Ҳотам Тўраев

МАТИМАТИК МАНТИҚ ВА ДИСКРЕТ МАТИМАТИКА

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ҳотам Тўраев

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА ДИСКРЕТ МАТЕМАТИКА

Ўзбекистон Республикаси Олий ва
ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртларининг
талабалари учун ўқув қўлланма сифатида
тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 2003

Китобда тўпламлар ҳақида асосий тушунчалар, муносабатлар, мулоҳазалар алгебраси, мулоҳазалар ҳисоби, предикатлар мантиқи, математик назариялар, алгоритмлар, математик мантиқнинг техникага татбиқи, математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси, графлар назариясининг элементлари, тўрлар ва тўрдаги оқимлар баён қилинади.

Мазкур ўқув қўлланмаси олий ўқув юртларининг **5460100–математика**, **5480100–амалий математика ва информатика**, **5140100–математика ва информатика**, **5521900–информатика ва информацион технологиялар** бакалаврлик йўналишлари ҳамда **5А460104**, **5А480101** ва **5А480107** магистратура мутахассисликлари бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган.

Китобдан магистрантлар, аспирантлар ҳамда радиотехника, электротехника ва амалий математика соҳаларида ишлаётган муҳандис-математиклар ва мутахассислар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Масъул муҳаррир: доцент **А.М.Мусаев**

Тақризчилар: ЎзМУ кафедраси мудири, ЎзР ФА академиги, профессор **Н.Ю.Сатимов**,
ЎзМУ профессори **А.Пўлатов**,
ЎзМУ доценти **Р.Ғуломов**,
СамДУ кафедраси мудири, профессор **А.С.Солеев**,
СамДУ доценти **Ғ.Э.Эргашев**

Т $\frac{1602020000-133}{353(04)-2003}$ Қатъий буюрт. – 2003

ISBN 5–645–04107–0

Ўзбекистон Республикаси мустақиллигининг 13 йиллигига бағишланади.

СЎЗ БОШИ

Дискрет математика – математиканинг бир қисми бўлиб, милоддан аввалги IV асрда яратила бошланган. Дискрет математика математиканинг такомиллашган сонлар назарияси, алгебра, математик мантиқ қисмларидан ташқари, XX аср ўрталаридаги фан-техника тараққиёти туфайли жадал ривожланаётган функционал системалар назарияси, граф ва тўрлар назарияси, кодлаштириш назарияси, комбинатор анализ каби бўлимларни ҳам ўз ичига олади.

Дастлаб, фақат математик мантиқ, алгебра, математик анализ, математика асослари, эҳтимоллар назарияси, геометрия, топология, сонлар назарияси, моделлар назарияси каби математик фанларда татбиқ этиб келинган дискрет математика XX асрнинг 40- йилларидан бошлаб ҳисоблаш математикаси, кибернетика, ахборот назарияси, иқтисодиёт, психология, математик лингвистика, тиббиёт фанлари ва дискрет техникада ҳам кенг қўлланилмоқда. Дискрет математика электр схемаларни лойиҳалашда ва текширишда, автоматик ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш ва программалашда, дискрет автоматларни мантиқий лойиҳалашда, ЭҲМ элементлари ва қисмларини лойиҳалашда, ҳар хил техник системалар, қурилмалар ва автоматик машиналарни анализ ва синтез қилишда кенг миқёсда татбиқ этилади. Математик мантиқ фани электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келишига ва уни мукаммаллаштиришга катта ҳисса қўшди.

Дискрет математика математик кибернетиканинг пойдевори бўлиши билан бирга, ҳозирги замон математик таълимининг муҳим бўғини ҳам ҳисобланади.

Китобнинг асоси сифатида муаллиф томонидан 1973 йилдан бери Самарқанд давлат университети амалий математика ва информатика факультети талабаларига узлуксиз ўқилаётган маърузалар олинган. Унинг структураси ва мазмунига факультет базасида «Дискрет математика ва унинг татбиқлари» мавзусида ўтказилган Халқаро илмий анжуманлар, Москва давлат университетининг «Дискрет математика» кафедраси билан ўқув-услубий соҳалардаги ҳамкорлик ҳамда факультет талабаларига дискрет математика фанининг етук олимлари А. Дородницин, Ю. Журавлёв, М. Комилов, В. Кудрявцев, А. Зиков ва В. Қобулов томонидан ўқилган маърузаларнинг ҳам ижобий таъсири бор.

Китоб дискрет математиканинг ривожланиш тарихи (кириш) ва 9 бобдан иборат.

Қўлланманинг биринчи бобида **тўпламлар назариясининг элементлари**, муносабатлар, бинар муносабати, функциялар суперпозицияси, тартиблаш муносабати ва панжара ҳақида тушунчалар берилади.

Иккинчи боб **мулоҳазалар алгебрасига** бағишланган бўлиб, унда мулоҳазалар ва улар устида мантиқий амаллар, формулалар, тенг кучли, айнан чин, айнан ёлғон ва бажарилувчи формулалар, тенг кучли формулаларга доир теоремалар, формулаларнинг нормал шакллари, мукаммал дизъюнктив ва конъюнктив нормал шакллар, мулоҳазалар алгебраси функциялари, Буль алгебраси, мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонун ва арифметик амаллар, Жегалкин кўпҳади, монотон функциялар, функционал ёпиқ синфлар ва Пост теоремаси каби масалалар кўриб чиқилади.

Китобнинг учинчи боби **мулоҳазалар ҳисобига** бағишланган бўлиб, унда мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси, исботланувчи формула таърифи, мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими), келтириб чиқариш қоидалари, келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари бўлган бир вақтда ўрнига қўйиш, мураккаб хулоса, силлогизм, контрпозиция, икки карра инкорни тушириш қоидалари, формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси, келтириб чиқарилган формула (исботлаш) тушунчаси, дедукция ва умумлашган дедукция теоремалари, айрим мантиқ (асосларни ўрин алмаштириш, асосларни қўшиш, асосларни ажратиш) қонунларининг исботи, мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби ўртасидаги муносабатлар, мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари каби масалалар кўриб чиқилади.

Тўртинчи бобда **предикатлар мантиқи** баён этилган. Бу ерда предикат тушунчаси, предикатлар устида мантиқий амаллар, умумийлик ва мавжудлик кванторлари, предикатлар мантиқининг формуласи ва унинг қиймати, предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари, предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли, бажарилувчи ва умумқийматли формулалар, ечилиш муаммоси, хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари, предикатлар мантиқининг математикага татбиқи, аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида маълумотлар келтирилади.

Китобнинг бешинчи боби **математик назарияларга** бағишланган бўлиб, аксиоматик назария тушунчаси, биринчи тартибли тил, терм ва формулалар, мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар, келтириб чиқариш қоидаси, алгебра, геометрия ва анализда мавжуд бўлган математик назариялар, назарияда исботлаш тушунчаси, тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги, дедукция теоремаси, назария тилининг интерпретацияси (талқини), берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари, назариянинг модели, интерпретациянинг изоморфизмлиги, назариянинг қатъийлиги, назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари, предикатлар ҳисобининг зидсизлиги, натурал сонлар назарияси, Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси сингари масалалар ёритилган.

Китобнинг олтинчи бобида **алгоритмлар назариясининг элементлари** атрофлича баён этилган. Бу ерда алгоритм тушунчаси ва унинг характерли хусусиятлари, ечилувчи ва саналувчи тўпламлар, Пост теоремаси, алгоритм тушунчасини аниқлаш, ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив ва умумрекурсив функциялар, А. Чёрч ва С. Клини тезислари, Тьюринг машиналари, Тьюринг машинасида алгоритмни жорий қилиш, натурал сонларни қўшиш алгоритми, Евклид алгоритми, алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси, Марковнинг нормал алгоритмлари, Марков бўйича қисман ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив (умумрекурсив) функция билан Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи (ҳисобланувчи) функция ўртасидаги муносабат, нормаллаштириш принципи, алгоритмик ечилмовчи муаммолар, математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси, ўз-ўзига татбиқ этувчанликни таниш муаммоси каби масалалар кўрилган.

Китобнинг еттинчи бобида **математик мантиқнинг техникага татбиқлари** келтирилган. Бу ерда реле-контактли схемалар, контактли схемалар ва уларнинг синтези, функционал элементлар ва улардан схемалар ясаш, кўп тактли схемалар, функционал элементлар системасининг тўлиқлиги, схемаларни минималлаштириш муаммоси, тескари боғланиши бўлмаган автоматлар, чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар, Мили ва Мур автоматлари каби масалалар кўриб чиқилган. Мантиқ алгебраси функцияларини схемалар (автоматлар) орқали реализация этиш масаласига алоҳида аҳамият берилган.

Саккизинчи бобда **математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси** баён этилган. Бу ерда дизъюнктив нормал шакл (ДНШ)ни соддалаштириш, энг қисқа ДНШ, қисқартирилган ДНШ, тупикли ДНШ, Квайн ДНШ ва минимал ДНШларни ясаш алгоритмлари келтирилган. Аналитик ва геометрик тарздаги алгоритмларнинг эквивалентлиги кўрсатилган.

Тўққизинчи бобда **графлар назариясининг элементлари** ёритилган. Бу ерда оддий графлар, графларнинг изоморфлиги, маршрутлар, занжирлар, цикллар, боғлиқлилик, дарахтлар, хроматик сон ва хроматик синф, тўрлар ва тўрдаги оқимлар, Форд—Фалкерсон теоремаси каби масалалар қараб чиқилган.

Назарий масалаларни баён этишда мисоллардан кенг фойдаланилган, деярли ҳар бир параграфнинг охирида мустақил ишлаш учун машқлар, савол ва топшириқлар берилган.

Китобда ёритилган масалалар **«Математик мантиқ ва дискрет математика»** ва **«Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси»** фанларидан ташқари давлат таълим стандартларида кўрсатилган «Машиналар арифметикаси ва автоматлар назарияси», «Информатика асослари ва ҳисоблаш техникаси», «ЭҲМ ва дастурлаш», «Операцияларни текшириш» каби фанларни ўқитишда ҳам муҳим аҳамият касб этади.

Китобни тайёрлашда америкалик С. Клини ва А. Чёрч, австриялик К. Гёдел, англиялик А. Тьюринг ва Э. Мендельсон ҳамда россиялик А.А. Марков, А.И. Мальцев, П.С. Новиков, С.В. Яблонский, О.Б. Лупанов, В.Б. Кудрявцев, В.А. Горбатов. С.Г. Гиндикин, А.А. Зиков, Л. Лихтарников ва Т. Сукачёва, ўзбекистонлик Р. Искандаров, Т. Ёқубов каби математиклар томонидан яратилган монография, дарслик, ўқув қўлланма ва илмий мақолалар ва самарқандлик М.Исроиловнинг мулоҳазалар алгебрасига бағишланган қўлёзмасидан фойдаланилди.

Олий ўқув юртлари математика факультетлари талабалари учун ўзбек тилида ёзилган дастлабки китоблар марҳум устозимиз Р.И. Искандаровнинг «Математик логика элементлари» (1970) номли дарслиги ва Т.Ёқубовнинг «Математик логика элементлари» (1983) ўқув қўлланмасидир. Бу китоблар математик мантиқ фанини ўқитишда, табиийки, ижобий рол ўйнади.

Ўқувчиларга тавсия этилаётган ушбу китоб «Математик мантиқ ва дискрет математика» ҳамда «Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси» фанлари бўйича Республикамиз давлат таълим стандартларида кўрсатилган ўқув дастурларига тўлиқ жавоб беради.

Китоб университет ва педагогика институтларида **5460100 – математика, 5480100 – амалий математика ва информатика, 5140100 – математика ва информатика, 5521900 – информатика ва информацион технологиялар** бакалаврлик йўналишлари ҳамда **5А460104, 5А480101** ва **5А480107** магистратура мутахассисликлари бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган. Китоб камчиликлардан холи бўлмаганлиги туфайли, муаллиф китоб ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қилади ва олдиндан ўз ташаккурини изҳор этади.

Китобнинг қўлёзмаси билан муфассал танишиб, унинг сифатини яхшилаш йўлида фойдали кўрсатма ва маслаҳатлар берган тақризчилар ЎзР ФА академиги Н. Сатимов, профессорлар А. Солеев, А. Пўлатов, доцентлар Р. Ғуломов ва Ғ. Эргашевга, муҳаррирлик ишини бажарган доцент А. Мусаевга, матнини компьютерга киритган ва макетини тузиб нашр этишга тайёрлаган Х. Якубова, Э.Ўрунбоев ва Ф. Муродовга ўз миннатдорчилигимни билдираман.

Муаллиф.

КИРИШ

Мантиқ – муҳокама юритишнинг қонун-қоидалари, усуллари ва формалари (шакллари) ҳақидаги фан бўлиб, унинг асосчиси қадимги юнон мутафаккири **Аристотель** (милод. авв. 384–322) ҳисобланади. У биринчи бўлиб дедукция назариясини, яъни мантиқий хулоса чиқариш назариясини яратиб, мантиқий хулоса чиқаришнинг формал характерга эга эканлигини кўрсатди. Аристотелнинг мантиқий таълимоти формал мантиқнинг (логиканинг) асосини ташкил қилади. Формал мантиқ фикрлашнинг формалари ва қонунларини текширади. Шундай қилиб, Аристотель мантиқий фикрлашнинг асосий қонунларини очди.

Аристотель асос солган мантиқ кўп асрлар давомида турли мутафаккирлар, файласуфлар ва бутун фалсафий мактаблар томонидан тўлдирилди, ўзгартирилди ва такомиллаштирилди. Шу жумладан, **Абу Наср Форобий, Абу Али ибн Сино, Абу Райҳон Беруний, Муҳаммад ал-Хоразмий, Умар Хайём, Алишер Навоий, Мирзо Бедил** каби Шарқнинг буюк мутафаккирлари ҳам ўзларининг катта ҳиссаларини қўшдилар.

Мантиқнинг янгиланишида француз олими **Р. Декарт**нинг (1596–1650) ишлари муҳим роль ўйнади. Р.Декарт аналитик усулда фикрлашнинг асосий принципларини яратди.

Немис философи ва математиги **Г. Лейбниц** (1646–1716) биринчи бўлиб мантиқий фикрлашга ҳисоб характерини бериш зарур, деган ғоя билан чиқди. Бунинг учун, унинг фикрича, ҳамма илмий тушунчалар ва мулоҳазаларни асосий мантиқий элементларга келтириб, уларни маълум символлар билан белгилаш керак.

Г. Лейбниц ғоялари фақат XIX асрдагина ўз ривожини топди. Инглиз олимлари **Ж. Буль** (1815–1864), **Ч. Пирс** (1839–1914), **Б. Рассел** (1872–1970), **А. Уайтхед** (1861–1947), **У. Жевонс** (1835–1882), немис олимлари **Г. Фрёге**

(1848–1925), **Д. Гильберт** (1862–1943), **Э. Шрёдер** (1853–1910), шотланд математиги **О. де Морган** (1806–1871), рус олимлари **П.С. Порецкий** (1846–1907), **В.И. Гливенко** (1897–1940), **И.И. Жегалкин** (1869–1947) ва бошқалар мантиқ соҳасидаги ишлари билан символик ёки математик мантиқни (логикани) яратдилар.

Математик мантиқ асосчиларидан бири бўлган **Ж. Буль** (машҳур «Сўна» романининг муаллифи Лилиан Войничнинг отасидир) мустақил равишда грек, лотин, немис, француз ва итальян тилларини ҳамда математикани ўрганади. 1847 йилда ёзилган «Мантиқнинг математик таҳлили», «Мантиқий ҳисоб» ва 1854 йилда ёзган «Фикрлаш қонунларини тадқиқ этиш» китобларида мантиқни алгебраик формага келтирди ва математик мантиқнинг аксиомалар системасини яратди. Булнинг мантиқий ҳисоби **Буль алгебраси** деб юритилади.

Ж. Буль мантиқ ва математика операциялари ўртасидаги ўхшашликка асосланиб, мантиқий хулосаларга алгебраик символикани қўллади. У мантиқ операцияларини формаллаштириш (расмийлаштириш) учун қуйидаги символларни (белгиларни) киритди:

– предметларни белгилаш учун (x, y, z, ...) кичик лотин ҳарфларини;

– предметлар сифатини белгилаш учун (X, Y, Z, ...) бош лотин ҳарфларини;

– бирор мулоҳазага акслантирилган ҳамма предметлар синфи 1 ни;

– кўрилиши лозим бўлган предметлар йўқлигининг белгиси 0 ни;

– мулоҳазаларни мантиқий қўшишнинг « + » белгисини;

– мулоҳазаларни мантиқий айиришнинг « – » белгисини;

– мулоҳазалар тенглигининг « = » белгисини.

Символик буль алгебрасида мантиқий кўпайтириш амали, худди алгебраик қийматларни кўпайтиришдагидек,

$$xy = yx$$

коммутативлик хоссасига

ва

$$x(yz) = (xy)z$$

ассоциативлик хоссасига эга. Мантиқий қўшиш амали ҳам коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$x + y = y + x,$$
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Буль алгебрасида йиғинди кўпайтмага нисбатан дистрибутивлик қонунига бўйсунади:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Ж. Буль алгебраик символикалар ёрдами билан ҳамма мантиқий операцияларни икки қийматли (1 ва 0) алгебра қонунларига бўйсуналиган формал (расмий) операцияларга келтиришни ўйлади. Буль функциялари ва унинг аргументлари фақат икки қиймат — «чин» ва «ёлғон» қийматлар қабул қилади.

Мантиқ алгебраси қоидалари орқали оддий мулоҳазалардан мураккаб мулоҳазаларни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан:

xy — бир вақтда x ва y хоссаларга эга бўлган предметлар класси;

$x(1 - y)$ — бу x хоссага эга ва y хоссага эга бўлмаган предметлар класси;

$(1 - x)y$ — бу y хоссага эга ва x хоссага эга бўлмаган предметлар класси;

$(1 - x)(1 - y)$ — бу x ва y хоссаларга эга бўлмаган предметлар класси.

Ҳозирги математик мантиқ фанини яратишда фундаментал роль ўйнаган Буль символик логикаси мукаммаллаштиришга муҳтож эди. Масалан, Жевонс фикрича, мантиқий айириш операцияси айрим ноқулайликларга олиб келади.

О. де Морган Буль ғояларини ривожлантириб, мантиқ ҳисобини эҳтимоллар назарияси теоремаларини асослашга татбиқ этди ва символик ҳисобни яратиш устида ишлади.

Ч. Пирс математикани анализ қилишда мантиқий муносабатларни қурол сифатида ишлатишни асослаб берди, у Г. Фрёге ишларидан хабарсиз ҳолда, мантиққа квантор тушунчасини киритди.

Г. Фрёге математика принципларини мантиқ принципларидан келтириб чиқариш устида ишлаб, мантиқ ҳисобини яратди.

Буль ва О. де Морган асарларида математик мантиқ ўзига хос алгебра — мантиқ алгебраси кўринишида шаклланди.

Кейинчалик, Буль методлари У. Жевонс, Э. Шрёдер ва П.С. Порецкий асарларида ўз ривожини топди.

Буль алгебрасини У. Жевонс ва Э. Шрёдер мукаммаллаштирди. У. Жевонс «Соф мантиқ» (1864), «Ўхшашларни алмаштириш» (1869) ва «Фан асоси» (1874) китобларида мантиқ соҳасида алмаштириш принципига асосланган ўзининг назариясини тавсия этди. 1877 йили Э.Шрёдер «Der operationskreis des Logikkalkuls» китобида алгебраик мантиқ асосларини ёритди.

Математик мантиқ фанининг ривожланишида Порецкийнинг ҳам катта хизмати бор. У Буль, Жевонс ва Шрёдер ютуқларини умумлаштириб, «Мантиқий тенгламаларни ечиш усуллари ва математик мантиқнинг тескари усули ҳақида» (1884) китобида мантиқ алгебраси аппарати ривожини анча илгари сурди. Америкалик олим **А. Блейк** П.С.Порецкий методини Э.Шрёдер методидан устун қўяди.

П.С. Порецкий системасида қуйидаги белгилар қабул қилинган:

1) бир-бирига боғлиқ бўлмаган ва бир-бири билан ҳеч қандай муносабатда бўлмаган предметлар классини кичик лотин ҳарфлари — a, b, c, ... билан белгилаш;

2) синфларни инкор этиш учун кичик лотин ҳарфларидан кейин «эмас» сўзини қўшиш, яъни a эмас, b эмас ва ҳоказо каби белгилаш;

3) a, b, c, ... предметлар синфи хусусиятига эга бўлмаган предметлар синфини a_1, b_1, c_1, ... билан белгилаймиз;

4) икки ёки кўпроқ синфлар биргаликда бир нечта бир-бирига боғлиқ бўлмаган хоссаларга эга бўлишини ab, bc ва ҳоказо кўпайтмалар билан белгилаш. Бу операция коммутативлиқ ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc);$$

5) мантиқий қўшиш амалини «+» белгиси билан белгилаш. Бу операция ҳам коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y)z;$$

6) ҳеч қандай мазмунга эга бўлмаган сифат формасини 0 (мантиқий 0) билан белгилаш;

7) мумкин бўлган синфларни ўз ичига олган сифат формасини 1 (мантиқий 1) билан белгилаш; 0 ва 1 ушбу хоссаларга эга:

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a;$$

8) a синфнинг инкорини a_1 синф билан белгилаш;

9) қўшиш, кўпайтириш ва инкор амалларидан ташқари эквивалентлик амалини киритади ва уни «=» символ билан белгилайди. Бу амал учта қоидага бўйсунади: 1) агар $a = b$ тенглигига бир хил синфларни қўшсак, у ҳолда тенглик бузилмайди, яъни $a + c = b + c$ бўлади; 2) агар $a = b$ бўлса, у ҳолда $ad = bd$ бўлади; 3) агар $a = b$ бўлса, у ҳолда $a_1 = b_1$ бўлади, бу ерда $a_1 = a$ эмас, $b_1 = b$ эмас.

XIX асрнинг охирида математик назариялар шундай ривожландики, энди мантиқ масалалари математиканинг ўзида ҳам муҳим аҳамиятга эга бўлиб, мавжуд мантиқий қуроллар математика талабларига жавоб беролмай қолди. Айрим математик муаммоларни ечишдаги қийинчиликлар уларнинг мантиқий табиатига боғлиқлиги аниқланди. Шунинг учун ҳам математик мантиқ тор алгебраик доирадан чиқиб, жадал ривожлана бошлади. Бу йўналишда биринчи бўлиб Г. Фрёге ва итальян математиги **Ж. Пеано** (1858–1932) тадқиқотлар олиб бордилар, улар математик мантиқни арифметика ва тўпламлар назариясини асослаш учун қўлладилар.

1903 йили Б.Расселнинг Лондонда нашр этилган «Математика принциплари» китобида мулоҳазалар ва синфлар ҳисоб назарияси ишлаб чиқилди. Б. Расселнинг А. Уайтхед билан ҳамкорликда ёзган 3 томлик «Математика принциплари» китоблари математик мантиқ фанининг ривожланишида катта роль ўйнади. Бу китобларда мулоҳаза, синф ва предикатлар ҳисоби деярли тўлиқ аксиомалаштирилди ва формаллаштирилди. Улар ҳозирги вақтда ўрганилаётган математик мантиқ кўринишини яратдилар.

Д. Гильберт ва немис олими **В. Аккерман**нинг 1928 йилда чоп этилган «Назарий мантиқнинг асосий хусусиятлари» китоблари математик мантиқнинг янада ривожланишида муҳим аҳамият касб этди. Бу китобнинг муаллифлари мантиқий амалларда формаллаштириш методини татбиқ этиб, катта ютуққа эришдилар.

Буль, Шрёдер ва Порецкийнинг мантиқ алгебраларига таяниб, И.И. Жегалкин логик қўшиш ва логик кўпайтириш амалларини қуйидагича аниқлади:

1) $0+0=0;\ \ 0+1=1;\ \ 1+0=1;\ \ 1+1=0;$

2) $0\cdot 0=0;\ \ 0\cdot 1=1\cdot 0=0;\ \ 1\cdot 1=1.$

Логик қўшиш ва кўпайтириш амалларидан $a+a=0$ ва $a\cdot a=a$ келиб чиқади.

Мантиқий операцияларнинг символик кўринишлари Жегалкин системасида қуйидагича бўлади:

$$\bar{p}=p+1;\ \ p=\bar{\bar{p}};\ \ p\vee q=p+q+pq;$$

$$p\to q=1+p+pq;\ \ p\equiv q=1+p+q.$$

У символик мантиққа умумийлик ва мавжудлик квантори деган тушунчалар киритди ва предикатлар алгебрасини яратди.

XX асрнинг 50- йилларида кўп қийматли мантиқ соҳасида илмий изланишлар олиб борилди. Кўп қийматли мантиқда мулоҳазалар чекли (3 ва ундан кўп) ва чексиз чинлик қийматлари олади. Математик мантиқ бу бўлимининг асосчиларидан бири поляк олими **Я. Лукасевич** (1878–1954) ҳисобланади. У дастлаб уч қийматли (1920), 1954- йилда тўрт қийматли ва ниҳоят чексиз қийматли мантиқни яратди.

Кўп қийматли мантиқ проблемалари (муаммолари) билан **Е. Пост, С. Яськовский, Д. Вебб, А. Гейтинг, А.Н. Колмогоров, Д.А. Бочвар, В.И. Шестаков, Г. Рейхенбах, С.К. Клини, П. Детуш-Феврие** ва бошқа олимлар шуғулланганлар.

Конструктив математиканинг ривожланиши конструктив мантиқ масалаларини ечиш усулларини ишлаб чиқиш вазифасини қўйди. Бу соҳада **А.А. Марков, Н.А. Шанин** ва шогирдларининг хизматлари каттадир.

Дискрет математиканинг катта бўлимларидан бири алгоритмлар назарияси ҳисобланади. Алгоритм сўзи IX асрда яшаган замонасининг буюк математиги ватандошимиз **Муҳаммад ал-Хоразмий** исмининг лотинча Algorithmi формасидан келиб чиққан.

Алгоритмлар назарияси алгоритмларнинг умумий хусусиятларини ўргатувчи дискрет математиканинг бир бўлимидир.

XX асрнинг 20- йилларида биринчи бўлиб интуиционистлар вакиллари **Л. Брауэр** ва немис олими **Г. Вейлер** (1934) алгоритм тушунчасини ўрганишга киришганлар. Алгоритмлар назариясининг асосчиларидан бири бўлган америкалик олим А. Чёрч 1936 йилда ҳисобланувчи функция тушунчасига 1- аниқликни киритди ва қуйидаги тезисни илгари сурди: **натурал аргументларнинг барча қийматларида ҳамма жойда аниқланган ҳисобланувчи функциялар билан умумий рекурсив функциялар эквивалентдир (бир хилдир).** У ҳисобланувчи функция бўлмаган функцияни кўрсатди.

Алгоритмлар назариясининг кейинги ривожланишида америкалик олимлар **К. Гёдел, С.К. Клини** (1957), **Э.Л. Пост** (1943–1947), **Х. Роджерс** (1972), инглиз олими **А. Тьюринг** (1936–1937), рус олимлари **А.А. Марков** (1947–1954, 1958, 1967), **А.Н. Колмогоров** (1953, 1958, 1965), **Ю.Л. Ершов** (1969–1973), **А.И. Мальцев** (1965,) **Д.А. Трахтенброт** (1967, 1970–1974), **П.С. Новиков** (1952), **Ю.В. Матиясевич** (1970–1972) нинг хизматлари бениҳоят каттадир.

Масалан, С. Клини **алгоритм ёрдамида ҳисобланувчи қисмий функциялар қисмий рекурсив функциялардир**, деган ғояни илгари сурди.

А. Тьюринг ва Э. Пост (1936) идеаллаштирилган ҳисоблаш машиналари атамасида биринчи бўлиб, бир-биридан бехабар ҳолда, алгоритм тушунчасига аниқлик киритдилар. Пост ва Тьюринг алгоритмик жараёнлар маълум бир тузилишга эга бўлган «машина» бажарадиган жараёнлар эканлигини кўрсатдилар. Улар ўша пайтдаги математикада маълум бўлган барча алгоритмик жараёнларни бажара оладиган «машина» лар синфини ҳосил қилиб, уларга аниқ математик атамалар ёрдамида таъриф бердилар. Пост ва Тьюринг ушбу машиналар ёрдамида ҳисобланувчи барча функциялар синфи барча қисмий рекурсив функциялар синфи билан бир хил эканлигини кўрсатдилар. Натижада, Чёрч тезисининг яна битта фундаментал тасдиғи ҳосил бўлди.

С. Клини ва Э. Пост биргаликда рекурсивлик назариясини яратдилар ва рекурсив функциялар назариясини тараққий эттирдилар. Улар қисман рекурсив функциялар тушунчасини киритдилар.

Дастлаб фақат математик мантиқ, алгебра, математик анализ, математика асослари, эҳтимоллар назарияси, геометрия, топология, сонлар назарияси, моделлар назарияси каби математика фанларида татбиқ этиб келинган алгоритмлар назарияси XX асрнинг 40- йилларидан бошлаб ҳисоблаш математикаси, кибернетика, ахборот назарияси, иқтисодиёт, психология, математик лингвистика, тиббиёт фанлари ва дискрет техникада кенг қўлланилмоқда.

Сўнгги даврларда математик мантиқни техникага жуда самарали татбиқ этиш имкониятлари борлиги маълум бўлди.

Математик мантиқни дискрет техникага татбиқи натижасида унинг техник мантиқ бўлими вужудга келди. Бу соҳада **Е. Пост, В.И.Шестаков, К.Шеннон** (1916 й.т.), **А. Накашима,**

М. Ханзава, С. Клини, О.Б. Лупанов (1932 й.т.), **С.В. Яблонский** (1924 й.т.), **В.Б. Кудрявцев, Ю.И. Журавлёв, В.И. Левенштейн, В.В. Глаголев, Ф.Я. Ветухновский, Ю.Л. Васильев** ва бошқа олимлар ўз илмий изланишлари билан унинг тараққий этишига улкан ҳисса қўшганлар.

Математик мантиқни техникага қўллашни биринчи бўлиб рус физиги **П. Эренфест** (1910) ва гидротехника қурилишлари бўйича етук мутахассис **Н.М. Герсеванов** амалга оширганлар.

К. Шеннон ҳисоблаш машиналарини яратишнинг асосий методи сифатида мантиқ алгебрасини билган, у информация ва информацияни узатишнинг математик назарияларини яратди, электрон тармоқлардаги «1» ва «0» бинар муносабатлар билан математик мантиқдаги иккилик (1 ва 0) қийматларининг мос келишини ва қандай қилиб «мантиқ машинасини» яратишни кўрсатди ва ҳоказо.

Контактли ва реле-контактли схемаларга мантиқ алгебрасини татбиқ этишнинг исботини биринчи бўлиб В.И. Шестаков ва К. Шеннон берди. А. Накашима ва М. Ханзава математик мантиқни дискрет техника масалаларини ечишда қўллаш методларини яратдилар. С. Клини дискрет қурилма моделини (чекли автомат модели) яратгани туфайли, математик мантиқни хотирали дискрет қурилмаларни лойиҳалашда ишлатиш имкони юзага келди.

Москва давлат университети дискрет математика мактабининг асосчиларидан бири О.Б. Лупановнинг асосий ишлари математик кибернетика ва математик мантиққа бағишланган. У мураккаб бошқарувчи системаларнинг асимптотик қонуниятларини, контакт схемалар ва функционал элементлардан ясалган схемаларни (умуман, асосий бошқарувчи системаларни), энг яхши асимптотик синтез методларини ва локал кодлаш принципини ишлаб чиқди.

С.В. Яблонский оптимал схемаларни синтез қилиш ва ҳисоблаш қурилмаларини ясаш методини яратди.

Мантиқ алгебраси электр схемаларни лойиҳалашда ва текширишда, автоматик ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш ва программалашда, дискрет автоматларни мантиқий лойиҳалашда, ЭҲМ элементлари ва қисмларини лойиҳалашда, ҳар хил техник системалар, қурилмалар ва автоматик машиналарни анализ ва синтез қилишда кенг миқёсда татбиқ этилади. Математик мантиқ фани электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келишига ва уни мукаммаллаштиришга катта ҳисса қўшди.

Демак, математик мантиқ, бир томондан, формал мантиқ муаммоларига математик методларни қўллаш натижасида ривожланган бўлса, иккинчи томондан, математикани асослашга хизмат қилувчи фан сифатида ривожланди. Ҳозирги замон математик мантиқи автоматика, машина математикаси, бир тилдан иккинчи тилга автоматик тарзда таржима қилиш, математик лингвистика, ахборот назарияси ва умуман кибернетика билан боғлиқдир.

Шундай қилиб, математик мантиқ ва дискрет математика 150 йилдан бери ривожланиб келмоқда. У математика асослари, алгебра, геометрия, математик анализ, функционал анализ, топология, эҳтимоллар назарияси каби фанларда татбиқ этилишидан ташқари кибернетика, иқтисодиёт, математик лингвистика, психология, ЭҲМ ва дастурлаш, операцияларни текшириш, схемотехника, радиотехника, автоматика, ўйинлар назарияси, ахборотлар назарияси сингари фанларда ҳам кенг қўлланилади.

I БОБ УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

1- §. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари

☑ *Тўплам. Тўплам элементлари. Тенг кучли тўпламлар. Қисм тўплам. Хос ва хосмас қисм тўпламлар. Бўш тўплам.*

Тўпламлар назариясига математик фан сифатида немис математиги Г. **Кантор** (1845–1918) томонидан асос солинган.

Математикада доимо турли тўпламлар билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, тўғри бурчакли учбурчаклар тўплами, натурал сонлар тўплами, тўғри чизиқда ётувчи нуқталар тўплами ва ҳоказо. Умуман, тўплам тушунчаси айрим-айрим нарсалар, буюмлар, объектларни биргаликда, яъни бир бутун деб қараш натижасида вужудга келади.

1-таъриф. *Тўпламни ташкил этувчи нарсалар, буюмлар, объектлар бу тўпламнинг* ***элементлари*** *деб аталади. Тўпламлар, одатда, лотин ёки грек алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади.*

A тўплам a, b, c, d, ... элементлардан тузилганлиги

$$A=\{a, b, c, d, ...\}$$

кўринишда ёзилади. Тўпламни ташкил этувчи элементлар сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда чекли тўпламга, иккинчи ҳолда эса чексиз тўпламга эга бўламиз. Масалан: $A=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{a, b, c\}$; $A_n=\{1, 2, 3, ..., n\}$ – чекли тўпламлар; $B=\{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$, $C=\{1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...\}$, $D=\{2, 3, 5, 7, ..., p, ...\}$ – чексиз тўпламлар.

a нарса A тўпламнинг элементи эканлиги $a\in A$ ёки $A\ni a$ кўринишда белгиланади. Бирор b нарса A тўпламнинг элементи эмаслиги $b \overline{\in} A$ ёки $A \overline{\ni} b$ кўринишда ёзилади. Масалан: $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ да $2, 4, 6, 8, 10\in A$, бироқ $12, 14 \overline{\in} A$.

A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг a элементи B тўпламнинг b элементига тенг, яъни $a = b$, деб олсак, бундан битта элемент иккала тўпламда ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ва $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ тўпламлардаги 2, 4, 6, 8 элементлар уларнинг иккаласида ҳам мавжуддир.

2-таъриф. *A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламда мавжуд ва, аксинча, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда ҳам мавжуд бўлса, A ва B тўпламларни* ***тенг (тенг кучли)*** *деб аталади ва $A = B$ ёки $B = A$ белги билан ифодаланади.*

Демак, тенг A ва B тўплам аслида бир тўпламдир.

3-таъриф. *Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг* ***қисм тўплами*** *деб аталади ва қуйидагича белгиланади:*

$$B \subseteq A \text{ ёки } A \supseteq B. \tag{1}$$

Масалан: 1) бутун сонлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламининг қисм тўпламини ташкил этади;

2) вилоятлар республика вилоятлари тўпламининг қисм тўпламини ташкил этади;

3) тоқ сонлар тўплами бутун сонлар тўпламининг қисм тўпламидир ва ҳоказо.

4-таъриф. *B тўпламнинг ҳамма элементлари A тўпламда мавжуд бўлиб, шу билан бирга A тўпламда B тўпламга кирмаган элементлар ҳам бор бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг* ***хос қисм тўплами*** *деб аталади ва қуйидагича белгиланади:*

$$B \subset A \text{ ёки } A \supset B. \tag{2}$$

Демак, $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда

$$A = B. \tag{3}$$

(3) тенглик A нинг ўзи ўзининг қисм тўплами бўлишини кўрсатади ва бу ҳолатни ифодалаш учун «ўзининг хосмас қисми» деган иборадан фойдаланамиз.

Масалан, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ тўплам учун $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{d, e, f\}$ тўпламларнинг ҳар қайсиси хос қисмдир.

Одатда, тўпламлар назариясида битта ҳам элементи бўлмаган тўпламлар билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, $x^2 + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари бўш тўпламни ташкил қилади, чунки $x_{1,2} = \pm 2i$, яъни тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

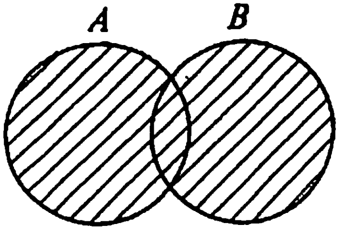
5-таъриф. *Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам **бўш тўплам** деб аталади ва ∅ символи билан белгиланади. ∅ бўш тўплам ҳар қандай A тўпламнинг қисм тўплами бўлади ва у ҳам A тўпламнинг **хосмас қисми** дейилади.*

2- §. Тўпламлар устида амаллар

☑ *Тўпламларнинг бирлашмаси. Тўпламларнинг кесишмаси. Тўпламларнинг айирмаси. Тўлдирувчи. Универсал тўплам.*

A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. *Берилган A ва B тўпламларнинг **йиғиндиси** ёки **бирлашмаси** деб, шу тўпламларнинг такрорланмасдан олинадиган ҳамма элементларидан тузилган ва $C = A \cup B$ каби белгиланадиган тўпламга айтилади* (I.1- шакл).



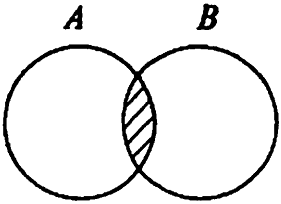
I.1- шакл.

Агар $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг $A \cup B$ йиғиндиси қуйидагича ёзилади:

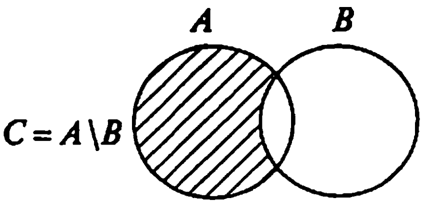
$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n. \qquad (1)$$

Масалан, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, b\}$, $C = \{e, f, k\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B \cup C = \{a, b, c, e, f, k\}$.

2-таъриф. *Берилган A ва B тўпламларнинг ҳамма умумий элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг **кўпайтмаси** (кесишмаси ёки умумий қисми) дейилади ва $C = A \cap B$ кўринишида белгиланади* (I.2- шакл).



I.2- шакл.



I.3- шакл.

Агар $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг $C = A \cap B$ кўпайтмаси қуйидагича ёзилади:

$$\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n . \qquad (2)$$

Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ бўлса, у ҳолда $C = \{2, 4\}$.

Битта ҳам умумий элементга эга бўлмаган тўпламларнинг кесишмаси $\varnothing$ бўш тўпламга тенг бўлади. Масалан, тоқ сонлар тўплами билан жуфт сонлар тўпламининг кесишмаси бўш тўпламдир.

3-таъриф. *А ва В тўпламларнинг* ***айирмаси*** *деб, А нинг В да мавжуд бўлмаган ҳамма элементларидан тузиладиган ва $C = A - B$ ёки $C = A \backslash B$ кўринишида ёзиладиган С тўпламга айтилади* (I.3- шакл).

Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ва $B = \{3, 4, 5, 6\}$ бўлса, у ҳолда $C - \{1, 2\}$.

4-таъриф. *А тўпламдаги унинг В қисм тўпламига кирмай қолган ҳамма элементларидан тузилган қисм тўплам В нинг А тўпламгача* ***тўлдирувчиси*** *деб айтилади ва $\overline{B}$ (ёки B') кўринишда белгиланади.*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ натурал сонлар тўплами ва $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ жуфт сонлар тўплами бўлса, у ҳолда $\overline{B} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ бўлади, яъни $B \cup \overline{B} = A$.

$\overline{B}$ тўплам B ни A гача тўлдиради. Ушбу тенгликларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\overline{B} \cup B = \varnothing, \quad B \cap \overline{B} = A, \quad B - \overline{B} = B, \quad \overline{B} - B = \overline{B}.$$

5-таъриф. *Бирор тўпламнинг хос қисми деб қаралмаган ҳар бир тўпламни* ***универсал тўплам*** *деб атаб, уни U ҳарфи билан белгилаймиз.*

Таърифга биноан, U нинг ҳамма қисмлари орасида иккита хосмас қисми бор: биттаси U нинг ўзи, иккинчиси $\varnothing$ бўш тўплам, қолганлари хос қисмлардан иборат.

3- §. Асосий тенгликлар (тенг кучлиликлар)

☑ *Асосий тенг кучлиликлар. Коммутативлик, ассоциативлик, дистрибутивлик қонунлари.*

U универсал тўпламнинг қисмлари орасидаги муносабатларни ифодаловчи асосий тенгликлар қуйидагилардан иборат.

1. $\overline{\overline{A}} = A$.

Тўпламлар назариясида тенгликларни исботлашнинг умумий методи тенгликнинг бир томонидаги тўпламга тегишли ҳар бир элемент иккинчи томонидаги тўпламда ҳам мавжуд ва, аксинча, эканлигини кўрсатишдан иборатдир.

Исбот. $\overline{\overline{A}}$ тўплам $\overline{A}$ нинг тўлдирувчиси. Шунинг учун $\overline{\overline{A}}$ нинг ҳар бир элементи $x \overline{\in} \overline{A}$, демак, $x \in A$. Аксинча, A нинг ҳар бир элементи $x \overline{\in} \overline{A}$ бўлгани учун $x \overline{\in} \overline{\overline{A}}$. Демак, $\overline{\overline{A}} = A$.

2. $A \cap B = B \cap A$ — кўпайтмага нисбатан коммутативлик қонуни.

Исбот. $A \cap B$ нинг ҳар бир элементи A ва B да мавжуд, чунки $A \cap B$ тўплам A ва B нинг умумий элементларидан тузилган. Демак, $A \cap B$ нинг элементлари $B \cap A$ да ҳам мавжуд. Худди шу каби, $B \cap A$ нинг ҳар бир элементи B ва A да мавжуд, чунки $B \cap A$ тўплам B ва A нинг умумий элементларидан тузилган. Шунинг учун $B \cap A$ тўпламнинг ҳар бир элементи $A \cap B$ тўпламнинг ҳам элементи бўлади. Демак, $A \cap B = B \cap A$.

3. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ – кўпайтмага нисбатан ассоциативлик қонуни.

Исбот. $x\in(A\cap B)\cap C$ бўлсин. Демак, $x\in(A\cap B)$ ва $x\in C$. Бу ердан $x\in A$, $x\in B$ ва $x\in C$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун $x\in A$ ва $x\in B\cap C$ дир. Бу ердан ўз навбатида $x\in A\cap(B\cap C)$ эканлиги келиб чиқади. Исботнинг иккинчи қисмини ўқувчига ҳавола этамиз.

4. $A\cup B=B\cup A$ – йиғиндига нисбатан коммутативлик қонуни.

5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ – йиғиндига нисбатан ассоциативлик қонуни.

4 ва 5- тенгликларнинг исботлари худди 2 ва 3- тенгликларни исботлашга ўхшаш амалга оширилади.

6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ – кўпайтмага нисбатан дистрибутивлик қонуни.

7. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ – йиғиндига нисбатан дистрибутивлик қонуни.

6- тенгликнинг **исботи**: $x\in A\cap(B\cup C)$ бўлсин, у ҳолда $x\in A$ ва $x\in B\cup C$ бўлади. Бу ердан $x\in A$ ва $x\in B$ ёки $x\in A$ ва $x\in C$ келиб чиқади. Демак, $x\in A\cap B$ ёки $x\in(A\cap C)$. Шунинг учун $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Энди $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ бўлсин, у ҳолда $x\in(A\cap B)$ ёки $x\in(A\cap C)$ бўлади. Бу ердан $x\in A$ ва $x\in B$ ёки $x\in A$ ва $x\in C$ келиб чиқади. Демак, $x\in A\cap(B\cup C)$.

8. $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$. 9. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$. 10. $A\cap A=A$.

11. $A\cap U=A$. 12. $\overline{A\cup A}=\bar{A}$. 13. $A\cup\varnothing=A$.

4- §. Тўпламлар алгебраси

☑ *Айниятлар. Теоремалар. Де Морган қонуни. Жуфт-жуфт эквивалент.*

Тўпламлар алгебрасида $\cup$, $\cap$, $-$, $\subseteq$ белгилари орасидаги ўзаро муносабатлар кўриб чиқилади. Тўпламлар алгебрасида, умуман, оддий алгебрадагидек айниятлар — тенгликлар кўрилади. Бу айниятлар универсал тўпламнинг ва унинг хос қисм тўпламларининг қандай бўлишидан қатъи назар ўз кучини сақлайди.

1-теорема. *U универсал тўпламнинг исталган A, B, C қисм тўпламлари орасидаги муносабатларни ифодаловчи қуйидаги тенгликлар айниятдир:*

1. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$. 1′. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
2. $A\cup B=B\cup A$. 2′. $A\cap B=B\cap A$.
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 3′. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. $A\cup\varnothing=A$. 4′. $A\cap U=A$.
5. $A\cup\overline{A}=U$. 5′. $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

Агар $A\subseteq B$ ва $B\subseteq A$ бўлса, у ҳолда $A=B$. Ана шу хоссадан фойдаланиб юқорида келтирилган айниятлар исбот қилинади, яъни тенгликнинг чап томонидаги ҳар бир элемент унинг ўнг томонида ҳам мавжуд ва аксинча эканлигини кўрсатиш керак. Биз юқоридаги айниятларнинг айримларини исбот этган эдик.

1 ва 1′- айниятлар мос равишда *йиғинди* ва *кўпайтма амаллари учун ассоциативлик қонунлари* дейилади. 2 ва 2′- айниятлар *коммутативлик қонуни* ва 3, 3′- айниятлари эса шу амаллар учун *дистрибутивлик қонуни* дейилади.

Ассоциативлик қонунига асосан A, B, C қисм тўпламлардан маълум тартибда йиғинди амали билан ҳосил қилинган икки тўплам тенгдир. Бу тўпламни $A\cup B\cup C$ шаклда белгилаймиз.

Ассоциативлик қонунига кўра қавс белгиси қаерда туриши ҳеч қандай роль ўйнамайди. Математик индукция методига асосан

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n=A_{1'}\cup A_{2'}\cup A_{3'}\cup\ldots\cup A_{n'},$$

бу ерда 1′, 2′, ..., n' белгилашлар 1, 2, ..., n сонларининг исталган тартибда олинганидан ҳосил қилинган сонларни билдиради.

Шу тариқа қуйидаги тенгликларни ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = A_{1'} \cap A_{2'} \cap A_{3'} \cap \ldots \cap A_{n'},$$

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \ldots \cap (A \cup B_n),$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n).$$

Кўрсатилган 1—5 ва 1′—5′ тенгликлардан қуйидаги хулосани ҳосил қиламиз: 1-теоремадаги айниятлар жуфт-жуфт тарзда шундай жойлаштирилганки, бири иккинчисидан $\cup$ ва $\cap$ ҳамда $\varnothing$ ва U белгиларни бир вақтда ўзаро жойларини алмаштириш натижасида келиб чиқади.

2-теорема. *U универсал тўпламнинг исталган A ва B қисм тўпламлари учун қуйидагилар ўринлидир:*

6. *Агар ҳамма A лар учун $A \cup B = A$ бўлса, у ҳолда $B = \varnothing$.*

6′. *Агар исталган A учун $A \cap B = A$ бўлса, у ҳолда $B = U$.*

7 ва 7′. *Агар $A \cup B = U$ ва $A \cap B = \varnothing$ бўлса, у ҳолда* $B = \bar{A}$.

8 ва 8′. $\bar{\bar{A}} = A$.

9. $\bar{\varnothing} = U$. 9′. $\bar{U} = \varnothing$.

10. $A \cup A = A$. 10′. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$. 11′. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

12. $A \cup (A \cap B) - A$. 12′ $A \cap (A \cup B) = A$.

13. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. 13′. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2-теореманинг айрим тенгликлари адабиётда махсус номга эгадир. Масалан, 10 ва 10′-тенгликлар *идемпотентлик қонуни*, 12 ва 12′-тенгликлар *ютиш қонуни*, 13 ва 13′-тенгликлар *де Морган қонуни* деб аталади.

Тўпламлар алгебрасида бирор тенгликдан шу тенгликка кирган $\cup$ ни $\cap$ га, $\cap$ ни $\cup$ га, $\varnothing$ ни U га, U ни $\varnothing$ га бирданига алмаштириш натижасида ҳосил қилинган иккинчи тенглик биринчи тенгликка ва, аксинча, биринчи тенглик иккинчи тенгликка нисбатан *икки тарафлама тенглик* деб айтилади.

3-теорема. *Исталган A ва B тўпламлар учун қуйидаги мулоҳазалар жуфт-жуфт эквивалентдир:*

$$\text{(I) } A\subseteq B;\quad \text{(II) } A\cap B=A;\quad \text{(III) } A\cup B=B. \qquad (1)$$

R_1, R_2, ..., R_n мулоҳазалар жуфт-жуфт эквивалентдир деган тасдиқ қуйидагини билдиради: исталган i ва j учун R_i мулоҳаза R_j мулоҳазага эквивалентдир. Бу мулоҳаза ўз навбатида фақатгина R_1 мулоҳаза R_2 мулоҳазанинг, R_2 мулоҳаза R_3 мулоҳазанинг, ..., R_{n-1} мулоҳаза R_n мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаргандагина тўғридир.

Исбот. (I) мулоҳаза (II) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради. Ҳақиқатан, $A\subseteq B$ бўлсин. Исталган A ва B учун $A\cap B=A$ эканлигини кўрсатиш керак.

а) $\overline{x\in A\cap B}$ бўлса, у ҳолда $x\in A$ ва $x\in B$ дир. Демак, $A\cap B\subseteq A$.

б) $x\in A$ бўлсин. У ҳолда (II) га асосан $x\in B$ ҳамдир. Шунинг учун $A\subseteq A\cap B$, яъни (I) мулоҳаза (II) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради.

Энди $A\cap B=A$ бўлсин, у ҳолда $A\cup B=B$ эканлигини исбот қиламиз:

$$A\cup B=(A\cap B)\cup B=(A\cup B)\cap(B\cup B)=(A\cup B)\cap B=B.$$

Демак, $A\cup B=B$.

(III) мулоҳаза (I) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради. Ҳақиқатан ҳам, $A\cup B=B$ ва $A\subseteq A\cup B$ бўлишидан $A\subseteq B$. Бу билан исбот якунланади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. а) $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B\cup B=\overline{A}\cup B$;

б) $(A\cap B\cap C\cap\overline{X})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap X)=C$

эканлиги исбот этилсин.

2. Ушбу тўпламларнинг ҳар иккитаси ва ҳар учтасининг кесишмалари ва бирлашмаларини топинг:
$A=\{a, b, c\}$, $B=\{d, e, f, g\}$, $C=\{a, f, g, k, c\}$.
3. $A=\{1, 2, ..., n\}$ тўплам учун $B=\{3, 6, 9, 12, ..., 3n, ...\}$ қисм тўпламдир. $\overline{B}$ ни топинг.
4. $(A\cap B\cap X)\cup(A\cap B\cap C\cap X\cap Y)\cup(A\cap X\cap\overline{A})=A\cap B$ тенгликни исботланг.
5. 7—13- асосий тенг кучлиликларни исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари нимадан иборат?
2. Тўпламлар устида қандай амаллар бажарилади?
3. Асосий тенг кучлиликларни ёзинг.
4. Қандай тўпламлар тўпламлар алгебраси деб айтилади?
5. Мулоҳазаларнинг жуфт-жуфт эквивалентлигининг шартлари.

5- §. Муносабатлар. Бинар муносабат

☑ *Муносабат. Тартибланган жуфтлик. Унар ва бинар муносабатлар. n- ар муносабат. Аниқланиш соҳаси. Қийматлар соҳаси.*

Дискрет математикада фундаментал тушунчалардан бири бўлган **муносабат** тушунчаси предметлар (нарсалар) ва тушунчалар орасидаги алоқани ифодалайди. Қуйидаги тўлиқсиз гаплар муносабатларга мисол бўла олади:

... кичик ... дан; ... тенг ... га; ... бўлинади ... га ва ҳоказо.

Бундан кейин муносабат тушунчаси тўпламлар назарияси нуқтаи назаридан туриб ўрганилади.

Муносабат тушунчасини аниқлаш учун **тартибланган жуфтлик** тушунчасига аниқлик киритайлик. Маълум тартибда жойлашган икки предметдан тузилган элемент *тартибланган жуфтлик* дейилади. Математикада тартибланган жуфтлик қуйидаги хусусиятларга эга бўлади, деб фараз қилинади:

1) ҳар қандай (исталган) x ва y предметлар учун $<x, y>$ каби белгиланадиган маълум объект мавжуд бўлиб, у x ва y нинг тартибланган жуфтлиги деб ўқилади. Ҳар бир x ва y предметларга ягона тартибланган $<x, y>$ жуфтлик мос келади;

2) иккита $<x, y>$ ва $<u, v>$ тартибланган жуфтлик берилган бўлсин. Агар $x = u$ ва $y = v$ бўлса, у ҳолда $<x, y> = <u, v>$ бўлади.

Тартибланган жуфтлик $<x, y>$ қуйидаги тўпламдир:

$$<x, y> = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

яъни шундай икки элементли тўпламдирки, унинг битта элементи $\{x, y\}$ тартибсиз жуфтликдан иборат, иккинчиси эса $\{x\}$, шу тартибсиз жуфтликнинг қайси ҳади биринчи ҳисобланиши кераклигини кўрсатади.

Тартибланган жуфтлик $<x, y>$ нинг x предмети унинг *биринчи координатаси*, y предмети эса *иккинчи координатаси* деб аталади.

Тартибланган жуфтликлар атамаси асосида тартибланган n-ликларни аниқлаш мумкин. x, y ва z предметларнинг *тартибланган учлиги* $<x, y, z>$ қуйидаги тартибланган жуфтликлар шаклида аниқланади: $<<x, y>, z>$. Худди шу каби x_1, x_2, ... ва x_n предметларнинг *тартибланган n-лиги* $<x_1, x_2, ..., x_n>$, таърифга асосан, $<<x_1, x_2, ..., x_{n-1}>, x_n>$ тарзда аниқланади.

Элементлари тартибланган жуфтликлардан иборат бўлган тўплам *тартибланган жуфтликлар тўплами* деб аталади.

Бинар муносабатни тартибланган жуфтликлар тўплами сифатида аниқлаймиз. Агар ρ бирор муносабатни ифодаласа, у ҳолда $<x, y> \in \rho$ ва $x \rho y$ ифодаларни ўзаро алмашувчи ифодалар деб ҳисоблаймиз. $x \rho y$ ифодани «предмет x предмет y га нисбатан ρ муносабатда» деб ўқилади.

Қуйидаги $x = y$, $x < y$, $x \equiv y$ белгилар $x \rho y$ ифодадан келиб чиққан.

n- ар муносабати тартибланган n- ликлар тўплами сифатида аниқланади. 3-ар муносабатни кўпинча адабиётда *тернар муносабат* деб ҳам юритилади.

Мисоллар. 1. $\{<2, 4>, <5, 6>, <7, 6>, <8, 8>\}$ тартибланган жуфтликлар тўплами бинар муносабатга мисол бўла олади.

2. Агар ρ айният муносабатини билдирса, у ҳолда $<x, y> \in \rho$ дегани $x \equiv y$ ни билдиради.

3. Агар ρ оналик муносабатини билдирса, у ҳолда < Хуршида, Ирода > $\in \rho$ символи Хуршида Ироданинг онаси эканлигини билдиради.

4. Тернар муносабатига бутун сонлар тўпламидаги қўшиш амали мисол бўла олади. $5 = 2 + 3$ ёзувини $<5,\ 2,\ 3> \in +$ шаклида ҳам ёзиш мумкин.

Бундан кейин бинар муносабат атамаси ўрнига қисқалик учун муносабат атамасини ишлатамиз.

$\{x/x \in A\}$ символини қуйидагича тушуниш керак: {Шундай x лар тўпламики, $x \in A$}.

{x/айрим y учун $<x,\ y> \in \rho$} тўплами ρ муносабатнинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва D_ρ символи билан белгиланади. {y/айрим x учун $<x,\ y> \in \rho$} тўплами ρ муносабатнинг *қийматлар соҳаси* дейилади ва R_ρ символи билан белгиланади. Бошқача қилиб айтганда, ρ муносабатнинг *аниқланиш соҳаси* деб, шу ρ муносабатнинг биринчи координаталаридан тузилган тўпламга айтилади, иккинчи координаталаридан тузилган тўплам эса *қийматлар соҳаси* дейилади.

Мисол. $\{<2, 4>, <3, 3>, <6, 7>\}$ ρ муносабат берилган бўлсин. У ҳолда $D_\rho = \{2,\ 3,\ 6\}$, $R_\rho = \{4,\ 3,\ 7\}$.

Бирор C тўплам $<x,\ y>$ тартибланган жуфтликлар тўплами бўлсин. Агар x бирор X тўпламнинг элементи ва y бошқа Y тўпламнинг элементи бўлса, у ҳолда C тўплам X ва Y тўпламларнинг *тўғри (декарт) кўпайтмасидан тузилган тўплам* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$C = X \times Y = \{<x,\ y>/x \in X \text{ ва } y \in Y\}.$$

Ҳар бир ρ муносабат айрим олинган $X\times Y$ тўғри кўпайтманинг қисм тўплами бўлади ва $X\supseteq D_\rho$, $Y\supseteq R_\rho$. Агар $\rho\subseteq X\times Y$ бўлса, у ҳолда ρ шу *X дан Y га бўлган муносабат* деб аталади. Агар $\rho\subseteq X\times Y$ ва $Z\supseteq X\cup Y$ бўлса, у ҳолда ρ *дан Z га бўлган муносабат* деб аталади. Z дан Z га бўлган муносабатни *Z ичидаги муносабат* деб аталади.

X бирор тўплам бўлсин. У ҳолда X ичидаги $X\times X$ муносабат *X ичидаги универсал муносабат* деб аталади.

$\{<x, x>/x\in X\}$ муносабат *X ичидаги айният муносабати* деб аталади ва i_x ёки i символи билан белгиланади. Ҳар қандай X тўпламнинг x ва y элементлари учун $x\,i_x\,y$ ифода $x = y$ билан тенг кучлидир.

A тўплам ва ρ муносабат берилган бўлсин. У ҳолда $\rho[A] = \{y/A$ нинг айрим x лари учун $x\rho y\}$. Бу тўплам A тўплам элементларининг *ρ- образлари тўплами* деб айтилади.

Мисол. $y=2x+1$ тўғри чизиқни $\{<x, y>\in R\times R/y=2x+1\}$ ва $y<x$ муносабатини $\{<x, y>\in R\times R/y<x\}$ шаклларда ёзиш мумкин.

6- §. Эквивалентлик муносабати

☑ *Рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатлар. Эквивалентлик синфи.*

1-таъриф. *Агар X тўпламнинг исталган x элементи учун $x\rho x$ бўлса, у ҳолда ρ муносабати X тўпламдаги* ***рефлексив муносабат*** *деб аталади; агар $x\rho y$ дан $y\rho x$ келиб чиқса, у ҳолда ρ* ***симметрик муносабат*** *деб аталади; агар $x\rho y$ ва $y\rho z$ дан $x\rho z$ келиб чиқса, у ҳолда ρ* ***транзитив муносабат*** *деб аталади.*

Шу кўрсатилган учала хоссага эга бўлган муносабатлар математикада кўп учрагани учун уларга махсус ном қўйилган.

2-таъриф. *Агар бирор тўпламдаги муносабат рефлексив, симметрик ва транзитив хоссаларга эга бўлса, у ҳолда бундай муносабат шу тўпламдаги* ***эквивалентлик муносабати*** *дейилади.*

Агар ρ муносабати X тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлса, у ҳолда $D_\rho = X$.

Мисоллар. Қуйидаги ҳар бир муносабат маълум тўпламдаги эквивалентлик муносабатига мисол бўла олади:

1. Исталган тўпламдаги тенглик муносабати.

2. Евклид текислигининг ҳамма учбурчаклар тўпламидаги ўхшашлик муносабати.

3. Бутун сонлар тўпламидаги n модуль бўйича таққослама муносабати.

4. Мамлакатда яшовчи одамлар тўпламидаги «бир уйда яшовчилар» муносабати.

Эквивалентлик муносабати ушбу асосий хусусиятга эга: у тўпламни кесишмайдиган қисм тўпламларга бўлади. Кейинги мисол, масалан, «бир уйда яшовчилар» муносабати мамлакатни бир-бири билан кесишмайдиган «бир уйда яшовчилар» қисм тўпламларига бўлади. Бу айтилганларни қуйидагича умумлаштириш мумкин.

ρ бирор X тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлсин. Агар X тўпламнинг A қисм тўпламининг шундай x элементи топилиб, $A = \{y/x\rho y\}$ бўлса, у ҳолда A қисм тўплам *эквивалентлик синфи* ёки *эквивалентлик* ρ- *синфи* деб аталади.

Шундай қилиб, X тўпламнинг шундай элементи мавжуд бўлсаки, $A = \rho[\{x\}]$ тенглик бажарилса, у вақтда A тўплам эквивалентлик синфи бўлади.

Агарда ρ муносабат тўғрисида ҳеч қандай англашилмовчилик туғилмайдиган бўлса, у вақтда X тўплам $[x]$ шаклида белгиланади, яъни $\rho[\{x\}] = [x]$ ва x юзага келтирган *эквивалентлик синфи* деб аталади.

Эквивалентлик синфи қуйидаги икки хоссага эга:

1) $x \in [x]$ — бир синфнинг ҳамма элементлари ўзаро эквивалентдир;

2) агар $x \rho y$ бўлса, у ҳолда $[x] = [y]$.

1-хосса эквивалентлик муносабатининг рефлексивлик хусусиятидан келиб чиқади.

2- хоссанинг исботи. $x \rho y$ бўлсин, яъни x элемент y элементга эквивалент бўлсин, у ҳолда $[y] \subseteq [x]$. Ҳақиқатан ҳам, $z \in [y]$ ($y \rho z$ ни билдиради) дан ва $x \rho z$ бўлганлиги учун ρ муносабатнинг транзитивлик хусусиятига асосан $x \rho z$ келиб чиқади, яъни $z \in [x]$. Эквивалентлик муносабатининг симметриклик хоссасидан фойдаланиб, $[x] \subseteq [y]$ ни исбот этиш мумкин. Демак, $[x] = [y]$.

7- §. Функция тушунчаси. Функциялар суперпозицияси

☑ *Функция. Тартибланган жуфтлик. Функциялар тенглиги. Бир қийматли функция. Суперпозиция. Функцияларнинг функцияси. Тескари функция.*

Функция тушунчасини олдинги параграфларда ўрганилган атамалар орқали аниқлаймиз. Функциянинг графиги тартибланган жуфтликлар тўпламидан иборат. Функция билан унинг графиги ўртасида ҳеч қандай фарқ йўқ. Функция шундай муносабатки, унинг икки хил элементининг биринчи координаталари ҳеч қачон тенг бўлмайди.

Шундай қилиб, f муносабат қуйидаги талабларни қаноатлантиргандагина функция бўла олади:

1) f нинг элементлари фақат тартибланган жуфтликлардан иборат;

2) агар $< x, y >$ ва $< x, z >$ элементлар f нинг элементлари бўлса, у ҳолда $y = z$.

Мисоллар. 1. $\{< 1, 2 >, < 2, 2 >, < 3, 4 >\}$ функциядир. $D_s = \{1, 2, 3\}$, $R_s = \{2, 4\}$.

2. $\{< 3, 4 >, < 3, 5 >, < 4, 6 >\}$ муносабати функция бўла олмайди, чунки $< 3, 4 >$ ва $< 3, 5 >$ элементларининг биринчи координаталари тенг.

3. $\{< x, x^2 + x + 1 >/x \in R\}$ функциядир, чунки агар $x = u$ бўлса, у ҳолда $x^2 + x + 1 = u^2 + u + 1$.

4. $\{< x^2, x >/x \in R\}$ функция бўла олмайди, чунки унинг $< 1, 1 >$, $< 1, -1 >$ элементлари мавжуд.

Агар f — функция ва $<x, y>\in f$, яъни xfy бўлса, у ҳолда x функциянинг *аргументи*, y эса f функциянинг x даги *қиймати* ёки x элементининг *образи* дейилади.

y ни белгилаш учун xf, $f(x)$, fx ёки x^f символлари ишлатилади. $f(x)$ символни $f(x)=f[\{x\}]$ деб, яъни x элементининг f- образлари тўплами деб қараш мумкин.

Икки f ва g функция бир хил элементлардан тузилган бўлса, бундай функциялар тенг бўлади ($f=g$), яъни бошқача қилиб айтганда, $D_f=D_g$ ва $f(x)=g(x)$ бўлсагина, $f=g$ бўлади. Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун унинг аниқланиш соҳаси ва шу соҳанинг ҳар бир элементи учун унинг қиймати берилиши керак.

$\{<x, x^2+x+1>/x\in R\}$ дан $f(x)=x^2+x+1$ келиб чиқади.

Агар f функциянинг аниқланиш соҳаси $R_s\subseteq Y$ бўлса, у ҳолда функциянинг ўзгариш соҳаси Y тўплам ичида бўлади деб айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$f: X\to Y \text{ ёки } X\xrightarrow{f}Y.$$

Юқорида кўрсатилган ҳамма f тўплами ($X\times Y$) тўпламнинг қисм тўплами бўлади ва уни Y^x деб белгилаймиз.

Агар $X=\varnothing$ бўлса, у ҳолда Y^x фақатгина бир элементдан иборат бўлади ва у $X\times Y$ тўпламнинг бўш қисм тўпламидир.

Агар $Y=\varnothing$ ва $X\neq\varnothing$ бўлса, у ҳолда $Y^x=\varnothing$.

Агар $x_1\neq x_2$ дан $f(x_1)\neq f(x_2)$ келиб чиқса, у ҳолда f *бир қийматли функция* дейилади.

Иккита f ва g функция берилган бўлсин. f ва g функцияларнинг *суперпозицияси* деб, $g\circ f=\{<x, z>$ шундай y мавжудки, xfy ва $ygz\}$ тўпламга айтилади ва $g\circ f$ символи билан белгиланади. Бу тўплам ҳам функция бўлади.

Шундай қилиб, функцияларнинг суперпозицияси қуйидагича бўлади:

$$g\circ f=z=g(f(x)).$$

Функцияларнинг суперпозицияси функцияларнинг функцияси деб ҳам айтилади.

$y=\sin x$ ва $z=\ln y$ бўлсин, у ҳолда $z=\ln\sin x$ функция $\sin x$ ва $\ln y$ функцияларнинг суперпозициясидир.

Суперпозиция амали ассоциативлик қонунига бўйсунади, яъни

$$g\circ(f\circ h)=g\circ f(\circ h).$$

Агар $f: x\rightarrow y$ ва $g: y\rightarrow z$ бўлса, у ҳолда $g\circ f: x\rightarrow z$ ва $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ бўлади.

Агар f бир қийматли функция бўлса, у ҳолда fдан координаталарининг ўрнини алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган функция f функцияга *тескари бўлган функция* деб аталади ва f^{-1} символи билан белгиланади. Фақат бир қийматли функциялар учун бажариладиган бу амал *қайтариш амали* дейилади. f^{-1} нинг аниқланиш соҳаси $D_{f^{-1}}=R_f$, $R_{f^{-1}}=D_f$.

8- §. Тартиблаш муносабати

☑ *Тартиблаш муносабати. Антисимметрик муносабат. Қисман тартиблаш муносабати. Иррефлексив муносабат. Чизиқли тартиблаш муносабати. Қисман тартибланган тўплам.*

1-таъриф. *Агар бирор X тўпламдаги x ва y элементлар учун $y\rho x$ муносабат ўрнига $x\rho y$ муносабат ўринли бўлишини кўрсатувчи муносабат* ***тартиблаш муносабати*** *деб аталади.*

Тартиблаш муносабати ёрдамида элементларни қайси тартибда қўйиш масаласини ҳал этиш мумкин. Ҳақиқий сонлар тўплами учун $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ муносабатлари тартиблаш муносабатларига мисол бўла олади. Тўпламлар системаси учун худди шундай вазифани $\subset$, $\subseteq$ муносабатлар ўйнайди.

2-таъриф. *Агар X тўпламнинг исталган x ва y элементлари учун бир вақтда $x\rho y$ ва $y\rho x$ бажарилишидан $x=y$ келиб чиқса, бундай ρ муносабат* ***антисимметрик муносабат*** *деб аталади.*

3-таъриф. *X тўплам ичида рефлексивлик, антисимметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга бўлган* ρ *муносабат X тўпламдаги* ***қисман тартиблаш муносабати*** *деб аталади. Ҳар қандай рефлексив ва транзитив муносабат* ***тартиблаш муносабати*** *деб аталади.*

Қисман тартиблаш муносабати ≤ символи билан белгиланади. Агар ≤ муносабати X тўпламни қисман тартибласа, у ҳолда X тўпламнинг исталган x ва y элементлари учун $x \leq y$ муносабати бажарилиши ҳам мумкин, бажарилмаслиги ҳам мумкин.

Худди шу каби, агар $x \leq y$ ва $x \neq y$ бўлса, у ҳолда $x < y$ деб ёзилади ва x элемент y дан *кичик* деб аталади.

4-таъриф. *X тўпламнинг ҳар қандай x элементи учун* $x\rho x$ *муносабат бажарилмаса, у ҳолда* ρ *шу X тўпламдаги* ***иррефлексив муносабат*** *деб аталади.*

Агар ≤ муносабати X тўпламдаги қисман тартиблаш муносабати бўлса, у ҳолда < муносабати X тўпламдаги иррефлексив ва транзитив муносабат бўлади.

5-таъриф. ρ *муносабат қисман тартиблаш муносабати бўлсин.* ρ *муносабатнинг аниқланиш соҳасига қарашли ҳар қандай икки хил x ва y элементлари учун* $x\rho y$ *ёки* $y\rho x$ *ўринли бўлса, бундай муносабат* ***чизиқли (оддий) тартиблаш муносабати*** *деб аталади.*

Ҳақиқий сонларни қийматига қараб тартиблаш чизиқли тартиблаш муносабатига мисол бўла олади.

6-таъриф. *Агар бирор X тўпламда қисман тартиблаш муносабати берилган бўлса, бундай тўплам* ***қисман тартибланган тўплам*** *деб аталади ва у* $< x, \leq >$ *тартибланган жуфтликдан иборат бўлади.*

Агар X тўпламда оддий тартиблаш муносабати берилган бўлса, у ҳолда X *оддий тартибланган тўплам* деб аталади ва у ҳам $< x, \leq >$ тартибланган жуфтликдан иборат бўлади, бу ерда ≤ муносабат X тўпламни оддий (чизиқли) тартиблайди.

Масалан, агар f тўпламлар системаси бўлса, у ҳолда $<f, \subseteq>$ қисман тартибланган тўплам бўлади.

$f: x \to x^1$ функция учун $x \le y$ дан $f(x) \le^1 f(y)$ келиб чиқса, у ҳолда бу функция X тўпламнинг $\le$ тартиблаш муносабатига ва X^1 тўпламнинг $\le^1$ тартиблаш муносабатига нисбатан тартибини сақлайдиган функция бўлади. X ва X^1 тўпламлар ўртасидаги ўзаро бир қийматли боғланиш $<x, \le>$ ва $<x^1, \le^1>$ га қисман тартибланган тўпламлар ўртасидаги *изоморфизм* деб айтилади. Агар шундай боғланиш мавжуд бўлса, у вақтда кўрсатилган қисман тартибланган тўпламлар изоморфдир.

X тўпламнинг ҳамма x лари учун $y \le x$ бўлса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи X тўпламнинг қисман тартиблаш муносабати $\le$ га нисбатан *энг кичик элементи* деб айтилади. Агар шундай элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.

X тўпламнинг ҳеч бир x элементи учун $x < y$ муносабати бажарилмаса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг қисман тартиблаш $\le$ муносабатига нисбатан *минимал (энг кичик) элементи* деб айтилади. Берилган тўпламда минимал элемент бир нечта бўлиши мумкин.

Агар ҳар қандай $x \in y$ учун $x \le y$ бўлса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг $\le$ муносабатига нисбатан *энг катта элементи* деб айтилади. Агар шундай элемент мавжуд бўлса, у ҳам ягонадир.

X тўпламнинг ҳеч бир x элементи учун $x > y$ муносабати бажарилмаса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг $\le$ муносабатига нисбатан *максимал элементи* деб айтилади.

Агар X тўпламнинг ҳар бир бўш эмас қисм тўплами энг кичик элементга эга бўлса, у ҳолда $<x, \le>$ қисман тартибланган тўплам *тўлиқ тартибланган тўплам* деб аталади. Масалан, $\{0, 1, 2, ...\}$.

$<x, \le>$ қисман тартибланган ва $A \subseteq X$ бўлсин. У ҳолда исталган $a \in A$ учун $a \le x$ бажарилса, X тўпламнинг x элементи A тўпламнинг *юқори чегараси* деб аталади. Худди шу каби, агар исталган $a \in A$ учун $x \leq a$ бажарилса, x элементи A тўпламнинг *қуйи чегараси* деб аталади.

Агар M тартибланган тўплам бўлса, у ҳолда унинг M^1 қисм тўплами ҳам тартибланган бўлади. Агар бу тартибланган тўплам чизиқли бўлса, у ҳолда M^1 қисм тўплам M тўпламнинг *занжири* дейилади.

$l = |M^1| - 1$ ифода *занжирнинг узунлиги* деб аталади, бу ерда $|M^1|$ — чизиқли тартибланган M^1 қисм тўпламнинг *қуввати*. l узунликдаги ҳар бир занжир $1, 2, ..., l+1$ бутун сонли занжирга изоморфдир.

M тўпламнинг энг катта элементини m_l билан ва энг кичик элементини m_0 билан белгилаймиз.

M тартибланган тўплам m_i элементининг *баландлиги* $d(m_i)$ деб $m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_i$ (M тўпламнинг) занжирлар узунлигининг максимумига (l_{max}) айтилади. M тартибланган тўплам *узунлиги* $d(M)$ деб M тўпламдаги занжирлар узунлигининг максимумига айтилади, яъни тартибланган M тўпламнинг узунлиги $d(M)$ унинг элементлари баландлиги $d(m_i)$ нинг максимумига тенг бўлади:

$$d(M) = \max d(m_i), \quad m_i \in M.$$

9-§. Панжара ҳақида тушунчалар

☑ *Панжара. Сигнатура. Дистрибутивлик критерийси. Дедекинд (модуляр) панжара. Дедекиндлик критерийси. Изоморф. Изоморфизм.*

Қисман тартибланган тўплам тушунчасидан фойдаланиб, панжара тушунчасини аниқлаймиз.

Таъриф. *Тартибланган тўплам $< M, \leq >$ нинг исталган иккита m_i, m_j элементи орасида $m_i \cap m_j$ (энг катта қуйи ёқ) ва $m_i \cup m_j$ (энг кичик юқори ёқ) муносабатлар мавжуд бўлса, бундай тўплам* ***панжара*** *деб аталади.*

Равшанки, M панжарага икки тарафлама бўлган $\overline{M}$ тартибланган тўплам ҳам панжара бўлади. $\overline{M}$ панжарада кесишма амалини бирлашмага ва бирлашма амалини кесишма амалига ўзгартириш керак. Тартибланган тўпламнинг ҳамма қисм тўпламлари энг катта қуйи ва энг кичик юқори чегарага эга бўлса, у ҳолда бундай тўплам *тўлиқ панжара* деб аталади.

Панжарани сигнатуралари қуйидаги хусусиятларга эга бўлган $A = <M, \cup, \cap>$ алгебра сифатида ҳам аниқлаш мумкин:

1) $m \cup m = m$, $m \cap m = m$ — идемпотентлик;

2) $m_i \cup m_j = m_j \cup m_i$, $m_i \cap m_j = m_j \cap m_i$ — коммутативлик;

3) $(m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k)$,
$(m_i \cup m_j) \cup m_k = m_i \cup (m_j \cup m_k)$ — ассоциативлик;

4) $m_i \cup (m_i \cap m_j) = m_i$, $m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i$ — ютиш.

Панжарага берилган иккала таъриф ҳам эквивалентдир. Бундан кейин 0 ва 1 ни панжаранинг мос равишда структурали ноли ва бири деб биламиз.

Агар A^1 тўплам ҳар бир m_i, $m_j \in A$ жуфт элементлар билан биргаликда уларнинг йиғиндиси $m_i \cup m_j$ ва кўпайтмаси $m_i \cap m_j$ ни ҳам ўз ичига олса, у ҳолда A^1 тўплам A панжаранинг *қисм панжараси* деб аталади. Энг катта m_β элемент ва энг кичик m_α элементдан иборат A^1 қисм панжара *I интервал* деб аталади:

$$I = [m_\alpha, m_\beta] = \{m_i \in A^1 / m_\alpha \quad m_i \leq m_\beta\}.$$

Агар

$$m_\alpha \cap m_\beta = 0, \quad m_\alpha \cup m_\beta = 1$$

бўлса, у ҳолда нол ва бир структурали A панжарада иккита m_α ва m_β элемент қўшимча (тўлдирувчи) элементлар бўлади. m га қўшимча бўлган $\overline{m}$ элемент A панжарадаги m элементнинг *тўлдирувчиси* деб ҳам аталади.

A панжарада умумий тўлдирувчига эга бўлган икки элемент A да *боғланган элементлар* деб аталади.

Панжаралар синфининг энг муҳими дистрибутив панжаралардир. Қуйидаги айниятларни (ҳамма m_i, m_j, $m_k \in A$ лар учун) қаноатлантирувчи A панжара *дистрибутив панжара* деб аталади:

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j \cap m_k,$$
$$m_k \cap (m_i \cup m_j) = m_k \cap m_i \cup m_k \cap m_j.$$

Панжаранинг дистрибутивлик критерийси. A панжара ҳар бир I интервалида исталган иккита боғланган элементи тенг бўлганда ва фақат шундагина дистрибутив панжара бўлади.

Дедекинд (модуляр) панжара деган тушунча киритамиз. A панжарада ҳамма m_i, m_j, $m_k \in A$ ва $m_j \leq m_k$ лар учун

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_i$$

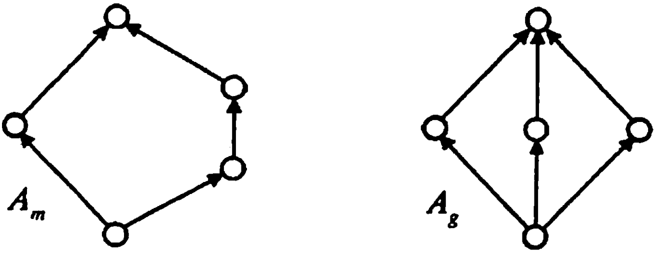
муносабат бажарилганда ва фақат шундагина A дедекинд панжара бўлади.

Панжаранинг дедекиндлик критерийси. A панжара дедекинд панжара бўлиши учун A_m панжарага изоморф бўлган қисм панжара мавжуд бўлмаслиги етарли ва зарур (I.4- шакл).

A_m панжара битта ноль баландликдаги элемент, иккита бир баландликдаги элемент, битта икки баландликдаги ва битта уч баландликдаги элементни ўз ичига олади.

Панжаранинг модулярлик критерийсидан фойдаланиб, **дистрибутивлик критерийсини** қулай ҳисоблаш шаклини мисол учун келтирамиз:

A панжара A_m га изоморф бўлган қисм панжарани ўз ичига олмаса (яъни дедекинд бўлса) ва A_g қисм панжарага изоморф бўлган қисм панжарани ўз ичига олмаса ва фақат шундагина дистрибутив бўлади (I.4- *б* шакл).



а) *б)*

I.4- шакл.

A_8 панжара битта ноль баландликдаги элементдан, бир баландликдаги учта элементдан ва икки баландликдаги битта элементдан иборат икки узунликдаги учта занжирдан тузилган.

0 ва 1 структурали A панжаранинг ҳар бир $\overline{m}$ элементининг тўлдирувчиси мавжуд бўлсин. У ҳолда бу панжарада $f_1(m) = \overline{m}$ унар операция берилган деса бўлади. Агар юқорида акс эттирилган хусусиятларга эга бўлган A панжарада

$$\overline{\overline{m}} = m, \tag{а}$$

$$\overline{m_i \cup m_j} = \overline{m_i} \cap \overline{m_j}, \tag{б}$$

$$m \cap \overline{m} = 0 \tag{в}$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда A панжара *тўлдирувчили (тўлдирувчиси бор) панжара* деб аталади.

(а) ва (б) га асосан $\cup$ операцияни $\cap$ операция билан ва $\cap$ операцияни $\cup$ операция билан ифодаланиши мумкин. Демак, тўлдирувчили панжарани сигнатураси $\cup$ бўлган алгебра сифатида аниқлаш мумкин. (а) ва (б) муносабатлардан қуйидагилар келиб чиқади ($1 = \overline{0}$ десак):

$$0 \cap m = 0, \qquad 0 \cup m = m,$$
$$1 \cap m = m, \qquad 1 \cup m = 1,$$
$$m \cup \overline{m} = 1.$$

Демак, 1- панжаранинг энг катта элементи, яъни структураси 1 бўлади.

Тўлдирувчили дистрибутив панжара Буль алгебраси бўлади.

Теорема. *Буль алгебраси Кантор алгебрасига изоморфдир. Буль ва Кантор алгебралари орасида қуйидаги изоморфизм мавжуд:*

$$a \cup b, \ M_a \cup M_b, \ a \cap b, \ M_a \cap M_b, \ \overline{a}, \ \overline{M_a},$$

бу ерда ифодаларнинг чап тарафида — назарий-панжаравий ва ўнг тарафида — назарий тўплам операциялари.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $y=2x+1$ тўғри чизиқни $\{<x, y>\in R\times R/y=2x+1\}$ ва $y<x$ муносабатини $\{<x, y>\in R\times R/y<x\}$ шаклларда ёзиш мумкинлигини тушунтиринг.
2. $\{<2, 4>, <5, 6>, <7, 6>, <8, 8>\}$ тартибланган жуфтликлар тўплами бинар муносабати бўла оладими?
3. $\{<1, 2>, <2, 2>, <3, 4>\}$ функциянинг аниқланиш ва қийматлар соҳаларини топинг.
4. $\{<3, 4>, <3, 5>, <4, 6>\}$ муносабат функция бўла оладими?
5. $\{<x, x^2+x+1>/x\in R\}$ функция бўлишини исботланг.
6. $\{<x, x>/x\in R\}$ функция бўла олмаслигини исботланг.
7. Буль алгебрасининг Кантор алгебрасига изоморф эканлигини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Муносабатлар тушунчаси нимани ифодалайди? Бинар муносабат деб нимага айтамиз?
2. Эквивалентлик муносабати. Қандай муносабатлар рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатлар деб аталади?
3. Функция тушунчаси. Функциялар суперпозицияси деб нимани тушунасиз?
4. Тартиблаш муносабатини тушунтиринг.
5. Панжара ҳақида тушунчалар. Панжаранинг дистрибутивлик ва дедекиндлик критерийлари нималардан иборат?

II БОБ

МУЛОҲАЗАЛАР АЛГЕБРАСИ

1- §. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар

☑ *Мулоҳаза. Абсолют чин (ёлғон) мулоҳаза. Қийматлар сатри. Инкор, конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция ва импликация мантиқий амаллари. Шеффер амали.*

Математик мантиқнинг ушбу мулоҳазалар алгебраси деб аталган бўлимида асосий текшириш объектлари бўлиб ғаплар хизмат қилади. Математик мантиқ ҳар бир гапнинг маъносига қараб, унинг чин, ҳаққоний, тўғри ёки ёлғон, нотўғри бўлиши билангина қизиқади.

Масалан: 1) «Тошкент — Ўзбекистоннинг пойтахти», «Ой ер атрофида айланади» деган гаплар чиндир.

2) «Ер ойдан кичик», «3 > 5» деган гапларнинг ҳар бири ёлғондир.

Шуни ҳам айтиш керакки, кўпгина гапларнинг чин ёки ёлғонлигини дарҳол аниқлаш қийин. Масалан, «Бугунги тун кечагидан қоронғироқ», деган гап қайси вақтда ва қайси жойда айтилишига қараб чин ҳам, ёлғон ҳам бўлиши мумкин.

1) Олдимга кел. 2) Уйда бўлдингми? 3) Янги йил билан. 4) Агар олдин билсам эдим. Бу гаплар чин ёки ёлғон қиймат қабул қилмайди.

Шундай қилиб, математик мантиқ: «Ҳар бир гап чин ёки ёлғон бўлиш хоссасига эга» деб қабул қилади.

1-таъриф. *Фақат чин ёки ёлғон қиймат қабул қила оладиган дарак гап **мулоҳаза** деб аталади.*

Демак, ҳар бир мулоҳаза маълум ҳолатда чин ёки ёлғон қийматга эга. Бундан кейин, чин қийматни қисқача «ч» ҳарфи ва ёлғон қийматни «ё» ҳарфи билан белгилаймиз.

Мулоҳазаларни белгилаш учун, асосан, лотин алфавитининг кичик ҳарфлари ишлатилади:

$$a, b, c, \ldots, u, v, \ldots, x, y, z.$$

Маълум мулоҳазалар борки, улар ҳамма мумкин бўлган ҳолатларда (вазиятларда) чин (ёлғон) қийматни қабул қилади. Бундай мулоҳазалар *абсолют чин (ёлғон)* мулоҳазалар деб аталади.

Мулоҳазалар алгебрасида, одатда, конкрет мулоҳазалар билангина эмас, балки ҳар қандай исталган мулоҳазалар билан ҳам шуғулланилади. Бу эса ўзгарувчи мулоҳаза тушунчасига олиб келади. Агар ўзгарувчи мулоҳазани x деб белгиласак, у ҳолда x конкрет мулоҳазаларнинг исталганини ифодалайди. Шунинг учун x икки: «ч» ва «ё» қийматли ўзгарувчини ифодалайди.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчи мулоҳаза берилган бўлсин. Буларнинг ҳар қайсиси чин ва ёлғон қийматларни қабул қилади. Шунинг учун қуйидаги қийматлар сатрини тузиш мумкин:

ё, ё, ..., ё,
ч, ё, ..., ё,
ё, ч, ..., ё,
....
ч. ч. ..., ч.

Демак, ўзгарувчилар сони n та бўлса, у ҳолда $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ та қийматлар сатрига эга бўламиз.

$x_1, x_2 : 2^2 = 4$ та қийматлар сатри.

$x_1, x_2, x_3 : 2^3 = 8$ та қийматлар сатри.

Математик мантиқда «эмас», «ёки», «ва», «агар ... бўлса, у ҳолда», «шунда ва фақат шундагина ..., қачон ...» сўзлари (боғловчилар) мулоҳазалар орасидаги *мантиқий амаллар* дейилади. Бу амаллар ёрдамида элементар мулоҳазалардан мураккаб мулоҳаза тузилади. Мулоҳазалар устидаги бу амаллар математик мантиқнинг элементар қисми бўлган мулоҳазалар мантиқи ёки мулоҳазалар алгебраси деб аталувчи қисмида ўрганилади. Ҳар иккала атама («мулоҳазалар мантиқи» ва «мулоҳазалар алгебраси») синоним сифатида ишлатилади, чунки улар мантиқнинг маълум қисмини икки нуқтаи назардан ифодалайди: бу ҳам мантиқ (ўз предметига кўра), ҳам алгебра (ўз методига кўра).

Мантиқий амаллар асосан 5 та бўлиб, уларнинг таърифлари қуйидагичадир.

1. Инкор амали. Исталган x ўзгарувчи мулоҳаза билан бирга $\bar{x}$ кўринишида белгиланган иккинчи ўзгарувчи мулоҳаза ҳам берилган бўлсин.

2-таъриф. *x мулоҳазанинг **инкори** деб аталган $\bar{x}$ мулоҳаза шу билан характерланадики, x мулоҳаза «ч» қийматни қабул қилганда, $\bar{x}$ мулоҳаза «ё» қийматни қабул қилади ва аксинча.*

Демак, мулоҳазалар мантиқининг энг содда амали бу инкор амали бўлиб, оддий тилдаги сифатдош «эмас» га тўғри келади. Бу амал «¯» символи билан белгиланади. Агар x бирор мулоҳаза, масалан, «бугун ҳаво совуқ» бўлса, у ҳолда $\bar{x}$ янги мураккаб «бугун ҳаво совуқ эмас» мулоҳазасидан иборатдир. $\bar{x}$ мулоҳаза «x эмас» деб ўқилади. Шунинг учун, агар x чин мулоҳаза бўлса, у ҳолда $\bar{x}$ ёлғон мулоҳаза бўлади ва, аксинча, x ёлғон бўлса $\bar{x}$ чиндир.

Инкор амалининг таъсирини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида тасвирлаймиз:

x	$\bar{x}$
ч	ё
ё	ч

Худди шу жадвални инкор амалининг таърифи сифатида қабул қиламиз ва бошқа мантиқий амаллар учун ҳам шунга ўхшаш жадваллардан фойдаланамиз. Улар *чинлик жадвали* дейилади. Бу жадваллардан фойдаланиш қулай бўлиб, улар математик мантиқнинг кўп бўлимларида ишлатилади.

2. Конъюнкция (мантиқий кўпайтма) амали. x ва y ўзгарувчи мулоҳазалар устида бажариладиган конъюнкция (лотинча *conjunctio* — боғлайман сўзидан) амалини $\wedge$ кўринишда ва бу амал натижасида ҳосил бўлган янги мураккаб мулоҳазани $x \wedge y$ кўринишда белгилаймиз.

3-таъриф. *«Ва» боғловчисига мос келувчи мантиқий амал **конъюнкция** амали деб аталади. x ва y мулоҳазаларнинг конъюнкцияси x ва y мулоҳазалар чин бўлгандагина чин қийматни қабул қилиб, қолган ҳолларда эса ёлғон қийматни қабул қилади.*

$x \wedge y$ кўринишдаги мулоҳаза «x ва y» деб ўқилади. Кўриниб турибдики, бу таъриф «ва» боғловчисининг маъносига тўлиқ тўғри келади. Ҳақиқатан ҳам, «5 сони тоқ ва туб» мулоҳазаси чин, чунки уни ташкил этувчи ҳар иккала мулоҳаза: «5 сони тоқ» ва «5 сони туб» ҳам чин. «10 сони 5 га бўлинади ва $7 > 9$» мулоҳазаси ёлғон, чунки мураккаб мулоҳазани ташкил этувчиларидан бири, чунончи «$7 > 9$» ёлғондир. Конъюнкция таърифини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида ёзиш мумкин:

x	y	$x \wedge y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ё
ё	ё	ё

3. Дизъюнкция (мантиқий йиғинди) амали. Мулоҳазалар мантиқида ишлатиладиган учинчи амал «ёки» боғловчисига тўғри келади. Шуни таъкидлаш керакки, «ёки» боғловчиси ўзбек тилида икки хил маънода ишлатилади. Биринчи ҳолда рад этувчи «ёки», иккинчи ҳолда рад этмайдиган «ёки» маъносида ишлатилади. Бунинг фарқи қуйидагилардан иборат. Агар x ва y мулоҳазаларнинг иккаласи ҳам ёлғон бўлса, у ҳолда «x ёки y» мулоҳазаси шубҳасиз ёлғон бўлади.

Агар x чин ва y ёлғон (ёки x ёлғон ва y чин) бўлса, у ҳолда «x ёки y» ни чин деб қараш керак, бу эса ўзбек тилидаги «ёки» сўзининг маъносига тўғри келади. Аммо ҳар иккала x ва y мулоҳазалар чин бўлганда «x ёки y» мулоҳаза чин бўлади. Бу вақтда «x ёки y» мулоҳазага қандай қараш керак?

Масалан, «Бугун якшанба ёки мен кинога бораман» мулоҳазани олайлик. Агар бугун якшанба ва мен кинога борсам, у ҳолда бу мулоҳаза чин ёки ёлғонми? Ўзбек тилида «ёки» боғловчиси бир маънода, баъзан эса бошқа маънода ишлатилади. Агар юқоридаги мулоҳазани чин деб қарасак, у ҳолда «ёки» ни рад этмайдиган маънода, иккинчи ҳолда «ёки» ни рад этувчи маънода ишлатиляпти деймиз.

4-таъриф. *Рад этмайдиган маънода ишлатиладиган «ёки» мантиқий амали **дизъюнкция** (лотинча disjunctio — фарқ қиламан сўзидан) дейилади. Иккита x ва y мулоҳазанинг дизъюнкцияси «$x \vee y$» каби ёзилади ва «x ёки y» деб ўқилади.*

Икки x ва y мулоҳазанинг дизъюнкцияси $x \vee y$ мураккаб мулоҳаза бўлиб, у фақат x ва y ёлғон бўлгандагина ёлғон қиймат қабул қилиб, қолган ҳолларда чин қийматни қабул қилади.

Дизъюнкция амалини қуйидаги чинлик жадвали орқали ҳам ифодалаш мумкин:

x	y	$x \vee y$
ч	ч	ч
ч	ё	ч
ё	ч	ч
ё	ё	ё

4. Импликация амали. Қуйидаги мураккаб мулоҳазаларни кўрайлик:

1) «Агар $2 \cdot 5 = 10$ бўлса, у ҳолда $6 \cdot 7 = 42$ бўлади»; 2) «Агар 30 сони 5 га бўлинса, у ҳолда 5 жуфтдир»; 3) «Агар $3 = 5$ бўлса, у ҳолда $15 = 17$»; 4) «Агар $4 \cdot 3 = 13$ бўлса, у ҳолда

$9+3=12$». Бу мулоҳазаларнинг ҳаммаси ҳам 2 та элементар мулоҳазадан «агар ... бўлса, у ҳолда ...» боғловчиси ёрдамида тузилган. Бу боғловчи мулоҳазалар мантиқининг импликация (лотинча *implicatio* — зич боғлайман сўзидан) амалига тўғри келади. Импликация амалини → кўринишида белгилаймиз.

5-таъриф. *Икки x ва y мулоҳазанинг* ***импликацияси*** *деб шундай мулоҳазага айтиладики, у фақат x чин ва y ёлғон бўлгандагина ёлғон бўлиб, қолган ҳамма ҳолларда чиндир.*

«$x \to y$» мулоҳазаси «агар x бўлса, у ҳолда y» деб ўқилади. Импликация таърифини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида ёзиш мумкин:

x	y	$x \to y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ч
ё	ё	ч

Чинлик жадвалидан кўринадики, юқоридаги мулоҳазаларнинг иккинчиси ёлғон бўлиб, қолганлари чиндир. «$x \to y$» импликацияда x мулоҳаза *асос* (*шарт, гипотеза, далил*), y мулоҳаза эса бу асоснинг *оқибати* деб аталади. Импликация чинлик жадвалининг охирги иккита сатри шуни кўрсатадики, ёлғон асосдан чин хулоса ҳам, ёлғон хулоса ҳам келиб чиқар экан, бошқача қилиб айтганда «ёлғондан ҳар бир нарсани кутиш мумкин».

Импликация мулоҳазалар мантиқининг муҳим амалларидан бири ҳисобланади. Сўзлашув тилида «агар x бўлса, у ҳолда y» нинг ҳар хил синонимлари бор: «x бўлса, y бўлади», «агар x бўлса, у вақтда y бўлади», «x дан y ҳосил бўлади», «x дан y келиб чиқади», «y, агар x бўлса», «x y учун етарли шарт» ва ҳоказо.

5. Эквивалентлик (тенг кучлилик) амали. Кўпчилик мураккаб мулоҳазалар элементар мулоҳазалардан «зарур ва кифоя», «фақат ва фақат», «шунда ва фақат шундагина, қачонки», «... бажарилиши етарли ва зарурдир» каби боғловчилари ёрдамида тузилади. Мулоҳазалар мантиқининг бундай боғловчиларга мос келадиган амали *эквивалентлик* дейилади ва «↔» каби белгиланади. $x \leftrightarrow y$ мураккаб мулоҳаза «x эквивалент y» деб ўқилади.

6-таъриф. *Мураккаб мулоҳаза $x \leftrightarrow y$ чин бўлади, агар x ва y лар чин ёки x ва y лар ёлғон бўлса, бошқа ҳолларда y ёлғондир. Бошқача қилиб айтганда, x ва y мулоҳазалар фақат ва фақат бир хил қиймат қабул қилгандагина $x \leftrightarrow y$ чин бўлади.*

Бу таърифни қуйидаги чинлик жадвали билан ифодалаш мумкин:

x	y	$x \leftrightarrow y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ё
ё	ё	ч

$x \leftrightarrow y$ эквивалентликка «x бўлса (бажарилса), y бўлади (бажарилади) ва y бўлса, x бўлади» ёки «x дан y келиб чиқади ва y дан x келиб чиқади» деган мулоҳаза мос келади, яъни $x \leftrightarrow y$ эквивалентликка математикада зарурий ва етарли шарт ҳақида айтилган теоремалар мос келади. Демак,

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \qquad (1)$$

бўлади. (1) га биноан, $x \leftrightarrow y$ эквивалентликни икки томонли импликация деб аташ мумкин.

6. Шеффер амали (штрихи). Ниҳоят, яна бир мантиқий амални келтирамиз. У *Шеффер амали* ёки *Шеффер штрихи* дейилади ва у « | » каби белгиланади. «$x|y$» мураккаб мулоҳаза «x Шеффер штрихи y» деб ўқилади. Бу амал қуйидагича таърифланади.

7-таъриф. *Фақат x ва y мулоҳазалар чин бўлгандагина, $x|y$ мулоҳаза ёлғондир.*

Бу таърифни қуйидаги чинлик жадвали ёрдамида ифодаласа ҳам бўлади:

x	y	$x\|y$
ё	ё	ч
ё	ч	ч
ч	ё	ч
ч	ч	ё

Асосий чинлик жадваллари. Юқорида келтирилган чинлик жадваллари, мос равишда, инкор қилиш, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентлик ва Шеффер амалларининг асосий чинлик жадваллари деб айтилади:

x	y	$x\wedge y$	$x\vee y$	$x\to y$	$x\leftrightarrow y$	$x\|y$
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ё
ч	ё	ё	ч	ё	ё	ч
ё	ч	ё	ч	ч	ё	ч
ё	ё	ё	ё	ч	ч	ч

x	$\bar{x}$
ч	ё
ё	ч

Машқлар

1. Қуйидаги гапларнинг қайси бирлари мулоҳаза бўлади:

1) Тошкент – Ўзбекистон Республикасининг пойтахти;

2) $\sqrt{5}+4\sqrt{3-30}$;

3) Ой − Марс планетасининг йўлдоши;
4) $a > 0$.

2. Қуйидаги мулоҳазаларнинг чин ёки ёлғон эканлигини аниқланг:
1) $2 \in \{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0,\ x \in R\}$; 2) $\{1\} \in N$.

3. Қуйидаги импликацияларнинг қайси бири чин бўлади:
1) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, у ҳолда $2 < 3$;
2) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, у ҳолда $2 > 3$.

2- §. Формулалар. Тенг кучли формулалар

☑ *Формула. Чинлик жадвали. Тенг кучли формулалар. Эквивалентлик билан тенг кучлилик орасидаги фарқ. Айният.*

Олдинги параграфда асосан мантиқий амалларни кўриб чиқдик. Энди бу амаллар орасида боғланишлар мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тенг кучли мулоҳазалар тушунчасини киритамиз. n та

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \qquad (2)$$

мулоҳаза берилган бўлсин.

1-таъриф. (2) *мулоҳазаларни инкор, дизъюнкция, конъюнкция, импликация ва эквиваленция мантиқий амаллари воситаси билан маълум тартибда бирлаштириб ҳосил қилинган мураккаб мулоҳаза* ***формула*** *деб аталади.*

Масалан: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ мураккаб мулоҳазалар формулалар бўлади. Қавслар мулоҳазалар устида мантиқий амалларнинг қай тартибда бажарилишини кўрсатади.

Энди формула тушунчасига математик таъриф берайлик. Бу тушунча қуйидагича аниқланади.

2-таъриф. *1) ҳар қандай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мулоҳазаларнинг исталган бири формуладир;*

2) агар A ва B нинг ҳар бири формула бўлса, у ҳолда $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ва $\overline{A}$ ҳам формулалардир;

3) 1 ва 2-бандларда кўрсатилган ифодалардан ташқари бошқа ҳеч қандай ифода формула бўла олмайди.

$x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчилар *элементар формулалар* деб аталади.

Кейинчалик формулани лозим бўлгандагина $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция шаклида белгилашдан фойдаланамиз.

Ҳар қандай формула учун чинлик жадвали тузиш мумкин. Бунинг учун асосий чинлик жадвалларидан кетма-кет фойдаланиш керак. Масалан, $(x\wedge y)\to(\overline{\bar{x}\vee y})$ формуланинг чинлик жадвали қуйидагича бўлади:

x	y	$\bar{x}$	$x\wedge y$	$\bar{x}\vee y$	$\overline{\bar{x}\vee y}$	$(x\wedge y)\to$ $\to(\overline{\bar{x}\vee y})$
ч	ч	ё	ч	ч	ё	ё
ч	ё	ё	ё	ё	ч	ч
ё	ч	ч	ё	ч	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ч	ё	ч

Шундай қилиб, ҳар қандай формулага {ч, ё} тўпламнинг бир элементи мос қилиб қўйилади.

3-таъриф. *A ва B формулалар берилган бўлсин.* (1) *элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир қийматлари сатри учун A ва B формулаларнинг мос қийматлари бир хил бўлса, A ва B формулалар* ***тенг кучли формулалар*** *деб аталади ва бу $A = B$ тарзда белгиланади.* (1) *қаторнинг камида битта қийматлар сатри учун A ва B формулаларнинг мос қийматлари бир хил бўлмаса, у ҳолда A ва B формулалар тенг кучлимас формулалар деб аталади ва $A \neq B$ кўринишда белгиланади.*

A ва B формулаларнинг тенг кучли бўлиш-бўлмаслиги улар учун тузилган чинлик жадваллари ёрдамида аниқланади.

Мисоллар. 1. $\bar{x}\vee y = A$ ва $B = x\to y$ формулалар берилган бўлсин.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x}\vee y$	$x\to y$
ч	ч	ё	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ё
ё	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ч

Жадвалдан кўриниб турибдики, тўртала қийматлар сатри учун A ва B формулаларнинг мос қийматлари бир хил. Демак, таърифга асосан $A=B$.

2. $x\vee x=x$ тенглик исбот этилсин. $A=x\vee x$, $B=x$.

x	$x\vee x$
ч	ч
ё	ё

Демак, жадвалга асосан $A=B$.

3. $A=(x\vee\bar{x})\wedge y$, $B=y$.

x	y	$\bar{x}$	$x\vee\bar{x}$	$(x\vee\bar{x})\wedge y$
ч	ч	ё	ч	ч
ч	ё	ё	ч	ё
ё	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ё

Демак, $(x\vee\bar{x})\wedge y=y$.

Худди шу каби қуйидаги тенг кучлиликларни исботлаш мумкин.

4. $x\vee\bar{x}=y\vee\bar{y}$.
5. $x\vee(x\wedge y)=x$.
6. $(x\vee\bar{x})\to y=(x\wedge\bar{x})\vee y$.
7. $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

Эквивалентлик билан тенг кучлилик орасидаги фарқни тушуниш учун уларни алгебраик тенглама ва айният билан солиштирамиз. Тенглама (масалан, $2x+y=10$) ҳарфларнинг айрим қийматлари (масалан, $x=4$, $y=2$) учун бажарилиб, бошқа қийматлар (масалан, $x=1$, $y=2$) учун бажарилмайди. Шунга ўхшаш, *эквивалентлик* $A \leftrightarrow B$ деб, шундай (масалан, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) мулоҳазага айтиладики, унга x_1, x_2, ..., x_n ҳарфларининг ўрнига бир хил конкрет мулоҳазалар қўйилганда у чин қиймат қабул қилиб, бошқа конкрет қийматлар қўйилганда ёлғон қийматни қабул қилади. *Айният* деб, шундай тенгликка (масалан, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$) айтиладики, у ўзида қатнашадиган барча ҳарфлар учун бажарилади. Шунга ўхшаш, $A \equiv B$ мулоҳазада қатнашадиган барча x_1, x_2, ..., x_n ҳарфларининг ўрнига ихтиёрий конкрет мулоҳазалар қўйилганда у чин қиймат қабул қилса, бундай мулоҳаза *тенг кучлилик* дейилади.

Алгебрада айний ифодаларни бир-бири билан алмаштириш мумкин бўлганидек, мантиқ алгебрасида тенг кучли мулоҳазаларни (формулаларни) ҳам бир-бири билан алмаштириш мумкин. Бу эса мураккаб формулаларни (мулоҳазаларни) соддалаштириш имконини беради.

Биз тенглама ва айният билан эквивалентлик ва тенг кучлилик орасидаги ўхшашликни келтирдик. Энди эса улар орасидаги фарқни кўрсатамиз. Маълумки, алгебрада ҳеч қандай алмаштириш ёрдамида тенгликни амаллар (қўшиш, айириш, даражага кўтариш, бўлиш ва ҳоказо) билан алмаштириб бўлмайди. Мантиқ алгебрасида эса эквивалентликни импликация (→) ёки конъюнкция (∧), дизъюнкция (∨) ва инкор (–) амаллари орқали ифодалаш мумкинлигини биз юқорида кўрсатган эдик (1- § даги (1) формулага қаранг). (1) формуланинг тўғрилигини чинлик жадвали орқали кўрсатамиз:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
ч	ч	ч	ч	ч	ч
ё	ч	ч	ё	ё	ё
ч	ё	ё	ч	ё	ё
ё	ё	ч	ч	ч	ч

Жадвалдан кўринадики, охирги икки устуннинг чинлик қиймати устма-уст тушади. Шу билан (1) формула исботланди.

Оддий алгебрада тенглик белгиси «=» қуйидаги аксиомаларни қаноатлантиради: 1) ихтиёрий a сон учун $a = a$ (рефлексивлик); 2) агар $a = b$ бўлса, у ҳолда $b = a$ (симметриклик); 3) агар $a = b$, $b = c$ бўлса, у ҳолда $a = c$ (транзитивлик) бўлади.

Шунга ўхшаш, мулоҳазалар алгебрасида, эквивалентлик таърифидан осонлик билан кўриш мумкинки, у рефлексив, симметрик ва транзитив, яъни:

1) ихтиёрий x мулоҳаза учун $x \equiv x$;

2) ихтиёрий икки x ва y мулоҳазалар учун, агар $x \equiv y$ бўлса, у ҳолда $y \equiv x$;

3) ихтиёрий x, y, z учта мулоҳазалар учун $x \equiv y$ ва $y \equiv z$ бўлса, у ҳолда $x \equiv z$.

Машқлар

1. Қуйидаги формулаларнинг чинлик жадвалларини тузинг:

1) $(\bar{x} \vee z) \wedge (y \rightarrow (u \rightarrow x))$; 2) $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow x_n)\ldots)$;

3) $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \rightarrow y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_n$.

2. Тенг кучлиликларни исботланг:

1) $x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y}$; 2) $xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y} \equiv x \rightarrow y$;

3) $x \rightarrow \bar{y} \equiv y \rightarrow \bar{x}$; 4) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z$;

5) $x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

3. Формулаларни соддалаштиринг:

1) $(x \rightarrow x) \rightarrow x$; 2) $x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

3) $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} \vee (x \rightarrow y) \cdot x$; 4) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$.

3- §. Айнан чин, айнан ёлғон ва бажарилувчи формулалар

☑ *Айнан чин. Айнан ёлғон. Тавтология. Бажарилувчи формула. Мантиқ қонунлари. Ечилиш муаммоси.*

1-таъриф. *Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат чин қийматни қабул қилувчи формула айнан чин (доимо чин) формула ёки* ***тавтология*** *деб аталади ва J билан белгиланади.*

A формуланинг тавтология эканлиги ёки эмаслиги қийматлар жадвалини тузиш орқали аниқланади.

Мисоллар.

1. $J = x \wedge (x \to y) \to y$ формула тавтологиядир. Ҳақиқатан:

x	y	$x \to y$	$x \wedge (x \to y)$	$x \wedge (x \to y) \to y$
ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ч

2. $J = (\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ формула ҳам тавтологиядир:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$
ч	ч	ё	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ч	ч

2-таъриф. *Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат ёлғон қийматни қабул қилувчи формулалар* ***айнан ёлғон (доимо ёлғон)*** *ёки* ***бажарилмайдиган*** *формулалар дейилади ва $\bar{J}$ билан белгиланади.*

Масалан, $\bar{J} = (\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ айнан ёлғон формуладир:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$\overline{x \to y}$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$
ч	ч	ё	ч	ч	ё	ё
ч	ё	ё	ё	ё	ч	ё
ё	ч	ч	ч	ч	ё	ё
ё	ё	ч	ч	ч	ё	ё

Маълумки, айнан чин формуланинг инкори айнан ёлғон формула бўлади ва аксинча. Айнан чин ва айнан ёлғон формулалар унга кирадиган ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмай, фақат битта қиймат қабул қилади.

3-таъриф. *Агар ($A \leftrightarrow B$) тавтология бўлса, у ҳолда A ва B* ***мантиқий эквивалент*** *деб аталади. Агар ($A \to B$) тавтология бўлса, у ҳолда B формула A нинг* ***мантиқий хулосаси*** *деб аталади.*

Энди Э.Мендельсоннинг [39] китобида баён этилган тавтологияларга оид айрим теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. *Агар A ва $A \to B$ айнан чин формулалар (тавтологиялар) бўлса, у ҳолда B формула ҳам тавтология бўлади.*

Исбот. *A* ва $A \to B$ тавтологиялар бўлсин. *A* ва *B* формулаларнинг таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг бирор қийматлар сатрида *B* формула ёлғон қиймат қабул қилсин. *A* формула тавтология бўлганлиги учун ўзгарувчиларнинг ўша қийматлар сатрида *A* чин қиймат қабул қилади. У ҳолда ($A \to B$) формула ёлғон қиймат қабул қилади. Бу натижа ($A \to B$) нинг тавтология деган фаразимизга қарама-қаршидир. Демак, *B* тавтологиядир.

2-теорема. *Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган A формула тавтология ва B формула A формуладан $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар ўрнига мос равишда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ формулаларни қўйиш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда B формула тавтология бўлади, яъни тавтологияда ўрнига қўйиш яна тавтологияни келтириб чиқаради.*

Исбот. A тавтология бўлсин ва B формула таркибига кирувчи ўзгарувчи мулоҳазаларнинг ихтиёрий қийматлар сатри берилган бўлсин. У ҳолда A_1, A_2, ..., A_n формулалар y_1, y_2, ..., y_n (ҳар бир x_i ч ёки ё қиймат қабул қилади) қийматлар қабул қилади. Агар x_1, x_2, ..., x_n га мос равишда y_1, y_2, ..., y_n қийматларни берсак, у ҳолда A нинг натижавий қиймати B нинг чинлик қийматига мос келади. A тавтология бўлганлиги учун B формула таркибига кирган ўзгарувчиларнинг берилган ихтиёрий қийматлар сатрида ч қиймат қабул қилади. Шундай қилиб, B доимо ч қиймат қабул қилади ва у тавтология бўлади.

3-теорема. *Агар A_1 формула таркибига бир ёки кўп марта кирган A формула ўрнига B формулани қўйиш натижасида B_1 формула ҳосил қилинса, у ҳолда $((A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1))$ тавтология бўлади. Демак, A ва B лар мантиқий эквивалент бўлса, у ҳолда A_1 ва B_1 ҳам мантиқий эквивалент бўлади.*

Исбот. Агар A ва B формулалар ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатрида қарама-қарши чинлик қийматларига эга бўлса, у ҳолда $(A\leftrightarrow B)$ нинг чинлик қиймати ё бўлади ва натижада $((A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1))$ формула ч қиймат қабул қилади. Агар A ва B лар ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатрида бир хил чинлик қиймати қабул қилса, у ҳолда A_1 ва B_1 формулалар ҳам бир хил чинлик қиймати қабул қилади, чунки теореманинг шартига асосан B_1 формула A_1 формуладан A нинг ўрнига B ни қўйиш натижасида ҳосил қилинган. Демак, бу ҳолда $(A\leftrightarrow B)$ ҳам, $(A_1\leftrightarrow B_1)$ ҳам ч қиймат қабул қилади. Шунинг учун $((A\leftrightarrow B)\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1))$ формула ҳам ч қиймат қабул қилади. Демак, $((A\leftrightarrow B)\rightarrow$ $\rightarrow(A_1\leftrightarrow B_1))$ формула тавтология бўлади.

4-таъриф. *Элементар мулоҳазаларнинг камида битта қийматлар сатрида чин қиймат қабул қилувчи ва айнан чин бўлмаган формула* ***бажарилувчи формула*** *деб аталади.*

Масалан, $(\overline{x \wedge \bar{y}}) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge y)$; $[(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)] \rightarrow \bar{z}$; $x \vee y$; $x \rightarrow y \leftrightarrow z$ формулалар бажарилувчи формулалар ҳисобланади.

Айнан чин формулалар катта аҳамиятга эга бўлиб, улар мантиқ қонунларини ифодалайди. Шу муносабат билан қуйидаги масала туғилади: шундай методни топиш керакки, у чекли миқдордаги амаллар ёрдамида мантиқ алгебрасининг ихтиёрий муайян формуласини айнан чин ёки айнан чин эмаслигини аниқласин. Бундай метод *ечилувчи метод*, ёки *алгоритм*, ёки *ечилувчи процедура* дейилади. Қўйилган масаланинг ўзи эса *«ечилиш муаммоси»* дейилади. Бу муаммо фақат мулоҳазалар алгебраси учунгина эмас, балки бошқа мантиқий системалар учун ҳам қўйилади. У мулоҳазалар алгебраси учун ижобий ҳал этилади. Бу ерда ечилувчи процедура сифатида чинлик жадвалини олишимиз мумкин, чунки бундай жадвал ҳар бир муайян формула учун қўйилган саволга жавоб беради. Агар берилган формулага мос келадиган жадвалнинг охирги устунида фақат «чин» бўлса, у ҳолда бу формула айнан «чин», агар охирги устунда ҳеч бўлмаганда битта «ёлғон» бўлса, у ҳолда формула айнан чин эмас бўлади. Табиийки, амалда бу усулни ҳар доим ҳам қўллаб бўлавермайди (чунки формулада n та ўзгарувчи қатнашса, бундай жадвал 2^n та сатрга эга бўлади). Лекин ҳар доим чекли миқдордаги амаллар бажариб, принцип жиҳатдан қўйилган саволга жавоб бериш мумкин. Кейинги параграфларда бошқа бир ечилувчи процедурани келтирамиз, у берилган формулани нормал шаклга келтиришга асосланган. Нормал шакллар математик мантиқнинг бошқа масалаларида ҳам ишлатилади.

Машқлар

1. Қуйидагиларнинг қайси бирлари айнан чин ва айнан ёлғон формула эканлигини аниқланг:

1) $\overline{(\overline{x \vee y} \to \overline{x \wedge y}}$; 2) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

3) $\overline{p_1 \to (p_2 \to p_1)}$; 4) $\bar{p} \to (p_1 \to p_2)$;

5) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$; 6) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$.

2. Айнан чин ёки айнан ёлғон формула эканлигини исботланг:

1) $(x \to y) \wedge (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$; 2) $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to \bar{y})$;

3) $x \vee \bar{x} \to y \wedge \bar{y}$;

4) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$;

5) $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y)$;

6) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

7) $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;

8) $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$.

4- §. Асосий тенг кучлиликлар

☑ *Асосий тенг кучлиликлар. ∨, ∧, – амаллар қатнашган мулоҳазалар. Коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик қонунлари. Идемпотентлик ва ютиш қонунлари.*

Бу параграфда кенг қўлланиладиган тенг кучлиликлар қаралади. Аввало, оддий алгебрада маълум бўлган айниятларга ўхшашларини келтирамиз. Маълумки, қўшиш ва кўпайтириш амали қуйидаги қонуниятларга бўйсунади:

1) $x+y=y+x$ (қўшишнинг коммутативлик қонуни);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (қўшишнинг ассоциативлик қонуни);

3) $xy=yx$ (кўпайтиришнинг коммутативлик қонуни);

4) $(xy)z=x(yz)$ (кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни);

5) $x(y+z)=xy+xz$ (кўпайтиришнинг йиғиндига нисбатан дистрибутивлик қонуни).

Мантиқ алгебрасида шу айниятларга ўхшаш қуйидаги тенг кучлиликлар ўринлидир:

$$x \wedge y = y \wedge x, \tag{3}$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \tag{4}$$

$$x \vee y = y \vee x, \tag{5}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \tag{6}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{7}$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \tag{8}$$

Бу тенг кучлиликларни текшириш учун чинлик жадвалидан фойдаланса бўлади. Бу ерда биз (8) ни текширадиган жадвални келтириш билан кифояланамиз:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y)$	$x \vee (y \wedge z) \equiv$ $\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
ё	ё	ё	ё	ё	ё	ё	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ё	ч	ё	ё	ч
ё	ч	ё	ё	ч	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ч	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ч	ё	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч

Дизъюнкция ($\vee$) амали коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эгадир. (7)—(8) тенг кучлиликлар эса $\wedge$ ва $\vee$ амалларининг бир-бирига нисбатан дистрибутивлик хоссасига эга эканлигини кўрсатади. Шуни ҳам таъкидлаш керакки, оддий алгебрада (8) тенг кучлиликка ўхшаш айният йўқ (чунки $x + yz = (x + y)(x + z)$ айният эмас). Юқоридаги ўхшашлик асосида $x \vee y$ ни *мантиқий йиғинди*, $x \wedge y$ ни эса *мантиқий кўпайтма* деб олишимиз мумкин. Бу ўхшашликни кучайтириш учун, алгебраик кўпайтмада нуқта ($\cdot$) ёзилмаганидек (масалан, $x \cdot y = xy$), мантиқий кўпайтириш белгиси ($\wedge$) ни ёзмаймиз, яъни $x \wedge y$ нинг ўрнига xy ни ёзамиз. Бундан кейин мантиқий ифодаларни соддалаштириш, уларда қавсларни камайтириш мақсадида қуйидагича шартлашамиз:

1) бирор мантиқий ифода инкор ишораси остида бўлса, уни қавссиз ёзамиз, яъни $\overline{(x \vee y)} \wedge z$ нинг ўрнига $\overline{x \vee y} \wedge z$ ни ёки $\overline{x \vee y}z$ ни ёзамиз;

2) конъюнкция белгиси дизъюнкция, импликация ва эквивалентлик белгиларига нисбатан мустаҳкамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(xy) \vee z$ ўрнига $xy \vee z$, $x \rightarrow (yz)$ ўрнига $x \rightarrow yz$, $(xy) \leftrightarrow (zu)$ ўрнига $xy \leftrightarrow zu$ ёзамиз;

3) дизъюнкция белгиси импликация ва эквивалентлик белгиларига нисбатан мустаҳкамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(x \vee y) \to z$ ўрнига $x \vee y \to z$ ва $(x \vee y) \leftrightarrow z$ ўрнига $x \vee y \leftrightarrow z$ ёзамиз;

4) импликация белгиси эквивалентлик белгисига нисбатан мустаҳкамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(x \to y) \leftrightarrow z$ ўрнига $x \to y \leftrightarrow z$ ёзамиз. Бу келишувлар мантиқий ифодаларни ёзишни соддалаштиради, масалан,

$$(((x \leftrightarrow y) \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (((\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \to z)))$$

ўрнига

$$(x \leftrightarrow y) \to \overline{xz} \leftrightarrow x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee (x \to z)$$

ни ёзамиз.

Юқоридаги I- §, (I) тенг кучлилик ёрдамида $\leftrightarrow$ белгисини $\to$ ва $\wedge$ белгилари орқали ифодалашимиз мумкин. Энди $x \to y$ импликацияни кўрайлик. Фақатгина x чин ва y ёлғон бўлгандагина $\bar{x} \vee y$ мулоҳаза ёлғон, бундан эса фақатгина x чин (яъни $\bar{x}$ ёлғон) ва y ёлғон бўлгандагина $\bar{x} \vee y$ мулоҳаза ёлғон бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, яна бир тенг кучлиликка эга бўламиз:

$$x \to y \equiv \bar{x} \vee y. \qquad (9)$$

Демак, $\to$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, – белгиларни ўз ичига олган ихтиёрий мураккаб мулоҳазани унга тенг кучли бўлган шундай мулоҳаза билан алмаштириш мумкинки, натижада фақат $\vee$, $\wedge$, – белгилар қатнашган мулоҳазаларга эга бўламиз. Бундай алмаштириш мантиқ алгебрасининг электротехникадаги татбиқи учун катта аҳамиятга эга, чунки у ерда ишлатиладиган ифодаларда фақат учта $\vee$, $\wedge$, – белги қатнашади. Энди $\vee$ белгини $\wedge$ ва – белгилар орқали ифодалаймиз. Буни икки карра инкорни ўчириш қонуни деб аталувчи $\bar{\bar{x}} = x$ тенг кучлиликдан ва де Морган қонунлари деб аталувчи ҳамда чинлик жадвали ёрдамида осонгина текшириладиган

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \qquad (11)$$

тенг кучлиликлар ёрдамида бажариш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \qquad (12)$$

ва шунга ўхшаш

$$x \wedge y \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \qquad (13)$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, мантиқ алгебрасининг ихтиёрий ифодасини унга тенг кучли бўлган шундай ифода билан алмаштириш мумкинки, охирги ифодада фақат $\wedge$ ва – ёки $\vee$ ва – белгилар қатнашади. Шунга ўхшаш, барча мантиқий амалларни $\to$ ва – амаллари билан алмаштириш мумкин.

Шуни ҳам айтиш керакки, барча амалларни фақатгина Шеффер штрихи билан алмаштириш ҳам мумкин:

$$\bar{x} \equiv x|x, \quad x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y), \quad \overline{x \wedge y} \equiv x|y, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y},$$

$$x \to y \equiv x|\bar{y}.$$

Бу тенг кучлиликларни, Шеффер амали таърифидан фойдаланиб, чинлик жадвали ёрдамида осонгина кўрсатиш мумкин.

Энди мисол сифатида $(x \to y)(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})$ ифодани шундай алмаштирамизки, натижада фақат $\wedge$, $\vee$ ва – белгилари қатнашсин. Бунинг учун аввало (9), (2) ва (3) тенг кучлиликлардан фойдаланамиз:

$$(x \to y)(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \to \bar{y})\cdot(\bar{y} \to \bar{x}) \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \to (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y)\cdot(\bar{y} \vee x).$$

Коммутативлик ва дистрибутивлик қонунларидан фойдаланиб, бу ифодани қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$(x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x}\cdot y \vee \bar{y}\cdot x \vee \bar{x}\cdot\bar{y} \vee x\cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Энди шундай савол туғилади: агар ҳамма мантиқий амалларни иккита (–, $\wedge$) ёки ҳатто битта $\bar{\bar{x}} = x$ га келтиришнинг ҳожати борми? Сабаб шундаки, фақат иккита ёки битта белги орқали алмаштирганда мантиқий ифодалар жуда чўзилиб кетади ва уни кўздан кечириш қийинлашади.

Иккинчи томондан, мантиқий хулосаларнинг қонуниятларини баён этаётганда, юқорида киритилган $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ амаллари катта аҳамиятга эга. Бу хусусан $\to$ амалига хосдир. Яна бир нечта муҳим тенг кучлиликларни келтирамиз:

$$x \cdot \bar{x} \equiv \text{ч (қарама-қаршилик қонуни)}, \qquad (14)$$

$$x \vee \bar{x} \equiv \text{ё (учинчиси истисно қонуни)}, \qquad (15)$$

$$x \cdot x \equiv x,\ x \vee x \equiv x \text{ (идемпотентлик қонуни)}, \qquad (16)$$

$$x \cdot (x \vee y) \equiv x,\ x \vee x \cdot y \equiv x \text{ (ютиш қонунлари)} \qquad (17)$$

$$x \vee \text{ё} \equiv x,\quad x \vee \text{ч} \equiv \text{ч},\quad x \cdot \text{ч} \equiv x,\quad x \cdot \text{ё} \equiv \text{ё}. \qquad (18)$$

Бу тенг кучлиликлар ихтиёрий мантиқий ифодаларни керакли кўринишга келтиришга имкон беради.

Машқлар

1. Тенг кучлиликни исботланг: $\overline{x \to y} \equiv x \wedge \bar{y}$.
2. Формулани соддалаштиринг: $A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y$.
3. Берилган формуланинг айнан чинлигини исботланг:

$$A \equiv x \to (y \to x).$$

5- §. Тенг кучли формулаларга доир теоремалар

☑ *Теоремалар. Зарурий ва етарли шартлар.*

1-теорема. *A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $\bar{A}$ ва $\bar{B}$ формулалар тенг кучли бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. $A = B$ бўлсин. У вақтда ҳамма ҳолатларда формулалар бир хил қийматга эга бўлади. У ҳолда $\bar{A}$ ва $\bar{B}$ формулалар ҳам чинлик жадвалининг ҳар бир сатрида бир хил қийматларга эга бўлади. Демак, $\bar{A} = \bar{B}$.

Худди шунга ўхшаш, $\bar{A} = \bar{B}$ дан $A = B$ келиб чиқади.

2-теорема. *A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин (тавтология) бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. 1. $A = B$ бўлсин. Бу ҳолда, эквивалентлик таърифига асосан, $A \leftrightarrow B$ нинг ҳамма сатрларидаги қийматлари «ч» дан иборат, демак, $A \leftrightarrow B$ тавтологияни ифодалайди.

2. $A \leftrightarrow B$ тавтология бўлсин. У ҳолда $A \leftrightarrow B$ ҳар бир сатрда «ч» қийматга эга бўлади. Бундан эса A ва B нинг ҳар бир сатрдаги қийматлари бир хил, яъни $A = B$ келиб чиқади.

Мисоллар. 1. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ — айнан чин.

2. $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$ — айнан чин.

3-теорема. *$A \leftrightarrow B$ айнан чин бўлиши учун $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ айнан чин бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. а) $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин бўлсин. У вақтда 2-теоремага асосан $\bar{A} = \bar{B}$. Демак, 2-теоремага асосан $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ формуланинг айнан чинлиги келиб чиқади.

б) $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ айнан чин бўлсин. Бундан $\bar{A} = \bar{B}$ келиб чиқади ва ўз навбатида $A = B$. Демак, $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин бўлади.

4-теорема. *P формуланинг исталган A қисми ўрнига шу A билан тенг кучли B формулани қўйишдан ҳосил бўлган янги Q формула P билан тенг кучлидир.*

Мисол. $P = \overline{x \vee y} \to z$ берилган бўлсин. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge y$ бўлгани учун $P = Q = \bar{x} \wedge \bar{y} \to z = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee z = x \vee y \vee z$.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги мулоҳазаларнинг чин ёки ёлғон эканлигини аниқланг:

   1) $2 \in \{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0,\ x \in R\}$; 2) $\{1\} \in N$.

2. Қуйидаги импликацияларнинг қайси бири чин бўлади:

   1) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, у ҳолда $2 < 3$;

   2) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, у ҳолда $2 > 3$.

3. Қуйидаги тенг кучлиликларни исботланг:

1) $x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y}$; 2) $x \vee (x \wedge y) = x$;

3) $(x \vee \bar{x}) \to y = (x \wedge \bar{x}) \vee y$; 4) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

4. Қуйидаги формулаларнинг чинлик жадваллари тузилсин:

1) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$; 2) $(x \vee y) \to (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \to \bar{y})$;

3) $(x_1 \wedge x_2) \vee x_3$; 4) $x \wedge \bar{y} \to (y \vee \bar{x} \to \bar{z})$;

5) $(x_1 \to \bar{x}_2) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \bar{x}_3)$.

5. Тенг кучлиликларни исбот қилинг:

1) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$;

2) $x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y$;

3) $(x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt$;

4) $xy \vee zt \equiv (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$;

5) $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \to y \equiv x_1 \to (x_2 \to (\ldots \to (x_n \to y)\ldots))$.

6. Қуйидаги формулаларни соддалаштиринг:

1) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$;

2) $(x \vee \bar{y} \to (z \to y \vee \bar{y} \vee x)) \wedge (x \vee \overline{x \to (x \to x)}) \to y$;

3) $(x \wedge \overline{x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{y}} \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z)$;

4) $(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \bar{y}) \vee x \vee (y \wedge \overline{x \wedge \bar{x}})$.

7. Қуйидагиларнинг қайси бирлари айнан чин ва айнан ёлғон формула эканлигини аниқланг:

1) $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$;

2) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$;

3) $(p_1 \to (p_2 \to p_3) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;

4) $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

8. Айнан чин ёки айнан ёлғон формула эканлигини исботланг:

1) $x \wedge y \to x$; 2) $x \to (x \vee y)$;

3) $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$; 4) $(\bar{y} \to \bar{x}) \to (x \to y)$.

9. F – айнан ёлғон формула бўлсин. $x \wedge \bar{y} \to F \equiv x \to y$ эканлигини исбот қилинг.

10. Ҳамма асосий мантиқий амалларни:

1) дизъюнкция, конъюнкция ва инкор;
2) конъюнкция ва инкор;
3) дизъюнкция ва инкор;
4) импликация ва инкор амаллари орқали ифодаланг.

11. Айнан чин ёки айнан ёлғон формула эканлигини исботланг:

1) $(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_1 \vee \ldots \vee x_n \to \overline{y}) \wedge y$;

2) $x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to (x_n \to y \vee \overline{y}))\ldots)$;

3) $\left(\overline{\overline{\overline{x \wedge \overline{x} \to y_1} \to y_2} \to \ldots \to y_{n-1}} \to y_n\right) \to (z \wedge \overline{z})$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида қандай мантиқий амаллар бажарилади?
2. Формулалар. Тенг кучли формулаларни келтиринг.
3. Айнан чин, айнан ёлғон ва бажарилувчи формулаларнинг таърифларини келтиринг.
4. Асосий тенг кучлиликларни исботланг.
5. Тенг кучли формулаларга доир теоремаларни исботланг.

6- §. Формулаларнинг нормал шакллари

☑ ***Элементар конъюнкция (дизъюнкция). КНШ. ДНШ. Теоремалар. Формуланинг доимо чин бўлишининг етарли ва зарурий шарти.***

Тенг кучли алмаштиришлар бажариб, мулоҳазалар алгебрасининг формулаларини ҳар хил кўринишларда ёзиш мумкин. Масалан, $\overline{A} \to BC$ формулани $A \vee BC$ ёки $(A \vee B)(A \vee C)$. кўринишларда ёза оламиз.

Мантиқ алгебрасининг контакт ва реле-контактли схемалар, дискрет техникадаги татбиқларида ва математик мантиқнинг бошқа масалаларида формулаларнинг нормал шакллари катта аҳамиятга эга. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$x^{\sigma}=\begin{cases} x, \text{ агар } \sigma = \text{ч бўлса,} \\ \bar{x}, \text{ агар } \sigma = \text{ё бўлса.} \end{cases}$$

$\sigma^{\sigma} = \text{ч}$ эканлиги аниқ.

1-таъриф. *Ушбу*

$$x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

кўринишдаги формула ***элементар конъюнкция*** *деб аталади, бу ерда* $\sigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ *ихтиёрий қийматлар сатри ва* x_i *ўзгарувчилар орасида бир хиллари бўлиши мумкин.*

2-таъриф. *Ушбу*

$$x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

кўринишдаги формула ***элементар дизъюнкция*** *деб аталади, бу ерда ҳам* $\sigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ *ихтиёрий қийматлар сатри ва* x_i *ўзгарувчилар орасида бир хиллари бўлиши мумкин.*

3-таъриф. *Элементар дизъюнкцияларнинг конъюнкцияси формуланинг* ***конъюнктив нормал шакли (КНШ)*** *ва элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси формуланинг* ***дизъюнктив нормал шакли (ДНШ)*** *деб аталади.*

КНШ га $(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee z)\wedge(x\vee\bar{y}\vee z)$ формула ва ДНШ га $xy\vee\bar{x}z\vee x\bar{y}z$ формула мисол бўла олади.

1-теорема. *Элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир P формуласига тенг кучли конъюнктив нормал шаклдаги Q формула мавжуд.*

Бу теоремани исботлашда ушбу тенг кучлиликлардан фойдаланамиз:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \overline{A\wedge B}=\bar{A}\vee\bar{B}; & 2)\ \overline{A\vee B}=\bar{A}\wedge\bar{B}; & \\ 3)\ A\to B=\bar{A}\vee B; & 4)\ \overline{A\to B}=A\wedge\bar{B}; & (3) \\ 5)\ A\leftrightarrow B=(\bar{A}\vee B)\wedge(A\vee\bar{B}); & 6)\ \overline{A\leftrightarrow B}=(A\wedge\bar{B})\vee(\bar{A}\wedge B). & \end{array}$$

Исбот. *P* формула нормал конъюнктив шаклда бўлмаса, қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) Pдаги элементар мулоҳазалар $\wedge$ ва $\vee$ амаллари билангина бирлаштирилган бўлса ҳам, лекин $\wedge$ сўнгги амални ифодаламайди. Бу ҳолда $A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee B)$ дистрибутивлик қонунидан фойдаланиб, сўнгги амали $\wedge$ дан иборат тенг кучли формулага келтирамиз;

б) Pформула $-$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ мантиқий амаллар воситасида тузилган бирор формулани ифодаласин. У ҳолда P га (3) тенг кучлиликларни татбиқ этиб, P билан тенг кучли ва $-$, $\vee$, $\wedge$ билан ифодаланган P^1 формулани ҳосил қиламиз. Агар P^1 КНШ кўринишида бўлмаса, унга $A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee B)$ дистрибутивлик қонунини татбиқ этиб, чекли қадамлардан кейин P билан тенг кучли Q конъюнктив нормал шаклдаги формулага келамиз.

Изоҳ. *P формулани конъюнктив нормал шаклга келтириш жараёнида*

$$A\wedge A = A,\quad A\vee A = A,\quad A\wedge J = A,\quad A\wedge J = J,$$

$$A\wedge\bar{J} = \bar{J},\quad A\vee\bar{J} = A,\quad A\vee\bar{A} = J \tag{4}$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиб, уни соддалаштириш мумкин.

Мисоллар. 1. $P = [(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee[x\wedge(\bar{x}\vee y)]$.

$$P = \{[(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee x\}\wedge\{[x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y})]\vee(\bar{x}\vee y)\} =$$

$$= [(x\vee y)\vee x]\wedge[(\bar{x}\vee\bar{y})\vee x]\wedge[(x\vee y)\vee(\bar{x}\vee y)]\wedge[(\bar{x}\vee\bar{y})\vee(\bar{x}\vee y)] =$$

$$= (x\vee y)\wedge[J\vee\bar{y}]\wedge(J\vee y)\wedge(\bar{x}\vee J) = (x\vee y)\wedge J\wedge J\wedge J = x\vee y;$$

$$P = x\vee y.$$

Шундай қилиб, P формуланинг КНШ биттагина дизъюнктив $(x\vee y)$ ҳаддан иборат экан.

2. $P = \overline{x\vee y}\leftrightarrow x\wedge y$.

$$P = \bar{x}\wedge\bar{y}\leftrightarrow x\wedge y = \overline{x\vee y}\leftrightarrow(x\wedge y) =$$

$$= \left[\overline{\overline{x\vee y}}\vee(x\wedge y)\right]\wedge[(\overline{x\vee y})\vee(\overline{x\wedge y})] =$$

$$= [(x\vee y)\vee(x\wedge y)]\wedge[(\bar{x}\wedge\bar{y})\vee(\bar{x}\vee\bar{y})] =$$

$$= [(x\vee y\vee x)\wedge(x\vee y\vee y)]\wedge[(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{x})\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\wedge\bar{y})] =$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y});$$

$$P = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

P формула тавтология эканлигини чинлик жадвалига мурожаат қилмай туриб ҳам аниқлаш мумкинми деган саволга қуйидаги *чинлик аломати* деб аталган теорема ижобий жавоб беради.

2-теорема. *P формула доимо чин бўлиши учун унинг КНШ даги ҳар бир элементар дизъюнктив ҳадида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот: а) *P* формуланинг

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \tag{5}$$

КНШ даги ҳар бир A_i ҳадида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлсин, яъни $A_i = x \vee \bar{x} \vee y \vee \ldots \vee u$ шаклида бўлсин, у ҳолда $x \vee \bar{x} = J$ ва $J \vee A = J$ ларга асосан $A_i = J \vee (y \vee \ldots \vee u \vee V) = J$ бўлади. Демак, $P = J \wedge J \wedge \ldots \wedge J = J$ бўлади, яъни айнан чин формула бўлади.

б) Энди *P* тавтология бўлсин ва A_i унинг КНШ даги шундай элементар дизъюнктив ҳади бўлсинки, унда бирорта элементар мулоҳаза билан бирга унинг инкори қатнашмаган бўлсин. Масалан, $A_i = x \vee \bar{y} \vee \ldots \vee u$ шаклида бўлсин. Энди, элементар мулоҳазаларнинг шундай қийматлар сатрини олайликки, бу сатрда x нинг қиймати ё, y нинг қиймати ч, z нинг қиймати ё, ..., u нинг қиймати ё бўлсин. У вақтда

$$A_i = x \vee \bar{y} \vee \ldots \vee u = \text{ё} \vee \text{ч} \vee \ldots \vee \text{ё} = \text{ё} \vee \ldots \vee \text{ё} = \text{ё}.$$

Демак, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ нинг қиймати ҳам ёлғон бўлади. Аммо, теореманинг шартига асосан *P* нинг қиймати айнан чиндир. Натижада қарама-қаршиликка келдик. Демак, элементар дизъюнкцияларнинг ҳар бир ҳадида бирорта мулоҳаза ўзи ва ўзининг инкори билан қатнашиши шарт.

Мисол. 1. $P = x \wedge \bar{x} \to \overline{y \wedge \bar{y}} = \overline{x \wedge \bar{x}} \vee \overline{y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$.

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ — айнан чиндир.

2. $\overline{x \wedge \bar{x}} \wedge (y \wedge \bar{y} \to z) = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ — айнан чин формуладир.

7- §. Дизъюнктив нормал шакл

☑ *ДНШ. Формуланинг доимо ёлғон бўлишининг етарли ва зарурий шарти. Мисоллар.*

Эслатиб ўтамизки, элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси формуланинг *дизъюнктив нормал шакли (ДНШ)* деб аталади.

1-теорема. *Элементар мулоҳазаларнинг исталган Р формуласини ДНШга келтириш мумкин.*

Исбот. Бунинг учун $\bar{P}$ формулани КНШ га келтирамиз:

$$\bar{P} = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m,$$

сўнгра $\bar{P}$ нинг инкорини топганимизда формула ДНШ кўринишига келади:

$$\bar{\bar{P}} = P = \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m} = \bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \ldots \vee \bar{A}_m.$$

Энди *ёлғонлик аломати* деб аталган теоремани исботлаймиз.

2-теорема. *Р формула айнан ёлғон бўлиши учун, унинг дизъюнктив нормал шаклидаги ҳар бир элементар конъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. а) P — айнан ёлғон бўлса, у ҳолда $\bar{P}$ — айнан чин бўлади. Демак, $\bar{P}$ нинг КНШ даги ҳар бир элементар дизъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга унинг инкори ҳам мавжуд бўлади. Шунинг учун $\bar{\bar{P}} = P$ нинг ДНШ даги ҳар бир конъюнктив ҳадида камида битта элементар мулоҳаза ва унинг инкори мавжуд бўлади;

б) энди ҳар бир элементар конъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза ва унинг инкори мавжуд бўлсин, яъни $A_i = x_i \wedge \overline{x}_i \wedge y_i \wedge \ldots \wedge z_i$ бўлсин, у ҳолда $A_i = 0$ ва $P = 0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0 = 0$.

Демак, *P* айнан ёлғон формуладир.

Мисол. $P = \overline{(\overline{\overline{x} \wedge x}) \to \overline{\overline{y} \wedge y}} = \left(\overline{\overline{x} \wedge x}\right) \vee \overline{\overline{y} \wedge y} =$

$= \left(\overline{\overline{x}} \vee \overline{x}\right) \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{y} = (x \vee \overline{x}) \vee (y \vee \overline{y});$

$\overline{P} = (x \vee \overline{x}) \vee (y \vee \overline{y})$ — айнан чин;

$P = (\overline{x} \wedge x) \wedge (\overline{y} \wedge y)$ — айнан ёлғон.

3-теорема. *Элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир P формуласи учун ечилиш муаммоси ечиладигандир.*

Исбот. 1) *P* ни КНШ га келтиргандан кейин, айнан чин бўлиш-бўлмаслиги дарҳол аниқланади;

2) *P* айнан чин бўлмаса, уни ДНШ га келтириб, айнан ёлғон бўлиш-бўлмаслигини аниқлаймиз;

3) *P* доимо чин ва доимо ёлғон бўлиш шартларини қаноатлантирмаса, у ҳолда бу формула бажарилувчи бўлади.

Демак, элементар мулоҳазалар формуласининг айнан чин, айнан ёлғон ёки бажарилувчи формула бўлишини чекли қадамлар жараёнида аниқлаш мумкин. Шунинг учун ечилиш муаммоси доимо ижобий ҳал бўлади.

8- §. Мукаммал конъюнктив ва дизъюнктив нормал шакллар

☑ *МКНШ. МДНШ. Тўлиқ ва тўғри элементар конъюнкциялар (дизъюнкциялар). Формулани МКНШ (МДНШ)га келтириш алгоритми.*

Мантиқ алгебрасининг битта формуласи учун бир нечта ДНШ (КНШ) мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $(x \vee y)(x \vee z)$ формулани қуйидаги $x \vee yz$, $x \vee xy \vee xz$ ДНШ ларга келтириш мумкин. Булар дистрибутивлик ва идемпотентлик қонунларини қўллаш натижасида ҳосил қилинган.

Формулаларни бир қийматли равишда нормал шаклда тасвирлаш учун мукаммал дизъюнктив нормал шакл ва мукаммал конъюнктив нормал шакл (МДНШ ва МКНШ) деб аталувчи кўринишлари ишлатилади.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементар мулоҳазанинг

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \tag{1}$$

элементар дизъюнкциялари ва

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n} \tag{2}$$

элементар конъюнкциялари берилган бўлсин.

1-таъриф. *(1) элементар дизъюнкция ((2) элементар конъюнкция) ифодасида ҳар бир элементар мулоҳаза x_i бир марта қатнашган бўлса, у **тўғри элементар дизъюнкция (тўғри элементар конъюнкция)** деб аталади.*

Масалан, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ва $\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_6$ элементар дизъюнкциялар ва $x_1 x_2 x_3$ ва $x_1 \bar{x}_3 x_6$ элементар конъюнкциялар мос равишда тўғри элементар дизъюнкциялар ва элементар конъюнкциялар бўлади.

2-таъриф. *(1) элементар дизъюнкция ((2) элементар конъюнкция)нинг ифодасида $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мулоҳазаларнинг ҳар биттаси бир мартагина қатнашган бўлса, у $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мулоҳазаларга нисбатан **тўлиқ элементар дизъюнкция (тўлиқ элементар конъюнкция)** деб аталади.*

Масалан, $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ ва $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ элементар дизъюнкциялар ва $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $x_1 x_2 \bar{x}_3$ элементар конъюнкциялар x_1, x_2, x_3 мулоҳазаларга нисбатан тўлиқ элементар дизъюнкциялар ва тўлиқ элементар конъюнкциялар бўлади.

3-таъриф. *Агар ДНШ (КНШ) ифодасида бир хил элементар конъюнкциялар (элементар дизъюнкциялар) бўлмаса ва ҳамма элементар конъюнкциялар (элементар дизъюнкциялар) тўғри ва тўлиқ бўлса, у **мукаммал дизъюнктив нормал шакл (мукаммал конъюнктив нормал шакл) МДНШ (МКНШ)** деб аталади.*

Масалан, $xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ ДНШ x, y, z мулоҳазаларга нисбатан МДНШ бўлади. $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ КНШ мулоҳазаларга нисбатан МКНШ бўлади.

Асосий мантиқий амалларнинг МДНШ ва МКНШ кўринишлари қуйидагича бўлади:

а) МДНШ: $\bar{x} = \bar{x}$; $xy = xy$; $x \vee y = xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$; $x \to y = xy \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}$; $x \to y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$;

б) МКНШ: $\bar{x} = \bar{x}$; $xy = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$; $x \vee y = x \vee y$; $x \to y = \bar{x} \vee y$; $x \to y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$.

1-теорема. *n та элементар мулоҳазанинг айнан чин формуласидан фарқли ҳар бир А формулани мукаммал конъюнктив нормал шаклга (МКНШ) келтириш мумкин.*

Исбот. Қуйидаги исбот тавтологиядан фарқ қилувчи ҳар қандай *А* формулани МКНШ га келтириш алгоритми бўлади.

1. Аввало *А* формулани конъюнктив нормал шаклга келтирамиз. Бунинг учун *А* формулани конъюнкция, дизъюнкция ва инкор мантиқий амаллари орқали ифодалаймиз (инкор амали фақатгина ўзгарувчилар устида бўлиши керак). Сўнгра дистрибутивлик қонунларидан фойдаланиб, *А* формулани КНШ га келтирамиз ва ҳамма лозим бўлган соддалаштиришларни бажарамиз.

2. Агар КНШ ифодасида бир нечта бир хил элементар дизъюнкциялар мавжуд бўлса, у ҳолда $x \wedge x = x$ тенг кучлилик формуласидан фойдаланиб, улардан биттасини *А* ифодасида қолдирамиз.

3. Қуйидаги икки усул орқали ҳамма элементар дизъюнкцияларни тўғри элементар дизъюнкцияларга айлантирамиз:

а) агар бирор элементар дизъюнкция ифодасида бирорта ўзгарувчи ўзининг инкори билан қатнашган бўлса, у ҳолда $x \vee \bar{x} = \text{ч}$, $\text{ч} \vee x = \text{ч}$, $x \wedge x = x$ тенг кучлилик формулаларга асосан биз бу элементар конъюнкцияни КНШ ифодасидан олиб ташлаймиз;

б) агар бирор ўзгарувчи элементар дизъюнкция ифодасида бир неча марта қатнашган бўлса (ёки ҳамма ҳолда инкор ишораси остида эмас, ёки ҳамма ҳолда инкор ишораси остида), у ҳолда $x \vee x$ формуласига асосан биз улардан фақатгина биттасини КНШ ифодасида қолдирамиз.

Натижада, ҳамма элементар дизъюнкциялар тўғри элементар дизъюнкцияларга айланади.

4. Агар баъзи элементар дизъюнкциялар тўлиқ элементар дизъюнкциялар бўлмаса, яъни дизъюнктив ҳадларда элементар мулоҳазаларнинг баъзилари (ёки уларнинг инкорлари) мавжуд бўлмаса, у ҳолда бундай элементар дизъюнкцияларни тўлиқ элементар дизъюнкциялар ҳолатига келтириш керак.

Масалан, ушбу

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n$$

элементар дизъюнкция ифодасида x_i ёки $\bar{x}_i$ йўқ деб фараз қилайлик. У ҳолда уни $x_i \wedge \bar{x}_i = 0$ ва $D \vee 0 = D$ формулалардан фойдаланиб қуйидаги икки тўлиқ элементар дизъюнкция конъюнкциясига келтира оламиз:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee \bar{x}_{i-1} \vee \ldots \vee x_n) \vee (x_i \wedge \bar{x}_i) =$$
$$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_i \vee \bar{x}_{i+1} \vee \ldots \vee x_n) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee \bar{x}_i \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n).$$

Агарда элементар дизъюнкция ифодасида бир нечта $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ўзгарувчилар қатнашмаётган бўлса, у ҳолда унинг ифодасига $(y_i \wedge \bar{y}_i)$ $(i = \overline{1, m})$ конъюнкцияларни мантиқий қўшиб, дистрибутивлик қонунини қўллаймиз. Натижада, битта тўлиқ эмас элементар дизъюнкция ўрнига $2m$ та тўлиқ элементар дизъюнкцияга эга бўламиз.

5. Тўртинчи қадам бажарилиши натижасида КНШ ифодасида бир хил элементар дизъюнкциялар пайдо бўлади. Шунинг учун яна 2- қадамни ишлатамиз.

Демак, 1—5- қадамлар натижасида КНШ ифодасида бир хил элементар дизъюнкциялар мавжуд бўлмайди ва ҳамма элементар дизъюнкциялар тўғри ва тўлиқ бўлади. Таърифга асосан, бундай КНШ мукаммал конъюнктив нормал шакл бўлади.

Мисоллар. 1. $A = (\bar{x} \to x) \wedge (y \to \bar{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ формула қуйидаги МКНШ га эга бўлади:

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}).$$

2. $A = (\overline{x \vee z}) \wedge (x \to y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y)$.

$$A = [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}] \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z}))] = [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})].$$

$$A = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

3. $A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t)$.

$$A = [z \vee y \vee (z \wedge \bar{z}) \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee y \vee z \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge$$
$$\wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z \vee t] = [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t})] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t)] \wedge$$
$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})] \wedge$$
$$\wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge x \vee \bar{y} \vee z \vee t] \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)].$$

n та мулоҳазали мукаммал конъюнктив нормал шакл

$$\wedge (x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots \vee x_n^1)$$

ифодасида $\wedge$ ўрнига $\vee$ ни ва аксинча, $\vee$ ўрнига $\wedge$ ни қўйганимизда биз n та мулоҳазали

$$\vee (x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \ldots \wedge x_n^1)$$

мукаммал дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

Мукаммал дизъюнктив нормал шаклнинг ҳар бир $x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \ldots \wedge x_n^1$ ҳади ***конъюнктив конституент*** деб аталади.

2-теорема. *n та элементар мулоҳазаларнинг айнан ёлғон формуласидан фарқли ҳар бир A формуласини мукаммал дизъюнктив нормал шаклга келтириш мумкин.*

Исбот. Берилган формулани A билан белгилаб, аввало $\overline{A}$ ни мукаммал конъюнктив нормал шаклга келтирамиз:

$$\overline{A} = \wedge(x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots \vee x_n^1).$$

Бундан $\overline{\overline{A}} = A$ нинг МДНШ ни топамиз:

$$A = \wedge\left(\overline{x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots \vee x_n^1}\right) = \vee\left(\overline{x}_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \ldots \wedge \overline{x}_n^1\right).$$

Мисол. $A = [(\overline{x} \to x) \wedge (y \to \overline{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$.

$$A = (x \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \overline{u}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee u) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{u}) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{z} \vee u) \vee (y \wedge \overline{y}) = (x \vee \overline{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \overline{z} \vee u \vee \overline{y}).$$

9- §. Формулаларнинг асосий хоссалари

☑ *Чинлик жадвали бўйича формулани тиклаш. Формулани ўзгарувчилар бўйича қаторга ёйиш. Чинлик жадвали бўйича формулани МКНШ (МДНШ) кўринишида ёзиш.*

Маълумки, берилган формула учун чинлик жадвали тузиш мумкин. Формуланинг чинлик жадвалини тузишни биламиз. Энди тескари масала билан шуғулланайлик, яъни берилган чинлик жадвали бўйича формулани топишни мақсад қилиб қўяйлик. Масалан, x ва y элементар мулоҳазаларнинг қуйидаги чинлик жадвалларига эга бўлган A, B, C, D формулаларини топайлик (1- жадвал):

1-жадвал

x	y	A	B	C	D	$A\vee B$	$A\vee C$	$A\vee D$	$B\vee D$	$A\vee B\vee C$	$A\vee B\vee C\vee D$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Бундан кейин бирор мулоҳазанинг «чин» қийматини «1» ва «ёлғон» қийматини «0» деб белгилаймиз. Маълумки,

$$A = x \wedge y;\ B = x \wedge \bar{y};\ C = \bar{x} \wedge y;\ D = \bar{x} \wedge \bar{y}. \qquad (1)$$

(1) формулаларнинг ҳар қайсиси учун жадвалнинг, мос равишда, 1, 2, 3, 4- сатрида «1» қиймат ва қолган сатрларида «0» қиймат туради. (1) формулалар икки мулоҳазали конъюнктив конституентлардан иборат.

Энди шундай формулаларни топайликки, улар учун жадвалнинг икки сатрида «1» қиймат ва икки сатрида «0» қиймат турган бўлсин. Бу талабга қуйидаги формулалар жавоб беради:

$$A \vee B = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y});\ A \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y);$$

$$A \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y});\ B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \text{ ва ҳ.к.}$$

Шундай қилиб, ушбу қоида ўринли: 2 ва 4- сатрларда «1», 1 ва 3- сатрларда «0» қийматга эга бўлган формулани ҳосил қилиш учун, биттасининг «1» қиймати худди 2- сатрда ва иккинчисининг «1» қиймати худди 4- сатрда турган икки конъюнктив конституент дизъюнкциясини оламиз:

$$B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Худди шу каби, 1-жадвалдаги учта конъюнктив конституент дизъюнкцияси учта сатрда «1» қийматга ва битта сатрда «0» қийматга эга бўлган формулани тасвирлайди. Масалан,

$$A \vee B \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Шундай қилиб, тўртала A, B, C, D конъюнктив конституент дизъюнкцияси тўртала сатрда ҳам «1» қийматга эга, яъни айнан чин:

$$E = A \vee B \vee C \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Бу формула икки мулоҳазали тўлиқ мукаммал дизъюнктив нормал шаклдан иборат. Демак, E нинг инкори

$$\overline{E} = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})} =$$

$$= \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \bar{y}} \wedge \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$$

ёки

$$\overline{E} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee y)$$

айнан ёлғон формулани ифодалайди. Бу эса икки мулоҳазали тўлиқ мукаммал конъюнктив нормал шаклдир.

Шундай қилиб, икки x ва y элементар мулоҳаза учун чинлик жадвалларига қараб мос формулаларни тиклаш масаласи ҳал қилинди.

Энди берилган чинлик жадваллари бўйича учта x, y, z элементар мулоҳазанинг формулаларини топиш масаласига ўтамиз. Бу уч мулоҳаза учун $2^3 = 8$ та қийматлар сатрлари тузилади (2- жадвал).

2- жадвал

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

2- жадвалнинг сатрларидан биридагина «1» қийматга, қолганларида «0» қийматга эга бўлиш талабига жавоб берувчи формулалар ушбу уч мулоҳазали ҳамма $2^3 = 8$ та конъюнктив конституентлардан иборатдир:

1) $x \wedge y \wedge z = A_1$; 4) $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = A_4$; 7) $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z = A_7$;

2) $x \wedge y \wedge \overline{z} = A_2$; 5) $\overline{x} \wedge y \wedge z = A_5$; 8) $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = A_8$. (2)

3) $x \wedge \overline{y} \wedge z = A_3$; 6) $\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} = A_6$;

Бу (2) конъюнктив конституентлардан ҳар иккитасининг дизъюнкциясини олиб, қийматлари икки сатрда «1», қолганларида «0» бўлган формулаларни; ҳар учтасининг дизъюнкциясини олиб, қийматлари уч сатрда «1», қолган сатрларда «0» бўлган формулаларни ҳосил қиламиз ва ҳ.к.

Масалан:

$B_1 = A_1 \vee A_2; \quad B_2 = A_1 \vee A_3; \quad B_3 = A_1 \vee A_4; \quad B_4 = A_1 \vee A_5;$

$B_5 = A_1 \vee A_6; \quad B_6 = A_1 \vee A_7; \quad B_7 = A_1 \vee A_8;$

$C_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 = B_1 \vee A_3; \quad C_2 = B_1 \vee A_4; \quad \ldots;$

$D_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = C_1 \vee A_4; \quad \ldots;$

$$E = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6 \vee A_7 \vee A_8 \text{ — МДНШ;} \qquad (3)$$

$$\overline{E} = \overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \wedge \overline{A}_3 \wedge \overline{A}_4 \wedge \overline{A}_5 \wedge \overline{A}_6 \wedge \overline{A}_7 \wedge \overline{A}_8 \text{ — МКНШ.} \qquad (4)$$

Бунда саккизтасининг дизъюнкцияси (3) айнан чин формулани ва унинг инкори (4) айнан ёлғон формулани ифодалайди.

n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементар мулоҳаза учун ҳам масала худди шу усул билан ечилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан келиб чиқадики, ҳар бир айнан ёлғон бўлмаган n аргументли A формулани қуйидаги мукаммал дизъюнктив нормал шаклда ёзиш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}, \qquad (5)$$

яъни қийматлар сатрида чин қийматга эга бўлган элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси шаклида ёзилади. (5) формулани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \cdot x_1^{\sigma_1} \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}. \qquad (6)$$

Бу ерда $x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$ элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси ҳамма 2^n қийматлар сатри бўйича олинади.

Худди шу каби айнан чиндан фарқ қилувчи исталган A формулани қуйидаги мукаммал конъюнктив нормал шаклда келтириш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{A(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (7)$$

ёки

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} A(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \qquad (8)$$

яъни $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ элементар дизъюнкцияларнинг конъюнкцияси ҳамма 2^n қийматлар сатри бўйича олинади.

Шундай қилиб, (7) ва (8) формулалар орқали исталган функциянинг чинлик жадвалидан фойдаланиб уни МДНШ ва МКНШ кўринишида ёзиш мумкин.

Мисол. 1. Берилган чинлик жадвалига асосан A_1, ..., A_n формулаларни МДНШ кўринишида ёзиш талаб этилсин:

3-жадвал

x	y	z	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

$$A_1(x, y, z) = xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z};$$

$$A_2(x, y, z) = xyz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z};$$

$$A_3(x, y, z) = xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z};$$

$$A_4(x, y, z) = xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z};$$

$$A_5(x, y, z) = xyz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}.$$

Машқлар

1. Учинчи жадвалда берилган $A_1, \ldots, A_5$ формулаларнинг МКНШ кўринишини топинг.
2. Бир, икки ва уч аргументли ҳар қандай айнан ёлғон бўлган функцияларнинг МКНШ кўринишини топинг.

10- §. Тенг кучлимас формулалар сони

☑ *n ўзгарувчили формулалар сони. Элементар конъюнкциялар сони.*

n та элементар

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (1)$$

мулоҳазаларнинг нечта ўзаро тенг кучлимас, яъни ҳар хил формулалари мавжуд деган масалани қўямиз.

Икки *x* ва *y* элементар мулоҳаза учун нечта тенг кучлимас формулалар борлигини кўрайлик. *x* ва *y* нинг $2^2=4$ қиймат-лар сатри учун: 4 та *A*, *B*, *C*, *D* формулалардан ҳар қайсисининг қийматларидан биттаси «1» ва учтаси «0» дан иборат устуни мавжуд. Бундай устунлар сони 4 та, яъни $C_4^1 = 4$.

Ундан кейин, олтита $A \vee B$, $A \vee C$, ..., $C \vee D$ формулалардан ҳар қайсисининг қийматлари иккита «1» ва иккита «0» дан иборат устунни ҳосил қилади. Бундай устунлар сони $C_4^2 = 6$ га тенг. Яна тўртта

$$A \vee B \vee C, \quad A \vee C \vee D, \quad A \vee B \vee D, \quad B \vee C \vee D$$

формулалардан ҳар қайсисининг қийматлари учта «1» ва битта «0» дан ташкил этилган устунни беради. Бундай устунлар $C_4^3 = 4$ тадир. Ниҳоят, *E* формуланинг қийматлари фақат «1» дан тузилган $C_4^4 = 1$ та устунни ташкил этади.

Шундай қилиб, 1-жадвалда

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 2^{2^2}$$

устун мавжуд бўлади. Бундан эса худди шунча формула борлиги келиб чиқади. Устунларнинг ҳеч қайси иккитаси бир хил бўлмаганлигидан, ҳеч қайси иккита формула ҳам ўзаро тенг кучли эмасдир.

Демак, икки x ва y мулоҳазанинг шу 16 та формуласидан ташқари, уларни ифодалайдиган бошқа тенг кучли формула йўқ. Бундан, x ва y нинг исталган $A(x, y)$ формуласи жадвалда келтирилган формулаларнинг бири билан тенг кучли деган хулосага келамиз. Масалан, $(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y}$ формулани олсак, ушбу чинлик жадвалидан

x	$\bar{y}$	y	$x \leftrightarrow y$	$(x \leftrightarrow \bar{y} \wedge y)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

$(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ эканлиги маълум бўлади.

Юқорида ҳосил қилинган формулалардан 15 таси МДНШ ва 1 таси МКНШ кўринишига эга.

Худди шундай фикр юритиш йўли билан x, y, z элементар мулоҳазаларнинг тенг кучлимас формулалар сони

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + \ldots + C_8^8 = 2^8 = 2^{2^3}$$

га тенглиги келиб чиқади. Тўртта x, y, z, f мулоҳазаларнинг ҳар хил формулалари сони 2^{2^4} га ва, умуман, n та мулоҳазанинг ҳар хил тенг кучлимас формулалари сони

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \ldots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n},$$

яъни $N = 2^{2^n}$ га тенг.

Шундай қилиб, n та аргументли тенг кучлимас формулалардан $2^{2^n} - 1$ таси МДНШ ва биттаси МКНШ кўринишига эга.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формулаларни КНШ кўринишига келтиринг:

1) $x \wedge (x \to y)$; 2) $(\overline{x\bar{y}} \to \bar{x}) \wedge (\overline{xy \to \bar{y}})$;

3) $(x \to y) \to (y \to x)$; 4) $(x \vee \bar{z}) \to y \wedge z$;

5) $(x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \bar{x}}) \vee y \wedge \bar{z}$;

6) $(ab \to bc) \to ((a \to b) \to (c \to b))$;

7) $(\bar{a} \to c) \to ((\overline{\bar{b}} \to \bar{a})$; 8) $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (bc \to ac)$.

2. 1- масалада келтирилган формулаларни ДНШ кўринишига келтиринг.

3. Қуйидаги формулаларни ДНШ кўринишига келтиринг ва айнан ёлғон ёки айнан ёлғон эмаслигини аниқланг:

1) $\overline{x\bar{y}} \leftrightarrow \bar{x} \vee xy$; 2) $(x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;

3) $xy \to (x \to \bar{y})$; 4) $x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;

5) $x \vee y \to z$; 6) $(x \to z)(y \to z) \to (x \to y)$.

4. 1 ва 3- масалаларда келтирилган формулаларни МКНШ ва МДНШ кўринишига келтиринг.

5. $f(x, y, z)$ функция ўзгарувчиларнинг фақат биттаси чин қиймат олганда ва фақат шунда чин қиймат олади. $f(x, y, z)$ функциянинг чинлик жадвалини тузинг ва уни формула орқали ифодаланг.

6. Чинлик жадвалидан $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, $f_4(x, y, z)$, $f_5(x, y, z)$, $f_6(x, y, z)$ функцияларни ифодаловчи формулаларни топинг ва уларни соддалаштиринг:

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$	$f_4(x, y, z)$	$f_5(x, y, z)$	$f_6(x, y, z)$
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

7. Қуйидаги мукаммал нормал шаклдаги формулаларнинг чинлик жадвалини тузинг ва уларни соддалаштиринг:

   1) $xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$; 2) $(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

   3) $xyz \vee \bar{x}yz \vee x\overline{yz}$; 4) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

8. Бир, икки ва уч аргументли ҳар қандай айнан чин бўлган функцияларнинг МДНШ кўринишини топинг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Формулаларнинг нормал шакллари деб нимага айтамиз?
2. Формуланинг дизъюнктив ва конъюнктив нормал шаклларини ифодаланг.
3. Формулани мукаммал конъюнктив ва дизъюнктив нормал шаклларга келтириш алгоритмини ёзинг.
4. Формулаларнинг асосий хоссаларини келтиринг.
5. Тенг кучлимас формулалар сони нимага тенг?

11- §. Формуланинг чинлик тўплами

☑ *Чинлик тўплами. Мантиқий амалларнинг чинлик тўпламлари.*

Маълумки, n та элементар $x_1, x_2, \dots, x_n$ мулоҳазаларнинг қийматлари 2^n та қийматлар сатрини ташкил этади. Бу мулоҳазаларнинг ҳар бир A формуласи баъзи қийматлар сатрларида «1» қийматни ва баъзиларида «0» қийматни қабул қилади.

Таъриф. *A формула «1» қиймат қабул қилувчи элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларидан тузилган тўплам A* ***формуланинг чинлик тўплами*** *дейилади.*

Ўтган параграфларда кўрганимиздек, элементар мулоҳазаларнинг (A) формулаларидан $C^1_{2^n} = 2^n$ таси битта қийматлар сатрида «1» қийматни қабул қилади. Демак, бундай ҳар бир формула бир элементли чинлик тўпламига эга.

Худди шунингдек, (A) формулаларнинг $C^2_{2^n}$ тасининг ҳар бири икки элементли чинлик тўпламига, $C^3_{2^n}$ тасининг ҳар бири уч элементли чинлик тўпламига, ..., $C_{2^n}^{2^n}$ формула эса 2^n та элементли чинлик тўпламига эгадир. $\overline{E}$ айнан ёлғон формуланинг чинлик тўплами эса $\varnothing$ бўш тўпламдан иборат.

$x_1, \ldots, x_n$ мулоҳазаларнинг айнан чин формуласига тегишли чинлик тўпламини U универсал тўплам деб олсак, шу мулоҳазаларнинг ҳамма формулаларга тегишли чинлик тўпламлари U нинг қисм тўпламларини ташкил этади ва бу универсал тўплам

$$C_{2^n}^{0} + C_{2^n}^{1} + \ldots + C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n} \text{ та}$$

қисм тўпламларга эга бўлади.

Шундай қилиб, n та элементар мулоҳазанинг ҳамма A формулалари билан уларнинг чинлик тўпламлари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

Ҳамма ўзаро тенг кучли формулаларга битта чинлик тўплами мос келади.

Мисоллар. 1. Уч элементар x, y, z мулоҳазанинг $A = x \wedge \overline{y} \wedge z$ формуласи фақат битта (1,0,1) қийматлар сатрида «1» қийматни қабул қилади. Шу сабабли, бу формуланинг чинлик тўплами ушбу бир элементли $P = \{1,\ 0,\ 1\}$ тўпламдир.

2. $A = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ формула уч элементли $Q = \{(1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1)\}$ чинлик тўпламига эгадир.

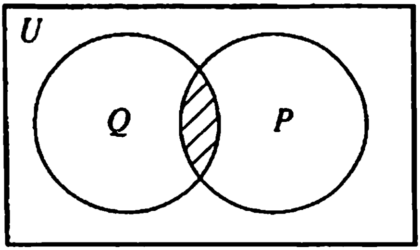
3. Ушбу $A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$ формула айнан чиндир. Шунинг учун унинг чинлик тўплами универсал $U = \{(1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 0)\}$ тўпламдан иборат.

A формула P тўпламда чин бўлса, у ҳолда P нинг тўлдирувчиси бўлган $\overline{P}$ тўпламда ёлғон бўлади. Лекин A нинг $\overline{A}$ инкори $\overline{P}$ да чин ва P да ёлғон бўлади. Худди шу каби, айнан чин J формула U да чин, лекин $\overline{U} = \varnothing$ да ёлғон. Айнан ёлғон $\overline{J}$ формула эса, аксинча, $\varnothing$ да чин ва $\varnothing = \overline{U}$ да ёлғондир.

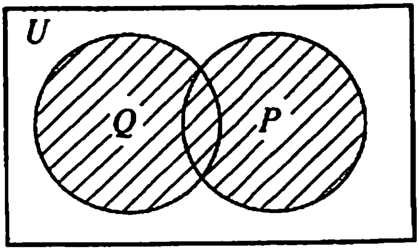
n та элементар мулоҳаза формулалари билан чинлик тўпламлари орасидаги бундай боғланиш мулоҳазалар мантиқидаги масалани тўпламлар назариясидаги масалага ва, аксинча, тўпламлар назариясидаги масалани мулоҳазалар мантиқидаги масалага кўчириш имкониятини беради. Ҳақиқатан ҳам:

1. A формула P тўпламда чин ва B формула Q тўпламда чин бўлса, $A \wedge B$ формула қандай тўпламда чин бўлади?

Маълумки (конъюнкция таърифига асосан), бу формула A ва B нинг иккаласи ҳам чин бўлган тўпламда чиндир. Демак, $P \cap Q$ кесишмада чиндир. Масалан, $A = x \wedge \bar{y} \wedge z$ ва $B = (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$ формулаларнинг $(A \wedge B)$ конъюнкцияси $P \cap Q = \{(1, 0, 1)\}$ тўпламда чиндир. Шундай қилиб, мулоҳазалар мантиқидаги $\wedge$ амалига тўпламлар назариясидаги $\cap$ амали мос келади (II.1- шакл).



II.1- шакл.

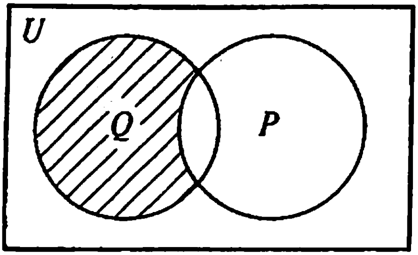


II.2- шакл.

2. $A \vee B$ формула қандай тўпламда чин бўлади?

Дизъюнкция таърифига асосан $A \vee B$ формула A ва B формулаларнинг камида биттаси чин бўлган тўпламда чиндир. Демак, $P \cup Q$ тўпламда $A \vee B$ формула чиндир. Шундай қилиб, мулоҳазалар мантиқидаги $\vee$ амалига тўпламлар назариясидаги $\cup$ амалининг мос келишини кўрамиз (II.2- шакл). Юқорида келтирилган A ва B формулалар учун

$$P \cup Q = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$



II.3- шакл.

3. $A \to B$ импликациянинг чинлик тўпламини топайлик.

Импликация таърифига асосан $A \to B$ формула фақат A чин бўлиб, B ёлғон бўлган тўпламда ёлғондир. Демак, $P - Q = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ айирмада $A \to B$ формула ёлғондир. Шундай қилиб, $A \to B$ формула U нинг штрихланган бўлагида ёлғон бўлиб, қолган бўлагида чиндир (III.3- шакл). U нинг қолган бўлаги эса $\overline{P} \cup Q$ га тенг. Демак, $A \to B$ формула $\overline{P} \cup Q$ тўпламда чиндир.

Иккинчи томондан, $\overline{A}$ формула $\overline{P}$ да ва B формула Q да чин бўлгани учун, $\overline{A} \vee B$ формула $\overline{P} \cup Q$ да чиндир. Демак, бизга маълум бўлган $A \to B = \overline{A} \vee B$ тенг кучлиликни бошқа йўл билан исботладик.

4. (1) мулоҳазаларнинг исталган A ва B формулаларини олиб, $A \vee \overline{A} \vee B = J$ тенг кучлиликни исботлайлик. $\overline{A}$ формула $\overline{P}$ да чин, A формула P да ва B формула Q да чин бўлсин. Шундай қилиб, $\overline{A} \vee A \vee B$ формула $\overline{P} \cup P \cup Q = U \cup Q = U$ тўпламда чин. Шу сабабли, $\overline{A} \vee A \vee B$ айнан чин формула бўлиб, $\overline{A} \vee A \vee B = J$ дир.

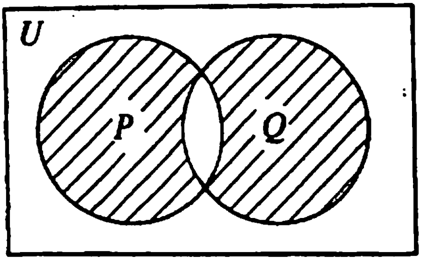
5. Қандай шартда $A \to B = J$ тенг кучлилик бажарилади?

Маълумки, $A \to B$ формула U нинг $P - Q$ дан бошқа бўлагида, демак, $\overline{P - Q}$ да чин. $A \to B = J$ шарт бўйича $\overline{P - Q} = U$ бўлиши керак. Бундан $\overline{\overline{P - Q}} = \overline{U}$ ёки $P - Q = \varnothing$ келиб чиқади. Бу эса $P \subseteq Q$ эканини билдиради.

6. $A \to B$ формуланинг чинлик тўпламини аниқлайлик.

Бу формула A чин ва B ёлғон, шунингдек, B чин ва A ёлғон бўлган тўпламда, яъни $(P - Q) \cup (Q - P)$ дагина ёлғон бўлиб, U нинг қолган бўлагида, яъни $\overline{(P - Q) \cup (Q - P)}$ да чиндир.

Шундай қилиб, $A \leftrightarrow B$ нинг чинлик тўплами U нинг штрихланган бўлагидан бошқа қисми билан тасвирланади (II.4- шакл):



II.4- шакл.

Бошқа қисмига мос келувчи тўпламни топамиз. $P - Q = P \cap \overline{Q}$ ва $Q - P = Q \cap \overline{P} = \overline{P} \cap Q$. Бундан $\overline{P - Q} = \overline{P} \cup Q$ ва $\overline{Q - P} = P \cup \overline{Q}$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$(P - Q) \cup (Q - P) = \overline{P - Q} \cap \overline{Q - P} = (\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}).$$

Демак, $A \leftrightarrow B$ формула $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$ тўпламда чиндир.

Иккинчи томондан, $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q})$ тўплам $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ формуланинг чинлик тўплами бўлгани учун, ушбу маълум тенг кучлиликка эга бўламиз:

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}).$$

Қуйидаги $\overline{A} \vee B = A \to B$, $\overline{B} \vee A = B \to A$ формулаларга асосан

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A).$$

7. Формулалар билан тўпламлар орасидаги боғланишга таяниб, қуйидаги теоремани исботлайлик.

Теорема. *A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ формула тавтология бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. а) $A = B$ бўлсин. Демак, $P = Q$. $A \leftrightarrow B$ нинг чинлик тўплами

$$(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) = (\overline{P} \cup P) \cap (P \cup \overline{P}) = U \cap U = U.$$

Бундан $A \leftrightarrow B = J$ келиб чиқади, яъни $A \leftrightarrow B$ тавтологиядир;

б) $(\overline{P} \cup Q) \cap (P \cup \overline{Q}) = J$ бўлсин, у ҳолда $A \leftrightarrow B = J$ бўлади. Демак, $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = J$. Бундан, конъюнкция таърифига асосан $A \to B = J$ ва $B \to A = J$. Бу ердан, 5- бандга биноан $P \subseteq Q$ ва $Q \subseteq P$. Демак, $Q = P$ келиб чиқади. Бу ўз навбатида $A = B$ бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, мулоҳазалар алгебрасидаги $\wedge$, $\vee$, $-$ мантиқий амалларига мос равишда тўпламлар алгебрасидаги $\cap$, $\cup$, $-$ (кўпайтма, бирлашма, тўлдирувчи) амаллари мос келади. Мулоҳазалар алгебрасидаги «1», «0» константаларга тўпламлар алгебрасидаги U ва $\varnothing$ (универсал ва бўш) тўпламлар мос келади. Демак, мулоҳазалар алгебрасидаги бирор ифодада $\wedge$ ни $\cap$ га, $\vee$ ни $\cup$ га, инкорни ($-$) тўлдирувчига, «1» ни универсал U тўпламга, «0» ни бўш $\varnothing$ тўпламга алмаштирилса, тўпламлар алгебрасидаги ифода ҳосил бўлади ва аксинча.

12- §. Мулоҳазалар алгебраси функциялари. Функциялар тенг кучлилиги. Функциялар суперпозицияси

☑ *Функция. Функциялар тенг кучлилиги. 0 ва 1 сақловчи функциялар. n аргументли функциялар сони. Бир рангли суперпозиция.*

Маълумки, мантиқий амаллар мулоҳазалар алгебраси нуқтаи назаридан чинлик жадваллари билан тўлиқ тавсифланади. Агарда функциянинг жадвал шаклида берилишини эсга олсак, у ҳолда мулоҳазалар алгебрасида ҳам функция тушунчаси мавжудлигини биламиз.

1-таъриф. *Мулоҳазалар алгебрасининг x_1, ..., x_n аргументли $f(x_1, ..., x_n)$* ***функцияси*** *деб, 0 ва 1 қийматлар қабул қилувчи функцияга айтилади ва унинг x_1, ..., x_n аргументлари ҳам 0 ва 1 қийматлар қабул қилади. $f(x_1, ..., x_n)$ функция ўзининг чинлик жадвали билан берилади:*

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, ..., x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, ..., 0, 0)$
1	0	0	...	0	0	$f(1, 0, ..., 0, 0)$
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	...	1	0	$f(1, 1, ..., 1, 0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, ..., 1, 1)$

Бу жадвалнинг ҳар бир сатрида аввал ўзгарувчиларнинг $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ қийматлари ва шу қийматлар сатрида f функциянинг $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ қиймати берилади. Олдинги параграфларда исбот қилган эдикки, *n* та ўзгарувчи учун қийматлар сатрларининг сони 2^n ва функцияларнинг сони 2^{2^n} га тенг бўлади.

Мулоҳазалар алгебрасида асосий элементар функциялар қуйидагилардан иборат:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \bar{x},\ f_3(x, y) = xy,\ f_4(x, y) = x \vee y,\ f_5(x, y) = x \rightarrow y,$$
$$f_6(x, y) = x \leftrightarrow y,\ f_7(x_1, \ldots, x_n) = 1,\ f_8(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Агар $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция 0 ***сақловчи функция*** деб аталади. Агар $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция 1 ***сақловчи функция*** деб аталади.

n та аргументли 0 сақловчи функцияларнинг сони 2^{2^n-1} га ва 1 сақловчи функцияларнинг сони ҳам 2^{2^n-1} га тенг бўлади (исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

Мулоҳазалар алгебрасидаги *n* та аргументли 0 сақловчи функциялар тўпламини P_0 ва 1 сақловчи функциялар тўпламини P_1 билан белгилаймиз.

2-таъриф. *f ва g мулоҳазалар алгебрасининг функциялари ва $x_1, \ldots, x_n$ лар ҳеч бўлмаганда улардан биттасининг аргументлари бўлсин. Агар $x_1, \ldots, x_n$ аргументларнинг ҳамма қийматлар сатрлари учун f ва g функцияларнинг мос қийматлари бир хил бўлса, у ҳолда f ва g функциялар* ***тенг кучли функциялар*** *деб аталади ва $f = g$ шаклида ёзилади.*

3-таъриф. *Агарда*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда x_i аргумент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг ***сохта аргументи*** *деб аталади.*

Агарда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

бўлса, у ҳолда x_i аргумент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг ***сохта эмас (муҳим) аргументи*** *деб аталади.*

Мисол. $f(x, y)=x\vee(xy)$ функция учун y аргументи сохта аргумент бўлади, чунки $f(1, 0)=f(0, 1)$.

Функциянинг аргументлари қаторига исталганча сохта аргументларни ёзиш мумкин ва у қатордан ҳамма сохта аргументларни олиб ташлаш мумкин.

Энди мулоҳазалар алгебраси функцияларининг суперпозицияси тушунчасини кўрайлик.

4-таъриф. $\Phi=\{\varphi_1(x_{11},...,x_{1k_1}),...,\varphi_m(x_{m1},...,x_{mk_m})\}$ *мулоҳазалар алгебраси функцияларининг чекли системаси бўлсин. Қуйидаги икки усулнинг биттаси билан ҳосил қилинадиган ψ функция Φ системадаги φ_1, ..., φ_m функцияларнинг* ***элементар суперпозицияси ёки бир рангли суперпозицияси*** *деб аталади:*

а) бирор $\varphi_j\in\Phi$ функциянинг x_{ji} аргументини қайта номлаш усули, яъни

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{ji-1}, y, x_{ji+1}, ..., x_{jk_j}),$$

бу ерда y ўзгарувчи, x_{jk} ўзгарувчиларнинг бирортаси билан мос тушиши мумкин;

б) бирор $\varphi_j\in\Phi$ функциянинг бирор x_{ji} аргументи ўрнига иккинчи бир $\varphi_e(x_{e1}, ..., x_{ek})\in\Phi$ функцияни қўйиш усули, яъни

$$\varphi_j(x_{j1}, ..., x_{ji-1}, \varphi_e(x_{e1}, ..., x_{ek}), x_{ji+1}, ..., x_{jk_j}).$$

Агар Φ система функцияларнинг k рангли суперпозициялари синфи $\Phi^{(k)}$ берилган бўлса, у ҳолда $\Phi^{(k+1)}=(\Phi^{(k)})^{(1)}$ бўлади.

1-изоҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан бир хил чинлик жадвалига эга бўлиб, лекин ўзгарувчиларнинг белгиланиши билан фарқ қиладиган функциялар бир-бирининг суперпозицияси бўлади.

2-изоҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан бирор x_{ji} ўзгарувчини x_{jk} $(i\neq k)$ билан қайта номласак, натижада кам ўзгарувчили функцияга эга бўламиз. Бу ҳолда x_{ji} ва x_{jk} ўзгарувчилар айнан тенглаштирилди деб айтамиз. Масалан, $x\vee y$ ва $x\wedge\bar{y}$ функциялардаги y ни x билан қайта номласак, у вақтда $x\vee x=x$ ва $x\wedge\bar{x}=0$ функцияларни ҳосил қиламиз.

3-изоҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан агар $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ бўлса, у ҳолда $\Phi^{(r)} \subset (\Phi)^{(r+1)}$ ва умуман $r \leq s$ бўлганда $\Phi^{(r)} \subseteq (\Phi)^{(s)}$.

5-таъриф. *$\bar{x}$, xy, $x\vee y$, $x\to y$, $x\leftrightarrow y$ асосий элементар функцияларнинг суперпозицияси **формула** деб аталади.*

13- §. Буль алгебраси

☑ *Буль алгебрасининг таърифи. Мисоллар.*

Таъриф. *Коньюнкция ($x\wedge y$), дизъюнкция ($x\vee y$), инкор ($\bar{x}$) амаллари ва 0, 1 $\in M$ элементлари аниқланган M тўпламда шу мантиқий амаллар ва 0, 1 элементлар учун қуйидаги аксиомалар*

$$\bar{\bar{x}} = x; \tag{1}$$

$$xy = yx; \tag{2}$$

$$(xy)z = x(yz); \tag{3}$$

$$x\vee y = y\vee x; \tag{4}$$

$$(x\vee y)\vee z = x\vee (y\vee z); \tag{5}$$

$$x(y\vee z) = xy\vee xz; \tag{6}$$

$$x\vee yz = (x\vee y)(x\vee z); \tag{7}$$

$$\overline{x\vee y} = \bar{x}\bar{y}; \tag{8}$$

$$\overline{xy} = \bar{x}\vee \bar{y}; \tag{9}$$

$$x\vee x = x; \tag{10}$$

$$xx = x; \tag{11}$$

$$1x = x; \tag{12}$$

$$0\vee x = x \tag{13}$$

*бажарилса, бундай M тўплам **Буль алгебраси** деб аталади.*

Буль алгебрасига қуйидаги тўпламлар мисол бўла олади:

1. M – бирор тўплам (масалан, тўғри чизиқда ётган нуқталар тўплами ёки натурал сонлар тўплами) ва μ_M – шу M нинг ҳамма қисм тўпламларидан иборат тўплам бўлсин. $xy(x, y \in \mu_M)$ орқали x ва y тўпламларнинг $x \cap y$ кесишмасини, $x \vee y$ орқали x ва y тўпламларининг $x \cup y$ бирлашмасини, $\bar{x}$ орқали x тўпламнинг M тўпламгача $\bar{x}$ тўлдирувчисини, 0 орқали $\varnothing$ бўш тўпламни ва 1 орқали M тўпламни белгилаб оламиз. У ҳолда μ_M тўплам Буль алгебраси бўлади, чунки юқорида кўрсатилган 13 та аксиома бажарилади.

2. Мулоҳазалар тўплами учун $\wedge$, $\vee$ ва – амаллари ҳамда 0 ва 1 элементлари аниқланганлиги учун бу тўпламни Буль алгебраси деб тахмин қилишимиз турган гап. Лекин бунинг учун қуйидаги аниқликни киритиш керак. A ва B мулоҳазалар айнан тенг бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ эквивалентлик абсолют чин бўлиши керак. Ана шундай тушунча киритилган мулоҳазалар тўплами Буль алгебраси бўлади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формулаларнинг чинлик тўпламларини топинг:

$A = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$; $\quad B = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;

$C = xyz \vee \bar{x}yz \vee \overline{x\bar{y}\bar{z}}$; $\quad D = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$;

$E = \overline{x\bar{y}} \leftrightarrow \bar{x} \vee xy$; $\quad F = (x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;

$G = xy \rightarrow (x \leftrightarrow \bar{y})$; $\quad J = x \vee y \rightarrow (x \leftrightarrow y)$;

$L = x \vee y \rightarrow z$; $\quad M = (x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)$.

2. 1- масалада келтирилган формулалардан тузилган $A \vee B$, $A \vee C$, $A \vee D$, $A \vee F$, $A \wedge B$, $A \wedge C$, $A \wedge D$, $A \wedge F$, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow F$, $C \rightarrow D$, $C \rightarrow F$, $C \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow E$, $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow C$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow C$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow D$, $A \leftrightarrow F \leftrightarrow E$, $E \rightarrow B$, $E \rightarrow C$, $E \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow F$, $G \rightarrow B$, $G \rightarrow C$, $G \leftrightarrow D$, $G \leftrightarrow F$, $J \rightarrow B$, $J \rightarrow C$, $J \leftrightarrow D$, $J \leftrightarrow F$, $L \rightarrow B$, $L \rightarrow C$, $L \leftrightarrow D$, $L \leftrightarrow F$, $M \rightarrow B$, $M \rightarrow C$, $M \leftrightarrow D$,

$M \leftrightarrow F$, $E \to F \to L$, $M \to J \to G$, $(L \leftrightarrow E) \to M$, $(A \leftrightarrow G) \to F$, $A \leftrightarrow M \leftrightarrow J$ мураккаб формулаларнинг чинлик тўпламини топинг.

3. $f_1 = \overline{xy \vee \bar{z}}$ ва $f_2 = x(xy \vee \overline{yz} \vee \overline{(y \vee \bar{t}z)})$ функцияларга тенг кучли бўлган функцияларни топинг.
4. Ёлғон қиймат сақловчи ($f(0, 0, \dots, 0) = 0$) n та аргументли ҳар хил функцияларнинг сони нечта?
5. Чин қиймат сақловчи ($f(1, 1, \dots, 1) = 1$) n та аргументли ҳар хил функцияларнинг сони нечта?
6. Қуйидаги $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y)(z \vee t)$ ва $f_2(x, y, z, t) = xz \vee yz \vee xt \vee yt$ ҳамда $f_3(x, y, z, t) = xy \vee zt$ ва $f_4(x, y, z, t) = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$ функцияларнинг тенг кучлилигини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мантиқий амалларнинг чинлик тўпламлари.
2. Формуланинг чинлик тўплами деб нимага айтамиз?
3. Мулоҳазалар алгебраси функциялари. Қачон функциялар тенг кучли деб айтилади? Функциялар суперпозицияси нимадан иборат?
4. Буль алгебраси таърифини келтиринг.

14- §. Мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонун

☑ *Икки тарафлама функция. Ўз-ўзига икки тарафлама функция. Икки тарафлама қонун. Мисоллар. Теорема. Лемма.*

Энди икки тарафлама (қўшма) функция тушунчасини киритамиз. $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияга икки тарафлама бўлган функцияни топиш учун f функциянинг чинлик жадвалида ҳамма ўзгарувчиларни уларнинг инкорига алмаштириш керак, яъни ҳамма жойда 1 ни 0 га ва 0 ни 1 га алмаштириш керак.

1-таъриф. *Қуйидагича аниқланган*

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

*функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг **икки тарафлама функцияси** деб аталади.*

2-таъриф. *Агар*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

*муносабат бажарилса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ га **ўз-ўзига икки тарафлама функция** деб аталади.*

Таърифга асосан, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ икки тарафлама функция $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ва $(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ қийматлар сатрларида қарама-қарши қийматлар қабул қилади.

Мисоллар. 1. Мулоҳазалар алгебрасининг асосий элементар функцияларига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.

1) $f_1(x) = x$ га икки тарафлама функция $f_1^*(x) = x$ бўлади.

2) $f_2(x) = \bar{x}$ га икки тарафлама функция $f_2^*(x) = \bar{x}$ бўлади.

3) $f_3(x, y) = xy$ га икки тарафлама функция $f_3^* = x \vee y$ бўлади.

4) $f_4(x, y) = x \vee y$ га икки тарафлама функция $f_4^* = xy$ бўлади.

5) $f_5(x, y) = x \to y$ га икки тарафлама функция $f_5^* = \overline{y \to x}$ бўлади.

6) $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ га икки тарафлама функция $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ бўлади.

7) $f_7 = 1$ га $f_7^* = 0$ ва $f_8 = 0$ га $f_8^* = 1$ икки тарафлама функция бўлади.

Келтирилган мисолнинг ечимидан кўриниб турибдики, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар, таърифга асосан, ўз-ўзига икки тарафлама функциялар бўлади.

2. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ функциянинг ўз-ўзига икки тарафлама функция эканлигини исбот қилинг.

Исбот.

$$f^*(x,y,z) = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}} = \overline{\bar{x}\bar{y} \wedge \bar{y}\bar{z} \wedge \bar{x}\bar{z}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) =$$
$$= [(x \vee y)y \vee (x \vee y)z](x \vee z) = [y \vee yz \vee xz](x \vee z) = (y \vee xz)(x \vee z) =$$
$$= xy \vee yz \vee x(x \vee z)z = xy \vee yz \vee xz.$$

Демак, $f(x, y, z) = f^*(x, y, z)$ эканлиги учун f ўз-ўзига икки тарафлама функциядир.

Теорема. *Агар*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m}))$$

бўлса, у ҳолда

$$\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m^*(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m}))$$

бўлади.

Исбот. $\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\Phi}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) =$

$$= \bar{f}(f_1(\bar{x}_{11}, \ldots., \bar{x}_{1p_1}), \ldots, f_m(\bar{x}_{m1}, \ldots, \bar{x}_{mp_m})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{\bar{f}}_1(\bar{x}_{11}, \ldots, \bar{x}_{1p_1}), \ldots, \bar{\bar{f}}_m(\bar{x}_{m1}, \ldots, \bar{x}_{mp_m})) =$$

$$= \bar{f}(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, \bar{f}_m^*(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})) =$$

$$= f^*(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m^*(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})).$$

Теореманинг исботидан икки тарафлама қонун келиб чиқади.

Икки тарафлама қонун. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *функцияларнинг суперпозициясига икки тарафлама бўлган функция мос равишда* $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_m^*$ *икки тарафлама функциялар суперпозициясига тенг кучлидир, яъни агар* $A = C[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m]$ *формула* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *функцияни реализация этса, у ҳолда* $C = [\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_m^*]$ *формула* $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ *функцияни реализация этади.*

Бу формула A формулага икки тарафлама бўлган формула деб айтилади ва уни A^* деб белгилаймиз. Демак,

$$A^* = C\,[\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_m^*].$$

Ушбу қонундан ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларнинг суперпозицияси яна ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлишлиги келиб чиқади, яъни агар $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлса, у ҳолда $\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*)$ функция ҳам ўз-ўзига икки тарафлама бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_m^*) = \varphi(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \Phi.$$

Агар функция формула орқали ифодаланган ва бу формула ўз навбатида $\wedge$, $\vee$, $-$ мантиқ амаллари орқали ифодаланган бўлса, у ҳолда бу функцияга (формулага) икки тарафлама бўлган функцияни (формулани) топиш учун $\vee$ ни $\wedge$ га, $\wedge$ ни $\vee$ га, 1 ни 0 га ва 0 ни 1 га алмаштириш кифоя. Бу принципни тенг кучли формулаларга ишлатганда, яна тенг кучли формулалар ҳосил қиламиз, яъни $A(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$ бўлса, у ҳолда $A^*(x_1, \ldots, x_n) = B^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Ушбу принцип орқали мантиқ алгебрасининг бир формуласидан иккинчи формуласига, бир теоремасидан иккинчи теоремасига, бир таърифидан иккинчи таърифига келамиз.

Масалан, юқорида келтирилган (2), (3), (6), (8), (10), (12) тенг кучли формулаларга ушбу принципни ишлатсак, (4), (5), (7), (9), (11), (13) тенг кучли формулалар келиб чиқади.

Мантиқ алгебрасида элементлари n та аргументли ўз-ўзига икки тарафлама функциялардан иборат бўлган тўпламни S билан белгилаймиз, унинг элементларининг сони 2^{2^n-1} га тенгдир.

Энди ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функциялар ҳақидаги леммани кўриб чиқайлик.

Лемма. *Агар $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin S$ бўлса, у ҳолда ундан аргументларининг ўрнига x ва $\bar{x}$ функцияларни қўйиш усули билан бир аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функция, яъни константани ҳосил қилиш мумкин.*

Исбот. $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \notin S$ бўлганлиги учун, шундай $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ қийматлар сатри топиладики, $\varphi(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ бўлади.

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i} (i = 1, \ldots, n)$ функцияни киритамиз ва $\varphi_i(x) = \varphi(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ деб белгилаб оламиз. У вақтда қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\varphi(0) = \varphi(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)) = \varphi(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = \varphi(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) =$$
$$= \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varphi(1^{\alpha_1}, \ldots, 1^{\alpha_n}) = \varphi(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_n(1)) = \varphi(1).$$

Лемма исбот бўлди.

15- §. Мантиқ алгебрасидаги арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади

☑ *Арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади. Мантиқий амалларни арифметик амаллар орқали ифодалаш. Чизиқли функция. Теорема.*

{0, 1} Буль алгебрасидаги xy конъюнкция амали оддий арифметикадаги 0 ва 1 сонлари устидаги кўпайтма амалига мос келади. Аммо 0 ва 1 сонларини қўшиш натижаси {0, 1} тўплам доирасидан четга чиқади. Шунинг учун И.И.Жегалкин 2 модулига асосан қўшиш амалини киритади (И.И.Жегалкин ўтган асрнинг 30-йиллар бошида Москва давлат университетида биринчи бўлиб математик мантиқ бўйича илмий семинар ташкил этган). x ва y мулоҳазаларни 2 модули бўйича қўшишни $x+y$ сифатида белгилаймиз ва у қуйидаги чинлик жадвали билан берилади:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Чинлик жадвалидан кўриниб турибдики, $x + y = \overline{x \leftrightarrow y}$. Мантиқ алгебрасидаги кўпайтма ва 2 модули бўйича қўшиш мантиқ амаллари учун коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик арифметик қонунлари ўз кучини сақлайди.

Буль алгебрасидаги асосий мантиқий амалларни киритилган арифметик амаллар орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

1) $\bar{x} = x + 1$; 2) $x \wedge y = xy$; 3) $x \vee y = xy + x + y$;

4) $x \to y = xy + x + 1$; 5) $x \leftrightarrow y = x + y + 1$.

2 модули бўйича қўшиш амалининг таърифига асосан $x + x = 0$ ва $xx = x$ ($x^n = x$).

Мантиқ алгебрасидаги исталган функцияни ягона арифметик кўпҳад шаклига келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, биз олдинги параграфларда исталган функцияни конъюнкция ва инкор мантиқий амаллари орқали ифодалаш мумкинлигини кўрган эдик. Юқорида конъюнкция, дизъюнкция ва инкор мантиқий амалларини арифметик амаллар орқали ифодаладик. Демак, исталган функцияни арифметик кўпҳад шаклига келтириш мумкин.

1-таъриф. *$\sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + a$ кўринишидаги кўпҳад* ***Жегалкин кўпҳади*** *деб аталади, бу ерда ҳамма x_{i_j} ўзгарувчилар биринчи даражада қатнашади, (i_1, ..., i_k) қийматлар сатрида ҳамма i_j лар ҳар хил бўлади, $a \in E_2 = \{0, 1\}$.*

2-таъриф. *$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} + a$ кўринишидаги функция* ***чизиқли функция*** *деб аталади, бу ерда $a \in E_2 = \{0, 1\}$.*

Чизиқли функциянинг ифодасидан кўриниб турибдики, n та аргументли чизиқли функциялар сони 2^{n+1} га тенг ва бир аргументли функциялар доимо чизиқли функция бўлади.

Жегалкин кўпҳади кўринишидаги ҳар бир функциянинг аргументлари сохта эмас аргументлар бўлади. Ҳақиқатан ҳам, x_1 шундай аргумент бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \varphi(x_2, \dots, x_n) + \psi(x_2, \dots, x_n).$$

Бу ерда φ функция айнан 0 га тенг эмас, акс ҳолда x_1 аргумент f функциянинг (кўпҳаднинг) аргументлари сафига қўшилмасди.

Энди $x_2, \ldots, x_n$ аргументларнинг шундай қийматларини оламизки, $\varphi = 1$ бўлсин. У ҳолда f функциянинг қиймати x_1 аргументнинг қийматига боғлиқ бўлади. Демак, x_1 сохта аргумент эмас.

Мантиқ алгебрасидаги ҳамма n аргументли чизиқли функциялар тўпламини L ҳарфи билан белгилаймиз. Унинг элементларининг сони 2^{n-1} га тенг бўлади.

Теорема. *Агар $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$ бўлса, у ҳолда ундан аргументлари ўрнига 0 ва 1 константаларни ҳамда x ва $\bar{x}$ функцияларни, айрим ҳолда f устига «–» инкор амалини қўйиш усули билан x_1x_2 функцияни ҳосил қилиш мумкин.*

16- §. Мантиқ алгебрасидаги монотон функциялар

☑ *Монотон функция. Қийматлар сатрининг олдин келиши. Таъриф. Монотон функциялар суперпозицияси. КНШ (ДНШ) кўринишидаги функциянинг монотон функция бўлиш шарти.*

$0 < 1$ муносабати орқали $\{0, 1\}$ тўпламни тартиблаштирамиз.

1-таъриф. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *ва* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *қийматлар сатри бўлсин. Агар* $\alpha_i \le \beta_i$ *(ҳеч бўлмаганда битта i рақам учун тенгсизлик ишораси бажарлса) ёки* α *ва* β *қийматлар сатрлари устма-уст тушса, у ҳолда* α *қийматлар сатри* β *қийматлар сатридан олдин келади деб айтамиз ва* $\alpha < \beta$ *шаклида ёзамиз.*

2-таъриф. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *ва* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *ихтиёрий қийматлар сатрлари бўлсин.* $\alpha < \beta$ *дан* $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \le$ $\le f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *бажарилиши келиб чиқса, у ҳолда* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *функция* ***монотон функция*** *деб аталади.*

3-таъриф. $\alpha < \beta$ *дан* $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *муносабат келиб чиқса, у ҳолда* $f(x_1, \ldots, x_n)$ ***номонотон функция*** *деб аталади.*

Асосий элементар мантиқий функциялардан 0, 1, x, xy, $x \vee y$ функциялар монотон функциялар бўлиб, $\bar{x}$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$ функциялар номонотон функциялардир.

1-теорема. *Монотон функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция яна монотон функция бўлади.*

Исбот. Φ монотон функциялар системаси бўлсин ва шу системадаги функциялар суперпозициясидан ҳосил қилинган функция монотон эканлигини исбот қилиш керак бўлсин. 0 рангли суперпозиция учун бу тасдиқнинг тўғрилиги аниқ, чунки Φ системадаги ҳамма функциялар монотон функциялардир. k рангли суперпозиция учун теоремадаги тасдиқ тўғри бўлсин. Унинг $(k+1)$ рангли суперпозиция учун ҳам тўғрилигини исботлаймиз.

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\psi(y_1, \dots, y_l) \in \Phi^{(k)}$ бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k);$$
$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l) =$$
$$= \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \psi(y_1, \dots, y_l), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

функцияларнинг монотон эканлигини исботлаш лозим. Бу ерда y ва y_i лар x_j ўзгарувчиларнинг бирортаси билан мос келиши мумкин. φ функциянинг монотонлигидан $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$ нинг монотон функция эканлиги келиб чиқади. F функциянинг монотонлигини исботлаймиз. Бунинг учун F функциянинг иккита γ' ва γ'' таққосланадиган қийматлар сатрини кўриб чиқамиз:

$$\gamma' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{i-1}, \dots, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n, \beta'_1, \dots, \beta'_l);$$
$$\gamma'' = (\alpha''_1, \dots, \alpha''_{i-1}, \dots, \alpha''_{i+1}, \dots, \alpha''_n, \beta''_1, \dots, \beta''_l).$$

$\gamma' \prec \gamma''$ бўлсин. У ҳолда $F(\gamma') \le F(\gamma'')$ эканлигини кўрсатишимиз керак. Қуйидагилар маълум:

$F(\gamma') = \varphi(\delta')$, бу ерда $j = i$ бўлганда $\delta'_j = \alpha'_j$, $\delta'_i = \psi(\beta')$;

$F(\gamma'') = \varphi(\delta'')$, бу ерда $j = i$ бўлганда $\delta''_j = \alpha''_j$, $\delta''_i = \psi(\beta'')$.

ψ монотон функция ва $\gamma' \prec \gamma''$ дан $\beta' \prec \beta''$ келиб чиққанлигидан $\delta' \prec \delta''$ бўлади. Яъни $\varphi(\delta') = F(\gamma') \le \varphi(\delta'') = F(\gamma'')$, чунки φ монотон функциядир.

$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \ldots, y, x_{i+1}, \ldots, x_k)F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_l) \in$ эканлигидан $(k+1)$ рангли суперпозиция учун теорема исбот бўлди. Демак, монотон функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция яна монотон функциядир.

Конъюнкция ва дизъюнкция монотон функциялар бўлганлиги учун, теоремага асосан, уларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция ҳам монотон бўлади.

2-теорема. *Агар $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ бўлса, у ҳолда ундан аргументлари ўрнига 0, 1 ва x функцияни қўйиш усули билан $\bar{x}$ функцияни ҳосил қилиш мумкин.*

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар алгебрасининг асосий элементар функцияларига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
2. Ҳамма икки аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
3. n та аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларнинг сонини топинг.
4. $f = (\bar{x} \vee y\bar{z})(xy \vee x\bar{z})$ ва $\varphi = (x \vee \bar{y})z\bar{t} \vee \bar{x}t$ функцияларга икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
5. а) $x \rightarrow y \leftrightarrow z$; б) $x \vee y \vee z \vee t$; в) $x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$ формулаларни Жегалкин кўпҳади кўринишига келтиринг.
6. Функциянинг Жегалкин кўпҳади кўринишидаги ифодаси ягона эканлигини исботланг.
7. Чизиқли функцияларнинг қайси бири ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлади?
8. $xy \vee xz \vee yz = xy + xz + yz$ эканлигини исботланг.
9. Қуйидаги формулаларни Жегалкин кўпҳади кўринишига келтиринг:

$$x \vee y \vee z; \quad xy \vee yz \vee xz; \quad xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

10. Жегалкин кўпҳади кўринишидаги функциянинг ҳамма аргументлари сохта аргументлар эмаслигини исботланг.

11. Чизиқли функцияларнинг қайси бири монотон функциялар бўлади?
12. Ноль (бир) сақловчи монотон функциялар айнан бирга (нолга) тенг эканлигини исботланг.
13. Икки аргументли ҳамма монотон функцияларни топинг.
14. Қуйида келтирилган функцияларнинг қайси бири монотон функция эканлигини аниқланг:

    а) $xy \vee xz \vee x\bar{z}$; б) $x \to (x \to y)$; в) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;

    г) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}$; д) $xy \vee x \vee \bar{x}z$; е) $xy \vee yz \vee xz$.
15. Айнан константадан (0 ёки 1) фарқ қилувчи функция монотон бўлиши учун уни конъюнкция ва дизъюнкция суперпозицияси орқали ифодалаш етарли ва зарурлигини исботланг.
16. Монотон функцияга икки тарафлама бўлган функция монотон эканлигини исбот қилинг.
17. Фақат ва фақат ёки константалар, ёки ўзгарувчилар устида инкор амали бўлмаган КНШ ва ДНШ кўринишида ифодаланган функциялар монотон бўлишлигини кўрсатинг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Икки тарафлама функция ва ўз-ўзига икки тарафлама функция таърифларини келтиринг.
2. Мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонунни ёзинг.
3. Мантиқ алгебрасидаги арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади.
4. Мантиқ алгебрасидаги монотон функциялар.

17- §. Функционал ёпиқ синфлар ва Пост теоремаси

☑ *Тўлиқ функциялар системаси. Икки тарафлама функциялар системасининг тўлиқ бўлиш шарти. Ёпиқ синфлар. Хусусий функционал ёпиқ синф. Максимал функционал ёпиқ синф. Пост теоремаси. Натижа. Тўплам ёпиғи. Пост жадвали.*

Мантиқ алгебрасининг $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ функциялар системаси берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар мантиқ алгебрасининг исталган функциясини $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ системадаги функциялар суперпозицияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда Ф* ***тўлиқ функциялар системаси*** *деб аталади.*

Исталган функцияни МКНШ ёки МДНШ кўринишида ифодалаш мумкинлигидан $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системасининг тўлиқлиги келиб чиқади. $\{xy, x + y, 1\}$ функциялар системаси ҳам тўлиқ бўлади, чунки исталган функцияни Жегалкин кўпҳади кўринишига келтириш мумкин.

Қуйидаги функциялар системасининг тўлиқлигини исботлаймиз:

а) $xy, \bar{x}$;　б) $x \vee y, \bar{x}$;　в) $xy, x + y, 1$;

г) $\overline{x \vee y}$;　д) $\bar{x}\bar{y}$;　и) $x + y, x \vee y, 1$;

ж) $x + y + z, xy, 0, 1$;　з) $x \to y, \bar{x}$;　е) $x \nrightarrow y, 0$.

Исбот. а) $x \vee y = \overline{\overline{xy}}$, яъни дизъюнкция амалини конъюнкция ва инкор амаллари орқали ифодалаш мумкин. Демак, $\{xy, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлади;

б) $xy = \bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ эканлиги маълум. Демак, исталган мантиқий функцияни дизъюнкция ва инкор амаллари орқали ифодаласа бўлади. Шунинг учун $\{x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқдир;

в) мантиқ алгебрасининг ихтиёрий функциясини ягона Жегалкин кўпҳади кўринишига келтириш мумкинлигидан $\{xy, x + y, 1\}$ функциялар системасининг тўлиқлиги келиб чиқади;

г) ва д) мантиқ алгебрасидаги исталган функцияни $\psi(x, y) = \overline{xy}$ ва $\varphi(x, y) = \overline{x \vee y}$ Шеффер функциялари орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\bar{x} = \varphi(x, x)$,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

ва

$$xy = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$$

асосий мантиқий амалларни Шеффер функцияси орқали ифодалаш мумкин. Демак, $\{\overline{xy}\}$ ва $\{\overline{x \vee y}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлади.

и) $x \vee y = xy + x + y$ бўлганлиги учун $x \vee y + (x + y) = xy$ бўлади. $\{xy, x+y, 1\}$ тўлиқ система эканлиги в) бандда исбот қилинган эди, демак, $\{x+y, x \vee y, 1\}$ система тўлиқдир.

Худди шундай бошқа функциялар системасининг тўлиқлигини исбот қилиш мумкин.

1-теорема. *Агар* $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *функциялар системаси тўлиқ бўлса, у ҳолда унга икки тарафлама бўлган* $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ *функциялар системаси ҳам тўлиқ бўлади.*

Исбот. Φ^* системанинг тўлиқлигини исботлаш учун исталган $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни Φ^* системасидаги функциялар суперпозицияси орқали ифодалаш мумкинлигини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун аввал f^* функцияни $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ системадаги функциялар орқали ифодалаймиз (Φ система тўлиқ бўлганлиги учун бу процедурани бажариш мумкин). Кейин икки тарафлама қонунга асосан икки тарафлама функциялар суперпозицияси орқали f функцияни ҳосил қиламиз.

Мисол. Қуйидаги функциялар системасининг тўлиқ эмаслигини исботлайлик:

а) $\bar{x}, 1$;   б) $xy, x \vee y$;   в) $x + y, \bar{x}$;

г) $xy \vee yz \vee xz, \bar{x}$;   л) $xy \vee yz \vee xz, 0, 1$.

а) $\bar{x} = x + 1$ га тенг. Демак, $\{\bar{x}, 1\}$ системадаги функциялар бир аргументли функциялар бўлади. Бизга маълумки, бир аргументли функцияларнинг суперпозицияси натижасида ҳосил қилинган функция яна бир аргументли функция бўлади. Натижада, бу системадаги функциялар орқали кўп аргументли функцияларни ифодалаб бўлмайди. Шунинг учун $\{\bar{x}, 1\}$ тўлиқ система эмас.

б) $\{xy, x \vee y\}$ системадаги функцияларнинг иккаласи ҳам монотондир. Монотон функцияларнинг суперпозицияси орқали ҳосил қилинган функция яна монотон бўлишини исбот қилган эдик. Демак, бу иккала функциянинг суперпозицияси орқали монотон бўлмаган функцияларни ифодалаш мумкин эмас ва натижада, $\{xy, x \vee y\}$ система тўлиқмас система бўлади.

в) $\{x+y, \bar{x}\}$ системадаги функциялар чизиқли функциялардир. Шунинг учун бу функциялар орқали чизиқлимас функцияларни ифодалаб бўлмайди. Демак, $\{x+y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ эмас.

г) $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ системадаги функциялар ўз-ўзига икки тарафлама функциялардир. Бу функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган ҳар қандай функция ҳам ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлади. Демак, $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ эмас.

д) $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ системадаги функцияларнинг ҳаммаси монотон функциялар бўлади. Монотон эмас функциялар бу системадаги функциялар орқали ифодаланмайди. Демак, $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ система тўлиқ эмас.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган масала ечимининг анализидан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

Берилган Ф функциялар системасининг тўлиқ эмаслигини исботлаш учун системадаги функцияларнинг шундай умумий хусусиятини топиш керакки, бу хусусият функциялар суперпозицияси натижасида сақлансин.

Ҳақиқатан ҳам, у вақтда бундай хусусиятга эга бўлмаган функцияни Ф системадаги функциялар суперпозицияси орқали ҳосил қилиб бўлмайди.

Функцияларнинг бу маълум хусусиятларини текшириш учун одатда функционал ёпиқ синфлар тушунчасидан фойдаланилади.

2-таъриф. *Агар А системадаги функциялар суперпозициясидан ҳосил бўлган функция яна шу системанинг элементи бўлса, у ҳолда бундай система* ***суперпозицияга нисбатан ёпиқ система*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Мантиқ алгебрасининг суперпозицияга нисбатан ёпиқ бўлган ҳар қандай функциялар системаси* ***функционал ёпиқ синф*** *деб аталади.*

Равшанки, маълум бир хил хусусиятга эга бўлган функциялар системаси функционал ёпиқ синфни ташкил этади ва, аксинча, маълум функционал ёпиқ синфга кирувчи функциялар бир хил хусусиятга эга бўлган функциялардир. Қуйидаги функциялар системаси функционал ёпиқ синфларга мисол бўла олади:

а) бир аргументли функциялар;
б) мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари;
в) L – чизиқли функциялар;
г) S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар;
д) M – монотон функциялар;
е) P_0 – ноль қийматни сақловчи функциялар;
ж) P_1 – бир қийматни сақловчи функциялар.

4-таъриф. *Бўш синфдан ва мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари тўпламидан фарқ қилувчи функционал ёпиқ синф* ***хусусий функционал ёпиқ синф*** *деб аталади.*

Шундай қилиб, функциялар системасининг тўлиқ бўлишлиги учун бу системада ҳар қандай хусусий функционал ёпиқ синфга кирмайдиган функция топилиши етарли ва зарурдир.

5-таъриф. *Ўз-ўзидан ва мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари синфи* (P_2) *дан фарқ қилувчи функционал ёпиқ синфларга кирмайдиган хусусий функционал ёпиқ синф* ***максимал функционал ёпиқ синф*** *деб аталади.*

Мантиқ алгебрасида ҳаммаси бўлиб бешта максимал функционал ёпиқ синф мавжуд:

P_0 – ноль сақловчи функциялар синфи, P_1 – бир сақловчи функциялар синфи, M – монотон функциялар синфи, S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар синфи, L – чизиқли функциялар синфи.

Пост теоремаси. $\Phi=\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *функциялар системаси тўлиқ бўлишлиги учун бу системада* P_0, P_1, M, S, L *максимал функционал ёпиқ синфларнинг ҳар бирига кирмайдиган камида битта функция мавжуд бўлиши етарли ва зарур* *(яъни $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ система P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг ҳам қисм тўплами бўлмаганда ва фақат шундагина тўлиқ система бўлади).*

Исбот. $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ тўлиқ система бўлсин, яъни $[\Phi] = P_2$. Фараз қиламизки, Ф максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортаси. У вақтда Fнинг ёпиқлигини ҳисобга олиб, $P_2[\Phi] \subseteq [F] = F$ ни ёзиш мумкин, яъни $F = P_2$. Аммо бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, $\Phi \subseteq F$ муносабат бажарилмайди.

Теореманинг етарлилиги исботини ўқувчиларга ҳавола этамиз.

Натижа. *Мантиқ алгебрасидаги ҳар қандай функционал ёпиқ синф P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг қисм тўплами бўлади.*

Амалда бирорта $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ системанинг тўлиқ ёки тўлиқ эмаслигини аниқлаш учун Пост жадвалидан фойдаланилади. Пост жадвали қуйидаги кўринишда бўлади:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_{n-1}					
φ_n					

Жадвалнинг хоналарига ўша сатрдаги функция функционал ёпиқ синфларнинг элементи бўлса «+» ишора, бўлмаса «–» ишораси қўйилади.

$\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ система тўлиқ функциялар системаси бўлиши учун, теоремага асосан, жадвалнинг ҳар бир устунида камида битта « – » ишораси бўлиши етарли ва зарур.

$\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлмаслиги учун P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг қисм тўплами бўлиши, яъни Пост жадвалининг бирор устуни тўлиқ «+» ишораларидан иборат бўлиши керак.

Функциялар системасининг тўлиқлиги тушунчаси билан синфнинг (тўпламнинг) *ёпиғи* тушунчаси ўзаро боғланган.

6-таъриф. *A билан P_2 (мантиқ алгебрасининг n та аргументли ҳамма функцияларини ўз ичига олган) тўпламнинг бирор қисм тўпламини белгилаймиз. A тўплам функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган ҳамма буль функциялари тўплами (A тўплам функциялари орқали ифодаланган ҳамма буль функциялари тўплами) A тўпламнинг* ***ёпиғи*** *деб аталади ва $[A]$ каби белгиланади.*

Мисоллар. 1. $A = P_2$ бўлсин, у ҳолда $[A] = P_2$.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ бўлсин, у ҳолда A тўпламнинг ёпиғи ҳамма L — чизиқли функциялар тўпламидан иборат бўлади.

Тўплам ёпиғи қуйидаги хоссаларга эга:

1) $[A] \supseteq A$;

2) $[[A]] = [A]$;

3) агар $A_1 \subseteq A_2$ бўлса, у ҳолда $[A_1] \subseteq [A_2]$ бўлади;

4) $[A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2]$.

7-таъриф. *Агар $[A] = A$ бўлса, у ҳолда A тўплам (синф)* ***функционал ёпиқ синф*** *деб аталади*

Мисоллар. 1. $A = P_2$ синф ёпиқ синф бўлади.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ синфи ёпиқ синф бўлмайди.

3. L синф ёпиқ синф бўлади.

Осонгина кўриш мумкинки, ҳар қандай $[A]$ синф ёпиқ синф бўлади. Бу ҳол кўпгина функционал ёпиқ синфларни топишга ёрдам беради.

Тўплам ёпиғи ва ёпиқ синф тилида функциялар системасининг тўлиқлиги ҳақидаги таъриф (аввалги таърифга эквивалент бўлган таъриф) ни бериш мумкин.

8-таъриф. *Агар $[A] = P_2$ бўлса, у ҳолда A функциялар системаси* ***тўлиқ*** *деб аталади.*

Мисол. Қуйидаги функциялар системаларининг тўлиқ эмаслигини Пост жадвали орқали исбот қилайлик:

а) $\Phi_1 = \{0, xy, x + y + z\}$; б) $\Phi_2 = \{1, xy, x + y + z\}$;
в) $\Phi_3 = \{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$; г) $\Phi_4 = \{0, 1, x + y\}$;
д) $\Phi_5 = \{0, 1, xy\}$.

		P_0	P_1	S	L	M
а)	0	+	−	−	+	+
	xy	+	+	−	−	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	−
б)	1	−	+	−	+	+
	xy	+	+	−	−	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	−
в)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	−	−	+	−	−
г)	0	+	−	−	+	+
	1	−	+	−	+	+
	$x+y$	+	−	−	+	−
д)	0	+	−	−	+	+
	1	−	+	−	+	+
	xy	+	+	−	−	+

Жадвалдан кўриниб турибдики, юқорида келтирилган ҳамма функциялар системаси тўлиқ эмас, чунки ҳар бир система учун жадвалда битта устун фақатгина «+» ишораларидан иборат. Шуни таъкидлашимиз керакки, ҳар бир система учун бу устунлар ҳар хил. Демак, Пост теоремаси шартидан P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасини ҳам олиб ташлаш мумкин эмас. Бу хулосадан ўз навбатида P_0, P_1, S, L, M максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортаси иккинчисининг қисм тўплами бўла олмаслиги келиб чиқади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги функциялар системаси функционал ёпиқ синфлар бўлишини исбот қилинг:
   - а) бир аргументли функциялар;
   - б) ҳамма мантиқ алгебрасининг функциялари;
   - в) L – чизиқли функциялар;
   - г) S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар;
   - д) M – монотон функциялар;
   - е) P_0 – ноль қийматни сақловчи функциялар;
   - ж) P_1 – бир қийматни сақловчи функциялар.
2. Агар $Ф = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ ва $F = (f_1, ..., f_n)$ функционал ёпиқ синфлар бўлса, у ҳолда $Ф \cap F$ ва $Ф^* = \{\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ лар ҳам функционал ёпиқ синфлар бўлишини ва $Ф \cup F$нинг функционал ёпиқ синф бўлмаслигини исботланг.
3. Қуйидаги максимал функционал ёпиқ P_0, P_1, S, L, M синфларнинг бирортаси иккинчисининг қисм тўплами бўлмаслигини исботланг.
4. Ҳар қандай шахсий функционал ёпиқ синф P_0, P_1, S, L, M максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг қисм тўплами эканлигини исботланг.
5. Ноль сақламовчи функция номонотон функция ёки ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функция эканлигини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тўлиқ функциялар системаси.
2. Функционал ёпиқ синфлар ва хусусий функционал ёпиқ синфлар.
3. Максимал функционал ёпиқ синф ва Пост теоремаси.
4. Тўплам ёпиғи ва Пост жадвали.

III БОБ

МУЛОҲАЗАЛАР ҲИСОБИ

Мулоҳазалар ҳисоби аксиоматик мантиқий система бўлиб, мулоҳазалар алгебраси эса унинг интерпретациясидир (талқинидир).

Берилган аксиомалар системаси негизида (базасида) қурилган аксиоматик назария деб, шу аксиомалар системасига таяниб исботланувчи ҳамма теоремалар мажмуасига айтилади.

Аксиоматик назария формал ва формалмас назарияларга бўлинади.

Формалмас аксиоматик назария назарий-тўпламий мазмун билан тўлдирилган бўлиб, келтириб чиқариш тушунчаси аниқ берилмаган ва бу назария асосан фикр мазмунига суянади.

Қаралаётган аксиоматик назария учун қуйидаги шартлар бажарилган бўлса, яъни:

1) назариянинг тили берилган;

2) формула тушунчаси аниқланган;

3) аксиомалар деб аталадиган формулалар тўплами берилган;

4) бу назарияда келтириб чиқариш қоидаси аниқланган бўлса, формал аксиоматик назария аниқланган деб ҳисобланади.

Қуйида мулоҳазалар ҳисобининг символлари, формуласи, аксиомалар системаси, келтириб чиқариш қоидалари, формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси, дедукция ва умумлашган дедукция теоремалари, айрим мантиқ қонунларининг исботи, мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби ўртасидаги муносабатлар, мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари каби масалалар баён этилади.

1- §. Мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси

☑ *Мулоҳазалар ҳисоби. Мантиқий боғловчилар. Символлар. Формула. Қисмий формула.*

Ҳар қандай ҳисобнинг тавсифи бу ҳисобнинг символлари тавсифидан, формулалар ва келтириб чиқариш формулалари таърифидан иборат.

Мулоҳазалар ҳисобида уч категорияли символлардан иборат алфавит қабул қилинади:

Биринчи категория символлари: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$. Бу символларни *ўзгарувчилар* деб атаймиз.

Иккинчи категория символлари: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $-$. Булар *мантиқий боғловчилардир*. Биринчиси – дизъюнкция ёки мантиқий қўшиш белгиси, иккинчиси – конъюнкция ёки мантиқий кўпайтма белгиси, учинчиси – импликация белгиси ва тўртинчиси – инкор белгиси деб аталади.

Учинчи категорияга қавс деб аталадиган (,) символ киритилади.

Мулоҳазалар ҳисобида бошқа символлар йўқ.

Мулоҳазалар ҳисобининг *формуласи* деб мулоҳазалар ҳисоби алфавити символларининг маълум бир кетма-кетлигига айтилади.

Формулаларни белгилаш учун лотин алфавитининг бош ҳарфларидан фойдаланамиз. Бу ҳарфлар мулоҳазалар ҳисобининг символлари қаторига кирмайди. Улар фақатгина формулаларнинг шартли белгилари бўлиб хизмат қилади.

Энди формула тушунчаси таърифини берайлик. Бу тушунча қуйидагича аниқланади:

1) ҳар қандай $x, y, z, \ldots$ *ўзгарувчиларнинг исталган бири формуладир;*

2) агар A ва B нинг ҳар бири формула бўлса, у ҳолда $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$ *ва* $\overline{A}$ *ҳам формуладир;*

3) бошқа ҳеч қандай символлар сатри формула бўла олмайди.

Ўзгарувчиларни *элементар формулалар* деб атаймиз.

Мисол. Формула таърифининг 1- бандига кўра x, y, z, ... ўзгарувчилар формула бўлади. У вақтда таърифнинг 2- бандига мувофиқ $(x\wedge y)$, $(x\vee y)$, $(x\to y)$, $\bar{x}$ лар ҳам формулалардир. Худди шу тариқада $\overline{(x\vee y)}$, $((x\wedge y)\to z))$, $((x\wedge y)\to(y\to z))$ ҳам формулалар бўлади.

Қуйидагилар формула бўла олмаслигини тушунтиринг:

$$x\bar{y},\ \wedge z,\ x\vee y,\ x\to y,\ (x\wedge y)\to\bar{x}.$$

Қисмий формула тушунчасини киритамиз:

1. Элементар формула учун фақат унинг ўзи қисмий формуладир.

2. Агар $\bar{A}$ формула бўлса, у ҳолда шу формуланинг ўзи, A формула ва A формуланинг ҳамма қисмий формулалари унинг қисмий формулалари бўлади.

3. Агар формула $A*B$ кўринишда бўлса (бу ерда ва бундан кейин $*$ ўрнида $\vee$, $\wedge$, $\to$ символларининг исталганини тушунамиз), у ҳолда шу формуланинг ўзи, A ва B формулалар ҳамда A ва B формулаларнинг барча қисмий формулалари $A*B$ формуланинг қисмий формулалари бўлади. Масалан, $((x\vee\bar{y})\to(\overline{\bar{z}\to y}))$ формула учун:

$((x\vee\bar{y})\to(\overline{\bar{z}\to y}))$ – нолинчи чуқурликдаги қисмий формула;

$(x\vee\bar{y})$, $(\overline{\bar{z}\to y})$ – биринчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

x, $\bar{y}$, $(\bar{z}\to y)$ – иккинчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

y, $\bar{z}$ – учинчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

z – тўртинчи чуқурликдаги қисмий формула бўлади.

Формулаларни ёзишда айрим соддалаштиришларни қабул қиламиз. Худди мулоҳазалар алгебрасидаги каби формулалар ёзувидаги қавсларни тушириб қолдиришга келишамиз. Бу келишувга биноан $((x\vee y)\wedge z)$, $(\overline{x\wedge y})$, $((x\wedge y)\to(z\wedge t))$ формулаларни мос равишда $x\vee y\wedge z$, $\overline{x\wedge y}$, $x\wedge y\to z\wedge t$ кўринишда ёзамиз.

2- §. Исботланувчи формула таърифи. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими). Келтириб чиқариш қоидалари

☑ *Исботланувчи формула. Аксиома. Келтириб чиқариш қоидаси. Ўрнига қўйиш қоидаси. Хулоса қоидаси. Аксиомалар тизими. Исботлаш.*

Энди мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи формулалар синфини ажратамиз. Исботланувчи формулалар формулалар таърифига ўхшаш характерда таърифланади. Аввал дастлабки исботланувчи формулалар (аксиомалар), ундан кейин эса келтириб чиқариш қоидаси аниқланади. Келтириб чиқариш қоидаси орқали бор исботланувчи формулалардан янги исботланувчи формулалар ҳосил қилинади.

Дастлабки исботланувчи формулалардан келтириб чиқариш қоидасини қўллаш йўли билан янги исботланувчи формулаларни ҳосил қилиш шу формулаларни *аксиомалардан келтириб чиқариш* деб аталади.

2.1. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими). Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар тизими 11 аксиомадан иборат бўлиб, булар тўрт гуруҳга бўлинади.

Биринчи гуруҳ аксиомалари:

I_1 $x\to(y\to x)$.

I_2 $(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$.

Иккинчи гуруҳ аксиомалари:

II_1 $x\wedge y\to x$.

II_2 $x\wedge y\to y$.

II_3 $(z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\wedge y))$.

Учинчи гуруҳ аксиомалари:

III_1 $x \to x \vee y$.

III_2 $y \to x \vee y$.

III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Тўртинчи гуруҳ аксиомалари:

IV_1 $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$.

IV_2 $x \to \bar{\bar{x}}$.

IV_3 $\bar{\bar{x}} \to x$.

2.2. Келтириб чиқариш қоидаси.

2.2.1. Ўрнига қўйиш қоидаси. Агар A мулоҳазалар ҳисобининг исботланувчи формуласи, x ўзгарувчи, B мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлса, у ҳолда A формула ифодасидаги ҳамма x лар ўрнига B формулани қўйиш натижасида ҳосил қилинган формула ҳам исботланувчи формула бўлади.

A формуладаги x ўзгарувчилар ўрнига B формулани қўйиш операцияси (жараёни)ни *ўрнига қўйиш қоидаси* деб айтамиз ва уни қуйидаги символ билан белгилаймиз:

$$\int_x^B (A).$$

Зикр этилган қоидага қуйидаги аниқликларни киритамиз:

а) агар A фақат x ўзгарувчидан иборат бўлса, у ҳолда $\int_x^B (A)$ ўрнига қўйиш B формулани беради;

б) агар A формула x дан фарқли y ўзгарувчидан иборат бўлса, у ҳолда $\int_x^B (A)$ ўрнига қўйиш A ни беради;

в) агар A ўрнига қўйиш аниқланган формула бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ формуладаги x ўрнига B формулани қўйиш натижасида ўрнига қўйишнинг инкори келиб чиқади, яъни $\int_{x}^{B}(\overline{A})$ ўрнига қўйиш $\overline{\int_{x}^{B} A}$ ни беради;

г) агар A_1 ва A_2 формулаларда ўрнига қўйиш аниқланган бўлса, у ҳолда $\int_{x}^{B}(A_1 * A_2)$ ўрнига қўйиш $\int_{x}^{B}(A_1) * \int_{x}^{B}(A_2)$ ни беради.

Агар A исботланувчи формула бўлса, уни $\vdash A$ шаклда ёзишга келишамиз. У ҳолда ўрнига қўйиш қоидасини қуйидагича схематик равишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x}^{B}(A)}$$

ва уни «агар A исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\int_{x}^{B}(A)$ ҳам исботланувчи формула бўлади» деб ўқилади.

2.2.2. Хулоса қоидаси. Агар A ва $A \to B$ мулоҳазалар ҳисобининг исботланувчи формулалари бўлса, у ҳолда B ҳам исботланувчи формула бўлади. Бу қоида қуйидагича схематик равишда ёзилади:

$$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2.2.3. Исботланувчи формуланинг таърифи.

а) Ҳар қандай аксиома исботланувчи формуладир;

б) исботланувчи формуладаги x ўзгарувчи ўрнига ихтиёрий B формулани қўйиш натижасида ҳосил бўлган формула исботланувчи формула бўлади;

в) A ва $A \to B$ исботланувчи формулалардан хулоса қоидасини қўллаш натижасида олинган B формула исботланувчи формуладир;

г) мулоҳазалар ҳисобининг бошқа ҳеч қандай формуласи исботланувчи деб саналмайди.

Таъриф. *Исботланувчи формулаларни ҳосил қилиш процесси (жараёни)* ***исбот қилиш (исботлаш)*** *деб аталади.*

1-мисол. $\vdash A \to A$ эканлиги (импликациянинг рефлексивлиги) исботлансин.

Импликациянинг рефлексивлигини исботлаш учун ушбу

$$\vdash (x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z)) \text{ — } I_2$$

аксиомадан фойдаланамиз. Бу ерда $\int_{z}^{x}(I_2)$ ўрнига қўйишни бажариш натижасида

$$\vdash (x\to(y\to x))\to((x\to y)\to(x\to x)) \qquad (1)$$

келиб чиқади. $\vdash (x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$ — I_2 аксиома ва (1) формулага хулоса қоидасини қўллаб

$$\vdash (x\to y)\to(x\to x) \qquad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. (2) формулага ушбу

$$\int_{y}^{\bar{\bar{x}}}(2)$$

ўрнига қўйишни бажариш натижасида

$$\vdash (x\to \bar{\bar{x}})\to(x\to x) \qquad (3)$$

исботланувчи формулага эга бўламиз. $x\to\bar{\bar{x}}$ — IV_2 аксиома ва (3) формулага нисбатан хулоса қоидасини қўллаш натижасида

$$\vdash x\to x \qquad (4)$$

исботланувчи формулага келамиз. Ниҳоят, (4) формуладаги x ўзгарувчи ўрнига A формулани қўйсак,

$$\vdash A\to A$$

исботланиши керак бўлган формула ҳосил бўлади.

2-мисол. $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$ эканлигини исботланг.

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$ – II_3 аксиомага нисбатан кетма-кет икки марта ўрнига қўйиш усулини қўллаймиз: аввал x ни $\bar{x}$ га ва кейин y ни $\bar{y}$ га алмаштирамиз. Натижада қуйидаги исботланувчи формулага эга бўламиз:

$$\vdash (z \to \bar{x}) \to ((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \qquad (5)$$

(5) формулага нисбатан $\int_{z}^{\overline{x \vee y}}(5)$ ўрнига қўйишни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vdash ((\overline{x \vee y}) \to \bar{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \quad (5.a)$$

Энди

$$\overline{x \vee y} \to \bar{x}, \qquad (6)$$

$$\overline{x \vee y} \to \bar{y} \qquad (7)$$

формулаларнинг исботланувчи эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$ – IV_1 аксиомага нисбатан

$$\int_{y}^{x \vee y}(\mathrm{IV}_1)$$

ўрнига қўйишни бажарамиз. Натижада

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x}) \qquad (8)$$

формулага эга бўламиз. (8) формула ва $x \to x \vee y$ – III_1 аксиомага нисбатан хулоса қоидасини ишлатиб, (6) нинг исботланувчи формула эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Худди шу каби (7) нинг ҳам исботланувчи формула эканлигини кўрсатиш мумкин.

(6) ва (5) формулаларга хулоса қоидасини қўлласак,

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}) \qquad (9)$$

исботланувчи формула келиб чиқади.

(7) ва (9) формулаларга хулоса қоидасини қўллаб,

$$\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$$

дастлабки формуланинг исботланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

3- §. Келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари

☑ *Ҳосилавий қоидалар. Бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаси. Мураккаб хулоса қоидаси. Силлогизм қоидаси. Контрпозиция қоидаси. Икки марталик инкорни тушириш қоидаси.*

Хулоса ва ўрнига қўйиш қоидалари сингари келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари ҳам янги исботланувчи формулалар ҳосил қилишга имкон яратади.

3.1. Бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаси.

Таъриф. *Агар $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ — исботланувчи формула ва $B_1, B_2, ..., B_n$ мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формулалари бўлса, у ҳолда A формуланинг $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчилари ўрнига бир вақтда мос равишда $B_1, B_2, ..., B_n$ формулаларни қўйиш натижасида C исботланувчи формулани ҳосил қилиш* ***бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаси*** *деб аталади.*

$z_1, z_2, ..., z_n$ лар $A, B_1, B_2, ..., B_n$ формулалардаги бошқа ўзгарувчилардан фарқ қилувчи ўзгарувчилар ва $z_i \neq z_j$ $(i, j = \overline{1, n})$ бўлсин. У ҳолда A формулада n та кетма-кет ўрнига қўйишни бажарамиз: аввал x_1 ўрнига z_1 ни, кейин x_2 ўрнига z_2 ни ва ҳоказо x_n ўрнига z_n ни қўямиз. Натижада қуйидаги исботланувчи формулаларга эга бўламиз: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ ўрнига қўйиш $\vdash A_1$ ни, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ ўрнига қўйиш $\vdash A_2$ ни, ..., $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ ўрнига қўйиш $\vdash A_n$ ни беради.

Бундан кейин A_n формулага нисбатан яна n та кетма-кет ўрнига қўйишни бажарамиз: аввал z_1 ўрнига B_1 ни, кейин z_2 ўрнига B_2 ни ва ҳоказо z_n ўрнига B_n ни қўйиб чиқамиз.

Бунинг натижасида $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ ўрнига қўйишдан $\vdash C_1$ ни, $\vdash \int_{z_2}^{B_2}(C_1)$ ўрнига қўйишдан $\vdash C_2$ ни, ..., $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ ўрнига қўйишдан $\vdash C_n$ ни ҳосил қиламиз. Демак, C_n исботланувчи формула A формуладаги x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчилар ўрнига бир вақтда мос равишда B_1, B_2, ..., B_n формулаларни қўйиш натижасида ҳосил бўлади.

Бир вақтда ўрнига қўйиш операция (қоида)сини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1,x_2,\dots,x_n}^{B_1,B_2,\dots,B_n}(A)}. \tag{1}$$

3.2. Мураккаб хулоса қоидаси. Бу қоидада

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))$$

кўринишдаги формулаларга нисбатан иккинчи ҳосилавий қоида ишлатилади ва уни қуйидаги тасдиқ орқали изоҳлаш мумкин.

1-теорема. *Агар A_1, A_2, ..., A_n лар ва*

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots))) \tag{2}$$

исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда L ҳам исботланувчи формула бўлади.

Исбот. Теоремани хулоса қоидасини кетма-кет қўллаш орқали исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар A_1 ва (2) исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда хулоса қоидасига асосан

$$A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)) \tag{3}$$

ҳам исботланувчи формула бўлади. A_2 ва (3) исботланувчи формула бўлганлиги учун

$$A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots) \tag{4}$$

формула ҳам исботланувчи бўлади. Худди шундай муҳокамани давом эттириб, охири L нинг исботланувчи формула эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Мураккаб хулоса қоидасини схематик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \ldots, \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to L)\ldots)))}{\vdash L}. \tag{5}$$

3.3. Силлогизм қоидаси.

2-теорема. *Агар $A \to B$ ва $B \to C$ исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда $A \to C$ формула ҳам исботланувчи бўлади.*

Исбот. Теоремани схематик равишда қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash B \to C}{\vdash A \to C}. \tag{6}$$

$x \to (y \to x)$ – I_1 ва $x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ – I_2 аксиомаларга нисбатан қуйидаги

$$\int_{x,y,z}^{A,B,C} (\mathrm{I}_2) \quad \text{ва} \quad \int_{x,y}^{B\to C,A} (\mathrm{I}_1)$$

бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаларини қўллаш натижасида ушбу исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \tag{7}$$

$$\vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C)). \tag{8}$$

Теореманинг шартига асосан

$$\vdash A \to B, \tag{9}$$

$$\vdash B \to C \tag{10}$$

формулалар исботланувчидир. (10) ва (8) дан хулоса қоидасига асосан

$$\vdash A \to (B \to C) \qquad (11)$$

формулани ҳосил қиламиз. У вақтда (11), (9) ва (7) дан мураккаб хулоса қоидасига асосан $\vdash A \to C$ эканлиги келиб чиқади.

Агар $A \to B$ ва $B \to C$ исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда $A \to C$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *силлогизм қоидаси* деб атаймиз.

3.4. Контрпозиция қоидаси.

3-теорема. *Агар $A \to B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\overline{B} \to \overline{A}$ ҳам исботланувчи формула, яъни*

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}} \qquad (12)$$

бўлади.

Исбот. $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ – IV_1 аксиомага нисбатан бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаси

$$\int_{x,y}^{A,B} (IV_1)$$

ни қўллаб,

$$\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}) \qquad (13)$$

исботланувчи формулани ҳосил қиламиз. Теореманинг шартига асосан

$$\vdash A \to B \qquad (14)$$

исботланувчи формуладир. Шунинг учун (14) ва (13) дан хулоса қоидасига асосан $\vdash (\overline{B} \to \overline{A})$ исботланувчи формула эканлиги келиб чиқади.

Агар $A \to B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\overline{B} \to \overline{A}$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *контрпозиция қоидаси* деб атаймиз.

3.5. Икки карралик инкорни тушириш қоидаси.

4-теорема. 1) *Агар $A \to \overline{\overline{B}}$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \to B$ ҳам исботланувчи бўлади;*

2) *агар $\overline{\overline{A}} \to B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \to B$ формула ҳам исботланувчи, яъни*

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad \text{ва} \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B} \qquad (15)$$

бўлади.

Исбот. $x \to \overline{\overline{x}}$ — IV_2 ва $\overline{\overline{x}} \to x$ — IV_3 аксиомаларга нисбатан ушбу

$$\int_{x}^{A}(\text{IV}_2) \quad \text{ва} \quad \int_{x}^{B}(\text{IV}_3)$$

ўрнига қўйиш қоидаларини қўллаб,

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}\,, \qquad (16)$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B \qquad (17)$$

исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз. Теореманинг 1- ва 2- шартларига асосан

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}\,, \qquad (18)$$

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B \qquad (19)$$

формулалар исботланувчидир.

Агар теореманинг 1- шарти бажарилса, у ҳолда (17) ва (18) формулалардан силлогизм қоидасига асосан $\vdash A \to B$ келиб чиқади.

Агар 2- шарти бажарилса, у ҳолда (16) ва (19) формулалардан $\vdash A \to B$ ни келтириб чиқарамиз.

Агар $A \to \overline{\overline{B}}$ ($\overline{\overline{A}} \to B$) исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \to B$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *икки марталик инкорни тушириш қоидаси* деб атаймиз.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири мулоҳазалар ҳисобининг формулалари бўлади:

1) $(\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2) \to (p_1 \vee p_2)$;

2) $((p_1 \vee p_2) \vee (p_1 p_2)) \to \bar{p}_3$;

3) $(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \to p_3$;

4) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to \bar{p}_2) \to p_1)$;

5) $(p_1 \wedge (\to p_2) \to (p_2 \to \bar{p}_1)$;

6) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3))$;

7) $((p_1 \to p_2) \wedge (p_1 \to p_3)) \to (p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$;

8) $((p_1 \to \bar{p}_2) \to (\bar{\bar{p}}_1 \vee p_2)) \leftrightarrow (p_1 \vee p_2)$.

2. Қуйидаги формулаларнинг ҳамма қисм формулаларини ёзиб чиқинг:

$A = \overline{x \to y} \wedge (\bar{x} \vee y)$, $B = (x \leftrightarrow y) \vee (\bar{x} y)$,

$C = (x \leftrightarrow y) \to (\bar{y} \to t)$, $D = xy \vee xz \vee yz$.

1) $x \to (y \to x)$; 2) $\overline{a \vee b} \to c$; 3) $a \wedge \overline{c \vee b}$;

4) $x \to y \wedge z$; 5) $x \vee y z \to x$; 6) $\overline{x \to y} \vee x \wedge y$;

7) $((x \to x) \wedge (y \to z)) \to (\bar{x} \vee z)$;

8) $(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{y})$.

3. $L_1 = (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$, $L_2 = A \vee B$, $L_3 = A \to B \vee C$ формулалар учун қуйидаги ўрнига қўйишларнинг натижаларини ёзинг:

1) $\int_{A,B}^{B,C} (L_1)$; 2) $\int_{A}^{A \to B} (L_2)$; 3) $\int_{A,C}^{B \to A \wedge B, B} (L_3)$;

4) $\int_{A,B}^{A \wedge B, A \vee B} (L_1)$; 5) $\int_{A,B}^{B,A} (L_2)$; 6) $\int_{A,B,C}^{A \wedge \bar{A}, C, \bar{A}} (L_3)$.

4. Ўрнига қўйиш қоидасини қўллаб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

1) $(A\to B)\wedge B\to B$;

2) $A\wedge B\to A\wedge B\vee C$;

3) $(\overline{A}\to B)\to((C\to B)\to(\overline{A}\vee C\to B))$;

4) $\overline{\overline{C\vee D}}\to C\vee D$;

5) $(A\wedge B\to(C\to B\wedge C))\to((A\wedge B\to C)\to(A\wedge B\to B\wedge C))$.

5. Ўрнига қўйиш ва хулоса қоидаларини қўллаб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини аниқланг:

1) $A\vee A\to A$; 2) $A\to A\wedge A$; 3) $A\wedge B\to B\wedge A$;

4) $A\vee B\to B\vee A$; 5) $(A\to B)\to(A\to A)$; 6) $\overline{\overline{\overline{A}}}\to\overline{A}$.

6. Келтириб чиқаришнинг ҳосилавий қоидаларидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

1) $\overline{A}\vee\overline{B}\to\overline{A\wedge B}$; 2) $A\to R$;

3) $(A\to B)\to(A\to A\vee B)$; 4) $F\to A$;

5) $(A\to B)\to(A\to A)$; 6) $A\wedge\overline{A}\to F$;

7) $(A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}$; 8) $\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A\vee B}$.

7. Келтириб чиқаришнинг ҳосилавий қоидаларини исботланг:

1) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash A\wedge B}$; 2) $\dfrac{\vdash A}{\vdash A\vee B}$; 3) $\dfrac{\vdash\overline{A}}{\vdash A\to B}$; 4) $\dfrac{\vdash B}{A\to B}$;

5) $\dfrac{\vdash A\wedge B}{\vdash A}$; 6) $\dfrac{\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\wedge B}}$; 7) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A}}$; 8) $\dfrac{\vdash A,\vdash B}{\vdash A\wedge B}$;

9) $\dfrac{\vdash\overline{A},\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\vee B}}$; 10) $\dfrac{\vdash A,\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A\to B}}$; 11) $\dfrac{\vdash A\to\overline{A}}{\vdash\overline{A}}$; 12) $\dfrac{\vdash\overline{A}\to A}{\vdash A}$;

13) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash\overline{A}\to B}{\vdash B}$; 14) $\dfrac{\vdash A\to B,\vdash A\to\overline{B}}{\vdash\overline{A}}$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси. Мантиқий боғловчилар. Символлар. Қисмий формула.
2. Исботланувчи формула таърифи. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими). Келтириб чиқариш қоидалари.
3. Келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари.
4. Бир вақтда ўрнига қўйиш ва мураккаб хулоса қоидалари.
5. Силлогизм, контрпозиция ва икки марталик инкорни тушириш қоидалари.

4-§. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси

☑ *Келтириб чиқариш қоидаси. Келтириб чиқариладиган формулалар синфи. Исботланувчи формулалар синфи.*

$H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ чекли формулалар мажмуаси (тўплами) берилган бўлсин. Бу формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш тушунчасини берамиз.

Таъриф. 1) *Ҳар қандай* $A_i \in H$ *формулалар мажмуаси H дан келтириб чиқариладиган формуладир.*

2) *Ҳар қандай исботланувчи формула H дан келтириб чиқарилади.*

3) *C ва* $C \to B$ *лар H формулалар мижмуасидан келтириб чиқарилган формулалар бўлса, у ҳолда B формула ҳам H дан келтириб чиқарилади.*

Бирор *B* формула *H* формулалар мажмуасидан келтириб чиқариладиган бўлса, уни символик равишда $H \vdash B$ шаклда ёзамиз.

Агар *H* бўш тўплам ёки элементлари фақат исботланувчи формулалардан иборат бўлса, у ҳолда *H* дан келтириб чиқариладиган формулалар синфи исботланувчи формулалар синфи билан мос келади. Агар формулалар мажмуаси *H* нинг ҳеч бўлмаганда битта элементи исботланмайдиган формуладан иборат бўлса, у ҳолда H дан келтириб чиқариладиган формулалар синфи исботланувчи формулалар синфига нисбатан кенгроқ бўлади.

Мисол. $A \vee B$ формула $H = \{A, B\}$ формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилишини исботланг.

Исбот. $A \in H$ ва $B \in H$ бўлганлиги учун формулани келтириб чиқариш қоидасига асосан

$$H \vdash A, \tag{1}$$

$$H \vdash B. \tag{2}$$

II_3 ва I_1 аксиомаларга нисбатан $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(\text{II}_3)$ ва $\int_{x,y}^{B,A}(\text{I}_1)$ ўрнига қўйишларни бажарамиз. Натижада исботланувчи формулалар ҳосил бўлади. Улар формулани келтириб чиқариш қоидасига асосан H дан келтирилиб чиқарилади, яъни

$$H \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B)), \tag{3}$$

$$H \vdash B \to (A \to B) \tag{4}$$

каби бўлади. $A \to A$ исботланувчи формула эканлиги учун

$$H \vdash A \to A. \tag{5}$$

(5) ва (3) формулалардан хулоса қоидасига асосан

$$H \vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B) \tag{6}$$

ни ҳосил қиламиз. Худди шу каби (2) ва (4) формулалардан

$$H \vdash (A \to B) \tag{7}$$

муносабатга келамиз. (7) ва (6) формулалардан хулоса қоидасига асосан

$$H \vdash A \to A \wedge B \tag{8}$$

келиб чиқади. У ҳолда (1) ва (8) формулалардан

$$H \vdash A \wedge B \tag{9}$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $A \wedge B$ формула H формулалар мажмуасидан келиб чиқишини кўрсатдик.

H формулалар мажмуасидан бирорта ихтиёрий формулани келтириб чиқаришда мураккаб хулоса қоидасидан ҳам фойдаланса бўлади. Бу ҳолда (9) муносабатга (5), (7), (1) ва (3) мулоҳазалар орқали келиш мумкин.

5- §. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси. Дедукция теоремаси. Умумлашган дедукция теоремаси

☑ *Исботлаш тушунчаси. Келтириб чиқаришнинг хоссалари. Келтириб чиқаришнинг асосий қоидалари. Дедукция теоремаси. Дедукция умумлашган теоремаси. Конъюнкцияни киритиш қоидаси. Дизъюнкцияни киритиш қоидаси.*

5.1. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси.

Таъриф. *Агар* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *чекли формулалар кетма-кетлигининг ҳар қандай ҳади қуйидаги уч шартнинг бирортасини қаноатлантирса, у ҳолда бу кетма-кетлик* ***H* чекли формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган** *деб аталади:*

1) *H формулалар мажмуасининг бирорта формуласи;*
2) *исботланувчи формула;*
3) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *кетма-кетликнинг исталган иккита олдинма-кейин келадиган элементларидан хулоса қоидасига асосан ҳосил қилинади.*

Олдинги параграфдаги мисолда кўрсатилдики, $H=\{A, B\}$ дан қуйидаги формулалар чекли кетма-кетлиги келтирилиб чиқарилади:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ B\to(A\to B),$$
$$A,\ B,\ A\to A,\ (A\to B)\to(A\to(A\wedge B)),\ A\to B,\ A\to A\wedge B,\ A\wedge B.$$

Агар мураккаб хулоса қоидасидан фойдалансак, у ҳолда (исбот) келтириб чиқариш формулалари қуйидагича бўлади:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),$$
$$B\to(A\to B),\ A\to A,\ A\to B,\ A\wedge B.$$

Формулани келтириб чиқариш ва формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш таърифларига асосан келтириб чиқаришнинг қуйидаги хоссалари ҳосил бўлади:

1) H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган чекли кетма-кетликнинг бошланғич қисми ҳам H дан келтириб чиқариладиган бўлади;

2) агар H дан келтириб чиқарилган кетма-кетликнинг иккита қўшни ҳадлари (элементлари) орасига H дан келтириб чиқарилган бирор бошқа кетма-кетлик қўйилса, у ҳолда ҳосил қилинган янги формулалар кетма-кетлиги ҳам H дан келтириб чиқарилиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, масалан, агар B_1, B_2, ..., B_i, B_{i+1}, ..., B_k ва C_1, C_2, ... C_m лар H дан келтириб чиқарилса, у вақтда келтириб чиқариш таърифига асосан B_1, B_2, ..., B_i, C_1, C_2, ..., C_m, B_{i+1}, ..., B_k ҳам H дан келтириб чиқариладиган бўлади.

3) H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган формулалар кетма-кетлигининг ҳар қандай ҳади H дан келтириб чиқариладиган формуладир.

4) агар $H \subset W$ бўлса, у ҳолда H дан келтириб чиқарилган ҳар қандай формула W нинг ҳам формуласи бўлади.

5) B формула H дан келтириб чиқариладиган формула бўлиши учун H дан келтириб чиқарилган ихтиёрий формулалар кетма-кетлигида бу формуланинг мавжуд бўлиши етарли ва зарурдир.

5.2. Келтириб чиқариш қоидаси. H ва W мулоҳазалар ҳисобининг иккита формулалар мажмуаси бўлсин. H, W орқали бу мажмуаларнинг йиғиндисини (бирлашмасини) белгилаймиз, яъни

$$H,\ W = H \cup W.$$

Агар W мажмуа битта C формуладан иборат бўлганда ҳам $H \cup \{C\}$ бирлашмани H, C кўринишда ёзамиз.

Энди келтириб чиқаришнинг асосий қоидаларини кўриб ўтамиз.

I. $\frac{H\vdash A}{H, W\vdash A}$.

Бу қоида бевосита формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш қоидасидан ҳосил бўлади.

II. $\frac{H, C\vdash A,\ H\vdash C}{H\vdash A}$.

Исбот. Қоиданинг шартига асосан H, C формулалар мажмуасидан A формула келтириб чиқарилади. Шунинг учун H, C дан охирги формуласи A бўлган келтириб чиқариш мавжуд:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1},\ A. \tag{1}$$

Худди шу каби H формулалар мажмуасидан C формулани келтириб чиқарилиши мумкинлигидан H дан кейинги формуласи C бўлган келтириб чиқариш мавжуд:

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m,\ C. \tag{2}$$

(1) келтириб чиқаришда C формула иштирок этмаган ҳолда, у фақат H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган кетма-кетликда бўлади. Демак, H дан A формула келтириб чиқарилади.

Агар (1) келтириб чиқаришда бирорта формула C бўлса (масалан формула B_i), у ҳолда B_{i-1} ва B_{i+1} формулалар орасига (2) ни қўямиз. Натижада қуйидаги фақат H дан келтириб чиқаришни оламиз:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{i-1},\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_m,\ B_{i+1},\ \ldots,\ B_{k-1},\ A.$$

Шундай қилиб, H дан A формула келтириб чиқарилади.

III. $\frac{H, C\vdash A,\ W\vdash C}{H, W\vdash A}$.

Исбот. $H, C\vdash A$ бўлганлиги учун I қоидага асосан H, W, $C\vdash A$. Қоиданинг шартига биноан $W\vdash C$, у ҳолда I қоидага кўра H, $W\vdash C$. II қоидадан фойдаланиб H, $W\vdash A$ ни топамиз.

IV. $\dfrac{H \vdash C \to A}{H, C \vdash A}$.

Исбот. $C \to A$ формула H формулалар мажмуасидан келтириб чиқариладиганлиги сабабли H нинг шундай келтириб чиқариши мавжудки, унинг охирида $C \to A$ формула туради:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1},\ C \to A. \qquad (3)$$

Энди H формулалар мажмуасига C формулани қўшиб, H, C формулалар мажмуасини ҳосил қиламиз. (3) келтириб чиқаришга C формулани қўшиб, ушбу келтириб чиқаришга эга бўламиз:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1},\ C \to A,\ C. \qquad (4)$$

Ўз навбатида бу H, C формулалар мажмуасининг келтириб чиқариши бўлади.

(4) нинг охирига A формулани ёзиш мумкин, чунки у хулоса қоидасига асосан $C \to A$ ва C формулалардан ҳосил қилинади. Демак, охирги формуласи A бўлган H, C формулалар мажмуасининг

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{k-1},\ C \to A,\ C,\ A$$

келтириб чиқаришига эга бўламиз, бу ердан H, $C \vdash A$ эканлиги келиб чиқади.

V. Дедукция теоремаси: $\dfrac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$.

Аввал H, C формулалар мажмуасининг ҳар қандай B_1, B_2, ..., B_k келтириб чиқариши учун $H \vdash C \to B_k$ нинг тўғрилигини математик индукция методидан фойдаланиб исбот қиламиз.

1. $k = 1$ ҳол учун масала тўғри. Ҳақиқатан ҳам, агар B_1 формула H, C нинг келтириб чиқариши бўлса, у вақтда уч ҳол бўлиши мумкин:

а) $B_1 \in H$;

б) B_1 – исботланувчи формула,

в) B_1 формула C нинг ўзидир.

а) ва б) ҳоллар учун H дан қуйидаги келтириб чиқаришни ёзиш мумкин: B_1, $B_1 \to (C \to B_1)$. $C \to B_1$. Демак, $H \vdash C \to B_1$.

в) ҳол учун $H \vdash C \to C$ эканлигини исботлаш керак. Аммо $C \to C$ исботланувчи формуладир. Шунинг учун уни ҳар қандай мажмуадан келтириб чиқариш мумкин.

2. Энди исталган i ($i < k$) чуқурликдаги ҳар қандай келтириб чиқариш учун масала тўғри бўлсин деб ҳисоблаб, унинг k чуқурликдаги келтириб чиқариш учун тўғрилигини исбот қиламиз.

B_1, B_2, ..., B_k лар H, C мажмуанинг келтириб чиқариши бўлсин, бу ерда $k > 1$. Шунинг учун ҳам B_k формулага нисбатан тўрт ҳол юз бериши мумкин:

а) $B_k \in H$;

б) B_k — исботланувчи формула;

в) B_k формула C нинг ўзидир,

г) B_k формула хулоса қоидасига асосан келтириб чиқаришдаги иккита ундан олдин кетма-кет келадиган формулалардан ҳосил қилинади.

а), б), в) ҳолатлар учун исбот тўлиқ равишда $k = 1$ ҳолдаги исботга мос келади.

Шунинг учун г) ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда B_k формула B_i ва B_j формулалардан ҳосил қилиниб ($i < k$, $j > k$), B_j формула $B_i \to B_k$ кўринишни олади ва қуйидаги тасдиқлар тўғри бўлади:

$$H \vdash C \to B_i, \tag{5}$$

$$H \vdash C \to (B_i \to B_k). \tag{6}$$

I_2 аксиомада

$$\int_{x,y,z}^{C,B_i,B_k} (\mathrm{I}_2)$$

ўрнига қўйишни бажариб, қуйидаги исботланувчи формулага эга бўламиз:

$$\vdash (C,\ (B_i \to B_k)) \to ((C \to B_i) \to (C \to B_k)). \tag{7}$$

(6), (5) ва (7) ифодалар H дан келтириб чиқариладиган формулалардир. Уларга мураккаб хулоса қоидасини қўллаб, $H \vdash C \to B_k$ ни ҳосил қиламиз.

Энди умумий, яъни H, $C \vdash A$ бўлган ҳолни кўрайлик. Бу ҳолда H, C нинг B_1, B_2, ..., B_{k-1}, A келтириб чиқариши мавжуд бўлади. Демак, юқорида исбот қилганимизга асосан $H \vdash C \to A$ тасдиқ тўғридир.

Дедукция теоремасидан муҳим аҳамиятга эга бўлган қуйидаги натижа келиб чиқади.

Умумлашган дедукция теоремаси:

$$\frac{\{C_1, C_1, \dots, C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 (C_3 \to \dots (C_k \to A) \dots))}.$$

Исбот. $H_k = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ бўлсин. Теорема шартига асосан $H_k \vdash A$ ёки H_{k-1}, $C_k \vdash A$ нинг тўғрилиги, $H_{k-1} = H_{k-2}$, C_{k-1} бўлганлиги учун эса

$$H_{k-2}, \ C_{k-1} \vdash C_k \to A$$

тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади. Бу ифодага нисбатан яна дедукция теоремасини қўллаб,

$$H_{k-2} \vdash C_{k-1} \to (C_k \to A)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу процедурани k марта такрорлаб, ушбу тасдиққа келамиз:

$$H_0 = \varnothing \vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \dots \ (C_k \to A) \dots)).$$

Аммо бўш тўпламдан фақатгина исботланувчи формулалар келтириб чиқариш мумкин, яъни

$$\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \dots \ (C_k \to A) \dots)).$$

$k = 1$ бўлган хусусий ҳолда

$$\frac{C \vdash A}{\vdash C \to A}$$

га эга бўламиз.

VI. Конъюнкцияни киритиш қоидаси:

$$\frac{H\vdash A,\ H\vdash B}{H\vdash A\wedge B}.$$

Исбот. Берилганига кўра

$$H\vdash A, \tag{8}$$

$$H\vdash B. \tag{9}$$

$\{A, B\}$ формулалар мажмуасидан $A\wedge B$ формулани келтириб чиқариш мумкинлиги, яъни

$$\{A,\ B\}\vdash A\wedge B \tag{10}$$

эканлигини кўрсатган эдик. Келтириб чиқаришнинг I қоидасига асосан

$$H,\ A,\ B\vdash A\wedge B, \tag{11}$$

$$H,\ A\vdash B. \tag{12}$$

Келтириб чиқаришнинг II қоидасидан фойдаланиб, (11) ва (12) муносабатлардан

$$H,\ A\vdash A\wedge B \tag{13}$$

ҳамда (8) ва (13) дан

$$H\vdash A\wedge B$$

ларни ҳосил қиламиз.

VII. Дизъюнкцияни киритиш қоидаси:

$$\frac{H.\ A\vdash C;\ H.\ B\vdash C}{H,\ A\vee B\vdash C}.$$

Исбот. $H,\ A\vdash C$; $H,\ B\vdash C$ шартлардан дедукция теоремасига асосан

$$H\vdash A\rightarrow C, \tag{14}$$

$$H\vdash B\rightarrow C \tag{15}$$

формулалар келиб чиқади.

III аксиома H формулалар мажмуасидан исботланувчи формула сифатида келтириб чиқарилади, яъни

$$H\vdash (A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\vee B\rightarrow C)). \tag{16}$$

(14), (15) ва (16) формулаларга мураккаб хулоса қоидасини қўллаб

$$H \vdash A \vee B \to C \qquad (17)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди келтириб чиқаришнинг IV қоидасини қўллаб

$$H,\ A \vee B \vdash C$$

формулага эга бўламиз.

6- §. Айрим мантиқ қонунларининг исботи

☑ *Мантиқ қонунлари. Шартларни ўрин алмаштириш қонуни. Шартларни қўшиш қонуни. Шартларни ажратиш қонуни.*

Дедукция теоремаси бир қатор мантиқ қонунларини исботлашга ёрдам беради.

I. Асосларни (шартларни) ўрин алмаштириш қонуни:

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)). \qquad (1)$$

Исбот. $H = \{x \to (y \to z),\ y,\ x\}$ формулалар мажмуасидан $x \to (y \to z)$, y, x, $y \to z$, z келтириб чиқариш келиб чиқади. Демак, H дан z формула келиб чиқади. У ҳолда умумлашган дедукция теоремасига асосан (1) формула исботланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

Асосларни ўрин алмаштириш қонунидан исботланувчи формулалар учун ушбу асосларни ўрин алмаштириш қоидаси

$$\frac{\vdash (x \to (y \to z))}{\vdash (y \to (x \to z))}$$

келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x \to (y \to z) \qquad (2)$$

бўлса, у ҳолда (1) ва (2) формулалардан хулоса қоидасига асосан

$$\vdash y \to (x \to z)$$

формула ҳосил қилинади.

II. Асосларни қўшиш қонуни:

$$\vdash (x\to(y\to z))\to(x\wedge y\to z). \qquad (3)$$

Исбот. $H=\{x\to(y\to z),\ x\wedge y\}$ формулалар мажмуасидан $x\to(y\to z)$, $x\wedge y$, $x\wedge y\to x$, $x\wedge y\to y$, x, y, $y\to z$, z келтириб чиқариш олинади. Бу эса H дан z формула келиб чиқади демакдир. Бу ўз навбатида умумлашган дедукция теоремасига асосан (3) формуланинг исботланувчи эканлигини кўрсатади.

Асосларни қўшиш қонунидан исботланувчи формулалар учун асосларни қўшиш қоидаси

$$\frac{\vdash (x\to(y\to z))}{\vdash x\wedge y\to z}$$

келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x\to(y\to z) \qquad (4)$$

бўлса, у ҳолда (3) ва (4) формулалардан хулоса қоидаларига асосан $\vdash x\wedge y\to z$ эканлигини ҳосил қиламиз.

III. Асосларни ажратиш қонуни:

$$\vdash (x\wedge y\to z)\to(x\to(y\to z)). \qquad (5)$$

Исбот. $H=\{x,\ y,\ x\wedge y\to z\}$ формулалар мажмуасидан келиб чиқадиган x, y, $x\wedge y\to z$, $x\wedge y$, z келтириб чиқаришни қараймиз. Бунда H формулалар мажмуасидан z формуланинг келиб чиқиши кўриниб турибди. У ҳолда умумлашган дедукция теоремасига асосан (5) формула исботланувчи эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Асосларни ажратиш қонунидан исботланувчи формулалар учун асосларни ажратиш қоидаси

$$\frac{\vdash x\wedge y\to z}{\vdash x\to(y\to z)}$$

ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x\wedge y\to z \qquad (6)$$

бўлса, у ҳолда (5) ва (6) формулалардан хулоса қоидасига асосан $\vdash x\to(y\to z)$ эканлиги келиб чиқади.

IV. $\vdash x \to (\bar{x} \to y)$.

Исбот. I_1 ва IV_1 аксиомаларда қуйидаги

$$\int_{y}^{\bar{y}}(\text{I}_1) \quad \text{ва} \quad \int_{x,\,y}^{\bar{y},\,x}(\text{IV}_1)$$

ўрнига қўйишларни бажариш натижасида

$$\vdash x \to (\bar{y} \to x), \tag{7}$$

$$\vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}) \tag{8}$$

исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз. (7) ва (8) формулалардан силлогизм қоидасига асосан

$$\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{y})$$

формула келиб чиқади. Асосларни бирлаштириш қонунидан фойдаланиб,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}$$

формулани ҳосил қиламиз. Икки карралик инкорни тушириш қоидасидан фойдаланиб,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \to y$$

формулага эга бўламиз. Бу ердан асосларни ажратиш қонунини қўллаб, исботланиши керак бўлган (5) формулани келтириб чиқарамиз.

V. $\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}$.

Исбот. III_3 аксиомада z нинг ўрнига $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ ни қўямиз:

$$\vdash (x \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \to ((y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \to (x \vee y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}). \tag{9}$$

II_1 ва II_2 аксиомалардан

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \bar{x}, \tag{10}$$

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \bar{y} \tag{11}$$

формулалар келиб чиқади. (10) ва (11) формулаларга контрпозиция қоидасини қўллаб, ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\vdash \bar{\bar{x}} \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}, \tag{12}$$

$$\vdash \bar{y} \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}. \tag{13}$$

Бу формулаларга икки каррали инкорни тушириш қоидасини қўллаб, қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$\vdash x \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}\,, \tag{14}$$

$$\vdash y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}\,. \tag{15}$$

Энди (9), (14) ва (15) формулаларга мураккаб хулоса қоидасини қўллаб,

$$\vdash x \vee y \to \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \tag{16}$$

формулага эга бўламиз.

Ниҳоят, (16) формулага аввал контрпозиция қоидасини ва сўнгра икки мартали инкорни тушириш қоидасини қўллаб, исботланиши лозим бўлган

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. H формулалар мажмуасидан кўрсатилган формулаларни келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатинг:

1) $H = \{A\} \vdash B \to A$;
2) $H = \{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$;
3) $H = \{A \to C\} \vdash \bar{C} \to \bar{A}$;
4) $H = \{A \to B,\ \bar{B}\} \vdash A$;
5) $H = \{A,\ \bar{\bar{A}} \to B\} \vdash B$;
6) $H = \{A \to B\} \vdash A \wedge C \to B \wedge C$;
7) $H = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;
8) $H = \{A \to B\} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$;
9) $H = \{A \to (B \to C\} \vdash B \to (A \to C)$;
10) $H = \{A \to B\} \vdash A \vee C \to B \vee C$.

2. Умумлашган дедукция теоремасидан фойдаланиб, формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

1) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$;
2) $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;
3) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

3. Мантиқ қонунларининг тўғрилигини кўрсатинг:

   1) $x \to (\bar{x} \to y)$; 2) $x \vee \bar{x}$; 3) $\bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}$.

4. Шартларни ўрин алмаштириш, шартларни қўшиш ва шартларни ажратиш қоидаларидан фойдаланиб, берилганларнинг тўғрилигини исботланг:

   1) $\vdash x \to (y \to x \wedge y)$; 2) $\vdash (A \to B) \wedge \bar{B} \to \bar{A}$; 3) $\vdash \bar{A} \to (A \to B)$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Келтириб чиқариладиган ва исботланувчи формулалар синфи.
2. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси. Келтириб чиқаришнинг хоссалари ва асосий қоидалари.
4. Дедукция теоремаси ва умумлашган дедукция теоремаси.
5. Конъюнкцияни ва дизъюнкцияни киритиш қоидалари.
6. Мантиқ қонунлари. Шартларни ўрин алмаштириш, қўшиш ва ажратиш қонунлари.

7- §. Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби орасидаги муносабатлар

☑ *Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати. Мулоҳазалар ҳисобидаги формулалар билан мулоҳазалар алгебрасидаги формулалар орасидаги муносабатлар. Умумқийматли формула. Айнан чин формула. Келтириб чиқариш ҳақидаги теорема.*

Мулоҳазалар ҳисоби формулаларини худди мулоҳазалар алгебраси формулалари сифатида қараш мумкин. Бунинг учун мулоҳазалар ҳисоби ўзгарувчиларига мулоҳазалар алгебраси ўзгарувчилари сингари қараймиз, яъни ўзгарувчилар чин ёки ёлғон (1 ёки 0) қиймат олади деб ҳисоблаймиз.

$\wedge$, $\vee$, $\to$ ва – амалларини мулоҳазалар алгебрасидагидек аниқлаймиз.

Мулоҳазалар ҳисобининг ҳар бир формуласи, ўзгарувчилар унинг ифодасига қандай киришидан қатъи назар, 1 ёки 0 қиймат қабул қилади. Унинг қиймати мулоҳазалар алгебрасидаги қоидалар бўйича ҳисобланади.

Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати тушунчасини аниқлайлик.

A – мулоҳазалар ҳисоби формуласи, x_1, x_2, ..., x_n лар эса A формула ифодасига кирувчи ўзгарувчилар ($x_i \neq x_j$) бўлсин. α_1, α_2, ..., α_n лар орқали мос равишда x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчиларнинг қийматларини белгилаймиз, $\alpha_j \in E_2 = \{0, 1\}$. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ вектор 2^n та қийматлар сатрига эга.

Ўзгарувчиларнинг битта қийматлар сатри учун A формуланинг қиймати $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A)$ ни қуйидагича аниқлаймиз:

1. A формуланинг энг катта узунликдаги қисмий формуласи x_i бўлганда, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i$ бўлади.

2. Агар $k + 1$ узунликлаги ҳамма қисмий формулалар аниқланган бўлса, у ҳолда $A_i \wedge A_j$, $A_i \vee A_j$, $A_i \to A_j$, $\overline{A_i}$ амалларнинг бажарилиши натижасида олинган k узунликдаги қисмий формулалар қуйидаги қийматларга эга бўлади:

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \wedge A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \wedge R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \vee A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \vee R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i \to A_j) = R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i) \to R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(\overline{A_i}) = \overline{R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A_i)}.$$

Масалан, $x_1 \vee \bar{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ формула x_1, x_2, x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг (0, 1, 1, 0) қийматлар сатрида $R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) = 1$ қийматга эга.

Ҳақиқатан ҳам, бу формула қуйидаги қисмий формулаларга эга:

$x_1 \vee \bar{x}_4$, $\overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ – биринчи узунликдаги қисмий формулалар;

$x_1 \vee \bar{x}_4$, $x_2 \wedge \bar{x}_3$ – иккинчи узунликдаги қисмий формулалар;

$x_4, x_2, \bar{x}_3$ – учинчи узунликдаги қисмий формулалар;

x_3 – тўртинчи узунликдаги қисмий формула.

Бу ердан $R_{0110}(x_3) = 1,\ R_{0110}(\bar{x}_3) = \overline{R_{0110}(x_3)} = 0,$

$$R_{0110}(x_2) = 1,\ R_{0110}(x_4) = 0,$$

$$R_{0110}(x_2 \wedge \bar{x}_3) = R_{0110}(x_2) \wedge R_{0110}(\bar{x}_3) = 0,$$

$$R_{0110}(\bar{x}_4) = \overline{R_{0110}(x_4)} = 1,\ R_{0110}(x_1) = 0,$$

$$R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4) = R_{0110}(x_1) \vee R_{0110}(\bar{x}_4) = 1,$$

$$R_{0110}\overline{(x_2 \wedge \bar{x}_3)} = \overline{R_{0110}(x_2 \wedge \bar{x}_3)} = 1,$$

$$R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) =$$
$$= R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4) \to R_{0110}(\overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) = 1$$

эканлигини топамиз.

Энди мулоҳазалар ҳисоби билан мулоҳазалар алгебраси орасидаги муносабатларни аниқловчи теоремаларга тўхталиб ўтайлик.

1-теорема. *Мулоҳазалар ҳисобидаги ҳар бир исботланувчи формула мулоҳазалар алгебрасида айнан чин (тавтология, умумқийматли) формула бўлади.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун қуйидаги учта ҳолни кўриб чиқишга тўғри келади:

1) мулоҳазалар ҳисобидаги ҳар бир аксиома мулоҳазалар алгебрасидаги айнан чин формуладир;

2) айнан чин формулаларга ўрнига қўйиш қоидасини қўллаш натижасида ҳосил қилинган формулалар яна айнан чин формулалар бўлади;

3) айнан чин формулаларга хулоса қоидасини қўллаш натижасида ҳосил қилинган формулалар яна айнан чин формулалар бўлади.

1-ҳолнинг исботи. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг айнан чинлигини исботлаш учун чинлик жадвалидан фойдаланамиз:

а) ифодасида битта ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	IV_2	IV_3
1	1	1
0	1	1

б) ифодасида иккита ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	y	I_1	II_1	II_2	III_1	III_2	IV_1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

в) ифодасида учта ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	y	z	I_2	II_3	III_3
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

2-ҳолнинг исботи. Аввал қуйидаги леммани исбот қиламиз.

Лемма. *A ва B формулаларнинг ифодасига кирувчи ҳамма ўзгарувчилар $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ ва бу ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатри эса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ бўлсин. Агар $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(B)=\beta$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int\limits_x^B(A)\right)=R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A)$ бўлади.*

Исбот. Лемманинг исботини, формуланинг тузилишини ҳисобга олган ҳолда, индукция методи билан амалга оширамиз.

а) A формула x дан фарқ қилувчи x_i ўзгарувчи бўлсин. У ҳолда

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(x_i)\alpha_i,\ \int_x^B(x_i) = x_i\ ;$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B(A)\right) = \alpha_i,\quad R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A) = \alpha_i,$$

яъни лемманинг тасдиғи тўғри бўлади.

б) A формула, x ўзгарувчи бўлсин. У ҳолда $\int_x^B(A)$ ўрнига қўйиш B ни беради ва

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B(A)\right) = \alpha_i,\quad R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(B) = \beta$$

ни оламиз, яъни лемманинг тасдиғи яна тўғри бўлади.

в) $A = A_1 * A_2$ ҳамда A_1 ва A_2 формулалар учун лемманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда A формула учун лемма тасдиғининг тўғрилиги қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B(A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B(A_1 * A_2)\right) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(\int_x^B(A_1) * \int_x^B(A_2)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\int_x^B(A_1) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\int_x^B(A_2) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A_1) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A_2) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A_1 * A_2) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\beta(A).$$

$A = \overline{A}_1$ бўлган ҳол учун ҳам лемманинг тасдиғи юқоридагидек исботланади. Энди 2- ҳолнинг исботига ўтамиз.

Лемма. *A — берилган формула, x — ўзгарувчи, B — мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласи бўлсин. Агар A айнан чин формула бўлса, у ҳолда $\int_x^B(A)$ формула ҳам айнан чин формула бўлади.*

Исбот. $x_1, x_2, ..., x_n, x$ лар A ва B формулалар ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. Ўзгарувчиларнинг ҳамма 2^{n+1} та $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha)$ қийматлар сатрида $\int\limits_x^B(A)$ формула чин қиймат қабул қилишини кўрсатиш лозим. $\int\limits_x^B(A)$ формула айнан чин формула эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0, \alpha^0)$ қийматлар сатри топилиб,

$$R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0 \alpha^0}\left(\int\limits_x^B(A)\right) = 0$$

бўлади. Бундан ўз навбатида лемма шартига асосан $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0 \alpha^0}\beta(A) = 0$ эканлигини топамиз. Аммо бу A нинг айнан чин формула эканлигига зиддир. Демак, ҳамма қийматлар сатрида $\int\limits_x^B(A)$ формула чин қиймат қабул қилади ва у айнан чиндир.

3-ҳолнинг исботи. *Агар C ва $C \to A$ формулалар айнан чин бўлса, у ҳолда A ҳам айнан чин формула бўлади.*

Исбот. $x_1, x_2, ..., x_n$ лар C ва A формулалар ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. A – айнан чин бўлмаган формула деб фараз қиламиз. У ҳолда ўзгарувчиларнинг шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_n^0)$ қийматлар сатри мавжуд бўладики, $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0}(A) = 0$ бўлади. Бу ердан $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0}(C \to A) = R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0}(C) \to R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \ldots \alpha_n^0}(A) = 1 \to 0 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу натижа $C \to A$ формуланинг айнан чин эканлигига зиддир. Бу қарама-қаршилик A айнан чин формула эканлигини исботлайди.

2-теорема *(келтириб чиқариш ҳақида). A – мулоҳазалар ҳисобининг бирор формуласи; $x_1, x_2, ..., x_n$ – шу A формула ифодасига кирувчи ўзгарувчилар ва $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатри бўлсин. H орқали чекли формулалар мажмуасини белгилаймиз. Агар*

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, \text{ агар } \alpha_i = 1 \text{ бўлса,} \\ \overline{x}_i, \text{ агар } \alpha_i = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

у ҳолда $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, ..., x_n^{\alpha_n}\}$ *формулалар мажмуаси учун:*

1) $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A) = 1$ *бўлган ҳолда* $H \vdash A$;

2) $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(A) = 0$ *бўлган ҳолда* $H \vdash \overline{A}$ *бўлади.*

Исбот. Теореманинг исботини формула тузилишига қараб индукция методи билан олиб борамиз.

1. A формула x_i ўзгарувчи бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 1$ бўлса, у ҳолда $x_i \vdash x_i$ ёки $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i$, яъни $x_i^{\alpha_i} \vdash A$. Демак, $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 0$ бўлса, у ҳолда $\overline{x}_i \vdash \overline{x}_i$ ёки $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{x}_i$, яъни $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{A}$. Демак, $H \vdash \overline{A}$.

2. Энди фараз қиламизки, B_1 ва B_2 формулалар учун теорема тўғри деб қаралган ҳолда A формула қуйидаги тўрт кўринишнинг бири бўлсин:

I. $B_1 \wedge B_2$; II. $B_1 \vee B_2$; III. $B_1 \rightarrow B_2$; IV. $\overline{B}_1$.

Ҳар бир ҳолни алоҳида кўриб ўтамиз.

I. A формула $B_1 \wedge B_2$ кўринишга эга:

а) агар $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \wedge B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 1$ ва $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 1$ келиб чиқади. Бундан қилинган фаразимизга кўра $H \vdash B_1$ ва $H \vdash B_2$. Бу ердан ўз навбатида конъюнкцияни киритиш қоидасига асосан $H \vdash B_1 \wedge B_2$, яъни $H \vdash A$ ҳосил бўлади;

б) агар $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1 \wedge B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$ ёки $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Масалан, $R_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}(B_1) = 0$ дейлик, у ҳолда фаразимизга кўра

$$H \vdash \overline{B}_1. \qquad (1)$$

II_1 аксиомага кўра $\vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1$. Бу ердан контрпозиция қоидасига асосан

$$\vdash \overline{B_1} \to \overline{B_1 \wedge B_2} \tag{2}$$

келиб чиқади. (1) ва (2) формулалардан хулоса қоидасига биноан $H \vdash \overline{B_1 \wedge B_2}$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

II. A формула $B_1 \vee B_2$ кўринишга эга бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда ҳеч бўлмаганда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 1$ ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлади. $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 1$ бўлсин, у ҳолда фаразимизга кўра

$$H \vdash B_1. \tag{3}$$

III_3 аксиомага асосан эса

$$\vdash B_1 \to B_1 \vee B_2 \tag{4}$$

келиб чиқади. (3) ва (4) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash B_1 \vee B_2$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$ ва $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Бу ердан $H \vdash \overline{B_1}$ ва $H \vdash \overline{B_2}$ келиб чиқади. Ўз навбатида конъюнкцияни киритиш қоидасига асосан

$$H \vdash \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \tag{5}$$

га келинади. Исботланувчи формуладан фойдаланиб,

$$\vdash \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \to \overline{B_1 \vee B_2} \tag{6}$$

ни оламиз. (5) ва (6) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash \overline{B_1 \vee B_2}$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

III. A формула $B_1 \to B_2$ кўринишда бўлсин.

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1 \to B_2) = 1$ бўлса, ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$, ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлади. Масалан, $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$H \vdash \overline{B_1} \tag{7}$$

ни ҳосил қиламиз.

Исботланувчи формуладан фойдаланиб $\vdash B_1 \to (\overline{B}_1 \to B_2)$ формулани топамиз. Бу формуладан асосларнинг ўрин алмаштириш қоидасига асосан

$$\vdash \overline{B}_1 \to (B_1 \to B_2) \tag{8}$$

формулани ҳосил қиламиз. (7) ва (8) формулалардан хулоса қоидасига биноан $H \vdash B_1 \to B_2$ формулани ёзамиз, яъни $H \to A$.

Агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$H \vdash B_2. \tag{9}$$

I_1 аксиомадан фойдаланиб,

$$\vdash B_2 \to (B_1 \to B_2) \tag{10}$$

формулани келтириб чиқарамиз. (9) ва (10) формулалардан хулоса қоидасига кўра $H \vdash B_1 \to B_2$ келиб чиқади, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1 \to B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_1) = 1$ ва $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Бу ердан

$$H \vdash B_1, \tag{11}$$

$$H \vdash \overline{B}_2 \tag{12}$$

эканлиги келиб чиқади. Исботланувчи формула таърифига асосан

$$\vdash (B_1 \to B_2) \to (B_1 \to B_2).$$

Бу формуладан асосларнинг ўрин алмаштириш қоидасига кўра

$$\vdash B_1 \to ((B_1 \to B_2) \to B_2) \tag{13}$$

формулани келтириб чиқарамиз. (11) ва (13) формулалардан хулоса қоидасига биноан

$$H \vdash ((B_1 \to B_2) \to B_2) \tag{14}$$

ни ҳосил қиламиз, ўз навбатида ундан контрпозиция қоидасини қўллаб

$$H \vdash \overline{B}_2 \to (\overline{B_1 \to B_2}) \qquad (15)$$

формулани келтириб чиқарамиз. (12) ва (15) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash (\overline{B_1 \to B_2})$ формулага эга бўламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

IV. A формула $\overline{B}_1$ кўринишга эга бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\overline{B}_1) = 1$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(B_1) = 0$ бўлади. Демак, $H \vdash \overline{B}_1$, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(\overline{B}_1) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(B_1) = 1$ бўлади ва бундан

$$H \vdash B_1 \qquad (16)$$

келиб чиқади. IV_2 аксиомадан фойдаланиб

$$H \vdash B_1 \to \overline{\overline{B}}_1 \qquad (17)$$

формулани ёзамиз. (16) ва (17) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash \overline{\overline{B}}_1$ ни, яъни $H \vdash \overline{A}_1$ ни ҳосил қиламиз.

3-теорема. *Мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи формула бўлади.*

Исбот. A формула теорема шартига асосан айнан чин формула бўлганлиги учун $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 1$. Бундан 2-теоремага асосан

$$H_n \vdash A \qquad (18)$$

келиб чиқади, бу ерда $H_n = \{x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ қийматлар сатрларининг сони 2^n тага тенг. Шунинг учун (18) формула ҳамма 2^n та қийматлар сатрида бажарилади.

Агар $H_{n-1} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$ бўлса, у ҳолда, равшанки, $H_{n-1}, x_n \vdash A$ ва $H_{n1}, \overline{x}_n \vdash A$ бўлади. Дизъюнкцияни киритиш қоидасига асосан бу ҳолда $H_{n1}, x_n \vee \overline{x}_n \vdash A$ бўлади. Аммо

$x_n \vee \bar{x}_n$ формула исботланувчи формула бўлганлиги учун уни H_{n-1}, $x_n \vee \bar{x}_n$ формулалар мажмуасидан олиб ташлаш мумкин. Демак, $H_{n-1} \vdash A$.

Худди шу каби $H_{n-2} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\}$, ..., $H_2 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$, $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\}$ формулалар мажмуалари учун кетма-кет $H_{n-1} \vdash A$, $H_{n-3} \vdash A$, ..., $H_{n-2} \vdash A$, $H_1 \vdash A$ эканлигини исботлаш мумкин. Маълумки, $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\} \vdash A$ муносабат $\alpha_1 = 1$ ва $\alpha_1 = 0$ ҳоллар учун тўғридир, яъни $x_1 \vdash A$ ва $\bar{x}_1 \vdash A$. Бу ердан дизъюнкцияни киритиш қоидасига асосан $x_1 \vee \bar{x}_1 \vdash A$ га эга бўламиз. Аммо $x_1 \vee \bar{x}_1$ исботланувчи формула бўлганлиги учун уни ташлаб юбориш мумкин. Шундай қилиб, $\varnothing \vdash A$. Демак, A исботланувчи формула экан.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формула $A = x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (0, 0, 1); 2) (1, 0, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори $\bar{A}$ ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
2. Қуйидаги формула $A = \bar{x}_1 \vee x_2 \rightarrow \bar{x}_3$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (1, 1, 1); 2) (1, 0, 1); 3) (0, 1, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори $\bar{A}$ ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
3. Қуйидаги формула $A = (x \vee \bar{y}) \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{z}$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (1, 0, 0); 2) (0, 1, 1); 3) (0, 1, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори $\bar{A}$ ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
4. Умумлашган дедукция теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини ва улар мулоҳазалар алгебрасида айнан чин(тавтология) формулалар эканлигини исботланг:

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z));$$

$$(x \to y) \to (x \vee z \to y \vee z);$$

$$(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)).$$

5. $x_1 \vee \bar{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ формула x_1, x_2, x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг (0, 1, 1, 0) қийматлар сатрида $R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \to \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) = 1$ қийматга эга эканлигини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати.
2. Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби орасидаги муносабатлар.
3. Умумқийматли ва айнан чин формулалар.
4. Келтириб чиқариш ҳақидаги теорема.
5. Мулоҳазалар ҳисобидаги формулалар билан мулоҳазалар алгебрасидаги формулалар орасидаги муносабатлар.

8- §. Мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари

☑ *Ечилиш муаммоси. Зидсизлик муаммоси. Тўлиқлилик муаммоси. Эркинлик муаммоси. Аксиоматик назария. Тор маънода тўлиқ. Кенг маънода тўлиқ. Эркин аксиома. Эркин аксиомалар системаси. Тенг кучли формулалар.*

Ҳар қандай аксиоматик назарияни асослаш учун қуйидаги тўртта муаммони ҳал қилишга тўғри келади:

1) ечилиш; 2) зидсизлик;
3) тўлиқлилик; 4) эркинлик.

8.1. Мулоҳазалар ҳисобининг ечилиш муаммоси. Мулоҳазалар ҳисобидаги ихтиёрий формулани исботланувчи ёки исботланувчи эмаслигини аниқлаб берувчи алгоритмнинг мавжудлигини исботлаш муаммоси мулоҳазалар ҳисобининг *ечилиш муаммоси* деб аталади.

1-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби учун ечилиш муаммоси ҳал қилинувчидир (ечилувчидир).*

Исбот. Олдинги параграфда айтилгандек, мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласини мулоҳазалар алгебрасининг формуласи сифатида қараш мумкин. Демак, бу формуланинг мантиқий қийматини ўзгарувчиларнинг исталган қийматлар сатрида аниқлаш мумкин.

A — мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ эса A формуланинг ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин.

$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A)$ қийматини ҳамма 2^n та $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ қийматлар сатрида ҳисоблаб чиқамиз. Агар ҳамма қийматлар сатрида $R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A) = 1$ бўлса, у ҳолда A формула айнан чин бўлади. Демак, 8- § даги 3- теоремага асосан A мулоҳазалар ҳисобининг исботланувчи формуласи бўлади.

Агар шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$ қийматлар сатри топилиб, $R_{\alpha_1^0\ldots\alpha_n^0}(A) = 0$ бўлса, у ҳолда A айнан чин формула бўлмайди. У ҳолда 8- § даги 1- теоремага асосан A исботланувчи эмас формуладир.

Шундай қилиб, мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласини исботланувчи ёки исботланувчи эмаслигини кўрсатувчи юқорида баён этилган алгоритм мавжуд экан. Демак, мулоҳазалар ҳисоби алгоритмик ечилувчи назариядир.

8.2. Мулоҳазалар ҳисобининг зидсизлик муаммоси.

1-таъриф. *Агар мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий A ва $\overline{A}$ формулалари бир пайтда исботланувчи формулалар бўлолмаса, у ҳолда бундай мулоҳазалар ҳисоби зиддиятсиз аксиоматик назария, акс ҳолда эса зиддиятга эга бўлган аксиоматик назария деб аталади.*

Демак, зиддиятсиз мулоҳазалар ҳисобида A ва унинг инкори бўлган $\overline{A}$ биргаликда исботланувчи формулалар бўла олмайди.

Мулоҳазалар ҳисобида зидсизлик муаммоси қуйидагича қўйилади: берилган мулоҳазалар ҳисоби зиддиятлиликми ёки зиддиятсизликми?

2-теорема. *Агар мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи A ва $\overline{A}$ формулалар мавжудлиги аниқланса, у ҳолда бу мулоҳазалар ҳисобида исталган B формула ҳам исботланувчи формула бўлади.*

Исбот. Бундан кейин ҳар қандай исботланувчи формулани R ва $\overline{R} = F$ билан белгилаймиз.

1. Аввал ҳар қандай B учун

$$\vdash B \rightarrow R \tag{1}$$

формуланинг исботланувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, I_1 аксиомадан ўрнига қўйиш натижасида

$$\vdash R \rightarrow (B \rightarrow R) \tag{2}$$

ни ҳосил қиламиз. Аммо шартга кўра R исботланувчи формула, яъни

$$\vdash R. \tag{3}$$

У ҳолда (2) ва (3) формулалардан хулоса қоидасига асосан (1) формуланинг тўғрилиги келиб чиқади.

2. Энди ҳар қандай B учун

$$\vdash F \rightarrow B \tag{4}$$

формуланинг исботланувчи эканлигини тасдиқлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам, IV_1 аксиомадан ўрнига қўйиш натижасида

$$\vdash (\overline{B} \rightarrow R) \rightarrow (\overline{R} \rightarrow \overline{\overline{B}}) \tag{5}$$

формула келиб чиқади. Аммо исботлаганимизга асосан

$$\vdash (\overline{B} \rightarrow R). \tag{6}$$

Ўз навбатида (6) ва (5) дан хулоса қоидасига биноан

$$\vdash \overline{R} \rightarrow \overline{\overline{B}} \tag{7}$$

формулани ҳосил қиламиз. Икки карралик инкор амалини тушириш қоидасидан фойдаланиб ва $\overline{R}$ ни F билан алмаштирилса,

$$\vdash F \to B$$

формулага эга бўламиз, яъни (4) исботланувчи формуладир.

3. Ҳар қандай A учун

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to F \qquad (8)$$

формула исботланувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, I_1 ва IV_1 аксиомаларга асосан қуйидагилар исботланувчи формулалар бўлади:

$$\vdash A \to (R \to A), \qquad (9)$$

$$\vdash (R \to A) \to (\overline{A} \to F). \qquad (10)$$

(9) ва (10) дан силлогизм қоидасига биноан

$$\vdash A \to (\overline{A} \to F)$$

формулани келтириб чиқарамиз. Бу формуладан асосларни бирлаштириш қоидасини қўллаш натижасида $\vdash A \wedge \overline{A} \to F$ формулага келамиз, яъни (8) га эга бўламиз.

(4) ва (8) дан силлогизм қоидасига асосан

$$\vdash A \wedge \overline{A} \to B \qquad (11)$$

формулани ҳосил қиламиз. Аммо теореманинг шартига кўра $\vdash A$ ва $\vdash \overline{A}$, у ҳолда $\vdash A \wedge \overline{A}$. Демак, B исботланувчи формула бўлади.

3-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби зиддиятликсиз назариядир.*

Исбот. Мулоҳазалар ҳисобида A ва $\overline{A}$ бир вақтнинг ўзида исботланувчи бўладиган ҳеч қандай A формула мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

A мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлсин. Агар A исботланувчи формула бўлса, у ҳолда 7- § даги 1-теоремага асосан A айнан чин формуладир ва, демак $\overline{A}$ айнан ёлғон формула бўлади. Шунинг учун ҳам $\overline{A}$ исботланувчи формула бўлмайди.

Демак, A ва $\overline{A}$ бир вақтда исботланувчи формулалар бўла олмайди. Шунинг учун ҳам мулоҳазалар ҳисоби зиддиятга эга эмас.

8.3. Мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси.

2-таъриф. *Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системасига шу ҳисобнинг бирор ихтиёрий исботланмайдиган формуласини янги аксиома сифатида қўшишдан ҳосил бўладиган аксиомалар системаси зиддиятга эга бўлган мулоҳазалар ҳисобига олиб келса, бундай мулоҳазалар ҳисоби* ***тор маънодаги тўлиқ аксиоматик назария*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Ҳар қандай айнан чин формуласи исботланувчи формула бўладиган мулоҳазалар ҳисоби* ***кенг маънодаги тўлиқ аксиоматик назария*** *деб аталади.*

Демак, мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси иккита масалани ҳал қилиши керак:

1) янги аксиома сифатида бирор исботланмайдиган формуласини аксиомалар системасига қўшиш натижасида мулоҳазалар ҳисобини кенгайтириш мумкинми ёки йўқми?

2) мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи бўладими ёки йўқми?

Бу масалаларнинг ечими қуйидаги теоремаларнинг мазмунидан иборат.

4-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби тор маънода тўлиқдир.*

Исбот. A мулоҳазалар ҳисобидаги ихтиёрий исботланмайдиган (исботланувчи эмас) формула, x_1, x_2, ..., x_n эса A формула таркибига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. A исботланмайдиган формула эканлигидан у айнан чин формула эмас. Демак, x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчиларнинг шундай α_1, α_2, ..., α_n қийматлар сатри мавжудки,

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A(x_1,x_2,\ldots,x_n))=0 \qquad (12)$$

бўлади.

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ лар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларга боғлиқ ихтиёрий айнан чин формулалар бўлсин. $B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}$ мажмуани (наборни) қараймиз. Бу ерда

$$B_i^{\alpha_i}=\begin{cases} B_i, \text{ агар } \alpha_i=1 \text{ бўлса,}\\ \overline{B}_i, \text{ агар } \alpha_i=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

A формулада $\int_{x_1,x_2,\ldots,x_n}^{B_1^{\alpha_1},B_2^{\alpha_2},\ldots,B_n^{\alpha_n}}(A)$ ўрнига қўйишни бажариб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}). \qquad (13)$$

(12) формуланинг айнан ёлғон формула эканлигини кўрсатамиз. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларнинг ихтиёрий $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ қийматлар сатрини оламиз. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ формулалар айнан чин формулалар эканлигидан $R_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}(B_i)=1$ бўлади. У ҳолда $R_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}(B_i^{\alpha_i})=\alpha_i$ ўринли. Демак,

$$R_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})=A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=0.$$

Бу ердан $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})}$ нинг айнан чин формула эканлиги келиб чиқади ва у 7- § даги 3-теоремага асосан исботланувчи формула бўлади.

Иккинчи томондан, агар мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалари қаторига $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ формулани янги аксиома сифатида қўшиб қўйсак, у ҳолда янги ҳосил бўлган мулоҳазалар ҳисобида бу формула аксиома бўлганлиги учун исботланувчи формула бўлади. Шу вақтнинг ўзида янги мулоҳазалар ҳисобида $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})$ формула ҳам исботланувчи формула бўлади, чунки у исботланувчи формуладан ўрнига қўйиш қоидаси орқали ҳосил қилинган.

Шундай қилиб, янги мулоҳазалар ҳисобида иккита $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})}$ ва $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})$ исботланувчи формулага эга бўламиз. Демак, янги мулоҳазалар ҳисоби зиддиятга эга бўлган аксиоматик назария экан. Бу ердан унинг тор маънода тўлиқлиги келиб чиқади.

5-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби кенг маънода тўлиқдир.*

Исбот. Биз 7- параграфда (3- теорема) мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи формула эканлигини исбот қилган эдик. Демак, мулоҳазалар ҳисоби кенг маънода тўлиқдир.

8.4. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг эркинлик муаммоси. Ҳар қандай аксиоматик ҳисобда аксиомаларнинг эркинлик масаласи, яъни бирорта аксиомани системанинг қолган аксиомаларидан келтириб чиқариш қоидаси орқали ҳосил этиш мумкинми ёки йўқми деган муаммо мавжуд бўлади. Агар бирор аксиома учун бу масала ижобий ҳал этилса, у ҳолда бу аксиома система аксиомалари рўйхатидан чиқариб ташланади ва мантиқий ҳисоб бу билан ўзгармайди, яъни исботланувчи формулалар синфи ўзгармасдан қолади.

4-таъриф. *Агар А аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг қолган аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин бўлмаса, у шу мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан* ***эркин аксиома*** *деб аталади.*

5-таъриф. *Агар мулоҳазалар ҳисоби аксиомалар системасининг ҳар бир аксиомаси эркин бўлса, у ҳолда мулоҳазалар ҳисобининг* ***аксиомалар системаси эркин*** *деб аталади.*

6-теорема. *Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси эркиндир.*

Исбот. A мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий аксиомаси бўлсин. Бу аксиоманинг эркинлигини исботлаш учун мулоҳазалар ҳисобига нисбатан қуйидаги усулни қўллаймиз: мулоҳазалар ҳисоби ўзгарувчиларини α ёки β қиймат қабул қилувчи ўзгарувчилар сифатида қараймиз. Бу ерда α чин ролини ва β ёлғон ролини ўйнайди.

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$ амалларни шундай аниқлаймизки, қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) A аксиомадан ташқари системанинг ҳамма аксиомалари таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилсин;

2) A аксиомадан бошқа, аксиомалар мажмуасидан келтириб чиқарилган ҳар қандай формула ҳам таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилсин;

3) A аксиома таркибидаги ўзгарувчиларнинг айрим қийматларида β қийматни қабул қилсин.

Агар A аксиомага нисбатан юқорида келтирилган интерпретация (изоҳлаш) ўринли бўлса, у ҳолда A аксиома бошқа аксиомалардан эркин эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар A аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин бўлганда эди, у шартларнинг иккинчисига асосан таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилиб, бу эса 3- шартга зид бўлар эди. Демак, A аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин эмас ва у системадаги эркин аксиомадир.

Ўзгарувчиларининг ўрнига уларнинг айрим қийматлари қўйилганда ҳам формулалар маънога эга деб келишамиз. Масалан, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\rightarrow A$, $\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$ ва бошқалар.

6-таъриф. *Таркибидаги ўзгарувчиларни α ва β билан алмаштирганда бир хил қиймат қабул қилувчи A ва B формулалар* ***тенг кучли формулалар*** *деб аталади ҳамда бу $A = B$ кўринишда ёзилади.*

Тенглик белгиси $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ мантиқий боғловчиларга нисбатан сустроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз.

Энди II_1 аксиоманинг эркинлигини исбот қилайлик. Бунинг учун конъюнкциядан ташқари қолган ҳамма мантиқий амалларни худди мантиқ алгебрасидагидек ва конъюнкция амалини $x\wedge y = y$ тенглик орқали аниқлаймиз:

x	x
α	β
β	α

x	y	$x \vee y$	$x \to y$	$x \wedge y$
α	α	α	α	α
α	β	α	β	β
β	α	α	α	α
β	β	β	α	β

Ушбу интерпретация учун юқорида келтирилган учта шартнинг бажарилишини кўрсатамиз.

II_1 аксиомадан ташқари мулоҳазалар ҳисобининг қолган ҳамма аксиомалари ўзгарувчиларнинг барча қийматларида α қиймат қабул қилади (бу ҳолни чинлик жадвали орқали кўрсатиш мумкин).

Ҳақиқатан ҳам I, III ва IV гуруҳ аксиомаларида конъюнкция амали қатнашмайди. Қолган мантиқий амаллар худди мулоҳазалар алгебрасидагидек аниқланган.

Мулоҳазалар алгебрасида бу формулалар айнан чин формулалар бўлганлигидан, ушбу интерпретацияда ўзгарувчиларнинг барча қийматларида улар α қиймат қабул қилади.

II_1, II_2 ва II_3 аксиомаларни кўрайлик.

II_2 ва II_3 аксиомалар қабул қилинган интерпретацияда $y \to y$ формулага тенг бўлади ва $x = \beta$, $x = \alpha$ қийматларда β қиймат қабул қилади, яъни ҳеч қачон α қиймат қабул қилмайди.

Энди айнан α га тенг формулалардан келтириб чиқариш қоидасига асосан ҳосил қилинган формулалар ҳам α га тенглигини кўрсатиш қолди, яъни 2- шартнинг бажарилишини кўрсатиш керак.

Олдинги параграфларда айнан чин формулаларга ўрнига қўйиш ва хулоса қоидаларини қўллаш натижасида чиқарилган формулалар айнан чин формулалар бўлишини кўрсатган эдик. Демак, 2- шарт ҳам бажарилади. Шундай қилиб, мулоҳазалар ҳисобининг II_1 аксиомаси эркин аксиома экан.

Худди шу схемадан фойдаланиб, мулоҳазалар ҳисобининг I, II, III ва IV гуруҳларидаги ҳар бир аксиоманинг эркинлигини кўрсатиш мумкин. Демак, мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси эркиндир.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Ҳар қандай аксиоматик назарияни асослаш учун нечта муаммоларни кўриб чиқишга тўғри келади?
2. $A(x)$ ва $B(x)$ ихтиёрий предикатлар бўлсин. Қуйидаги формулаларнинг қайси бири $A(x) \to \overline{B(x)}$ формулага тенг кучли формула бўлади:

   1) $A(x) \vee B(x)$; 2) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; 3) $\overline{A(x)} \to B(x)$;

   4) $\overline{B(x)} \to A(x)$; 5) $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$; 6) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$;

   7) $B(x) \to \overline{A(x)}$.
3. Қуйидаги тасдиқлар(теоремалар)нинг нотўғрилигини исбот қилинг:

   1) агар функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда у шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади;

   2) агар сонли қаторнинг n- ҳади нолга тенг бўлса, у ҳолда бу қатор яқинлашувчи бўлади;

   3) агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри бурчакли бўлади;

   4) агар $[a, b]$ ёпиқ интервалда интегралланувчи бўлса, у ҳолда у шу интервалда узлуксиз бўлади.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисобининг ечилиш муаммоси.
2. Мулоҳазалар ҳисобининг зидсизлик муаммоси.
3. Мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси.
4. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг эркинлик муаммоси.
5. Аксиоматик назария ҳақида тушунча.
6. Тор маънода тўлиқ. Кенг маънода тўлиқ.
7. Эркин аксиомалар системаси. Тенг кучли формулалар.

IV БОБ ПРЕДИКАТЛАР МАНТИҚИ

Қуйидаги бобда предикатлар мантиқи баён этилган. Бу ерда предикат тушунчаси, предикатлар устида мантиқий амаллар, умумийлик ва мавжудлик кванторлари, предикатлар мантиқининг формуласи ва унинг қиймати, предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари, предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли, бажарилувчи ва умумқийматли формулалар, ечилиш муаммоси, хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари, предикатлар мантиқининг математикага татбиқи, аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида маълумотлар келтирилади.

1- §. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида мантиқий амаллар

☑ *Предикат. Предикатлар мантиқи. Бир жойли предикат. Кўп жойли предикат. Предикатнинг чинлик тўплами. Айнан чин предикат. Айнан ёлғон предикат. Предикатлар устида мантиқий амаллар.*

1.1. Предикат тушунчаси. Мантиқ алгебрасида мулоҳазалар фақат чин ёки ёлғон қиймат олиши нуқтаи назаридан қаралади. Мулоҳазаларнинг на структураси ва ҳатто на мазмуни қаралмайди. Аммо фанда ва амалиётда мулоҳазаларнинг структураси ва мазмунидан келиб чиқадиган хулосалардан (натижалардан) фойдаланилади. Масалан, «Ҳар қандай ромб параллелограммдир; *ABCD* – ромб; демак, *ABCD* – параллелограмм».

Асос (шарт) ва хулоса мулоҳазалар мантиқининг элементар мулоҳазалари бўлади ва уларни бу мантиқ нуқтаи назаридан бўлинмас, бир бутун деб ва уларнинг ички структурасини ҳисобга олмасдан қаралади. Шундай қилиб, мантиқ алгебраси мантиқнинг муҳим қисми бўлишига қарамасдан, кўпгина фикрларни таҳлил қилишга қодир (етарли) эмас. Шунинг учун ҳам мулоҳазалар мантиқини кенгайтириш масаласи вужудга келди, яъни элементар мулоҳазаларнинг ички структурасини ҳам тадқиқ эта оладиган мантиқий системани яратиш муаммоси пайдо бўлди. Бундай система мулоҳазалар мантиқини ўзининг бир қисми сифатида бутунлайинга ўз ичига оладиган предикатлар мантиқидир.

Предикатлар мантиқи анъанавий формал мантиқ сингари элементар мулоҳазани *субъект* ва *предикат* қисмларга бўлади.

Субъект – бу мулоҳазада бирор нарса ҳақида нимадир тасдиқлайди; *предикат* – бу субъектни тасдиқлаш. Масалан, «5 – туб сон» мулоҳазасида «5» – субъект, «туб сон» – предикат. Бу мулоҳазада «5» «туб сон бўлиш» хусусиятига эга эканлиги тасдиқланади.

Агар келтирилган мулоҳазада маълум 5 сонини натурал сонлар тўпламидаги x ўзгарувчи билан алмаштирсак, у ҳолда «x – туб сон» кўринишидаги мулоҳаза формасига (шаклига) эга бўламиз. x ўзгарувчининг бир хил қийматлари (масалан, $x = 13$, $x = 3$, $x = 19$) учун бу форма чин мулоҳазалар ва x ўзгарувчининг бошқа қийматлари (масалан, $x = 10$, $x = 20$) учун бу форма ёлғон мулоҳазалар беради.

Аниқки, бу форма бир x аргументли функцияни аниқлайди. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами N ва қийматлар соҳаси $\{1, 0\}$ тўплам бўлади.

1-таъриф. *M тўпламда аниқланган ва $\{1, 0\}$ тўпламдан қиймат қабул қилувчи бир аргументли $P(x)$ функция **бир жойли (бир ўринли) предикат** деб аталади.*

M тўпламни $P(x)$ предикатнинг *аниқланиш соҳаси* деб айтамиз.

$P(x)$ предикат чин қиймат қабул қилувчи ҳамма $x \in M$ элементлар тўплами $P(x)$ предикатнинг *чинлик тўплами* деб аталади, яъни $P(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $I_p =$ $= \{x : x \in M,\ P(x) = 1\}$ тўпламдир.

Масалан, «x — туб сон» — $P(x)$ предикати N натурал сонлар тўпламида аниқланган ва унинг I_P чинлик тўплами ҳамма туб сонлар тўпламидан иборат. «$\sin x = 0$» — $Q(x)$ предикати R ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган ва унинг I_Q чинлик тўплами $I_Q = \{k\pi,\ k\in Z\}$. «Параллелограмм диагоналлари x бир-бирига перпендикулярдир» — $\Phi(x)$ предикатнинг аниқланиш соҳаси ҳамма параллелограммлар тўплами ва чинлик тўплами ҳамма ромблар тўплами бўлади.

Бир жойли предикатларга юқорида келтирилган мисоллар предметларнинг хусусиятларини ифодалайди.

2-таъриф. *Агар M тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат учун $I_P = M (I_P = \varnothing)$ бўлса, у* ***айнан чин (айнан ёлғон)*** *деб аталади.*

Энди кўп жойли предикат тушунчасини аниқлаймиз. Кўп жойли предикат предметлар орасидаги муносабатни аниқлайди.

«Кичик» муносабати икки предмет орасидаги бинар муносабатни ифодалайди. «$x < y$» (бу ерда $x,\ y\in Z$) бинар муносабати икки аргументли $P(x,\ y)$ функцияни ифодалайди. Бу функция $Z\times Z$ тўпламда аниқланган ва қийматлар соҳаси $\{1,\ 0\}$ тўплам бўлади.

3-таъриф. *$M = M_1\times M_2$ тўпламда аниқланган ва $\{1,\ 0\}$ тўпламдан қиймат олувчи икки аргументли $P(x,\ y)$ функцияга* ***икки жойли предикат*** *деб аталади.*

Масалан, «$x = y$» $Q(x,\ y)$ икки жойли предикат $R^2 = R\times R$ тўпламда аниқланган; «$x \perp y$» — x тўғри чизиқ y тўғри чизиққа перпендикуляр — $F(x,\ y)$ икки жойли предикат бир текисликда ётувчи тўғри чизиқлар тўпламида аниқланган.

n- жойли предикат ҳам худди шундай аниқланади.

1-мисол. Қуйида берилган мулоҳазаларнинг қайси бири предикат бўлишини ва уларнинг чинлик тўпламини аниқланг. Бир жойли предикатларнинг аниқланиш соҳаси $M = R$ ва икки жойли предикатлар учун аниқланиш соҳаси $M = R\times R$ бўлсин:

1) $x+5=1$; 2) $x^2-2x+1=0$; 3) $x+2<3x-4$;

4) $(x+2)-(3x-4)$; 5) $x^2+y^2>0$.

Ечим. 1) Бу берилган ифода бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A=\{-4\}$;

2) ифода билан берилган мулоҳаза бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A=\{1\}$;

3) ифода билан берилган мулоҳаза бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A=\{3,+\infty\}$;

4) ифода билан берилган мулоҳаза предикат бўлмайди;

5) берилган ифода икки жойли предикат $A(x, y)$ бўлади ва $I_A=R\times R\backslash\{0, 0\}$.

2-мисол. Қуйидаги предикатларнинг қайси бири айнан чин бўлишини аниқланг:

1) $x^2+y^2\geq 0$; 2) $x^2+y^2>0$; 3) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

4) $(x+1)^2>x-1$; 5) $x^2+1\geq(x+1)^2$.

Ечим. Равшанки, 1, 3 ва 4- предикатлар айнан чин бўлади. 2- предикатда $x=0$, $y=0$ қийматларида тенгсизлик бузилади. 5- предикатда бўлса, x нинг ҳамма мусбат қийматларида тенгсизлик ишораси бузилади. Демак, 2 ва 5- предикатлар айнан чин предикатлар бўла олмайди.

3-мисол. $M=M_1\times M_2\subset R\times R$ тўпламда $A(x, y)$ ва $B(x, y)$ предикатлар берилган бўлсин. $A(x, y)\leftrightarrow B(x, y)$ предикатнинг чинлик тўпламини топинг ва уни Эйлер доиралари орқали ифодаланг.

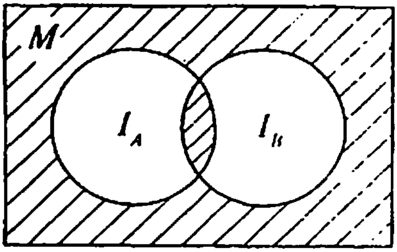
Ечим.

$$A(x, y)\leftrightarrow B(x, y)=(A(x, y)\rightarrow B(x, y))\wedge(B(x, y)\rightarrow A(x, y))$$

бўлганлиги учун

$$I_{A\leftrightarrow B}=(I_{A\rightarrow B})\cap(I_{B\rightarrow A})=((CI_A\cup I_B)\cap(CI_B\cup I_A))=$$
$$=(I_A\cap I_B)\cup(CI_A\cap CI_B).$$

$I_A\leftrightarrow I_B$ чинлик тўплами IV.1- шаклда штрихланган соҳа сифатида кўрсатилган.



IV.1- шакл.

1.2. Предикатлар устида мантиқий амаллар. Предикатлар ҳам мулоҳазалар сингари фақатгина чин ва ёлғон (1, 0) қийматлар қабул қилганликлари туфайли улар устида мулоҳазалар мантиқидаги ҳамма мантиқий амалларни бажариш мумкин.

Бир жойли предикатлар мисолида мулоҳазалар мантиқидаги мантиқий амалларнинг предикатларга татбиқ этилишини кўрайлик.

M тўпламда $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар аниқланган бўлсин.

4-таъриф. *Берилган M тўпламда аниқланган $P(x)$ ва $Q(x)$* ***предикатларнинг конъюнкцияси*** *деб, фақат ва фақат $x\in M$ қийматларда аниқланган ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар бир вақтда чин қиймат қабул қилгандагина чин қиймат қабул қилиб, қолган барча ҳолларда ёлғон қиймат қабул қилувчи янги предикатга айтилади ва у $P(x)\wedge Q(x)$ каби белгиланади.*

$P(x)\wedge Q(x)$ предикатнинг чинлик соҳаси $I_P \cap I_Q$ тўпламдан, яъни $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар чинлик соҳаларининг умумий қисмидан иборат бўлади.

Масалан, $P(x)$: «x – жуфт сон» ва $Q(x)$: «x – тоқ сон» предикатлар учун «x – жуфт сон ва x – тоқ сон» : $P(x)\wedge Q(x)$ предикатлар конъюнкцияси мос келади ва унинг чинлик соҳаси $\varnothing$ бўш тўпламдан иборат бўлади.

5-таъриф. *Берилган M тўпламда аниқланган $P(x)$ ва $Q(x)$* ***предикатларнинг дизъюнкцияси*** *деб, фақат ва фақатгина $x\in M$ қийматларда аниқланган ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар* *ёлғон қиймат қабул қилганда ёлғон қиймат қабул қилиб, қолган барча ҳолларда чин қиймат қабул қилувчи янги предикатга айтилади ва у $P(x) \vee Q(x)$ каби белгиланади.*

$P(x) \vee Q(x)$ предикатнинг чинлик соҳаси $I_P \cup I_Q$ тўпламдан иборат бўлади.

6-таъриф. *Агар ҳамма $x \in M$ қийматларда $P(x)$ предикат чин қиймат қабул қилганда ёлғон қиймат ва $x \in M$ нинг барча қийматларида $P(x)$ предикат ёлғон қиймат қабул қилганда чин қиймат қабул қилувчи предикат $P(x)$* ***предикатнинг инкори*** *деб аталади ва у $\overline{P}(x)$ каби белгиланади.*

Бу таърифдан $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ келиб чиқади.

7-таъриф. *Фақат ва фақатгина $x \in M$ лар учун бир вақтда $P(x)$ чин қиймат ва $Q(x)$ ёлғон қиймат қабул қилганда ёлғон қиймат қабул қилиб, қолган ҳамма ҳолларда чин қиймат қабул қиладиган $P(x) \to Q(x)$ предикат $P(x)$ ва $Q(x)$* ***предикатларнинг импликацияси*** *деб аталади.*

Ҳар бир тайинланган $x \in M$ учун

$$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$$

тенг кучлилик тўғри бўлганлигидан $I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ ўринлидир.

2- §. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари

☑ *Умумийлик квантори. Мавжудлик квантори. Кванторли амаллар билан конъюнкция ва дизъюнкция амаллари орасидаги муносабат.*

M тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Агар $a \in M$ ни $P(x)$ предикатнинг x аргументи ўрнига қўйсак, у ҳолда бу предикат $P(a)$ мулоҳазага айланади.

Предикатлар мантиқида яна иккита амал мавжудки, улар бир жойли предикатни мулоҳазага айлантиради.

2.1. Умумийлик квантори. M тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Ҳар қандай $x \in M$ учун $P(x)$ чин ва акс ҳолда ёлғон қиймат қабул қилувчи мулоҳаза ифодасини $\forall x P(x)$ формада ёзамиз. Бу мулоҳаза энди x га боғлиқ бўлмай қолади ва у қуйидагича ўқилади: «Ҳар қандай x учун $P(x)$ чин». $\forall$ символи *умумийлик квантори* деб айтилади. Айтилган фикрларни математик тилда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\forall x P(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар ҳамма } x \in M \text{ учун } P(x) = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

$P(x)$ предикатда x ни *эркин (озод) ўзгарувчи* ва $\forall x P(x)$ мулоҳазада x ни умумийлик квантори $\forall$ билан *боғланган ўзгарувчи* деб аталади.

2.2. Мавжудлик квантори. $P(x)$ предикат M тўпламда аниқланган бўлсин. Ҳеч бўлмаганда бирорта $x \in M$ учун $P(x)$ предикат чин ва акс ҳолда ёлғон қиймат қабул қилувчи мулоҳаза ифодасини $\exists x P(x)$ шаклда ёзамиз. Бу мулоҳаза x га боғлиқ эмас ва уни қуйидагича ўқиш мумкин: «Шундай x мавжудки, $P(x) = 1$», яъни

$$\exists x P(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар бирор } x \in M \text{ учун } P(x) = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

$\exists$ символи *мавжудлик квантори* деб аталади. $\exists x P(x)$ мулоҳазада x ўзгарувчи $\exists$ квантори билан боғланган бўлади.

Масалан, N натурал сонлар тўпламида $P(x)$ предикат берилган бўлсин: «x — туб сон». Кванторлардан фойдаланиб ушбу предикатдан қуйидаги мулоҳазаларни ҳосил қилиш мумкин: $\forall x P(x)$ — «Ҳамма натурал сонлар туб сонлар бўлади»; $\exists x P(x)$ — «Шундай натурал сон мавжудки, у туб сон бўлади». Равшанки, биринчи мулоҳаза ёлғон ва иккинчи мулоҳаза чин бўлади.

Маълумки, $\forall x P(x)$ мулоҳаза фақат $P(x)$ айнан чин предикат бўлгандагина чин қиймат қабул қилади. $\exists x P(x)$ мулоҳаза бўлса, $P(x)$ айнан ёлғон предикат бўлгандагина ёлғон қиймат қабул қилади.

Кванторли амаллар кўп жойли предикатларга ҳам қўлланилади. Масалан, *M* тўпламда икки жойли $P(x, y)$ предикат берилган бўлсин. Агар $P(x, y)$ предикатга *x* ўзгарувчи бўйича кванторли амалларни қўлласак, у ҳолда икки жойли $P(x, y)$ предикатга бир жойли $\forall x P(x, y)$ (ёки бир жойли $\exists x P(x, y)$) предикатни мос қилиб қўяди.

Бир жойли $\forall x P(x, y)$ ($\exists x P(x, y)$) предикат фақат *y* ўзгарувчига боғлиқ ва *x* ўзгарувчига боғлиқ эмас бўлади. Уларга *y* бўйича кванторли амалларни қўллаганимизда қуйидаги мулоҳазаларга эга бўламиз:

$$\forall y \forall x P(x, y),\ \exists y \forall x P(x, y),\ \forall y \exists x P(x, y),\ \exists y \exists x P(x, y).$$

Масалан, тўғри чизиқлар тўпламида аниқланган $P(x, y)$: «$x \perp y$» предикатни кўрайлик. Агар $P(x, y)$ предикатга нисбатан кванторли амалларни татбиқ этсак, у ҳолда қуйидаги саккизта мулоҳазага эга бўламиз:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$ – «Ҳар қандай *x* тўғри чизиқ ҳар қандай *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

2. $\exists y \forall x P(x, y)$ – «Шундай *y* тўғри чизиқ мавжудки, у ҳар қандай *x* тўғри чизиққа перпендикуляр».

3. $\forall y \exists x P(x, y)$ – «Ҳар қандай *y* тўғри чизиқ учун шундай *x* тўғри чизиқ мавжудки, *x* тўғри чизиқ *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

4. $\exists y \exists x P(x, y)$ – «Шундай *y* тўғри чизиқ ва шундай *x* тўғри чизиқ мавжудки, *x* тўғри чизиқ *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

5. $\forall y \forall x P(x, y)$ – «Ҳар қандай *y* тўғри чизиқ ҳар қандай *x* тўғри чизиққа перпендикуляр».

6. $\forall x \exists y P(x, y)$ – «Ҳар қандай *x* тўғри чизиқ учун шундай *y* тўғри чизиқ мавжудки, *x* тўғри чизиқ *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

7. $\exists x \exists y P(x, y)$ – «Шундай *x* тўғри чизиқ ва шундай *y* тўғри чизиқ мавжудки, *x* тўғри чизиқ *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

8. $\exists x \forall y P(x, y)$ – «Шундай *x* тўғри чизиқ мавжудки, у ҳар қандай *y* тўғри чизиққа перпендикуляр».

Бу мисоллардан кўриниб турибдики, умумий ҳолда кванторлар тартиби ўзгариши билан мулоҳазанинг мазмуни ва, демак, унинг мантиқий қиймати ҳам ўзгаради.

Чекли сондаги элементлари бўлган $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Агар $P(x)$ предикат айнан чин бўлса, у ҳолда $P(a_1)$, $P(a_2)$, ..., $P(a_n)$, мулоҳазалар ҳам чин бўлади. Шу ҳолда $\forall xP(x)$ мулоҳаза ва $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge...\wedge P(a_n)$ конъюнкция ҳам чин бўлади.

Агар ҳеч бўлмаганда бирорта $a_k\in M$ элемент учун $P(a_k)$ ёлғон бўлса, у ҳолда $\forall xP(x)$ мулоҳаза ва $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge...\wedge P(a_n)$ конъюнкция ҳам ёлғон бўлади. Демак,

$$\forall xP(x)=P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge...\wedge P(a_n)$$

тенг кучли ифода тўғри бўлади.

Юқоридагидек фикр юритиш йўли билан

$$\exists xP(x)=P(a_1)\vee P(a_2)\vee...\vee P(a_n)$$

тенг кучли ифоданинг мавжудлигини кўрсатиш мумкин. Бу ердан кванторли амалларни чексиз соҳаларда конъюнкция ва дизъюнкция амалларининг умумлашмаси сифатида қараш мумкинлиги келиб чиқади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $M=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ тўпламда иккита $A(x)$: «x туб сон» ва $B(x)$: «x — тоқ сон» предикати берилган. Бу предикатларнинг чинлик жадвалини тузинг.
2. $M=\{1, 2, 3, ..., 20\}$ тўпламда қуйидаги предикатлар берилган: $A(x)$: «x сон 5 га бўлинмайди»; $B(x)$: «x — жуфт сон»; $C(x)$: «x — туб сон»; $D(x)$: «x сон 3 га каррали». Қуйидаги предикатларнинг чинлик тўпламини топинг:

1) $A(x)\wedge B(x)$; 2) $C(x)\wedge B(x)$; 3) $C(x)\wedge D(x)$;

4) $B(x)\wedge D(x)$; 5) $\overline{B(x)}\wedge D(x)$; 6) $A(x)\wedge \overline{D(x)}$;

7) $\overline{B(x)}\wedge \overline{D(x)}$; 8) $A(x)\wedge B(x)\wedge D(x)$; 9) $A(x)\vee B(x)$;

10) $B(x)\vee C(x)$; 11) $C(x)\vee D(x)$; 12) $B(x)\vee D(x)$;

13) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; 14) $B(x) \wedge \overline{D(x)}$; 15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;

16) $C(x) \to A(x)$; 17) $D(x) \to \overline{C(x)}$; 18) $A(x) \to B(x)$;

19) $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D(x)}$; 20) $(A(x) \wedge D(x)) \to \overline{C(x)}$.

3. R тўпламда $P(x): x^2 + x + 1 > 0$ ва $Q(x): x^2 - 4x + 3 = 0$ предикатлар берилган. Қуйидаги мулоҳазаларнинг қайси бири чин ва қайси бири ёлғон эканлигини аниқланг:

1) $\forall x P(x)$; 2) $\exists x P(x)$; 3) $\forall x Q(x)$; 4) $\exists x Q(x)$.

4. Қуйидаги предикатларнинг қайси бири айнан чин қийматга эга бўлади:

1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

4) $(x + 1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида мантиқий амаллар.
2. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари
3. Бир жойли ва кўп жойли предикатлар.
4. Предикатнинг чинлик тўплами.
5. Айнан чин ва айнан ёлғон предикатлар.

3- §. Предикатлар мантиқининг формуласи. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати. Предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари

☑ *Предикатлар мантиқининг символлари. Формуланинг таърифи. Формуланинг қиймати тушунчаси. Тенг кучли формулалар. Асосий тенг кучли формулалар. Тенг кучли формулаларнинг исботлари.*

Предикатлар мантиқида қуйидаги символлардан фойдаланамиз:

1. p, q, r, ... символлар — 1 (чин) ва 0 (ёлғон) қийматлар қабул қилувчи ўзгарувчи мулоҳазалар.

2. $x, y, z, \ldots$ — бирор M тўпламдан қиймат олувчи предмет ўзгарувчилар; $x_0, y_0, z_0, \ldots$ — предмет константалар, яъни предмет ўзгарувчиларнинг қийматлари.

3. $P(\cdot)$, $F(\cdot)$ — бир жойли ўзгарувчи предикатлар; $Q(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$, $R(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ — n жойли ўзгарувчи предикатлар.

4. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ — ўзгармас предикатлар символи.

5. $\wedge$, $\vee$, $\to$, $-$ — мантиқий амаллар символлари.

6. $\forall x$, $\exists x$ — кванторли амаллар символлари.

7. (,) (қавс, вергул) — қўшимча символлар.

3.1. Предикатлар мантиқи формуласининг таърифи.

1. Ҳар қандай ўзгарувчи ёки ўзгармас мулоҳаза формула (элементар) бўлади.

2. Агар $F(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot)$ n жойли ўзгарувчи предикат ёки ўзгармас предикат ва $x_1, x_2, \ldots, x_n$ предмет ўзгарувчилар ёки предмет константалар бўлса, у ҳолда $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ формула бўлади. Бундай формулани *элементар формула* деб атаймиз. Бу формулада предмет ўзгарувчилар эркин бўлади, яъни кванторлар билан боғланган бўлмайди.

3. Агар A ва B шундай формулаларки, бирорта предмет ўзгарувчи бирида эркин ва иккинчисида боғланган ўзгарувчи бўлмаса, у ҳолда $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \to B$ ҳам формула бўлади. Бу формулаларда дастлабки формулаларда эркин бўлган ўзгарувчилар эркин ва боғланган бўлган ўзгарувчилар боғланган ўзгарувчилар бўлади.

4. Агар A формула бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ ҳам формула бўлади. A формуладан $\bar{A}$ формулага ўтишда ўзгарувчиларнинг характери ўзгармайди.

5. Агар $A(x)$ формула бўлса ва унинг ифодасига x предмет ўзгарувчи эркин ҳолда кирса, у ҳолда $\forall x A(x)$ ва $\exists x A(x)$ мулоҳазалар формула бўлади ва x предмет ўзгарувчи уларга боғланган ҳолда киради.

6. 1—5- бандларда формулалар деб айтилган мулоҳазалардан фарқ қилувчи ҳар қандай мулоҳаза формула бўлмайди.

Масалан, агар $P(x)$ ва $Q(x, y)$ — бир жойли ва икки жойли предикатлар, q, r — ўзгарувчи мулоҳазалар бўлса, у ҳолда қуйидаги мулоҳазалар формулалар бўлади:

$$q,\ P(x),\ P(x)\wedge Q(x^0,\ y),\ \forall xP(x)\to\exists xQ(x,\ y),$$

$$(\overline{Q(x,y)}\vee q)\to r.$$

$\forall xQ(x, y)\to P(x)$ мулоҳаза формула бўла олмайди, чунки таърифнинг 3- банддаги шарти бузилган: x предмет ўзгарувчи $\forall xQ(x, y)$ формулага боғланган ҳолда кирган, $P(x)$ га эса эркин ҳолда кирган.

Предикатлар мантиқи формуласининг таърифидан кўриниб турибдики, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай формуласи предикатлар мантиқининг ҳам формуласи бўлади.

1-мисол. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири предикатлар мантиқининг формуласи бўлади? Ҳар бир формуладаги боғланган ва эркин ўзгарувчиларни аниқланг:

1) $\overline{\exists x\forall z(P(x,y)\to P(y,z)}$;

2) $(p\to q)\wedge(\bar{r}\vee\bar{p})$;

3) $P(x)\wedge\forall xQ(x)$;

4) $\forall x(P(x)\to Q(x))\leftrightarrow(\exists xP(x)\to\forall xR(x,y))$;

5) $(P(x)\leftrightarrow Q(x)\vee\exists y(\forall yR(y))$;

6) $\exists x\forall z(P(x,y)\to P(y,z))$.

Ечим. 1, 2, 4, 6-ифодалар формула бўлади, чунки улар предикатлар мантиқи формуласининг таърифи асосида ҳосил қилинган. 3 ва 5- ифодалар формула эмас. 3- ифодада $\wedge$ амали $P(x)$ ва $\forall xQ(x)$ формулаларга нисбатан қўлланилган. $P(x)$ да x предмет ўзгарувчи эркин ва $\forall xQ(x)$ да бўлса, умумийлик квантори билан боғланган. Бу ҳолат формула таърифининг 3- бандига зиддир. Шунинг учун 3- ифода формула бўла олмайди. 5- ифодада бўлса, мавжудлик квантори $\exists y$ умумийлик квантори тарқалган $\forall yR(y)$ формулага (бу ерда y ўзгарувчи боғланган) тарқалган. Бу ҳам таърифга зиддир. 1- формулада y эркин ўзгарувчи, x ва z ўзгарувчилар бўлса, боғланган. 2- формулада предмет ўзгарувчилар мавжуд эмас. 4- формулада x боғланган ўзгарувчи, y эса эркин ўзгарувчидир.

3.2. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати тушунчаси. Энди предикатлар мантиқи формуласининг қиймати тушунчасини аниқлайлик. Предикатлар мантиқи формуласининг ифодасига кирувчи предикатларнинг аниқланиш соҳаси M тўплам берилгандагина бу формуланинг мантиқий қиймати ҳақида сўз юритиш мумкин. Предикатлар мантиқи формуласининг мантиқий қиймати уч хил ўзгарувчилар: 1) формулага кирувчи ўзгарувчи мулоҳазаларнинг; 2) M тўпламдаги эркин предмет ўзгарувчиларнинг; 3) предикат ўзгарувчиларнинг қийматларига боғлиқ бўлади.

Уч хил ўзгарувчилардан ҳар бирининг маълум қийматларида предикатлар мантиқининг формуласи чин ёки ёлғон қиймат қабул қилувчи мулоҳазага айланади. Мисол сифатида қуйидаги формулани кўрайлик:

$$\exists y \forall z(P(x, y) \to P(y, z)). \qquad (1)$$

(1) формулада $P(x, y)$ икки жойли предикат $M \times M$ тўпламда аниқланган, бу ерда $M = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$. (1) формула ифодасига ўзгарувчи предикат $P(x, y)$ ва предмет ўзгарувчилар x, y, z кирган. Бу ерда y ва z – кванторлар билан боғланган ўзгарувчилар, x – эркин ўзгарувчи.

$P(x, y)$ предикатнинг маълум қиймати сифатида тайинланган $P^0(x, y)$: «$x < y$» предикатни оламиз, эркин ўзгарувчи x га $x^0 = 5 \in M$ қиймат берамиз. У ҳолда y нинг $x^0 = 5$ дан кичик қийматлари учун $P^0(x^0, y)$ предикат ёлғон қиймат қабул қилади, $P(x, y) \to P(y, z)$ импликация эса z нинг ҳамма $z \in M$ қийматлари учун чин бўлади, яъни $\exists y \forall z(P^0(x, y) \to P^0(y, z))$ мулоҳаза «чин» қийматга эга бўлади.

2-мисол. Натурал сонлар тўплами N да $P(x)$, $Q(x)$ ва $R(x)$ предикатлар берилган бўлсин. $\forall x(P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$ формуланинг қиймати қуйидаги ҳолларда топилсин:

1) $P(x)$: «x сон 3 га бўлинади», $Q(x)$: «x сон 4 га бўлинади», $R(x)$: «x сон 2 га бўлинади» ;

2) $P(x)$: «x сон 3 га бўлинади», $Q(x)$: «x сон 4 га бўлинади», $R(x)$: «x сон 5 га бўлинади».

Ечим. Иккала ҳолда ҳам $P(x)\wedge Q(x)$ формула x сон 12 га бўлинади деган тасдиқни ифодалайди. Ўз навбатида, ҳамма x лар учун x сон 12 га бўлинса, у ҳолда x сон 2 га ҳам бўлинади. Демак, 1- ҳолда формуланинг қиймати чин бўлади.

x соннинг 12 га бўлинишидан айрим x лар учун x нинг 5 га бўлиниши, бундан эса 2- ҳолда формуланинг ёлғон эканлиги келиб чиқади.

3-мисол. $P(x, y)$ предикат $M = N\times N$ тўпламда аниқланган ва $P^0(x, y)$: «x сони y сонидан кичик» бўлганда $\forall x\exists y\, P(x, y)\to\exists x\forall y\, P(x, y)$ формуланинг мантиқий қийматини топинг.

Ечим. $P(x, y)$ предикатнинг кўрсатилган қиймати учун $\forall x\exists y\, P(x, y)$: «ҳар қандай x натурал сон учун шундай y натурал сон топиладики, у x дан катта бўлади» деган чин мулоҳазани билдиради. Шу вақтнинг ўзида $\exists x\forall y\, P(x, y)$: «Шундай x натурал сон мавжудки, у ҳар қандай натурал сон y дан кичик бўлади» деган тасдиқни билдиради. Бу тасдиқ ёлғондир. Демак, берилган формуланинг мантиқий қиймати ёлғон бўлади.

3.3. Предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари. Предикатлар мантиқида ҳам тенг кучли формулалар тушунчаси мавжуд.

1-таъриф. *Предикатлар мантиқининг иккита A ва B формуласи ўз таркибига кирувчи M соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида бир хил мантиқий қиймат қабул қилса, улар M* ***соҳада тенг кучли формулалар*** *деб аталади.*

2-таъриф. *Агар ихтиёрий соҳада A ва B формулалар тенг кучли бўлса, у ҳолда улар* ***тенг кучли формулалар*** *деб аталади ва* $A\equiv B$ *кўринишда ёзилади.*

Агар мулоҳазалар алгебрасидаги ҳамма тенг кучли формулалар ифодасидаги ўзгарувчи мулоҳазалар ўрнига предикатлар мантиқидаги формулалар қўйилса, у ҳолда улар предикатлар мантиқининг тенг кучли формулаларига айланади. Аммо предикатлар мантиқи ҳам ўзига хос асосий тенг кучли формулаларга эга. Бу тенг кучли формулаларнинг асосийларини кўриб ўтайлик. $A(x)$ ва $B(x)$ – ўзгарувчи предикатлар ва C – ўзгарувчи мулоҳаза бўлсин. У ҳолда предикатлар мантиқида қуйидаги асосий тенг кучли формулалар мавжуд:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$.
8. $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x[C \rightarrow B(x)]$.
9. $\forall x[B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$.
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.
12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)]$.
14. $\exists x[C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x)$.
15. $\exists x[B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$
16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.
17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Бу тенг кучли формулаларнинг айримларини исбот қилайлик.

Биринчи тенг кучли формула қуйидаги оддий тасдиқни (далилни) билдиради: агар ҳамма x лар учун $A(x)$ чин бўлмаса, у ҳолда шундай x топиладики, $\overline{A(x)}$ чин бўлади.

2-тенг кучлилик: агар $A(x)$ чин бўладиган x мавжуд бўлмаса, у ҳолда ҳамма x лар учун $\overline{A(x)}$ чин бўлади деган мулоҳазани билдиради.

3 ва 4- тенг кучлиликлар 1 ва 2- тенг кучлиликларнинг иккала тарафидан мос равишда инкор олиб ва икки марта инкор қонунини фойдаланиш натижасида ҳосил бўлади.

5- тенг кучликни исбот қилайлик. Агар $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар бир вақтда айнан чин бўлса, у ҳолда $A(x)\wedge B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлади ва, демак,

$$\forall xA(x),\ \forall xB(x),\ \forall x[A(x)\wedge B(x)]$$

мулоҳазалар ҳам чин қиймат қабул қилади.

Шундай қилиб, бу ҳолда 5- тенг кучлиликнинг иккала тарафи ҳам «чин» қиймат қабул қилади.

Энди ҳеч бўлмаганда икки предикатдан бирортаси, масалан, $A(x)$ айнан чин бўлмасин. У ҳолда $A(x)\wedge B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлмайди ва, демак, $\forall xA(x)$, $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$, $\forall x[A(x)\wedge B(x)]$ мулоҳазалар ёлғон қиймат қабул қилади, яъни бу ҳолда ҳам 5- тенг кучлиликнинг икки тарафи бир хил (ёлғон) қиймат қабул қилади. Демак, 5- тенг кучлиликнинг тўғри эканлиги исботланди.

Энди 8- тенг кучлиликнинг тўғри эканлигини исбот қилайлик. Ўзгарувчи мулоҳаза C «ёлғон» қиймат қабул қилсин. У ҳолда $C\to B(x)$ предикат айнан чин бўлади ва $C\to\forall xB(x)$, $\forall x[C\to B(x)]$ мулоҳазалар чин бўлади. Демак, бу ҳолда 8- тенг кучлиликнинг иккала тарафи ҳам бир хил (чин) қиймат қабул қиладилар.

Энди ўзгарувчи мулоҳаза C «чин» қиймат қабул қилсин. Агар бу ҳолда ўзгарувчи предикат $B(x)$ айнан чин бўлса, у ҳолда $C\to B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлади ва, демак,

$$\forall xB(x),\ C\to\forall xB(x),\ \forall x[C\to B(x)]$$

мулоҳазалар ҳам чин қиймат қабул қилади, яъни бу ҳолда 8- тенг кучлиликнинг иккала тарафи ҳам бир хил (чин) қиймат қабул қилади.

Агар $B(x)$ предикат айнан чин бўлмаса, у ҳолда $C\to B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлмайди ва, демак,

$$\forall xB(x),\ C\to\forall xB(x),\ \forall x[C\to B(x)]$$

мулоҳазалар ёлғон қиймат қабул қилади.

Шундай қилиб, бу ҳолда ҳам 8-тенг кучлиликнинг иккала тарафи бир хил (ёлғон) қиймат қабул қилади. Демак, 8-тенг кучлилик ўринлидир.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ формула $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ формулага ва $\exists x[A(x) \wedge B(x)]$ формула $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)]$ формулага тенг кучли эмас.

Аммо, қуйидаги тенг кучлиликлар ўринлидир:

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \forall yB(y) \equiv$$
$$\equiv \forall x[A(x) \vee \forall yB(y)] \equiv \forall x\forall y[A(x) \vee B(y)],$$
$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv$$
$$\equiv \exists x[A(x) \wedge \exists yB(y)] \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)].$$

Бу тенг кучлиликлардан биринчисини исбот қилайлик. Бунинг учун $\forall x$ квантор $\vee$ дизъюнкция амалига нисбатан дистрибутив эмаслигини мисолда кўрсатайлик.

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A(x): «(x-1)(x-2)=0»,$$
$$B(x): «(x-3)(x-4)(x-5)=0»$$

бўлсин. Аниқки, M соҳада $\forall xA(x)$ ва $\forall xB(x)$ мулоҳазалар ёлғон ва, демак, бу тенг кучлиликнинг чап томонидаги $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ мулоҳаза ҳам ёлғондир. Агар $\forall x$ квантор $\vee$ га нисбатан дистрибутив, яъни

$$\forall x[A(x) \vee B(x)] = \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

бўлганда эди, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ чин мулоҳаза бўлғанлиги учун қарама-қаршилик ҳосил бўлар эди. Демак,

$$\forall x[A(x) \vee B(x)] \neq \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

бўлади.

Энди бу тенг кучлиликларнинг ўнг томони ҳар доим чап томонидаги мулоҳаза билан бир хил қиймат қабул қилишини кўрсатамиз. Агар $\forall xA(x) \equiv 1$ ёки $\forall xB(x) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда бу тенг кучлилик тўғри эканлиги аниқ, чунки бу ҳолда тенг кучлиликнинг иккала томони ҳам бир вақтда чин қиймат қабул қилади. Бу ҳолда фақат $\forall xB(x) \equiv \forall yB(y)$ эканлигини кўрсатиш кифоя. Аммо бу охирги тенг кучлилик табиийдир, чунки x предмет ўзгарувчи ҳам, y предмет ўзгарувчи ҳам M соҳанинг ҳар бир элементини қиймат сифатида қабул қилади.

Энди $\forall xA(x) \equiv 0$ ва $\forall xB(x) \equiv 0$ бўлсин. У ҳолда тенг кучлиликнинг чап тарафи 0 (ёлғон) қиймат қабул қилади. Ўнг томонида $\forall x$ кванторининг таъсир соҳаси $A(x) \vee B(y)$ формула бўлса-да, $B(y)$ предикатда x предмет ўзгарувчи қатнашмаганлиги сабабли, $\forall x$ нинг таъсири фақат $A(x)$ га тарқалади. Худди шу каби, $\forall y$ квантор фақат $B(y)$ га таъсир этади. Демак, $\forall x \forall y[A(x) \vee B(y)]$ формула ҳам ёлғон қийматга эга бўлади.

Келтирилган иккинчи тенг кучлиликни ҳам худди шу каби исбот қилиш мумкин ва буни ўқувчига ҳавола этамиз.

4-мисол. $\exists x \forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y \exists x(A(x) \wedge B(y))$ тенг кучлилик ўринли эканлигини кўрсатинг.

Ечим.

$$\exists x \forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists x(A(x) \wedge \forall y B(y)) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall y B(y),$$

$$\forall y \exists x(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y(\exists x A(x) \wedge B(y)) = \exists x A(x) \wedge \forall y B(y).$$

Демак, келтирилган тенг кучлилик ўринли экан.

4- §. Предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар

☑ *Формуланинг деярли нормал шакли. Формуланинг нормал шакли. Ҳар қандай формулани нормал шаклга келтириш. Бажарилувчи формулалар. Умумқийматли формулалар. Айнан чин формула. Айнан ёлғон формула. Мантиқ қонуни. Умумқийматли ва бажарилувчи формулалар ҳақидаги теоремалар.*

4.1. Предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли.

1-таъриф. *Агар предикатлар мантиғи формуласи ифодасида фақат инкор, конъюнкция, дизъюнкция* (–, $\wedge$, $\vee$) *амаллари ва кванторли амаллар* ($\forall$, $\exists$) *қатнашиб, инкор амали* *элементар формулаларга (предмет ўзгарувчилар ва ўзгарувчи предикатларга) тегишли бўлса, бундай формула* ***деярли нормал шаклда*** *дейилади.*

Равшанки, предикатлар мантиқи ва мулоҳазалар алгебрасидаги асосий тенг кучлиликлардан фойдаланиб, предикатлар мантиқининг ҳар бир формуласини деярли нормал шаклга келтириш мумкин. Масалан,

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z)$$

формулани деярли нормал шаклга келтирайлик.

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv$$

$$\equiv \overline{(\overline{\exists x P(x)} \vee \forall y Q(y)} \vee R(z) = \overline{\overline{\exists x P(x)}} \wedge \overline{\forall y Q(y)} \vee R(z) \equiv$$

$$\equiv \exists x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Демак,

$$(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to R(z) \equiv I x P(x) \wedge \exists y \overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Предикатлар мантиқининг деярли нормал шаклдаги формулалари орасида нормал шаклдаги формулалари муҳим роль ўйнайди.

Бу формулаларда кванторли амаллар ёки бутунлай қатнашмайди, ёки улар мулоҳазалар алгебрасининг ҳамма амалларидан кейин бажарилади, яъни нормал шаклдаги формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2) \ldots (\sigma x_n) A(x_1, x_2, \ldots, x_m), \; n \leq m,$$

бунда (σx_i) символи ўрнида $\forall x_i$ ёки $\exists x_i$ кванторларнинг бири тушунилади ва A формула ифодасида кванторлар бўлмайди.

1-теорема. *Предикатлар мантиқининг ҳар қандай формуласини нормал шаклга келтириш мумкин.*

Исбот. Формула деярли нормал шаклга келтирилган деб ҳисоблаймиз ва уни нормал шаклга келтириш мумкинлигини кўрсатамиз.

Агар бу формула элементар формула бўлса, у ҳолда унинг ифодасида кванторлар бўлмайди ва, демак, у нормал шакл кўринишида бўлади.

Энди фараз қиламизки, теорема кўпи билан k амални қамраган формула учун тўғри бўлсин ва уни шу фараз асосида $k+1$ амални қамраган формула учун исбот қиламиз.

A ифода $k+1$ амални ўз ичига олган формула ва унинг кўриниши $\sigma x L(x)$ шаклда бўлсин, бу ерда σx кванторларнинг бирини ифодалайди. $L(x)$ формула k амални ўз ичига олганлиги туфайли уни нормал шаклга келтирилган деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $\sigma x L(x)$ формула таърифга асосан нормал шаклда бўлади.

A формула $\overline{L}$ кўринишда бўлсин, бунда L формула нормал шаклга келтирилган ва k амални ўз ичига олган деб ҳисобланади. У ҳолда

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)} \quad \text{ва} \quad \overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиб, инкор амалини предикатлар устига туширамиз. Натижада A формулани нормал шаклга келтирган бўламиз.

Энди A формула $L_1 \vee L_2$ кўринишда бўлсин, бу ерда L_1 ва L_2 нормал шаклга келтирилган формулалар деб қаралади. L_2 формулада боғланган предмет ўзгарувчиларни шундай қайта номлаймизки, L_1 ва L_2 формулалардаги ҳамма боғланган предмет ўзгарувчилар ҳар хил бўлсин. У ҳолда L_1 ва L_2 формулаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_1 \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_m)\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ m \leq n,$$
$$L_2 \equiv (\sigma y_1)(\sigma y_2)\ldots(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q),\ p \leq q.$$

$C \vee \forall x B(x) = \forall x[C \vee B(x)]$ ва $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$ тенг кучлиликлардан фойдаланиб, L_2 формулани (σx_1), (σx_2), ..., (σx_m) квантор амаллари остига киритамиз, яъни A формулани ушбу кўринишга келтирамиз:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2)\ldots(\sigma x_m)(\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \vee$$
$$\vee (\sigma y_1)(\sigma y_2)\ldots(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q)).$$

Сўнгра $\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ формулани

$$(\sigma y_1),\ (\sigma y_2),\ \ldots,\ (\sigma y_p)$$

квантор амаллари остига киритамиз. Натижада A формуланинг нормал шаклини ҳосил қиламиз:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2) \ldots (\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2) \ldots (\sigma y_p) \times$$
$$\times (\alpha_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \alpha_2(y_1, y_2, \ldots, y_q)).$$

$L_1 \wedge L_2$ кўринишидаги A формулани нормал шаклга келтиришнинг исботи худди юқорида каби бўлади.

Агар формулани нормал шаклга келтириш жараёнида $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ ёки $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ кўринишдаги ифодаларни кўришга тўғри келса, у ҳолда

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x [A(x) \wedge B(x)]$$

ва

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x [A(x) \vee B(x)]$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиш керак бўлади.

1-мисол. $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x, y)}$ формулани нормал шаклга келтириш талаб этилсин.

A формулада тенг кучли алмаштиришларни ўтказиб, уни нормал шаклга келтирамиз:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \overline{Q(x, y)}).$$

4.2.Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар.

2-таъриф. *Агар А формула ифодасига кирувчи ва М соҳага оид ўзгарувчиларнинг шундай қийматлари мавжуд бўлиб, бу қийматларда А формула чин қиймат қабул қилса, у ҳолда предикатлар мантиқининг А формуласи М* ***соҳада бажарилувчи формула*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Агар шундай соҳа мавжуд бўлиб, унда А формула бажариладиган бўлса, у ҳолда А* ***бажарилувчи формула*** *деб аталади.*

Демак, агар бирор формула бажарилувчи бўлса, бу ҳали унинг исталган соҳада бажарилувчанлигини билдирмайди.

4-таъриф. *Агар А нинг ифодасига кирувчи ва М соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида А формула чин қиймат қабул қилса, у ҳолда А формула М соҳада* ***айнан чин формула*** *деб аталади.*

5-таъриф. *Агар А формула ҳар қандай соҳада айнан чин бўлса, у ҳолда А* ***умумқийматли формула*** *деб аталади.*

6-таъриф. *Агар А формула ифодасига кирувчи ва М соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида А формула ёлғон қиймат қабул қилса, у ҳолда А формула М соҳада* ***айнан ёлғон формула*** *деб аталади.*

Келтирилган таърифлардан ушбу тасдиқлар келиб чиқади:

1. Агар A умумқийматли формула бўлса, у ҳолда у ҳар қандай соҳада ҳам бажарилувчи формула бўлади.

2. Агар A формула M соҳада айнан чин формула бўлса, у ҳолда у шу соҳада бажарилувчи формула бўлади.

3. Агар M соҳада A айнан ёлғон формула бўлса, у ҳолда у бу соҳада бажарилмайдиган формула бўлади.

4. Агар A бажарилмайдиган формула бўлса, у ҳолда у ҳар қандай соҳада ҳам айнан ёлғон формула бўлади.

Демак, предикатлар мантиқи формулаларини икки синфга ажратиш мумкин: *бажарилувчи* синфлар ва *бажарилмас* (бажарилмайдиган) синфлар формулалари.

7-таъриф. *Умумқийматли формула* ***мантиқ қонуни*** *деб аталади.*

Энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

1-мисол. $\forall x \exists y P(x, y)$ формула бажарилувчидир. Ҳақиқатан ҳам, агар $P(x, y)$: «$x < y$» предикат $M = E \times E$ соҳада аниқланган ($E = \{0, 1, 2, ..., n\}$) бўлса, у ҳолда $\forall x \exists y P(x, y)$ формула M соҳада айнан чин формула бўлади, демак, бу соҳада бажарилувчи формуладир. Аммо, агар $E_1 = \{0, 1, 2, ..., k\}$ учун «$x < y$» предикат чекли $M_1 = E_1 \times E_1$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $\forall x \exists y P(x, y)$ формула M_1 соҳада айнан ёлғон формула бўлади ва, демак, M_1 соҳада бажарилмасдир. Равшанки, $\forall x \exists y P(x, y)$ умумқийматли формула бўлмайди.

2-мисол. $\exists x\exists y[P(x)\wedge\overline{P(y)}]$ формула бажарилувчидир.

Ҳақиқатан ҳам, агар $P(x)$: «x — жуфт сон» предикат $E=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ учун $M=E\times E$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда бу формула M соҳада айнан чин бўлади, демак, M соҳада бажарилувчи формуладир.

Аммо, агар $P(x)$: «x — жуфт сон» предикат $E_1=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ учун $M_1=E_1\times E_1$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $\exists x\exists y[P(x)\wedge\overline{P(y)}]$ формула M_1 соҳада айнан ёлғон формула бўлади, демак, бу соҳада бажарилмас формуладир.

3-мисол. $\forall x[P(x)\vee\overline{P(x)}]$ формула исталган M соҳада айнан чин бўлади.

Демак, у умумқийматли формула, яъни мантиқий қонундир.

4-мисол. $\forall x[P(x)\wedge\overline{P(x)}]$ формула исталган соҳада айнан ёлғон ва шунинг учун ҳам у бажарилмас формула бўлади.

Энди предикатлар мантиқидаги формулаларнинг умумқийматлиги ва бажарилувчанлиги орасидаги муносабатни кўриб ўтайлик.

2-теорема. *A умумқийматли формула бўлиши учун унинг инкори $\overline{A}$ бажарилувчи формула бўлмаслиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Зарурлиги.* A умумқийматли формула бўлсин. У ҳолда, равшанки, $\overline{A}$ исталган соҳада айнан ёлғон формула бўлади ва шунинг учун ҳам у бажарилмас формуладир.

Етарлилиги. $\overline{A}$ исталган соҳада бажарилувчи формула бўлмасин. У ҳолда бажарилмас формуланинг таърифига асосан $\overline{A}$ исталган соҳада айнан ёлғон формуладир. Демак, A исталган соҳада айнан чин формула бўлади ва у умумқийматлидир.

3-теорема. *A бажарилувчи формула бўлиши учун $\overline{A}$ нинг умумқийматли формула бўлмаслиги зарур ва етарлидир.*

Исбот. *Зарурлиги.* A бажарилувчи формула бўлсин. У ҳолда шундай M соҳа ва A формула таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар мажмуи (сатри) мавжудки, A формула бу қийматлар сатрида чин қиймат қабул қилади. Аниқки, ўзгарувчиларнинг бу қийматлар сатрида $\overline{A}$ формула ёлғон қиймат қабул қилади ва, демак, $\overline{A}$ умумқийматли формула бўла олмайди.

Етарлилиги. $\overline{A}$ умумқийматли формула бўлмасин. У ҳолда шундай M соҳа ва A формула таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар сатри мавжудки, $\overline{A}$ формула бу қийматлар сатрида ёлғон қиймат қабул қилади. Бу қийматлар сатрида A формула чин қиймат қабул қилганлиги учун у бажарилувчи формула бўлади.

5-мисол. $A \equiv (P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ формуланинг умумқийматлигини исботланг.

Ечим. A формула исталган M соҳада аниқланган деб ҳисоблаб, тенг кучли алмаштиришларни ўтказамиз:

$$A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to$$

$$\to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \vee$$

$$\vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee$$

$$\vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

яъни A формула исталган соҳада ҳар қандай $P(x)$ ва $Q(x)$ бир жойли предикатлар учун айнан чин, демак, у умумқийматли формуладир.

6-мисол. $A \equiv \exists x[(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x))]$ нинг айнан ёлғон формула эканлигини кўрсатинг.

Ечим. $(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ га эгамиз. $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ айнан ёлғон формула эканлигидан, $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ҳам айнан ёлғон формула бўлади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири предикатлар мантиқининг формуласи бўлишини аниқланг. Ҳар бир формуладаги эркин ва боғланган ўзгарувчиларни кўрсатинг:

1) $\exists x \exists y P(x, y)$; 2) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$; 3) $\forall x \exists y P(x, y)$;

4) $p \to \forall x P(x, y)$; 5) $\exists x P(x, y) \wedge Q(y, x)$.

2. $P(x, y)$ предикат $M = N \times N$ тўпламда аниқланган ва $P(x, y)$: «$x < y$» бўлсин.

1) Қуйида берилган предикатларнинг қайси бири айнан чин ва қайси бири айнан ёлғон эканлигини аниқланг:

а) $\exists x P(x, y)$; б) $\forall x P(x, y)$; в) $\exists y P(x, y)$; г) $\forall y P(x, y)$.

2) Қуйидаги мулоҳазаларнинг қайси бири чин ва қайси бири ёлғон эканлигини аниқланг:

а) $\exists x \forall y P(x, y)$; б) $\forall x \exists y P(x, y)$; в) $\forall y \exists x P(x, y)$;

г) $\forall x \forall y P(x, y)$; д) $\forall y \forall x P(x, y)$; е) $\forall y \forall x P(x, y)$;

ж) $\exists x \exists y P(x, y)$; з) $\exists y \exists x P(x, y)$.

3. Қуйидаги тенг кучлиликларнинг тўғри эканлигини исбот қилинг:

1) $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$;

2) $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$;

3) $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$;

4) $C \vee \forall x A(x) \equiv \forall x (C \vee A(x))$;

5) $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;

6) $\exists x (C \vee A(x)) \equiv C \vee \exists x A(x)$;

7) $\exists x (C \wedge A(x)) \equiv C \wedge \exists x A(x)$;

8) $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$;

9) $\forall x (A(x) \to C) \equiv \exists x A(x) \to C$;

10) $\exists x (C \to A(x)) \equiv C \to \exists x A(x)$;

11) $\exists x (A(x) \to C) \equiv \forall x A(x) \to C$.

4. $A(x)$ ва $B(x)$ ихтиёрий предикатлар бўлсин. $A(x) \to \overline{B(x)}$ формулага қуйида берилган формулаларнинг қайси бири тенг кучли бўлади?

   1) $A(x) \vee B(x)$; 2) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; 3) $\overline{A(x)} \to B(x)$;
   4) $\overline{B(x)} \to A(x)$; 5) $\overline{\overline{A(x)} \wedge B(x)}$; 6) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$;
   7) $B(x) \to \overline{A(x)}$.

5. Қуйида келтирилган формулаларнинг қайси бири умумқийматли:

   1) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x))$;
   2) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x))$;
   3) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;
   4) $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \leftrightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;
   5) $\forall x(q \to P_1(x)) \leftrightarrow (q \to \forall x P_1(x))$;
   6) $\forall x(P(x_1) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\forall x P_1(x) \to \forall x P_2(x))$;
   7) $\exists x(P_1(x) \to P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \to \exists x P_2(x))$;
   8) $\forall x(P_1(x) \to P_2(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x_1) \to \forall x P_2(x))$;
   9) $\forall x(A_1(x) \to A_2(x)) \to (\forall x A_1(x) \to \forall x A_2(x))$;
   10) $\forall x(A_1(x) \to A_2(x)) \to (\exists x A_1(x) \to \exists x A_2(x))$;
   11) $\exists x(A_1(x) \to A_2(x)) \leftrightarrow (\forall x A_1(x) \to \forall x A_2(x))$;
   12) $\exists x Q(x) \to \forall x Q(x)$;
   13) $\forall x Q(x) \to \exists x Q(x)$;
   14) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;
   15) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$;
   16) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;
   17) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$?

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикатлар мантиқининг символлари ва формуласи.
2. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати. Тенг кучли формулалар. Асосий тенг кучли формулалар.

3. Формуланинг деярли нормал шакли. Формуланинг нормал шакли.
4. Ҳар қандай формулани нормал шаклга келтириш мумкинлиги.
5. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар. Айнан чин ва айнан ёлғон формулалар.
6. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар ҳақидаги теоремалар.

5- §. Ечилиш муаммоси. Хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари

☑ *Ечилиш муаммоси. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси. Ёпиқ формула. Формуланинг умумий ёпилиши. Формуланинг мавжудлигини ёпиш. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.*

5.1. Ечилиш муаммоси. Предикатлар мантиқида ечилиш муаммоси мулоҳазалар алгебрасида қандай қўйилган бўлса, худди шундай қўйилади: предикатлар мантиқининг исталган формуласи ёки умумқийматли, ёки бажарилувчи, ёки айнан ёлғон (бажарилмас) формула эканлигини аниқлаб берувчи алгоритм мавжудми ёки йўқми? Бу масала **ечилиш муаммоси** деб аталади. Агар бундай алгоритм мавжуд бўлса эди, у (худди мулоҳазалар алгебрасидагидек) предикатлар мантиқидаги исталган формулани айнан чинлигини аниқлаб берувчи критерийга келтирилган бўлар эди.

Агар ушбу муаммо мулоҳазалар алгебраси учун осон ечилган бўлса, предикатлар мантиқи учун бу муаммони ечиш катта қийинчиликларга дуч келди. XX асрнинг 30- йилларида алгоритм тушунчасига аниқ таъриф берилгандан сўнг мазкур муаммо умумий ҳолда ижобий ҳал этилиши мумкин эмаслиги, яъни изланган алгоритм мавжуд эмаслиги маълум бўлиб қолди.

1936 йилда америкалик олим А.Чёрч предикатлар мантиқининг ечилиш муаммоси умумий ҳолда алгоритмик ечилмаслигини исботлади, яъни предикатлар мантиқининг исталган формуласи қайси (умумқийматли, бажарилувчи ва бажарилмас) синфга киришини аниқлаб берадиган алгоритм мавжуд эмаслигини кўрсатди.

Ечилиш муаммоси предикатлар мантиқи учун ижобий ечилмаса-да, лекин предикатлар мантиқи формулаларининг баъзи синфлари учун бу муаммо ижобий ҳал этилишини кўрсатайлик.

5.2. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси. Ечилиш муаммоси чекли соҳаларда ечилувчидир, яъни ижобий ҳал бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда кванторли амалларни конъюнкция ва дизъюнкция амаллари билан алмаштириш мумкин. Натижада предикатлар мантиқи формуласи мулоҳазалар алгебраси формуласига келтирилади. Маълумки, мулоҳазалар алгебраси учун ечилиш муаммоси ечиладигандир.

Масалан, $\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}]$ формула $M = \{a, b\}$ икки элементли чекли соҳада аниқланган бўлсин. У ҳолда уни ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$\forall x \exists y [P(x,y) \vee \overline{P(x,x)}] \equiv \forall x [P(x,a) \vee \overline{P(x,x)} \vee P(x,b)] \equiv$$

$$\equiv [P(a,a) \vee \overline{P(a,a)} \vee P(a,b)] \wedge [P(b,a) \vee \overline{P(b,b)} \vee P(b,b)].$$

Ҳосил этилган конъюнктив нормал шаклдаги формуланинг ҳар бир элементар дизъюнкцияси ифодасида битта мулоҳаза ўзининг инкори билан биргаликда қатнашмоқда. Демак, мулоҳазалар алгебрасининг бу формуласи доимо чин қиймат қабул қилади, яъни айнан чин бўлади.

5.3. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.

1-таъриф. *Агар предикатлар мантиқи формуласи таркибида эркин предмет ўзгарувчилар бўлмаса, у ҳолда бундай формула* ***ёпиқ*** *формула деб аталади.*

2-таъриф. *Агар предикатлар мантиқи формуласи C таркибида x_1, x_2, ..., x_n эркин ўзгарувчилар мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$$

формула C формуланинг ***умумий ёпилиши*** *ва*

$$B = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(x_1, x_2, ..., x_n)$$

*формула C формуланинг **мавжудлигини ёпиш** деб аталади.*

1-теорема. *Агар предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги ёпиқ формуласи таркибида (ифодасида) фақат n та мавжудлик кванторн қатнашган ҳамда бир элементли исталган соҳада айнан чин бўлса, у ҳолда у умумқийматли формуладир.*

Исбот. Предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги формуласи

$$B \equiv \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1, q_2, ..., P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ...) \qquad (1)$$

кўринишда бўлсин, бунда C формула ифодасида кванторлар қатнашмайди, q_i – мантиқий ўзгарувчи, P_i – бир жойли предикатлар, Q_i – икки жойли предикатлар. Бу формуланинг чинлик қиймати унинг таркибида қатнашаётган q_1, q_2, ... мантиқий ўзгарувчилар ва P_1, P_2, ..., Q_1, Q_2, ... предикатларга боғлиқ.

Теореманинг шартига асосан бир a элементли исталган $M = \{a\}$ соҳада бу формула айнан чин, яъни

$$C(q_1, q_2, ..., P_1(a), P_2(a), ..., Q_1(a,a), Q_2(a,a), ...) \qquad (2)$$

фомула айнан чин бўлади. Аниқки, (2) формула мулоҳазалар алгебрасининг формуласи бўлади.

(1) формула умумқийматли эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда шундай M_1 соҳа ва ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар мажмуаси $q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...$ мавжудки, унда (1) формула ёлғон қиймат қабул қилади, яъни

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...) = 0. \qquad (3)$$

(3) формуланинг инкорини оламиз:

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n (q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^0, P_2^0, ..., Q_1^0, Q_2^0, ...)} = 1.$$

Бу ердан

$$C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots) \qquad (4)$$

формуланинг M_1 соҳага оид предмет ўзгарувчиларнинг қандай олинишидан қатъи назар айнан чинлиги келиб чиқади. M_1 соҳадан ихтиёрий x_0 элементни олиб, уни (4) формуладаги предмет ўзгарувчилар ўрнига қўйиб чиқамиз. У ҳолда

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \ldots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \ldots)} = 1 .$$

Демак,

$$C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \ldots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \ldots) = 0 .$$

Бу натижа (2) формуланинг айнан чин эканлигига зиддир ва (1) формула умумқийматли эмас деган фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Шундай қилиб, (1) формула умумқийматлидир.

2-теорема. *Агар предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги ёпиқ формуласи ифодасида n та умумийлик квантори қатнашса ва бу формула кўпи билан n та элементли ҳар қандай тўпламда (соҳада) айнан чин бўлса, у ҳолда у умумқийматли бўлади.*

Исбот. Предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги формуласи қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C(q_1, q_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots), \qquad (5)$$

бунда q_1, q_2, ... — мантиқий ўзгарувчилар, P_1, P_2, ... — бир жойли предикатлар, Q_1, Q_2, ... — икки жойли предикатлар. (1) формула умумқийматли эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда n тадан ортиқ элементга эга бўлган M_1 соҳа мавжудки, бунда (1) формула айнан чин бўлмайди. Бошқача қилиб айтганда, ўзгарувчиларнинг шундай

$$q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots$$

қийматлар мажмуаси мавжудки,

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots) \equiv 0 . \qquad (6)$$

Бу ердан

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots)} \equiv$$
$$\equiv \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots)} \equiv 1 .$$

Шундай қилиб, предмет ўзгарувчиларнинг шундай $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 \in M_1$ қийматлари мавжудки,

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots)} \equiv 1$$

ва

$$C(q_1^0, q_2^0, \ldots, P_1^0, P_2^0, \ldots, Q_1^0, Q_2^0, \ldots) \equiv 0$$

бўлади.

Демак, M_1 соҳадан кўпи билан n та элементи бўлган шундай M соҳани ажратиш мумкинки, у ерда бу формула айнан чин бўлмайди. Бу натижа теореманинг шартига зиддир ва у (1) формула умумқийматли эмас деган нотўғри фаразимиздан келиб чиқди. Демак, (1) формула умумқийматли формуладир.

Таркибида фақат бир жойли (битта предмет ўзгарувчига боғлиқ бўлган) предикатлар қатнашган формулалар учун ечилиш муаммоси ижобий ҳал этилиши қуйидаги теоремадан кўринади.

3-теорема. *Предикатлар мантиқининг таркибига n та бир жойли предикат кирган A формуласи бирор M тўпламда бажарилувчи бўлса, у ҳолда бу формула элементлари сони 2^n дан катта бўлмаган M_1 тўпламда ҳам бажарилувчи бўлади.*

Ушбу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Предикатлар мантиқининг таркибига фақат n та бир жойли предикат кирган A формуласи элементлари сони 2^n дан кўп бўлмаган ихтиёрий тўпламда айнан чин бўлса, у ҳолда бу формула ихтиёрий тўпламда ҳам айнан чин бўлади.

Қуйидаги теорема ҳам предикатлар мантиқининг катта синфини ташкил қилувчи формулалари учун ечилиш муаммосини ҳал қилади.

4-теорема. *Агар предикатлар мантиқининг A формуласи бирор чексиз соҳада бажарилувчи бўлса, у ҳолда у чекли соҳада ҳам бажарилувчи бўлади.*

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формуланинг умумқийматли эканлигини исботланг:

$$A \equiv \left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}\,.$$

2. Агар M тўпламда аниқланган $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар чин қийматли бўлса, у ҳолда уларнинг чинлик тўпламлари қандай шартларни қаноатлантириши керак:

1) $\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(\overline{A(x)} \wedge B(x))$;

2) $\overline{\exists x(A(x) \wedge B(x))} \wedge (\forall(A(x) \to B(x)))$;

3) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to (\forall x(A(x) \to B(x)))$?

3. $M = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ тўпламда қуйидаги предикатлар берилган:

$A(x)$: «x 5 га бўлинмайди»; $B(x)$: «x жуфт сон»;

$C(x)$: «x туб сон»; $D(x)$: «x 3 га каррали».

Қуйидаги предикатларнинг чинлик тўпламини топинг:

1) $A(x) \wedge B(x)$;

2) $C(x) \wedge B(x)$;

3) $C(x) \wedge D(x)$;

4) $B(x) \wedge D(x)$;

5) $\overline{B}(x) \wedge D(x)$;

6) $A(x) \wedge \overline{D}(x)$;

7) $\overline{B}(x) \wedge \overline{D}(x)$;

8) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;

9) $A(x) \vee B(x)$;

10) $B(x) \vee C(x)$;

11) $C(x) \vee D(x)$;

12) $B(x) \vee D(x)$;

13) $\overline{B}(x) \vee D(x)$;

14) $B(x) \vee \overline{D}(x)$;

15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;

16) $C(x) \to A(x)$;

17) $D(x) \to \overline{C}(x)$;

18) $A(x) \to B(x)$;

19) $(A(x) \wedge C(x)) \to \overline{D}(x)$;

20) $(A(x) \wedge D(x)) \to \overline{C}(x)$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикатлар мантиқида ечилиш муаммоси.
2. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси.
3. Ёпиқ формула. Формуланинг умумий ёпилиши. Формуланинг мавжудлигини ёпиш.
4. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.

6-§. Предикатлар мантиқининг математикага татбиқи

☑ *Математик таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан ифодалаш. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини ифодалаш. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифини ифодалаш. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифини ифодалаш. Ўсувчи функциянинг таърифини ифодалаш. Чегараланган функциянинг таърифини ифодалаш. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш. Тўғри, тескари ва қарама-қарши теоремаларни ифодалаш. Етарли ва зарурий шартларни ифодалаш.*

6.1. Математик мулоҳазаларни предикатлар мантиқи формуласи кўринишида ёзиш. Қуйида асосий математик тушунчалар – таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан қандай ифодалаш мумкинлигини кўриб ўтамиз.

Ҳар қандай математик фан шу фанда қаралаётган объектлар ҳақидаги мулоҳазалар билан иш кўради. Мантиқ ва тўпламлар назариясининг символлари ҳамда берилган фаннинг махсус символлари ёрдамида шундай мулоҳазалар предикатлар мантиқининг формуласи кўринишида ифодаланиши мумкин. Предикатлар мантиқининг тили математик тушунчалар ўртасидаги муносабатни ифодалашга, таъриф, теорема ва исботларни ёзишга имконият яратади. Бу ёзишларни мисолларда кўрайлик.

1. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифи. *Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини қуйидагича ёзиш мумкин:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists n_0\forall n \in N(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon).$$

Бу ерда уч жойли предикат $A(\varepsilon, n, n_0)$: $(n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$ дан фойдаланилган.

2. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифи. *Бу таърифни ушбу шаклда ёзиш мумкин:*

$$b = \lim_{x\to x_0} f(x) \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Бу ерда $B(\varepsilon, \delta, x)$: $(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)$ уч жойли предикатдан фойдаланилган.

3. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифи. *E тўпламда аниқланган $f(x)$ функция учун $x_0 \in E$ да*

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x \in E(|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

бўлса, $f(x)$ функция $x_0 \in E$ нуқтада узлуксиз деб аталади.

Бу ерда ҳам уч жойли $P(\varepsilon, \delta, x)$ предикатдан фойдаланилди.

4. Ўсувчи функциянинг таърифи. *E тўпламда аниқланган $f(x)$ функция учун*

$$\forall x_1 \in E\forall x_2 \in E_2(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$$

*бўлса, бу функция шу тўпламда **ўсувчи** деб аталади.*

Бу ерда $Q(x_1, x_2)$: $(x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2))$ икки жойли предикатдан фойдаланилган.

5. Чегараланган функциянинг таърифи. *Аниқланиш соҳаси E бўлган $f(x)$ функция учун*

$$\exists M \in R_+\forall x \in E\ (|f(x)| \leq M)$$

*бўлса, у ҳолда бу функция шу соҳада **чегараланган** деб аталади.*

Бу ерда ҳам $F(x, M)$: $(|f(x)| \leq M)$ икки жойли вредикатдан фойдаланилган.

Маълумки, математикада кўп теоремалар шартли мулоҳазалар шаклида ёзилади, яъни «Агар x бўлса, у ҳолда y бўлади» тарзида ифодаланади. Масалан, «Агар нуқта бурчак биссектрисасида ётган бўлса, у ҳолда у бурчак томонларидан тенг узоқлашган (масофада) бўлади». Бу теореманинг шарти «Нуқта бурчак биссектрисасида ётган» ва хулосаси «Нуқта бурчак томонларидан тенг узоқлашган» жумлаларидан иборат. Кўриниб турибдики, теореманинг шарти ҳам, хулосаси ҳам $R^2 = R \times R$ тўпламда аниқланган предикатни ифодалайди. Бу предикатларни $x \in R^2$ учун мос равишда $A(x)$ ва $B(x)$ билан белгилаб, теоремани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\forall x \in R^2 \ (A(x) \rightarrow B(x)).$$

Шу сабабли, теореманинг тузилиши (структураси) ҳақида гапирганда, унда учта қисмни ажратиш керак: 1) теорема шарти: R^2 тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат; 2) теорема хулосаси: R^2 тўпламда аниқланган $Q(x)$ предикат; 3) тушунтириш қисми: бу ерда теоремада гап юритилаётган объектлар тўпламини ифодалаш керак.

6.2. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш. Бирор A математик тасдиқ берилган бўлсин. Унга қарама-қарши бўлган тасдиқ $\overline{A}$ бўлади. Предикатлар мантиқи тенг кучли алмаштиришлар воситаси билан A формулага яхши шакл (кўриниш) бера олади. Масалан, чегараланган функциянинг таърифи

$$\exists M \in R_{+} \forall x \in E \ (|f(x)| \leq M)$$

формула орқали берилишини кўрган эдик. Бу формуланинг инкорини олиб ва тенг кучли алмаштиришларни ўтказиб, чегараланмаган функциянинг таърифини ҳосил қиламиз:

$$\overline{\exists M \in R_{+} \forall x \in E \ (|f(x)| \leq M)} \equiv \forall M \in R_{+} \overline{\forall x \in E \ (|f(x)| \leq M)} \equiv$$

$$\equiv \forall M \in R_{+} \exists x \in E \ \overline{(|f(x)| \leq M)} \equiv \forall M \in R_{+} \exists x \in E \ (|f(x)| > M).$$

Ҳосил бўлган $\forall M \in R_{+} \exists x \in E \ (|f(x)| > M)$ формула чегараланмаган функциянинг таърифини ифодалайди.

Келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, *ҳамма кванторлари олдинда турган предикатлар мантиқи формуласи орқали ифодаланган тасдиққа қарама-қарши тасдиқни ясаш учун ҳамма кванторларни қарама-қаршисига (яъни ∀ ни ∃ га ва ∃ ни ∀ га) алмаштириш ва кванторлар остида турган предикатнинг инкорини олиш кифоя.*

Масалан, $b \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тасдиқни қуйидаги формула ифодалайди:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E\overline{(0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - b| < \varepsilon)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \varepsilon).$$

Энди берилган теореманинг тўғрилигини рад этадиган тасдиқни ясашни мисолда кўрайлик. $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ теорема берилган бўлсин. Бу теоремани рад этадиган тасдиқ қуйидагича бўлади:

$$\overline{\forall x \in E(P(x) \to Q(x))} \equiv \exists x \in E(\overline{P(x) \to Q(x)}) \equiv$$

$$\equiv \exists x \in E(P(x) \wedge \overline{Q(x)}).$$

Охирги формула фақат $P(x) \equiv 1$ ва $Q(x) \equiv 0$ бўлгандагина чин қийматга эгадир.

Демак, $\forall x(P(x) \to Q(x))$ теореманинг нотўғрилигини исботлаш учун шундай $x \in E$ элементни кўрсатиш керакки, бу элемент учун $P(x)$ – чин ва $Q(x)$ – ёлғон қиймат қабул қилсин, яъни контрмисол келтириш керак.

6.3. Тўғри, тескари ва қарама-қарши теоремалар. Қуйидаги тўртта теоремани кўриб чиқайлик:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)), \tag{1}$$

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)), \tag{2}$$

$$\forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}), \tag{3}$$

$$\forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}). \tag{4}$$

1-таъриф. *Бирининг шарти иккинчисининг хулосаси ва иккинчисининг шарти биринчисининг хулосаси бўлган жуфт теоремалар **ўзаро тескари теоремалар** деб аталади.*

Масалан, (1) ва (2) теоремалар ҳамда (3) ва (4) теоремалар ўзаро тескари теоремалар бўлади. Бу жуфт теоремаларнинг бирини тўғри теорема десак, у ҳолда иккинчисини тескари теорема дейиш керак.

2-таъриф. *Бирининг шарти ва хулосаси иккинчисининг шарти ва хулосаси учун мос равишда инкорлари бўлган жуфт теоремалар **ўзаро қарама-қарши теоремалар** деб аталади.*

(1) ва (3) теоремалар ҳамда (2) ва (4) теоремалар ўзаро қарама-қарши теоремалар бўлади.

Масалан, (1): «Агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри бурчакли бўлади» теоремага (2): «Агар тўртбурчак тўғри бурчакли бўлса, у ҳолда унинг диагоналлари тенг бўлади» деган теорема тескари теорема бўлади. (1) теоремага қарама-қарши теорема (3): «Агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлмаса, у ҳолда у тўғри бурчакли бўлмайди» ва (2) теоремага қарама-қарши теорема (4): «Агар тўртбурчак тўғри бурчакли бўлмаса, у ҳолда унинг диагоналлари тенг бўлмайди» бўлади.

Қурилган мисолда (1) ва (4) теоремалар бир вақтда чин бўлади. (1) теоремага тенг ёнли трапеция контрмисол бўлади.

Равшанки, тўғри ва тескари теоремалар, умуман айтганда, тенг кучли бўлмайди, яъни бири чин, иккинчиси ёлғон бўлиши мумкин. Аммо, (1) ва (4) теоремалар ҳамда (2) ва (3) теоремаларнинг тенг кучли формулалар эканлигини осонгина исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv$$

$$\equiv \forall x \in E(\overline{\overline{B(x)}} \vee \overline{A(x)}) \equiv \forall x \in E(\overline{B(x)} \to \overline{A(x)}).$$

Худди шу каби (2) ва (3) формулаларнинг тенг кучлилигини исботлаш мумкин:

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \to \overline{B(x)}).$$

Бу тенг кучлиликлардан қуйидаги хулосага келамиз: агар (1) теорема исбот қилинган бўлса, у ҳолда (4) теорема ҳам исбот қилинган бўлади ва агар (2) теорема исбот қилинган бўлса, у ҳолда (3) теорема ҳам исботланган ҳисобланади.

6.4. Етарли ва зарурий шартлар. Қуйидаги теоремани кўрайлик:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)). \tag{5}$$

$A(x) \to B(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $CI_A \cup I_B$ тўпламдан иборат бўлади. Демак, бу предикатнинг ёлғонлик тўплами $C(CI_A \cup I_B) = (I_A \cap CI_B)$ тўпламдан иборат. Охирги $I_A \cap CI_B$ тўплам фақат $I_A \subset I_B$ бўлгандагина бўш тўплам бўлади.

Шундай қилиб, $A(x) \to B(x)$ предикат $x \in E$ нинг ҳамма қийматларида $A(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $B(x)$ предикат чинлик тўпламининг қисм тўплами, яъни $I_A \subset I_B$ бўлганда ва фақат шундагина чин бўлади. Бу ҳолда $B(x)$ *предикат $A(x)$ предикатдан мантиқий келиб чиқади* деб айтилади. $B(x)$ предикат $A(x)$ предикат учун *зарурий шарт* ва $A(x)$ эса $B(x)$ учун *етарли шарт* деб айтамиз. Масалан, ушбу «Агар x натурал сон бўлса, у ҳолда y бутун сон бўлади» теоремасида $B(x)$: «x – бутун сон» предикати $A(x)$: «x – натурал сон» предикатидан мантиқий келиб чиқади ва «x – натурал сон» предикати «x – бутун сон» предикати учун етарли шарт бўлади.

Шундай ҳоллар мавжудки, буларда

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \tag{6}$$

ва

$$\forall x \in E(B(x) \to A(x)) \tag{7}$$

ўзаро тескари теоремалар чин бўлади. Бу ҳол фақат $I_A = I_B$, яъни $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар тенг кучли предикатлар бўлгандагина мумкин.

Қаралаётган ҳолда (1) теоремага асосан $A(x)$ предикат $B(x)$ предикат учун етарли шарт ва (2) теоремадан $A(x)$ предикат $B(x)$ предикат учун зарурий шарт эканлиги келиб чиқади. Демак, агар (1) ва (2) теоремалар чин бўлса, у ҳолда $A(x)$ шарт $B(x)$ учун ҳам етарли, ҳам зарурий шарт бўлади. Худди шу каби бу ҳолатда $B(x)$ шарт $A(x)$ учун етарли ва зарурий шарт бўлади.

Биз айрим вақтларда «зарур ва етарли» мантиқий боғловчи ўрнига «шунда ва фақат шунда» мантиқий боғловчини ишлатамиз.

Бу ерда (1) ва (2) мулоҳазалар чин бўлганлиги учун қуйидаги мулоҳаза ҳам чин бўлади:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)) \wedge \forall x \in E(B(x) \to A(x)) =$$
$$= \forall x \in E(A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

1-мисол. Ушбу теорема: «Агар x сон 6 га бўлинса, у ҳолда x сон 3 га бўлинади» чиндир. Бу ерда $A(x)$ предикат: «x сон 6 га бўлинади» ва $B(x)$ предикат: «x сон 3 га бўлинади». $B(x)$ предикат $A(x)$ предикатдан мантиқий келиб чиқади, яъни $A(x) \to B(x)$. $A(x)$ предикат (x сон 6 га бўлинади) $B(x)$ предикат (x сон 3 га бўлинади) учун етарли шартдир. $B(x)$ предикат $A(x)$ предикат учун зарурий шартдир. Шу вақтнинг ўзида тескари теорема: «Агар x сон 3 га бўлинса, у ҳолда x сон 6 га бўлинади» нотўғридир (ёлғондир). Шунинг учун ҳам $B(x)$: «x сон 3 га бўлинади» предикати $A(x)$: «x сон 6 га бўлинади» предикат учун етарли шарт ва $A(x)$: «x сон 6 га бўлинади» предикати $B(x)$: «x сон 3 га бўлинади» предикатига зарурий шарт бўла олмайди.

6.5. Тескарисини (аксини) фараз қилиш усули билан исботлаш. Тескарисини фараз қилиш усули билан исботлашни қуйидаги схема орқали олиб борилади:

$$\forall x \in E(A(x) \to B(x)), \qquad (8)$$

теорема нотўғри, яъни шундай x ўзгарувчи мавжудки, $A(x)$ шарт – чин ва $B(x)$ хулоса – ёлғон деб фараз қилинади. Агар бу фараздан мантиқий фикрлаш натижасида қарама-қарши тасдиқ келиб чиқса, у ҳолда қилинган фараз нотўғри эканлиги ва теореманинг тўғрилиги ҳосил бўлади.

Бу схемадан фойдаланиб (1) теореманинг чинлигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, (1) теореманинг нотўғрилиги (ёлғонлиги) (фараз бўйича) ушбу формуланинг чинлигини кўрсатади: $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}$.

(1) теоремани нотўғри деб қабул қилган фаразимиздан келиб чиқадиган қарама-қарши тасдиқ $D \wedge \overline{D}$ конъюнкциядан иборат бўлади, бунда D — бирор мулоҳаза. Шундай қилиб, тескарисини фараз қилиш усули билан исботлаш схемаси қуйидаги формуланинг чинлигини исботлашга келтирилади: $\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D}$.

Бу охирги формула (8) формулага тенг кучлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))} \to D \wedge \overline{D} \equiv$$

$$\equiv \overline{\overline{\forall x \in E(A(x) \to B(x))}} \vee D \wedge \overline{D} \equiv \forall x \in E(A(x) \to B(x)).$$

7- §. Аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида

☑ *Аксиоматик предикатлар ҳисоби. Предикатлар ҳисобининг аксиомалар системаси. Умумийлик кванторини киритиш қоидаси. Мавжудлик кванторини киритиш қоидаси. Ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари.*

Аксиоматик предикатлар назариясини ҳам худди аксиоматик мулоҳазалар назарияси каби яратиш мумкин. Бу ерда қуйидагиларни кўрсатиш зарур:

1. Предикатлар ҳисоби формуласининг таърифи предикатлар мантиқи формуласининг таърифи билан бир хил.

2. Предикатлар ҳисоби аксиомалар системасини танлашни (худди мулоҳазалар ҳисобидагидек) ҳар хил амалга ошириш мумкин. Шундай аксиомалар системасидан биттаси қуйидаги: мулоҳазалар ҳисобининг ўн бир аксиомаси (4 та гуруҳ аксиомалар) ва иккита қўшимча аксиома

$$\forall x(F(x) \to F(x)), \quad F(t) \to \exists x F(x),$$

аксиомалардан иборат система бўлиши мумкин, бу ерда t ўзгарувчи x ўзгарувчини ўз ичига олмайди.

3. Мулоҳазалар ҳисобидаги келтириб чиқариш қоидасига яна иккита қоида қўшилади:

а) умумийлик кванторини киритиш қоидаси:

$$\frac{F\to G(x)}{F\to\forall xG(x)};$$

б) мавжудлик кванторини киритиш қоидаси:

$$\frac{G(x)\to F}{\exists xG(x)\to F},$$

агар F x га боғлиқ бўлмаса.

4. Хулоса ва исботланувчи формула тушунчалари худди мулоҳазалар ҳисобидаги каби аниқланади.

5. Худди ҳамма аксиоматик назариялардагидек ушбу муаммолар қўрилади:

а) ечилиш; б) зидсизлик; в) тўлиқлик; г) эркинлик.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Предикатлар мантиқи тилида қуйидаги таърифларни ёзинг:

1) чизиқли тартибланган тўплам (тартибланган тўплам чизиқли деб айтилади, агар шу тўпламнинг ҳар қандай x ва y элементлари учун ёки $x = y$, ёки $x < y$, ёки $x > y$ бўлса);

2) жуфт функция ($f(x)$ жуфт функция деб айтилади, агар унинг аниқланиш соҳаси координата бошига нисбатан симметрик ва аниқланиш соҳасининг ҳар бир x элементи учун $f(x) = f(-x)$ бўлса).

2. Қуйида берилган жумлалардаги нуқталар ўрнига «зарур, аммо етарли эмас», ёки «етарли, аммо зарур эмас», ёки «зарур эмас ва етарли эмас» ва қаерда мумкин бўлса, «зарур ва етарли» сўзларини шундай қўйингки, ҳосил бўлган мулоҳазалар чин бўлсин:

1) тўртбурчак тўғри бурчакли бўлиши учун унинг диагоналларининг узунлиги тенг бўлиши ...;

2) $x^2 - 5x + 6 = 0$ бўлиши учун $x = 3$ бўлиши ...;

3) $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун чегараланган бўлиши ...;

4) $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун $f(x)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши ...;

5) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сонли қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ бўлиши ... .

3. Ушбу кванторли мулоҳазаларнинг инкорларини топинг:

1) $\forall x \exists y F(x, y)$;

2) $\forall x \exists y \forall z A(x, y, z)$;

3) $\forall x[F(x) \vee \overline{\forall y B(x, y)}]$;

4) $\exists x \exists y \forall z[\overline{A(x, y)} \wedge B(y, z)]$;

5) $\exists x A(x, z) \wedge \exists x \forall y B(x, y) \to \forall x \forall y \overline{C(x, y, z)}$;

6) $\exists x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$;

7) $\forall x(A(x) \to \forall y B(y))$;

8) $\forall x(A(x) \to B(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge \overline{R(x)})$;

9) $\exists x(R(x) \leftrightarrow P(x))$;

10) $\forall x \exists y \forall z(P(x, y, z) \to Q(x, y, z))$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Математик таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан ифодалаш.
2. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини ифодалаш.
3. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифини ифодалаш.
4. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифини ифодалаш.
5. Ўсувчи функциянинг ва чегараланган функциянинг таърифларини ифодалаш.
6. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш.
7. Тўғри, тескари ва қарама-қарши теоремалар.
8. Етарли ва зарурий шартлар.
9. Тескарисини (аксини) фараз қилиш усули билан исботлаш.
10. Аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида.

V БОБ

МАТЕМАТИК НАЗАРИЯЛАР

Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисобида формуланинг тавтология бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашнинг самарали усулларидан бири чинлик жадвалидир. Аммо предикатлар мантиқида бу ҳолат батамом ўзгаради. Предикатлар мантиқида ҳар бир формуланинг умумқийматли ёки умумқийматли эмаслигини ечадиган самарали усул мавжуд эмас. Шунинг учун ҳам предикат ва у билан боғлиқ квантор тушунчаларидан фойдаланадиган математик назарияларда аксиоматик усуллардан фойдаланиш зарур бўлиб қолади.

Берилган аксиомалар системаси негизида (базасида) қурилган **аксиоматик назария** деб, шу аксиомалар системасига таяниб исботланувчи ҳамма теоремалар мажмуасига айтилади. Аксиоматик назария *формал* ва *формалмас* назарияларга бўлинади.

Формалмас аксиоматик назария назарий-тўпламий мазмун билан тўлдирилган бўлиб, келтириб чиқариш тушунчаси аниқ берилмаган ва бу назария асосан фикр мазмунига суянади.

Қаралаётган аксиоматик назария учун қуйидаги шартлар бажарилган бўлса, яъни:

1) назариянинг тили берилган;

2) формула тушунчаси аниқланган;

3) аксиомалар деб аталадиган формулалар тўплами берилган;

4) назарияда келтириб чиқариш қоидаси аниқланган бўлса, формал аксиоматик назария аниқланган деб ҳисобланади.

Математик назариялар орасида биринчи тартибли назария алоҳида ўрин тутади. Бу назария юқори тартибли математик назариялардан қуйидаги хусусиятлари билан фарқ қилади:

– предикатлар ва функциялар бўйича квантор амаллари (операциялари) бажарилмайди;

– аргументлари бошқа предикатлар ва функцияларни қабул қилувчи предикатлар мавжуд эмас.

Биринчи тартибли математик назария бошқа бир қатор маълум математик назарияларни ифодалаш учун етарлидир.

Қуйида биринчи тартибли математик назариянинг тили, терм ва формулалари тушунчаси, мантиқий ва хос (махсус) аксиомалари, келтириб чиқариш қоидаси, назарияда исботлаш тушунчаси, тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги, дедукция теоремаси, назария тилининг интерпретацияси (талқини), берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари, назариянинг модели, интерпретациянинг изоморфизмлиги, назариянинг қатъийлиги, назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари, предикатлар ҳисобининг зидсизлиги, натурал сонлар назарияси, Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси сингари масалалар ёритилган.

1- §. Биринчи тартибли тил. Терм ва формулалар

☑ *Терм. Формула. Сўз. Бўш сўз. Назариянинг тили. Биринчи тартибли тил. Тилнинг сигнатураси. Функционал ҳарфлар. Предикат ҳарфлар. Биринчи тартибли назариянинг символлари. Предмет ўзгарувчилар. Предмет константалар. Кванторнинг таъсир этувчи соҳаси.*

1-таъриф. *Ҳар қандай символларнинг бўш бўлмаган чекли тўплами* ***алфавит*** *деб, алфавитнинг символлари эса* ***ҳарфлар*** *деб аталади.*

2-таъриф. *Қаралаётган А алфавит ҳарфларининг чекли кетма-кетлиги* ***А алфавитдаги сўз*** *деб аталади. Ҳарфларнинг бўш кетма-кетлиги* ***бўш сўз*** *деб аталади ва* $\wedge$ *билан белгиланади.*

3-таъриф. *Агар A алфавитидаги $a_1a_2...a_n$ ва $b_1b_2...b_k$ сўзлар учун $n = k$ ва $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_k$ бўлса, бу сўзлар тенг деб аталади ва $a_1a_2...a_n = b_1b_2...b_k$ кўринишда ёзилади. Бу ерда n сон* ***сўзнинг узунлиги*** *деб аталади.*

4-таъриф. *Агар $A(T)$ бирор назариянинг алфавити бўлса, $A(T)$ даги $E(T)$ сўзлар тўплами* ***T назариянинг ифодалар тўплами*** *деб аталади.*

5-таъриф. *$<A(T), A(T)>$ жуфтлик* ***T назариянинг тили*** *деб аталади.*

Биринчи тартибли тиллар биринчи тартибли назарияларда қўлланилади.

Биринчи тартибли назариянинг символлари қуйидагилардан иборат:

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$ — мантиқий амаллар;

$\forall$, $\exists$ — квантор амаллари;

(,) — қўшимча символлар;

A_j^n $(n, j \geq 1)$ — n-жойли предикат ҳарфларнинг саноқли тўплами. Бу ерда юқори индекс жойнинг сонини ва қуйи индекс предикат ҳарфининг рақамини билдиради;

f_j^n $(n, j \geq 1)$ — чекли (бўш бўлиши ҳам мумкин) ёки саноқли функционал ҳарфларнинг тўплами. Бу ерда юқори индекс функция таркибига кирувчи ўзгарувчилар сони ва қуйи индекс функционал ҳарфнинг рақамини билдиради;

a_i $(i \geq 1)$ — чекли (бўш) ёки саноқли предмет константалар тўплами.

Мантиқий амаллар занжири ҳам функционал ҳарфлар сифатида қаралиши мумкин.

6-таъриф. *Предикат ҳарфлар тўплами функционал ҳарфлар ва константалар тўпламлари билан биргаликда берилган назария тилининг* ***сигнатураси*** *деб аталади.*

Шундай қилиб, биринчи тартибли T назарияда айрим ёки ҳамма функционал ҳарфлар ва предмет константалар ва айрим (аммо ҳаммаси эмас) предикат ҳарфлар мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Биринчи тартибли ҳар хил назариялар бир-биридан алфавитдаги ҳарфлар таркиби билан фарқ қилиши мумкин.

T назарияни тўлиқ тавсифлаш учун *терм* ва *формула* тушунчаларини аниқлашимиз керак. Терм ва формула — бу $E(T)$ сўзлар тўпламининг икки синфидир.

7-таъриф. 1) *Предмет ўзгарувчилар ва предмет константалар термдир;*

2) *агар* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *лар терм, A эса n-жойли амалнинг символи бўлса, у ҳолда* $A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *термдир;*

3) *T назарияда 1 ва 2-бандларда аниқланганлардан ташқари ҳеч қандай терм мавжуд эмас.*

Табиий интерпретацияга (талқинга) асосан терм — бу айрим олинган предметнинг исмидир. Ўзгарувчилар ва предмет константалардан ташқари амалларнинг символлари воситасида ўзгарувчилар ва предмет константалардан ҳосил қилинган занжирлар ҳам терм бўлади, чунки интерпретацияга кўра терм бирор функциянинг қиймати сифатида аниқланяпти.

8-таъриф. 1) *Агар A — n-жойли муносабат символи (предикат ёки функция) ва* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *термлар бўлса, у ҳолда* $A(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *формула, хусусан, агар A — предикат ҳарфи* A_i^n *бўлса, у ҳолда*

$$A_i^n(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

***элементар формула** деб аталади;*

2) *агар A ва B формулалар бўлса, у ҳолда* $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\overline{A}$ *ҳам формуладир;*

3) *агар A формула ва y ҳарфи A формулага эркин кирувчи ёки A таркибига кирмаган предмет ўзгарувчиси бўлса, у ҳолда* $\forall yA$, $\exists yA$ *ифодалар формула бўлади. Бу ҳолда A **кванторнинг таъсир этувчи соҳаси** дейилади;*

4) *1—3-бандларда аниқланганлардан ташқари бошқа ҳеч қандай формула мавжуд эмас.*

2- §. Мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар. Келтириб чиқариш қоидаси

☑ *Мантиқий аксиомалар. Махсус аксиомалар. Келтириб чиқариш қоидаси. Хулоса қоидаси. Умумлаштириш қоидаси.*

Биринчи тартибли назария аксиомалари икки синфга: мантиқий ва хос аксиомаларга бўлинади.

Мантиқий аксиомалар: A, B ва C лар T назариянинг қандай формулалари бўлишидан қатъи назар қуйидаги формулалар T нинг *мантиқий аксиомалари* бўлади:

1) $A \to (B \to A)$;

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;

4) $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$. Бу ерда $A(x_i)$ − берилган T назариянинг формуласи ва t — шу $A(x_i)$ формулада эркин бўлган T назариянинг терми. Таъкидлаш керакки, t терм x_i билан ҳам мос келиши мумкин, у ҳолда биз $\forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$ аксиомага эга бўламиз;

5) агар x_i предмет ўзгарувчи A формулада эркин бўлмаса, у ҳолда

$$\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B).$$

Изоҳ. Олдинги бобда XI аксиомали классик мулоҳазалар ҳисобини кўриб ўтган эдик. Аммо кам аксиомали мулоҳазалар ҳисобини ҳам яратиш мумкин (масалан, 1—3- мантиқий аксиомалар асосида).

Хос аксиомалар. Хос аксиомаларни умумий ҳолда тавсифлаш мумкин эмас, чунки улар бир назариядан иккинчи назарияга ўтишда ўзгаради, яъни ҳар бир назариянинг ўзигагина хос аксиомалари бўлади.

Биринчи тартибли назария хос аксиомаларга эга эмас. Бу назария соф мантиқий назариядир. Адабиётларда бу назария *биринчи тартибли предикатлар ҳисоби* деб айтилади.

Кўп аксиоматик назарияларда тенглик тушунчасидан фойдаланилади. Уни икки жойли предикат $<<x=y>>$ сифатида киритилади. Шу сабабли аксиомалар қаторига иккита хос аксиома киритилади:

1) $\forall x(x = x)$;

2) агар x, y, z ҳар хил предмет ўзгарувчилар ва $F(z)$ формула бўлса, у ҳолда $\forall x \forall y(x = y \to F(x) = F(y))$.

Келтириб чиқариш қоидаси. Худди мулоҳазалар ҳисобидагидек, H формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш тушунчасидан фойдаланамиз. H га кирувчи мулоҳазаларни (формулаларни) *шартлар* деб айтамиз. Агар H дан келтириб чиқарилган ифоданинг охирида A мулоҳаза (формула) турган бўлса, у ҳолда A мулоҳаза H дан *келтириб чиқарилган* деб айтамиз ва $H \vdash A$ кўринишда ёзамиз. Хусусан, $H = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $\vdash A$ кўринишда ёзилади.

Биринчи тартибли назариянинг келтириб чиқариш қоидаси таркибига ушбу иккита қоида киради:

1. Хулоса қоидаси (ёки modus ponens):

$$\frac{\vdash A, \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2. Умумийлик квантори билан боғлаш қоидаси (ёки умумлаштириш қоидаси):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қандай шартлар бажарилганда аксиоматик назария формал аксиоматик назария бўлади?
2. Биринчи тартибли назария юқори тартибли математик назариялардан қандай хусусиятлари билан фарқ қилади?
3. Мантиқий амаллар занжири ҳам функционал ҳарфлар сифатида қаралиши мумкинлигини исботланг.
4. Агар $\vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$ бўлса, у ҳолда $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ бўлишини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Аксиоматик назария тушунчаси. Формал ва формалмас аксиоматик назариялар.
2. Биринчи тартибли тил. Терм ва формулалар. Функционал ва предикат ҳарфлар. Биринчи тартибли назариянинг символлари.
3. Предмет ўзгарувчилар ва константалар. Кванторнинг таъсир этувчи соҳаси.
4. Мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар. Келтириб чиқариш қоидаси. Хулоса қоидаси. Умумийлик квантори билан боғлаш қоидаси.

3- §. Алгебра, геометрия ва анализда мавжуд бўлган математик назариялар

☑ *Қисман тартиблаш назарияси. Гуруҳлар назарияси. Кесмалар тенглиги назарияси. Натурал сонларнинг аксиоматик назарияси.*

Энди алгебра, анализ ва геометрияда мавжуд бўлган математик назариялардан мисоллар келтирайлик.

3.1.Қисман тартиблаш назарияси. T назария битта A_1^2 предикат ҳарфга эга бўлсин. Бу назария функционал ҳарф ва предмет константаларга эга бўлмасин. $A_1^2(x_1, x_2)$ ва $A_1^2(x_1, x_2)$ формулалар ўрнига одатда $x_1 < x_2$ ва $x_1 \nless x_2$ муносабатларни ёзадилар.

T назария яна иккита махсус аксиомаларга эга бўлсин:

а) $\forall x_1(x_1 < x_1)$ – иррефлексивлик;

б) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ – транзитивлик.

Бу назариянинг ҳар қандай модели *қисман тартибланган структура* деб аталади.

3.2.Гуруҳлар назарияси. T назария битта A_1^2 предикат ҳарфга, битта f_1^2 функционал ҳарфга ва битта a_1 предмет константага эга бўлсин. Алгебрада қабул қилинган белгилашлардан фойдаланиб,

$A_1^2(t, s)$ ўрнига $t = s$,

$f_1^2(t, s)$ ўрнига $t + s$,

a_1 ўрнига 0

ни ёзамиз. Бу ерда қуйидаги формулалар T назариянинг махсус аксиомалари бўлади:

а) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$ – ассоциативлик;

б) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$ – нолнинг хусусияти;

в) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$ – қарама-қарши элементнинг мавжудлиги;

г) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ – тенгликнинг рефлексивлиги;

д) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \to (x_2 = x_1))$ – тенгликнинг симметриклиги;

е) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2) \to ((x_2 = x_3) \to (x_1 = x_3)))$ – тенгликнинг транзитивлиги;

ж) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \to ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \wedge$

$\wedge (x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$ – тенгликни ўрнига қўйиш.

Бу назариянинг ҳар қандай модели *гуруҳ* деб аталади. Агар гуруҳда $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_2)$ чин формула бўлса, у ҳолда бу гуруҳ *абел гуруҳи* ёки *коммутатив гуруҳ* деб аталади.

Гуруҳга қуйидагилар мисол бўла олади:

1) M тўпламнинг ўзини ўзига барча ўзаро бир қийматли акслантиришлари тўплами шу акслантиришларнинг суперпозицияси амали билан биргаликда қаралганда;

2) ҳамма бутун сонлар тўплами Z бутун сонларни қўшиш амали билан биргаликда қаралганда;

3) текисликнинг ҳамма V_2 векторлар тўплами векторларни учбурчак ёки параллелограмм қоидаси бўйича қўшиш амали билан биргаликда қаралганда.

Қисман тартиблаш ва гуруҳ назариялари самарали (эффектли) аксиомалаштирилган назариялардир, чунки бу назарияларда исталган формулани мантиқий аксиома бўлиши ёки бўлмаслигини самарали текшириш имконияти мавжуд.

3.3.Геометрия (кесмалар тенглиги назарияси). Бу назарияда S — ҳамма кесмалар тўплами бўлсин. Тенглик муносабатини << $x = y$ >> шаклда ёзамиз, яъни << $x = y$ >> ифодани << x кесма y кесмага тенг >> деб ўқиймиз. Назариянинг махсус аксиомалари:

1) $\forall x \in S(x = x)$;

2) $\forall x \forall y \forall z((x = z) \wedge (y = z)) \to (x = y))$.

4- §. Назарияда исботлаш тушунчаси. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги

☑ *Исботлаш тушунчаси. Теорема. Исботланувчи мулоҳаза. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги.*

Алоҳида фикрнинг чинлигини (тўғрилигини) асослаш усулини *исботлаш* деб айтамиз.

1-таъриф. *Қўрилаётган назария мулоҳазаларининг s_1, s_2, ..., s_k чекли кетма-кетлиги учун бу мулоҳазаларнинг ҳар бири ёки аксиома, ёки шу кетма-кетликнинг бирорта мулоҳазасидан, ёки кетма-кетликда ўзидан олдин турган бирорта мулоҳазадан мантиқнинг келтириб чиқариш қоидаси орқали ҳосил этилган бўлса, бу кетма-кетлик* ***исбот (исботлаш)*** *дейилади.*

2-таъриф. *Исботлашнинг охиргиси бўлган мулоҳази* ***теорема*** *ёки* ***исботланувчи мулоҳаза*** *деб аталади.*

Аниққи, ҳар қандай аксиома теорема бўлади. Бу теореманинг исботи бир қадамдан иборат бўлади.

Теорема. *Агар биринчи тартибли T назариянинг A формуласи тавтологиянинг хусусий ҳоли бўлса, у ҳолда A формула T назариянинг теоремаси бўлади ва уни (1), (2) ва (3) мантиқий аксиомалар ва хулоса қоидасини қўллаш йўли билан келтириб чиқариш мумкин.*

Исбот. x_1, x_2, ..., x_n лар B формула таркибига кирувчи ўзгарувчилар мажмуи ва A формула B тавтологиядан ўрнига қўйиш қоидаси орқали ҳосил қилинган бўлсин. Маълумки, бу ҳолда B формулани $H = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ мажмуадан келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун қуйидаги қоида бўйича ўрнига қўйиш амалини бажарамиз:

1) агар бирор x_i ўзгарувчи B формула таркибида бўлса, у ҳолда ҳар бир келтириб чиқариш формуласи таркибидаги x_i ўрнига T назариянинг A формуласини ҳосил қилиш учун B даги ўша x_i ўзгарувчи ўрнини оладиган формула қўйилади;

2) агар бирор x_i ўзгарувчи B таркибида бўлмаса, у ҳолда келтириб чиқариш формулалари таркибидаги шу ўзгарувчининг ҳар бир жойига T назариянинг ихтиёрий битта формуласи қўйилади.

Шундай қилиб келтириб чиқарилган формулалар кетма-кетлиги назариядаги A формуланинг T назарияда келтирилиб чиқарилиши бўлади.

Теореманинг исботида фақатгина (1), (2), (3) аксиомалар ва хулоса қоидасидан фойдаланилди.

5- §. Дедукция теоремаси

☑ *Дедукция теоремаси. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш. Дедукция теоремасининг исботи.*

Мулоҳазалар ҳисобида

$$\frac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$$

дедукция теоремаси ўринли эди. Ихтиёрий биринчи тартибли T назарияда бу теорема айрим ўзгартиришларсиз ўринли бўлмай қолади. Масалан, ҳар қандай биринчи тартибли назарияда $A \vdash \forall x A$ ўринлидир, аммо ҳар доим ҳам $A \to \forall x A$ формула исботланувчи бўлавермайди. Ҳақиқатан ҳам, ҳеч бўлмаганда $M = \{a, b, ...\}$ нинг икки элементини қамраган соҳа берилган ҳолни қараб бунга ишониш мумкин.

T — предикатлар ҳисоби ва A формула $A_1^1(x)$ кўринишда бўлсин. $A_1^1(x)$ формула фақатгина a элемент эгаллаган хусусиятга эга деб интерпретация берамиз. У ҳолда $A_1^1(x)$ формула a элементи бўлган M тўпламда бажарилувчи бўлади, аммо шу вақтнинг ўзида $\forall xA(x)$ формула M тўпламда бажарилувчи формула эмас.

Мулоҳазалар ҳисобидаги дедукция теоремасининг шартларини бироз кучсизлантирганимиздагина у биринчи тартибли назарияда ўринли бўлади. Бунинг учун аввал биринчи тартибли назарияда формулалар мажмуасидан формулаларни келтириб чиқариш қоидасини аниқлаб олайлик. Шу мақсадда биринчи навбатда бир ёрдамчи тасдиқни исбот қиламиз.

H, A формулалар мажмуаси ва бу мажмуадан келтириб чиқарилган $B_1, B_2, \ldots, B_n$ формулалар кетма-кетлигини кўрайлик. Бу келтириб чиқаришда B_k формула A формула билан қуйидаги икки ҳолда *боғлиқ бўлади* деб айтамиз:

1) B_k формула A формуланинг ўзидир ва у келтирилиб чиқарилган формулалар таркибига H, A формулалар мажмуасида мавжуд бўлган формула сифатида киритилган;

2) B_k формула $B_1, B_2, \ldots, B_n$ келтирилиб чиқарилган формулалардаги ўзидан олдин турган формулалардан хулоса қоидаси ва кванторни боғлаш йўли билан ҳосил қилинган. Ўзидан олдин турган формулаларнинг ҳеч бўлмаганда бирортаси A формулага боғлиқ. Масалан, $\{\forall xA \to C, A\}$ формулалар мажмуасидан

$$A,\ \forall xA,\ \forall xA \to C,\ C,\ \forall xC$$

формулаларни келтириб чиқариш мумкин. Бу формулаларнинг ҳар бири A формулага боғлиқ.

Лемма. *H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B$ формулалар кетма-кетлигидаги B формула A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $H \vdash B$.*

Исбот. Лемманинг исботини математик индукция методи билан ўтказамиз.

1. $n = 1$ ҳол учун лемма тўғридир. Ҳақиқатан ҳам, агар H, A формулалар мажмуасидан B формула келтирилиб чиқарилган бўлса ва у A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

ёки $B \in H$, ёки B формула исботланувчи формула бўлади. Иккала ҳолда ҳам $H \vdash B$.

2. Энди лемманинг хулосаси $k < n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун тўғри деб фараз қиламиз ва унинг n узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун тўғрилигини исбот этамиз. Агар $B \in H$ ёки исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $H \vdash B$.

Агарда B формула ўзидан олдин турган битта ёки иккита формулалардан келтириб чиқарилган бўлса, у ҳолда B формула A га боғлиқ бўлмайди, чунки индуктив фаразимизга асосан келтириб чиқариш формулалари таркибидаги A дан олдин турган ҳамма формулалар A га боғлиқ эмас. Демак, $H \vdash B$.

Дедукция теоремаси. *$H, A \vdash B$ ва H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган B формула мавжуд бўлсин. A формулага боғлиқ бўлиб келтириб чиқарилган формулаларга квантор билан боғлаш қоидасини қандай қўллашимиздан қатъи назар A формулага кирувчи эркин ўзгарувчиларнинг бирортаси квантор билан боғланмасин. У ҳолда $H, A \to B$.*

Исбот. $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n = B$ лар H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган теореманинг шартларини қаноатлантирувчи формулалар бўлсин. Исботни математик индукция методи билан олиб борамиз.

1. $n = 1$ ҳол учун теорема тўғридир. Ҳақиқатан ҳам, агар B формула H, A мажмуанинг келтириб чиқариш формуласи бўлса, у ҳолда:

а) ёки $B \in H$;

б) ёки B – исботланувчи формула;

в) ёки B формула A нинг ўзидир.

а) ва б) ҳолларда $H \vdash B$ ва $B \to (A \to B)$ формула исботланувчи формула бўлганлиги учун хулоса қоидасига асосан $H \vdash A \to B$ натижага эга бўламиз.

в) ҳолда $A \to B$ формула $A \to A$ формулага айланади, яъни исботланувчи формула бўлади. Шунинг учун $H \vdash A \to B$ бўлади, яъни $A \to B$ формулани H дан келтириб чиқариш мумкин.

2. Энди $k < n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун теорема тўғри бўлсин ва уни $k = n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун исбот этамиз. B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B лар H, A формулалар мажмуасининг келтириб чиқариш формулалари бўлса, фақатгина қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин:

а) $B \in H$;

б) B — исботланувчи формула;

в) B формула A формуланинг ўзидир;

г) B формула келтириб чиқариш формулалари таркибидаги ўзидан олдин келадиган B_i ва $B_j(i < j < n)$ формулалардан хулоса қоидасига асосан ҳосил қилинади;

д) B формула келтириб чиқариш формулалари таркибидаги $B_i(i < n)$ формуладан кванторни боғлаш қоидасига асосан олинади.

а), б), в) ҳоллар учун теорема исботи $n = 1$ ҳол учун берилган исбот билан бир хилдир.

Тўртинчи г) ҳолни кўрайлик. Бу ерда B формула иккита B_i ва $B_j(i<j<n)$ формулалардан келтириб чиқарилганлиги учун B_j формула $B_i \to B$ кўринишга эга бўлади ва

$$\vdash A \to B_i, \tag{1}$$

$$H \vdash A \to (B_i \to B) \tag{2}$$

тасдиқлар тўғри бўлади.

Иккинчи $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ аксиомадан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\vdash (A \to (B_i \to B)) \to ((A \to B_i) \to (A \to B)). \tag{3}$$

Мураккаб хулоса қоидасидан фойдаланиб, (3), (2) ва (1) формулалардан $H \vdash A \to B$ формулани келтириб чиқарамиз.

Охирги бешинчи д) ҳолни кўрамиз. H, A формулалар мажмуасидан келтирилиб чиқарилган формулалар орасида $B_i(i < n)$ шундайки, B формула $\forall x_1 B_i$ бўлсин. Фаразимизга кўра $H \vdash A \to B_i$ ёки B_i формула A формулага боғлиқ эмас, ёки x_i ўзгарувчи A формуланинг эркин ўзгарувчиси бўлмайди.

Агар B_i формула A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда леммага асосан $H \vdash B_i$. $H \vdash B_i$ формулага кванторни боғлаш қоидасини қўллаб, $H \vdash \forall x_1 B_i$ формулани ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash B$. Шундан сўнг биринчи $A \to (B \to A)$ аксиомадан фойдаланиб, $H \vdash B \to (A \to B)$ формулани келтириб чиқарамиз. Демак, $H \vdash A \to B$.

Агар x_1 ўзгарувчи A формуланинг эркин ўзгарувчиси бўлмаса, у ҳолда бешинчи $\forall x_1 (A \to B_i) \to (A \to \forall x_1 B_i)$ аксиомадан фойдаланамиз. $H \vdash A \to B_i$ бўлганлиги учун кванторни боғлаш қоидасидан фойдаланиб, $H \vdash \forall x_1 (A \to B)$ формулани ҳосил қиламиз. Бу формуладан хулоса қоидасига асосан $H \vdash A \to \forall x_1 B_i$ формулани келтириб чиқарамиз. Бундан ўз навбатида $H \vdash A \to B$ формула келиб чиқади.

Шундай қилиб, дедукция теоремаси бешала ҳол учун ҳам тўғридир.

Амалда бу теоремадан келиб чиқадиган қуйидаги натижалардан фойдаланиш қулайроқдир:

1-натижа. *Агар $H, A \vdash B$ ва A нинг эркин ўзгарувчисига кванторни боғлаш қоидасини ишлатмасдан келтириб чиқарилган формулалар мавжуд бўлса, у ҳолда $H \vdash A \to B$.*

2-натижа. *Агар A формула ёпиқ ва $H, A \vdash B$ бўлса, у ҳолда $H \vdash A \to B$.*

6-§. Назария тилининг интерпретацияси. Берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари. Назариянинг модели

☑ *Интерпретация. Формулага интерпретация бериш. Берилган интерпретацияда формуланинг чинлик қийматлари. Формуланинг бажарилувчанлиги тушунчаси. Назариянинг модели.*

6.1.Назария тилининг интерпретацияси.

Таъриф. *Формула таркибига кирувчи ҳамма константалар, ўзгарувчилар, функционал ва предикат ҳарфларга аниқ* *мазмун ва ҳамма эркин ўзгарувчиларга ўзгармас қиймат беришга формула ёки формулалар мажмуига* ***интерпретация бериш*** *деб аталади.*

Масалан, $\exists x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), x_2)$ формулага икки хил интерпретация беришни кўрайлик. Биринчи интерпретацияда ҳамма ўзгарувчилар ҳақиқий қиймат олади, $a_0 = 1$, $f_1^2(x, y) = x+y$, $A_1^2(x, y) \equiv x < y$ ва эркин ўзгарувчи $x_2 = 2$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда қуйидаги чин арифметик мулоҳазага эга бўламиз: «Шундай x_1 мавжудки, $x_1 + 1 < 2$ » иккинчи интерпретацияда ҳамма ўзгарувчиларнинг M ўзгариш соҳаси иккита a_0 ва a ҳарфларидан иборат, эркин ўзгарувчи $x_2 = a_1$, f_1^2 функция ва A_1^2 предикат қуйидаги жадваллар билан берилган деб ҳисоблаймиз:

x	y	f_1^2
a_0	a_0	a_0
a_0	a_1	a_0
a_1	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

x	y	$A_1^2(x, y)$
a_0	a_0	ё
a_0	a_1	ё
a_1	a_0	ч
a_1	a_1	ё

У ҳолда x_1 ўзгарувчига боғлиқ бўлган $A \equiv A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), a_1)$ предикатнинг қиймати қуйидаги жадвал билан аниқланади:

x_1	$y = f_1^2(x_1, a_0)$	$A_1^2(y, a_1)$
a_0	a_0	ё
a_1	a_1	ё

A предикат ўзгарувчиларининг ҳамма қийматлар сатрида ёлғон қиймат қабул қилганлиги учун $\exists x_1 A(x_1)$ мулоҳаза ёлғон қиймат қабул қилади. Демак, исталган интерпретацияда формула мулоҳазага айланади. Бу мулоҳазанинг чинлик қийматини биз аниқлай оламиз.

M тўплам интерпретациянинг *предмет соҳаси* деб аталади. Бу тўплам чексиз ҳам бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, *интерпретация* сифатида ўз таркибида қуйидагилар бўлган системани тушунамиз:

1) интерпретация соҳаси деб аталадиган бўш бўлмаган *M* тўплам;

2) *T* назария тилининг ҳар бир элементига *M* тўпламнинг ягона элементини, аниқроқ айтганда, $< A(T), E(T) >$ аниқланиш соҳаси ва қийматлар соҳаси *M* тўпламнинг қисм тўплами бўлган функцияни мос қилиб қўядиган бирор мослик.

2- бандни қуйидагича тушуниш керак: ҳар қайси предикат $A_j^n \in < A(T), E(T) >$ ҳарфга *M* тўпламнинг бирор n- жойли муносабатини, ҳар қайси функционал $f_j^n \in < A(T), E(T) >$ ҳарфга *M* тўпламдаги бирор n- жойли амални ва ҳар қайси a_i предмет константага *M* тўпламнинг қандайдир элементи мос қўйилади.

Берилган интерпретацияда предмет ўзгарувчилар *M* тўпламдан қиймат олувчи ўзгарувчилар сифатида қаралади, мантиқий ва квантор амаллари символларига бўлса одатдаги мазмуни берилади. Бундай интерпретация учун:

1) эркин ўзгарувчиси бўлмаган ҳар қандай формула (ёпиқ формула) чин ёки ёлғон қиймат қабул қилувчи мулоҳазани ифодалайди;

2) эркин ўзгарувчиси бўлган ҳар қандай формула интерпретация соҳасига нисбатан бирор муносабатни ифодалайди. Бу муносабат ўзгарувчиларнинг интерпретация соҳасидаги айрим қийматларида чин ва бошқа қийматларида ёлғон қиймат қабул қилиши мумкин.

Масалан, интерпретация соҳаси сифатида бутун мусбат сонлар тўпламини олайлик ва $A_1^2(x_1, x_2)$ предикатга $x_1 \leq x_2$ деб интерпретация берайлик. У ҳолда $A_1^2(x_1, x_2)$ предикат $a \leq b$ муносабатни қаноатлантирувчи ҳамма тартибланган (a, b) бутун мусбат сонлар жуфтлиги учун чин қиймат қабул қилади.

$\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ формула «Ҳар қандай бутун мусбат x_2 сон учун $x_1 \leq x_2$» деган муносабатни билдиради. Бу муносабат фақатгина битта 1 сони учун чиндир.

$\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ формула бўлса, энг кичик мусбат сон мавжудлигини билдиради ва у бутун мусбат сонлар тўпламида чин бўлади.

6.2. Берилган интерпретацияда формуланинг чинлик қийматлари. M соҳали бирор интерпретация берилган бўлсин. G — шу M соҳадаги ҳамма саноқли кетма-кет келувчи элементлар тўплами. $S = (b_1, b_2, ..., b_n, ...) \in G$ кетма-кетликда A формуланинг **бажарилувчанлиги** тушунчасини аниқлайлик.

Қийматлар соҳаси M бўлган ҳамма термлар тўпламида аниқланган бир аргументли (ўзгарувчили) S^* функцияни қуйидагича индуктив аниқлаймиз:

1) агар t терм x_i предмет ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $S^*(t) = b_i$;

2) агар t терм предмет константа бўлса, у ҳолда $S^*(t)$ бу константанинг M даги интерпретацияси билан мос тушади;

3) агар M соҳада g интерпретацияланувчи f_j^n функционал ҳарф ва $t_1, t_2, ..., t_n$ термлар бўлса, у ҳолда

$$S^*(f_j^n(t_1, t_2, ..., t_n)) = g(S^*(t_1), ..., S^*(t_n)).$$

Шундай қилиб, S^* — бу S кетма-кетлик билан аниқланадиган ва ҳамма термлар тўпламини M соҳага акслантирадиган функциядир. Оддий қилиб айтганда, ҳар қандай $S = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ кетма-кетлик ва ихтиёрий t терм учун $S^*(t)$ функция M тўпламнинг элементидир. Бу элемент t терм ифодасига кирувчи ҳамма x_i ўзгарувчилар ўрнига b_i элементларни қўйиш ва ундан кейин t терманинг функционал ҳарфларига мос келувчи ҳамма интерпретация операцияларини бажариш натижасида ҳосил бўлади.

Масалан, t терм $f_2^2(x_3, f_1^2, (x_1, a_1))$ ва бутун сонлар тўп- ми интерпретация соҳаси бўлсин, f_2^2 — оддий кўпайтма гида, f_1^2 — қўшиш сифатида, a_1 эса 5 сони сифатида интерпретацияланади. У ҳолда ихтиёрий $S=(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ бутун сонлар кетма-кетлиги учун $S^*(t)$ функция $b_3 \times (b_1 + 5)$ бутун сонни ифода этади.

Энди формуланинг индуктив таърифига ўхшаб, **бажарилган формула** тушунчасини аниқлаймиз:

1) агар A ушбу $A_j^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ элементар формула ва B_j^n муносабат унга мос бўлган интерпретация бўлса, у ҳолда A формула шунда ва фақат шундагина S кетма-кетликда *бажарилган* деб ҳисобланади, қачонки

$$B_j^n(S^*(t_1), S^*(t_2), ..., S_n^*(t_n))$$

B_j^n муносабатга қарашли бўлса;

2) $\bar{A}$ формула шунда ва фақат шундагина Sда бажарилган бўлади, қачонки A формула Sда бажарилмаган бўлса;

3) $A \to B$ формула шунда ва фақат шундагина S да бажарилган бўлади, қачонки A формула Sда бажарилмаган ёки B формула Sда бажарилган бўлса;

4) $\forall x_i A$ формула фақат ва фақат шундагина S да бажарилган бўлади, қачонки A формула Sдан фақатгина i-компоненти билан фарқ қилувчи G тўпламнинг ихтиёрий кетма-кетлигида бажарилган бўлса.

Бу таърифдан кўриниб турибдики, A формула ифодасидаги эркин кирувчи x_i ўзгарувчилар ўрнига b_i ни қўйиш натижасида ҳосил бўладиган мулоҳаза берилган интерпретацияда чин қийматга эга бўлганда ва фақат шундагина $S=(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ кетма-кетликда A формула бажарилган бўлади.

1-таъриф. *Берилган интерпретацияда A формула G нинг исталган кетма-кетлигида бажарилган бўлса, шунда ва фақат шундагина у* ***чин*** *деб аталади.*

2-таъриф. *Берилган интерпретацияда A формула G нинг ҳар қандай кетма-кетлигида бажарилмаган бўлса, шунда ва фақат шундагина у* ***ёлғон*** *деб аталади.*

6.3.Назариянинг модели.

3-таъриф. *Назария тилининг интерпретацияси шу назариянинг **модели** деб аталади.*

Оддийроқ қилиб айтганда, бирорта назария берилган бўлса, бу назариянинг бошланғич тушунчаларига янги маъно берамиз. Агар айрим предметлар мажмуаси ва интерпретация сифатида олинган улар орасидаги муносабатлар назариянинг ҳамма аксиомаларини қаноатлантирса, у ҳолда у берилган аксиоматик назариянинг *модели* деб аталади. Масалан, олдинги параграфларда Буль алгебрасини аниқлаган ва унинг иккита моделини кўрсатган эдик: мантиқ алгебраси ва тўпламлар алгебраси.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. 1) M тўпламнинг ўзини ўзига барча ўзаро бир қийматли акслантиришлари тўплами шу акслантиришларнинг суперпозицияси амали билан биргаликда қаралганда;

   2) ҳамма бутун сонлар тўплами Z бутун сонларни қўшиш амали билан биргаликда қаралганда;

   3) текисликнинг ҳамма V_2 векторлар тўплами векторларни учбурчак ёки параллелограмм қоидаси бўйича қўшиш амали билан биргаликда қаралганда гуруҳ бўлишини исботланг.
2. Агар $H.\ A \vdash B$ ва A нинг эркин ўзгарувчисига кванторни боғлаш қоидасини ишлатмасдан келтириб чиқарилган формулалар мавжуд бўлса, у ҳолда $H \vdash A \to B$ эканлигини исботланг.
3. Агар A формула ёпиқ ва $H, A \vdash B$ бўлса, у ҳолда $H \vdash A \to B$ бўлишини исботланг.
4. Интерпретация ва интерпретация соҳаси деб нимани тушунасиз? Мисоллар келтиринг.
5. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ бўлишини исботланг ([4], 58- бет).
6. Агар $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ бўлса, у ҳолда $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \vdash B$ эканлигини исботланг ([4], 58- бет).

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Қисман тартиблаш назарияси. Гуруҳлар назарияси.
2. Натурал сонларнинг аксиоматик назарияси. Кесмалар тенглиги назарияси.
3. Назарияда исботлаш тушунчаси. Исботланувчи мулоҳаза. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги.
4. Дедукция теоремаси. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш.
5. Назария тилининг интерпретацияси. Берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари.
6. Формуланинг бажарилувчанлиги тушунчаси. Назариянинг модели.

7- §. Интерпретациянинг изоморфизмлиги. Назариянинг қатъийлиги

☑ *Изоморфизм. Назариянинг қатъийлиги. Бажарилувчи формула. Изоморф. μ- қатъий назария.*

1-таъриф. *Агар биринчи тартибли T назариянинг берилган I_1 интерпретациясини шу назариянинг I_2 интерпретациясига ўтказувчи (изоморфизм деб аталадиган) ўзаро бир қийматли акслантириш мавжуд бўлиб, шу билан бирга:*

1) агар A_j^n предикат ҳарфнинг I_1 ва I_2 интерпретациялари мос равишда $(A_j^n)^1$ ва $(A_j^n)^2$ лар бўлганда, M_1 соҳадаги $b_1, b_2, \dots, b_n$ ларнинг қандай бўлишидан қатъи назар, $(A_j^n)^2(g(b_1), g(b_2), \dots, g(b_n))$ бажарилувчи бўлганда ва фақат шундагина $(A_j^n)^1(b_1, b_2, \dots, b_n))$ бажарилса;

2) агар f_j^n функционал ҳарфнинг I_1 ва I_2 интерпретациялари мос равишда $(f_j^n)^1$ ва $(f_j^n)^2$ бўлганда M_1 соҳадаги ҳар қандай $b_1, b_2, \dots, b_n$ лар учун

$$(f_j^n)^1(b_1, b_2, \dots, b_n) = (f_j^n)^2(g(b_1), g(b_2), \dots, g(b_n))$$

бажарилса;

3) агар предмет константанинг I_1 ва I_2 интерпретациялари мос равишда a_j^1 ва a_j^2 бўлганда, $a_j^2 = g(a_j^1)$ бўлса, у ҳолда I_1 интерпретация I_2 интерпретацияга ***изоморф*** *дейилади.*

Равшанки, агар I_1 ва I_2 интерпретациялар изоморф бўлса, у ҳолда уларнинг соҳалари бир хил қувватга эга бўлади.

Теорема. *Агар g берилган I_1 ва I_2 интерпретацияларнинг изоморфизми бўлса, у ҳолда:*

(1) T назариянинг A формуласи ва M_1 соҳа элементлари кетма-кетлиги $S=(b_1, b_2, ..., b_n)$ нинг қандай бўлишларидан қатъи назар, A формула мос $g(S)=(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$ кетма-кетликда бажарилувчи бўлганда ва фақат шундагина S да бажарилувчи бўлади ва, демак,

(2) A формула M_2 соҳада чин бўлганда ва фақат шундагина M_1 соҳада чин бўлади.

Исбот. (2) хулоса (1) хулосадан келиб чиқади. (1) хулосани A формуладаги кванторлар ва мантиқий боғловчилар сонига қараб индукция методи билан исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

2-таъриф. *Агар математик назариянинг ҳамма моделлари изоморф бўлса, у ҳолда у* ***қатъий математик назария*** *деб аталади.*

3-таъриф. *μ — бирор тўпламнинг қуввати бўлсин. Агар биринчи тартибли T назария:*

(1) ҳеч бўлмаганда битта μ қувватли моделга эга бўлса ва;

(2) унинг μ қувватли ҳар қандай иккита модели изоморф бўлса, у ҳолда бундай биринчи тартибли T назария ***μ-қатъий назария*** *деб аталади.*

Масалан, гуруҳлар назарияси қатъий назария эмас, чунки изоморф бўлмаган гуруҳлар мавжуд. Аммо айрим қувватларда гуруҳлар назарияси қатъийдир, масалан, $\mu=3$ қувватда шундай бўлади.

Евклид геометрияси қатъий математик назарияга мисол бўла олади, чунки унинг исталган иккита модели изоморфдир. Ҳақиқатан ҳам, Евклид геометриясининг исталган модели арифметик модел билан изоморф эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин.

Евклид геометриясининг ихтиёрий моделида тўғри чизиқни оламиз ва унда O нуқтани белгилаймиз. Бундан кейин ўша чизиқда O нуқтадан фарқ қилувчи m нуқтани танлаб оламиз. Om кесмани бирлик сифатида қабул қиламиз. Тўғри чизиқда мусбат йўналишни танлаб олиш натижасида сонли ўқни ҳосил қиламиз.

Ўзаро перпендикуляр бўлган сонли тўғри чизиқлар *тўғри бурчакли декарт координата системаси* деб аталади. Бу система текисликдаги ҳар бир нуқтага шу нуқтанинг координаталарини ўзаро бир қийматли равишда мос қўяди. Худди шу каби, бу система текисликдаги ҳар бир тўғри чизиққа унинг тенгламасини мос қўяди. Евклид геометриясининг бошқа моделида ҳам текисликда худди шу тарзда иш кўрамиз.

Евклид геометриясининг ҳар хил моделлари ўртасида изоморфизмни ўрнатиш натижасида аналитик геометрияни яратиш мумкин.

8- §. Назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари

☑ *Зидсиз назария. Зиддиятга эга бўлган назария. Зидсизлик муаммоси. Абсолют тўлиқ назария. Тор маънода тўлиқ назария. Тўлиқлилик муаммоси. Ечилиш муаммоси.*

8.1. Зидсизлик муаммоси.

1-таъриф. *Агар T назарияда шундай S мулоҳаза топилиб, у ўзининг инкори $\overline{S}$ билан бирга теорема бўлса, у ҳолда T зиддиятга эга бўлган назария деб аталади. Акс ҳолда T зидсиз назария дейилади.*

Агар T назарияда S мулоҳаза топилиб, у ўзининг инкори $\overline{S}$ билан бирга теорема бўлмаса, шунда ва фақат шундагина у зидсиз назария бўлади.

T назарияда келтириб чиқариш қоидасининг бири сифатида хулоса қоидаси мавжуд бўлганидан, зиддиятга эга бўлган назариянинг исталган мулоҳазаси теорема бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, T назариянинг исталган A мулоҳазаси учун $S\to(\overline{S}\to A)$ ифода теорема бўлади, чунки бу мулоҳаза $S\to(\overline{S}\to A)$ тавтологиядир. Бу ерда S ва $\overline{S}$ нинг теорема эканлигини ҳисобга олиб ва икки марта хулоса қоидасидан фойдаланиб, A — теорема деган хулосага келамиз.

Аксиоматик назарияларда зидсизлик муаммосини кўп ҳолларда модель тушунчаси орқали ечиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар T назария зиддиятга эга бўлса, у ҳолда унинг модели ҳам зиддиятга эга бўлади, чунки назариянинг бир-бирига қарама-қарши бўлган жуфт теоремалари модель ҳолида бир-бирига қарама-қарши бўлган мулоҳазага айланади. Демак, назария зидсиз бўлиши учун унинг зиддиятдан холи бўлган модели мавжудлигини кўрсатиш керак. Мулоҳазалар ҳисобининг зидсизлигини худди шу схема орқали исбот қилган эдик.

Агар T назария учун шундай интерпретацияни топиш мумкин бўлсаки, унинг интерпретацияси чекли тўпламдан иборат бўлса, у ҳолда бу интерпретацияда зиддият мавжуд эмаслиги масаласини ечиш тўғридан-тўғри шу чекли тўпламни кўриш билан ҳал бўлади. Масалан, бир элементли тўплам битта ягона элементга эга бўлсин. Агар бу тўпламда $a\cdot a=a$ амали аниқланган бўлса, у ҳолда у зиддиятга эга бўлмаган гуруҳ назариясининг модели бўлади. Демак, гуруҳ назарияси зидсиздир.

Аммо, кўпинча, моделнинг зидсизлигини исботлаш анча мураккаб фикр юритишни талаб қилади. Бу, айниқса, T назария фақат чексиз моделларга эга бўлган ҳолларда юз беради. Масалан, агар Евклид геометриясининг тушунчалари Лобачевский геометриясининг интерпретацияси сифатида фойдаланилса, у ҳолда Лобачевский геометриясининг зидсизлиги масаласини Евклид геометриясининг зидсизлиги масаласига келтириш мумкин.

Шуни таъкидлаш кераккки, Евклид геометриясининг зидсизлиги ва ҳақиқий сонлар назариясининг зидсизлиги ҳозиргача исбот қилинган эмас.

8.2. Тўлиқлилик муаммоси. Агар бирор назариянинг зидсизлиги исбот этилган бўлса (ёки исбот этилиши мумкин деб ҳисобланса), у ҳолда бу назария учун тўлиқлилик муаммосини қўйиш маънога эга бўлади.

1-таъриф. *Агар T назариянинг исталган S мулоҳазаси учун ёки S, ёки унинг инкори $\overline{S}$ теорема бўлса, у ҳолда бу назария* ***абсолют тўлиқ*** *деб аталади.*

Бу таъриф ушбу ҳолни ҳисобга оляпти: T назариянинг исталган S мулоҳазасининг бирор моделдаги интерпретацияси ёки чин, ёки ёлғон бўлади. У ҳолда T назарияда ёки S, ёки $\overline{S}$ теорема бўлиши керак.

Бир вақтда зидсиз ва тўлиқ бўлган T назария зидсизликка нисбатан шу маънода максимал бўладики, бу назарияга аксиома сифатида шу назарияда мумкин бўлган исталган (аммо унинг теоремаси бўлмаган) мулоҳазани қўшганда, зиддиятга эга бўлган назария ҳосил бўлади.

Кўп математик назариялар бир вақтда зидсиз ва тўлиқлилик хусусиятига эга эмас.

2-таъриф. *Агар аксиомалари қаторига ҳамма келтириб чиқариш қоидаларини сақлаган ҳолда, исталган исботланмайдиган тасдиқни қўшганда, зиддиятга эга бўлган назария ҳосил бўладиган аксиоматик назария* ***тор маънода тўлиқ*** *деб аталади.*

Ҳар қандай абсолют тўлиқ назария тор маънода ҳам тўлиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бирор абсолют тўлиқ назария тор маънода тўлиқ бўлмасин. У вақтда бу назарияда исботланмайдиган шундай A тасдиқ топиладики, аввалги аксиомалар ва янги аксиома сифатидаги A тасдиқдан яратилган янги назария зидсиз, демак, A янги назарияга тегишли бўлади. Иккинчидан, дастлабки назариянинг абсолют тўлиқлигидан ва унда A исботланмайдиган тасдиқ бўлганидан $\overline{A}$ исботланадиган тасдиқ бўлади. Шундай қилиб, янги назарияда A ва $\overline{A}$ исботланувчи бўлди, яъни қарама-қаршиликка келдик. Демак, фаразимиз нотўғри ва ҳар қандай абсолют тўлиқ назария тор маънода ҳам тўлиқ бўлар экан.

8.3. Ечилиш муаммоси. Ечилиш муаммоси алгоритмик муаммо бўлиб, унда берилган A тўплам учун шундай U алгоритм тузиш керакки, бу алгоритм A ни бошқа B тўпламга нисбатан ($A \subset B$) ечувчи (ҳал этувчи) бўлсин, яъни бу U алгоритм B нинг ҳар бир элементига татбиқ этилади ҳамда $x \in A$ лар учун $U(x) = 1$, $x \in B \backslash A$ лар учун эса $U(x) = 0$ деб ҳисобланади.

Ечилиш муаммосига оддий мисол сифатида мулоҳазалар алгебрасидаги ечилиш муаммосини кўрсатиш мумкин, у шундай алгоритмни топишдан иборатки, бу алгоритм воситаси билан мулоҳазалар алгебрасидаги ҳар бир формуланинг ёки айнан чин, ёки айнан ёлғон, ёки бажарилувчи эканлигини аниқлаш мумкин. Алгоритмик муаммонинг муҳим синфи формал назариялар учун ечилиш муаммосидир, яъни ҳамма исботланувчи формулалар тўплами учун формулалар назариясидаги (A тўплам) назариянинг ҳамма формулалар тўпламига (B тўплам) нисбатан ечилиш муаммосидир. Биз уни мулоҳазалар ҳисобининг аксиоматик назарияси учун кўрган эдик.

9- §. Предикатлар ҳисобининг зидсизлиги (махсус аксиомаларсиз назария)

☑ *Биринчи тартибли предикатлар. Предикатлар ҳисоби. Предикатлар ҳисобининг зидсизлиги. Тавтология.*

Таъриф. *Махсус аксиомаларга эга бўлмаган биринчи тартибли назария* ***биринчи тартибли предикатлар ҳисоби*** *деб аталади.*

Теорема. *Ҳар қандай биринчи тартибли предикатлар ҳисоби T зидсиздир.*

Исбот. Ихтиёрий A формуладан қуйидагича ўзгартиришлар натижасида ҳосил қилинадиган ифодани $H(A)$ билан белгилаймиз. A формуладаги ҳамма квантор ва термлар қавслар ва вергуллари билан биргаликда ташлаб юборилади. Масалан, $\forall x A_1^2(x, y) \rightarrow A_1^1(z)$ формула юқорида кўрсатилган ўзгартиришлардан кейин $A_1^2 \to A_1^1$ кўринишни олади, яъни $H(\forall x A_1^2(x, y) \to A_1^1(z))$ ифода $A_1^2 \to A_1^1$ кўринишга, худди шу каби $H(\overline{\exists t A_2^3(x, y, t)} \to A_3^1(z))$ ифода $\overline{A_2^3} \to A_3^1$ кўринишга келади.

Равшанки, $H(\overline{A}) \equiv \overline{H(A)}$ ва $H(A \to B) \equiv H(A) \to H(B)$. Осонгина кўрсатиш мумкинки, предикатлар ҳисобининг A формуласи учун $H(A)$ формула мулоҳазалар ҳисобининг формуласидир ва қандайдир схема орқали 1–5- аксиомалардан (3- § га қаранг) ҳосил этилган ҳар қандай A аксиома учун $H(A)$ тавтология бўлади. Бу 1–3- аксиомалар шундайгина кўзга ташланиб турибди. $\forall x A(x) \to A(t)$ аксиома учун $H(\forall x A(x) \to A(t))$ формула $A \to A$ кўринишда бўлади, яъни тавтологиядир. $\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ аксиома учун $H(\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))))$ формула $(A \to B) \to (A \to B)$ муносабатга айланади, яъни бу ҳам тавтологиядир.

Агар мулоҳазалар ҳисобидаги хулоса қоидасини A, $A \to B$ тавтологияларга қўлласак, у ҳолда B тавтологияга келамиз. Шундай қилиб, агар $H(A)$ ва $H(A \to B)$ тавтологиялар бўлса, у ҳолда $H(B)$ ҳам тавтология бўлади.

H операциясини A ва $\forall x A$ формулаларга қўллаш натижасида олинган натижалар бир хил бўлганлиги учун, агар $H(A)$ тавтология бўлса, у ҳолда $H(\forall x A)$ ҳам тавтология бўлади.

Демак, агар предикатлар ҳисобида A теорема бўлса, у ҳолда $H(A)$ тавтология бўлади.

Айтилганлардан шу нарса келиб чиқадики, агар предикатлар ҳисобида B ва $\overline{B}$ исботланувчи бўладиган шундай B формула мавжуд бўлса эди, у ҳолда мулоҳазалар ҳисобида $H(B)$ ва $H(\overline{B})$ лар тавтология, яъни исботланувчи формулалар бўлар эди. Аммо бу мумкин эмас. Демак, предикатлар ҳисоби зидсиздир.

Изоҳ. *H операцияси предикатлар ҳисобининг бир элементли соҳага интерпретацияси билан тенг кучлидир. Предикатлар ҳисобининг ҳамма теоремалари бу интерпретацияда тўғридир (чиндир).*

10-§. Натурал сонлар назарияси. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси

☑ *Пеано аксиомалар системаси. Натурал сонлар назариясининг махсус аксиомалари. Аксиомалар системасидан келиб чиқадиган натижалар. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги биринчи ва иккинчи теоремалари.*

10.1. Натурал сонлар назарияси. Натурал сонлар назариясининг аксиоматик характеристикасини (тавсифномасини) 1888 йилда Дедекинд томонидан берилганига қарамасдан, натурал сонлар арифметикасининг аксиоматик тузилишини кўпинча «Пеано аксиомалар системаси» деб айтадилар.

Аксиоматик натурал сонлар назарияси *тили* алфавитининг ҳарфи қуйидаги *формал символлардан* иборат: константа 0, сонли ўзгарувчилар, тенглик символи =, +, $\cdot$, $'$ (1 ни қўшиш) функционал символлар ва $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$, $\forall$, $\exists$ мантиқий боғловчилардан иборат.

1-таъриф. *Формал символларнинг чекли кетма-кетлиги **формал ифодалар** деб аталади.*

Масалан, $)x0 = , = +)xy$ ва $xyz) = , (x)' + y$ формал ифодалар бўлади.

Формал ифодалар иккита синфга бўлинади: *термлар синфи* ва *формулалар синфи*.

Константа 0 ва сонли ўзгарувчилардан функционал символлар орқали термлар тузилади.

2-таъриф. *1) 0 — терм бўлади; 2) $x, y, z, \ldots$ сонли ўзгарувчилар терм бўлади; 3—5) агар r ва s — терм бўлса, у ҳолда (r'), $(r) + (s)$ ва $(r) \cdot (s)$ терм бўлади; 6) 1—5-бандларда аниқланган термлардан бошқа ҳеч қандай терм мавжуд эмас.*

Бу назарияда элементар формулалар термлар ва уларнинг тенгликларидан иборат бўлади. Бошқа формулалар элементар формулалардан $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $-$, $\forall$, $\exists$ мантиқий боғловчилар орқали ҳосил қилинади.

3-таъриф. 1) *Агар r ва s термлар бўлса, у ҳолда $(r) = (s)$ формула бўлади; 2—5) Агар A ва B формулалар бўлса, у ҳолда $A \to B$, $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$ ҳам формулалар бўлади; 6—7) Агар A — формула ва x — ўзгарувчи бўлса, у ҳолда $\forall x(A)$ ва $\exists x(A)$ формулалар бўлади; 8) 1—7-бандларда аниқланган формулалардан бошқа ҳеч қандай формула мавжуд эмас.*

Формулалар аксиоматик натурал сонлар назариясида *арифметик формулалар* деб аталади.

Изоҳ. 2-таърифдаги «r», «s» формал символлар эмас. Улар метатилда фойдаланиладиган математик ўзгарувчилардир. Шунинг учун «$(r) + (s)$» формал ифода эмас. Агар «r» ва «s» ўрнига термлар қўйилса, у ҳолда у формал ифода бўлади.

Худди шу каби, 3-таърифдаги «A» ва «B» ҳамда «x» математик ўзгарувчилардир. Уларнинг ўрнига мос равишда маълум қийматлари қўйилгандагина, таърифдаги ифодалар формулаларга айланади.

Пеано аксиомалар системаси қуйидагилардан иборат:

1) 0 — натурал сон;

2) ҳар қандай x натурал сон учун бошқа x' натурал сон мавжуд ва уни x кетидан келадиган деб айтилади;

3) $0 \neq x'$ — ҳар қандай x натурал сон учун;

4) агар $x' = y'$ бўлса, у ҳолда $x = y$;

5) агар Q хосса бўлиб, айрим натурал сонлар бу хоссага эга бўлиши ва бошқа натурал сонлар бу хоссага эга бўлмаслиги мумкин бўлса ва агар:

(1) 0 натурал сон бу хоссага эга ва;

(2) ҳар қандай x натурал сон учун, агар x натурал сон Q хоссага эга бўлишидан x' натурал сон ҳам Q хоссага эга бўлиши келиб чиқса, у ҳолда ҳамма натурал сонлар Q хоссага эга бўлиши келиб чиқади (индукция қонуни (принципи)).

Бу аксиомалар тўпламлар назариясининг айрим фрагментлари билан биргаликда, Э.Ландау кўрсатганидек, нафақат натурал сонлар, балки ҳақиқий, рационал ва комплекс сонлар назарияларини яратишга етарлидир.

Аммо бу аксиомаларда интуитив тушунчалар мавжуд, масалан, хосса тушунчаси. Бу нарса бутун системани қатъий формаллаштиришга тўсқинлик қилади. Шунинг учун Пеано аксиомалари системасига асосланган янги биринчи тартибли T назария яратамиз. T назария элементар арифметиканинг ҳамма асосий натижаларини келтириб чиқаришга етарлидир.

Бу биринчи тартибли T назария битта A_1^2 предикат ҳарф, ягона a_1 предмет константа ва учта f_1^1, f_1^2, f_1^3 функционал ҳарфга эгадир. Формал эмас арифметика билан алоқани узмаслик учун унинг белгиларидан фойдаланиб, A_1^2, a_1 ва f_1^j $(j = \overline{1, 3})$ ларни қуйидагича ёзамиз:

a_1 ўрнига 0,

$A_1^2(t, s)$ ўрнига $t = s$,

$f_1^1(t)$ ўрнига t,

$f_1^2(t, s)$ ўрнига $t + s$,

$f_1^2(t, s)$ ўрнига $t \cdot s$,

бу ерда t ва s — термлар.

T натурал сонлар назарияси қуйидаги махсус аксиомаларга эга:

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$.
2. $x_1 = x_2 \to x_1' = x_2'$.
3. $0 \neq (x_1)'$.
4. $x_1' = x_2' \to x_1 = x_2$.
5. $x_1 + 0 = x_1$.
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$.
7. $x_1 \cdot 0 = 0$.
8. $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$.
9. $A(0) \to (\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x))$.

бу ерда $A(x)$ — натурал сонлар назариясининг ихтиёрий формуласи.

1—8- аксиомалар аниқ формулалардир, аммо 9- аксиома чексиз аксиомалар тўпламини туғдирадиган аксиомалар схемасидан иборат.

Бу аксиомалар схемаси *математик индукция принципи* деб аталади ва у Пеано аксиомалар системасидаги 5- аксиомага умуман мос келмайди, чунки 9- аксиомалар схемаси фақат T назария формулалари орқали аниқланадиган саноқли хоссалар тўплами билан иш кўради.

Назариянинг 3 ва 4- аксиомалари Пеано аксиомалар системасининг 3 ва 4- аксиомаларига мос келади.

Пеано аксиомалар системасидаги 1 ва 2- аксиомалар 0 нинг ва «кетидан келадиган» амалнинг мавжудлигини таъминлайди, T назарияда бўлса, буларга 0 предмет константа ва f_1^1 функционал ҳарф мос келади. T назариядаги 1 ва 2- аксиомалар тенгликнинг айрим зарурий хоссаларини таъминлайди. Дедекинд ва Пеано бу хоссаларни интуитив аниқ деб фараз қилган эдилар. Назариядаги 5—8- аксиомалар рекурсив тенгликларни ифодалайди. Бу аксиомалар қўшиш ва кўпайтириш амалларини аниқлайди.

Дедекинд ва Пеано бу аксиомаларга мос келадиган ҳеч қандай постулатлар формулировкасини бермаган эдилар, чунки улар интуитив тўпламлар назариясидан фойдаланган эдилар. Тўпламлар назариясида T назариясидаги 5—8- аксиомаларни қаноатлантирувчи $+$, $\cdot$ амаллари чиқарилувчидир.

9- аксиомалар схемасидан қуйидаги индукция қоидасини ҳосил қиламиз: *агар* $A(0)$ *ва* $\forall x(A(x) \to A(x'))$ *бўлса, у ҳолда* $\forall x A(x)$.

T назариянинг аксиомалар системасидан қуйидаги натижалар келиб чиқади. Бу натижалардан формулаларни соддалаштириш ва умуман теоремаларни оддийроқ исботлаш учун фойдаланилади.

1-лемма. *T назариянинг ҳар қандай t, s ва r термлари учун қуйидаги формулалар T да теорема бўлади:*

1′. $t = r \to (t = s \to r = s)$. 2′. $t = r \to t' = r'$.

3′. $0 \neq t'$. 4′. $t' = r' \to t = r$.

5'. $t+0=t$. 6'. $t+r'=(t+r)'$.

7'. $t\cdot 0=0$. 8'. $t\cdot r'=(t\cdot r)+t$.

2-лемма. *Ҳар қандай t, s ва r термлар учун қуйидаги формулалар T назарияда теорема бўлади:*

a) $t=t$;

b) $t=r\to r=t$;

c) $t=r\to(r=s\to t=s)$;

d) $r=t\to(s=t\to r=s)$;

e) $t=r\to t+s=r+s$;

f) $t=0+t$;

g) $t'+r=(t+r)'$;

h) $t+r=r+t$;

i) $t=r\to s+t=s+r$;

j) $(t+r)+s=t+(r+s)$;

k) $t=r\to t\cdot s=r\cdot s$;

l) $0\cdot t=0$;

m) $t'\cdot r=t\cdot r+r$;

n) $t\cdot r=r\cdot t$;

o) $t=r\to s\cdot t=s\cdot r$.

10.2. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси сифатида Гёделнинг қуйидаги иккита теоремасининг умумий номини тушунадилар.

Гёделнинг биринчи теоремаси (тўлиқсизлик ҳақида). *Минимум арифметикани қамраб олган ҳар қандай қарама-қаршиликка эга бўлмаган формал системада ва, демак, натурал сонлар назариясида формал ечилмовчи фикр топилади, яъни шундай ёпиқ A формула топиладики, на A, на* $\overline{A}$ *ни системада келтириб чиқариш мумкин эмас.*

Гёделнинг иккинчи теоремаси (тўлиқсизлик ҳақида) тасдиқлайдики, *табиий қўшимча шартлар бажарилганда A ўрнида кўрилаётган системанинг қарама-қаршиликка эга эмаслиги ҳақидаги тасдиқни олиш мумкин.*

Гёделнинг биринчи теоремаси қуйидагини билдиради: *арифметикада қандай аксиомалар тизими танлашимиздан қатъи назар, формал назария тилида ифодаланган натурал сонлар ҳақида шундай мулоҳаза топиладики, уни берилган назарияда на исбот қилиб бўлади ва на рад этиб бўлади.*

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Агар I_1 ва I_2 интерпретациялар изоморф бўлса, у ҳолда уларнинг соҳалари бир хил қувватга эга бўлишини исботланг.
2. Евклид геометриясининг қатъий математик назарияга мисол бўла олишини кўрсатинг.
3. Ҳар қандай абсолют тўлиқ назария тор маънода ҳам тўлиқ бўлишини исботланг.
4. Предикатлар ҳисобининг A формуласи учун $H(A)$ формула мулоҳазалар ҳисобининг формуласи бўлишини кўрсатинг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Интерпретациянинг изоморфизмлиги. Назариянинг қатъийлиги.
2. Бажарилувчи формула. μ- қатъий назария.
3. Зидсиз ва зиддиятга эга бўлган назариялар. Зидсизлик муаммоси.
4. Абсолют тўлиқ назария. Тор маънода тўлиқ назария. Тўлиқлилик муаммоси.
5. Назариянинг ечилиш муаммоси.
6. Биринчи тартибли предикатлар ҳисоби ва унинг зидсизлиги.
7. Пеано аксиомалар системаси. Натурал сонлар назариясининг махсус аксиомалари.
8. Аксиомалар системасидан келиб чиқадиган натижалар. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги биринчи ва иккинчи теоремалари.

VI БОБ

АЛГОРИТМЛАР

Бу бобда алгоритмлар назариясининг элементлари атрофлича баён этилган. Бу ерда алгоритм тушунчаси ва унинг характерли хусусиятлари, ечилувчи ва саналувчи тўпламлар, Пост теоремаси, алгоритм тушунчасини аниқлаш, ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив ва умумрекурсив функциялар, А.Чёрч ва С.Клини тезислари, Тьюринг машиналари, Тьюринг машинасида алгоритмни реализация қилиш, натурал сонларни қўшиш алгоритми, Евклид алгоритми, алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси, Марковнинг нормал алгоритмлари, Марков бўйича қисман ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив (умумрекурсив) функция билан Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи (ҳисобланувчи) функция орасидаги муносабат, нормаллаштириш принципи, алгоритмик ечилмовчи муаммолар, математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси, ўз-ўзига татбиқ этувчанликни таниш муаммоси каби масалалар кўрилган.

1- §. Алгоритм тушунчаси ва унинг характерли хусусиятлари

☑ *Алгоритм тушунчаси. Ечувчи процедура. Ечилиш муаммоси. Алгоритмнинг интиутив таърифи. Алгоритмнинг характерли хусусиятлари. Алгоритмнинг дискретлиги. Алгоритмнинг аниқланувчанлиги. Алгоритм қадамларининг элементарлиги. Алгоритмнинг оммавийлиги. Алгоритмнинг натижавийлиги.*

Математиканинг асосий тушунчаларидан бири алгоритм (алгорифм) тушунчасидир. «Алгоритм» сўзи IX асрда ижод этган буюк математик ватандошимиз Абу Абдулло Муҳаммад ибн Мусо ал-Хоразмий номининг лотинча Algorithmi тарзида ёзилишидан келиб чиққан.

Ҳар бири «ҳа» ёки «йўқ» деган жавоб талаб этувчи айрим саноқли-чексиз математик ёки мантиқий масалалар синфини кўрайлик. Чекли сон қадамда ушбу синфдаги ҳар қандай саволга биз жавоб бера оладиган жараёнлик (процедура) мавжудми? Агар шундай процедура мавжуд бўлса, у ҳолда у берилган саволлар синфи учун *ечувчи процедура* ёки *ечувчи алгоритм (алгорифм)* деб айтилади. Ечувчи процедурани излаш муаммоси бу синф учун *ечилиш муаммоси* деб аталади.

Формал системалар учун ечилиш муаммосини кун тартибига биринчи қўйган олимлардан Шрёдер (1895), Лёвенгейм (1915) ва Гильбертни (1918) кўрсатиш мумкин.

Масалан, қуйидагилар ечувчи алгоритмларга мисол бўла олади:

1. Сонлар устида арифметик амалларни бажариш қоидалари.
2. Квадрат илдиз чиқариш қоидаси.
3. Энг катта умумий бўлувчини топиш қоидаси (Евклид алгоритми).
4. Квадрат тенгламанинг ечимини топиш қоидаси.
5. n- тартибли кўпҳаднинг ҳосиласини топиш қоидаси.
6. Рационал функцияни интеграллаш қоидаси.

Юқорида келтирилган ҳар бир мисолда бир хил типли (турдаги) масалалар синфи билан иш кўришга тўғри келади. Бир хил турдаги масалалар синфи *оммавий муаммо* деб аталади. Бундай синфларнинг масалалари бир-биридан фақат ифодасидаги параметрлар билан фарқ қилади. Масалан, $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенгламанинг ечимини топиш масаласида a, b ва c параметрлар қатнашади. Уларнинг қийматларини ўзгартириш йўли билан бир синфга мансуб турли хил масалаларга келамиз. Айтилганларни ҳисобга олиб алгоритмнинг қуйидаги интуитив таърифини бериш мумкин.

1-таъриф. *Берилган оммавий муаммодаги барча масалаларни умумий бир хил шаклда, аниқ маълум бўлган усул билан ечиш жараёни **алгоритм** деб аталади.*

Бундай таърифни қатъий деб ҳисоблаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, унда аниқ мазмуни номаълум сўзлар учрайди. Хусусан, бу «усул» сўзига ҳам тааллуқли. Шунинг учун ҳам алгоритмнинг бу қатъий бўлмаган таърифи *интуитив таъриф* деб аталади.

Энди алгоритмнинг характерли хусусиятларини кўриб ўтайлик.

1. **Алгоритмнинг дискретлиги.** Алгоритм — миқдорларни шундай кетма-кет қуриш жараёники, бошланғич ҳолатда миқдорларнинг дастлабки чекли системаси берилган бўлиб, ҳар бир навбатдаги моментда миқдорлар системаси маълум аниқланган қонун (дастур) асосида олдинги ҳолатдаги миқдорлар системасидан ҳосил қилинади.

2. **Алгоритмнинг детерминацияланувчанлиги (аниқланувчанлиги).** Бошланғич ҳолатдан фарқ қилувчи бошқа ҳолатда аниқланган миқдорлар системаси илгариги ҳолатларда ҳосил қилинган миқдорлар системаси орқали бир қийматли аниқланади.

3. **Алгоритм қадамларининг элементарлиги.** Илгариги миқдорлар системасидан кейингисини ҳосил қилиш қонуни содда қадамлардан иборат бўлиши керак.

4. **Алгоритмнинг оммавийлиги.** Бошланғич миқдорлар системасини айрим потенциал чексиз тўпламдан танлаш мумкин.

5. **Алгоритмнинг натижавийлиги.** Миқдорларни топиш жараёни чекли бўлиши ва натижа (масаланинг ечимини) бериши керак.

Математик амаллар асосий ролни ўйнайдиган алгоритмлар *сонли алгоритмлар* деб аталади. Бундан ташқари, *мантиқий алгоритмлар* ҳам мавжуд. Мисол сифатида, мантиқий алгоритм ишлатиладиган қуйидаги ўйинни кўрамиз.

Мисол. 15 та предмет бор. Ўйинда 2 киши қатнашади: бошловчи ва унинг рақиби. Ҳар бир ўйинчи навбат билан бир, икки ёки учта предметни олади. Ким охирги предметни олса, ўша ютган ҳисобланади. Бошловчи ютиш учун ўйинда қандай стратегияни ишлатиши керак?

Ечим. Бошловчининг ютуқ стратегиясини қуйидаги жадвал шаклида ифодалаш мумкин:

Юриш рақами	Бошловчи юриши	Рақибнинг юриши
1	3	n
2	$4-n$	m
3	$4-m$	p
4	$4-p$	o

Ҳақиқатан ҳам, бошловчи бундай стратегия натижасида $3+(4-n)+(4-m)+(4-p)=15-(n+m+p)$ предмет олади ва рақиб $n+m+p$ предмет олади, яъни иккаласи биргаликда 15 та предмет оладилар. Охирги предметни бошловчи олганлиги туфайли, у ўйинни ютади.

2- §. Ечилувчи ва саналувчи тўпламлар

☑ *Ечилувчи тўплам. Эффектив саналувчи тўплам. Пост теоремаси. Ечилувчи тўплам билан эффектив саналувчи тўпламлар орасидаги муносабатлар.*

Бирор алфавит берилган бўлсин. Бу алфавитдаги ҳамма сўзлар тўпламини S билан ва S тўпламнинг қисм тўпламини M билан белгилаймиз.

1-таъриф. *Агар x сўзнинг M тўпламга қарашлилик муаммосини ҳал қила оладиган алгоритм мавжуд бўлса, у ҳолда M* ***ечилувчи тўплам*** *деб аталади.*

2-таъриф. *Агар M тўпламнинг ҳамма элементларини санаб чиқа оладиган алгоритм мавжуд бўлса, у ҳолда M* ***эффектив саналувчи тўплам*** *деб аталади.*

1-теорема. *Агар M ва L эффектив саналувчи тўпламлар бўлса, у ҳолда $M \cup L$ ва $M \cap L$ ҳам эффектив саналувчи тўпламлардир.*

Исбот. M ва L эффектив саналувчи тўпламлар бўлсин. У ҳолда, 2-таърифга асосан, уларнинг ҳар бири учун алоҳида алгоритм мавжудки, бу алгоритмлар орқали мос равишда M ва L даги ҳамма элементларни санаб чиқиш мумкин. $M \cup L$ ва $M \cap L$ тўпламларнинг эффектив ҳисобловчи алгоритми M ва L тўпламларнинг эффектив ҳисобловчи алгоритмларини бир вақтда қўллаш натижасида ҳосил қилинади.

2-теорема (Пост теоремаси). *M тўпламнинг ўзи ва тўлдирувчиси CM эффектив саналувчи бўлганда ва фақат шундагина M тўплам ечилувчидир.*

Исбот. а) **M тўплам ва унинг CM тўлдирувчиси эффектив саналувчи бўлсин.** У ҳолда, 2-таърифга асосан, бу тўпламларнинг элементларини санаб чиқа оладиган A ва B алгоритмлар мавжуд бўлади. У ҳолда M ва CM тўпламларнинг элементларини санаб чиқиш пайтида уларнинг рўйхатида x элемент учрайди. Демак, шундай C алгоритм юзага келадики, у орқали x элемент M тўпламга қарашлими ёки қарашли эмасми деган муаммони ҳал қилиш мумкин. Шундай қилиб, M ечилувчи тўплам бўлади;

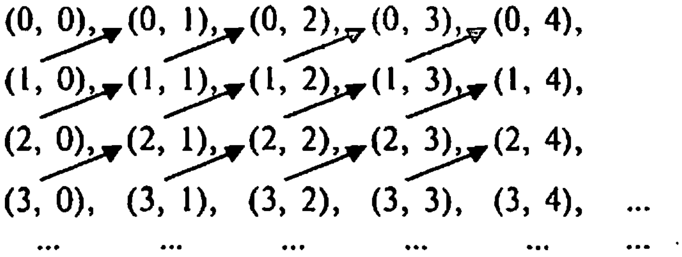
б) **M ечилувчи тўплам бўлсин.** У ҳолда, 1-таърифга асосан, x бу тўпламнинг элементими ёки элементи эмасми деган муаммони ҳал қилувчи алгоритм мавжуд бўлади. Бу алгоритмдан фойдаланиб, M ва CM тўпламларга кирувчи элементларнинг рўйхатини тузамиз. Шундай қилиб, M ва CM тўпламлар элементларини санаб чиқувчи иккита A ва B алгоритмни ҳосил қиламиз. Демак, M ва CM тўпламлар эффектив саналувчи тўпламлар бўлади.

1-мисол. $M = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ натурал сонлар квадратлари тўплами эффектив саналувчи тўплам бўладими ёки йўқми?

Ечим. $M = \{n^2\}$ тўплам эффектив саналувчи тўплам бўлади, чунки унинг элементларини ҳосил қилиш учун кетма-кет натурал сонларни олиб, уларни квадратга кўтариш керак. Бу тўплам ечилувчи ҳам бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бирорта x натурал соннинг M тўпламга кириш ёки кирмаслигини аниқлаш учун уни туб кўпайтувчиларга ажратиш керак. Бу усул унинг натурал соннинг квадратими ёки йўқми деган муаммони ҳал қилиб беради.

2-мисол. Тартибланган натурал сонлар жуфтликларидан иборат тўплам эффектив саналувчи эканлигини исботланг.

Ечим. Тартибланган натурал сонлар жуфтликларидан иборат тўпламнинг эффектив саналувчи эканлигини исботлаш учун диагонал методи деб аталадиган методдан фойдаланамиз. Бунинг учун ҳамма тартибланган натурал сонлар жуфтликларини қуйидаги кўринишда ёзамиз:



(0, 0),	(0, 1),	(0, 2),	(0, 3),	(0, 4),	
(1, 0),	(1, 1),	(1, 2),	(1, 3),	(1, 4),	
(2, 0),	(2, 1),	(2, 2),	(2, 3),	(2, 4),	
(3, 0),	(3, 1),	(3, 2),	(3, 3),	(3, 4),	...
...	...	...	...	...	...

Юқори чап бурчакдан бошлаб кетма-кет диагоналлар бўйича ўтиб тўплам элементларини санаб чиқамиз. Бу жуфтликларнинг рўйхати қуйидагича бўлади:

(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), ...

3-теорема. *Ечилувчи бўлмаган эффектив саналувчи натурал сонлар тўплами мавжуд.*

Исбот. Эффектив саналувчи ихтиёрий U натурал сонлар тўплами берилган бўлсин. U тўпламнинг ечилувчи эмаслигини исботлаш учун, Пост теоремасига (2- теорема) кўра, унинг CU тўлдирувчиси эффектив саналувчи эмаслигини исботлаш етарли.

M_0, M_1, M_2, ... — ҳамма саналувчи натурал сонлар тўпламларидаги эффектив санаб чиқилган тўпламлар бўлсин. Демак, ҳар қандай $n \in N$ учун M_n тўпламни тиклаш мумкин.

Энди U тўпламнинг ҳамма элементларини санаб чиқадиган A алгоритмни киритайлик. Бу алгоритм (m, n) рақамли қадамда $m \in M_n$ ни ҳисоблаб чиқади. Агар бу сон n сон билан устма-уст тушса, бу ҳолда A алгоритм уни U тўпламига киритади, яъни $n \in U \leftrightarrow n \in M_n$.

Бундан кўриниб турибдики, ҳар қандай саналувчи тўпламдан CU тўплам ҳеч бўлмаганда битта элемент билан фарқ қилади, чунки CU шундай n элементлардан иборатки, $n \overline{\in} M_n$. Шунинг учун ҳам CU саналувчи тўплам эмас. Демак, Пост теоремасига асосан U ечилувчи тўплам бўлмайди.

Изоҳ. Исбот этилган теорема аслида Гёделнинг формал арифметиканинг тўлиқсизлиги ҳақидаги теоремасини ошкормас (ошкора эмас) равишда қамраб олган.

3- §. Алгоритм тушунчасига аниқлик киритиш

☑ *Диофант тенгламаси. Ферманинг «буюк теорема»си. Ю.Матиясевич ва Г.Чудновский натижалари. Уч асосий йўналиш. Эффектив ҳисобланувчи функция. λ- аниқланувчи функциялар. Умумрекурсив функция. А.Чёрч ва С.Клини натижалари. Чёрч тезиси. К.Гёдел натижалари. Тьюринг тезиси. Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар. Тьюринг машиналари. Э.Пост натижалари. Нормал алгоритмлар.*

Математика тарихида бир хил турдаги саволлар тўпламига «ҳа» ёки «йўқ» ва бир хил турдаги функциялар синфи «ҳисобланувчи» ёки «ҳисобланувчи эмас» деган жавоблар бериши мумкин бўлган алгоритмларни излаш узоқ давом этди. Айрим вақтларда бу изланишлар натижасиз тугади. Бу ҳолларда, табиийки, алгоритмнинг мавжудлигига шубҳа билан қаралади.

1-мисол. Мисол сифатида Ферманинг «буюк теорема»сининг ечиш муаммосини кўрсатиш мумкин. 1637 йиллар атрофида Ферма қуйидаги теореманинг исботини ўзида бор деб эълон қилди: *«$x^n + y^n = z^n$ тенглама $n > 2$ бўлганда мусбат бутун сон қийматли x, y, z, n ечимга эга эмас»*. Ҳозирги кунгача бу тасдиқ на исбот қилинган ва на рад этилган.

2-мисол. 1900 йилда Парижда ўтказилган иккинчи халқаро математиклар конгрессида немис математиги Давид Гильберт ечилиши муҳим бўлган 23 математик муаммо рўйхатини ўқиб берди. Шулар орасида қуйидаги Гильбертнинг 10-муаммоси бор эди: «Коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган ҳар қандай алгебраик тенгламанинг бутун сонли ечими мавжудми?», яъни бутун сонли коэффициентлардан иборат бўлган ҳар қандай алгебраик тенглама бутун сонли ечимга эгами деган муаммони ечадиган (ҳал қиладиган) алгоритм яратиш кераклигини Д.Гильберт кўрсатди.

Математикада бутун сонли коэффициентларга эга бўлган алгебраик тенглама *диофант тенгламаси* деб аталади. Масалан,

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0, \quad 10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$$

кўринишдаги тенгламалар диофант тенгламалари бўлади, улардан биринчиси уч ўзгарувчили ва иккинчиси бир ўзгарувчили тенгламадир. Умумий ҳолда тенглама исталган сондаги ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиши мумкин. Бундай тенгламалар бутун сонли ечимларга эга бўлиши ҳам, эга бўлмаслиги ҳам мумкин. Масалан, $x^2 + y^2 - 2xz = 0$ чексиз кўп бутун сонли ечимларга эга ва $10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$ тенглама бутун сонли ечимга эга эмас.

Бир ўзгарувчили диофант тенгламасининг ҳамма бутун сонли ечимларини топиш алгоритми анчадан бери мавжуд. Аниқланганки, агар

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

бутун сонли коэффициентлардан иборат тенгламанинг бутун илдизи бўлса, у ҳолда у a_n коэффициентнинг бўлувчиси бўлади. Бу тасдиққа асосланиб, қуйидаги алгоритмни тавсия этиш мумкин:

1) a_n соннинг ҳамма бўлувчиларини топиш: $d_1, d_2, \dots, d_n$;

2) a_n соннинг ҳар бир бўлувчиси учун $P_n(x)$ нинг қийматини аниқлаш: $P_n(d_i)$ $(i = \overline{1,n})$;

3) агар 1, 2, ..., n лардан бирорта i учун $P_n(d_i) = 0$ бўлса, у ҳолда d_i тенгламанинг ечими бўлади. Агар $i = 1, 2, ..., n$ ларнинг ҳаммасида $P_n(d_i) \neq 0$ бўлса, у ҳолда тенглама бутун сонли ечимга эга эмас.

Гильбертнинг 10- муаммоси билан дунёнинг кўп математиклари деярли 70 йил шуғулландилар. Фақатгина 1968 йилда Санкт-Петербурглик ёш математик Ю.В.Матиясевич ва сал кейинроқ рус математиги Г.В.Чудновский бу муаммони ҳал қилдилар: *қўйилган масаланинг ечимини бера оладиган алгоритм мавжуд эмас.*

Алгоритмнинг интуитив таърифи қатъий эмаслигига қарамасдан, у муайян масаланинг ечимини топадиган алгоритмнинг тўғрилигига шубҳа уйғотмайди.

Математикада шундай ечими топилмаган алгоритмик муаммолар мавжудки, улар ечимга эгами ёки эга эмасми эканлигини аниқлаш муаммоси пайдо бўлади. Бу муаммони ечишда алгоритмнинг интуитив таърифи ёрдам бера олмайди. Бу ҳолларда ёки алгоритмнинг мавжудлигини, ёки унинг мавжуд эмаслигини исботлаш керак бўлади.

Биринчи ҳолда масалани ечадиган жараённи тасвирлаш кифоя. Бу жараённинг ҳақиқатан ҳам алгоритм эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун алгоритмнинг интуитив тушунчаси етарли бўлади.

Иккинчи ҳолда алгоритмнинг мавжуд эмаслигини исботлаш керак. Бунинг учун алгоритмнинг нима эканлигини аниқ билиш талаб қилинади. XX асрнинг 30- йилларигача алгоритмнинг аниқ таърифи мавжуд эмас эди. Шунинг учун ҳам алгоритм тушунчасига аниқ таъриф бериш кейинги давр математикасининг асосий масаласи бўлиб қолди. Бу таърифни ишлаб чиқиш кўп қийинчиликларга дуч келди.

Биринчидан, бундай таъриф алгоритм интуитив таърифининг моҳиятини акс эттириши, *иккинчидан* эса, бундай таъриф формал аниқлик нуқтаи назаридан мукаммал бўлиши керак эди. Бу муаммонинг тадқиқотчилари томонидан алгоритмнинг бир нечта таърифи ишлаб чиқилди. Аммо вақт ўтиши билан бу таърифларнинг ўзаро тенг кучлилиги аниқланди. Ана шу таъриф ҳозирги замон алгоритм тушунчасидир.

Алгоритм тушунчасини аниқлаш бўйича ёндашувларни уч асосий йўналишга бўлиш мумкин.

Биринчи йўналиш — *эффектив ҳисобланувчи функция* тушунчасини аниқлаш билан боғлиқ. Бу йўналиш бўйича А. Чёрч, К. Гёдел, С. Клини тадқиқот ишларини олиб бордилар.

1935 йилда, 1932—1935 йиллар давомида А. Чёрч ва С. Клини томонидан ўрганилган ва «λ- аниқланувчи функциялар» деб аталган, тўғри аниқланган ҳисобланувчи назарий-сонли функциялар синфининг хоссалари: *«λ- аниқланувчи функциялар» синфи бизнинг интуитив тасаввуримиз бўйича ҳисобланувчи деб қараладиган ҳамма функцияларни қамраб олиши мумкин деган фикр туғдиради.* Бу кутилмаган натижа эди.

Ж. Эрбраннинг битта ғояси асосида 1934 йилда К. Гёдел томонидан аниқланган ва «умумрекурсив функциялар» деб аталган бошқа **ҳисобланувчи функциялар** синфи ҳам «λ- аниқланувчи функциялар» хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга эди.

1936 йилда А. Чёрч ва С. Клини томонларидан бу иккита синф бир хил синф эканлиги исботланди, яъни *ҳар қандай λ- аниқланувчи функция умумрекурсив функция бўлиши ва ҳар қандай умумрекурсив функция λ- аниқланувчи функция эканлиги тасдиқланди.*

1936 йилда Чёрч қуйидаги тезисни эълон қилди: *ҳар қандай интуитив эффектив (самарали) ҳисобланувчи функциялар умумрекурсив функциялардир.*

Бу теорема эмас, балки тезисдир: тезис таркибида интуитив аниқланган эффектив ҳисобланувчи функция тушунчаси аниқ математик атамаларда аниқланган умумрекурсив функция тушунчаси билан айнан тенглаштирилган. Шунинг учун ҳам бу тезисни исботлаш мумкин эмас. Аммо Чёрч ва бошқа олимлар томонидан бу тезисни қувватловчи кўп далиллар кўрсатилди.

Иккинчи йўналиш – алгоритм тушунчасини бевосита аниқлаш билан боғлиқ: 1936–1937 йилларда А.Тьюринг Чёрч ишларидан бехабар ҳолда янги функциялар синфини киритди. Бу функцияларни «Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар» деб атадилар. Бу синф ҳам юқорида айтилган хоссаларга эга эди ва буни *Тьюринг тезиси* деб айтамиз. 1937 йилда А.Тьюринг исботладики, *унинг ҳисобланувчи функциялари λ- аниқланувчи функцияларнинг ўзи ва, демак, умумрекурсив функцияларнинг худди ўзи экан.* Шунинг учун ҳам Чёрч билан Тьюринг тезислари эквивалентдир.

1936 йилда (Тьюринг ишларидан бехабар ҳолда) Э.Пост айнан Тьюринг эришган натижаларга мос келадиган натижаларни эълон қилди ва 1943 йилда, 1920–1922 йиллардаги нашр этилмаган ишларига суяниб, тўртинчи эквивалент тезисни нашр этади. Шундай қилиб, алгоритм тушунчасини бевосита аниқлашга ва сўнгра унинг ёрдамида ҳисобланувчи функция тушунчасини аниқлашга биринчи бўлиб бир-биридан бехабар ҳолда Э.Пост ва А.Тьюринг эришдилар.

Пост ва Тьюринг алгоритмик процесслар маълум бир тузилишга эга бўлган «машина» бажарадиган процесслар эканлигини кўрсатдилар. Улар ушбу «машина»лар ёрдамида барча ҳисобланувчи функциялар синфи билан барча қисмий рекурсив функциялар синфи бир хил эканлигини кўрсатдилар ва, демак, Чёрч тезисининг яна битта фундаментал тасдиғи юзага келди.

Учинчи йўналиш – рус математиги А.Марков томонидан ишлаб чиқилган нормал алгоритмлар тушунчаси билан боғлиқ.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $A = \{1, 9, 25, 121, \ldots\}$ туб сонлар квадратлари тўплами эффектив саналувчи тўплам бўладими ёки йўқми?
2. Гильбертнинг қуйидаги «Коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган ҳар қандай алгебраик тенгламанинг бутун сонли ечими мавжудми?» 10- муаммосининг ечиш алгоритми мавжудми ёки йўқми?

3. Ю.В. Матиясевич ва Г.В. Чудновский юқоридаги масалани қандай ҳал қилдилар? Уларнинг илмий натижалари қаерда нашр эттирилган?
4. Чёрч билан Тьюринг тезислари нега эквивалент?
5. А. Чёрч ва С. Клинининг қайси илмий ишларида ҳар қандай λ- аниқланувчи функция умумрекурсив функция бўлиши ва ҳар қандай умумрекурсив функция λ- аниқланувчи функция эканлигининг тасдиғи келтирилган?

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Алгоритм тушунчаси. Ечувчи процедура. Ечилиш муаммоси. Алгоритмнинг интуитив таърифи.
2. Алгоритмнинг характерли хусусиятлари. Алгоритмнинг дискретлиги, детерминацияланувчанлиги, қадамларининг элементарлиги ва натижавийлиги.
3. Ечилувчи ва саналувчи тўпламлар. Пост теоремаси. Ечилувчи тўплам билан эффектив саналувчи тўпламлар орасидаги муносабатлар.
4. Алгоритм тушунчасига аниқлик киритиш. Уч асосий йўналиш.
5. Эффектив ҳисобланувчи функция. λ- аниқланувчи функциялар. Умумрекурсив функция.
6. А. Чёрч ва С. Клинилар натижалари. Чёрч тезиси. К. Гёдел натижалари.
7. Тьюринг тезиси. Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар. Тьюринг машиналари.
8. Э.Пост натижалари. Нормал алгоритмлар.

4- §. Ҳисобланувчи функциялар. Қисмий рекурсив ва умумрекурсив функциялар

☑ *Арифметик функция. Ҳисобланувчи функция. Бошланғич функциялар. Функциялар суперпозицияси. Примитив рекурсия схемаси. Минималлаш операцияси (μ- оператор). Примитив рекурсив функция. Қисмий рекурсив (рекурсив) функция. Умумрекурсив функция. А. Чёрч тезиси.*

1-таъриф. *Агар бирор функциянинг аниқланиш соҳаси ҳам, қийматлар соҳаси ҳам натурал сонлар тўпламининг қисм тўпламлари бўлса, у ҳолда бундай функция* ***арифметик (сон-***

***ли) функция** деб аталади. Натурал сонлар тўпламида берилган ҳар қандай муносабатлар **арифметик муносабат** дейилади.*

Масалан, натурал сонлар тўпламида $f(x, y) = x \cdot y$ (кўпайтма) — икки аргументли арифметик функциядир, $x + y < z$ — уч аргументли арифметик муносабат. Арифметик функция ва арифметик муносабат тушунчалари интуитив тушунчалардир ва ҳеч қандай формал система билан боғланган эмас.

Арифметик (сонли) функциянинг қийматини ҳисобловчи алгоритм мавжудлигини аниқлаш алгоритмик муаммолардан биридир.

2-таъриф. *Агар $g = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг қийматини ҳисобловчи алгоритм мавжуд бўлса, у **эффектив (самарали) ҳисоблaнувчи функция** деб аталади.*

Бу таърифда алгоритм тушунчаси интуитив маънода тушунилганлиги сабабли, эффектив ҳисобланувчи функция тушунчаси ҳам интуитив тушунча бўлади.

Аммо алгоритм тушунчасидан эффектив ҳисобланувчи функция тушунчасига ўтишнинг ўзига хос ижобий томони бор. Масалан, алгоритм тушунчасига қўйилган ҳамма талаблар (характерли хусусиятлари сифатида) рекурсив (қайтариш) функциялар мажмуаси деб аталадиган ҳамма ҳисобланувчи функциялар мажмуаси учун бажарилади.

Гёдел биринчи бўлиб бирор формал системада аниқланган ҳамма сонли функциялар синфини рекурсив функциялар синфи сифатида ифодалади. 1936 йилда Чёрч ҳам бошқа асосларга таяниб рекурсив функциялар синфини тасвирлаган эди. Бу ерда *ҳисобланувчи функциялар синфи* қуйидаги равишда тузилади.

3-таъриф. *Қуйидаги сонли функциялар **бошланғич (оддий, базис) функциялар** дейилади:*

1) ноль функция (бекор қилиш оператори): $0(x) = 0$ ҳар бир x учун;

2) бирни қўшиш (силжиш оператори): $\lambda(x) = x + 1$ ҳар бир x учун;

3) проекциялаш функцияси (проекциялаш оператори): $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ ҳамма $x_1, x_2, ..., x_n$ лар учун ($n = 1, 2, ...;$ $m = 1, 2, ..., n$).

Равшанки, учала бошланғич функция ҳамма жойда аниқланган ва интуитив ҳисобланувчи функциялардир.

Изоҳ. Аргументларининг барча қийматларида аниқланган функцияни *ҳамма жойда аниқланган функция* деб атаймиз.

Қуйидаги учта қоида воситаси билан мавжуд функциялардан янги функциялар ҳосил қилинади.

1 .Функциялар суперпозицияси. $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, ..., $f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияларни ва $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияни қарайлик.

4-таъриф. $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ *тенглик билан аниқланадиган* $\psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *функция* φ *ва* $f_1, f_2, ..., f_m$ *функцияларнинг* ***суперпозицияси*** *деб аталади.*

Агар биз бирор усул билан φ ва $f_1, f_2, ..., f_m$ функцияларнинг қийматини ҳисоблаш имкониятига эга бўлсак, у ҳолда ψ функцияни қуйидагича ҳисоблаш мумкин: $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларга мос равишда $a_1, a_2, ..., a_n$ қийматларни берамиз. Ҳамма $f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ ларни ҳисоблаб, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ ларни топамиз. Кейин $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ ни ҳисоблаб, $c = \psi(a_1, a_2, ..., a_n)$ ни топамиз.

Аниқки, агар φ ва $f_1, f_2, ..., f_m$ ҳамма жойда аниқланган бўлса, ψ функция ҳам ҳамма жойда аниқланган бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар $f_1, f_2, ..., f_m$ нинг ҳеч бўлмаганда бирортаси ҳамма жойда аниқланган бўлмаса, у ҳолда ψ функция ҳамма жойда аниқланган бўлмайди. Шу билан бирга, иккинчи томондан, аргументларнинг шундай $a_1, a_2, ..., a_n$ қийматлари топилиши мумкинки, $b_i = f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$ $(i = \overline{1, m})$ бўлса, $\varphi(b_1, b_2, ..., b_m)$ ни ҳисоблаб бўлмайди. Бу ҳолда ҳам ψ функция ҳамма жойда аниқланмаган бўлади.

Шундай қилиб, агар $\varphi, f_1, f_2, ..., f_m$ функциялар интуитив ҳисобланувчи бўлса, у ҳолда ψ функция ҳам интуитив ҳисобланувчи бўлади.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтамизки, $f_1, f_2, ..., f_m$ функцияларнинг барчаси ҳам $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументларнинг ҳаммасидан боғлиқ бўлмаслиги мумкин. Бу ҳолларда ψ функцияни ҳосил қилиш учун сохта аргументлардан ва $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциялардан фойдаланамиз. Масалан, $\psi(x, y, z) = \varphi(f_1(x), f_2(x, y, z), y, x)$ функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ва $F_1(x, y, z) = f_1(x)$, $F_2(x, y, z) = f_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z) = I_3^2(x, y, z)$, $F_4(x, y, z) = = I_3^1(x, y, z)$ функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган.

2. Примитив (ўта содда) рекурсия схемаси. $\varphi(x_2, x_3, ..., x_n)$ ва $\psi(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ $(n > 1)$ функциялар берилган бўлсин. Қуйидаги тенгликларни қаноатлантирувчи янги f функцияни қурамиз:

$$f(0, x_2, x_3, ..., x_n) = \varphi(x_2, x_3, ..., x_n),$$
$$f(y+1, x_2, x_3, ..., x_n) = \psi(y, f(y, x_2, x_3, ..., x_n), x_2, ..., x_n), \quad (1)$$

бу ерда φ функция $n-1$ аргументга, ψ функция $n+1$ аргументга ва f функция n аргументга боғлиқ функция.

5-таъриф. *Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция φ ва ψ функциялардан (1) муносабат орқали ҳосил қилинса, у ҳолда f функция φ ва ψ функциялардан* ***примитив (ўта содда) рекурсия схемаси*** *орқали ҳосил қилинган дейилади.*

Агар φ ва ψ функциялар интуитив ҳисобланувчи функциялар бўлса, у ҳолда f ҳам интуитив ҳисобланувчи функция бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументларнинг қийматлар мажмуаси $a_1, a_2, ..., a_n$ бўлсин. У ҳолда кетма-кет қуйидагиларни топамиз:

$$f(0, a_2, a_3, ..., a_n) = \varphi(a_2, a_3, ..., a_n) = b_0,$$
$$f(1, a_2, a_3, ..., a_n) = \psi(0, b_0, a_2, a_3, ..., a_n) = b_1,$$
$$f_2(2, a_2, a_3, ..., a_n) = \psi(1, b_1, a_2, a_3, ..., a_n) = b_2 \text{ ва ҳоказо.}$$

Равшанки, агар φ ва ψ функциялар аргументларнинг барча қийматларида аниқланган бўлса, у ҳолда f функция ҳам аргументларнинг барча қийматларида аниқланган бўлади.

Энди мисолларда примитив рекурсия схемаси орқали янги функцияларни ҳосил этишни кўрайлик.

1-мисол. $\varphi(x) = x$ ва $\psi(x, y, z) = y + 1$ бўлсин ҳамда $f(y, x)$ функция қуйидаги тенгликлар орқали аниқлансин:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, x) = x, \\ &f(y+1, x) = f(y, x) + 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$f(y, x)$ функциянинг қийматини аргументларнинг $y = 5$, $x = 2$ қийматларида ҳисоблаб чиқайлик. $f(0, 2) = \varphi(2) = 2$ бўлганлиги учун (2) формулаларнинг иккинчисидан кетма-кет равишда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &f(1, 2) = \psi(0, 2, 2) = 2 + 1 = 3, \\ &f(2, 2) = \psi(1, 3, 2) = 3 + 1 = 4, \\ &f(3, 2) = \psi(2, 4, 2) = 4 + 1 = 5, \\ &f(4, 2) = \psi(3, 5, 2) = 5 + 1 = 6, \\ &f(5, 2) = \psi(4, 6, 2) = 6 + 1 = 7. \end{aligned}\right\}$$

$f(y, x) = y + x$ эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $f(y + z, x) = f(y, x) + z$. Бу тенгликда $y = 0$ деб қабул қилиб, $f(z, x) = f(0, x) + z$ ёки $f(z, x) = x + z$ ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. $f(y, x)$ функция қуйидаги тенгликлар билан берилган дейлик:

$$\left.\begin{aligned} &f(0, x) = 0, \\ &f(y+1, x) = f(y, x) + x. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Бу ерда $\varphi(x) = 0$, $\psi(x, y, z) = y + z$ бўлади.

$f(y, x)$ функциянинг қийматини аргументларнинг $y = 2$, $x = 2$ қийматлари учун ҳисоблаймиз. $f(0, x) = \varphi(x) = 0$ бўлганлиги учун $f(0, 2) = \varphi(2) = b_0 = 0$ бўлади. Функциянинг $f(1, 2)$ ва $f(2, 2)$ қийматларини кетма-кет топамиз:

$$\left.\begin{aligned} &f(1, 2) = \psi(0, 0, 2) = b_1 = 0 + 2 = 2, \\ &f(2, 2) = \psi(1, 2, 2) = 2 + 2 = 4. \end{aligned}\right\}$$

Бу мисолда $f(y, x) = x \cdot y$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $f(y + z, x) = f(y, x) + z \cdot x$. Бу тенгликда $y = 0$ деб қабул қилиб, $f(z, x) = f(0, x) + z \cdot x$ ёки $f(z, x) = z \cdot x$ ни ҳосил қиламиз.

3. Минималлаш операцияси (μ- оператор). Ихтиёрий $f(x, y)$ функция берилган бўлсин. Қуйидаги масалани кўриб чиқамиз: x аргументнинг ҳар қандай қийматлари учун y аргументнинг ҳеч бўлмаганда шундай битта қийматини топиш керакки, $f(x, y) = 0$ бўлсин. Масалани яна ҳам мураккаброқ ҳолда қўямиз: берилган $f(x, y)$ функция ва унинг муайян қийматли x аргументи учун $f(x, y) = 0$ қила оладиган y аргументларнинг энг кичик қийматлисини топиш керак бўлсин. Масаланинг ечими x га боғлиқ бўлганлиги учун $f(x, y) = 0$ қила оладиган y нинг энг кичик қиймати ҳам x нинг функцияси бўлади, яъни

$$\varphi(x) = \mu\, y\, [f(x, y) = 0] = 0\,. \tag{4}$$

(4) ифода қуйидагича ўқилади: «Шундай энг кичик y ки, $f(x, y) = 0$».

Худди шу тарзда кўп аргументли $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция аниқланади:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu\, y[f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0]\,. \tag{5}$$

6-таъриф. *$f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ функциядан $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияга ўтиш* ***μ- операторнинг татбиғи*** *деб аталади.*

$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни ҳисоблаш учун қуйидаги алгоритмни тавсия этиш мумкин:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ ни ҳисоблаймиз. Агар f нинг бу қиймати нолга тенг бўлса, у ҳолда $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ деб қабул қиламиз. Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда навбатдаги қадамга ўтамиз;

2) $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ ни ҳисоблаймиз. Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) = 0$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ бўлади. Агар $f(x_1, ..., x_n, 1) \neq 0$ бўлса, у ҳолда навбатдаги қадамга ўтамиз ва ҳоказо.

Агар y нинг ҳамма қийматлари учун $f(x_1, ..., x_n, y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ни *аниқланмаган функция* деб атаймиз.

Аммо y аргументнинг шундай y_0 қиймати мавжуд бўлиши мумкинки, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y_0) = 0$ ва, демак, энг кичик y мавжудки, $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0$ бўлади; шу вақтнинг ўзида, бирорта z учун $(0 < z < y_0)$ $f(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ қиймат аниқланмаслиги мумкин. Аниқки, бу ҳолда y нинг $f(x_1, ..., x_n, y) = 0$ бўладиган энг кичик қийматини топиш жараёни, y_0 гача етиб бормайди. Бу ерда ҳам $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ ни аниқланмаган функция деб ҳисоблайдилар.

3-мисол. $f(x, y) = x - y$ функция берилган бўлсин. Бу функция минимизация оператори орқали ҳосил қилиниши мумкин:

$$f(x, y) = \mu z(y + z = x) = \mu z[I_3^2(x, y, z) + I_3^3(x, y, z) = I_3^1(x, y, z)].$$

Масалан, $f(x, y)$ функциянинг қийматини аргументларнинг $y = 2$, $x = 7$ қийматларида $(f(7,2))$ ҳисоблаб чиқамиз. Бунинг учун $y = 2$ деб, x га кетма-кет қийматлар бериб борамиз:

$$\begin{array}{ll}
z = 0, & 2 + 0 = 2 \neq 7, \\
z = 1, & 2 + 1 = 3 \neq 7, \\
z = 2, & 2 + 2 = 4 \neq 7, \\
z = 3, & 2 + 3 = 5 \neq 7, \\
z = 4, & 2 + 4 = 6 \neq 7, \\
z = 5, & 2 + 5 = 7 = 7.
\end{array}$$

Шундай қилиб, $f(7,2) = 5$.

7-таъриф. *Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни бошланғич (оддий) функциялардан суперпозиция ва примитив рекурсия схемаси амалларини чекли сонда қўллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, ..., x_n)$* ***примитив рекурсив функция*** *деб аталади.*

Бошланғич $0(x) = 0$, $\lambda(x) = x + 1$, $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m$ $(1 \le m \le n)$ функциялар ва $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a$ $(a \in N)$, $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x \cdot y$, $f(x, y) = x^y$ $(x^0 = 1)$ функциялар примитив рекурсив функциялар бўлади.

8-таъриф. *Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни бошланғич функциялардан суперпозиция, примитив рекурсия схемаси ва минималлаш оператори (μ-оператори) амалларини чекли сонда қўллаш натижасида ҳосил қилиш мумкин бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, ..., x_n)$* ***қисмий рекурсив (рекурсив) функция*** *деб аталади.*

Бу кейинги таъриф примитив рекурсив функциянинг таърифидан фақат бошланғич функцияларга қўшимча равишда μ-операторини қўллашга рухсат берилгани билан фарқ қилади. Шунинг учун ҳам *ҳар қандай примитив рекурсив функция ўз навбатида қисмий рекурсив функция бўлади.*

9-таъриф. *Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция қисмий рекурсив ва аргументларнинг барча қийматларида аниқланган бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, ..., x_n)$* ***умумрекурсив функция*** *деб аталади.*

Қуйидаги функциялар умумрекурсив функциялар бўлади:

$$\lambda(x),\ 0(x),\ I_n^m(x),\ f(y, x) = y + x,$$
$$f(y, x) = x \cdot y,\ f(y, x) = x + n.$$

А.Чёрч тезиси. *Ҳар қандай интуитив ҳисобланувчи функция қисмий рекурсив функция бўлади.*

Бу тезисни исботлаш мумкин эмаслигини юқорида айтган эдик, чунки у интуитив ҳисобланувчи функция ноқатъий математик тушунчасини қатъий аниқланган қисмий рекурсив функция математик тушунчаси билан боғлайди.

Аммо, агар шундай интуитив ҳисобланувчи функция тузиш мумкин бўлсаки, у ўз навбатида қисмий рекурсив функция бўлмаса, у ҳолда бу тезисни рад этиш мумкин. Аммо бундай ҳолнинг мавжудлигини ҳозиргача ҳеч ким кўрсата олмаган.

Теорема. *$g(y_1, y_2, ..., y_k)$ примитив рекурсив (қисмий рекурсив) функция ва $x_1, x_2, ..., x_n$ ҳар хил ўзгарувчилар бўлсин. Агар ҳар бир i $(1 \leq i \leq k)$ учун z_i ўзгарувчи $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларнинг бири бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(z_1, z_2, ..., z_k)$ функция ҳам примитив рекурсив (қисмий рекурсив) функция бўлади.*

Исбот. $z_i = x_{j_i}$ $(1 \leq j_i \leq n)$ бўлсин. У ҳолда

$$z_i = I^n_{j_i}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ва

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(I^n_{j_i}(x_1, x_2, ..., x_n), ..., I^n_{j_k}(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Шундай қилиб, ψ функцияни φ, $I^n_{j_i}, ..., I^n_{j_k}$ функциялардан суперпозиция амали орқали ҳосил қилиш мумкин, яъни ψ примитив рекурсив (рекурсив) функция бўлади.

Бу теорема сохта ўзгарувчиларни киритиш, ўзгарувчиларнинг ўрнини алмаштириш ва уларни айнан тенглаштириш жараёни примитив рекурсив ва қисмий рекурсив функцияларни ўз синфларидан чиқармаслигини билдиради.

4-мисол. *(Сохта аргументларни киритиш.)* Агар $\varphi(x_1, x_3)$ примитив рекурсив функция ва $\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_3)$ бўлса, у ҳолда $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ҳам примитив рекурсив функция бўлади. Исбот қилиш учун $z_1 = x_1$ ва $z_2 = x_3$ деб белгилаб, теоремадан фойдаланиш керак.

5-мисол. *(Ўзгарувчиларнинг ўрнини алмаштириш.)* Агар $\varphi(x_1, x_2)$ примитив рекурсив функция ва $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$ бўлса, у ҳолда ψ ҳам примитив рекурсив функция бўлади. Исбот қилиш учун $z_1 = x_2$ ва $z_2 = x_1$ деб белгилаб, теоремадан фойдаланиш керак.

6-мисол. *(Ўзгарувчиларни айнан тенглаштириш.)* Агар $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ примитив рекурсив функция ва $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ бўлса, у ҳолда $\psi(x_1, x_2)$ ҳам примитив рекурсив функция бўлади. Исботлаш учун теоремада $n = 2$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1$ деб қабул қилиш керак.

Натижалар. 1. Ноль функция $0(x)$ — примитив рекурсив функция.

2. Агарда k — бирор бутун мусбат сон бўлса, ўзгармас $C_k^n(x_1, x_2, ..., x_n) = k$ функция примитив рекурсив функциядир.

3. Суперпозиция амалини ҳар бир f_i функция $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларнинг фақат айримларидангина боғлиқ бўлганда ҳам ишлатиш мумкин. Худди шундай примитив рекурсия схемасида ҳам φ функция $x_1, x_2, ..., x_n$ ўзгарувчиларнинг айримларига боғлиқ бўлмаслиги мумкин ва ψ функция $f(y, x_2, x_3, ..., x_n)$ функцияга ҳамда, шунингдек, $x_1, x_2, ..., x_n, y$ ўзгарувчиларнинг айримларига боғлиқ бўлмаслиги мумкин.

Шундай қилиб, ҳар бир примитив рекурсив функция қисмий рекурсив (рекурсив) функция бўлганлиги учун қисмий рекурсив функциялар синфи примитив рекурсив функциялар синфидан кенгдир.

Қисмий рекурсив функция тушунчаси алгоритмлар назариясининг асосий тушунчаларидан биридир. Шуни ҳам таъкидлаб ўтамизки, ҳар қандай қисмий рекурсив функциянинг қиймати механик характерга эга бўлган маълум бир процедура ёрдамида ҳисобланади ва бу процедура бизнинг алгоритм ҳақидаги интуитив тасаввуримизга тўғри келади.

Иккинчидан, ҳозиргача қандай муайян алгоритмлар яратилган бўлмасин, улар ёрдамида қийматлари ҳисобланувчи сонли (арифметик) функциялар албатта қисмий рекурсив функциялар бўлиб чиқди.

Шунинг учун ҳам ҳозирги пайтда қисмий рекурсив функция тушунчаси алгоритм тушунчасининг илмий эквиваленти сифатида қабул қилинган. Буни биринчи бўлиб, юқорида таъкидлаб ўтганимиздек, илмий тезис сифатида А. Чёрч ва С. Клини ўртага ташладилар.

Худди шу каби ҳар қандай алгоритмни мос Тьюринг машинаси ёрдамида реализация қилиш мумкин. Алгоритмнинг илмий эквиваленти қисмий рекурсив функция бўлганлиги учун ҳамма қисмий рекурсив функциялар синфи

A билан Тьюринг машиналари ёрдамида ҳисобланувчи функциялар (Тьюринг бўйича ҳисобланувчи функциялар) синфи B билан бир хилдир, яъни $A = B$.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларнинг примитив рекурсив ва умумрекурсив функциялар эканлигини исботланг:

1) $x + y$; 2) x^y; 3) $x \cdot y$;

4) $\sigma(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса;} \end{cases}$

5) $x - y = \begin{cases} x - y, & \text{агар } x \geq y \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x < y \text{ бўлса;} \end{cases}$

6) $|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{агар } x \geq y \text{ бўлса,} \\ y - z, & \text{агар } x < y \text{ бўлса;} \end{cases}$

7) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса;} \end{cases}$

8) $\overline{\operatorname{sgn}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса;} \end{cases}$

9) $x!$;

10) $\min(x, y) = x$ ва y сонларнинг энг кичиги;

11) $\min(x_1, x_2, ..., x_n)$;

12) $\max(x, y) = x$ ва y сонларнинг энг каттаси;

13) $\max(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Изоҳ. Агар исбот қилишда қийналсангиз, у ҳолда Э. Мендельсоннинг «Введение в математическую логику» китобидан фойдаланинг, 137—138- бетлар.

2. $0(x)$ ва $I_n^m(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциялардан суперпозиция ва примитив рекурсия схемаси амаллари орқали $x + 1$ ва $2x$ функцияларни ҳосил қилиш мумкин эмаслигини исботланг:

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Арифметик функция. Ҳисобланувчи функция. Бошланғич функциялар.
2. Функциялар суперпозицияси. Примитив рекурсия схемаси. Минималлаш операцияси (μ-оператори).
3. Примитив рекурсив функция. Қисмий рекурсив (рекурсив) функция.
4. Умумрекурсив функция. А.Чёрч тезиси.

5- §. Тьюринг машиналари

☑ *Оммавий муаммо. Ечиш алгоритми. Тьюринг машинаси. Ташқи алфавит. Ички алфавит. Лента (машинанинг ташқи хотираси). Бошқарувчи каллак. Бошланғич ахборот. Машина дастури. Тьюринг функционал схемаси.*

Агар бирор оммавий муаммони ечиш алгоритми маълум бўлса, у ҳолда уни реализация этиш учун шу алгоритмда аниқ ёритилган кўрсатмаларни ижро этиш зарур. Алгоритмни реализация этиш жараёнини автоматлаштириш ғояси, табиийки, инсон бажарадиган ишни машинага узатишни тақозо қилади. Бундай машинани XX асрнинг 30-йилларида америка математиги Э.Пост ва англия математиги А.Тьюринг тавсия этдилар.

Тьюринг машинаси тушунчаси бизга интуитив маълум бўлган ҳисоблаш процедурасини элементар операцияларга ажратиш натижасида ҳосил бўлади. Тьюринг таъкидлайдики, исталган мумкин бўлган ҳисоблашни ўтказиш учун унинг элементар операцияларини такрорлаш етарли.

Тьюринг айрим турдаги назарий ҳисоблаш машинасини изоҳлаб берди. Бу машина муайян механик қурилма эмас, балки «хаёлий» математик машинадир. Берилган кўрсатмани бажарувчи ҳисобловчи одамдан ёки мавжуд рақамли ҳисоблаш машинасидан Тьюринг машинаси икки жиҳати билан фарқ қилади.

Биринчидан, «Тьюринг машинаси» хато қила олмайди, яъни у оғишмай (четга чиқмасдан) кўрсатилган қоидани бажаради.

Иккинчидан, «Тьюринг машинаси» потенциал чексиз хотира билан таъминланган.

Энди Тьюринг машинаси тушунчаси билан батафсил танишамиз. Тьюринг машинасини қуйидагилар тўлиқ аниқлайди:

1. **Ташқи алфавит**, яъни $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ чекли символлар тўплами. A тўплам элементларининг чекли кетма-кетлиги A тўпламдаги *сўз* дейилади. Сўзни ташкил этувчи символлар сони шу *сўзнинг узунлиги* дейилади.

Масалан, A алфавитнинг ҳар бир элементи узунлиги 1 га тенг бўлган сўздир. Бу алфавитда сўз кўринишида машинага бериладиган ахборот (информация) кодлаштирилади. Машина сўз кўринишида берилган информацияни қайта ишлаб, янги сўз ҳосил қилади.

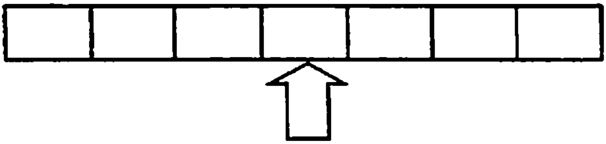
2. **Ички алфавит**, яъни $q_0, q_1, q_2, ..., q_m$, $П$, $Л$, $Н$ символлар. $q_0, q_1, q_2, ..., q_m$ — машинанинг чекли сон ҳолатларини ифодалайди. Исталган машинанинг ҳолатлари сони тайинланган бўлади. Икки ҳолатда махсус вазифа бажарилади: q_1 — машинанинг бошланғич (дастлабки) ҳолати, q_0 — натижавий (охирги) ҳолати (тўхташ ҳолати), $П$, $Л$, $Н$ — сурилиш символларидир (ўнгга, чапга ва жойида).

3. **Икки томонга чексиз давом эттириш мумкин бўлган лента (машинанинг ташқи хотираси)**. У катакчаларга (ячейкаларга) бўлинган бўлади. Ҳар бир катакчага фақат битта ҳарф ёзилиши мумкин. Бўш катакчани a_0 символи билан белгилаймиз (VI.1- шаклга қаранг).

a_0	a_2	a_3	a_3	a_7	a_9	a_{11}	a_{12}			

VI.1- шакл.

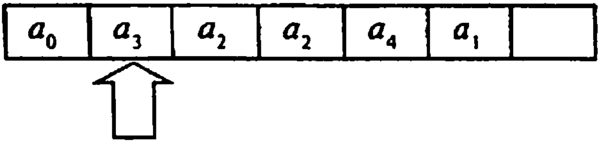
4. Бошқарувчи каллак (головка). У лента бўйлаб ҳаракат қилади ва бирор катакча (ячейка) қаршисида тўхташи мумкин (VI.2- шакл).



VI.2- шакл.

Бу ҳолатда «каллак катакчани», яъни символни «кўриб турибди» деб айтамиз. Машинанинг бир такт давомидаги ишида каллак фақат битта катакчага сурилиши (ўнгга, чапга) ёки жойида туриши мумкин.

Лентада сақланаётган ҳар бир информация ташқи алфавитнинг a_0 дан фарқли чекли символлар мажмуаси билан тасвирланади. Машина иш бошлашидан олдин лентага *бошланғич ахборот* (бошланғич маълумот) берилади. Бу ҳолда бошқарувчи каллак, қоидага асосан, q_1 бошланғич ҳолатни кўрсатувчи охирги чап белги қаршисида туради (VI.3- шакл).



VI.3- шакл.

Машинанинг иши тактлар йиғиндисидан иборат бўлиб, иш давомида бошланғич информация оралиқ информацияга айланади.

Бошланғич информация сифатида лентага ташқи алфавитнинг катакчаларга ихтиёрий равишда қўйилган чекли символлар системасини (алфавитдаги ихтиёрий сўзни) бериш мумкин. Берилган бошланғич информацияга боғлиқ бўлган икки хил ҳол бўлиши мумкин:

1. Машина чекли сон тактдан кейин тўхтайди (q_0 тўхташ ҳолатига ўтади). Бу ҳолда лентада *В* информация тасвирланган бўлади. Бу ҳолда машина *А* бошланғич информацияга нисбатан татбиқ этиладиган (қўлланиб бўладиган) ва уни қайта ишлаб *В* натижавий информацияга келтирган деб айтилади.

2. Машина ҳеч вақт тўхтамайди, яъни q_0 тўхташ ҳолатига ўтмайди. Бу ҳолда машина *А* бошланғич информацияга нисбатан татбиқ этилмайди деб айтилади.

Машина ишининг ҳар бир тактида қуйидаги функционал схема бўйича ҳаракат қилади:

$$a_i q_j \to a_v \overset{\text{П}}{\underset{\text{Н}}{\text{Л}}} q_s\,.$$

Бу ерда a_i, a_v – ташқи алфавитнинг ҳарфлари; q_j, q_s – машинанинг ҳолатлари; *П*, *Л*, *Н* – сурилиш символлари.

Бошқарувчи каллак лентада қандай ҳарфни кўриб турганлиги (бизнинг ёзувда a_i) ва машина қайси ҳолатда (бизнинг ёзувда q_j) турганлигига қараб, бу тактда уч элементдан иборат команда (буйруқ) ишлаб чиқилади:

1) кўриб турилган ҳарф алмаштирилган *ташқи алфавит ҳарфи* (a_v);

2) келгуси такт учун ташқи хотира адреси $\begin{pmatrix} \text{П} \\ \text{Л} \\ \text{Н} \end{pmatrix}$;

3) машинанинг келгуси ҳолати (q_s).

Ҳамма командалар мажмуаси *Тьюринг машинасининг дастурини* ташкил қилади. Дастур икки ўлчовли жадвал шаклида бўлиб, уни *Тьюринг функционал схемаси* деб аталади. Бундай схема қуйидаги жадвалда мисол сифатида берилган.

	a_0	a_1	a_2
q_1	$a_2\,\text{л}\,q_3$	$a_1\,\text{п}\,q_2$	$a_2\,\text{л}\,q_1$
q_2	$a_0\,\text{н}\,q_2$	$a_2\,\text{н}\,q_1$	$a_1\,\text{н}\,q_2$
q_3	$a_0\,\text{п}\,q_0$	$a_1\,\text{п}\,q_4$	$a_2\,\text{н}\,q_1$
q_4	$a_1\,\text{н}\,q_3$	$a_0\,\text{п}\,q_4$	$a_2\,\text{п}\,q_4$

Аниқки, Тьюринг машинасининг иши бутунлайига унинг дастури билан аниқланади. Агар иккита Тьюринг машинасининг функционал схемалари бир хил бўлса, у ҳолда улар бир-биридан фарқ қилмайди. Ҳар хил Тьюринг машиналари ҳар хил дастурларга эга бўлади.

Бундан кейин Тьюринг машинасининг ҳар хил конфигурацияларини (тархий кўринишларини) соддароқ ифодалаш учун лента ва унинг катакчаларини ифодаламасдан ахборотни фақат сўз шаклида ёзамиз. Бошқарувчи каллак ва машина ҳолатини ифодалаш сифатида машина ҳолатини ёзамиз.

Юқоридаги жадвалда берилган функционал схемага мос келувчи Тьюринг машинасининг ишини кўриб ўтайлик.

1-мисол. Дастлабки конфигурация қуйидагича берилган бўлсин:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0. \\ & & q_1 & \end{array}$$

Бошқарувчи каллак a_2 ҳарфини кўриб турганлиги ва машина q_1 ҳолатда бўлганлиги учун машина $a_2 л a_2$ командани ишлаб чиқади ва натижада иккинчи конфигурацияни ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_2 & a_0. \\ & q_1 & & \end{array}$$

Равшанки, навбатдаги конфигурациялар қуйидаги кўринишларда бўлади:

$$\begin{array}{cccccl} a_0 & a_2 & a_2 & a_0 & & \text{— учинчи конфигурация,} \\ q_1 & & & & & \\ a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— тўртинчи конфигурация,} \\ q_3 & & & & & \\ a_0 & a_2 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— бешинчи конфигурация.} \\ & q_0 & & & & \end{array}$$

Бешинчи конфигурацияда машина q_0 ҳолатда (тўхташ ҳолатида) турганлиги учун $a_2a_2a_2$ сўз ҳисоблашнинг натижаси бўлади.

2- мисол. Бошланғич конфигурация қуйидагича бўлсин:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0. \\ & & & & q_1 & \end{array}$$

Юқоридаги функционал схемадан фойдаланиб, қуйидаги конфигурацияларга келамиз:

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— иккинчи конфигурация,} \\ & & & q_1 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— учинчи конфигурация,} \\ & & q_1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— тўртинчи конфигурация,} \\ & & & q_2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_0 & \text{— бешинчи конфигурация,} \\ & & & q_2 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_0 & \text{— олтинчи конфигурация.} \\ & & & q_1 & & & \end{array}$$

Иккинчи ва олтинчи конфигурациялардан кўриниб турибдики, машинанинг иш жараёни такрорланди ва, демак, натижа бўлмайди.

6- §. Тьюринг машинасида алгоритмни реализация қилиш

☑ *Алгоритмларни реализация этиш. Ўнлик системада n дан n + 1 га ўтиш алгоритмини реализация қилиш. Натурал сонларни қўшиш алгоритмини реализация қилиш. Евклид алгоритмини реализация қилиш.*

Айрим оддий арифметик алгоритмларни реализация қиладиган (амалга оширадиган) Тьюринг машинасини қандай ясашни бир қатор мисолларда кўрсатамиз.

1-мисол. **Тьюринг машинасида ўнлик системада n дан $n+1$ га ўтиш алгоритмини реализация қилиш.**

Ечим. Ўнлик системада n соннинг ёзуви берилган бўлсин ва $n+1$ соннинг ўнлик системадаги ёзувини кўрсатиш талаб этилсин, яъни $f(n)=n+1$ функцияни ҳисоблаш талаб этилсин.

Равшанки, машинанинг ташқи алфавити 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамларидан ва бўш катакча a_0 дан иборат бўлиши керак. Лентага ўнлик системада n сонни ёзамиз. Бу ерда қаторасига бўш жойсиз ҳар бир катакчага битта рақам ёзилади.

Қўйилган масалани ечиш учун ишнинг биринчи тактида машина n соннинг охирги рақамини ўчириб, уни бир бирлик катта сонга алмаштириб ва агар охирги рақам 9 сонидан кичик бўлса, у ҳолда тўхташ ҳолатига ўтиши керак.

Агар n соннинг охирги рақами 9 бўлса, у ҳолда машина 9 рақамини ўчириб, бўш қолган катакчага 0 рақамини ёзиб, ўша ҳолатда қолган ҳолда чапга юқорироқ разрядли қўшнисига сурилиши керак. Бу ерда ишнинг иккинчи тактида машина юқорироқ разрядли рақамга 1 сонини қўшиши керак.

Табиийки, чапга сурилиш пайтида юқорироқ разрядли рақам бўлмаса, у ҳолда машинанинг бошқарувчи каллаги бўш катакчага чиқиши мумкин. Бу ҳолатда бўш катакчага машина 1 рақамини ёзади.

Айтилганлардан шу нарса келиб чиқадики, $f(n)=n+1$ функцияни ҳисоблаш алгоритмини реализация этиш пайтида машина бор йўғи q_1 ва q_0 ҳолатларда бўлади.

Шундай қилиб, ўнлик системада n дан $n+1$ га ўтиш алгоритмини реализация этадиган Тьюринг машинаси қуйидаги кўринишда бўлади:

	a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_1	$1hq_0$	$1hq_0$	$2hq_0$	$3hq_0$	$4hq_0$	$5hq_0$	$6hq_0$	$7hq_0$	$8hq_0$	$9hq_0$	$0hq_1$

Қуйида $n = 183$ ва $n = 399$ сонлари учун мос равишда уларнинг конфигурациялари келтирилган:

$$a_0\,1\underset{q_1}{8}3\,a_0 \qquad a_0\,3\underset{q_1}{9}9\,a_0$$

$$a_0\,1\underset{q_0}{8}4\,a_0 \qquad a_0\,3\underset{q_1}{9}0\,a_0$$

$$a_0\,3\underset{q_1}{0}0\,a_0$$

$$a_0\,4\underset{q_1}{0}0\,a_0\,.$$

2-мисол. **Натурал сонларни қўшиш алгоритми.**

Машина лентасига таёқчалар мажмуаси шаклида иккита сон берилган бўлсин. Масалан, 2 ва 3 сонлари. Бу сонларни қўшиш талаб этилсин. Қўшиш символини (белгисини) юлдузча билан белгилаймиз. Шундай қилиб, машина лентасига қуйидаги сўз ёзилади:

$$a_0 \,||*|||\, a_0 \tag{1}$$

(1) сўзга татбиқ этиш натижасида 2 ва 3 сонларининг йиғиндисини, яъни

$$a_0 \,|||||\, a_0 \tag{2}$$

сўзини берадиган функционал схемани топиш талаб этилади.

Қўйилган масалани ечиш жараёнини изоҳлаб берайлик. Дастлабки моментда машинанинг каллаги энг чапдаги таёқчани кўриб турсин. Уни то биринчи бўш катакчага эришгунча ҳамма таёқча ва юлдузчаларни чеклаб ўнгга суриш керак. Бу бўш катакчага биринчи таёқча ёзилади. Ундан сўнг иккинчи таёқчага қайтиб келиш керак ва уни ўчириб тўхташ керак. Машина ишининг ҳамма тактини қуйидаги мос конфигурацияларда ифодалаб берамиз:

1) $a_0\underset{q_1}{|}|*|||a_0$ 2) $a_0\underset{q_2}{|}*|||a_0$ 3) $a_0|*\underset{q_2}{|}||a_0$

4) $a_0|*\underset{q_2}{|}||a_0$ 5) $a_0|*|\underset{q_2}{|}|a_0$ 6) $a_0|*\underset{q_2}{|}||a_0$

7) $a_0|*\underset{q_2}{|}||a_0$ 8) $a_0|*||\underset{q_3}{|}|a_0$ 9) $a_0|*|\underset{q_3}{|}||a_0$

10) $a_0|*|\underset{q_3}{|}||a_0$ 11) $a_0|*\underset{q_3}{|}|||a_0$ 12) $a_0|*\underset{q_3}{|}|||a_0$

13) $a_0\underset{q_3}{|}*||||a_0$ 14) $a_0\underset{q_3}{|}*||||a_0$ 15) $a_0|\underset{q_1}{*}||||a_0$

16) $a_0a_0\underset{q_2}{*}||||a_0$ 17) $a_0*|\underset{q_2}{|}||a_0$ 18) $a_0*||\underset{q_2}{|}|a_0$

19) $a_0*||\underset{q_2}{|}|a_0$ 20) $a_0*|||\underset{q_2}{|}|a_0$ 21) $a_0*|||\underset{q_2}{|}a_0$

22) $a_0*||\underset{q_3}{|}||a_0$ 23) $a_0*||\underset{q_3}{|}||a_0$ 24) $a_0*|\underset{q_3}{|}|||a_0$

25) $a_0*\underset{q_3}{|}||||a_0$ 26) $a_0*\underset{q_3}{|}||||a_0$ 27) $a_0\underset{q_3}{*}|||||a_0$

28) $\underset{q_3}{a_0}*|||||a_0$ 29) $a_0*\underset{q_1}{|}||||a_0$ 30) $a_0a_0\underset{q_0}{*}|||||a_0$.

Бу жараён масаланинг ечиш алгоритмини қуйидаги икки ўлчовли жадвал шаклида ёзишга имконият яратади:

	a_0	$*$	$\mid$
q_1		$a_0\text{н}q_0$	$a_0\text{п}q_2$
q_2	$\mid\text{н}q_3$	$*\text{п}q_2$	$\mid\text{п}q_2$
q_3	$a_0\text{п}q_1$	$*\text{л}q_3$	$1\text{л}q_3$

Шундай қилиб, бу ерда $< a_0, *, | >$ ташқи алфавит ва q_0, q_1, q_2, q_3 машина ҳолатларидан фойдаланилди.

3-мисол. **Евклид алгоритми.**

Евклид алгоритми берилган иккита натурал сон учун уларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш кўринишидаги масалаларни ечади.

Маълумки, Евклид алгоритми қуйидаги камаювчи сонлар кетма-кетлигини тузишга келтирилади: биринчиси берилган икки соннинг энг каттаси бўлади, иккинчиси — кичиги, учинчиси — биринчи сонни икинчисига бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ, тўртинчиси — иккинчи сонни учинчисига бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқ ва ҳоказо, то қолдиқсиз бўлингунча давом эттирилади. Охирги бўлишдаги бўлувчи масала ечимининг натижаси бўлади.

Биздан Евклид алгоритмини Тьюринг машинасининг дастури сифатида ифодалаш талаб этилади. Бу дастур сонларни таққослаш ва айириш циклларининг навбатма-навбат (навбатлашиб) келишини таъминлаши керак.

Тўртта ҳарфдан иборат $< a_0, |, \alpha, \beta >$ ташқи алфавитдан фойдаланамиз. Бу ерда a_0 — бўш катакча символи, $|$ — таёқча, α ва β — таёқча ролини вақтинчалик ўйнайдиган ҳарфлар.

Масаланинг ечилишини бошланғич конфигурацияси

$$a_0||||||||||a_0$$

$$q_1$$

бўлган ҳол учун 4 ва 6 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топиш мисолида кўриб ўтайлик.

Биринчи навбатда машина лентада ёзилган сонларни таққослаши керак. Шу мақсад учун машина биринчи сонни ифодаловчи таёқчаларни α ҳарфи билан ва иккинчи сонни ифодаловчи сонларни β ҳарфи билан алмаштириши керак. Машина ишининг биринчи тўрт тактига мос келувчи унинг конфигурацияси қуйидагича бўлади:

1) $$a_0|||\underset{q_1}{|}||||||a_0$$

2) $$a_0|||\underset{q_2}{\alpha}||||||a_0$$

3) $$a_0|||\alpha\underset{q_2}{|}|||||a_0$$

4) $$a_0|||\alpha\underset{q_1}{\beta}|||||a_0$$

Шу билан дастлабки сонларни таққослаш цикли тамом бўлиб, айириш цикли бошланади. Бу цикл давомида кичик сон лентадан бутунлайига ўчирилади, β ҳарфи билан белгиланган иккинчи сон таёқчалар билан алмашинади ва, демак, катта 6 сони иккита 4 ва 2 сонларига бўлинади.

Бу операцияларга бир қатор конфигурациялар тўғри келади. Шулардан айримларини ёзамиз:

$$\underset{q_1}{a_0}\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\beta\,\beta\,\beta\,\beta\,||\,a_0$$

$$a_0\,\underset{q_3}{\alpha}\,\alpha\,\alpha\,\alpha\,\beta\,\beta\,\beta\,\beta\,||\,a_0$$

$$a_0\,a_0\,\underset{q_3}{\alpha}\,\alpha\,\alpha\,\beta\,\beta\,\beta\,\beta\,||\,a_0$$

……………………………………

$$a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,\underset{q_3}{\beta}\,\beta\,\beta\,\beta\,||\,a_0$$

$$a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,|\underset{q_3}{\beta}\,\beta\,\beta\,||\,a_0$$

……………………………………

$$a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,||||\underset{q_3}{|}|\,a_0$$

$$a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,a_0\,||||\underset{q_2}{|}|\,a_0$$

Шу билан биринчи айириш цикли тамом бўлади.

Энди машина 4 ва 2 сонларини таққослаши керак. Бу сонларни таққослаш цикли қуйидаги

$$a_0 \mid\mid \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, a_0$$
$$q_4$$

конфигурацияга ва айириш цикли

$$a_0 \mid\mid\mid\mid a_0$$

конфигурацияга олиб келади. Учинчи таққослаш цикли 2 ва 2 сонларини

$$a_0\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \beta\, a_0$$
$$q_3$$

конфигурацияга ва айириш цикли

$$a_0 \mid\mid a_0$$
$$q_0$$

охирги конфигурацияга олиб келади. Шундай қилиб, Тьюринг функционал схемаси ушбу кўринишида бўлади:

	a_0	$\mid$	α	β
q_1	a_0 п q_3	α н q_2	α л q_1	β л q_1
q_2	a_0 л q_4	β н q_1	α п q_2	β п q_2
q_3	a_0 н q_0	$\mid$ н q_2	a_0 п q_3	$\mid$ п q_3
q_4	a_0 н q_0	$\mid$ н q_1	$\mid$ л q_4	a_0 л q_4

7- §. Алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси

☑ *Универсал усул. Тьюринг тезиси. Тьюринг, Чёрч, Гёдел, Клини ва Марков олган натижаларнинг эквивалентлиги.*

Тьюринг машинаси алгоритм тушунчасини аниқлашнинг битта йўлини кўрсатади. Шу туфайли бир нечта саволлар пайдо бўлади: Тьюринг машинаси тушунчаси қанчалик умумий бўлади? Алгоритмларни Тьюринг машинаси воситаси билан бериш усулини универсал усул деб бўладими? Ҳамма алгоритмларни шу усул билан бериш мумкинми?

Ушбу саволларга ҳозирги вақтда мавжуд бўлган алгоритмлар назарияси қуйидаги гипотеза билан жавоб беради: *ҳар қандай алгоритмни Тьюринг функционал схемаси орқали бериш ва мос Тьюринг машинасида реализация этиш мумкин.*

Бу гипотеза **Тьюринг тезиси** деб аталади. Уни исботлаш мумкин эмас, чунки бу тезис қатъий таърифланмаган алгоритм тушунчасини қатъий аниқланган Тьюринг машинасининг тушунчаси билан боғлайди.

Бу тезисни рад этиш учун Тьюринг машинасида реализацияланмайдиган (амалга оширилмайдиган) алгоритм мавжудлигини кўрсатиш керак. Аммо ҳозиргача аниқланган ҳамма алгоритмларни Тьюринг функционал схемаси орқали реализация этиш мумкин.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтамизки, Марковнинг нормал алгоритм тушунчаси ҳамда Чёрч, Гёдел ва Клини томонидан киритилган рекурсив алгоритм (рекурсив функциялар) тушунчалари Тьюринг томонидан киритилган алгоритм тушунчаси (Тьюринг функционал схемаси) билан эквивалентлиги исботланган.

Бу далил ўз навбатида Тьюринг гипотезасининг тўғрилигини яна бир марта кўрсатиб ўтади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $\varphi(n)=n+2$, $\varphi(n)=n+4$, $\varphi(n)=0$ функцияларни ҳисобловчи алгоритмларни Тьюринг машинасининг дастурлари сифатида ифодаланг.

2. $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$

функцияни ҳисобловчи Тьюринг машинасини тузинг.

3. $\overline{\operatorname{sgn} x} = \begin{cases} 1, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$

функцияни ҳисобловчи Тьюринг функционал схемасини тузинг.

4. $\varphi(n) = 2n$ функцияни ҳисобловчи Тьюринг машинасини тузинг.

5. $f_p(n) = \begin{cases} 1, \text{ агар } n \text{ сон } p \text{ сонга бўлинса,} \\ 0, \text{ акс ҳолда} \end{cases}$

функцияни ҳисобловчи Тьюринг машинасининг дастурларини $\{a_0, 1\}$ алфавитда ёзинг.

6. Функционал схемалари қуйидаги 1, 2- жадвалларда берилган Тьюринг машинаси қандай функцияларни ҳисоблайди?

1-жадвал

	a_0	|
q_1	a_0 п q_{p+1}	| л q_2
q_2	a_0 п q_{p+3}	| л q_3
...	...	...
q_{p-1}	a_0 п q_{p+3}	| л q_p
q_p	a_0 п q_{p+1}	| л q_1
q_{p+1}	| н q_0	a_0 н q_{p+2}
q_{p+2}	a_0 п q_{p+1}	
q_{p+3}	a_0 н q_0	a_0 н q_{p+4}
q_{p+4}	a_0 п q_{p+3}	

2-жадвал

	a_0	|
q_1	| п q_4	| л q_2
q_2	a_0 п q_6	| л q_3
q_3	a_0 п q_6	| л q_1
q_4	| н q_0	a_0 н q_5
q_5	a_0 п q_4	
q_6	a_0 н q_0	| н q_7
q_7	a_0 п q_6	a_0 п q_6

7. Дастури қуйидаги функционал схема (3- жадвал) орқали берилган Тьюринг машинаси қандай кўринишдаги функцияни ҳисоблайди?

3-жадвал

	a_0	$\vert$	α	β
q_1	a_0 л q_2	$\vert$ п q_1	α п q_1	β п q_1
q_2		β л q_3	α л q_2	β л q_2
q_3	a_0 п q_4	$\vert$ н q_1		
q_4	a_0 н q_0		$\vert$ п q_4	$\vert$ п q_4

Изоҳ. Мисолларни ечишда Л.М. Лихтарников ва Т.Г. Сукачеваларнинг «Математическая логика» (Санкт-Петербург, 1999 й.) китобидан фойдаланишни тавсия этамиз, 248–250-б., 275–281-б.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Оммавий муаммо. Ечиш алгоритми. Тьюринг машиналари.
2. Ташқи ва ички алфавит. Машинанинг ташқи хотираси. Бошқарувчи каллак. Бошланғич ахборот. Машина дастури. Тьюринг функционал схемаси.
3. Тьюринг машинасида алгоритмни реализация қилиш.
4. Натурал сонларни қўшиш алгоритмини реализация этиш. Евклид алгоритмини реализация этиш.
5. Алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси.
6. Тьюринг, Чёрч, Гёдел, Клини ва Марков олган натижаларининг эквивалентлиги ҳақида.

8-§. Марковнинг нормал алгоритмлари

☑ *Алфавит. Символлар. Ҳарфлар. Сўз. Бўш сўз. Алгоритм. Алгоритм таърифи. Алфавит устидаги алгоритм. Алфавитдаги алгоритм. Татбиқ этиладиган алгоритм. Татбиқ этилмайдиган алгоритм. Ўрнига қўйиш усули. Алгоритм схемаси. Нормал алгоритм ёки Марков алгоритми. Мисоллар.*

1-таъриф. *Бўш бўлмаган чекли символлар тўплами* ***алфавит*** *ва алфавитдаги символлар* ***ҳарфлар*** *деб аталади.*

2-таъриф. *A алфавитдаги ҳарфларнинг ҳар қандай чекли кетма-кетлиги шу тўпламдаги* ***сўз*** *деб аталади. Ҳарфларнинг бўш кетма-кетлиги* ***бўш сўз*** *деб аталади ва уни* $\wedge$ *символи билан белгиланади.*

Агар $S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_k}$ сўзни P билан ва $S_{r_1} S_{r_2} \dots S_{r_m}$ сўзни Q билан белгиласак, у ҳолда $S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_k} S_{r_1} S_{r_2} \dots S_{r_m}$ сўз P ва Q сўзларнинг бирлашмаси PQ ни билдиради. Хусусий ҳолда, $P \wedge = \wedge P = P$ ва $(P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3)$.

Агар $B \subset A$ бўлса, у ҳолда A алфавит B алфавитнинг *кенгайиши (кенгайтирилгани)* деб айтилади. Равшанки, бу ҳолда B нинг ҳар бир сўзи ўз навбатида A алфавитининг ҳам сўзи бўлади.

A алфавитдаги ҳамма сўзларнинг тўплами D, C эса D тўпламнинг бирор қисм тўплами бўлсин, яъни $C \subset D$.

3-таъриф. *Аниқланиш соҳаси C ва қийматлар соҳаси D бўлган эффектив ҳисобланувчи функция A* ***алфавитдаги алгоритм (алгорифм)*** *деб аталади.*

4-таъриф. *Агар A алфавитдаги бирор P сўз U алгоритмнинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда U алгоритм* ***P сўзга татбиқ этиладиган*** *деб аталади.*

5-таъриф. *Агар* $A \subset B$ *бўлса, у ҳолда B алфавитдаги ҳар бир алгоритм A* ***алфавит устидаги алгоритм*** *деб аталади.*

A алфавитдаги нормал алгоритм тушунчаси билан A алфавит устидаги нормал алгоритм тушунчаси ўртасидаги фарқ жуда ҳам муҳимдир. A алфавитдаги ҳар қандай нормал алгоритм фақат A нинг ҳарфларидан фойдаланади. A алфавит устидаги нормал алгоритм эса A га кирмаган бошқа қўшимча ҳарфлардан ҳам фойдаланиши мумкин. Шундай қилиб, A даги ҳар қандай нормал алгоритм A устидаги нормал алгоритм ҳам бўлади. Аммо A да шундай алгоритмлар мавжудки, улар A устида нормал алгоритм эканлигига қарамасдан, A да нормал алгоритм бўла олмайди.

Кўп аниқланган алгоритмларни бирмунча оддийроқ қадамларга бўлиш мумкин. Шу мақсадда рус математиги А.А. Марков 1950 йилларда алгоритм тузишнинг асоси (негизи) қилиб, элементар операция сифатида *бир сўзни иккинчи сўз ўрнига қўйишни* олган.

Агар P ва Q лар A алфавитдаги сўзлар бўлса, у ҳолда $P \rightarrow Q$ ва $P \rightarrow \cdot Q$ ларни A алфавитдаги ўрнига қўйиш формулалари деб атаймиз. Бу ерда $\rightarrow$ ва $\cdot$ символлари A алфавитнинг ҳарфлари эмас ҳамда P ва Q ларнинг ҳар бири сўз бўлиши мумкин. $P \rightarrow Q$ ўрнига қўйиш формуласи *оддий формула* ва $P \rightarrow \cdot Q$ ўрнига қўйиш формуласи *натижавий (хулосавий) формула* деб аталади.

Берилган $P \rightarrow Q$ ва $P \rightarrow \cdot Q$ ўрнига қўйиш формулаларининг исталган бирини ифодалаш учун $P \rightarrow (\cdot)Q$ умумий кўринишдаги ёзувни ишлатамиз.

Алфавитнинг қуйидаги ўрнига қўйиш формулаларининг чекли рўйхати

$$
\begin{gathered}
P_1 \rightarrow (\cdot)Q_1, \\
P_2 \rightarrow (\cdot)Q_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_r \rightarrow (\cdot)Q_r
\end{gathered}
$$

алгоритм схемаси деб аталади ва у A алфавитда қуйидаги алгоритмни юзага келтиради: агар шундай W, V сўзлар (бўш сўз бўлишлари мумкин) топилиб, $Q = WTV$ бўлса, у ҳолда T сўз Q сўзнинг таркибига киради деб келишиб оламиз.

Энди A алфавитда P сўз берилган бўлсин. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

1. P_1, P_2, ..., P_r сўзларнинг бирортаси ҳам P сўзнинг таркибига кирмайди. Бу тасдиқни қисқа равишда U: $P \supset$ шаклида ёзамиз.

2. P_1, P_2, ..., P_r сўзларнинг орасида P сўзнинг таркибига кирувчилари топилади. Энди $1 \leq m \leq r$ муносабатни қаноатлантирувчи энг кичик бутун сон m ва P_m сўз P нинг таркибига кирувчи сўз бўлсин.

P сўзнинг таркибига энг чапдан кирган P_m сўзни Q_m билан алмаштиришдан ҳосил бўладиган сўзни R дейлик. P ва R орасидаги айтилган муносабатни:

а) агар $P \to (\cdot)Q_m$ ўрнига қўйиш формуласи оддий формула бўлса,

$$U: P \vdash R \tag{1}$$

шаклида ва;

б) агар $P \to (\cdot)Q_m$ ўрнига қўйиш формуласи натижавий формула бўлса,

$$U: P \vdash \cdot R \tag{2}$$

шаклида ёзамиз.

(1) ҳолда U алгоритм P сўзни R сўзга *оддий ўтказади* дейилади ва (2) ҳолда U алгоритм P сўзни R сўзга *натижавий ўтказади* деб айтилади.

$U: P \models R$ символик ёзув A алфавитда шундай R_0, R_1, ..., R_k сўзлар кетма-кетлиги мавжудки, $P = R_0$, $R = R_k$, $j = 0, 1, ..., k-2$ лар учун $U: R_j \vdash R_{j+1}$ ва ёки $U: R_{k-1} \vdash R_k$, ёки $U: R_{k-1} \vdash \cdot R_k$ (охирги ҳолда $U: P \models R$ ўрнига $U: P \models \cdot R$ ёзилади) эканлигини билдиради.

Ёки $U: P \models \cdot R$, ёки $U: P \models R$ ва $U: R \supset$ бўлганда ва фақат шундагина $U(P) = R$ деб қабул қиламиз.

Юқоридаги каби аниқланган алгоритм *нормал алгоритм* ёки *Марков алгоритми* деб аталади.

U алгоритмнинг амал қилишини қуйидагича ифодалаш мумкин. A алфавитда P сўз берилган бўлсин. U алгоритм схемасида P_m сўз P нинг таркибига кирувчи биринчи $P_m \to (\cdot)Q_m$ ўрнига қўйиш формуласини топамиз. P сўзнинг таркибига энг чапдан кирган P_m сўз ўрнига Q_m формулани қўямиз. R_1 шундай ўрнига қўйишнинг натижаси бўлсин. Агар $P_m \to (\cdot)Q_m$ ўрнига қўйиш формуласи натижавий бўлса, у ҳолда алгоритмнинг иши тугайди ва унинг қиймати R_1 бўлади. Агар $P_m \to (\cdot)Q_m$ ўрнига қўйиш формуласи оддий бўлса, у ҳолда R_1 га P га нисбатан ишлатилган процедурани бажарамиз ва ҳоказо. Агар охирги босқичда $U: R_i \supset$ муносабатни қаноатлантирувчи (яъни, P_1, P_2, ..., P_r сўзларнинг бирортаси R_i таркибига кирмайди) R_i сўз ҳосил бўлса, у ҳолда алгоритмнинг иши тугайди ва R_i унинг қиймати бўлади.

Агар ифодаланган жараён охирги босқичда тамом бўлмаса, у ҳолда U алгоритм P сўзга *татбиқ этилмайди* деб айтилади.

1-мисол. $\{b, c\}$ A алфавит бўлсин. Қуйидаги алгоритм схемасини кўрамиз:

$$\left.\begin{array}{l} b \to \cdot \wedge \\ c \to c \end{array}\right\}.$$

Бу схема билан берилган U нормал алгоритм A алфавитдаги таркибига камида битта b ҳарфи кирган ҳар қандай P сўзни шундай сўзга ўзгартирадики, бу сўз P сўздан унинг таркибига энг чапдан кирган b сўзни ўчириш натижасида ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, P сўз таркибига энг чапдан кирган b сўздан чапроқда турган ҳар қандай c ҳарфни $c \to c$ оддий ўрнига қўйиш формуласи яна c ҳарфига ўтказади ва энг чапдаги b ҳарфини $b \to \cdot \wedge$ натижавий ўрнига қўйиш формуласи $\wedge$ натижавий бўш сўзга ўзгартиради.

Масалан, агар $P = ccbbc$ бўлса, у ҳолда $P \to \cdot\, Q$, бу ерда $Q = ccbc$. U алгоритм бўш сўзни ўз-ўзига ўзгартиради.

U алгоритм b ҳарфи кирмаган бўш бўлмаган сўзларга татбиқ этилмайди. Ҳақиқатан ҳам, агар P сўз фақат c ҳарфлардан иборат бўлса, у ҳолда $c \to c$ оддий ўрнига қўйиш формуласи уни яна ўзига айлантиради. У ҳолда ҳамма вақт $P \to P$ бўлади ва биз натижавий ўрнига қўйиш формуласига кела олмаймиз, яъни жараён чексиз давом этади.

2-мисол. A ушбу $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ алфавит бўлсин. Қуйидаги схемани кўрамиз:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 \to \wedge \\ a_1 \to \wedge \\ \quad \ldots \\ a_n \to \wedge. \end{array}\right.$$

Бу схемани $\forall_i(a_i \to \wedge)\,(a_i \in A)$ кўринишида ҳам ёзиш мумкин. Бу схема A алфавитдаги ҳар қандай сўзни бўш сўзга ўзгартирадиган U нормал алгоритмдир. Масалан,

$$U: a_1a_2a_1a_3a_0 \vdash a_1a_2a_1a_3 \vdash a_2a_1a_3 \vdash a_2a_3 \vdash \wedge$$

ва охири $U: \wedge \supset$. Демак, $U(a_1a_2a_1a_3a_0) = \wedge$.

3-мисол. A алфавит S_1 ҳарфдан иборат бўлсин. Бу ҳарфни 1 билан белгилаймиз. Ҳар қандай n натурал сон учун индукция методи бўйича $\bar{0} = 1$ ва $\overline{n+1} = \bar{n}1$ ларни аниқлаймиз. Шундай қилиб, $\bar{1} = 11$, $\bar{2} = 111$ ва ҳоказо.

$\bar{n}$ сўзлар рақамлар деб айтилади. Ушбу

$$\{\wedge \to \cdot 1$$

схема орқали берилган U нормал алгоритмни аниқлаймиз. A алфавитдаги ҳар қандай P сўз учун $U(P) = 1P$ га эга бўламиз. Хусусий ҳолда, ҳар қандай n натурал сон учун $U(\bar{n}) = \overline{n+1}$. Ҳар қандай P сўз $\wedge$ бўш сўзнинг киришидан бошланишини (чунки $P = \wedge P$) эсласак, келтирилган алгоритмнинг тўғрилигига ишонамиз.

9- §. Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар

☑ *Батамом эквивалент алгоритмлар. Эквивалент алгоритмлар. Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функциялар. Марков бўйича ҳисобланувчи функциялар. Қисмий рекурсив функция билан Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция орасидаги муносабат. Умумрекурсив функция билан Марков бўйича ҳисобланувчи функция орасидаги муносабат.*

U ва K алгоритмлар ва P сўз бўлсин. Агар U ва K алгоритмларнинг иккаласи ҳам P сўзга татбиқ этилмайдиган ёки иккаласи ҳам унга татбиқ этиладиган ва кейинги ҳолда $U(P) = K(P)$ бўлса, бу ҳолатни $U(P) \simeq K(P)$ кўринишда ифодалаймиз.

Умуман, агар C ва D бирор ифодалар бўлса, у ҳолда $C \simeq D$ муносабат қуйидагини билдиради: ёки иккала ифода ҳам аниқланмаган, ёки иккаласи ҳам аниқланган ва улар бир хил объектни белгилайди.

1-таъриф. *Агар A алфавитдаги исталган P сўз учун $U(P) \simeq K(P)$ бўлса, у ҳолда U ва K алгоритмлар A га нисбатан A алфавит устида* ***батамом (тамомила) эквивалент*** *деб аталади.*

Агар P берилган A алфавитдаги сўз бўлганида ҳар доим $U(P) \simeq K(P)$ ҳамда ҳеч бўлмаганда $U(P)$ ёки $K(P)$ сўзларнинг бирортаси аниқланган ва яна A нинг сўзи бўлса, U ва K алгоритмлар A ***алфавитга нисбатан эквивалент*** *деб аталади.*

M ушбу $\{1, *\}$ алфавит, ω – ҳамма натурал сонлар тўплами, φ эса n аргументли қисмий эффектив ҳисобланувчи арифметик функция, яъни ω^n тўпламнинг айрим қисм тўпламини ω га акслантирувчи функция бўлсин.

B_φ орқали ҳеч бўлмаганда бир томони аниқланган ҳолда ҳар доим $B_\varphi(\overline{(k_1, k_2, \dots, k_n)}) = \varphi(\overline{k_1, k_2, \dots, k_n})$ тенгликни ўринли қиладиган M даги алгоритмни белгилаймиз. Бу алгоритм $\overline{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$ сўзидан фарқ қилувчи бошқа сўзларга татбиқ этилмайди деб фараз қиламиз.

2-таъриф. *Агар M устида M га нисбатан B_φ га батамом эквивалент бўлган нормал алгоритм мавжуд бўлса, у ҳолда φ ни* ***Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Агар φ функция ҳар қандай n натурал сон учун (ҳамма жойда) аниқланган ва Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция бўлса, у ҳолда у* ***Марков бўйича ҳисобланувчи функция*** *деб аталади.*

Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция тушунчаси билан қисмий рекурсив функция тушунчаси ҳамда Марков бўйича ҳисобланувчи функция тушунчаси билан умумрекурсив функция тушунчалари эквивалентдир.

Келтирилган тасдиқни исботловчи қуйидаги теорема мавжуд.

1-теорема. *Ҳар қандай қисмий рекурсив функция Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция бўлади ва ҳар қандай умумрекурсив функция Марков бўйича ҳисобланувчи функциядир.*

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

2-теорема. *Агар A алфавит устидаги U алгоритм бўйича,* ψ_U *функция қисмий рекурсив (рекурсив) бўлса, у ҳолда A алфавит устида A га нисбатан U алгоритмга батамом эквивалент бўлган нормал алгоритм мавжуддир.*

3-теорема. *Агар U алгоритм A алфавит устидаги нормал алгоритм бўлса, у ҳолда* ψ_U *қисмий рекурсив функция бўлади; агар, бундан ташқари, U алгоритм A алфавитдаги ҳар қандай сўзга татбиқ этиладиган бўлса, у ҳолда* ψ_U *умумрекурсив функция бўлади.*

Натижа. Агар берилган φ қисмий функция Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция бўлса, у қисмий рекурсив функция ҳам бўлади ва агар φ Марков бўйича ҳисобланувчи функция бўлса, у ҳолда φ умумрекурсив функция ҳамдир.

Натижа ва теоремаларнинг исботи Э. Мендельсон китобининг [39] 242–244 ва 246–249- бетларида келтирилган.

Шундай қилиб, келтирилган натижа ва 1-теорема Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция тушунчаси билан қисмий рекурсив функция (худди шундай, Марков бўйича ҳисоблаш билан рекурсивлик) тушунчасининг эквивалентлигини кўрсатади.

Ўз навбатида Чёрч тезиси бўйича ҳисобланувчанлик тушунчаси билан рекурсивлик тушунчаси (қисмий эффектив ҳисобланувчанлик тушунчаси қисмий рекурсивлик тушунчасига) эквивалентдир. А.А. Марков алгоритмлар атамасида *нормаллаштириш (нормализация) принципини* яратди: *A алфавитдаги ҳар қандай алгоритм A га нисбатан A устидаги бирор нормал алгоритмга батамом эквивалентдир.*

Чёрч тезиси билан нормаллаштириш принципининг эквивалентлиги аниқланди. Ҳақиқатан ҳам, Чёрч тезиси тўғри. A алфавитда U алгоритм берилган бўлсин. Унга мос келадиган ψ_U функция қисман эффектив ҳисобланувчи бўлади. У ҳолда, Чёрч тезисига асосан, ψ_U қисмий рекурсив функциядир. Демак, 2-теоремага кўра, U алгоритм A устидаги бирор нормал алгоритмга A га нисбатан батамом эквивалентдир. Шундай қилиб, агар Чёрч тезиси тўғри бўлса, у ҳолда Марковнинг нормаллаштириш принципи ҳам тўғридир.

Энди нормаллаштириш принципи тўғри ва φ ихтиёрий қисман эффектив ҳисобланувчи функция, B_φ эса φ функцияга мос келувчи M даги алгоритм бўлсин. Нормаллаштириш принципига асосан B_φ алгоритм M устидаги бирор нормал алгоритмга M га нисбатан батамом эквивалентдир. Демак, φ функция Марков бўйича қисман ҳисобланувчи функциядир. У ҳолда олинган натижага кўра φ қисман рекурсив (рекурсив) функция бўлади. Шундай қилиб, Марковнинг нормаллаштириш принципидан Чёрч тезисини келтириб чиқардик.

Маълумки, алгоритм ва эффектив ҳисобланувчи функция тушунчалари интуитив тушунчалар бўлганлиги учун биз Марковнинг нормаллаштириш принципи ва Чёрч тезисининг тўғрилигини исбот қила олмаймиз.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, Чёрчнинг λ-ҳисобланувчанлик назарияси ва Постнинг нормал системалар назариясидан келиб чиқадиган тушунчалар ҳам қисман рекурсив функция ёки нормал алгоритм тушунчаларига эквивалент бўлади.

10-§. Алгоритмик ечилмовчи муаммолар

☑ *Ечилиш алгоритми. Ечилувчи муаммолар. Ечилмовчи муаммолар. Математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси. Чёрч теоремаси. Ўз-ўзига татбиқ этилувчанликни таниш муаммоси. Ассоциатив ҳисобидаги сўзларнинг эквивалентлик муаммоси. Марков, Пост, Новиков, Цейтлин, Чёрч ва бошқа математиклар олган илмий натижалар.*

Математика тарихида бирор масалани ечиш, одатда, унинг ечилиш алгоритмини топиш деб ҳисобланарди. Деярли XX аср бошларигача ҳамма математик масалалар алгоритмик ечилувчи масалалар деб қаралган ва уларни ечувчи алгоритмлар изланган. Масалан, ҳақиқий коэффициентли n- даражали кўпҳаднинг илдизларини унинг коэффициентлари ёрдамида радикалларда ифода этиш алгоритмини излаш бир неча асрлар давом этди. Масалан, учинчи ва тўртинчи даражали тенгламалар учун бу алгоритмни XVI асрда итальян математиклари Кардано ва Феррари яратдилар. Узоқ йиллардан кейин норвегиялик математик Абель $n \geq 5$ бўлганда бундай алгоритм мавжуд эмаслигини кўрсатди. Иккинчи мисол сифатида Гильбертнинг диофант тенгламалар ҳақидаги 10- муаммосини кўрсатиш мумкин. Бу муаммони Гильберт 1900 йилда Парижда эълон қилган эди. Деярли 70- йилдан кейин рус математиклари Ю. Матиясевич ва Г. Чудновский бу муаммо алгоритмик ечилмовчи муаммо эканлигини исботлаб бердилар.

Фақат алгоритмнинг интуитив тушунчасидан Тьюринг машинасининг аниқ тушунчасига ўтиш берилган оммавий муаммонинг алгоритмик ечилувчанлик масаласига аниқлик киритди. Бу масалани қуйидагича ифодалаш мумкин: *берилган оммавий муаммони ечадиган Тьюринг машинаси мавжудми ёки бундай машина мавжуд эмасми?*

Бу саволга алгоритмлар назарияси айрим ҳолларда салбий жавоб беради. Шу турдаги натижаларни биринчилар қаторида 1936 йилда америкалик математик А.Чёрч олди. У предикатлар мантиқидаги ечилиш муаммоси умумий ҳолда алгоритмик ечимга эга эмаслигини кўрсатди. Ўша йилнинг ўзида у математик мантиқдаги келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси ҳам алгоритмик ечилмаслигини исбот қилди. Кейинги масалани батафсилроқ кўриб ўтайлик.

10.1. Математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси. Математикада аксиоматик методнинг мазмуни қуйидагидан иборат: берилган назариянинг ҳамма мулоҳазалари (теоремалари) шу назарияда исботсиз қабул қилинган мулоҳазалар (аксиомалар) дан формал мантиқий келтириб чиқариш воситаси билан олинади.

Математик мантиқда формулаларнинг махсус тили ифодаланади. У орқали математик назариянинг исталган мулоҳазаси бутунлай аниқланган формула кўринишида ёзилади. *А* асос (шарт)дан *В* натижани мантиқий келтириб чиқариш жараёнини дастлабки формулаларни формал алмаштиришлар жараёни сифатида ифодалаш мумкин. Бунга мантиқий ҳисобдан фойдаланиш йўли билан эришиш мумкин.

Танланган мантиқий ҳисобда *В* мулоҳазани *А* асосдан мантиқий келтириб чиқариш масаласи *А* формуладан *В* формулага олиб келувчи дедуктив занжирнинг мавжудлиги масаласидир. Шу туфайли келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси пайдо бўлади: мантиқий ҳисобдаги исталган иккита *А* ва *В* формула учун *А* дан *В* га олиб келувчи дедуктив занжир мавжудми ёки йўқми?

Бу муаммонинг ечими сифатида ҳар қандай *А* ва *В* лар учун жавоб берадиган алгоритм мавжудлиги маъносида тушунилади. Чёрч олган натижа қуйидагича изоҳланади.

Чёрч теоремаси. *Келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси алгоритмик ечилмовчидир.*

10.2. Ўз-ўзига татбиқ этувчанликни таниш муаммоси. Тьюринг машинасининг шифри тушунчасини киритамиз. Ҳозиргача Тьюринг машинасининг дастурини икки ўлчовли $m \times n$ жадвал кўринишида ёзардик. Аммо уни бир ўлчовли шаклда ҳам тасвирлаш мумкин. Бунинг учун 5 та символни шундай кетма-кетликда ёзиш керакки, бешликнинг биринчи символи жадвалнинг устунини, иккинчиси сатрини ва кейинги учтаси жадвалнинг юқорида кўрсатилган устун ва сатрлари кесишмасидаги учта символни (командани) ифодаласин.

Масалан, 3-жадвалда ифодаланган функционал схема ўрнига қуйидаги бир ўлчовли сатрни ҳосил қиламиз:

$$a_0 q_1 a_0 q_3 \mid q_1 \alpha\, н\; q_2 \alpha q_1 \alpha\, л\; q_1 \beta q_1 \beta\, л\; q_1 a_0 q_2 a_0\, л\; q_4 \ldots . \qquad (1)$$

Машина конфигурациясини ифодалашда ҳам шу усулдан фойдаланамиз, яъни ҳолатни ифодаловчи ҳарфни «кўрилаётган» ҳарфнинг тагидан эмас, балки чап ёнидан ёзамиз. Масалан,

$$||||\underset{q_4}{|}|$$

конфигурацияни қуйидаги шаклда ёзамиз: $||||q_4||$.

(1) сатрдаги ҳар бир ҳарфни қуйидаги шартларга риоя қилган ҳолда қайта номлаймиз:

1) (1) сатрни айрим кодлаштирилган гуруҳларга бир қийматли қилиб бўлмоқ керак;

2) код символлари уч турда бўлишлари керак:

а) *л*, *п*, *н* ҳарфлари учун;

б) ташқи алфавит ҳарфлари учун;

в) машина ҳолатини ифодаловчи ҳарфлар учун.

Шу муносабат билан қуйидаги кодлаштириш жадвалидан фойдаланамиз:

Алфавит	Ҳарф	Кодлаштирилган гуруҳ	Эслатмалар
Адреслар ҳарфи	*л*	101	1 лар орасида 1 та ноль
	н	1001	1 лар орасида 2 та ноль
	п	10001	1 лар орасида 3 та ноль
Ташқи алфавит	a_0	100001 4 та ноль	2 дан катта жуфт сонли
	a_1	10000001 6 та ноль	ноллар
	...	...	
	a_n	10...01 $2(n+2)$ та ноль	
Ички алфавит	q_1	1000001 5 та ноль	3 дан катта тоқ сонли
	q_2	100000001 7 та ноль	ноллар
	...	...	
	q_m	10...01 $2(n+1)+1$ та ноль	

Агар (1) сатрдаги 1, α, β символларни мос равишда a_1, a_2, a_3 ҳарфлар деб қарасак, у ҳолда уни шу кодлаштириш системаси асосида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$100001100000011000001100011000000000011000000011000001\ldots \quad (2)$$

Функционал схема ёки алоҳида олинган бирор конфигурация учун тузилган 1 ва 0 лардан иборат бўлган бундай сатр *функционал схеманинг шифри ёки конфигурациянинг шифри* деб аталади.

Тьюринг машинасининг лентасида машина алфавитида ёзилган унинг ўз (хусусий) шифри тасвирланган бўлсин. Икки ҳол бўлиши мумкин:

1. Машина ўзининг шифрига татбиқ этилади, яъни машина бу шифрни қайта ишлайди ва чекли сон қадамлардан сўнг тўхтайди.

2. Машина ўзининг шифрига татбиқ этилмайди, яъни машина ҳеч қачон тўхташ ҳолатига ўтмайди.

Шундай қилиб, машиналарнинг ўзи (уларнинг шифри) икки синфга бўлинади: татбиқ этиладиган Тьюринг машиналари синфи ва татбиқ этилмайдиган Тьюринг машиналари синфи. Шунинг учун қуйидаги оммавий муаммо: ўз-ўзига татбиқ этилувчанликни таниш муаммоси пайдо бўлади.

Берилган ҳар қандай шифрга нисбатан шифрланган Тьюринг машинаси қайси синфга киришини аниқлаш керак: татбиқ этиладиган синфгами ёки татбиқ этилмайдиган синфгами?

2-теорема. *Ўз-ўзига татбиқ этилувчанликни таниш муаммоси алгоритмик ечимга эга эмас (ечилмовчидир).*

10.3. Ассоциативлик ҳисобидаги сўзларнинг эквивалентлик муаммоси. Алгоритмик ҳал этилмаслик ҳақидаги дастлабки натижалар математик мантиқ ва алгоритмлар назарияларида пайдо бўлган муаммолар учун олинган эди. Ушбу муаммолардан айримларини 10.1—10.2- бандларда келтирдик.

Кейинчалик, шунга ўхшаш муаммолар математиканинг турли хил қисмларида ҳам мавжуд эканлиги аниқланди. Шулар қаторида биринчи навбатда алгебраик муаммолар, шу жумладан, сўзлар эквивалентлиги муаммосидир.

$A = \{a, b, c, ...\}$ алфавит ва ундаги сўзлар тўпламини кўриб ўтайлик. Агар L сўз M сўзнинг бир қисми бўлса, у ҳолда L сўз M сўзнинг *таркибига киради* деб айтамиз. Масалан, *bca* сўзи *abcabac* сўзининг таркибига киради. Энди

$$P - Q \text{ ёки } P \to Q$$

кўринишидаги жоиз ўрнига қўйишлар орқали бир хил сўзларни иккинчи хил сўзларга ўзгартиришни кўриб ўтамиз.

R сўзнинг таркибига камида битта P сўз кирган бўлсагина, белгиланган йўналишли (ориентирланган) $P \to Q$ ўрнига қўйишни R сўзга қўллаш мумкин. Бу ҳолда унинг таркибидаги исталган битта P сўз Q сўз билан алмаштирилади.

Йўналишсиз $P - Q$ ўрнига қўйишни R сўзга қўллаш, унинг таркибидаги P сўзни Q га ёки Q сўзни P га алмаштиришни билдиради.

Асосан йўналишсиз ўрнига қўйишларни кўриб ўтамиз.

Мисол. *ac − aca* ўрнига қўйишни *bcacab* сўзига икки хил усул билан татбиқ этиш мумкин: бу сўз таркибидаги *aca* сўзини алмаштириш *bcacab* сўзини ва *ac* сўзини алмаштириш *bcacaab* сўзини беради.

Бу ўрнига қўйиш формуласи *abcab* сўзига татбиқ этилмайди.

1-таъриф. *Бирор алфавитдаги ҳамма сўзлар мажмуаси билан жоиз ўрнига қўйишларнинг чекли системаси (тизими)* ***ассоциатив ҳисоб*** *деб аталади.*

Ассоциатив ҳисобни бериш учун унга мос бўлган алфавит ва ўрнига қўйиш системасини бериш кифоя.

Агар R сўзни жоиз ўрнига қўйишни бир марта татбиқ этиш натижасида S сўзга алмаштириш мумкин бўлса, у ҳолда S ни ҳам шу йўсинда R га алмаштириш мумкин. Бу ҳолатда R ва S сўзлар ***қўшни сўзлар*** деб аталади.

2-таъриф. *Ҳар бир R_i ва R_{i+1}($i = 1, 2, ..., n - 1$) жуфт сўзлар R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n сўзлар кетма-кетлигининг қўшни сўзлари бўлса, у ҳолда R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n сўзлар кетма-кетлиги R сўздан S сўзга олиб келадиган* ***дедуктив занжир*** *деб аталади.*

Агар *R* сўздан *S* сўзга олиб борадиган дедуктив занжир мавжуд бўлса, *S* сўздан *R* сўзга олиб борадиган дедуктив занжир ҳам мавжуд бўлади. Бу ҳолда *R* ва *S* сўзларни *эквивалент сўзлар* деб айтамиз ва $R \sim S$ кўринишда белгилаймиз.

Ҳар бир ассоциатив ҳисоб учун ўзининг махсус *сўзлар эквивалентлиги муаммоси* мавжуд: берилган ассоциатив ҳисобдаги ҳар қандай иккита сўз учун улар ўзаро эквивалентми ёки йўқми эканлигини билиш талаб этилади.

Ассоциатив ҳисоб учун сўзлар эквивалентлиги муаммоси 1911 йилда қўйилган эди. Ўша йилнинг ўзида махсус кўринишдаги баъзи ассоциатив ҳисоблар учун сўзлар эквивалентлигини таниш алгоритми тавсия этилган эди.

Табиийки, исталган ассоциатив ҳисобга татбиқ этилиши мумкин бўлган умумий алгоритмни топиш масаласи вужудга келди.

1946 ва 1947 йилларда бир-биридан бехабар ҳолда рус математиги А.Марков ва америка математиги Э.Пост *исталган ассоциатив ҳисоби учун сўзлар эквивалентлигини таниш алгоритми мавжуд эмаслигини* кўрсатдилар. Улар шундай муайян ассоциатив ҳисоблар туздиларки, уларнинг ҳар бири учун сўзлар эквивалентлиги муаммоси алгоритмик ечилмовчи эди.

1955 йилда рус математиги П.С.Новиков гуруҳларнинг айнан тенглиги муаммоси алгоритмик ечимга эга эмаслигини исботлади. Бу муаммо формал равишда ассоциатив ҳисобидаги сўзлар эквивалентлиги муаммосининг хусусий ҳолидир.

А.Марков ва Э.Пост томонидан тадқиқ этилаётган муаммонинг алгоритмик ечимга эга эмаслигини кўрсатиш учун тузилган мисоллар анча мураккаб ва юздан ортиқ жоиз ўрнига қўйишлар қўлланилган эди.

Санкт-Петербурглик математик Г.С.Цейтлин шу муаммонинг алгоритмик ечилмовчилигини исботлаш учун тузган мисолида фақатгина еттита жоиз ўрнига қўйишдан фойдаланади.

Навбатдаги мисол сифатида предикатлар мантиқидаги ечилиш муаммоси ва диофант тенгламалар тўғрисидаги Гильбертнинг 10- муаммосини кўрсатиш мумкин.

1936 йилда американлик математик А.Чёрч предикатлар мантиқидаги ечилиш муаммоси умумий ҳолда алгоритмик ечилмовчилигини исботлади.

1970 йилда рус математиклари Ю.В.Матиясевич ва Г.В.Чудновский диофант тенгламалар ҳақидаги Гильбертнинг 10- муаммоси алгоритмик ечимга эга эмаслигини кўрсатганликларини яна бир эслатамиз.

Шундай қилиб, математикада кўплаб оммавий муаммолар алгоритмик ечимга эга эмас.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. A алфавит ва бу алфавитда ихтиёрий Q сўз берилган бўлсин. Қуйидаги схемалар орқали берилган нормал алгоритмларнинг ишини ифодаланг:

а) $\{\wedge \to \cdot Q$;

б) $B = A \cup \{\alpha\}$ алфавитдаги схема, бу ерда $a \overline{\in} A$:

$$\begin{cases} a\xi \to \xi\alpha, (\xi \in A), \\ \alpha \to \cdot Q, \\ \wedge \to \alpha; \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \xi \to \wedge, (\xi \in A), \\ \wedge \to \cdot Q; \end{cases}$

d) $B = A \cup \{1\}$ алфавитдаги схема:

$\{\xi \to 1 \quad (\xi \in A \to \{1\}) \quad \{\xi \to 1.$

2. f функция қисман рекурсив функция бўлмаслигини исбот қилинг:

1) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \varphi_x(y) \text{ аниқланган бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \varphi_x(x) \text{ аниқланган бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(y), & \text{агар } \varphi_x(y) \text{ аниқланган бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

4) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \varphi_x(y) = z \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

5) $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{агар шундай } y \text{ мавжуд бўлсаки,} \\ & \varphi_x(y) = z \text{ бўлсин,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$

3. f функция қисман рекурсив функция бўлиш ёки бўлмаслигини аниқланг:

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \varphi_x(x) = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \text{аниқланмаган,} & \text{агар } \varphi_x(x) \text{ аниқланган бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар 1 } \varphi_x \text{ функция қийматлар} \\ & \text{тўпламининг элементи бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \varphi_x(y) \text{ примитив} \\ & \text{рекурсив функция бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда;} \end{cases}$

$$5)\quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } \pi \text{ сонининг ўнлик системасидаги} \\ & \text{ёйилмасида чексиз кўп ноллар бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Марковнинг нормал алгоритмлари. Алфавит, символлар, ҳарфлар, сўз, бўш сўз. Алгоритм таърифи.
2. Алфавит устидаги алгоритм. Алфавитдаги алгоритм.
3. Татбиқ этиладиган ва татбиқ этилмайдиган алгоритмлар.
4. Ўрнига қўйиш усули. Алгоритм схемаси.
5. Нормал алгоритм ёки Марков алгоритми.
6. Батамом эквивалент алгоритмлар. Эквивалент алгоритмлар.
7. Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар.
8. Қисмий рекурсив функция билан Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи функция орасидаги муносабат.
9. Умумрекурсив функция билан Марков бўйича ҳисобланувчи функция орасидаги муносабат.
10. Алгоритмик ечилувчи ва ечилмовчи муаммолар.
11. Математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси. Чёрч теоремаси.
12. Марков, Пост, Новиков, Цейтлин, Чёрч ва бошқа математиклар олган илмий натижалар.

VII БОБ

МАТЕМАТИК МАНТИҚНИНГ ТЕХНИКАГА ТАТБИҚИ

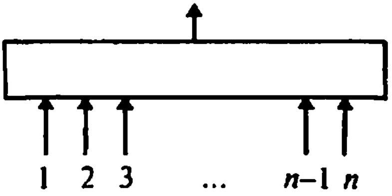
Математик мантиқнинг муҳим бўлимларидан бирини ташкил этувчи мулоҳазалар алгебрасининг техникага (математик кибернетикага) татбиқ этилишини кўришга ўтамиз.

Мазкур бобда реле-контактли схемалар, контактли схемалар ва уларнинг синтези, функционал элементлар ва улардан схемалар ясаш, кўп тактли схемалар, функционал элементлар системасининг тўлиқлиги, схемаларни минималлаштириш муаммоси, тескари боғланиши бўлмаган автоматлар, чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар, Мили ва Мур автоматлари каби масалалар кўриб чиқилган. Мантиқ алгебраси функцияларини схемалар (автоматлар) орқали реализация қилиш масаласига алоҳида аҳамият берилган.

1- §. Функционал элементлар ва улардан схемалар ясаш

☑ *Функционал элемент. Қурилма. Схема ясаш усуллари. Функциянинг реализацияси. Схеманинг математик индукция методи бўйича таърифи. Сохта кириш. Функционал элементлар системасининг тўлиқлиги. Цикл. Теорема.*

Бирор қурилма берилган бўлсин. Унинг ички таркиби бизни қизиқтирмайди. Қурилманинг n та тартибланган (масалан, 1 дан n гача рақамланган) «кириши» ва битта «чиқиши» бўлсин (VII.1- шакл).

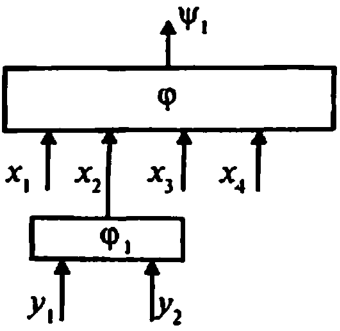


VII.1- шакл.

Қурилманинг ҳар бир киришига икки хил сигнал бериш мумкин (ток бор ёки ток йўқ). Бу сигналларни биз мос равишда 1 ёки 0 билан белгилаймиз. Қурилма киришларига берилган ҳар бир сигналлар мажмуаси учун унинг чиқишида битта сигнал пайдо бўлади (1 ёки 0). Чиқишдаги сигналнинг қиймати киришларга берилган сигналлар мажмуасига боғлиқ бўлади. Шундай аниқланган қурилмани биз *функционал элемент* деб атаймиз. Маълумки, ҳар бир функционал элементга мантиқ алгебрасининг битта $f(x_1, ..., x_n)$ функцияси тўғри келади, бу ҳолда *ҳар бир функционал элемент мантиқ алгебрасининг битта функциясини реализация қилади* деб айтамиз. Бунинг учун киришнинг ҳар бир i номерига x_i $(1 \leq i \leq n)$ ўзгарувчини мос қилиб қўямиз. У ҳолда ўзгарувчиларнинг ҳар бир a_1, .., a_n қийматлар мажмуасига $f(x_1, ..., x_n)$ функциянинг 0 ёки 1 га тенг $f(a_1, ..., a_n)$ қиймати мос келади.

Агар φ_1, ..., φ_n функционал элементлар мавжуд бўлса, у ҳолда улардан янги мураккаб функционал элементларни қуйидагича ясаш мумкин.

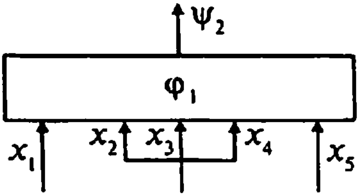
1. Бирорта функционал элементнинг киришини иккинчи бир функционал элементнинг чиқиши билан туташтириш натижасида мураккаб функционал элемент ҳосил қилиш мумкин (VII.2- шакл).



VII.2- шакл.

Ҳосил қилинган қурилмани янги функционал элемент деб қабул қилиш мумкин. Бу функционал элементнинг чиқиши φ_3 элементнинг чиқишидан, киришлари эса φ_2 ва φ_3 элементларнинг озод бўлган киришларидан иборат бўлади. Агар янги ҳосил бўлган қурилманинг киришларига сигналлар мажмуасини юборсак, у ҳолда φ_3 элементнинг озод киришларига сигналлар бир вақтда етиб боради, қолганига бўлса, φ_2 элементнинг чиқишидаги сигнал тушади.

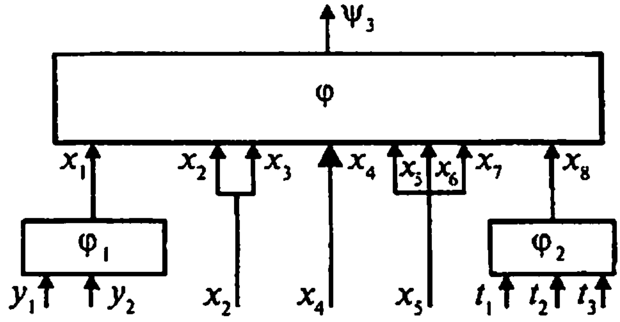
2. Бирор функционал элементнинг икки ва ундан ортиқ киришларини айнан туташтириш натижасида янги мураккаб функционал элемент ҳосил қилиш мумкин (VII.3- шакл).



VII.3- шакл.

Бу функционал элементнинг чиқиши φ_1 элементнинг чиқишидан иборат, киришлари бўлса, туташтирилмаган киришлардан ва айнан туташтирилган киришларга мос келадиган битта киришдан иборат бўлади.

3. Учинчи усул биринчи ва иккинчи усулларнинг комбинациясидан иборат. Масалан, бирорта φ элементнинг бирор киришига φ_1 элементнинг чиқиши, иккинчи бирор киришига φ_2 элементнинг чиқиши уланади ва айрим киришлари айнан тенглаштирилади ва ҳоказо (VII.4- шакл).



VII.4- шакл.

Ҳосил бўлган янги мураккаб функционал элементга биринчи ва иккинчи усулларни қўллаб, яна янги мураккаб функционал элементга эга бўламиз. Шу процессни чексиз давом эттиришимиз мумкин.

Агар $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функционал элементлар мос равишда $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функцияларни реализация қилса, у ҳолда ҳосил бўлган янги мураккаб функционал элемент реализация қиладиган функция $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функцияларнинг суперпозициясидан иборат бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар бирор S_i функцияни реализация қиладиган φ_i элементнинг киришига f_i функцияни реализация қиладиган φ_j элементнинг чиқиши уланган бўлса, у ҳолда f_i функциянинг ўша киришига мос бўлган аргументи ўрнига f_i функцияни келтириб қўйишимиз керак. Ҳамма айнан туташтирилган киришлар ўрнига уларга мос келган фақат битта аргумент қўйиш керак, шунинг учун VII.2- шаклга асосан, φ функционал элемент реализация қиладиган $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функциянинг x_2 аргументи ўрнига φ_1 функционал элемент реализация қиладиган $f_1(y_1, y_2)$ функцияни келтириб қўйиш керак. Натижада, $f(x_1, f_1(y_1, y_2)x_3, x_4) = \psi(x_1, x_3, x_4, y_1, y_2)$ функцияни реализация қиладиган мураккаб функционал элементга эга бўламиз, ψ_1 функция бўлса, таърифга асосан, f ва f_1 функциялар суперпозицияси маҳсулидир. VII.3- шаклдаги функционал элемент $f(x_1, x_2, x_2, x_4, x_5) = \psi_2(x_1, x_2, x_5)$ функцияни, VII.4- шаклдаги функционал элемент эса

$$\begin{gathered}
f(x_1, x_2, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_7, x_7, x_8) = \\
= f(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \\
= f(\varphi_1(y_1, y_2), x_2, x_4, x_5, \varphi_2(t_1, t_2, t_3)) = \\
= \psi_3(x_2, x_5, y_1, y_2, t_1, t_2, t_3)
\end{gathered}$$

функцияни реализация қилади. Демак, ψ_1 функция f ва f_1 функциялар, ψ_2 функция f функция ва ψ_3 функция эса f, f_1, f_2, f_3 функцияларнинг суперпозициясидир.

Биринчи ва иккинчи усулларни қўллаш натижасида ҳосил қилинган қурилмалар *схемалар (тўғри схемалар)* деб аталади.

Энди схеманинг индукция методи бўйича таърифини берайлик.

1-таъриф. *а) Ҳар қандай функционал элемент схема бўлади. Унинг кириши функционал элементнинг киришидан, чиқиши бўлса, унинг чиқишидан иборат бўлади;*

б) агар S_0 схема ва унинг иккита кириши айнан туташтирилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган S қурилма ҳам схема бўлади. S нинг чиқиши S_0 нинг чиқишидан ва S нинг киришлари бўлса, S_0 нинг туташтирилмаган киришларидан ва айнан туташтирилган иккита киришга мос келган киришдан иборат бўлади;

в) агар S_0 ва S_1 схемалар бўлса, у ҳолда S_0 схеманинг бирорта киришига S_1 схеманинг чиқишини улаш натижасида ҳосил бўлган S қурилма ҳам схема бўлади. S схеманинг чиқиши S_0 схеманинг чиқишидан ва унинг киришлари S_1 нинг ҳамма киришларидан ҳамда S нинг чиқиши билан туташтирилган S_0 нинг киришидан ташқари озод қолган ҳамма киришларидан иборатдир;

г) б) ва в) бандларда тасвирланган усуллар орқали чекли қадамда ҳар қандай схемани функционал элементлардан ясаш мумкин.

Бу таъриф олдинги параграфларда функциялар суперпозицияси ҳақида берилган таърифдан шакли жиҳатдан бирмунча фарқ қилади. Бу фарқ биринчи навбатда схеманинг ранги (функционал элементлардан схема ясаш учун бажарилган қадамлар сони *схеманинг ранги* деб аталади) деган тушунчани киритмаганимиз туфайли пайдо бўлди. Иккала таърифни таққослаб таҳлил этишни ўқувчига ҳавола этамиз.

Энди мантиқ алгебрасининг схема реализация қиладиган функциясини индукция методи орқали топайлик.

1. Индукция асоси. Ҳар бир функционал элемент мантиқ алгебрасининг битта функциясини реализация қилиши аниқланган.

2. Индуктив ўтиш. а) Агар S_0 схема $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни реализация қилса, у ҳолда 1-таърифнинг б) банди асосида қурилган S_1 схема айнан туташтирилган киришларга мос келадиган x_i, x_j аргументларни айнан тенглаштириш натижасида ҳосил қилинган функцияни реализация қилади;

б) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни S_0 схема ва $\psi(y_1, y_2, ..., y_m)$ функцияни S_1 схема реализация қилсин, бу ерда $x_1, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_m$ лар бир-бирига тенг бўлмаган ўзгарувчилар бўлсин. У ҳолда 1-таърифнинг в) бандига асосан қурилган S схема $f(x_1, ..., x_{i-1}, \psi(y_1, ..., y_m), x_{i+1}, ..., x_n$ ни реализация қилади, бу ерда $\psi(y_1, ..., y_m)$ функция f функциянинг x_i аргументи ўрнига қўйилган.

Тенг кучли функцияларни бир хил функционал элемент реализация қилади деб қабул қиламиз. Бунинг учун *сохта кириш* деган тушунчани киритамиз.

2-таъриф. *Агар φ функционал элемент реализация қиладиган $f(x, y_1, ..., y_n)$ функциянинг қиймати x аргументга мос келган кириш сигналининг қиймати (0 ёки 1)га боғлиқ бўлмаса (яъни x ўзгарувчи $f(x, y_1, ..., y_n)$ нинг сохта аргументи бўлса, у ҳолда φ элементнинг x аргументга мос кириши* ***сохта кириш*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Фақатгина киришларнинг рақамланиш тартиби ва сохта киришлари билан фарқ қиладиган функционал элементлар* ***эквивалент функционал элементлар*** *деб аталади.*

Демак, функционал элементни ўзгартирмасдан исталганча сохта киришларни олиб ташлаш ёки қўйиш мумкин.

$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ система $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементлар системаси ва $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ система $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементлар мос равишда реализация қиладиган $f_1, f_2, ..., f_n$ функциялар системаси бўлсин. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ система қандай шартларни қаноатлантирганда, мантиқ алгебрасининг исталган функциясини унинг $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементларидан ясалган схема орқали реализация қилиш мумкинлиги масаласини кўрайлик.

Биринчи ва иккинчи усулларни қўллаш натижасида ҳосил қилинган қурилмалар *схемалар (тўғри схемалар)* деб аталади.

Энди схеманинг индукция методи бўйича таърифини берайлик.

1-таъриф. *а) Ҳар қандай функционал элемент схема бўлади. Унинг кириши функционал элементнинг киришидан, чиқиши бўлса, унинг чиқишидан иборат бўлади;*

б) агар S_0 схема ва унинг иккита кириши айнан туташтирилган бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган S қурилма ҳам схема бўлади. S нинг чиқиши S_0 нинг чиқишидан ва S нинг киришлари бўлса, S_0 нинг туташтирилмаган киришларидан ва айнан туташтирилган иккита киришга мос келган киришдан иборат бўлади;

в) агар S_0 ва S_1 схемалар бўлса, у ҳолда S_0 схеманинг бирорта киришига S_1 схеманинг чиқишини улаш натижасида ҳосил бўлган S қурилма ҳам схема бўлади. S схеманинг чиқиши S_0 схеманинг чиқишидан ва унинг киришлари S_1 нинг ҳамма киришларидан ҳамда S нинг чиқиши билан туташтирилган S_0 нинг киришидан ташқари озод қолган ҳамма киришларидан иборатдир;

г) б) ва в) бандларда тасвирланган усуллар орқали чекли қадамда ҳар қандай схемани функционал элементлардан ясаш мумкин.

Бу таъриф олдинги параграфларда функциялар суперпозицияси ҳақида берилган таърифдан шакли жиҳатдан бирмунча фарқ қилади. Бу фарқ биринчи навбатда схеманинг ранги (функционал элементлардан схема ясаш учун бажарилган қадамлар сони *схеманинг ранги* деб аталади) деган тушунчани киритмаганимиз туфайли пайдо бўлди. Иккала таърифни таққослаб таҳлил этишни ўқувчига ҳавола этамиз.

Энди мантиқ алгебрасининг схема реализация қиладиган функциясини индукция методи орқали топайлик.

1. Индукция асоси. Ҳар бир функционал элемент мантиқ алгебрасининг битта функциясини реализация қилиши аниқланган.

2. Индуктив ўтиш. а) Агар S_0 схема $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни реализация қилса, у ҳолда 1-таърифнинг б) банди асосида қурилган S_1 схема айнан туташтирилган киришларга мос келадиган x_i, x_j аргументларни айнан тенглаштириш натижасида ҳосил қилинган функцияни реализация қилади;

б) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни S_0 схема ва $\psi(y_1, y_2, ..., y_m)$ функцияни S_1 схема реализация қилсин, бу ерда $x_1, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_m$ лар бир-бирига тенг бўлмаган ўзгарувчилар бўлсин. У ҳолда 1-таърифнинг в) бандига асосан қурилган S схема $f(x_1, ..., x_{i-1}, \psi(y_1, ..., y_m), x_{i-1}, ..., x_n$ ни реализация қилади, бу ерда $\psi(y_1, ..., y_m)$ функция f функциянинг x_i аргументи ўрнига қўйилган.

Тенг кучли функцияларни бир хил функционал элемент реализация қилади деб қабул қиламиз. Бунинг учун *сохта кириш* деган тушунчани киритамиз.

2-таъриф. *Агар φ функционал элемент реализация қиладиган $f(x, y_1, ..., y_n)$ функциянинг қиймати x аргументга мос келган кириш сигналининг қиймати (0 ёки 1)га боғлиқ бўлмаса (яъни x ўзгарувчи $f(x, y_1, ..., y_n)$ нинг сохта аргументи бўлса, у ҳолда φ элементнинг x аргументга мос кириши* ***сохта кириш*** *деб аталади.*

3-таъриф. *Фақатгина киришларнинг рақамланиш тартиби ва сохта киришлари билан фарқ қиладиган функционал элементлар* ***эквивалент функционал элементлар*** *деб аталади.*

Демак, функционал элементни ўзгартирмасдан исталганча сохта киришларни олиб ташлаш ёки қўйиш мумкин.

$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ система $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементлар системаси ва $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ система $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементлар мос равишда реализация қиладиган $f_1, f_2, ..., f_n$ функциялар системаси бўлсин. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ система қандай шартларни қаноатлантирганда, мантиқ алгебрасининг исталган функциясини унинг $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементларидан ясалган схема орқали реализация қилиш мумкинлиги масаласини кўрайлик.

4-таъриф. *Мантиқ алгебрасидаги исталган $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни Ф системадаги $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ функционал элементлардан ясалган схема орқали реализация қилиш мумкин бўлса, бу функционал элементлар системаси* ***тўлиқ система*** *деб аталади.*

Биз юқорида схема реализация қиладиган функция шу схемани ясашда фойдаланилган функционал элементлар реализация қиладиган функцияларнинг суперпозициясидан иборат эканлигини кўрган эдик. Демак, $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ функциялар системаси Пост теоремасининг шартларини қаноатлантирган тақдирдагина, $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ системасидаги функционал элементлар орқали мантиқ алгебрасининг исталган функциясини реализация этадиган схема ясашимиз мумкин экан. Бу ердан функционал элементлардан ясалган схемалар тили мантиқ алгебраси функцияларининг суперпозицияси тилига эквивалентлиги келиб чиқади.

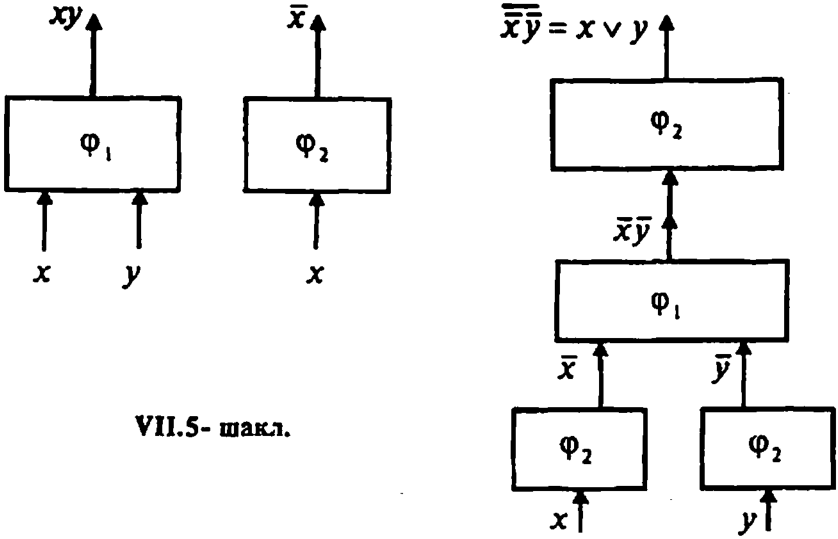
Мисоллар. 1. $F_1 = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлганлиги учун F_1 нинг элементларини мос равишда реализация қиладиган $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ элементлардан иборат $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ система тўлиқ бўлади.

2. $F_2 = \{xy, x \vee y\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлмаганлиги учун F_2 нинг элементларини мос равишда реализация қиладиган φ_1, φ_2 элементлардан иборат $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ система тўлиқ бўлмайди.

3. $F_3 = \{xy, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлганлиги учун F_3 нинг элементларини мос равишда реализация қиладиган φ_1, φ_3 элементлардан иборат $\Phi_3 = \{\varphi_1, \varphi_3\}$ система ҳам тўлиқ бўлади.

4. $F_4 = \{x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлганлиги учун F_4 нинг элементларини мос равишда реализация қиладиган φ_2, φ_3 элементлардан иборат $\Phi_4 = \{\varphi_2, \varphi_3\}$ система ҳам тўлиқ бўлади.

Мисол. $\Phi_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ва $F_1 = \{xy, \bar{x}\}$ бўлсин. φ_1 функционал элемент xy функцияни, φ_2 эса $\bar{x}$ функцияни реа-



VII.5- шакл.

лизация қилади. Бу функционал элементлар орқали $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$, 0 ва 1 элементар функцияларни реализация қилиш талаб этилсин.

1) $x \vee y$ ни реализация қилиш учун $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$ формуладан фойдаланамиз. Агарда φ_2 нинг киришига $\bar{x}\bar{y}$ сигнал берсак, у ҳолда унинг чиқишида $\overline{\bar{x}\bar{y}} = x \vee y$ сигнал пайдо бўлади. $\bar{x}\bar{y}$ сигнални ҳосил қилиш учун φ_1 элемент киришларининг бирига $\bar{x}$ ва иккинчисига $\bar{y}$ сигналларни берамиз. Натижада, унинг чиқишида $\bar{x}\bar{y}$ сигнал пайдо бўлади ва уни φ_2 нинг кириши билан улаймиз. $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ни ҳосил қилиш учун иккита φ_2 элементнинг бирининг киришига x ва иккинчисининг киришига y сигналларни бериб, уларнинг чиқишлари φ_1 нинг киришлари билан уланади. Шундай қилиб, VII.5- шаклда ифода этилган $(x \vee y)$ функцияни реализация қиладиган S_1 схемага эга бўламиз.

2) $x \rightarrow y$ функцияни схема орқали реализация қилиш учун $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}}$ формуладан фойдаланамиз. Агарда φ_2 элементнинг киришига $x\bar{y}$ сигнал берилса, у ҳолда унинг чиқишида берилган сигналнинг инкори, яъни $\overline{x\bar{y}} = x \rightarrow y$ сигнал пайдо бўлади. Ўз навбатида $x\bar{y}$ сигнални ҳосил

қилиш учун φ_1 элемент киришларининг бирига x ва иккинчисига $\bar{y}$ сигнални бериш керак ҳамда унинг чиқишини $x\bar{y}$ функцияни реализация қиладиган φ_2 элементнинг киришига улаш керак. $\bar{y}$ сигнални ҳосил қилиш учун φ_2 элементнинг киришига y сигнал бериб, унинг чиқишини φ_1 нинг иккинчи киришига улаймиз. Натижада, $x \to y = \overline{x\bar{y}}$ функцияни реализация қиладиган S_2 схемага эга бўламиз (VII.6- шакл).

3) $x \leftrightarrow y$ функцияни реализация қиладиган схемани ясаш учун $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y}$ формуладан фойдаланамиз. Юқорида акс эттирилган услубдан фойдаланиб, $x \leftrightarrow y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y}$ функцияни реализация қиладиган S_3 схемани ҳосил қиламиз (VII.7- шакл).

4) 1 константани реализация қилиш учун $x \vee \bar{x} = 1$ ва 0 ни реализация қилиш учун $x\bar{x} = 0$ формулалардан фойдаланамиз ва уларни реализация қиладиган схемалар VII.8- шаклда келтирилган.

Мисол ечимининг таҳлилидан кўриниб турибдики, бирор ихтиёрий $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни схема орқали реализация қилиш учун:

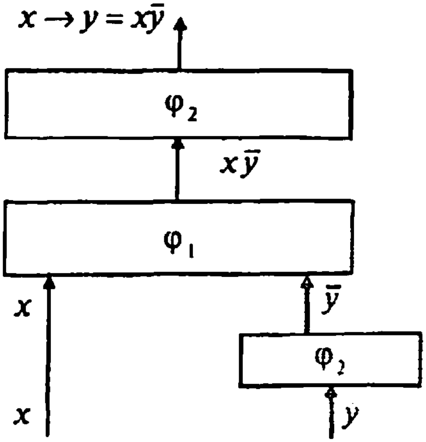
1) берилган Ф системадаги $\varphi_1, ..., \varphi_n$ функционал элементлардан кўп поғонали схема тузишга тўғри келади;

2) кўп поғонали схемани юқоридан пастга қараб ясашга тўғри келади;

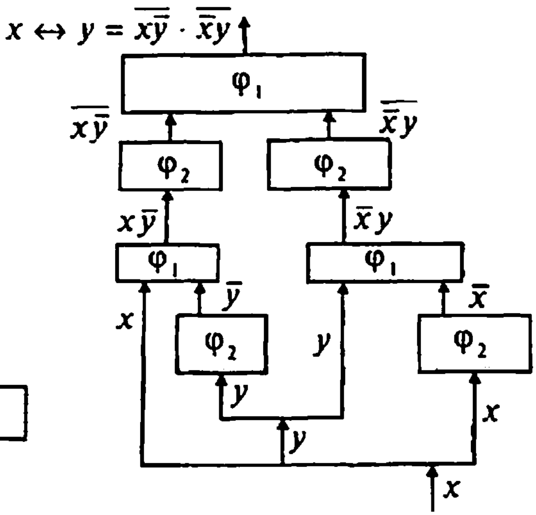
3) схеманинг озод чиқишли функционал элементи киришларига шундай сигналлар мажмуасини бериш керакки, унинг чиқишида қурилаётган схема реализация қилиши керак бўлган f функцияга мос келадиган сигнал пайдо бўлсин;

4) схеманинг ички функционал элементлари киришларига шундай сигналлар мажмуасини бериш керакки, унинг чиқишида сизга керак бўлган сигнал пайдо бўлсин.

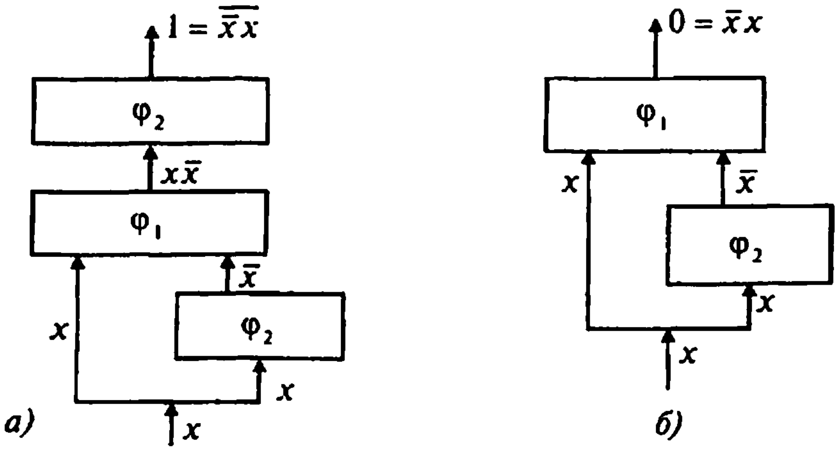
Таърифга асосан берилган қурилманинг схема эканлигини аниқлаш мумкин. Аммо схема эмаслигини аниқлаш учун берилган қурилманинг схемага лойиқ бўлган хусусиятларга эга эмаслигини кўрсатиш керак бўлади.



VII.6- шакл.



VII.7- шакл.



а) б)

VII.8- шакл.

5-таъриф. *$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функционал элементлар берилган бўлсин. Агар φ_1 элементнинг чиқиши φ_2 элементнинг киришига, φ_2 нинг чиқиши φ_3 элементнинг киришига ва ҳоказо, φ_{k-1} чиқиши φ_k нинг киришига ва φ_k нинг чиқиши φ_1 нинг киришига уланган бўлса, у ҳолда бундай қурилма* ***цикл*** *деб аталади ва қурилмада* ***тескари боғланиш бор*** *деб айтилади.*

Теорема. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *функционал элементлардан ясалган S қурилма:*

1) φ_i ($i = 1, ..., n$) *элементлардан фақатгина биттасининг чиқиши озод бўлса;*

2) *ҳар бир* φ_i *элементнинг кириши фақатгина* φ_j *элементларнинг биттасининг чиқиши билан уланган бўлса;*

3) *S қурилмада цикл (тескари боғланиш) мавжуд бўлмаганда ва фақат шундагина схема бўлади.*

Теоремани исбот қилишни ўқувчиларга ҳавола этамиз.

2- §. Кўп тактли схемалар

☑ *Такт. Ушлаб туриш вақти. Ушлаб туриш элементи. Кўп тактли схема. Бир тактли функционал элементлар системасининг тўлиқлиги. Теорема.*

Мазкур бобнинг биринчи параграфида кўрилган функционал элементлар ва улардан ясалган схемалар оний равишда ишлайди деб фараз қилган эдик, яъни уларнинг киришларига сигналлар мажмуаси берилган заҳотиёқ (уларнинг) чиқишларида натижавий сигнал пайдо бўлади. Демак, киришларга берилган сигналлар мажмуасини ишлаб чиқиш учун ҳеч қандай вақт сарфланмайди.

Аммо, амалда функционал элемент киришларига берилган сигналлар мажмуасига мос келадиган унинг чиқишидаги натижавий сигнални олиш учун бир оз вақт сарф бўлади. Бундай ҳолатда схеманинг киришларига берилган сигналлар мажмуаси унинг ички функционал элементларининг киришларига ҳар хил вақтда етиб келади, чунки, биринчидан, элементларнинг киришларига етиб келган сигналлар бир қанча элементлардан ўтиб келади, иккинчидан, ҳар бир элемент киришларига етиб келган сигналларни ҳар хил вақтларда ишлаб чиқади. Бироқ схема киришларига берилган сигналлар мажмуасини етарлича узоқ вақт бериб туриш мумкинки, токи схема ички элементларининг ҳамма киришларига сигналлар етиб келсин. Натижада, схеманинг чиқишида маълум вақтдан кейин унинг киришларига берилган сигналлар мажмуасига мос келадиган сигнал пайдо бўлади. Шундан кейин киришларга берилган сигналлар наборини тўхтатиш мумкин ва бу схемани у реализация қиладиган функция қийматини аргументлар қийматининг бошқа мажмуасида ҳисоблаш учун ишлатиш мумкин.

Функционал элементнинг бу иккинчи хил ишлаши қуйидаги камчиликларга эга бўлади:

1) киришга сигналлар мажмуасини маълум вақт давомида бериб туриш;

2) маълум вақт давомида схема чиқишида пайдо бўладиган сигнал унинг киришларига берилган сигналлар мажмуасига мос келмаслиги.

Янги шароитда қандай қурилмани биз функционал элемент деб биламиз деган саволга жавоб берайлик.

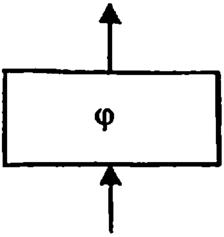
1-таъриф. *Элемент (VII.1-шакл) учун аниқ бўлган ν вақтдан кейин унинг чиқишида киришларига берилган сигналлар мажмуасига мос келадиган сигнал (реализация этиладиган функциянинг берилган сигналлар наборидаги қиймати) пайдо бўлса, бундай қурилма функционал элемент деб аталади.*

Агар келгуси моментда элемент киришларига янги сигналлар мажмуаси берилса, у ҳолда ν вақтдан кейин унинг чиқишида берилган сигналлар мажмуасига мос келадиган сигнал пайдо бўлади, яъни киришларга кетма-кет бериладиган сигналлар мажмуаси бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлаб чиқилади.

Вақт дискрет равишда ўзгаради деб фараз қиламиз ($t = 1, 2, 3, \dots, k$) ва вақт бирлигини бир такт деб айтамиз.

2-таъриф. ν *вақт (элемент киришига берилган сигналлар мажмуасига мос келадиган сигнал унинг чиқишида пайдо бўлишигача сарф этилган вақт) функционал элементнинг ушлаб туриш вақти деб аталади.*

Бундан кейин схемани берилган таърифга мос келадиган янги маънодаги функционал элемент сифатида қараймиз. Бундай схемаларни ясаш жараёнида ушлаб туриш элементлари катта роль ўйнайди.



VII.9- шакл.

3-таъриф. *Агар функционал элемент чиқишида маълум вақтдан (тактдан) кейин унинг киришига берилган (0 ёки 1) сигналнинг ўзи пайдо бўлса, у ҳолда бундай функционал элемент **ушлаб туриш элементи** деб аталади* (VII.9- шакл).

Ушлаб туриш элементи функцияни реализация қиладиган функционал элементдир, яъни унинг чиқишида маълум вақтдан кейин киришига берилган сигналнинг ўзи пайдо бўлади.

Бундан кейин (агарда махсус айтилган бўлмаса) ҳамма функционал элементларни бир тактли, яъни элементнинг киришига сигнал берилгандан кейин унинг чиқишида натижавий сигнал пайдо бўлгунча бир такт вақт ўтади деб фараз қиламиз.

4-таъриф. *Агар S схеманинг n та киришига $(x_1, x_2, ..., x_n)$ сигналлар мажмуасини бергандан маълум v тактдан кейин унинг чиқишида f функциянинг $f(x_1, ..., x_n)$ қиймати ҳосил бўлса, у ҳолда S схема $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни v ушлаб туриш вақти билан реализация қилади деб аталади.*

Бундай S схемани v ушлаб туриш вақти билан $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни реализация қиладиган функционал элемент деб қараш мумкин.

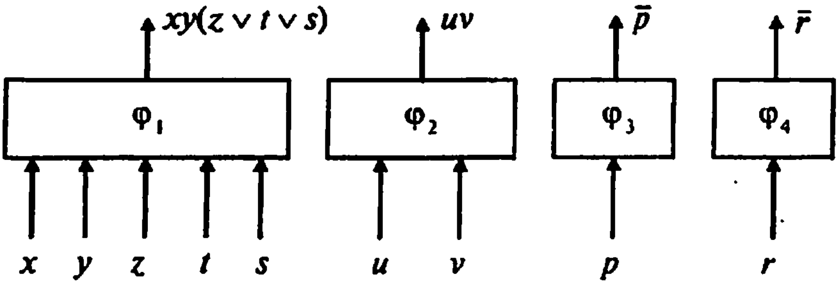
Мантиқ алгебрасининг исталган функциясини реализация қиладиган схема *тўғри схема* деб аталади.

Бир тактли функционал элементлардан тузилган схемани *кўп тактли*, оний равишда ишлайдиган функционал элементлардан тузилган схемани *ноль тактли схема* деб атаймиз.

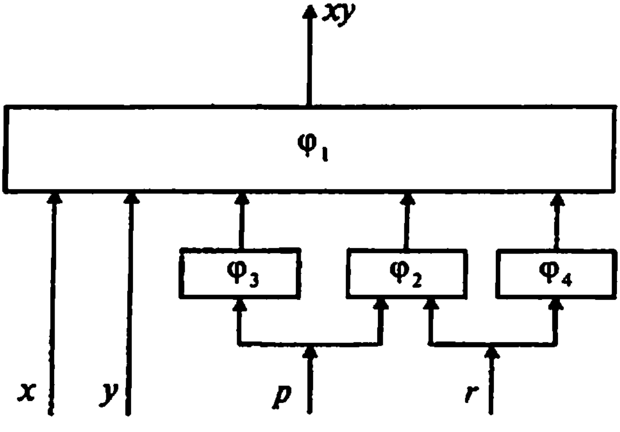
1-изоҳ. Агар (бир тактли функционал элементлардан тузилган) тўғри схемадаги ҳамма функционал элементларни ноль тактли деб фараз қилсак, у ҳолда ҳосил бўлган ноль тактли схема ҳам кўп тактли схема реализация қиладиган функцияни реализация қилади.

2-изоҳ. $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни реализация қиладиган S тўғри схеманинг ушлаб туриш вақти v доимо схеманинг кетма-кет уланган ички функционал элементлари сонига тенг эмас. Масалан, φ_1, φ_2, ..., φ_n функционал элементлардан (VII.10-шакл) тузилган схема (VII.11-шакл), кетма-кет уланган функционал элементларнинг сони иккига тенг бўлишига қарамасдан, xy функцияни реализация қилувчи бир тактли схемадир.

3-изоҳ. Константаларни (0 ёки 1) реализация қиладиган схемалар ёки функционал элементларнинг ҳамма киришлари сохта киришлардир. Бундай схемаларни ноль тактли схемалар деб айтиш мумкин.



VII.10-шакл.



VII.11-шакл.

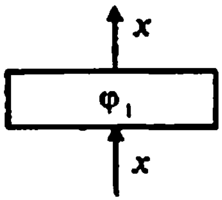
Энди φ_1, φ_2, ..., φ_n бир тактли функционал элементлардан иборат Ф системанинг тўлиқлик масаласини кўришга ўтамиз.

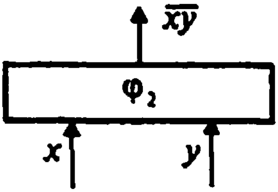
5-таъриф. *Агар мантиқ алгебрасининг исталган функциясини $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ системадаги функционал элементлардан тузилган схема орқали реализация қилиш мумкин бўлса, у ҳолда Ф система **тўлиқ система** деб аталади.*

Мисол. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ шундай бир тактли функционал элементлар системасики, бу ерда φ_1 элемент x функцияни реализация қиладиган ушлаб туриш элементи, φ_2 эса $\overline{xy}$ Шеффер функциясини реализация қиладиган функционал элементдир. Ушбу:

а) $\bar{x}$; б) xy; в) $x \vee y$; г) 1; д) 0; е) $x + y$; з) $x \to y$; ж) $x \leftrightarrow y$

функцияларни реализация қилувчи схемаларни φ_1 ва φ_2 функционал элементлар орқали ясаш ва ушлаб туриш вақтини (тактини) аниқлаш талаб этилади.

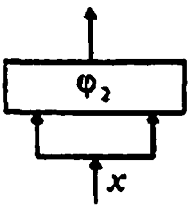




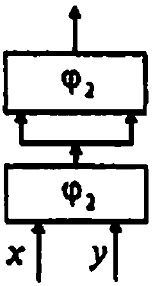
Юқорида кўрсатилган функцияларни реализация этадиган схемалар қуйидагича бўлади (VII.12- *а—ж* шакллар):

а) $\bar{x} = \varphi_2(x, x)$

б) $xy = \overline{\varphi_2(x, y)}$



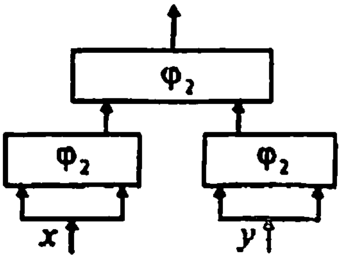
$\nu = 1$



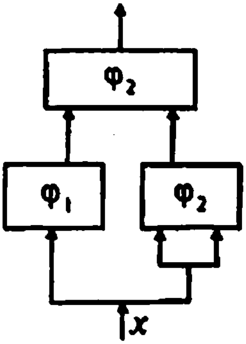
$\nu = 2$

в) $x \vee y = \varphi_2(\bar{x}, \bar{y})$

г) $1 = \overline{x\bar{x}} = \varphi_2(x, \bar{x})$



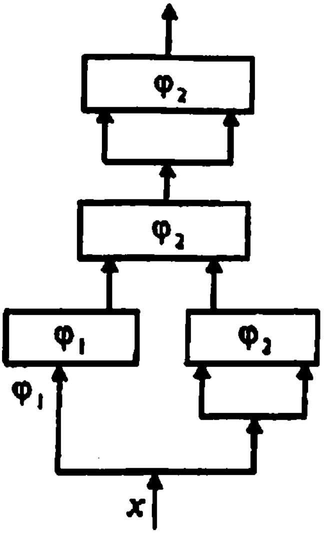
$\nu = 2$



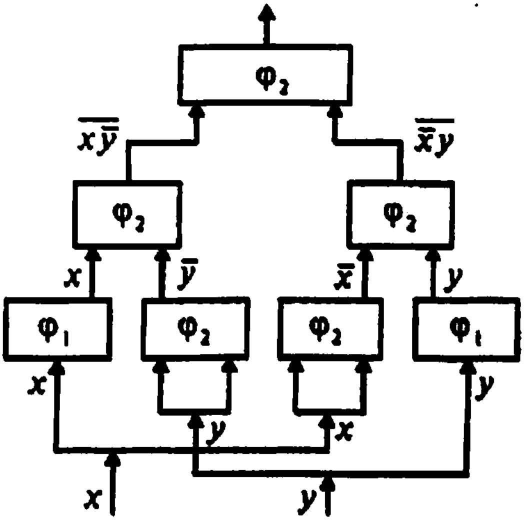
$\nu = 2$

д) $0 = \bar{1}$

е) $x - y = x\bar{y} \vee \bar{x}y = \varphi_2(\varphi_2(x, \bar{y}), \varphi_2(\bar{x}, y))$

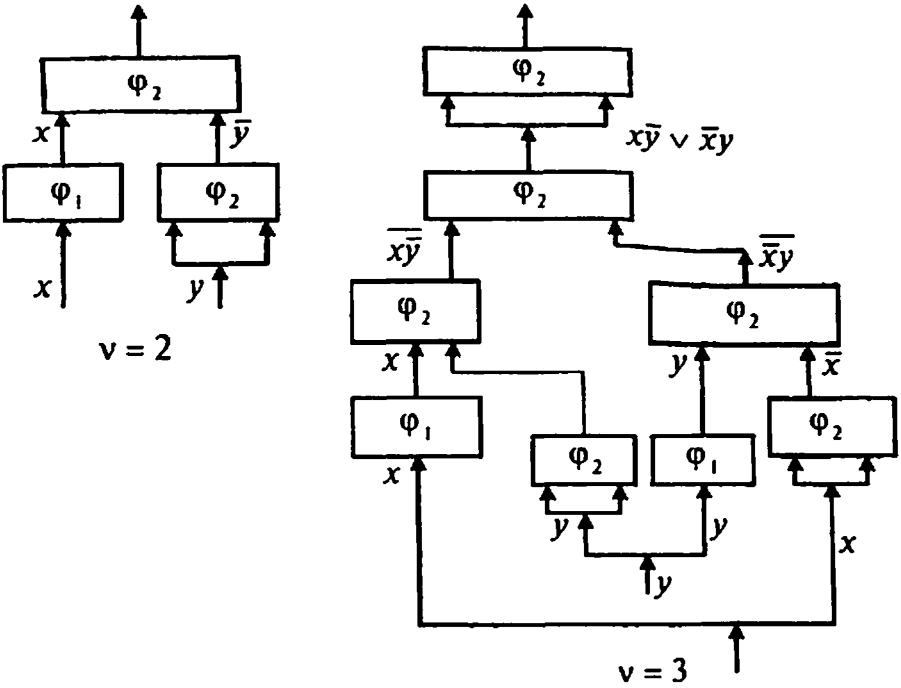


$\nu = 3$



$\nu = 3$

з) $x \to y = \varphi_2(x, \bar{y})$ ж) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = \overline{x\bar{y} \vee \bar{x}y}$



VII.12- шакл.

Мисоллар. 1. Шеффер функциясини реализация қиладиган φ элементдан иборат Φ = {φ} система тўлиқ бўладими?

2. $\Phi_1 = \{0, 1\}$ элементлар системасининг тўлиқлигини исбот қилинг.

Мисоллар ечимларининг таҳлилидан маълумки, бир тактли $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функционал элементлар системаси $\Phi\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ нинг тўлиқлик шартлари ноль тактли $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*$ функционал элементлар системаси $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ нинг тўлиқлик шартларига мос келмайди.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: 1) мантиқ алгебрасининг элементлари $f(0, 0, \ldots, 0) = 1$ ва $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$ (0 ва 1 сақламовчи функциялар, яъни аргументларини айнан тенглаштирилганда f функция га тенг бўлади) функциялардан иборат тўпламни Q билан;

2) исталган қисм ўзгарувчилар ўрнига константаларни (0 ёки 1) қўйиб, қолган қисмини айнан тенглаштирганда 0, 1 ёки $\overline{x}$ (яъни x пайдо бўлмайди) ҳосил бўладиган функциялардан иборат тўпламни R билан белгилаймиз.

Теорема. *Агар* $\Phi\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ *бир тактли функционал элементлар системаси реализация қиладиган функциялар ичида:*

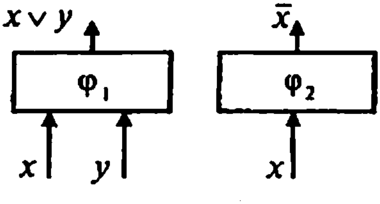
а) Пост теоремаси шартларини қаноатлантирувчи функциялар системаси;

б) Q тўплам элементи бўлмаган функциялар;

в) R тўплам элементи бўлмаган функциялар мавжуд бўлганда ва фақат шундагина бундай система тўлиқ бўлади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

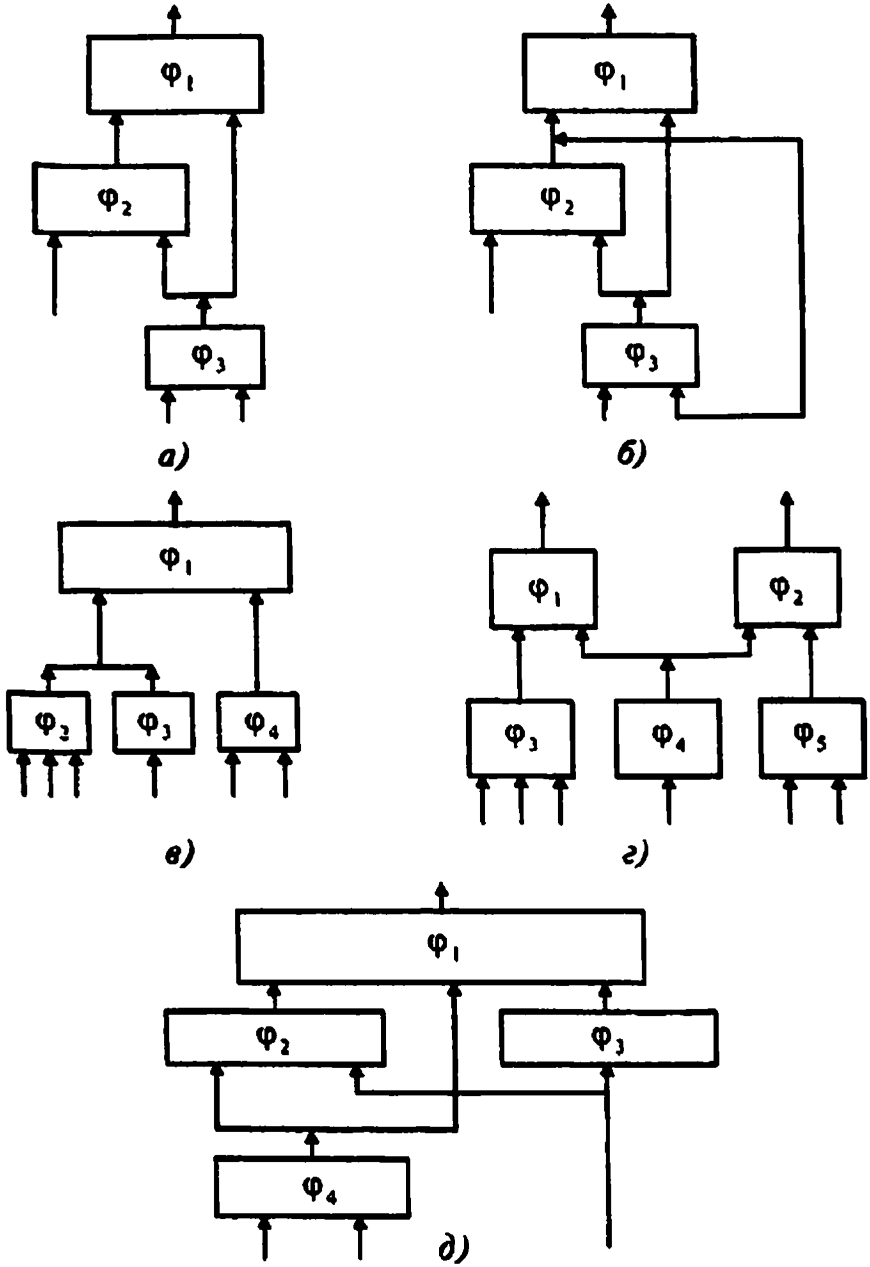
1. $F_2 = (x \vee y, \overline{x})$ системадаги функцияларни реализация қиладиган $\Phi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ функционал элементлар системаси берилган бўлсин (VII.13- шакл).



VII.13- шакл.

xy, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$, 0 ва 1 элементар функцияларни реалилизация этадиган схемалар ясанг.

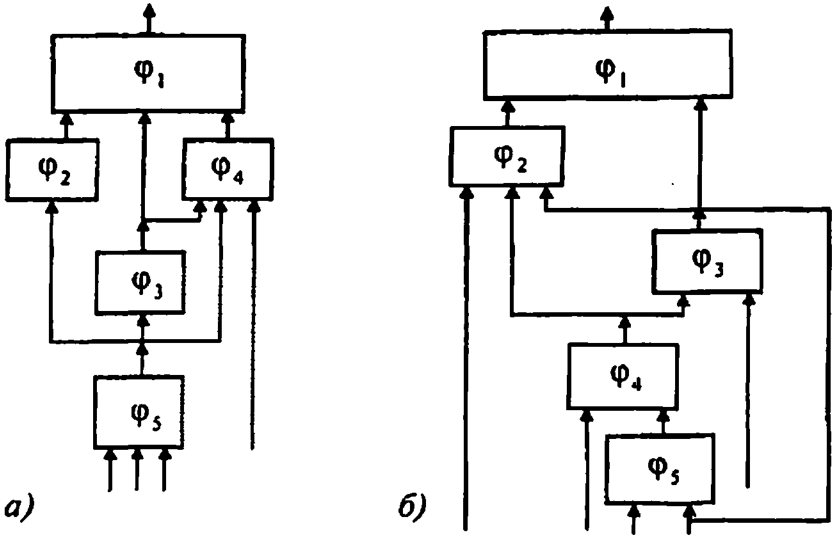
2. $F_1 = (\overline{xy})$ ва $\Phi_1 = \{\varphi_1\}$ ҳамда $F_2 = (\overline{x \vee y})$ ва $\Phi_2 = \{\varphi_2\}$ лар берилган бўлсин. Ҳамма элементар функцияларни реализация қиладиган схемаларни аввал φ_1 функционал элемент орқали, кейин φ_2 орқали ясанг.
3. VII.14- шаклдаги функционал элементлардан тузилган қурилмаларнинг қайси бири схема бўлади?



а) б) в) г) д)

VII.14- шакл.

4. VII.15- шаклдаги қурилмаларнинг қайси бири схема бўлади?



а) б)

VII.15- шакл.

5. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ бўлсин, бу ерда φ_1 функционал элемент $\overline{x \vee y}$ Шеффер функциясини ва φ_2 функционал элемент x функциясини (ушлаб туриш элементи) реализация қилади. Мантиқ алгебрасининг ҳамма элементар функцияларини реализация қиладиган схемалар ясанг.

6. $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ бўлсин, бу ерда φ_1 функционал элемент $\overline{x \wedge y}$ Шеффер функциясини ва φ_2 функционал элемент x функциясини (ушлаб туриш элементи) реализация қилади. $x \to y \to z$, $(x \vee y) \leftrightarrow z$, $xz \to y$, $(x \leftrightarrow y) \to z$, $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$, $(x \to y) \vee z$ функцияларни реализация қиладиган схемалар ясанг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Функционал элементлар ва улардан схемалар ясаш.
2. Схеманинг математик индукция методи бўйича таърифи.
3. Функционал элементлар системасининг тўлиқлиги ҳақидаги теорема.

4. Цикл деб нимага айтилади?
5. Ушлаб туриш вақти ва ушлаб туриш элементи.
6. Кўп тактли схеманинг таърифи.
7. Бир тактли функционал элементлар системасининг тўлиқлиги ҳақидаги теорема.

3- §. Тескари боғланиши бўлмаган автоматлар

☑ *Элементнинг юқори ва қуйи индекси. Тўғри схема. Тескари боғланиши бўлмаган автомат. Характеристик функция.* ρ- *индекси. Кучсиз автоматли тўлиқ система.*

Ўтган параграфда мантиқ алгебрасининг функцияларини фақат тўғри схемаларгина реализация қилишини кўрдик. Бир тактли функционал элементлардан ясалган схеманинг умумий ҳолда ишлаш жараёнини кўрайлик. Схема киришларига ҳар моментда сигналлар мажмуаси бериб турилади. Аниқки, схеманинг чиқишидаги сигнал унинг киришларига олдинги моментларда берилган сигналлар мажмуасига боғлиқ бўлади.

Функционал элементнинг қуйи ва юқори индекслари деган тушунчани киритайлик.

1-таъриф. *Схеманинг киришларига берилган сигналлар* φ *функционал элементнинг чиқишида ҳосил бўлишига қадар босиб ўтилган ички функционал элементларнинг максимал сони (*φ *элементнинг ўзи ҳам киради) элементнинг* ***юқори индекси*** *ва минимал сони* ***қуйи индекси*** *деб аталади.* φ *функционал элемент* S *схеманинг чиқиш элементи (яъни озод чиқишга эга бўлган элементи) бўлсин. У ҳолда* φ *элементнинг юқори ва қуйи индексларини мос равишда* $\mu = \mu(S)$ *ва* $\eta = \eta(S)$ *билан белгилаймиз.*

Демак, схема тўғри бўлиши учун бирор φ элементнинг киришларига чиқишлари уланган ҳамма функционал элементларнинг юқори индекслари тенг бўлиши керак (етарли шарт).

Схема таърифига асосан, t вақт моментида схеманинг чиқишидаги сигнал унинг киришларига $t-\mu$ дан $t-\eta$ моментгача берилган сигналлар наборига боғлиқ бўлади. Демак, t моментдаги чиқиш сигнали унинг киришларига $\rho=\mu-\eta+1$ кетма-кет берилган сигналлар мажмуасининг функцияси бўлади: $F(x_1^0,...,x_n^0;\ x_1^1,...,x_n^1;\ ...;\ x_1^{0-1},...,x_n^{0-1})$.

Бу ерда F — мантиқ алгебрасининг ρ^n аргументли функцияси ва киришларга $t-\mu+i$ моментда берилган сигналлар мажмуаси бўлади. Агар схема тўғри бўлса, у ҳолда F функция қатъиян $t-\eta$ моментда (яъни $i=\eta-\nu$, албатта $\eta\geq\nu$) берилган фақатгина битта сигналлар $(x_1^i,...,x_n^i)$ мажмуасига боғлиқ бўлади ва S схема F функцияни ν ушлаб туриш вақти (ν такт) билан реализация қилади.

2-таъриф. *n киришга ва битта чиқишга эга бўлган қурилма берилган бўлсин (VII.1- шакл) Ҳар бир моментда унинг киришларига 0 ёки 1 сигнал берилганда, чиқишида ҳар бир t моментда 0 ёки 1 сигнал ҳосил бўлади. Чиқишдаги сигнал киришларга $t-\mu$ дан $t-\eta$ моментгача $\rho(\rho=\mu-\eta+1)$ кетма-кет берилган сигналлар мажмуасининг функцияси бўлади:*

$$F(x_1^0,...,x_n^0;\ x_1^1,...,x_n^1;\ ...;\ x_1^{0-1},...,x_n^{0-1}).$$

*Бу ерда t момент $\mu+i$ моментда берилган сигналлар мажмуига тенг бўлади. У ҳолда бундай қурилма **тескари боғланиши бўлмаган автомат** деб аталади. Мантиқ алгебрасининг F функцияси унинг **характеристик функцияси**, ρ — **индекси**, ν — **ушлаб туриш вақти** деб аталади.*

Агар тескари боғланиши бўлмаган иккита автоматнинг F_1 ва F_2 характеристик функциялари фақатгина сохта аргументлари билан фарқ қилса, у ҳолда бундай автоматлар *эквивалент автоматлар* деб аталади.

Ҳар қандай функционал элемент бирорта тескари боғланиши бўлмаган автоматни ифодалайди. Бу элемент учун характеристик функция у реализация қиладиган функция билан мос тушади, индекс ва ушлаб туриш вақти эса 1 га тенг бўлади.

Шундай қилиб, бир тактли функционал элементлардан тузилган ҳар қандай схема тескари боғланиши бўлмаган автоматни ифодалайди. Аслида функционал элементлар бир тактли бўлиши шарт эмас. Фақатгина схеманинг қуйи ва юқори индексларини бошқача ҳисоблаш керак:

φ элементнинг *қуйи* ва *юқори индекслари* деб, схеманинг киришларига берилган сигналлар φ элементнинг чиқишида ҳосил бўлгунча босиб ўтилган функционал элементлар ушлаб туриш вақтлари йиғиндисининг мос равишда минимуми ва максимумига айтилади.

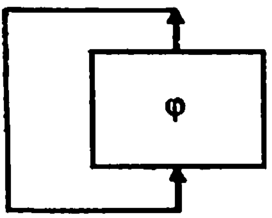
Ҳар қандай тескари боғланиши бўлмаган автомат ўз навбатида битта функционал элементдан тузилган схемани ифодалайди (ушбу фикрнинг тўғрилигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз).

3-таъриф. *Функционал элементлардан тузилган S схема билан ифодаланадиган автомат тескари боғланиши бўлмаган A автоматдан фақатгина ушлаб туриш вақти v билан фарқ қилса, бу автомат A автоматни реализация қилади дейилади.*

4-таъриф. *Агар ҳар қандай тескари боғланиши бўлмаган автоматни φ_1, φ_2, ..., φ_n функционал элементлардан тузилган схема орқали реализация қилиш мумкин бўлса, у ҳолда функционал элементлар системаси* ***кучсиз автоматли тўлиқ система*** *деб аталади. Бир тактли функционал элементлар системаси тўлиқлигининг етарли ва зарурлик шартлари элементлар системасининг кучсиз автоматли тўлиқлик шартига мос келади.*

4- §. Тескари боғланиши бўлган функционал элементлардан схемалар ясаш. Чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар

☑ *Тескари боғланишли функционал элементлар. Хотирада сақловчи қурилма. Схеманинг $(t+1)$ моментдаги ҳолати. $U(\Omega, n)$ автомат. Автомат ҳолатлари. Автомат ишининг натижалари.*



VII.16- шакл.

Ҳозиргача биз функционал элементлардан ясалган тескари боғланиши бўлмаган схемаларни кўриб ўтдик. Бундай чеклашни биз ноль тактли функционал элементлардан схемалар ясаш масаласини ечиш учун қўйган эдик, чунки, акс ҳолда, бундай схемаларнинг иш жараёнини ёритиш мумкин эмас эди.

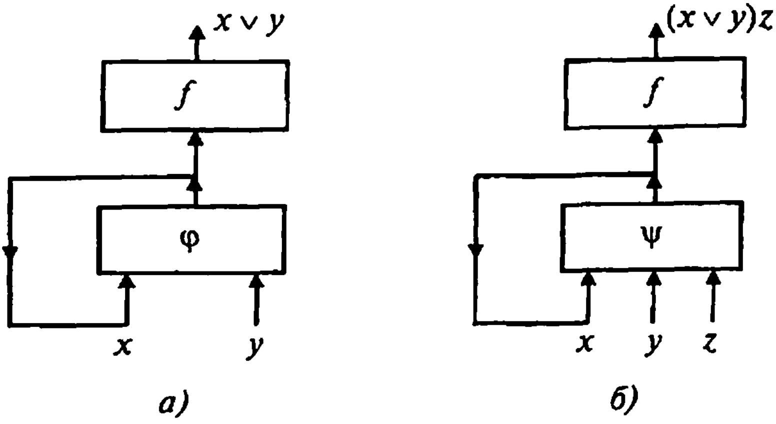
VII.16- шаклда кўрсатилган функцияни реализация қиладиган схеманинг иш жараёнини кўриб ўтайлик. φ функционални бир тактли элемент деб ҳисоблаймиз. Агар бирор t моментда φ нинг чиқишида 1 сигнал пайдо бўлса, у ҳолда шу моментнинг ўзида ўша сигнал унинг киришида пайдо бўлади ва $(t+1)$ моментда унинг чиқишида 0 сигнал пайдо бўлади ва ҳоказо. Натижада, φ функционал элементнинг чиқишида кетма-кет 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... сигналлар пайдо бўлади ва φ ноль тактли функционал элемент бўлган вақтдаги қарама-қаршиликлар ўз-ўзидан йўқолади. Бу схемани «қўнғироқ» схемаси деб аташ мумкин, чунки қўнғироқда бир тактда қарама-қарши қийматларга ўзгарадиган кетма-кет бериладиган сигналлардан фойдаланилади.

Бу параграфда биз қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тескари боғланишли схемаларни кўриб чиқамиз:

1) қурилманинг φ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ элементлари орасида фақат ва фақат биттаси озод чиқишга эга;

2) φ_i элементнинг ҳар бир кириши φ_j элементларнинг фақатгина биттасининг чиқиши билан уланади.

Юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи бир тактли функционал элементлардан ясалган тескари боғланишли схемаларнинг ишлаш жараёнини кўриб ўтайлик. Схема тескари боғланишли бўлганлиги учун унинг чиқишидаги сигнал фақат схема киришларига берилган сигналлар мажмуига эмас, балки унинг ички элементларининг чиқишидаги сигналларга ҳам боғлиқ бўлади. Бу кейинги сигналлар схема киришларига берилган сигналларга боғлиқ бўлмаслиги ҳам мумкин ёки анча олдин берилган кириш сигналларига боғлиқ бўлиши мумкин. Масалан, цикл элементларининг кириши схема кириши бўлмаслиги мумкин. VII.17- шаклдаги φ бир тактли элемент $x \vee y$ функцияни, ψ бир тактли элементи эса $(x \vee y)z$ функцияни реализация қилади, f — бир тактли ушлаб туриш элементи.



VII.17- шакл.

Агар VII.17-*а* шаклдаги схеманинг y киришига исталганча анча олдин 1 сигнали берилган бўлса, у ҳолда шу сигналнинг ўзи доимо унинг чиқишида пайдо бўлиб туради (яъни сигнал хотирада сақланади).

VII.17-*б* шаклдаги схемада y сигнал фақат $z = 1$ бўлгандагина хотирада сақланади. $z = 0$ сигнални бериб, хотирани тозалашимиз мумкин. Шундан кейингина y нинг янги қийматини хотирада сақлай оламиз ($z = 1$ қийматда). Реал схемаларда «хотирада сақловчи қурилма» цикл ёрдамида реализация қилинади.

Тескари боғланишли схема иш жараёнининг характеристикасини ифодалашда унинг ички элементларининг ҳолатини ҳисобга олиш керак.

S — тескари боғланишли схема ва φ_0, φ_1, ..., φ_k — унинг элементлари бўлсин. Бу ерда φ_0 — чиқиш элементи бўлсин, яъни озод чиқишга эга бўлган элементдир. φ_i элементнинг чиқишидаги t вақт моментидаги сигналини $\varphi_i(t)$ билан белгилаймиз ($\varphi_i(t)$ сигнал 0 ёки 1 га тенг). Схема чиқишида t моментдаги сигнал $\varphi_0(t)$ га тенг бўлади.

$\varphi(t) = \{\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)\}$ система S схеманинг t вақт моментидаги *ҳолати* деб аталади. t моментда S схема киришларига берилган сигналларни $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_n(t)$ билан ва $s(t) = \{s_1(t), s_2(t), ..., s_n(t)\}$ орқали уларнинг мажмуини белгилаймиз. У ҳолда схеманинг $(t + 1)$ моментдаги ҳолати $\varphi(t + 1)$ схеманинг t моментдаги $\varphi(t)$ ва $s(t)$ лари орқали бир қийматли аниқланади, яъни

$$\varphi(t + 1) = \Phi(\varphi(t), s(t)).$$

Демак, элементларнинг чиқишидаги $(t + 1)$ моментдаги сигналлар уларнинг киришларига t моментда берилган сигналларга боғлиқ бўлар экан, яъни t моментда схеманинг киришларига берилган сигналлар ва элементларнинг шу моментдаги чиқиш сигналлари боғлиқдир. Аниқроғи, Φ система $(k + n + 1)$ аргументли $(k + 1)$ та Φ_0, Φ_1, ..., Φ_k мантиқ алгебраси функцияларининг мажмуидан (тўпламидан) иборат бўлади. Бу $(k + n + 1)$ аргументларнинг айримлари сохта бўлиши мумкин. Масалан, Φ_i учун фақат қуйидаги аргументлар сохта эмас: φ_i элементнинг киришларига чиқишлар уланган функционал элементларга ва схеманинг киришлари бевосита φ_i элементнинг ҳам киришлари деб ҳисобланадиган сигналларга мос келадиган аргументлар. Агар фақат шундай сохта эмас аргументларни ҳисобга олсак, у ҳолда Φ_i функция φ_i элемент реализация этадиган функцияга мос келади ва юқоридаги формула $(t + 1)$ вақт моментида φ_i элементларнинг чиқишларида t моментда уларнинг киришларига берилган сигналлар мажмуига боғлиқ бўлган қандай сигнал пайдо бўлишини кўрсатади.

Таъриф. *Ω тўплам $(k + 1) > 0$ узунликдаги иккилик мажмуаларнинг бирор тўплами бўлсин. Агар $(n + k + 1)$ аргументли $(k + 1)$ та қисман аниқланган Φ_i мантиқ алгебрасининг функцияларидан иборат Φ мажмуа кўрсатилган бўлса, у ҳолда Ω рухсат этилган ҳолатлар тўпламида n киришга эга бўлган* ***$U(\Omega, n)$ автомат берилган*** *деб аталади.*

Бу ерда Φ_i функциялар шундай $(n+k+1)$ узунликдаги иккилик мажмуаларда аниқланганки, улардан $(k+1)$ та элементи Ω кирувчи мажмуа бўлади ва шу мажмуадаги Φ_i функцияларнинг қиймати Ω га киради. Ω тўпламдаги элементлар сони автоматнинг *хотираси* деб аталади. Агар автоматнинг бошланғич ҳолати $\varphi^0 \in \Omega$, бирор натурал сон ν (ушлаб туриш вақти) ва ҳар бир вақт моментида n узунликдаги $s(t)=\{s_1(t), s_2(t), \ldots, s_n(t)\}$ кириш сигналлар мажмуи берилган бўлса, у ҳолда $U(\Omega, n)$ автоматнинг *иш жараёни аниқланган* деб аталади.

Агар автоматнинг иш жараёни аниқланган бўлса, у ҳолда $t \geq \nu$ учун унинг кетма-кет ҳолатлари

$$\varphi(t+\nu)=\Phi(\varphi(t), s(t)), \quad \varphi(0)=\varphi^0$$

формула орқали аниқланади. Бу формула *автоматнинг ҳолатлар тенгламаси* деб аталади. Равшанки, автоматнинг ҳар қандай вақт моментидаги ҳолати $\varphi(t) \in \Omega$ бўлади. $\varphi^0(t)$ $(t \geq \nu)$ кетма-кетлик *автоматнинг чиқиши (ишнинг натижаси)* деб аталади. Агар $k=0$ ва Φ фақатгина $s(t)$ га боғлиқ бўлса, у ҳолда U автомат мантиқ алгебрасининг функциясига айланади.

Қабул қилинган белгилашларда бир тактли функционал элементлардан ясалган тескари боғланишли S схема қуйидаги характеристикага эга бўлган автоматни ифодалайди: $\nu=1$; φ^0 бошланғич ҳолат $t=0$ моментдаги S схема элементлари чиқишларидаги сигналлари; Ω — ҳамма мумкин бўлган элементлар чиқишларидаги сигналлар мажмуи.

Шундай қилиб, $\nu=1$ ушлаб туриш вақтига эга бўлган чекли автоматни бир тактли функционал элементлардан ясалган тескари боғланишли схема орқали ифодалаш мумкин.

5- §. Мили ва Мур автоматлари

☑ *Чекли автомат модели. Автомат ишининг каноник тенгламаси. Инициал ва ноинициал автоматлар. Мили ва Мур автоматлари, улар орасидаги муносабатлар.*

Чекли хотирали дискрет қурилмалар чекли автомат модели бўлади. Бу автоматнинг n та $x_1, x_2, ..., x_n$ кириши, m та $y_1, y_2, ..., y_m$ чиқиши ва $Q=\{g_0, g_1, ..., g_{r-1}\}$ чекли ички ҳолати мавжуд.

Чекли автомат дискрет вақт $t=0, 1, 2, ...$ моментларида ишлайди. Агар t моментдаги x_i киришнинг, y_j чиқишнинг ва g ҳолатининг қийматларини мос равишда $x_i(t)$, $y_i(t)$ ва $g(t)$ билан белгиласак, у ҳолда автоматнинг иши қуйидаги каноник тенглама билан ифодаланади:

$$y_j(t)=\Phi_j(x_1(t), ..., x_n(t), \text{g}(t-1)), \quad (j=1, ..., m),$$
$$g(t)=\psi(x_1(t), ..., x_n(t), \text{g}(t-1)). \qquad (1)$$

(1) тенгламалардаги Φ_j ва ψ функциялар мос равишда *j чиқишнинг функцияси* ва *ўтишлар функцияси* деб аталади. Автоматнинг иш жараёнини аниқлаш учун унинг бошланғич $g(0)$ ҳолатини кўрсатиш керак.

Агар $g(0)$ ва 1-моментдаги кириш қийматлари $x_1(1)$, $x_2(1)$, ..., $x_n(1)$ маълум бўлса, у ҳолда (1) каноник тенгламадан фойдаланиб 1-моментдаги чиқиш $y_j(1)$ ва $g(1)$ ҳолатнинг қийматини, $g(1)$ ва $x_1(2)$, ..., $x_n(2)$ асосида 2-моментдаги чиқиш $y_j(2)$ ва $g(2)$ ҳолатларни аниқлаш мумкин ва ҳ.к. Икки турдаги автоматлар мавжуд: *инициал* ва *инициалмас* (ноинициал). Инициал автоматларда бошланғич ҳолат тайинланган (маҳкамланган) бўлади. Ноинициал автоматларда бошланғич ҳолат сифатида исталган ҳолатни олиш мумкин.

Ихтиёрий сондаги кириш ва чиқишга эга бўлган автомат ишини аниқлаш масаласи 1 та кириш ва 1 та чиқишга эга бўлган автоматнинг ишини аниқлаш масаласига келтирилади. Шунинг учун асосий модель сифатида 1 та x киришга ва 1 та y чиқишга эга бўлган автоматларни кўрамиз. Бундай автоматлар қуйидаги каноник тенглама билан ифодаланади:

$$y(t)=\Phi(x(t), \text{g}(t-1)), \quad g(t)=\psi(x(t), \text{g}(t-1)).$$

Бундай турдаги автомат *Мили автомати* деб аталади.

Мили автомати чекли хотирали дискрет қурилманинг ягона модели эмас. Иккинчи модель — ***Мур автомати*** мавжуд. Мур автоматида чиқиш қиймати ўша моментнинг ўзидаёқ ички ҳолатнинг қиймати билан аниқланади. Мур автоматининг каноник тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$g(t) = \psi(x(t), g(t-1)), \quad y(t) = \lambda(g(t-1)).$$

Агар биринчи тенгламадан иккинчисига $g(t)$ қийматини қўйсак ва $\Phi = \lambda(\psi)$ деб белгиласак, у ҳолда иккинчи тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$y(t) = \lambda(\psi(x(t), g(t-1)))) = \Phi(x(t), g(t-1)).$$

Демак, Мур автоматини Мили автоматининг хусусий ҳоли деб қараш мумкин. Бу ерда ўтиш функцияси махсус $\Phi = \lambda(\psi)$ кўринишда бўлади. Худди шу каби, Мили автоматини ҳам (айрим маънода) Мур автоматига келтириш мумкин.

Демак, *ҳар қандай инициал ва ноинициал Мили автоматлари учун уларга эквивалент бўлган инициал ва ноинициал Мур автоматлари мавжуд* (исботи А.А.Шоломовнинг «Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств» [49] китобида мавжуд).

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Ҳар қандай тескари боғланиши бўлмаган автоматни функционал элементлардан ясалган бирор схема орқали ифодалаш мумкинлигини исботланг.
2. Ҳар қандай инициал ва ноинициал Мили автоматлари учун уларга эквивалент бўлган инициал ва ноинициал Мур автоматлари мавжуд эканлигини исботланг.
3. Ҳар қандай ишлаб туриш вақти $\nu = 1$ бўлган чекли автоматни бир тактли функционал элементлардан ясалган схема орқали ифодаланишини кўрсатинг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

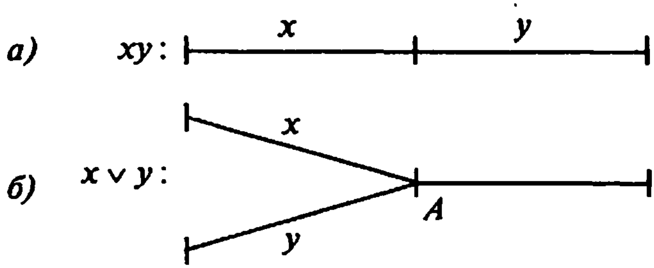
1. Элементнинг юқори ва қуйи индекси. Тўғри схема.
2. Тескари боғланиши бўлмаган автоматлар.
3. Характеристик функция. Кучсиз автоматли тўлиқ система.
4. Тескари боғланиши бўлган функционал элементлардан схемалар ясаш.
5. Чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар.
6. Мили ва Мур автоматлари ва улар орасидаги муносабатлар.
7. Автомат ишининг каноник тенгламаси. Инициал ва ноинициал автоматлар.

6- §. Реле-контактли схемалар

☑ *Ўтказгичлар. Реле-контактли схемалар. Манфий контактли реле. Мусбат контактли реле. Ушлаб туриш элементи. Реле-контактли схема орқали функцияни реализация этиш.*

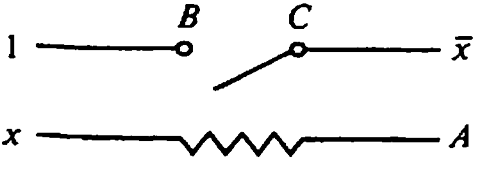
Бу параграфда мантиқ алгебраси функцияларини реле - контактли схемалар орқали реализация этиш усулини кўрамиз.

Агар ҳар бир ўтказгичга x ўзгарувчини мос қилиб қўйсак, у ҳолда $x = 1$ да ўтказгичда ток бор ва $x = 0$ да ўтказгичда ток йўқ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда ўтказгичларни кетма-кет уланишига ўзгарувчиларнинг конъюнкцияси (VII.18-*а* шакл) ва параллел уланишига дизъюнкцияси (*б*) мос келади (VII.18-*б* шакл). Ўтказгичларни кетма-кет ва параллел улаш натижа-

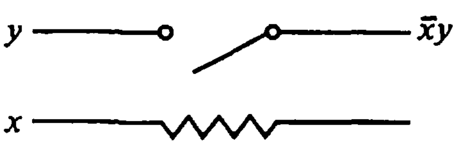


VII.18- шакл.

сида схема ҳосил қиламиз. Бу схема фақатгина монотон функцияларни реализация қилади, чунки конъюнкция ва дизъюнкцияларнинг суперпозицияси орқали фақат монотон функцияларни ифодалаш мумкин. Ихтиёрий функцияларни реализация қилиш учун $\bar{x}$ функцияни реализация қиладиган қурилма керак бўлади. Буни манфий контактли реле орқали реализация қилиш мумкин. Бундай реленинг схемаси VII.19- шаклда тасвирланган. Агар *A* ғалтак ўрамлари орқали ток ўтмаса ($x=0$), у ҳолда пружина *B* контактни юқорига тортади ва занжир уланади (туташади). Натижада *C* чиқишда ток пайдо бўлади ($\bar{x}=1$). Агар $x=1$ бўлса ва *A* ғалтак ўрами орқали ток ўтса, у ҳолда *B* контакт пастга тортилади ва *C* чиқишда ток бўлмайди, яъни $\bar{x}=0$ бўлади. Демак, манфий контактли реле φ_2 функцияни реализация қилади. Агар *B* контакт киришига 1 ўрнига *y* сигнал берсак, у ҳолда биз $\bar{x}y$ функцияни реализация қиламиз (VII.20- шакл).

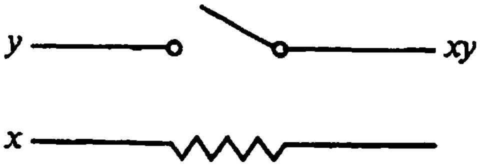


VII.19- шакл.

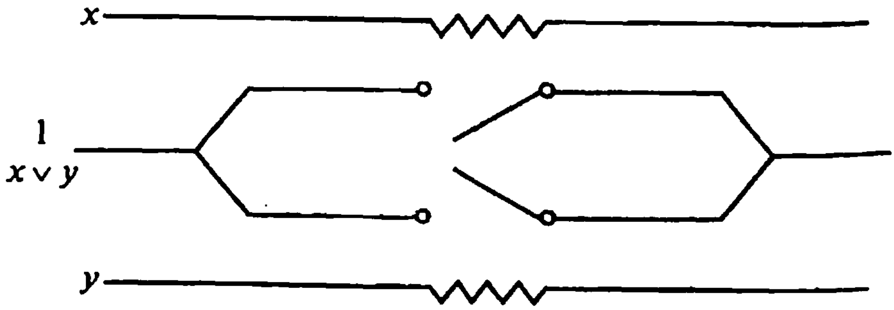


VII.20- шакл.

Мусбат контактли реледа агар ғалтак ўрамида ток бўлса ($x=1$), у ҳолда *B* контакт уланади ва *C* чиқишда ток бўлмайди ($x=0$). Шундай қилиб, *x* функцияни мусбат контактли реле орқали реализация қилиш мумкин (VII.21- шакл). Маълумки, агар ўтказгичда ток бўлса, у ҳолда *y* ҳар тарафга тарқалади. Масалан, $x \vee y$ ни VII.18- шаклдаги схема орқали реализация қилсак, у ҳолда $x=1$ ва $y=0$ бўлганда, ток *A* нуқтадан ҳар тарафга, шу жумладан, *y* ўтказгичга мос бўлган ўтказгич орқали ҳам ўтади ($y=0$ бўлишига қарамасдан). Бундай шароитда схеманинг иш жараёнида ноаниқ-



VII.21- шакл.

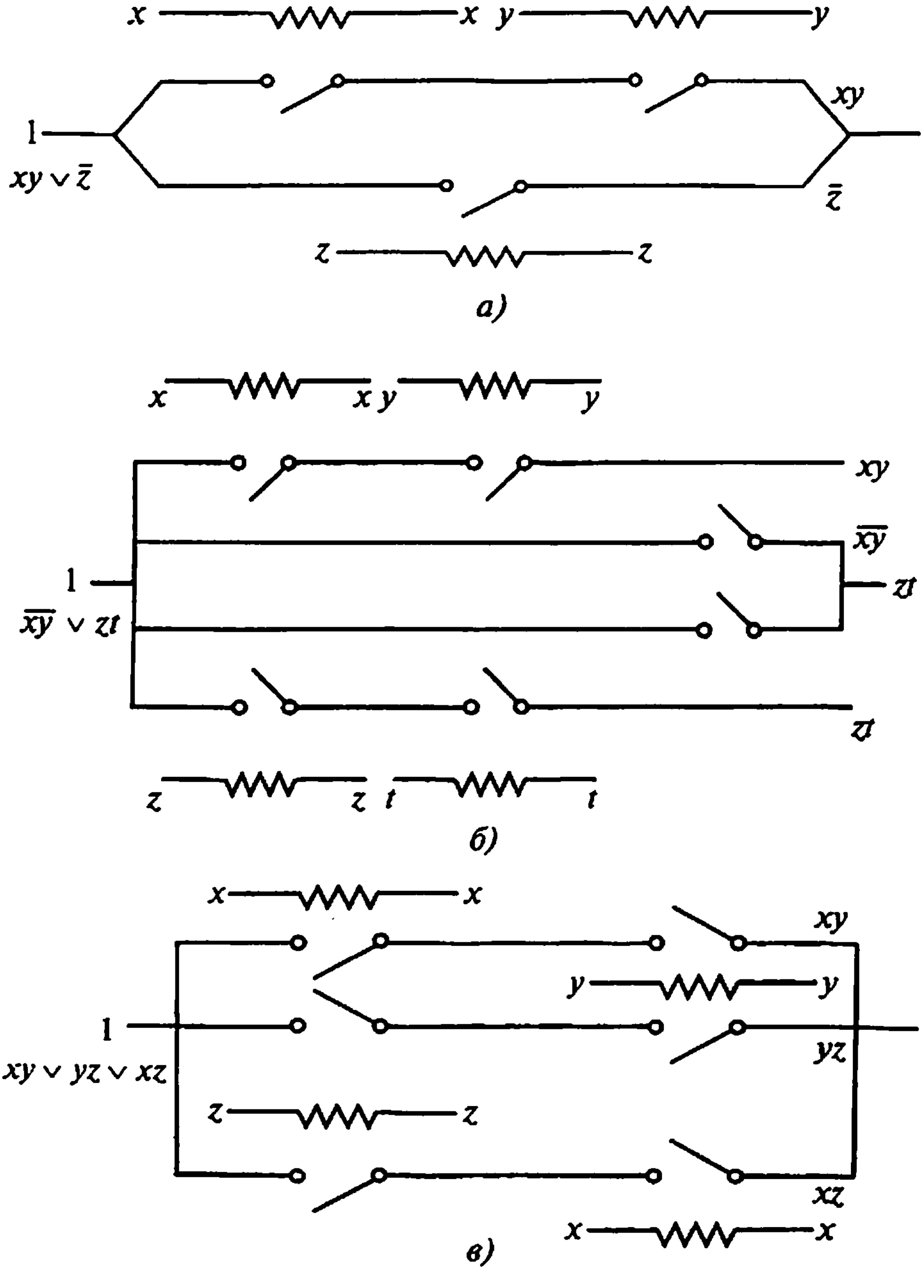


VII.22- шакл.

ликлар пайдо бўлади. Бу ҳолдан қутилиш учун фақат бир томонга ток ўтказадиган асбоблардан, шу жумладан, мусбат контактли реледан фойдаланиш мумкин. Масалан, мусбат контактли реледан фойдаланиб, $x \vee y$ ни реализация қиладиган схемани VII.22- шаклда тасвирлангандек ясаш мумкин.

Энди реле-контактли схеманинг ишлаш вақтини кўриб ўтайлик. Ток ўтказгичлар бўйича бирданига тарқалади ва реле ишлаши учун (контакт уланиши учун) бир такт вақт кетади деб ҳисоблаймиз. Демак, VII.20 ва VII.21- шаклларда x сигналга нисбатан y сигнал бир тактдан кейин берилиши керак.

Схема чиқишидаги сигнал (xy ёки $\bar{x}y$) y сигнал билан бир вақтда пайдо бўлади. Шунинг учун схемада берилган сигналларни ишлаб чиқиш учун сарф бўладиган вақтни доимо ҳисобга олиш керак, реализация бўладиган функцияни ўзгартирмасдан, айрим вақтларда, бу вақтни ўзгартириш керак. Бу процедурани, худди бир тактли функционал элементлардан ясалган кўп тактли схемаларда қилганимиздек,


x
x
y
y
xy
1
xy ∨ z̄
z̄
z
z
а)
x
x
y
y
xy
$\overline{xy}$
1
$\overline{xy}$ ∨ zt
zt
zt
z
z
t
t
б)
x
x
xy
y
y
1
xy ∨ yz ∨ xz
yz
z
z
xz
x
x
в)

VII.23- шакл.

ушлаб туриш элементлари ёрдами билан бажариш мумкин. Ушлаб туриш элементи вазифасини мусбат контактли реле бажаради (VII.21- шакл). Ушлаб туриш вақти 1 тактга тенг бўлади.

Таъриф. *Агар реле-контактли схеманинг киришларига t моментда x_1, x_2, ..., x_n сигналлар набори берилганда, унинг чиқишида $t+\nu$ моментда $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ сигнал пайдо бўлса, у ҳолда реле-контактли схема $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни ν ушлаб туриш вақти билан реализация қилади деб аталади.*

Кетма-кет берилган сигналлар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлаб чиқилади.

Шундай қилиб, мантиқ алгебрасининг исталган функциясини айрим ушлаб туриш вақти билан реле-контактли схема орқали реализация қилиш мумкин. (Ушбу хулосани исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

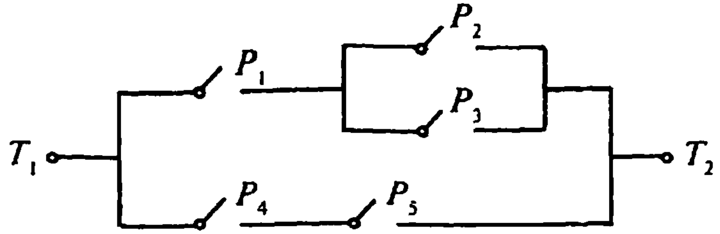
Мисол. а) $xy \vee \bar{z}$; б) $\overline{xy} \vee zt$; в) $xy \vee yx \vee xz$ функциялар реле-контактли схема орқали реализация қилинсин.

Берилган функцияларни схема орқали реализация қилиш учун ўтказгичларни кетма-кет ва параллел улашлар натижасида элементар конъюнкцияларни ва уларнинг дизъюнкцияларини реализация қиламиз. Манфий контактли реледан фойдаланиб ўзгарувчиларнинг ва айрим элементар конъюнкцияларнинг инкорларини реализация қиламиз. Мусбат контактли реле орқали сигналларнинг бир вақтда етиб келишини таъминлаймиз. Натижада, VII.23- шаклда кўрсатилган схемаларга эга бўламиз.

7- §. Контактли схемалар ва уларнинг синтези

☑ *Автоматнинг кириши. Автоматнинг чиқиши. Контактларни параллел ва кетма-кет улаш. Ўтказувчанлик функцияси. Муҳим занжир. П- схема.*

Ҳар бир автомат турлича контактли ёки контактсиз схемалардан фойдаланиш асосида тузилади. Биз контактли схемалар билан жиҳозланган автоматларнинг ишини умумий ҳолда кўриб ўтамиз.



VII.24- шакл.

Масалан, VII.24- шаклда кўрсатилганидек, симлардан, иккита T_1 ва T_2 қутбдан, бешта P_1, ..., P_5 кнопка билан таъминланган контактлардан ясалган тузилма *контактли схема* деб аталади. T_1 қутб электр токи манбаини ифодалайди, T_2 қутб эса автоматнинг «чиқиши»да ишни бажарувчи қурилмани билдиради. Автоматнинг «чиқиши»да иш бажарилганлиги ҳақида хабар берувчи контрол лампа ўрнатиш мумкинлигидан, T_2 қутб мана шу лампани тасвирлайди деб айта оламиз.

Схемада кнопкалар тегишли равишда ёқилса ва, демак, схема бўйича ток юрадиган бўлиб контактлар тикланса, T_1 қутбдан T_2 қутбга борган ток контрол лампочкани ёндиради.

Энди ҳар бир мураккаб контактли схеманинг таркибий қисмларини ташкил этувчи энг содда контактли схемалар билан танишамиз.

VII.25- шаклдаги схема битта симдан, T_1 ва T_2 қутблардан ва P кнопкали битта контактдан ясалган.

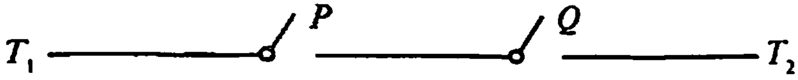
P кнопка ёқилганда, контакт тикланиб, ток схема бўйича T_1 дан T_2 га томон юради ва контрол лампа ёнади. P кнопка очиқ бўлганда контакт узилиб, ток бўлмайди ва лампа ёнмайди. P кнопкага x – «P кнопка ёпиқ» деган мулоҳазани мос келтирамиз. P кнопка ҳақиқатан ёпиқ бўлса, x мулоҳаза чин бўлади. Бу ҳолда контрол лампа ёнади. P кнопка очиқ бўлганда эса x мулоҳаза ёлғон бўлади ва бу ҳолда контрол лампа ёнмайди.

VII.25- шакл.

Шундай қилиб, x мулоҳазанинг чин-ёлғонлиги билан ток бор-йўқлиги (контрол лампанинг ёниш-ёнмаслиги) орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади ва буни ушбу жадвал ифодалайди:

x	схемада ток
ч	бор
ё	йўқ

Энди кетма-кет уланган иккита P ва Q кнопкали (икки кетма-кет контактли) схемани олайлик (VII.26- шакл).



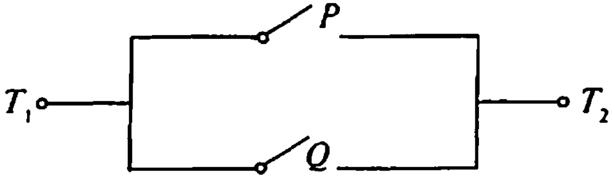
VII.26- шакл.

P ва Q кнопкаларга мос равишда x – «P кнопка ёпиқ» ва y – «Q кнопка ёпиқ» деган мулоҳазаларни мос келтирамиз. У ҳолда

x	y	Схемада ток	$x \wedge y$
1	1	бор	1
1	0	йўқ	0
0	1	йўқ	0
0	0	йўқ	0

Демак, схемада ток бор-йўқлиги ($x \wedge y$) конъюнкциянинг чин-ёлғонлигига мос келади.

Параллел уланган икки P ва Q кнопкали схемага мурожаат қиламиз (VII.27- шакл).



VII.27- шакл.

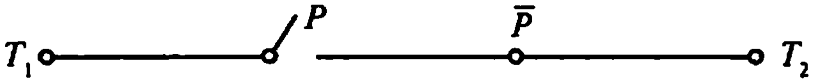
x	y	Схемада ток	$x \vee y$
1	1	бор	1
1	0	бор	0
0	1	бор	0
0	0	йўқ	0

Демак, параллел уланган икки P ва Q контактли схемада ток бор-йўқлиги ($x \vee y$) дизъюнкциянинг чин-ёлғонлиги билан аниқланади.

VII.26 ва VII.27- шаклларда берилган схемаларни умумлаштириб, n та P_1, ..., P_n кнопкани кетма-кет ва, шунингдек, параллел улаш мумкин. Бунинг натижасида n та кетма-кет ва n та параллел контактли схемалар ясалган бўлади. Улар мос равишда ($x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$) ва ($x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$) функцияларни реализация қилади, бу ерда x_i мулоҳаза P_i кнопка ёпиқ эканлигини билдиради.

Шундай жуфт-жуфт кнопкалар билан таъминланган контактли схемаларни ҳам ясаш мумкинки, ҳар жуфт кнопканинг исталган бири ёпилганда (очилганда), иккинчиси очилади (ёпилади). Бир жуфт кнопка $\overline{P}$ ва P каби белгиланади. P кнопкага x мулоҳаза мос келганда, $\overline{P}$ га x нинг $\overline{x}$ инкорини мос келтириш табиийдир, чунки P — ёпиқ, демак, x чин бўлганда, $\overline{P}$ — очиқ, демак, $\overline{x}$ — ёлғон бўлади.

Бир жуфт кнопкали энг содда схемалардан биттаси қуйидагичадир (VII.28- шакл).

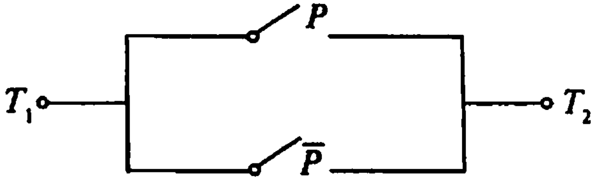


VII.28- шакл.

Кнопкаларнинг биттаси очилганда иккинчиси албатта ёпилгани учун бундай схемада ток ҳеч қачон бўлмайди. VII.28- шаклдаги схема жадвали қуйидагича бўлади:

x	$\overline{x}$	Схемада ток	$x \wedge \overline{x}$
1	0	йўқ	0
0	1	йўқ	0

Бир жуфт кнопкали схемаларнинг иккинчиси қуйидагича бўлади (VII.29- шакл):



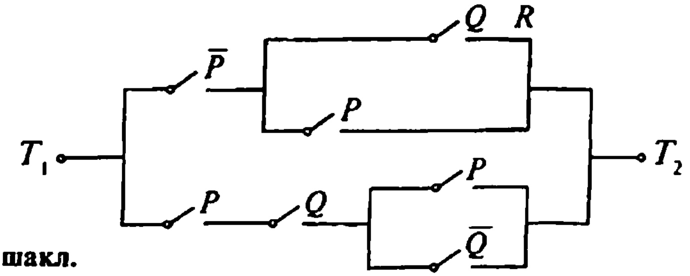
VII.29- шакл.

Бу схемада ток ҳар доим бор, чунки P ёпиқ бўлса (у ҳолда $\overline{P}$ очиқ бўлади), ток юқори симдан P орқали ўтади. Схема жадвали қуйидагича бўлади:

x	$\overline{x}$	Схемада ток	$x \vee \overline{x}$
1	0	бор	1
0	1	бор	1

Шундай қилиб, ҳар бир содда контактли схема мулоҳазалар алгебрасининг маълум бир функциясини реализация қилади. Бу функция контактли схеманинг *ўтказувчанлик функцияси* деб аталади. Биз кўриб ўтган энг содда схемаларнинг ўтказувчанлик функциялари қуйидагича бўлади:

$$x,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \wedge \overline{x},\ x \vee \overline{x}. \qquad (1)$$



VII.30- шакл.

Бу функцияларнинг чинлик жадваллари тегишли схемаларда қачон ток бўлиши ва қачон бўлмаслигини кўрсатади.

Содда схемаларнинг турли комбинацияларидан ҳар хил мураккаб контактли схемаларни тузиш мумкин. Бундай схемаларнинг ҳар бирига (1) функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функциялар мос келади.

Масалан, VII.30- шаклдаги схеманинг ўтказувчанлик функциясини топайлик. Аввало, P, Q, R кнопкаларга мос равишда x, y, z мулоҳазаларни мос келтирамиз. У ҳолда $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ га $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ мулоҳазалар мос келади. Схеманинг юқори қисми $\overline{x} \wedge [(y \wedge \overline{z}) \vee x]$ формула билан, пастки қисми $z \wedge \overline{y} \wedge [x \vee \overline{y}]$ формула билан ифодаланади. Юқори ва пастки қисмлар параллел улангани учун бутун схеманинг ўтказувчанлик функцияси қуйидагича бўлади:

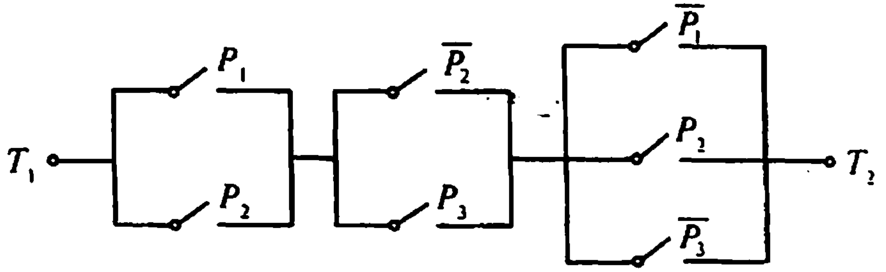
$$f(x, y, z) = \{\overline{x} \wedge [(y \wedge \overline{z}) \vee x]\} \vee [z \wedge \overline{y} \wedge (x \vee \overline{y})].$$

Аксинча, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир функциясига бирор контактли схема мос келади. Масалан,

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \qquad (2)$$

функция ва x, y, z ўзгарувчиларга мос келадиган P_1, P_2, P_3 кнопкалар берилган бўлсин. У ҳолда (2) функцияга VII.31- шаклдаги контактли схема мос келади.

Бундан кейин, схемаларнинг кўриниши оддий бўлиши учун, контактни икки қутбга эга бўлган кесма орқали ифодалаймиз (кесмани *икки қутбли* деб атаймиз). Агар кесма уланувчи бўлса, уни x билан, ажратувчи бўлса, $\overline{x}$ билан белгилаймиз. Бу ерда x — ғалтакда реализация қилинадиган



VII.31- шакл.

ўзгарувчи. Ҳар бир ғалтакка битта ўзгарувчи мос келади ва у билан исталганча сондаги контактлар уланиши мумкин. Кесмалар қутблари орқали бир-бирлари билан уланади. Ҳар бир схема кириш ва чиқишга эга бўлади. Схеманинг киришига ток берилганда, унинг чиқишида бир тактдан кейин ток пайдо бўлса, у ҳолда схемада *ўтказувчанлик бор* деб айтилади, акс ҳолда, *ўтказувчанлик йўқ* деб айтилади.

Кесмаларнинг VII.32- шаклдагидек кетма-кет уланишини *занжир* деб атаймиз.

VII.32- шакл.

Занжирда битта контакт бир неча марта қатнашиши мумкин. Биринчи контактнинг кириши схеманинг киришига ва охирги контактнинг чиқиши схеманинг чиқишига тўғри келади. Ўзгарувчиларнинг бирор қийматлари мажмуида схеманинг (ДНШ кўринишидаги функцияни реализация қиладиган схеманинг) чиқишида ток бўлиши учун ҳеч бўлмаганда бирорта занжирнинг ҳамма контактлари уланган бўлиши етарли ва зарурдир. Агар схемага кирувчи ҳар бир Γ занжирга ўзгарувчиларнинг ёки улар инкорларининг U_Γ элементар конъюнкциясини мос қилиб қўйсак, у вақтда схемага кирувчи занжирларга мос келган Γ элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкциясига схеманинг ўтказувчанлик функцияси мос келади.

Шуни таъкидлаш керакки, схеманинг ўтказувчанлик функциясини ҳосил қилиш учун айрим занжирларнинг дизъюнкциясини олиш кифоядир.

1-таъриф. *Ҳар бир қутбдан бир марта ўтган занжир* ***муҳим (жиддий) занжир*** *деб аталади (яъни схеманинг кириши ва чиқишига биттадан контакт ва занжирнинг қолган қутбларига иккитадан контакт тўғри келадиган занжир муҳим занжир деб аталади).*

Мисоллар. 1. Ҳар бир схемада чекли сондаги муҳим занжирлар мавжуд бўлишини исбот қилинг.

2. Муҳим занжирларга мос келувчи конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси схеманинг ўтказувчанлик функциясига тенг кучли эканлигини исбот қилинг.

2-мисолнинг натижасига асосан, схемага қараб унинг ўтказувчанлик функциясини ёзиш мумкин.

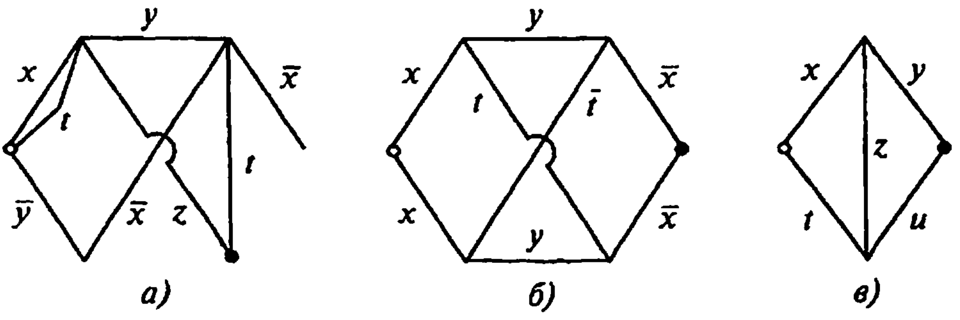
VII.33-шаклда берилган схемаларнинг ўтказувчанлик функцияларини топайлик. Бундан кейин рангсиз доирача билан схеманинг кириши ва қора рангли доирача билан схеманинг чиқиши белгиланади. Ушбу формулалар

а) $xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$;

б) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} \vee xyty\bar{x} = 0$;

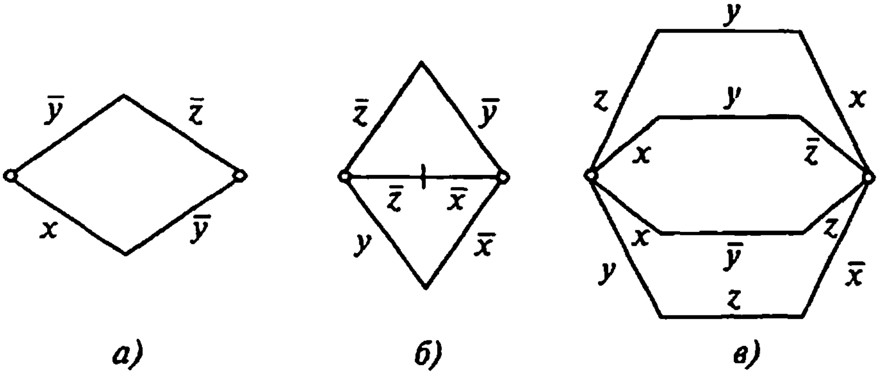
в) $xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$

VII.33-шаклнинг мос равишда а), б) ва в) бандларида кўрсатилган схемаларнинг ўтказувчанлик функциялари бўлади.



а) б) в)

VII.33-шакл.



а) *б)* *в)*

VII.34- шакл.

Энди тескари масалани кўрайлик, яъни берилган функцияга қараб уни реализация қиладиган схемани ясаш масаласини кўрамиз. Бунинг учун функцияни ДНШ кўринишига келтирамиз. ДНШ ифодасидаги ҳар бир $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots x_k^{\sigma_k}$ элементар конъюнкцияга мос равишда битта кетма-кет уланган контактларни мос қўямиз (VII.32- шаклга қаранг). Бундан кейин ҳамма киришларни ва чиқишларни мос равишда айнан туташтирамиз. Ҳосил қилинган схема ДНШ кўринишидаги функцияни реализация қилади.

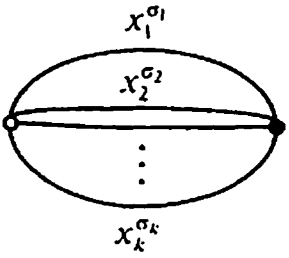
Берилган: а) $(y \vee z) \to x\bar{y}$; б) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ ва в) $(x + y + z)$ функцияларни контактли схемалар орқали реализация қилайлик. Бунинг учун функцияларни ДНШ кўринишига келтирамиз:

а) $(y \vee z) \to x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}$ (VII.34-*а* шакл);

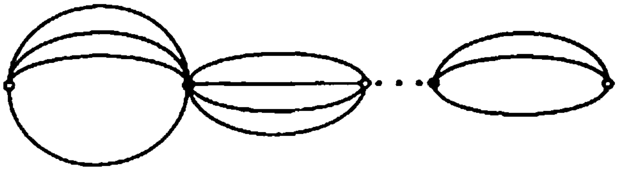
б) $z\bar{y} \leftrightarrow yx = (\overline{z\bar{y}} \vee yx)(z\bar{y} \vee \overline{yx}) = (\bar{z} \vee y \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y} \vee x) =$
$= (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee y\bar{x}$ (VII.34-*б* шакл);

в) $x + y + z = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$ (VII.34-*в* шакл).

Биз юқорида ДНШ кўринишидаги функцияни контактли схема орқали реализация этишни кўрдик. Табиийки, КНШ кўринишидаги функцияни ҳам контактли схема ор-



VII.35- шакл.



VII.36- шакл.

қали реализация этиш мумкин. Бунинг учун, биринчи навбатда, ҳар бир элементар дизъюнкцияларни реализация қиладиган схемалар тузамиз (VII.35- шакл). Иккинчи навбатда, элементар дизъюнкцияларга мос келган схемаларнинг биттасининг чиқишини иккинчисининг киришига, иккинчисининг чиқишини учинчисининг киришига ва ҳоказо улаб чиқамиз (VII.36- шакл). Биринчисининг кириши контактли схеманинг кириши ва охиргисининг чиқиши схеманинг чиқиши бўлади. Ҳосил қилинган схема КНШ кўринишдаги функцияни реализация қилади.

Юқорида келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, а) $(y \vee z) \to x\bar{y}$; б) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ ва в) $(x + y + z)$ функцияларни контактли схемалар орқали реализация этиш талаб этилсин.

а) $f_1(x, y, z) = (y \vee z) \to x\bar{y}$ функцияни КНШ кўринишига келтирамиз ва уни соддалаштириш учун таниш бўлган ушбу

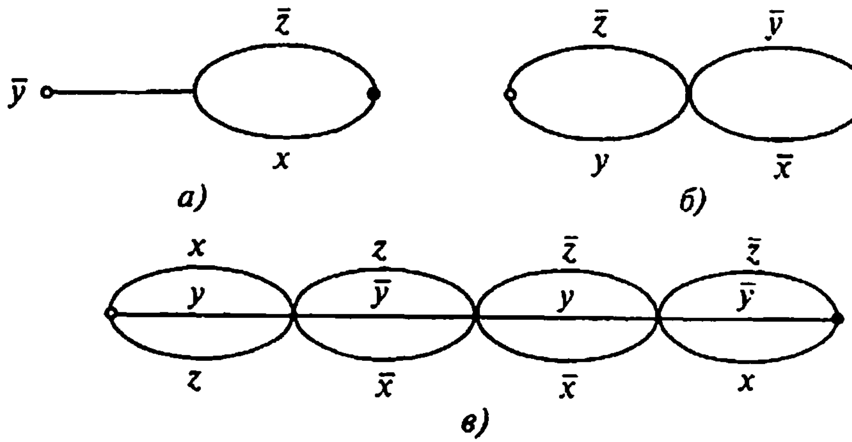
$$x \vee xy = x, \qquad x(x \vee y) = x,$$
$$x \vee \bar{x}y = x \vee y, \qquad \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y,$$
$$x(\bar{x} \vee y) = xy, \qquad \bar{x}(x \vee y) = \bar{x}y$$

тенг кучли формулалардан фойдаланамиз:

$$f_1(x, y, z) = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x)$$ (VII.37-*а* шакл);

б) $f_2(x, y, z) = z\bar{y} \leftrightarrow yx = (z\bar{y} \vee yx)(\overline{yx} \vee z\bar{y}) =$

$= (\bar{z} \vee y \vee yx)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{y}) = (\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$ (VII.37-*б* шакл);



VII.37- шакл.

в) $f_3 = x + y + z = (x \vee y \vee z)(\bar x \vee \bar y \vee z)(\bar x \vee y \vee \bar z) \wedge (x \vee \bar y \vee \bar z)$ (VII.37-*в* шакл).

Параллел—кетма-кет улаш натижасида ҳосил этилган схемалар классини индуктив тарзда ифодалайлик.

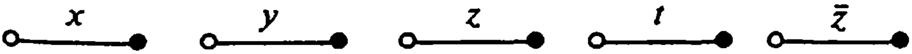
2-таъриф. *Бир контактдан иборат схема* ***элементар схема*** *деб аталади. Элементар схемаларнинг айримларини чекли сон марта параллел ва кетма-кет улаш натижасида ҳосил бўлган контакт схема* ***параллел—кетма-кет схема*** *ёки* ***П-схема*** *деб аталади.*

Равшанки, элементар схемалардан ҳар қандай усул билан ясалган П-схемага дизъюнкция, конъюнкция ва инкор амаллари билан ифодаланган ўтказувчанлик функцияси мос келади ва, аксинча, ҳар қандай шундай функция учун маълум П-схема ясаш мумкин.

Изоҳ. Ҳар қандай контактли схема П-схема бўла олмайди.

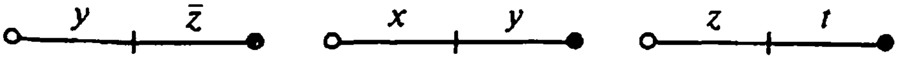
Мисол. Берилган $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y\bar z)(xy \vee zt)$ ва $f_2(x, y, z, t) = (\bar x(y \vee \bar z) \vee \bar t)x$ функциялар учун П-схемалар ясаш талаб этилсин.

а) x, y, z, t, $\bar z$ ни реализация қиладиган элементар схемаларни тузамиз (VII.38- шакл).



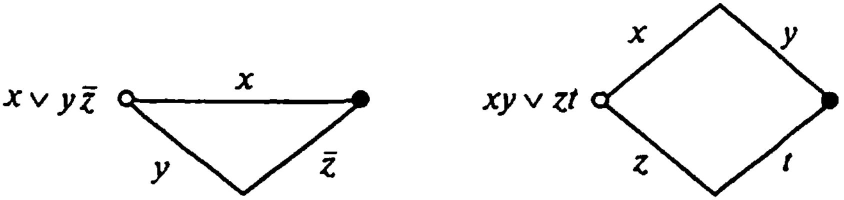
VII.38- шакл.

x ва y ўзгарувчиларга мос бўлган контактлар икки донадан бўлиши керак. Энди контактларни кетма-кет улаб, $y\bar{z}$, xy ва zt элементар конъюнкцияларни реализация қиламиз (VII.39- шакл).



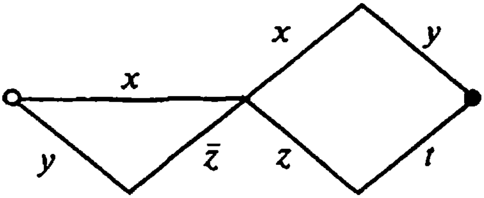
VII.39- шакл.

Учинчи қадамда, параллел улашдан фойдаланиб, $x \vee y\bar{z}$ ва $xy \vee zt$ функцияларни реализация қиламиз (VII.40- шакл).



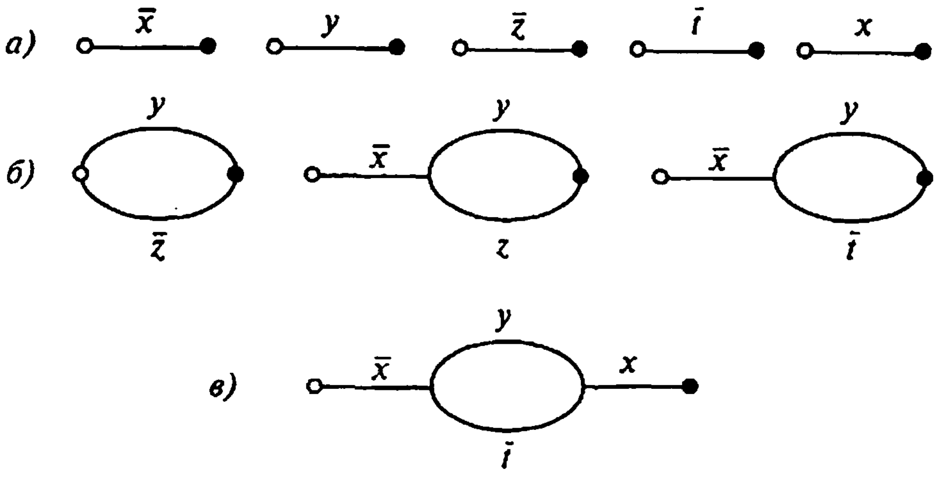
VII.40- шакл.

Ҳосил қилинган схемаларни кетма-кет улаб, берилган $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$ функцияни реализация этадиган П-схемага эга бўламиз (VII.41- шакл).



VII.41- шакл.

б) $f_2(x, y, z, t) = (\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ функцияни реализация қиладиган П-схема VII.42- шаклда кўрсатилган.



VII.42- шакл.

8- §. Контакт схемаларни минималлаштириш муаммоси

☑ *Минимал схема. Схемаларни минималлаштириш муаммоси. Минимал схема бўлишлик шарти. Шеннон функцияси. Контактлар сонини баҳолаш.*

Маълумки, битта функциянинг ўзини ҳар хил контактли схемалар орқали реализация қилиш мумкин, чунки функциянинг ДНШ (КНШ) кўриниши ягона эмас. Функцияни контактли схема орқали реализация этишда, табиийки, схемада мавжуд бўлган контактлар сони мумкин бўлгунча энг кам бўлишига ёки, ҳеч бўлмаганда, шу энг кам сондан салгина ортиқроқ бўлишига интиламиз. Битта ўтказувчанлик функциясига эга бўлган ҳамма схемалар ичида мумкин бўлгунча энг кам сонли контактга эга бўлган схемани *минимал схема* деб айтилади.

Мантиқ алгебраси функцияларини минимал схемалар орқали реализация этиш муаммосини ечиш жуда катта илмий-амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб муаммодир. Афсуски, аниқ схемаларнинг минимал схема эканлигини исботлаш айрим ҳоллардагина мумкин.

Схемаларни минималлаштириш муаммоси мантиқ алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси билан чамбарчас боғлангандир.

Айрим ҳолларда берилган схеманинг минимал схема эканлигини кўрсатадиган хусусиятларни топиш мумкин. Буни мисолларда кўрайлик.

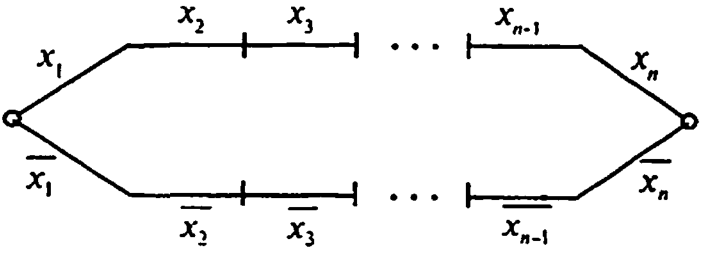
Агар бирорта ўзгарувчи функциянинг сохта эмас (муҳим) аргументи бўлса, у ҳолда ушбу функцияни реализация этадиган схемада камида ўша ўзгарувчига мос келадиган бир дона контакт мавжуд бўлиши керак. «Кўприкча» реализация этадиган ўтказувчанлик функцияси $f(x, y, z, u, t) = xy \vee tu \vee xzu \vee tzu$ бўлади. Бу функциянинг ҳамма x, y, z, t, u аргументлари муҳим аргументлардир (масалан, $t = z = u = 0$, $y = 1$ бўлганда, функциянинг қиймати x га боғлиқ бўлади; $x = u = 1$ бўлганда функциянинг қиймати z га боғлиқ бўлади ва ҳоказо). Схемада бу аргументларга мос келган контактлар бир мартадан қатнашган. Демак, «кўприкча» схемаси минимал схемадир.

Шундай қилиб, агар схемадаги контактлар ҳар хил ўзгарувчиларга мос келса ва бу ўзгарувчилар ўтказувчанлик функциясининг муҳим аргументлари бўлса, у ҳолда схема минимал схема бўлади.

Энди VII.43-шаклда ифодаланган схема минимал схема бўлишини кўрсатайлик.

Берилган бу ихтиёрий схемада x_1 ўзгарувчига мос бўлган контактлар фақат мусбат бўлсин. У ҳолда $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ўтказувчанлик функцияси учун

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f(0, x_2, ..., x_n)$$



VII.43- шакл.

муносабат ҳамма $x_2, ..., x_n$ учун бажарилади (агар схемада айрим контактлар уланган бўлса, у ҳолда схемада ўтказувчанлик йўқолмайди). Худди шу каби, агар x_1 га фақатгина манфий контактли контактлар мос келса, у ҳолда

$$f(1, x_2, ..., x_n) \leq f(0, x_2, ..., x_n)$$

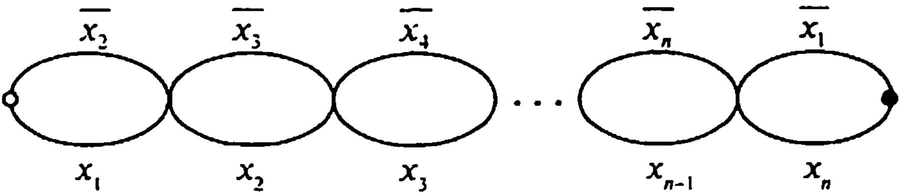
муносабат ҳамма $x_2, x_3, ..., x_n$ учун бажарилади.

Шундай сигналлар мажмуи $(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ мавжуд бўлсинки, $f(1, \alpha_2, ..., \alpha_n) < f(0, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ бажарилсин. У ҳолда f функция x_1 аргументи бўйича ўсмайди ва f функцияни реализация қиладиган ҳар қандай схемада x_1 га мос бўлган манфий контакт бор деб айтамиз.

Худди шу каби, $(\beta_2, ..., \beta_n)$ мажмуа учун

$$f(1, \beta_2, ..., \beta_n) > f(0, \beta_2, ..., \beta_n)$$

бажарилса, у ҳолда f функция x_1 аргументи бўйича камаймайди ва f ни реализация қиладиган схемада x_1 га мос мусбат контакт бор деб айтамиз. Агарда f функция x_1 аргументи бўйича на камаювчи ва на ўсувчи функция бўлса, у ҳолда f функцияни реализация қилувчи схемада x_1 аргумент бўйича ҳам манфий, ҳам мусбат контактлар мавжуд бўлади. VII.44- шаклдаги схеманинг ўтказувчанлик функциясининг $f = x_1x_2..x_n \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2} ... \overline{x_n}$ кўриниши бўлади. $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$ да f функция x_1 аргументи бўйича ортувчи бўлмайди ва $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 1$ да камаювчи бўлмайди. Қурилаётган функция ҳамма аргументларига нисбатан симметрик бўлгани учун, қолган ҳамма аргументлари бўйича ҳам ўсувчи ва кама-



VII.44- шакл.

ювчи функция бўлмайди. Қурилаётган схемада ҳар бир ўзгарувчига мусбат ва манфий контакт тўғри келгани учун бу схема минимал схема бўлади.

Демак, *агар схемада ҳар бир ўзгарувчига биттадан мусбат ва манфий контакт мос келиб, функциянинг ҳамма аргументлари муҳим аргументлар бўлса ва бу ўзгарувчилар бўйича функция ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам бўлмаса, у ҳолда схема* ***минимал схема*** *бўлади.*

$f = x_1x_2...x_n \vee \overline{x_1}\;\overline{x_2}\;...\;\overline{x_n}$ функцияни реализация қиладиган VII.44- шаклдаги схемадан фарқ қиладиган минимал схема тузиш талаб этилсин. Бунинг учун f функцияни

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee \overline{x_3})(x_3 \vee \overline{x_4})...(x_{n-1} \vee \overline{x_n})(x_n \vee \overline{x_1})$$

кўринишдаги КНШга келтирамиз ва уни реализация қиладиган схема минимал бўлади (VII.44- шакл).

Демак, битта функцияни ҳар хил минимал схемалар орқали реализация қилиш мумкин экан, яъни минимал схема ягона эмас.

П-схемалар тўпламида (классида) ҳам минимал схемалар мавжуд бўлади. Минимал П-схема ҳамма схемалар классида ҳам минимал схема бўла оладими ёки йўқми деган савол туғилади.

«Кўприкча» минимал схемаси орқали реализация қилинган $f = xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$ функция учун 5 контактли П-схема мавжуд эмаслиги қўйилган саволга жавоб беради.

$f(x_1, ..., x_n)$ мантиқ алгебрасининг функцияси бўлсин. $L(f)$ орқали уни реализация қиладиган минимал схемадаги контактлар сонини ва $L_П(f)$ орқали П-схемадаги контактлар сонини белгилаймиз. У ҳолда

$$L(f) \leq L_П(f)$$

бўлади. $\max L(f) = L(n)$ ва $\max L_П(f) = L_П(n)$ лар *Шеннон функциялари* деб аталади. n аргументли $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни схема орқали реализация қилиш учун зарур бўлган максимал ва минимал контактлар сонини топиш масаласи катта амалий аҳамиятга эга эканлиги ҳаммамизга маълум. Илмий изланишлар ҳозирги вақтда қуйидаги баҳони беради:

$$\frac{2^n}{n} < L(n) \leq 3 \cdot 2^{n-1} - 2.$$

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларни реализация қиладиган реле-контактли схемалар ясанг:

   а) $x + y + z$; б) $(x \to y) \leftrightarrow z$; в) $(xy \vee \bar{z}) \to t$;
   г) $x \to y \to z$; д) $(x \vee y) \leftrightarrow z$; е) $xz \to z$;
   ж) $(x \leftrightarrow y) \to z$; з) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$; и) $(x \to y) \vee z$.

2. Ҳар бир схемада чекли сондаги муҳим занжирлар мавжуд бўлишини исбот қилинг.

3. Муҳим занжирларга мос келувчи конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси схеманинг ўтказувчанлик функциясига тенг кучли эканлигини исбот қилинг. Мисолнинг натижасига асосан, схемага қараб унинг ўтказувчанлик функциясини ёзинг.

4. Ҳар қандай контакт схема П-схема бўла олмаслигини исботланг.

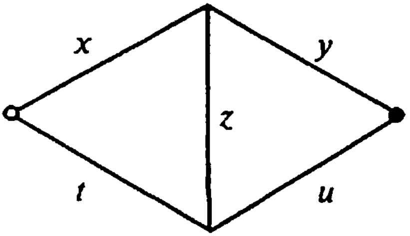
5. 1) Қуйидаги функцияларни реализация қиладиган П-схемаларни топинг:

   $f_1(x, y, z) = x \to y \to z$, $f_2(x, y, z) = x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$,

   $f_3(x, y, z, t) = (xy \vee t) \leftrightarrow (\bar{x}y \to z)$,

   $f_4(x, y, z, t) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee t)(xt \vee \bar{y}z)$.

2) VII.45- шаклда кўрсатилган схема («кўприкча») П-схема бўла олмаслигини исботланг.



VII.45- шакл.

6. Агар қуйидагилар аниқ бўлса, у ҳолда тўрт талабадан қайси бири имтиҳон топширган:

1) агар биринчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам топширган;

2) агар иккинчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда учинчиси топширган ёки биринчиси топширмаган;

3) агар тўртинчи талаба имтиҳон топширмаган бўлса, у ҳолда биринчиси топширган ва учинчиси топширмаган;

4) агар тўртинчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда биринчиси ҳам топширган.

7. Тўртта дўст — Сафаров (*С*), Бекмуродов (*Б*), Хўжаев (*Х*), Азизов (*А*) меҳнат таътилларини тўрт шаҳарда — Тошкент, Бухоро, Самарқанд ва Фарғонада ўтказишга келишдилар. Қуйидаги чеклашлар мавжуд бўлган ҳолда улардан ҳар бирининг қайси шаҳарга боришини аниқланг:

1) агар *С* Тошкентга бормаса, у ҳолда *Х* Бухорога бормайди;

2) Агар *Б* Тошкентга ҳам, Фарғонага ҳам бормаса, у ҳолда *С* Тошкентга боради;

3) агар *Х* Фарғонага бормаса, у ҳолда *Б* Самарқандга боради;

4) агар *А* Тошкентга бормаса, у ҳолда *Б* Тошкентга бормайди;

5) агар *А* Бухорога бормаса, у ҳолда *Б* Тошкентга бормайди.

8. Терговчи бир вақтда уч гувоҳни – Донақул, Тошпўлат ва Қосимни сўроқ қилди. Уларнинг кўрсатмалари бир-бириникига қарама-қарши эди ва уларнинг ҳар бири кимнидир ёлғончиликда айбларди:

1) Донақул Тошпўлатни ёлғон кўрсатма беряпти деб айбларди;

2) Тошпўлат Қосимни ёлғончи деб айбларди;

3) Қосим терговчини Тошпўлатга ҳам, Донақулга ҳам ишонмасликка чақирарди.

Аммо терговчи уларга бирорта ҳам савол бермасдан ким тўғри гапираётганини аниқлади. Гувоҳлардан қайси бири тўғри гапираётган эди?

9. «Уч талабадан қайси бири математик мантиқни ўқиган» деган саволга ушбу тўғри жавоб олинган: «Агар биринчиси ўқиган бўлса, у ҳолда учинчиси ҳам ўқиган, аммо, агар иккинчиси ўқиган бўлса, у ҳолда учинчиси ҳам ўқиган дегани нотўғри».

Ким математик мантиқни ўқиган?

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мусбат ва манфий контактли реле.
2. Реле-контактли схема орқали функцияни реализация қилиш.
3. Контактларни параллел ва кетма-кет улаш. Ўтказувчанлик функцияси.
4. Муҳим занжир ва П-схема ҳақида тушунчалар.
5. Контакт схемаларни минималлаштириш муаммоси. Минимал схема бўлишлик шарти.
6. Шеннон функцияси. Контактлар сонини баҳолаш.

VIII БОБ

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ФУНКЦИЯЛАРИНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ МУАММОСИ

Мазкур бобда дискрет математикани математик кибернетикага татбиқи, яъни минимал дизъюнктив нормал шаклдаги функцияларни ясаш ва уларни ечиш йўллари кўрсатилган. Бу ерда дизъюнктив нормал шакл (ДНШ)ни соддалаштириш, энг қисқа ДНШ, қисқартирилган ДНШ, тупикли ДНШ, Квайн ДНШ ва минимал ДНШ ни ясаш алгоритмлари келтирилган. Аналитик ва геометрик тарздаги алгоритмларнинг эквивалентлиги кўрсатилган.

1- §. Масаланинг қўйилиши

☑ *Элементар конъюнкциянинг ранги. Мулоҳазалар алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси. Соддалик индекси ва унинг хусусиятлари. Минимал ДНШ. Энг қисқа ДНШ. Тривиал алгоритм. «Бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми.*

1-таъриф. *Ушбу*

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r} \ (\gamma \neq \mu \text{ да } i_\gamma \neq i_\mu) \qquad (1)$$

*ифода **элементар конъюнкция** деб аталади. r сон **элементар конъюнкциянинг ранги** дейилади. Константа 1 ни ранги 0 га тенг бўлган элементар конъюнкция деб биламиз.*

2-таъриф. *Ушбу*

$$D = \bigvee_{i=1}^{s} K_i \ (i = j \text{ да } K_i \neq K_j) \qquad (2)$$

*ифода **дизъюнктив нормал шакл** (ДНШ) деб аталади, бу ерда K_i — ранги i га тенг бўлган элементар конъюнкция.*

Маълумки, D дизъюнктив нормал шакл мантиқ алгебрасининг маълум бир $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясини реализация қилади. Мантиқ алгебрасининг ҳар қандай $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

($f \neq 0$) функциясини ДНШ кўринишига келтириш мумкинлигини, яъни

$$D = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3}$$

ни II бобда таъкидлаган эдик.

Бундай ДНШ сифатида f функциянинг мукаммал дизъюнктив нормал шаклини (МДНШ) олиш мумкин, яъни

$$D = \bigvee_{\substack{(\sigma_1 \cdot \sigma_2, \ldots \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} \cdot x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} . \tag{4}$$

1-мисол. $f(x_1, x_2, x_3)$ функция қуйидаги чинлик жадвали билан берилган бўлсин.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

У ҳолда бу функцияни қуйидаги МДНШ кўринишида ифодалаш мумкин:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 . \tag{5}$$

Иккинчи тарафдан, шу функциянинг ўзини

$$D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 \tag{6}$$

ДНШ кўринишида ҳам ифодалаш мумкин (чинлик жадвали орқали аниқлашни ўқувчига ҳавола этамиз).

Ушбу мисол кўрсатяптики, мантиқ алгебрасининг битта функциясини бир нечта ДНШ кўринишида ифодалаш мумкин.

Агарда D_1 билан D_2 кўринишларини таққосласак, у ҳолда D_1 ифодасида 15 та ўзгарувчи символи ва 5 та элементар конъюнкция қатнашаётганлигини, D_2 ифодасида эса 3 та ўзгарувчи символи ва 2 та элементар конъюнкция қатнашаётганлигини кўрамиз. Демак, D_2 формула ўзгарувчилар символи (элементар конъюнкциялар) сонига нисбатан D_1 га қараганда соддароқ формула ҳисобланади.

Агарда D_1 ва D_2 кўринишлардаги функцияни:

а) контактли схема орқали реализация қилсак, у ҳолда D_1 ни реализация қилиш учун 15 та контакт ва D_2 ни реализация қилиш учун 3 та контакт талаб этилади;

б) ноль тактли функционал элементлардан ясалган схема орқали реализация этсак, у ҳолда D_1 ни реализация қилиш учун 21 дона функционал элемент ва D_2 ни реализация қилиш учун 4 дона функционал элемент сарф бўлади;

в) бир тактли функционал элементлардан ясалган кўп тактли тўғри схема орқали реализация қилиш талаб этилса, у ҳолда D_1 ни реализация этиш учун 33 дона функционал элемент, шу жумладан, 12 дона ушлаб туриш элементи ва D_2 ни реализация қилиш учун 6 дона, шу жумладан, 2 дона ушлаб туриш элементи керак бўлади (бу мулоҳазаларнинг чинлигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз).

Демак, D_1 ни реализация қиладиган схеманинг (қандай схема бўлишидан қатъи назар) таннархи D_2 ни реализация қиладиган схеманинг таннархидан анча қиммат (ортиқ) туради.

Шунинг учун ҳам мантиқ алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси (халқ хўжалиги учун) катта амалий аҳамиятга эгадир. Бу масалани ҳал этиш учун ДНШ нинг «мураккаблигини» ифодаловчи $L(D)$ соддалик индексини киритамиз.

$L(D)$ функционал учун қуйидаги аксиомаларнинг бажарилишини талаб қиламиз.

I. Манфий эмаслиги ҳақидаги аксиома. Ҳар қандай ДНШ учун $L(D) \geq 0$.

II. Монотонлиги ҳақидаги аксиома (кўпайтмага нисбатан). Агар $D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1$ бўлса, у ҳолда

$$L(D) \geq L(D^1 \vee K^1). \tag{7}$$

III. Қавариқлиги ҳақидаги аксиома (қўшишга нисбатан). Агар $D = D_1 \vee D_2$ ва $D_1 \wedge D_2 \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$L(D) \geq L(D_1) + L(D_2). \qquad (8)$$

IV. Инвариантлик ҳақидаги аксиома (изоморфизмга нисбатан). Агар R^1 ДНШ R ДНШ дан ўзгарувчиларни қайта номлаш (айнан тенглаштиришсиз) усули билан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда

$$L(D^1) = L(D).$$

Дизъюнктив нормал шакллар учун мавжуд бўлган соддалик индексларини келтирайлик.

1. $L_Б(D)$ – берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги ўзгарувчилар ҳарфларининг сони. Масалан, бизнинг мисолимиздаги D_1 ва D_2 учун $L_Б(D_1) = 15$ ва $L_Б(D_2) = 3$, яъни бу индексга нисбатан D_2 ДНШ D_1 ДНШ га қараганда соддароқдир.

2. $L_К(D)$ – берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги элементар конъюнкциялар сони. D_1 ва D_2 учун $L_К(D_1) = 5$ ва $L_К(D_2) = 2$, яъни D_2 бу индексга нисбатан ҳам D_1 га қараганда соддароқдир.

3. $L_0(D)$ – берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги инкор (–) символининг сони. D_1 ва D_2 лар учун $L_0(D_1) = 6$ ва $L_0(D_2) = 2$, демак, D_2 бу индекс учун ҳам D_1 га нисбатан соддароқ экан.

$L_Б(D)$, $L_К(D)$ ва $L_0(D)$ индекслар юқорида келтирилган аксиомаларни қаноатлантиради.

Маълумки, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ўзгарувчилар тўпламидан 3^n та элементар конъюнкция тузиш мумкин («бўш» конъюнкцияга 1 константа мос қилиб қўйилган). Бундан ўз навбатида $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ тўплам элементларидан 2^{3^n} та дизъюнктив нормал шакл тузиш мумкинлиги келиб чиқади.

3-таъриф. *Агар $f(x_1, ..., x_n)$ функцияни реализация қилувчи ДНШ $L(D)$ индексга нисбатан минимал бўлса, у ҳолда бундай ДНШ L га нисбатан минимал ДНШ, $L_К$ индексга нисбатан минимал бўлган ДНШ эса энг қисқа дизъюнктив нормал шакл деб аталади.*

Бундан кейин $L_Б$ индексга нисбатан минимал бўлган ДНШ ни *минимал дизъюнктив шакл* деб атаймиз.

1- мисолни таҳлил қилайлик.

1. $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ минимал ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ орқали ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг x_1, x_2, x_3 аргументлари муҳим (сохта эмас) аргументлардир. Шунинг учун уни учтадан кам ҳарф билан ифодалаш мумкин эмас.

2. $D_2 \doteq \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ энг қисқа ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ билан ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция ҳар қандай элементар конъюнкциядан фарқ қўлади.

3. $D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ L_0 индексга нисбатан минимал ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ билан ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция x_2 ва x_3 ўзгарувчилари бўйича ўсувчи функция эмас ва, демак, уни иккита инкордан кам инкор қатнашган ДНШ кўринишида ифодалаш мумкин.

Бизнинг бу бобдаги асосий вазифамиз, математик мантиқнинг ихтиёрий $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияси учун L индексга нисбатан минимал дизъюнктив нормал шаклни қандай усуллар ёрдами билан топишдан иборат бўлади. Бу муаммо *математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси* деб аталади. Бу масала ечимининг *тривиал алгоритми* мавжудлигини кўрсатамиз.

1. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ўзгарувчилар тўпламида ҳамма 2^{3^n} та $D_1, D_2, ..., D_{2^{3^n}}$ дизъюнктив нормал шаклларни маълум тартибда тузамиз.

2. Кейин бу ДНШ лардан $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ ларни ажратиб оламиз.

3. Ажратиб олинган ДНШ лар соддалик индексларининг $(L_Б, L_К, L_0)$ миқдорларини ҳисоблаб чиқамиз.

4. Ҳисоблаб чиқилган индекслар миқдорларини бир-бирига таққослаш йўли билан L га нисбатан минимал бўлган ДНШ ни топамиз.

Келтирилган алгоритмни амалий реализация қилиш учун жуда ҳам кўп меҳнат талаб этилади, чунки камида 2^{3^n} та кичик амални (операцияни) бажаришга тўғри келади. Масалан, $n = 3$ бўлганда, $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни реализация қиладиган L индексга нисбатан минимал дизъюнктив нормал шаклларни топиш учун камида $2^{3^3} = 134\,217\,728$ та амални бажаришга тўғри келади. Шунинг учун $n \geq 3$ дан бошлаб бу алгоритмдан фойдаланиш мантиққа тўғри келмайди, ундан фақатгина $n = 1$ ва $n = 2$ ҳоллар учун фойдаланиш мумкин.

Демак, «бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми минимал дизъюнктив нормал шаклни топиш масаласида амалий ёрдам бермайдиган алгоритмдир. Шунинг учун мантиқ алгебраси функциясини минималлаштиришнинг бошқа усулларини излашга тўғри келади.

2- §. Дизъюнктив нормал шаклни соддалаштириш ва тупикли ДНШ

☑ *ДНШ ни соддалаштиришнинг икки хил йўли. Элементар конъюнкцияни четлаштириш жараёни. Кўпайтувчини четлаштириш жараёни. Тупикли ДНШ. Минимал ДНШга келтириш ҳақидаги теоремалар. Мисоллар.*

D ихтиёрий ДНШ ва

$$D = D^1 \vee K, \quad D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1 \tag{1}$$

бўлсин, бу ерда D^1 — бирор ДНШ, K — берилган D нинг бирор элементар конъюнкцияси, $x_i^{\sigma_i}$ — шу K нинг бирорта кўпайтувчиси, K^1 эса K нинг қолган кўпайтувчилари, $K = x_i^{\sigma_i} K^1$. ДНШ ни соддалаштиришнинг икки хил йўлини (типини) кўриб ўтайлик.

I. Элементар конъюнкцияни четлаштириш жараёни (операцияси). D ДНШ дан D^1 ДНШ га ўтиш учун K элементар конъюнкцияни четлаштириш керак. Бундай ўзгартириш $D = D^1$ бўлганда ва фақат шундагина мумкин.

II. Кўпайтувчини четлаштириш операцияси (жараёни). D ДНШ дан $D^1 \vee K^1$ ДНШ га ўтиш операцияси. Буни бажариш учун K элементар конъюнкция ифодасидан $x_i^{\sigma_i}$ кўпайтувчини четлаштириш керак. Бу алмаштириш $D = D^1 \vee K^1$ бўлганда аниқланган.

1-таъриф. *I ва II алмаштиришлар йўллари билан соддалаштириш мумкин бўлмаган D дизъюнктив нормал шакл (I ва II алмаштиришларга нисбатан)* ***тупикли ДНШ (ТДНШ)*** *деб аталади.*

1-мисол. $D = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ I ва II алмаштиришларга нисбатан тупикли ДНШ бўлади.

(1) ва монотонлик аксиомасига асосан $L(D^1) \leq L(D)$ ва $L(D^1 \vee K^1) \leq L(D)$ бўлади. Шунинг учун ТДНШ лар орасида ҳар доим минимал дизъюнктив нормал шакллар мавжуд бўлади.

Энди ДНШ ни юқорида келтирилган иккита алмаштириш асосида соддалаштириш алгоритмини келтирамиз.

1. $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни ифодаловчи бирор ДНШ ни дастлабки ДНШ сифатида оламиз. Масалан, шундай ДНШ сифатида унинг мукаммал дизъюнктив нормал шаклини оламиз (чунки чинлик жадвали асосида уни формула орқали осонгина ёзиш мумкин).

2. Дастлабки дизъюнктив нормал шаклда қўшилувчиларни ва ҳар бир қўшилувчидаги кўпайтувчиларни тартибга соламиз. Бу тартиблаш билан ДНШ кўриниши берилади.

3. Чапдан ўнгга қараб ДНШ кўриниши кўрилиб ўтилади. Навбатдаги K_i $(i = 1, 2, ..., n)$ элементар конъюнкцияга нисбатан K_i элементар конъюнкцияни четлаштириш операцияси қўлланилади, агар бу мумкин бўлмаса, у ҳолда чапдан ўнгга қараб $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r}$ элементар конъюнкцияларнинг $x_{i_v}^{\sigma_v}$ $(v = 1, 2, ..., r)$ кўпайтувчи ҳадлари кўриб чиқилади ва уларга нисбатан мумкин бўлгунга қадар $x_{i_v}^{\sigma_v}$ кўпайтувчини четлаштириш операцияси қўлланилади. Шундан сўнг кейинги элементар конъюнкцияга ўтилади.

Охирги элементар конъюнкцияни ишлаб чиққандан кейин, ҳосил бўлган ДНШ ни яна қайтадан чапдан ўнгга қараб кўриб чиқилади ва элементар конъюнкцияни четлаштириш операцияси синаб кўрилади.

Натижада изланган дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

1-теорема. *Соддалаштириш алгоритмини қўллаш натижасида ҳосил қилинган дизъюнктив нормал шакл (I ва II алмаштиришларга нисбатан) минимал ДНШ бўлади.*

2-мисол. Қуйидаги чинлик жадвалида берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўриб чиқайлик.

1-жадвал

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун дастлабки ДНШ сифатида МДНШни оламиз ва икки тартиблашни ўтказамиз:

$$D^{\mathrm{I}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3\ ,$$

$$D^{\mathrm{II}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\ .$$

D^{I} тартибга солинган ДНШ учун алгоритмнинг ишлашини кўрамиз.

1. $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин эмас, аммо $\bar{x}_1$ кўпайтувчини четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\,.$$

Натижада $\bar{x}_2\bar{x}_3$ конъюнкцияга эга бўламиз, ундан бирорта ҳам кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмас.

2. $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин эмас. Бу конъюнкциядан $\bar{x}_1$ кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмаслигини осонгина кўриш мумкин, лекин $\bar{x}_2$ кўпайтувчига нисбатан уни четлаштириш операциясини қўллаш мумкин. $\bar{x}_1x_3$ конъюнкцияни ҳосил қиламиз. Кўпайтувчини четлаштириш операциясини ишлатиб, соддалаштириш мумкин эмас.

3. $\bar{x}_1x_2x_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_1x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 .$$

4. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 .$$

5. $x_1x_2\bar{x}_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин эмас, бироқ x_2 кўпайтувчини ташлаб юбориш мумкин. Натижада $x_1\bar{x}_3$ конъюнкцияга эга бўламиз. Бу конъюнкцияга нисбатан кўпайтувчини четлаштириш операциясини ишлатиб, уни соддалаштириш мумкин эмас.

6. $x_1x_2x_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин эмас, аммо ундан x_1 кўпайтувчини четлаштириш мумкин. Натижада, x_2x_3 конъюнкцияни ҳосил қиламиз ва уни бошқа соддалаштириш мумкин эмас.

Шундай қилиб, $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$ ДНШ ни ҳосил қиламиз. Бу ДНШ га нисбатан конъюнкцияни четлаштириш операциясини ишлатиш натижа бермайди.

Демак, соддалаштириш алгоритмини ишлатиш натижасида

$$D = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \qquad (2)$$

дизъюнктив нормал шаклни ҳосил қиламиз. Келтирилган ҳисоблар 2- жадвалда акс эттирилган.

2-жадвал

Қадам т.р.	ДНШ ва кўрилаётган тартиб	Текширилаётган конъюнкция	Операция тури
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_1 \vee$ $\vee\, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$ ни четлаштириш
2	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $\vee\, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2$ ни четлаштириш
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $\vee\, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$ ни четлаштириш
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ни четлаштириш
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	x_2 ни четлаштириш
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	x_1 ни четлаштириш
7	$x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$		
	Иккинчи кўриш ҳеч нарса бермайди	Алгоритм тамом бўлди	

Агарда соддалаштириш алгоритмини D^{II} га нисбатан ишлатсак, у ҳолда

$$D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \qquad (3)$$

дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

3- жадвалда D^{II} га нисбатан ишлатилган соддалаштириш алгоритми ишининг асосий босқичлари келтирилган.

Ушбу мисолдан кўриниб турибдики, соддалаштириш алгоритми татбиқининг натижаси дастлабки ДНШ ни қандай тартиблашга боғлиқ бўлар экан.

Масалан, $L_{\text{Б}}(D_1) = 8$, $L_{\text{Б}}(D_2) = 6$, $L_K(D_1) = 4$, $L_K(D_2) = 3$, $L_{\text{П}}(D_1) = 4$, $L_{\text{П}}(D_2) = 3$ ва бу ердан $L_{\text{Б}}(D_1) \neq L_{\text{Б}}(D_2)$, $L_K(D_1) \neq L_K(D_2)$, $L_{\text{П}}(D_1) \neq L_{\text{П}}(D_2)$ муносабатлар келиб чиқади.

3-жадвал

Қадам т.р.	ДНШ ва қўрилаётган тартиб	Текширилаётган конъюнкция	Операция тури
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1$ ни четлаштириш
2	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_3\bar{x}_1\bar{x}_2$	x_3 ни четлаштириш
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_1x_3$	x_2 ни четлаштириш
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$	x_1 ни четлаштириш
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_3x_1x_2$	$\bar{x}_3$ ни четлаштириш
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ни четлаштириш
7	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	қўлланилмайди
8	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$ ни четлаштириш

1	2	3	4
9	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_2x_3 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_1x_3$	қўлланилмайди
10	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee\, x_2x_3 \vee x_1x_2$	x_2x_3	x_2x_3 ни четлаштириш
11	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$	x_1x_2	қўлланилмайди
12	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$	Алгоритм тамом бўлди	

Исталган $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция учун бирор тартиблаш оқибатида соддалаштириш алгоритмини татбиқ этиб, минимал ДНШни ҳосил этиш мумкинми ёки йўқми деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

2-теорема. *$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ математик мантиқ алгебрасининг ихтиёрий функцияси ($f \neq 0$) ва $D = \bigvee_{i=1}^{n} K_i$ унинг ихтиёрий тупикли ДНШ (I ва II алмаштиришларга нисбатан) бўлсин. У ҳолда мукаммал дизъюнктив нормал шаклни шундай тартиблаши мавжуд бўладики, ундан соддалаштириш алгоритми ёрдами билан D тупикли ДНШ ни ҳосил қилиш мумкин.*

Натижа. Тупикли ДНШлар орасида албатта L индексга нисбатан минимал ДНШлар (ҳаммаси бўлиши шарт эмас) мавжуд бўлганлиги учун, соддалаштириш алгоритми, МДНШ ни маълум равишда тартиблаш натижасида минимал ДНШ ни ҳам топишга имкон яратади.

Шундай қилиб, минимал ДНШ ни топиш учун МДНШ ни тартиблаш ва унга нисбатан соддалаштириш алгоритмини ишлатиш керак.

Теореманинг исботидан ([56], 213-бетга қ.) шу нарса келиб чиқадики, соддалаштириш алгоритми ёрдами билан тупикли ДНШ ларни мукаммал ДНШ дан ясаш учун фақат конъюнкциялар ифодасида кўпайтувчилар жойлашишини вариацияламоқ етарли.

Ҳозирги вақтда конъюнкцияларни ДНШ ифодасидан четлаштириш ва кўпайтувчиларни конъюнкциялар ифодасидан четлаштириш мумкинлигини текшириш сони (МДНШ ни тартиблашнинг ҳамма тури бўйича)

$$2^{\left(n\log\frac{n}{2}+1\right)\cdot 2^n}\cdot(n+2)\cdot 2^n$$

дан ортиқ эмаслиги исботланган. Бу сон 2^{3^n} сонидан анча камдир, яъни соддалаштириш алгоритми «бирма-бир кўздан кечириш» алгоритмидан яхшироқ эканлиги маълум бўлади.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги функцияларни мукаммал конъюнктив нормал шаклга келтириб, $L_Б$, $L_К$, L_0 соддалик индексларининг миқдорини топинг:

$f_1=((x\vee y)\vee z)\to((x\vee y)(x\vee z))$;

$f_2=x\leftrightarrow z$;

$f_3=(x\to y)\to z$;

$f_4=x\to(y\to z)$.

2. Қуйидаги функцияларни соддалаштириш алгоритмидан фойдаланиб, минимал дизъюнктив нормал шаклга келтиринг:

$f_1=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1\bar{x}_3x_4\vee x_2\bar{x}_3x_4$;

$f_2=x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1\bar{x}_2x_4\vee x_3x_4$;

$f_3=x_1x_2\vee\bar{x}_1x_3\vee x_1\bar{x}_2x_3x_4\vee\bar{x}_1x_2x_3x_4$.

3. Дизъюнктив нормал шаклда берилган қуйидаги функцияларнинг тупикли дизъюнктив нормал шаклини топинг:

1) $(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$;

2) $(x_1\vee x_4)(x_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_4)(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$;

3) $(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_1\vee x_4)(x_2\vee x_3\vee\bar{x}_4)$.

4. 3- бандда берилган функцияларнинг минимал дизъюнктив нормал шаклини топинг.

5. Математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммосининг амалий аҳамиятини тушунтириб беринг. Бу масала ечимининг тривиал алгоритмининг ноқулайлиги нимадан иборат?

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси нимадан иборат?
2. Соддалик индекси ва унинг хусусиятлари.
3. Минимал ва энг қисқа ДНШ.
4. Тривиал алгоритм тушунчаси. «Бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми.
5. ДНШни соддалаштиришнинг икки хил йўли. Элементар конъюнкцияни ва кўпайтувчини четлаштириш жараёнларини тушунтириб беринг.
6. Тупикли ДНШ. Минимал ДНШга келтириш муаммолари.

3- §. Минималлаштириш масаласининг геометрик тарзда қўйилиши

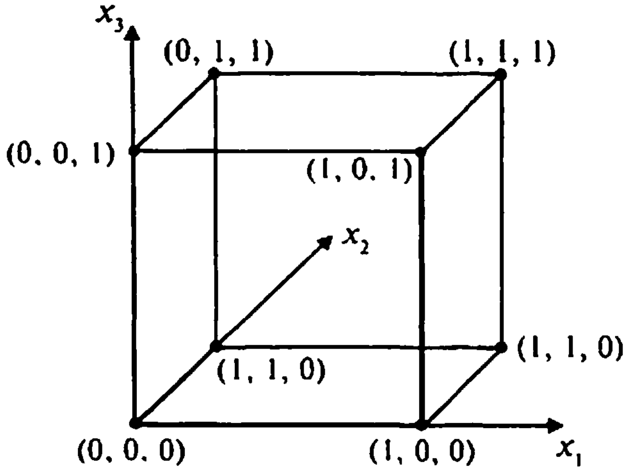
☑ *Бирлик кубнинг ҳамма чўққилари тўплами. Уч ўлчовли ёқ. N_f тўплами ҳақида. Интервал. Тўплам қобиғи. Тўплам қобиғи билан функция орасидаги муносабат.*

Ҳамма $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ мажмуа тўпламини E^n билан белгилаймиз. E^n тўпламни бирлик кубнинг ҳамма чўққилари (учлари) тўплами сифатида қараш мумкин. Шу сабабли E^n тўплам *n ўлчовли куб*, $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ эса *куб чўққилари* деб аталади.

1-таъриф. $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, ..., \sigma_{i_r}$ *шундай 0 ва 1 сонларидан иборат тайинланган сонлар системаси бўлиб,* $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n$ *учун*

$$\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}, \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, ..., \alpha_{i_r} = \sigma_{i_r}$$

бажарилганда E^n кубнинг чўққиларидан тузилган тўплам **(*n – r*) *ўлчовли ёқ*** *деб аталади.*



VIII.1- шакл.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ мантиқ алгебрасининг функцияси бўлсин. E^n кубнинг $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$ бўладиган ҳамма чўққиларидан иборат тўпламни N_f билан белгилаймиз, яъни $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$ бажарилганда ва фақат шунда $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N_f$ бўлади. Масалан, 1- жадвалда берилган функцияга

$$N_f = \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$$

тўплам мос келади.

Аниқки, $N_f \subseteq E^n$. Агар N_f тўплам берилган бўлса, у ҳолда унга мос бўлган f нинг аналитик кўринишини ёзиш мумкин (VIII.1- шакл).

1-мисол. а) $N_{f_1} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$;

б) $N_{f_2} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ тўпламларга мос келадиган функцияларнинг аналитик кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \ ;$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 .$$

Демак, N_f берилган бўлса, у ҳолда унга мос бўлган f ни, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ берилганда эса N_f ни топиш мумкин.

Дастлабки функция сифатида r рангли $K(x_1, ..., x_n)$ элементар конъюнкцияни олайлик, яъни

$$K(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_r}^{\sigma_r} .$$

2-таъриф. *K конъюнкцияга мос N_k тўплам **r рангли интервал** деб аталади.*

Ўз-ўзидан равшанки, r рангли N интервал $(n-r)$ ўлчовли ёқни ифодалайди.

2-мисол. $K_1(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3$, $K_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2$, $K_3(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1$ конъюнкцияларга $N_{k_1} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$, $N_{k_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $N_{k_3} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ интерваллар мос келади. Бу интерваллар мос равишда 2, 2 ва 1 рангли ҳамда ва 1-ўлчовли ёқ (қирра), 1-ўлчовли ёқ (қирра) ва 2-ўлчовли ёқдир.

Агар $f(x_1, x_2, ..., x_n)g(x_1, x_2, ..., x_n) \vee h(x_1, x_2, ..., x_n)$ бўлса, у ҳолда:

1) $N_g \subseteq N_f$, $N_h \subseteq N_f$;   2) $N_f = N_g \cup N_h$

бўлади.

Умуман, агар $f(x_1, x_2, ..., x_n) = D$ ва $D = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s$ бўлса, у ҳолда юқоридаги хоссаларга асосан

$$N_{k_i} \subseteq N_f \ (i = 1, 2, ..., s) \text{ ва } N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup ... \cup N_{k_s} ,$$

яъни f функцияга N_f тўпламнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_s}$ интерваллардан иборат *қобиқ* мос келади ва ҳар бир $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_s}$ интерваллардан иборат N_f тўпламнинг қобиғига D дизъюнктив нормал шаклда ифодаланган f функция мос келади.

Демак, мантиқ алгебрасининг ҳар бир $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясига битта N_f тўпламнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_n}$ интерваллардан ($N_{k_j} = N_f$) иборат қобиғи ва, аксинча, ҳар бир N_f тўпламнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_n}$ интерваллардан иборат қобиғига битта ягона $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция мос келади, яъни N_f нинг қобиғи билан $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

3-мисол. 1-жадвал билан берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг дизъюнктив нормал шакллари қуйидагича эди:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 ,$$

$$D_2 = x_2\bar{x}_3 \vee x_1 .$$

Бу ДНШларга $N_f = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ тўпламнинг иккита қопламаси мос келади:

$$N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} ,$$

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} ,$$

бу ерда

$$N_{k_1} = \{(0, 0, 0)\}, \quad N_{k_2} = \{(1, 0, 0)\}, \quad N_{k_3} = \{(1, 0, 1)\},$$
$$N_{k_4} = \{(1, 1, 0)\}, \quad N_{k_5} = \{(1, 1, 1)\},$$
$$N_{k_1^0} = \{(0. 0. 0), (1, 0, 0)\},$$
$$N_{k_2^0} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Биринчи қоплама бешта нуқтадан, иккинчиси эса қирра ва икки ўлчовли ёқдан иборат.

N_{k_i} интервалнинг ранги r_i бўлсин (у K_i конъюнкциянинг рангига тенг). У ҳолда

$$r = \sum_{i=1}^{s} r_i \qquad (4)$$

қопламанинг ранги деб аталади.

Мантиқ алгебраси функцияси $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ни минималлаштириш (минимизациялаш) муаммосига эквивалент бўлган қопламалар ҳақидаги геометрик масала қуйидагича қўйилади; берилган $N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup ... \cup N_{k_s}$ тўпламнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_s}$ ($N_{k_j} \subseteq N_f$, $j = 1, 2, ..., s$) *интерваллардан иборат шундай қобиғини топиш керакки, унинг r ранги энг кичик бўлсин*, яъни бизни қизиқтирувчи

$$\min r = \min \sum_{i=1}^{s} r_i \qquad (5)$$

топиш масаласига келади.

Демак, мантиқ алгебраси функциясини минималлаштириш масаласини икки формада кўриш мумкин: биринчиси – аналитик формада, иккинчиси – геометрик формада. Шунинг учун адабиётларда икки тил ишлатилади: аналитик ва геометрик. Айрим ҳолларда икки тилнинг комбинациясидан фойдаланилади. Масалан, конъюнкцияни интервал ва ДНШ ни қоплама деб айтилади.

4- §. Жоиз (рухсат этилган) конъюнкциялар

☑ *Жоиз конъюнкциялар. Тривиал алгоритмни соддалаштириш.*

Маълумки, x_1, x_2, ..., x_n ўзгарувчилардан 3^n та элементар конъюнкция ва 2^{3^n} та дизъюнктив нормал шакл тузиш мумкин. Масалан, $n = 3$ га тенг бўлса, яъни x_1, x_2, x_3 ўзгарувчилардан

$$\begin{gathered} 1, x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1\bar{x}_2, \\ x_1\bar{x}_3, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_3, \\ \bar{x}_2x_3, \bar{x}_1x_2x_3, x_1\bar{x}_2x_3, x_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3, x_1x_2x_3. \end{gathered} \qquad (1)$$

элементар конъюнкциялар тузиш мумкин. Аммо бу элементар конъюнкцияларнинг ҳаммаси ҳам берилган ихтиёрий $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни реализация қиладиган дизъюнктив нормал шаклларнинг ифодасида иштирок этавермайди. Шунинг учун 3^n та конъюнкцияларнинг қайси бири $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг ДНШ да иштирок этади деган масалани ечишга тўғри келади. Бунинг учун, биринчи навбатда, $E_n \backslash N_f$ тўпламнинг элементларида 1 қиймат қабул қиладиган конъюнкцияларни топиш керак бўлади. Масалан,

$$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz, \qquad (2)$$

бўлсин, у ҳолда

$$N_{f_1} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \quad (3)$$

бўлади. Демак, ушбу 1- жадвалга эга бўламиз.

1-жадвал

$E_n \backslash N_f$	1 қиймат қабул қиладиган конъюнкциялар
(0, 0, 0)	$1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{z}, \bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
(0, 0, 1)	$1, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}z, \bar{y}z, \bar{x}\bar{y}z$

Иккинчи навбатда, (1) конъюнкциялар орасидан 1-жадвалдаги конъюнкцияларни четлаштирамиз, чунки $f(x, y, z)$ функцияга N_{f_1} ((3) га қаранг) тўплам мос келганлиги учун 1-жадвалдаги конъюнкциялар (2) функцияни реализация қиладиган дизъюнктив нормал шакллар ифодасида умуман қатнашмайди. Бу операция натижасида биз $f_1(x, y, z)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши мумкин бўлган (қатнашишга рухсат этилган, қатнашишга жоиз) конъюнкцияларга эга бўламиз:

$$x, y, xy, xz, x\bar{y}, x\bar{z}, yz, \bar{x}y, y\bar{z}, xyz,$$
$$xy\bar{z}, \bar{x}yz, x\bar{y}z, \bar{x}y\bar{z}, x\bar{y}\bar{z}. \tag{4}$$

Шундай қилиб, $3^3 = 27$ конъюнкциядан 15 тасининг берилган $f_1(x, y, z)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши жоиз экан.

1-таъриф. *Ихтиёрий $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция ва унга мос бўлган N_f тўплам берилган бўлсин. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши мумкин бўлган конъюнкциялар, яъни $E_n \backslash N_f$ тўпламнинг нуқталарида 1 қийматга эга бўлган конъюнкциялардан ташқари қолган ҳамма конъюнкциялар* ***жоиз конъюнкциялар*** *деб аталади.*

Масалан, (4) даги ҳамма конъюнкциялар жоиз конъюнкциялар бўлади.

1-мисол. Берилган

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee$$
$$\vee\, x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \tag{2a}$$

ва унга мос

$$N_{f_2} = \{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\} \quad (3a)$$

тўплам берилган бўлсин.

Жоиз конъюнкцияларни топиш учун ушбу 2- жадвални тузамиз.

2-жадвал

$E_n \backslash N_f$	1 қиймат қабул қиладиган конъюнкциялар
(1, 0, 0)	$1, x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_1\bar{x}_2, x_1\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
(0, 1, 1)	$1, \bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1x_3, x_2x_3, \bar{x}_1x_2x_3$

У ҳолда (1) даги конъюнкциялардан 2- жадвалдаги конъюнкцияларни четлаштириш натижасида қуйидаги жоиз конъюнкцияларга эга бўламиз:

$$x_1, x_2, x_1x_3, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, x_1x_2x_3,$$
$$x_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3. \quad (5)$$

Ўзгарувчилар сони n та бўлганда, 3^n та конъюнкция ва улардан 2^{3^n} та $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни реализация қилиши мумкин бўлган ДНШ тузиш мумкинлигини айтган эдик. Демак, берилган ихтиёрий $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функцияни реализация қиладиган тупикли (минимал) ДНШларни 2^{3^n} та ДНШлар орасидан изламасдан, балки 2^λ ДНШлар ичидан излаш керак деган натижага келдик, бу ерда λ — жоиз конъюнкциялар сони.

5- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл

☑ *Максимал интервал. Оддий импликант. Қисқартирилган ДНШ. Мисоллар.*

1-таъриф. *Агар N_f тўпламнинг қисм тўплами бўлган N_k интервал учун:*

1) $N_k \subseteq N_k^1 \subseteq N_f$;

2) N_k^1 интервалнинг ранги N_k интервалнинг рангидан кичик шартини қаноатлантирувчи N_k^1 интервал мавжуд бўлмаса, у ҳолда N_k (N_f га нисбатан) ***максимал интервал*** *деб аталади.*

1-мисол. $K_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2$, $K_2(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2$, $K_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$ бўлсин. У ҳолда N_{k_2}, N_{k_3} максимал интерваллар бўлиб, N_{k_1} интервал эса N_f нинг максимал интервали бўлмайди, чунки $N_{k_1} \subset N_{k_3}$ ва N_{k_3} нинг ранги N_{k_1} нинг рангидан кичик.

2-мисол. 4-§, (4) даги жоиз конъюнкцияларга мос келган 15 та интервалдан фақат N_{x_1} ва N_{x_2} интерваллар ҳамда 4-§, (5) даги 12 та интервалдан фақат $N_{x_1x_2}$, $N_{x_1x_3}$, $N_{x_2\bar{x}_3}$, $N_{\bar{x}_2x_3}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, $N_{\bar{x}_1\bar{x}_3}$ интервалларгина мос равишда N_{f_1} ва N_{f_2} тўпламларга нисбатан максимал интерваллар бўладилар.

2-таъриф. *N_f тўпламнинг N_k максимал интервалига мос келган K конъюнкция f функциянинг* ***оддий импликанти*** *деб аталади.*

Агар K^1 конъюнкциянинг ҳамма кўпайтувчилари K конъюнкцияда ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда $N_k \subseteq N_k^1$ деб ёзиш мумкин. У ҳолда, маълум маънода, f функциянинг K оддий импликанти ифодасидан бирорта ҳам кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмас, чунки кўпайтувчини четлаштириш натижасида $N_k^1 \not\subset N_f$ муносабатда бўлган K^1 конъюнкцияга эга бўламиз.

Ҳар қандай N_k интервални ($N_k \subseteq N_f$) максимал интервалгача кенгайтириш мумкин.

N_f тўпламнинг ҳамма максимал интерваллари

$$N_{k_1^0}, N_{k_2^0}, \ldots, N_{k_m^0}, \qquad (1)$$

лардан иборат бўлсин. У ҳолда

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \cup \ldots \cup N_{k_m^0}, \tag{2}$$

бўлади, чунки $N_{k_i^0} \subseteq N_f$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) ва N_f нинг ҳар бир нуқтаси (1) даги максимал интервалларнинг бирортасининг элементи бўлади. (2) тенглик қуйидаги муносабатга эквивалентдир:

$$f = K_1^0 \vee K_2^0 \vee \ldots \vee K_m^0. \tag{3}$$

3-таъриф. *f функциянинг ҳамма оддий импликантларининг дизъюнкцияси (3)* ***қисқартирилган ДНШ*** *деб аталади.*

Демак,

$$D_s(f) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee \ldots \vee K_m^0 \tag{4}$$

f функциянинг **қисқартирилган ДНШ** бўлади. $D_s(f)$ қисқартирилган ДНШ f функция орқали бир қиймати аниқланади ва f функцияни реализация қилади.

3-мисол. 4-§, (2) да берилган $f_1(x_1, x_2, x_3)$ учун максимал интерваллардан иборат

$$N_{f_1} = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \tag{5}$$

қобиққа ва 4-§, (2*а*) да берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функция учун

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \tag{6}$$

қобиққа эга бўламиз. Бу ерда

$$K_1^0 = x_1, \quad K_2^0 = x_2, \quad K_1 = x_1x_2, \quad K_2 = x_1x_3, \quad K_3 = x_2\bar{x}_3,$$

$$K_4 = \bar{x}_2x_3, \; K_5 = \bar{x}_1\bar{x}_2, \; K_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3.$$

Бу қобиқларга қуйидаги қисқартирилган ДНШлар мос келади:

$$D_c(f_1) = x_1 \vee x_2,$$

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3. \tag{7}$$

6- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклни ясаш алгоритми

☑ *Функцияни қисқартирилган ДНШга келтириш алгоритми. Мисоллар.*

Ихтиёрий $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклини ясаш учун қуйидаги операцияларни бажарамиз:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциянинг исталган конъюнктив нормал шаклини оламиз, масалан, мукаммал КНШ;

2) кейин қавсларни очиб чиқамиз, яъни

$$\wedge \vee \rightarrow \vee \wedge$$

турдаги алмаштиришни ўтказамиз;

3) бундан кейин ҳосил қилинган ифодадан 0 га тенг ҳадларни четлаштирамиз ва

$$K_1K_2 \vee K_2 = K_1, \quad K_1 \vee K_1 = K_1,$$

формулалардан фойдаланиб уни соддалаштирамиз. Натижада, қисқартирилган ДНШ га келамиз.

1-мисол. $N_{f_2} = \{(0, 0, 0\}, (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ тўпламга мос $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг МКНШ ни

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}), \qquad (1)$$

формуладан фойдаланиб ёзамиз:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Алгоритмнинг 2 ва 3- қадамларини ишлатамиз:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) = x_1\bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3.$$

Қисқартирилган ДНШ қуйидаги кўринишда бўлади:

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3. \qquad (2)$$

2-мисол.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$$

функция берилган бўлсин. Бу функцияга

$$N_{f_1} = \{(1, 0, 0\}, (0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

тўплам мос келади. Функциянинг МКНШ кўриниши

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Алгоритмнинг 2 ва 3- қадамларини бажарамиз:

$$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

Демак, функциянинг қисқартирилган ДНШ қуйидагича бўлади:

$$D_c(f_1) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \qquad (3)$$

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $N_{f_1} = \{(0, 0, 0\}, (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$,

   $N_{f_2} = \{(1, 0, 0\}, (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$

   тўпламларга мос f_1 ва f_2 функцияларнинг аналитик кўринишини ёзинг.
2. $N_{K_1} = \{(0, 0, 0\}, (0, 1, 1)\}$, $N_{K_2} = \{(1, 1, 1\}, (1, 0, 0)\}$, $N_{K_3} = \{(1, 1, 0\}, (1, 0, 1)\}$ интервалларга мос конъюнкцияларнинг аналитик кўринишини ёзинг.
3. Ҳар бир N_{K_1}, N_{K_2}, ..., N_{K_s} интераллардан иборат N_f тўпламнинг қобиғига D дизъюнктив нормал шаклда ифодаланган f функция мос келишини исботланг.

4. Қуйида берилган функцияларнинг жоиз конъюнкцияларини топинг:

$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

$f_2 = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

$f_3 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$;

$f_4 = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

$f_5 = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

$f_6 = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)$.

5. 4- бандда келтирилган функцияларни қисқартирилган ДНШ га келтиринг.

6. Қисқартирилган ДНШ ни ясаш алгоритми асосида қуйидаги функцияларни қисқартирилган ДНШ кўринишга келтиринг:

$f_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_2$;

$f_2 = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

$f_3 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Интервал. Тўплам қобиғи. Тўплам қобиғи билан функция орасидаги муносабат.
2. Жоиз (рухсат этилган) конъюнкциялар. Тривиал алгоритмни соддалаштириш.
3. Максимал интервал ва оддий импликант ҳақида тушунчалар.
4. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл.
5. Функцияни қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклга келтириш алгоритми.

7- §. Тупикли дизъюнктив нормал шаклларни геометрик асосда ясаш усуллари

☑ *Тупикли ДНШга келтириш алгоритми. Айрим максимал интервалларни четлаштириш. Келтирилмайдиган қопламалар (қобиқлар). Қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШлар орасидаги муносабатлар.*

4- §, (2*a*) формула билан берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функция учун N_{k_1}, N_{k_2}, ..., N_{k_6} максимал интерваллардан N_{f_2} иборат қоплама

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \qquad (1)$$

эканлигини юқорида кўрсатган эдик. Бу ерда

$$N_{f_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$$

$$N_{k_1} = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \qquad N_{k_2} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\},$$

$$N_{k_3} = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}, \qquad N_{k_4} = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\},$$

$$N_{k_5} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \qquad N_{k_6} = \{(0, 0, 0\}, (0, 1, 0)\}. \qquad (2)$$

Олдимизга бундай саволга жавоб топиш масаласини қўямиз: N_{f_2} тўпламнинг $N_{k_1}, ..., N_{k_6}$ максимал интерваллардан иборат бўлган қопламадан айрим максимал интервалларни четлаштирганимизда, қолган қисми яна N_{f_2} нинг қобиғи бўладими ёки йўқм?

(1) ва (2) муносабатлардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\begin{aligned} N_{f_2} &= N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6}, \\ N_{f_2} &= N_{k_1} \cup N_{k_4} \cup N_{k_6}, \\ N_{f_2} &= N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6}, \\ N_{f_2} &= N_{k_5} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3}, \\ N_{f_2} &= N_{k_4} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_6}. \end{aligned} \qquad (3)$$

N_{f_2} тўпламнинг (3) да кўрсатилган қопламаларидан бошқа қопламалари мавжуд эмас. Бу қобиқлар (1) келтирилган қобиқдан айрим максимал интервалларни четлаштириш натижасида ҳосил қилинган. Шундай қилиб, қўйилган саволнинг биринчи қисмига ижобий жавоб бердик.

(3) да келтирилган N_{f_2} тўпламнинг исталган қопламадан ихтиёрий бирорта максимал интервални четлаштирганимизда, қолган максимал интерваллар N_{f_2} тўпламнинг

қопламаси бўла олмайди. Бундай қопламалар N_{f_2} тўпламнинг *келтирилмайдиган қопламалари* деб аталади. Шундай қилиб,

$$1)\ N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_5}, N_{k_6};\qquad 2)\ N_{k_1}, N_{k_4}, N_{k_6};$$

$$3)\ N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_5}, N_{k_6};\qquad 4)\ N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_5};$$

$$5)\ N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_4}, N_{k_6} \qquad (4)$$

қобиқлар N_{f_2} тўпламнинг келтирилмайдиган қопламалари бўлади.

1-таъриф. *Агар $N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_m}$ максимал интерваллардан иборат қобиқ унинг таркибидан исталган максимал интервални (N_{k_j}, $j = 1, 2, \ldots, m$) четлаштирганимизда, қолган қисми N_f нинг қобиғи бўла олмаса, у ҳолда бу қобиқ N_{f_2} тўпламнинг* ***келтирилмайдиган қоплами*** *деб аталади.*

2-таъриф. *N_f тўпламнинг келтирилмайдиган қобиғига мос бўлган ДНШ* ***тупикли дизъюнктив нормал шакл*** *деб аталади (геометрик маънода).*

1-мисол. N_{f_2} тўпламнинг (4) да ифодаланган келтирилмайдиган қобиқларига мос қуйидаги ДНШ лар

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3,$$

$$D_2 = \bar{x}_2x_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3,$$

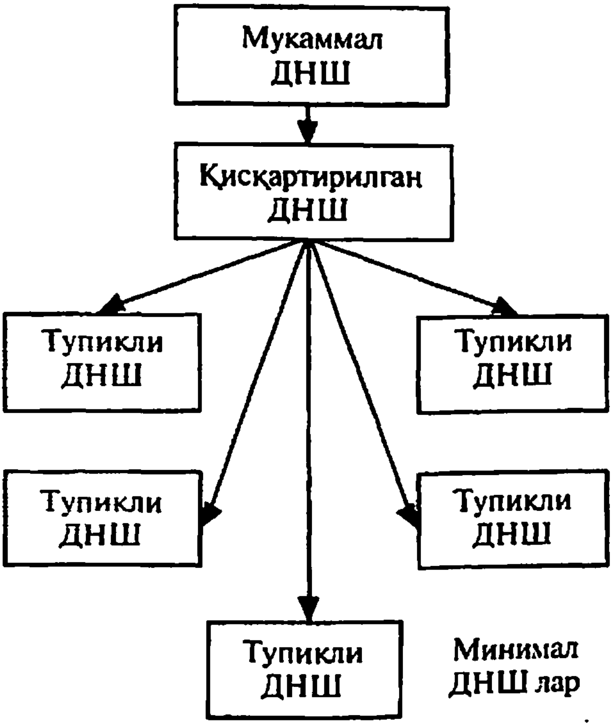
$$D_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3, \qquad (5)$$

$$D_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3,$$

$$D_5 = \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$$

f_2 функциянинг тупикли дизъюнктив нормал шакллари бўлади.

Теорема. *I ва II алмаштиришларга нисбатан тупикли ДНШ тушунчаси билан геометрик маънодаги тупикли ДНШ тушунчаси эквивалентдир.*



VIII.2- шакл.

Биз таърифлаган қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШлар қуйидаги муносабатда бўлади.

Тупикли ДНШ қисқартирилган ДНШдан айрим конъюнкцияларни четлаштириш йўли билан ҳосил қилинади.

$L_{\text{Б}}$ га нисбатан минимал ДНШ тупикли бўлади.

Тупикли ДНШ лар орасида $L_{\text{Б}}$ га нисбатан минимал ДНШ лар мавжуд бўлади.

Масалан,

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$$

функциянинг (4- §, (2*a*) га қ.) $D_c(f_2)$ қисқартирилган ДНШ ни топдик (6- §, (2) га қ.):

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3.$$

Ундан кейин (5) да ифодаланган тупикли ДНШларни ҳосил қилдик. У ердан кўриниб турибдики,

$$L_Б(D_1) = L_Б(D_2) = 6 \text{ ва } L_Б(D_3) = L_Б(D_4) = L_Б(D_5) = 8.$$

Демак,

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \text{ ва } D_2 = \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 .$$

тупикли ДНШлар $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг минимал дизъюнктив нормал шакллари бўлади. Равшанки, бу ДНШлар ўз навбатида $f_2(x_1, x_2, x_3)$ нинг энг қисқа ДНШлари ҳам бўлади.

МДНШ асосида минимал ДНШ ясаш жараёнининг схемаси VIII.2- шаклда ифодаланган.

8- §. Тупикли дизъюнктив нормал шаклларни ясаш алгоритми

☑ *Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритми. Мисоллар.*

Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритмини келтирамиз. N_f тўпламнинг ҳамма максимал интерваллар системаси

$$N^0_{k_1}, N^0_{k_2}, \dots, N^0_{k_m}$$

бўлсин. $N_f = \{P_1, P_2, \dots, P_\lambda\}$ ва $P_0 \notin N_f$ ихтиёрий нуқта бўлсин. f функция айнан 1 га тенг бўлмаган функция бўлсин. 1- жадвални тузамиз, бу ерда

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ агар } P_j \notin N_{k_i^0} \text{ бўлса, } (i = 1, .., m), \\ 1, \text{ агар } P_j \in N_{k_i^0} \text{ бўлса, } (j = 0, 1, \dots, \lambda). \end{cases}$$

Жадвалнинг биринчи устуни 0 лардан иборат бўлади, чунки $P_0 \notin N_f$. Ҳар бир қолган устунларида ҳеч бўлмаганда битта 1 мавжуд бўлади. Демак, биринчи устун қолган ҳамма устунлардан фарқ қилади.

1-жадвал

	P_0	P_1	...	P_j	...	P
$N_{k_1^0}$	σ_{10}	σ_{11}	...	σ_{1j}	...	$\sigma_{1\lambda}$
	...	...	...	...	...	...
$N_{k_i^0}$	σ_{i0}	σ_{i1}	...	σ_{ij}	...	$\sigma_{i\lambda}$
	...	...	...	...	...	...
$N_{k_m^0}$	σ_{m0}	σ_{m1}	...	σ_{mj}	...	$\sigma_{m\lambda}$

Ҳар бир j $(0 \le j \le \lambda)$ учун ҳамма сатрлар рақамлари (номерлари) тўплами E_j ни топамиз, бу ерда P_j устунда 1 мавжуд бўлади.

$$E_j = \{e_{j1},\ e_{j2},\ \dots,\ e_{j\mu(j)},\}$$

бўлсин.

$$\bigwedge_{j=1}^{\lambda}\left(e_{j1} \vee \dots \vee e_{j\mu(j)}\right)$$

ифодани тузамиз ва

$$\wedge \vee \rightarrow \vee \wedge$$

турдаги алмаштиришни ўтказамиз. Бу алмаштириш вақтида e символини буль қийматли деб биламиз. Ҳосил қилинган ифодани

$$AB \vee A = A,$$
$$A \vee A = A$$

тенг кучли формулалардан фойдаланиб соддалаштирамиз. Бунинг натижасида $\vee \wedge$ ифоданинг қисми бўлган $\vee \wedge^1$ ифодани ҳосил қиламиз. Равшанки, $\vee \wedge^1$ ифодадаги ҳар бир қўшилувчи ҳад келтирилмайдиган қобиқни ифодалайди.

1-мисол. Қуйидаги чинлик жадвалида берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўрайлик:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Бу функция учун $N_f = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ тўплам 6 та учдан (чўққидан) иборат. Уларни I, II, ..., VI сонлари билан белгилаймиз. Максимал интерваллари қирралардан иборат, уларни 1, 2, ..., 6 сонлари билан номерлаймиз (VIII.3- шакл). 2- жадвални тузамиз.

2-жадвал

	0	I	II	III	IV	V	VI
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	0	0	1

Бу ердан, $E_I = \{1, 6\}$, $E_{II} = \{1, 2\}$, $E_{III} = \{2, 3\}$, $E_{IV} = \{3, 4\}$, $E_V = \{4, 5\}$, $E_{VI} = \{5, 6\}$. У ҳолда

$$\vee\wedge = (1 \vee 6)(1 \vee 2)(2 \vee 3)(3 \vee 4)(4 \vee 5)(5 \vee 6) =$$

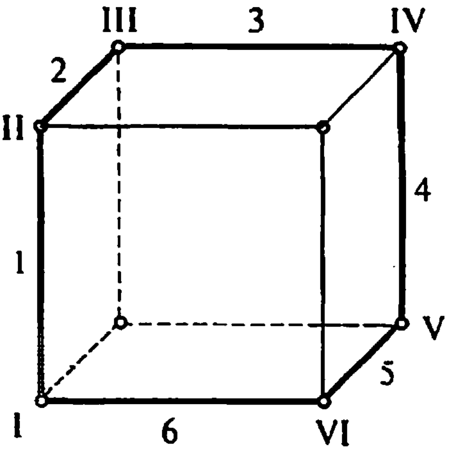
$$= (1 \vee 2 \cdot 6)(3 \vee 2 \cdot 4)(5 \vee 4 \cdot 6) =$$

$$= (1 \cdot 3 \vee 2 \cdot 3 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6)(5 \vee 4 \cdot 6) =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \vee 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \vee 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee$$

$$\vee 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6 =$$

$$= 3 \cdot 5 \vee 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \vee 1 \vee 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6.$$



VIII.3- шакл.

Натижада 5 та келтирилмайдиган қобиққа ва уларга мос 5 та тупикли ДНШга эга бўламиз:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3, \qquad D_2 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$D_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3, \quad D_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$D_5 = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Булардан D_1 ва D_5 минимал ДНШ бўлади.

Бу алгоритм кўп аргументли функциялар учун кўп меҳнат талаб қилади ва амалда деярли ишлатилмайди.

9-§. Айрим ягона тарзда ҳосил қилинадиган дизъюнктив нормал шакллар

☑ *Тупикли ДНШларни ясашни соддалаштириш. Икки ҳолат. Ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилиш алгоритми. Асосий қисми. Ядро. Квайн дизъюнктив нормал шакли. Теорема. ΣТ турдаги ДНШ. $D_{\Sigma T}$. Даста. Регуляр нуқта. Регуляр максимал интервал. Ю.Журавлёв теоремаси. Теорема. Функцияни минималлаштириш жараёнининг схемаси.*

Мукаммал дизъюнктив нормал шаклдан минимал дизъюнктив нормал шаклни ҳосил қилиш жараёнининг схемасини VIII.2- шаклда келтирган эдик.

Аввал қисқартирилган ДНШ олинади. Кейин ягона тарздаги жараён бутоқланишга ўтади, яъни ҳамма тупикли ДНШ ларни ясаш жараёнига ўтилади. Охири тупикли ДНШ лардан минимал ДНШ лар ажратиб олинади. Бу жараённинг энг оғир қисми тупикли ДНШларни ясаш қисмидир (бутоқланиш қисми). Уни икки ҳолатда соддалаштириш мумкин.

1. Тупикли ДНШ лар ясаш жараёнида қатнашмайдиган қисқартирилган ДНШ нинг айрим ҳадларини олдиндан четлаштириш керак. Натижада қисқартирилган ДНШнинг қолган ҳадларини бирма-бир кўриш камаяди.

2. Қисқартирилган ДНШ нинг айрим ҳадларини шундай четлаштириш керакки, қолган қисмидан ҳеч бўлмаганда битта минимал ДНШ ясаш мумкин бўлсин. Ушбу қадам ягона тарзда амалга ошиши мақсадга мувофиқ келади.

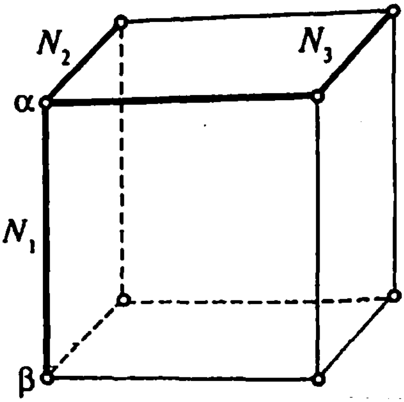
Ушбу параграфда шундай ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилишнинг иккита алгоритмини келтирамиз.

N_k интервал N_f тўпламнинг максимал интервали бўлсин.

1-таъриф. *Агар N_f тўпламнинг шундай α нуқтаси мавжуд бўлсаки, $\alpha \in N_k$ ва α нуқта N_f нинг бошқа максимал интервалларининг элементи бўлмаса, у ҳолда N_k максимал интервал N_f нинг* ***асосий қисми*** *деб аталади.*

1-мисол. Қуйидаги жадвалда берилган $f_1(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўрайлик. VIII.4-шаклда N_f тўплам ва унинг N_1, N_2, N_3 максимал интерваллари (қирралари) акс эттирилган:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



VIII.4- шакл.

Бу ерда $N_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $N_2 = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ ва $N_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ нуқта фақат N_1 интервал билан ва (1, 1, 1) нуқта фақат N_3 интервал билан қопланганлиги кўриниб турибди. Демак, N_1 ва N_3 максимал интерваллар N_f тўпламнинг асосий қисмлари бўлади.

2-таъриф. *N_f тўпламнинг ҳамма асосий қисмларидан (ёқларидан) тузилган тўплам* ***ядро*** *деб аталади.*

Келтирилган мисолда $\{N_1, N_3\}$, ядро бўлиши равшандир. Ядро ҳар бир келтирилмайдиган қобиққа киради. Бу ердан ядро билан қопланадиган ёқ (қирра) ҳеч бир келтирилмайдиган қобиққа кирмаслиги келиб чиқади.

3-таъриф. *Ядро билан қопланган максимал ёқларга (қирраларга) мос ҳамма оддий импликантларни мукаммал ДНШдан (қисқартирилган ДНШдан) четлаштириш натижасида ҳосил қилинадиган ДНШ* ***Квайн дизъюнктив нормал шакли*** *деб аталади ва $D_{кв}$ деб белгиланади.*

Америка олими Квайн исбот қилган (1959) қуйидаги теоремани келтирамиз.

1-теорема. *Ҳар бир айнан 0 га тенг бўлмаган $f(x_1, ..., x_n)$ функциянинг ягона Квайн дизъюнктив нормал шакли мавжуд бўлади.*

2-мисол. 1-жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг қисқартирилган ДНШ қуйидагича бўлади:

$$D_c = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 .$$

$\{N_1, N_3\}$ ядро N_2 ёқни (қиррани) қоплайди. N_2 га $\bar{x}_2 x_3$ оддий импликант мос келади. Таърифга асосан, бу оддий импликантни қисқартирилган ДНШ ифодасидан четлаштирсак, Квайн ДНШ келиб чиқади:

$$D_{кв} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_3 .$$

Демак, қисқартирилган ДНШ дан айрим оддий импликантларни четлаштириш йўли билан ягона тарзда аниқланган Квайн ДНШга ўтиш мумкин. Квайн ДНШ ўша функцияни реализация қилади ва бу функциянинг ҳамма тупикли ДНШларини ўз ичига олган бўлади.

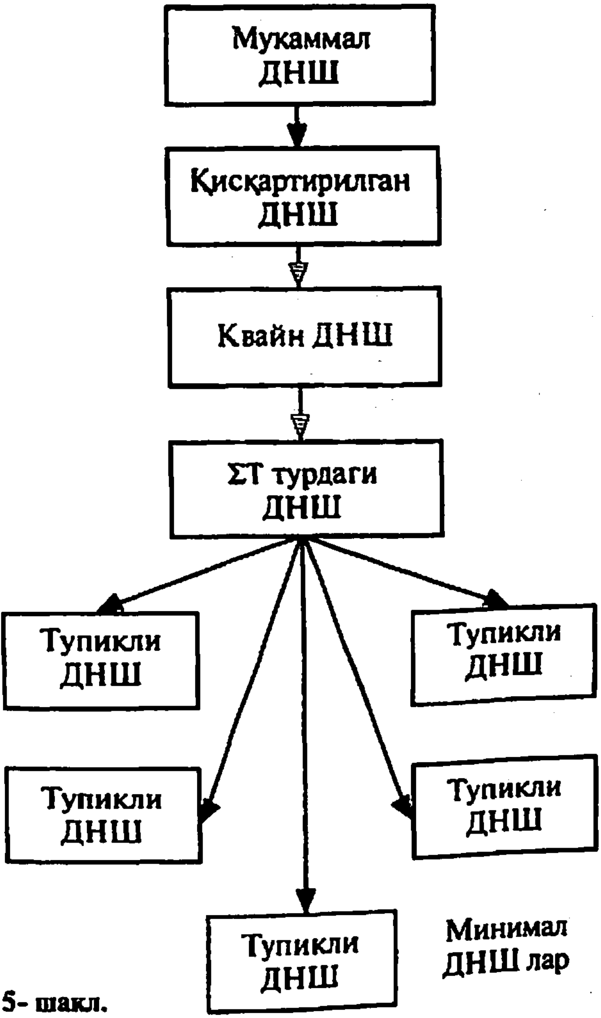
4-таъриф. *Ҳеч бўлмаганда бирорта келтирилмайдиган қобиққа кирувчи шундай максимал ёқлар мажмуаси билан қопланган N_f тўпламга мос дизъюнктив нормал шакл* ***ΣТ турдаги ДНШ*** *деб аталади ва у $D_{\Sigma T}$ орқали белгиланади.*

$f(x_1, ..., x_n)$ функциянинг ҳамма тупикли ДНШларининг дизъюнкцияси (мантиқий йиғиндиси) ва уни соддалаштириш натижасида $D_{\Sigma T}$ дизъюнктив нормал шакл ҳосил бўлади.

Таърифга асосан, ҳар бир $f(x_1, ..., x_n)$ функция учун ягона $D_{\Sigma T}$ ДНШ мавжуд ва у $f(x_1, ..., x_n)$ ни реализация қилади. $D_{\Sigma T}$ ДНШ қисқартирилган ДНШдан айрим ҳадларини четлаштириш йўли билан ҳосил қилинади.

5-таъриф. $\alpha \in N_f$ *бўлсин. У ҳолда α нуқтани ўз ичига олган ҳамма N_f га нисбатан максимал ёқларнинг (қирраларнинг) $П_\alpha$ мажмуаси α нуқтадан ўтувчи* ***даста*** *(туташ) деб аталади.*

6-таъриф. $\alpha \in N_f$ *ва* $\alpha \in N_K^0$ *бўлсин.* N_K^0 *шу* N_f *тўпламнинг максимал ёғи (қирраси). Агар* $\beta \in N_f \setminus N_K^0$ *ва* $П_\beta \in П_\alpha$ *бўлса, у ҳолда α нуқта (* N_K^0 *ва* N_f *га нисбатан)* ***регуляр нуқта*** *деб аталади.*



VIII.5- шакл.

3-мисол. 1-жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун (VIII.4-шаклга қ.) α нуқта сифатида (0, 0, 1) ни ва N_2 максимал ёқни оламиз. Равшанки, $\alpha \in N_2 = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. α регуляр нуқта (N_2 ва N_f га нисбатан) эканлигини кўрсатамиз. $\beta = (0, 0, 0)$ бўлсин. У ҳолда ($N_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$)

$$\Pi_\alpha = \{N_1, N_2\},\ \Pi_\beta = \{N_1\} \text{ ва } \Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha.$$

Демак, α нуқта регуляр нуқта бўлади.

7-таъриф. *Агар N_k^0 максимал интервалнинг ҳар бир нуқтаси (N_k^0 ва N_f га нисбатан) регуляр нуқта бўлса, у ҳолда N_f учун N_k^0* ***регуляр максимал интервал*** *деб аталади.*

Ю.И.Журавлёв теоремаси. *$f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг K^0 оддий импликанти $D_{\Sigma T}$ турдаги ДНШнинг ифодасида бўлмаслиги учун унга мос N_k^0 интервал регуляр максимал интервал бўлиши етарли ва зарурдир.*

5-мисол. 1-жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун битта N_2 регуляр интервал мавжуд. Уни четлаштирсак, у ҳолда $N_1 \cup N_3$ га эга бўламиз. Бу ердан $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3$ келиб чиқади ва у $D_{\Sigma T}$ турдаги ДНШ бўлади. Бу ДНШ функциянинг ягона тупикли ДНШ ҳам бўлади.

3-теорема. *$f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг ΣT турдаги ДНШ шу функциянинг Квайн ДНШ дан айрим оддий импликантларни четлаштириш йўли билан ҳосил қилиниши мумкин.*

Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни минималлаштириш жараёнини VIII.5- шаклда акс эттирилган схема орқали ифодалаш мумкин.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги жадвал билан берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияларнинг мукаммал, қисқартирилган, Квайн, ΣT турдаги, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шаклларини топинг.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

2. Берилган ДНШларнинг мукаммал, қисқартирилган, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шаклларини топинг:
   а) $D=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$; б) $D=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.
3. Берилган КНШ ларнинг мукаммал, қисқартирилган, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шаклларини топинг:
   а) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
   б) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.
4. Қуйидаги функцияларнинг ҳамма тупикли ДНШ ларини топинг:
   а) $f(x_1,x_2,x_3)=(01111110)$; б) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1110011000010101)$;
   в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110101110101011)$.
5. Қуйидаги дизъюнктив нормал шакллар тупикли, энг қисқа ва минимал ДНШ бўладими ёки йўқми эканлигини кўрсатинг:
   а) $x_1x_2 \vee \bar{x}_2$; б) $\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
   в) $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.
6. а) $f_1(x, y, z)=x+y+z$; б) $f_2(x, y, z)=(x \to y) \leftrightarrow z$;
   в) $f_3(x, y, z, t)=(xy \vee \bar{z}) \to t$; г) $f_4(x, y, z)=x \to y \to z$;
   д) $f_5(x, y, z)=(x \vee y) \leftrightarrow z$; е) $f_6(x, y, z)=xz \to y$;
   ж) $f_7(x, y, z)=(x \leftrightarrow y) \to z$; з) $f_8(x, y, z)=(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$;
   и) $f_9(x, y, z)=(x \to y) \vee z$

   функцияларга мос N_{f_i} $(i=\overline{1,9})$ тўпламларни топинг ва уларни тупикли ДНШ кўринишига келтиринг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тупикли дизъюнктив нормал шаклга келтириш алгоритми.
2. Келтирилмайдиган қопламалар ҳақида тушунча.
3. Қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШ лар орасидаги муносабатлар.
4. Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритми.
5. Тупикли ДНШларни ясашни соддалаштириш. Ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилиш алгоритми.
6. Квайн дизъюнктив нормал шакли. Ю.Журавлёв теоремаси.
7. Функцияни минималлаштириш жараёнининг схемаси.

IX БОБ

ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Бу бобда графлар назариясининг элементлари ёритилган. Бу ерда оддий графлар, графларнинг изоморфлиги, маршрутлар, занжирлар, цикллар, боғлиқлилик, дарахтлар, мультиграфлар, Эйлер графлари, хроматик сон ва хроматик синф, тўрлар ва тўрдаги оқимлар, Форд—Фалкерсон теоремаси каби масалалар қараб чиқилган.

1- §. Оддий графлар. Таъриф ва мисоллар[1]

☑ *Граф. Қирралар. Учлар. Йўналтирилган, йўналтирилмаган қирралар. Инцидент. Оддий графлар. Графнинг тўлдирувчиси. Қисм граф. Суграф.*

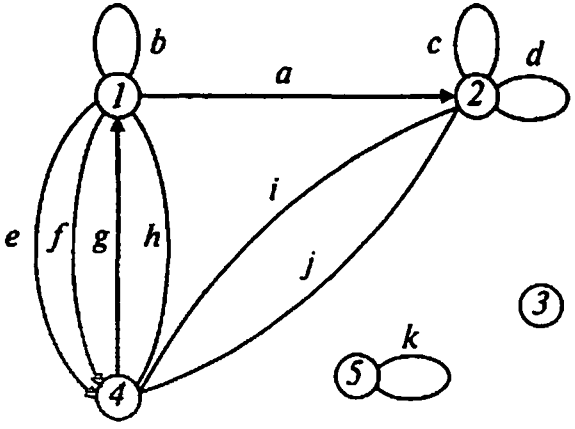
Графлар назарияси ҳозирги замон математикасининг асосий қисмларидан биридир. Кейинги пайтларда турли хил АБТ ва дискрет характерга эга бўлган ҳисоблаш қурилмаларини лойиҳалашда (ясашда) графларнинг роли янада ошди.

Графнинг ўзи нима? Таъриф беришдан аввал уни қуйидаги мисолда тушунтирамиз.

IX.1- шакл учлари 1, 2, 3, 4, 5 рақамлари билан белгиланган доирачалардан, қирралари (йўналишга эга ёки йўналишсиз) эса бу доирачаларнинг баъзи бирларини туташтирувчи *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k* чизиқлардан иборат. *a* қирра йўналтирилган бўлиб, *1* ва *2* учларни туташтиради (лекин *2* ва *1* учларни туташтирмайди); *ёйлар* деб аталувчи бу қирраларга *e*, *f*, *g* лар ҳам мисол бўла олади. *h* қирра йўналтирилмаган бўлиб, у *1* ва *4* ҳамда *4* ва *1* учларни туташтиради; *звенолар* деб аталувчи бундай қирраларга *i* ва *j* лар ҳам кира-

---

[1] Ушбу боб доцент Ғ.Э.Эргашевнинг маърузалар матнидан фойдаланиб ёзилди.



IX.1- шакл.

ди. Ниҳоят, *b*, *c*, *d*, *k* қирралар *сиртмоқлар* деб аталади ва баъзи учни унинг ўзи билан туташтиради (бу қирралар ҳам йўналишга эга эмас).

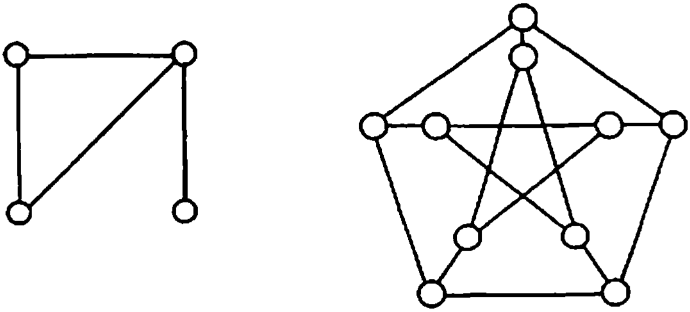
Одатда *a*, *b*, *e*, *f*, *g*, *h* қирраларни *1* учга *инцидент* деб атайдилар, ўз навбатида бу уч шу қирраларнинг ҳар бирига инцидентдир. Шу билан бирга *e*, *f* ейлар *1* учдан *4* га қараб йўналтирилган, *g* эса, аксинча, *4* дан *1* га қарата йўналтирилган. *3* ва *5* учлар *якқаланган* дейилади (улар кўпи билан сиртмоқларга инцидент бўлиши мумкин).

Бу мисолдаги граф чеклидир: {*1*, *2*, *3*, *4*, *5*} учлар ва {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*} қирралар тўпламларининг иккаласи ҳам чекли.

Келгусида *оддий графлар* муҳим ўрин тутади. Бу синфнинг графлари қуйидаги хоссаларга эга: у чекли, барча қирралари ориентирланмаган, сиртмоқлари ва каррали қирралари йўқ (исталган иккита уч биттадан кўп звено билан туташтирилмайди).

Бундай графларга қуйидагилар мисол бўла олади (IX.2- шакл).

Петерсен номи билан аталувчи ўнг томондаги граф қирраларининг доирачалар билан белгиланмаган кесишган жойлари унинг учлари эмасдир.



IX.2- шакл.

1-таъриф. *Бўш бўлмаган X учлар тўплами ва $U \subseteq X^{|2|}$ қирралар тўпламидан тузилган тартибланган $G = (X, U)$ жуфтлик* ***оддий граф*** *дейилади.*

Агар $x, y \in X$ учлар учун $xy \in U$ бўлса, учлар ***қўшни****, агар $xy \notin U$ бўлса, бу учлар* ***қўшнимас*** *дейилади.*

Таърифдан бевосита кўринадики, агар учлар сони $|X| = n(G)$ бўлса, у ҳолда қирралар сони $m(G)$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

$$0 \le m(G) \le \left(\frac{n(G)}{2}\right).$$

Оддий графларнинг қуйидаги иккита ҳолини алоҳида айтиб ўтамиз:

E_n — n учли бўш граф: $U(E_n) = \varnothing$;

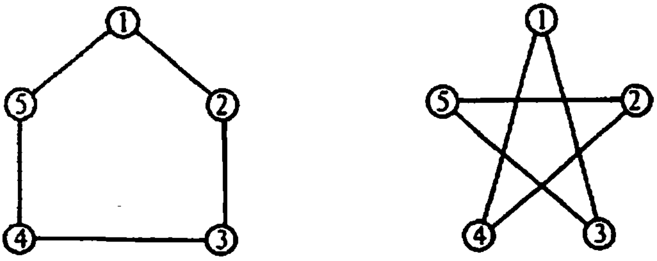
F_n — n учли тўлиқ граф: $U(F_n) = X^{|2|}$.

IX.3- шаклда E_5 ва F_5 графлар келтирилган.

IX.3- шакл.

2-таъриф. *Учлари $G=(X, U)$ графнинг учларидан, қирралари эса $U\subseteq X^{|2|}\setminus U$ тўпламдан иборат бўлган граф $\overline{G}=(X,\overline{U})$ берилган графнинг* ***тўлдирувчиси*** *дейилади.*

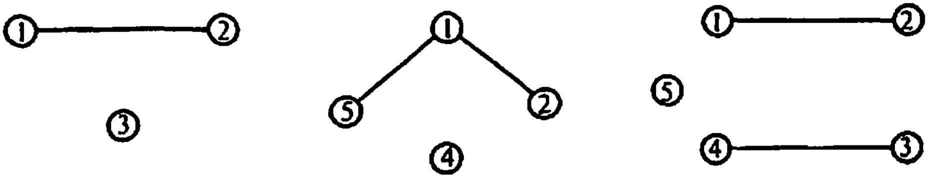
Равшанки, $\overline{\overline{G}}=G$. IX.3- шаклдаги E_5 ва F_5 бир-бирини тўлдирувчи графлардир. Уларга яна мисол келтирамиз (IX.4- шакл).



IX.4- шакл.

3-таъриф. *Агар $G=(X, U)$ ва $G'=(X', U')$ графлар учун $X'\subseteq X$, $U'\subsetneq U$ бўлса, у ҳолда G' граф G нинг* ***бўлаги*** *дейилади.*

Масалан, IX.5- шаклдаги графлар IX.4- шаклдаги биринчи графнинг бўлакларидир.



IX.5- шакл.

4-таъриф. *Агар $G=(X, U)$ графнинг бўлаги $G'=(X', U')$ учун $U'=\{xy/x, y\in X'\}$ бўлса, у ҳолда у* ***қисм граф*** *дейилади.*

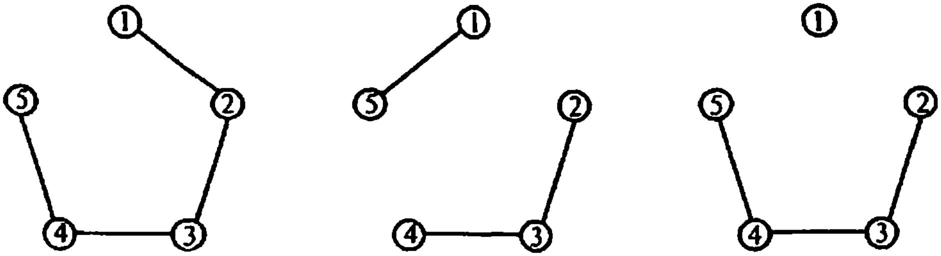
Бошқача қилиб айтганда, қисм графни ҳосил қилиш учун $X\setminus X'$ учлар тўплами билан уларнинг камида биттасига инцидент бўлган қирралар олиб ташланади.

Масалан, IX.4- шаклда келтирилган графнинг қисм графларидан баъзилари IX.6- шаклдаги графлардан иборат.

IX.6- шакл.

5-таъриф. *Агар $G=(X, U)$ графнинг бўлаги $G'=(X, U')$ учун $X'=X$ бўлса, у ҳолда у* ***сугграф*** *дейилади, яъни суграфларни ҳосил қилиш учун фақат қирраларни олиб ташлаш кифоя.*

Яна IX.4- шаклдаги мисолга мурожаат қиламиз. Қуйидаги графлар унинг суграфларидир (IX.7- шакл).



IX.7- шакл.

2- §. Графларнинг изоморфлиги

☑ *Графлар изоморфизми. Изоморф графлар. Қўшнилик муносабати.*

$G=(X, U)$ ва $G'=(X, U')$ графлар берилган бўлсин. Қайси ҳолда уларнинг иккаласи битта графни ифодалайди деган саволга жавоб беришга уринамиз. Бу масала графларнинг изоморфизми тушунчаси билан чамбарчас боғлиқдир.

Таъриф. *Агар G ва G' графлар учлари тўпламлари X ва X' орасида ўзаро бир қийматли ва учларнинг қўшнилик муносабатини сақлайдиган мосликни ($\Leftrightarrow$) ўрнатиш мумкин бўлса, яъни $\forall x, y \in X$ ва уларга мос $x', y' \in X'$ ($x \Leftrightarrow x'$, $y \Leftrightarrow y'$) учун $xy \in U \Leftrightarrow x'y' \in U'$ бўлса, у ҳолда бу графлар* ***изоморф*** *дейилади.*

Қуйидаги графлар берилган бўлсин (IX.8- шакл):

$$G_i = (X_i, U_i), (i = 1, 2, 3, 4),$$

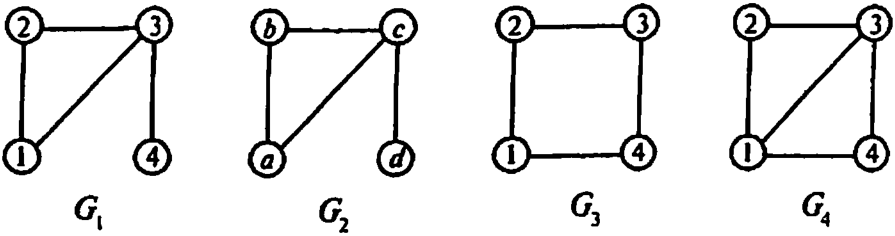
бу ерда

$X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $U_1 = \{12, 13, 23, 34\}$;

$X_2 = \{a, b, c, d\}$, $U_2 = \{ab, ac, bc, cd\}$;

$X_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $U_3 = \{12, 23, 34, 14\}$;

$X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, $U_4 = \{13, 23, 14, 24\}$;



IX.8- шакл.

Умуман олганда, бу графларнинг тўрталаси ҳар хилдир. $G_1 \neq G_2$, чунки $X_1 \neq X_2$; $G_3 \neq G_4$, чунки $U_3 \neq U_4$. Лекин кўриниб турибдики, G_1 ва G_2 бир хил тузилишга (структурага) эга, шу жумладан, G_3 ва G_4 ҳам бир хил тузилишга эга. Агар изоморфликни $\approx$ билан ва изоморф эмасликни $\neq$ билан белгиласак: $G_1 \approx G_2$, $G_3 \approx G_4$, $G_1 \neq G_3$, $G_1 \neq G_4$, $G_2 \neq G_3$, $G_2 \neq G_4$ эканлигини кўрамиз.

Масалан, $G_1 \approx G_2$ ни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$1 \Leftrightarrow a,\ 2 \Leftrightarrow b,\ 3 \Leftrightarrow c,\ 4 \Leftrightarrow d;$$

у ҳолда

$$\begin{array}{llll} 12\in U_1 \text{ ва } ab\in U_2, & & 13\in U_1 \text{ ва } ac\in U_2, \\ 14\notin U_1 \text{ ва } ad\notin U_2, & & 23\in U_1 \text{ ва } bc\in U_2, \\ 24\notin U_1 \text{ ва } bd\notin U_2, & & 34\in U_1 \text{ ва } cd\in U_2, \end{array}$$

яъни $xy\in U_1 \Leftrightarrow x'y'\in U_2$ шарт бажарилади.

Ўқувчига

$$1\Leftrightarrow b,\ 2\Leftrightarrow a,\ 3\Leftrightarrow c,\ 4\Leftrightarrow d$$

мослик ҳам G_1 ва G_2 графларнинг изоморфизми эканлигини текширишни тавсия қиламиз. Шу билан бирга учларнинг қолган $4!-2=22$ та мосликлари изоморфизм эмаслигини айтиб ўтамиз.

G_3 ва G_4 графларнинг изоморфизмини масалан, қуйидагича ўрнатиш мумкин:

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & - \ G_3 \text{ графда} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1 & 3 & 2 & 4 & - \ G_4 \text{ графда} \end{array}$$

(бу графларнинг бошқа изоморфизмларини аниқланг).

$G_1 \neq G_3$ эканлигини осонгина аниқлаш мумкин. Масалан, G_1 графнинг 4 учи фақат битта уч билан қўшни, G_3 да эса бундай уч умуман йўқ.

3- §. Мультиграфлар

Параллел қирралар. Сиртмоқ. Инцидентлик матрицаси. Мультиграф.

Энди умумий ҳолда чекли, ориентирлаштирилмаган графларни киритамиз.

Таъриф. *Граф деб* $G=(X,\ U,\ \psi)$ *тартибланган учликка айтилади, бу ерда* $X\neq\varnothing$ *— учлар тўплами,* U *— қирралар тўплами (иккаласи ҳам чекли) ва* $\psi\colon U\Rightarrow X^2$ *акслантириш ҳар бир* $u\in U$ *қирра учун унинг* $x,\ y\in X$ *учларига тартибланмаган* $\psi(u)=xy$

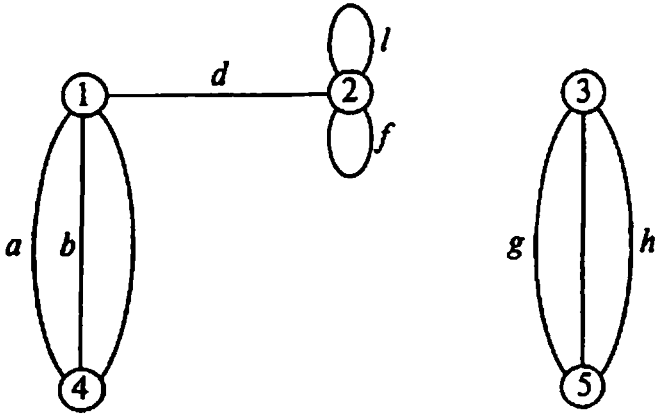
жуфтликни мос қўяди. Агар $\psi(u) = xx$ бўлса, у ҳолда u қирра x учдаги сиртмоқ, $\psi(u) = x$, $y \wedge x \neq y$ бўлса, у ***звено*** *дейилади. Агар x ва y учларнинг иккаласи камида битта умумий инцидент қиррага эга бўлса, улар* ***қўшни*** *дейилади. Хусусий ҳолда, агар x учда камида битта сиртмоқ бўлса, у ўз-ўзи билан қўшнидир.*

Агар u ва v қирралар учун $u \neq v \wedge \psi(u) = \psi(v)$ бўлса, у ҳолда улар *параллел (каррали)* дейилади.

Агар графнинг учлари $X = \{1, 2, ..., n\}$ каби тартибланган бўлса, у ҳолда уни $A(G) = (\alpha_{ij})$ қўшнилик матрицаси ёрдамида бериш мумкин, бу ерда α_{ij} — шу i ва j учларни туташтирувчи қирралар сони. Албатта, бу матрица граф учларининг тартибланишига боғлиқ ва уни параллел қирраларни жойлашиш тартиби аниқлигигина тиклайди. Инцидентлик матрицаси $B(G) = (\beta_{ij})^n_m$ бўйича графни ягона равишда тиклаш мумкин:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ агар } i \text{ уч ва j қирра инцидент бўлса,} \\ 0, \text{ акс ҳолда.} \end{cases}$$

Бу ерда $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$ ва қирралар ҳам тартибланган деб ҳисобланади: $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$.



IX.9- шакл.

IX.9- шаклда учлари $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, қирралари $U=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ бўлган $G=(X, U, \psi)$ граф (мультиграф) берилган. Акслантириш ψ эса қуйидагича аниқланган:

$$\psi(a)=\psi(b)=\psi(c)=14, \quad \psi(d)=12, \quad \psi(e)=\psi(f)=22,$$
$$\psi(g)=\psi(h)=35.$$

Бу граф учун

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4- §. Маршрутлар, занжирлар, цикллар. Боғлиқлилик

☑ *Маршрут. Циклик маршрут. Занжир. Цикл. Содда занжир. Туташтирилган учлар. Боғлиқли граф. Қўшнилик матрицаси. Такомиллаштирилган қўшнилик матрицаси.*

1-таъриф. *Оддий $G=(X, U)$ графдаги*

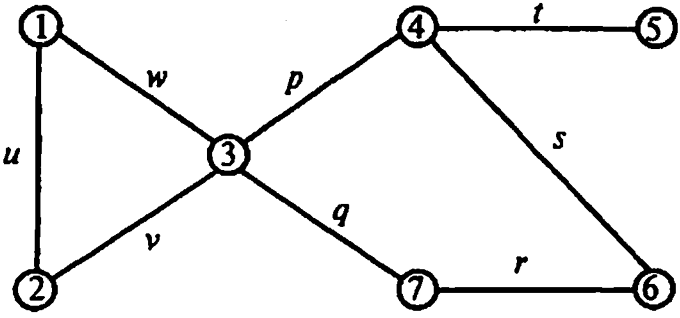
$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 u_3 x_3 \ldots x_{l-1} u_l x_l$$

кетма-кетлик (бу ерда $x_0, x_1, \ldots, x_l \in X$; $u_1, u_2, \ldots, u_l \in U$) узунлиги l тенг бўлган ва x_0, x_l ***учларни туташтирувчи маршрут*** *дейилади.*

Агар $x_0=x_l$ ва $l\geq 1$ бўлса, маршрут *циклик* дейилади. $l=0$ маршрут битта x_0 учдан иборат бўлади ва у циклик ҳисобланмайди.

Маршрутда учлар ва қирраларнинг ҳар хил бўлиши талаб қилинмайди. Битта уч ёки қирра бир неча марта такрорланиши мумкин.

2-таъриф. *Қирралари ҳар хил бўлган маршрут* ***занжир*** *деб аталади. Циклик занжир эса* ***цикл*** *дейилади. Агар занжирда (циклда) x_0 ва x_l лардан ташқари барча учлари ҳар хил бўлса, у ҳолда у* ***содда занжир (цикл)*** *дейилади.*



IX.10- шакл.

IX.10- шаклдаги графда *3v2u1w3p4t5t4t5* ва *3w1u2v3p4t5t4t5* маршрутлар бир хил элементлардан тузилган бўлса-да, лекин ҳар хилдир. Улар циклик эмас ва занжир ҳам эмасдир. *3w1u2v3p4* маршрут занжир, лекин содда эмас ва циклни ташкил этмайди. *3w1u2v3p4s6r7q3* ва *3v2u1w3p4s6r7q3* ҳар хил содда бўлмаган цикллар. *3q7r6s4p3* маршрут содда циклдир. *1u3v2* кетма-кетлик умуман маршрут эмас.

3-таъриф. *Агар G графнинг x ва y учлари орасида ҳеч бўлмаганда битта занжир мавжуд бўлса, у ҳолда улар **туташтирилган** дейилади.*

Равшанки, графнинг учлари тўпламида берилган «туташтирилганлик» муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга. Демак, бу муносабат эквивалентликдир ва графнинг X учлари тўпламини X_1, X_2, ..., X_k синфларга ажратади. Ҳар бир синфга тегишли бўлган учлар ўзаро туташтирилгандир (турли синфларга тегишли бўлган учлар орасида занжирлар йўқ).

$G = (X, U)$ графнинг $G_i = (X_i, V_i)$ ($i = 1, 2, ..., k$) қисм графи унинг *боғлиқли компонентаси* дейилади. Агар $k(G) = 1$ бўлса, граф *боғлиқли* дейилади.

Боғлиқли G графнинг учлари тўплами X да масофа тушунчасини киритиш мумкин: i ва j *учлар орасидаги масофа* деб

$$d(i, j) = \min l_{(i, j)}$$

га айтилади, бу ерда $l_{[i,j]}$ шу $[i, j]$ занжирнинг узунлиги ва минимум барча $[i, j]$ занжирлар бўйича олинади (албатта, бу минимум содда занжирларда эришилади).

Киритилган $d(i, j)$ учун масофанинг барча хоссалари (аксиомалари) бажарилади:

1) $d(i, i) = 0$, $d(i, i) > 0$ $(i \neq j)$;

2) $d(i, j) = d(j, i)$;

3) $d(i, j) + d(j, k) \geq d(i, k)$.

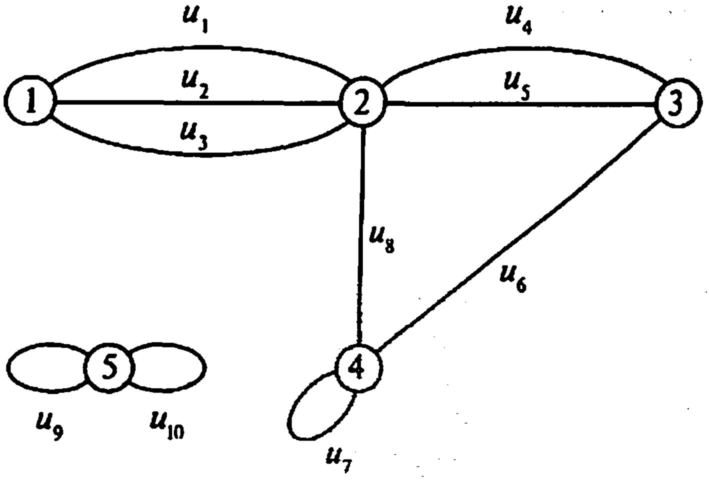
Демак. X тўплам метрик фазони ташкил этади.

$G = (X, U, \psi)$ мультиграф берилган бўлсин, бу ерда $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ ва $A(G) = (\alpha_{ij})$ қўшнилик матрицаси. Графнинг x_i ва x_j учларини туташтирувчи узунлиги $l \geq 1$ бўлган турли хил маршрутлар сонини ва уларнинг ўзларини аниқлаш масаласини қараймиз. Бу сон $[A(G)]^l = (\alpha_{ij}^{(l)})$ матрицанинг $\alpha_{ij}^{(l)}$ элементига тенг.

Ҳақиқатан ҳам, $l = 1$ бўлганда, бу ўз-ўзидан равшан. Фараз қилайлик, $\alpha_{ik}^{(l)}$ берилган x_i ва x_k учларни туташтиручи l узунликдаги маршрутлар сони бўлсин. Унда x_i ва x_j учларни туташтирувчи ва узунликлари $l + 1$ бўлган (охиридан олдинги x_k учни танлаб олган ҳолда) маршрутлар сони $\alpha_{ik}^{(l)}\ \alpha_{kj}$ га тенг, умумий ҳолда эса барча маршрутлар сони матрицалар кўпайтмаси қоидасига асосан $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^{(l)} \alpha_{kj} = \alpha_{ij}^{(l+1)}$ га тенг.

IX.11- шаклдаги граф учун

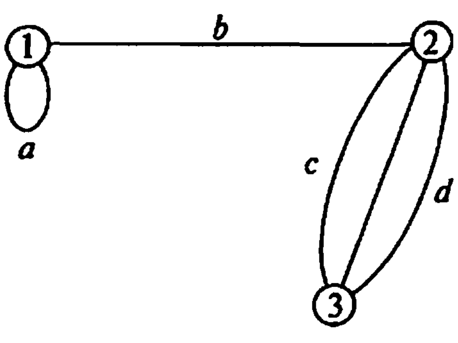
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 42 & 3 & 9 & 0 \\ 42 & 15 & 31 & 18 & 0 \\ 3 & 31 & 5 & 9 & 0 \\ 9 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, ...;$$



IX.11- шакл.

масалан, x_1 уч билан x_4 учни туташтирувчи узунликлари 2 га тенг бўлган учта маршрут ($x_1u_1x_2u_8x_4$, $x_1u_2x_2u_8x_4$, $x_1u_3x_2u_8x_4$) бор ва бу учларни туташтирувчи узунликлари 3 га тенг тўққизта маршрут ($x_1u_1x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_1x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_2x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_2x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_3x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_3x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_1x_2u_8x_4u_7x_4$, $x_1u_2x_2u_8x_4u_7x_4$, $x_1u_3x_2u_8x_4u_7x_4$) мавжуд, x_5 учни ўзи билан боғловчи узунлиги 2 га тенг тўртта маршрут ($x_1u_9x_5u_9x_5$, $x_5u_9x_5u_{10}x_5$, $x_5u_{10}x_5u_9x_5$, $x_5u_{10}x_5u_{10}x_5$) бор ва ҳоказо.

Маршрутларнинг ўзларини аниқлаш усулини (ҳисоблашлари кўплиги сабабли) содда мисолда кўрсатамиз (IX.12- шакл).



IX.12- шакл.

Бу графнинг такомиллаштирилган қўшнилик матрицасини тузамиз:

$$A(u)=(a_{ij}(u))=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c+d \\ 0 & c+d & 0 \end{pmatrix},$$

бу ерда $a_{ij}(u)$ — шу i ва j учларни туташтирувчи қирраларнинг шартли йиғиндиси. Қирралар белгиларини (a, b, c, d) нокоммутатив (лекин ассоциатив) ярим ҳалқанинг ясовчилари деб қабул қиламиз.

$A(u)$ матрицанинг кетма-кет даражаларини топамиз:

$$[A(U)]^2=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab & bc+cd \\ ba & b^2+c^2+d^2+cd+dc & 0 \\ cd+db & 0 & c^2+d^2+cd+dc \end{pmatrix},$$

$$[A(U)]^3=\begin{pmatrix} a^3+b^2a+ab^2 & \begin{array}{c} a^2b+b^3+bc^2+ \\ bcd+bdc+bd^2 \end{array} & abc+abd \\ \begin{array}{c} ba^2+b^3+c^2b+ \\ d^2b+cdb+dcb \end{array} & bab & \begin{array}{c} b^2c+c^3+d^2c+cdc+ \\ +dc^2+b^2d+c^2d+ \\ +d^3+cd^2+dcd \end{array} \\ cba+dba & \begin{array}{c} cd^2+db^2+c^3+d^2c+ \\ +cdc+dc^2+c^2d+ \\ +d^3+cd^2+dcd \end{array} & 0 \end{pmatrix},$$

Масалан, $[A(U)]^3$ матрицанинг $\alpha_{21}^{(3)}(U)=ba^2+b^3+c^2b+$ $+d^2b+cdb+dcb$ элементи x_2 билан x_1 ни туташтирувчи узунлиги 3 га тенг бўлган олтита маршрутни аниқлайди:

$$x_2bx_1ax_1ax_1,\qquad x_2bx_1bx_2bx_1,\qquad x_2cx_3cx_2bx_1,$$
$$x_2dx_3dx_2bx_1,\qquad x_2cx_3dx_2bx_1,\qquad x_2dx_3cx_2bx_1.$$

Агар бизни x_i дан x_j га l қадамлар билан ўтиш масаласи қизиқтирса, бутун мусбат сонлар ярим ҳалқасига $2=1$ буль муносабатини киритамиз. У ҳолда, агар x_i дан x_j гача камида битта узунлиги l га тенг бўлган маршрут бўлса, $[A(G)]^l$ матрицанинг $\alpha_{ij}^{(l)}$ элементи 1 га, акс ҳолда 0 га тенг. IX.11-шаклдаги граф учун

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^5=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Агар x_i дан x_j гача l дан кўп бўлмаган қадамлар билан ўтиш масаласини кўрсак, у ҳолда $A+E$ (E_n^n — бирлик матрица) матрицанинг даражаларини қараймиз. Юқоридаги мисолда

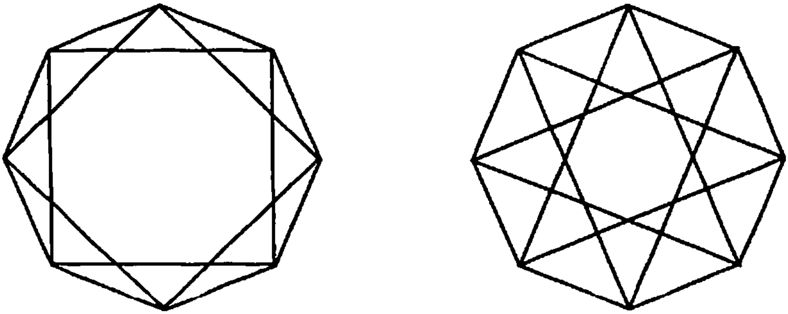
$$A+E=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(A+E)^2=(A+E)^3=\ldots=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Бу усул билан графнинг барча боғлиқлик компоненталарини ҳам топиш мумкин.

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. IX.13- шаклда кўрсатилган иккита графнинг изоморфлигини исботланг.



IX.13- шакл.

2. Бир-бири билан аразлаган учта қўшнининг учта умумий қудуқлари бор. Ҳар бир уйдан ҳар бир қудуққа бир-бири билан кесишмайдиган йўл ўтказиш мумкинми? Жавобингизни изоҳланг.
3. Бешта тўғри кўп қиррали графлар учларининг сони ва даражасини аниқланг.
4. Тўғри кўп қиррали графлар учун қўшнилик ва инцидентлик матрицаларини тузинг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Оддий графлар. Қирралар, учлар. Йўналтирилган ва йўналтирилмаган қирралар. Инцидент.
2. Графнинг тўлдирувчиси. Қисм граф. Суграф.
3. Графлар изоморфизми. Изоморф графлар. Қўшнилик муносабати.
4. Мультиграфлар.
5. Маршрутлар, занжирлар, цикллар. Боғлиқлилик.

5- §. Дарахтлар

☑ *Циклик ва ациклик қирра. Цикломатик сон. Дарахт. Поғона учлари. Графнинг асоси. Ватар. Чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта камлиги ҳақида.*

1-таъриф. *Агар G графнинг u қирраси камида битта циклга тегишли бўлса, у **циклик қирра**, акс ҳолда **ациклик қирра** деб аталади. G граф учун*

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

*(бу ерда $m(G)$ — берилган G нинг қирралари сони, $n(G)$ — учлари сони ва $K(G)$ — компоненталари сони) ифода унинг **цикломатик сони** деб аталади.*

Осонгина кўрсатиш мумкинки:

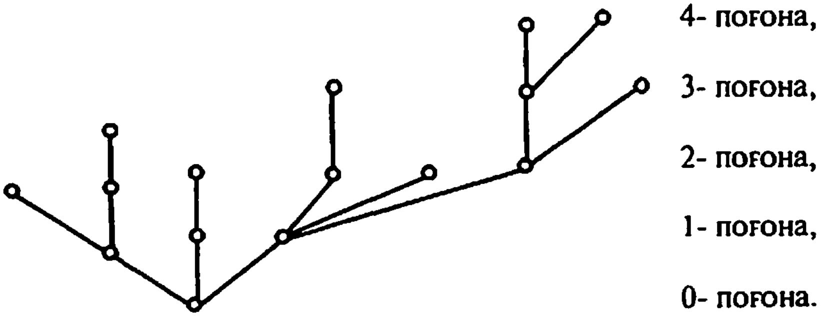
$$K(G \setminus u) = \begin{cases} K(G), \text{ агар } u \text{ циклик қирра бўлса,} \\ K(G)+1, \text{ агар } u \text{ ациклик қирра бўлса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G \setminus u) = \begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ агар } u \text{ циклик қирра бўлса,} \\ K(G), \text{ агар } u \text{ ациклик қирра бўлса.} \end{cases}$$

Ўз-ўзидан равшанки, $n(G \setminus u) = n(G)$, $m(G \setminus u) = m(G) - 1$, $\lambda(G) \geq 0$ ва фақат цикллари бўлмаган граф учун $\lambda(G) = 0$.

2-таъриф. *Барча қирралари ациклик бўлган боғлиқлик граф **дарахт** деб аталади.*

Дарахтнинг исталган иккита учи ягона занжир билан боғлангандир. Дарахтнинг исталган x_0 учини танлаб олиб, уни *илдиз* ёки *нолинчи поғонали уч* деб атаймиз. x_0 га қўшни бўлган барча учларни *биринчи поғона учлари* деймиз ва ҳоказо $i-1$ поғонадаги учларга қўшни (бошқа поғоналарга тегишли бўлмаган) учларни *i поғона учлари* деб атаймиз (IX.14- шакл).



IX.14- шакл.

Дарахтнинг бундай тасвирланишидан келиб чиқадики, у четки (фақат битта қиррага инцидент бўлган) учларга эга. Масалан, охирги поғонанинг учлари.

Боғлиқли G графдан кетма-кет барча циклик қирраларни олиб ташлаймиз. Натижада, ҳамма қирралари ациклик бўлган боғлиқли H графни – дарахтни ҳосил қиламиз. Бу дарахт G графнинг *асоси* дейилади. Графнинг асоси ягона танланмайди, лекин барча ациклик қирралар исталган асосга киради. H асосга нисбатан $G \backslash H$ бўлакнинг барча қирралари *ватарлар* деб аталади.

H дарахтдан четки учни (автоматик тарзда битта қиррани) олиб ташласак, яна дарахтни ҳосил қиламиз. Агар H чекли бўлса, $n(H)-2$ қадамдан кейин битта қирра ва иккита учга эга дарахтни ҳосил қиламиз. Дарахтдан олиб ташланган учлар ва қирралар сони бир хил бўлганлиги сабабли қуйидаги хулосага келамиз: *ҳар қандай чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта кам.* Аксинчаси-ҳам, яъни қуйидаги теорема ўринлидир.

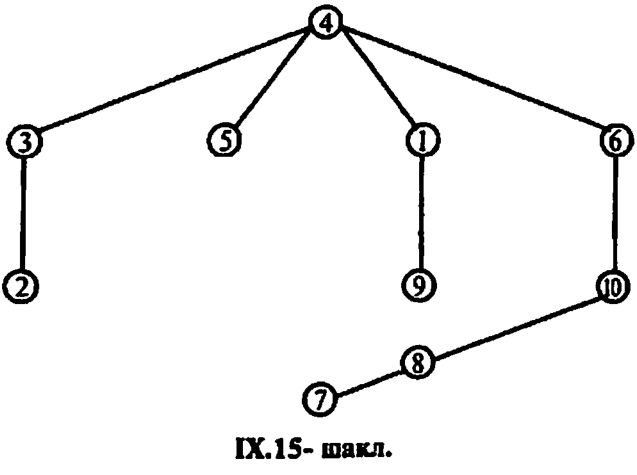
Теорема. *Чекли боғлиқли G граф дарахт бўлиши учун унинг қирралари сони учлари сонидан биттага кам бўлиши зарур ва етарли.*

Учлари 1, 2, 3, ..., n рақамлари билан тартибланган n учли дарахт берилган бўлсин. Дарахтнинг четки учлари орасидаги энг кичик номерлиси i_1 ва у билан қўшни бўлган ягона уч j_1 бўлсин. Дарахтдан i_1 учни, демак, i_1j_1 қиррани олиб ташлаймиз. Ҳосил бўлган дарахтда энг кичик номерли четки i_2 учни ва i_2j_2 қиррани олиб ташлаймиз ва ҳоказо. Бу жараённи $n-2$ марта такрорлаб, икки уч ва битта қиррали дарахтни ҳосил қиламиз. Олиб ташланган учларни $I=\{i_1, i_2, ..., i_{n-2}\}$ ва $J=\{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ билан белгилаймиз. Бу иккала I ва J мажмуа берилган дарахт бўйича ягона равишда аниқланади, шу билан бирга I нинг барча сонлари ҳар хил, J ники эса ҳар хил бўлиши шарт эмас (IX.15- шакл).

Бу дарахт учун $I=\{2, 3, 5, 7, 8, 9, 1, 4\}$ ва $J=\{3, 4, 4, 8, 10, 1, 4, 6\}$.

Шу билан бирга ҳар қандай $J=\{j_1, j_2, ..., j_{n-2}\}$ $(1 \le j_k \le n)$ мажмуа битта дарахтга мос келади. Уни қуйидагича қуриш мумкин.

$N=\{1, 2, ..., n\}$ тўпламнинг J да қатнашмаган сонларининг энг кичигини i_1 билан белгилаймиз (бундай сон ҳамма вақт мавжуд, чунки J да $n-2$ та сон бор). i_1 ва j_1 учларни



IX.15- шакл.

қирра билан туташтирамиз, j_1 ни J дан, i_1 ни эса N дан ўчирамиз ва жараённи такрорлаймиз: $J_1 = \{j_2, j_3, ..., j_{n-2}\}$ мажмуада қатнашмаган $N_1 = N \setminus \{i_1\}$ нинг энг кичик сонини i_2 билан белгилаймиз; i_2, j_2 учларни қирра билан туташтирамиз ва уларни мос равишда N_1 ва J_1 дан ўчирамиз ва ҳоказо. Охирида N_{n-2} да қолган иккита учни қирра билан туташтирамиз.

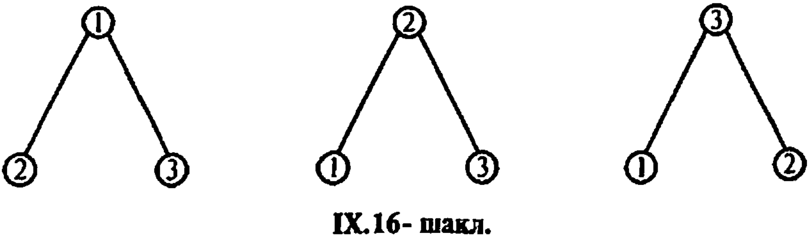
Бундан кўринадики, ҳар қандай $k = 1, 2, ..., n - 2$ учун k қадамдан кейин ясалган қирралар ичида i_k га инцидент бўлганлари йўқ, лекин j_k га инцидент бўлган камида битта қирра мавжуд. Буни назарда тутган ҳолда, жараённи тескари тартибда бажариб, k бўйича индукцияни қўллаб, ҳақиқатан ҳам дарахт ҳосил бўлишини кўрсатамиз (чунки ҳар гал битта қирра янги, четки уч билан қўшилади).

Шунга ўхшаш индукция бўйича, лекин тўғри тартибда қуриб исботлаш мумкинки, ушбу дарахтга айнан J мажмуа мос келади.

Юқоридаги жараёндан кўринадики, ҳар хил дарахтларга турли хил (I, Л) жуфтликлар мос келади. Агар $I' \neq I''$ бўлса, у ҳолда $J' \neq J''$. Ҳақиқатан ҳам, $i'_k \neq i''_k$ ва $i'_k < i''_k$ бўлса, у ҳолда i'_k сон $(j'_k, ..., j'_{n-2})$ га кирмайди, лекин у $(j''_k, ..., j''_{n-2})$ га киради. Шунинг учун ҳар хил дарахтларга ҳар хил J кўринишдаги мажмуалар мос келади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема (Кэпи). *Учлар сони тартибланган n та бўлган дарахтлар сони n^{n-2} га тенг. (n та элементлардан $n - 2$ тадан тузилган барча такрорий ўринлаштиришлар сони). Албатта булар ичида кўплари ўзаро изоморфдир.*

Масалан, $n = 3$ бўлганда, учала дарахт ҳам ўзаро изоморфдир (IX.16- шакл).



IX.16- шакл.

6- §. Эйлер графлари

☑ *Характеристик вектор. Жуфт граф. Эйлер цикли. Эйлер графи. Цикломатик сон.*

G графнинг барча учларини ўз ичига олувчи қисм графларни қараймиз. G нинг барча қирралари u_1, u_2, ..., u_m каби тартибланган бўлсин. G графнинг ҳар қандай $H \subseteq G$ қисмига 0 ва 1 дан иборат m ўлчовли $(a_1, a_2, ..., a_m)$ векторни мос қўямиз:

$$a_i = \begin{cases} 1, \text{агар } u_i \in H \text{ бўлса,} \\ 0, \text{агар } u_i \notin H \text{ бўлса,} \end{cases}$$

(H нинг *характеристик вектори*). Бу мослик ўзаро бир қийматлидир, шу билан бирга қисм графларнинг 2 модул бўйича йиғиндисига уларнинг характеристик векторларининг йиғиндиси мос келади. Барча қисм графлар тўплами йиғинди амалига нисбатан абель группасини ташкил этади. Бу группа {0, 1} коэффициентлар майдони устида чизиқли фазони ташкил этади (исталган H қисм графнинг 1 га кўпайтмаси H ни беради, 0 га кўпайтмаси эса бўш графдир).

Кўриниб турибдики, G граф қисмларининг фазоси уларнинг характеристик векторларининг фазосига изоморф ва m ўлчовли.

Агар графнинг барча учларининг даражалари (яъни уларга инцидент бўлган қирралар сони) жуфт бўлса, граф ҳам *жуфт* дейилади.

Жуфт графда исталган содда занжирни (циклдан фарқли ўлароқ) унга кирмаган қирра билан давом эттириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, занжирда охирги учнинг даражаси 1 га тенг, лекин граф жуфт бўлганлиги сабабли бу учга инцидент бўлган камида битта қирра мавжуд. Агар граф чекли бўлса, занжирни кетма-кет давом эттириб, аввал босиб ўтган учларнинг бирига келамиз, яъни содда циклни ҳосил қиламиз. Бу циклнинг барча қирраларини графдан олиб ташлаймиз. Унинг қолган қисми яна жуфт графдир, чунки учларнинг даражалари 2 га камаяди (агар ундан занжир ўтса) ёки ўзгармайди (агар занжир ўтмаса). Бу графда яна циклни ажратамиз ва ҳоказо. Юқоридаги жараённи яна давом этамиз, токи унда бирорта ҳам цикл қолмасин (яъни бўш граф ҳосил бўлгунча). Шундай қилиб, чекли жуфт граф ўзаро қирралар бўйича кесишмайдиган содда цикллар йиғиндисига ёйилади. Бундан унинг барча қирралари циклик эканлиги келиб чиқади.

Агар чекли жуфт граф боғлиқли бўлса, у ҳолда осонгина кўрсатиш (содда цикллар сони бўйича индукцияни қўллаб) мумкинки унда барча қирраларини ўз ичига олган содда цикл мавжуд. Бундай цикл *Эйлер цикли*, графнинг ўзи эса *Эйлер графи* дейилади. Юқорида айтилганлардан қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема. *Чекли боғлиқли граф Эйлер графи бўлиши учун у жуфт бўлиши зарур ва етарли.*

Исталган чекли жуфт графнинг ҳар бир боғлиқли компонентаси Эйлер графидир.

Ихтиёрий графнинг ҳар қандай иккита H_1 ва H_2 жуфт қисм графларининг йиғиндиси яна жуфт қисм графдир. Ҳақиқатан ҳам, α учнинг $S(\alpha)$ даражаси $H_1 + H_2$ қисм графда $s_1 + s_2 - 2s_{12}$ га тенг. Бу ерда s_1 ва s_2 шу α учнинг мос равишда H_1 ва H_2 даги даражалари, s_{12} эса α нинг уларнинг $H_1 \cap H_2$ кесишмасидаги даражаси. Шундай қилиб, жуфт қисм графлар тўплами барча қисм графлар фазосининг қисм фазосидир. Бу қисм фазонинг ўлчови ν ни аниқлаймиз.

G боғлиқли, m қиррали, n учли D граф унинг ихтиёрий асоси бўлсин. Ватарлар сони $m - n + 1$ га тенг. Ҳар бир $\alpha\beta$ ватар ягона содда $[\alpha, \beta] \subseteq D$ занжир билан содда циклни ҳосил қилади. Барча циклларнинг векторлари боғлиқмас Σ системани ҳосил қилади. Чунки ҳар бир цикл системанинг бошқа циклларига тегишли бўлмаган қиррага (ўзининг ватарига) эга. Демак, $\nu \geq m - n + 1$.

Иккинчи томондан, ҳар қандай жуфт қисм граф, хусусий ҳолда исталган содда цикл Σ системанинг цикллари орқали ифодаланади. Ҳақиқатан ҳам, жуфт H қисм графга ватарлари унга тегишли Σ системанинг циклларини қўшамиз. Ҳосил бўлган йиғинди бирорта ҳам ватарга эга эмас. Демак, бу йиғинди D дарахтнинг қисм графи, яъни у бўш графдир. Акс ҳолда содда циклларга эга жуфт қисм граф (H ва циклларнинг йиғиндиси) дарахтнинг қисм графи бўлар эди. Бундан $\nu \le m - n + 1$ келиб чиқади ва юқоридаги тенгсизликни инобатга олган ҳолда $\nu = m - n + 1$ га эга бўламиз.

Боғлиқли бўлмаган k компонентали графнинг жуфт қисм графлари фазосининг базиси унинг барча боғлиқли компоненталари базисларининг йиғиндисидан иборат. Қирралар ва учлар сони ҳам компоненталар бўйича қўшилади. Агар i компонента m_i қиррага ва n_i учга эга бўлса, у ҳолда

$$\nu = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^{k} m_i , \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Демак, жуфт қисм графлар қисм фазосининг ўлчови ν графнинг цикломатик сони $\lambda(G)$ га тенг.

Исталган граф учун $\nu \ge 0$ бўлганлиги сабабли $k \ge n - m$.

Цикломатик сони нолга тенг бўлган боғлиқли графлар — дарахтлардир.

7- §. Хроматик сон ва хроматик синф

☑ *Тўғри бўялган граф. Хроматик сон. Хроматик синф. Бихроматик граф. Бихроматик бўлишнинг етарли ва зарурий шарти. Брукс теоремаси.*

Сиртмоқсиз G графнинг ҳар бир учига (қиррасига) берилган ранглардан биттасини мос қўямиз. Агар қўшни учларга (қўшни қирраларга) турли хил ранглар мос қўйилган бўлса, у ҳолда G граф *тўғри бўялган* дейилади. G графнинг учларини (қирраларини) тўғри бўяш учун керак бўлган энг кам миқдордаги турли хил ранглар сони $\chi(G)$ мос равишда унинг *хроматик сони (хроматик синфи)* дейилади.

Ҳар қандай оддий G граф учун $\chi(G) \leq n$ $(\chi(E_n) = 1)$. Тенглик фақат E_n учун бажарилади.

Агар графда камида битта қирра бўлса, $\chi(G) \leq 2$. Демак, $2 \leq \chi(G) \leq n(G)$ тенгсизлик ўринли.

Таъриф. *Агар G граф учун $\chi(G) = 2$ бўлса, у ҳолда G* ***бихроматик граф*** *дейилади.*

1-теорема. *Камида битта қиррага эга бўлган граф бихроматик бўлиши учун унда узунликлари тоқ содда циклларнинг бўлмаслиги зарур ва етарли.*

Агар G граф тўлиқ χ учли F_χ қисмларга эга бўлса, унинг хроматик сони $\chi(G) \leq \chi$. Лекин тескариси тўғри эмас.

Шундай графлар мавжудки, уларда ҳаттоки F_3 (учбурчак) бўлмаса-да исталганча катта хроматик сонга эга.

Хроматик сон ва граф учларининг даражалари (учга инцидент бўлган қирралар сони) орасидаги боғланишни ўрганамиз. G граф учларининг максимал даражаси $S(G)$ бўлсин. Γ_s билан $S(G) \leq S$ бўлган оддий графлар синфини белгилаймиз. Ҳар қандай $G \in \Gamma_s$ граф учун $\chi(G) \leq S + 1$ эканлигини учлар сони бўйича индукция усули билан исботлаш мумкин. Ягона F_s граф учун $\chi(F_s) = S + 1$.

2-теорема. *Камида битта қиррага эга бўлган граф бихроматик бўлиши учун унда узунликлари тоқ сонларга тенг содда циклларнинг бўлмаслиги зарур ва етарлидир.*

Зарурийлиги. Графни тўғри бўялганда цикл учларининг ранглари алмашиб келади, демак, узунлиги тоқ бўлган содда циклни тўғри бўяш учун икки ранг етарли эмас. Бундай циклни ўзида сақлаган граф ҳам бихроматик бўла олмайди.

Етарлилиги. Аввало шуни таъкидлаймизки, ҳар қандай дарахт бихроматик графдир. Ҳақиқатан ҳам, дарахтнинг жуфт поғоналаридаги барча учларини битта рангга бўяймиз, тоқ поғоналардаги учларни эса иккинчи рангга бўяймиз. Натижада у тўғри бўялган бўлади, чунки дарахтнинг қирралари фақат қўшни поғоналардаги учларни туташтиради.

Дарахтда i ва j поғоналар учларини туташтирувчи содда занжирнинг узунлигининг жуфт-тоқлиги $i-j$ соннинг жуфт-тоқлиги билан бир хил. Хусусий ҳолда, бир хил жуфтликдаги поғоналарнинг учлари узунлиги жуфт содда занжир билан боғлангандир.

Узунлиги тоқ сонга тенг содда занжирга эга бўлмаган G графда исталган асосни танлаб оламиз. Бу асосга нисбатан барча ватарлар турли хил жуфтликларга эга бўлган поғоналарнинг учларини туташтиради, акс ҳолда унда узунлиги тоқ содда занжирлар бўлар эди. Демак, асоснинг икки ранг билан тўғри бўялгани бутун графнинг ҳам тўғри бўялганидир.

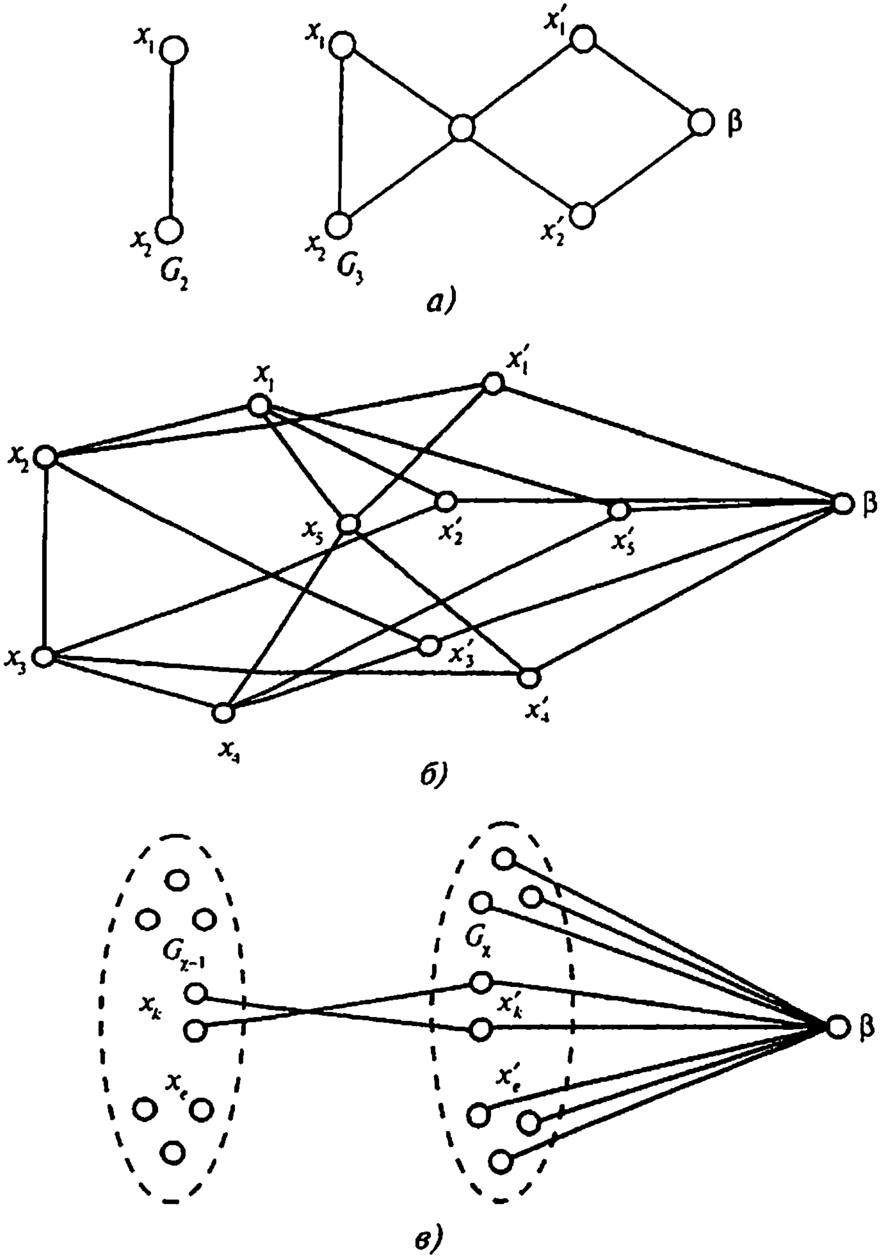
Агар G графда χ учли тўлиқ F_χ қисм граф мавжуд бўлса, у ҳолда $\chi(G) \geq \chi$. Тескариси эса тўғри эмас, яъни шундай графлар мавжудки, уларда ҳатто уч учли тўлиқ қисм графлари (учбурчаклар) йўқ, лекин хроматик сони исталганча катта.

Бунда G_χ граф индуктив равишда ясалади. G_2 битта қиррадан иборат.

Фараз қилайлик, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ учлар тўпламида $G_{\chi-1}$ граф қурилган бўлсин. $G_{\chi-1}$ графга $X' = \{x_1', x_2', ..., x_n'\}$ учлар тўпламини ва β учни қўшамиз. Ҳар бир x_i' учни β уч ҳамда $G_{\chi-1}$ графда x_i га қўшни бўлган учлари билан туташтирамиз (IX.17- шакл). Ҳосил бўлган G_χ графда учбурчаклар йўқлигини кўрсатамиз. Индукция фаразига кўра $G_{\chi-1}$ графда учбурчаклар йўқ. Агар учбурчак мавжуд бўлса, у ҳолда X' тўпламдаги учлар бир-бири билан туташтирилмаганлиги сабабли, унга бу учларнинг кўпи билан биттаси тегишли; β ҳам бирорта учбурчакка тегишли эмас, чунки у фақат X' даги учлар билан туташтирилган.

Агар $[x_i, x_j, x_k']$ учбурчак бўлса, у ҳолда $[x_i, x_j, x_k]$ учбурчак ҳам мавжуд бўлар эди (чунки x_k' ва x_k учлар X да бир хил қўшни учларга эга). Бу эса индукция фаразимизга зид.

Энди $\chi(G_\chi) = \chi$ эканлигини кўрсатамиз. Равшанки, $\chi(G_2) = 2$. Фараз қилайлик, $\chi(G_{\chi-1}) = \chi - 1$. У ҳолда G_χ графни $\chi - 1$ ранг


x₁
x₂
G₂
x₁
x₂
G₃
x′₁
x′₂
β
а)
x₁
x′₁
x₂
x₅
x′₂
x′₅
β
x₃
x′₃
x′₄
x₄
б)
G_{χ-1}
x_k
x_e
G_χ
x′_k
x′_e
β
в)

IX.17- шакл.

билан тўғри бўяш мумкин: масалан, $G_{\chi-1}$ графни $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўяганимиздан кейин ҳар бир x'_i учни x_i нинг рангига бўяймиз ва β учга қолган χ рангни берамиз.

G_χ графни $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўяш мумкин эмаслигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз, яъни G_χ граф $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўялади ва β учга l ранг тўғри келади. Бунда X' тўпламнинг учлари l дан фарқли рангларга бўялган. $A \subseteq X$ тўплам l рангга бўялган учлар қисм тўплами бўлсин. Ҳар бир $x_i \in A$ учни x'_i учнинг рангига қайтадан бўяймиз. Бу ҳолда $G_{\chi-1} \subseteq G_\chi$ графнинг барча учлари $\chi - 2$ ранг билан тўғри бўялган бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\tilde{x}_i\tilde{x}_j$ шу $G_{\chi-1}$ графнинг исталган қирраси бўлсин. G_χ графда x_i ва x_j турли рангларга бўялганлиги сабабли уларнинг иккаласи бирданига A га тегишли эмас. Агар $x_i \notin A$, $x_j \notin A$ бўлса, графни қайта бўяганимизда уларнинг ранглари ўзгармайди ва турли хил бўлганлигича қолади. Шундай қилиб, $G_{\chi-1}$ граф индукция фаразимизга зид равишда $\chi - 2$ ранглар билан тўғри бўялади.

Хроматик сон ва граф учларининг даражалари орасидаги боғланишни аниқлаймиз. $s(G)$ орқали G граф учлари даражаларининг энг каттасини белгилаймиз, Γ_s эса параллел қирраларга эга бўлмаган ва $s(G) \le s$ графлар синфи.

Учлар сони бўйича индукцияни қўллаб осонгина кўрсатиш мумкинки, ҳар қандай $G \le \Gamma_s$ учун $\chi(G) \le s + 1$. Ҳақиқатан ҳам, агар графда учлар сони $s + 1$ дан ошмаса, $\chi(G) \le s + 1$. Фараз қилайлик, бу тенгсизлик G дан кам учларга эга Γ_s нинг барча графлари учун ўринли бўлсин. G графдан исталган x учни олиб ташлаймиз (унга инцидент бўлган барча қирралар билан биргаликда). Индуктив фаразимизга асосан $G \setminus \{x\}$ графни $s+1$ ранг билан тўғри бўяймиз. G графда x учга кўпи билан s та қўшни уч мавжуд, шунинг учун камида битта ранг топиладики, унга x га қўшни бўлган учларнинг ҳеч бири бўялмаган. Шу рангга x учни бўяймиз ва G граф $s + 1$ ранг билан тўғри бўялган бўлади.

Қуйидаги теоремадан келиб чиқадики, Γ_s синф графлари ичида хроматик сони $s+1$ га тенг бўлган ягона тўлиқ $s+1$ учли F_{s+1} графдир.

Теорема (Брукс). *Агар* $s \geq 3$, $G \in \Gamma_s$ *ва* $G \neq \Gamma_{s+1}$ *бўлса, у ҳолда* $\chi(G) \leq s$.

8- §. Тўрлар ва тўрдаги оқимлар

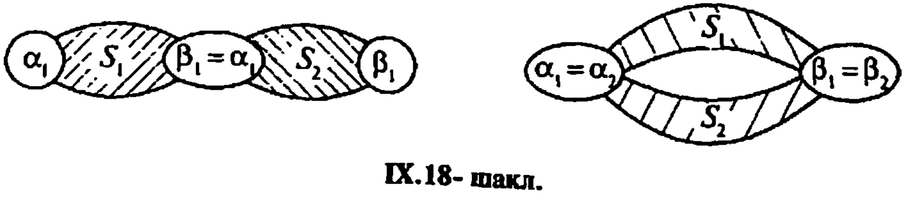
☑ *Тўр. Тўрнинг қутблари. Қутбли қирра. Ички қирра. π- тўрлар. Тўрдаги оқим. Тўрнинг кесими. Кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти. Форд—Фалкерсон теоремаси.*

Баъзи бир учлари танлаб олинган граф *тўр* деб аталади. Танлаб олинган учлар *тўрнинг қутблари* дейилади. Масалан, дарахтни бир қутбли тўр деб қараш мумкин (унинг илдизи қутбдир). Тўрнинг қутбларидан фарқли учлари унинг *ички учлари* дейилади. Камида битта қутбга инцидент бўлган қирра *қутбли*, бошқалари эса *ички қирралар* дейилади.

Иккита синфга ажратилган: k та кириш ва l та чиқиш қутбларга бўлинган тўр (k, l)- *қутблилик* дейилади. (1, 1)- қутблилик тўр *икки қутбли тўр* дейилади.

Умумий элементларга эга бўлмаган S_1 ва S_2 тўрларнинг қутблари мос равишда α_1, β_1 ва α_2, β_2 бўлсин. S_1 ва S_2 тўрларнинг кетма-кет уланишидан ҳосил қилинган α_1, β_2 қутбларга эга бўлган тўрни S_1S_2 каби белгилаймиз. S_1 ва S_2 тўрларнинг параллел уланишидан ҳосил бўлган α_1, β_1 қутбларга эга тўрни эса $S_1 \vee S_2$ каби белгилаймиз (IX.18- шакл).

Юқоридагига ўхшаш S_1, S_2, ..., S_n ва $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ тўрларни аниқлаш мумкин.



IX.18- шакл.

Бир қиррали тўрлардан параллел ва кетма-кет улаш натижасида ҳосил бўлган тўр *параллел—кетма-кет тўр* дейилади. Бундай тўрларни π- тўрлар деб атаймиз. π- тўрлар индуктив равишда аниқланади:

1) бир қиррали тўр π- тўрдир;

2) агар S_1 ва S_2 π- тўрлар бўлса, у ҳолда, S_1S_2 ва $S_1 \vee S_2$ ҳам π- тўрлардир.

S қисман ориентирлаштирилган тўрнинг ҳар бир u қиррасига *ўтказувчанлик қобилияти* деб аталувчи манфий бўлмаган $C(u)$ сон мос қўйилган бўлсин.

1-таъриф. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган (f, ω) жуфтлик S* ***тўрдаги оқим*** *дейилади:*

1) ω- тўрнинг барча звеноларини бирор ориентирлаштирилиши;

2) $f(u)$ — қирралар тўпламида аниқланган қийматлари манфий эмас ва и нинг ўтказувчанлик қобилиятидан катта бўлмаган функция. Шу билан бирга барча ички учларда Кирхгоф қонуни бажарилади, яъни α учга кирувчи барча қирралар бўйича оқимларнинг йиғиндиси ундан чиқувчи қирралар бўйича оқимларнинг йиғиндисига тенг.

Бошқача қилиб айтганда:

1) $0 \leq f(u) \leq C(u)$ — тўрнинг барча қирралари учун;

2) $R(\alpha) = 0$ — барча ички учлар учун, бу ерда

$$R(\alpha) = \sum_{\alpha \in \Gamma(\alpha)} f(u) - \sum_{\alpha \in \Gamma'(\alpha)} f(u),$$

$\Gamma(\alpha)$ ($\Gamma'(\alpha)$) — ω- ориентирлаштирилишда α учдан чиқувчи (мос равишда α га кирувчи) қирралар тўплами.

Равшанки, тўрнинг барча учлари бўйича (қутбларни ҳам инобатга олган тақдирда) $R(\alpha)$ ларнинг йиғиндиси 0 га тенг (чунки ҳар бир қирра бирор учдан чиқиб бошқасига киради). Шунинг учун $R(\alpha_s) = -R(\beta_s)$.

$R = R(\alpha_s)$ нинг қиймати тўрдаги *оқимнинг миқдори* дейилади.

Қирраларнинг берилган ўтказувчанлик қобилиятларида S тўрдан ўтувчи оқимнинг максимал қиймати $R_{\max}$ ни аниқлаш масаласини кўрамиз. Бу масаланинг ечими тўрдаги кесимлар билан боғлиқдир.

2-таъриф. *Агар тўрнинг баъзи бир қирраларини олиб ташлаганимизда, у боғлиқли бўлмай, қутблари турли компонентларига тушиб қолса, бу қирралар тўплами* ***тўрнинг кесими*** *дейилади.*

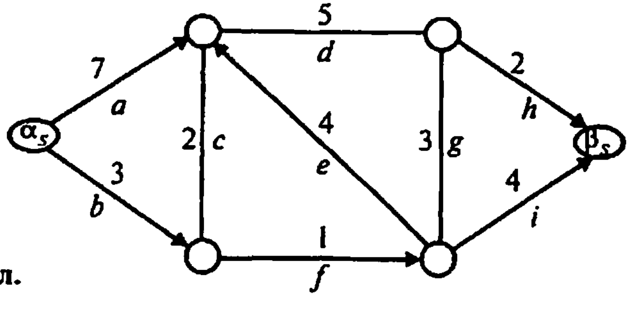
IX.19- шаклда берилган тўр учун $\{d, e, f\}$, $\{b, c, e, g, h\}$, $\{d, g, h, i\}$ қирралар тўпламлари кесимлардир.

Агар кесимдан исталган қиррасини олиб ташлаганда кесим бўлмай қолса, у *содда кесим* дейилади. Масалан, $\{d, e, f\}$, $\{b, c, e, g, h\}$ кесимлар содда, $\{d, g, h, i\}$ эса содда эмас.

Боғлиқли тўрнинг содда кесими уни иккита: α_s қутбни ўз ичига олган чап ва β_s қутбни ўз ичига олган ўнг қисмларга ажратади. Кесимнинг ҳар бир қирраси турли қисмларга тегишли бўлган учларни туташтиради. Агар кесимнинг қирраси звено бўлса ёки чапдан ўнгга қараб йўналтирилган бўлса, у *тўғри*, акс ҳолда *тескари* дейилади.

3-таъриф. *Содда ω кесимнинг* ***ўтказувчанлик қобилияти*** *$C(\omega)$ деб унинг барча тўғри қирраларининг ўтказувчанлик қобилиятлари йиғиндисига айтилади.*

Масалан, $\{d, e, f\}$ кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти $5 + 1 = 6$ тенг, $\{b, c, e, g, h\}$ кесимники эса $3 + 2 + 3 + 2 = 10$. Агар тўр боғлиқли бўлмай, қутблари турли компоненталарига тегишли бўлса, у ҳолда ягона содда кесим бўш тўплам, унинг ўтказувчанлик қобилияти эса нолга тенг.



IX.19- шакл.

Теорема (Форд–Фалкерсон). *S тўрдан ўтувчи оқимнинг максимал қиймати R_{max} унинг содда кесимларининг минимал ўтказувчанлик қобилияти C_{min} га тенг.*

Муаммоли масала ва топшириқлар

1. T дарахтнинг иккита T_1 ва T_2 қисм дарахтларининг $T_1 \cap T_2$ кесишмаси дарахт бўлишини исботланг.
2. Агар i компонента m_i қирраларга ва n_i учларга эга бўлса, у ҳолда

$$v = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^{k} m_i, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

бўлишини исботланг.

3. Цикломатик сони нолга тенг бўлган боғлиқли графлар дарахтлар бўлишини исботланг.
4. Агар $s \geq 3$, $G \geq \Gamma_s$ ва $G = \Gamma_{s+1}$ бўлса, у ҳолда $\chi(G) \leq s$ эканлигини исботланг.
5. Форд–Фалкерсон теоремасини исботланг.

Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Дарахтлар. Циклик ва ациклик қирра. Цикломатик сон.
2. Графнинг асоси. Ватар. Чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта камлиги ҳақида.
3. Эйлер графлари.
4. Хроматик сон ва хроматик синф. Бихроматик граф. Бихроматик бўлишнинг зарурий ва етарли шарти.
5. Тўрлар ва тўрдаги оқимлар. Тўрнинг қутблари. Қутбли қирра. Ички қирра. Тўрнинг кесими. Кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти.
6. Форд–Фалкерсон теоремаси.

АДАБИЁТ

1. **Алексеев В.Б., Кудрявцев В.Б., Сапоженко А.А., Яблонский С.В. и др.** Методическая разработка по курсу «Математическая логика и дискретная математика». 1980.
2. **Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.** Сборник задач по дискретной математики. М., «Наука», 1977.
3. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., «Наука», 1979.
4. **Гёдел К.** Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континиум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 3, №1, 1948.
5. **Гейтинг А.** Интуиционизм, М., «МИР», 1965.
6. **Горбатов В.А.** Семантическая теория проектирования автоматов. М., «Энергия», 1979.
7. **Горбатов В.А., Кафаров В.В., Павлов П.Г.** Логическое управление технологическими процессами. М., «Энергия», 1978.
8. **Горбатов В.А., Останков Б.Л., Фролов С.А.** Регулярные структуры автоматного управления/(под ред. В.А.Горбатова). М., «Машиностроение», 1980.
9. **Горбатов В. А.** Основы дискретной математики. М., «Высшая школа», 1986.
10. **Горбатов В.А., Павлов П.Г., Четвериков В.Н.** Логическое управление информационными процессами. М., «Энергоатомиздат», 1984.
11. **Гиндикин С.Г.** Алгебра логики в задачах. М., «Наука», 1972.
12. **Гаврилов М.А., Девятков В.В., Пупырев Е.И.** Логическое проектирование дискретных автоматов. М.. «Наука», 1977.
13. **Ёқубов Т.** Математик мантиқ элементлари. Т., «Ўқитувчи», 1983.
14. **Т.Ёқубов, С.Каллибеков.** Математик мантиқ элементлари. Т., «Ўқитувчи», 1996.
15. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М.. «Наука», 1979.
16. **Журавлёв Ю.И., Мазурик В.П., Столяров Л.Н.** Элементы математической логики. Д., МФТИ, 1975.
17. **Зыков А.А.** Основы теории графов. М., «Наука», 1987.
18. **Искандаров Р.И.** Математик логика элементлари. Самарқанд. СамДУ, 1970.
19. **Игошин В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов. Изд-во Саратовского университета, 1991.
20. **Игошин В.И.** Задачник-практикум по математической логике. М., «Просвещение», 1986.
21. **Клини С.** Математическая логика. М., МИР,1973.
22. **Карри Х.Б.** Основания математической логики. М., МИР, 1969.
23. **Кондаков Н.И.** Введение в логику. М., «Наука», 1967.
24. **Каменский М.И., Петрова Л.П., Садовский Б.Н.** Математическая логика. М., МГУ, 1982.
25. **Калбертсон Т.** Математика и логика цыфровых устройств. М., «Просвещение», 1965.

26. **Кудрявцев В.Б.** а) Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 8. М., Физматгиз, 1962, стр. 91–116;

    б) О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 13. М., «Наука», 1965 стр. 45–74
27. **Колдуэлл С.** Логический синтез релейных устройств. М., 1961.
28. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., «Наука», 1975.
29. **Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.** Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург, «Лань», 1999.
30. **Лупанов О.Б.** а) О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. «Проблемы кибернетики», вып.10. М., Физматгиз, 1963, стр. 88–96;

    б) Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципы локального кодирования. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 14. М., «Наука», 1965, стр. 31–110;

    в) Об возможностях синтеза схем из произвольных элементов. Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 158–183.
31. **Ляпунов А.А.** О логических схемах программ. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 1. М., Физматгиз, 1958, стр. 46–74.
32. **Лазарев В.Г, Пийль Е.И.** Синтез управляющих автоматов. М., «Энергия», 1978.
33. **Мальцев А.И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.
34. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
35. **Марков А.А.** Теория алгорифмов. Труды математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, XLII, АН РФ, 1954.
36. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, ДАН СССР, 55, 1947, стр. 587–590 с.
37. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, ДАН СССР, 58, 1947, стр. 353–356 с.
38. **Матиясевич Ю.В.** Диофантовость перечислимых множеств, ДАН СССР, 191, 1970, стр. 279–282.
39. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику. М., «Наука», 1976.
40. **Михайлов А.Б., Плоткин А.И.** Введение в алгебру и математический анализ. Сборник задач. 1. Высказывания. Предикаты. Множества. Санкт-Петербург, 1992.
41. **Новиков П.С.** Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., «Наука», 1977.
42. **Новиков П.С.** Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.
43. **Поспелов Д.А.** Логико-лингвистические модели в системах управления. М., «Энергия», 1981.
44. **Оре О.** Теория графов. М., «Наука», 1980.
45. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., МИР, 1972.

46. **Трахтенброт Б.А.** Алгоритмы и машинное решение задач. М., Физматгдиз, 1960.
47. **Тўраев Ҳ.Т.** Математик мантиқ ва дискрет математика I қисм. Самарқанд, СамДУ. 2000, II қисм. Самарқанд: СамДУ, 2001.
48. **Л.Р.Форд., Д.Р.Фалкерсон.** Потоки в сетях. М., МИР, 1966.
49. **Шоломов Л.А.** Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М., «Наука», 1960.
50. **Шестаков В.И.** Математическая логика и автоматика. «Математика в школе», № 6, 1958, № 1, 1959.
51. **Шеннон К.Э.** Работы по теории информации и кибернетики. М., ИЛ, 1963.
52. **Чёрч А.** Введение в математическую логику. Том I, М., ИЛ, 1961.
53. **Чудновский Г.В.** Диофантовы предикаты, УМН, 25, № 4, 1970.
54. **Чегис И.А., Яблонский С.В.** Логические способы контроля работы электрических схем. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 270–360.
55. **Угрюмов Е.П.** Проектирование элементов и узлов ЭВМ. М., «Высшая школа», 1987.
56. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1979.
57. **Яблонский С. В., Лупанов О. Б. и др.** Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. М., «Наука», 1974.
58. **Яблонский С.В.** Основы алгебры логики и теории контактных схем. М., Тр. института математики им. Стеклова, 1958, т. 51.
59. **Яблонский С.В.** а) Функциональные построения в *k*- значной логике. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 5–142.

    б) Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». М., МГУ, 1971.
60. **Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М., «Наука», 1966.
61. **Қобулов В.Қ.** Рақамли автоматлар. Т., 1980.

МУНДАРИЖА

IV БОБ. ПРЕДИКАТЛАР МАНТИҚИ

V БОБ. МАТЕМАТИК НАЗАРИЯЛАР

VI БОБ. АЛГОРИТМЛАР

VII БОБ. МАТЕМАТИК МАНТИҚНИНГ ТЕХНИКАГА ТАТБИҚИ

VIII БОБ. МАТЕМАТИК МАНТИҚ ФУНКЦИЯЛАРИНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ МУАММОСИ

IX БОБ. ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

Тўраев Ҳ.

Математик мантиқ ва дискрет математика

Бакалаврлик йўналишлари бўйича таълим олаётга

талабалар учун ўқув қўлланма/Маъсул муҳарри

А.М.Мусаев. – Т.: «Ўқитувчи», 2003. – 416 б.

Сарл. олдида: Ўзбекистон Республикаси Олий в

ўрта махсус таълим вазирлиги.

ББК 22.12я73+22.176я7

ҲОТАМ ТЎРАЕВ

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА ДИСКРЕТ МАТЕМАТИКА

Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 2003

Таҳририят мудири *М.Пўлатов*
Муҳаррир *Ў.Ҳусанов*
Бадиий муҳаррир *М.Кудряшова*
Техник муҳаррир *Т.Грешникова*
Мусаҳҳиҳлар: *З.Содиқова, В.Тараненко*
Компьютерда саҳифаловчи *Ш.Раҳимқориев*

IB № 8265

Оригинал-макетдан босишга рухсат этилди 22.12.03. Бичими 60×84$^1/_{16}$.
Кегли 11, 10 шпонли. Таймс гарн. Офсет босма усулида босилди.
Босма т. 26,0. Шартли б.т. 24,18. Нашр т. 24,0. 1000 нусхада босилди.
Буюртма № 2035

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 700129. Навоий кўчаси, 30.
Шартнома № 09–113–03.

Ўзбекистон Матбуот ва ахборот агентлигининг 1- босмахонасида
босилди. Тошкент, Сағбон кўчаси, 1- берк кўча, 2- уй. 2003.