O. SAHOBOV

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

OLIMJON SAHOBOV

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

O'quv qo'llanma

IQTISOD-MOLIYA
TOSHKENT
2017

UO'K: 519.2(075)
KBK: 22.171

Taqrizchilar: *t.f.d., prof.* **I. Xabibullayev;**
f.-m.f.d.prof. **Yo.X. Qo'chqorov**

S 36 Ehtimolliklar nazariyasi: *O'quv qo'llanma* / O. Sahobov; – T.: "Iqtisod-Moliya". 2017. – 144 b.

Ehtimolliklar nazariyasi, boshqa fanlar kabi, amaliy tadqiqotlar sababli vujudga keldi. XVI asrning o'rtalarida qimor o'yinlarida tasodifiylik qonuniyatlari vujudga keldi.

Gollandiyalik matematik X.Gyuygens (1629–1695) "qimor o'yinidagi hisoblar" kitobi chop etildi.

Y.Bernulli (1654–1695) hodisaning klasssik ta'rifini kiritdi va katta sonlar qonunini isbotladi.

To'plamlar nazariyasiga asoslanib, ehtimolliklar nazariyasini A.N.Kolmogorov aksiomalar asosida ko'rib chiqdi. Ehtimolliklar nazariyasi taraqqiyoti natijasida matematik statistika, tasodifiy jarayonlar, ommaviy xizmat nazariyasi kabi sohalar ham tez rivojlandi.

Hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasi qat'iy asoslangan matematik fan sifatida shakllandi. U matematika fani yutuqlaridan keng foydalanib kelmoqda (bu haqda J. Dub "matematika ehtimolliklar nazariyasining bir qismi ekanligi ehtimolliklar nazariyasi bo'yicha barcha mutaxassislarga yaxshi ma'lum" deb hazil sifatida keltirgan).

Qo'llanma universitetlr va pedogogika institutlari matematika fakulteti talabalari va shu sohaga qiziquvchilar uchun mo'ljallangan.

UO'K: 519.2(075)
KBK: 22.171ya7

ISBN 978-9943-13-655-7

Ushbu kitobni ehtimolliklar nazariyasi ilmidan saboq bergan ustozlarimning yorqin xotirasiga bag'ishlayman.

Muallif

KIRISH

Jismni t vaqt mobaynida erkin tushayotgan jism bosib o'tgan masofa deterministik (aniq) faktorga asoslanib topiladi:

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

bu yerda: $g = 9{,}8\frac{m}{sek^2}$.

Hayotda juda ko'p masalalar uchraydiki, bu masalalarda tasodifiy faktorlarni inobatga olishga to'g'ri keladi. Masalan, xarid qilib olingan avtomobil necha yil to'xtovsiz xizmat qiladi? Tug'ilgan chaqaloq necha yil umr ko'radi? Sotib olingan lampochka necha yilga chidaydi va h.k. Bu masalalarda statistik (yoki ehtimollik) qonuniyatlar o'rganiladi. Statistik qonuniyatlar ehtimollik nazariyasi va matematik statistika hamda tasodifiy jarayonlar metodlari yordamida o'rganiladi.

Ehtimolliklar nazariyasi – ommaviy ro'y beradigan hodisalardagi qonuniyatlarni o'rganadigan matematikaning bo'limi.

Ehtimolliklar nazariyasining predmeti tasodifiy ro'y beradigan hodisalardagi matematik model bo'lib, tasodifiy hodisani avvaldan ro'y berishi yoki bermasligi haqida aniq aytib bo'lmaydi.

Tasodifiy hodisaga misollar: tashlangan tangani gerb yoki raqamli tomoni bilan tushishi, xarid qilib olingan lotoreya biletiga yutuq chiqishi, odamning 1000 yil umr ko'rishi, sotib olingan mashinaning buzilmay ishlashi hodisasi va h.k.

Ehtimolliklar nazariyasining maqsadi tasodifiy hodisalar sohasida hodisa ehtimolligini avvaldan prognoz qilish, tasodifiy hodisalar, tasodifiy miqdorning tasodifiy jarayonlardagi qonuniyatlarni ochishdan iborat.

Ehtimolliklar nazariyasi – tasodifiy hodisalar, miqdorlar, jarayonlardagi qonuniyatlarni o'rganadigan matematikaning bir bo'limidir.

Ehtimolliklar nazariyasi – boshqa bir qator tabiiy fanlar kabi amaliy ehtiyojlar natijasida vujudga keldi.

XVII asrning boshlarida mashhur fizik Galileo Galiley fizik o'lchashlardagi tasodifiylik xususiyatini topdi va bu hodisalarning ehtimolliklarini baholagan bo'lsada, qadimgi Xitoyda, qadimgi Rimda demografik kuzatishlar bilan bog'liq bo'lgan tasodifiy hodisalarning chastotasi turg'unlik xususiyatiga egaligini bilishgan. XVII asrning o'rtalarida Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma kabi mashhur matematiklar qimor o'yinlari nazariyasini yaratish yo'lida katta xizmat qilishdi. Ehtimolliklar nazariyasini rivojlantirishda Yakob Bernulli munosib hissa qo'shdi, u birinchi bo'lib "katta sonlar qonuni"ni isbotladi.

Ehtimolliklar nazariyasining taraqqiyotidagi keyingi bosqich Muavr, Laplas, Gauss, Puasson, B.Y.Bunyakovskiy, P.L.Chebishev, A.A.Markov. A.M.Lyapunov, C.N.Bernshteyn kabi mashhur matematiklar nomlari bilan bog'liq.

Hozirgi zamon ehtimolliklar nazariyasi rivojlanishida A.N.Kolmogorov, V.I.Romanovskiy, A.Y.Xinchin, Y.V.Proxorov, B.V.Gnedenko, A.A.Borovkov, A.N.Shiryayev, D.Dub, G.Kramer, V.Feller, M.Loyev va boshqalar munosib hissa qo'shganlar.

Ehtimolliklar nazariyasi yutuqlaridan nazariy fizika, biologiya, genetika, geodeziyada, ommaviy xizmat tizimlarida, ishonchlilik nazariyasida, amaliy statistikada va boshqa sohalarda keng foydalaniladi.

Ehtimolliklar nazariyasiga oid muammolarning qo'shilishi va ularning yechimiga oid fundamental ilmiy tadqiqot ishlarining sifati va salmog'i bo'yicha O'zbekistonlik ehtimolchilar maktabi jahonda yetakchi o'rinda turadi. Respublikamizda ehtimolliklar nazariyasini rivojlantirishda V.I.Romonovskiy, T.A.Sarimsoqov, S.H.Sirojiddinov, T. Azlarov, Sh.Farmonov va boshqalarning xizmati katta.

Tasodifiylik tamoyilini bilmasdan turib fizika, kimyo, biologiya, geodeziya va boshqa fanlarda o'rganiladigan tasodifiy hodisalarning tub mohiyatini anglab bo'lmaydi. Shuning uchun ham ehtimolliklar nazariyasi universitet va institutlarda, kollej dasturlarida alohida kurs sifatida o'tiladi. Hozirgacha o'zbek tilida bu predmet haqida darsliklar kamligini e'tiborga olib, muallif shu kitobni yozishga jazm qildi.

Ushbu kitob ta'lim standartlari bo'yicha bakalavriatning quyidagi:

B 440100 – fizika;

B 440200 – mexanika;

B 440300 – astronomiya;

B 460100 – matematika;

B 480100 – informatika yo'nalishi bo'yicha ta'lim oladigan talabalar uchun mo'ljallangan.

Shuningdek, mazkur kitob universitetlarning mexanika-matematika va pedagogika institutlarining fizika-matematika fakultetlari talabalari uchun ham mo'ljallab yozilgan.

Qo'llanmani yozishda muallifning Toshkent davlat texnika universiteti, Namangan davlat universitetida ko'p yillar mobaynida o'qigan ma'ruzalari asos qilib olingan. Ehtimolliklar nazariyasiga oid masala va misollar talabalar uchun o'tkazilgan semenarlarda, mashq darslaridagi misol va masalalardan foydalanilgan.

Kitobni yozishda Moskva Davlat universiteti aspiranturada (1974–1977), doktoranturada (1981–1983) ta'lim olgan yillar mobaynida to'plagan materiallari va A.N. Kolmogorov, Y.V. Proxorov, A.N. Shiryayev, B.V. Gnedenko, A.D. Solovyev va boshqalardan eshitgan ma'ruzalarni asos qilib olingan.

O'quv qo'llanmani yozishda ayrim nuqson va kamchiliklarga yo'l qo'yilgan bo'lishi mumkin, shu kamchiliklar haqidagi tanqidiy fikr va mulohazalarni muallif chuqur minnatdorchilik bilan qabul qiladi.

O'quv-qo'llanmani yozishda Toshkent davlat texnika universiteti ASU fakultetida va Namangan davlat universitetining matematika fakulteti talabalari uchun o'qilgan ma'ruzalar asos qilib olingan.

Qo'llanmani ayrim xato va kamchiliklarini tuzatishga yordam bergani uchun H. Qosimovga muallif minnatdorchilik bildiradi.

ASOSIY BELGILAR

$\Rightarrow$ – "kelib chiqadi" (impilikasiya belgisi)
$\Leftrightarrow$ – "teng kuchli" (logik ekvivalentlik belgisi)
▲ – isbotning tugaganligi belgisi
$\equiv$ – "ta'rifga muvofiq teng"
Δ – hodisaning (to'plamlarning) simmetrik ayirmasi
$\sim$ – funksiyalarning, o'lchovlarning ekvivalentligi, asimptonik ekvivalentlik belgisi
$\bar{A}$ – A hodisaning to'ldiruvchisi, A ga qarama-qarshi hodisa
I_A – A to'plamning (hodisaning) indikatori
$A \perp B$ – A va B hodisalarning bog'liqmasligi
$P(A)$ – A hodisaning ehtimolligi
ξ, η, ζ - tasodifiy miqdorlar
$\xi_t(\omega)$ – tasodifiy jarayon
$F(x) = P\{\xi \leq x\}$ – taqsimot funksiya
$f(x)=F'(x)$ – zichlik funksiya
$M\xi$ - ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (o'rtacha qiymati)
$D\xi$ - ξ ning dispersiyasi
$\varphi(t)$ – xarakteristik funksiya
$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ – ehtimollik bo'yicha yaqinlashish
$\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi$ – I - ehtimollik bilan yaqinlashish
$\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ – sust yaqinlashish
$\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ – taqsimot bo'yicha yaqinlashish

I bob. HODISA VA EHTIMOLLIK TUSHUNCHASI

1-§. Ehtimolliklar fazosi. Hodisalar ustida amallar

Ehtimolliklar nazariyasining boshlang'ich tushunchalaridan biri hodisa tushunchasi bo'lib, uning ro'y berishi yoki ro'y bermasligini quyidagi sxemalardan biri orqali ifodalash mumkin:

1) agar *S* shartlar kompleksi bajarilsa, haqiqatdan ham, *A* hodisa ro'y beradi;

2) agar *S* shartlar kompleksi bajarilsa, u holda *A* hodisa ro'y bermaydi.

Birinchi holda *A* hodisa *S* shartlar kompleksiga nisbatan "***ishonchli***" yoki "***muqarrar***" deyiladi, ikkinchi holda esa *A* hodisa *S* shartlar kompleksiga nisbatan "***ro'y bermaydigan***" hodisa deyiladi. Masalan idishdagi suv normal atmosfera bosimida va Selsiy shkalasi bo'yicha 0 gradusdan past temperaturada muzlaydi – muqarrar hodisa, ***B*** – gaz yoki ***D*** – plazma holatda bo'lmaydi. Bu misolda idishning hajmi, bosim, temperatura *S* – shartlar kompleksini tashkil etadi.

Shartlar kompleksi *S* bajarilganda *A* hodisa ba'zan ro'y berib, ba'zan ro'y bermasa bunday hodisaga ***tasodifiy hodisa*** deyiladi, hamda lotin alfavitining *A*, ***B***, *C*, ... bosh harflari bilan belgilanadi.

Tasodifiy hodisaga misollar:

1) *A* – otilgan o'qni nishonga tegish hodisasi;

2) ***B*** – sotib olingan pul – buyum lotoreyasiga yutuq chiqishi hodisasi;

3) ***D*** – odamning 1000 yoshga kirishi hodisasi;

4) *G* – yerga tashlangan tangani "gerb" tomoni bilan tushishi hodisasi;

5) *T* – 36 donali qartalar dastasidan tavakkal olingan qartaning "***tuz***" qarta chiqish hodisasi va hokazo.

Ehtimollar nazariyasida "tajriba o'tkazilganda" yoki "tajriba"da terminlari juda ko'p ishlatiladi. Masalan *G* hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligini aniqlash maqsadida bir jinsli materialdan simmetrik tayyorlangan tanga tekislikga "pirillatib" tashlanadi, ya'ni ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda (tajriba o'tkazilganda) yuqorida qo'yilgan masalaga javob ayta olamiz.

A hodisa ro'y berganda, ro'y bermaydigan hodisaga ***qarama-qarshi hodisa*** deyiladi va $\bar{A}$ kabi belgilanadi. Masalan *T* hodisaga qarama-qarshi $\bar{T}$ hodisa – qartalar dastasidan olingan qartaning "***tuz***" bo'lmasligi hodisasidir.

Agar *A* va ***B*** hodisalardan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor qilsa, u holda *A* va ***B*** hodisalarga ***birgalikda bo'lmagan hodisalar*** deyiladi. Masalan, tanga tashlaganimizda u yo *G* – gerbli, yoki ***R*** – raqamli tomoni bilan tushadi, bunda tanganing tik turib qolishi inobatga olinmaydi. Bu misolda tanganing *G* – gerbli tomoni bilan tushish ***R*** – raqamli tomoni bilan tushishini inkor qiladi.

Endi chekli *N* dona $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ boshlang'ich holatlardan iborat biror tajribani kuzataylik. Biz uchun ω_i, larning tabiati unchalik muhim emas.

Ehtimollar nazariyasida xususiy hollarga ajratilmaydigan $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ holatlarga ***elementar hodisalar*** deyiladi, qo'pol qilib aytganda, elementar hodisalarni yana ham elementarroq holatlarga ajratib bo'lmaydi.

Bunday elementar hodisalar to'plamini:

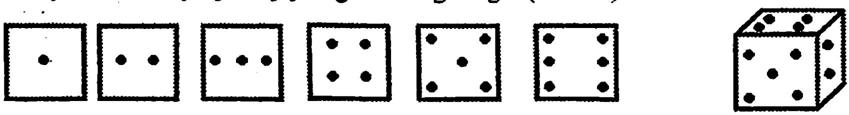
$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} = \Omega$

kabi belgilanadi hamda elementar hodisalar fazosi deyiladi.

1-misol. Tanga tashlaganimizda, tanga yo G – "gerbli" tomoni bilan, yoki R – "raqamli" tomoni bilan tushishi mumkin.

Bu misolda elementar hodisalar G va R, $\Omega=\{G, R\}$.

2-misol. Endi shashqoltosh tanlash masalasini ko'rib o'tamiz: Shashqoltosh bu aniq kub formasiga ega bo'lgan, bir xil materialdan tayyorlangan va teng imkoniyatli hamda yoqlari quyidagicha belgilangan(1-rasm):



E_1 E_2 E_3 E_4 E_5 E_6

1-rasm. **Shashqoltosh**

Shashqoltosh tashlanganda E_i – i sonli yog'ining tushish hodisasi. Bunda elementar hodisalar fazosi $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ dan iborat. Ba'zi kitoblarda "kubik", ayrimlarida o'yin "soqqa"si ham deb yuritiladi.

3-misol. Tanga ikki marta tashlanganda elementar hodisalar:

(G, G); (G, R); (R, G); (R, R)

Elementar hodisalar fazosi esa

$\Omega=\{(G, G), (G, R), (R, G), (R, R)\}$.

Aytaylik, $A \subseteq \Omega$ bo'lsin. Shuningdek $A = \varnothing$ yoki $A = \Omega$ bo'lishi ham mumkin.

Ehtimolliklar nazariyasida Ω ning qism to'plamiga hodisa deyiladi. Biz bundan keyin to'plamni hodisa deb tushunamiz.

Ayrim tushunchalarni to'plamlar nazariyasida va ehtimolliklar nazariyasida qanday ifodalanishini ko'rsatuvchi quyidagi atamalar(terminologiya)ni keltiramiz:

ATAMALAR (TERMINOLOGIYA)

№	To'plamlar nazariyasida	Tasodifiy hodisalar uchun
1.	Element nuqta, atom	Elementar hodisa, natija
2.	A to'plam	A hodisa
3.	$A \cap B = \varnothing$ A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas

4.	$\varnothing = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ A_i to'plamlar kesishmaydi	$A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda emas.
5.	$X = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ A_i to'plamlar kesishmasi	X – hodisa bir vaqtda $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarni ro'y berishidan iborat.
6.	$Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ A_i to'plamlarning birlashmasi	Y – hodisa $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarni hech bo'lmaganda birini ro'y berishidan iborat.
7.	To'ldiruvchi to'plam $\bar{A}$	$\bar{A}$ hodisa A hodisaga teskari (qarama-qarshi) hodisa bo'lib, A hodisani ro'y bermasligidan iborat.
8.	$A = \varnothing$	A ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa.
9.	$A = \Omega$	A muqarrar hodisa.
10.	$A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlarni S sistemasi yoyilma tashkil qiladi.	S tajribada $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarni ro'y berishidan iborat yig'indi: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ muqarrar hodisa.
11.	B to'plam A to'plamni qismi $B \subseteq A$	B hodisa ro'y berishligidan A hodisaning ro'y berishligi kelib chiqadi.
12.	A va B to'plamlar ayirmasi $A \setminus B$	B hodisa ro'y bermaganda A hodisa ro'y berishidan iborat hodisasi.
13.	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	A yoki B ro'y berib, lekin $A \cap B$ ro'y bermaganda ro'y beruvchi hodisa.

Hodisalar ustida amallar

1. Agar A hodisa ro'y berganda albatta B hodisa ham ro'y bersa, u holda A hodisa B hodisani ergashtiradi deymiz va $A \subset B$ kabi belgilanadi.

2. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, u holda bu hodisalar teng deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.

3. Agar $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ bo'lib, ham A, ham B hodisalar ro'y berishidan iborat hodisaga A va B hodisalarni ko'paytmasi deb aytiladi hamda $A \cdot B$ kabi belgilashadi. Agar $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda $A \cup B = A$ hamda $A \cap B = B$ munosabatlarning rostligi (to'g'riligi) hodisalar yig'indisi va ko'paytmasi ta'rifidan kelib chiqadi.

4. Agar $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ u holda, hech bo'lmaganda A yoki B hodisalarning birini ro'y berishidan iborat hodisaga A va B hodisalarni yig'indisi deb ataladi va $A \cup B$ yoki $Sup(A, B)$ kabi belgilanadi. Mobodo $A \cap B=\varnothing$, ya'ni hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $A+B$ deb belgilanadi.

5. Agar $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ bo'lib, A hodisa ro'y berganda, B ro'y bermaydigan hodisaga qarama-qarshi (to'ldiruvchi) ***hodisa*** deyiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

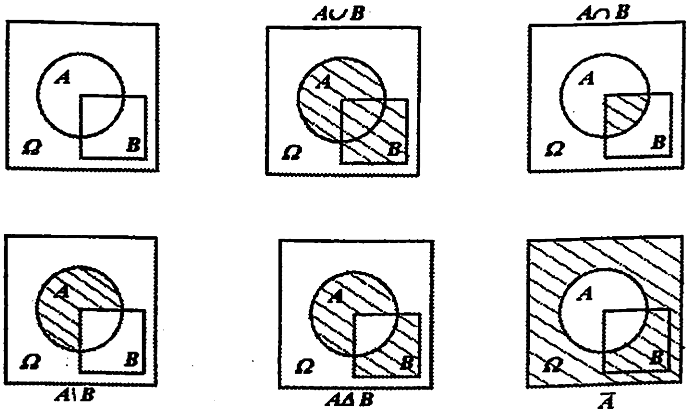
6. Agar $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ bo'lsa, , A hodisa ro'y berganda B hodisa ro'y bermaydigan hodisaga A hodisadan B hodisani ***ayirmasi*** deb aytiladi, hamda $A \setminus B$ kabi belgilashadi.

7 Agar $A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$ bo'lsa, $A \setminus B$ va $B \setminus A$ hodisalar yig'indisiga A va B hodisaning ***simmetrik ayirmasi*** deb aytiladi va $A \circ B$ yoki $A \Delta B$ kabi belgilanadi:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Keltirilgan ta'riflarni ixtiyoriy sondagi hodisalar uchun umumlashtirish mumkin.

Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, ya'ni ulardan birini ro'y berishi ikkinchisini ro'y berishini yo'qqa chiqarsa u holda A va B hodisalar birgalikda emas deyiladi. Elementar hodisalar fazosida hodisalar uchun kiritilgan amallar Venn diagrammasida yaqqol tasvirlangan; katta kvadrat yuzasidagi nuqtalar to'plami – Ω elementar hodisalar fazosi, kichik kvadrat yuzasidagi nuqtalar – B hodisa, doirani esa A hodisa deb belgilaymiz.



2-rasm. **Hodisalar algebrasiga oid diagramma**

Eyler – Venn diagrammasidan foydalanib hodisalar ustida bajariladigan amallar quyidagi xossalarni qanoatlantiradi.

1. Yig'indi va ko'paytmaga nisbatan kommutativlik xossasi

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. Yig'indi va ko'paytirish amaliga nisbatan assosiativlik xossasi

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3. Qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi

$$(A\cup B)C = AC\cup BC.$$

4. Agar $A\subset B$ bo‘lsa, u holda $\overline{A}\supset \overline{B}$

5. A hodisa inkori $\overline{A}$ bo‘lsa, $\overline{A}$ hodisani inkori A hodisani o‘zi bilan bir xil bo‘ladi

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

6. Bir xil hodisa uchun

$$A\cup A = A\cap A = A.$$

7. De Morgan qonunlari

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB} = \overline{A}\cup\overline{B}.$$

Izoh. De Morgan qonuni ixtiyoriy chekli n ta hodisalar uchun o‘rinli

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n} \qquad \overline{A_1 A_2\ldots A_n} = \overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots\cup\overline{A_n}$$

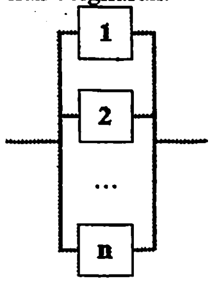
Misol. Tizim elementlaridan ixtiyoriy bittasini ishdan chiqishi tizimni ishdan chiqishiga olib kelsa, tizim elementlari ***ketma-ket ulangan*** deyiladi. Agar tizimning hamma elementlari bir vaqtda ishdan chiqsa (buzilsa) u holda tizim ***parallel ulangan*** deyiladi. Elementlarni ketma-ket va parallel ulangan elementlar shartli ravishda 2-rasmni a va b sida tasvirlangan.

Tizimni ishga yaroqsiz bo‘lishi hodisasini A bilan belgilasak.

$$A = A_1\cup\ldots\cup A_n$$

$$A = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

2. a-rasm



2. b-rasm

Elementlar parallel ulangan tizimda A hodisa A_i $i=\overline{1,n}$ hodisalarni har birini o‘z ichiga oladi va elementlar ketma-ket ulangan tizim uchun esa aksincha A_i $i=\overline{1,n}$ hodisalarni har biri A hodisani o‘z ichiga oladi.

Agar S hodisalar sistemasi bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

a) $A\in S$ va $B\in S$ tegishliligidan $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$ ham S ga tegishliligi kelib chiqsa;

b) $U\in S$

Agar S hodisalar maydoni bo‘lsa, hamda $A_1, A_2, \ldots A_k\in S$ bo‘lsa, u holda $\bigcup_{i=1}^{k}A_i\in S$, $\bigcap_{i=1}^{k}A_i\in S$ munosabatlarni bajarilishini ko‘rish qiyin emas. Tasodifiy hodisalar uchun quyidagi qonunlar o‘rinli:

a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ kommutativlik;

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ assosiativlik;

c) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ ayniylik.

Bu qonunlarning rostligi juda oson ko'rsatiladi.

Umuman tajriba o'tkazilganda hodisalardan ba'zilari ko'proq, ba'zilari kamroq ro'y beradi. Shuning uchun tajribalar seriyasida hodisalar ko'p yoki kam ro'y berishligini miqdoriy jihatidan taqqoslash maqsadida, shu hodisaning ehtimolligi tushunchasi kiritiladi. Hodisaning ehtimolligi – shu hodisani obyektiv ro'y berishlari darajasining miqdoriy o'lchovidir.

Masalan, D – insonning 1000 yoshga kirishi hodisaning ehtimolligi bir bo'lingan $10 \cdot 10^{36}$ ga teng. Hayotda D hodisa ro'y berishi mumkinmi? Biologiya va sotsiologiya nuqtayi nazaridan insonni 1000 yoshga kirishini inkor qilmaydi chunki tajribada bu faktni inkor etish uchun $10 \cdot 10^{34}$ yuz yillik darkor.

Tasodifiy hodisa ehtimolligi "juda" kichik son bo'lsa, u holda bu hodisa amalda, yagona tajribada deyarli ro'y bermaydi deb aytish mumkin. Agar tasodifiy hodisaning ehtimolligi birga yaqin bo'lsa, u holda yagona tajribada deyarli ro'y beradi deb aytish mumkin.

Faraz qilaylik, har bir ω_i elementar hodisaga uning ehtimolligi deb ataluvchi $P(\omega_i)$ son mos qo'yilgan bo'lib, ushbu shartlarni qanoatlantirsin:

a) $P(\omega_i) \geq 0 \quad i=\overline{1,N}$ manfiy bo'lmagan.

b) $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_N) = 1$ normallashtirgan. Bundan so'ng A hodisaning ehtimolligini $P(A)$ kabi belgilaymiz bu belgi inglizcha ***"Probability"*** – ehtimollik so'zining bosh harfidan olingan.

1-ta'rif. Agar:

1) elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M\}$ tajribaning natijalarini ifodalasa;

2) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ natijalarning ehtimolliklari mos ravishda $P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots, P(\omega_M)$ bo'lsa, u holda berilgan eksperiment uchun (Ω, P) ehtimollik modeli aniqlangan deyiladi. Mabodo $P(\omega_i)$ ehtimolliklar teng bo'lsa, ya'ni

$$P(\omega_i) = \frac{1}{M}, \qquad i = \overline{1,M}$$

u holda holatlar chekli M soni bo'lgan (Ω, P) ehtimolliklar modeliga ***klassik sxema*** deyiladi. Bu model uchun turli murakkab hodisalarni ehtimolligini hisoblash mohiyat jihatdan kombinatorika masalalariga keltiriladi.

Yuqorida aytilgan $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_M)$ ehtimolliklar yig'indisining birga tengligi qulaylik va kelishuv natijasi bo'lib, bu yig'indini ixtiyoriy songa tenglash mumkin. $P(\omega_i)$ larni nomanfiyligi esa intuitiv jihatdan $P(\omega_i)$ ehtimolliklar "bog'liq" bo'lmagan tajribalarda ω_i holat chastotasining umumi imkoniyatlar soniga nisbatidan iborat bo'lganligidandir. Endi holatlar soni M chekli bo'lgan (Ω, P) ehtimolliklar modelini qaraylik:

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M \\ P(\omega_1), P(\omega_2), \ldots, P(\omega_M) \end{pmatrix}.$$

Masalan, shoshqoltoshni ikki marta tashlasak

$$\begin{pmatrix}\Omega\\ P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,1), & (1,2), & \dots, & (6,6)\\ \frac{1}{36}, & \frac{1}{36}, & \dots, & \frac{1}{36}\end{pmatrix}.$$

Bu yerda $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{36},\}$ hamda

$$\omega_1=(1,1);\ \omega_2=(1,2);\ \dots;\ \omega_{36}=(6,6)$$

Tushgan ochkolar yig'indisi uchga teng bo'lishi hodisasini A deb olsak, u holda $A=\{(2,1), (1,2)\}$, A hodisani ehtimolligi qanchaga teng? Intiutiv aniqki, bu ehtimollig $\frac{1}{18}$ ga teng, chunki hamma imkoniyatlar soni 36ta A hodisa esa atiga ikkitasdagina ro'y beradi. Shuning uchun $P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

2-ta'rif. A hodisaning ehtimolligi deb quyidagiga aytiladi:

$$P(A)=P(\omega\in A)=\sum_{\{k:\ \omega_k\in A\}}P(\omega_k),$$

bu yerda yig'indi A to'plamni tashkil etgan ω_i elementar hodisalar bo'yicha jamlanadi. Yuqorida aytilganlardan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. Ehtimollikning additivligi. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

1-natija. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

2-natija. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda $P(A_1+A_2+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+A(A_n)$.

3-natija. A va B hodisalar Ω dan olingan bo'lsa, u holda $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, xususan $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$.

1-misol. Bog'liq bo'lmagan holda tangani ikki marotaba tashlaylik. Bittada gerb tushgan hodisalarning ehtimolligi qancha?

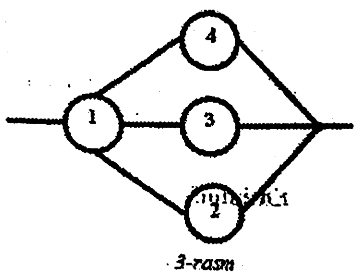
Buning uchun ehtimolliklar modelini yozamiz:

$$\begin{pmatrix}\Omega\\ P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}GG & GR & RG & RR\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Biz $A=(GR, RG)$ hodisaning ehtimolligini hisoblashimiz kerak.

$$P(A)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

2-misol. Elektr zanjiri 3-rasmda berilgan i-elementning ishdan chiqishi A_i hodisa sxemaning ishdan chiqishini A hodisa deb olsak A hodisani va $\overline{A}$ hodisani yozing va ehtimolligini hisoblang.



3-rasm

Yechish. Zanjir ishdan chiqishi uchun birinchi element yoki uchala 2,3,4 elementlar ishdan chiqsa A hodisa ro'y beradi, ya'ni A_1, hodisa yoki A_2, A_3, A_4 hodisalar ro'y berganda sodir bo'ladi. Shuning uchun

$A=A_1 \cup A_2 A_3 A_4$

De Morgan qonuniga asosan:

$$\overline{A}=\overline{A_1 \cup A_2 A_3 A_4}=\overline{A_1}\left(\overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}\right).$$

U holda,

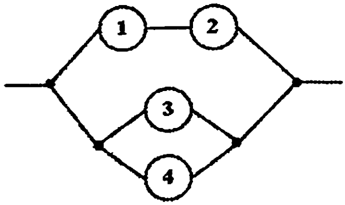
$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)P(A_3)P(A_4)=P_1+P_2P_3P_4$$

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1})[P(\overline{A_2})+P(\overline{A_3})+P(\overline{A_4})]=(1-P_1)[(1-P_2)+(1-P_3)+(1-P_4)]=$$

$$=q_1[3-(P_2+P_3+P_4)]=q_1(q_2+q_3+q_4)$$

bu yerda $q_i=1-P_i,\ i=\overline{1,4}$.

3-misol. Tizim to'rtta elementlardan tashkil topgan (4-rasm). Bu elementlarni ehtimolliklari $P_1=0,7;\ P_2=0,6;\ P_3=0,8$ va $P_4=0,9$ berilgan bo'lsa, bu elementlar bir-biriga bog'liqsiz ishlaydi deb tizimni buzilish ehtimolligini hisoblang.

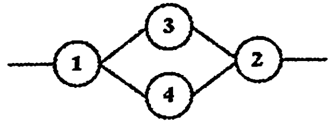


4-rasm

Yechish. 1 va 2 elementlar ketma-ket ulanganligi uchun $P_{12}=P_1P_2=0,42$. 3 va 4 elementlar parallel ulangan $P_{34}=1-(1-P_3)(1-P_4)=0,98$ tizimdagi 1 va 2 elementlar bilan 3 va 4 elementlar parallel ulangani uchun

$$P=1-(1-P_{12})[(1-P_{34})=1-(1-0,42)(1-0,98)\approx 0,99.$$

4-misol. Tizim to'rtta elementlardan iborat bo'lib (5-rasm) har birini to'xtovsiz ishlash ehtimolliklari mos ravishda $P_1,\ P_2,\ P_3\ P_4$ bo'lsa, tizimning to'xtovsiz ishlash ehtimolligini toping.



5-rasm

Yechish.

$$P=P_1[1-(1-P_2)(1-P_3)]P_4=P_1P_4(1-q_2)(1-q_3)$$

bu yerda $q_2=1-P_2$ va $q_3=1-P_3$.

2-§. Ehtimollikning turli ta'riflari

2.1. Ehtimollikning klassik ta'rifi

Ehtimollik tushunchasi matematik ehtimolliklar nazariyasining asosiy tushunchasidir. Ehtimollikni klassik ta'riflashda, hodisalarni teng imkoniyatlilik tushunchasiga asoslanadi. Masalan: tanga bir jinsli materialdan simmetrik qilib tayyorlangan bo'lsa, u holda tanganing gerb yoki raqamli tushishi teng imkoniyatli bo'ladi.

Ta'rif. Boshqa holatlarga bo'linmaydigan hodisaga elementar hodisa deyiladi.

Ehtimollikning klassik tarifi. $S\in A$ hodisaning ehtimolligi deb $P(A)=\dfrac{n}{N}$ nisbatga aytiladi, bu yerda N jami holatlar soni, n – esa A ga tegishli holatlar soni ya'ni A hodisaning ehtimolligi deb, tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan A – ga tegishli holatlar soni n ni jami N holatlar soniga bo'lgan nisbatga aytiladi.

1-misol. Shashqoltoshni bir marta tashlaganimizda A hodisa "***3 ga karrali***" ochko chiqishi hodisasini ehtimolligini topaylik.

Bu misolda jami hodisalar soni 6 ta:

$$\Omega = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6).$$

A hodisaga imkoniyat yaratadiganlari ikkita E_3, E_6.

$A=E_3 + E_6$ "***3ga bo'linadigan***" ochkolar tushishi hodisasi bo'lib ikkita birgalikda bo'lmagan va teng imkoniyatli elementar hodisalardan iborat bo'lgani uchun

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Bundan tashqari ta'rifga ko'ra $P(E_i)=\frac{1}{6}$, $1 \le i \le 6$

$$P(E_3+E_6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ehtimollikning klassik ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1. Ixtiyoriy A hodisa uchun $P(A) \ge 0$.

Ravshanki $\frac{n}{N}$ kasr manfiy bo'lmaydi.

2. Muqarrar hodisa U uchun $P(U) = 1$.

Muqarrar hodisaga jami elementar hodisalar imkoniyat yaratadi, shuning uchun $P(U) = \frac{N}{N} = 1$.

3. Ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa uchun $P(V) = P(\varnothing) = 0$. Haqiqatan ham, hech bir elementar hodisa ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisaga imkoniyat yaratmaydi, shuning uchun $P(V) = \frac{0}{N} = 0$.

4. Agar B va C hodisalar birgalikda ro'y bermasa hamda $A, B, C \in S$ va $A=B+C$ bo'lsa, u holda $P(A) = P(B) + P(C)$.

Isboti. Aytaylik, B hodisa n' marta ro'y bersin. Faraz qilganimizga ko'ra B va C hodisalar birgalikda emas, shuning uchun A hodisa $n'+n''$ marta ro'y beradi. Shuningdek:

$$P(A) = \frac{n'+m''}{N} = \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} = P(B) + P(C).$$

5. Agar $\overline{A}$ hodisa A hodisaning qarama-qarshi bo'lsa, u holda

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Darhaqiqat, $A+\overline{A}=U$ u holda 2 – isbotlangan xossaga ko'ra $P(A+\overline{A}) = 1$ biroq A va $\overline{A}$ hodisalar birgalikda emas, shuning uchun

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

6. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda $P(B) \ge P(A)$.

Haqiqatan ham $A = B + A\overline{B}$ bundan,

$$P(A) = P(B) + P(A\overline{B}) \geq P(B).$$

7. Ixtiyoriy hodisa ehtimolligi nol bilan bir orasidagi sondir

$U \supset AU = A \supset V$ Bundan

$1 = P(U) \geq P(A) \geq P(V) = 0.$

Ehtimollikning klassik ta'rifini kamchilik tomoni quyidagilardan iborat:

a) Elementar hodisalar fazosi chekli deb faraz qilinadi, umuman olganda chekli bo'lishi shart emas;

b) Elementar hodisalarni har biri teng imkoniyatli deb faraz qilinadi, aslida "teng imkoniyatli" bo'lishi ham shart emas. Klassik sxemaga tushadigan murakkab masalalarni ehtimolligini hisoblash, mohiyat jihatdan, kombinatorika masalalariga keltirilishini 1-§ da aytib o'tgandik.

Masalan, Ω- elementar hodisalar 2^n – ta nuqtadan iborat:

$$\omega = \left(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^n}\right),$$

bu yerdagi ω_i larning har biri 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qiladi. Faraz qilaylik $P(\omega) = \dfrac{1}{2^2}$.

Quyidagicha belgilash kiritamiz: $A_k = \{\omega : \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = k\}$ hamda A_k ga kiradigan ω nuqtalar sonini $N(A_k)$ deb olamiz. Ravshanki:

$$N(A_k) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-1)!} = \left(\frac{k}{n}\right).$$

Shuningdek,

$$p_k = P(A_k) = \frac{N(A_k)}{N(\Omega)} = 2^{-n} \cdot C_n^k; \qquad k = \overline{0,n}.$$

Faraz qilaylik, xaltachada N dona sharcha bo'lib, ulardan n tasi qora va $(N-n)$ tasi oq. Tavakkal M dona tanlangan sharcha olamiz va olingan sharchalar xaltachaga qaytib solinmaydi. Olingan M ta tanlanmada m dona qora shar bo'lishining ehtimoli qanchaga teng?

Hamma tarkibi bilan farq qiluvchi namunalar soni C_N^M, m dona qora sharchani n dona qora sharchalardan C_n^m usulda olish mumkin. Qolgan $M - m$ dona oq sharchani $N - n$ dona oq sharchalar ichidan C_{N-n}^{M-m} usulda olish mumkin. Tarkibi bilan farq qiladigan hamda M dona qora sharchasi bo'lgan namunalar soni $C_n^m \cdot C_{N-n}^{M-m}$ ga teng.

Demak, qidirilayotgan ehtimollik

$$P_{N,n}(M,m) = \frac{C_n^m \cdot C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M}$$

bu yerdagi $P_{N,n}(0, M)$, $P_{N,n}(1, M-1)$, ... $P_{N,n}(M, 0)$ sonlar to'plami gipergeometrik taqsimotini tashkil qiladi deymiz.

2-misol. "Sportlotto" ishtirokchisi 49 ta sport turidan oltitasini chizishi mumkin. Tavakkal chizilgan olti sport turidan beshtasiga yutuq chiqishi ehtimolligi qancha? Oltitasigachi?

$$P_{49,6}(6,5)=\frac{C_6^5\cdot C_{43}^1}{C_{49}^6}\approx 1{,}86\cdot 10^{-5}. \qquad P_{49,6}(6,6)=\frac{1}{C_{49}^1}\approx 7{,}2\cdot 10^{-8}.$$

3-misol. Qartalar dastasida *36* dona qarta, tavakkal *4* tasi olindi. Shular ichida bitta ***"tuz"*** chiqishi ehtimolligini hisoblang.

Yechish. *36* dona qartadan *4* tasini C_{36}^4 usulda olish mumkin. Bitta "tuz" ni C_4^1 usulda olish mumkin, lekin *3* ta tuz bo'lmagan qartani C_{32}^3 usulda olish mumkin, u holda hamma imkoniyat tug'diruvchi qartalar soni $C_4^1\cdot C_{32}^3$ bo'ladi. Demak, qidirilayotgan ehtimollik

$$P(T)=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^3}{C_{36}^4}\approx 0{,}37.$$

4 – misol. Kitob loteriyasida jami N ta bilet bor, ulardan M tasiga yutuq chiqishi mumkin. S ta lotoreyasi bor kishiga kamida bitta yutuq chiqish ehtimolligini aniqlang.

Yechish. N ta biletdan S tasini C_N^S usulda tanlash mumkin. Yutuq chiqmaydigan biletlar soni $N-M$ ta bo'lib, ulardan S tasini C_{N-M}^S usulda tanlash mumkin. Biroq bitta ham biletga yutuq chiqmaslik ehtimolligi . $\dfrac{C_{N-M}^S}{C_N^S}$ nisbatga teng. Kamida bitta biletga yutuq chiqish hodisasi bitta ham biletga yutuq chiqmaslik hodisasiga teskari bo'lgani sababli

$$P=1-\frac{C_{N-M}^S}{C_N^S}.$$

2.2. Ehtimollikning geometrik ta'rifi

Yuqorida ko'rib o'tilgan ehtimollikning klassik ta'rifida hodisalarni teng imkoniyatli hollarga ajratib bo'lmaydigan ayrim masalalar ehtimolligini geometrik ta'rifidan foydalanib yechish mumkinligini ko'rib o'tamiz.

Agar biror A hodisa R^1 to'g'ri chiziqda yoki R^2 tekislikda, yoki R^3 fazoda aniqlangan bo'lsa, u holda uzunlik, yuza, hajm tushunchalaridan foydalanib geometrik ehtimollik quyidagicha kiritiladi:

a) Agar $A\in R^1$ va Ωni uzunligi chekli bo'lsa, u holda

$$P(A)=\frac{A\ ni\ uzunligi}{\Omega\ ni\ uzunligi};$$

b) Agar $A\in R^2$ va Ωni yuzasi chekli bo'lsa, u holda

$$P(A)=\frac{A\ ni\ yuzasi}{\Omega\ ni\ yuzasi}.$$

c) Agar $A\in R^3$ va Ωni hajmi chekli bo'lsa, u holda

$$P(A)=\frac{A \text{ ni hajmi}}{\Omega \text{ ni hajmi}};$$

To'g'ri chiziqda, tekislikda va fazoda ehtimollik tushunchasini kiritishda albatta $P(\Omega)$ ehtimmollikni normallashtirib, birga tenglab olish darkor. Albatta, ehtimollikni geometrik ta'riflashda ham hodisani teng imkoniyatlilik shartidan foydalaniladi.

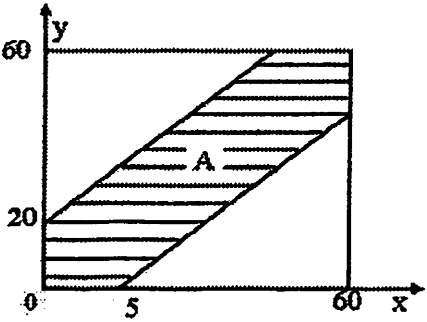
Masala. Yusuf bilan Zulayho soat 12^{00} dan 13^{00} orasida aniq bir joyda uchrashishga kelishib olishdi. Soat 12^{00} bilan 13^{00} orasidagi ixtiyoriy paytda Yusuf Zulayhoni 20 daqiqa kutadi Zulayho esa Yusufni 5 daqiqa kutadi. Soat 12^{00} bilan 13^{00} orasida ularning uchrashish ehtimolligini toping.

Yechish. Bu masalani yechish uchun ehtimollikni geometrik ta'rifidan foydalanamiz. Yusufni kelish vaqtini x bilan Zulayhoni kelish vaqtini y bilan belgilaymiz. U holda ixtiyoriy elementar 10 holat uchun xOy tekislikdagi (x,y) nuqtani mos qo'yamiz. Hisob boshi sifatida 12ga nolni mos qo'yamiz va o'lchov birligi sifatida 1 daqiqani qabul qilamiz hamda xOy tekislikda elementar holatlar fazosini qo'yamiz. Bizning masalamiz Ω elementar hodisalar fazosi tomonlari 60 ga teng kvadratdan iborat bo'ladi. Yusuf va Zulayho uchrashuvini A hodisa deb belgilasak, A hodisa ro'y berishi uchun y-x ayirma $t_1=20$ dan oshib ketmasa va x-y ayirma $t_2=5$ dan oshib ketmasa sodir bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases} y-x \le 20 \\ x-y \le 5 \end{cases}$$

6-rasmda A hodisa shtrixlab ko'rsatilgan yuzani bildiradi. Uning yuzasi S_Δ kvadrat yuzasidan ikkita uchburchak yuzalarini chiqarib tashlanganiga teng, ya'ni

$$S_\Delta=60^2-\frac{(60-t_1)^2}{2}-\frac{(60-t_2)^2}{2}=1287,5$$



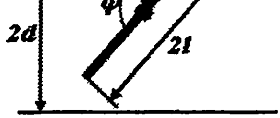
6-rasm. **Uchrashuv haqidagi masalaga oid**

Ehtimollikning geometrik ta'rifiga asosan

$$P(A)=\frac{S_\Delta}{S_\Omega}=\frac{1287,5}{3600}\approx 0,36.$$

2-masala. (Byuffon) Eni $2d$ ga teng bo'lgan taxtalardan qilingan polga uzunligi $2l$ ga teng bo'lgan igna tavakkal tashlandi ($l<d$) (7-rasm).

Ignaning pol taxtasiga tushish ehtimolligi qancha?



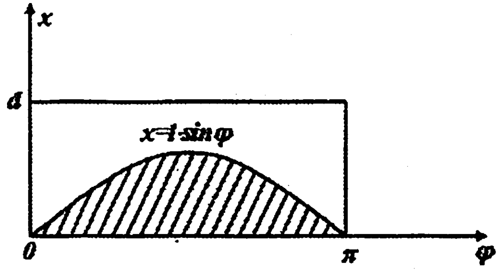
7-rasm. **Byuffon tajribasiga oid shakl**

Yechish. Bunda igna polning taxtasiga tushishi yoki aynan bitta taxtasiga tushishi mumkin. Faraz qilaylik x – igna markazidan taxtaning chegarasigacha bo'lgan masofa φ esa igna bilan taxta chegarasi orasidagi burchak. Igna bilan poldagi taxta chegarasi uchun $x \leq l \cdot \sin\varphi$ shartni bajarilishi zarur va yetarli (8-rasm). Izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan yuzani to'g'ri to'rtburchak yuzasi nisbatiga teng:

$$p = \frac{1}{d\pi}\int_0^{\pi} l \cdot \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{d\pi}.$$

Bu masalaning natijalari o'q otishlar nazariyasining ayrim masalalarini hal qilishda ishlatiladi.

Byuffon maslasidan $\pi = \frac{2l}{ap}$, formula kelib chiqadi. U holda juda ko'p n ta tajriba o'tkazilganda π ni taqribiy qiymati $\pi = \frac{2ln}{dm}$, bu yerda m – polni chegarasiga tushishlar soni. Tajriba yo'li bilan π ning qiymatini 1901-yilda Lassarini ***3408*** marotaba igna tashlab ***3.1415929*** aniqlikda hisoblagan. Quyidagi ayrim natijalarni keltiramiz.



8-rasm.

Eksperimentlar	yil	Ignani tashlashlar soni	π ni tajribadagi qiymatlari
Vol'f	1850	5000	3,1596
Smit	1855	3204	3,1553
Foks	1894	1120	3,1419
Lassarini	1901	3408	3,1415929

2.3. Ehtimollikning statistik ta'rifi

Sodda masalalardan murakkab tabiiy – ilmiy va texnikaviy xarakterdagi masalalarning ehtimolligini hisoblashda ehtimollikning klassik ta'rifidan foydalanib bo'lmaydi, chunki avvalambor "teng imkoniyatli hollarni" ajratib olish masalasi vujudga keladi. Masalan, ma'lum bir vaqt mobaynida radioaktiv moddaning yemirilish ehtimolligi yoki o'g'il bola tug'ilish ehtimolligini toppish teng ehtimollikli hodisalarga asoslanadi.

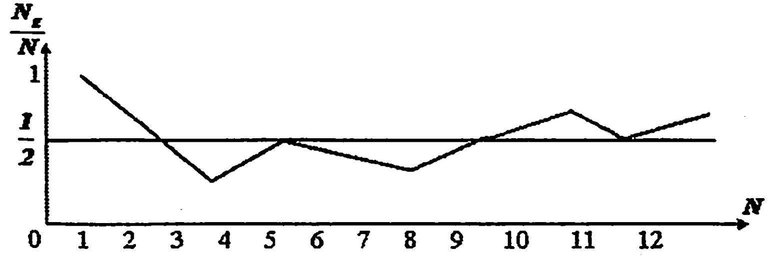
O'zgarmas shartlar kompleksida A hodisaning ro'y berishi yoki bermasligi ustida uzoq kuzatishlar o'tkazilganda, ko'pgina hodisalarning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi turg'unlik (barqarorlik) qonuniyatiga ega bo'ladi. Ya'ni A hodisaning n ta tajribada ro'y berishlar sonini ν deb olsak, u holda juda ko'p sondagi kuzatishlar seriyasi uchun $\frac{\nu}{n}$ nisbat deyarli o'zgarmas miqdor bo'lib qolaveradi. Chastotaning, ya'ni $\frac{\nu}{n}$ nisbatning turg'unlik xususiyatini, birinchi bor, demografik xarakterdagi hodisalarda ochildi. Bizning eramizdan *2238* yil burun, qadimiy Xitoyda o'g'il bolalar tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbat $\frac{22}{43}$ tenglik hisoblangan.

Laplas Londonda, Peterburgda va butun Fransiyada yig'ilgan juda ko'p statistik ma'lumotlarga tayanib, tug'ilgan o'g'il bolalar soni jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati, taxminan $\frac{22}{43}$ tenglikni ko'rsatdi. Hamda bu sonni bir necha o'n yillar mobaynida o'zgarmay qolishini statistik ma'lumotlar tasdiqladi.

Tanga tashlash misolini qaraylik. Bunda tajriba ikkita holatdan iborat: *G* – "*gerb*" yoki *R* – "*raqam*". Bu tajribada qanaqa holat ro'y berishini aytishimiz juda qiyin, chunki tangani qaysi tomoni bilan tushishiga ta'sir etuvchi hamma faktorlarni e'tiborga olishimiz mumkin emas. Xuddi shuningdek, bitta lotoreya bileti sotib olgan kishiga yutuq chiqishi yoki chiqmasligi ehtimolligi ham juda ko'p faktorlarga bog'liq. Bunday paytda alohida tajribalarni biror qonuniyatini ochish juda qiyin. Biroq tajribalar sonini ketma-ket oshirib borilsa juda qiziq hodisaning guvohi bo'lish mumkin.

Tangani N marta tashladik deb faraz qilaylik, birinchi N ta tajribada "*gerb*" tushishlar sonini N_g deb belgilaylik. Quyidagi shaklni yasaymiz: abssissa o'qiga o'tkazilgan tajribalar sonini, ordinatalar o'qiga esa $\frac{N_g}{N}$ nisbatni joylaymiz. N ning ortib borishi bilan $\left(N;\frac{N_g}{N}\right)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq $\frac{N_g}{N}=\frac{1}{2}$ chiziq bilan juda tez birlashib ketadi. Bu holni tekshirish maqsadida Byuffon tangani *4040* marta tashladi, shulardan *2048* marta ***gerb*** tushdi, chunonchi ***gerb*** tushish chastotasi $\frac{2048}{4040}$.

Pirson simmetrik tangani *24000* marta tashlaganda, shulardan *12012* tasi gerb tushdi, $\frac{n}{N}=0{,}5005$. Bu voqea umumiy xarakterga ega: bir xil sharoitda o'tkazilgan tajribalar ketma-ketligida biror u yoki bu holatni ro'y berish chastotasi biror $[0,1]\supset p=1/2$ - soniga yaqinlashib boradi (9-rasm).



9-rasm. **Chastotani ehtimollikka yaqinlashishiga oid**

Ehtimollikning klassik ta'rifi bo'yicha hisoblanadigan hodisalar uchun juda ko'p sondagi tajribalarda kuzatilayotgan hodisa chastotasi uning ehtimolligiga yaqin bo'lishligi, chastota tebranib turadigan o'zgarmas son mavjud deb hisoblashimizga imkon beradi. Kuzatilayotgan A hodisaning obyektiv sonli xarakteristikasi hisoblanadigan bu o'zgarmas miqdoriy chastotani A tasodifiy hodisaning ehtimolligi deb atashimiz tabiiy.

Shunday qilib, quyidagi shartlar bajarilganda:

1) O'zgarmas shartlar kompleksida bir-biriga bog'liq bo'lmagan chegaralanmagan sonda tajribalar o'tkazilganda, A hodisa ro'y berishi ham ro'y bermasligi ham mumkin bo'lsin;

2) Yetarlicha ko'p sondagi tajribalar natijasida A hodisaning chastotasi, ko'p tajribalar seriyasining har biri uchun biror o'zgarmas son, bu umuman olganda noma'lum son atrofida tebransin.

Ko'p sondagi tajribalar o'tkazilganda A hodisani ehtimolligi sifatida A hodisaning chastotasini, yo chastotaga yaqin bo'lgan sonni qabul qilishimiz mumkin. Shuning uchun ham aniqlangan tasodifiy hodisaning ehtimolligi ***statistik ehtimollik*** deb yuritiladi.

Chastota quyidagi xossalarga ega:

1) Muqarrar hodisaning chastotasi birga teng;

2) Ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisaning chastotasi nolga teng;

3) Agar B hodisa birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda uning chastotasi qo'shiluvchi hodisalar chastotalari yig'indisidan iborat bo'ladi.

Statistik ta'rifda quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilish tabiiy:

1) Muqarrar hodisa ehtimolligi birga teng;

2) Ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa ehtimolligi nolga teng;

3) Agar B hodisa birgalikda bo'lmagan chekli sondagi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda uning ehtimolligi qo'shiluvchilar ehtimolliklari yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Ehtimollikni statistik ta'rifi chastotasi turg'un hodisalarni real maxsusliklarini ochib berolmaydi.

Tabiiyki, tajribadagi biror holatning ehtimolligi sifatida

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{N_g}{N}$$

p sonni qabul qilsak bo'lmasmikan?

Mizes kiritmoqchi bo'lgan ehtimollikning bu ta'rifi juda noqulay. Chunki biror boshlang'ich holatning ro'y berishi $\left(\frac{N_g}{N}\right)$ chastotalar ketma-ketligi turli tajribalar o'tkazilganda turlicha bo'ladi. Bundan tashqari, amalda biz chastotalar ketma-ketligini emas, balki uning chekli elementlarini olgan bo'lamiz. Hamma tajribalar ketma-ketligini olib bo'lmaydi. Shu sababli ehtimolliklar nazariyasining aksiomalar asosida ko'rib chiqish keyingi paragrafda qoldirildi.

3 - §. Bernulli sxemasi

Faraz qilaylik, bosh to'plam deb ataladigan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementlar to'plami berilgan bo'lsin. Bosh to'plamdan olingan k hajmli tanlanma deb, tartiblangan $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ ketma-ketlikka aytiladi. Bu ketma-ketlik quyidagicha hosil qilinadi:

– birinchi x_{i_1} element bosh to'plamning barcha elementlari orasidan olinadi;

– keyingi x_{i_2} element bosh to'plamning x_{i_1} elementdan boshqa qolgan elementlari to'plamidan olinadi;

– keyingi x_{i_3} element esa bosh to'plamdan, x_{i_1} va x_{i_2} elementlar chiqarib tashlangandan so'ng qolgan elementlardan olinadi va hokazo.

Shunday hosil qilingan tanlanmaga takrorlanmaydigan tanlanma deyiladi. Bu holda $k \le n$ bo'lishi ravshan. k hajmli bunday tanlanmalar soni n elementdan k tadan tuzilgan o'rinlashtirishlar soniga teng bo'ladi:

$$(n)_k = A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$$

Takrorlanmaydigan har bir tanlanmadagi elementlarga p ehtimollikni mos qo'yamiz. Bunga tasodifiy tanlanma deyiladi.

Urnaga tashlab qo'yilgan (hajmi n ga teng bo'lgan) sharlarni ketma-ket olish, takrorlanmaydigan tanlanmaga misol bo'ladi. Olingan sharlar urnaga qaytarib solinmaydi.

Biroq tanlanma boshqacharoq usullarda ham hosil qilish mumkin. Urnadan tavakkaliga shar olinadi va eslab qolinadi. So'ngra u urnaga qaytarib tashlanadi va tavakkaliga yana shar olinadi hamda raqami eslab qolinadi, so'ngra yana urnaga qaytarib tashlanadi va hokazo. Bunday usulda hosil qilingan tanlanmaga takroriy tanlanma deyiladi.

Har bir tanlanmani $\frac{1}{n}$ ehtimollik bilan olinsa yana klassik sxema hosil bo'ladi.

Ikkita e_0, e_1 elementar hodisalardan iborat $E = \{e_0, e_1\}$ bosh to'plamdan hajmi m ga teng bo'lgan takroriy namuna olamiz. Hamma tanlanmalar soni 2^m bo'ladi. E

to'plamda manfiy bo'lmagan $p(p \in [0,1])$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar namunada k dona e_1 elementar hodisa ro'y bersa, u holda $p(e) = p^k(1-p)^{m-k}$.

$p(e)$ – ehtimollik bo'lishi uchun $P(E) = 1$ tenglikni isbotlashimiz kerak. Kombinatorikadan ma'lumki, k dona e_1 elementni m o'rniga C_m^k usul bilan joylashtirishimiz mumkin. Demak, k dona e_1 dan iborat tanlanma o'shancha bo'lar ekan. Endi E hodisani ehtimollikni hisoblashimiz mumkin:

$$P(E) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (1-P)^{m-k} p^k = [p + (1-p)]^m = 1$$

bu yerda o'rtadagi tenglik N'yuton binomi formulasidir.

Shunday qilib, m ta tajribada hodisani k marotaba ro'y berishi ehtimolligi:

$$P(m.k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}.$$

Bu munosabatga ***binomial taqsimot*** deyiladi. k soniga tajribalar ketma-ketligidagi muvaffaqiyatlar soni deyiladi. Endi k o'zgarganda $P(m,k)$ ehtimollik qanday o'zgarishini kuzatamiz. Quyidagi nisbatni olamiz:

$$R(m,k) = \frac{P(m,k)}{P(m,k-1)} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{m-k+1}{k} = \frac{p}{1-p}\left(\frac{m+1}{k} - 1\right).$$

Ravshanki, k o'sish bilan $R(m,k)$ monoton kamayadi, biroq - $\frac{k}{m+1} < p$ uchun $R(m,k) < 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $P(m,k)$ ehtimollik k o'sish bilan avval o'sadi, so'ngra barcha $k > p(m+1)$ qiymatlarda kamayadi.

Aytilganlarga ko'ra, Bernulli sxemasida muvaffaqiyatlar soni k dan oshib ketmasligi ehtimolligi

$$Q(m,k) = \sum_{k=0}^{m} P(m,k)$$

Ushbu $P(m,k)$ miqdorlar yordamida baholashimiz mumkin, ya'ni barcha $k < p(m+1)$ lar uchun:

$$Q(m,k) = P(m,k)\left(1 + \frac{1}{R(m,k)} + \frac{1}{R(m,k)R(m,k-1)} + \ldots\right) \le$$
$$\le P(m,k)\frac{R(m,k)}{R(m,k)-1} = P(m,k)\frac{(m+k-1)p}{(m+1)p-k}.$$

Shubha yo'qki, olingan baho k va m sonlari juda katta bo'lib, $\frac{k}{mp}$ nisbat 1-ga judayam yaqin bo'lmaganda juda aniq bo'ladi. Bu holda ushbu

$$1 + \frac{1}{R(m,k)} + \frac{1}{R(m,k)R(m,k-1)} + \ldots$$

yig'indi quyidagi geometrik progressiya

$$\sum_{i=0}^{\infty} R^{-i}(m,k) = \frac{R(m,k)}{R(m,k)-1}$$

yig'indisidan kam farq qiladi va quyidagi taqribiy tenglik o'rinli:

$$Q(m,k)=P(m,k)\frac{(m+1-k)p}{(m+1)p-k}.$$

Endi n elementni n_1 donasi birinchi tipli va $n_2=n-n_1$ donasi ikkinchi tipli bosh to'plamni qaraymiz. Takroriy bo'lmagan m hajmli tanlanma olamiz.

Teorema. Faraz qilaylik, n va n_1 lar cheksizlikka shunday intilsinki, $\frac{n_1}{n}\to p$ munosabat o'rinli bo'lsin, bu yerda $p\in[0,1]$ u holda gipergeometrik taqsimot uchun quyidagi munosabat o'rinli

$$P_{n,n_1}(m,m_1)\to P(m,m_1).$$

Isboti. $P_{n,n_1}(m,m_1)$ uchun chiqarilgan formulada kasrni surat va maxrajini n^2 ga bo'lamiz hamda $m_2=m-m_1$ almashtirish bajarib, quyidagini olamiz:

$$P_{n,n_1}(m,m_1)=\frac{m!(n-m)!}{n!}\cdot\frac{n_1!}{m_1!(n_1-m_1)!}\cdot\frac{n_2!}{m_2!(n_2-m_2)!}=$$

$$=\frac{m!}{m_1!m_2!}\cdot\frac{\frac{n_1}{n}\left(\frac{n_1}{n}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n_1}{n}-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n_1}{n}-\frac{m_1-1}{n}\right)}{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}\times$$

$$\times\frac{n_2}{n}\left(\frac{n_2}{n}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n_2}{n}-\frac{m_2-1}{n}\right).$$

U holda $n\to\infty$ da

$$P_{n,n_1}(m,m_1)\to C_m^{m_1}p^{m_1}(1-p)^{m_2}=P(m,m_1).$$

Yetarlicha katta n uchun, isbot qilgan teoremaga ko'ra $P_{n,n_1}(m,m_1)$ ehtimollik $P(m,m_1)$ga yaqin. Shuning uchun, Bernulli sxemasiga bosh to'plamdan taqrorlanmaydigan tanlanmalar deb qarashimiz mumkin.

1-masala. Faraz qilaylik n qutichalarga raqamlangan m dona sharcha tasodifiy ravishda joylashtirilgan.

Har bir sharchani ixtiyoriy n qutichalarga joylashtirish mumkin shuning uchun m sharchadan n yashikchalarga n^r sonda turlicha o'rinlashtirishlar tuzish mumkin. Sharchalarni yashikchalarga o'rinlashtirishni, n elementdan iborat bosh to'plamdan m hajmda olingan takroriy namunalar deb qarashimiz mumkin. k – yashikchaga roppa-rosa m_1 dona sharcha tushish ehtimolligini toping.

Qolgan $m-m_1$ sharcha, ya'ni k yashikchaga tushmay qolgan sharchalar qolgan $n-1$ yashikchalarga joylashadi. Bu $m-m_1$ sharchani $n-1$ ta yashikchalarga joylashish usullari $(n-1)^{m-m_1}$. k - yashikcha tushmagan $m-m_1$ sharchalarni $C_m^{m-m_1}$ usulda olishimiz mumkin. Shuning uchun qidirilayotgan ehtimollik

$$C_m^{m-m_1}\frac{(n-1)^{m-m_1}}{n^m}=C_m^{m-m_1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-m_1}$$

Bu ehtimollik $p=\frac{1}{n}$ bo'lganda Bernulli sxemasidagi $P(m,m_1)$ bilan ustma-ust tushadi.

2-masala. Aytaylik, o'zaro bog'liq bo'lmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lib, $P(A_i) = p_i$, $(i=\overline{1,n})$ bo'lsin. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalardan hech bo'maganda birini ro'y berishi ehtimolligi qancha?

Yechish. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalardan kamida birini ro'y berishidan iborat A hodisaning ehtimolligi quyidagiga teng:

$P(A) = 1 - q_1, q_2, \ldots q_n$

bu yerda: $q_i = P(\overline{A_i})$ $\quad i=\overline{1,n}$

Agarda, $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$ bo'lsa, u holda

$$P(A) = 1 - q^n.$$

4-§. Hodisalar yig'indisining ehtimolligi

Teorema. Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lsin, u holda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) + $$
$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Bu munosabatga Bul formulasi deyiladi.

Isboti. Biz A hodisani ehtimoli deb $P(A) = \sum_{\alpha \in A} P(\alpha)$ sonni olishimiz mumkin.

Agar α nuqta $\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy i uchun $\alpha \notin A_i$, chunki $P(\alpha)$ soni isbot qilmoqchi bo'lgan tenglikni chap tomonini qo'shiluvchisi bo'lmagani sababli, o'ng tomoniga ham qo'shiluvchi bo'la olmaydi.

Endi aytaylik $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, u holda hech bo'lmaganda bitta A_i hodisa mavjudki $\alpha \in A_i$, va shunday hodisalar soni m bo'lsin. Isbot qilayotgan tenglikni chap tomonida $P(\alpha)$ qo'shiluvchi ishtirok etadi. Bu $P(\alpha)$ qo'shiluvchi tenglikni o'ng tomonida necha marta ishtirok etilishini hisoblaymiz.

Birinchi yig'indida $P(\alpha)$ qo'shiluvchi m marta ishtirok etadi, ikkinchi yig'indida $A_i A_j$ $(i < j)$ ko'paytmada α hodisasi necha marta qatnashsa shuncha marta qatnashadi, ya'ni C_m^2 marta, uchinchisida $P(\alpha)$ qo'shiluvchi C_m^3 marta qatnashadi va hokazo. Endi $P(\alpha)$ qo'shiluvchi tenglikni o'ng tarafida necha marta ishtirok qilishligini hisoblashimiz mumkin.

$$m - C_m^2 + C_m^3 - \ldots + (-1)^{m-1} C_m^n = 1 - \left[1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^m C_m^m\right] = 1 - [1-1]^m = 1. \tag{1}$$

(1) ga o'xshash formulani hodisalarning ko'paytmasi uchun ham yozish mumkin:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i,j} P(A_i+A_j)+\sum_{i,j,k} P(A_i+A_j+A_k)+$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1+A_2+\cdots+A_n). \quad (2)$$

Natija 1. (Ehtimollik additivligi.) Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalarning har bir jufti o'zaro birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Natija 2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar berilgan bo'lsa, u holda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Endi yashikchalar haqidagi masalaga qaytaylik. Aytaylik. A hodisa eng kamida bitta quticha bo'sh qolishi hodisasi bo'lsin. Shu hodisa ehtimolligini topaylik. A hodisani $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ shaklda yozishimiz mumkin, bu yerda A_k – hamma m sharcha k chi qutichadan tashqari, n-1 qutichalarga joylashishi. Barcha $k \leq n$ uchun

$$P(A_k)=\frac{(n-1)^m}{n^m}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Hamma m sharchalarni k va e raqamlaridan tashqari, n-2 qutichalarga joylashishi $A_k A_e$ hodisasi bo'lsin, bu holda ixtiyoriy $k,e \leq n$ lar uchun

$$P(A_k A_e)=\frac{(n-2)^m}{n^m}=\left(1-\frac{2}{n}\right)^m.$$

Shunga o'xshash, ixtiyoriy $k,e,s \leq n$ lar uchun

$$\mathrm{P}(\mathrm{A_k A_e A_s})=\frac{(n-3)^m}{n^m}=\left(1-\frac{3}{n}\right)^m,$$

va hokazo. 2-teoremaga ko'ra A hodisani ehtimolligi

$$P(A)=n\left(n-\frac{1}{n}\right)^m-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^m+\cdots=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}C_n^j\left(1-\frac{j}{n}\right)^m.$$

O'rniga qo'yishlar haqidagi masalalar

Aytaylik, n ta element berilgan bo'lsin. Tavakkal qilib bu elementlarning o'rinlari almashtirib chiqildi (hammasi bo'lib $n!$ sonda). O'rin almashtirishlar teng ehtimolli. Hech bo'lmaganda bitta elementni o'z o'rnida qolishi ehtimolligi qancha?

Hamma o'rin almashtirishlar soni $n!$. Aytaylik, A_k hodisasi k – elementni o'z o'rnida qolishi bo'lsin. Bu hodisa $(n$-$1)!$ holatga ega, uning ehtimolligi esa

$$P(A_k)=\frac{(n-1)!}{n!}.$$

$A_k A_e$ hodisalari k – va e – elementlarni o'z o'rnida qolishi ehtimolligi

$$P(A_k A_e)=\frac{(n-2)!}{n!} \text{ va hokazo}$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n)=\frac{(n-(n-1))!}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ hodisa – hech bo'lmaganda bitta elementni o'z o'rnida qolishi hodisasidir. Shunday qilib, isbot qilgan formuladan foydalansak.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-$$

$$-\cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}=$$

$$=1-\left(1-1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Qavs ichidagi ifoda e^{-1} ning yoyilmasidagi $n+1$ ta haddan iborat. Shuning uchun, $n\to\infty$ bo'lganda:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\to 1-e^{-1}.$$

(1) va (2) – formulalarni matematik induksiya metodidan foydalanib ham isbotlash mumkin.

5-§. Ehtimolliklar nazariyasini aksiomatik asosda qurish

Geometriya, nazariy mexanika, abstrakt guruh va boshqa nazariyalar aksiomalar asosida qurilgan.

Ehtimolliklar nazariyasi matematik fan sifatida shakllanishi asrimizni o'ninchi yillariga to'g'ri keladi.

N.S. Bernshteyn 1917-yilda ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosda qurishga harakat qildi. Birinchi marta akademik A.N. Kolmogorov "Основание понятия теории вероятностей" kitobida metrik funksiyalar va to'plamlar nazariyasiga tayanib ehtimolliklar nazariyasini aksiomalar asosida qo'rib chiqdi.

Faraz qilaylik, elementar hodisalar fazosi Ω ixtiyoriy to'plamdan, $\mathfrak{F}$ esa Ω ni to'plam ostilari sistemasidan iborat bo'lsin.

1-ta'rif. Agarda:

A1. $\Omega\in\mathfrak{F}$,

A2. Agar $A\in\mathfrak{F}$ va $B\in\mathfrak{F}$ hamda $A\cup B\in\mathfrak{F}$, hamda $A\cap B\in\mathfrak{F}$ kelib chiqsa;

A3. $A\in\mathfrak{F}$, shartdan $\overline{A}\in\mathfrak{F}$ kelib chiqsa, u holda $\mathfrak{F}$ ga ***algebra*** deyiladi.

A2 shartdagi munosabatlardan birinigina bajarilishi kifoya, chunki ikkinchisi birinchisi va qolgan aksiomalardan kelib chiqadi.

2-ta'rif. Agarda F algebra bo'lsa va bundan tashqari 1-ta'rifdagi A2 shart o'rniga quyidagi shart bajarilsa:

A2. $A_i \in \mathcal{F}$, i = 1, 2, ... dan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ kelib chiqsa. U holda Ω fazoni qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathcal{F}$ tizim σ– algebra Bul algebrasi deyiladi.

Shunday qilib, algebra bu to'plamlarni shunday sinfiki, yig'indi, ko'paytma va to'ldirish amallariga nisbatan yopiqdir bu yerda yopiq degan so'z to'plamning har ikki elementi uchun qo'llanilgan amal natijasida hosil bo'lgan element yana shu to'plamga tegishliligini bildiradi.

Agar Ω to'plam va bu to'plam qism to'plamlaridan iborat σ algebra berilgan bo'lsa, u holda o'lchovli fazo berilgan deyiladi va $<\Omega, \mathcal{F}>$ kabi belgilashadi. Ω ga muqarrar hodisa deyiladi.

3- ta'rif. Agarda:

P1. Ixtiyoriy $A \in \Omega$ uchun $P(A) \geq 0$;

P2. $P(\Omega) = 1$;

P3. Agar $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligi shunday bo'lsaki, barcha $i \neq j$, $A_i A_j = \varnothing$ uchun $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ bajarilsa, u holda $<\Omega, \mathcal{F}>$ o'lchovli fazoni $\mathcal{F}$– sigma algebrasida aniqlangan ***P(·) sonli funksiyaga ehtimollik*** deyiladi.

P3 aksiomani unga nisbatan ekvivalent bo'lgan chekli additivlik va quyidagi uzluksizlik aksiomasi bilan almashtirish mumkin.

P3'. Faraz qilaylik $\{B_n\}$ hodisalar ketma-ketligi $B_{n+1} \subset B_n$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B$ bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da $P(B_n) \to P(B)$.

P3 va P3' shartlarni ekvivalentligini isbotlaymiz.

a) P3 shartdan P3' ni kelib chiqishligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham B_i, $(i = 1,2, \ldots)$ hodisalar shundayki $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ va ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \overline{B}_{k+1} + \bigcap_{k \geq n}^{\infty} B_k .$$

Bu yig'indidagi hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar, sababli P3 shartdan foydalanib,

$$P(B_1) = P\left(\bigcap_{k \geq 1}^{\infty} B_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} P\left(B_k \overline{B}_{k+1}\right).$$

qatorni yaqinlashishiga amin bo'lamiz. Biroq $P\left(\bigcap_{k \geq 1} B_k\right) = P(B) = 0$ bo'lgani uchun

$P(B_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(B_k \overline{B}_{k+1}\right) + P(B)$ yaqinlashuvchi qatorni qoldiq hadi bo'lgani sababli $n \to \infty$ da $P(Bn) \to P(B)$.

b) Aksincha P3' shartdan P3 shartni kelib chiqishligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik A_i $(i=1,2,\ldots)$ hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar hamda

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \qquad \text{va} \qquad B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k .$$

Ravshanki, $B_{n+1}\subset B_n$.

Uzluksizlik aksiomasiga ko'ra $n\to\infty$ da $P(B_n)\to P(B)$, chunki $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k+B_{n+1}$,

Bundan chekli additivlik xossasiga ko'ra

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)+P(B_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

$<\Omega,\ \mathcal{F},\ P>$ uchlikka ehtimolliklar fazosi deyiladi. Shunday qilib, ehtimolliklar fazosi bu o'lchovli fazoda berilgan musbat, sanoqli additiv o'lchovdan iborat bo'lib, Ω ni o'lchovi 1 ga teng.

A.N. Kolmogorovning aksiomalar sistemasi zid emas, ya'ni bu aksiomalardan ixtiyoriy biri boshqasini inkor etmaydi.

Agar Ω yagona ω elementdan iborat bo'lib, F esa Ω va $\varnothing$ to'plamdan tuzilgan bo'lsa, bunda $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$.

Shuningdek, P1-P3 aksiomalar sistemasi to'liq emas:

$\mathcal{F}$ to'plamda ehtimolliklar hatto Ω o'zida turli usullar bilan tanlab olish mumkin. Masalan, Ω ixtiyoriy chekli elementlar to'plamidan iborat bo'lsin:

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$ hamda yig'indisi

$P_1+\ldots+P_k=1$ bo'lgan musbat sonlarning ixtiyoriy to'plamini olamiz.

Ω algebra sifatida Ω dagi $\Omega_i=\{\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_k}\}$ uchun

$P(\Omega_i)=P_{i_1}+\ldots+P_{i_k}$ shartlarni qanoatlantiradigan Ω_i larning barcha qism to'plamlari majmuyini qabul qilamiz. Bu holda $P_1,\ldots,P_k$ larga $\omega_1,\ldots,\omega_k$ elementar hodisalarning ehtimolliklari deb yuritiladi.

Ehtimollikning xossalari.

1. $P(\varnothing)=0$ bu natija $\varnothing+\Omega=\Omega$ tenglikdan kelib chiqadi.
2. $P(\overline{A})=1-P(A)$, chunki $A+\overline{A}=\Omega$ va $A\cap\overline{A}=\varnothing$.
3. Agar $A\subset B$ bo'lsa, u holda $P(A)\le P(B)$, chunki $AB+\overline{A}B=B$ yoki $A+\overline{A}B=B$.
4. $P(A)\le 1$. Isboti 3-xossadan va P2 dan kelib chiqadi.
5. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, chunki $A\cup B=A+(B-AB)$.
6. $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$ isboti 5-xossadan kelib chiqadi.
7. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$, chunki $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_nA_n$ bu yerda $B_n=\Omega-\bigcup_{k=1}^{n}A_k$

va $A_n\cap B_n=\varnothing$, u holda $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_nA_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$

Masalalar:

1. Faraz qilaylik $\Omega=\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $N<\infty$ bo'lsin. Ω to'plamni barcha qism to'plamlaridan iborat $\mathcal{F}$ algebrani yozib chiqing.

2. Faraz qilaylik Ω, $\mathcal{F}$ xuddi 1-misoldagi kabi aniqlangan $P([a,b]) = b-a$ va $P\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\right)=\sum_{i=1}^{n}P([a_i,b_i])$, $\mathcal{F}$ da aniqlangan to'plamlar funksiyasi $P=P(\cdot)$ sanoqli additivligini isbotlang.

3. Induksiya metodidan foydalanib quyidagi Bul formulasi to'g'riligini isbotlang.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}^{n}P(A_iA_jA_k)+\dots+(-1)^n P(A_1\dots A_n)$$

4. Agar A_n monoton o'suvchi to'plamlar ketma-ketligi bo'lsa:

$A_n \subset A_{n+1}$ va $A=\cup A_n$,

u holda $P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ munosabatni o'rinliligini isbotlang.

6-§. σ – algebra va ehtimollikni davom ettirish haqida teorema

Agar $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ kamaymayadigan to'plamlar ketma-ketligi bo'lsa, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ va $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, u holda $A_n \uparrow A$ (yoki $A=\lim_n \uparrow A_n$) deb yozamiz.

Agar $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'smaydigan to'plamlar ketma-ketligi bo'lsa, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ va $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, u holda $A_n \downarrow A$ (yoki $A=\lim_n \downarrow A_n$) deb yozamiz.

1-ta'rif. Agar $M \ni A_n$ ($n=1,2, \dots$) va $A_n \uparrow A$ yoki $A_n \downarrow A$ shartlardan kelib $A \in M$ chiqsa, u holda Ω fazoning M to'plamlar sistemasiga ***monoton sinf*** deyiladi. Boshqacha aytganda monoton M sinf $\lim\uparrow$ va $\lim\downarrow$ amallariga nisbatan yopiqdir.

1-lemma. α algebra σ - algebra bo'lishi uchun uning monoton sinf bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Agar $\mathcal{X}$ algebra va shu bilan birga σ - algebra bo'lsa, u holda $\mathcal{X}$ monoton sinfligi ravshan.

Agar $A_i \in \mathcal{X}$ bo'lsa, barcha $I = 1,2, \dots$ uchun, u holda $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \in \mathcal{X}$ ko'rsatishimiz kerak. Biroq, $B_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \in \mathcal{X}$ va $B_n \subseteq B_{n+1}$ bo'ishligi ham ravshan. Monoton sinf ta'rifiga asosan,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\lim_n \uparrow B_n \in \mathcal{X}.$$

$\mathscr{K}$ algebrani o'z ichiga oluvchi $\mathscr{F}$, σ algebraga eng kichik σ algebra deyiladi hamda $\mathscr{F} = \sigma(M)$ kabi belgilanadi. Agar $\mathscr{K}$ algebra bo'lsa, u holda $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi hamma σ algebra mavjud. Masalan, Ω fazoni barcha qism to'plamlari sistemasi σ – algebrani tashkil qiladi. Endi $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi hamma σ – algebralarning ko'paytmalaridan iborat to'plamlar sistemasi $\mathscr{F}$ ni qaraymiz. Boshqacha aytganda, $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi $\mathscr{F}$ sistema shunday A to'plamlardan iboratki ularning har biri hamma yuqorida aytilgan σ – algebralarga tegishli bo'ladi. Bu sistema σ – algebraligini tekshirish qiyin emas. Bir paytda ikkita holni qaraymiz:

1) $\mathscr{F}$ bu σ – algebra
2) $\mathscr{F}$ eng kichik σ – algebra, ya'ni $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{K})$

Shunday qilib quyidagi lemma o'rinli:

2-lemma. Har bir $\mathscr{K}$ – algebra uchun o'z ichiga oluvchi eng kichik σ – algebra mavjud.

Agar $\mathscr{K}$ – algebra bo'lsa, u holda $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi eng kichik $M = \mu(\mathscr{K})$ algebraning monoton sinf bilan bog'lashimiz mumkin. Eng kichik monoton sinf mavjudligi, eng kichik σ – algebrani mavjudligi kabi isbotlanadi. Quyidagi teorema $\mathscr{K}$ – algebradan qanday qilib σ – algebra qurish mumkinligini ko'rsatadi.

Teorema. Faraz qilaylik $\mathscr{K}$ – algebra, u holda

$$\sigma(\mathscr{K}) = \mu(\mathscr{K}),$$

ya'ni $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi eng kichik σ – algebra bilan $\mathscr{K}$ ni o'z ichiga oluvchi eng kichik monoton sinf ustma-ust tushadi.

Isboti. 1-lemmadan

$$\mu(\mathscr{K}) \subseteq \sigma(\mathscr{K}). \tag{1}$$

Agar $\mu(\mathscr{K})$ ni σ – algebraligini ko'rsatsak, u holda

$$\mu(\mathscr{K}) \supseteq \sigma(\mathscr{K}). \tag{2}$$

bunda esa, (1) bilan birgalikda teoremaning isboti kelib chiqadi. Biroq $M = \mu(\mathscr{K})$ monoton sinf, u holda *1-lemmaga* ko'ra M ni algebraligini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik $M \ni A$. Biz $\overline{A} \in M$ ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun $\widetilde{M} = \{B : B \in M, \overline{B} \in M\}$ sistemani tashkil etadi.

Ravshanki,

$$\mathscr{K} \subseteq \widetilde{M} \subseteq M. \tag{3}$$

$\widetilde{M}$ sistema monoton sinf bo'ladi. Haqiqatdan ham, agar $B_n \subseteq \widetilde{M}$, $n = 1,2,\ldots$ u holda, demak, $B_n \in M$, $\overline{B}_n \in M$ hamda $\lim\uparrow B_n \in M$, $\lim\uparrow \overline{B}_n \in M$, $\lim\downarrow B_n \in M$, $\lim\downarrow \overline{B}_n \in M$. u holda

$$\overline{\lim\uparrow B_n} = \lim\downarrow \overline{B}_n \in M,$$

$$\overline{\lim \downarrow B_n} = \lim \uparrow \overline{B}_n \in M,$$
$$\overline{\lim \uparrow \overline{B}_n} = \lim \downarrow B_n \in M,$$
$$\overline{\lim \downarrow \overline{B}_n} = \lim \uparrow B_n \in M.$$

M – eng kichik monoton sinf bo'lgani uchun, u holda $\widetilde{M}=M$, demak, agar $A \in M = \mu(\mathfrak{A})$, u holda $\overline{A} \in M$.

Endi $M = \mu(\mathfrak{A})$ sistema (chekli) ko'paytirish amaliga nisbatan yopiqligini ko'rsatamiz.

Har bir $A \ni M$ uchun
$$M_a = \{B: B \in M, A \cap B\, M\} \tag{4}$$
to'plamni aniqlaymiz.
$$\lim_n \downarrow A \cap B_n = A \cap \lim \downarrow B_n,$$
$$\lim_n \uparrow A \cap B_n = A \cap \lim \uparrow B_n$$
ayniyatlardan M_a ni monoton sinfligi kelib chiqadi. Agar $A \in M$ va $B \in M$, u holda
$$(A \in M_B) \Leftrightarrow (B \in M_A). \tag{5}$$
teng kuchliligini ko'rsatish qiyin emas. So'ngra, agar $A \in \mathfrak{A}$, u holda ixtiyoriy $\mathfrak{A} \ni B$ uchun $A \cap B \in \mathfrak{A}$, (chunki $\mathfrak{A}$ – algebra) va demak, $\mathfrak{A} \subseteq M \subseteq M$. Biroq M_A – monoton sinf (chunki $\lim \uparrow AB_n = A\lim \uparrow B_n$ hamda $\lim \downarrow AB_n = A\lim \downarrow B_n$), M esa eng kichik monoton sinf bo'lgani sababli ixtiyoriy $\mathfrak{A} \ni A$ uchun $M_A = M$.

U holda (5)dan $A \in \mathfrak{A}$ va $B \in M$ uchun
$$(A^{\bullet} \in M_B) \Leftrightarrow (B \in M_A = M),$$
ya'ni, agar $A \in \mathfrak{A}$, u holda ixtiyoriy $M \ni B$ uchun $\mathfrak{A} \in A$ ixtiyoriy bo'lgani uchun, bundan $\mathfrak{A} \subseteq M_B \subseteq M$. bundan ixtiyoriy $M \ni B$ uchun $M_B = M$, ya'ni, agar $B \in M$ va C to'plam uchun $C \in M$, u holda, $C \cap B \in M$.

Teorema isbot bo'ldi.

Yuqoridagi ta'rifni esga olsak, har bir $\mathfrak{A}$ – algebra bilan uni o'z ichiga oluvchi $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$ eng kichik σ – algebrani bog'lashimiz mumkin. Faqat $\mathfrak{A}$ to'plamda aniqlangan p ehtimollikni $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$ to'plamga davom ettirish mumkin emasmikan? degan tabiiy savol tug'iladi. Bunga quyidagi teorema javob beradi.

Karatedori teoremasi. Faraz qilaylik $< \Omega, \mathfrak{A}, P >$ – ehtimolliklar fazosi bo'lsin. U holda $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$da aniqlangan P ni davom ettirishdan hosil qilinadigan yagona ehtimollik o'lchovi Q ehtimollik mavjud, ya'ni
$$Q(A)=P(A), \ A \in \alpha,$$

Bu teoremani isbotini keltirmaymiz, bu teoremaning isboti A.A. Borovkovning "Теория вероятностей" kitobida keltirilgan. Biz uchun muhimi o'lchovni davom ettirish mumkinligidadir. Shunday qilib, P o'lchov faqat $\mathfrak{A}$ dagina emas, balki $\mathfrak{F} = \sigma(\mathfrak{A})$ da ham berilgan deb hisoblashimiz mumkin. Shularga asosan, ehtimolliklar fazosi sifatida $< \Omega, \mathfrak{A}, P >$ emas, balki $< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ qabul qilingan, bu yerda $\mathfrak{F}$ eng kichik σ– algebra. P esa $\mathfrak{F}$da aniqlangan $P(\Omega) = 1$

normallashgan, sanoqli additiv o'lchov $B = \sigma(\mathfrak{A})$. Eng kichik $\sigma-$ algebraga ***Borel*** algebrasi yoki ***Borel*** to'plamlarining ***$\sigma-$ algebrasi*** deyiladi.

Izoh. $< \Omega, \mathcal{F} >$ juftlikka ***o'lchovli faza*** deyiladi, bu yerda $\Omega-$ biror fazo. $\mathcal{F}$ esa $\sigma-$ algebra.

O'lchovli fazolarga misollar

1-misol. Faraz qilaylik $\Omega = (-\infty; \infty)$ u holda $\mathfrak{A}$ algebra sifatida kesishmaydigan $[a,b]$ ko'rinishdagi intervallarning chekli yig'indilari sistemasi olinadi. Xuddi shuningdek, o'lchovli fazoda (X^n, B^n) aniqlanadi, bu yerda X^n n-o'lchovli Evklid fazosi, $B = \sigma(\mathfrak{A})$ esa ***Borel*** to'plamlarning σ algebrasi.

2-misol. Cheksiz $x = (x_1, x_2, \ldots)$ ketma-ketliklar X^∞ fazosi bo'lsin. Sonlar o'qining ixtiyoriy $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ***Borel*** to'plamlaridan tashkil topgan

$\{X: x_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \ldots x_n \in I_n\}$ – "silindr"lardan tashkil topgan eng kichik σ algebrani B^∞ deb belgilaymiz. Geometrik ehtimolliklarni umumlashtirib P ehtimollik intervallar usuli bilan berish bilan tanishib chiqamiz.

Aytaylik, $\Omega = R^1 = (-\infty; \infty)$ da $[a, b)$ ko'rinishda kesishmaydigan chekli intervallar yig'indisidan tuzilgan σ algebrani olamiz. Aytaylik, $f(x) \geq 0$ bo'lib, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ bo'lsin. Quyidagi integralni aniqlaymiz:

$$P([a,b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

Agar $A \in \mathfrak{A}$ to'plam $A = \sum_{i=1}^{n} f(x)dx$ ko'rinishda bo'lsa, u holda $P(A) = \int_A f(x)dx$ deb olamiz, bu yerda $\int_A f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx$.

Bunday aniqlangan P funksiya chekli additiv yoki sanoqli additiv bo'ladi. Shuning uchun $< R^1, \mathfrak{A}, P >$ uchlik ehtimolliklar fazosini aniqlaydi. Integral ostida ishtirok qiladigan $f(x)$ funksiyaga ***zichlik*** funksiya deyiladi, uning ma'nosi quyidagicha: $[x, x+\Delta x]$ oraliqqa tushish ehtimollik $P([x, x+\Delta x])$, $0(\Delta x)$ aniqlikda, $f(x)dx$ ga teng.

Xuddi shu singari $f(x,y) \geq 0, f(x,y,z) \geq 0, \ldots$ funksiyalar

$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$, $\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)dxdydz = 1, \ldots$ tenglikni qanoatlantirganda

$\int\int_A f(x,y)dxdy$, $\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz, \ldots$ integrallar yordamida $\Omega = R^2$, $\Omega = R^3$, ... fazolarda P ehtimollik kiritiladi.

7-§. Shartli ehtimolliklar. Hodisalarning, algebralarning, tajribalarning bog'liqmasligi

1. **Geometrik ehtimollik** nuqtayi nazaridan $P(A) = $ "A_{yuza}" deb faraz qilaylik.

Agar bizni A to'plamga "tushganligimiz" ma'lum bo'lib, B to'plamga "tushishimiz" hodisaning ehtimolligi bilan qiziqayotgan bo'lsak, tabiiyki bu ehtimollik A va B to'plamlarni umumiy qismining o'lchovidan iborat bo'ladi, ya'ni P(AB) ga proporsional bo'ladi. Bu tasavvur bizni yangi tushunchaga shartli ehtimollik tushunchasiga olib keladi.

1- ta'rif. Faraz qilaylik $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ehtimolliklar fazosi bo'lsin hamda $P(A)>0$, $A \in \mathfrak{F}$.

B hodisani A hodisa sharti ostidagi shartli ehtimolligi deb quyidagi $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ nisbatga aytiladi. Shartli ehtimollik $P(B/A)$ yoki $P_A(B)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Bu ta'rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. $P(B/A) \geq 0.$
2. $P(A/A) = 1.$
3. $P(B+C/A) = P(B/A) + P(C/A).$
4. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \big/ A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i \big/ A\right).$

Aytaylik, $B \in F$ bo'lsin. $\mathfrak{F}$ "σ - *algebra*"ning $B \cap A$ ko'rinishdagi to'plamlaridan tshkil topgan qism algebrasini $\mathfrak{F}_A$ deb belgilaymiz.

Musbat ehtimollikka ega bo'lgan ixtiyoriy A to'plam uchun 1-4 shartlarni qanoatlantiruvchi hodisalardan yangi ehtimolliklar fazosini quyidagicha quramiz.

$< A, \mathfrak{F}_A, P_A(\cdot) >$, bu yerda $P_A(\cdot) = P(\cdot)_A$

$\mathfrak{F}$da aniqlangan shartli ehtimollik.

Agar $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ yoki $P\left(A \big/ B\right) = P(A)$ o'rinli bo'lsa, A va B **hodisalar bog'liqmas** deyiladi hamda $A \perp B$ kabi belgilanadi.

5. Agar $A \perp B$ bo'lsa, u holda $\overline{A} \perp B$ bo'ladi.

Isboti. Haqiqatda ham

$$P(\overline{A}B)= P(B-BA)= P(B)-P(AB)= P(B)(1-P(A))= P(\overline{A})P(B).$$

6. Agar $A \perp B_1, A \perp B_2$ va $B_1B_2 = \varnothing$ bo'lsa, u holda $A \perp (B_1+B_2)$ bo'ladi.

Isboti.

$$P(A(B_1+B_2))= P(AB_1+AB_2)= P(AB_1)+P(AB_2)=$$
$$= P(A)(P(B_1)+P(B_2))+ P(A)P(B_1+B_2).$$

7. Agar A va B hodisalar birgalikda bo'lmasa (ya'ni $P(AB)=P(A)\ P(B)$), u holda A va B hodisalar bog'liq bo'lmaydi. Haqiqatdan ham:

$$P\left(A/_B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A).$$

Masala. Ikkita farzandli oilani qaraylik. Bunda:
(YY) – ikki farzandda ham o'g'il bo'lishi hodisasi;
(YK) – birinchisi o'g'il, ikkinchisi qiz bo'lishi hodisasi;
(KY) – birinchisi qiz, ikkinchisi o'g'il bo'lishi hodisasi;
(KK) – ikkalasi ham qiz bo'lishi hodisasi

$$P(YY)=P(YK)=P(KY)=P(KK)=\frac{1}{4}$$

deb hisoblaymiz, quyidagi shartli ehtimollarni topish talab etiladi:

P_1 – oilaning to'ng'ich farzandi o'g'il bo'lishi shartida oilaning ikkala farzandi ham o'g'il bo'lishi ehtimolligini;

P_2 – oilaning biror farzandi o'g'il bo'lishi shartida oilaning ikkala farzandi ham o'g'il bo'lishi hodisasining ehtimolligini toping.

Bu masalani yechish uchun quyidagi hodisalarni keltiramiz: A deb to'ng'ich farzandni o'g'il bo'lish hodisasi, B deb kenja farzandni o'g'il bo'lishi hodisasini belgilaymiz. U holda,

$$P_1=P\left(AB/_A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},$$

$$P_2=P\left(AB/_{A\cup B}\right)=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Bernshteyn misoli. Quyidagi tajribani kuzataylik. Tetraedrni bir yog'i sariq rangga, ikkinchi yog'i yashil rangga, uchinchi yog'i ko'k rangga, to'rtinchisi esa uchala rangga ham bo'yalgan. Agar tetraedrni tekislikka tashlasak quyidagi hodisalardan biri sodir bo'ladi: Yo S – sariq yog'i bilan tekislikka tushadi yoki K – ko'k, Ya - Yashil tarafi yoki S, K, Ya – uchala rangga bo'yalgan tarafi bilan tushishi mumkin. Uchala rangning har biri ikkita yoqda bo'lgani sababli $P(C)=P(K)\ =\ P(Ya)\ =\ \frac{1}{2}$ bo'ladi. Kiritilgan hodisalarning ixtiyoriy ikkitasini ko'paytmasining ehtimolligi $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, chunki ixtiyoriy ikkita rangli tarafi faqat bir tarafda. Bu esa hamma uchchala hodisaning har bir juftining o'zaro bog'liqmasligini ko'rsatadi. Ammo

$$P(SKYa)=\frac{1}{4}\neq P(S)P(K)P(Ya)=\frac{1}{8}.$$

3-ta'rif Agarda ixtiyoriy $A_1 \in \mathfrak{F}, A_2 \in \mathfrak{F}, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ to'plamlar uchun quyidagi shart bajarilsa:

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

bu yerda $k=\overline{1,n}$ va $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$ bajarilsa, $\mathfrak{F}_i$ algebralarni bog'liqmas deyiladi.

Ikkita G_1 va G_2 tajribalarni kuzatamiz hamda ularning ehtimolliklar fazosini mos ravishda $\{\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1\}$ va $\{\Omega_2, \mathfrak{F}_2, P_2\}$ kabi belgilaymiz. Ehtimolliklar fazosi $< \Omega, \mathfrak{F}, P >$ bo'lgan "asosiy" tajribani olamiz, bu yerda $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ dekart ko'paytmasidan iborat bo'lib, σ - algebra esa $B_1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$ bo'lsa $B = B_1 \times B_2$.

4 -ta'rif. Agarda ixtiyoriy $B = B_1 \times B_2$, $B_1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2 \in \mathfrak{F}_2$ lar uchun $P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2) = P(B_1 \times \Omega) \cdot P(\Omega_1 \times B_2)$ bajarilsa G_1 va G_2 tajribalar bog'liqmas deyiladi.

Bu ta'rifni n ta tajribalarning bog'liqmasligi uchun ham umumlashtirish mumkin.

8-§. To'la ehtimolliklar formulasi. Bayes formulasi

Faraz qilaylik, B hodisa n dona birgalikda bo'lmagan $A_1, A_2, \ldots A_n$ hodisalarning faqat biri bilangina ro'y berishi mumkin bo'lsin. Boshqacha qilib aytganda

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i ,$$

bu yerda, $(BA_i) \cap (BA_j) = \varnothing$, $i \neq j$.

Qo'shish teoremasiga ko'ra $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$.

Ko'paytirish teoremasini qo'llasak

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i\right).$$

Bu tenglikka ***to'la ehtimolliklar formulasi*** deyiladi.

1-masala. Beshta urna bor. A_1 hodisa tarkibli 2 ta urnada 2 tadan oq va bittadan qora shar bor. 1 ta urnada A_2 hodisa tarkibli 10 ta qora shar bor. A_3 hodisa tarkibli 2 ta urnada 3 tadan oq va bittadan qora shar bor. Tavakkal tanlangan urnadan tavakkal olingan sharni oq shar (B hodisa) bo'lishi ehtimolligini toping.

Yechish. Urnada olingan shar 1,2 yoki 3 tarkibli bo'lishligi mumkin, u holda $B = A_1B + A_2B + A_3B$. to'la ehtimolliklar formulasiga muvofiq

$$P(B) = P(A_1) P\left(B/A_1\right) + P(A_2) P\left(B/A_2\right) + P(A_3) P\left(B/A_3\right).$$

biroq

$$P(A_1) = \frac{2}{5},\ P(A_2) = \frac{1}{5},\ P(A_3) = \frac{2}{5}$$

$$P\left(B/A_1\right)=\frac{2}{3},\ P\left(B/A_2\right)=0,\ P\left(B/A_3\right)=\frac{3}{4}.$$

Shunday qilib:

$$P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{17}{30}.$$

2-masala. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan 300 tasi 1-korxonada tayyorlangan bo'lib, ularning 250 tasi yaroqli mahsulot; 40 tasi 2-korxonada tayyorlangan bo'lib, ularning 30 tasi yaroqli mahsulot hamda 3-korxonada tayyorlangan mahsulot 20 ta bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqli. Tavakkal olingan mahsulotning yaroqli bo'lishi ehtimolligini toping.

Yechish. Gipotezalar kiritish yo'li bilan ishlaymiz:

H_1 gipoteza – mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo'lishi;
H_2 gipoteza – mahsulotning 2-korxonada tayyorlangan bo'lishi;
H_3 gipoteza – mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo'lishi;
Ularning ehtimolliklari:

$$P(H_1)=\frac{5}{6};\ P(H_2)=\frac{1}{9};\ P(H_3)=\frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo'lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisalarning turli gipotezalardagi ehtimolliklari quyidagicha bo'ladi:

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{5}{6},\ P\left(A/H_2\right)=\frac{3}{4},\ P\left(A/H_3\right)=\frac{1}{2}.$$

To'la ehtimolliklar formulasiga ko'ra

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+$$

$$+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=\frac{29}{36}\approx 0{,}8050.$$

Endi biz Beyes formulasini keltirib chiqamiz:

$$P(A_iB)=P(B)\cdot P\left(A_i/B\right)=P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right).$$

Bundan $P\left(A_i/B\right)=\dfrac{P(A_i)P\left(B/A_i\right)}{P(B)}$;

endi to'la ehtimolliklar formulasini qo'llab,

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i)P\left(B/A_i\right)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P\left(B/A_k\right)}.$$

Beyes formulasini hosil qilamiz.

3-masala. Ikkita mergan nishonga bittadan o'q uzadi. Birinchi merganning o'qi nishonga 0,6 ehtimollik bilan tegadi. Ikkinchi merganniki esa 0,2 ehtimollik bilan tegadi. O‘q uzilgandan so‘ng nishonga bitta o‘q tekkanligi tekshirib ko‘riladi, bu o‘q birinchi merganniki bo‘lishi ehtimolligi qancha?

Yechish. Tajriba o‘tkazishdan oldin quyidagi gipotezalarni qo‘yamiz:

H_1 – birinchi merganni ham, ikkinchi merganni ham o‘qi nishonga tegmaydi;

H_2 – ikkala merganni o‘qi tegadi;

H_3 – birinchi merganni o‘qi tegadi, ikkinchi merganni o‘qi esa tegmaydi;

H_4 – birinchi merganni o‘qi tegmaydi, ikkinchisini o‘qi tegadi;

Bu gipotezalarning ehtimolliklari:

$$P(H_1) = 0,4\cdot 0,8 = 0,32$$
$$P(H_2) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12$$
$$P(H_3) = 0,6\cdot 0,8 = 0,48$$
$$P(H_1) = 0,4\cdot 0,2 = 0,08$$

kuzatilayotgan A hodisaning shartli ehtimolliklari quyidagiga teng:

$$P\left(A/_{H_1}\right) = 0,\ P\left(A/_{H_2}\right) = 0,\ P\left(A/_{H_3}\right) = 1,\ P\left(A/_{H_4}\right) = 1.$$

Tajribadan keyin H_1 va H_2 gipotezalar ro‘y bermaydi. H_3 va H_4 gipotezalarning ehtimolliklari quyidagicha:

$$P\left(H_3/_A\right) = \frac{0,48\cdot 1}{0,48\cdot 1 + 0,08\cdot 1} = \frac{6}{7};$$
$$P\left(H_4/_A\right) = \frac{0,08\cdot 1}{0,48\cdot 1 + 0,08\cdot 1} = \frac{1}{7}.$$

Demak, nishonga tekkan o‘q birinchi merganniki bo‘lishi ehtimolligi $\frac{6}{7}$ ekan.

2-ta'rif. Agarda $1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_2 < n,\ (r = \overline{2,n})$ larning har biri uchun

$P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{r} B_{i_k}\right) = \prod\limits_{k=1}^{r} P(B_k)$ bo‘lsa, u holda $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalar birgalikda bog‘liqmas deyiladi.

Hodisalarning o‘zaro bog‘liqmasligidan birgalik bog‘liqmasligi kelib chiqmaydi.

4-masala. Lampochka ikkita zavodda ishlab chiqiladi. Ikkinchi zavod mahsulotining hajmi birinchisinikidan k marta ko‘p. Birinchi zavodda tayyorlangan lampochkalarni P_1 qismi yaroqsiz, ikkinchi zavodniki P_2. Bir xil vaqtda ikkala zavod mahsuloti omborga keltiriladi va aralashtirib yuboriladi. Xarid qilingan lampochka ikkinchi zavod mahsuloti bo‘la turib, uni nuqsonli bo‘lishi ehtimolligini toping.

Yechish. Faraz qilaylik, B_1 – sotib olingan lampochka birinchi zavodning, B_2 esa – ikkinchi zavod mahsuloti bo‘lish hodisasi bo‘lsin. Ravshanki:

$$P(B_1) = \frac{1}{1+k},\ P(B_2) = \frac{k}{1+k}.$$

Bu songa B_1 va B_2 hodisalarni aprior ehtimolliklari deyiladi. A hodisa olingan mahsulotni yaroqsizligi bo‘lsin. Bizga quyidagi shartli ehtimolliklar berilgan bo‘lsin.

$$P\left(A/B_1\right) = P_1 \quad \text{va} \quad P\left(A/B_2\right) = P_2.$$

Bayes formulasidan foydalanib

$$P\left(B_2/A\right) = \frac{\frac{k}{1+k}P_2}{\frac{1}{1+k}P_1 + \frac{k}{1+k}P_2} = \frac{kP_2}{P_1 + kP_2}.$$

Shunga o'xshash

$$P\left(B_1/A\right) = \frac{P_1}{P_1 + kP_2},$$

$$P\left(B_1/A\right) \quad \text{va} \quad P\left(B_2/A\right)$$

ehtimolliklarga A hodisa ro'y bergandan keyingi B_1 va B_2 hodisalarni ***aposterior*** ehtimollik deyiladi.

I bobga doir masalalar

1. Hodisalar o'rtasidagi quyidagi munosabatlarni tekshirib ko'ring:

a) $(A+B)C = AC + BC$.

b) $\overline{\overline{A}+\overline{B}} = AB$.

c) $\overline{A+B} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$.

d) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.

e) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i}$.

g) $(A+B)\setminus B = A\setminus AB = A\overline{B}$.

2. Agar $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ bo'lsa, u holda

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \overline{B}$ va $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n \subseteq B$, munosabatlar o'rinlimi?

3. Agar uchta A_1, A_2, A_3 hodisalar $A_1A_2A_3 \subset A$ shartni qanoatlantirsa, u holda ushbu tengsizlikni isbotlang:

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2.$$

4. Tomonlari a ga teng kvadratlardan iborat cheksiz katakli shaxmat doskasiga radiusi r $(2r < a)$ bo'lgan tanga tashlanadi.

1) Tangani butunligicha birorta kvadratga tushish ehtimolligini toping;

2) Kvadratning ko'pi bilan bitta tomonini kesib o'tish ehtimolligini toping;

5. Aytaylik, α - algebra bo'lsin, $F = \sigma(\mathfrak{A})$ hamda α - algebradagi ehtimollik o'lchovi P bo'lsin. Krateodori teoremasiga ko'ra P o'lchov $\mathcal{F}$ dagi to'plamga yagona usulda davom ettirish mumkin. Ixtiyoriy $A \in \mathcal{F}\ \sigma(\mathfrak{A})$ va $\varepsilon > 0$ uchun

$\mathfrak{A}$ - algebradan shunday to'plam topiladiki, natijada $P(A \,\Delta\, B) \le \varepsilon$ ekanligini isbotlang.

6. Quyidagilarini isbotlang:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

7. Yosh bola $\boxed{Z}\,\boxed{S}\,\boxed{T}\,\boxed{U}\,\boxed{O}$ harfli kartalar bilan o'ynab o'tiribdi. Shu harflarni tasodifan bir qatorga qo'yganda "ustoz" so'zining yozilishi ehtimolligi qancha?

8. Uchta shashxoltosh tashlanadi. Agar uchchala shashxoltosh turli yoqlari bilan tushganligi ma'lum bo'lsa, ularning kamida bittasida bir ochko tushish ehtimolligi qanchaga teng?

9. Erkak va ayollar soni teng deb hamma erkaklardan 3 % hamda hamma ayollarning 0,21 % daltoniklar, tasodifan tanlangan shaxsning dal'tonik bo'lishi va unung erkak kishi bo'lish ehtimolligini toping.

10. Aytaylik, A va B hodislar birgalikda bo'lmasa, $P(A) > 0$ va $P(B) > 0$, u holda A va B hodisalar bog'liq bo'lishini isbotlang.

11. Agar bolalar bog'chasida 35 ta o'zbek alfavitidagi bosh harflar qartalarning har biriga yozilgan bo'lib, bir bola ulardan 10 tasini tavakkal olib bir qatorga terganda "matematika" so'zining yozilishi ehtimolligi qanchaga teng?

II bob. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAQSIMOT FUNKSIYALAR

1-§. Sodda tasodifiy miqdorlar

Aytaylik, $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ - ixtiyoriy ehtimolliklar fazosidan iborat bo'lsin.

1-ta'rif. Diskret elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega\}$ da aniqlangan ixtiyoriy haqiqiy $\xi = \xi(\omega)$ funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Bundan keyin tasodifiy miqdorlarni grek harflari bilan ular qabul qiladigan qiymatlarini esa kichik lotin harflari bilan belgilaymiz.

Misol:

a) Bitta tanga tashlaganimizda Ω ikkita elementar hodisalardan iborat: ***gerb*** va ***raqam***. Agar tangani gerbli tomoniga 0 ni, raqamli tomoniga 1 ni mos keltirsak, u holda tasodifiy miqdorni hosil qilamiz.

b) Agar ikkita tanga tashlasak ω elementar hodisalar ***GG***; ***GR***; ***RG***; ***RR***; iborat bo'lib, $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor esa quyidagi jadval bilan berish mumkin:

ω	*RR*	*GR*	*RG*	*GG*
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

Bu misolda tasodifiy miqdor "gerb" tushishlari sonidan iborat. Shuningdek, kubik tashlaganimizda uning ochkolar soni tasodifiy miqdorga misol bo'la oladi.

Doiraga tavakkal tashlangan nuqta koordinatasidan doira markazigacha bo'lgan masofa tasodifiy miqdorga misol bo'ladi, chunki $\{(x,y): x^2+y^2 = 1\}$ to'plam o'lchovli. $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorni qiymatlari to'plamini X orqali belgilaymiz.

2-ta'rif. Aytaylik, $x \in X$ bo'lsin, ξ tasodifiy miqdorning x ni qabul qilish ehtimolligi deb $P_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) = x\}$ songa aytiladi.

3-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning taqsimoti deb $P_\xi = \{P_\xi(x_1), P_\xi(x_2), \dots\}$ sonlar komplektiga aytiladi.

Ravshanki, $P_\xi(x_1) \geq 0$ va $\sum_i P_\xi(x_i) = 1$.

Tasodifiy miqdor tushunchasi tasodifiy hodisa tushunchasiga nisbatan umumiyroq tushunchadir. Har bir A hodisaga, agar A hodisa ro'y bersa 1 va ro'y bermasa 0 ni mos keltiruvchi I_A funksiyaga A hodisaning ***indikatori*** deyiladi.

Tasodifiy A hodisaning indikatori ham, tasodifiy miqdorga misol bo'ladi. Quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$MI_A = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\overline{A}) = P(A),$$

bu yerda MI_A deb A hodisaning indikatorining o'rtacha qiymatini belgiladik.

Agar $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots$ qiymatlarni qabul qilsa; u holda quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\xi(\omega) = \sum_i x_i I_{A_i}(\omega),$$

bu yerda $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$, $I_{A_i}(\omega)$ esa A_i to'plamning indikatori.

Misol.

Agar E va F hodisalarning indikatori I_E va I_F bo'lsa, u holda $1\text{-}I_E$, $I_E{\cdot}I_F$, $I_E + I_F - I_E{\cdot}I_F$ indikatorlarga ega bo'lgan hodisalar qanday bo'ladi?

Yechish. Ta'rifga muvofiq

$$1 - I_E(x) = \begin{cases} 1, & agarda \quad x \notin E, \quad u\ holda\ x \in \overline{E} \\ 0, & agarda \quad x \in E, \quad u\ holda\ x \notin \overline{E}. \end{cases}$$

Natijada $1\text{-}I_E$ indikatori $\overline{E}$ hodisaga mos kelishini ko'rsatadi.

Endi quyidagini yoza olamiz:

$$I_{EF} = I_E{\cdot}I_F(x) = \begin{cases} 1, & agarda \quad x \in E \cap F \\ 0, & agarda \quad x \overline{\in} E \cap F \end{cases}$$

bundan esa, $E \cap F$ ko'paytmaning indikatori $I_E I_F$ dan iboratligini ko'rsatadi. Hamda,

$$\psi(x) = I_E(x) + I_F(x) - I_E(x) \cdot I_F(x) = I_E(x) + I_F(x)[1 - I_E(x)] =$$
$$= I_F(x) + I_E(x)[1 - I_F(x)].$$

Agarda I_E indikator 1 ni qabul qilsa, ψ ham 1 ni qabul qiladi; xuddi shuningdek, agarda I_F indikator 1 ni qabul qilsa, ψ ham 1 ni qabul qiladi.

Mabodo, I_E va I_F lar nolga teng bo'lsa, $\psi(x)$ ham nolni qabul qiladi.

Shunday qilib,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & agar \quad x \notin E \quad hamda \quad x \notin F, \\ 1, & agar \quad x \in E \quad yoki \quad x \in F. \end{cases}$$

Demak, $\psi(x)$ indikator $E \cup F$ yig'indini xarakterlaydi.

4-ta'rif. Faraz qilaylik $<\Omega, \mathcal{F}>$ o'lchovli fazo bo'lsin. Quyidagi ko'rinishda ifodalangan

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega), \ A_i \in F, \ \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega.$$

Haqiqiy $\xi(\omega)$ funksiyaga sodda (elementar yoki pog'onasimon) tasodifiy miqdor deyiladi.

1-misol. Bernulli tasodifiy miqdori ikkita 1 va 0 qiymatlarni, mos ravishda, p va q ehtimollik bilan qabul qiladi:

$$\xi = \begin{cases} 1, & P_\xi(1) = p \\ 0, & P_\xi(0) = q \quad p + q = 1. \end{cases}$$

2-misol. Binomial ξ tasodifiy miqdor $(n+1)$ *ta* $0,1,2, \ldots, n$ qiymatlardan har birini $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu formulaga ***Bernulli formulasi***, ba'zi adabiyotlarda ***binomial taqsimoti*** ham deyiladi. Chunki,

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = (p+q)^n \left[p + (1-p)\right]^n = 1.$$

Shunday qilib, bir-biriga bog'liq bo'lmagan n ta tajribaning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p(0<p<1)ga teng bo'lsa, u holda A hodisani n ta tajribada ropa-rosa k marotaba ro'y berish ehtimolligi

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

formula bilan topiladi, bu yerda $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

A hodisani

a) k dan kam marta;

b) k dan ko'p marta;

c) kamidan k marta;

d) ko'pi bilan k marta ro'y berish ehtimolligi ushbu formulalar bilan topiladi:

a) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k-1)$;

b) $P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n(n)$;

c) $P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n)$;

d) $P_n(c)+P_n(1)+...+P_n(k)$

Misol: Tangani 4 marta tashlanganda 2 marta gerb tushish ehtimolligi ko'proqmi, yoki tangani 6 marta tashlaganda 3 marta gerb tushish ehtimolligimi?

Yechish. Gerb tushish ehtimolligi $p=\frac{1}{2}$ ga teng. To'rt tairibadan ikkitasida gerb tushish ehtimolligi

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Oltita tajribadan uchtasida gerb tushish ejtimolligi

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

Dema, $P_4(2)>P_6(3)$ bo'lganligi uchun oltita tajribadan 3 tasida gerb tushish ehtimolligi to'rt tajribadan ikkitasida gerb tushish ehtimolligidan kattaroq ekan.

3-misol. Puasson tasodifiy miqdori ξ esa $0,1,2,\ldots$ qiymatlardan birini $P\{\xi = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$ ehtimollik bilan qabul qiladi.

Tasodifiy miqdorni umumiyroq kiritishimiz mumkin:

5-ta'rif. Ω elementar hodisalar fazosini R' haqiqiy sonlar to'plamiga akslantiruvchi $\xi(\omega)$ o'lchovli funksiyaga ***tasodifiy miqdor*** deyiladi, ya'ni bu funksiya uchun $\{\omega\colon \xi(\omega)\in B\} = \xi^{-1}(B)$ ixtiyoriy Borel $B \subset R$ to'plami $\mathcal{F}$ dagi σ- algebradan iborat to'plam bo'ladi.

Tasodifiy miqdor ta'rifiga ko'ra to'g'ri chiziqdagi σ - algebrali Borel to'plamidagi ixtiyoriy B to'plam uchun

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega\colon \xi(\omega)\in B\} \in \mathcal{F}$$

Izoh. Agarda $\Omega = X$, $\mathcal{F} = B$ bo'lgan holda $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorga Borel funksiyalari yoki B – o'lchovli Borel bo'iycha o'lchovli deyiladi.

$\mathcal{B} \ni B$ to'plamning asli $\xi^{-1}(B) = \{\omega\colon \xi(\omega)\in B\}$.

Aslini olish amali ushbu nazariy-to'plamiy xossalarni eslab o'tish foydalidir:

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right)=\bigcup_{\alpha}\xi^{-1}(B_{\alpha}). \tag{1}$$

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right)=\bigcup_{\alpha}\xi^{-1}(B_{\alpha}). \tag{2}$$

$$\xi^{-1}(\overline{B})=\overline{\xi^{-1}(B)}. \tag{3}$$

1-teorema. Aytaylik, S to'plamlarning qandaydir sistemasi bo'lib, $\sigma(S)=\mathcal{B}$ xossaga ega bo'lsin. U holda $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor bo'lishi uchun barcha $s\in S$ lar uchun $\{\omega:\ \xi(\omega)\in S\}\in\mathcal{F}$ ning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. Bir tomondan isboti ravshan, ikkinchi tomondan

$$\{\omega:\ \xi(\omega)\in k\}\in\mathcal{F}$$

shart bajariladigan K to'plamlar sistemasi $\mathcal{K}$ bo'lib, $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{B}$ bo'lsin. (1) – (3) lardan $\mathcal{K}$ni σ- algebraligi kelib chiqadi. Demak

$$S\subseteq\mathcal{K}\subseteq\mathcal{B}$$

Biroq $\sigma(S)=\mathcal{B}$. shuning uchun $\mathcal{K}=\mathcal{B}$.

Natija. $\xi=\xi(\omega)$ ni tasodifi miqdor bo'lishi uchun barcha $]-\infty,\infty[\ \ni x$ lar uchun

$$\{\omega:\ \xi(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$$

yoki

$$\{\omega:\ \xi(\omega)\le x\}\in\mathcal{F}$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu natijadan, agar $(\xi<x)$ – tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda quyidagilarning yana tasodifiy miqdorligi kelib chiqadi:

$$(\xi<x)=\left(\overline{\xi>x}\right)\ \in\mathcal{F},$$

$$(x_1\le\xi<x_2)=(\xi<x_2)\setminus(\xi<x_1)\ \in\mathcal{F},$$

$$(\xi=x)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(x\le\xi<x+\frac{1}{k}\right)\in\mathcal{F}.$$

2-teorema. Aytaylik, $\eta=\eta(x)$ Borel funksiyasi, $\xi=\xi(\omega)$ esa tasodifiy miqdor. U holda

$$\xi(\omega)=\eta(\xi(\omega))$$

(murakkab) funksiya tasodifiy miqdor hisoblanadi. Haqiqatdan ham, agar $A\in B$ bo'lsa, u holda

$$\{\omega:\ \xi(\omega)\in A\}=\{\omega:\ \eta(\xi(\omega))\in A\}=\{\omega:\ \xi(\omega)\in\eta^{-1}(A)\}\in\mathcal{F}$$

chunki $\eta^{-1}(A)$ – Borel to'plami. Shunday qilib, 2-teoremadan quyidagi ifodalarning

$$\xi=\xi^2;\ \xi=|\xi|;\ \xi\equiv c=const,$$

$$\xi=\xi^{+}=\begin{cases}\xi, & agar\quad \xi\ge 0,\\ 0, & agar\quad \xi<0;\end{cases}$$

$$\xi=\xi^{-1}=\begin{cases}0, & agar\quad \xi\ge 0,\\ -\xi, & agar\quad \xi<0;\end{cases}$$

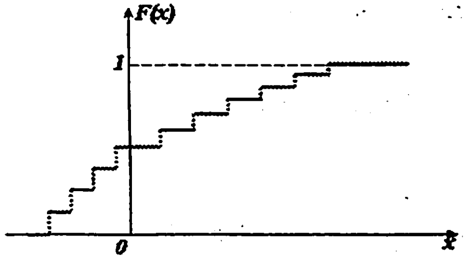
tasodifiy miqdorligi kelib chiqadi. Bundan keyingi paragraflarda tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi tushunchasini kiritamiz va tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi bilan bir qiymatli aniqlanishini ko'ramiz hamda tasodifiy miqdorlarni diskret, uzluksiz, sinflarga ajratib o'rganamiz.

2-§. Taqsimot funksiyalar va ularning xossalari

1-ta'rif. $x \in R^1$ bo'lsin $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi. Taqsimot funksiyani $F_\xi(x)$ yoki $F(x)$, $G(x)$, $\Phi(x)$, $A(x)$, $B(x)$, ... kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli qiymatlarni qabul qilsa, diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Agar tasodifiy miqdor diskret taqsimlangan bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = \sum_{\{i: x_i < x\}} P_\xi(x_i) \text{ va } P_\xi(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}),$$ bu yerda $F_\xi(x_0) = 0$.



10-rasm. **Diskret taqsimot funksiyasi**

Avvalgi paragrifda ko'rib o'tilgan Bernulli, binomial, geometrik, Puasson tasodifiy miqdorlari diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misol bo'ladi.

1-misol. Binomial taqsimot funksiya quyidagicha kiritiladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{agarda} \quad x < 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, & 0 \le x \le n, \\ 1, & \textit{agarda} \quad x > n. \end{cases}$$

2-misol. Puasson taqsimot funksiyasi esa barcha $x > 0$ uchun ushbu ko'rinishda aniqlanadi:

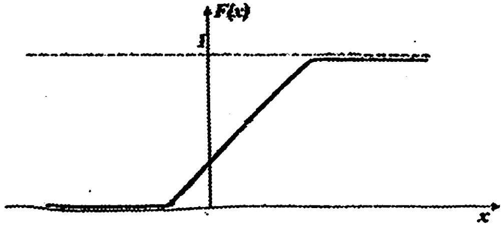
$$F(x) = \sum_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

va $x \le 0$ *da* $F(x) = 0$.

Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning hosilasi, $F(x)$ funksiyasi uziladigan, chekli yoki sanoqli x_1, x_2, x_3, ... nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda, nolga teng. Bu esa ξ tasodifiy miqdor x_1, x_2, x_3, ... qiymatlarni musbat ehtimollik bilan qabul qilishligini bildiradi:

$F(\xi = x_k) = F(x_k + 0) - F(x_k)$.

Bu tenglikdan, faqat va faqat $F(x)$ funksiya X nuqtada uzluksiz bo'lsagina $P(\xi = x) = 0$ kelib chiqadi.



11-rasm. **Uzluksiz taqsimot funksiyasini shakli**

3-ta'rif. Agar $P_\xi(B)$ ehtimollik ixtiyoriy Borel to'plami uchun quyidagicha aniqlangan bo'lsa:

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B f(x)dx,$$

bu yerda: $f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad (1)$$

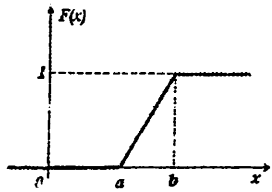
u holda ξ tasodifiy miqdor mutlaq uzluksiz taqsimlangan deyiladi.

(1) shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyaga zichlik funksiya deyiladi.

3-misol. Aytaylik, haqiqiy sonlar o'qining $[a, b]$ oralig'iga tavakkal qilib nuqta tanlaymiz, ya'ni nuqtani $[a, b]$ oraliqdagi biror to'plamga tushish ehtimolligi bu to'plamning Lebeg o'lchoviga proporsional deb qaraymiz. Ω elementar hodisalar fazosi $[a, b]$ kesmadan iborat bo'lib, F – "σ - algebra" esa $[a, b]$ dagi Borel qism to'plamlaridan. Tasodifiy miqdor ξ ni quyidagicha aniqlaymiz:

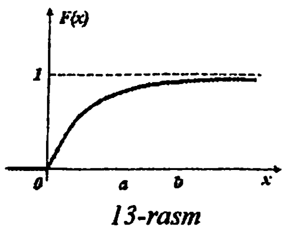
$$\xi(\omega) = \omega, \quad \omega \in [a, b],$$

ya'ni ξ tasodifiy miqdor $[a, b]$ ga tushgan nuqtadan iborat. Bu o'lchovli funksiya. Agar $x < a$ bo'lsa, u holda $F(x) = 0$. Aytaylik, $x \in [a, b]$. u holda $\{\xi < x\}$ hodisa nuqtaning $[a, x]$ intervalga tushganligini bildiradi. Tavakkal tashlangan nuqtaning bu intervalga tushishi ehtimoli bu intervalning uzunligiga proporsional, demak



12-rasm

$$F(x) = \begin{cases} 0, & agarda \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & agarda \quad a \leq x \leq b, \\ 1, & agarda \quad x > b. \end{cases}$$



13-rasm

Bu funksiya $[a, x]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini aniqlaydi (12-rasm).

4-misol. λ parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha kiritiladi.

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\lambda>0.\end{cases}$$

Eksponensial funksiyani taqsimot funksiyasi 13-rasmda keltirilgan.

5-misol. a va σ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

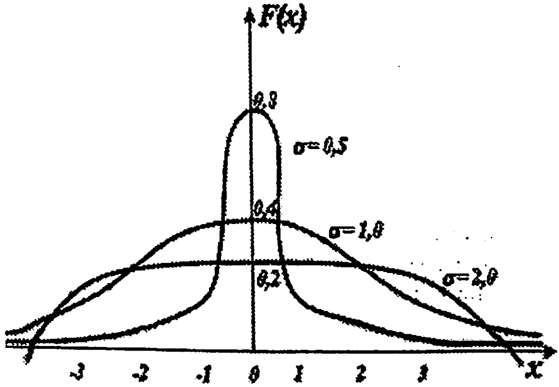
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz,$$

bu yerda $\sigma>0$, a – o'zgarmas miqdorlar. Bu ifodadagi a va $\sigma>0$ parametrlarning nazariy – ehtimollik ma'nosini keyingi boblarning birida tushuntiramiz. Agar $a=0$ va $\sigma=1$ bo'lsa, u holda normal taqsimot funksiya standart deyiladi va N(0;1) deb belgilaymiz.

6-misol. Koshi taqsimot funksiyasi quyidagicha kiritiladi:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Keltirilgan 3,4,5,6 – misollar uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misol bo'la oladi. Yuqoridagi mutlaq taqsimot funksiya tarifidan barcha $x\in R^1$ lar uchun.



14-rasm. **Normal qonunni zichlik funksiyasi**

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$$

munosabat o'rinligi kelib chiqadi.

Masalan (a, σ) parametrli normal qonun uchun

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Yuqoridagi har ikkala tipga ham kirmaydigan singulyar tipdagi taqsimot funksiyalar ham mavjud. Bu tip shunisi bilan xarakterliki $F(x)$ taqsimot funksiya uzluksiz, biroq o'sish nuqtalari to'plamini o'lchovi Lebeg ma'nosida nolga teng (agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun deyarli barcha $F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$ tengsizlik bajariladigan x nuqtalar ***o'sish nuqtasi*** deyiladi).

Demak, bu yerda $F(x)$ uzluksiz, deyarli barcha nuqtalarda $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ hamda $F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

Bunday singulyar taqsimot funksiyaga mashhur *"**Kantor zinapoyalari**"* misol bo'la oladi. $F(x)$ funksiyani hamma o'zgarishlari $[0;\ 1]$da ro'y beradi: agar $x \le 0$ bo'lsa $F(x) = 0$ shuningdek, barcha $x \ge 1$ larda $F(x)=1$. Kantor taqsimot funksiyasi $[0,\ 1]$ da quyidagicha ko'riladi. $[0,\ 1]$ kesmani uchga teng qismga bo'lamiz:

$$\left[0,\ \frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3},\ 1\right].$$

$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ kesmada $F(x) = \frac{1}{2}$ deb olamiz. Qolgan ikkita segmentning yana uchta qismchalarga bo'lamiz. Hamda taqsimot funksiyani $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ segmentda $F(x) = \frac{1}{4}$. Taqsimot funksiya $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ oraliqda $F(x) = \frac{3}{4}$ deb olamiz va hokazo. Bunday ichki segmentlarga qarashli bo'lmagan nuqtalarda $F(x)$ o'zgarmas bo'lmagan bunday *"**ichki**"* segmentlar uzunliklari yig'indisi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Demak, $F(x)$ funksiya nol bilan o'lchovli to'plamda sakramay o'sar ekan. Ixtiyoriy taqsimot funksiyani yagona usulda diskret, mutlaqo uzluksiz va singulyar komponentalar yig'indisi shaklida yozish mumkinligi haqida Lebeg teoremasiga ko'ra, ixtiyoriy taqsimot funksiya, oshib borsa sanoqli nuqtada uzilishga ega. Haqiqatdan ham, hamma sakrashlarni quyidagi tartibda raqamlab chiqaylik: avvalo $\frac{1}{2}$dan katta sakrashlar, keyin $\frac{1}{3}$ dan katta sakrashlar, so'ngra $\frac{1}{4}$ dan katta sakrashlar va hokazo. Bundan F(x) funksiya sanoqli yoki chekli nuqtalar to'plamidan tashqari barcha nuqtalarda uzluksiz.

1-teorema (Lebeg). Ixtiyoriy F(x) taqsimot funksiyani uch xil taqsimot funksiyalar yig'indisi shaklida bir qiymatli yozishimiz mumkin:

$$F(x) = F^d(x) + F^c(x) + F^s(x)$$

bu yerda: $F^d(x)$ – diskret komponenta, ya'ni

$$F^d(x) = \sum_{(i:x_i<x)} P(x_i),\ P(xi) \ge 0,\ \sum_i P(x_i) \le 1;$$

$F^c(x)$ – mutlaq uzluksiz komponenta, ya'ni

$$F^c(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,\ f(y) \ge 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1;$$

$F^s(x)$ singulyar komponenta.

1-teoremani isboti M. Loevning "Теория вероятностей" (1962) kitobida keltirilgan.

Ixtiyoriy $\xi = \xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_\xi(x)$ quyidagi xossalarga ega:

F1. Monotonlik xossasi: agar $x_1 \le x_2$ bo'lsa, u holda

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

F2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ va $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

F3. Chapdan uzluksizlik xossasi: $\lim\limits_{x\uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$

Isboti. Aytaylik, $x_1 \le x_2$, u holda $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\}$

$$P\{\xi \le x_1\} \le P\{\xi \le x_2\}$$

F1 xossa darhol ehtimollikning xossasidan kelib chiqadi.

F2 xossani isbotlash uchun ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonli ketma-ketliklarni olamiz, bulardan $\{x_n\}$ ketma-ketlik shunday kamayadiki, natijada $x_n \to -\infty$, ikkinchi y_n ketma-ketlik esa o'sadi, $y_n \to \infty$. Belgilash kiritaylik

$$A_n = \{\xi < x_n\} \quad B_n = \{\xi < y_n\}$$

$\{x_n\}$ ketma-ketlik minus cheksizlikka monoton intilishidan A_n to'plamlar ketma-ketligining kamayishi, hamda $\cap A_n = \varnothing$ kelib chiqadi. P3' uzluksizlik aksiomasiga binoan $n \to \infty$ da $P(A_n) \to 0$ kelib chiqadi yoki $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$. Bundan va $F(x)$ ni monotonlik xususiyatiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$ kelib chiqadi. $\{y_n\}$ ketma-ketlik cheksizlikka intilganligidan B_n to'plamlar ketma-ketligi o'sadi va $\cup B_n = \Omega$, shuning uchun $P(B_n) \to 1$. Bundan, yuqoridagi kabi

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1\ , \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

ekanligi kelib chiqadi. *F3* xossa shunga o'xshash isbotlanadi. Faraz qilaylik

$$A = \{\xi < x_0\}, A_n = \{\xi < x_n\},$$

bu yerda $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'sadi $x_n \uparrow x_0$. Shuningdek, A_n to'plamlar ketma-ketligi ham o'sadi va $\cup A_n = A$. Bundan $P(A_n) \to P(A)$. Bu esa $\lim\limits_{x\uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$ ekanligini ko'rsatadi.

1-izoh. Ommaviy xizmat tizimlarida va ishonchlilik nazariyasida $F(x)$ taqsimot funksiya o'rniga ko'pincha $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ taqsimot funksiya bilan ish ko'riladi.

2-izoh. Agar $F(x) = P\{\xi \le x\}$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya o'ngdan uzluksiz bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Yuqorida kiritilgan taqsimot funksiya bilan bir qatorda biroz kengroq taqsimot funksiyani kiritish ham foydalidir.

2-teorema. Agar $F(x)$ funksiya *F1, F2, F3* xossalarga ega bo'lsa, u holda $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimollik fazosi va ξ tasodifiy miqdor mavjud bo'lib, bunda $F_\xi(x) = F(x)$ taqsimot funksiya bo'ladi.

Isboti. Avvalo $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ ehtimollik fazosini ko'raylik. Ω sifatida haqiqiy sonlar o'qi R' ni, F "σ - algebra" sifatida esa G o'lchovli Borel to'plamlarni olamiz. Biz bilamizki $<R,G,P>$ ehtimollik fazosini qurish $[\cdot, \cdot[$ yarim intervaldan iborat A algebrada ehtimollik qurishdan iboratdir (bunda $\sigma(A) = G$). A algebradagi ixtiyoriy A element kesishmaydigan yarim intervallar yig'indisidan iborat

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, bi), a_i< b_i$$

(a_i va b_i lar cheksiz ham bo'lishi mumkin).

Ta'rifga ko'ra $P(A) =\sum_{i=1}^{n}\left(F(b_i)-F(a_i)\right)$ deb olamiz.

Ravshanki, *F1* va *F2* xossalariga asosan *P1* va *P2* aksiomalar o'rinli.

Endi A algebrada P ni sanoqli additivligi yoki uzluksizligini tekshirish qoldi. Faraz qilaylik.

$$G_n \in A,\ G_{n+1} \subset G_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G \in A.$$

Biz $P(Gn) \to P(G)$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, umumiylikni buzmagan holda, G to'plam bitta $[a, b[$ yarim intervaldan iborat deb qarashimiz mumkin. Chunki G to'plam barcha G_n larga tegishli, u holda G_n to'plam $[a^n, b^n]$ tipdagi to'plamlardan tuzilgan bo'lib, bunda $a^n \le a$, $b^n \le b$. Aytaylik, bu G ni o'z ichiga oluvchi maksimal G_n dagi intervaldan iborat bo'lsin. So'ngra G_n biror n dan boshlab, $[a^n, b^n[$ dan tashqarida, hech bir yarim intervalni o'z ichiga olmaydi (agar $[c, d[\subset G_n$ barcha n larda, u holda $[c, d[\subset G$ shunday qilib, G_n ning monotonligiga asosan va $G = [a, b[$ barcha-barcha n lar uchun biror G_n dan boshlab $Gn = [a^n, b^n[$, bu yerda $a^n \uparrow a$, $b^n = b$.

Biroq F3 ga asosan

$$P(G_n) = F(b) - F(a^n) \to F(b) - F(a) = P(G).$$

Shunday qilib, *P3* aksioma ham o'rinli ekan. Demak, ehtimolliklar fazosini qurdik. Endi ξ tasodifiy miqdorlar sifatida haqiqiy sonlarni o'ziga aynan akslantirish olinsa, u holda

$$F_\xi(x)=P(\xi<x)=P(-\infty,x)=F(x)$$

"yangi" tasodifiy miqdorlarga o'tilganda taqsimot va zichlik funksiyalarining ba'zi xossalarini ko'rib o'taylik.

Agar

$$g^{-1}(B)=\{x:g(x) \in B\}$$

Borel to'plamining asli yana Borel to'plamidan iborat bo'lsa, $g(x)$ funksiyaga borel funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, $F_\xi(x)=P\{\xi<x\}$ va $g(x)$ borel funksiyasi bo'lsin. U holda $\eta=g(\xi)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_{g(\xi)}(x)=P(g(\xi)<x)=P\{\xi \in g^{-1}(-\infty,x)\}.$$

Agar $g(x)$ kamaymaydigan funksiyasi bo'lib $g^{-1}(x)$ aniqlangan bo'lsa, u holda

$$F_{g(\xi)}(x)=P(\xi<g^{-1}(x))=F_\xi(g^{-1}(x)).$$

Bundan, xususan agar F_ξ uzluksiz bo'lsa, u holdan $\eta=F_\xi(\xi)$ tasodifiy miqdorlar $[0,1]$da tekis taqsimlangan. Aksincha η tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan bo'lsin va F uzluksiz taqsimlangan taqsimot funksiya berilgan: U holda $\xi=F^{1}(\eta)$ tasodifiy miqdor $F(x)$ taqsimot funksiyaga ega. Shunday qilib, biz tasodifiy miqdor yordamida avvaldan berilgan taqsimot funksiyali tasodifiy miqdordan tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor hosil qilishni muhim usulini hosil qildik.

7-misol. $g(x)=a+bx,\ b>0,\qquad F_{g(\xi)}(x)=F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right).$

Agar ξ tasodifiy miqdor $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, u holda $g(x)$ zichlik funksiya mavjud bo'lb, quyidagiga teng

$$f_{g(\xi)}(x)=f(g^{-1}(x))(g^{-1}(x))^{1}=\frac{f\left(g^{1}(x)\right)}{g^{1}(x)}.$$

Agar $g(x)=a+bx,\ b>0$ natijada

$f_{a+b\xi}(x)=\frac{1}{b}\,\mathrm{f}\left(\frac{x-a}{b}\right)$ ifodani olamiz.

8-misol. Aytaylik, $\eta=\xi^2$. U holda $y<0$ lar uchun $F_\eta(y)=0$, $y\geq 0$ lar uchun esa

$$F_\eta(y)=(\xi^2\leq y)=P\left(-\sqrt{y}\leq\xi\leq\sqrt{y}\right)=F_\xi\left(\sqrt{y}\right)-F_\xi\left(-\sqrt{y}\right)+P(\xi=-\sqrt{y})$$

Agar $F_\xi(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, u holda

$$\mathrm{P}\left\{\xi=-\sqrt{y}\right\}=0$$

hamda

$$F_\eta(y)=F_\xi\left(\sqrt{y}\right)-F_\xi\left(-\sqrt{y}\right).$$

Bundan $y\geq 0$ lar uchun

$$f_\eta(y)=\frac{1}{2\sqrt{Y}}[f_\xi\left(\sqrt{y}\right)+f_\xi\left(-\sqrt{y}\right)].$$

3-§. Integrallar

Ehtimolliklar fazosini kiritish, chekli, sanoqli, additiv o'lchov kiritishni bildiradi. Bu esa $<\Omega, f, P>$ ehtimolliklar fazosidagi ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun va b – Borel funksiyalar uchun Ω to'plam bo'yicha $\int b(\xi(\omega))P(d\omega)$ integral tushunchasini kiritish imkonini beradi. Yuqorida qayd etilganlarga ko'ra $\xi(\omega)$ uchun to'g'ri chiziqda P_ξ o'lchov quyidagicha kiritiladi:

$$P_\xi([x,y))=P(x\leq\xi<y)=F_\xi(y)-F_\xi(x)$$

Bu o'lchov yordamida yuqoridagi integralni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\int b(\xi(\omega))P(d\omega)=\int b(x)P_\xi(dx).$$

Bu tenglik $x=\xi(x)$ almashtirish natijasida hosil qilindi. Uni ikkala integralni ta'rifini keltirish yo'li bilan isbotlash mumkin. O'ng tomondagi integralga $b(x)$ funksiyadan $F_\xi(x)$ funksiya bo'yicha olingan Lebeg-Stiltes integrali deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$\int b(x)dF_\xi(x).$$

Bu integralni, ko'pincha, *Stiltes integrali* deb yuritiladi. Biroq Riman-Stiltes integrali biroz boshqacharoq va aksincha tor $b(x)$ funksiyalar sinfi uchun kiritiladi.

Agar $b(x)$-uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda Lebeg-Stiltes integrali bilan ustma-ust tushadi, ta'rifga asosan

$$\int b(x)dF = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to\infty}} \lim_{n\to\infty} \sum b(x_k)[F(x_{k+1})-F(x_k)] \qquad (1)$$

bu yerda limit $[a,b[$ yarim intervalni $x_0, x_1, \ldots, x_n$, bo'lishga va $\tilde{x}_k \in \Delta_k=[x_k, x_{k+1}[$ nuqtani qanday tanlanishiga bog'liq emas $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Bo'lish shunday xususiyatga egaki, bunda $n\to\infty$ da $\max_k(x_{k+1}-x_k)\to 0$.

Darhaqiqat, biz bilamizki, Lebeg- Stiltes integrali

$$\int b(x)dF(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \lim_{n\to\infty} \int_a^b b(x)P_\xi(dx), \qquad (2)$$

bu yerda b_n funksiya ixtiyoriy sodda funksiyalar ketma-ketligi bo'lib chekli sondagi qiymatlar qabul qiluvchi $b(x)$ ga monoton intiladi. Keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, $\int_a^b$ integralni chekli oraliqlarda ustma-ust tushishini ko'rsatish yetarli.

Chunki uzluksiz $b(x)$ funksiyadan olingan $\int_a^b bdF$ Lebeg-Stiltes integrali doimo mavjud, u holda uni ta'rifidagi b_n funksiya sifatida ikkita b_n^{*} va b_n^{**} sodda funksiyalar ketma-ketligini olishimiz mumkin, Δ_k yarim intervallarda o'zgarmas va ular uchun mos ravishda

$$b^{*}(x_k)=\sup_{x\in\Delta} b(x) \text{ va } b^{**}(x_k)=\inf_{x\in\Delta} b(x).$$

(2) dagi ikkala ketma-ketlik b_n^{*} va b_n^{**} lar bo'yicha o'zgarmas bo'lib, turli tomondan monoton holda bitta limitga, ya'ni $\int_a^b b(x)dF(x)$ – Lebeg-Stiltes integraliga yaqinlashadi. Biroq, ixtiyoriy $\tilde{x}_k \in \Delta_k$ uchun

$$b^{**}(x_k)\le b(\tilde{x}_k)\le b^{*}(x_k).$$

Bajariladi va (1) dagi integral yig'indi quyidagi oralig'da bo'ladi:

$$\int_a^b b_n^{**}dF(x) \le \sum_{k=0}^{n} b(\tilde{x}_k)[F(x_{k+1})-F(x_k)] \le \int_a^b b_n^{*}(x)dF(x).$$

Bu tengsizliklardan (1) ning isboti kelib chiqadi.

Agar *F(x)* uzluksiz, *b(x)* esa o'zgarishi chegaralangan funksiya bo'lganda ham yuqoridagi (1) va (2) munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b b(x)dF(x)=b(x)F(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)db(x).$$

Bu holatdan foydalanib, Riman-Stiltes integralining ta'rifini *b(x)* o'zgarishi chegaralangan funksiya uchun va *F(x)* esa ixtiyoriy taqsimot funksiya uchun kengaytirishimiz mumkin. Haqiqatdan ham, *F(x)* taqsimot funksiyani $F^c(x)$ uzluksiz hamda $y_1, y_2, \ldots$ nuqtalarda sakraydigan $F^\alpha(x)$ diskret komponentalar yig'indisi shaklida yozishimiz mumkin:

$$F(x)=F^c(x)+F^d(x)$$
$$P_k=F^d(y_k+0)=F^d(y_k)>0.$$

U holda ta'rifga binoan

$$\int b(x)dF(x)=\sum P_k b(y_k)+\int b(x)dFy(x),$$

bu yerdagi $\int bFy(x)$ Riman-Stiltes integrali (1)-ta'rifdagidek tushuniladi.

Agarda $\int |b|dF(x)$ chekli bo'lsa, u holda $\int bdF(x)$ integral mavjud deyiladi.

Stiltes integrali ta'rifiga ko'ra pog'onasimon *F(x)* funksiyalar uchun integral yig'indiga almashinadi.

$$\int b(x)dF(x)=\sum_X b_k(x_k)F(x_k+0)-F(x_k)=\sum_X b(x_k)P(\xi=x_k)$$

bu yerda x_1, x_2, ... nuqtalar *F(x)* ni sakrash nuqtalari. Agar $F(x)=\int_{-\infty}^{x}P(x)dx$ absolut uzluksiz bo'lsa, *F(x)* va *b(x)* lar esa Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda Stiltes integrali

$$\int b(x)dF(x)=\int b(x)P(x)dx.$$

odatdagi Riman integraliga aylanadi.

Stiltes integralini (1) - hamda, (2) - ta'rifidan kelib chiqadigan ba'zi xossalarni eslatib o'tamiz:

1) $\int_a^b dF(x)=F(b)-F(a).$

2) $\int_a^b fdF(x)=\int_a^c fdF(x)+\int_c^b fdF(x).$

3) $\int_a^b (f_1+f_2)dF(x)=\int_a^b f_1dF(x)+\int_a^b f_2dF(x).$

4) $\int_a^b cfdF(x)=c\int_a^b fdF(x),\quad c=const.$

5) $\int_a^b fdF(x)=f\cdot F(x)\Big|_a^b-\int_a^b Fdf.$

6) Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ o'zgarishi chegaralangan monoton funksiyalar bo'lsa; C_1 va C_2 - esa o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)d[c_1F_1(x)+c_2F_2(x)]=c_1\int_a^b f(x)dF_1(x)+c_2\int_z^b f(x)dF_2(x).$$

7) Funksiyalar yig'indisining integrali ularning integrallarining yig'indisiga teng

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n f_1(x)dF(x)=\sum_{i=1}^n \int_a^b f_1(x)dF(x).$$

4-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar

Faraz qilaylik, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazosida $\xi_1,\xi_2, \dots , \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin. Bu tasodifiy miqdorlar har bir ω va n o'lchovli

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots , \xi_n(\omega))$$

vektorni mos qo'yadi. $\xi_1,\xi_2, \dots , \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yordamida beriladigan $\Omega \to R^n$ akslantirishga ***tasodifiy vektor*** yoki ko'p o'lchovli tasodifiy miqdor deyiladi. Agar R^n dagi Borel to'plamlari σ – algebrasini $\mathcal{B}$ desak, u holda $\Omega \to R^n$ akslantirishni $<\Omega, \mathfrak{F}>$ fazoni $<R^n, \mathcal{B}>$ fazoga o'lchovli akslantirish deb qarashimiz mumkin. Shuning uchun ixtiyoriy B Borel to'plamga ξ vektorning taqsimoti deb ataladigan $P_\xi(B)=P(\xi \in B)$ funksiya aniqlangan. Quyidagi funksiyaga

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots x_n)=P\{\xi_1<x_1,\dots,\xi_n<x_n\}$$

tasodifiy $(\xi_1, \dots , \xi_n)$ vektorning ***taqsimoti funksiyasi*** yoki $\xi_1, \dots , \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi. Kelishuv xossalari deb yuritiladigan tasodifiy vektorning ba'zi xossalarini keltiramiz.

F1. $\lim\limits_{x_n\to+\infty} F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=F_{\xi_1,\dots,\xi_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1})$.

F2. $\lim\limits_{x_n\to-\infty} F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)=0$.

Bu yerda limit oxirgi argument bo'yicha olinyapti, lekin bu shart emas, chunki tasodifiy miqdorlarni doimo qaytadan raqamlab chiqishimiz mumkin. ***F1*** va ***F2*** xossalar xuddi bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyasining ***F2*** xossasi kabi isbotlanadi. Xuddi bir o'lchovli tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasining xossalarini singari $\xi(\omega)$ vektorning taqsimot funksiyasining xossalarini keltiraylik

$F(x_1, x_2, \dots , x_n)$ taqsimot funksiya:

$\bar{F}1$. Har bir argumenti bo'yicha kamaymaydigan funksiya;

$\bar{F}2$. Har bir argumenti bo'yicha chapdan uzluksiz;

$\bar{F}3$. Qolgan argumentlarning ixtiyoriy qiymatlarida

$$F(+\infty, +\infty, \dots , +\infty)=1$$

$$\lim_{x_n\to-\infty} F(x_1, x_2, \dots , x_k, \dots , x_n)=0 \quad (1 \le k \le n)$$

munosabatni qanoatlantiradi.

Bu xossalarning isbotini kitobxonga qoldiramiz. Biz yuqorida bir o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ***F1***, ***F2***, ***F3*** munosabatlarni qanoatlantirsa, u holda taqsimot funksiya bo'lishini isbotlagan edik. Biroq, bu fikr ko'p o'lchovli taqsimot funksiyalar uchun o'rinli emas. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya taqsimot funksiya bo'lishi uchun $\bar{F}1, \bar{F}2, \bar{F}3$ xossalarga yana quyidagi xossani qo'shish kifoya.

$\bar{F}4$. Ixtiyoriy a_i va b_i larda quyidagi ifoda musbat:

$$P\{\alpha_1 \le \xi_1 < \beta_1, \alpha_2 \le \xi_2 < \beta_2, \ldots, \alpha_n \le \xi_n < \beta_n\} =$$

$$= F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) - \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i<j} P_{ij} - \ldots + (-1)^n F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

bu yerda $P_{ij,\ldots,k}$ bilan $F(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ funksiyaning $\eta_i = \alpha_i$, $\eta_j = \alpha_j$, ..., $\eta_k = \alpha_k$ va qolgan η_s, larda β_s ga teng qiymatlar belgilangan.

$<R^n \mathcal{B}>$ fazoda $P_\xi(B)$ ehtimollik o'lchovi kiritish bu o'lchov bo'yicha integrallash imkonini beradi.

Agar b funksiya R^n ni R ga akslantiruvchi borel funksiyasi bo'lsa, u holda $b(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$ funksiya boshlang'ich Ω fazoni R ga o'lchovli akslantiradi, hamda

$$\int_\Omega b(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) P(d\omega)$$

integral aniqlangan bo'ladi. Bu integral ta'rifidan foydalanib, yuqoridagi integral $\int_{R^n} bP_\xi(dx)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ bilan bir xil ekanligiga ishonch hosl qilamiz.

Xuddi bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar kabi, tasodifiy vektorni diskret va absolut uzluksiz tiplarga ajratib o'rganish mumkin.

Ta'rif. Agar chekli yoki sanoqli $\xi(X_{m}, X_{m}, \ldots X_{m})$ nuqtalar to'plami mavjud bo'lib

$$P(\xi_1 = x_{m_1}, \xi_2 = x_{m_2}, \ldots, \xi_m = x_{m_k}) = P_{x_1} P_{x_2} \ldots P_{x_k} \text{ va } \sum_{(x_{m_1}, \ldots x_{m_k})} P_{x_{m_1}, \ldots x_{m_k}} = 1$$

bajarilsa, u holda $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ga diskret tipdagi tasodifiy vektor deyiladi.

Shuningdek, diskret tipdagi tasodifiy vektorni diskret ehtimolliklar fazosi $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ da ham ta'riflash mumkin, bunda berilgan vektorning qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi.

Ta'rif. Agar shunday $f_{\xi_1, \ldots, \xi_n}$ funksiya mavjud bo'lib,

$$f_{\xi_1, \ldots, \xi_n} \ge 0 \text{ va } \int_\Omega f_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(t_1, \ldots, t_n) dt_1, \ldots, dt_n = 1$$

shartlarni qanoatlantirsa hamda ixtiyoriy $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ larda

$$F_{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n}(t_1, t_2, \ldots t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n.$$

U holda, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ga absolut uzluksiz tipdagi tasodifiy vektor deyiladi. Yuqoridagi $f_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n}$ funksiyaga $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deyiladi. Deyarli hamma joyda

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1,\partial x_2,\dots,\partial x_n}=f(x_1,x_2,\dots x_n)$$

munosabat o'rinli.

5-§. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqmasligi

Ta'rif. Agar to'g'ri chiziqdagi $(B_1, \dots, B_n)$ borel to'plamlari uchun

$$P(\xi_1\in B_1, \dots, \xi_n\in B)=P(\xi_1\in B_1), \dots, P(\xi_n\in B_n) \qquad (1)$$

tenglik bajarilsa, $\xi_1, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ***bog'liqmas*** deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining bog'liqmasligi tushunchasini ham kiritish mumkin.

Ta'rif. Agar $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazoda berilgan $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ixtiyoriy butun $n$da (1) munosabat bajarilsa, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liqmas deyiladi, ya'ni tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini bog'liqmasligi ixtiyoriy chekli tasodifiy miqdorlar komplektini bog'liqmasligi tushunchasiga keltiriladi.

Tasodifiy miqdorlar bog'liqmasligining boshqacha ta'rifi quyidagi tasdiqdan kelib chiqadi.

1-teorema. $\xi_1, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqmasligi uchun, ushbu tenglikni

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=F_\xi(x_1), F_\xi(x_2), \dots, F_\xi(x_n)$$

bajarilishi zarur va yetarli.

Ta'rif. Faqat va faqat $\sigma(\xi_1),\dots,\sigma(\xi_n)$, «$\sigma$-algebralar» bog'liq bo'lmasa, ***tasodifiy miqdorlar bog'liqmas*** deyiladi.

1-teoremaning isboti. Teoremani bir tomoni ravshan. Bizga

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=F_\xi(x_1), F_\xi(x_2), \dots, F_\xi(x_n),$$

shartdan $\sigma(\xi_1)),\dots,\sigma(\xi_n)$ shartning kelib chiqishini isbotlash qoldi. Soddalik uchun $n=2$ deb olaylik hamda

$$\Delta=[x_1,x_2] \text{ va } \Lambda=[y_1,y_2]$$

deb belgilash kiritaylik. U holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$P(\xi_1\in\Delta, \xi_2\in\Lambda)=P(\xi_1\in[x_1,x_2]\xi_2\in[y_1,y_2])=$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_1,x_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)=$$
$$=(F_{\xi_1}(x_2)-F_{\xi_1}(x_1))(F_{\xi_2}(y_1)-F_{\xi_2}(y_1))=P\{\xi_1\in\Delta\}\cdot P\{\xi_2\in\Lambda\}.$$

Agar ikkita $\Delta_i, i=\overline{1,n}$ va $\Lambda_{j,j}=\overline{1,m}$ yarimintervallar sistemasi kesishmasa, u holda

$$P\left(\xi_1\in\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i, \xi_2\in\bigcup_{j=1}^{m}\Lambda_j\right)=\sum_{i,j}(\xi_1\in\Delta_i, \xi_2\in\Delta_j)=$$
$$=\sum_{i,j}P(\xi_1\in\Delta_i)\cdot P(\xi_2\in\Lambda_j)=P\left(\xi_1\in\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i\right)P\left(\xi_2\in\bigcup_{j=1}^{m}\Lambda_j\right).$$

Biroq $\{\omega: \xi(\omega) \in A\} = \xi^{-1}(A)$, $A \in \mathcal{A}$, hodisalar sinfi A bilan birgalikda algebra tashkil etadi. (biz uni $\alpha(\xi)$ deb belgilaymiz) va bunda

$$\sigma(\alpha(\xi)) = \sigma(\xi) \qquad (2)$$

munosabat $\alpha(\xi_1)$ va $\alpha(\xi_2)$ larning bog'liqmasligini ko'rsatadi. Bundan quyiroq isbotlangan 3-teoremaga ko'ra

$$\sigma(\xi_1) = \sigma(\alpha(\xi_1)) \text{ va } \sigma(\xi_2) = \sigma(\alpha(\xi_2))$$

algebralar bog'liqmasdir.

Agar $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ vektor absolut uzluksiz taqsimlangan bo'lsa, u holda ξ_i larning bog'liqmaslik kriteriyasi ikkinchi teoremani beradi.

2-teorema. Aytaylik, $\xi_1, \dots, \xi_2$ bog'liqmas. Agar har bir $i$da ξ_i tasodifiy miqdorlarning taqsimoti absolut uzluksiz bo'lsa, u holda P_ξ ham absolut uzluksiz bo'ladi. Aksincha, agar P_ξ absolut uzluksiz bo'lsa, barcha j larda $F_{\xi_j}(x)$ absolut uzluksiz. Bunda deyarli hamma joyda

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f(x_n),$$

bu yerda $f, f_1, \dots, f_n$ lar mos ravishda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ larning zichlik funksiyalari. Shunday qilib, ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ξ_i larning zichlik funksiyalari ko'paytmasiga teng bo'lsa, bu esa ξ_i larning bog'liqmasligini ko'rsatadi.

2-teoremaning isboti. Agar har bir tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi absolut uzluksiz bo'lsa hamda

$$F_\xi(x_i) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t_i)\, dt_i$$

u holda ular birgalikdagi taqsimot funksiyasining quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_\xi(x_1), \dots, F_\xi(x_n) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t_1)\, dt_1 \dots \int_{-\infty}^{x} f_n(t_n)\, dt_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \dots \int_{-\infty}^{x} f_1(t_1) \dots f_n(t_n) dt_1 \dots dt_n = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Aksincha, $F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x} \dots \int_{-\infty}^{x} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n$ faraz qilib, quyidagini olamiz:

$$F_\xi(x_1) = F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \infty, \dots \infty) = \int_{-\infty}^{x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 \dots t_n) dt_1 \dots dt_n,$$

bunda: $f_1(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1 \dots t_n)\, dt_2 \dots dt_n$.

Tenglik deyarli barcha qiymatlarda aniqlangan, shu sababli $f_i(t_i)$ funksiyalar deyarli hamma qiymatlarda aniqlangan. Endi diskret holni ko'raylik. Soddalik uchun ξ_i komponentalar butun qiymatlar qabul qilsin. ξ_i larning bog'liqmasligi uchun barcha $k_1, k_2, \dots, k_n$ larda

$$P(\xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) = P(\xi_1 = k_1), \dots, P(\xi_n = k_n)$$
shartni bajarilish zarur va yetarli. Bu da'voning to'g'riligini tekshirish unchalik qiyin emas va shu sababli isbotlashni kitobxonga havola qilamiz.

Bog'liqmaslik tushunchasi ehtimolliklar nazariyasidagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, u butun kurs davomida ishtirok etadi.

Aytaylik, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazosi, A_1 va A_2 esa $\mathfrak{F}$ "σ- algebradagi" hodisalar sinfi.

Ta'rif. Agar $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

o'rinli bo'lsa, A_1 va A_2 hodisalar sinfi bog'liqmas deyishadi. Shuningdek, har bir $n_1, \dots n_2$ sonlar komplekti uchun ixtiyoriy $A_{n_j} \in A_{n_j}$ larda
$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{n_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{n_j}\right)$$
tenglik bajarilsa, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ hodisalar sinfi bog'liqmas deyiladi.

3-teorema. Bog'liq bo'lmagan A_1 va A_2 hodisalar algebrasining qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathcal{U}_1$ va $\mathcal{U}_2$ (σ- algebralar) bog'liqmas.

4-teorema. (Approksimatsiyalash teoremasi). Faraz qilaylik, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazosi va F dagi biror A hodisalar algebrasining σ-algebrasi $\mathcal{U}$ dan iborat bo'lsin. U holda ixtiyoriy $A \in \mathcal{U}$ uchun
$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n \overline{A} \cup \overline{A}_n A\right) = 0 \qquad (3)$$
yoki
$$\lim_{n\to\infty} P\left(A - A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n - A\right) = 0 \qquad (4)$$
xossalarga ega bo'lgan $A_n \in A$ ketma-ketlik mavjud, chunki
$$P(A) = P(A_n A) + P(\overline{A}_n A) = P(An) - P(An\,\overline{A}) + P(\overline{A}_n A).$$

U holda teoremaning tasdig'i $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ bildiradi hamda har bir $\mathcal{U} \in A$ hodisani, nol ehtimollikli to'plam aniqligida, A algebralardan tashkil topgan ketma-ketlikning limiti sifatida tasvirlash mumkin.

4-teoremaning isboti. Agar $\mathfrak{F} \in A$ hodisa uchun (3) xossani qanoatlantiruvchi $A \in A_n$ ketma-ketlik mavjud bo'lsa, $\mathfrak{F} \in A$ hodisani approksimatsiyalanuvchi deymiz.

Teoremani isbotlash uchun approksimatsiyalaydigan hodisalarning $\mathcal{U}^*$ to'plami σ-algebra tashkil etishini va $A \in \mathcal{U}^*$ ekanligini tekshirish kifoya. Oxirgi munosabat ravshan $\mathcal{U}^*$ to'plam algebra tashkil etadi, chunki $A \in \mathcal{U}^*$, $B \in \mathcal{U}^*$ munosabatlar $\overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{U}^*$ hodisalarni ergashtiradi. So'ngra, agar $B_{n,N}$ ketma-ketlik ((3) ma'nodagi) $B_N$ni approksimatsiyalasa va B_N hodisa B hodisani approksimatsiyalasa, u holda $B_{n,N}$ hodisalar $N \to \infty$, $n = n(N) \to \infty$ da B hodisani approksimatsiyalaydi. Masalan:

$$P(B\overline{B}_{n,N})\leq P(B\overline{B}_n)+P(B_N\overline{B}_{n,N})$$

ehtimollik $N\to\infty$ va $n=n(N)\to\infty$ da 0 ga intilishini tekshirish yetarli. Endi $C=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k$ (bu yerda $C_k\in\mathcal{U}^*$) hodisalarni qaraylik. Biroq,

$$D_n=\bigcup_{k=1}^{n}C_k\subset C$$

hodisalar approksimatsiyalanuvchi va $n\to\infty$ va $P(\overline{D}_n C)\to 0$, u holda yuqorida aytilganlardan C hodisa ham approksimatsiyalanadigan va shuningdek,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\in\mathcal{U}^*e.$$

3-teoremaning isboti. Agar $A_1\in\mathcal{U}_1$ va $A_2\in\mathcal{U}_2$ bo'lsa, u holda 4-teoremaga ko'ra shunday

$$A_{1,n}\in A_1 \text{ va } A_{2,n}\in A_2$$

ketma-ketlik mavjudki $n\to\infty$ va $i=1,2$ da $P(A_i\overline{A}_{in}\cup\overline{A}_iA_{in})\to 0$, o'rinli bo'ladi.

So'ngra $B=A_1A_2$, $B_n=A_{1n}A_{2n}$ deb belgilab, $n\to\infty$ da

$$P(B\overline{B}_n\cup\overline{B}B_n)\leq P(B\overline{B}_n)+P(\overline{B}B_n)\to 0$$

$$P(A_1A_2)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_{1n})P(A_{2n})=P(A_1)P(A_2).$$

munosabatga ega bo'lamiz. 3-teorema isbot bo'ldi. Endi skalyar miqdorlarni bog'liqmasligini ko'rsataylik. Agar $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ vektorning komponentalari ξ_1 va ξ_2 lar bog'liq bo'lmasa, u holda $B_1\in R$, $B_2\in R$ va o'lchovli to'plamlar uchun

$$B=B_1\times B_2=\{(x_1,x_2):x_1\in B_1,\ x_2\in B_2\}\subset R^2$$

quyidagi tengliklar o'rinli:

$$P(\xi\in B)=P(\xi_1\in B_1,\ \xi_2\in B_2)=P(\xi_1\in B_1)\cdot P(\xi_2\in B_2)$$

Bu holda R^2 dagi ξ_1,ξ_2 va mos kelgan

$$P_{\xi_1,\xi_2}(dx_1dx_2)=P(\xi_1\in dx_1,\ \xi_2\in dx_2)$$

o'lchov quyidagi o'lchovlarning

$$P_{\xi_1}(dx_1)=P_{\xi_1}(\xi_1\in dx_1) \text{ va } P_{\xi_2}(dx_2)=P_{\xi_2}(\xi_2\in dx_2)$$

to'g'ri ko'paytmasidan iborat. Bu holda,

$$\int g(x_1x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1dx_2)$$

integralni karrali integral ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$\int\int g(x_1,x_2)P_{\xi_1}(dx_1)P_{\xi_2}(dx_2).$$

Agar

$$g(x_1,x_2)=g_1(x_1)g_2(x_2),$$

hamda

$$\int g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1) \text{ va } \int g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2)$$

integrallar mavjud bo'lsa, u holda ikki karrali integral ham mavjud bo'ladi va

$$\int\int g(x_1,x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1dx_2)=\int g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1)\int g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2)$$

$$P(\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_n = k_n) = P(\xi_1 = k_1), \ldots, P(\xi_n = k_n)$$

shartni bajarilish zarur va yetarli. Bu da'voning to'g'riligini tekshirish unchalik qiyin emas va shu sababli isbotlashni kitobxonga havola qilamiz.

Bog'liqmaslik tushunchasi ehtimolliklar nazariyasidagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, u butun kurs davomida ishtirok etadi.

Aytaylik, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazosi, A_1 va A_2 esa $\mathfrak{F}$ "σ- algebradagi" hodisalar sinfi.

Ta'rif. Agar $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$

o'rinli bo'lsa, A_1 va A_2 hodisalar sinfi bog'liqmas deyishadi. Shuningdek, har bir $n_1, \ldots n_2$ sonlar komplekti uchun ixtiyoriy $A_{n_j} \in A_{n_j}$ larda

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{n_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{n_j}\right)$$

tenglik bajarilsa, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ hodisalar sinfi bog'liqmas deyiladi.

3-teorema. Bog'liq bo'lmagan A_1 va A_2 hodisalar algebrasining qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathscr{U}_1$ va $\mathscr{U}_2$ (σ- algebralar) bog'liqmas.

4-teorema. (Approksimatsiyalash teoremasi). Faraz qilaylik, $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazosi va F dagi biror A hodisalar algebrasining σ-algebrasi $\mathscr{U}$ dan iborat bo'lsin. U holda ixtiyoriy $A \in \mathscr{U}$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\overline{A} \cup \overline{A}_n A\right) = 0 \qquad (3)$$

yoki

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A - A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n - A\right) = 0 \qquad (4)$$

xossalarga ega bo'lgan $A_n \in A$ ketma-ketlik mavjud, chunki

$$P(A) = P(A_nA) + P(\overline{A}_nA) = P(An) - P(An\,\overline{A}) + P(\overline{A}_nA).$$

U holda teoremaning tasdig'i $P(A) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ bildiradi hamda har bir $\mathscr{U} \in A$ hodisani, nol ehtimollikli to'plam aniqligida, A algebralardan tashkil topgan ketma-ketlikning limiti sifatida tasvirlash mumkin.

4-teoremaning isboti. Agar $\mathfrak{F} \in A$ hodisa uchun (3) xossani qanoatlantiruvchi $A \in A_n$ ketma-ketlik mavjud bo'lsa, $\mathfrak{F} \in A$ hodisani approksimatsiyalanuvchi deymiz.

Teoremani isbotlash uchun approksimatsiyalaydigan hodisalarning $\mathscr{U}^*$ to'plami σ-algebra tashkil etishini va $A \in \mathscr{U}^*$ ekanligini tekshirish kifoya. Oxirgi munosabat ravshan $\mathscr{U}^*$ to'plam algebra tashkil etadi, chunki $A \in \mathscr{U}^*$, $B \in \mathscr{U}^*$ munosabatlar $\overline{A} = \Omega - A \in \mathscr{U}^*$ hodisalarni ergashtiradi. So'ngra, agar $B_{n,N}$ ketma-ketlik ((3) ma'nodagi) $B_N$ni approksimatsiyalasa va B_N hodisa B hodisani approksimatsiyalasa, u holda $B_{n,N}$ hodisalar $N \to \infty$, $n = n(N) \to \infty$ da B hodisani approksimatsiyalaydi. Masalan:

$$P(B\overline{B}_{n,N})\le P(B\overline{B}_n)+P(B_N\overline{B}_{n,N})$$

ehtimollik $N\to\infty$ va $n=n(N)\to\infty$ da 0 ga intilishini tekshirish yetarli. Endi $C=\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k$ (bu yerda $C_k\in\mathcal{U}^*$) hodisalarni qaraylik. Biroq,

$$D_n=\bigcup_{k=1}^{n}C_k\subset C$$

hodisalar approksimatsiyalanuvchi va $n\to\infty$ va $P(\overline{D}_n C)\to 0$, u holda yuqorida aytilganlardan C hodisa ham approksimatsiyalanadigan va shuningdek,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k\in\mathcal{U}^*e.$$

3-teoremaning isboti. Agar $A_1\in\mathcal{U}_1$ va $A_2\in\mathcal{U}_2$ bo'lsa, u holda 4-teoremaga ko'ra shunday

$$A_{1,n}\in A_1 \text{ va } A_{2,n}\in A_2$$

ketma-ketlik mavjudki $n\to\infty$ va $i=1,2$ da $P(A_i\overline{A}_{in}\cup\overline{A}_iA_{in})\to 0$, o'rinli bo'ladi.

So'ngra $B=A_1A_2$, $B_n=A_{1n}A_{2n}$ deb belgilab, $n\to\infty$ da

$$P(B\overline{B}_n\cup\overline{B}B_n)\le P(B\overline{B}_n)+P(\overline{B}B_n)\to 0$$

$$P(A_1A_2)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_{1n})P(A_{2n})=P(A_1)P(A_2).$$

munosabatga ega bo'lamiz. 3-teorema isbot bo'ldi. Endi skalyar miqdorlarni bog'liqmasligini ko'rsataylik. Agar $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ vektorning komponentalari ξ_1 va ξ_2 lar bog'liq bo'lmasa, u holda $B_1\in R$, $B_2\in R$ va o'lchovli to'plamlar uchun

$$B=B_1\times B_2=\{(x_1,x_2):x_1\in B_1,\ x_2\in B_2\}\subset R^2$$

quyidagi tengliklar o'rinli:

$$P(\xi\in B)=P(\xi_1\in B_1,\ \xi_2\in B_2)=P(\xi_1\in B_1)\cdot P(\xi_2\in B_2)$$

Bu holda R^2 dagi ξ_1,ξ_2 va mos kelgan

$$P_{\xi_1,\xi_2}(dx_1dx_2)=P(\xi_1\in dx_1,\ \xi_2\in dx_2)$$

o'lchov quyidagi o'lchovlarning

$$P_{\xi_1}(dx_1)=P_{\xi_1}(\xi_1\in dx_1) \text{ va } P_{\xi_2}(dx_2)=P_{\xi_2}(\xi_2\in dx_2)$$

to'g'ri ko'paytmasidan iborat. Bu holda,

$$\int g(x_1x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1dx_2)$$

integralni karrali integral ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$\iint g(x_1,x_2)P_{\xi_1}(dx_1)P_{\xi_2}(dx_2).$$

Agar

$$g(x_1,x_2)=g_1(x_1)g_2(x_2),$$

hamda

$$\int g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1) \text{ va } \int g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2)$$

integrallar mavjud bo'lsa, u holda ikki karrali integral ham mavjud bo'ladi va

$$\iint g(x_1,x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1dx_2)=\int g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1)\int g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar $g_i(x_i)\geq 0$ bo'lsa bu tenglik doimo o'rinli (g_i funksiyalardan biri aynan nolga teng bo'lgan hol bundan mustasno).

Hech shubha yo'qki, aytiladigan fikrlar $n>2$ bo'lgan holda ham saqlanadi. Bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlarni xarakterli xossasi shundan iboratki, $(\xi_1, \xi_1, \dots, \xi_n)$ ixtiyoriy o'lchovli funksiyasining taqsimoti $P_{\xi_1} \dots P_{\xi_n}$ taqsimotlar bilan to'la yoziladi.

Misol. Taqsimot funksiyalari mos ravishda F_1 va F_2 bo'lgan bog'liq bo'lmagan ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimotini hisoblaylik. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlarning bog'liqmasligidan va R^2 dagi o'lchov bo'yicha olingan integral xossasidan foydalansak:

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=P(\xi_1+\xi_2<x)=\int_{\{\xi_1+\xi_2<x\}} P(d\omega)=$$

$$=\iint_{x_1+x_2<x} P_{\xi_1\xi_2}(dx_1,dx_2)=\iint_{x_1+x_2<x} P_{\xi_1}(dx_1)P_{\xi_2}(dx_2)=$$

$$=\int_{x_1=-\infty}^{\infty}\int_{x_2=-\infty}^{x-x_1} P_{\xi_1}(dx_1)P_{\xi_2}(dx_2)=\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_1}(dt)F_2(x-t)=\int_{-\infty}^{\infty} dF_1(t)F_2(x-t).$$

Bu integralga $F_1(x)$ va $F_2(x)$ taqsimot funksiyalarning bog'lamasi (o'ramasi) deyiladi hamda $F_1(x) * F_2(x)$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib,

$$P(\xi_1+\xi_2<x)=\int_{-\infty}^{\infty} dF_2(x)F_1(x-t)$$

formulani oldik. Tenglikni o'ng tomonini $\int dF_1F_2(x-t)$ integralni bo'laklab integrallash yordamida hosil qilindi deb qarashimiz mumkin.

Agar taqsimot funksiyalaridan kamida bittasi zichlik funksiyasi mavjud bo'lsa, u holda ularning bog'lamasi ham zichlik funksiyaga ega bo'ladi. Darhaqiqat, agar $F_2(x)=\int_{-\infty}^{x} f_2(d)\,du$ deb olsak, u holda

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(dt)\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u-t)\,du=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(dt)f_2(u-t)\,du\right),$$

chunki $\xi_1+\xi_2$ yig'indisining $f(x)$ zichlik funksiyasi

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(dt)f_2(x-t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)dF_1(t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Faraz qilaylik $\xi_1,\xi_2,\dots$ tasodifiy miqdorlar bog'liqmas va $[0,1]$da tekis taqsimlangan, ya'ni tasodifiy miqdorlar bir xil

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & x\bar{\in}[0,1]\end{cases}$$

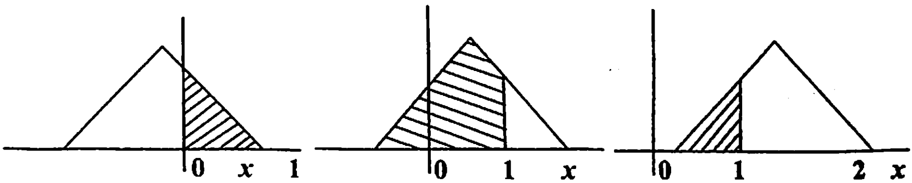
zichlik funksiyaga ega bo'lsin. U holda $\xi_1+\xi_2$ yig'indining zichlik funksiyasi bo'lsin

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_0^1 f(x-t)dt=\begin{cases}0, & x\overline{\in}[0,2]\\ x, & x\in[0,1]\\ 2-x, & x\in[1,2]\end{cases}$$

kabi bo'ladi. Bu yerda ishtirok qiladigan integralning qiymati *[0,1]* va *[x-1, x]* oraliqlarning kesishmasidan iborat bo'ladi.

$\xi_1+\xi_2+\xi_3$ yig'indining zichligi parabolaning uch bo'lagidan yelimlanadi.

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}=\int_0^1 f_{\xi_1+\xi_2}(x-t)dt=\begin{cases}0, & x\overline{\in}[0,3]\\ \frac{x^2}{2}, & x\in[0,1[\\ 1-\frac{(2-x)^2}{2}-\frac{(x-1)^2}{2}, & x\in[1,2[\\ \frac{(3-x)^2}{2}, & x\in[2,3]\end{cases}$$



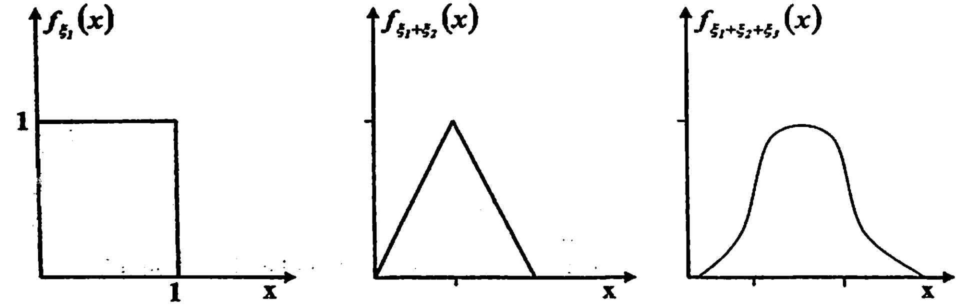
15 (a)-rasm

Shtixlangan yuzalar x ning turli qiymatlarida $f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x)$ funksiyasining qiymatlariga mos keladi.

Agar shakldagi shtrixlangan yuzalar $f_{\xi+\xi_1+\xi_2}(x)$ funksiyaning turli x lardagi qiymatlariga mos kelishini e'tiborga olsak, yuqoridagi integralni hisoblash ancha oydinlashadi: ξ_1, $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1+\xi_2+\xi_3$, uchun zichlik funksiyalarining grafik ko'rinishi quyida berilgan (15 (b)-rasm).

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$ yig'indining zichlik funksiyasi uchinchi tartibli egri chiziqlarning 4 bo'lagini yelimlash yordamida hosil qilinadi va hokazo.

Agar koordinatalar boshi $\frac{n}{2}$ nuqtaga keltirilgan bo'lsa, u holda $\xi_1+...+\xi_n$ yig'indining zichlik funksiyasi n ning o'sishi bilan e^{-x^2} funksiyaning grafigini eslatadi.



15(b)-rasm. **Tekis taqsimotni zichlik funksiyasiga oid**

Agar bog'liq bo'lmagan ξ va η tasodifiy miqdorlarda ξ ning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, η esa $[0,1]$ da tekis taqsimlangan bo'lsa, u holda x nuqtadagi $\xi+\eta$ yig'indining zichlik funksiyasi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int dF(t)f_\eta(x-t)=\int_{x-1}^{x} dF(t)=F(x)-F(x-1).$$

II-bobga doir masalalar

1. $I_A=I_A(\omega)$ indikatorning ushbu xossalarini tekshirib ko'ring:

$I_\phi=0,\ I_\Omega=1,\ I_A+I_{\bar{A}}=1$

$I_{\inf A_\cdot}=\inf I_{A_\cdot},\ I_{\sup A_\cdot}=\sup I_{A_\cdot}$

$I_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=1-\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-I_{A_i}\right),$

$I_{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}=\sum\limits_{i=1}^{n} I_{A_i}$

$I_{A\Delta B}=(I_B-I_A)^2$

$I_{\underline{\lim}_n A_n}=\underline{\lim}_n I_{A}.$

2. Indikator xossalaridan foydalanib avvalgi bobdagi Bul formulasini isbotlang.

3. Agar ξ va η tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $\xi\pm\eta$ va $\xi\cdot\eta$ yana tasodifiy miqdor bo'lishligini isbotlang.

4. Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsa, u holda $\sup\xi_n,\ \inf\xi_n,$

$$\overline{\lim}\,\xi_n\equiv\lim_n\sup\xi_n\equiv\inf_n\sup_{m\ge n}\xi_m,\quad \underline{\lim}\,\xi_n\equiv\lim_n\inf\xi_n\equiv\sup_n\inf_{m\ge n}\xi_m$$

yana tasodifiy miqdor bo'lishligini isbotlang.

5. Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor eksponensial taqsimlangan bo'lsin:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x^{3}0\\ 0 & x<0;\lambda>0\end{cases}$$

U holda $\eta=\dfrac{1}{1-\xi}$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

6. Faraz qilaylik, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ qat'iy monoton va uzluksiz bo'lsin. U holda $\eta=F(\xi)$ miqdorning taqsimot qonunini toping.

7. Aylanada tavakkal 4 ta nuqta olinadi. A_1A_2 va A_3A_4 vatarlarning kesishish ehtimolligini toping.

8. Faraz qilaylik, ξ_1 va ξ_2 miqdorlar o'zaro bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U holda $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ nisbatning zichlik funksiyasini toping.

9. $[0,1]$ ga tavakkal tashlangan nuqtaning koordinatasi quyidagicha bo'lsin $0,\zeta_1\zeta_2\zeta_3\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\zeta}{10^k}$.

U holda ζ_1,ζ_2 miqdorlarning birgalikdagi taqsimotini toping.

10. Aytaylik, τ_1 va τ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lib, har biri Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lsin, $\tau_1+\tau_2$ yig'indining taqsimot qonunni toping.

11. Ixtiyoriy taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega ekanligini isbotlang:

$$\lim_{x\to\infty}x\int_x^{\infty}\frac{1}{z}dF(z)=0,\quad \lim_{x\to+0}x\int_x^{\infty}\frac{1}{z}dF(z)=0.$$

12. Agarda ixtiyoriy $h\neq 0$ uchun $F(x)$ taqsimot funksiya bo'lsa, u holda

$$\Phi(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}F(x)dx,\quad \psi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}F(x)dx$$

funksiyalar ham taqsimot funksiya bo'lishini isbotlang:

13. Aytaylik, $P(\xi<x)=F(x)$ bo'lsin. U holda

a) $\eta=\alpha\xi+\beta,\alpha$ va β haqiqiy sonlar;

b) $\eta=\dfrac{1}{\xi},\ (P(\xi=0)=0)$;

c) $\eta=tg\xi$

d) $\eta=cos\xi$

kabi aniqlangan tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasini toping.

14. Aytaylik, ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar bog'liqmas va ularning zichlik funksiyasi quyidagiga teng:

$$P_{\xi}(x)=P_{\xi}(x)=\frac{C}{1+x^4}.$$

O'zgarmas C topilsin hamda $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ nisbat Koshi qonuni bo'yicha taqsimlanganligini isbotlang.

15. Biz ξ tasodifiy miqdorning kontsentratsion funksiyasini $Q_\xi(e) = \sup_x P(x \le \xi \le x + e)$ kabi aniqlaymiz.

Agar η tasodifiy miqdor ξ ga bog'liq bo'lmasa, u holda $\xi + \eta$ yig'indining kontsentratsion funksiyasi $Q_{\xi+\eta}(e) \le Q_\xi(e)$ tengsizlikni qanoatlantirishini isbotlang.

III bob. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

1-§. Matematik kutilma

Ehtimolliklar fazosi $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ da berilgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (o'rta qiymati) deb

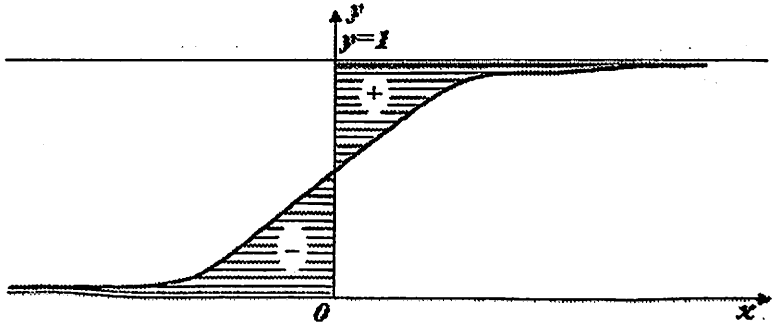
$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$$

(integral yaqinlashuvchi bo'lsa) shu integralni son qiymatiga aytiladi. Matematik kutilmani quyidagicha aniqlashimiz ham mumkin:

$$M\xi = \int x P_{\xi}(dx) = \int x dF(x), \qquad (1)$$

bu yerda $F(x)$ tasodifiy miqdor ξ ni taqsimot funksiyasi 16-rasmda matematik kutilmani hisoblashda (-∞, 0) oraliqda ishorasi manfiy va (0, ∞) oraliqda ishorasi musbatligini e'tiborga olish kerak, chunki (2) - formuladan

$$M\xi = \int x dF(x) = -\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F(x))dx. \qquad (2)$$



16-rasm. **Matematik kutilma**

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki agar $M|\xi| < \infty$ bo'lsa, u holda $M\xi$ mavjud bo'ladi. Mabodo hamma yetarli katta x lar uchun $1 - F(x) > \frac{1}{x}$ bo'lsa, $M\xi$ mavjud bo'lmaydi. Masalan, Koshi qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorni o'rta qiymati mavjud emas. Haqiqatan ham

$$M|\xi| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1 + x^2}dx = \infty.$$

Agar $F(x)$ pog'onasimon funksiya bo'lsa, u holda (1) Stiltes integralini yig'indi shaklida yozish mumkin:

$$M\xi = \sum_{n} x_n P\{\xi = x_n\}.$$

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ zichlik funksiyaga ega bo'lsa, u holda

$$M\xi = \int xf(x)dx,$$

ya'ni boshqacha aytganda, $M\xi$ mexanik jihatdan, to'g'ri chiziqdagi birlik massani "og'irlik markaz" ini koordinatasiga teng, $b(x)$ *Borel* funksiyasi bo'lsa, u holdab $\eta = b(\xi)$ yana tasodifiy miqdor bo'ladi va

$$Mb(\xi) = \int b(\xi(\omega))P(d\omega) = \int b(x)dF(x) = \int xdF_{b(x)}(x).$$

Matematik kutilmani sodda xossalarini keltiramiz:

M.0. Doimo $|M\xi| \le M|\xi|$.

M.1. Agar C o'zgarmas bo'lsa, u holda $MC = C$.

M.2. Agar $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$, u holda $M|\xi + \eta| < \infty$ va $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

M.3. $M(C\xi) = CM\xi$, C-o'zgarmas.

M.4. Agar $\alpha \le \xi \le \beta$, u holda $\alpha \le M\xi \le \beta$.

M.5. Agar $\xi \ge 0$ va $M\xi = 0$, u holda bir ehtimollik bilan $\xi = 0$.

M.6. A hodisani ehtimolligini, matematik kutilma terminida quyidagi munosabat bilan yozishimiz mumkin:

$$P(A) = MI_A(\omega),$$

bu yerda $I_A(\omega)$ tasodifiy miqdor bo'lib, A hodisaning indikatori.

M.7. Aytaylik, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmasin. Agar $M\xi$ va $M\eta$ mavjud bo'lsa, u holda $M\xi\eta$ mavjud hamda

$M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Agar

$$M\xi\eta < \infty \text{ va } P(\xi = 0) \ne 1,\ P(\eta = 0) \ne 1,$$

u holda,

$$M\xi < \infty \text{ va } M\eta < \infty$$

Isboti. Faraz qilaylik,

$$M|\xi| = \int |x| P_\xi(dx) < \infty \text{ va } M|\eta| = \int |x| P_\eta(dy) < \infty.$$

Avvalgi bobda isbot qilingan

$$\int\int g(x_1, x_2)P_{\xi_1\xi_2}(dx_1, dx_2) = \int g_1(x_1)P_{\xi_1}(dx_1)\int g_2(x_2)P_{\xi_2}(dx_2) \qquad (*)$$

formulaga hamda ξ va η larning bog'liqmasligiga ko'ra quyidagi integral mavjud:

$$\int\int xyP_{\xi\eta}(dx, dy) = M\xi\eta = \int xP_\xi(dx) \cdot \int yP_\eta(dy) = M\xi \cdot M\eta.$$

Endi $M\xi\eta$ mavjud bo'lsin. Yana $0 \le |\xi|$ va $0 \le |\eta|$ funksiyalar uchun (*) formuladan foydalansak:

$$M|\xi| \cdot M|\eta| = M|\xi\eta| < \infty.$$

Shartga ko'ra $|\xi|$ va $|\eta|$ tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan, u holda

$$M|\xi| \ne 0 \text{ va } M|\eta| \ne 0$$

bundan esa $M|\xi|<\infty$ va $M|\eta|<\infty$.

1-misol. Bernulli sxemasi bilan bog'liq bo'lgan matematik kutilma. Aytaylik, tasodifiy miqdor ξ ikkita qiymat qabul qilsin:

$$\xi=\begin{cases}0\ ni & q\ \textit{extimollik bilan qabul qilsin;}\\ 1\ ni & p\ \textit{extimollik bilan qabul qilsin.}\end{cases}$$

bunda $p+q=1$, u holda

$$M\xi=0\cdot p=\{\xi=0\}+1\cdot p\{\xi=1\}=0\cdot q+1\cdot p=p.$$

2-misol. Eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan $\tau\geq 0$ tasodifiy miqdorni matematik kutilmasi:

$$M\tau=\int_0^\infty x\gamma e^{-\gamma x}dx=\frac{1}{\gamma}.$$

3-misol. Normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorni matematik kutilmasi

$$M\xi=\int xf(x)dx=\int x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+$$

$$+\frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz+a=a.$$

Demak, normal qonun bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdor uchun uning matematik kutilmasi a parametrga teng bo'lar ekan.

4-misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$M\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda.$$

Shunday qilib, λ parametr Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan iborat.

5-misol. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $M\xi=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{b+a}{2}$.

2-§. Dispersiya

Ta'rif. Tasodifiy miqdor ξ ning dispersiyasi deb

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2 \qquad (1)$$

songa aytiladi. Tasodifiy miqdor dispersiyasi, uning o'rta qiymati atrofida "sochilish" yoki "tarqalish" o'lchovi ekanligini bildiradi

$$D(\xi)=M\xi^2-2M\xi M\xi-(M\xi)^2=M\xi^2-(M\xi)^2 \qquad (2)$$

Dispersiyani $\min_b M(\xi-b)^2$ kabi aniqlash mumkin, biroq

$$D\xi=M\xi^2-\min(b^2-2bM\xi)=M\xi^2-(M\xi)^2,$$

chunki $\left(b^2-2bM\xi\right)$ ifoda minimum qiymatiga $b=M\xi$ da erishadi. $\sqrt{D\xi}$ miqdorga ***standart og'ishma*** deyiladi. Dispersiyaning mexanik mohiyati to'g'ri chiziqdagi birlik massaning inertsiya momentidan iborat.

1-misol. (a,σ) parametrli, normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi σ ga teng.

Haqiqatan ham $$D\xi=\int(t-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

Agar $\frac{t-a}{2}=z$ almashtirish bajarsak,

$$D\xi=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Bo'laklab integrallasak,

$$D\xi=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sigma^2.$$

2-misol. λ parametrli Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorni matematik kutilmasi $M\xi=\lambda$ edi, shu sababli

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}-\lambda^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=\lambda^2-\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Demak Puasson qonuni uchun: $D\xi=M\xi=\lambda$.

3-misol. $[a,b]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini topaylik

$$M\xi^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3!}.$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bundan ko'rinadiki, dispersiyasi $[a,b]$ oraliqni uzunligiga bog'liq. Oraliq qanchalik katta bo'lsa dispersiya shunchalik katta bo'ladi va uning qiymatlari shunchalik tarqoq bo'ladi. Shunday qilib dispersiya-tasodifiy miqdorni o'rta qiymati atrofida sochilish o'lchovi ekan.

4-misol. Bernulli qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini topaylik:

$$M\xi^2=M\xi=P \text{ chunki } \xi^2=\xi,$$
$$D\xi=p-p^2=pq,\ q=1-p.$$

5-misol. $\gamma>0$ parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan $\tau\geq 0$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini topaylik: Avvalgi paragrafdan ma'lumki, $M\tau=\frac{1}{\gamma}$.

Shuningdek, $M\tau^2=\gamma\int\limits_0^\infty x^2e^{-\gamma x}dx=\frac{2}{\gamma^2}$.

Endi $D\tau$ ni topaylik: $D\tau=M\tau^2-(M\tau)^2=\frac{2}{\gamma^2}-\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma^2}$.

6-misol. Agar tasodifiy miqdor Koshi qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda uning dispersiyasi mavjud emas, chunki o'rta qiymati mavjud emas

$$D|\xi|=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M|\xi|)^2\frac{1}{1+x^2}dx=\infty.$$

Dispersiyani ba'zi xossalari:

D1. $D\xi\geq 0$, $D\xi=0$ faqat va faqat shundaki, agar $p(\xi=c)=1$, bu yerda $c=const.$ Ravshanki $D\xi=M(\xi-M\xi)^2\geq 0$. Aytaylik, $p(\xi=c)=1$, u holda $M\xi=M\xi^2=c$. Demak, $D\xi=c^2-c^2=0$. Agar $D\xi=M(\xi-M\xi)^2=0$, u holda $(\xi-M\xi)^2\geq 0$. Demak, $p(\xi-M\xi=0)=1$ yoki $P(\xi=M\xi)=1$.

D2. $Dc\xi=c^2D\xi$, $D(\xi+c)=D\xi$.

Bu xossalar ta'rifidan kelib chiqadi.

D3. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmasa, u holda

$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$.

Darhaqiqat

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta)^2-(M\xi+M\eta)^2=M\xi^2+2M\xi M\eta+M\eta^2-$$
$$-(M\xi)^2-2M\xi M\eta-(M\eta)^2=M\xi^2-(M\xi)^2+M\eta^2-(M\eta)^2=D\xi+D\eta.$$

Demak, dispersiyaning additivligi faqat bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun emas, balki

$$M\xi\eta=M\xi M\eta$$

tenglikni qanoatlantiradigan hamma hollarda o'rinli bo'laveradi.

3-§. Yuqori tartibli momentlar va ular uchun tengsizliklar

1-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli momenti deb, diskret miqdorlar uchun $a_k^d=M\xi^k=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}x^k p\{\xi=k\}$ hamda miqdor uzluksiz miqdorlar uchun

$$a_k^c=M\xi^k=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx$$

ifodaga aytiladi.

2-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli absolut momenti deb, diskret miqdorlar uchun

$$m_k^d = M|\xi|^k = \sum_{-\infty}^{\infty} |x|^k P\{\xi = k\}$$

hamda uzluksiz miqdorlar uchun

$$m_k^c = M|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx$$

ifodaga aytiladi.

3-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy momenti, deb diskret miqdorlar uchun

$$v_k^a = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k P\{\xi = k\}$$

hamda uzluksiz miqdorlar uchun

$$v_k^c = M(\xi - M\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k f(x)dx$$

ifodaga aytiladi.

Agar $M\xi=0$ bo'lsa, u holda $v_k=a_k$ boshlang'ich momentga teng bo'ladi. Odatda ikkinchi μ_2 momentga ξ tasodifiy miqdorning ***o'rta kvadratik og'ishi*** deyiladi. Shuningdek 3-ta'rifdan ko'rinadiki $k=2$ bo'lsa, $\mu_2=M(\xi-M\xi)^2=D\xi$, ya'ni ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasiga teng bo'ladi va dispersiyadan chiqarilgan kvadratik ildizga ξ tasodifiy miqdorning ***o'rta kvadratik og'ishi*** deyiladi:

$$\sigma = \sqrt{D\xi}\ .$$

4-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning k-tartibli markaziy absolut momenti deb, diskret miqdorlar uchun

$$\mu_k^d = M|\xi - M\xi|^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x - M\xi|^k P\{\xi = k\}$$

va uzluksiz miqdorlar uchun

$$\mu_k^c = M|\xi - M\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M\xi|^k f(x)dx$$

ifodaga aytiladi. Xususan, agar $M\xi=0$ bo'lsa, k-tartibli markaziy absolut moment k-tartibli boshlang'ich absolut moment bilan ustma-ust tushadi.

Quyida ba'zi muhim tengsizliklarni ko'rib o'tamiz.

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Ikkinchi tartbli momentga ega ixtiyoriy ξ, η tasodifiy miqdorlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$M|\xi \cdot \eta| \le \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}\ . \qquad (1)$$

Isboti. Ma'lumki $|\xi\eta| \le \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ hamda $M\xi^2$ va $M\eta^2$ momentlarning chekliligidan $M|\xi \cdot \eta| < \infty$ kelib chiqadi. x va y o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan musbat aniqlangan kvadratik formaning

$$M(x|\xi| + y|\eta|)^2 = x^2 M\xi^2 + 2xyM(\xi\eta) + y^2 M\eta^2$$

diskriminanti $M\xi^2 M\eta^2 - (M|\xi\eta|)^2$ musbat bo'lgani uchun yuqoridagi tengsizlik kelib chiqadi. Agar $\eta = 1$ bo'lsa, (1) dan $M|\xi| \le \sqrt{M\xi^2}$ kelib chiqadi.

Shuningdek (1) munosabatdan muhim tengsizlik

$$\sqrt{M|\xi+\eta|^2} \le \sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2}$$

kelib chiqadi.

Darhaqiqat

$$M|\xi+\eta|^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 \le \left(\sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2}\right)^2.$$

Iensen tengsizligi. Agar $M|\xi| < \infty$ va $g(x)$ funksiya botiq bo'lsa, u holda

$$g(M\xi) \le Mg(\xi). \tag{2}$$

(2) tengsizlikning isboti. Agar $g(x)$ pastga botiq bo'lsa, u holda har bir y uchun shunday $g_1(x)$ topiladiki $g(x) \ge g(y) + (x-y)\, g_1(y)$ bo'ladi. Agar $x = \xi$, $y = M\xi$ desak va bu tengsizlikning har ikki tomonidan matematik kutilma olinsa $Mg(x) \ge g(M\xi)$ kelib chiqadi.

Lyapunov tengsizligi. Agar $0 < \tau < t$, u holda

$$\left(M|\xi|^\tau\right)^{\frac{1}{\tau}} \le \left(M|\xi|^t\right)^{\frac{1}{t}} \tag{3}$$

isbotlash uchun $\frac{t}{\tau} = s$. U holda $|\xi|^\tau = \eta$ deb olib va $|M\eta|^s \le M|\eta|^s$ Iensen tengsizligini qo'llab

$$\left(M|\xi|^\tau\right)^s \le M|\xi|^{\tau s},$$

ya'ni ($s\tau = t$ bo'lgani sababli)

$$\left(M|\xi|^\tau\right)^{\frac{t}{\tau}} \le M|\xi|^t.$$

Lyapunov tengsizligidan juda foydali tengsizliklar zanjiri hosil bo'ladi:

$$M|\xi| \le \left(M|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(M|\xi|^3\right)^{\frac{1}{3}} \le \ldots \le \left(M|\xi|^k\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{4}$$

Gelder tengsizligi. Aytaylik, $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$ va p,q sonlar $p>1$, $q>1$ bo'lib, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bo'lsin. Hamda $M\xi^p<\infty$ va $M\eta^p<\infty$ bo'lsa, u holda

$$M\xi\eta \le \left(M\xi^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(M\eta^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Isboti. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\xi_1 = \frac{\xi}{\left(M\xi^p\right)^{\frac{1}{p}}},\ \eta_1 = \frac{\eta}{\left(M\eta^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

hamda $M\xi_1 \cdot \eta_1 \le 1$ tengsizlikni isbotlaymiz. Biroq $\ln x$ yuqoriga qavariq, u holda ixtiyoriy $0 \le y \le 1$ uchun

$$\ln[x_1(1-y) + x_2 y] \ge (1-y)\ln x_1 + y \ln x_2 = \ln(x_1^{1-y} \cdot x_2^y),$$

ya'ni $x_1(1-y) + x_2 y \ge x_1^{1-y} \cdot x_2^y$.

Endi $x_1=\xi_1^p, x_2=\eta_1^q$, $y=\frac{1}{q}$, $1-y=\frac{1}{p}$ deb olinsa, u holda

$$\xi_1\eta_1 \le \frac{1}{p}\xi_1^p+\frac{1}{q}\eta_1^q$$

hamda $M(\xi_1\eta_1)\le\frac{1}{p}M\xi_1^p+\frac{1}{q}M\eta_1^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, chunki $M\xi_1^p=M\eta_1^q=1$.

Gelder tengsizligida $p=q=2$ deb olinsa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

4-§. Shartli matematik kutilma

Faraz qilaylik $<\Omega,\mathcal{F},P>$ ehtimolliklar fazosida B hodisa uchun $P(B)>0$. Yangi $<\Omega,\mathcal{F},P_B>$ ehtimolliklar fazosini qaraylik, bu yerda P_B – o'lchov ixtiyoriy $A\in\mathcal{F}$ uchun quyidagi tenglik bilan beriladi: $P_B(A)=P(A/B)$. P_B – o'lchov uchun P_1,P_2,P_3 ehtimollik xossalarini bajarilishi osongina tekshiriladi. Aytaylik, ξ tasodifiy miqdor $<\Omega,\mathcal{F},P>$ da aniqlangan, shuningdek ξ ni $<\Omega,\mathcal{F},P_B>$ da aniqlangan deb qarash mumkin. $<\Omega,\mathcal{F},P_B>$ fazoda ξ tasodifiy miqdorning B ga nisbatan shartli matematik kutilmasi deb

$$M(\xi/B)=\int_\Omega \xi(w)P_B(dw)$$

aytiladi. P_B - o'lchovning ta'rifiga muvofiq

$$M(\xi/B)=\int_\Omega \xi(w)P(dw)/B=\frac{1}{P(B)}\int_\Omega \xi(w)P(dw\cap B)=\frac{1}{P(B)}\int_\Omega \xi(w)P(dw).$$

Oxirgi integral $M\xi$ dan shunisi bilan farq qiladiki, bunda integrallash faqat B to'plam bo'yicha olinadi. Bu integralni quyidagicha belgilaymiz:

$$M(\xi;B)=\int_B \xi(w)P(dw)$$

u holda

$$M(\xi/B)=\frac{1}{P(B)}M(\xi;B).$$

$<\Omega,\mathcal{F},P_B>$ fazoda qaralayotgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x/B)=P_B(\xi<x)=P(\xi<x/B)$ iboratligini ko'rish qiyin emas. $F(x/B)$ funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning B shartidagi ***shartli taqsimot funksiyasi*** deyiladi. Shuningdek,

$$M(\xi/B)=\int xdF(x/B)$$

kabi yozish ham mumkin:

Agar ξ tasodifiy miqdorning σ- algebrasi $\sigma(\xi)$ B hodisaga bog'liq bo'lmasa, u holda ixtiyoriy

$A\in\sigma(\xi)$ uchun $P_B(A)=P(A)$.

Shunday qilib,

$$F(x/B)=F(x) \text{ va } M(\xi/B)=M\xi;\ M(\xi;B)=P(B)\cdot M\xi.$$

Aytaylik, kesishmaydigan $\{B_n\}$ hodisalar ketma-ketligi ixtiyoriy n uchun $\bigcup B_n=\Omega$ va $P(B_n)>0$ bo'lsin. U holda

$$M\xi=\int\limits_{\Omega}\xi(w)P(dw)=\sum_n\int\limits_{B_n}\xi(w)P(dw)=$$

$$=\sum_n M(\xi;B_n)=\sum_n P(B_n)M(\xi/B_n). \qquad (1)$$

(1) ni unga ekvivalent ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$M\xi=\sum_{n=1}^{\infty}P(\eta=x_n)M(\xi/\eta=x_n), \qquad (1')$$

bu yerda $(\eta=x_n)=B_n$. Yoki yana ham soddaroq quyidagicha yozish mumkin:

$$M\xi=M[M(\xi/\eta)]. \qquad (1'')$$

(1), (1'), (1'') ifodalarga matematik kutilmalar uchun to'la ehtimollar formulasi deyiladi.

Shartli matematik kutilmaning xossalari:

M1°. Agar $\xi\perp\eta$ u holda $M(\xi/\eta)=M\xi$ (2)

M2°. $M(\xi+\xi/\eta)=M(\xi/\eta)+M(\xi/\eta)$; (3)

M3°. $M[g(\eta)/\eta]=g(\eta)$; (4)

M4°. $M[g(\eta)\cdot\xi/\eta]=g(\eta)\cdot M[\xi/\eta]$. (5)

(2)-(5) tenglik ixtiyoriy $\Omega\ni w$ uchun o'rinli. (2)-(5) xossalarining isboti shartli matematik kutilmaning ta'rifidan kelib chiqadi.

1-misol. Aytaylik, qurilmaning xizmat vaqti ξ tasodifiy miqdordan iborat bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x)$ dan iborat bo'lsin. Qurilmaning a vaqt ishlagani ma'lum bo'lsin. Qolgan xizmat vaqti qanaqa taqsimlangan va uning matematik kutilmasi nimaga teng?

Bu misolda

$P(\xi-a\geq x/\xi\geq a)$ va $M(\xi-a/\xi>a)$ larni topishimiz kerak.

Albatta $P(a)=P(\xi\geq a)>0$ deb talab qilinadi. Yuqoridagi formulalarga asosan

$$P(\xi-a\geq x/\xi\geq a)=\frac{P(x+a)}{P(a)},$$

$$M(\xi-a/\xi\geq a)=\frac{1}{P(a)}\int_0^{\infty}xdF(x+a).$$

Ko'pgina amaliy masalalarni hal qilishda, xususan ko'p sondagi ishonchli elementlardan tuzilgan murakkab sistemalarning ishlash davri haqida gap ketganda ξ ning taqsimotini eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan deb qarash mumkin:

$$P(x)=P(\xi\geq x)=e^{-\lambda x},\ \lambda\geq 0.$$

Bu hodisaning mohiyati Puasson teoremasining va puasson protsesslari qaralganda oydinlashadi. Biroq eksponensial taqsimot uchun sistemasini qolgan xizmat muddatining taqsimotini

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a) = \frac{P(x+a)}{P(x)} = e^{-\lambda x} = P(x) \qquad (6)$$

to'xtovsiz ishlash vaqtining taqsimoti bilan ustma-ust tushadi. (4) munosabatini uzluksiz funksiyalar sinfida faqat eksponentsal taqsimot uchun o'rinli, shu sababli (4) tenglikka eksponensial taqsimotining ***xarakterlash xossasi*** deyiladi. (6) tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$P(x+a)=P(x)\,P(a).$$

5-§. Korrelyatsiya koeffitsiyenti va boshqa sonli xarakteristikalar

Tasodifiy miqdorlarni o'rganishda ularning bir-biriga qay darajada bog'langanligini va bog'lanish xarakterini bilish juda muhimdir.

1-ta'rif. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar har birining taqsimlanish qonuni ikkinchisining qanaqa qiymati qabul qilganiga bog'liq bo'lmasa ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyishadi. Aks holda ξ va η miqdorlar ***bog'liq*** deyiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ ya'ni bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyasi, har birining zichlik funksiyalarning ko'paytmasiga teng bo'ladi. Misol (ξ,η) sistemaning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

bo'lsa, ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liq yoki bog'liqmasligini aniqlaylik.

Yechish. Maxrajni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

funksiyani ikkita bir-biriga bog'liq bo'lmagan ko'paytuvchilarga ajratilganligidan ξ va η miqdorlar bog'liqmasligi kelib chiqadi. Bu keltirilgan kriteriyda tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasi ma'lum, ko'pincha amalda (ξ,η) sistemaning taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, ularning har birining taqsimot qonuni ma'lum bo'ladi va ularga asoslanib ξ va η miqdorlarning birgalikdagi taqsimot qonunini topishga to'g'ri keladi hamda bularga asoslanib ularning bog'liqmasligi ustida gapirish imkoni vujudga keladi.

Ehtimolliklar nazariyasi kursida ko'pincha "***stoxastik***" bog'liq tushunchasiga duch kelamiz. Agar η miqdor ξ miqdor bilan stoxastik bog'liq bo'lsa, u holda ξ ni qiymatini bila turib, η ning aniq qiymatini aytib bo'lmaydi, balki ξ miqdor qanaqa qiymat qabul qilishligining taqsimoti qonunini aytish mumkin bo'ladi.

Mabodo ξ va η tasodifiy miqdorlar stoxastik bog'liq bo'lsa, ya'ni ξ ning o'zgarishi bilan η miqdor o'zgarib borsa. Masalan ξ-tavakkal olingan kishini bo'yi η-uning og'irligi bo'lsin. Ravshanki, ξ va η miqdorlar ma'lum stoxastik qonuniyat asosida bog'liq. Umuman olganda, bo'yi uzun odamning og'irligidan katta bo'ladi.

Masalan odamning bo'yi bilan og'irligi o'rtasidagi taxminiy bog'lanishni quyidagicha yozish mumkin: $\eta(kg)=\xi(sm)-100$.

Bu tipdagi formulalar, umuman olganda ommaviy qonuniyatlarning biror o'rtachasi uchun o'rinlidir.

Aytaylik, ξ-tavakkal tanlangan kishining og'irligi, ζ esa uning yoshi bo'lsin. Oydinki, keksa kishilar uchun amalda ξ va ζ bog'liqmas deb qarash mumkin. Biroq chaqaloqlar uchun ξ va ζlar o'zaro bog'liq bo'ladi.

Ikkita tasodifiy miqdorlar sistemasining sonli xarakteristikalari

1. (ξ,η) sistemaning k,s - boshlang'ich aralash momenti deb ξ^k va η^s miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasiga aytiladi: $\alpha_{k,s}=M[\xi^\eta\eta^s]$.

2. (ξ,η) sistemaning k,s - markaziy aralash moment deb quyidagi miqdorga aytiladi: $\mu_{k,s}=M[(\xi-m_\xi)^k(\eta-m_\eta)^s]$,

bu yerda $m_\xi=M\xi$, $m_\eta=M\eta$

Momentlarni hisoblash uchun ba'zi muhim formulalarni keltiramiz. Diskret tasodifiy miqdorlar uchun

$$a^d_{k,s}=\sum_i\sum_j\xi_i^k\eta_j^sP_{ij}\,;\ v^d_{k,s}=\sum_i\sum_j\left(\xi_i-m_\xi\right)^k\left(\eta_j-m_\eta\right)^sP_{ij}$$

bu yerda $P_{ij}=P\{(\xi=\xi_i)(\eta=\eta_j)\}$ ifoda $-(\xi,\eta)$ sistemaning (ξ_i,η_i) qiymatlarni qabul qilish ehtimolligi. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun

$$a^c_{k,s}=\int\int_{-\infty}^{\infty}x^ky^sf(x,y)dxdy;\ v^c_{k,s}=\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_\xi\right)^k\left(y-m_\eta\right)^sf(x,y)dxdy$$

bu yerda $f(x,y)$ funksiya (ξ,η) sistemaning zichlik funksiyasi. Amalda quyidagi momentlar ko'p uchraydi:

$$m_\xi=a_{1,0}=M[\xi^1\eta^0]=M\xi;\ m_\eta=a_{0,1}=M[\xi^0\eta^1]=M\eta.$$
$$D_\xi=\gamma_{2,0}=M[(\xi-m_\xi)^2(\eta-m_\eta)^0]=M[(\xi-m_\xi)^2]=D\xi.$$
$$D_\eta=\gamma_{0,2}=M[(\xi-m_\xi)^0(\eta-m_\eta)^2]=M[(\eta-m_\eta)^2]=D\eta.$$

Ta'rif. ξ va η tasodifiy miqdorlarning ***kovariatsiyasi*** yoki ***korrelyatsion momenti*** deb $M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]$ ga aytiladi va $cov(\xi,\eta)$ kabi belgilashadi. Uzluksiz taqsimlangan ξ va η tasodifiy miqdorlarning ***kovariatsiyasi*** (yoki korrelyatsion momenti) ushbu formula bilan

$$cov(\xi,\eta)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-m_\xi\right)\left(y-m_\eta\right)f(x,y)dxdy=k^c_{\xi,\eta} \qquad (1)$$

hisoblanadi. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorlar kovariatsiyasi esa

$$cov(\xi,\eta)=\sum_i\sum_j\left(\xi_i-m_\xi\right)\left(\eta_j-m_\eta\right)P_{i,j}=k^d_{\xi,\eta}$$

formula bilan topiladi. Shunday qilib

$$cov(\xi,\eta)=M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)].$$

Matematik kutilma ta'rifidan foydalanib yuqoridagi ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$cov(\xi,\eta)=M\xi\eta-M\xi M\eta.$$

Bundan

$$cov(\xi,\xi)=D\xi \text{ va } cov(\xi,\eta)=cov(\eta,\xi)$$

Dispersiya ta'rifidan

$$D(\xi+\eta)=M[(\xi-M\xi)^2+(\eta-M\eta)^2]+2M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)].$$

Hamda kovariatsiya ta'rifidan ixtiyoriy (bog'liq bo'lishi ham mumkin) ξ va η tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2cov(\xi,\eta).$$

Teorema. Agar $\xi_1, \xi_2,..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar uchun

$$cov(\xi_i,\xi_j)=\sigma_{ij} \quad (i,j=\overline{1.n}),$$

mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ larda

$$D\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sigma_{i,j}\alpha_i\alpha_j \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Quyidagicha

$$\eta_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k\right)$$

belgilash kiritamiz. Hamda $\eta_n-M\eta_n$ va $(\eta_n-M\eta_n)^2$ ayrimlarni hisoblab

$$\eta_n-M\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(\xi_k-M\xi_k)$$

va

$$(\eta_n-M\eta_n)^2=\sum_{k,s=1}^{n}\alpha_k\alpha_s(\xi_k-M\xi_k)(\xi_s-M\xi_s)$$

olamiz. Oxirgi tenglikdan matematik kutilma olib teoremaning isbotini hosil qilamiz.

Ixtiyoriy $\xi_1, \xi_2,..., \xi_s$ $(s=1,2,...)$ tasodifiy miqdorlar uchun isbot qilingan teoremadan quyidagi determinant musbat:

$$\begin{vmatrix} cov(\xi_1,\xi_1) & cov(\xi_1,\xi_2) & \dots & cov(\xi_1,\xi_s) \\ cov(\xi_2,\xi_1) & cov(\xi_2,\xi_2) & \dots & cov(\xi_2,\xi_s) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ cov(\xi_s,\xi_1) & cov(\xi_s,\xi_2) & \dots & cov(\xi_s,\xi_s) \end{vmatrix} \geq 0$$

chunki (2) ning o'ng tomonini $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ o'zgaruvchilarning kvadratik formulasi sifatida qarash mumkin. Ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ larda (2) ning chap tomonidagi dispersiya musbat, shuning uchun (2) ning o'ng tomonidagi kvadratik forma musbat aniqlangan.

Algebradan ma'lumki, kvadrat forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun, uning koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsaning hamma bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarli.

Yuqoridagi determinantni $s=2$ bo'lganda, $\xi_1=\xi$ va $\xi_2=\eta$ belgilash kiritib, quyidagicha yozishimiz ham mumkin:

$$\begin{vmatrix} D\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & D\eta \end{vmatrix} = D\xi D\eta - cov^2(\xi,\eta) \geq 0,$$

bundan

$$|cov(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D\xi \cdot D\eta}.$$

Demak, ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmasligi uchun

$$cov(\xi,\eta) = 0$$

tenglikni o'rinli bo'lishi zarur. Shunday qilib, agar $cov(\xi,\eta) \neq 0$, u holda ξ va η bog'liq bo'ladi ξ va η tasodifiy miqdorlarning bog'liqlik darajasini miqdoriy jihatdan xarakterlash maqsadida quyidagicha aniqlanadigan

$$r_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \quad \sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \text{ va } \sigma_\eta = \sqrt{D\eta}.$$

korrelyatsiya koeffitsiyentidan foydalanishadi. Bu xarakteristikalarning ma'nosini va ahamiyatini tushuntirib o'taylik. Tasodifiy miqdorlar sistemasining korrelyatsion momenti ξ, η miqdorlarning tarqoqligini hamda ularning o'rtasidagi bog'lanish xarakterlaydi. Bunga ishonish uchun quyidagi faktni isbotlaymiz: bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlarning korrelyatsion momenti nolga teng.

Isbotini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun keltiramiz. Aytaylik, ξ, η bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning zichlik funksiyasi $f(x,y)$ bo'lsin. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun biz ko'rdikki

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (3)$$

bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$ mos ravishda ξ va η miqdorlarning zichlik funksiyalari. (2) ifodani (1) ga qo'ysak,

$$K_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_\eta) f_2(y) dy$$

integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx = v_1^c$$

bu birinchi markaziy momenti, shuning uchun $v_1^c = m_\xi - m_\xi = 0$.

1-masala. Ikkita o'yin soqqasi (kubik) tashlandi. Agar ochkolar yig'indisi toq son shartida ikkala kubikdagi ochkolar yig'indisi 11(A hodisa) chiqishi ehtimolligi nechaga teng?

Yechish. Ikkita kubik tashlangandagi barcha ochkolar quyidagi 17-rasmdagi jadvalda keltirilgan.

(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)
(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)
(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)	(4.5)	(4.6)
(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	(5.6)
(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)

17-rasm

Har bir katakdagi 1-o'rindagi raqam bu 1-kubikda chiqqan ochkoni ko'rsatadi, 2-o'rindagi raqam esa 2-kubikda chiqqan ochkoni ko'rsatadi. Hamma holatlar 36, A hodisa 2 ta holatda ro'y beradi. Shunday qilib, shartsiz ehtimollik $P(A)=2/36$. Agar B hodisa ro'y bersa, u holda 18 tadan (36 ta emas) birida ro'y beradi $P(A/B)=2/18=1/9$ ga teng.

Shu sababli ikkinchi ko'paytuvchi ham nolga teng, demak bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun $K_{\xi,\eta}=0$. Ta'rifga ko'ra korrelyatsion moment tasodifiy miqdorlarning faqat bog'liqligini emas, bundan tashqari ularning tarqoqligini ham ko'rsatadi. Korrelyatsiya koeffitsiyenti xossalari:

$R1$. Bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun korrelyatsiya koeffitsiyenti nolga teng, chunki bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun $K_{\xi,\eta}=0$.

$R2$. $|r_{\xi,\eta}|\le 1$ haqiqatdan ham

$$0\le D\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}\pm\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{M\eta}}\right)=M\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}\pm\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)^2=2\pm 2\cdot r_{\xi,\eta}.$$

Bundan $|r_{\xi,\eta}|\le 1$ kelib chiqadi.

$R3$. $|r_{\xi,\eta}|\le 1$ faqat va faqat, $A\ne 0$ va B sonlar mavjud bo'lganda, $P(\eta=A\xi+B)=1$ bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $P(\eta=A\xi+B)=1$. Hamda $M\xi=a$ va $\sqrt{D\xi}=\beta$ deb belgilaymiz, u holda

$$r_{\xi,\eta}=M\frac{\xi-\alpha}{\beta}\frac{A\xi+B-A\alpha-B}{|A|}=signA.$$

Endi $|r_{\xi,\eta}|=1$ deb olamiz. Masalan aytaylik $r_{\xi,\eta}=1$.
U holda

$$D\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}=c\right)=0.$$

Bu esa dispersiyaning xossasiga muvofiq faqat va faqat

$$P\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}=c\right)=1$$

bajarilgandagina o'rinli.

Agar $r_{\xi,\eta}=-1$ u holda $D\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)$ ni tekshirib

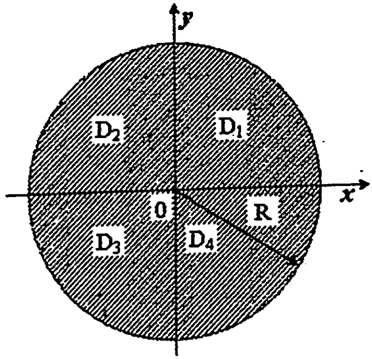
$P\left(\frac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta-M\eta}{\sqrt{D\eta}}=c\right)=1$ olamiz.

Agar tasodifiy miqdorlarning korrelyatsion momenti nolga teng bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorlar ***korrelyatsion bog'lanmas*** deyiladi.

Tasodifiy miqdorlarning bog'liqmasligi tushunchasi ularning korrelyatsion bog'lanmasligi tushunchasi bilan ekvivalentmi?

Yuqorida isbot qildikki tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmasa, u holda doimo ular korrelyatsion bog'lanishga ega bo'lmaydi, ya'ni $K_{\xi,\eta}=0$. Aksincha, tasodifiy miqdorlarning korrelyatsion bog'lanmaganligidan ularning bog'liqmasligi kelib chiqadimi? Umuman aytganda yo'q!

R4. $K_{\xi,\eta}=0$ sharti tasodifiy miqdorlar bog'liqmasligi uchun faqat zaruriy shart, biroq yetarli emas. Tasodifiy miqdorlarning bog'liqmasligidan ularning korrelyatsion bog'liqmasligi kelib chiqadi, biroq korrelyatsion bog'liqmasligidan ularning bog'liqmasligi kelib chiqmaydi.



18-rasm. **Korrelyatsion bog'lanishga oid rasm**

Misol. Markazi koordinatalar boshida bo'lgan radiusi R ga teng doirani olamiz(18-rasm). Doirada tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar sistemasi (ξ,η) ni qaraylik. (ξ,η) miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x,y)=\begin{cases} a, & agar \quad x^2+y^2<R^2, \\ 0, & agar \quad x^2+y^2>R^2 \end{cases}$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int\int_{(D)} adxdy=1$$

shartidan $a=\dfrac{1}{\pi R^2}$ ni topamiz. Bu misolda ξ va η bog'liq miqdorlar. Haqiqatdan ham, masalan $\xi=0$, u holda η miqdor $-R$ dan to R gacha hamma qiymatlarni bir ehtimollik bilan qabul qiladi, agar $\xi=R$ bo'lsa, u holda η faqat yagona qiymatnigina qabul qiladi. Umuman η ning qabul qiladigan qiymatlari diapazoni ξ ning qanaqa qiymat qabul qilganligiga bog'liq. Bu miqdorlar korrelyatsion bog'lanishda bo'ladimi? Endi $m_\xi=m_\eta=0$ e'tiborga olib, korrelyatsion bog'lanishlarni hisoblaymiz:

$$K_{\xi,\eta}=\int_{(D)} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\int\int_{(D)} xydxdyd \qquad (4)$$

integralni hisoblash uchun integrallash sohasini (D doirani) D_1,D_2,D_3,D_4 sektorlarga bo'lamiz. Integral ostidagi funksiya D_1 va D_3 sektorlarda musbat. D_2 va D_4 sektorlarda manfiy; absolut qiymatlari bo'yicha bu sektorlardagi integrallar bir-biriga teng, bundan (4) integralni nolga tengligi kelib chiqadi hamda (ξ,η) miqdorlar korrelyatsion bog'liq emas.

Shunday qilib (ξ,η) larning korrelyatsion bog'liqmasligidan ularning bog'liqmasligi kelib chiqmaydi.

Korrelyatsion koeffitsiyenti faqat chiziqli bog'lanishigina xarakterlaydi. Tasodifiy miqdorlarning chiziqli ehtimollik bog'lanishi quyidagidan iborat: tasodifiy miqdorlardan birining o'sishi bilan ikkinchisi chiziqli qonun bo'yicha o'sadi. Korrelyatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorlar o'rtasidagi chiziqli bog'lanish zichligi darajasini xarakterlaydi.

Agar $r_{\xi,\eta}>0$ bo'lsa, ξ va η lar musbat korrelyatsion bog'lanishga ega deyiladi, agar $r_{\xi,\eta}<0$ bo'lsa manfiy korrelyatsiya haqida gapiriladi. Tasodifiy miqdorlar o'rtasida musbat korrelyatsion bog'lanish-bir tasodifiy miqdorning o'sishi ikkinchisini ham o'sishiga olib kelishini ko'rsatsa, manfiy korrelyatsiya esa bir tasodifiy miqdorning o'sishi ikkinchisining kamayishiga olib kelishini ko'rsatadi. Musbat va manfiy korrelyatsion bog'lanishga misollar keltiraylik.

1. Odamning bo'yi va og'irligi musbat korrelyatsion bog'lanishga ega.
2. Qurilmaning to'xtovsiz ishlashi vaqti bilan qurilmani ishga tayyorlashga ketgan vaqt orasida musbat korrelyatsion bog'lanishga ega.

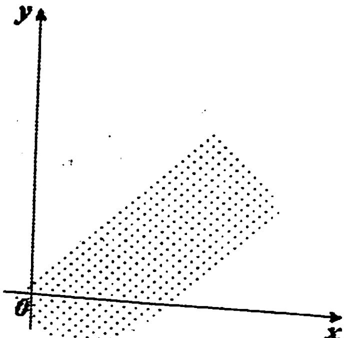
Misol. Uzatuvchi qurilmani ko'raylik, ξ tasodifiy miqdor yuboriladigan signal bo'lsin. Turli shovqinlarga ko'ra qurilma $\eta=\alpha\xi+\Delta$ (α-kuchaytirish koeffitsiyenti, Δ - shovqin) miqdorni qabul qiladi.

Δ va ξ tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deb faraz qilaylik. Aytaylik: $M\xi=a$, $D\xi=1$, $M\Delta=0$, $D\Delta=\sigma^2$.

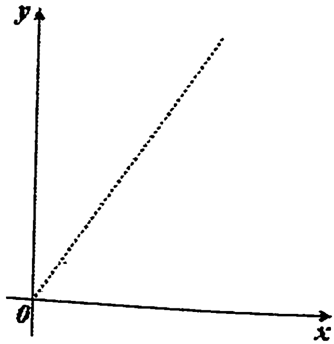
Biz ξ va η larning korrelyatsiya koeffitsiyentini hisoblaylik:

$$\rho(\xi,\eta)=M\left[(\xi-a)\cdot\frac{\alpha\cdot\xi+\Delta-\alpha a}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}\right]=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\sigma^2}}.$$

Agar α ga nisbatan σ - katta son bo'lsa, u holda $\rho=0$ hamda η signal ξ ga bog'liqmas. Agar α ga nisbatan σ kichik bo'lsa, u holda $\rho\approx1$ hamda η ga ko'ra ξ ni tiklash mumkin.

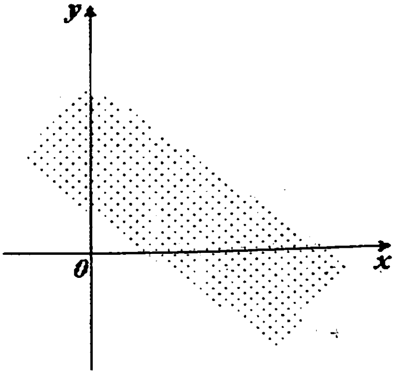


19-rasm. **Musbat korrelyatsion bog'lanishga oid shakl**

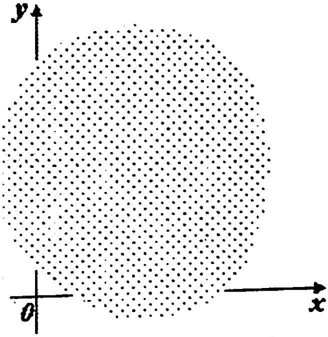


20-rasm. **Yaqqol chiziqli bog'lanishga oid shakl**

Kuzatilayotgan miqdorlar jufti 19-rasmdagidek bog'langan bo'lsa, bu miqdorlar o'rtasida musbat korrelyatsion bog'lanish mavjudligini ko'rsatadi. 20-rasm esa yaqqol chiziqli bog'lash mavjudligini ko'rsatadi. 21-rasmda miqdorlar tarqoq-manfiy korrelyatsion bog'lanishga ega ekanligini bildirsa, 22-rasm esa hech qanday korrelyatsion bog'lanish yo'qligini ko'rsatadi.



21-rasm. **Manfiy korrelyatsion bog'lanishga oid shakl**



22-rasm. **Hech qanday bog'lanishga ega emas**

6-§. Kelajakka bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi

Aytaylik, $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ ehtimolliklar fazosida bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdor $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketligi va butun qiymatli tasodifiy miqdor $\nu \geq 0$ berilgan bo'lsin. $n-k+1$ta $\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlardan tuzilgan σ-algebrani $\mathcal{F}_{k,n}=\sigma(\xi_k, \ldots, \xi_n)$ kabi belgilaymiz.

Agar $\{\nu \leq n\}$ hodisa $\mathcal{F}_{n+1,\infty}$ ga bog'liq bo'lmasa, u holda ν tasodifiy miqdor kelajakka bog'liqmas deyiladi. Agar $\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_{1,n}$ bo'lsa, ν ga **markov tipidagi tasodifiy miqdor** yoki ***tutash moment*** deyiladi. Boshqacha aytganda, bu holda $\xi_1, \ldots, \xi_n$ qiymatlarni bila turib $\{\nu \leq n\}$ hodisani ro'y berganligini yoki bermaganligini aytish mumkin. Markov tipidagi $\{\nu \leq n\}$ (yoki $\{\nu > n\}$) tasodifiy miqdorlar bilan $\mathcal{F}_{n+1,\infty}$ dan olingan ixtiyoriy tasodifiy A hodisalar bog'liqmas, ya'ni bog'liq bo'lmagan ξ_k ketma-ketlik uchun markov miqdorlar kelajakka bog'liqmas.

Misol. Aytaylik, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikda N dan katta yoki teng, ν - birinchi tasodifiy miqdorlar raqami, ya'ni

$$\nu = \inf\{k: \xi_k \geq N\}.$$

Agar ξ_n bog'liq bo'lmasa, u holda ravshanki, ν-kelajakka bog'liq bo'lmaydi, chunki hodisalar

$$\{\nu \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\xi_n \geq N\} \in \mathcal{F}_{1,n}.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ ketma-ketliklarga bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy ν tasodifiy miqdor kelajakka bog'liq bo'lmagan, yuqorida kiritilgan ta'rif ma'nosida, tasodifiy miqdor bo'lishi ravshandir.

"Markov" termini markov zanjirlari va Markov jarayonlari o'tilganda yana ham ravshan bo'ladi. Quyidagi masala bilan tanishib chiqamiz.

Aytaylik, ξ_n korxona mahsulotlarining k-partiyasidagi yaroqsiz mahsulotlar ulushi bo'lsin. Mahsulotlarning sifatini statistik nazorat qilish quyidagidan iborat. Agar partiyani ketma-ket tekshirganda, n ning biror qiymatida, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ yig'indi avvaldan berilgan $A+b\cdot n$ darajasidan ortib ketsa hamma mahsulot qaytarib yuboriladi.

Ushbu hodisa

$$\nu=\min\{n: S_n \geq A+b\cdot n\}$$

ro'y bergan partiya nomeri ν hamma tekshirishlar protsedurasining to'xtash momentidir. Uzoq tekshirishlarni kamaytirish maqsadida to'xtash momenti yuqoridagi ma'noda quyidagicha olinadi:

$$\nu^*=\min\{n: S_n \leq -A+b\cdot n\},\ A>0$$

yuqori ehtimollik bilan hamma mahsulotlarning sifatlilik darajasining kafolatlash maqsadida (masalan ξ_n bir xil taqsimlangan deb) M soni yetarlicha katta qilib tanlanadi.

ν va ν^* miqdorlar markovlik shartini yoki to'xtash momenti ta'rifini qanoatlantirishi ravshan.

Aytaylik, $S_\nu=\xi_1+\ldots+\xi_\nu$. Bu tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisidn iborat.

Kolmogorov-Proxorov teoremasi. Aytaylik, butun qiymatli musbat ν tasodifiy miqdor kelajakka bog'liq bo'lmasin. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) M|\xi_j| < \infty, \tag{5}$$

u holda

$$MS_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) M\xi_k. \tag{6}$$

Agar $\xi_k \geq 0$, u holda (5) shart ortiqcha.

Isboti. $MS_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} M(S_\nu : \nu = n) = \sum_{n=1}^{\infty} M(S_n : S = n) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} M(\xi_k : \nu = n) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_l : \nu \geq k). \tag{7}$$

Yig'indi belgilarini o'rinlarini almashtirish qonuniy ekanligini keyinroq ko'ramiz. Biroq $\{\nu \geq k\}=\{\nu > k-1\}$ hodisalar $\mathcal{F}_{k,\infty}$ "σ-algebraga" bog'liqmas, u holda $\sigma(\xi_n)$ ga bog'liq bo'lmaydi. Shunday qilib

$M(\xi_k: \nu \geq k)=P\{\nu \geq k\} M\xi_k$, bundan (6) kelib chiqdi.

Teorema shartiga ko'ra

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{n} M(|\xi_k|; \nu = n) = \sum_{k=1}^{\infty} M(|\xi_k| \nu \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) M|\xi_k| < \infty,$$

qatorlarni har biri absolut yaqinlashuvchiligi sababli (7) dagi yig'indi belgisining o'rinlarini almashtirish qonuniydir. Agar $\xi_k \geq 0$, u holda hamma qo'shiluvchilar musbat va yig'indi belgilarining o'rinlarini almashtirish ixtiyoriy holda ham qonuniydir.

Natija. (Bald tengligi). Agar $M|\xi_k| < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan bo'lib, kelajakda bog'liq bo'lmasa va ν tasodifiy miqdor uchun $M\nu < \infty$ bajarilsa, u holda

$$MS_\nu = M\xi_1 M\nu. \qquad (8)$$

Isboti. (8) formula $\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P(\nu = i) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(\nu = i) = M\nu$ tenglikdan kelib chiqadi.

Misol. Zanjir reaksiyasi sxemasi. Faraz qilaylik boshida bitta zarrachaga egamiz, bu zarracha q ehtimollik bilan yo'q bo'lib ketadi yoki $p=1-q$ ehtimollik bilan m ta shunaqa zarrachaga aylanadi. Ya'ni avloddagi har bir zarracha boshqa zarrachalar taqdiriga bog'liq bo'lmagan holda o'zlarini xuddi shunday tutadi. n - chi avloddagi ζ_n zarrachalar sonini matematik kutilmasi nimaga teng? m va 0 qiymatlarni mos ravishda p va q ehtimollik bilan qabul qiluvchi bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan "ikki" karrali $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{k=1,n=1}^{\infty,\infty}$ ketma-ketlikni qaraylik. Ravshanki $\left\{\xi_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty}, \left\{\xi_k^{(2)}\right\}_{k=2,\ldots}^{\infty}$ ketma-ketliklar o'zaro bog'liqmas. Bu ketma-ketliklar yordamida $\zeta_n (\zeta=1)$ tasodifiy miqdorlarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\zeta_1 = \xi_{\zeta_0}^{(1)} = \xi_1^{(1)}$$

$$\zeta_2 = \xi_2^{(2)} + \ldots + \xi_{\zeta_1}^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

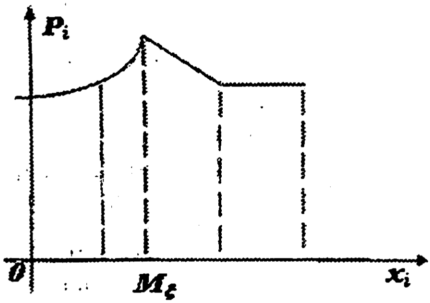
$$\zeta_n = \xi_n^{(n)} + \ldots + \xi_{\zeta_{n-1}}^{(n)}$$

bu tenglikdagi ζ_n uchun ζ_{n-1} qo'shiluvchilar soni "ota-ona zarrachalar" sonidan iborat. Chunki $\xi_k^{(n)}$ ketma-ketlik ζ_{n-1} ga bog'liqmas hamda $M\xi_k^{(n)} = pm$, u holda Vald tengligiga ko'ra $M\zeta_n = M\xi_1^{(n)} \cdot M\zeta_{n-1} = pmM\zeta_{n-1} = (pm)^n$.

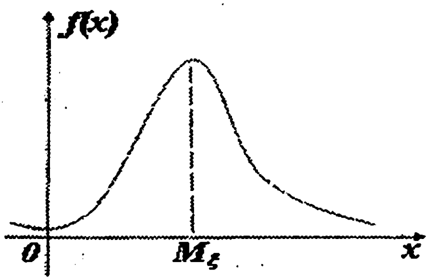
7-§. Moda va boshqa sonli xarakteristikalar

Ba'zan quyidagi xarakteristikalar ham ehtimolliklar nazariyasida va uning tatbiqlarida ishlatiladi.

Ta'rif. Uzluksiz taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning modasi deb, $p(x)$ zichlik funksiyani maksimumga erishadigan argument qiymatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi: M_ξ

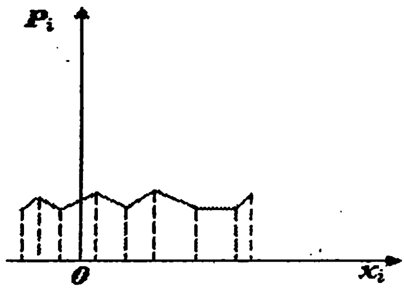


23-rasm. **Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorni moddasiga oid rasm**

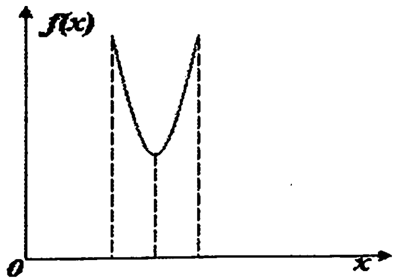


24-rasm. **Uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdorni moddasiga oid rasm**

M_ξ. Agar shu nuqta bitta bo'lsa birmodal (unimodal), (23- va 24-rasmlar) ikkita bo'lsa ikki modal (bimodal), agar bir nechta bo'lsa, ***ko'pmodal (polimodal)*** (25-rasm) deyiladi. Agar zichlik funksiyasi bitta ham maksimal qiymatga erishmasa ***nomodal*** yoki ***antimodal*** deyiladi (26-rasm).



25-rasm. **Polimodal taqsimotni xarakteristikasiga oid rasm**

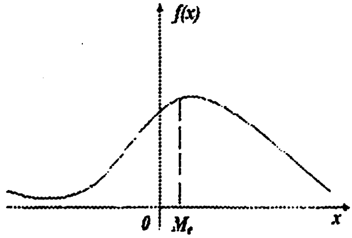


26-rasm. **Antimodal taqsimotni xarakteristikasiga oid rasm**

Tasodifiy miqdorni modasi ta'rifidan ko'rinadiki, $f(x)$ zichlik funksiya shu nuqtada maksimumga erishadi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning M_e medianasining quyidagicha geometrik tasvirlash mumkin (27-rasm).

Ta'rif. p ehtimollik kvantilli deb $P(x_p)=p$ tenglamaning yechimiga aytiladi. Agar $p=\frac{1}{2}$ bo'lsa, bunday kvantilga taqsimotning **medianasi** deyiladi va M_e kabi belgilanadi.



27-rasm

Demak, $F(x)$ taqsimotning medianasi uning argumentining shunday $x=M_e$ qiymatiki, uning uchun $F(M_e)\leq 0,5\leq F(M_e+0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni mediana $f(x)$ zichlik funksiya bilan chegaralangan yuzani teng ikkiga bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning medianasi doimo mavjud (xususan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi mavjud bo'lmasa ham).

Teorema. Agar uzluksiz F^c taqsimot uchun $M|\xi-\xi_0|$–absolut momentda $\xi_0=M_e$ deb olinsa, u holda $M|\xi-M_e|$ minimal qiymatga erishadi.

Teoremaning isboti ushbu tenglikdan kelib chiqadi:

$$M|\xi-\xi_0|=\begin{cases} M|\xi-M_e|+2\int\limits_{M}^{\xi}(\xi_0-t)dF(t), & agar \quad \xi_0>M_e \\ M|\xi-M_e|+2\int\limits_{\xi_0}^{m}(t-\xi_0)dF(t), & agar \quad \xi_0<M_e \end{cases}$$

biroq har ikki holda, hamda ikkinchi qo'shiluvchi $\xi_0\neq M_e$ da musbat normal taqsimotining medianasi uning matematik kutilmasiga teng.

Ta'rif. Variatsiya koeffitsiyenti deb quyidagiga aytiladi:

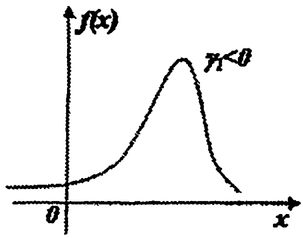
$$v=\frac{\sigma}{m_1}\%, \text{ bu yerda } m_1=\int xf(x)dx, \quad \sigma=\sqrt{D\xi}.$$

Variatsiya koeffitsiyenti tasodifiy miqdorning o'zgaruvchanligini xarakterlaydi hamda foizlarda ifodalanadi.

Ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning assimetriya koeffitsiyenti deb, quyidagiga aytiladi:

$$\gamma_1=\frac{v_3}{\sigma^3}, \quad \text{bu yerda} \quad v_3=M\left[(\xi-m)^3\right];$$

$$\sigma=\sqrt{D\xi}.$$



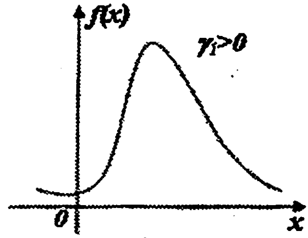
28-rasm

28- va 29-rasmlarda manfiy va musbat assimetriya koeffitsiyentlari tasvirlangan. Nosimmetrik tasodifiy miqdorlarni xarakterlash uchun assimmetriya koeffitsiyenti tushunchasi kiritiladi. Bu koeffitsiyent o'lchovsiz miqdor.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning **ekssess darajasi** deb quyidagiga aytiladi:

$$\gamma_2=\frac{v_4}{\sigma^4}-3, \quad \text{bu yerda,} \quad \gamma_4=M\left[(\xi-m_1)^4\right];$$

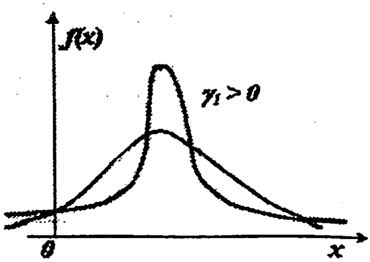
$$\sigma=\sqrt{D\xi}.$$



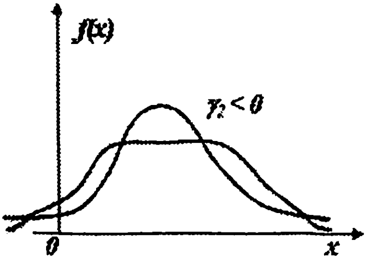
29-rasm

Normal taqsimot uchun $\frac{v_4}{\sigma^4}=3$, shu sababli normal taqsimot funksiyasi uchun ekssessa koeffitsiyenti nolga teng. Agar zichlik funksiyasi normal qonunining zichlik funksiyasiga nisbatan "tik" va yuqori cho'qqili bo'lsa, ekstsessa musbat, 30-rasm va "keng" va yoyiqroq bo'lsa manfiy (31-rasm).

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



30-rasm. **Musbat ekssessa bo'lgandagi zichlik funksiya grafigi**



31-rasm. **Manfiy ekssessa bo'lgandagi zichlik funksiya grafigi**

8-§. Chebishev tengsizligi

Teorema. Faraz qilaylik $\xi\geq 0$. U holda barcha $\varepsilon>0$ uchun

$$P\{\xi\geq\varepsilon\}\leq\frac{M\xi}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Isboti. Tengsizlik quyidagi munosabatdan kelib chiqdi:

$$M\xi\geq M(\xi;\xi\geq\varepsilon)\geq\varepsilon M(I;\varepsilon\leq\xi)=\varepsilon P\{\xi\geq\varepsilon\}.$$

Natija. Matematik kutilmaga ega bo'lgan ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun

$$P\{|\xi-M\xi|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

bu yerda $D\xi$ tasodifiy miqdor ξ dispersiyasi.

Bunga Chebishev tengsizligi deyiladi.

Isboti.

$$P\{|\xi-M\xi|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-M\xi|\geq\varepsilon}dF(x)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M\xi)^2dF(x)=\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Biz (2) tengsizlikdan foydalanib va $M\xi$, $D\xi$ bila turib, ξ ning turli og'ishlari ehtimolligini hisoblashimiz mumkin.

III bobga doir masalalar

1. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$$

teng. (Laplas taqsimoti). $M\xi$ va $D\xi$ larni toping.

2. ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari $x_1, x_2, \ldots, x_k$ lardan iborat bo'lsin. U holda $n \to \infty$ quyidagilarni isbotlang:

a) $\frac{1}{M\xi^n} M\xi^{n+1} \to \max_{1 \le i \le k} x_i$

b) $\sqrt[n]{M\xi^n} \to \max_{1 \le i \le k} x_i$.

3. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lsa va $M\xi$ mavjud bo'lsa, u holda

$$M\xi = \int_0^\infty [1 - F(x) + F(-x)]dx$$

mavjud bo'lishini isbotlang. $M\xi$ mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to\infty} xF(x) = \lim_{x\to\infty} x[1 - F(x)] = 0$$

shartni bajarilishi zarurligini ko'rsating.

4. Agar ξ normal taqsimlangan bo'lsin va $a_1 = M\xi$ u holda $M|\xi - a_1|$ ni toping.

5. Aytaylik, ξ va η tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimotini quyidagicha aniqlangan bo'lsin:

$$P(\xi=0,\ \eta=1) = P(\xi=0,\ \eta=-1) = P(\xi=1,\ \eta=0) = P(\xi=-1,\ \eta=0) = \frac{1}{4}.$$

U holda $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi, \eta)$ larni toping. ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmi, bog'liq emasmi?

6. Faraz qilaylik, n dona konvertga tavakkal qilib turli adreslarga yozilgan n ta xat joylashtirildi. Hech bo'lmaganda bitta xatni o'z egasiga borib yetish ehtimolligini toping. Hamda bu ehtimolni $n \to \infty$ dagi limitini hisoblang.

7. Aytaylik, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog'liqmas va $M\xi_i = a$. $D\xi_i = b^2$ bo'lsin. Ushbu

$$\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$\zeta = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta)^2$$

tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini toping.

8. Agar ξ tasodifiy miqdor 0,1,2,... qiymatlarni qabul qilsa, u holda

$$M\xi = \sum_{m=1}^{\infty} P(\xi \ge m)$$

isbotlang.

9. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog'liqmas, hamda $M\xi=2$, $D\xi=1$, $D\eta=4$, $M\eta=1$ bo'lsa, u holda

a) $\zeta_1 = \xi - 2\eta$, *b)* $\zeta_2 = 2\xi - \eta$ miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

10. Agar ξ tasodifiy miqdor butun musbat sonlar qabul qilsa, u holda

a) $M\xi = \sum\limits_{m\geq 1} P(\xi = m)$

b) $D\xi = 2\sum\limits_{m\geq 2} mP(\xi = m) - M$

munosabatning to'g'riligini isbotlang.

11. Dispersiyani $D(\xi/A)=M((\xi-M(\xi/A)^2/A)$ kabi aniqlasak, u holda quyidagi tenglikni isbotlang:

$$D(\xi/A)=M((\xi-M\xi)^2/A)-[M(\xi/A)-M\xi]^2.$$

12. Agar ξ va η bog'liq bo'lmasa, u holda

$$D(\xi\cdot\eta)=D\xi\cdot D\eta+(M\xi)^2 D\eta+(M\eta)^2 D\xi,$$

ya'ni $D(\xi\cdot\eta)\geq D\xi\cdot D\eta$ munosabatni isbotlang.

13. Faraz qilaylik ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar chekli ikkinchi tartbli momentga ega bo'lsin. Faqat va faqat ξ_1 va ξ_2 miqdorlar nokorrelyatsion bo'lsagina

$$D(\xi_1 + \xi_2)= D\xi_1 + D\xi_2$$

munosabat o'rinli bo'lishini isbotlang.

14. Agar ξ tasodifiy miqdor uchun $Me^{a\xi}$ $(a>0$ o'zgarmas) mavjud bo'lsa, u holda $P(\xi\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^{a\varepsilon}}Me^{a\xi}$ tengsizlikni isbotlang.

15. Aytaylik, $g(x)>0$ - kamaymaydigan funksiya bo'lsin.

Agar $M(g|\xi-M\xi|)$ mavjud bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$P(|\xi-M\xi|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{g(\varepsilon)}M(g|\xi-M\xi|).$$

IV bob. TASODIFIY MIQDORLARNING TURLI MA'NODA YAQINLASHISHI

1-§. Borel-Kantelli lemmasi. Kolmogorovning "0 yoki 1" qonuni

Keyingi paragrafda o'rganiladigan tasodifiy miqdorlarning bir ehtimollik bilan yaqinlashishini tekshirishda asosiy qurol sifatida Borel-Kantelli lemmasidan foydalaniladi. Bu lemmani bayon qilishimiz uchun to'plamlar ketma-ketligining yuqori va quyi limiti hamda "dum" hodisa tushunchalaridan foydalanishga to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik, $<\Omega, \mathcal{F}, P>$ ehtimolliklar fazosi bo'lsin va $B_1, B_2, \ldots$ to'plamlar ketma-ketligi $\mathcal{F}$ "σ-algebraga" tegishli bo'lsin.

To'plamlar nazariyasidagi atamalar bilan tasodifiy hodisalardagi atamalar o'rtasida analogiyani e'tiborga olib, quyidagi tushunchalarni kiritamiz:

1-ta'rif. Cheksiz ko'p sondagi B_n to'plamlarga tegishli ω nuqtalar to'plamini $\overline{B}$ deb belgilaymiz: $\overline{B}=\{\omega$: cheksiz ko'p n lar uchun $\omega\in B_n\}$. Boshqacha aytganda $\omega\in\overline{B}$ degan faktni ω nuqta cheksiz ko'p B_n to'plamlarda uchraydi degan gapga ekvivalent, shuning uchun ham bu to'plamni $\overline{B}=\{\text{ch.k.}B_n\}$ kabi ham belgilashadi.

To'plamlar nazariyasida $\overline{B}$ to'plamni to'plamlar ketma-ketligining yuqori limiti deyiladi va $\overline{B}=\mathit{limsup}B_n$ kabi belgilashadi.

1-ta'rifdan

$$\overline{B}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n}B_m. \tag{2}$$

2-ta'rif. Agar nuqta $B_1, B_2,\ldots, B_n$ to'plamlarning eng ko'pi bilan, chekli sondagisidan tashqari hamma B_n to'plamlarga tegishli bo'lsa, bunday ω nuqtalardan tuzilgan to'plamga $B_1, B_2,\ldots, B_n$ ketma-ketlikning ***quyi limiti*** deyiladi va $\underline{B}=\mathit{liminf}B_n$ orqali belgilanadi.

Shuningdek, 2-ta'rifdan

$$\underline{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geq n}B_n. \tag{3}$$

3-ta'rif. Agar $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun quyi va yuqori limit teng bo'lsa $\left(\overline{B}=\underline{B}\right)$, u holda $B=\underline{B}=(\overline{B})$ ga $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning ***limiti*** deyiladi va

$$B=\lim_n B_n \tag{4}$$

deb yoziladi. $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligining limitini mavjudligini ikki holini ko'rib o'tamiz.

Agar $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi monoton o'suvchi bo'lsa, ya'ni $B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots$ u holda $\underline{B}=\overline{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, ya'ni

$$\lim_n B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n \tag{5}$$

hamda $B_n\uparrow B$ kabi belgilaymiz.

Agar $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi monoton kamayuvchi bo'lib, ya'ni $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ bo'lsa, $\overline{B} = \underline{B} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ bo'ladi. Ya'ni

$$\lim_n B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{6}$$

Buni qisqacha $B_n \downarrow B$ kabi belgilaymiz.

1.**Borel-Kantelli lemmasi.** Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_N) < \infty \tag{7}$$

bo'lsa, u holda $P\{ch.k.B_n\}=0$ bo'ladi.

Isboti. (2) ga binoan $P(\overline{B}) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} B_m\right) = \lim_n P\left(\bigcup_{m \geq n} B_m\right)$, bu yerdagi tenglik P ehtimollikning uzluksizlik (sanoqli-additivlik) xossasiga ko'ra o'rinli. Lemmaning shartiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_N) < \infty$, shuning uchun

$$\lim_n P\left(\bigcup_{m \geq n} B_n\right) \leq \lim_n \sum_{m \geq n} P(B_n) = 0. \ \blacktriangle$$

1.1. **Borel-Kantelli lemmasi**. Agar $B_1, B_2, \ldots$ hodisa bog'liq bo'lmasa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_N) = \infty \tag{9}$$

bo'lsa, u holda

$$P\{ch.k.B_n\}=1 \tag{10}$$

bo'ladi.

Isboti. Ushbu

$$P\{ch.k.B_n\} = \lim_n P\left(\bigcup_{m \geq n} B_m\right) = 1 - \lim_n P\left(\bigcap_{m \geq n} B_m\right)$$

tenglikdan $\lim_n P\left(\bigcup_{m \geq n} \overline{B}_m\right) = 0$ tenglikni ko'rsatsak, lemma isbot bo'ladi.

Agar $B_1, B_2, \ldots$ hodisalar bog'liq bo'lmasa, u holda $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots$ hodisalar ham bog'liq bo'lmaydi, shuning uchun

$$P\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{B}_m\right) = \prod_{m \geq n} P(\overline{B}_m) = \prod_{m \geq n} [1 - P(B_m)]$$

hamda $\log(1-x) \leq -x$ tengsizlikdan foydalansak

$$\log \prod_{m \geq n} [1 - P(B_m)] = \sum_{m \geq n} \log[1 - P(B_m)] \leq -\sum_{m \geq n} P(B_m) = -\infty$$

hosil qilamiz. Demak, ixtiyoriy n uchun $P\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{B}_m\right) = 0$, shu sababli

$$P\{ch.k.B_n\} = 1 - \lim_n P\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{B}_m\right) = 1. \ \blacktriangle$$

Izoh. B hodisaning indikatori $I_B = I_B(\omega)$ bo'lsin, u holda $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots$ – hodisalar ketma-ketligi bo'lsa, u holda

$$\{\omega : ch.k.B_n\} = \left\{\omega : \sum_n I_{B_n}(\omega) = \infty\right\}.$$

Shuning uchun B_1, B_2, ... hodisalar bog'liq emas, u holda Borel-Kantelli lemmasining I va II tasdig'ini quyidagicha yozish mumkin:

$$\left\{\sum_n P(B_n) < \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{P\left(\sum I_{B_n}(\omega) < \infty\right) = 1\right\}.$$

Borel-Kantelli lemmasiga tasdig'iga doir misol ko'raylik.

Misol. Faraz qilaylik, tanga tashlash misolida har biri G va R (gerb va raqam) qabul qiladigan ζ_1, $\zeta_2, \ldots$ bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib $P(\zeta_i = G) = p$ va $P(\zeta_i = R) = 1-p$ bo'lsin.

G va R lardan iborat uzunligi k bo'lgan fiksirlangan ketma-ketlikni qaraylik,

(masalan) $v_k = \left(\underbrace{G, G, \ldots, G}_{k}\right)$, $v_k = \left(\underbrace{G, R, \ldots, R}_{k}\right)$.

Biz $B_n = \{\omega : (\zeta_n, \zeta_{n+1}, \ldots, \zeta_{n+k-1}) = v_k\}$ deb belgilash kiritamiz.

1-lemma. Agar $0 < p < 1$, u holda ζ_1, $\zeta_2, \ldots$ qiymatlar bilan bir qatorda ixtiyoriy v_k ketma-ketlik bir ehtimollik bilan cheksiz ko'p marotaba uchraydi, ya'ni $P\{ch.k.B_n\} = 1$.

Isbot. Borel-Kantelli lemmasining ikkinchi qismidan foydalanishimiz mumkin, biroq $\{B_n\}$ hodisalar bog'liq bo'lishi ham mumkin. Shuning uchun ham bu lemmani bevosita qo'llab bo'lmaydi. Bu tasdiqni yengishni eng sodda yo'li quyidagicha: bog'liq bo'lmagan $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligini ko'rib chiqamiz:

a) $\{ch.k.A_n\} \subseteq \{ch.k.B_n\}$

b) $P\{ch.k.A_n\} = 1$

U holda $P\{ch.k.B_n\} = 1$ bo'lishi ravshan.

Biz qarayotgan bu holda $\{A_n\}$ hodisalar ketma-ketligini qurish unchalik murakkab emas. Haqiqatdan ham

$$A_1 = \{\omega : (\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = v_k\}$$

$$A_2 = \{\omega : (\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{2k}) = v_k\}.$$

....

U holda, $\{ch.k.A_n\} \subseteq \{ch.k.B_n\}$ hamda $P(A_n) = P(A_1) > 0$ (chunki $0 < p < 1$)

Bundan

$$\sum P(A) = \infty.$$

Demak, $P\{ch.k.B_n\} \geq P\{ch.k.A_n\} = 1$. ▲

Borel-Kantelli lemmasining brinchi qismining tatbig'i sifatida bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan $\eta_1, \eta_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini olamiz va $P(\eta_i = 1) = p$, $P(\eta_i = -1) = 1-p$ bo'lsin. Hamda $S_0 = 0$, $S_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n$, $(n \geq 1)$ belgilash kiritamiz. $B_m = \{\omega : S_m = 0\}$. Shunday qilib, B_m hodisa $\{S_n, (n \geq 0)\}$ trayektoriyaning nolga vaqtning $n = m$ momentidan qaytishidan iborat.

$p \neq \frac{1}{2}$ (nosimmetrik bo'lgan holda) $\{S_n, (n>0)\}$ trayektoriya $p > \frac{1}{2}$ yoki $p < \frac{1}{2}$ bo'lishiga qarab ∞ yoki $-\infty$ ketishi intuitiv aniq. Shuning uchun ham bu holda trayektoriyaning nolga cheksiz ko'p marotaba qaytishi kutilmaydi.

2-lemma. Agar $p \neq \frac{1}{2}$, u holda

$p\{ch.k.S_n=0\}=0.$

Isboti. Trayektoriyaning nolga juft n larda (ya'ni $n=2m$) qaytishi tushunarli. Bunda

$$P(S_{2m}=0)=C_{2m}^{m}p^{m}(1-p)^{m}.$$

Ammo

$$C_{2m}^{m} \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} = \frac{4^{m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Lemma shartiga ko'ra $p \neq \frac{1}{2}$ hamda $p(1-p) < \frac{1}{4}$

$$P(S_{2m}=0) \sim \frac{[4p(1-p)]^{m}}{\sqrt{\pi m}}$$

va

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(S_{2m}=0) < \infty.$$

Shuning uchun, Borel-Kantelli lemmasining 1-qismiga ko'ra

$$P(ch.k.S_n)=0. \quad \blacktriangle$$

3-lemma. Agar $p = \frac{1}{2}$ bo'lganda S_n trayektoriya nolga cheksiz ko'p marotaba qaytadi, u holda $P(ch.k.S_n)=1$.

Natija. Agar $\{B_n\}$ bog'liq bo'lmagan hodisalar ketma-ketligi bo'lsa, u holda $P\{ch.k.B_n\}$ ehtimollik $\sum_n P(B_n)$ qatorning yaqinlashishiga qarab 0 yoki 1 ga teng bo'lishi mumkin.

Bu da'vo quyida ko'riladigan A.N. Kolmogorovning "0 yoki 1" qonunining xususiy holidir. Borel-Kantelli lemmasidan biz bilamizki, agar $\{B_n\}$ bog'liq bo'lmagan hodisalar ketma-ketligi bo'lsa, u holda $\overline{B}=\{ch.k.B_n\}$ hodisaning ehtimolligi nol yoki bir chegaraviy sonlardan faqat birini qabul qiladi.

Biz endi hodisalarning shunday sinfini yozamizki, ularning ehtimolligi nol yoki bir sonlardan faqat bittasini qabul qiladi. Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlarning biror ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy k va k' dagi $I_n, \ldots, I_{n+k}$ Borel to'plamlari uchun $\{\omega: \xi_n \in I_n, \ldots \xi_{n+k} \in I_{n+k}\}$ ko'rinishdagi hamma to'plamlarni o'z ichiga oluvchi ω nuqtalarning eng kichik σ - algebralari to'plamini: $\mathfrak{F}_n^{\infty} = \sigma\{\omega: \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$ deb belgilaymiz. Qo'pol qilib aytganda $\mathfrak{F}_n^{\infty}$ to'plam $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bilan aniqlanadi (ammo $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ larga bog'liq emas). Biz $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n^{\infty} = \mathcal{K}$ deb belgilaymiz. Biroq σ algebralar kesishmasi yana σ-algebra tashkil qiladi, u holda $\mathcal{K}$ sistema σ-algebra tashkil qiladi. Bunga "dumli" yoki "qoldiqli" algebra deyiladi, chunki ixtiyoriy $\mathcal{K} \ni A$ hodisa $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ miqdorlarning chekli qiymatiga bog'liq bo'lmay $\xi_1, \xi_2...$ ketma-ketlikning "cheksiz uzoqdagi" qiymatlari bilan aniqlanadi. "Dumli" hodisaga misollar:

a) $\{ck.k.\ \xi_n \in I_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} \{\xi_m \in I_m\}$

bu yerda $I_n \in R^1$ - dagi Borel to'plami.

b) $\left\{\sum_n \xi_n < \infty\right\}$.

c) $\left\{\limsup_n \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} < \infty\right\}$

d) $\left\{\overline{\lim_n} \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} < \infty\right\}$

e) $\left\{\overline{\lim_n} \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} < C\right\}$

f) $\left\{\overline{\lim_n} \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{\sqrt{2n \log n}} = 1\right\}$

Teorema. (Kolmogorov "0 yoki 1" qonuni). Agar $\{\xi_n\}$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy ketma-ketligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\mathcal{K} \ni A$ - "dumli" hodisaning $P(A)$ ehtimoli, 0 yoki 1 ga teng.

Isboti. Faraz qilaylik $A \in \mathcal{K}$. Ravshanki

$$A \in \mathfrak{F}_1^{\infty} = \sigma\{\omega: \xi_1, \xi_2, ...\}.$$

Biz $\sigma\{\omega: \xi_1, ... \xi_n\} = \mathfrak{F}_1^n$ deb belgilaymiz. U holda $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_1^n$ algebra va ta'rifga ko'ra $\mathfrak{F}_1^n = \sigma\{\omega:\ \xi_1, ... \xi_n\}$. Ma'lumki, ixtiyoriy $\varepsilon_n > 0$ va $\mathfrak{F}_1^{\infty} \ni A$ to'plam uchun shunday n va $\mathfrak{F}_1^n$da shunday A_n to'plam topiladiki $P(A \Delta A_n) \leq \varepsilon_n$, bu yerda $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – simmetrik ayirma. Natijada $\mathfrak{F}_1^n$da, shunday A_n to'plam topishimiz mumkinki $n \to \infty$ da $P(A \Delta A_n) \to 0$ bundan esa $n \to \infty$ da

$$P(A_n) \to P(A) \tag{11}$$

hamda $n \to \infty$ da

$$P(A_n \cap A) \to P(A). \tag{12}$$

Agar $A \in \mathcal{K}$ bo'lsa, u holda A_n va A hodisalar bog'liq bo'lmaydi, chunki $A_n \in \mathfrak{F}_1^n = \sigma\{\omega: \xi_1, ... \xi_n\}$. A to'plam esa

$$A \in \mathfrak{F}_{n+1}^{\infty} = \sigma\{\omega: \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...\},$$

shu sababli $P(A_n \cap A) \to P(A_n)P(A)$ bu esa (11) va (12) ga asosan $P(A) = P^2(A)$ tenglikka olib keladi. Bundan $P(A)=0$ yoki $P(A)=1$ kelib chiqadi. ▲

Isbot qilingan "0 yoki 1" qonundan bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $P\{ch.k. \in I_n\}$ ehtimollik 0 yoki 1 sonlaridan faqat birini qabul qiladi: $P\{ch.k. \xi_n \in I_n\}=0$ yoki 1.

"Dumli" $\{ch.k. \xi_n \in I_n\}$ hodisa uchun Borel-Kantelli lemmasidan

$$P\{ch.k. \xi_n \in I_n\}=\begin{cases} 1, & agar \ \sum_n P(\xi_n \in I_n)=\infty \\ 0, & agar \ \sum_n P(\xi_n \in I_n)<\infty \end{cases}$$

kelib chiqadi. Bunga Borelning "0" yoki "1" qonuni deyiladi. ▲

2-§. Ehtimollik bo'yicha yaqinlashish va bir ehtimollik bo'yicha yaqinlashish

Matematik analiz kursida ketma-ketliklarni turli ma'noda yaqinlashishlari o'rganilgani kabi ehtimolliklari nazariyasida ham tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun turli xil yaqinlashishlar o'rganiladi:

- ehtimollik bo'yicha yaqinlashish;
- bir ehtimollik bilan yaqinlashish;
- o'rtacha r-tartib bo'yicha yaqinlashish;
- taqsimot bo'yicha yaqinlashish;
- sust yaqinlashish.

Biz tasodifiy miqdorlarni bitta $<\Omega, \mathfrak{F}, P>$ ehtimolliklar fazoda berilgan deb faraz qilamiz.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat $\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}\to 0,$$

u holda $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ***ehtimollik bo'yicha*** ξ tasodifiy miqdorga yaqinlashadi deymiz va $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ kabi belgilaymiz.

Aytaylik, g -ixtiyoriy uzluksiz, chegaralangan funksiya bo'lsin. Agar $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi_n)\to Mg(\xi). \qquad (1)$$

Agar ξ_n va ξ larning taqsimot funksiyalarini, mos ravishda, $F_n(x)$ va $F(x)$ deb belgilasak, u holda (1) ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\int g(x)dF_n(x)\to\int g(x)dF(x)$$

yoki

$$\int g(\xi_n(\omega))P(d\omega)\to\int g(\xi(\omega))P(d\omega). \qquad (2)$$

(1) munosabatdagi yaqinlashish quyidagicha isbotlanadi:

Faraz qilaylik $\varepsilon>0$. U holda soddalik uchun $|g(x)|\leq\frac{1}{2}$ deb olsak, u holda ixtiyoriy $\delta>0$ da

$$M|g(\xi_n)-g(\xi)|\leq M\{(|g(\xi_n)-g(\xi)|;\ |\xi_n-\xi\leq\delta|)+P(|\xi_n-\xi|>\delta)\}. \qquad (3)$$

Biz N ni shunday tanlaymizki $P(|\xi|>N)<\frac{\varepsilon}{2}$, $\delta>0$ni esa $|x-y|\leq\delta$ tengsizlikdan, $|x|\leq N$ da, $|g(x)-g(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik kelib chiqadigan qilib tanlaymiz. U holda (3) tenglikdan birinchi qo'shiluvchi ε dan ortib ketmaydi. (3) dan oxirgi qo'shiluvchi $n\to\infty$ da nolga intiladi.

Agar $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ hamda f ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda

$$f(\xi_n)\xrightarrow{P} f(\xi)$$

munosabatning to'g'riligi xuddi (1) dagi singari isbotlanadi. Agar $g(x)$ funksiya uziladigan yoki chegaralanmagan bo'lsa, umuman (1), (2) yaqinlashishlar ma'noga ega emas.

2-ta'rif. Agar $\xi_1,\xi_2,\ldots,$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun $P\{\lim\limits_n \xi_n=\xi\}=1$ o'rinli bo'lsa, u holda $\xi_1,\xi_2,\ldots,$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ tasodifiy miqdorga ***bir ehtimol bilan yaqinlashadi*** deymiz, ya'ni bunday yaqinlashish uchun

$$\lim_n \xi_n(\omega)=\xi(\omega)$$

munosabat qanoatlantirmaydigan ω nuqtalarning o'lchovi nolga teng bo'ladi. Biz ***bir ehtimol bilan yaqinlashishni*** $\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi$ kabi belgilaymiz. Agar ehtimol bo'yicha yaqinlashish, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ da

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n-\xi|>\varepsilon)=0$$

tenglikda ekvivalent bo'lgan bo'lsa bir ehtimollik bilan yaqinlashish esa

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega: \sup_{m>n} (|\xi_m-\xi|>\varepsilon)\}=0 \tag{4}$$

tenglikni bildiradi.

Haqiqatdan ham $\{\xi_n\}$ ning ξ ga deyarli yaqinlashishi, biror $n=n(\omega)$dan boshlab $\Omega-N$ to'plamda

$$\bigcup_{m\geq n}|\xi_n-\xi|\leq\varepsilon$$

tengsizlik bajarilishini bildiradi. To'ldiruvchi hodisaga o'tib

$$P(N)=P\left(\bigcap_n\bigcup_{m\geq n}\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}\right)=0$$

hosil qilamiz, bu esa (4) ga ekvivalent.

3-ta'rif. Agar $n\to\infty$ da $M|\xi_n-\xi|^r\to 0$ shart bajarilsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga o'rtacha ***r-tartibli yaqinlashadi*** deymiz. Bu yaqinlashishni $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ kabi belgilaymiz. Xususan $r=2$ da bu yaqinlashish o'rta kvadratik yaqinlashish deyiladi va $l.i.m.\,\xi_n=\xi$ kabi belgilaymiz, (ya'ni $l.i.m.$- inglizcha ***"limit in mean"*** - o'rtacha yaqinlashish so'zining bosh harfidan olingan).

Analiz kursidan ma'lumki, ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi masalasini hal etishda Koshi kriteriysidan foydalaniladi. $\{\xi_n^{(n)}\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni

$$\lim_n \sup_k |\xi_{n+k}(\omega) - \xi_n(\omega)| = 0 \tag{5}$$

Isbotini eslatib o'tamiz. Aytaylik, $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, u holda $\lim_n \bigcup_{\upsilon \geq n} |\xi_\upsilon(\omega)| = 0$. Biroq

$$\sup_k |\xi_{n+k}(\omega) - \xi_n(\omega)| \leq \sup_k |\xi_{n+k} - \xi| + |\xi_n - \xi|.$$

Shuning uchun

$$\overline{\lim_n} \sup_k |\xi_{n+k} - \xi_n| \leq \overline{\lim_n} \sup_k |\xi_{n+k} - \xi_n| + \lim_n |\xi_n - \xi| = 0.$$

Bundan esa (5) ning isboti kelib chiqadi. Endi aksincha (5) o'rinli bo'lsa, u holda

$$-\lim_n \inf_n \xi_n(\omega) = \lim_n \sup_n \xi(\omega) \tag{6}$$

ekanligini isbotlaymiz.

$$0 \leq \lim_n sup \xi_n - \lim_n inf \xi_n = \lim_n \left[\sup_{m \geq n} \xi_m - \inf_{m \geq n} \xi_n \right] =$$

$$= \lim_n \left[\sup_{m \geq n} (\xi_m - \xi_n) - \inf_{m \geq n} (\xi_m - \xi_n) \right] = \lim_n \left[\sup_{m \geq n} (\xi_m - \xi_n) + \sup_{m \geq n} (\xi_n - \xi_m) \right] \leq$$

$$\leq 2 \lim_n \sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi_n| = 2 \lim_n \sup_k |\xi_{n+k} - \xi_n| = 0.$$

Bundan $\lim_n \xi_n(\omega)$ limitni mavjudligiga ekvivalent bo'lgan (2) tenglikni isboti kelib chiqadi. (1) dan yaqinlashadigan ω nuqtalar $\{\xi_n \to \xi\}$ to'plamni quyidagicha yozish mumkin:

$$\{\xi_n \to\} = \left\{ \lim_n \sup_\upsilon |\xi_{n+\upsilon} - \xi_n| = 0 \right\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_N \bigcap_\upsilon \{|\xi_{N+\upsilon} - \xi_N| \leq \varepsilon\}.$$

Shunday qilib

$$\{\xi_n \to\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_N \bigcup_k \{|\xi_{N+k} - \xi_N| \leq \varepsilon\} =$$

$$= \bigcup_m \bigcap_N \bigcup_k \left\{ |\xi_{N+k} - \xi_N| > \frac{1}{m} \right\} = \bigcup_m \bigcap_N \left\{ \sup_k |\xi_{N+k} - \xi_N| > \frac{1}{m} \right\}.$$

Bundan $P\{\xi_n \to \xi\} = 0$ tenglik, ixtiyoriy N uchun, quyidagi tenglikka ekvivalent

$$P\left\{ \bigcap_N \left[\sup_k |\xi_{N+k} - \xi_N| \geq \varepsilon \right] \right\} = 0.$$

Endi

$$\xi(\omega)=\begin{cases}\limsup\limits_{n}\xi_n(\omega), & agar \quad \omega\in\{\xi_n\to\xi\}\\ 0, & agar \quad \omega\notin\{\xi_n\to\xi\}\end{cases}$$

deb olsak. Bundan, agar $P\{\xi_n\to\xi\}$, u holda $\xi_n(\omega)\xrightarrow{\partial}\xi$.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot bo'ldi.

Teorema. (1 ehtimol bo'yicha yaqinlashishning Koshi kriteriyasi) $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik bir ehtimollik bilan yaqinlashishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\left\{\bigcap_N\left[\sup_k|\xi_{N+k}-\xi_N|\geq\varepsilon\right]\right\}=0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Endi $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlikni ehtimollik bo'yicha yaqinlashishiga e'tiboringizni jalb etamiz. Agarda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$\lim\limits_{n,k\to\infty} P\{|\xi_n-\xi_k|\geq\varepsilon\}=0$, bo'lsa

$\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik ehtimollik bo'yicha fundamental deymiz.

Agar $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, u holda

$$P\{|\xi_n-\xi_k|\geq\varepsilon\}\leq P\left\{|\xi_n-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{|\xi_k-\xi|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

tengsizlikka ko'ra $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik ham ehtimollik bo'yicha fundamental bo'ladi.

Aksincha ham to'g'riligini ko'rsatamiz: agar $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik ehtimollik bo'yicha fundamental bo'lsa, u holda shunday ξ topiladiki natijada $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

Isboti quyidagi yordamchi da'voga tayanadi:

Lemma: Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik ehtimollik bo'yicha fundamental bo'lsa, u holda undan deyarli yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isboti. $n_1=1$ deb olamiz va induksiya bo'yicha n_k ni aniqlaymiz. Barcha r, s≤N lar uchun

$$P\left\{|\xi_r-\xi_s|>\frac{1}{2^k}\right\}<\frac{1}{2^k}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $N>n_{k-1}$ o'rinli bo'ladigan eng kichik n_k ni aniqlaymiz. U holda

$$\sum_k P\left\{|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}|>\frac{1}{2^k}\right\}\leq\sum_k\frac{1}{2^k}<\infty.$$

Borel-Kontelli lemmasiga binoan

$$P\left\{ch.k.|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}|>\frac{1}{2^k}\right\}=0.$$

Shuning uchun bir ehtimollik bilan

$$\sum_k|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}|<\infty\ .$$

U holda $\xi(\omega)=\begin{cases}\xi_{n_1}+\sum\limits_{k=1}\left|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}\right|, \; agar \;\; \omega\in\left\{\omega:\sum\limits_{k}\left|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}\right|<\infty\right\}\\ 0, \;\; agar\ \omega\in\overline{\left\{\omega:\sum\limits_{k}\left|\xi_{n_{k+1}}-\xi_{n_k}\right|<\infty\right\}}\end{cases}$

deb olsak, $\xi_{n_k}\xrightarrow{P(1)}\xi$ kelib chiqadi. ▲

Endi $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlik ehtimollik bo‘yicha fundamental bo‘lsin. Lemmaga asosan shunday $\{\eta_s\}$ va ξ tasodifiy miqdor topiladiki, natijada $\{\xi_{\eta_n}\}$ qism ketma-ketlik ξ ga deyarli yaqinlashadi. U holda $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ isbotlaymiz, ya'ni hamma $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlikni tasodifiy miqdorga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashishini ko‘rsatamiz. Darhaqiqat

$$P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}\leq P\left\{\left|\xi_n-\xi_{\eta_s}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{\left|\xi_{\eta_s}-\xi\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Bundan, esa ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$\lim_{n}P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}=0.$$

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot bo‘ldi:

Teorema. (Ehtimollik bo‘yicha yaqinlashishning Koshi kriteriyasi). $\{\xi_n(\omega)\}$ ketma-ketlikni ehtimollik bo‘yicha yaqinlashishi uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$\lim\limits_{n,k\to\infty}P\{|\xi_n-\xi_k|\geq\varepsilon\}=0$ shartni bajarilishi zarur va yetarli.

Yuqordagi ta'riflaridan, bir ehtimol bo‘yicha yaqinlashishdan ehtimol bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqadi, lekin aksincha umuman olganda o‘rinli emasligini quyidagi misoldan bilsa ham bo‘ladi.

Misol. Aytaylik, $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}$ esa Borel to‘plamlarning σ – algebrasi, P - Lebeg o‘lchovi

$$A_n^k=\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],\ \chi_n^k=I_{A_n^k}(\omega),\ k=\overline{1,n};\ n=1,2,...$$

bu yerda $I_{A_n^k}(\omega)$ esa A_n^k to‘plamning indikatori.

U holda:

$$\{\chi_1^1,\chi_2^1,\chi_2^2;\chi_3^1,\chi_3^2,\chi_3^3;...\}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ehtimollik bo‘yicha nolga intladi, biroq hech bir $[0,1]\ni x$ nuqtada yaqinlashmaydi.

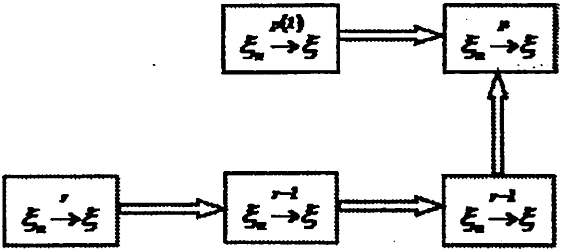
Endi o‘rta r – tartib bo‘yicha yaqinlashishga to‘xtalib o‘tamiz. Chebishev tengsizligiga binoan

$$P\{|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\}\leq\frac{M|\xi_n-\xi|^r}{\varepsilon^r}$$

bu tengsizlik esa, r – tartib bo‘yicha yaqinlashishdan ehtimollik bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqshini ko‘rsatadi.

Teorema. (O'rta r - tartib bo'yicha yaqinlashishning Koshi kriteriyasi). $m_r = M|\xi_n|^r$ momenti chekli bo'lgan $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligini o'rtacha r - tartib bo'yicha yaqinlashishi uchun $\lim\limits_{n,k\to\infty} M|\xi_n - \xi_k|^r = 0$, ya'ni o'rtacha r - tartibda fundamental bo'lishligi zarur va yetarli.

Bu yaqinlashishlar o'rtasidagi mantiqan bog'lanishlar 32-rasmda ko'rsatilgan.



32-rasm

3-§. Taqsimot bo'yicha yaqinlashish

Bizga $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, $F_n(x) = P\{\xi_n \le x\}$ bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $\{F_n(x)\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $n\to\infty$ da $F(x)=P\{\xi\le x\}$ ga $F(x)$ taqsimot funksiyaning har bir uzluksizlik nuqtalarida yaqinlashsa, u holda $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ξ ga **taqsimot bo'yicha yaqinlashadi** deymiz va $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ belgilaymiz va D – inglizcha ***"distribution"*** – taqsimot so'zining bosh harfidan olingan.

Avvalo nima uchun taqsimot bo'yicha yaqinlashishda, yaqinlashish nuqtalari sifatida hamma nuqtalar emas, balki faqatgina $P(\xi=x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi har bir x nuqta olinishini oydinlashtirib o'taylik.

Agar $\xi_n = \dfrac{1}{n}$, $\xi=0$ deb olsak, u holda

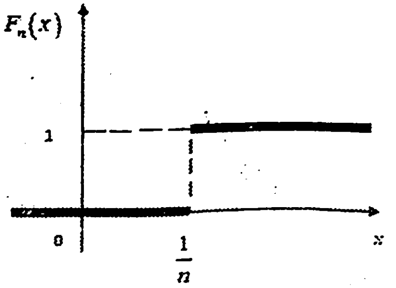
$$F_n(x)=P\{\xi_n\le x\} \text{ va } F(x)=P\{\xi\le x\}$$

funksiyalar quyidagicha qilib qurilgan:

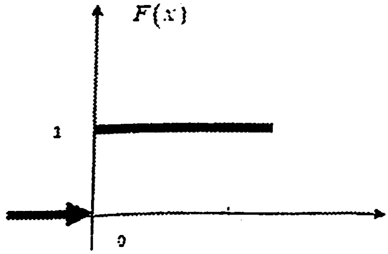
Bundan ko'rinadiki, $x=0$ nuqtadan tashqari barcha x nuqtalarda $F_n(x)\to F(x)$. Shuning bilan birga, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$P\{|\xi_n| \le \varepsilon\} \to 0$$

bu esa, ξ_n tasodifiy miqdorning taqsimoti tobora limit tasodifiy miqdor atrofida uyg'unlashishini (konsentratsiyalanishini) ko'rsatadi.



33-rasm



34-rasm

Bu misol, ξ_n tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini ξ limit qiymatlari atrofida ***"uyg'unlashuvini"*** $F(x)$ funksiyaning uziladigan nuqtalarida anglab bo'lmasligini ko'rsatadi. Shuning uchun ham, mazmunli nazariya qurish maqsadida hamma x nuqtalarni emas, balki, faqatgina $P(\xi=x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarni olamiz.

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot bo'yicha yaqinlashishni turli (Ω_1, F_1, P_1), (Ω_2, F_2, P_2), $(\Omega_3, F_3, P_3), \ldots$ ehtimolliklar fazolarida berilganda ham gapirish mumkin. Mabodo, bu tasodifiy miqdorlar turli ehtimolliklar fazolarida berilgan bo'lsa, ularning ehtimollik bo'yicha, yoki bir ehtimollik bilan, yoki o'rtacha r – tartibda yaqinlashishi haqida aytib bo'lmaydi. Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi taqsimot bo'yicha yaqinlashishidan ularning bir ehtimollik b yaqinlashishi, umuman olganda, kelib chiqmaydi, ya'ni

$$\left\{F_{\xi_n(\omega)} \overset{D}{\Rightarrow} F_\xi\right\} \not\Rightarrow \left\{\xi_n \overset{p(1)}{\rightarrow} \xi\right\}.$$

$\{\xi_n(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlarning $\{F_{\xi_n}(\omega)\}$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligini, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasiga yaqinlashishini tekshirish oson ish emas, bunga nisbatan, masalan, bu taqsimotlar momentlarining yaqinlashishini tekshirish osonroq:

$$m_k(n) = \int x^k dF_{\xi_n}(x) \to \int x^k dF_\xi(x) = m_k$$

Shu sababli, taqsimot bo'yicha yaqinlashishga ekvivalent bo'lgan taqsimot xarakteristikalarining sinfini ajratish tabiiy. Shunday xarakteristika sifatida Lebeg-Stiltes integralini olish qulay hisoblanadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_\xi(x),$$

bu yerda $f(x)$ biror (o'lchovli) funksiyalarning qism to'plamiga tegishli. Avvalo qanaqa $f(x)$ funksiyalar uchun $F_{\xi_n} \overset{D}{\rightarrow} F$ yaqinlashishdan quyidagi

$$\int f(x) dF_{\xi_n}(x) \to \int f(x) dF_\xi(x) \qquad (1)$$

yaqinlashish kelib chiqshini tushunib olaylik. Bu integrallar bir vaqtda mavjud bo'lishligi uchun (o'lchovli) chegaralangan $f(x)$ funksiyani olamiz. Biroq bunday funksiyalar uchun $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_\xi$ yaqinlashishdan, ular umuman olganda (1) yaqinlashish kelib chiqmaydi. Mana misol:

Aytaylik,

$$\xi_n(\omega) \equiv \frac{1}{n}, \quad \xi(\omega) \equiv 0 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

U holda

$$\int f(x) dF\xi_n(x) = Mf(\xi_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

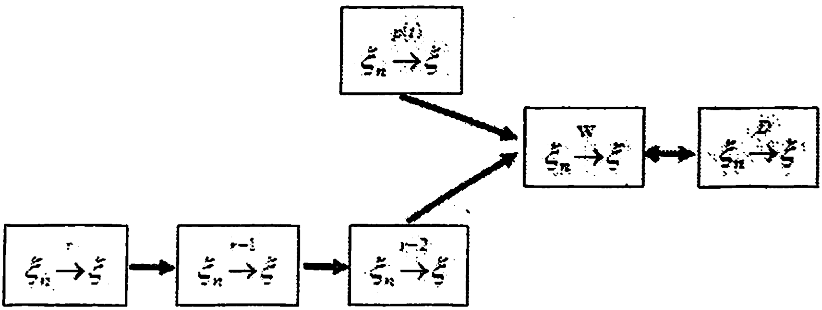
$$\int f(x) dF\xi(x) = Mf(\xi) = f(0) = 0.$$

Demak, $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_\xi$ ammo

$$\int f(x) dF\xi_n(x) \not\to \int f(x) dF_\xi(x).$$

Biroq $f(x)$ faqat uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda taqsimot bo'yicha yaqinlashishdan (1) kelib chiqadi va aksincha.

Avvalgi paragrafda keltirilgan turli yaqinlashishlar o'rtasidagi bog'lanishlar 35-rasmda ko'rsatilgan:



35-rasm

Bu sxemadagi logik ➡ – ***"kelib chiqadi"*** ishorasini, umuman olganda aksincha qo'yib bo'lmasligini misollarda ko'rsating.

4-§. Sust yaqinlashish

Aytaylik, $\mathfrak{F}=\{H\}$ to'plam $H=H(x)$ taqsimot funksiyalar sinfidan iborat bo'lsin, ya'ni bu to'plamdagi funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

a) $H(x)$ – kamaymaydigan;

b) $H(-\infty)=0,\ H(+\infty)\le 1$;

c) $H(x)$ - chapdan uzluksiz;

Biz $\mathrm{F}=\{F\}$ deb $\mathfrak{F}$ sinfning shunday qism to'plamini olamizki, bunda $F(+\infty)=1$ (tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasining xuddi o'zi).

Ta'rif. Agar ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $h(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{n\to\infty}\int h(x)dH_n(x)=\int h(x)dH(x) \qquad (*)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\mathfrak{F}\ni H_n$ funksiyalar ketma-ketligi $\mathfrak{F}\ni H$ funksiyaga **sust yaqinlashadi** deymiz va qisqacha $H_n\xrightarrow{w}H$ kabi belgilaymiz, ya'ni inglizcha ***"weak-sust"*** so'zining bosh harfidan olingan.

1-teorema. Faraz qilaylik $F_n,\ F\in\mathfrak{F}$. Taqsimot funksiyalari bo'lsin, u holda

$$\left(F_n\xrightarrow{w}F\right)\Leftrightarrow\left(F_n\xrightarrow{D}F\right).$$

Bu teoremani $\mathfrak{F}$ sinfidagi funksiyalar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin.

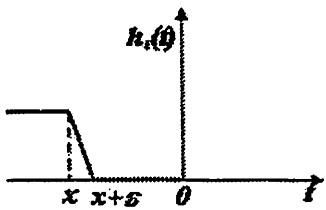
2-teorema. Faraz qilaylik $H_n, H\in\mathfrak{F}$ u holda

$$1)\ \left(H_n\xrightarrow{w}H\right)\Rightarrow\left(H_n\xrightarrow{D}H\right) \qquad (1)$$

$$2)\ \left[H_n\xrightarrow{D}H\right]\Rightarrow\left[H_n(+\infty)\to H(+\infty)\right]\Rightarrow\left[H_n\xrightarrow{w}H\right] \qquad (2)$$

Teoremaning 1) bo'limini isbotlash uchun $\varepsilon>0$ va quyidagi funksiyani olamiz (36-rasm):

$$h_\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t\le x\\ 1-\dfrac{t-x}{\varepsilon}, & x\le t\le x+\varepsilon\\ 0, & t\ge x+\varepsilon\end{cases}$$



36-rasm

U holda:

$$H_n(x)=\int_{-\infty}^{x}h_\varepsilon(t)dH_n(t)\le\int_{-\infty}^{\infty}h_\varepsilon(t)dH_n(t)\to$$

$$\to\int_{-\infty}^{\infty}h_\varepsilon(t)dH_\eta(t)\le H(x+\varepsilon). \qquad (3)$$

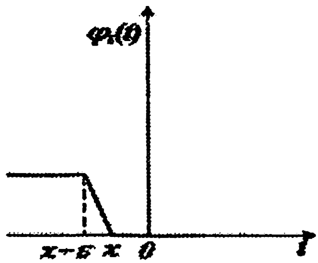
Shuning uchun

$$\overline{\lim_n}H_n(x)\le H(x+\varepsilon),$$

bundan $H(x)$ funksiyaning uzluksizligiga ko'ra:

$$\overline{\lim_n}H_n(x)\le H(x).$$

Endi $\varphi_\varepsilon(t)=h_\varepsilon(t+\varepsilon)$ funksiyani olamiz (37-rasm).



37-rasm

U holda (3) ga o'xshash $\underline{\lim\limits_{n}} H_n(x) \geq H(x-\varepsilon)$.

Biroq x nuqta $H(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtasi bo'lgani uchun, $\underline{\lim\limits_{n}} H_n(x) \geq H(x)$. Shunday qilib, $H(x)$ ning uzluksiz nuqtalarida

$$\underline{\lim_{n}} H_n(x) \geq H(x) \geq \overline{\lim_{n}} H_n(x),$$

ya'ni $H_n \xrightarrow{D} H$.

Teoremaning 2) qismini isbotlash uchun, ixtiyoriy chegaralangan $h(x)$ funksiya uchun

$$\underline{\lim_{n}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dH_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dH(x).$$

tenglikni isbotlashimiz kerak. Faraz qilaylik $I=(a,b]$, $I_j=(a_j,b_j]$, $j=\overline{1,k}$ biroq $i\neq j$ lar uchun $I_i \cap I_j = \phi$ va $I=I_1+I_e+...+I_k$.

Biz quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$h_k^+(x) = \sum_{i=1}^{k}\left[\sup_{x\in I} h(x)\right]\cdot \chi_{I_i}(x),$$

$$h_k^-(x) = \sum_{i=1}^{k}\left[\inf_{x\in I} h(x)\right]\cdot \chi_{I_i}(x),$$

bu yerdagi χ_I esa I to'plamning indikatori. U holda

$$\int_I h_k^-(x) dH_n(x) \leq \int_I h(x) dH_n(x) \leq \int_I h_k^+(x) dH_n(x).$$

Biroq $h_k^+(x)$ va $h_k^-(x)$ pog'onasimon funksiya va $k<\infty$, u holda $n\to\infty$ da

$$\int_I h_k^+(x) dH_n(x) \to \int_I h_k^+(x) dH(x).$$

(Biz a, b, a_j, b_j nuqtalarini $H(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari sifatida qaraymiz). Shuning uchun

$$\int_I h_k^-(x) dH(x) \leq \underline{\lim_{n}} \int_I h(x) dH_n(x) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n}} \int_I h(x) dH_n(x) \leq \int_I h_k^+(x) dH(x).$$

Faraz qilaylik, $k\to\infty$, biroq, $k\to\infty$ da $max\,|\,b_j-a_j\,| \to 0$. U holda barcha $I\ni x$ lar uchun

$$h_k^-(x) \uparrow h(x),\ h_k^+(x) \downarrow h(x).$$

U holda Lebegning majorant yaqinlashish haqidagi teoremasiga ko'ra

$$\lim_{k} \int_I h_k^{\pm}(x) dH(x) = \int_I h(x) dH(x). \qquad (4)$$

Bundan

$$\lim_{n} \int_I h(x) dH_n(x) = \int_I h(x) dH(x). \qquad (5)$$

Endi (5) tenglikda I interval o'rniga $(-\infty,\infty)$ oraliq olinsa ham o'rinli bo'laverishi haqidagi quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Agar $H_n \xrightarrow{D} H$ va $H_n(+\infty)\to H(+\infty)$, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday chekli $I=(a,b]$ interval topiladiki

$$\sup H_n(\bar{I})\le\varepsilon. \qquad (6)$$

Bu yerda:

$$H_n(\bar{I})=H_n(+\infty)-H_n(I),$$
$$H_n(I)=H_n(b)-H_n(a).$$

Isbot. Faraz qilaylik lemmadagi (6) munosabat bajarilmasin, ya'ni shunday $\varepsilon>0$ mavjudki, ixtiyoriy chekli $I=(a,b]$ intervallar uchun $\sup\limits_n H_n(\bar{I})>\varepsilon$, ya'ni $\sup\limits_n[H_n(+\infty)-H_n(I)]>\varepsilon$. Biz $I_m=(-m,m]$, $m=1,2,\ldots$ deb olamiz. U holda shunday cheksiz $n_1^{(1)}$, $n_2^{(1)}$,... sonlar ketma-ketligi topiladiki, bular uchun

$$H_{n_1}^{(1)}(+\infty)-H_{n_1}^{(1)}(I_1)>\varepsilon.$$

Bu ketma-ketlikdan shunday $n_1^{(2)}$, $n_2^{(2)}$,... qism ketma-ketligini olamizki, bular uchun

$$H_{n_1}^{(2)}(+\infty)-H_{n_1}^{(1)}(I_1)>\varepsilon. \qquad (7)$$

va hokazo.

"Diagonal" $n_1^{(1)}, n_2^{(2)}, n_3^{(3)},\ldots$ ketma-ketlik uchun

$$H_{n_m^m}(+\infty)-H_{n_m^m}(I_m)>\varepsilon. \qquad (8)$$

bajarilishi ravshan va shuning bilan birga $m\to\infty$

$$H_{n_m^m}(I)\to H(x). \qquad (9)$$

Yetarlicha katta $m$lar uchun $H_{n(m)}(I)\le H_{n(m)}(I_m)$,

Shuning uchun (8) ga ko'ra

$$H_{n_m^m}(+\infty)-H_{n_m^m}(I)\ge H_{n_m^m}(+\infty)-H_{n_m^m}(I_m)>\varepsilon$$

bu (9) bilan birga va $n\to\infty$ da $H_n(+\infty)\to H(+\infty)$ farazimizga asosan

$$H(+\infty)-H(I)\ge\varepsilon>0 \qquad (10)$$

tengsizlikka kelamiz. Ammo $I=(a,b]$ ixtiyoriy interval bo'lgani uchun (10) dan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$H(+\infty)-H(I)\ge\varepsilon>0,$$

bu esa mumkin emas, chunki $(0\le H(+\infty)<\infty)$. Hosil qilingan qarama-qarshilik lemmani isbotlaydi.

Endi teoremaning isbotiga qaytamiz. Faraz qilaylik $N=\sup\limits_n|h(x)|$ u holda (6) asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $I=(a,b]$ interval topish mumkinki bunda a va b nuqtalar $H(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari, barcha n lar uchun

$$H_n(\bar{I}) \le \frac{\varepsilon}{2N} \text{ va } H(\bar{I}) \le \frac{\varepsilon}{2N}.$$

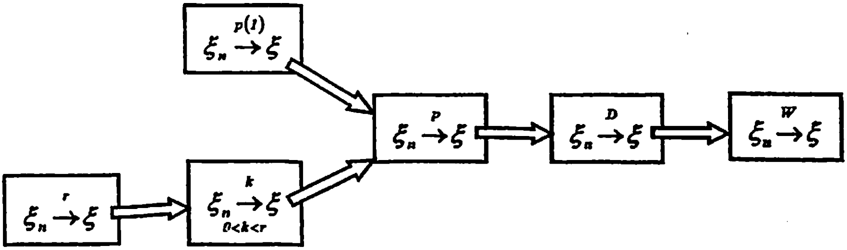
U holda

$$\overline{\lim_n}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dH_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dH(x)\right| \le$$

$$\le \overline{\lim_n}\left|\int_I f(x)dH_n(x) - \int_I f(x)dH(x)\right| + \varepsilon.$$

Bu esa (5) bilan birga hamda $\varepsilon>0$ ixtyoriyligi sababli $H_n \xrightarrow{w} H$ isbot qilinishi zarur bo'lgan tasdiqni isbotlaydi. ▲

Yuqorida aytilganlarga ko'ra turli yaqinlashishlar o'rtasidagi boshlanishni ifodalovchi jadval quyidagi 38-rasmda keltirilgan:



38-rasm

Bu sxemada logik $\Leftrightarrow$ ***"ekvivalentlik"*** belgisini, umuman hamma joyda, qo'yib bo'ladimi?

IV bobga doir masalalar

1. Faraz qilaylik $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $|\xi_n|^r \le \eta$ va $M\eta<\infty$ bo'lsin, u holda $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$ isbotlang.

2. Agar $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$ bo'lsa, u holda $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$ munosabat to'g'rimi?

3. Aytaylik, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P\left(\xi_n = n^{\frac{r}{2}}\right) = \frac{1}{n}$.

U holda $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, biroq $\xi_n \xrightarrow{r} 0$ bo'lishini isbotlang.

4. Faraz qilaylik $\xi_n = a_n \cdot \eta$, bu yerda $a_n \to a$ va $M|\eta|^r = \infty$, u holda $\xi_n \xrightarrow{\text{deyarli}} a \cdot \eta$, biroq $\xi_n \overset{r}{\not\to} a\eta$ isbotlang.

5. Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(\xi_n = 1) = \frac{1}{n}$ bo'lsin, u holda $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, $\xi_n \xrightarrow{r} 0$ va $\xi_n \xrightarrow{deyarli} 0$ bo'lishini ko'rsating.

6. $F_{\xi_n} \xrightarrow{D} F_{\xi}$, biroq $\xi_n \overset{P}{\nrightarrow} \xi$ shunday ξ_n va ξ tasodifiy miqdorlarga misol keltiring.

7. Agar $G_n \xrightarrow{D} G$, u holda $G_n \xrightarrow{w} G$ o'rinli bo'ladimi?

8. $\left\{\xi_n \xrightarrow{w} \xi\right\} \Leftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right)$ bo'ladimi?

9. $\left\{\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi\right\} \Leftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{w} \xi\right)$ bo'ladimi?

10. $\left\{\xi_n \xrightarrow{r} \xi\right\} \Leftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P(1)} \xi\right)$ bo'ladimi?

V bob. BOG‘LIQ BO‘LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI

1-§. Katta sonlar qonuni

Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tajribalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Bu tajribalarning har birida A hodisa p ehtimollik bilan ro‘y beradi va $q=1-p$ ehtimollik bilan ro‘y bermaydi. Agar k - tajribada A hodisa ro‘y bersa $\xi_k=1$, agar ro‘y bermasa $\xi_k=0$ deb olamiz. U holda $\xi_1, \xi_2, \ldots$ lar Bernulli qonuni bo‘yicha bir xil taqsimlangan va bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma-ketligidir; $P(\xi_i=1)=p$, $P(\xi_i=0)=q$

$$M\xi_k=p,\ D\xi_k=pq,\ S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n.$$

A hodisa birinchi n ta tajribada ro‘y berishlari sonini

$$S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$$

deb belgilab olamiz, u holda

$$MS_n=np,\ DS_n=npq.$$

bo‘lishligi ravshan.

Ta’rif. Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ - tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $n\to\infty$ da ξ ga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashsa:

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi,$$

u holda $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik ***katta sonlar qonuniga*** bo‘ysunadi deymiz.

Chebishov tengsizligi. Manfiy bo‘lmagan ξ tasodifiy miqdor, u holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\{\xi>\varepsilon\}\le\frac{M\xi}{\varepsilon}$$

Isboti quyidagi munosabatdan kelib chiqadi:

$$M\xi\ge M\left[\xi\cdot I_{(\xi\ge\varepsilon)}\right]\ge\varepsilon MI_{(\xi\ge\varepsilon)}=\varepsilon P(\xi\ge\varepsilon)$$

Agar ξ – iqtisodiy tasodifiy bo‘lsa, u holda

$$P\{\xi\ge\varepsilon\}\le\frac{M\xi^2}{\varepsilon^2}\ \text{va}\ P(|\xi-M\xi|\ge\varepsilon)\le\frac{D\xi^2}{\varepsilon^2},$$

bu yerda $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$ – tasodifiy miqdor ξ ning dispersiya

1-teorema. (Katta sonlar qonuni). Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ – bog‘liq bo‘lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $M\xi_i=m$, $D\xi_i<\infty$, u holda ixtiyoriy musbat $\varepsilon>0$ uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)\to 0.$$

Isboti. Haqiqatdan ham Chebishev tengsizligiga binoan va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun, $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)\le\frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2}=\frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2}\to 0.$$

Ehtimollik bo'yicha yaqinlashish ta'rifiga ko'ra Bernulli sxemasi uchun katta sonlar qonunini

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} m$$

kabi ham yozsa bo'laveradi, chunki $\frac{S_n}{n}$ nisbatan bitta ehtimolliklar fazosida berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi sifatida qarash mumkin.

Umuman olganda, $D\xi_i$ dispersiyaning chekliligi katta sonlar qonunining bajarlishi uchun zaruriy shart emas.

2-teorema (Xinchin). Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog'liq bo'lmasa va bir xil taqsimlangan bo'lib matematik kutilmasi chekli bo'lsa ($M\xi_n = m < \infty$), u holda katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} m.$$

Ta'rif. Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $n \to \infty$ da ξ limitiga bir ehtimollik bilan yaqinlashsa, u holda $\{\xi_n(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ***kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga*** bo'ysinadi deymiz.

Yuqorida Bernulli sxemasi uchun isbot qilingan katta sonlar qonuniga nisbatan kuchliroq natijaga erishishimiz mumkin:

3-teorema (Bernulli sxemasi uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni). Agar $\{\xi_n(\omega)\}$ bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib $M|\xi_1|^4 < \infty$, $M\xi_1 = m$..

U holda, $n \to \infty$ da $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p(1)} m$.

2-teoremaning isboti. Biz $\{\xi_n \not\to \xi\} = \bigcup_{\sigma>0}\bigcap_{N}\left\{\sup_{n\geq N}|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\}$ kabi yozishni bilamiz, shunga asosan

$$\left\{\frac{S_n}{n} \not\to m\right\} = \bigcup_m \lim\sup A_n\left(\frac{1}{m}\right),$$

Bu yerda

$$A_n(\varepsilon) = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right\},$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left\{\lim_n \sup A_n(\varepsilon)\right\} = 0 \tag{1}$$

u holda,

$$P\left\{\frac{S_n}{n} \not\to m\right\} = 0.$$

(1) ning bajarilishi uchun, Borel-Kantelli lemmasiga muvofiq,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n(\varepsilon)) < \infty$$

shartning bajarilishi yetarli.

$P(A_n(\varepsilon))$ ehtimollikni yuqoridan baholaymiz. Teorema shartiga ko‘ra $M|\xi_i|^4 < \infty$, u holda Chebishev tengsizligiga ko‘ra

$$P\{A_n(\varepsilon)\} = P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right\} \geq \frac{M[S_n - n\cdot m]^4}{n^4\varepsilon^4} \leq \frac{C\cdot n^2}{n^4\varepsilon^4}; \ (C{=}const),$$

chunki

$$M[S_n - nm]^4 = M\left[\sum(\xi_i - m)\right]^4 = nM(\xi_1-m)^4 + 6C_n^2 M(\xi_1-m)^2 + \leq C\cdot n^2,$$

bu yerda C=*const*.

Biz $P(A_n(\varepsilon))$ ni baholashda Chebishev tengsizligidan ikkinchi moment $\left(M|\xi_i|^2 < \infty\right)$ mavjud bo‘lgan holda qo‘llasak, kerakli natijaga erishmagan bo‘lar edik.

1-natija. Agar $g(t) \in C[0,1]$ u holda $n \to \infty$ da

$$Mg\left(\frac{S_n}{n}\right) \to g(p) \qquad (2)$$

bu yerda p bo‘yicha tekis yaqinlashish.

Isboti. Biz $\Delta = \left|\frac{S_n}{n} - p\right|$ belgilash kiritaylik, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\Delta = \left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(p)\right| \leq M\left\{\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(p)\right|; \ \ \Delta \leq \varepsilon\right\} +$$

$$+M\left\{\left|g\left(\frac{S_n}{n}\right) - g(p)\right|; \ \ \Delta > \varepsilon\right\} \leq \sup_{|t|\leq\varepsilon}|g(p+t) - g(p)| + 0(1).$$

2-natija. Agar $g(t) \in C[0,1]$, u holda $n \to \infty$ da

$$\sum_{m=0}^{n} g\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m t^m (1-t)^{n-m} \to g(t),$$

bu yerda yaqinlashish esa $(0,1) \ni t$ lar bo‘yicha tekis. Bu yerdagi munosabat (2) ning boshqacha ko‘rinishi bo‘lib, bundan uzluksiz funksiyalarni ko‘phadlar bilan yaqinlashtirish haqidagi Beyershtrassning mashhur teoremasi kelib chiqadi. Bunda Bernshteyn ko‘phadlari yaqqol ko‘rilgan.

2-§. Muavr-Laplasning lokal limit teoremasi

Biz avvalgi paragraflardan birida Bernulli formulasini keltirib chiqardik:

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

bu yerda $q=1-p$, $S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$. Biroq n va k larning katta qiymatlarida bu formula hech qanday samara bermaydi, chunki ulkan sonlar hosil bo'ladi. Shu sababli $n\to\infty$ da $P(S_n=k)$ ehtimollikning asimptotik ko'rinishini topish masalasi tug'iladi.

Ikkita $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

Agar $n\to\infty$ da $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\to 1$ bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ sonlar ketma-ketligini ekvivalent deymiz, ($\alpha_n\sim\beta_n$) simvol bilan belgilaymiz). Keyingi hisoblashlar qulay bo'lshi uchun

$$L(t)=t\ln\frac{t}{p}+(1-t)\ln\frac{1-t}{1-p},\quad h=\frac{k}{n}$$

belgilash kiritamiz.

1-teorema. Agar $k\to\infty$ va $n-k\to\infty$, u holda

$$P(S_n=k)=P\left(\frac{S_n}{n}=h\right)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi nh(1-h)}}\exp\{-nL(h)\}. \tag{1}$$

Isboti. Stirling formulasidan foydalanamiz, ya'ni $n\to\infty$, $n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$. U holda

$$P(S_n=k)=C_n^kp^kq^{n-k}\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\cdot\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi nh(1-h)}}exp\left\{-k\ln\frac{k}{n}-(n-k)\ln\frac{n-k}{n}-k\ln p+(n-k)\ln(1-p)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi nh(1-h)}}exp\{-n[h\ln h+(1-h)\ln(1-h)-h\ln p-(1-h)\ln(1-p)]\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi nh(1-h)}}exp\{-nL(h)\}.$$

Agar $h=\dfrac{k}{n}$ soni p ga yaqin bo'lsa, u holda (1) ning boshqa qiziqarliroq ko'rinishini topish mumkin. $L(x)$ funksiya $(0,1]$ intervalda analitik funksiya, chunki

$$L'(t)=\ln\frac{t}{p}-\ln\frac{1-t}{1-p},\ L''(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}. \tag{2}$$

u holda $L'(p)=L(p)=0$ hamda $h-p$ ayirma nolga intiladi, natijada

$$L(h)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)(h-p)^2+0\left(|h-p|^3\right)$$

Shuning uchun, agar $h\sim p$ va $n(h-p)^3\to 0$, u holda

$$P(S_n=k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{n}{2pq}(h-p)^2\right\}$$

Agar $\Delta=\frac{1}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ deb olinsa, u h i natija kelib chiqadi. ▲

Natija. Agar $t=n(h-p)=k-np=0\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$,

U holda

$$P(S_n=k)=P(S_n-np=t)\sim\Delta\varphi(t\Delta). \qquad (3)$$

Bu formula, $\{S_n<k\}$ hodisaning ehtimolligini baholash imkonini beradi. (1) formuladagi xatolikni $n!=\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\theta(n)}$. Stirling formulasidan va quyidagi tengsizlikdan

$$\frac{1}{12n+1}<\theta(n)<\frac{1}{12n}$$

foydalanib hisoblashimiz mumkin. Yuqoridagi mulohazalarni takrorlab, quyidagi teoremani isbotlashimiz mumkin.

2-teorema.

$$P(S_n=k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi nh(1-h)}}exp\{-nL(h)+\theta(k,n)\} \qquad (4)$$

bu yerda

$$|\theta(k,n)|=|\theta(n)-\theta(k)-\theta(n-k)|<\frac{1}{12k}+\frac{1}{12(n-k)}=\frac{1}{12h(1-h)\cdot n} \qquad (5)$$

Xuddi yuqoridagi kabi isbot qilinadigan Muavr-Laplasning klassik lokal teoremasini quyidagicha bayon qilishi ham mumkin:

3-teorema. Agar n ta bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida biror A hodisaning ro'y berishi ehtimolligi p ga teng bo'lsa, u holda A hodisani n ta tajribada k marotaba ro'y berishi $P_k(k)$ ehtimolligini $n\to\infty$ da $P_n(k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, bu yerda $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Bu formuladan foydalanish qulay bo'lsin uchun kitob oxirida bu funksiya uchun jadval tuzilgan.

Bu teoremani Muavr (de Moivre) 1730-yilda Bernulli sxemasining $p=q=\frac{1}{2}$ bo'lgan xususiy holi uchun isbotladi, so'ngra Laplas (Laplace) ixtiyoriy $[0,1]\ni p$ uchun isbotlandi.

Aytaylik, $l_1,l_2,\dots,l_m$ holatlar berilgan bo'lsin va l_j holatlarni n ta tajribada ro'y berishlar soni $N_n(j)$ bo'lsin. Quyidagi formulaga polinomial taqsimot deyiladi:

$$P\{N(1)=k_1,\dots,N_n(m)=k_m\}=\frac{n!}{k_1!\dots k_m!}p_1^{k_1},\dots,p_m^{k_m} \qquad (6)$$

bu yerda

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = n, \quad p_j = p(l_j), \quad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Agar $(p_1+p_2+\ldots+p_n)^n$ ko‘phadni $p_1,p_2,\ldots,p_n$ larning darajalari bo‘yicha yoysak ham (6) – formulaga kelamiz, shuning uchun ham (6) ga ***polinomial*** taqsimot deymiz.

1-teoremadagi asosiy asimptotik formulani taqsimot uchun ham umumlashtirishimiz mumkin:

3-teoremadagi $k_1,\ldots,k_s$ o‘zgaruvchilarning har biri yoki 0 yoki cheksizlikka intilsa, u holda

$$P(\bar{S}_n = \bar{k}) \sim (2\pi n)^{\frac{1-m_0}{2}} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ p\neq 0}}^{m} \bar{h}_j \right)^{-\frac{1}{2}} exp\{-nL(h)\},$$

bu yerda

$$\bar{S} = \left(S_n^{(1)} \ldots S_n^{(2)}\right); \quad \bar{k} = (k_1,\ldots,k_m); \quad \bar{h} = \left(\frac{\bar{k}}{n}\right)$$

hamda

$$L(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{m} t_i \ln \frac{t_i}{p_i}, \quad \bar{t} = (t_1,\ldots,t_m)$$

m_0 esa $k_1,\ldots,k_m$ o‘zgaruvchilarning 0 ga teng bo‘lmaganlari soni.

1-misol. Biror mahsulotni yaroqsiz bo‘lishi ehtimoli 0,001 ga teng. 50000 mahsulotdan tavakkal qilib olingan 25 tasini yaroqsiz mahsulot bo‘lishi ehtimoli qancha?

Bernulli formulasiga binoan

$$P_{50000}(25) = C_{50000}^{25}(0{,}999)^{49975}(0{,}001)^{25},$$

biroq bu formuladan foydalanish qanchalik mashaqqatli?

Shu sababli Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalansak:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)}{\sqrt{npq}}},$$

bizning misolimizda n=50000, k=25, p=0,001

$$\sqrt{npq} = \sqrt{50000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999} = \sqrt{49{,}95} \approx 7{,}06.$$

Shuningdek,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \approx -3{,}68; \quad P_n(k) = \frac{1}{(7{,}06)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(25)^2}{2}}.$$

Ammo $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qisqacha jadvali oxrida keltirilgan.

Demak, $P_{50000}(25) \approx 0{,}001$.

Aniq formulalardan foydalanilsa ham deyarli shunday natija olinadi.

2-misol. Jyuri a'zolari $n=2m+1$ toq sondan iborat bo'lib, boshqa a'zolariga bog'liq bo'lmagan holda $p=0,7$ ehtimollik bilan to'g'ri hukm chiqaradi. Ko'pchilik ovoz bilan qabul qilinadigan hukm eng kamida $0,99$ ehtimollik bilan to'g'ri bo'lishi uchun, juri a'zolarining minimal soni necha bo'lishi kerak?

Bu masalada, qulaylik uchun quyidagicha shartlashib olamiz:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & agar \quad k-juri\ a'zosi\ to'g'ri\ hukum\ chiqargan\ bo'lsa \\ 0, & aks\ holda \end{cases}$$

Bizga $P(S_n \le m) \le 0,01$ tengsizlikni qanoatlantiradigan n ning toq qiymatini topishimiz kerak. $P(S_n \le m)$ ehtimolini taxminan

$$\frac{n+1-m}{(n+1)p-m} P(S_n = m) \approx \frac{p}{2p-1} P(S_n = m)$$

tengligini hisoblash qiyin emas. Bizning masalamizda

$$h \approx \frac{1}{2}, \quad L\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln 4p(1-p), \quad L'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1-p}{p},$$

ekanligini inobatga olsak hamda 1-teoremadan foydalansak,

$$P(S_n \le m) \approx \frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left\{-nL\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right\} \approx$$

$$\approx \frac{p}{2p-1}\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left\{nL\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} L'\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2p(1-p)}}{(2p-1)\sqrt{\pi n}} \left(\sqrt{4p(1-p)}\right)^n \approx 0,915 \frac{1}{\sqrt{n}} (0,84)^{\frac{n}{2}}.$$

Buning o'ng tomonida monoton kamayuvchi $a(n)$ funksiya turibdi $a(n)=0,01$ tenglamani yechib, yechim sifatida $n=33$ javobni olamiz. Agar aniq formulalardan foydalansak ham xuddi shu natjani hosil qilamiz.

Endi (3) munosabatni quyidagicha aniqlashtirishimiz mumkin.

4-teorema. Ushbu $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \frac{1}{2}\min(p,q)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha k lar uchun

$$P(S_n=k)=\Delta\alpha(\Delta t)(1+\varepsilon)(k,n),$$

bu yerda

$$1+\varepsilon(k,n)=\exp\left\{\theta\left(\frac{|x|^3\Delta^4}{3}\right)+\left(|x|+\frac{1}{6}\Delta^2\right)\right\}, \quad |\Delta|<1.$$

Isboti. Shu paragrafdagi (2) formuladan yoydalanamiz. (2) formulalarga qo'shimcha ravishda quyidagi formulalarni yozishimiz mumkin:

$$L^{(k)}(t)=\frac{(-1)^k (k-2)!}{t^{k-1}} + \frac{(k-2)!}{(1-t)^{k-1}}, \quad k \ge 2$$

$$L(h)=\frac{1}{2pq}(h-p^2)+R_1,$$

bu yerdagi qoldiq hadni

$$R_1=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{L^{(k)}(p)}{k!}(h-p)^k$$

baholaymiz. Buning uchun

$$\left|L^{(k)}(p)\right|\le(k-2)!\left(\frac{1}{p^{k-1}}+\frac{1}{q^{k-1}}\right),\quad k\ge 2$$

tengsizlikni e'tiborga olsak, hamda soddalik uchun, $|h-p|=\delta$ deb belgilasak, u holda $\frac{1}{2}min(p,q)\ge\delta$ uchun

$$|R_1|\le\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(k-2)!}{k!}\delta^k\left(\frac{1}{p^{k-1}}+\frac{1}{q^{k-1}}\right)\le$$

$$\le\frac{\delta^3}{6}\left[\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\delta}{p}}+\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\delta}{q}}\right]\le\frac{\delta}{6}\left[\frac{2}{p^2}+\frac{2}{q^2}\right]<\frac{\delta}{3(pq)^2}$$

Bundan

$$-nL(h)=-\frac{(k-np)^2}{2npq}+\frac{\theta_1|k-np|^3}{3(npq)^2}=-\frac{t^2\Delta^2}{2}+\frac{\theta_1|t|^3\Delta^4}{3}. \qquad (7)$$

Endi (4) tenglikning qolgan ko'paytuvchilariga e'tibor bersak, hamda $h(1-h)$ ko'paytmani qarasak, chunonchi

$$-p<1-p-h\le 1-p,$$

u holda

$$|h(1-h)-p(1-p)|=|(h-p)(1-p-h)|\le|h-p|\max(p,q),$$

bundan xususan, $|h-p|<\frac{1}{2}min(p,q)$ tengsizlik bajarilganda

$$|h(1-h)-pq|<\frac{1}{2}pq,\quad h(1-h)>\frac{1}{2}pq$$

o'rinli bo'ladi. Shuning uchun (5) bilan bir qatorda 4-teoremada ko'rsatilgan k lar uchun

$$|\theta(k,n)|<\frac{1}{6npq}=\frac{\Delta^2}{6}. \qquad (8)$$

Endi $|h(1-h)|^{-\frac{1}{2}}$ ko'paytuvchini tekshirish qoldi. Lekin $|\gamma|<\frac{1}{2}$ bajarilganda

$$ln(1+\gamma)=\left|\int_1^{1+\gamma}\frac{1}{x}dx\right|<2|\gamma|.$$

U holda $\delta = |h - p| < \frac{1}{2} min(p,q)$ bajarilganda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$ln\, h(1-h) = ln\, pq + ln\left(1 + \frac{h(1-h) - pq}{pq}\right) =$$

$$= \ln pq + \ln\left(1 - \frac{\bar{\theta}_1 \delta}{pq}\right), \quad |\bar{\theta}_1| < \max(p,q);$$

$$\ln\left(1 - \frac{\bar{\theta}_1 \delta}{pq}\right) = -\frac{2\theta_2 \delta}{pq}, \quad |\bar{\theta}_2| < \max(p,q)$$

$$[h(1-h)]^{-\frac{1}{2}} = [pq]^{-\frac{1}{2}} exp \frac{\theta_2 \delta}{pq}. \tag{9}$$

Chiqarilgan (7), (8), (9) formulalardan va 1-teorema shartidan teoremaning isboti kelib chiqadi. ▲

3-§. Muavr-Laplasning integral limit teoremasi

Bernulli sxemasi uchun chiqarilgan Muavr-Laplasning lokal teoremasi, lokal limit teoremasini isbotlash uchun qo'llaniladi. Aytaylik, a va b fiksirlangan sonlar, hamda

$$\zeta_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

u holda

$$P(a < \zeta_n < b) = \sum_{a\sqrt{npq} < x < b\sqrt{npq}} P(S_n - np = x).$$

Agar $P(S_n - np = x)$ ifoda o'rniga $\varphi(x\Delta)\Delta$ qo'yilsa, u holda, $\int_a^b \varphi(x)dx$ integralga mos keluvchi $\sum_{a < x\Delta < b} \varphi(x\Delta)$ integral yig'indini olamiz. Shunday qilib, shu bobning 2-§dagi (3) munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \zeta_n < b) = \int_a^b \varphi(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{1}$$

bu yerda $\Phi(x)$ funksiya $(0,1)$ parametrli normal taqsimotdan iborat:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

(1) formulaga Muavr-Laplasning integral limit teoremasi deyiladi. Quyidagi teorema yordamida (1)-tenglikdagi xatolikni baholaymiz. Aytaylik, α va β butun sonlar bo'lsin hamda

$$a = \frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} \tag{2}$$

Teorema. Aytaylik, $b>a$, $c=max(|a|,|b|)$

$\rho=\frac{c^3+3c}{3}\Delta+\frac{\Delta^2}{6}$ bo‘lsin.

U holda, agar $\Delta=\frac{1}{\sqrt{npq}}\le\frac{1}{2}$, $\rho\le\frac{1}{2}$, bo‘lsa, u holda

$$P(\alpha\le S_n\le\beta)=P(a\le\zeta_n\le b)=\int_a^b\varphi(t)dt(1+\theta_1\Delta c)(1+2\theta_2\rho), \qquad (3)$$

bu yerda $|\theta_i|\le 1, \quad i=1,2.$

Bu teorema (3) formulaning chap tomoni o‘suvchi a va b larda $\Phi(a)-\Phi(b)$ ayirmaga ekvivalent bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadi. Bu shartlarda $\Phi(a)-\Phi(b)$ ayirma 0 ga intilishi mumkin va (1) da nisbiy xatolikni bilish juda qulay, chunki uning kichikligi doimo xatolikni ham kichikligini o‘rnatish imkonini beradi, biroq aksinchasi doimo to‘g‘ri emas.

Isboti. Avvalo, $|x|=|k-np|<c\sqrt{npq}$ tengsizlik bajariladigan hamma k larda 2-§ dagi 2-teoremaning shartlari bajariladi. Haqiqatdan ham $|h-p|<\frac{1}{2}min(p,q)$ tengsizlik bajarilishi uchun

$$|k-np|<\frac{npq}{2}=\frac{1}{2\Delta^2}$$

tengsizlikning bajarilishi yetarli. Bu tengsizlik bajarilishi uchun $c<\frac{1}{2\Delta}$ o‘rinli bo‘lishi kerak. Biroq $\rho\le\frac{1}{2}$ bo‘lgani sababli

$$\frac{c(c^2+3)}{3}<\frac{1}{2};\quad c\Delta<\frac{1}{2}.$$

Shunday qilib, $a\sqrt{npq}<x<b\sqrt{npq}$ tengsizlik bajariladigan k larda 2-§ning 2-teoremasidan foydalanishimiz mumkin.

Shuning uchun

$$P(\alpha\le S_n<\beta)=\sum_{a\sqrt{npq}\le x<b\sqrt{npq}}P(S_n=k)=$$

$$=\sum_{a\le x\Delta<b}\Delta\varphi(x\Delta)\left[1+\left(\exp\left\{\theta\left(\frac{|x|^3\Delta^4}{3}+\left(|x|+\frac{1}{6}\right)\right)\Delta^2\right\}-1\right)\right], \qquad (4)$$

bu yerda $|\theta|\le 1$. Chunki $1\ge\rho$ lar uchun

$$\left|\frac{e^p-1}{\rho}\right|<(e-1)<2,$$

u holda ($x\Delta=c$ deb olinsa) (4) dagi tuzatma had quyidagi ifodadan oshib ketmaydi.

$$\left|exp\left\{\theta\left(\frac{c^3\Delta}{3}+c\Delta+\frac{\Delta^2}{6}\right)\right\}-1\right|\le 2\theta\left(\frac{c^3\Delta}{3}+c\Delta+\frac{\Delta^2}{6}\right)=2\theta\rho.$$

Shuning uchun

$$P(\alpha\le S_n<\beta)=\sum_{a\le x\Delta<b}\Delta\varphi(x\Delta)[1+2\theta_1\rho],\qquad(5)$$

bu yerda $|\theta_1|<1$. Topilgan tenglikning o'ng tomonidagi yig'indini o'zgartirish mumkin. Buning uchun, ixtiyoriy $\varphi(t)$ silliq funksiya uchun

$$\left|\Delta\varphi(t)-\int_t^{t\Delta}\varphi(x)dx\right|\le\frac{\Delta^2}{2}\max_{t\le x<t+\Delta}|\varphi'(x)|\qquad(6)$$

tengsizlikni va

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

funksiya uchun $\varphi'(t)=-t\varphi(t)$ e'tiborga olsak, $|t|\le c$, $[t,t+\Delta]$ oraliqda $\varphi(t)$ funksiyaning eng katta qiymatidan eng kichik qiymati orasidagi farq $exp\left(c\Delta+\frac{\Delta^2}{2}\right)$ ko'paytmadan ortib ketmaydi.

Shuning uchun $|t|\le c$ bajarilganda (6) ga ko'ra

$$\left|\Delta\varphi(t)-\int_t^{t+\Delta}\varphi(u)du\right|\le\frac{c\Delta^2}{2}e^{c\Delta+\frac{\Delta^2}{2}}\min_{t\le u\le t+\Delta}\varphi(x)\le\frac{c\Delta}{2}e^{c\Delta+\frac{\Delta^2}{2}}\int_t^{t+\Delta}\varphi(u)du.$$

Hamda

$$c\Delta+\frac{\Delta^2}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2};\quad e^{c\Delta+\frac{\Delta^2}{2}}\le 2$$

bo'lgani sababli quyidagi munosabat o'rinli:

$$\Delta\varphi(t)=\int_t^{t+\Delta}\varphi(u)du(1+\theta_1 c\Delta),\quad|\theta_1|<1$$

Buni (5) ga qo'ysak, teoremaning isboti kelib chiqadi.

$$|P(x\le\zeta_n<y)-[\Phi(y)-\Phi(x)]|$$

ayirmani baholasak $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ - baho tartibini yaxshilab bo'lmaydi, chunki taqsimot funksiyaning sakrashi (isbot qilingan teoremaga ko'ra) $\frac{1}{\sqrt{npq}}$ ga teng. Biz isbot qilgan teoremamizda, x va y lar absolut qiymat bo'yicha o'sganda hamda bir xil ishorali bo'lsa, $P(x\le\zeta_n<y)$ ehtimollik uchun, ***katta og'ishlar sohasi*** deb ataluvchi sohada, normal qonunga yaqinlashishdan foydalanishimiz mumkin. Bu holda $\Phi(y)-\Phi(x)$ ayirma 0 ga yaqinlashadi.

Shuning uchun, agar

$$\frac{P(x \le \zeta_n < y)}{\Phi(y) - \Phi(x)} \to 1 \qquad (8)$$

o'rinli bo'lsa, bu yaqinlashishini qoniqarli deb hisoblashimiz mumkin.

Agar $C = max\left(|x|, |y| = 0\left(\Delta^{-\frac{1}{3}}\right) \text{ yoki } C = 0\left(n^{\frac{1}{6}}\right)\right)$ bo'lsa, bunday yaqinlashish o'rinli bo'lishligi teoremadan kelib chiqadi. Biroq C ning katta qiymatlarida 2-§dagi 1-teoremaga asosan (8) munosabat, umuman olganda, bajarilmasligini ko'rsatishimiz mumkin.

Ammo $b \to \infty$ da

$$P(|\zeta_n| > b) \to 0,$$

u holda y ning fiksirlangan qiymatlarida

$$\lim_{n\to\infty} P(\zeta_n < y) = \Phi(y).$$

Misol. Kubik 12000 marotaba tashlandi. Olti ochkolar soni (1800, 2100] intervalga tushish ehtimolligi qanchaga teng?

Yechish. Qidirilayotgan ehtimollik

$$P = \sum_{1800<k\le 2100} C_{12000}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{12000-k}$$

Bu yig'indini hisoblash qanchalik mashaqqatli. Integral limit teoremadan foydalansak, bu ehtimollik

$$P = \Phi\left(\frac{2100-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{1800-2000}{\sqrt{12000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}\right) = \Phi\left(\sqrt{6}\right) - \Phi\left(-2\sqrt{6}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(2{,}449) - \Phi(-4{,}898) \approx 0{,}992,$$

bu yerda $\Phi(2{,}449)$ va $\Phi(-4{,}898)$ funksiyani qiymatlari $\Phi(x)$ – normal qonunni jadvalidan olindi.

4-§. Puasson taqsimoti

Avvalgi paragrafda ko'rilgan Muavr-Laplasning teoremasidan $npq = DS_n$ - dispersiya katta bo'lgandagina foydalanishimiz mumkin. Agar p va q lar fiksirlangan musbat son bo'lsa, n bilan birgalikda DS_n o'sadi. Masalan $p=0,01$ va $n=100$, $np=1$ bo'lganda ham Muavr-Laplasni teoremasidan foydalanish ma'nosizdir, biroq bu holda $P(S_n=k)$ Puasson taqsimoti yaxshi natija beradi:

Teorema. (Puasson). Aytaylik, $n\to\infty$ va $p=p_n\to 0$, lekin $np_n\to\lambda$, u holda ixtiyoriy fiksirlangan $k=0,1,2,\ldots$ sonlar uchun $P_n(k)=C_n^k P_n^k(1-P_n)^{n-k}$ ehtimolliklar $n\to\infty$ da Puasson taqsimotiga intiladi:

$$P_n(k)\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{1}$$

Isboti. Biroq $p_n=\frac{\lambda}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)$, u holda

$$P_n(k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left[\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k\left[1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}. \tag{2}$$

Ammo

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left[\frac{\lambda}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k=$$

$$\lambda^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}[1+o(1)]^k\to\lambda^k.$$

lekin

$$\left[1-\frac{\lambda}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}\to e^{-\lambda}.$$

Bundan esa (2) bilan birgalikda (1) ni isboti kelib chiqadi. Faraz qilaylik $\xi_1,\ldots,\xi_n$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib,

$$P(\xi_k=1)=p_k,\ P(\xi_k=0)=1-p_k.$$

Biz avvalgidek $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ deb belgilaymiz. Quyida bayon etiladigan teorema p_i lar kichik bo'lib, $\lambda=\sum_{i=1}^{n}p_i$ son esa "1 bilan taqqoslanuvchi" bo'lganda $P(S_n=k)$ ehtimolligini baholash uchun qo'llaniladi.

1-teorema. Hamma A to'plamlar uchun

$$\left|P(S_n\in A)-\sum_{k\in A}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right|\le\sum_{j=1}^{n}p_j^2.$$

Bu teoremani isbotlashdan avval Puasson taqsimotining bitta muhim xossasini keltiramiz: agar π_1 va π_2 - bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar λ_1 va λ_1 parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, u holda $\pi_1+\pi_2$ yig'indi ham $\lambda_1+\lambda_1$ parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'ladi.

Haqiqatdan ham, to'la ehtimollar formulasiga asosan:

$$P(\pi_1+\pi_2=k)=\sum_{m=0}^{k}P(\pi_1=m)P(\pi=k-m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{\lambda_1^m e^{-\lambda}}{m!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-m}e^{-\lambda}}{(k-m)!}=\frac{\exp(-\lambda_1-\lambda_2)}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m\lambda_1^m\lambda_2^m=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}.$$

1-teoremaning isboti. Aytaylik, birlik kesmada tekis taqsimlangan $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $\xi(v_k)=v_k$ bo'lsin. Shuningdek, $v=(v_1,\dots,v_n)$ vektorni n o'lchovli Ω-kubda tekis taqsimlangan aynan funksiya deb ham qarashimiz mumkin. Endi ξ_j va ξ_j^* tasodifiy miqdorlarni Ω da quyidagicha ko'ramiz:

$$\xi_j(v)=\begin{cases}0, & agar \quad v_j<1-p_j\\ 1, & agar \quad v_j\ge 1-p_j\end{cases}$$

$$\eta_j(v)=\begin{cases}0, & agar \quad v_j<e^{-p}\\ k\ge 1, & agar \quad v_j\in[\Pi_{k-1},\Pi_k)\end{cases},$$

bu yerda $\Pi_k=\sum_{m\le k}e^{-p_j}\frac{(p_j)^m}{m!}, \quad k=0,1,\dots.$

Ravshanki $\xi_j(v)$ lar bog'liq bo'lmagan xuddi boshlang'ich $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar kabi taqsimlangan, $\eta_j(v)$ lar esa p_j parametrli Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan. Biroq $1-p_j\le e^{-p_j}$ va faqat $v_j\in[1-p_j, e^{-p_j})$ yoki $v_j\in[e^{-p_j}+$ $+p_j\times e^{-p_j},1]$ bo'lsa, u holda $\xi_j(v)\ne\eta_j(\omega)$.

Shuningdek,

$$P(\xi_j\ne\eta_j)=(e_j^{-p_j}-1+p_j)+(1-e^{-p_j}-p_je_j^{-p_j})=p_j(1-e_j^{-p_j})\le p_j^2$$

$$P(S_n\ne\bar S_n)\le P\left(\bigcup_j\{\xi_j\ne\eta_j\}\right)\le\sum p_j^2$$

bu yerda $\bar S_n=\sum_{j=1}^{m}\eta_j$ parametrli Puasson taqsimotiga ega.

Endi biz quyidagini yozishimiz mumkin:

$$P(S_n\in A)=P(S_n\in A, S_n=\bar S_n^*)+P(S_n\in A, S_n\ne\bar S_n^*)=$$
$$=P(\bar S_n\in A)-P(\bar S_n\in A, S_n\ne\bar S_n)+P(S_n\in A, S_n\ne\bar S_n);$$
$$|P(S_n\in A)-P(\bar S_n\in A)|\le|P(\bar S_n\in A, S_n\ne\bar S_n)-P(S_n\in A, S_n\ne\bar S_n)|\le P(S_n\ne\bar S_n).$$

1-teoremani isbotlashda biz "birgina ehtimolliklar fazosi metodi"dan foydalandik. Bizning holimizda bu metodning mohiyati quyidagicha: S_n tasodifiy miqdorlar berilgan fazoda, S_n ga yetarlicha yaqin qilib shunday $\bar S_n$ tasodifiy miqdorlar quriladiki, bunda $\bar S_n$ning taqsimot funksiyasi Puasson taqsimoti funksiyasi bilan ustma-ust tushadi. 1-teoremaga ko'ra ushbu da'vo isbotlanadi:

2-teorema. $np=\lambda$ va $\pi_k=\frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$ belgilaymiz. U holda hamma A to'plam uchun

$$\left|P(S_n \in A)-\sum_{k\in A}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right| \le \frac{\lambda^2}{n}.$$

Misol. Hajmi V ga teng bo'lgan suv havzasidan tekshirish maqsadida $V>>v$ hajmli suv olindi. V hajm idishda n dona xavfli bakteriya bor. Nazorat qilish uchun olingan idishda n dona bakteriyani bo'lishi ehtimolligi qancha?

Odatda ixtiyoriy berilgan bakteriyani tekshirishga tushish ehtimoli $p=\frac{v}{V}$ deb hisoblanadi. Bundan tashqari, tekshirishdagi bitta bakteriyani sodir bo'lishi qolgan $n-1$ dona bakteriyani qaysi bir idishda bo'lishiga bog'liq emas deb hisoblashadi. Boshqacha aytganda, odatda bakteriyani nazoratda bo'lishi har bir tajriba $p=\frac{v}{V}$ ehtimollik bilan ro'y beradigan bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga ekvivalentligini postulat sifatida qabul qilinadi. Xuddi yuqoridagi kabi ξ_k tasodifiy miqdorlar kiritib, Bernulli sxemasida $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ yig'indi yordamida nazorat idishdagi bakteriyalar sonini ifodalashimiz mumkin. Agar nv ko'paytma V bilan taqqoslanadigan bo'lsa, u holda Puasson teoremasiga ko'ra qidirilayotgan ehtimollik

$$P(S_n>0)\approx 1-e^{-n\frac{v}{V}}$$

Xuddi shunga o'xshash modelni astronomiya masalalarini yechishda ya'ni Somon yo'li yaqinida joylashgan, osmonning biror sohasidagi ko'rinadigan yulduzlar sonini taqsimotini aniqlashda ishlatiladi. Aniqrog'i R sohada n dona ko'rinadigan yulduz bo'lsa, uning $R\supset r$ qism sohasida k ta ko'rinadigan yulduz bo'lishi ehtimolligi $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ga teng, bu yerdagi p ehtimollik r va R sohalar yuzlarini $S(r)$ va $S(R)$ kabi belgilaymiz, u holda p ehtimollik quyidagi nisbatiga teng:

$$p=\frac{S(r)}{S(R)}.$$

5-§. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni

Biz birinchi paragrafda

$$\frac{S_n-MS_n}{n}\xrightarrow{P}0 \qquad (*)$$

katta sonlar qonunini isbotlagan edik. Agar (*) dagi yaqinlashish bir ehtimollik bilan bo'lsa, ya'ni

$$\frac{S_n-MS_n}{n}\xrightarrow{P(1)}0$$

u holda $\{\xi_n(\omega)\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi **kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga** bo'yin sunadi deyiladi.

1-teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bir xil taqsimlangan, bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi berilgan bo'lib, $m = M|\xi_1| < \infty$ bo'lsa, u holda

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P(1)} m$$

o'rinli bo'ladi.

Agarda $m = M|\xi_1| = \infty$ bo'lsa, u holda $P\left\{\frac{S_n}{n} \not\to m\right\} = 1$ ya'ni, bir ehtimollik bilan $\left\{\frac{S_n}{n}, n \geq 1\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashmaydi. Bu teoremani A.N.Kolmogorov tomonidan qilingan isboti quyidagi tartibda beriladi:

A) $\left\{M|\xi_1| < \infty\right\} \Rightarrow \left\{P\left(ch.k|\xi_n| > n\right) = 0\right\}$

B) "Qirqilgan"

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \xi_n, & agar \quad |\xi_n| \leq n \\ 0, & agar \quad |\xi_n| > n \end{cases}$$

tasodifiy miqdor kiritsak, agar $\frac{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{P(1)} M\xi_1$, u holda $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P(1)} m$.

C) Biroq $M\tilde{\xi}_n \to M\xi_1$ u holda $M\frac{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} \xrightarrow{P(1)} M\xi_1$, va shuning uchun $\frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{n} \xrightarrow{P(1)} 0$ isbotlash yetarli, $\eta_i = \tilde{\xi}_i - M\tilde{\xi}_i$, bu yerda $M\eta_i = 0, D\eta < \infty$;

D) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{n}$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\frac{\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n}{n} \xrightarrow{P(1)} 0$ bo'ladi.

Shunga asosan, bog'liq bo'lmagan $\{\zeta_k(\omega),\ k \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlardan tashkil topgan $\sum_{k=1}^{n} \zeta_k$ qatorlarning deyarli yaqinlashishini o'rganib chiqamiz.

A.N.Kolmogorovning ***"0 yoki 1"*** qonuniga ko'ra

$$\left\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k(\omega) \to\right\}$$

hodisa (ya'ni, shunday ω lar to'plamiki, ular uchun $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_k(\omega)$ qator yaqinlashadi) "dumli" hodisa hisoblanadi.

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \to\right\} = 0 \text{ } yoki \text{ } 1.$$

Quyidagi teorema bu qatorning deyarli yaqinlashuvchi bo'lishi uchun yetarlilik shartini beradi.

2-teorema. Faraz qilaylik $\{\zeta_k, k\geq 1\}$ - bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\zeta_k=0$. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k^2<\infty,, \tag{1}$$

u holda

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k \to\right\}=1. \tag{2}$$

Isboti. $S_n=\zeta_1+\ldots+\zeta_n$ deb belgilaymiz.

Biz (1) shart S_n tasodifiy miqdorning yaqinlashishi uchun yetarli bo'lishini isbotlaymiz.

Koshi kriteriysidan kelib chiqqan natijaga ko'ra

$$\lim_n P\left\{\sup_k|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon\right\}=1. \tag{3}$$

Biroq

$$P\left\{\sup_k|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon\right\}=\lim_{N\to\infty}P\left\{\max_{1\leq k\leq N}|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon\right\}, \tag{4}$$

U holda avvalo ixtiyoriy k da

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq N}|S_{n+k}-S_n|<\varepsilon\right\} \tag{5}$$

ehtimollikni baholash tabiiy. Buning uchun Chebishev tengsizligining umumiy holini ko'rib o'tamiz.

3-teorema. (Kolmogorovning tengsizligi). Aytaylik, bog'liq bo'lmagan $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lib, $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2<\infty$ bo'lsin. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$P\left\{\max_{1\leq k\leq N}|\xi_1+\ldots+\xi_k|<\varepsilon\right\}>1-\frac{\sum_{i=1}^{N}M\xi_i^2}{\varepsilon^2}. \tag{6}$$

Isboti. Aytaylik, $S_k=\xi_1+\ldots+\xi_k$. U holda

$$B=\left\{\max_{1\leq k\leq N}|S_k|\geq\varepsilon\right\}=\left\{barcha\quad 1\leq k\leq N, |S_k|\geq\varepsilon\right\}=\sum_{k=1}^{N}B_k,$$

bu yerda:

$$B_k=\bigcap_{i<k}\left\{S_i<\varepsilon,\quad |S_k|\geq\varepsilon\right\}.$$

A hodisaning indikatori I_{A_m} bo'lsa

$$\sum_{i=1}^{N}M\xi_i^2=MS_N^2\geq M\left(S_N^2;B\right)=MS_N^2I_B=\sum_{k=1}^{N}M\left[S_N^2I_{B_k}\right]. \tag{7}$$

Ammo

$$M\left[S_k^2I_{B_k}\right]=M\left[S_k+\left(\xi_{k+1}+\ldots+\xi_N\right)\right]^2\cdot I_{B_k}=$$

$$= MS_k^2 I_{B_k} + 2MS_k I_{B_k}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N) + M(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N)^2 I_{B_k} \geq MS_k^2 I_{B_k}. \quad (8)$$

Shartli matematik kutilmaning xossasiga ko'ra

$$MS_k I_{B_k}(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N) = MM\left\{(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N) S_k I_{B_k} \middle| S_k I_{B_k}\right\} =$$

$$= M\left\{S_k I_{B_k} \cdot M(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N) \middle| S_k I_{B_k}\right\} = M\left\{S_k I_{B_k} \cdot M(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N)\right\} = 0.$$

Biz, bu yerda $\xi_1, \ldots, \xi_N$ tasodifiy miqdorlarni $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_N$ va $S_k I_{B_k}$ larga bog'liqmasligidan foydalandik. Demak, $M\xi_i = 0$ bo'lgani uchun

$$M\left(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N \middle| S_k I_{B_k}\right) = M(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_N) = 0.$$

Shunday qilib (7) va (8) larga ko'ra

$$\sum_{i=1}^{N} M\xi_i^2 \geq \sum_{i=1}^{N} M\left[S_i^2 I_{B_i}\right].$$

Biroq B_i to'plamda $|S_i| \geq \varepsilon$. Shuning uchun

$$M\left[S_i^2 I_{B_i}\right] \geq \varepsilon^2 M I_{B_i} = \varepsilon^2 P(B_i).$$

Bundan

$$\sum_{i=1}^{N} M\xi_i^2 \geq \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{N} P(B_i) = \varepsilon^2 P(B).$$

Bu esa (6) ni isbotlaydi. ▲

(5) ehtimollikni baholashga qaytaylik. (6) ga ko'ra

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq N} |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n+1}^{n+N} M\zeta_i^2.$$

Demak

$$P\left\{\sup_k |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon\right\} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} M\xi_i^2.$$

(1) dagi farazimizga asosan

$$\sum_{i=1}^{\infty} M\xi_i^2 < \infty$$

qator yaqinlashuvchi. Shuning uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_n P\left\{\sup_k |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon\right\} = 1. \quad ▲$$

Teoremadagi D etapning o'rinli bo'lishligi quyidagi umumiy faktdan kelib chiqadi.

1-lemma (Kroneker). Aytaylik, $x_1, x_2, \ldots$ -haqiqiy sonlar ketma-ketligi bo'lib, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ qator (S soniga) yaqinlashsin. So'ngra $b_n \uparrow \infty$ bo'lsin, u holda $n \to \infty$ da

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \to 0. \quad (9)$$

Xususan, agar $x_k = \frac{y_k}{k}$, $b_k = k$ va $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da

$$\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\to 0. \tag{10}$$

Isboti. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k,\ R_0=S.$$

U holda $x_n=R_{n-1}-R_n$ va

$$\sum_{k=1}^{n}b_kx_k=\sum_{k=1}^{n}b_k\left(R_{k-1}-R_k\right)=\sum_{k=1}^{n-1}b_{k+1}R_k-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}b_kR_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)R_k+b_1S-b_nR_n.$$

Demak,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_kx_k\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)\left|R_k\right|+b_1\left|S\right|+b_n\left|R_n\right|. \tag{11}$$

Berilgan $\varepsilon>0$ uchun, shunday $N=N(\varepsilon)$ olamizki, hamma $k\ge N$ lar uchun $\left|R_k\right|\le\varepsilon$.

Agar $\overline{R}=\sup\limits_{n\ge 1}\left|r_n\right|$, u holda $n\ge N$ lar uchun

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)\left|R_k\right|\le\sum_{k=1}^{N-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)\left|R_k\right|+$$
$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1}-b_k\right)\le\overline{R}\left(b_N-b_1\right)+\varepsilon\left(b_n-b_N\right)$$

va bundan

$$\left|\frac{1}{b_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}b_kx_k\right|\le\overline{R}\frac{b_N-b_1}{b_N}+\varepsilon\frac{b_n-b_N}{b_N}+\frac{b_1\left|S\right|}{b_n}+\left|R_n\right|.$$

Biroq $n\to\infty$ da $\frac{b_N}{b_n}\to 0$, $\left|R_n\right|\to 0$, u holda

$$\overline{\lim_n}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}b_kx_n\right|\le\varepsilon. \qquad \blacktriangle$$

3-teoremadan va 1-lemmadan ushbu natijani olamiz.

4-teorema. Aytaylik, $\xi_1,\xi_2,\ldots$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi_k=0$, $M\xi_k^2<\infty$ va $k\to\infty$ da $b_k\uparrow\infty$ deb olaylik. Agar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M\xi_k^2}{b_k^2}<\infty, \tag{12}$$

u holda

$$\frac{1}{\beta_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P(1)}0. \tag{13}$$

Xususan, agar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}M\xi_k^2<\infty \tag{14}$$

bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{p(1)} 0. \tag{15}$$

1-natija. Agar ξ_k lar bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib, $M\xi_i=m$; $D\xi_i^2<\infty$ bo'lsa, u holda kuchaytirilgan katta sonlar qonuni o'rinli:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{p(1)} m. \tag{16}$$

2-natija. $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots$ bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib $M\xi_i=0$, $M\xi_i^2<\infty$ bo'lsa

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\sum_{k=1}^{n}\xi_i \xrightarrow{p(1)} 0, \tag{17}$$

chunki

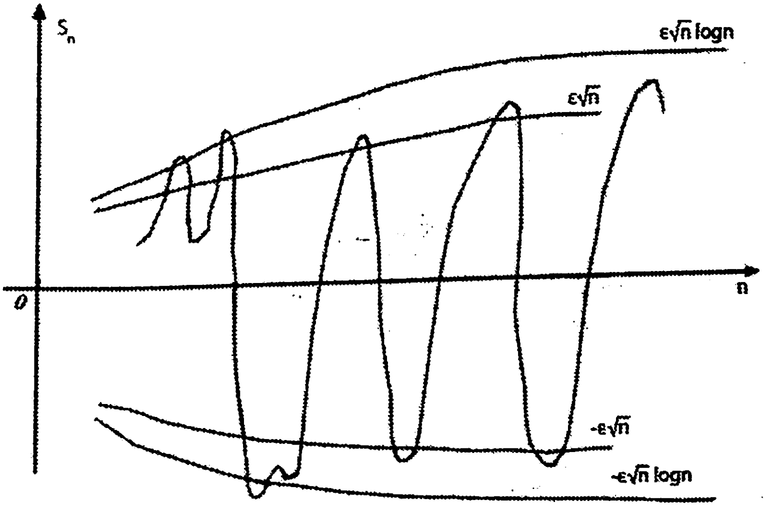
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n}<\infty.$$

(17) natijadan, ikki holati $P(\xi_i=\pm 1)=\frac{1}{2}$ bog'liq bo'lmagan tajribalar seriyasida, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun deyarli hamma $\{S_n, n\geq 1\}$ $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Trayektoriya biror $n=n(\varepsilon,\omega)$ momentdan boshlab, u butunligicha $\pm\varepsilon\sqrt{n}\log n$ egri chiziqlar orasida qoladi.

Shuningdek, (12) va (13) larni e'tiborga olsak

$$\overline{\lim}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\infty \qquad \underline{\lim}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=-\infty.$$

Boshqacha qilib aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\{S_n, n\geq 1\}$ trayektoriya $\pm\varepsilon\sqrt{n}$ egri chiziqni cheksiz ko'p marotaba kesib o'tadi. Shunday qilib, har bir $\{S_n, n\geq 1\}$ trayektoriya $\pm\varepsilon\sqrt{n}\log n$ egri chiziqdan yuqorida (va $-\varepsilon\sqrt{n}\log n$ chiziqdan quyida) chekli vaqt mobaynidagina bo'ladi. Biroq shu bilan birga, $\varepsilon\sqrt{n}$ egri chiziqdan yuqorida cheksiz ko'p marotaba bo'ladi. Rasmda $\{S_n, n\geq 1\}$ trayektoriya tasvirlangan (39-rasm).



39-rasm. **S_n trayektoriya tasvirlangan**

1-teoremani oxiriga yetkazish uchun, quyidagi yordamchi lemma darkor bo'ladi.

2-lemma. Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin, u holda

$$\left\{M|\xi_1| < \infty\right\} \Leftrightarrow \left\{P\left\{ch.k|\xi_n| > n\right\} = 0\right\}. \tag{18}$$

Isboti. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_n = \{\omega : |\xi_n| > n\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Agar

$$M|\xi_1| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

ko'rsata olsak, u holda Borel-Kantelli lemmasiga asosan (18) ning isboti kelib chiqadi, chunki $A_1, A_2, \ldots$ hodisalar bog'liqmas.

Faraz qilaylik $F(x) = P(\xi_1 \leq x)$ va $m_1 = M|\xi_i| < \infty$ bo'lsin, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} [1 - F(n) + F(-n)] \leq$$

$$\leq \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx + \int_{-\infty}^{0} F(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) = M|\xi_1| < \infty$$

bu yerda ushbu munosabatlardan foydalandik:

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx = \int_0^{\infty} x dF(x), \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{0} F(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xdF(x), \tag{20}$$

bu har ikkala tenglikda ham bir vaqtda integrallar yo yaqinlashadi, yoki uzoqlashadi. Xuddi shunga o'xshash $M|\xi_1| = \infty$ munosabatdan $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ kelib chiqishligini ko'rsatish mumkin.

3-lemma. Agar $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi $n \to \infty$ da $x_n \to x$, u holda $n \to \infty$ da

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n \to x.$$

Isboti. Bizlar $x=0$ deb olamiz (aks holda $x_n - x$ miqdorni qarash kerak). $x_n \to 0$ uchun, u holda $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ topiladiki, $n \ge n_0$ bo'lganda $|x_n| \le \varepsilon$ bo'ladi.

U holda

$$\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right| = \left|\frac{x_1 + \ldots + x_{n_0}}{n} + \frac{x_{n_0+1} + \ldots + x_n}{n}\right| \le \frac{|x_1| + \ldots + |x_{n_0}|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \varepsilon.$$

Bundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right| \le \varepsilon.$$

Endi 1-teoremaning bevosita isbotiga o'tamiz.

Buning uchun

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \xi_n, & agar \quad |\xi_n| \le n, \\ 0, & agar \quad |\xi_n| > n. \end{cases}$$

deb olamiz.Hamda $\eta_n = \xi_n - \tilde{\xi}_n$ belgilab olsak, u holda

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} + \frac{\tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n}{n} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{n}.$$

Biroq $m = M|\xi_1| < \infty$, u holda 2-lemmaga ko'ra

$$P\{ch.k.\eta_n \ne 0\} = P\{ch.k.|\xi_n| > n\} = 0.$$

Shuning uchun bir ehtimollik bilan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k \xrightarrow{p(1)} 0.$$

Hamda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k \xrightarrow{p(1)} M\xi_1 \tag{21}$$

isbotlashimiz kerak.

Ammo $M\tilde{\xi}_n \to M\xi_1$ ni e'tiborga olsak, u holda 3-lemmaga asosan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\tilde{\xi}_k \to M\xi_1$$

Bundan, agar $\overline{\xi}_i = \tilde{\xi}_i - M\tilde{\xi}_i$ belgilash kiritsak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\xi}_k \xrightarrow{P(1)} 0 \text{ ni} \tag{22}$$

isbotlash yetarli. $M\overline{\xi}_i = 0$, $\quad M\overline{\xi}_i^2 < \infty$ bo'lishligi ravshan.

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M\overline{\xi}_n^2}{n^2} < \infty \tag{23}$$

bo'lishligini ko'rsatsak, u holda 7-teoremaga binoan (21) munosabat o'rinli bo'ladi.

Biroq $M\overline{\xi}_i^2 \le M\tilde{\xi}_i^2$, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}M\overline{\xi}_n^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}M\tilde{\xi}_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{|x|\le n} x^2 dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1\le|x|<k} x^2 dF(x)\right\}. \tag{24}$$

Endi

$$\alpha_k = \int_{k-1\le|x|\le k} |x|\, dF(x)$$

belgilash kiritsak, u holda

$$\int_{k-1\le x\le k} x^2 dF(x) \le k\alpha_k$$

va bundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M\overline{\xi}_n^2}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k a_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cdot \frac{2}{k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1\le|x|\le k} |x|\, dF(x) = 2M|\xi_1| < \infty$$

chunki $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{2}{k}$ $(k\ge 1)$.

Shunday qilib, agar $M|\xi_1| < \infty$, u holda

$$\frac{1}{n}\cdot S_n \xrightarrow{P(1)} m.$$

Endi teoremani nihoyasiga yetkazish uchun $M|\xi_1| = \infty$ holni qarash qoldi. Endi $m = M|\xi_1| = \infty$, bo'lsin, u holda musbat ehtimolliklar to'plamida $\frac{1}{n}S_n$ yaqinlashadi ($S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$). U holda *"0 yoki 1"* qonuniga ko'ra $\frac{1}{n}S_n$ ketma-ketlik bir ehtimollik bilan yaqinlashishi kerak. Agar bu shunday bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da bir ehtimollik bilan

$$\frac{1}{n}\cdot\xi_n\to 0,$$

chunki $\frac{1}{n}\xi_n=\frac{S_n}{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{S_{n-1}}{n-1}$.

Biroq $M|\xi_1|=\infty$ farazimiz 2-lemmaga asosan,

$$P\left\{\frac{1}{n}\xi_n\to 0\right\}=1$$

tasdiqni inkor etadi.

6-§. V bobga doir masalalar

1. Bog'liq bo'lmagan va bir xil taqsimlangan $\{\xi_i\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha aniqlangan:

a) $P\{\xi_n=k\}=\frac{c}{k^2\lg^2 k}\left(k\geq 2, c^{-1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\lg^2 k}\right)$;

b) $P\{\xi_n=2^{k-\lg k-2\lg\lg k}\}=\frac{1}{2^k}\ (k=1,2,3,\ldots)$.

Bu ko'rinishdagi ketma-ketliklar uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishini isbotlang.

2. Agar $\{\xi_k\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha aniqlangan bo'lsa

$$P\{\xi_k=k^\alpha\}=P\{\xi_k=-k^\alpha\}=\frac{1}{2},$$

u holda katta sonlar qonuni bajarilishi uchun $\alpha<\frac{1}{2}$ shartni bajarilishi zarur va yetarli.

3. Agar bog'liq bo'lmagan $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ - tasodifiy miqdorlar

$$\max_{1\leq k\leq n}\int_{|x|\geq N}|x|dF(x)\underset{N\to\infty}{\to}0,$$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\{\xi_n\}$ ketma-ketlik katta sonlar qonuniga bo'ysunishini isbotlang.

4. Stirling formulasidan foydalanib, ixtiyoriy fiksirlangan n uchun ushbu munosabat $\lambda\to\infty$ da o'rinli bo'lishligini isbotlang:

$$\sqrt{\lambda}\left|\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}-\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}(m-\lambda)^2\right\}\right|\to 0.$$

5. Aytaylik, $P\{\xi<x\}=F(x)$ taqsimot funksiya uzluksiz, $\{\eta_n\}$ tasodifiy miqdorlar esa, ehtimol bo'yicha birga intilsin: ya'ni $\eta_n\xrightarrow{P}1$ u holda quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n + \eta_n < x\} = F(x-1)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\xi_n}{\eta_n} < x\right\} = F(x)$.

6. Faraz qilaylik $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining ξ_k hadi ξ_{k-1} yoki ξ_{k+1} hadiga bog'liq bo'lib, boshqa hech bir ξ_j larga bog'liq emas. Agar $D\xi_k<c<\infty$ bajarilsa, u holda katta sonlar qonuni bajarilishi isbotlansin.

7. Tanga tashlanganda $p=\dfrac{1}{2}$, $N_n=2S_n-n$ (tanga n marotaba tashlanganda "gerb"larning tushishlar soni) bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlarni isbotlang:

A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{|N_n|}{\sqrt{n}} < t\right\} = \Phi(t) - \Phi(-t)$,

B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{N_n}{\sqrt{n}} < t\right\} = \Phi(x)$.

8. Juft k lar uchun ushbu munosabat o'rinli bo'lishligi ko'rsatilsin:

$$P\{N_{2n} = k\} = \frac{(1+\varepsilon_n)}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{k^2}{4n}},$$

bu yerda $n\to\infty$ da $\varepsilon_n\to 0$.

9. Quyidagini isbotlang: $\sup\limits_k \left|\sqrt{\pi n} P\{N_{2n} = j\}\right| - e^{-\frac{k^2}{4n}} \to 0$, bu yerda sup barcha juft k lar bo'yicha olinadi.

10. Puasson teoremasida yaqinlashish tezligi uchun, quyidagi baho o'rinli bo'lishligini isbotlang: $\sup\limits_k \left|P_n(k) - \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right| \le \dfrac{2\lambda^2}{n}$, bu yerda $k=0,1,2,...$

11. Ushbu formulalarni isbotlang:

a) $\int\limits_0^\infty t dF(t) = \int\limits_0^\infty [1-F(t)]dt$,

b) $\int\limits_{-\infty}^0 t dF(t) = \int\limits_{-\infty}^0 F(t)dt$.

12. $\sum\limits_{k=1}^\infty P(A_k)$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishligi uchun $M|\xi_1|=\infty$, bo'lishligini isbotlang.

13. 1000000 tajribaning har birida B hodisaning ro'y berish ehtimoli $\dfrac{1}{2}$ ga teng. B hodisa eng katta ehtimollik bilan ro'y berish ehtimolligini toping.

14. Kubik 366 marta tashlanganda besh ochkoning eng katta ehtimollik bilan tushishini ehtimolligini toping.

1-§. Xarakteristik funksiyaning xossalari

Biz haqiqiy tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda kompleks o'zgaruvchili tasodifiy miqdorlarni ham o'rganishimiz mumkin: $\xi(\omega)+i\eta(\omega)$, bu yerda $i^2=-1$, (ξ,η) tasodifiy juftlik. Bunda $M(\xi+i\eta)=M\xi+iM\eta$ deb qabul qilishimiz tabiiy. Kompleks o'zgaruvchili $\xi=\xi_1+i\xi_2$ va $\eta=\eta_1+i\eta_2$ tasodifiy miqdorlar **bog'liq emas** deyiladi, agar bularga mos (ξ_1,ξ_2) *va* (η_1,η_2) tasodifiy vekrotlarni qismlaridan tuzilgan $\sigma(\xi_1,\xi_2)$ *va* $\sigma(\eta_1,\eta_2)$ algebralar bog'liq bo'lmasa. Bunday miqdorlar uchun ξ va η haqiqiy va mavhum qismga ajratish yo'li bilan quyidagi multiplikativ xossani o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

$$M\xi\eta=M\xi\cdot M\eta$$

Ta'rif. $-\infty<t<\infty$ oraliqda qaralayotgan ξ tasodifiy miqdorni xarakteristik funksiyasi deb, quyidagi kompleks o'zgaruvchili funksiyaga aytiladi:

$$\varphi_\xi(t)=Me^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) \qquad (1)$$

bu yerda $F(x)$ esa, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

Agar ξ tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasi $f(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $\varphi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)$ xarakteristik funksiyasi ham mavjud bo'ladi, bu esa $f(x)$ funksiyani Fur'ye almashtirishning xuddi o'zginasi. Bizga kompleks o'zgaruvchilar funksiyalar kursidan ma'lumki, $e^{it}=\cos t+i\sin t$. Shuning uchun, (1) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi_\xi(t)=Me^{it}=M\cos(t\xi)+iM\sin(t\xi)$$

hamda $|\varphi_\xi(t)|=|Me^{it\xi}|\le 1$ bundan ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi mavjudligi kelib chiqadi.

Xossalari:

1. $\varphi(0)=1$;

2. $|\varphi(t)|\le 1$;

1-, va 2-xossalarning isboti ravshan.

3. $\varphi(t)$ funksiya $-\infty < t < \infty$ da tekis uzluksiz;

4. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, bu yerda chiziqcha kompleks qo'shmaligini bildiradi.

Isboti $\overline{\varphi_\xi}(t) = \overline{M}e^{it\xi} = Me^{\overline{it\xi}} = Me^{-it\xi}$ tenglikdan kelib chiqadi.

5. Agar $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ yig'indining xarakteristik funksiyasi $\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \ldots \varphi_{\xi_n}(t)$ ga teng. **Isboti.**

$$\varphi_{S_n}(t) Me^{it(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = Me^{it\xi_1} e^{it\xi_2} \ldots e^{it\xi_n} =$$
$$= Me^{it\xi_1} Me^{it\xi_2} \ldots Me^{it\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) \ldots \varphi_{\xi_n}(t);$$

6. Agar $\eta = a\xi + b$, u holda $\varphi_\eta(t) = e^{ibt}\varphi_\xi(at)$.

Isboti. $\varphi_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Me^{iat\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$.

7. Agar $F(x)$ – simmetrik taqsimot bo'lsa, ya'ni barcha $x>0$ uchun $F(-x)=1-F(x)$, u holda $\varphi(t)$ – juft funksiya va $\varphi(t) = \int \cos tx dF(x)$;

8. Agar $\varphi(t)$ – xarakteristik funksiya bo'lsa, u holda $|\varphi(t)|^2$ ham xarakteristik funksiya bo'ladi. Bu xossani isbotlash uchun shunday tasodifiy miqdorni olamizki, bunda $\varphi_\xi(t) = \varphi(t)$. Agar ikkinchi η tasodigiy miqdor ham xuddi ξ kabi taqsimlangan bo'lsa, biroq ξ ga bog'liq bo'lmasa, u holda yuqoridagi xossalarga asoslanib,

$$\varphi_{\xi-\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t) = \varphi(t) \cdot \varphi(-t) = \varphi(t) \cdot \overline{\varphi}(t) = |\varphi(t)|^2.$$

9. $\varphi(t)$ xarakteristik funksiya bir qiymatli aniqlanadi.

Quyidagi ikkita muhim xossalarni isbotsiz keltiramiz.

10. Poya teoremasi. Aytaylik, $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(0) = 1$, $t \to \infty da$ $\varphi(t) \to 0$;

b) uzluksiz, juft, pastga botiq.

U holda $\varphi(t)$ funksiya biror $F(x)$ taqsimot funksiyaning xarakteristik funksiyasi bo'ladi:

$$\varphi(t)=\int e^{itx}dF(x)$$

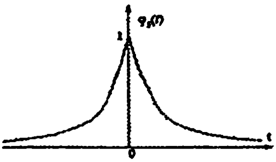
11. Bexner-Xinchin teoremasi. Kompleks qiymatli $\varphi(t)$ funksiyasi xarakteristik funksiya bo'lishi uchun uning musbat aniqlangan bo'lishli zarur va yetarli, ya'ni ixtiyoriy kompleks $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonalr uchun va $t_1,t_2,...,t_n\in R^t$

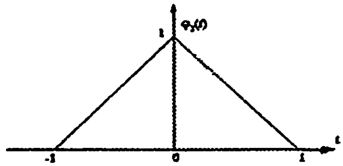
$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\varphi(t_i..t_j)\lambda_i\overline{\lambda}_j\geq 0$$

Yuqorida keltirilgan Poya teoremasi xarakteristik funksiya qurishni qulay metodini beradi. Masalan

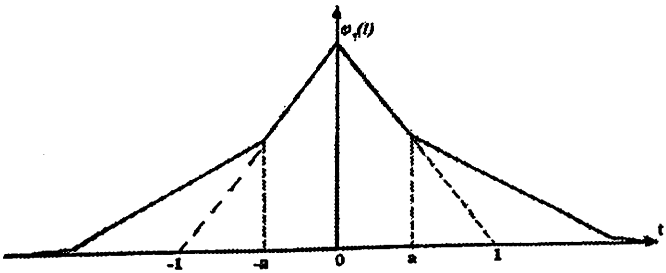
$$\varphi_1(t)=e^{-|t|}$$

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}1-|t| & ,\ |t|\leq 1\\ 0 & ,\ |t|<1\end{cases}$$





$|t|\leq a<1$ oraliqda $\varphi_2(t)$ bilan ustma-ust tushadigan $\varphi_3(t)$ funksiya shular jumlasidandirφ.



Ravshanki, $\varphi_2(t)$ va $\varphi_3(t)$ funksiyalar turli F_2 va F_3 taqsimot funksiyalarning xarakteristik funksiyalari, biroq, $|t|\leq a$ larda ular uchun

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_3(x)$$

Bexner-Xinchin teoremasi $\varphi(t)$ xarakteristik funksiya musbat aniqlangan funksiyadir. Haqiqatdan ham, agar ξ tasodifiy miqdorni olsak, bunda $\varphi_\xi(t)=\varphi(t)$, u holda

$$0\leq M\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e^{it\xi}\right|^2=\sum_{k,j=1}^{n}\lambda_k\overline{\lambda}_j\varphi_\xi(t_k-t_j)$$

Biroq aksinchasini isbotlash qiyinroq.

2-§. Markaziy limit teorema

Normal qonun ehtimollar nazariyada markaziy o‘rinlardan birini egallaganligi sababli, qanday shartlarda tasodifiy miqdorlar yig‘indisining ehtimoli normal qonunga intilishini o‘rganish qiziqarlidir.

Biz xarakteristik funksiyalar metodidan foydalanib markaziy limit teoremani isbotlaymiz.

1-teorema (Lyapunov). Faraz qilaylik, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdor bo‘lib,

$$M\xi_i = 0, \quad M\xi_i^2 = \sigma_i^2, \quad M|\xi_i|^3 < \infty .$$

Hamda $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = D_n^2$ deb belgilaylik. Agar,

$$\overline{\lim_{n}} = \frac{1}{D_n^3}\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i|^3 = 0 \tag{1}$$

u holda $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar uchun markaziy limit teorema o‘rinli:

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{D_n} \xrightarrow{D} N\ (0,\ 1) \tag{2}$$

boshqacha aytganda

$$P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{D_n} \le x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{3}$$

Isboti. Faraz qilaylik,

$$\varphi_i(t) = Me^{it\xi_i}, \quad \varphi_n(t) = Me^{it\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{D_n}} .$$

U holda xarakteristik funksiyaning xossasiga ko‘ra:

$$\psi_i(t) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left[1 + \left(\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)\right) - 1\right] \tag{4}$$

1-§ dagi 4-formulaga asosan n=2

$$\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2D_n^2}\left[\sigma_i^2 + \varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)\right] \tag{5}$$

bu yerda $\left|\varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)\right| \le 3\sigma_i^2$.

Shuning uchun

$$\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right) - 1\right| \le 2t^2\frac{\sigma_i^2}{D_n^2} . \tag{6}$$

Lyapunov tengsizligiga ko‘ra

$$\sqrt{M\left|\xi_i^2\right|} \le \sqrt[3]{M\left|\xi_i\right|^3}$$

ya'ni $\sigma_i^3 \le M\left|\xi_i\right|^3$

1-shartdan $\overline{\lim_n} \frac{\sigma_1^3+\sigma_2^3+\ldots+\sigma_n^3}{D_n^3}=0$. Bundan $n \to \infty$ da

$$\sup_{i\le n} \frac{\sigma_i}{D_n} \to 0. \tag{7}$$

Demak, $n \to \infty$ da

$$\sup_{i\le n}\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right| \le 2t^2 \sup_{i\le n}\frac{\sigma_i^2}{D_n^2} \tag{8}$$

va shuning uchun yetarlicha katta n lar uchun $z=\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1$ funksiyani $|z|\le 1$ da quyidagi qatorga yoyishimiz qonuniydir

$$\log(1+z)=z(1+\varepsilon(z)) \tag{9}$$

bu yerda, agar $|z|\le \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda $|\varepsilon(z)|\le z$.

Shuning uchun (9)ga asosan

$$\log\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)=\left[\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]\cdot\left[1+\theta_i\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]$$

bu yerda $|\theta_i|\le 1$. Shuningdek,

$$\log\psi_n(t)=\sum_{i=1}^n\left[\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]+\sum_{i=1}^n\theta_i\left[\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]^2$$

(6) va (8) ga ko'ra

$$\left|\sum_{i=1}^n\theta_i\left[\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]^2\right| \le \sup_{i\le n}\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right|\cdot\sum_{i=1}^n\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right| \le$$

$$\le \sup_{i\le n}\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right|\sum_{i=1}^n 2t^2\frac{\sigma_i^2}{D_n^2}=2t^2\sup_{i\le n}\left|\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right|\le 4t^2\sup_{i\le n}\frac{\sigma_i^2}{D_n^2}$$

Oxirgi ifodada $n \to \infty$ da nolga intiladi. Shunday qilib, (10) ning o'ng qismi $n \to \infty$ da nolga intiladi. So'ngra n=3 bo'lgan Teylor qatoriga qo'ysak:

$$\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1=-\frac{t^2}{2}\frac{\sigma_i^2}{D_n^2}+\frac{\left(\frac{it}{D_n}\right)^3}{3!}\left[\varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)+M\xi_i^3\right],$$

bu yerda $\left|\varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)\right|\le 3M\left|\xi_i\right|^3$. Demak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi_i\left(\frac{t}{D_n}\right)-1\right]=-\frac{t^2}{2}+\frac{(it)^3}{3!D_n^3}\sum_{i=1}^{n}\left[\varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)+M\xi_i^3\right],$$

bu yerda $\frac{1}{D_n^3}\left|\sum_{i=1}^{n}\left[\varepsilon_i\left(\frac{t}{D_n}\right)+M\xi_i^3\right]\right|\le\frac{4}{D_n^3}\sum_{i=1}^{n}M|\xi_i|^3$. Teorema shartiga ko'ra $n\to\infty$ $\frac{1}{D_n^3}\sum_{i=1}^{n}M|\xi_i|^3\to 0$.

Shunday qilib, $n\to\infty$ da $\psi_n(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\quad t\in R^2$. ▲

2-teorema. Faraz qilaylik, $\xi_1,\xi_2,\ldots$ bog'liq bo'lmagan, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $M\xi_1=0$, $\sigma^2=M\xi_1^2<\infty$ bo'lsin, u holda

$$\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

Isboti. Agar $\varphi(t)=Me^{it\xi}$ bo'lsa, u holda

$$\psi_n(t)=M\exp\left\{it\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right\}=\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Biroq,

$$\varphi(t)=1-\frac{t^2}{2}\left[M\xi_1^2+\varepsilon(t)\right]=1-\frac{t^2}{2}\left[\sigma^2+\varepsilon(t)\right]$$

bu yerda $t\to 0$ da, $\varepsilon(t)\to 0$. Shuningdek,

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\frac{t^2}{2n}-\frac{t^2}{2\sigma n}\cdot\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Shuning uchun ixtiyoriy fiksirlangan $t\in R^2$ uchun

$$\left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left[1-\frac{t^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n\to e^{-\frac{t^2}{2}}.\quad ▲$$

3-teorema. Agar o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar $\xi_1,\xi_2,\ldots$ ketma-ketligi Lindeberg shartini qanoatlantirsa:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{D_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon D_n}x^2dF_k(x)=0,$$

u holda $n\to\infty$ da markaziy limit teorema o'rinlidir.

Yuqorida aytilgandiki, taqsimot funksiya bilan xarakteristik funksiya o'rtasida quyidagicha uzluksiz munosabat mavjud:

$$\left(F_n\xrightarrow{D}F\right)\Leftrightarrow\left(\varphi_n(t)\to\varphi(t)\right),\quad t\in R'$$

Bu teoremadan xarakteristik funksiyalarning ketma-ketligi yaqinlashishidan ularning taqsimot bo'yicha yaqinlashishi kelib chiqadi va aksincha.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ funksiyaning qiymatlar jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0618	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0371	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0143	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0110	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0084	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0063	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiyaning qiymatlar jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25940
0,7	25804	26115	26424	26424	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29637	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	49977									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

$P_k(a)=\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$ funksiyaning qiymatlar jadvali

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000003

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000003
14						0,000003
15						0,000001

ADABIYOTLAR

1. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1986.

2. Вентцил Е.С. Теория вероятностей: Изд. 3-е. М.: Наука, 1964.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Изд. 3-е. М.: Наука, 1969.

4. Колмогоров А.Н. Основые понятия теории вероятностей М.: Наука, 1974.

5. Лоэв М. Теория вероятностей. ИЛ. М., 1961.

6. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

7. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.: МГУ, 1963.

8. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. Т.I.

10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т.II.

11. Farmonov Sh. Ehtimolliklar nazariyasi.

MUNDARIJA

V bob. BOG'LIQ BO'LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI

VI bob. Xarakteristik funksiya va uning xossalari

OLIMJON SAHOBOV

EHTIMOLLIKLAR NAZARIYASI

O'quv qo'llanma

Muharrir **N. Rustamova**
Badiiy muharrir **M. Odilov**
Kompyuterda sahifalovchi **K. Boyxo'jayev**

Nashr. lits. AI № 174. Bosishga ruxsat 05.07.2017-yilda berildi.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. Ofset qog'ozi № 2. «Times» garniturasi.
Shartli b.t. 8,3. Nashr hisob t. 8,5.
Adadi 500 dona. 27-buyurtma.

"IQTISOD-MOLIYA" nashriyoti
100000, Toshkent, Amir Temur, 60^a.

"HUMOYUNBEK-ISTIQLOL MO'JIZASI"
bosmaxonasida chop etildi.
100000, Toshkent, Amir Temur, 60^a.