yevklid algoritmini qo‘llaymiz. Yevklid algoritmidagi oxiridan bitta oldingi tengligini qaraymiz:

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_n(x) + r_n(x).$$

Bundan

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) - r_{n-1}(x) \cdot q_n(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Bu tenglikda $r_n(x) = \text{EKUB}(f(x), g(x))$ ekanligini hisobga olib, $u_1(x) = 1, v_1(x) = -q_n(x)$ deb olsak,

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) \cdot u_1(x) + r_{n-1}(x) \cdot v_1(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerga $r_{n-1}(x)$ ning $r_{n-3}(x)$ va $r_{n-2}(x)$ orqali ifodasini Yevklid algoritmidagi tenglikdan foydalanib soddalashtirsak,

$$r_n(x) = r_{n-3}(x) \cdot u_2(x) + r_{n-2}(x) \cdot v_2(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi, bu yerda

$$u_2(x) = v_1(x), v_2(x) = u_1(x) - v_1(x) \cdot q_{n-1}(x).$$

Yevklid algoritmidagi tengliklar bo‘ylab yuqoriga tomon harakatlanib borsak, (17.2) tenglikka kelamiz.

Endi teoremani ikkinchi shartini isbot qilamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\deg u(x) > \deg g(x)$ deb olamiz. U holda $u(x)$ ni $g(x)$ ga qoldiqli bo‘lib

$$u(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni (17.2) ga olib borib ihchamlasak

$$f(x) \cdot r(x) + g(x) \cdot \big(v(x) + f(x) \cdot q(x)\big) = r_n(x) \qquad (17.3)$$

hosil bo‘ladi.

Bu tenglikda $u_1(x) = r(x)$, deb olsak, $\deg u_1(x) < \deg g(x).$

Bundan tashqari, $v_1(x) = v(x) + f(x) \cdot q(x)$ deb belgilasak, $\deg v_1(x) < \deg f(x)$ bo‘ladi. Aks holda (17.3) tenglikning chap tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchining darajasi $g(x) \cdot f(x)$ ko‘paytmaning darajasidan katta yoki teng bo‘lib, chap tomondagi yig‘indining darajasi ham $g(x) \cdot f(x)$ ning darajasidan katta yoki teng bo‘ladi. Vaholanki, $\deg r_n(x) < \deg g(x) \cdot f(x).$ □

(17.2) tenglikdagi ifodaga $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi orqali chiziqli ifodasi deb ataladi.

Teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

17.6-natija. Agar $(f(x), g(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $u(x), v(x)$ ko‘phadlar mavjud, bu yerda $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x).$

Misol 17.2. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ va $g(x) = x^3 - 1$ ko‘phadlar uchun $u(x)$ va $v(x)$ ko‘phadlarni aniqlang.

Yuqoridagi 17.1-misoldagi $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi tengliklardan

$$x - 1 = g(x) - (x^2 - x)(x+1) = g(x) - (f(x) - g(x))(x+1) =$$

$$= g(x) - f(x) + g(x)(x+1) = f(x)(-1) + g(x)(x+2)$$

hosil bo‘lib, bundan $u(x) = -1, v(x) = x + 2$ ko‘phadlarni topamiz.

Natijadan foydalanib, o‘zaro tub ko‘phadlar uchun muhim xossalarni olish mumkin.

17.7-xossa. a) agar $(f(x), g(x)) = 1$ va $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $(f(x), \varphi(x) \cdot g(x)) = 1$ bo‘ladi;

b) agar $\varphi(x) | (f(x) \cdot g(x))$ bo‘lib, $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $\varphi(x) | g(x)$ bo‘ladi;

c) agar $\varphi(x) | f(x)$ va $\psi(x) | f(x)$ bo‘lib, $(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda $(\varphi(x) \cdot \psi(x)) | f(x)$ bo‘ladi.

Isbot: a) haqiqatdan ham,

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

tenglikni $\varphi(x)$ ga ko‘paytirsak,

$$f(x) \cdot \left(u(x) \cdot \varphi(x)\right) + \left(g(x) \cdot \varphi(x)\right) \cdot v(x) = \varphi(x)$$

hosil bo‘ladi.

Agar $h(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $g(x)\cdot\varphi(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa, yuqoridagi tenglikdan $h(x)\,|\,\varphi(x)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu esa $h(x)$ ko‘phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlarning umumiy bo‘luvchilari ekanligini anglatadi. Shartga asosan, $h(x)=1$ bo‘ladi, bundan esa $f(x)$ va $\varphi(x)\cdot g(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub ekanligi kelib chiqadi.

b) shartga asosan

$$f(x)\cdot u(x)+\varphi(x)\cdot v(x)=1$$

o‘rinli bo‘ladi. Tenglikning ikkala tomonini $g(x)$ ko‘phadga ko‘paytiramiz.

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)\cdot u(x)+\varphi(x)\cdot\left(g(x)\cdot v(x)\right)=g(x).$$

Bu tenglikning chap tomondagi yig‘indi $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘lingani uchun o‘ng tomonining ham bo‘linishi kelib chiqadi. Demak, $\varphi(x)\,|\,g(x).$

c) shartga asosan $f(x)=\varphi(x)\cdot\varphi_1(x)$, bo‘lib u $\psi(x)$ ko‘phadga bo‘linadi, ya’ni $\psi(x)\,|\,(\varphi(x)\cdot\varphi_1(x)),$ hamda $(\varphi(x),\psi(x))=1$ bo‘lganligi uchun $\psi(x)\,|\,\varphi_1(x)$. Demak, $\varphi_1(x)=\psi(x)\cdot\varphi_2(x)$ bo‘ladi, bu yerdan

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\varphi_1(x)=(\varphi(x)\cdot\psi(x))\cdot\varphi_2(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan esa

$$(\varphi(x)\cdot\psi(x))\,|\,f(x)$$

ekanligini kelib chiqadi. □

Eng katta umumiy bo‘luvchi ta’rifini ixtiyoriy $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_s(x)$ ko‘phadlar uchun ham berish mumkin, ya’ni agar $d(x)\,|\,f_i(x), 1\le i\le s$ bo‘lib, $f_i(x)$ ko‘phadlarning boshqa ixtiyoriy $h(x)$ umumiy bo‘luvchisi uchun $h(x)\,|\,d(x)$ bo‘lsa, $d(x)$ ko‘phad $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_s(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchi deyiladi.

Berilgan $f_i(x)$ ko‘phadlarning EKUBini topish uchun avval $(f_1(x),f_2(x))=d_2(x)$, so‘ngra $(d_2(x),f_3(x))=d_3(x)$ va hokazo $(d_{s-1}(x),f_s(x))=d_s(x)$ topiladi. Topilgan $d_s(x)$ ko‘phad $f_i(x)$ larning EKUBi bo‘ladi.

Xususan, agar $d_s(x)=1$ bo‘lsa, u holda $f_i(x)$ ko‘phadlarga o‘zaro tub ko‘phadlar deyiladi.

Agar $\forall i \neq j$ uchun $(f_i(x), f_j(x)) = 1$ bo‘lsa, $f_1(x), f_2(x), ..., f_s(x)$ ko‘phadlarga juft-jufti bilan o‘zaro tub ko‘phadlar deyiladi.

24-25 - Mavzu: Bezu teoremasi. Viyet formulalari. Ko’phad ildizlarining joylashishi. Keltirilmas ko’phadlar

Mavzu rejasi:

1. Bezu teoremasi.
2. Viyet formulalari.
3. Keltirilmas ko’phadlar.
4. Ko’phad ildizlarining joylashishi

Ko‘phadlarning ildizlarini topish juda muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki, ko‘plab matematik masalalarni yechish ko‘phadning ildizlarini o‘rganish masalasiga olib kelinadi. Shu sababli biz ko‘phadlarning ildizlarini o‘rganish masalasini keltiramiz.

18.1-ta’rif. $f(x)$ ko‘phad uchun $f(\alpha) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi α soniga $f(x)$ ko‘phadning ildizi deyiladi.

Avvalgi mavzudan ma’lumki, $f(x)$ ko‘phadni $x - \alpha$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r. \qquad (18.1)$$

Ta’kidlash joizki, $x - \alpha$ ko‘phadning darajasi 1 ga teng bo‘lganligi sababli, qoldiqning darajasi nolga teng bo‘ladi. Shuning uchun qoldiqli bo‘lishdagi qoldiq ko‘phad $r(x)$ o‘rniga r sonini yozish mumkin.

18.2-teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko‘phad $x - \alpha$ ko‘phadga qoldiqsiz bo‘linishi uchun $f(\alpha)$ = 0 bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot.*Zaruriyligi.* Agar $f(x)$ ko‘phad $x - \alpha$ ko‘phadga qoldiq-siz bo‘linsa, u holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot \varphi(x)$ o‘rinli bo‘ladi. Demak,

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot \varphi(\alpha) = 0.$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $x = \alpha$ nuqtada $f(x)$ ko‘phad nolga aylansin, ya’ni $f(\alpha) = 0$ bo‘lsin. U holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r$ tenglikdan

$$r = f(\alpha) - (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak, $f(x)=(x-\alpha)\cdot q(x)$ tenglik o‘rinlidir.

□

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phadning ildizlarini izlash, uning chiziqli bo‘luvchilarini izlash masalasiga teng kuchlidir. $f(x)$ ko‘phadni $x-\alpha$ chiziqli ko‘phadga qoldiqli bo‘lishda keng qo‘llanadigan Gorner usulini keltiramiz.

Kompleks sonlar maydonida berilgan quyidagi ko‘phadni qaraylik:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n,$$

$f(x)$ ko‘phadni $x-\alpha$ chiziqli ko‘phadga qoldiqli bo‘lganda bo‘linma $q(x)$ ni quyidagicha yozib olaylik:

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+...+b_{n-1}.$$

$q(x)$ ko‘phadni (18.1) tenglikka qo‘yib, x ning bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglasak,

$$a_0=b_0,$$

$$a_1=b_1-\alpha b_0,$$

$$a_2=b_2-\alpha b_1,$$

$$......................,$$

$$a_{n-1}=b_{n-1}-\alpha b_{n-2},$$

$$a_n=r-\alpha b_{n-1}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ya’ni

$$b_0=a_0,\ b_k=\alpha b_{k-1}+a_k,\ 1\le k\le n-1$$

tengliklar kelib chiqadi. Oxirgi

$$r=\alpha b_{n-1}+a_n$$

tenglikdan r qoldiq yoki $f(x)$ ko‘phadning $x=\alpha$ nuqtadagi qiymati topiladi.

Bu usul *Gorner sxemasi* deb atalib, quyidagicha jadval orqali ifodalanadi:

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
a_0	$a_1+\alpha b_0$	$a_2+\alpha b_1$	$\cdots$	$a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$	$a_n+\alpha b_{n-1}$
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-1}	r

Misol 18.1. $f(x)=2x^5-3x^4+4x^2-5x+7$ ko‘phadni $x-3$ ga bo‘lishdagi $q(x)$ bo‘linmani va r qoldig‘ini Gorner sxemasi yordamida toping.

α	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	2	-3	0	4	-5	7
3	2	3	9	31	88	271
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	r

Shunday qilib, bo‘linma $q(x)=2x^4+3x^3+9x^2+31x+88$, qoldiq esa $r=f(3)=271$ ga teng bo‘ldi.

Algebraning asosiy teoremasi. Kompleks koeffitsientli barcha ko‘phadlar to‘plamini $\mathbb{C}[x]$ orqali belgilaylik. Algebraning asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

18.3-teorema (Algebraning asosiy teoremasi). Darajasi nolga teng bo‘lmagan ixtiyoriy $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ ko‘phad kamida bitta kompleks ildizga ega.

Teoremadan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

18.4-natija. Darajasi $n(n\geq 1)$ ga teng bo‘lgan xar qanday $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ ko‘phad $\mathbb{C}$ maydonda n ta ildizga ega bo‘lib,

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

yoyilma ko‘rinishida ifodalanadi. Bu yoyilma ko‘paytuvchilarining tartibi aniqligida yagonadir.

Isbot. Bizga darajasi n ga teng bo‘lgan $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ ko‘phad berilgan bo‘lsin:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$$

Algebraning asosiy teoremasiga asosan, $f(x)$ ko‘phad kamida bitta ildizga ega bo‘lib, bu ildiz α_1 bo‘lsin. U holda

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot\varphi(x),$$

bu yerda $\deg\varphi(x)=n-1.$ Agar $\varphi(x)$ ko‘phadning darajasi ham 1 dan katta bo‘lsa, u holda algebraning asosiy teoremaga ko‘ra $\varphi(x)$ ko‘phad ham qandaydir α_2 ildizga ega, ya’ni $\varphi(x)=(x-\alpha_2)\cdot\varphi_1(x)$. Demak,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\varphi_1(x).$$

Bu jarayonni davom ettirib, $(n-1)$ ta qadamdan so‘ng $f(x)$ ko‘phadning chiziqli ko‘paytuvchilar ko‘paytmasi shaklida yozish mumkin

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+r. \qquad (18.2)$$

Endi ushbu yoyilmaning yagonaligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni (18.2) yoyilmadan farqli yana bir

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_n) \qquad (18.3)$$

yoyilma mavjud bo‘lsin. Ushbu tengliklardan quyidagini hosil qilamiz

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(x-\beta_n). \qquad (18.4)$$

Agar chap tomonda ishtirok etgan biror α_i ildiz o‘ng tomonda ishtirok etmasa, ya’ni $\alpha_i\neq\beta_j, 1\leq j\leq n$ bo‘lsa, u holda (18.4) tenglikning xar ikkala tomonida $x=\alpha_i$ qo‘yamiz. Natijada chap tomoni nolga teng bo‘lib, o‘ng tomonida esa noldan farqli son hosil bo‘ladi. Bu esa ziddiyat. Demak, barcha α_i ildizlar o‘ng tomonda ham ishtirok etishi kerak. Xuddi shunday barcha β_j ildizlarning chap tomonda ham ishtirok etishi kelib chiqadi.

Endi bu ildizlarning aynan bir hil sonda (tartibda) ishtirok etishini ko‘rsatamiz.

Aytaylik, α_1 ildiz chap tomonda s marotaba va o‘ng tomonda t marotaba ishtirok etib, $s\neq t$ bo‘lsin. U holda (18.4) tenglikning ikkala tomonini $(x-\alpha_1)^{\min\{s,t\}}$ ko‘phadga qisqartirib yuboramiz. Natijada, hosil bo‘lgan tenglikning bitta tomonida $x-\alpha_1$ ko‘paytuvchi qatnashmaydi, ikkinchi tomonida esa, u $(x-\alpha_1)^{|s-t|}$ shaklda qatnashadi. Yuqoridagi mulohaza kabi yana ziddiyayga duch kelamiz. Bu esa yoyilmani ko‘paytuvchilarning tartibi aniqligida yagona ekanligini bildiradi. □

Bir hil ko‘paytuvchilarni jamlab, (18.2) yoyilmani

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{k_s} \qquad (18.5)$$

shaklga olib kelish mumkin, bu yerda $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ va $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ ildizlar orasida o‘zaro tenglari yo‘q.

Hosil bo‘lgan (18.5) tenglikda α_i ildiz $f(x)$ ko‘phadning k_i karrali ildizi bo‘ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natijani hosil qilamiz:

18.5-natija. Agar darajalari n dan oshmaydigan $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar noma’lumning turli hil $n+1$ ta qiymatida teng qiymatlarga ega bo‘lsa, u holda $f(x)=g(x)$ bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $f(x)-g(x)=h(x)$ ko‘phad farazimizga ko‘ra $n+1$ ta ildizga ega bo‘lib, $\deg h(x)\le n$ bo‘lganligi sababli $h(x)$ ko‘phad $n+1$ ta ildizga ega bo‘lsa, $h(x)=0$ bo‘ladi. □

Bu natijadan istalgan n-darajali ko‘phadning koeffitsientlari $n+1$ ta qiymat orqali yagona ravishda aniqlanishi mumkin degan xulosaga kelamiz.

Shuni ta’kidlaymizki, agar bizga ikkita

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{k_s},$$

$$g(x)=b_0(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{m_s}$$

ko‘phadlarning yoyilmalari berilgan bo‘lsa, u holda ularning EKUBi va EKUKi quyidagi ko‘rinishlarga ega bo‘ladi:

$$\text{EKUB}\big(f(x),g(x)\big)=(x-\alpha_1)^{\beta_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{\beta_s},$$

$$\text{EKUK}\big(f(x),g(x)\big)=(x-\alpha_1)^{\gamma_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{\gamma_s},$$

bu yerda

$$\beta_i=\min(k_i,m_i),\ \gamma_i=\max(k_i,m_i).$$

Shunday qilib, biz ko‘phadlarni kanonik yoyilmasidan foydalanib, ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralilarini hisoblay olishimiz mukin.

Misol 18.2. $f(x)=(x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)(x+5)^2$ va $g(x)=(x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6$ ko‘phadlarning EKUB va EKUK lari topamiz:

$$\text{EKUB}\big(f(x),g(x)\big)=(x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)(x+5)^2.$$

Shuningdek,

$$\text{EKUK}\big(f(x),g(x)\big)=(x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6.$$

18.6-ta’rif. Agar $f(x)$ ko‘phad notrivial bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, u holda u keltirilmas ko‘phad deyiladi.

Algebraning asossiy teoremasidan ma’lumki, kompleks sonlar maydonida keltirilmas ko‘phadlar faqat $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlardan iborat bo‘ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida esa $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlardan tashqari x^2+px+q, $p^2-4q<0$ ko‘rinishidagi kvadrat uchhadlar ham keltirilmas ko‘phad bo‘lishi ravshan. Quyidagi tasdiqda haqiqiy sonlar maydonida darajasi ikkidan katta bo‘lgan keltirilmas ko‘phad mavjud emasligini ko‘rsatamiz.

18.7-tasdiq. Haqiqiy sonlar maydonidagi keltirilmas ko‘phadlar faqat $x-\alpha$ shaklidagi chiziqli ko‘phadlar va x^2+px+q, $p^2-4q<0$ ko‘rinishidagi kvadrat uchhadlardan iborat bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f(x)$ ko‘phad darajasi ikkidan katta va haqiqiy sonlar maydonida keltirilmas ko‘phad bo‘lsin. U holda u haqiqiy ildizga ega emas, lekin algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra $f(x)$ ko‘phad $x_0=a+ib, b\neq 0$ kompleks izldizga ega. Quyidagi ko‘phadni qaraymiz:

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-\overline{x}_0)=(x-a-ib)(x-a+ib)=(x-a)^2+b^2.$$

Ushbu $\varphi(x)$ ko‘phad haqiqiy koeffitsiyentli keltirilmas ko‘phad bo‘lib, $f(x)$ ko‘phad bilan umumiy kompleks ildizga ega. Shuning uchun $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub emas. Demak, $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ga bo‘linadi. Bu esa $f(x)$ ko‘phadning keltirilmas ekanligiga zid. □

18.4-natijaning isboti kabi ixtiyoriy haqiqiy koeffitsientli ko‘phadni keltirilmas ko‘phadlarning ko‘paytmasi shaklida yagona ravishda ifodalanilishini ko‘rsatish qiyin emas. Ya’ni haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko‘phad uchun

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$$

yoyilma o‘rinli, bu yerda $p_i^2-4q_i<0$.

Viyet formulasi. Bizga bosh koeffitsienti 1 ga teng bo‘lgan n-darajali

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ko‘phad berilgan bo‘lib, $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ uning ildizlari bo‘lsin. U holda

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$$

yoyilmaga ega bo‘ladi. Bu yoyilmaning o‘ng tomonidagi qavslarini ochib chiqib, o‘xshash hadlarini ixchamlagandan so‘ng bir hil hadlari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tengliklarni olamiz:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

....,

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-2} \cdot \alpha_n + ... + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_n),$$

$$a_{n-1} = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n.$$

Ushbu tengliklar ko‘phad koeffisentlarini uning ildizlari orqali ifodalovchi formula hisoblanib, *Viyet formulasi* deb ataladi. Tenglik-larning o‘ng tomonidagi ifodalar *simmetrik ko‘phadlar* deyiladi.

26-Mavzu: 3- va 4-tartibli tenglamalar

Mavzu rejasi:

1. 3-tartibli tenglamalar.
2. 4-tartibli tenglamalar.

Ushbu mavzuda uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish usullarini keltiramiz. Dastlab, uchunchi darajali tenglamani qaraymiz. Ma’lumki, uchinchi darajali tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Bu tenglamaning koeffitsiyentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lib, tenglamani ham kompleks yechimlarini topish masalasini qaraymiz. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $a_0 = 1$ deb olish mumkin. $x = y - \frac{a_1}{3}$ kabi almashtirish bajarib, teglamani quyidagi ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0.$$

Ushbu tenglamaning qavslarini ochib, o‘xshash hadlarini ixchamlasak:

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)y + \left(a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3\right) = 0.$$

Endi $p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$, $q = a_3 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2}{27} a_1^3$ belgilashlarni kiritsak, berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Demak, 3-darajali tenglamani yechish masalasi yuqoridagi tenglamani yechishga keltirildi. Ushbu tenglamada $y = \alpha + \beta$ deb olsak,

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha+\beta) + q = 0,$$

yoki,

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha+\beta) + q = 0.$$

Ma’lumki, agar $\alpha^3 + \beta^3 + q = 0$ va $3\alpha\beta + p = 0$ bo‘lsa, u holda $y = \alpha + \beta$ soni $y^3 + py + q = 0$ tenglamaning yechimi bo‘ladi. Shunday qilib, biz quyidagi sistemani hosil qildik:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ 3\alpha\beta = -p, \end{cases}$$

Ushbu sistemani yechish uchun ikkinchi tenglikni kubga ko‘tarsak, $\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$. Bundan esa, α^3 va β^3 sonlarini quyidagi kvadrat tenglamaning yechimlari sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

bu yerdan,

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \ \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

va

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \ \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Demak, y uchun quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ushbu ifodaga *Kardano formulasi* deyiladi.

Har bir sonning uchta kubik kompleks ildizi mavjudligini hisobga olsak, ikkala ildiz uchun jami to‘qqizta kombinatsiya kelib chiqadi, ya’ni y ning qiymati to‘qqiz hil aniqlanadi. Lekin, ulardan faqatgina $\alpha\beta=-\frac{p}{2}$ shatrni qanoatlantiruvchilarigina tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Aytaylik, α_1 va β_1 – izlanayotgan juftliklardan biri bo‘lsin. Qolgan α ga mos qiymatlar $\alpha_1\omega_1$ va $\alpha_1\omega_2$ bo‘lib, β ga mos qiymatlar esa $\beta_1\omega_2$ va $\beta_1\omega_1$ bo‘ladi. Bu yerda $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ya’ni 1 ning boshlang‘ich kub ildizlari.

Demak, Kardano formulasi orqali tenglamaning barcha

$$y_1=\alpha_1+\beta_1,$$

$$y_2=\alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_2,$$

$$y_3=\alpha_1\omega_2+\beta_1\omega_1$$

yechimlarini aniqlash mimkin.

Misol 20.1. $y^3+(3-3i)y+(-2+i)=0$ tenglamani yeching.

Kardano formulasiga ko‘ra

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+\sqrt{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2+(1-i)^3}}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-\sqrt{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2+(1-i)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+\sqrt{-\frac{5}{4}-3i}}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-\sqrt{-\frac{5}{4}-3i}}=$$

$$=\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}+\left(\frac{3}{2}i-1\right)}+\sqrt[3]{1-\frac{i}{2}-\left(\frac{3}{2}i-1\right)}=\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{2-2i}.$$

Kub ildizlarni chiqarganda ularning ko‘paytmasi $-\frac{p}{3}$ ga ya’ni $-1+i$ ga teng bo‘lishini hisobga olish lozim. Shuning uchun birinchi ildiz uchun $-i$ qiymatni olganda ikkinchisi uchun $-1-i$ qiymat olinadi. Demak, berilgan tenglamaning ildizlari:

$$y_1 = -i + (-1-i) = -1-2i,$$

$$y_2 = -i\omega_1 + (-1-i)\omega_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i,$$

$$y_3 = -i\omega_2 + (-1-i)\omega_1 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)i.$$

Endi $y^3 + py + q = 0$ kubik tenglamaning p va q koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo‘lganda Kardano formulasini qo‘llash qanday natija berishini tahlil qilamiz.

Kardano formulasidan ko‘rinadiki, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ifodaning ishorasi tenglamaning yechimlari xarakteriga sezilarli ta’sir qiladi. Uchta holatni alohida ko‘rib chiqadiz.

1-hol. Aytaylik $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ bo‘lsin. Bu holda $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ va $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sonlarning ikkalasi ham haqiqiy va turli hil bo‘lib, birinchi kub ildizning qiymati α_1 haqiqiy qiymat olinganida β_1 ning ham haqiqiy qiymati olinadi. Shunday qilib, bu holatda yechimlar quyidagicha bo‘ladi:

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} i\sqrt{3},$$

$$y_3 = \alpha_1\omega_2 + \beta_1\omega_1 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} i\sqrt{3}.$$

Demak, $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ bo‘lganda berilgan kubik tenglama bitta haqiqiy ildizga va ikkita o‘zaro qo‘shma kompleks ildizlarga ega bo‘ladi.

2-hol. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ bo‘lsin. Bu holda $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ va $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ ifodalar haqiqiy va o‘zaro teng bo‘lib, α_1 va β_1 kub ildizlar ham haqiqiy va o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni $\alpha_1=\beta_1$. U holda berilgan kubik tenglama quyidagi ildizlarga ega bo‘ladi

$$y_1=\alpha_1+\beta_1=2\alpha_1,$$

$$y_2=\alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_2=-\alpha_1,$$

$$y_3=\alpha_1\omega_2+\beta_1\omega_1=-\alpha_1.$$

Demak, bu holda uchchala ildiz ham haqiqiy bo‘lib, bitta ildizi ikki karrali ildiz bo‘ladi.

3-hol. $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ bo‘lsin. Ravshanki, bu holat faqatgina p manfiy bo‘lgandagina o‘rinli. $p_1=-p$ deb belgilasak, $p_1>0$ bo‘lib, kub ildizlar ostida quyidagi o‘zaro qo‘shma kompleks sonlar hosil bo‘ladi:

$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}} \text{ va } -\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}.$$

Kub ildizdan qutulish uchun $-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}$ kompleks sonni trigonometrik shaklga o‘tkazamiz:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right)^2}=\sqrt{\frac{p_1^3}{27}},$$

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2r},\ \sin\varphi>0.$$

Demak,

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),$$

bu yerda $k=0,1,2.$

$\alpha\beta=\dfrac{p_1}{3}$ ekanligidan esa

$$\beta=\frac{\dfrac{p_1}{3}}{\sqrt{\dfrac{p_1}{3}}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right).$$

Shunday qilib, β soni α soniga qo‘shma kompleks son bo‘ladi. Demak, kubik tenglamaning qiyidagi ildizlarini hosil qilamiz

$$y=\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)=2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},$$

bu yerda $k=0,1,2.$

Bundan ko‘rinadiki, $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$ bo‘lgan holda kubik tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy bo‘lib, ular turli hil bo‘ladi.

Misol 20.2. Tenglamani yeching: $y^3-9y+8=0.$

Kardano formulasidan foydalansak,

$$y=\sqrt[3]{-4+\sqrt{16-27}}+\sqrt[3]{-4-\sqrt{16-27}}=\sqrt[3]{-4+i\sqrt{11}}+\sqrt[3]{-4-i\sqrt{11}}.$$

$-4+i\sqrt{11}=\left(\dfrac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^3$ va $-\dfrac{p}{3}=3$ ekanligini hisobga olsak,

$$y_1=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}=1,$$

$$y_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_1+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2},$$

$$y_3=\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_2+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Demak, tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy son bo‘ladi.

Misol 20.3. Tenglamani yeching: $x^3+3x-4=0.$

Bu yerda ham Kardano formulasini qo‘llasak:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4+1}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4+1}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Kub ildiz ostidagi ifodalar uchun

$$2+\sqrt{5}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \text{ va } 2-\sqrt{5}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

ekanligidan foydalansak, tenglamaning ildizlarini hosil qilamiz:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1,$$

$$x_2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{15}}{2},$$

$$x_3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{15}}{2}.$$

Endi to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning L.Ferrariga tegishli bo‘lgan usulni keltirib o‘tamiz.

Keltiriladigan usulning maqsadi

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

tenglamaning chap tomonini kvadratlar ayirmasi ko‘rinishida yozib olishdan iborat. U holda tenglamani ikkita ikkinchi darajali hadlar ko‘paytmasi sifatida yozish mumkin. Shu yo‘l bilan berilgan tenglamani yechish masalasi ikkita kvadrat tenglamani yechishga olib kelinadi. Buning uchun tenglama chap tomonini quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}x^2-\frac{ayx}{2}-\frac{y^2}{4}-yx^2+bx^2+cx+d=$$

$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+y-b\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right)\right].$$

Bu yerda y yordamchi noma’lum bo‘lib, kvadrat qavsdagi ifoda chiziqli ikkihadning kvadrati bo‘ladigan qilib tanlanadi. Ma’lumki, $Ax^2+Bx+C=0$ kvadrat uchhad chiziqli ikkihadning kvadrati bo‘lishi uchun $B^2-4AC=0$ bo‘lishi zarur va yetarli. Bunga ko‘ra

$$\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}+y-b\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0.$$

Bu shart y ga nisbatan uchinchi darajali tenglama bo‘lib, qavslarni ochgandan so‘ng quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3-by^2+(ac-4d)y-(c^2+a^2d-4bd)=0.$$

Bu tenglamaning ildizlaridan biri y_1 bo‘lsa, u holda yuqoridagi kvadrat uchhad to‘la kvadrat shaklida ifodalanadi, ya’ni

$$\left(\frac{a^2}{4}-y_1+b\right)x^2+\left(\frac{ay_1}{2}-c\right)x+\left(\frac{y_1^2}{4}-d\right)=(kx+l)^2.$$

Berilgan tenglamaning ko‘rinishi esa

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}\right)^2-(kx+l)^2=0,$$

yoki

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}+kx+l\right)\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{y_1}{2}-kx-l\right)=0$$

holatlarga keladi.

Har bir ko‘paytuvchilarni nolga tenglab, tenglamaning 4 ta ildizini topamiz. Agar x_1 va x_2 birinchi ko‘paytuvchining, x_3 va x_4 ikkinchi ko‘paytuvchining ildizlari bo‘lsa, u holda

$$x_1x_2=\frac{y_1}{2}+l,\; x_3x_4=\frac{y_1}{2}-l.$$

Bu tengliklarni qo‘shib, $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ munosabatni hosil qilamiz. Demak, berilgan to‘rtinchi darajali tenglama ildizlari orqali uchinchi darajali yordamchi tenglamaning y_1 ildizining ifodasini topish mumkin.

Misol 20.4. Tenglamani yeching: $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = 0.$

Yuqorida keltirilgan usulga ko‘ra chap tomonni o‘zgartiramiz:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 =$$

$$= \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - yx^2 - x^2 - xy - \frac{y^2}{4} - 6x^2 - 5x + 2 =$$

$$= \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[(y+7)x^2 + (y+5)x + \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)\right].$$

Demak, $(y+5)^2 - 4(y+7)\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) = 0$ bo‘lib, bu tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$y^3 + 6y^2 - 18y - 81 = 0.$$

Ushbu tenglamaning ildizlaridan biri $y_1 = -3$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Berilgantenglamaningchaptomonigabuildizniqo‘ysak:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left[4x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x^2 + 3x - 1)(x^2 - x - 2).$$

Hadlarni nolga tenglab, quyidagi yechimlarni hosil qilamiz:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2},\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2},\ x_3 = 2,\ x_4 = -1.$$

27- Mavzu: Ratsional kasrlar va ularni eng sodda kasrlarga yoyish

Mavzu rejasi:

1. Ratsional kasrlar
2. Ratsional kasrlarni eng sodda kasrga yoyish.

Ushbu mavzuda haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni ustida berilgan ratsional kasrlar haqida gap boradi. Biror maydon ustida berilgan $f(x)$ va $g(x), g(x)\neq 0$ ko‘phadlarning $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatiga *ratsional kasrli funksiya* yoki qisqacha *ratsional kasr* deyiladi.

19.1-ta’rif. Agar $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ ratsional kasrlar uchun $f_1(x)g_2(x)=f_2(x)g_1(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu ratsional kasrlar teng deyiladi.

Masalan, $\frac{1}{x-1}$ va $\frac{x+1}{x^2-1}$ ratsional kasrlar tengdir.

Ratsional kasrlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

1. $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot g_2(x)+f_2(x)\cdot g_1(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$;

2. $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$.

Berilgan $\frac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda xar doim $(f(x),g(x))=1$ deb olishimiz mumkin. Chunki, $(f(x),g(x))=d(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)=d(x)\cdot f_1(x)$ va $g(x)=d(x)\cdot g_1(x)$ ekanligidan $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ kelib chiqadi, bu yerda $(f_1(x),g_1(x))=1$.

Bunday kasrlarga *normallashgan* kasrlar deb ataladi.

19.2-ta’rif. Agar $\frac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda $\deg(f(x))<\deg(g(x))$ bo‘lsa, u holda u to‘g‘ri ratsional kasr, aks holda noto‘g‘ri ratsional kasr deyiladi.

19.3-tasdiq. Xar qanday ratsional kasr ko‘phad va to‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi orqali ifodalanadi.

Isbot: Agar $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasr bo‘lsa, teorema o‘rinli ekanligi ravshan.

Faraz qilaylik, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ noto‘g‘ri ratsional kasr bo‘lsin. U holda $f(x)$ ko‘phadni $g(x)$ ga qoldiqli bo‘lib,

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz, bundan esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\cdot q(x) + r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

kelib chiqadi. □

19.4-tasdiq. To‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi va ko‘paytmasi to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, agar $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasrlar bo‘lsa,

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x)\cdot g_2(x) + f_2(x)\cdot g_1(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi, chunki

$$\deg(f_1(x)\cdot g_2(x) + f_2(x)\cdot g_1(x)) < \deg(g_1(x)\cdot g_2(x)).$$

Xuddi shunday, ularning ko‘raytmasi ham to‘g‘ri ratsional kasr bo‘ladi.

□

19.5-teorema. Agar $\dfrac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$ to‘g‘ri ratsional kasrda $(g_1(x), g_2(x)) = 1$ bo‘lsa, u holda bu ratsional kasrni ikkita to‘g‘ri ratsional kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Ratsional kasr maxrajidagi $g_1(x)$ va $g_2(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub bo‘lganligi uchun shunday $u(x)$ va $v(x)$ ko‘phadlar mavjudki, $u(x)g_1(x) + v(x)g_2(x) = 1$, bo‘ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=f(x)\cdot\frac{u(x)g_1(x)+v(x)g_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g_2(x)}+\frac{f(x)v(x)}{g_1(x)}.$$

Endi $f(x)\cdot u(x)$ ni $g_2(x)$ ga qoldiqli bo'lamiz:

$$f(x)\cdot u(x)=g_2(x)\cdot q_2(x)+r_2(x),\ \deg r_2(x)<\deg g_2(x).$$

Demak,

$$\frac{f(x)\cdot u(x)}{g_2(x)}=q_2(x)+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

Hosil bo'lgan $q_2(x)$ ko'phadni $\frac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)}$ kasrga kiritsak,

$$\frac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)}+q_2(x)=\frac{f(x)\cdot v(x)+g_2(x)\cdot q_2(x)}{g_2(x)}$$

ratsional kasr hosil bo'ladi. Bu ratsional kasr $\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}$ va $\frac{r_2(x)}{g_2(x)}$ to'gri ratsional kasrlarning ayirmasi bo'lganligi uchun, u ham to'g'ri ratsional kasr bo'ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)}=\frac{r_1(x)}{g_1(x)}+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

$\square$

Bu teoremani umumlashtirib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

19.6-natija. Agar $\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_k(x)}$ to'g'ri ratsional kasrda $(g_i(x),g_j(x))=1,\ i\neq j$ bo'lsa, u holda bu kasr to'g'ri ratsional kasrlarning

$$\frac{r_1(x)}{g_1(x)}+\frac{r_2(x)}{g_2(x)}+\ldots+\frac{r_k(x)}{g_k(x)}$$

yoyilmasi orqali yagona ravishda ifodalanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $g(x)$ ko'phadni keltirilmas ko'phadlarning ko'paytmasi $g(x)=p_1^{k_1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)$ shaklida yagona ravishda ifodalash mumkin. Bunga asosan, biz yuqoridagi natijani umumlashtirib,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)\cdot p_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}(x)}=\frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}+\frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)}+\ldots+\frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}$$

yoyilmani hosil qilamiz.

Ushbu yoyilmadagi $\frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}$ to‘g‘ri kasrlarga *primar kasrlar* deb ataladi. Agar primar kasrda $\deg f_i(x)<\deg p_i(x)$ bo‘lsa, bu primar kasrga *sodda kasr* deyiladi.

19.7-teorema. Xar qanday primar to‘g‘ri kasr sodda kasrlarning yig‘indisi shaklida ifodalanadi.

Isbot. Bizga $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ primar kasr berilgan bo‘lsin. $f(x)$ ko‘phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo‘lsak, $f(x)=p(x)\cdot q_1(x)+f_1(x)$ bo‘ladi. U holda

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{q_1(x)}{p^{k-1}(x)}.$$

Agar $\deg(q_1(x))<\deg(p(x))$ bo‘lsa teorema isboti kelib chiqadi. $\deg(q_1(x))\geq\deg(p(x))$ bo‘lganda esa, $q_1(x)$ ko‘phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo‘lib, $q_1(x)=p(x)\cdot q_2(x)+f_2(x)$ ekanligidan

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)}+\frac{q_2(x)}{p^{k-2}(x)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu jarayonni chekli marotaba davom ettirsak, berilgan ratsional kasr sodda kasrlarning yig‘indisi shaklida ifodalanishi kelib chiqadi:

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}=\frac{f_1(x)}{p^k(x)}+\frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)}+\ldots+\frac{f_k(x)}{p(x)}.$$

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

19.8-natija. Ixtiyoriy to‘g‘ri ratsional kasrni yagona ravishda sodda kasrlarning yig‘indisi shakliga ifodalash mumkin.

Kompleks sonlar maydonida ixtiyoriy ko‘phad

$$g(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_s)^{k_s}$$

ko‘rinishida ifodalanganligi uchun, sodda ratsional kasrlar $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ ko‘rinishida bo‘ladi. To‘g‘ri kasrning sodda ratsional kasrlarga yoyilmasi esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1,k}}{x-\alpha_1}+$$

$$\frac{A_{2,1}}{(x-\alpha_2)^{k_2}}+\frac{A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}}+\ldots+\frac{A_{2,k}}{x-\alpha_2}+$$

$$+\ldots+\frac{A_{s,1}}{(x-\alpha_s)^{k_s}}+\frac{A_{s,2}}{(x-\alpha_s)^{k_s-1}}+\ldots+\frac{A_{s,k}}{x-\alpha_s}.$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida sodda ratsional kasrlarning umumiy ko‘rinishi $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ va $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$ shakldа bo‘ladi.

Misol 19.2. $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ to‘g‘ri kasrni haqiqiy sonlar maydonida sodda kasrlarga yoying.

Ushbu kasr $\frac{A}{x-1}$ va $\frac{Bx+C}{x^2+1}$ sodda kasrlarning yig‘indisiga yoyiladi, ya’ni

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(x-1)(x^2+1)$ ko‘phadga ko‘paytirsak, $1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu yerdan $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ va $C=-\frac{1}{2}$ ekanligini topish qiyin emas.

Demak,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

28- Mavzu: Ildiz chegaralari

Mavzu rejasi:

1. Ildizlarning joylashishi
2. Ildiz chegaralar

Ushbu mavzuda berilgan ko‘phadning ildizlarini topmasdan turib, ular qaysi oraliqqa tegishli bo‘lishini topish usullarini keltiramiz.

Bizga $f(x)$ ko‘phad berilgan bo‘lib, uning musbat ildizlari (a,b) intervalga, manfiy ildizlari esa (c,d) intervalga tegishli bo‘lsin. Ya’ni a va b sonlari ko‘phad musbat ildizlarining, c va d sonlari esa manfiy ildizlarning quyi va yuqori chegaralari bo‘lsin.

Umuman olganda ko‘phad ildizlari chegaralarini topish masalasi uning musbat ildizlarining yuqori chegarasini topishga keltiriladi. Buning uchun quyidagi ko‘phadlarni qaraymiz:

$$\varphi_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\varphi_2(x) = f(-x),$$

$$\varphi_3(x) = x^n f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi N_0 va $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ ko‘phadlar musbat ildizlari yuqori chegaralari N_1, N_2, N_3 bo‘lsin. U holda $\frac{1}{N_1}$ soni $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari quyi chegarasi, $-N_2$ va $-\frac{1}{N_3}$ sonlar esa $f(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi va yuqori chegaralari bo‘ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ ko‘phadning barcha musbat ildizlari $\frac{1}{N_1} < x < N_0$ tengsizlikni, manfiy ildizlar esa $-N_2 < x < -\frac{1}{N_3}$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Quyidagi tasdiqda ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasini aniqlashning usullaridan birini keltiramiz.

21.1-tasdiq. Bizga haqiqiy koeffitsientli

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n,\ a_0>0.$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin. Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning dastlabki manfiy koeffitsienti a_k bo‘lib, B soni ko‘phad manfiy koeffitsientlari absolyut qiymatlari maksimumi bo‘lsin. U holda $1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$ soni $f(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘ladi.

Isbot. Ko‘phadda manfiy koeffitsient har doim mavjud, aks holda $f(x)$ ko‘phad umuman musbat yechimga ega bo‘lmaydi.

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $x>1$ deb olib, $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ koeffitsientlarlarni nol bilan $a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ koeffitsientlarni $-B$ bilan almashtirsak, $f(x)$ ko‘phadning qiymati kichiklashadi, ya’ni

$$f(x)\geq a_0x^n-B(x^{n-k}+x^{n-k-1}+...+x+1)=a_0x^n-B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}.$$

$x>1$ ekanligini hisobga olsak,

$$f(x)>a_0x^n-\frac{Bx^{n-k+1}}{x-1}=\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1)-B\right].$$

Agarda $x>1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$ bo‘lsa, u holda

$$f(x)>\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0x^{k-1}(x-1)-B\right]\geq\frac{x^{n-k+1}}{x-1}\left[a_0(x-1)^k-B\right]>0,$$

ya’ni, $f(x)$ ning qiymati qat’iy musbat bo‘ladi. Demak, $x>1+\sqrt[k]{\dfrac{B}{a_0}}$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x soni $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘la olmaydi. □

Misol 21.1. $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ ko‘phad uchun $a_0=1$, $k=2$ va $B=7$ ekanligidan, uning musbat ildizlari yuqori chegarasi $1+\sqrt{7}$ bo‘ishini hosil qilamiz.

Musbat ildizlarning yuqori chegarasini izlashning yana bir usuli bo‘lgan *Nyuton usulini* keltiramiz.

21.2-tasdiq. Bizga haqiqiy koeffitsientli

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n, \ a_0 > 0.$$

ko‘phad berilgan bo‘lsin. Agar $x = c$ nuqtada $f(x)$, $f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$ musbat qiymatlar qabul qilsa, u holda c soni musbat ildizlarning yuqori chegarasi bo‘ladi.

Isbot. Haqiatdan ham, Teylor formulasiga ko‘ra,

$$f(x) = f(c) + (x-c) f'(c) + (x-c)^2 \frac{f'(c)}{2!} + ... + (x-c)^n \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, x ning c dan katta barcha qiymatlarida $f(x)$ ko‘phad faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi. Demak, c soni musbat ildizlarning yuqori chegarasi bo‘ladi. □

Berilgan $f(x)$ ko‘phad uchun mos keluvchi c sonini topish uchun quyidagicha yo‘l tutamiz. $f^{(n)}(x) = n! a_0$ musbat son bo‘lganligi uchun $f^{(n-1)}(x)$ funksiya o‘suvchi funksiya bo‘ladi. Demak, shunday c_1 son mavjudki, $x \geq c_1$ lar uchun $f^{(n-1)}(x) > 0$ bo‘ladi.

Endi $x \geq c_1$ holatda $f^{(n-2)}(x)$ funksiya o‘suvchi ekanligidan foydalanib, $x \geq c_2$ lar uchun $f^{(n-2)}(x) > 0$ bo‘livchi c_2, $(c_2 \geq c_1)$ sonini topamiz. Bu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida topilgan oxirgi c_n soni bizga kerakli bo‘lgan c sonini, ya’ni musbat ildizlarning yuqori chegarasini beradi.

Misol 21.2. $h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ ko‘phad uchun Nyuton usulini qo‘llab, uning musbat ildizlari yuqori chegarasini topamiz:

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,$$

$$h'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,$$

$$h''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 30x + 16,$$

$$h'''(x) = 60x^2 + 48x - 30,$$

$$h^{(4)}(x) = 120x + 48,$$

$$h^{(5)}(x) = 120.$$

Ketirilgan barcha ko‘phadlar $x = 2$ qiymatda musbat ekanligini ko‘rish qiyin emas. Shunday qilib, 2 soni berilgan $h(x)$ ko‘phad musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘ladi. Bu natija 21.1-misoldagi natijaga qaraganda aniqroqdir.

Misol 21.3. Yuqoridagi $h(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi chegarasini topamiz. Buning uchun $\varphi_2(x) = -h(-x)$ ko‘phadni qarab, uning hosilalarini topib chiqamiz:

$$\varphi_2(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3,$$

$$\varphi_2'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7,$$

$$\varphi_2''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16,$$

$$\varphi_2'''(x) = 60x^2 - 48x - 30,$$

$$\varphi_2^{(4)}(x) = 120x - 48,$$

$$\varphi_2^{(5)}(x) = 120.$$

Bu ko‘phadlarning barchasi $x = 4$ qiymatda musbat bo‘lganligi uchun 4 soni $\varphi_2(x)$ ko‘phadning musbat ildizlari yuqori chegarasi bo‘la oladi. Shunung uchun -4 soni $h(x)$ ko‘phadning manfiy ildizlari quyi chegarasi bo‘ladi.

29- 30 - Mavzu: Dekart va Shturm teoremasi

Mavzu rejasi:

1. Dekart teoremasi.
2. Shturm teoremasi

Ushbu mavzuda biz haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari sonini topuvchi usullardan biri bo‘lgan Shturm usilini keltiramiz. Bu usul yordamida ko‘phadning barcha ildizlari soni, yoki musbat va manfiy ildizlari soni, yoki biror oraliqdagi ildizlar sonini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phad karrali ildizlarga ega bo‘lmasin. Aks holda, bu ko‘phadni o‘zining hosilasi bilan eng katta umumiy bo‘luvchisiga bo‘lib yuborish natijasida karrali ildizlarga ega bo‘lmagan ko‘phad hosil qilish mumkin.

21.3-ta’rif. Haqiqiy koeffitsientli noldan farqli chekli

$$f(x) = f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_s(x) \qquad (21.1)$$

ko‘phadlar sistemasi uchun quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda bu ko‘phadlar $f(x)$ ko‘phad uchun Shturm sistemasi deyiladi:

1) ko‘phadlar sistemasining qo‘shni ko‘phadlari umumiy ildizlarga ega emas;

2) Oxirgi $f_s(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega emas;

3) Agar α soni biror $f_k(x), 1 \le k \le s-1$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ ko‘phadlar turli ishorali bo‘ladi;

4) Agar α soni $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f(x)\cdot f_1(x)$ ko‘paytma x o‘sib α nuqtadan o‘tganda ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi.

21.4-teorema. Karrali ildizlarga ega bo‘lmagan haqiqiy koeffitsiyentli ihtiyoriy $f(x)$ ko‘phad Shturm sistemasiga ega.

Isbot. Teorema isbotini 21.3-ta’rif shartlarini qanoatlantiruvchi $f(x)=f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), ..., f_s(x)$ ko‘phadlar sistemasini qurish usuli yordamida keltiramiz. Buning uchun $f_1(x)=f'(x)$ deb olamiz. Ta’kidlash joizki, $f(x)$ va $f_1(x)$ ko‘phadlar uchun 21.3-ta’rifning 4) sharti bajariladi. Haqiqatdan ham, agar α soni berilgan $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizi bo‘lsa, u holda $f'(\alpha)\neq 0.$ Agar $f'(\alpha)>0$ bo‘lsa, u holda α nuqtaning biror atrofida ham $f'(x)>0$ bo‘ladi. Demak, $f(x)$ ko‘phad α nuqtaning atrofida o‘zuvchi bo‘ladi. Bundan $f(x)\,f_1(x)$ ko‘paytma x dan o‘tganda manfiy ishorani musbatga almashtirishi kelib chiqadi. Huddi shunga o‘xshab, agar $f'(\alpha)<0$ bo‘lsa, α nuqtaning biror atrofida $f'(x)<0$ va $f(x)$ ko‘phad kamayuvchi bo‘ladi. Demak, bu holatda ham $f(x)\,f_1(x)$ ko‘paytma x dan o‘tganda manfiy ishorani musbatga almashtiradi.

$f_2(x)$ ko‘phadni aniqlash uchun $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga qoldiqli bo‘lib, qoldiqni –1 ga ko‘paytmasini olamiz. Ya’ni,

$$f(x)=f_1(x)\cdot q_1(x)-f_2(x).$$

Bu jarayonni davom ettirib, $f_{k-1}(x)$ ko‘phadni $f_k(x)$ ko‘phadga qoldiqli bo‘lib, qoldiqni –1 ga ko‘paytmasini $f_{k+1}(x)$ kabi belgilaymiz, ya’ni

$$f_{k-1}(x)=f_k(x)\cdot q_k(x)-f_{k+1}(x). \qquad (21.2)$$

$f(x)$ va $f'(x)$ ko‘phadlarga qo‘llangan usul Yevklid algoritmidan faqat qoldiqning manfiy ishorasi bilan olinishigagina farq qiladi. Yevklid algoritmida ishorani almashtirish EKUB topishga ta’sir qilmaganligi uchun, biz bu jarayon orqali $f(x)$ va $f'(x)$ ko‘phadlarning EKUBini hosil qilamiz. Bu ko‘phadlar o‘zaro tub bo‘lganligi sababli, $f_s(x)$ ko‘phad noldan farqli bo‘lgan qandaydir son bo‘ladi. Demak,

$$f(x) = f_0(x),\ f'(x) = f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_s(x)$$

ko‘phadlar sistemasi 21.3-ta’rifning 2) shartini qanoatlantiradi, ya’ni $f_s(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega emas.

Buko‘phadlaruchun 1) shartbajarilishiniko‘rsatishuchun $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ qo‘shniko‘phadlarumumiy α ildizgaegabo‘lsindebfarazqilamiz. U holda (21.2) tenglikdan α ildiz $f_{k-1}(x)$ ko‘phad uchun ham ildiz bo‘lishi kelib chiqadi. Quyidagi

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x) \cdot q_{k-1}(x) - f_k(x)$$

tenglikdan esa, α soni $f_{k-2}(x)$ ko‘phad uchun ham ildiz bo‘lishini hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirsak, α soni $f(x)$ va $f'(x)$ ko‘phadlarining umumiy ildizi bo‘ladi. Bu esa tasdiq shartiga zid. Demak, $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ qo‘shni ko‘phadlar umumiy ildizga ega emas.

Nihoyat, 3) shartning bajarilishi (21.2) tenglikdan bevosita kelib chiqadi, chunki, agar $f_k(\alpha) = 0,$ u holda $f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha).$ □

Endi $f(x)$ ko‘phadning Shturm sistemasi uning haqiqiy ildizlari sonini topishda qanday qo‘llanilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun dastlab berilgan sonlar ketma-ketligi uchun ishora almashishlar soni tushunchasini kiritib olamiz. Ya’ni noldan farqli bo‘lgan chekli tartiblangan sonlar sistemasida necha marotaba turli hil ishorali sonlar yonma-yon kelishini sanab, bu sonni *ishora almashishlar soni* deb olamiz.

Masalan,

$$1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1$$

Tartib bilan bu sonlarning ishoralarini yozib olamiz:

$$+, +, -, +, -, -, -, +, +.$$

Bu sistemada 4 marotaba o‘zaro qarama-qarshi ishoralar yonma-yon kelganini ko‘rish qiyin emas. Demak, tartiblangan sonlar sistemada 4 ta ishora almashishi bor.

Aytaylik, $f(x)$ ko‘phadning Shturm sistemasi berilgan bo‘lib, c haqiqiy soni ko‘phadning ildizi bo‘lmasin. Quyidagi haqiqiy sonlar sistemasini olib,

$$f(c),\ f_1(c),\ f_2(c),\ ...,\ f_s(c),$$

bu sonlar ketma-ketligidan nolga teng bo‘lgan sonlarni o‘chirib tashlaymiz. Hosil bo‘lgan sonlar ketma-ketligining ishora almashishlari sonini $W(c)$ kabi belgilaymiz

Ushbu $W(c)$ soni $f(x)$ ko‘phad uchun $x=c$ holatda berilgan Shturm sistemasidagi *ishora almashishlar soni* deb ataladi.

21.5-teorema (Shturm teoremasi). Agar a va $b,\ a<b$ haqiqiy sonlar karrali ildizlarga ega bo‘lmagan $f(x)$ ko‘phadning ildizlari bo‘lmasa, u holda $W(a)\geq W(b)$ bo‘lib, $W(a)-W(b)$ ayirma $f\left(x\right)$ ko‘phadning (a,b) oraliqdagi haqiqiy ildizlari soniga teng bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $W(x)$ soni x ortib borishi bilan qanday o‘zgarishini aniqlab chiqamiz. Ravshanki, x ning qiymati ortib borganda (21.1) Shturm sistemasi ko‘phadlaridan birining ildizi uchramaguncha bu sistemaning ishoralari o‘zgarmaydi. Demak, $W(x)$ soni ham ko‘phadlardan birining ildizi uchramaguncha o‘zgarmaydi.

Buni e’tiborga olgan holda, x ning qiymati biror $f_k(x), 1\leq k\leq s-1$ ko‘phadning ildizidan va berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizidan o‘tgan hollarni qaraymiz.

Aytaylik, α soni $f_k(x), 1\leq k\leq s-1$ ko‘phadning ildizi bo‘lsin. U holda, 1) shartga ko‘ra $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ ko‘phadlar noldan farqli. Demak, α sonining biror $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ atrofida ham $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ ko‘phadlar ildizlarga ega emas. Shuning uchun bu ko‘phadlar berilgan atrofda o‘z ishoralarini saqlaydi, hamda 3) shartga ko‘ra ular turli ishorali bo‘ladi. Bu yerdan quyidagi sonli sistemalar

$$f_{k-1}(\alpha-\varepsilon),\ f_k(\alpha-\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha-\varepsilon) \qquad (21.3)$$

va

$$f_{k-1}(\alpha+\varepsilon),\ f_k(\alpha+\varepsilon),\ f_{k+1}(\alpha+\varepsilon) \qquad (21.4)$$

bitta ishora almashishga ega ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, agar $f_{k-1}(\alpha-\varepsilon)>0$ bo‘lsa $f_{k+1}(\alpha-\varepsilon)<0$ bo‘lib, $f_k(\alpha-\varepsilon)$ sonining ishorasidan qat’iy nazar (21.3) sistemaning ishora almashishlar soni birga teng bo‘ladi. Huddi shunday, (21.4) sistemaning ishora almashishlar soni ham birga teng.

Demak, x soni ko‘phadning Shturm sistemasidagi birorta oraliq ko‘phadning ildizidan o‘tganda ishora almashishlar soni o‘zgarmaydi. Shuning uchun, bunday o‘tishda $W(x)$ soni ham o‘zgarmaydi.

Endi x ning qiymati berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizidan o‘tgan holni qaraymiz. Aytaylik, α soni berilgan $f(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsin. 1) shartga ko‘ra α soni $f_1(x)$ ko‘phadning ildizi emas. Shuning uchun biror $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ oraliqda $f_1(x)$ ko‘phad ildizga ega emas. Demak, bu oraliqda $f_1(x)$ ko‘phadning ishorasi o‘zgarmaydi. Agar bu ishora musbat bo‘lsa, 4) shartga ko‘ra $f(x)$ ko‘phadning argumenti α dan o‘tganda uning ishorasi manfiydan musbatga o‘zgaradi, ya’ni $f(\alpha-\varepsilon)<0$ va $f(\alpha+\varepsilon)>0$.

U holda quyidagi

$$f(\alpha-\varepsilon),\ f_1(\alpha-\varepsilon),$$

va

$$f(\alpha+\varepsilon),\ f_1(\alpha+\varepsilon)$$

sonlar sistemalar ishoralari

$$-,\ +\text{va}\ +,\ +,$$

ko‘rinishlarda bo‘ladi. Demak, bu holatda Shturm sistemasida bitta ishora almashish yo‘qoladi.

Huddi shunday, agarda $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ oraliqda $f_1(x)$ ko‘phadning ishorasi manfiy bo‘lsa, u holda yana 4) shartga ko‘ra $f(\alpha-\varepsilon)>0$ va $f(\alpha+\varepsilon)<0$. Bu holatda quyidagi ishoralar sistemasi hosil bo‘lib,

$$+,\ -\ \text{va}\ -,\ -,$$

bunda ham Shturm sistemasida bitta ishora almashishi yo‘qoladi.

Shunday qilib, $W(x)$ soni, uning argumenti ortib borib, $f(x)$ ko‘phadning ildizidan o‘tganidagina o‘zgarib, bittaga kamayadi, qolgan hollarda esa, o‘zgarishsiz qoladi. □

Shturm teoremasidan ko‘rinadiki, karrali ildizlarga ega bo‘lmagan $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari sonini topish uchun a sifatida manfiy ildizlarning quyi chegarasini, b sifatida esa musbat ildizlarning yuqori chegarasini olish yetarli.

Ammo, berilgan ko‘phadning ildizlari chegalararini topmasdan turib, a va b sonlari o‘rniga mos ravishda yetarlicha kichik manfiy va yetarlicha katta musbat sonlarni olish tezroq natija beradi. Chunki, yetarlicha katta musbat sonda Shturm sistemasining barcha ko‘phadlari ishoralari ularning katta hadlari ishoralari bilan ustma-ust tushadi.

Shartli ravishda yetarlicha kichik manfiy va yetarlicha katta musbat sonlarni $-\infty$ va ∞ kabi belgilaymiz. Demak, $(-\infty,\infty)$ oraliqda Shturm teoremasini qo‘llab, $f(x)$ ko‘phadning haqiqiy ildizlari sonini aniqlaymiz. Teoremani $(-\infty,0)$ va $(0,\infty)$ oraliqlarga qo‘llab esa, berilgab ko‘phadning musbat va manfiy ildizlari sonini topish mumkin.

Misol 21.4. $h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3$ ko‘phad uchun

Shturm usulini qo‘llab, uning ildizlari sonini toping.

Shturm teoremasini qo‘llash uchun $h(x)$ ko‘phad karrali ildizlarga ega bo‘lmasligi kerak. Lekin biz buni alohida tekshirib o‘tirmaymiz, chunki, Shturm sistemasini qurish jarayonida ushbu ko‘phad va uning hosilasi o‘zaro tubligini ham tekshiriladi. Shuning uchun berilgan ko‘phad uchun Shturm sistemasini quramiz:

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$

$$h_1(x)=5x^4+8x^3-15x^2+16x-7,$$

$$h_2(x)=66x^3-150x^2+172x+61,$$

$$h_3(x)=-464x^2+1135x+723,$$

$$h_4(x)=-32599457x-8486093,$$

$$h_5(x)=-1.$$

$h_5(x)=-1$ bo‘lganligi uchun $h(x)$ va $h'(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub. Demak, $h(x)$ ko‘phad karrali ildizlarga ega emas. Ushbu ko‘phadlarning $x=-\infty$ va $x=\infty$ holatlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Buning uchun faqatgina ko‘phadlarning katta koeffitsientlari ishoralariga va ko‘phadlarning darajalariga qarash yetarli:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Ishora almashish soni
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1

Demak, berilgan $h(x)$ ko'phad 3 ta haqiqiy ildizga ega. Bundan tashqari

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Ishora almashish soni
0	–	–	+	+	–	–	2

ekanligidan $h(x)$ ko'phadning ikkita manfiy va bitta musbat ildizlarga egaligi kelib chiqadi.

Misol 21.5. Shturm teoremasidan foydalanib quyidagi ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini, shuningdek, bu ildizlar joylashgan oraliqlarni aniqlaymiz:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

ko'phad uchun Shturm sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$$

$$f_1(x) = 3x^2 + 6x,$$

$$f_2(x) = 2x + 1,$$

$$f_3(x) = 1.$$

$x = -\infty$ va $x = \infty$ holatlarda bu sistemadagi ishora almashishlarni topamiz:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashish soni
$-\infty$	–	+	–	+	3
∞	+	+	+	+	0

Shunday qilib, $f(x)$ ko'phad uchta haqiqiy ildizga ega. Ildizlarning joylashishini aniq bilish uchun quyidagi jadvalni keltiramiz:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Ishora almashish soni
$x = -3$	–	+	–	+	3
$x = -2$	+	0	–	+	2
$x = -1$	+	–	–	+	2
$x = 0$	–	0	+	+	1

$x=1$	+	+	+	+	0

Demak, berilgan ko‘phadning α_1, α_2 va α_3 ildizlari mos ravishda $(-3,-2)$, $(-1,0)$ va $(0,1)$ oraliqlarda joylashadi.

MUSTAQIL TA`LIM MASHG`ULOTLAR

Mustaqil ta’lim mashg’ulotlarning tavsiya etiladigan mavzulari:

1.To`plamlar ustida bajariladigan amallar: to`plam birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi. Ularning hossalari: birlashma va kesishmalarning assotsiativligi, kommutativligi. Distributivlik hossasi.

2. Universal to`plam. To`ldiruvchi to`plam. To`ldiruvchi amalining hossalari: de Morgan qonunlari. To`plamlar Buleani.

3. Akslantirishlar va ularning turlari. Akslantirishlar kompozitsiyasi. Kompozitsiyaning assotsiativligi. Teskari akslantirishlar. Chekli to`plam akslantiroishlarining ba`zibir hossalari.

4. To`plamlarning Dekart ko`paytmasi. Unar, binar va n-ar munosabatlar. Funktsiya tushunchasi. Binar munosabat turlari va ularga oid misollar.

5. Chiziqli tenglamalar sistemasi va uning matritsasi. Ekvivalent (teng kuchli) sistemalar. Matritsalar ustida bajariladigan elementar almashtirishlar.

6. Kichik tartibli determinantlar. Ularning hossalari va hisoblash usullari. Chiziqli tenglamalar sistemasini echishga tatbiqi. Kramer formulalari.

7. O`rin almashtirishlar va o`rniga qo`yishlar. Inversiyalarni hisoblash. Juft va toq o`rin almashtirishlar. Transpozitsiya tushunchasi va uning hossalari. Siklik o`rniga qo`yishlar. O`rniga qo`yishlarning juft-toqligi.

8. Yuqori tartibli determinantlar. Ta`rif orqali echiladigan misollar. Yuqori tartibli determinantlarning echish usullari: uchburchak shakliga keltirish, chiziqli ko`paytuvchilarga ajratish, rekkurent munosabatlar, yig’inda ko`rinishga keltirish, determinant elementini o`zgartirish usullari.

9. Minorlar va algebraik to`ldiruvchilar. Determinantni algebraik to`ldiruvchilar orqali ifodalash. Laplas teoremasi tatbiqiga oid misollar.

10. To`ldiruvchi vektor fazo. Chiziqli bog'liqlik va chiziqli erklilik tushunchalari. Ularga oid masalalar. N- o`lchovli vektorlar sistemasining rangini hisoblash.

11. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroner-Kapeli teoremasining tatbiqi. Birgalikda bilish yoki bo`lmaslikning zaruriy va etarli sharti.

12. Bir jinsli CH.T.S. tekshirish. Fundamental echim. Yagona echimga bo`lishning zaruriy va etarli sharti

13. Matritsa ustida bajariladigan amallar: qo`shish, ko`paytirish, songa (skalyarga) ko`paytirish. Kiritilgan amallarning hossalariga oid misollar.

14. Teskari matritsa. Teskari matritsani topish usullari. Matritsali tenglamalarni echish. Determinant ko`paytmalariga oid misollar.

15. Kompleks sonlar sistemasi. Trigonometrik ko`rinish. Muavr formulalariga oid masalalar.

16. Butun sonlarda bo`linish nazariyasi. Arifmetikaning asosiy teoremasi. O`zaro tub sonlar. Ularga oid bo`lgan ba`zibir teoremalar. Z-halqada taqqoslamalar va chegirmalar sinflari. Uzluksiz kasrlar. Chiziqli taqqoslamalar, ularni echish usullari.

17. Kompleks o`zgaruvchili ko`phadlar va ular ustida bajariladigan qo`shish va ko`paytirish amallarining hossalari. Bo`luvchi tushunchasi va bo`linish hossalari.

18. Qoldiqli bo`lish algoritmi. Umumiy bo`luvchi va eng kata umumiy bo`luvchi tushunchalari. Evklid algoritmi. O`zaro tub ko`phadlar. Evklid algoritmidan kelib chiqadigan natijalar. Ularga oid misollar.

19. Ko`phad ildizlari. Karali ildizlar. Ko`phad ildizi karali Aniqlash usullari. Ratsional ildizlarni topish. Ularga oid misollar.

20. Algebraning asosiy teoremasidan kelib chiqadigan natijalar. va ustidagi keltirilmas ko`phad turlari. Viet formulalari. Ildizlari orqali ko`phadlarni aniqlash.

21. Kvadratik formulalar. Ularni kanonik ko`rinishga keltirish. Normal ko`rinish. Kvadratik forma rangi.

22. Kvadratik formalar uchun inertsiya qonuni. Musbat Aniqlangan kvadratik formalar. Ularni aniqlash usullari.

23. Chiziqlifazo tushunchasi. Uning aksiomalaridan kelib chiqadigan ba`zibir natijalar. Chekli o`lchovli chiziqli fazolar bazisini topish.

24. Chiziqli fazolar izomorfizmi. qism fazo. qism fazo yig'indisi va kesishmasi bazislarini topishga oid masalalar.

25. Chiziqli almashtirishlar matritsasini topish. Bazis o`zgarganda Chiziqlialmashtirish matritsalar orasidagi bog'lanishgaoid masalalar.

26. Chiziqlialmashtirishning xarakteristik ildizi va xos qiymatlari. Ularni topishga oid misollar.

27. Evklid fazo. Ortogonal bazis. Ortogonallash jarayoniga oid misollar. Ortogonal bazis qurish.

28. Ortogonal to`ldiruvchi va uning hossalari. Ortogonal to`ldiruvchida bazis topish usullari. Ortogonal tashkil etuvchi va ortogonal proektsiyalarni hisoblash.

29. Evklid fazo chiziqli almashtirishlari.

30. Qo`shma va o`z-o`ziga qo`shma Chiziqlialmashtirishlar. Ularning matritsalari. Simmetrik Chiziqlialmashtirishlarning xarakteristik ildizlarini topish. Kvadratik formani bosh o`qlariga keltira bilish.

Mustaqil ishlarni tashkil etishning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ishning asosiy maqsadi- o'qituvchining raxbarligi va nazorati ostida talabada muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda o'zlashtirish uchun zarur bo'lgan bilim va ko'nikmalarni shakillantirish va rivojlantirish.

Talaba mustaqil ishining vazifalari quyidagi topshiriqlardan iborat:

-yangi bilimlarni mustaqil tarzda puxta o'zlashtirish ko'nikmalarga ega bo'lish.

- kerakli ma'lumotlarni izlab topishning qulay usullari va vositalarini aniqlash.

- axborot manba'laridan va manzillaridan samarali foydalanish.

- ananaviy o'quv va ilmiy adabiyotlar, me'yoriy xujjatlar bilan tanishish.

- berilgan topshiriqning ratsional echimini belgilash.

- ma'lumotlar bazasini taxlil qilish.

- amaliy mashg'ulotlarga tayyorgarlik ko'rish.

- quyidagi mavzular bo'yicha o'quv adabiyotlari yordamida mustaqil tayyorlanishva yozma axborot (konspekt yoki referat) yozish.

To'plamlar nazariyasi

To'plamlar tushunchasi. To'plamlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari. To'plam buleani. Universal to'plam tushunchasi. To'ldiruvchi to'plam. De Morgan qonunlari. Akslantirishlar va ularni turlari (biektsiya, akslantirishlar ko'paytmasi, teskarilanuvchi akslantirishlar). Teskarilanuvchi akslantirishlar. To'plamning quvvati sanoqli to'plamlar,(sanoqsiz to'plamlarni mavjudligi). Binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartib munosabati. Matematik induktsiya. Algebraik amallar. Yarim gruppalar (ta'rif, umumlashgan assotsiativlik qonuni). Birlik va nol elementlar. Teskari va qarama-qarshi elementlar. Gommorfizm va izomorfizm. Guruppalar. qism guruppalar.

Chiziqli tenglamalar sistemasi.

Chiziqli tenglamalar sistemalari ularning matritsalari.n o’lchamlar arifmetik fazo. Matritsalarning rangi. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Matritsalarning elementlar almashtirishlar. Gauss usuli. Kroneker-kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirish. Ikkinchi va uchunchi tartibli determinatalar. O’rniga qo’yishlar gruppasi.ntartibli determinatlar. Minorlar va algebraik to’ldiruvchilar. Matritsalar algebrasi. Birgalikda bo’lgan chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari to’plamlarning tuzilishi. Xalqala rva maydonlar (boshlanqish ma'lumotlar) Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar.pleks sonning ildizlari. Bir sonnning ildizi.

Sonlar nazariyasi.

Butun sonlarning bo’linishi nazariyasi. Z xalqada taqqoslama chegirmalar sinflari. Uzluksiz kasrlar. Chiziqli taqqoslamalar. Taqqoslamaning echimi. Chiziqli taqqoslamalarni echish. Bir noma'lumli taqqoslamalar va ularning echimlari. Uzluksiz kasrlar. Boshlanqtch ildizlar va indekslar.

Ko’pxadalar nazariyasi.

Ko’pxadalar va ular ustida amallar. Bo’linishi nazariyasi. Algebraning asosiy teoremasi va uning natijalari. Eng kata umumiy bo’luvchi. Evklid algoritmi. O’zaro tub ko’pxadlar. Keltirilmaydigan ko’pxadlar. Ratsional kasrlar. Ratsional kasrni eng soda ratsional kasrlar yiqindisiga yoyish.

Chiziqli fazolar va chiziqli akslantishlar.

Chiziqli (vektor) fazolar. Chiziqli boqliqlik. O’lcham va ba'zasi. Bazasi o’zgarganda koordinatalarning o’zgarishi. qism fazolar. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari. Bazis o’zgarganda chiziqli almashtirish matritsaning o’zgarishi. Xos vektorlar va xos sonlar. qism fazolarning yiqindisi. Va kesishmasi. Chiziqlar akslantirishlar va izomorfizm. Chiziqli formalar. Birchiziqli va kvadratik formalar. Kanonik bazislar, Lagranj metodi. Xaqiqiy kvadratik formalar. Ermit formalari.

Evklid va unitar fazolar.

Evklid fazolari. Ortogonal va ortonormal sistemalar. Ortogonallashtirish proessi. Ortogonal protsiyalar. Unitar fazolar. Unitar fazolar chiziqli almashtirishlar. Normal almashtirishlar. O’z-o’ziga qo’shma almashtirishlar. Musbat almashtirishlar. Unitar almashtirishlar. Evklid fazosidagi chiziqli almashtirishlar.

Matritsaning Jordan normal formasi.

Matritsali ko'pxadlar. Kanonik λ-matritsalar. Determinant bo'luvchilar va invariant ko'paytuvchilar. O'xshashlik va ekvivalentlik. Elementar bo'luvchilar. Jordan normal formasi.

Algebraik tuzilmalar: gruppa, xalqa, maydon.

qism gruppalar. Siklik gruppalar. Izomorfizm xaqida Keli teoremasi. Yondosh sinflar. Normal qism guruppalar. Faktor gruppalar. Va gomomorfizmlar. qism xalqala rva qism maydnolar. Ideallar va faktor qxalqalar. Xalqalarning gomomorfizmi. Gomomorfizmlar xaqida teoremalar. Tenzorlar.

To'plamlar nazariyasi

To'plamlar tushunchasi. To'plamlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari. To'plam buleani. Universal to'plam tushunchasi. To'ldiruvchi to'plam. De Morgan qonunlari. Akslantirishlar va ularni turlari (biektsiya, akslantirishlar ko'paytmasi, teskarilanuvchi akslantirishlar). Teskarilanuvchi akslantirishlar. To'plamning quvvati sanoqli to'plamlar,(sanoqsiz to'plamlarni mavjudligi). Binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Tartib munosabati. Matematik induktsiya. Algebraik amallar. Yarim gruppalar (ta'rif, umumlashgan assotsiativlik qonuni). Birlik va nol elementlar. Teskari va qarama-qarshi elementlar. Gommorfizm va izomorfizm. Guruppalar. qism guruppalar.

Chiziqli tenglamalar sistemasi.

Chiziqli tenglamalar sistemalari ularning matritsalari.n o'lchamlar arifmetik fazo. Matritsalarning rangi. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Matritsalarning elementlar almashtirishlar. Gauss usuli. Kroneker-kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini elementar almashtirish. Ikkinchi va uchunchi tartibli determinatalar. O'rniga qo'yishlar gruppasi.ntartibli determinatlar. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. Matritsalar algebrasi. Birgalikda bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari to'plamlarning tuzilishi. Xalqalar va maydonlar (boshlanqish ma'lumotlar) Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar.pleks sonning ildizlari. Bir sonnning ildizi.

Sonlar nazariyasi.

Butun sonlarning bo'linishi nazariyasi. Z xalqada taqqoslama chegirmalar sinflari. Uzluksiz kasrlar. Chiziqli taqqoslamalar. Taqqoslamaning echimi. Chiziqli taqqoslamalarni echish. Bir noma'lumli taqqoslamalar va ularning echimlari. Uzluksiz kasrlar. Boshlanqtch ildizlar va indekslar.

Ko’pxadalar nazariyasi.

Ko’pxadalar va ular ustida amallar. Bo’linishi nazariyasi. Algebraning asosiy teoremasi va uning natijalari. Eng kata umumiy bo’luvchi. Evklid algoritmi. O’zaro tub ko’pxadlar. Keltirilmaydigan ko’pxadlar. Ratsional kasrlar. Ratsional kasrni eng soda ratsional kasrlar yiqindisiga yoyish.

Chiziqli fazolar va chiziqli akslantishlar.

Chiziqli (vektor) fazolar. Chiziqli boqliqlik. O’lcham va ba'zasi. Bazasi o’zgarganda koordinatalarning o’zgarishi. qism fazolar. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari. Bazis o’zgarganda chiziqli almashtirish matritsaning o’zgarishi. Xos vektorlar va xos sonlar. qism fazolarning yiqindisi. Va kesishmasi. Chiziqlar akslantirishlar va izomorfizm. Chiziqli formalar. Birchiziqli va kvadratik formalar. Kanonik bazislar, Lagranj metodi. Xaqiqiy kvadratik formalar. Ermit formalari.

GLOSSARIY

№	O‘zbek tilida	Рустилида	Ingliz tilida
1.	To‘plam	Множество	Set
2.	To‘plam elementi	Элементымножества	The element of a set
3.	Bo‘sh to‘plam	Пустое множество	Empty set
4.	To‘plam qismi	Подмножество	Part of the set
5.	To‘plamlar tengligi	Равенства множеств	Equality of sets
6.	To‘plamlar birlashmasi	Объединение множеств	The combination of sets
7.	To‘plamlar kesishmasi	Пересечения множества	Intersection of sets
8.	To‘plamlar ayirmasi	Разность множества	Diversity of sets
9.	To‘plam to‘ldiruvchisi	Дополнение к данному множеству	The complement of a set
10.	Dekart ko‘paytmasi	Декартовые произведения	Dekart’s product
11.	Chekli to‘plam	Конечные множества	Restricted set
12.	Cheksiz to‘plam	Бесконечные множества	Unrestricted set
13.	O‘zaro bir qiymatli moslik	Взаимно однозначные соответствия	One valued mutual correspondence
14.	Ekvivalent to‘plamlar	Эквивалентные	Equivalent sets

		множества	
15.	To‘plam quvvati	Мощность множества	Power of the set
16.	Sanoqli to‘plam	Счетное множество	Countable set
17.	Sanoqsiz to‘plam	Несчетное множество	Uncountable set
18.	Kombinatorlik masala	Комбинаторная задача	Combinatory sum
19.	Kombinatorika	Комбинаторика	Combinatorics
20.	O‘rin almashtirish	Перастановки	Substitution
21.	Kombinatsiya	Комбинация	Combination
22.	Nyuton binomi	Бином Ньютона	Binomial theorem
23.	Binomial koeffitsient	Биноминальные коэффициенты	Binomial quotient
24.	O‘rinlashtirish	Перемещение	Location
25.	Matritsa	Матрицы	Matrix
26.	Matritsa tartibi	Порядок матрицы	The order of matrix
27.	Matritsa elementi	Элементы матрицы	The element of matrix
28.	To‘rtburchakli matritsa	Прямоугольная матрица	Square matrix
29.	Kvadrat matritsa	Квадратная матрица	Quadratic matrix
30.	Ustun matritsa	Матрица столбец	Column matrix
31.	Satr matritsa	Матрица строка	Line matrix
32.	Teng matritsa	Равные матрицы	Equal matrix
33.	Dioganal element	Диагональный элемент	Diagonal element
34.	Dioganal matritsa	Диагональная матрица	Diagonal matrix
35.	Birlik matritsa	Единичная матрица	Single matrix
36.	Nol matritsa	Нулевая матрица	Zero matrix
37.	Matritsalar yig‘indisi	Сумма матриц	Sum of matrixes
38.	Matritsalar ayirmasi	Разность матриц	Diversity of matrixes
39.	Matritsalar ko‘paytmasi	Произведение матриц	Product of matrixes
40.	Matritsaning	Транспонированные	Transponed matrix

	transponirlangani	матрицы	
41.	Teskari matritsa	Обратная матрица	Inverse matrix
42.	Matritsaning rangi	Ранг матрицы	Rang of matrix
43.	Determinant (aniqlovchi)	Детерминант (определитель)	Determinant
44.	Determinantning elementi	Элементы определителя	The element of determinant
45.	Determinantning satri	Строка определителя	Line of determinant
46.	Determinantning ustuni	Столбцы определителя	Column of determinant
47.	Algebraik to‘ldiruvchi	Алгебраические дополнение	Algebraic complement
48.	Determinantning minori	Миноры определителя	Minors of determinant
49.	Chiziqli tenglamalar	Системы линейных уравнений	Linear equation
50.	Sistema koeffitsentlari	Коэффициенты системы	Quotients of a system
51.	Sistema ozod xadlari	Свободные члены системы	Free parts of a system
52.	Sistema yechimi	Решение системы	Decision of a system
53.	Birgalikda bo‘lgan sistema	Совместная система	Joint system
54.	Birgalikda bo‘lmagan sistema	Несовместная система	Disjoined system
55.	Aniq sistema	Определенная система	Definite system
56.	Aniqmas (noaniq) sistema	Неопределенная система	Indefinite system
57.	Kengaytirilgan matritsa	Расширенная матрица	Broad matrix
58.	Matritsalar usuli	Способ матриц	Method of matrixes
59.	Kramer usuli	Способ Крамера	Kramer’s method
60.	Asosiy determinant	Основной определитель	The main determinant

61.	Yordamchi determinantlar	Вспомогательные определители	Secondary determinants
62.	Kramer formulalari	Формулы Крамера	Kramer’s formulas
63.	Gauss usuli	Способ Гаусса	Method of Gauss
64.	Umumiy yechim	Общее решение	General decision
65.	Bir jinsli sistema	Однородная система	Similar system
66.	Skalyar	Скаляр	Scalar
67.	Vector	Вектор	Vector
68.	Vektorning moduli	Модуль вектора	Module of Vector
69.	Vectorning geometrik talqini	Геометрическое столькование вектора	Geometric interpretation of Vector
70.	Vectorning boshi	Начало вектора	The beginning of vector
71.	Vectorning uchi	Вершина вектора	Apex of vector
72.	Vectorning oxiri	Конец вектора	The end of vector
73.	Nol vector	Нулевой вектор	Zero vector
74.	Kolliniar vektorlar	Коллинеарные векторы	Co-linear vectors
75.	Komplanar vectorlar	Компланарные векторы	Compiled vectors
76.	Vectorning tengligi	Равенство векторов	The equality of the vector
77.	Vectorni songa ko‘paytmasi	Произведение число на вектора	Product numbers to vector
78.	Qarama-qarshi vectorlar	Противоположные векторы	Contrast vectors
79.	Vectorlarni qo‘shish	Сложение векторов	Adding of vectors
80.	Parallelogramm qoidasi	Правила параллелограмма	The rule of parallelogram
81.	Uchburchak qoidasi	Правила треугольника	The rule of triangle
82.	Ko‘pburchak qoidasi	Правила многоугольника	The rule of polygon
83.	Vectorlarning ayrmasi	Разность векторов	Diversity of vectors
84.	Vectorlarning o‘qdagi proyektsiyasi	Проекция вектора на ось	Projection of vectors on axix
85.	Vectorning yoyilmasi	Разложения вектора	Expansion of vector

86.	Vectorning koordinatalari	Координаты вектора	Coordinates of vector
87.	Birlik vectorlar	Единичный вектор	Single vectors
88.	Skalyar ko‘paytma	Скалярное произведения	Scalar product
89.	Skalyar ko‘paytmaning mexanik ma’nosi	Механический смысл скалярного произведения	Mechanic meaning of Scalar product
90.	Vectorial ko‘paytma	Векториальное произведения	Vector product
91.	Vectorial ko‘paytmaning mexanik ma’nosi	Механический смысл векториального произведения	Mechanic meaning of vector product
92.	Vectorial ko‘paytmaning xossalari	Свойства векториального произведения	Derivatives of vector product
93.	Skalyar ko‘paytmani xossalari	Свойства скалярного произведения	Derivatives of Scalar product
94.	Vectorlarning komplanarlik sharti	Условия компланарности векторов	Complanaric condition of vectors
95.	Aralash ko‘paytma	Смешанные произведения	Mixed product
96.	Aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi	Геометрический смысл смешанного произведения	Geometric meaning of mixed product
97.	Uch vectorning komplanarlik sharti	Условия компланарности трех векторов	Complanaric condition of three vectors
98.	Analitik geometrya predmeti	Предмет аналитической геометрии	The subject of analytical geometry
99.	Aylana tenglamasi	Уравнение окружности	Equation of a circle
100.	To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi	Общее уравнение прямой	General equation of straight line
101.	To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	Equation of angled quotient of a straight line
102.	To‘g‘ri chiziqning	Угловой коэффициент	Angled quotient of a

	burchak koeffitsienti	прямой	straight line
103.	Normal tenglama	Нормальное уравнение	Normal equation
104.	Kanonik tenglama	Каноническое уравнение	Canonic equation
105.	Parametrik tenglama	Параметрическое уравнение	Parametric equation
106.	To‘g‘ri chiziqlar dastasi	Кучка прямых линий	Group of straight line
107.	Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq	Уравнение прямой проходящий через две данной точки	Straight line crossing two points
108.	Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak	Угол между двумя прямыми	The angle between two straight lines
109.	Parallellik sharti	Условие параллельности	Condition of parallelism
110.	Perpendikulyarlik sharti	Условие перпендикулярности	Condition of perpendicularity
111.	Nuqtadan to‘g‘ri chiziqgacha masofa	Расстояние от точки до прямой	Distance from the point to the line
112.	Ikki o‘zgaruvchi 2 -tartibli tenglamalar	Уравнение второго порядка с двумя неизвестными	Equation with two unknown quantities
113.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar	Кривые второго порядка	Curve lines of the second order
114.	Aylanma	Окружность	Circle
115.	Aylanma markazi	Центр окружности	The centre of a circle
116.	Aylanma radiusi	Радиус окружности	Radius of a circle
117.	Aylanmaning kanonik tenglamasi	Каноническое уравнение окружности	Canonical equation of a circle
118.	Ellips	Эллипс	Ellipse
119.	Ellipsning fokuslari	Фокусы эллипса	Focuses of the ellipse
120.	Ellipsning kanonik tenglamasi	Каноническое уравнение эллипса	Canonical equation of an ellipse
121.	Ellipsning uchlari	Вершины эллипса	The tops of an ellipse
122.	Ellipsning o‘qlari	Оси эллипса	The axis of an ellipse

123.	Fokal radiuslar	Фокальные радиусы	Fokal radiuses
124.	Ellips ekssentrisiteti	Эксцентриситет эллипса	Eccentricity of an ellipse
125.	Ellips direktrisalari	Директрисы эллипса	Directrices of an ellipse
126.	Giperbola	Гипербола	Hyperbola
127.	Fokus	Фокус	Focus
128.	Giperbolaning noaniq tenglamasi	Каноническое уравнение гиперболы	Unknown equation of a hyperbola
129.	Giperbolaning uchlari	Вершины гиперболы	The tops of a hyperbola
130.	Giperbolaning o‘qlari	Оси гиперболы	The axis of a hyperbola
131.	Asimitotalar	Асимптоты	Asimitators
132.	Giperbolaning enstsentrisiteti	Эксцентриситет гиперболы	Eccentricity of a hyperbola
133.	Direktrisa	Директриса	Directrix
134.	Parabola	Парабола	Parabola
135.	Parabolaning kanonik tenglamasi	Каноническое уравнения параболы	Canonical equation of a parabola
136.	Parallel ko‘chirish	Параллельный перенос	Parallel transportation
137.	Burish	Поворот	Turning
138.	Koordinatalar sistemasini almashtirish	Преобразование системи координат	Substitution of systems of coordinates
139.	Fazodagi nuqta koordinatalari	Координаты точки на пространстве	Coordinates on space points
140.	Fazodagi analitik geometriya predmeti	Предмет аналитической геометрии на пространстве	Subject of analytical geometry on space
141.	Tekislikning umumiy tenglamasi	Общее уравнение плоскости	General equation of flatness
142.	Tekislikning normal vektori	Нормальное вектора плоскости	Normal vector of flatness
143.	Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi	Уравнения плоскости в отрезах	Equation of flatness on segments

144.	Normallovchi ko‘paytiruvchi	Нормирующий множитель	Normalizing multiplier
145.	Berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekisliklar	Плоскости проходящей через данной точки	Flatnesses crossing the given points
146.	Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik	Плоскости проходящей через три данные точки	Flatness crossing the three given points
147.	Ikki tekislik orasidagi burchak	Угол между двумя плоскостями	The angle between two flatnesses
148.	Ikki tekislikning parallellik sharti	Условия параллельности двух плоскости	Parallel conditions of two flatnesses
149.	Ikki tekislikning perpendikulyar sharti	Условия перпендикулярности двух плоскости	Perpendicular conditions of two flatnesses
150.	Nuqtadan tekislikacha bo‘lgan masofa	Расстояние от точки до прямой	Distance from the point to the flatness
151.	Yo‘naltiruvchi vektor	Направляющий вектор	Guide vector
152.	Fazodagi ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi	Уравнения прямой проходящий через две точки на пространстве	Straight line equation going through two points on space
153.	Fazodagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak	Угол между прямыми на пространстве	The angle between the straight lines on space
154.	Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti	Условие параллельности двух прямых на пространстве	The condition of parallelism of two straight lines on space
155.	Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti	Условие перпендикулярности двух прямых на пространстве	The condition of perpendicularity of two straight lines on space
156.	Fazodagi to‘g‘ri chiziq va tekislik sharti orasidagi burchak	Угол между прямой и плоскости в пространстве	The angle between straight lines and flatness on space
157.	To‘g‘ri chiziq va tekislikning	Условие параллельности	The condition of parallelism of a straight

	parallellik sharti	прямой и плоскости	line and flatness
158.	To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik sharti	Условие перпендикулярности прямой и плоскости	The condition of perpendicularity of a straight line and flatness
159.	To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi	Точка пересечения прямой и плоскости	The point of crossing a straight line and flatness
160.	Sonli to‘plamlar	Числовые множества	Numerical sets
161.	Natural sonlar to‘plami	Множества натуральных чисел	Set of natural numbers
162.	Butun sonlar to‘plami	Множества целых чисел	Set of whole numbers
163.	Ratsional sonlar to‘plami	Множества рациональных чисел	Set of rational quantities
164.	Irratsional sonlar to‘plami	Множества иррациональных чисел	Set of irrational quantities
165.	Haqiqiy sonlar to‘plami	Множества действительных чисел	Set of real numbers
166.	Sonlar o‘qi	Числовая ос	Numerical axis
167.	Oraliq	Интервал	Interval
168.	Kesma	Отрезок	Segment
169.	Yarim oraliq	Полуинтервал	Half-interval
170.	Yarim cheksiz oraliq	Полубесконечный интервал	Half infinite interval
171.	Cheksiz oraliq	Бесконечный интервал	Infinite interval
172.	Ochiq to‘plamyopiq to‘plam	Открытые множество	Open set
173.	Yopiq to‘plam	Замкнутое множество	Reserved set
174.	Nuqta atrofi	Окресность точки	Environs of the point
175.	Yuqori chegaralangan to‘plam	Множество ограниченную сверху	Limited set from the top
176.	Quyidan chegaralangan	Множество, ограниченное снизу	Limited set from below

	to‘plam		
177.	Chegaralangan to‘plam	Ограниченное множество	Limited set
178.	Sonning absolyut qiymati	Абсолютное значение числа	Absolute meaningful quantity
179.	Sonli ketma-ketlik	Числовая последовательность	Quantity succession
180.	Quyidan chegaralangan ketma-ketlik	Числовая последовательность, ограниченная снизу	Quantity succession from below
181.	Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik	Числовая последовательность, ограниченная сверху	Quantity succession from the top
182.	Chegaralangan ketma-ketlik	Ограниченная последовательность	Limited succession
183.	Sonli ketma-ketlik limiti	Передел числовой последовательности	Limit of quantity succession
184.	O‘zgarmas ketma-ketlik	Постоянная последовательность	Constant succession
185.	Yaqinlashuvchi ketma-ketlik	Сходящая последовательность	Intimate succession
186.	Uzoqlashuvchi ketma-ketlik	Расходящая последовательность	Disperse succession
187.	Monoton ketma-ketlik	Монотонная последовательность	Monotonous succession
188.	Muxim ketma-ketlik	Замечательный предел	Substantial limit
189.	O‘zgarmas miqdorlar	Постоянные величины	Constant quantities
190.	O‘zgaruvchi miqdorlar	Переменные величины	Variable quantities
191.	Funktsiya	Функция	Function
192.	Aniqlash sohasi	Область определения	Field of definition
193.	Qiymatlar sohasi	Область значений	Field of value
194.	Funktsiya grafigi	График функции	Diagram of function

195.	O‘suvchi funktsiya	Возрастающая функция	Increasing function
196.	Kamayuvchi funktsiya	Убивающая функция	Decreasing function
197.	Monoton funktsiyalar	Монотонные функции	Monotonous functions
198.	Juft funktsiya	Четная функция	Even functions
199.	Ton funktsiya	Нечетная функция	Odd functions
200.	Davriy funktsiya	Периодичная функция	Periodical function
201.	Chegarlangan funktsiya	Ограниченная функция	Limited function
202.	Chegaralanmagan funktsiya	Неограниченная функция	Unlimited function
203.	O‘zgarmas funktsiya	Постоянная функция	Constant function
204.	Murakkab funktsiya	Сложная функция	Complex function
205.	Teskari funktsiya	Обратная функция	Inverse function
206.	Oshkormas funktsiya	Неявная функция	Non – evident function
207.	Asosiy elementar funktsiyalar	Основные элементарные функции	Main elementary functions
208.	Funktsiyaning limiti	Предел функции	Limit of function
209.	Chap limit	Левый предел	Left limit
210.	O‘ng limit	Правый предел	Right limit
211.	Cheksiz kichik limit	Бесконечно малые величины	Unlimited small quantity
212.	Cheksiz katta limit	Бесконечно большие величины	Unlimited large quantity
213.	Yig‘indining limiti	Предел суммы	Limit of sum
214.	Ko‘paytmaning limiti	Предел произведения	Limit of derivative
215.	Bo‘linmaning limiti	Предел частного	Limit of quotient
216.	Funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi	Непрерывность функции в точке	Continuity of function on the point
217.	Argument orttirmasi	Приращение аргумента	Increase of argument
218.	Funktsiya orttirmasi	Приращение функции	Increase of function

219.	Oraliqda uzluksizlik	Непрерывность в интервале	Continuity in the interval
220.	Kesmada uzluksizlik	Непрерывность в отрезке	Continuity on segment
221.	Kesmadagi eng katta qiymat	Наибольшее значениена отрезке	The largest value on segment
222.	Kesmadagi eng kichik qiymat	Наименьшее значениена отрезке	The least value on segment
223.	Uzulish nuqtalari	Точки разрыва	Point of break
224.	Funktsiyaning hosilasi	Производная функция	Derivative of function
225.	Hosilaning geometrik ma’nosi	Геометрический смысл производной	Geometric significance of a derivative
226.	Hosilaning mexanik ma’nosi	Механический смысл производной	Mechanic significance of a derivative
227.	Differentsiallashuvchi funktsiya	Дифференцируемые функции	Differentiated functions
228.	Differentsiallash amali	Действия дифференциала	Operation of differential
229.	Hosilani hisoblash algaritmi	Алгоритм вычисления производной	Algorithm of calculation of a derivative
230.	O‘zgarmas son hosilasi	Производная постоянная числа	Derivative of a constant number
231.	Yig‘indini hosilasi	Производная суммы	Sum of derivative
232.	Ko‘paytmani hosilasi	Производная произведения	Derivative of product
233.	Bo‘linmaning hosilasi	Производная частного	Derivative of quotient
234.	Teskari funktsiya hosilasi	Производная обратной функции	Derivative of inverse function
235.	Murakkab funktsiya hosilasi	Производная сложной функции	Derivative of complex function
236.	Oshkormas funktsiya hosilasi	Производная неявной функции	Derivative of non-evident function
237.	Darajali-ko‘rsatkichli funktsiya	Степенно показательная функция	Degree model function

238.	Hosilalar jadvali	Таблицы производных	Schedule of derivatives
239.	Parametrik shaklda berilgan funktsiyaning hosilasi	Производная функции заданной в параметрической форме	Derivative of function set in parametric form
240.	Funktsiya differentsiali	Дифференциал функции	Function of differential
241.	Ko‘paytmaning differentsiali	Дифференциал суммы	Differential of sum
242.	Yig‘indini differentsiali	Дифференциал произведения	Differential of a derivative
243.	Bo‘linmaning differentsiali	Дифференциал частного	Differential of quotient
244.	Yuqori tartibli hosilalar	Производные высшего порядка	High order derivatives
245.	Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi	Механический смысл производная второго порядка	Mechanic significance of a second order derivative
246.	Funktsiyaning o‘sish oralig‘i	Интервал возрастания функции	Interval of the increase of function
247.	Funktsiyaning kamayish oralig‘i	Интервал убывания функции	Interval of the decrease of function
248.	Funktsiyaning maksimumi	Максимум функции	Maximum of a function
249.	Funktsiyaning minimumi	Минимум функции	Minimum of a function
250.	Funktsiyaning ekstremumlari	Экстремумы функции	Extremuims of function
251.	Kritik nuqta	Стационарные точки	Stationary point
252.	Botiqlik oralig‘i	Интервал вогнутости	Interval of conicavity
253.	Qavarinlik oralig‘i	Интервал выпуклости	Point of bending
254.	Burilish nuqta	Точки перегиба	Turning point
255.	Og‘ma asimtota	Наклонная асимптота	Inclined asymptote
256.	Gorizontal asimtota	Горизонтальная асимптота	Horizontal asymptote

257.	Vertical asimtota	Вертикальная асимптота	Vertical asymptote
258.	$\frac{0}{0}$ ko ‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида $\frac{0}{0}$	Vagueness in the form of
259.	$\frac{\infty}{\infty}$ ko ‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$	Vagueness in the form of
260.	Aniqmasliklarni ochish	Раскрытие неопределенности	Opening of vagueness
261.	Lopitalning I- qoidasi	Первое правило Лопиталя	Lopital’s first rule
262.	Lopitalning II-qoidasi	Второе правило Лопиталя	Lopital’s second rule
263.	$0 \cdot \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида $0 \cdot \infty$	Vagueness in the form of
264.	1^{∞} ko‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида 1^{∞}	Vagueness in the form of
265.	∞^{0} ko‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида ∞^{0}	Vagueness in the form of
266.	$\infty \cdot \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik	Неопределенность вида $\infty \cdot \infty$	Vagueness in the form of
267.	Boshlang‘ich funktsiya	Первообразная функция	Prototype function
268.	Aniqmas interval	Неопределенный интеграл	Indefinite integral
269.	Integral ostidagi ifoda	Подинтегральная выражения	Under integral expression
270.	Integral ostidagi funktsiya	Подинтегральная функция	Under integral function
271.	Integrallash o ‘zgaruvchisi	Переменная интегрирования	Variable integration
272.	Integrallash amali	Действия интегрирования	Operation of integration
273.	Integrallash jadvali	Таблицы интегралов	Schedule of integration

274.	Aniqmas integralli bevosita hisoblash	Непосредственное вычисления неопределенного интеграла	Immediate calculation of an indefinite integral
275.	O‘zgaruvchilarni almashtirish usuli	Метод замены переменных	Method of substitution of variables
276.	Bo‘laklab integrallash usuli	Метод интегрирования по частям	Method of integration on parts
277.	Ko‘phad	Многочлен	Multinominal
278.	Ratsional funktsiya	Рациональная функция	Rational function
279.	Noto‘g‘ri rational kasr	Неправильный рациональный дробь	Irregular rational function
280.	To‘g‘ri rational kasr	Правильный рациональный дробь	Regular rational function
281.	I – tur eng sodda rational kasr	Самый простой рациональный дробь I - типа	The most simple rational fraction of the I st type
282.	II – tur eng sodda rational kasr	Самый простой рациональный дробь II – типа	The most simple rational fraction of the II nd type
283.	III – tur eng sodda rational kasr	Самый простой рациональный дробь III – типа	The most simple rational fraction of the III rd type
284.	IV – tur eng sodda rational kasr	Самый простой рациональный дробь IV – типа	The most simple rational fraction of the IV th type
285.	Mavhum son	Мнимая единица	Imaginary unity
286.	Kompleks son	Комплексное число	Complex number
287.	Qo‘shma kompleks sonlar	Сопряженное комплексное число	Conjugate complex numbers
288.	Noma’lum koeffissientlar usuli	Метод неизвестных коэффициентов	Method of unknown coefficient
289.	Irrational funktsiya	Иррациональная функция	Irrational function
290.	Universal almashtirish	Универсальная подстановка	Universal substitution

291.	Integral yig‘indi	Интегральная сумма	Integral sum
292.	Aniq integral	Определенный интеграл	Concrete integral
293.	Quyi chegara	Нижняя граница	Lower limit
294.	Yuqori chegara	Верхняя граница	Upper limit
295.	Aniq integralning geometrik ma’nosi	Геометрический смысл определенного интеграла	Geometrical meaning of a definite integral
296.	Nyuton – Leybnits formulasi	Формула Ньютона-Лейбница	Formula of Newton – Laybnits
297.	To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi	Формула прямоугольника	Formula of right-angled quadrangle
298.	Tramplinlar formulasi	Формула трапеции	Formula of spring-boards
299.	Egri chiziqli trapetsiya yuzasi	Площадь криволинейной трапеции	Area of curvilinear trapezium
300.	Egri chiziq yoyi uzunligi	Длина дуги кривой линии	The length of curvilinear arc
301.	Aylanma jism hajmi	Объем тела вращения	Volume of rotation of a circle
302.	O‘zgaruvchan kuch bajargan ish	Работа выполненные переменной силы	The work done by variable power
303.	Og‘irlik markazining koordinatalari	Координаты центра тяжести	Coordinates of centre of gravity
304.	Xosmas inregral	Несобственный интеграл	Improper integral
305.	Yaqinlashuvchi xosmas integral	Сходящий несобственный интеграл	Improper integral which becomes intimate
306.	Uzoqlashuvchi xosmas integral	Расходящий несобственный интеграл	Improper integral which becomes diverged
307.	Mulohaza (fikr)	Высказывания	Statement
308.	Yolg‘on fikr	Ложные высказывания	False statement
309.	Mantiqiy bog‘lovchilar	Логические связные	Logical sheals
310.	Murakkab fikr	Сложные высказывания	Complex statement
311.	Rost fikr	Истинные высказывания	True statement

312.	Rostlik (chinlik) jadvali	Таблица истинности	Schedule of truth
313.	Inkor	Отрицание	Negation
314.	Konyunktsiya	Коньюнкция	Conjunction
315.	Dizyunktsiya	Дизьюнкция	Disjunction
316.	Implikatsiya	Импликация	Implication
317.	Ekvivalentsiya	Эквиваленция	Equivalention

O'QUV ADABIYOTLARI, DARSLIK VA O'QUV QO'LLANMALAR

Asosiy adabiyotlar.

1. Ayupov A.Sh., Omirov B.A., Xudoyberdiyev A.X., Haydarov F.H. algebra va sonlar nazariyasi, Toshkent, “Tafakkur bo’stoni”, 296 bet, 2019 y.

2. ХожиевЖ.Х. ФайнлейбА.С. Алгебравасонларназариясикурси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.

3. Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qo’shimcha adabiyotlar

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру, М., «Наука», 1977г.
2. Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K., Fundamentals of abstract algebra.-WCB McGrew-Hill, 1997.p.636.
3. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.:Просвещение, 1966.-384 с.
4. Гильберт Д. Избранные труды. Том 1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. 1998.
5. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. 2008.
6. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to the Theory of Numbers.-6 th.ed.. Oxford University Press.-2008.480-p.

Axborot manbaalari

1. http://www.ziyonet.uz/
2. http://www.allmath.ru/
3. http://www.mcce.ru/
4. http://lib.mexmat.ru/
5. http://www.awebmath.ru/
6. http://www.exponenta.ru/

I L O V A L A R

FANNING TAQVIM-MAVZU REJASI

I-semestr

Hafta	Soat	Mashg'ulot mazmuni
1	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli **Mavzu rejasi:** 1.Chiziqli algebraik tenglamalarini yechish usullari. 2.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari ustida elementar almashtirishlar. 3.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari ustida elementar almashtirishlar. 4.M.atritsalar algebrasi. **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
2	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Matritsalar va ular ustida amallar **Mavzu rejasi:** 1.Matritsa tushunchasi 2.Matritsalar ustida amallar 3.Matritsalar algebrasi **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
3	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Kichik tartibli determinantlarO'rin almashtirishlar va o'rinlashtirishlar **Mavzu rejasi:**

		1.Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar 2.Determinantlarni hisoblash usullari 3.O'rin almashtirishlar va o'rinlashtirishlar **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
4	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** *n*-tartibli determinantlar va ularning xossalari **.** Algebraik to'ldiruvchi va minorlar. **Mavzu rejasi:** *1.n*-tartibli determinantlar 2.Determinantlarni xossalari 3.Algebraik to'ldiruvchi va minorlar. **Adabiyotlar:**
5	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Xos va xosmas matritsalar. Teskari matritsa **Mavzu rejasi:** 1. Xos va xosmas matritsa. **2.** Teskari matritsa. **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
6	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli teskari matritsalar yordamida yechish **Mavzu rejasi:** 3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari. 4. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish 5. Chiziqli tenglamalar sistemasini Matritsa usuli yordamida yechish **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
7	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** *n*-o'lchovli vektor fazo. Chiziqli bog'liqlik. Vektor fazoning bazisi **Mavzu rejasi:** 4. *n*-o'lchovli vektor fazo. 5. Chiziqli bog'liqlik. 6. Vektor fazoning bazisi **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**

8	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi **Mavzu rejasi:** 3. Matritsa rangi 4. Kroneker-Kapelli teoremasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
9	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Kompleks sonlar va ular ustida amallar. **Mavzu rejasi:** 1. Kompleks son tushunchasi. 2. Kompleks sonlar ustida amallar. **Adabiyotlar: [1]-[4]**
10	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Kompleks sonning trigonometrik shakli. Muavr formulasi **Mavzu rejasi:** 1. Kompleks sonning trigonometrik shakli. **2.** Muavr formulasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
11	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Ko'phadlar va ular ustida amallar. Ko'phadlarning bo'linish nazariyasi, Gorner sxemasi **Mavzu rejasi:** 1. Ko'phadlar va ular ustida amallar.. 2. Ko'phadlarning bo'linish nazariyasi **3.** Gorner sxemasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
12	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Bezu teoremasi. Viyet formulalari. Ko'phad ildizlarining joylashishi **Mavzu rejasi:** **1.** Bezu teoremasi **2.** Viyet formulalari. **3.** Ko'phad ildizlarining joylashishi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
13	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Qoldiqli bo'lish. Ko'phadlarning EKUBi

		Mavzu rejasi: **1.** Qoldiqli bo'lish. **2.** Ko'phadlarning EKUBi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
14	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** **Mavzu:** Ratsional kasrlar va ularni eng sodda kasrlarga yoyish **Mavzu rejasi:** **1.** Ratsional kasrlar **2.** Ratsional kasrlarni eng sodda kasrlarga yoyish **Adabiyotlar: [1]-[4]**
15	2	**Mashg'ulot turi: Ma`ruza** Ildiz chegaralari. Dekart va Shturm teoremalari **Mavzu:** Ildiz chegaralari **Mavzu rejasi:** **1.** Ildiz chegaralari. **2.** Dekart va Shturm teoremalari **Adabiyotlar: [1]-[4]**
		YAKUNIY NAZORAT **Nazorat turi:** **Nazorat o'tkazilish vaqti:** **Nazorat o'tkazilish joyi**
		Kurs natijalari, yakuniy nazoratga tayyorgarlik ko'rish. **Maslahat o'tkazilish vaqti:**

Hafta	Soat	Mashg'ulot mazmuni
1	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy**

		Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli **Mavzu rejasi:** 1. Chiziqli algebraik tenglamalarini yechish usullari. 2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari ustida elementar almashtirishlar. 3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari ustida elementar almashtirishlar. **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
2	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Matritsalar va ular ustida amallar **Mavzu rejasi:** 1. Matritsa tushunchasi 2. Matritsalar ustida amallar 3. Matritsalar algebrasi **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
3	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Kichik tartibli determinantlarO'rin almashtirishlar va o'rinlashtirishlar **Mavzu rejasi:** 1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar 2. Determinantlarni hisoblash usullari **3.** O'rin almashtirishlar va o'rinlashtirishlar **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
4	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** *n*-tartibli determinantlar va ularning xossalari **.** Algebraik to'ldiruvchi va minorlar. **Mavzu rejasi:** *1.* *n*-tartibli determinantlar *2.* Determinantlarni xossalari ***3.*** Algebraik to'ldiruvchi va minorlar. **Adabiyotlar:**
5	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Xos va xosmas matritsalar. Teskari matritsa **Mavzu rejasi:**

		1. Xos va xosmas matritsa. **2.** Teskari atritsa. **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
6	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli teskari matritsalar yordamida yechish **Mavzu rejasi:** 1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari. 2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish 3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Matritsa usuli yordamida yechish **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
7	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** *n*-o'lchovli vektor fazo. Chiziqli bog'liqlik. Vektor fazoning bazisi **Mavzu rejasi:** *1.* *n*-o'lchovli vektor fazo. *2.* Chiziqli bog'liqlik. *3.* Vektor fazoning bazisi **Adabiyotlar:** **[1]-[4]**
8	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi **Mavzu rejasi:** 1. Matritsa rangi 2. Kroneker-Kapelli teoremasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
9	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Kompleks sonlar va ular ustida amallar. **Mavzu rejasi:** 1. Kompleks son tushunchasi. 2. Kompleks sonlar ustida amallar. **Adabiyotlar: [1]-[4]**
10	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Kompleks sonning trigonometrik shakli. Muavr formulasi **Mavzu rejasi:**

		1. Kompleks sonning trigonometrik shakli. **2.** Muavr formulasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
11	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Ko'phadlar va ular ustida amallar. Ko'phadlarning bo'linish nazariyasi, Gorner sxemasi **Mavzu rejasi:** 1. Ko'phadlar va ular ustida amallar.. 2. Ko'phadlarning bo'linish nazariyasi **3.** Gorner sxemasi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
12	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Bezu teoremasi. Viyet formulalari. Ko'phad ildizlarining joylashishi **Mavzu rejasi:** 1. Bezu teoremasi 2. Viyet formulalari. 3. Ko'phad ildizlarining joylashishi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
13	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Qoldiqli bo'lish. Ko'phadlarning EKUBi **Mavzu rejasi:** 1. Qoldiqli bo'lish. 2. Ko'phadlarning EKUBi **Adabiyotlar: [1]-[4]**
14	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Mavzu:** Ratsional kasrlar va ularni eng sodda kasrlarga yoyish **Mavzu rejasi:** 1. Ratsional kasrlar 2. Ratsional kasrlarni eng sodda kasrlarga yoyish **Adabiyotlar: [1]-[4]**
15	2	**Mashg'ulot turi: Amaliy** **Ma`ruza** Ildiz chegaralari. Dekart va Shturm teoremalari **Mavzu:** Ildiz chegaralari **Mavzu rejasi:** 1. Ildiz chegaralari. 2. Dekart va Shturm teoremalari

		Adabiyotlar: [1]-[4]

BAHOLASH ME'ZONI

Talabalar bilimini baxolash O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirining 2018 yil 9 avgustda 9-2018-sonli "Oliy ta'lim muassasalari talabalari bilimini nazorat qilish va baholash tizimi to'g'risidagi nizomni tasdiqlash haqida"gi buyrug'i bilan tasdiqlangan "Oliy ta'lim muassasalari talabalari bilimini nazorat qilish va baholash tizimi to'g'risidagi Nizom" asosida amalga oshiriladi.

Bunga ko'ra talaba:

- mustaqil xulosa va qaror qabul qiladi, ijodiy fikrlay oladi, mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda — 5 (a'lo) baho;
- mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatni tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda — 4 (yaxshi) baho;
- olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatni tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda — 3 (qoniqarli) baho;

- fan dasturini o’zlashtirmagan, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunmaydi hamda fan (mavzu) bo’yicha tasavvurga ega emas deb topilganda — 2 (qoniqarsiz) baho bilan baholanadi.

Nazorat turlarini o’tkazish bo’yicha tuzilgan topshiriqlarning mazmuni talabaning o’zlashtirishini xolis (ob’ektiv) va aniq baholash imkoniyatini beradi.

Talaba fan uchun ajratilgan kreditni fanning o’zlashtirish darajasi, olgan bahosiga proporsional tarzda oladi. Fan uchun ajratilgan soat bo’yicha talaba maksimal to’plashi kerak bo’lgan kredit miqdori (ball) ni tashkil etadi. Talabaning kreditini to’plashi quyidagi formula orqali amalga oshiriladi.

$$\text{Talaba to´plagan krediti} = \frac{\text{fanga ajratilgan kredit*talabaning olgan bahosi}}{\text{maksimal baho (5)}}$$

TARQATMA MATERIALLAR.

№1

1. Vektor fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. CHiziqli akslantirishlar kompozitsiyasini va uning matritsasini quring. Misollar keltiring.

3. Quyidagi vektorlar sistemasining rangi nechaga teng?

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1\right) \\ a_2 = (-4, -6, 0, -4) \\ a_3 = (1, 3, 0, 2) \\ a_4 = (2, 6, 0, 4) \end{cases}$$

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№2

1. CHiziqli erkli vektorlar sistemasi nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. Vektor fazolar izomorfizmi nima, uning matritsasi qanday bo`ladi, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Quyidagi vektorlar sistemasining rangi nechaga teng $\begin{cases} a_1 = (1,2,3,4) \\ a_2 = (0,1,2,-4) \\ a_3 = (1,3,5,0) \\ a_4 = (2,4,6,8) \end{cases}$?

4. quyidagi A=$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ va B=$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$matritsalar uchun B·A matritsani toping.

№3

1. Vektor fazo bazisi va o`lchami ta`riflarini keltiring. Qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. CHiziqli akslantirishlar va matritsalar orasida qanday bog’lanish bor? Misollar keltiring.

3. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 4 & 5 & a_{23} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

determinanti qiymatini toping?

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№4

1. Vektor qism fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. Vektor fazolarni chiziqli akslantirish nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Determinantni xisoblang $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsani rangini toping

№5

1. Vektor fazolar yig’indisi va to`g’ri yig’indisini tushuntiring, misollar keltiring.

2. Vektor qism fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Determinantni xisoblang $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 8 \end{vmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari A^{-1} matritsani ko`rsating.

№6

1. Vektor fazolarni chiziqli akslantirish nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. Vektor fazolar yig'indisi va to`g'ri yig'indisini tushuntiring, misollar keltiring.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№7

1. CHiziqli akslantirishlar va matritsalar orasida qanday bog'lanish bor? Misollar keltiring.

2. Vektor fazo bazisi va o`lchami ta`riflarini keltiring. Qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№8

1. CHiziqli akslantirishlar kompozitsiyasini va uning matritsasini quring. Misollar keltiring.

2. CHiziqli erkli vektorlar sistemasi nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Ushbu matritsaning rangi nechaga teng?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№9

1. Vektor fazolar izomorfizmi nima, uning matritsasi qanday bo`ladi, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. Vektor fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Ushbu determinantning qiymati nechaga teng?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \\ 5 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari A^{-1} matritsani ko`rsating.

№10

1. Vektor fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. CHiziqli erkli vektorlar sistemasi nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. Ushbu matritsaning rangi nechaga teng?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№11

1. Vektor fazo bazisi va o`lchami ta`riflarini keltiring. Qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. Vektor qism fazo nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. quyidagi A=(1 0 5) va B=$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ matritsalar uchun AB va BA ni toping.

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№12

1. Vektor fazolar yig’indisi va to`g’ri yig’indisini tushuntiring, misollar keltiring.

2. Vektor fazolarni chiziqli akslantirish nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

№13

1. CHiziqli akslantirishlar va matritsalar orasida qanday bog’lanish bor? Misollar keltiring.

2. CHiziqli akslantirishlar kompozitsiyasini va uning matritsasini quring. Misollar keltiring.

3. $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n$ ni xisoblang.

4. Agar $abcd\neq 0$ bo`lsa $A=\begin{pmatrix}a&o&o&o\\o&b&o&o\\o&o&c&o\\o&o&o&d\end{pmatrix}$ matritsaning rangi nechaga teng?

№14

1. Vektor fazolar izomorfizmi nima, uning matritsasi qanday bo`ladi, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

2. CHiziqli erkli vektorlar sistemasi nima, qanday xossalari bor? Misollar keltiring.

3. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&3&-5\\4&-2&1\end{pmatrix}$ bo`lsa, $(AB)^{-1}$ topilsin.

4. Ikkita 4×4 o`lchovli matritsalarni ko`paytirishga va qo`shishga misollar keltiring. (boshqalarniki bilan bir hil bo`lmasin!!!)

TESTLAR.

№1

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;

Qiyinlik darajasi-1;

$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlar uchun $Q(P(x))$ ni hisoblang.
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

№2
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlikdarajasi-1;

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlar uchun $(P(Q(x))$ ni hisoblang.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

№3
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1;

$(1,3,5,7,9,2,4,6,8,10)$ inversiyalar sonini hisoblang
10
13
14
15

№4
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1;

$(2,4,6,8,10,1,3,5,7,9)$ o‘rinlashtirishning juft- toqligini aniqlang.
Toq
Juft
Toq va juft

Juft ham toq ham emas

№5

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ko‘paytma 4-tartibli determinant yoyilmasida qanday ishora bilan qatnashadi?
Musbat
Manfiy
Qatnashmaydi
Aniqlab bo’lmaydi

№6

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Determinantni hisoblang $\begin{vmatrix} a-b & -a^2 \\ -1 & a+b \end{vmatrix}$.
$-b^2$
b^2
a^2
A

№7

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Matritsaning determinantini hisoblang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
-4
2
2
-2

№8

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;

Qiyinlik darajasi-2

$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+...+a_{in}A_{kn}=0(i\neq k)$ formuladeterminantning qanday xossasi deyiladi
Ortogonallik
Proporsionallik
Additivlik
Birjinslilik

№9
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Determinantni hisoblang $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
1
-1
2
-2

№10

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;

Qiyinlik darajasi-2

Qaysi shart bajarilganda Kramer formulalari o‘rinli bo‘ladi?
$\det A\neq 0$
$\det A=0$
Ixtiyoriy sistemalar uchun o‘rinli
Bunday shart yo‘q

№11
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

k va i larning qanday qiymatlarida 1,k,4,3,i,6 o‘rinlashtirish juft bo‘ladi?
k=5,i=2
k=2,i=5

Bunday qiymatlar yo‘q
k va i larning barcha qiymatlarida

№12

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$(n, n-1, ..., 2, 1)$ o‘rinlashtirish inversiyalari sonini toping
$\frac{n(n-1)}{2}$
$\frac{n(n+1)}{2}$
$\frac{n(n-1)}{4}$
$\frac{n(n+1)}{4}$

№13

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar uchun AB ko‘paytma topilsin
$AB=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

№14

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matritsalar uchun BA ko‘paytma topilsin
$\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

№15
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ matritsa uchun A^2 matritsa topilsin
$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^2=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^2=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

№16
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

Quyidagi matritsa uchunteskari matritsa topilsin $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

№17

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa topilsin
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
Mavjud emas

№18

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-1

Quyidagi shartlardan qaysinisi bajarilganda A kvadrat matritsa uchun teskari matritsa mavjud bo‘ladi?
$\det A \neq 0$

$\det A = 0$
Ixtiyoriy matritsa uchun mavjud
Bunday shart yo‘q

№19

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

-1 kompleks sonini trigonometrik shaklda yozing
$\cos\pi + i\sin\pi$
$\cos\pi + i\sin 0$
$-\cos 0 + i\sin 0$
$-\cos 0 + i\sin 0$

№20

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\mathrm{Re}\,\alpha = -3, \mathrm{Im}\,\alpha = 1$ bo’ladigan α kompleks sonini yozing
$\alpha = -3 + i$
$\alpha = 1 - 3i$
$\alpha = 3 + i$
$\alpha = -1 - 3i$

№21

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ifoda qaysi kompleks sonining trigonometrik shaklini ifodalaydi?
i
$i - 1$
$i + 1$
$1 - i$

№22

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3

$\alpha = 3 - 2i$ kompleks soni uchun $\alpha + \bar{\alpha}$ ni hisoblang
6
$4i$
$6 + 4i$
$6 - 4i$

№23

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\alpha = 3 + 4i$ kompleks sonining moduli hisoblansin
$\lvert\alpha\rvert = 5$
$\lvert\alpha\rvert = 3$
$\lvert\alpha\rvert = 4$
$\lvert\alpha\rvert = 2$

№24

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;

Qiyinlik darajasi-1

Muavr formulasiga ko'ra $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$ nimaga teng?
$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
$r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$

№25

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Qaysi shart bajarilganda $\alpha = (x + iy)^2$ - "toza"kompleks son bo'ladi(yani $\alpha = id, d \in R$)

$x = \pm y$
$x \neq \pm y$
$\frac{x}{y} = 2$
$\frac{y}{x} = 2$

№26
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

Agar birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasida 5 ta noma’lum qatnashib uning rangi 3 ga teng bo‘lsa u xolda asosiy o‘zgaruvchilar soni va erkino‘zgaruvchilar soni necha bo‘ladi?
3; 2
3; 6
3; 8
3; 7

№27
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Agar birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasida 4 ta noma’lum qatnashib uning rangi 2 ga teng bo‘lsa u xolda echimlarning har bir fundamental sistemasi nechta echimlardan iborat bo‘ladi?
2
4
3
1

№28

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ sistema echimlarining fundamental sistemasini ko‘rsating
$\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$
$\{(-3,1,0),(-5,0,1)\}$
$\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$

$\{(-2,1,1),(-1,0,1)\}$

№29

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;; Qiyinlik darajasi-2

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi noto‘g‘ri?
Agar chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘lsa u xolda bu sistema *yagona* echimga ega
Har bir birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega
Agar chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega bo‘lsa u xolda uning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘ladi
Agar chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘lsa u xolda bu sistema echimga ega

№30

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;

Qiyinlik darajasi-1

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi to‘g‘ri?
Ixtiyoriy birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasi echimlarining yig‘indisi shu sistemaning echimi bo‘ladi;
Chiziqli tengla malar sistemasi (umuman olganda birjinsli emas) echimlari ning yig‘indisi shu sistemaning echimi bo‘ladi;
Chiziqli tenglamalar sistemasi (umuman olganda birjinsli emas) echimlarining ayirmasi shu sistemaning echimi bo‘ladi
Chiziqli tenglamalar sistemasi(umuman olganda birjinsli emas) echimlari ning chiziqli kombinasiyasi shu sistemaning echimi bo‘ladi.

№31

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Kompleks sonlar maydonida $z=3-3i$ ning moduli va argumenti topilsin
$\lvert z\rvert=3\sqrt{2}$, $\arg z=\frac{7\pi}{4}$
$\lvert z\rvert=2,\ \arg z=\frac{\pi}{4}$

$\lvert z\rvert = 4,\ \arg z = \frac{2\pi}{3}$ -4,2
$\lvert z\rvert = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{2}$

№32

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Kompleks sonlar maydonida $\sqrt[4]{1}$ ildizning hamma qiymatlarini toping
$\{-1, 1, -i, i\}$
$\{1, -1, 2i, -2i\}$
$\{1, -1, 4i, -4i\}$
$\{2, -2, i, -i\}$

№33

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$z = 1 - i$ kompleks sonning moduli va argumenti topilsin
$\lvert z\rvert = \sqrt{2},\ \arg z = \frac{7\pi}{4}$ 0,8
$\lvert z\rvert = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{4}$ 3,5
$\lvert z\rvert = 4,\ \arg z = \frac{2\pi}{3}$ π +1
$\lvert z\rvert = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{2}$

№34

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$x = 1 + 2i, \quad y = 1 - 2i$ kompleks sonlar ko’paytmasini hisoblang
5

4
3
2

№35

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Bo‘lishnibajaring: $\frac{3-2i}{1+i}$.
$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$
$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

№36

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi noto‘g‘ri?
$\|4+12\| > \|4\| + \|12\|$
$\|2+3\| \geq \|2\| - \|3\|$
$\|7-8\| \neq \|7\| - \|8\|$
$\|3+4\| \leq \|3\| + \|4\|$

№37

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ matritsalar uchun $A-B$ matritsani toping.

$\begin{pmatrix} 0 & -2\sin x \\ 2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2\sin x \\ -2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$

№38

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlikdarajasi-2

Teskari matritsalar uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o‘rinli emas?
$(A^{-1})^{-1} = A^{-1}$
$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^{-1})^{-1} = A.$

№39
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $(AB)^{-1}$ topilsin
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

№39

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlikdarajasi-2

Quyidagi shartlardan qaysinisi bajarilganda $AB = AC$ tenglikdan $B = C$ tenglikning o'rinliligi kelib chiqadi?
$\det A \neq 0$
$\det B \neq 0$
$\det C \neq 0$
$\det B = \det C$

№40

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;; Qiyinlik darajasi-2

Matritsalarni transponirlash amali uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o'rinli emas?
$(A^T)^T = A^T$
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
$(AB)^T = B^T A^T$
$(A+B)^T == A^T + B^T$

№41

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

Teskari matritsalar uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o'rinli emas?	
$(A^{-1})^{-1} = A^{-1}$	
$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$	
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	
$(A^{-1})^{-1} = A.$	

№42

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$ matritsalar uchun $A-B$ matritsani toping.
$\begin{pmatrix}0 & -2\sin x\\ 2\sin x & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & -\sin x\\ \sin x & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & 2\sin x\\ -2\sin x & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0 & \sin x\\ -\sin x & 0\end{pmatrix}$

№43
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Agar $abcd \neq 0$ bo‘lsa $A=\begin{pmatrix}a & o & o & o\\ o & b & o & o\\ o & o & c & o\\ o & o & o & d\end{pmatrix}$ matritsaning rangi nechaga teng?
4
2
3
1

№44

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Hisoblang $(1+i)^{16}$
2^8
-2^8
$2^7(1-i)$
$2^9(1+i)$

№45

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Yig‘indini hisoblang: $\mathrm{Re}(1+2i)+15i+4-\mathrm{Im}(1+2i)$ (bunda $\mathrm{Re}(a+ib)=a, \mathrm{Im}(a+ib)=b$).
$3+15i$
$3-15i$
$8+15i$
$6+15i$

№46

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

720 soni butun bo’luvchilarining soninii toping
60
25
35
31

№47

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1;

$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlar uchun $Q(P(x))$ ni hisoblang.
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

№48

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1;

$P=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ o‘rin almashtirishlar uchun $(P(Q(x))$ ni hisoblang.
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$

№49
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1;

$(1,3,5,7,9,2,4,6,8,10)$ inversiyalar sonini hisoblang
10
13
14
15

№50
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1;

$(2,4,6,8,10,1,3,5,7,9)$ o‘rinlashtirishning juft- toqligini aniqlang.
Toq
Juft
Toq va juft
Juft ham toq ham emas

№51
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ko‘paytma 4-tartibli determinant yoyilmasida qanday ishora bilan qatnashadi?

Musbat
Manfiy
Qatnashmaydi
Aniqlab bo’lmaydi

№52
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Determinantni hisoblang $\begin{vmatrix} a-b & -a^2 \\ -1 & a+b \end{vmatrix}$.
$-b^2$
b^2
a^2
A

№53
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Matritsaning determinantini hisoblang $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
-4
2
2
-2

№54

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + ... + a_{in}A_{kn} = 0(i \neq k)$ formuladeterminantning qanday xossasi deyiladi
ortogonallik
proporsionallik
additivlik
birjinslilik

№55

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Determinantni hisoblang $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
1
-1
2
-2

№56

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

Qaysi shart bajarilganda Kramer formulalari o‘rinli bo‘ladi?
$\det A \neq 0$
$\det A = 0$
Ixtiyoriy sistemalar uchun o‘rinli
Bunday shart yo‘q

№57

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

k va i larning qanday qiymatlarida 1,k,4,3,i,6 o‘rinlashtirish juft bo‘ladi?
k=5,i=2
k=2,i=5
Bunday qiymatlar yo‘q
k va i larning barcha qiymatlarida

№58

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-1

$(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ o‘rinlashtirish inversiyalari sonini toping
$\frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2}$
$\frac{n(n-1)}{4}$
$\frac{n(n+1)}{4}$

№59
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matritsalar uchun AB ko‘paytma topilsin
$AB=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

№60
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matritsalar uchun BA ko‘paytma topilsin
$\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№61
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa uchun A^2 matritsa topilsin
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

№62
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

Quyidagi matritsa uchunteskari matritsa topilsin $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

№63
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa topilsin
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
Mavjud emas

№64

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-1

Quyidagi shartlardan qaysinisi bajarilganda A kvadrat matritsa uchun teskari matritsa mavjud bo‘ladi?
$\det A \neq 0$
$\det A = 0$
Ixtiyoriy matritsa uchun mavjud
Bunday shart yo‘q

№65

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

-1 kompleks sonini trigonometrik shaklda yozing

$\cos\pi + i\sin\pi$
$\cos\pi + i\sin 0$
$-\cos 0 + i\sin 0$
$-\cos 0 + i\sin 0$

№66

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\operatorname{Re}\alpha = -3, \operatorname{Im}\alpha = 1$ bo'ladigan α kompleks sonini yozing
$\alpha = -3 + i$
$\alpha = 1 - 3i$
$\alpha = 3 + i$
$\alpha = -1 - 3i$

№67

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ifoda qaysi kompleks sonining trigonometrik shaklini ifodalaydi?
i
$i - 1$
$i + 1$
$1 - i$

№68

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3

$\alpha = 3 - 2i$ kompleks soni uchun $\alpha + \bar{\alpha}$ ni hisoblang
6
$4i$
$6 + 4i$
$6 - 4i$

№69

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\alpha = 3 + 4i$ kompleks sonining moduli hisoblansin
$\lvert\alpha\rvert = 5$
$\lvert\alpha\rvert = 3$
$\lvert\alpha\rvert = 4$
$\lvert\alpha\rvert = 2$

№70

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Muavr formulasiga ko'ra $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$ nimaga teng?
$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
$r(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$

№71

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Qaysi shart bajarilganda $\alpha = (x+iy)^2$ - "toza"kompleks son bo'ladi(yani $\alpha = id, d \in R$)
$x = \pm y$
$x \neq \pm y$
$\frac{x}{y} = 2$
$\frac{y}{x} = 2$

№72

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3

Agar birgalikda bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasida 5 ta noma’lum qatnashib uning rangi 3 ga teng bo‘lsa u xolda asosiy o‘zgaruvchilar soni va erkino‘zgaruvchilar soni necha bo‘ladi?
3; 2
3; 6
3; 8
3; 7

№73
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Agar birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasida 4 ta noma’lum qatnashib uning rangi 2 ga teng bo‘lsa u xolda echimlarning har bir fundamental sistemasi nechta echimlardan iborat bo‘ladi?
2
4
3
1

№74
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ sistema echimlarining fundamental sistemasini ko‘rsating
$*\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$
$\{(-3,1,0),(-5,0,1)\}$
$\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$
$\{(-2,1,1),(-1,0,1)\}$

№75

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi noto‘g‘ri?
Agar chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘lsa u xolda bu sistema *yagona* echimga ega
Har bir birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega
Agar chiziqli tenglamalar sistemasi echimga ega bo‘lsa u xolda uning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘ladi
Agar chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo‘lsa u

xolda bu sistema echimga ega

№76

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-1

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi to‘g‘ri?
Ixtiyoriy birjinsli chiziqli tenglamalar sistemasi echimlarining yig‘indisi shu sistemaning echimi bo‘ladi;
Chiziqli tengla malar sistemasi (umuman olganda birjinsli emas) echimlari ning yig‘indisi shu sistemaning echimi bo‘ladi;
Chiziqli tenglamalar sistemasi (umuman olganda birjinsli emas) echimlarining ayirmasi shu sistemaning echimi bo‘ladi
Chiziqli tenglamalar sistemasi(umuman olganda birjinsli emas) echimlari ning chiziqli kombinasiyasi shu sistemaning echimi bo‘ladi.

№77

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Kompleks sonlar maydonida $z = 3 - 3i$ ning moduli va argumenti topilsin
$\|z\| = 3\sqrt{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$
$\|z\| = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{4}$
$\|z\| = 4,\ \arg z = \frac{2\pi}{3}$ -4,2
$\|z\| = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{2}$

№78

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

Kompleks sonlar maydonida $\sqrt[4]{1}$ ildizning hamma qiymatlarini toping
$\{-1, 1, -i, i\}$
$\{1, -1, 2i, -2i\}$
$\{1, -1, 4i, -4i\}$

$\{2,-2,\ \mathrm{i},-\mathrm{i}\}$

№79

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$\mathrm{z}=1-\mathrm{i}$ kompleks sonning moduli va argumenti topilsin
$\|z\|=\sqrt{2},\ \ \arg z=\frac{7\pi}{4}$ 0,8
$\|z\|=2,\ \arg z=\frac{\pi}{4}$ 3,5
$\|z\|=4,\ \arg z=\frac{2\pi}{3}$ π +1
$\|z\|=2,\ \arg z=\frac{\pi}{2}$

№80

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1

$x=1+2i,\quad y=1-2i$ kompleks sonlar ko'paytmasini hisoblang
5
4
3
2

№81

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Bo'lishnibajaring: $\frac{3-2i}{1+i}$.
$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

$\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$
$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

№83

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Quyidagi tasdiqlardan qaysinisi noto‘g‘ri?
$\|4+12\| > \|4\| + \|12\|$
$\|2+3\| \geq \|2\| - \|3\|$
$\|7-8\| \neq \|7\| - \|8\|$
$\|3+4\| \leq \|3\| + \|4\|$

№84

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ matritsalar uchun $A-B$ matritsani toping.
$\begin{pmatrix} 0 & -2\sin x \\ 2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2\sin x \\ -2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$

№85

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlikdarajasi-2

Teskari matritsalar uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o‘rinli emas?
$(A^{-1})^{-1} = A^{-1}$

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^{-1})^{-1} = A.$

№39
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $(AB)^{-1}$ topilsin
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

№86

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlikdarajasi-2

Quyidagi shartlardan qaysinisi bajarilganda $AB = AC$ tenglikdan $B = C$ tenglikning o‘rinliligi kelib chiqadi?
$\det A \neq 0$
$\det B \neq 0$
$\det C \neq 0$
$\det B = \det C$

№87

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

Matritsalarni transponirlash amali uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o‘rinli emas?
$(A^T)^T == A^T$
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
$(AB)^T = B^T A^T$
$(A+B)^T =$ $= A^T + B^T$

№88

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2

Teskari matritsalar uchun qaysi javobda keltirilgan hossa o‘rinli emas?	
$(A^{-1})^{-1} = A^{-1}$	
$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$	
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	
$(A^{-1})^{-1} = A.$	

№89
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ matritsalar uchun $A - B$ matritsani toping.
$\begin{pmatrix} 0 & -2\sin x \\ 2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin x \\ \sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2\sin x \\ -2\sin x & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$

№90

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2

Agar $abcd \neq 0$ bo‘lsa $A = \begin{pmatrix} a & o & o & o \\ o & b & o & o \\ o & o & c & o \\ o & o & o & d \end{pmatrix}$ matritsaning rangi nechaga teng?
4
2
3
1

№91

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Hisoblang $(1+i)^{16}$
2^8
-2^8
$2^7(1-i)$
$2^9(1+i)$

№92

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2

Yig‘indini hisoblang: $\mathrm{Re}(1+2i)+15i+4-\mathrm{Im}(1+2i)$ (bunda $\mathrm{Re}(a+ib)=a, \mathrm{Im}(a+ib)=b$).
$3+15i$
$3-15i$
$8+15i$
$6+15i$

№93

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

a_1=(1,2,5), a_2=(5,3,1), a_3=(-15,-2,21), vektorlarchiziqli bo’g’liq, chunki…

* $5a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$
$5a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$
$5a_1 - 4a_2 + 3a_3 = 0$
$5a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

№94
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

e_1=(1,-1), e_2=(1,1,1,0) bazisdan f_1=(5,-2), f_2=(-5,-4) bazisga o’tish matrisasini toping
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

№95
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

a_1=(1,2,1,2), a_2=(1,1,1,1), a_3=(0,3,0,3), a_4=(2,1,2,1) vektorlarga tortilgan qism fazoning o‘lchami topilsin.
2
1
3
4

№96
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

a_1=(1,2,1), a_2=(2,4,3) vektorlar sistemasini fazoning bazisigacha to’ldiring
Masalan, $a_1, a_2, a_3 = (1,0,0)$
4
5

№100

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

$M_n(R)$ - barcha kvadrat matrisalar fazosinig L_1 - barcha simmetrik kvadrat matrisalar, va L_2 - barcha kososimmetrik kvadrat matrisalar qism fazolarining kesishmasini toping
$L_1 \cap L_2 = \{0\}$
$L_1 \cap L_2 = M_n(R)$ 27
$L_1 \cap L_2 = L_1$ 25
$L_1 \cap L_2 = L_2$

№101
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

a_1=(1,2, 0,1), a_2=(1,1,1,0) va b_1=(1,0,1,0), b_2=(1,3,0,1) vektorlarga tortilgan qism fazolar yig‘indisining o‘lchamini toping.
3
4
2
1

№ 102
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

R^2 da $(a,b)=a_1b_1-a_2b_2$ (bunda $a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2)$) formula bilan skalyar ko‘paytma aniqlab bo‘lmaydi. Bunda skalyar ko‘paytmaning qaysi sharti ayrim vektorlar uchun o‘rinli bo‘lmaydi?
$(a,a)\geq 0$
$(a,b)=(b,a)$
$(a+b,c)=$ $(a,c)+(b,c)$
$(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$

№103
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$x=(6,9,14)$ vektorning $e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,1,2)$, $e_3=(1,2,3)$ bazisdagi koordinatalarini toping.
$x=(1,2,3)$
$x=(1,0,5)$
$x=(1,2,0)$
$x=(0,0,1)$

№ 104

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Quyidagi jumlalardan qaysi biri to‘g‘ri?
n noma’lumli bir jinsli tenglamalar sistemasining echimlari to‘plami R^n da qism fazo tashkil qiladi
Ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari to‘plami qism fazo tashkil qiladi
L chiziqli fazoning ixtiyoriy L_1 va L_2 qism fazolari uchun ularning birlashmasi qism fazo bo‘ladi
L chiziqli fazoning ixtiyoriy L_1 va L_2 qism fazolari uchun quyidagi formula o‘rinli: $\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2$

№ 105

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Quyidagi to‘plamlardan qaysilari R^n da qism fazo bo‘ladi?
R^n ning komponentalari $x_1+x_2+....+x_n==0$ shartni qanoatlantiruvchi elementlari to‘plami
R^n ning barcha butun komponentali elementlari to‘plami
R^n ning komponentalari $x_1+x_2+....+x_n==1$ shartni qanoatlantiruvchi elementlari to‘plami
R^n ning komponentalari natural son bo‘lgan barcha elementlari to‘plami

№ 106

Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Agar L chiziqli fazoning L_1 va L_2 qism fazolari uchun $\dim \mathrm{L}_1\cap\mathrm{L}_2=0$ bo‘lib $\dim L_1=3$ va $\dim \mathrm{L}_2=2$ bo‘lsa $\dim(L_1+L_2)$ topilsin.

5
4
3
2

№107
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Agar L chiziqli fazoning L_1 va L_2 qism fazolari uchun $\dim\left(L_1+L_2\right)=5$ bo‘lib $\dim L_1=3$ va $\dim \mathrm{L}_2=2$ bo‘lsa $\dim L_1 \cap L_2$ topilsin.
0
1
2
3

№ 108

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Evklidfazosidanolinganixtiyoriy $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ o‘zaroortogonalvektorlaruchunquyidagimunosabatlardanqaysinisio‘rinli?
$\left\|x_1+x_2+\ldots+x_n\right\|^2=\left\|x_1\right\|^2+\left\|x_2\right\|^2+\ldots+\left\|x_n\right\|^2$
$\left\|x_1+x_2+\ldots+x_n\right\|^2<\left\|x_1\right\|^2+\left\|x_2\right\|^2+\ldots+\left\|x_n\right\|^2$
$\left\|x_1+x_2+\ldots+x_n\right\|^2>\left\|x_1\right\|^2+\left\|x_2\right\|^2+\ldots+\left\|x_n\right\|^2$
$\left\|x_1+x_2+\ldots+x_n\right\|^2=\left\|x_1\right\|+\left\|x_2\right\|+\ldots+\left\|x_n\right\|$

№109
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Ortogonal bazisda $e_1=(1,2,1,2)$, $e_2=(3,1,-1,2)$ vektorlaring skalyar ko‘paytmasini toping.
8
10
6
0

№ 110

Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$e_2 = (3,1,-2,2)$ vektor uzunligini toping.
$3\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$
$6\sqrt{2}$
3

№111

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

L chizikli fazoning L_1 va L_2 qism fazolari ortogonal to'ldiruvchilari uchun quyidagi munosabatlardan qaysinisi o'rinli emas?
$((\mathrm{L}_1)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{L}_1^{\perp}$
$(L_1 + L_2)^{\perp} =$ $L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$
$(L_1 \cap L_2)^{\perp} =$ $L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$
$\mathrm{L}^{\perp} = \{0\}$

№ 112

Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (1,1,1,0)$ va $b_1 = (1,0,1,0)$, $b_2 = (1,3,0,1)$ bo'lsa, u xolda $L_1 = L(a_1, a_2)$ va $L_2 = L(b_1, b_2)$ qism fazolar ning yig'indisi va kesishmasining o'lchovlari topilsin.
$\dim(L_1 + L_2) = 3$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$
$\dim(L_1 + L_2) = 4$ $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$
$\dim(L_1 + L_2) = 1$ $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$
$\dim(L_1 + L_2) = 1$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$

№113

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$(1+3i)(2+i)+(-2+i)(3-i)$ ifodaning qiymati nechaga teng ?
$-6+12i$
$5-11i$
$6-12i$
$8-4i$

№114

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$\left(-1/2+i\sqrt{3}/2\right)^2$ ifodaning qiymati nimaga teng?
$-1/2-i\sqrt{3}/2$
$-1/2+i\sqrt{3}/2$
-1
1

№ 115

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-1;

Ildizning qiymatlaridan birini aniqlang: $\sqrt{6+8i}$
$-2/\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
$-2/\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ 1
$1+i$
i

№ 116

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

$x^2-(1-3i)x+(16-15i)=0$ tenglamaning ildizlaridan birini ko‘rsating

$2+3i$
$2-3i$
$4+3i$
$-4+i$

№ 117

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

$\left\|2+\sqrt{3}-i\right\|$ kompleks sonning moduli nimaga teng?
$2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$4\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

№ 117

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Kompleks sonning argumenti $\arg((1+i)(-2+2i))$ nimaga teng?
π
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$

№ 118

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Kompleks sonning argumenti $\arg\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ nimaga teng?
$\frac{\pi}{8}$

π
$\frac{\pi}{5}$
$\frac{\pi}{7}$

№119

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Kompleks sonning trigonometrik shaklini aniqlang: $\sqrt{3}-i$;
$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
$4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
$3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
$3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

№120

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Hamma ildizlarning yig‘indisi nechaga teng: $\sqrt[3]{2}$
0
1
2
3

№ 121

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Boshlang‘ich ildizlar soni nechaga teng: $\sqrt[6]{1}$
2
3

4
5

№ 122

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^3+1 va x^2-x+1 ko‘phadlarning yig‘indisini toping
x^3+x^2-x+2
x^3+2x^2+1
x^3+3x+2
$2x^3+x+2$

№123

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$2x^3-x^2-1$ va x^2+2x+1 ko‘phadlarning ko‘paytmasini toping
$2x^4+3x^4-3x^2-2x-1$
$2x^5-3x^4+x^2-1$
x^3+3x+2
$2x^5-3x^4+x^2+1$

№ 124

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^3+3x^2-x+1 ni x^2+x-1 ga bo‘lishdan chiqqan qoldiq nimaga teng?
$3-2x$
1
0
1+x

№125

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$x^4-7x^3+4x^2+x+22$ ni $x-2$ ga bo‘lishdan chiqqan qoldiq nimaga teng
0
1
2
3

№126

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$x^8-4x^5+4x^3-1$ ko‘phadning ildizi bo‘lgan 1 ning karraligini aniqlang
3
4
5
6

№127

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$x^2+x+1=0$ tenglama ildizlari kvadratlarining yig‘indisini toping
3
4
5
7

№ 128

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$x^4-2x^3-8x^2+13x-24$ ko‘phadning ildizini ko‘rsating
3
2
0

5

№129

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^2-x+1 ni $x-1$ ning darajalari bo‘yicha yoyilmasini toping
$1+(x-1)+(x-1)^2$
$1+(x-1)-2(x-1)^2$
$1+(x-1)+(x-1)^2$
$1-2(x-1)+(x-1)^2$

№130

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ko‘phadlarning EKUB ini toping: $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ va x^3+x^2-x-1.
$x+1$
$x-2$
$x+3$
$x-3$

№ 131

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$ ko‘phadning keltirilmas ko‘paytuvchisini aniqlang
$x-2$
x+5
x+5
x+2

№ 132

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Haqiqiy sonlar to‘plami ustida keltirilmas ko‘phadni ko‘rsating
x^2+1
x^2-1
x^3+8
x^3-8

№133

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ratsional sonlar to‘plami ustida keltirilmas ko‘phadni ko‘rsating
x^2-2
x^2-1
x^3+8
x^3-8

№134

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Quyidagi ildizlarga ega bo‘lgan haqiqiy koeffitsientli ko‘phadning eng kichik daraja ko‘rsatkichini toping: $1;\ 1;\ 1+i$.
4
5
6
7

№135

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^3-1 ko‘phadning hamma ildizlarining yig‘indisini toping
0
1
2

3

№136

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ko‘phadning hamma ildizlarining yig‘indisini toping: x^3+1
0
4
1
5

№ 137

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Kompleks sonning trigonometrik shaklini toping: $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$
$\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$
$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$
$\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$

№138

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^3-3x^2+4 ko‘phad uchun 2 ildizning karrasi topilsin
2
3
4
5

№ 139

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

x^3-2x^2-3x+9 ni $x+2$ ga bo‘lgandan chiqqan qoldiqni toping
-1
0
2
1

№ 140

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ko‘phadlarning EKUK (eng kichik umumiy karralisi) ni toping: x^3-1 va x^2-2x+1
$(x^2+x+1)(x-1)^2$
$(x^2-x+1)(x+1)$
$(x^2+x-1)(x+1)$
$(x^3-1)(x-1)^2$

№ 141

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ko‘phadlarning EKUB (eng katta umumiy bo‘luvchisi) ini toping: x^3-1 va x^2-2x+1
$x-1$
$(x-1)^2$
x^2-1
x^3-1

№ 141

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Ratsional sonlar maydoni Q da quyidagi ko‘phadlardan qaysinisi keltirilmas ekanligini aniqlang

x^2-5x-3
x^2-5x+6
$6x^2+5x+1$
$3x^2+7x+2$

№ 143

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Berilgan ko‘phad ildizlari kvadratlarining yig‘indisini toping: $f(x)=2x^2-x-3$.
0
21
15
17

№144
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Evklid fazosining x va y vektorlari ortogonal deyiladi, agar..
$(x,y)=0$ bo‘lsa
$(x,y)>0$ bo‘lsa ular orasidagi burchak 180^0 bo‘lsa
$(x,x)=0$ bo‘lsa

№145
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

L chiziqli fazoning L_1 va L_2 qism fazolari o‘lchovlari uchun to‘g‘ri tenglikni ko‘rsating
$\dim(L_1+L_2)++\dim(L_1\cap L_2)==\dim L_1+\dim L_2$
$\dim(L_1)+\dim(L_2)==\dim L$
$\dim(L_1)+\dim(L_2)==\dim(L_1+L_2)$

$\dim(L_1)+\dim(L_2)=\dim(L_1\cap L_2)$

№146

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

O‘xshash matritsalar quyidagi xossalardan qaysi biriga ega?
bir xil xarakteristik ildizlarga
har xil xarakteristik ildizlarga
har xil xarakteristik ildizlarga
bosh diagonallarida bir xil elementlarga

№ 147

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

A almashtirish chiziqli almashtirish deyiladi, agar...
$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$ va $A(cx)=cAx$ bo‘lsa
$A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$ bo‘lsa
$A(x_1+x_2)=A(x_1)-A(x_2)$ bo‘lsa
$A(cx)=cAx$ bo‘lsa

№148

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Evklid fazosida vektorning uzunligi qaysi tenglik bilan aniqlanishini toping
$\lvert x\rvert=\sqrt{(x,x)}$
$\lvert x\rvert=2(x,x)$
$\lvert x\rvert=x\sqrt{x}$
$\lvert x\rvert=(x,x)$

№ 149

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Agar vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘lsa, u holda uning ixtiyoriy qism sistemasi ...
chiziqli erkli bo‘ladi
ortonormal bo‘ladi
ortogonal bo‘ladi
chiziqli bogliq bo‘ladi

№ 150

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Har qanday chiziqli operator chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasini ...
yana chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasiga o‘tkazadi
chiziqli erkli vektorlar sistemasiga o‘tkazadi
ortogonal vektorlar sistemasiga o‘tkazadi
ortonormal vektorlar sistemasiga o‘tkazadi

№ 151

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Haqiqiy kvadratik formaning normal shakli deb, koeffitsientlari quyidagicha bo‘lgan o‘zgaruvchilar kvadratlarining yig‘indisiga aytiladi...
+1 va -1
1
Toq sonlar
-1

№ 152

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

L chiziqli fazoning har qanday R qism fazosi uchun to‘g‘ri munosabatni ko‘rsating
$\dim P < \dim L$
$\dim P^2 \le \dim L$
$\dim P > \dim L$
$\dim L = \dim P$

№ 153

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Agar kvadratik forma kanonik shaklga ega bo‘lsa, u holda uning matritsasi...
diagonal shaklda bo‘ladi
uchburchak shaklda bo‘ladi
birlik matritsa bo‘ladi
nol matritsa bo‘ladi

№ 154

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Haqiqiy kvadratik forma inersiyasining musbat indeksi deb...
uning normal shaklidagi musbat kvadratlar soniga aytiladi
uning musbat koeffitsientlariga aytiladi
uning normal shaklidagi manfiy kvadratlar soniga aytiladi
uning o‘zaro tub koeffitsientlari soniga aytiladi

№ 155

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

p o‘zgaruvchili kvadratik forma musbat aniqlangan bo‘ladi, agar ...
*u p ta musbat kvadratlarning yig‘indisidan iborat normal shaklga ega bo‘lsa
uning barcha koeffitsientlari musbat bo‘lsa
uning matritsasining determinanti musbat bo‘lsa
uning barcha koeffitsientlari manfiy bo‘lsa

№ 156

Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Kompleks sonlar maydoni ustida quyidagi kvadratik formalaridan qaysilari ekvivalent bo‘ladi? $f_1 = x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_1x_2$; $f_2 = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 4{,}5x_2^2$; $f_3 = x_1^2 - 11x_2^2 + 5x_1x_2$
f_1 *ва* f_3

f_1, f_2 *ва* f_3
f_1 *ва* f_2
f_2 *ва* f_3

№157
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 x_2$ kvadratik formaning signaturasini toping
0
1
2
3

№158

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Agar kvadratik formaga xosmas chiziqli almashtirishni qo‘llansa, u holda uning rangi ...
o‘zgarmaydi
kamaymaydi
kamayadi
oshmaydi

№158

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;   Qiyinlik darajasi-3;

Juft-jufti bilan ortogonal bo‘lgan nolmas vektorlar...
chiziqli erkli bo‘ladi
proporsional bo‘ladi
chiziqli bog‘liq bo‘ladi
Ortonormal boladi

№159

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Agar *A* - kvadratik formaning matritsasi,X – o‘zgaruvchilar ustunidan iborat bo‘lsa, u xolda kvadratik formaning matritsaviy shakli ko‘rsatilsin
$f = X^T AX$
$f = X^{-1} AX$
$f = X^T AX^T$
$f = XAX^{-1}$

№ 160

Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Agar rangi *r*ga teng bo‘lgan *p* o‘zgaruvchili kvadratik formaning normal shakli $f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots.. - z^2{}_t$ bo‘lsa, u holda...
$0 \le k \le r,\ t = r$
$0 \le k \le n,\ t = n - r$
$0 \le k \le n,\ t = n$
$0 \le k \le r,\ t < r$

№161

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Haqiqiy kvadratik formaning signaturasi deb...
uning inersiyasining musbat indekslari soni bilan va manfiy indekslari sonining ayirmasiga aytiladi
har xil o‘zgaruvchilari ko‘paytmalarining soniga aytiladi
musbat va manfiy koeffitsientlarining ayirmasiga aytiladi
tub koeffitsientlari soniga aytiladi

№ 162

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Agar rangi *r* ga teng bo‘lgan *p* o‘zgaruvchili kvadratik formaning normal shakli $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_r^2$ - bo‘lsa, uning manfiy indeksini aniqlang

$r-k$
$k+r$
k
$n-k$

№ 163
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Agar rangi r ga teng bo‘lgan p o‘zgaruvchili kvadratik formaning normal shakli $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_r^2$ - bo‘lsa, uning musbat indeksini aniqlang
k
$r-k$
$k+r$
$n-k$

№164
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$\left(-5,\ \sqrt{2},\ 3\right)$ vektorning uzunligini toping
6
7
8
36

№ 165
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Quyidagi vektorlardan qaysilari o‘zaro ortogonal? $a_1 = (1, 1, 1, -2);\quad a_2 = (1, 2, 3, 3),\quad a_3 = (1, -2, 2, -3)$
a_1 *ва* a_2
a_2 *ва* a_3
ortogonallari yo‘q

hammasi juft-jufti bilan ortogonal

№ 166
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$f = x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_1x_2$ kvadratik formaning manfiy indeksini toping
1
2
3
4

№ 166
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Mos ravishda $a_1 = (1, 2, 0, 1),\ a_2 = (1, 1, 0, 0)$ va $b_1 = (1, 0, 1, 0),\ b_2 = (1, 3, 0, 1)$ vektrlarga tortilgan L_1 *ва* L_2 qism fazolar kesishmasi $L_1 \cap L_2$ ning o‘lchovini toping
2
3
4
5

№ 167

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.;   Qiyinlik darajasi-3;

Agar R – ortogonal matritsa bo‘lsa, $PP^T = E$ shart quyidagilardan qaysiga teng kuchli
$P^T = P^{-1}$
$P = P^T$
R – ning satrlari o‘zaro ortogonal
R – ning satrlari musbat

№168

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Har qanday haqiqiy kvadratik formani quyidagi almashtirishlarning qaysi biri bilan kanonik shaklga

keltirish mumkin?
ortogonal
xos
simmetrik
skalyar

№169

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Qism fazolarning $P+Q$ yig‘indisi to‘g‘ri yig‘indi bo‘lishi uchun qaysi shartning bajarilishi zarur va etarlidir
$P\cap Q=\{0\}$
$P+Q=P$
$P\wedge Q=Q$
$P+Q=Q$

№170

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Matritsaning izi deb nimaga aytiladi?
Bosh diagonal elementlarining yig‘indisiga
YOrdamchi diagonal elementlarining yig‘indisiga
Barcha elementlarining yig‘indisiga
Musbat elementlarining yig‘indisiga

№ 171

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2;

Matritsaning ikkita haqiqiy satrlari ortogonal deyiladi, agar...
mos komponentalar ko‘paytmalarining yig‘inidisi nolga teng bo‘lsa
mos komponentalar ko‘paytmalarining yig‘inidisi musbat bo‘lsa
mos komponentalar ko‘paytmalarining yig‘inidisi manfiy bo‘lsa
mos komponentalar ko‘paytmasining yig‘inidisi birga teng bo‘lsa

№ 172

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2;

Chiziqli fazoning bazisi deb qanday sistemaga aytiladi?
shu fazoning maksimal chiziqli erkli vektorlar sistemasiga
har qanday chiziqli erkli vektorlar sistemasiga
har qanday vektorlar sistemasiga
har qanday noldan farqli vektorlar sistemasiga

№ 173

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г. ;

Qiyinlikdarajasi-2;

$21x \equiv 35 \pmod{119}$ taqqoslama nechta echimga ega?
7
8
9
10

№ 174
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2;

Qaysi tenglik xech bir A va B matritsalar uchun bajarilmaydi?
$AB - BA = E$
$AB = BA$
$AB = BA = E$
$AB = E$

№175

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Uzluksiz kasrni oddiy kasrga aylantiring: $[2,1,1,1,2,3]$.
$71/27$
$57/17$

$31/8$
$13/3$

№176

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

$31/12$ kasrga quyidagi uzluksiz kasrlardan qaysinisi teng?
$[2,1,1,2,2]$
$[2,1,1,3,2]$
$[2,1,2,2,3]$
$[2,1,1,1,2]$

№ 177

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Taqqoslamaning ildizi nimaga teng: $10x \equiv 15(\bmod 17)$.
$x \equiv 10(\bmod 17)$
$x \equiv 12(\bmod 17)$
$x \equiv 9(\bmod 17)$
$x \equiv 1(\bmod 17)$

№178

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Yig‘indi nimaga teng ($\mu(a)$ - Myobius funksiyasi): $\mu(30)+\mu(206)$
0
1
2
3

№179

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Sonning butun qismi nechaga teng: $\left[\left(3+\sqrt[4]{256}\right)/2\right]$
3
4
5
6

№ 180

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-2;

ax≡b(mod*m*) taqqoslama qachon yagona yechimga ega bo’ladi?
(a,m)=1
(a,m)=d>0
Hech qachon
a/b shart bajarilsa

№ 181

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

(a,m)=*d*>1 bo’lsa, qaysi holda ax≡b(mod*m*) taqqoslamaning yechimlari *d* ta bo’ladi
a⁝b shart bajarilsa
Hech qachon
(a,m)=d>0
(a,m)=1

№ 182

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

123 va 321 sonlar EKUK va EKUB lari nisbatini toping
4387
4412

4178
4351

№183

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Yig‘indi nechaga teng ($\varphi(a)$ - Eyler funksiyasi): $\varphi(82)+\varphi(100)$
80
122
110
170

№184

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Tenglamaning ildizi nechaga teng: $\varphi(5^x)=20$ ($\varphi(a)$ - Eyler funksiyasi)
$x=2$
$x=5$
$x=4$
$x=3$

№ 185

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Tenglamaning ildizlaridan biri nimaga teng: $\varphi(x)=12$ ($\varphi(a)$ - Eyler funksiyasi)
$x=26$
$x=19$
$x=23$
$x=14$

№ 186

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

$\{-3,15\}$ ning kasr qismini toping:
0,85
0,8
0,95
0,9

№187

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-2;

Yig'indini toping ($[x]$- x ning butun qismi, $\{x\}$-kasr qismi): $\left[3\frac{1}{3}\right]+\left\{-3\frac{1}{3}\right\}$
$3\frac{2}{3}$
$4\frac{2}{3}$
$5\frac{2}{3}$
4

№188
Manba:Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-2;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ matritsaviy tenglamanieching
$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

№189

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Berilgan sonlardan qaysi biri tub son bo‘ladi?
191
219
222
491

№ 190

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

Berilgan sonlarning EKUBi nimaga teng: 992. 126 va 403
3
4
5
6

№191

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$\frac{1253}{406}$ kasrni uzluksiz kasrga yoyib qisqartiring
$\frac{179}{58}$
$\frac{181}{58}$
$\frac{183}{58}$
$\frac{185}{58}$

№ 192

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$71x+41y=3$ tenglamaning butun echimlarining umumiy ko‘rinishi qaysi javobda berilgan?
$x=-4+41t,$ $y=7-71t, t\in Z$
$x=4-41t,$ $y=7-71t, t\in Z$
$x=4-41t,$ $y=7+71t, t\in Z$
$x=4+41t,$ $y=-7+71t, t\in Z$

№ 193
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

Agar L chiziqli fazoning L_1 va L_2 qism fazolari uchun $\dim(L_1+L_2)=3$ bo‘lib, $\dim L_1=3$ va $\dim \mathrm{L}_2=2$ bo‘lsa $\dim L_1\cap L_2$ topilsin.
2
3
1
5

№ 194
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$e_1=(1,2,1,2)$ va $e_2=(3,1,-1,-2)$ vektorlar orasidagi burchak topilsin
90^0
45^0
60^0
0^0

№ 195
Manba:ПроскуряковИ.Л. Сборникзадачполинейнойалгебре. «Наука», 2005г.

Qiyinlik darajasi-3;

$e_1=(1,2,1,2)$ va $e_2=(3,1,-1,-2)$ vektorlar uchun no'to'g'ri tasdiqni ko'rsating
e_1, e_2 vektorlar chiziqli bo'g'liq
e_1, e_2 vektorlarchiziqli erkli
e_1, e_2 vektorlar R^4 fazo elementlari
e_1, e_2 vektorlar perpendikulyar (ortogonal)

№196

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

$e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar sistemasi ortonormal deyiladi agar … bo'lsa
$(e_i, e_k)=0 (i \neq k)$, $(e_i, e_i)=1$
$(e_i, e_k)=1 (i \neq k)$, $(e_i, e_i)=1$
$(e_i, e_k)=0 (i \neq k)$, $(e_i, e_i)=0$
$(e_i, e_k)=1 (i \neq k)$, $(e_i, e_i)=0$

№ 197

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Quyidagi formulalardan qaysinisi ikki nomalumli chizikli tenglama butun echimlarini (x_0, y_0) echim orqali to'g'ri ifodalaydi?
$x=x_0-bt$, $y=y_0+at,\ t\in Z$
$x=x_0+t$, $y=y_0+t,\ t\in Z$
$x=x_0-t$, $y=y_0-bt,\ t\in Z$

$x = x_0 + at,$ $y = y_0 - t,\ t \in Z$

№198

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlikdarajasi-3;

$16x - 34y = 7$ tenglamani butun sonlar to‘plamida eching.
yechimga ega emas
$x = 1 - 16t,$ $y = 1 - 34t,\ t \in Z$
$x = 1 + 16t,$ $y = 1 + 34t,\ t \in Z$
$x = 1 + 16t,$ $y = 1 - 34t,\ t \in Z$

№199

Manba:Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г.

Qiyinlik darajasi-3;

$x^3 + x^2 + 1 \equiv 0 (\mod 5)$ taqqoslamaning echimi qaysi javobda to‘g‘ri ko‘rsatilgan?
yechimga ega emas
$x \equiv 2 (\mod 5)$
$x \equiv 0 (\mod 5)$
$x \equiv 1 (\mod 5)$

№200

Manba:Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, «Ўзбекистон», 2001 й.; Qiyinlik darajasi-3;

Vektorlar sistemasini bazisgacha to‘ldirish mumkin agar ular...
Chiziqli erkli bo‘lsa
Nolmas vektorlar bo‘lsa
Proporsional vektorlar bo‘lsa
Ulardan xech biri nolga teng bo‘lmasa