A.S.RASULOV, G.M.RAIMOVA,
X.K.SARIMSAKOVA

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Muvofiqlashtiruvchi Kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti
Ташкент – 2006

Taqrizchilar: **Sh.Q.FARMONOV,** O'zbekiston Respublikasi FA akademigi, Matematika instituti «Ehtimollar nazariyasi» bo'limi mudiri
M.MIRVALIYEV, fizika-matematika fanlari doktori, professor, Toshkent Davlat Iqtisodiyot universiteti «Ehtimollar nazariyasi» kafedrasi mudiri
M.T.BAQOYEV, fizika-matematika fanlari nomzodi, Jahon Iqtisodiyoti va Diplomatiya universiteti «Matematik modellashtirish va Informatika» kafedrasi dotsenti

Ushbu darslikda «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fanining «tasodifiy hodisalar», «tasodifiy miqdorlar va ularning funksiyalari» va «matematik statistika» qismlari o'z aksini topgan. Darslikda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursining amaliy mashg'ulotlarida zamonaviy kompyuterlardan foydalanish maqsadida EXCEL sistemasining ayrim standart funksiyalari imkoniyatlari yoritilgan. Mavzu va unga oid masalalarni tanlash borasida iqtisodiyot va ijtimoiy hayotdagi masalalrni yoritishga harakat qilingan.

Mazkur darslik namunaviy va o'quv dasturlari asosida tuzilgan bo'lib, iqtisod yo'nalishida ta'lim oluvchi talabalar, magistrantlar hamda respublikamizdagi barcha iqtisodiy yo'nalishda tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan.

22.171
R 25

Rasulov A.S. va boshq.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika: Darslik./ A.S. Rasulov, G.M. Raimova, X.K. Sarimsakova. – T.: O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2006. –272 b.

I. Raimova G.M.
II. Sarimsakova X.K.

ББК 22.171я7+22.172 я7

SO‘ZBOSHI

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» darsligi Jahon Iqtisodiyoti va Diplomatiyasi Universiteti O‘quv Metodik Kengashida tasdiqlangan namunaviy va o‘quv dasturlar asosida tuzilgan. Mazkur darslik iqtisod yo‘nalishida ta’lim oluvchi talabalarga «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fanini o‘rganish uchun mo‘ljallangan. Ushbu darslikda mualliflarning oxirgi 10 yil davomidagi dars berish jarayonida to‘plagan tajribalarining ijodiy mahsulidir. Darslikda «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fanining «tasodifiy hodisalar», «tasodifiy miqdorlar va ularning funksiyalari» va «matematik statistika» qismlari o‘z aksini topgan. Har bir mavzu uch qismdan iborat bo‘lib, avvalo, qisqacha mavzuga tegishli nazariya bayon qilingan, so‘ng mavzuga tegishli nazariy va amaliy masalalarni yechish jarayoni yoritilgan va nihoyat, mustaqil ishlash uchun masalalar keltirilgan.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani metodlari hozirda xalq xo‘jaligining barcha tarmoqlarida, jumladan iqtisodiyotda keng qo‘llanilmoqda. Oxirgi yillarda iqtisodiyot yo‘nalishi bo‘yicha olingan Nobel mukofotlarining sovrindorlari ham ushbu fanning ayrim yo‘nalishlarini iqtisodiy jarayonlarga qo‘llab, makroiqtisodiy ko‘rsatgichlarni matematik modellarini tahlil qilgandan so‘ng avvaldan bashorat qilish usullarini yaratganlari uchun jahon olimlari tomonidan tan olinmoqda.

Yuqorida aytilgan fikrlardan ko‘rinib turibdiki, hozirgi zamon iqtisodchisi ushbu fan asoslarini chuqur o‘rganib iqtisodiyotga qo‘llash usullari haqida yaxshi tasavvurga ega bo‘lsalargina iqtisodiyotning jahon iqtisodiyoti, xalqaro savdo, moliyaviy bozorlar, sug‘urta masalalari va boshqa sohalarda tasodifiy jarayonlar va hodisalarni mikro va makroiqtisodiy ko‘rsatgichlarga ta’sirini chuqur tahlil qila olishlari mumkin.

Ikkinchi tarafdan esa iqtisodiy statistikani va ekonometrikaning asoslarini ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullari tashkil qilishini e’tiborga olsak, ushbu fanni o‘rganish qanchalik muhimligini yanada yaqqol tasavvur qilamiz.

So‘ngi vaqtlarda o‘qituvchi va talabalar o‘qish va o‘rganish jarayonida zamonaviy kompyuter dasturlaridan va turli xil maxsus statistik paketlardan keng foydalanmoqdalar. Darslikda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursining amaliy mashg‘ulotlarida zamonaviy shaxsiy elektron hisoblash mashinalari — kompyuterlardan foydalanish maqsadida EXSEL sistemasining ayrim standart funksiyalari imkoniyatlari yoritiladi. Matn davomida mavzu bo‘yicha kompyuter imkoniyatlaridan foydalanish haqida gap borganda maxsus belgilar ishlatilgan. Mavzu va unga oid masalalarni tanlash borasida iqtisodiyot va ijtimoiy hayotdagi masalalarni yoritishga harakat qilingan.

Ushbu darslikda nafaqat Jahon Iqtisodiyoti va Diplomatiya universiteti talabalari, balki respublikamizdagi barcha iqtisodiy yo‘nalishda tahsil olayotgan talabalar foydalanishlari mumkin.

Mualliflar o‘quvchi va mutaxasislarning ushbu qo‘llanma haqidagi tanqidiy va taqriziy fikrlarini chuqur mamnuniyat bilan qabul qiladilar hamda kelgusida e’tiborga oladilar.

1-qism
EHTIMOLLAR NAZARIYASI. TASODIFIY HODISALAR

1.1. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Kombinatorika (kombinatorik tahlil) – bu diskret matematikaning diskret to'plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan bog'liq bo'lgan masalalarni yechish usullarini o'rganuvchi bo'limidir.

Qandaydir predmetlardan (masalan, harflar, sharlar, kubchalar, sonlar va boshqalardan) tashkil topgan guruhlar **birikmalar yoki kombinatsiyalar** deb ataladi. Ana shu birikmalarni tashkil etgan predmetlar **elementlar** deyiladi.

Uch xil turdagi birikmalar mavjud: **o'rin almashtirish (permutation – перестоновки), o'rinlashtirish (arrangent – размещения)** va **mosliklar (combination – сочетания)**.

1 dan n gacha bo'lgan natural sonlar ko'paytmasi **«n faktorial»** deb ataladi va qisqacha $n!$ kabi yoziladi: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. (0! = 1). Ba'zan $n!$ ni hisoblashda quyidagi taqribiy Stirling formulasi qo'l keladi:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Matematik funksiyalar. $n!$ qiymatini maxsus **FAKTR(SON)*** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **SON** – n ning miqdoriy qiymatiga teng. Shuningdek ikkilangan faktorial $n!!$:

$$n!! = (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k+1) \quad (\text{n} - \text{toq})$$

$$n!! = (2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k) \quad (\text{n} - \text{juft})$$

qiymatini maxsus **DVFAKTR(SON)** nomli funksiya hisoblaydi.
E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametr SON – miqdoriy qiymatlar yoki u joylashgan yacheykaning adresi bo'lishi kerak.

O'rin almashtirishlar

***n* ta elementli o'rin almashtirishlar** deb bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga

---

* Exselning ruscha variantidan foydalanilgani uchun funksiyalarning nomlari ham shu tilda keltitrilgan.

aytiladi. Masalan, uchta A, B, C elementdan oltita o'rin almashtirish bajarish mumkin: ABC, ACB, BAC, CBA, BCA, CAB.

n ta elementli o'rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)n = n!$$

1-masala. 1,2,3 raqamlardan ularning har biri tarkibida faqat bir marta uchraydigan nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechish: Bunday uch xonali sonlarning soni $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ta.

Faktorial qiymatini hisoblaydigan maxsus funksiyaga murojaat: **FAKTR**(3)

O'rinlashtirishlar

***n* ta elementdan** *m* **tadan o'rinlashtirishlar** deb, har birida berilgan n ta elementdan t tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan yoki faqat ularning joylashish tartibi bilan farq qiladi.

Masalan, uch element A, B, C dan ikkita elementli oltita o'rinlashtirish mavjud: AB, AC, BC, BA, CA, CB.

n ta elementdan m tadan turli o'rinlashtirishlar soni A_n^m bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1), \qquad (0 \le m \le n)$$

$$A_n^1 = n \text{ва } A_n^0 = 1.$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. O'rinlashtirishlar soni A_n^m ning qiymatini maxsus **PEREST(SON;TANLANGAN_SON)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **SON** – barcha tanlash obyektlari soni (ya'ni n); **TANLANGAN_SON** – tanlanayotgan obyektlar soni (ya'ni m).

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **SON; TANLANGAN_SON** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

2-masala. Tijorat banki boshqarmasi t u r l i lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlamoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: Bu misolda $n=10$ va $m=3$. Hammasi bo'lib $N = A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ta guruh tuzish mumkin.

O'rinlashtirishlar soni A_n^m ning qiymatini hisoblaydigan maxsus **PEREST(SON; TANLANGAN_SON)** funksiyaga murojaat: **PEREST(10; 3)**

Mosliklar

***n* element orasidan *t* ta elementdan tuzilgan mosliklar** deb har birida berilgan *n* ta elementdan *m* tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. Misol uchun, uch element *A, B, C* dan ikkita elementli uchta moslik mavjud: *AB, AC, BC*.

n element orasidan *m* ta elementdan turli mosliklar soni C_n^m bilan belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (0 \le m \le n)$$

Xossalari:

1. $C_n^0 = C_0^0 = 1.$

2. $C_n^1 = n.$

3. $C_n^m = C_n^{n-m} \quad \left(m > \frac{n}{2}\right).$

4. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

5. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ – rekurrent formula. Bu yerda $0 \le m \le n$.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Matematik funksiyalar. Mosliklar soni C_n^m ning qiymatini maxsus **CHISLKOMB(SON;TANLANGAN_SON)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **SON** – barcha tanlash obyektlari soni (ya'ni *n*); **TANLANGAN_SON** – tanlanayotgan obyektlar soni (ya'ni *m*). E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **SON; TANLANGAN_SON** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

3-masala. Tijorat banki boshqarmasi bir xil lavozimlarga 10 ta nomzoddan 3 tasini tanlamoqda. Har bir nomzod bir xil imkoniyatga ega. 10 ta nomzoddan 3 kishidan iborat nechta guruh tuzish mumkin?

Yechish: Bu misolda $n=10$ va $m=3$. Turli guruhlar tarkibi, hech bo'lmaganda, bitta nomzodga farq qilishi kerak. Demak, bu birikmalar moslikdan iborat. Hammasi bo'lib

$$N = C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

ta guruh tuzish mumkin.

Mosliklar soni C_n^m ning qiymatini hisoblaydigan maxsus **CHISLKOMB(SON;TANLANGAN_SON)** funksiyaga murojaat: **CHISLKOMB(10;3)**

Takrorlanishli o'rin almashtirishlar

Aytaylik, n ta A, B, ..., C elementlar mavjud bo'lib, ularning ichida A element α marta, B element β marta va h.k, hamda C element γ marta takrorlansin va $n = \alpha + \beta + \cdots + \gamma$ bo'lsin. U holda, **takrorlanishli o'rin almashtirishlar** quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P_{takr} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\gamma!}.$$

Masalan, aytaylik 4 element mavjud bo'lib, ularning ikkitasi bir xil bo'lsin: *A, A, B, C*. Ulardan mumkin bo'lgan barcha o'rin almashtirishlar quyidagicha:

A A B C	*A B A C*	*A C B A*	*B A A C*	*B C A A*	*C A B A*
A A C B	*A B C A*	*A C A B*	*B A C A*	*C B A A*	*C A A B*

Formula yordamida hisoblanganda ham

$$P_{takr.} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12.$$

4-masala. $m+n+s$ ta predmetni uch guruhga bittasida t ta, ikkinchisida p ta, uchinchisida esa s ta predmet bo'ladigan qilib necha usul bilan bo'lish mumkin?

Yechish: $N = (P_{m\ n\ s})_{takr} = \dfrac{(m+n+s)!}{n!m!s!}.$

Javob: $N = \dfrac{(m+n+s)!}{n!m!s!}$

Takrorlanishli o'rinlashtirishlar

***n* ta elementdan *m* tadan takrorlanishli o'rinlashtirishlarda** ($m \leq n$) ixtiyoriy element 1 dan *m* martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir *n* ta elementdan *m* tadan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementlardan, balki *t* ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil hech bo'lmaganda elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiluvchi guruhlar har xil guruh hisoblanadi.

Masalan, uch *A*, *B*, *C* elementdan ikkitadan takrorlanishli o'rinlashtirishlar quyidagicha:

AA, BB, CC, AC, BC, CA, CB, BA, AB.

n ta elementdan *m* tadan takrorlanishli o'rinlashtirishlar soni $A^{m}_{n\ \text{такр.}}$ bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A^{m}_{n\ \text{takr.}} = n^{m}.$$

5-masala. Seyfning shifrli kodi olti xonali sondan iborat. Kodlashtirganda nechta turli kombinatsiya tuzish mumkin?

Yechish: Bu misolda nq10, chunki kodlashtirishda 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlarning hammasidan foydalanish mumkin va kod olti xonali son bo'lgani uchun *m*=6. Demak, seyfni

$$A^{m}_{n\ \text{takr.}} = n^{m} = 10^{6} = 1000000$$

usul bilan kodlashtirish mumkin.

Javob: 100000

TAKRORLANISHLI MOSLIKLAR

***p* ta elementdan *t* tadan element bo'lgan takrorlanishli mosliklarda** ixtiyoriy element 1 dan *m* martagacha uchrashi yoki umuman uchramasligi mumkin, ya'ni har bir *n* ta elementdan *m* tadan takrorlanishli o'rinlashtirish nafaqat turli elementlardan, balki *t* ta ixtiyoriy ravishda takrorlanuvchi ixtiyoriy elementlardan tashkil topishi mumkin. Tarкibi bir xil bo'lib, faqat elementlarining tartibi bilan farq qiluvchi guruhlar farq qilinmaydi, ya'ni faqat elementlarining joylashish tartibi bilangina farq qiluvchi guruhlar bir xil guruh hisoblanadi.

Masalan, uch A, B, C elementdan ikkitadan takrorlanishli mosliklar quyidagicha:

$$AA,\ BB,\ CC,\ AC,\ BC,\ AB.$$

n ta elementdan m tadan takrorlanishli mosliklar soni $C^{m}_{n\ takr.}$ bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$C^{m}_{n\ takr.} = C^{m}_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Ta'kidlash joizki, t p dan katta ham bo'lishi mumkin.

6-masala. Qandolat do'konidagi 4 xil shirinlikdan 6 donasini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish: Bu misolda n=4 va m=6. Demak, 4 turdagi shirinliklardan 6 donasini

$$C^{6}_{4\ takr.} = C^{6}_{4+6-1} = C^{6}_{9} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

usul bilan tanlash mumkin.

Mosliklar soni C^{m}_{n} ning qiymatini hisoblaydigan maxsus **CHISLKOMB(SON;TANLANGAN_SON)** funksiyaga murojaat: **CHISLKOMB(6+4−1;6)**

Kombinatorikaning asosiy qoidalari

Kombinatorikaning asosiy qoidalarini keltiramiz.

- **Qo'shish qoidasi (mantiqiy qo'shish tamoyili)**

Agar a elementni m ta usul bilan, b elementni esa boshqa n ta usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, u holda ularning birlashmasidan a yoki b ni $m+n$ usul bilan tanlash mumkin.

- **Ko'paytirish qoidasi (mantiqiy ko'paytirish tamoyili).**

Agar a elementni m ta usul bilan tanlash mumkin bo'lib, har bir ana shunday tanlashdan so'ng b elementni p ta usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, u holda (a, b) juftlikni ko'rsatilgan tartibda $m \cdot n$ usul bilan tanlash mumkin.

Bu qoidalar ixtiyoriy sondagi elementlar uchun ham o'rinli.

7-masala. Elektr mollari do'konida sotuvga uch xil televizor va ikki xil videomagnitofon chiqarilgan. Xaridor televizor yoki videomagnitofon sotib olish imkoniyatiga ega.

a) u bitta xaridni necha usul bilan amalga oshirishi mumkin?

b) agar xaridor televizor va videomagnitofon sotib olmoqchi bo'lsa, u holda nechta turli juftliklar bo'lishi mumkin?

Yechish: a) Bitta televizorni uchta usul bilan, videomagnitofonni esa ikki usul bilan sotib olish mumkin. U holda televizor yoki videomagnitofonni besh usul bilan sotib olish mumkin, ya'ni

$$N = n + m = 3 + 2 = 5\cdot$$

b) *a, b, c* — televizorlar markasi; x, u — videomagnitofonlar markasi bo'lsin. Agar *a* markadagi televizor tanlangan bo'lsa, u holda *ax* va au komplektlari bo'lishi mumkin. Agar b markadagi televizor tanlangan bo'lsa, *bx* va bu komplektlarni hosil qilish mumkin. Va nihoyat, *s* markadagi televizor tanlangan bo'lsa, *sx* va *su* komplektlarni hosil qilish mumkin. Shunday qilib, televizor tanlanganidan so'ng ikki usul bilan videomagnitofon tanlanishi mumkin. Demak, hammasi bo'lib 6 ta turli juftliklar tanlash mumkin ekan:

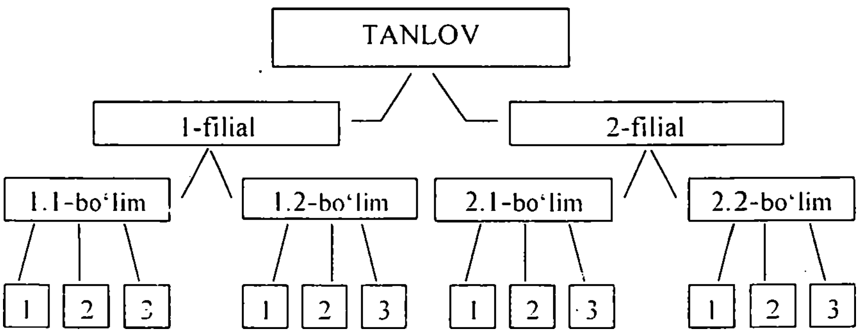
$$N = n + m = 3 + 2 = 5\ .$$

8-masala. Faraz qilaylik bankning ikkita filiali mavjud. Har bir filialning ikkitadan bo'limi bor va ularning har birida uchtadan xodim ishlaydi. Malaka oshirish kursida o'qitish uchun xodimlardan birini tasodifiy ravishda necha usul bilan tanlash mumkin?

Yechish: Tanlov quyidagi tartibda amalga oshiriladi (diagrammaga qarane): tasodifiy ravishda filial tanlanadi; so'ngra filial ichidan bo'lim tanlab olinadi va, nihoyat, bo'limdan tasodifiy ravishda bitta xodim tanlanadi. Diagrammadan ko'rinib turibdiki, bunday tanlovlar soni

$$N = n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6 \text{ ta.}$$

Tanlov usullari sonini hisoblash uchun diagramma



Mustahkamlash uchun masalalar

1. Ertalabki pochta bilan maxsus agentlikka neft quvurlarini kovlash uchun yer uchastkalarining ijara narxi to‘g‘risidagi takliflar bilan 9 ta yopiq konvert keldi. Konvertlarni ochish tartibining necha usuli mavjud?

Javob: 362880.

2. Geologorazvedkaning xabar berishicha 15 ta yer uchastkasining birida neft bo‘lish ehtimoli bor. Biroq kompaniyaning mablag‘i faqat 8 ta quvur qazishga yetadi. Kompaniya ana shu 8 ta turli quvurni necha usul bilan tanlab olishi mumkin?

Javob: 6435.

3. Kengash ishga qabul qilish to‘g‘risida ariza bergan 6 ta nomzodni ko‘rib chiqmoqda. Ular hammasining kasbiy malakasi bir xil. Suhbatga esa oltitadan faqat uchtasi taklif qilinadi. Suhbatga kirish tartibi ham ahamiyatga ega, chunki birinchi bo‘lib kirganning ishga taklif qilinish ehtimoli eng katta. Ikkinchisi faqat birinchisi rad javobi olgan taqdirdagina taklif qilinadi. Uchinchisi suhbatga kirishi uchun avvalgi ikkitasi rad javobi olgan bo‘lishi kerak. Bunday sharoitda oltitadan uch nomzodni tanlashning nechta usuli mavjud?

Javob: 120.

4. Aviakompaniya Samarqand—Toshkent yo‘nalishida oltita, Toshkent—Anqara yo‘nalishida esa ikkita reysga ega. Agar reyslar har xil kunlarda bajarilsa, Samarqanddan Anqaragacha nechta usul bilan chipta buyurish mumkin?

Javob: 12.

5. Kompaniyaning to‘rt bo‘limi bor: mahsulot ishlab chiqarish bo‘limi; xomashyo yetkazib berish bilan shug‘ullanuvchi ta’minot bo‘limi; menedjment va marketing bo‘limlari. Ularning har biridagi xodimlar soni mos ravishda 55, 30, 21 va 13 ga teng. Kompaniya direktori bilan har yili bo‘ladigan uchrashuvga har bir bo‘lim o‘zining bitta vakilini jo‘natmoqchi. Kompaniya ishchilaridan ana shu uchrashuvga hammasi bo‘lib nechta guruh tuzish mumkin?

Javob: 450450.

6. 20 ta odam qatnashayotgan majlis ikkita konferentsiyaga ikki vakilni saylamoqda. Buni necha usul bilan bajarish mumkin? Bitta konferentsiyaga ikki vakilni nechta usul bilan tanlash mumkin?

Javob: 380; 190.

7. Kompyuter tarmog'iga kirish uchun operator to'rtta raqamdan iborat kodni terishi kerak. Operator kerakli kodni unutib qo'ydi yoki bilmaydi deylik. Agar koddagi raqamlar

a) takrorlanmasa;

b) takrorlansa,

u kodni terish uchun hammasi bo'lib nechta kombinatsiya tuzishi mumkin?

8. Ko'p mamlakatlarda haydovchilik guvohnomasi uchta harf va uchta raqamdan iborat tartib raqamiga ega. Agar lotin alifbosida 26 ta harf bo'lsa, haydovchilik guvohnomasi hammasi bo'lib nechta tartib raqamiga ega bo'lishi mumkin? Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) raqamlar takrorlanadi;

b) takrorlanmaydi.

9. Avvalgi masala shartida agar tartib raqami faqat olti raqamdan iborat bo'lsa, haydovchilik guvohnomasi hammasi bo'lib nechta tartib raqamiga ega bo'lishi mumkin? Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) raqamlar takrorlanadi;

b) takrorlanmaydi.

10. Korporatsiya direktori 10 ta universitet bitiruvchisini ishga qabul qilish masalasini ko'rib chiqmoqda. Korxonalarning birida uchta turli bo'sh o'rin bor. Direktor bu o'rinlarni nechta usul bilan to'ldirishi mumkin?

Javob: 720.

11. Beshta *F1, F2, F3, F4, F5* firma uchta turli *C1, C2, C3* shartnomalarni bajarish bo'yicha o'z xizmatlarini taklif etadi. Har bir firma faqat bitta shartnomani olishi mumkin. Shartnomalar har xil, ya'ni *F1* firma *C1* shartnomani olgani shu firma *C2* ni olganiga teng kuchli emas. Firmalar shartnoma olishning nechta usuliga ega?

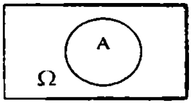
Javob: 60.

1.2. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI. TASODIFIY HODISALAR USTIDA AMALLAR

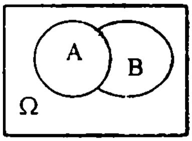
Tajribaning har bir yaxlit natijasi (ya'ni boshqa hodisalar ko'rinishida ifodalanmaydigan hodisa) **elementar hodisa** deb ataladi. Barcha elementar hodisalar to'plamini $\Omega = \{\omega\}$ orqali belgilaymiz.

$\Omega = \{\omega\}$ **elementar hodisalar fazosi** deb ataladi. Ω fazosi tajribaning mumkin bo'lgan barcha natijalarini o'z ichiga oladi.

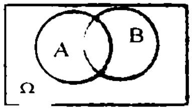
Ω ning ixtiyoriy A qism to'plami **hodisa** deb ataladi. Tajriba natijasi A ga kirgan biror elementar hodisadan iborat bo'lsa, u holda A hodisa ro'y beradi.



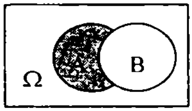
A va B hodisaning **yig'indisi** $A \cup B$ deb yoki A hodisaga, yoki B hodisaga, yoki ularning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi



A va B hodisalarning **ko'paytmasi** $A \cap B$ deb A va B larning har ikkalasiga tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

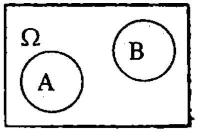


A va B hodisalarning **ayirmasi** $A \setminus B$ deb A ga tegishli va B ga tegishli bo'lmagan elementar hodisalardan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

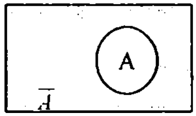


Ω to'plam **muqarrar hodisa** deb ataladi. Bo'sh to'plam $\varnothing$ – **mumkin bo'lmagan hodisa** deyiladi.

Agar $AV=\varnothing$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar **birgalikda bo'lmagan hodisalar** deyiladi hamda bu holda $A \cup B$ ning o'rniga $A+V$ yoziladi.

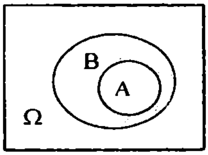


Agar $A\bar{A}=\varnothing$ va $A+\bar{A}=\Omega$ bo'lsa, u holda $\bar{A}$ hodisa A hodisaga **qarama-qarshi hodisa** deyiladi.



Agar $A_iA_j=\varnothing$ $(i \neq j)$ va $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$ bo'lsa, u holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar **to'la guruhni tashkil etadi** deyiladi.

Agar A hodisaning har bir ro'y berishi natijasida B hodisa ham ro'y bersa, u holda $A \subset B$ deb yoziladi va **«A hodisa** B **hodisani ergashtiradi»** deb aytiladi. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda A ga kirgan har bir elementar hodisa B ga ham tegishli bo'ladi.



Agar $A=V$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar **teng kuchli hodisalar** deyiladi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Tanga ketma-ket uch marta tashlanmoqda. Tajriba natijasi (X_1, X_2, X_3) ketma-ketlikdan iborat bo'lib, har bir X_i «G» – gerb yokı «R» – raqam tushishini bildiradi. a) W elementar hodisalar fazosini quring. b) Kamida ikki marta tanga «gerb» tomoni bilan tushishidan iborat bo'lgan A hodisani ifodalang.

a) $A \cup A$ va A·A hodisalarni ta'riflang; b) Qachon AB va A hodisalar teng kuchli? d) A va $\overline{A \cup B}$ hodisalar birgalikdami?

2. Tekislikka tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda. A-«nuqta A doiraga tushishi» va B- «nuqta B doiraga tushishi» dan iborat hodisalar bo'lsin. $\overline{A}, \overline{B}, A \cup B, \overline{A \cup B}, AB, \overline{AB}$ hodisalarni izohlab bering.

3. Brokerlik firmasi aktsiya va obligatsiyalar bilan ish ko'radi. O'z faoliyatini tahlil qilish uchun firma uni qiziqtirgan shaxs aktsiya egasi (A hodisa) yoki obligatsiya egasi (B hodisa) bo'lishi ehtimolligini baholab turishi foydadan holi emas. Shu nuqtai nazardan $\overline{A}B, A\overline{B}, A \cup B, \overline{A \cup B}, A \cup B, AB, \overline{A}\overline{B}$ hodisalarni izohlab bering.

4. Avtomobillar sotish bilan shug'ullanuvchi firma radio va televidenie orqali mashinalarning ikki yangi modelini reklama qilmoqda. A – tasodifan tanlangan odam yangi modellar haqidagi reklamani radio orqali eshitgani, B – tasodifan tanlangan odam yangi modellar haqidagi reklamani televidenie orqali ko'rgani hodisasi bo'lsa, $\overline{A}B, A\overline{B}, A \cup B, \overline{A \cup B}, A \cup B, AB, \overline{A}\overline{B}$ hodisalarni izohlab bering.

5. A, B, V–tasodifiy hodisalar bo'lsin. a) $ABC = A$; b) $A \cup B \cup C = A$ hodisalarni izohlab bering.

6. Nishon $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$ bo'lgan r_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ radiusli kontsentrik aylanalar bilan chegaralangan 10 ta doiradan iborat. Agar $A_i = \{ r_i$ radiusli doiraga tekkazish$\}$ hodisasi bo'lsa, u holda $B = \sum_{i=1}^{6} A_i$, $C = \prod_{i=5}^{10} A_i$, $D = \overline{A_1} \cdot A_2$ hodisalarni izohlab bering.

7. A, B, C – uchta ixtiyoriy hodisa bo‘lsin. Quyidagi hodisalarni ifodalab bering:

a) faqat A hodisa ro‘y berdi;

b) A va B hodisalar ro‘y berdi, lekin C hodisa ro‘y bermadi;

d) uchala hodisa ham ro‘y berdi;

e) ushbu hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasi ro‘y berdi;

f) ushbu hodisalarning faqat bittasi ro‘y berdi;

g) ushbu hodisalarning hech bo‘lmaganda ikkitasi ro‘y berdi;

h) faqat ikkita hodisa ro‘y berdi;

i) bu hodisalarning birortasi ham ro‘y bermadi;

j) ikkitadan ziyod hodisa ro‘y bermadi.

1. A, $\bar{A}B$, $\overline{A \cup B}$ hodisalar to‘la guruh tashkil etishini isbotlang.

9. Tasodifiy sonlar jadvalidan tasodifiy ravishda bir son olingan. A hodisa – «tanlangan son 5 ga bo‘linadi»; B hodisa – «bu sonning oxirgi raqami nol» ekanini bildirsa, $A \setminus B$ va $A\bar{B}$ hodisalar nimani bildiradi?

1.3. EHTIMOLLIKNING KLASSIK VA STATISTIK TA’RIFI

Hodisaning ehtimoli bu hodisaning ro‘y berishi imkonining miqdoriy ko‘rsatgichidir.

Agar W – n ta o‘zaro teng kuchli, ya’ni ro‘y berish yoki bermasligining ehtimoli bir xil bo‘lgan hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, u holda A ***hodisaning P(A) ehtimoli*** A hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradigan elementar hodisalar soni m ning barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

A hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diradigan elementar hodisalar «moyil hodisalar» deyiladi. Barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘lgan hol «klassik» hol deb ataladi. Shuning uchun $P(A) = \frac{m}{n}$ ehtimollikni ko‘pincha «klassik» ehtimollik deb ataladi.

Quyidagi nisbat $W(A) = \frac{m}{n}$ ga A hodisaning **nisbiy chastotasi** deb ataladi. Nisbiy chastota tajribalardan so‘ng hisoblanadi. Bunda m – A hodisa ro‘y bergan tajribalar soni; n – tajribalarning umumiy soni. Statistik ta’rifda hodisaning ehtimolligi sifatida uning nisbiy chastotasi olinadi.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Shoshqol toshi (o‘yin kubigi) bir marta tashlangan bo‘lsa, juft ochko tushish ehtimolini toping.

Yechish: B – juft ochko tushish hodisasi bo‘lsin. Elementar hodisalar fazosi oltita teng imkoniyatli hodisadan iborat, ya'ni $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$. Bu yerda A_i – $\{i$ raqami tushish hodisasi$\}$. U holda B ga moyil elementar hodisalar uch a – A_2, A_4, A_6.

Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Javob: $P(B) = 0{,}5$.

2-masala. Yuk mashinasiga ortish vaqtida 10000 tarvuzdan 26 tasi yorilgan. Yorilgan tarvuzlarning nisbiy chastotasini toping.

Yechish: Masalaning shartiga asosan hammasi bo‘lib n=10000 tarvuz bor, ulardan m=26 tasi yorilgan. Demak, yorilgan tarvuzlarning nisbiy chastotasi $W(A) = \frac{m}{n} = \frac{26}{10000} = 0{,}0026$.

Javob: $W(A) = 0{,}0026$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Yirik savdo kompaniyasi uy-joy qurilishi va ularni ta'mirlash uchun qurilish materiallari sotish bilan shug‘ullanadi. Kompaniyada uchta regiondagi xaridorlarning ro‘yxati bor. Kompaniya ularga tovarlar katalogini pochta orqali yuboradi. Kompaniya menedjeri yuborilgan takliflarga birorta ham regiondan javob kelmaslik ehtimoli 0,25 ga teng deb hisoblaydi. U holda hech bo‘lmaganda bitta regiondan javob kelish ehtimolini toping.

Javob: 0,75.

2. Qutida 10 ta shar bor: 7 ta qora va 3 ta oq. Yashikdan tasodifiy ravishda bir shar olindi. Bu shar: a) oq; b) qora bo‘lishining ehtimolini toping.

Javob: a) 3/10; b) 7/10.

3. «DAFTAR» so‘zidan tasodifiy ravishda bitta harf tanlandi. Bu «U» harfi bo‘lish ehtimoli nimaga teng? Bu unli harf bo‘lish ehtimoli-chi?

Javob: 0; 1/3.

4. Uchta tanga tashlandi. 2 tanga «gerb» tomoni bilan tushish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 3/8.

5. Shoshqol toshi bir marta tashlanganda, 4 raqami tushish ehtimoli nechaga teng? 4 dan katta raqam tushish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 1/6; 1/3.

6. Nishonga otishda tekkazishlar nisbiy chastotasi 0,6 bo'lgan. Agar mergan 12 marta nishonga tekkiza olmagan bo'lsa, jami bo'lib necha marta o'q otilgan?

Javob: 30.

7. Ikkita shoshqol toshi tashlanganda tushgan raqamlar yig'indisi kamida 9 ga teng bo'lish ehtimoli nechaga teng? 1 tushish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 5/18; 11/36.

8. 64 ta katakdan iborat shaxmat taxtasiga 2 ta shaxmat donasi — oq va qora rangli fil qo'yildi. Ularning bir-birini «urish» ehtimoli nechaga teng?

Javob: 1-14/63 = 7/9.

9. A, B, E, T, SH harflari yozilgan 5 ta bir xil qog'ozchalardan ketma-ket uchtasi tanlab olindi va olinish tartibida bir qatorga joylashtirildi. Natijada «BESH» so'zi hosil bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 1/60.

10. Qutida 7 ta qora va 3 ta oq shar bor. Tasodifiy ravishda olingan ikkita sharning qora bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 7/15.

11. 1, 2, 3,..., n sonlar ketma-ketligidan tasodifiy ravishda ikkita son tanlab olindi. Agar $1 < k < n$ bo'lsa, ulardan biri k dan kichik, ikkinchisi esa k dan katta bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Javob: $\dfrac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

12. Yosh bola A, A, D, D harflari yozilgan 4 ta bir xil kartonchalarni o'ynab o'tiribdi. U harflarni bir qatorga tasodifiy ravishda terganida «DADA» so'zi hosil bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 1/6.

13. Telefon raqamlarini terayotgan kishi oxirgi ikki raqamni unutib qo'ydi va ularning turlicha va toq ekanligini eslab qolgan holda, tasodifiy ravishda ikki raqamni terdi. Terilgan telefon raqamlari to'g'ri bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 1/20.

14. Navbatda A, B hamda yana sakkiz kishi turibdi. A va B larning orasida uch kishi bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Javob: $(12\cdot 8!)/10!$.

15. n talotereyachiptalarining m tasi yutuqli. Siz k tachiptasotib oldingiz deylik. Hech bo'lmaganda bitta chipta yutuqli bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $1-C_{n-m}^{k}/C_{n}^{k}$.

16. 25 ta imtihon biletidan 5 tasi «oson». Ikkita talaba navbat bilan bittadan bilet oldilar. Quyidagi hodisalar ehtimolini toping:

A = {birinchi talaba «oson» bilet oldi};
B = {ikkinchi talaba «oson» bilet oldi};
C = {ikkala talaba ham «oson» bilet oldi};

Javob: $P(A)=(5\cdot 24)/A_{25}^{2}=1/5;$

$P(B)=(24\cdot 5)/A_{25}^{2}=1/5; P(C)=A_{5}^{2}/A_{25}^{2}=1/30:$

17. 50 ta mahsulotning 5 tasi sifatsiz. Tasodifiy ravishda 6 ta mahsulot tanlab olindi. Tanlab olingan mahsulotlarning orasida 2 tasi sifatsiz bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $\approx$ 0,0938.

18. Tasodifiy tanlangan 12 ta odamning tug'ilgan kuni yilning turli oylariga to'g'ri kelish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{12!}{12^{12}}$.

19. Yetti qavatli uyning liftiga birinchi qavatda 3 kishi kirdi. Ularning har biri, ikkinchi qavatdan boshlab, istalgan qavatida liftdan chiqishi mumkin. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping:

A = {hamma yo'lovchilar 4-qavatda tushadilar};
B = {hamma yo'lovchilar bitta qavatda tushadilar};
C = {hamma yo'lovchilar turli qavatlarda tushadilar}.

Javob: $P(A)=1/216;$ $P(B)=1/36;$ $P(C)=5/54$.

20. Javonda 10 juft turli oyoq kiyimlar bor. Tasodifiy ravishda ulardan 4 donasi tanlab olindi. Olingan oyoq kiyimlar ichida o'z jufti bilan olingani yo'q ekanligini ehtimolini toping.

Javob: $2^{4}C_{10}^{4}/C_{20}^{4}$.

21. Tasodifiy ravishda tanlab olingan domino toshi "dubl" (ya'ni ikki ta bir xil ochkoli) emas ekan. Ikkinchi tasodifiy tanlab olingan

domino toshini birinchisining yoniga qo‘yish mumkinligining ehtimolini toping.

*Javob:*12/272.

22. O‘yin dastasi 36 kartadan iborat. Dastadan bitta karta tanlab olindi va qaytarib qo‘yildi. So‘ngra kartalar aralashtirildi va yana bitta karta tanlab olindi. Tanlab olingan ikkala karta bir turli bo‘lish ehtimolini toping. Eslatma: turlar 4 xil bo‘ladi (♦ ♥ ♠ ♣).

Javob: 0,25.

23. Kitob javonining bir bo‘limiga 10 ta kitob tasodifiy ravishda taxlandi. Uchta ma’lum bir kitoblar yonma-yon qo‘yilishi ehtimolini toping.

Javob: 1/15.

23. O‘yinlarning umumiy sonini kamaytirish maqsadida $2n$ ta sport jamoasi qur’a tortish asosida ikkita guruhga ajratildi. Ikkita kuchli jamoa: a) turli guruhga tushishi; b) bir guruhga tushishi ehtimolini toping.

Javob: a) n / $(2n-1)$; b) $(n-1)$ / $(2n-1)$.

25. Sifatli mahsulotlarning nisbiy chastotasi 0,9 ga teng bo‘lib chiqdi. Agar tekshirilgan mahsulotlarning umumiy soni 200 taga teng bo‘lsa, ularning orasida sifatlilarining soni nechta?

Javob: 180 *mahsulot.*

26. Sexda 6 erkak va 4 ayol ishlaydi. Tabeldagi tartib raqami bo‘yicha tasodifiy ravishda 7 kishi tanlab olindi. Tanlab olinganlar orasida 3 ayol bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 0,5.

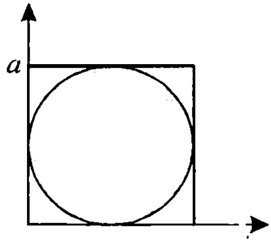
1.4. GEOMETRIK EHTIMOLLIK

Geometrik extimollik tajriba uchun elementar hodisalar soni cheksiz (sanoqli yoki sanoqsiz) ko‘p bo‘lgan hollarda ishlatiladi. Geometrik ehtimollikning ma’nosini quyidagi misolda tushuntiramiz. Aytaylik, biror G sohaga tasodifiy ravishda nuqta tashlanmoqda, ya’ni nuqta G sohaning ixtyoriy joyiga teng imkoniyatli ravishda tushishi mumkin. G sohaning ichida joylashgan ixtiyoriy g sohaga tushish ehtimoli ana shu g soha o‘lchovi (uzunligi, yuzasi, hajmi va h.k.) ga proporsional bo‘lib, uning qayerda joylashgani va shakliga bog‘liq emas. Shunday qilib, nuqtaning g sohaga tushish ehtimolligi:

$$P(g) = \frac{g \text{ soha o‘lchovi}}{G \text{ soha o‘lchovi}}.$$

Namunaviy masala yechish

Masala. Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratga aylana ichki chizilgan. Tasodifiy ravishda kvadratning ichiga tashlangan nuqta aylana ichiga tushishi ehtimolini toping.



Yechish: Masalaning shartiga asosan: G – tomoni a ga teng bo'lgan kvadrat, g – unga ichki chizilgan $a/2$ radiusli aylana. G va g shakllar tekislikda qaralayotganligi uchun o'lchov sifatida yuza olinadi. Demak, izlanayotgan ehtimollik:

$$P(g) = \frac{g \text{ o'lchovi}}{G \text{ o'lchovi}} = \frac{\text{yuza } g}{\text{yuza } G} = \frac{\pi \cdot (a/2)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Javob: $\pi/4$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Bo'rondan so'ng 40 chi va 70 chi kilometrlar orasida telefon simi uzilgan. Uzilish 50 chi va 55 chi kilometrlar orasida sodir bo'lganligining ehtimolini toping.

Javob: 1/6.

2. R radiusli katta doira ichiga r radiusli kichik doira joylashtirilgan. Katta doira ichiga tasodifan tashlangan nuqta kichik doiraga ham tushish ehtimolini toping.

Javob: $p=r^2/R^2$

3. Tekislikda a tomonli kvadratlardan iborat cheksiz to'r chizilgan. Tekislikka tasodifiy ravishda $r < a/2$ radiusli tanga tashlangan. Tanga hech qaysi kvadratning tomonini kesib o'tmaslik ehtimolini toping.

Javob: $p=(a-2r)^2/a^2$

4. (Uchrashuv haqidagi masala) Ikki A va B shaxs kunduzgi soat 2 va 3 orasida ma'lum bir joyda uchrashishga kelishdilar. Birinchi bo'lib kelgani ikkinchisini 10 daqiqa davomida kutadi va agar u kelmasa, ketadi. Agar bu ikki shaxsning kelish vaqtlari tasodifiy bo'lsa, u holda ularning uchrashish ehtimolini toping.

Javob: 11/36.

5. Uzunligi 1 ga teng bo'lgan kesma tasodifiy ravishda 3 bo'lakka bo'lindi. Hosil bo'lgan bo'laklardan uchburchak yasash mumkinligining ehtimolini toping.

Javob: 1/4.

6. Uchlari (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) nuqtalarda bo‘lgan kvadratga tasodifiy ravishda M nuqta tashlandi. Uning koordinatalari $(\xi;\eta)$ bo‘lsin. U holda $x^2+\xi x+\eta=0$ tenglamaning ildizlari haqiqiy bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 1/12.

7. Yon qirrasiga tushish ehtimoli 1/3 ga teng bo‘lishi uchun tanganing balandligi qancha bo‘lishi kerak?

Javob: $\sqrt{2}R/2 \approx 0.707R$.

8. Tasodifiy ravishda har biri birdan katta bo‘lmagan ikkita haqiqiy musbat son olingan. Bir vaqtning o‘zida $x+y$ yig‘indi birdan katta bo‘lmasligi va xy ko‘paytma 0,09 dan kichik bo‘lmasligi ehtimolini toping.

Javob: $p \approx 0,2$.

$(\xi;\eta)$ bo‘lsin. U holda $x^2+\xi x+\eta=0$ tenglamaning ildizlari haqiqiy bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 1/12.

7. Yon qirrasiga tushish ehtimoli 1/3 ga teng bo‘lishi uchun tanganing balandligi qancha bo‘lishi kerak?

Javob: $\sqrt{2}R/2 \approx 0.707R$.

8. Tasodifiy ravishda har biri birdan katta bo‘lmagan ikkita haqiqiy musbat son olingan. Bir vaqtning o‘zida $x+u$ yig‘indi birdan katta bo‘lmasligi va xu ko‘paytma 0,09 dan kichik bo‘lmasligi ehtimolini toping.

Javob: $p \approx 0,2$.

1.5. SHARTLI EHTIMOLLIK. EHTIMOLLIKLARNI KO‘PAYTIRISH TEOREMASI

Ikkita A va B hodisalar **o‘zaro bog‘liq emas** deyiladi, agar ulardan har birining ro‘y berish ehtimoli ikkinchisining ro‘y berish yoki bermasligiga bog‘liq bo‘lmasa. Aks holda bu hodisalar **o‘zaro bog‘liq** deyiladi.

A va B o‘zaro bog‘liq hodisalar bo‘lsin. $P_B(A)$ (yoki $P(A/B)$) **shartli ehtimollik** deb B hodisa ro‘y berganligi aniq bo‘lganida A hodisaning ro‘y berish ehtimoliga aytiladi va quyidagi formula orqali topiladi:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ bunda } P(B)>0.$$

Agar A, B hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda $P(A/B)=P(A)$ va $P(B/A)=P(B)$ tengliklar bajariladi. O'zaro bog'liqsiz hodisalar uchun quyida keltirilgan teorema o'rinli bo'ladi:

O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisa uchun ko'paytirish teoremasi

Teorema. O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A)\ P(B).$$

Natija. O'zaro bog'liq bo'lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar har birining ro'y berish ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) \cdot$$

O'zaro bog'liq bo'lgan hodisalar uchun ehtimolliklarini ko'paytirish teoremasi

Teorema. O'zaro bog'liq bo'lgan ikki hodisaning bir vaqtda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolining ikkinchisining birinchisi ro'y berganligi sharti ostidagi shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B); \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Natija. Bir nechta o'zaro bog'liq bo'lgan hodisalarning bir vaqtda ro'y berish ehtimoli uchun quyidagi formula o'rinli:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdots P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n-1})$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Maslahat firmasi ikkita yirik korporatsiyadan ikkita buyurtma olishga harakat qilmoqda. A va B mos ravishda 1- va 2-korporatsiyadan buyurtma olish hodisalari bo'lsin. Firma ekspertlarining fikricha, birinchi korporatsiyadan buyurtma olish ehtimoli 0,45 ga teng. Shuningdek, ekspertlar agar firma 1-korporatsiyadan buyurtma olsa, u holda 2-korporatsiya ham ularga buyurtma berishi ehtimoli 0,9 ga teng deb hisoblaydilar. Maslahat firmasining ikkala buyurtmani ham olish ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $P(A)=0,45$ va $P(B/A)=0,9$. Maslahat firmasining ikkala buyurtmani ham olish ehtimoli $P(AB)$ ni topish kerak. O'zaro bog'liq hodisalar ko'paytmasining ehtimolini topish formulasiga asosan

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}45 \cdot 0{,}9 = 0{,}405$$

Javob: 0,405.

2-masala. Yirik reklama firmasida ishchilarning 21%i yuqori maosh oladi. Firma ishchilarining 40% ini ayollar tashkil etadi. Shu bilan birga 6,4% ishchilar – yuqori maosh oladigan ayollar. Firmada ayollar mehnatiga haq to'lashda kamsitish (diskriminatsiya) mavjud deyishga asos bormi?

Yechish: Ehtimollar nazariyasi nuqtai nazaridan masalani quyidagicha qo'yish mumkin: «Tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchi-ayol yuqori maosh olishi ehtimoli qancha?» Agar A – «tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchi yuqori maosh oladi» hodisasi, B – «tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchi – ayol» hodisasi deb olsak, u holda:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}064}{0{,}40} = 0{,}16.$$

0,16 soni 0,21 sonidan kichik bo'lgani uchun reklama firmasida yuqori maosh olish imkoniyati ayollarda erkaklarga nisbatan kam deb xulosa qilish mumkin.

3-masala. Iste'molchi ma'lum bir mahsulot reklamasini televideniye orqali ko'rish ehtimoli 0,04ga, xuddi ana shu mahsulot reklamasini maxsus reklama ko'rgazmasida ko'rish ehtimoli 0,06 ga teng. Agar bu ikki hodisa o'zaro bog'liq bo'lmasa, iste'molchining ikkala turdagi reklamani ham ko'rish ehtimoli nimaga teng?

Yechish: A – iste'molchi mahsulot reklamasini televideniye orqali ko'rish hodisasi, B – iste'molchi mahsulot reklamasini maxsus reklama ko'rgazmasida ko'rish hodisasi bo'lsin. Bu hodisalar bog'liq emas. U holda iste'molchining ikkala reklamani ham ko'rish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(A(A = P(A) \cdot P(B) = 0{,}04 \cdot 0{,}06 = 0{,}0024.$$

Javob: 0,0024.

4-masala. Agar barcha mahsulotning 4%i sifatsiz, sifatli mahsulotning 75%i birinchi nav talabiga javob berishi ma'lum bo'lsa, tasodifan olingan mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: A –«tanlangan mahsulot sifatli», B – «tanlangan mahsulot 1-navli» hodisalari bo'lsin. Masala shartiga ko'ra

$P(A) = 1\text{-}0{,}04 = 0{,}96$ *va* $P(B/A) = 0{,}75$.

Izlanayotgan ehtimollik:

$P(AB) = P(A)\ P(B/A) = 0{,}96 \cdot 0{,}75 = 0{,}72$.

Javob: 0,72.

5-masala. Talaba imtixonda tushishi mumkin bo'lgan 25 ta savoldan faqat 20 tasiga tayyorlanib kelgan. Professor unga uchta savol berdi. Talabaning uchala savolga ham to'g'ri javob berish ehtimolini toping.

Yechish: Quyidagi hodisalarni aniqlaylik:

A — «talaba uchala savolga ham javobni biladi»;

A_1 — «talaba 1-savolga javobni biladi»;

A_2 — «talaba 2-savolga javobni biladi»;

A_3 — «talaba 3-savolga javobni biladi».

A_1, A_2, A_3, hodisalar bog'liq, shuning uchun $A = A_1 A_2 A_3$ hodisaning ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) =$$

$$= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} = 0{,}496$$

Javob: 0,496.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Moliyaviy kuzatuvchining taxminiga ko'ra, agar ma'lum muddatda foiz me'yori pasaysa, xuddi shu davrda aksiyalar bozorining o'sish ehtimoli 0,8 ga teng. Kuzatuvchi shu davrda foiz me'yori pasayishi ehtimoli 0,4 ga teng deb hisoblaydi. Olingan ma'lumotlardan foydalanib, aytilgan davrda aksiyalar bozori rivojlangan holda foiz me'yori pasayishi ehtimolini toping.

Javob: 0,32.

2. Kredit bo'limi xizmatchisi bankdan kredit olgan firmalarning 12%i kasodga uchragani va kamida 5 yil davomida kreditlarni qaytara olmasliklarini biladi. U yana shuni biladiki, kredit olganlarning hammasi bo'lib 20%i kasodga uchragan. Agar bankning bitta mijozi kasodga uchragan bo'lsa, uning bankka qarzini qaytarib bera olmasligi ehtimolini toping.

Javob: 0,6.

3. Ma'lum bir tovarning bozordagi ulushi oshishining siri yangi iste'molchilarni jalb qilish va ularni ushlab turish yoki saqlashdan iborat. Yangi iste'molchilarni saqlash *brand loyalty* (iste'molchining ma'lum tovar belgisi yoki turiga ixlos qo'yishi) deb ataladi va bu bozorni o'rganishdagi eng mas'uliyatli sohalardan hisoblanadi. Yangi turdagi tovar ishlab chiqarayotganlar iste'molchilarning tovarni darhol qabul qilishlari va *brand loyalty* ni yaratish kamida olti oy vaqt talab qilishi ehtimoli 0,02 ga tengligini biladilar. Shu bilan birga ishlab chiqaruvchi tasodifan tanlab olingan iste'molchining yangi tovarni qabul qilish ehtimoli 0,05 ga tengligini biladi. Faraz qilaylik, iste'molchi

hozirgina tovar belgisini o'zgartirdi. Uning ana shu belgiga ixlosi olti oy davomida saqlanib qolishi ehtimolini toping.

Javob: 0,4.

4. Investitsiyalar bo'yicha kuzatuvchi aksiyalar haqida ma'lumotlar yig'adi va quyidagilarni belgilab boradi: ular bo'yicha dividendlar to'langanmi; uni qiziqtirayotgan vaqt davomida aksiyalarning narxi oshdimi yoki yo'qmi. Yig'ilgan ma'lumotlar jadvalda keltirilgan:

Dividendlar	Narxi oshgan	Narxi oshmagan	Jami
To'langan	34	78	112
To'lanmagan	85	49	134
Jami	119	127	246

a) Agar 246 ta aksiya ichidan bittasi tasodifiy ravishda tanlab olingan bo'lsa, uning narxi oshgan aksiyalardan bo'lish ehtimolini toping.

b) Agar aksiya tasodifiy ravishda tanlab olingan bo'lsa, u bo'yicha dividendlar to'langanligi ehtimolini toping.

d) Agar aksiya tasodifiy ravishda tanlab olingan bo'lsa, uning narxi oshgan va u bo'yicha dividendlar to'langan bo'lishi ehtimolini toping.

e) Agar aksiya tasodifiy ravishda tanlab olingan bo'lsa, uning narxi oshmagan va u bo'yicha dividendlar to'lanmagan bo'lishi ehtimolini toping.

f) Aksiyaning narxi oshgan bo'lsa, u bo'yicha dividendlar to'langan bo'lishi ehtimolini toping.

g) Agar aksiya bo'yicha dividendlar to'lanmagan bo'lsa, uning narxi oshish ehtimolini baholang.

h) Agar aksiya bo'yicha dividendlar to'lanmagan bo'lsa, o'rganilayotgan davrda tasodifan olingan aksiyaning barcha ko'rsatkichlari yomonlashganligi ehtimolini baholang.

i) Tasodifiy ravishda tanlangan aksiyaning yoki narxi oshgan, yoki u bo'yicha dividendlar to'langan, yoki ham narxi oshib, ham dividend to'langan bo'lish ehtimolini toping.

Javob: a) 0,4837; *b)*0,4553; *d)*0,1382; *e)* 0,1992; f) 0,2857; g)0,6343; h)0,1992; i) 0,8008.

5. *A* va *B* aksiyalar bir xil tarmoq tomonidan chiqarilganligi ma'lum. Ertasi kuniga *A* aksiya narxining oshish ehtimoli 0,2 ga teng. Ertasi kuniga ham *A* ham *B* aksiyalarning narxi oshishi ehtimoli 0,12 ga teng. Aytaylik, siz ertasi kuniga *A* aksiyaning narxi oshishini bilasiz. U holda *B* aksiyaning ham narxi oshishi ehtimoli qancha?

Javob: 0,6.

6. Moliya fakultetining bitiruvchisi diplom ishini «a'lo» bahoga himoya qilishi ehtimoli 0,6 ga teng. Uning diplom ishini «a'lo» bahoga himoya qilib, nufuzli bankka ishga taklif qilinishi ehtimoli 0,4 ga teng. Faraz qilaylik, talaba diplom ishini «a'lo» bahoga himoya qildi. Uning nufuzli bankka ishga taklif qilinishi ehtimolini toping.

Javob: 0,6667.

7. Auditorlik firmasi reklamalarini «Tijoratchi» ro'znomasida e'lon qildi. Firma mutaxasislarining fikriga ko'ra, ro'znoma muhlislarining 60%i firmaning doimiy mijozlari. Ro'znoma muhlislarini tanlov asosida so'rov qilish natijasi shuni ko'rsatdiki, ularning 85%i ro'znoma yakunidagi firma tomonidan joylashtirgan reklamani eslab qoladi. Firmaning doimiy mijozlari bo'lib, uning reklamasini eslab qoladigan insonlar necha foizni tashkil etishini baholang.

Javob: 51%.

8. Suv yo'llari orqali yuk tashish bilan shug'ullanadigan kompaniyaning ma'lum bir portga kirish uchun ruxsat olish ehtimoli buning uchun zarur bo'lgan qonunning qabul qilinishi yoki qilinmasligiga bog'liq. Kompaniya bu ikki hodisa (ya'ni qonun qabul qilinishi va portga kirishga ruxsat olinishi) ning birgalikda ro'y berish ehtimolini 0,5 ga teng deb baholaydi. Zarur qonunning qabul qilinishi ehtimoli esa 0,75 ga teng. Aytaylik, kompaniya qonun qabul qilinganligi to'g'risida ma'lumot oldi. Portga kirishga ruxsat berilishi ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,6667.

9. Ertaga iste'mol mollari narxlarining oshish ehtimoli 0,3 ga; kumush narxining oshish ehtimoli 0,2 ga; ham iste'mol mollarining, ham kumushning narxi oshishi ehtimoli 0,06 ga teng. Iste'mol mollari va kumushning narxlari o'zaro bog'liqmi? Javobingizni izohlab bering.

Javob: Iste'mol mollari va kumush narxlari o'zaro bog'liq emas.

10. Bozorni o'rganishdagi eng qiyin muammolardan biri — bu iste'molchilarning savollarga javob berishdan bosh tortishlari yoki agar so'rov turar joylarida o'tkazilayotgan bo'lsa, bu vaqtda ularning uyda bo'lmasliklaridir. Respondent (so'rov ishtirokchisi) uyda bo'lsa, savollarga javob berishi ehtimoli 0,94 ga va uning uyda bo'lish ehtimoli 0,65 ga teng ekan. Mana shu ma'lumotlar asosida to'ldirilgan so'rovnomalar foizini baholang.

Javob: 61%.

11. Ikki mergandan har birining nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda 0,7 va 0,8 ga teng. Ular nishonga qarab bir martadan o'q uzishgan bo'lsa, nishonga hech bo'lmaganda bir o'q tegish hodisasining ehtimolini toping.

Javob: $p = 0{,}94$.

12. Ketma-ket uch tanga tashlandi. Quyidagi hodisalar o'zaro bog'liqmi yoki bog'liq emasmi:

A = {birinchi tanga «gerb» tomoni bilan tushishi};

B = {loqal bitta tanga «raqam» tomoni bilan tushishi}?

Javob: Bog'liq.

13. Shoshqol toshi bir marta tashlandi. Agar tushgan raqam toq ekanligi ma'lum bo'lsa, bu raqamging tub ekanligi ehtimolini toping.

Javob: 2/3.

14. Qutida 12 ta qizil, 8 ta yashil va 10 ta ko'k shar bor. Tasodifiy ravishda 2 ta shar tanlab olindi. Agar ko'k shar olinmaganligi ma'lum bo'lsa, olingan sharlar turli rangli bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $p = \dfrac{(12 \cdot 8)/C_{30}^2}{C_{20}^2 / C_{30}^2} = 48/95$.

15. Har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va 0,2 ga teng. Tajribalar ketma-ket ravishda hodisa ro'y bergunga qadar o'tkaziladi. To'rtinchi marta tajriba o'tkazishga to'g'ri kelish ehtimolini toping.

Javob: $p=(1\text{-}0{,}2)3=0{,}512$.

16. Birinchi dastgohda tayyorlangan mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimoli 0,7 ga teng. Xuddi shu mahsulot 2-dastgohda tayyorlanganda bu ehtimollik 0,8 ga teng ekan. Agar 1-dastgohda ikkita, 2-dastgohda uchta mahsulot tayyorlangan bo'lsa, barcha mahsulotning 1-navli bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,251.

17. Tasodifiy sonlar jadvalidan olingan sonlarning hech bo'lmaganda bittasi juft bo'lishi ehtimoli kamida 0,9, teng bo'lishiga kafolot berish uchun tasodifiy sonlar jadvalidan nechta son olish kerak?

Javob: $1 - 0{,}5^n \geq 0{,}9; \quad n \geq 4.$

18. Lotereyada n ta chipta bo'lib, ularning m tasi yutuqli. k ta chipta sohibiga yutuq chiqish ehtimolini toping.

Javob: $p = 1 - \dfrac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

19. 2n kishidan iborat jamoada erkak va ayollarning soni teng ekan. Jamoa stol atrofidagi joylarni tasodifiy ravishda egalladi. Bir xil jinsli ikki shaxs yonma-yon o‘tirmaslik ehtimolini toping.

$$Javob:\ p = 2\cdot\frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{(2n-1)}\cdot\frac{(n-1)}{(2n-2)}\frac{(n-1)}{(2n-3)}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}.$$

20. Talaba dasturdagi 50 savoldan 40 tasiga to‘g‘ri javob bera oladi. Uning imtixonda tushgan 2 savolga to‘g‘ri javob bera olish ehtimolini toping.

Javob: 0,6367

1.6. EHTIMOLLARNI QO‘SHISH TEOREMASI

Birgalikda bo‘lmagan hodisalarning ehtimollarini qo‘shish teoremasi

Teorema. Birgalikda bo‘lmagan ikki hodisadan hech bo‘lmaganda bittasining (qay biri bo‘lishidan qat’iy nazar) ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)$$

Natija. Juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasining (qay biri bo‘lishidan qat’iy nazar) ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Birgalikda bo‘lgan hodisalar ehtimolilarini qo‘shish teoremasi

O‘zaro birgalikda bo‘lgan ikkita hodisadan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli ular har birining ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolini ayirilganiga teng.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Natija. Bir nechta birgalikda bo‘lgan hodisalarning hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berish ehtimoli quyidagi formuladan **topiladi:**

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P(A_k A_j)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} P(A_k A_j A_i)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right)$$

E s l a t m a: Ehtimollarni qo'shish formulasidan foydalanganda *A* va *B* hodisalar o'zaro bog'liq* yoki o'zaro bog'liq bo'lmagan bo'lishi mumkin. O'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun ehtimollarni qo'shish formulasi quyidagicha:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B).$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Gulzorda 20 ta qizil , 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli astra ochilgan. Agar kech tushgandan so'ng bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rang bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Qizil (*A*) yoki binafsha rang (*B*) astra uzish hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalar, ya'ni $A\cdot B=\varnothing$. Izlanayotgan *p* ehtimollik qizil yoki binafsha rang astra uzish ehtimolliklarining yig'indisiga teng:

$$p=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}-0=\frac{5}{9}.$$

Javob: 5/9.

2-masala. Birinchi va ikkinchi to'pdan otilganda, nishonga tegish ehtimoli mos ravishda $p_1=0.7; p_2=0.8$ ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q otilganda hech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechish: Har bir to'pdan otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli ikkinchisining natijasiga bog'liq emas, shuning uchun *A* (1-to'pning nishonga tekkizishi) va *B* (2-to'pning nishonga tekkizishi) hodisalar o'zaro bog'liq emas. Demak, *AB* (ikkala to'p ham nishonga tekkizdi) hodisaning ehtimoli quyidagicha:

$$P(AD)\;=\;P(A)\;P(D)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

Masala shartiga ko'ra izlanayotgan ehtimollik:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}8-0{,}56=0{,}94.$$

Javob: 0,94.

3-masala. Bir shaxs n ta xat yozib, konvertlarga soldi. U nimagadir chalg'ib, konvertlarga manzillarni yozishda chalkashib ketdi. Agar xatga tasodifiy ravishda manzilgohlar yozilgan bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta konvert o'z egasiga etib borish ehtimolini toping.

Yechish: Aytaylik, A_k k-konvertda to'g'ri manzilgoh yozilgan hodisani bildirsin ($k=1, 2, \ldots, n$). U holda $p=P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$ hech bo'lmaganda bitta konvertda to'g'ri manzilgoh yozilganligining ehtimolini bildiradi. A_k hodisalar birgalikda va har qanday i, j, k,... lar uchun

$$P(A_k)=\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n!}.$$

$$P(A_k A_l)=P(A_k)\cdot P(A_l/A_k)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{(n-2)!}{n!}.$$

$$P(A_k A_j A_l)=\frac{(n-3)!}{n!}, \ldots, \quad P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right)=\frac{1}{n!}.$$

n ta hodisa yig'indisining ehtimolini topish formulasiga asosan:

$$p=C_n^1\cdot\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\cdot\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\cdot\frac{(n-3)!}{n!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

yoki $p=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}.$

n ning katta qiymatlarida $p \approx 1-e^{-1}$.

Javob: $p=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}.$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Aytaylik, brokerlik firmasiga investitsiyalar bilan qiziquvchilarning 85%i aksiyalar sotib olmaydi, 33%i esa obligatsiyalar sotib olmaydi. Shu bilan birga, ana shu qiziquvchilarning 28%i qimmatbaho qog'ozlar — aksiya va obligatsiyalar — sotib olishni to'xtatadilar. Bir shaxs firmaning ishlari bilan qiziqmoqda. Uning yoki aksiya, yoki obligatsiya, yoxud ularning ikkalasini ham sotib olish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,72.

2. Firmada ishlaydigan 550 ishchining 380 tasi oliy, 412 tasi o'rta maxsus va 357 tasi ham oliy, ham o'rta maxsus ma'lumotli. Tasodifiy ravishda tanlab olingan ishchining yoki oliy, yoxud o'rta maxsus, yoki ham oliy, ham o'rta maxsus ma'lumotli bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,791.

3. Iste'mol bozorini o'rganish uchun iste'molchilar orasida so'rov o'tkazildi. Savollardan biri iste'molchilar foydalanadigan tish pastasiga tegishli edi. Agar aholining 14%i *A* turdagi, 9%i esa *B* turdagi tish pastasidan foydalanishi ma'lum bo'lsa, tasodifiy ravishda tanlab olingan kishi (u hozirda faqat bitta pastadan foydalanadi, deb faraz qilinadi) *A* yoki *B* turdagi tish pastalaridan biridan foydalanishi ehtimolini toping.

Javob: 0,23.

4. Avvalgi masalaning shartida savol «Siz oxirgi bir oy davomida ana shu ikki turdagi pastaning qaysi biridan foydalandingiz?» shaklida qo'yilgan bo'lsin. Iste'molchi pastalarning bittadan ortiq turidan foydalanganini aytishi mumkin. Faraz qilaylik, taxminan 1% aholi bir oy davomida ikki xil tish pastasidan foydalanadi. Tasodifan tanlangan kishining bir oy davomida ikki xil pastaning hech bo'lmaganda bittasidan foydalanganligining ehtimolini toping.

Javob: 0,22.

5. Kompyuter va amaliy dasturlar paketini sotib olmoqchi bo'lgan xaridorning faqat kompyuter sotib olish ehtimoli 0,15 ga teng. Faqat amaliy dasturlar paketini sotib olish ehtimoli 0,10 ga teng. Ham kompyuter ham amaliy dasturlar paketini sotib olish ehtimoli 0,05 ga teng. Yoki kompyuter, yoki amaliy dasturlar paketi sotib olish ehtimolini toping.

Javob: 0,2.

6. Aeroportlar uchun terminallar quruvchi kompaniyaning *A* mamlakat bilan shartnoma tuzish ehtimoli 0,4 ga, *B* mamlakat bilan shartnoma tuzish ehtimoli 0,3 ga teng. Ikkala mamlakat bilan ham shartnoma tuzish ehtimoli 0,12 ga teng. Kompaniyaning bu mamlakatlarning hech bo'lmaganda bittasi bilan shartnoma tuzish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,58.

7. Ba'zi katta do'konlarda (supermarketlarda) unga kirayotgan xaridorlarning sonini aniqlash uchun yashirin «elektron ko'z» o'rnatilgan. Agar ikkita xaridor univermagga ketma-ket kirib kelsa, «elektron ko'z»ning ulardan birinchisini hisobga olish ehtimoli 0,98 ga, ikkinchisini hisobga olish ehtimoli 0,94 ga, ikkalasini ham hisobga

olish ehtimoli 0,93 ga teng. Qurilmaning ketma-ket kirib kelgan ikki xaridorning hech bo'lmaganda bittasini hisobga olish ehtimolini toping.

Javob: 0,99.

8. Avtopoygada uch avtomobil qatnashmoqda. Ulardan birinchisining yo'nalishdan chiqib ketish ehtimoli 0,15; ikkinchisiniki — 0,05; uchinchisiniki esa — 0,1 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: Poyga oxirigacha:

a) faqat bitta avtomobil;
b) ikkita avtomobil;
d) hech bo'lmaganda ikkita avtomobil.

Javob: a) 0,02525; *b)* 0,24725; *d)* 0,974.

9. 36 talik karta dastasidan tasodifiy ravishda karta olindi. Olingan kartaning "tuz" yoki "qarg'a" bo'lishi ehtimoli nimaga teng?

Javob: 1/3.

10. Mergan markaziy doira va ikkita kontsentrik halqadan iborat nishonga qarata o'q otmoqda. Doira va halqalarga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,20, 0,15 va 0,10 ga teng. Merganning nishonga tekkiza olmaslik ehtimolini toping.

Javob: 0,55

11. Aytaylik, bitta torpedaning kemani cho'ktirish ehtimoli 1/2 ga teng. Agar kemani cho'ktirish uchun torpedaning bir marta tegishi yetarli bo'lsa, 4 ta otilgan torpedaning kemani cho'ktirish ehtimolini toping.

Javob: 15/16 = 0,9375.

12. Qutida 10 ta qizil va 6 ta ko'k tugmachalar bor. Tasodifiy ravishda 2 ta tugmacha olinadi. Ular bir xil rangda bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,5.

13. Tasodifiy ravishda olingan ikki xonali sonning yoki 2 ga yoki 5ga yoki bir paytda ularning ikkalasiga ham bo'linish ehtimolini toping.

Javob: 0,6.

14. n ta odamdan iborat jamoa doira shaklidagi stol atrofiga joylashdi. Ma'lum ikkita shaxs yonma-yon o'tirib qolish ehtimolini toping.

Javob: $2/(n-1)$.

15. Tanga ketma-ket ikki marotaba bir tomoni bilan tushgunicha qadar tashlanadi. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: a) sinov oltinchi marta tashlanguncha tugaydi; b) tangani juft marta tashlash kerak bo'ladi.

Javob: a) 15/16; 2/3.

16. r radiusli ikkita bir xil tanga R radiusli doira ichiga joylashtirilgan. Ular bir-biriga tegmaydi. Doiraga tasodifan nuqta tashlanadi. Nuqtaning tangalardan birining ustiga tushish ehtimolini toping.

Javob: $2(r/R)^2$.

17. 52 talik karta dastasidan ixtiyoriy turdagi figura (figura — bu valet, malika yoki qirol)ni yoki qarg'a turini olish ehtimoli qancha?

Javob: 11/26.

18. Yashikda 10 ta 20 tiyinlik, 5 ta 15 tiyinlik va 2 ta 10 tiyinlik tangalar bor. Tasodifan oltita tanga olinadi. Ularning yig'indisi 1 so'mdan oshmaslik ehtimolini toping.

Javob:

$$p = 1 - C_{17}^{6}(C_{10}^{6} + C_{10}^{5}C_{5}^{1} + C_{10}^{5}C_{2}^{1} + C_{10}^{4}C_{5}^{2} + C_{10}^{4}C_{5}^{1}C_{2}^{1} + C_{10}^{3}C_{5}^{3}) \approx 0,4.$$

19. Ikkita yashikda faqatgina rangi bilan farq qiladigan sharlar bor. Birinchisida 5 ta oq, 11 ta qora va 8 ta qizil shar, ikkinchisida esa 10ta oq, 8ta qora va 6ta qizil shar bor. Ikkala yashikdan tasodifiy ravishda bittadan shar olinadi. Bu ikki sharning bir xil rangli bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,323

20. Garderobchi ayol shlyapalarini topshirgan 4 kishiga bir paytda jeton berdi. Shundan so'ng u shlyapalarni chalkashtirib yubordi va ularni tasodifiy ravishda ilib qo'ydi. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping:

A = {garderobchi ayol har bir kishiga o'zining shlyapasini beradi};

B = {roppa-rosa uch kishi o'z shlyapasini oladi};

C = {roppa-rosa ikki kishi o'z shlyapasini oladi};

D = {roppa-rosa bir kishi o'z shlyapasini oladi};

E = {to'rt kishidan birortasi ham o'z shlyapasini olmaydi};

Javob: $P(A) = 1/24$, $P(B) = 0$, $P(C) = 1/4$, $P(D) = 1/3$, $P(E) = 3/8$.

21. n ta tartib raqami yozilgan joy bor xonada n ta kishiga n ta tartib raqami bor chipta berildi. Agar kishilar joylarga tasodifiy ravishda o'tirayotgan bo'lsalar, roppa-rosa m ta kishining o'z chiptasidagi tartib raqamiga mos joyga o'tirish ehtimolini toping.

Javob: $p = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$, ya'ni, p tadan m ta kishining chiptadagi tartib raqamiga mos joylarga o'tirish ehtimoli:

$$C_n^m / A_n^m = \frac{1}{m!}.$$

Qolgan n-m kishining o'z joyiga o'tirmaslik ehtimoli: $\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$.

22. (To'rt yolg'onchi haqidagi masala) To'rtta a, b, v, g odamdan bittasi (a) ma'lumot oldi va uni «ha» yoki «yo'q» shaklida ikkinchisi (b)ga yetkazadi, ikkinchisi uchinchisi (d)ga, uchinchisi esa to'rtinchisi (e)ga yetkazadi. Oxirgisi esa olgan ma'lumotining natijasini xuddi avvalgilari kabi e'lon qiladi. Ularning har biri faqat uchtadan bir martagina rost so'zlaydi. Agar yolg'onchilardan to'rtinchisi rost so'zlagan bo'lsa, birinchisining rost so'zlash ehtimoli qancha?

Javob: A — «birinchisi rost so'zladi»;
B — «to'rtinchisi rost so'zladi»;

$$p=P(A/B)=\frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}.$$

Aytaylik, P_k — k-yolg'onchining to'g'ri ma'lumot berish ehtimoli bo'lsin.

$$p_1=1/3;\quad p_2=5/9;\quad p_3=13/27;\quad p_4=41/81;$$
$$P(A)=p_1;\quad P(B/A)=p_3;\quad P(B)=p_4;\quad p=13/41.$$

1.7. HECH BO'LMAGANDA BITTA HODISANING RO'Y BERISH EHTIMOLI

A_1, A_2, ..., A_n hodisalar to'plami o'zaro bog'liqsiz bo'lsin va $p(A_i)=p_i$, $q_i=1-p_i$ bo'lsin. Aytaylik, sinov natijasida bu hodisalarning yoki hech biri ro'y bermasligi; yoki ularning bir qismi, yohud hammasi ro'y berishi mumkin bo'lsin. A hodisa yuqoridagi A_1, A_2,..., A_n hodisalarning hech bo'lmaganda bittasi ro'y berishidan iborat hodisa bo'lsin. A hodisaning ehtimoli berilgan hodisalarga teskari bo'lgan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ..., $\overline{A_n}$ hodisalar ehtimollarining ko'paytmasini birdan ayrilganiga teng:

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})=1-q_1q_2\ldots q_n.$$

Xususan, agar A_1, A_2, ..., A_n hodisalar ehtimolliklari bir xil $p(A_i)=p$, $q=1$-p bo'lsa, u holda $P(A)=1-q^n$.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Dushman kemasi uch zambarakdan o'qqa tutilmoqda. Ularning nishonga tekkizish ehtimollari quyidagicha: p_1=0,8, p_2=0,7 va p_3=0,9. Agar kemani cho'ktirish uchun bitta tekkizish yetarli bo'lsa, dushman kemasini uch zambarakdan bir otishda cho'ktirish ehtimolini toping.

Yechish: A dushman kemasini cho'ktirish hodisasi, A_i $(i=1,2,3)$ bu i-zambarakning nishonga tekkizish hodisasi bo'lsin. Har bir zambarakning nishonga tekkizishi qolganlarining natijasiga bog'liq emas. Shuning uchun A_i lar o'zaro bog'liq emas. U holda A_i ga teskari bo'lgan $\bar{A}_i$, ya'ni i-zambarakning nishonga tekkiza olmasligi hodisalarining ehtimolllari mos ravishda quyidagilarga teng:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}1 \cdot$$

Izlanayotgan ehtimollik esa quyidagiga teng

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994.$$

Javob: 0,994.

2-masala. Basketbolchining bir tashlashda koptokni savatga tushirish ehtimoli p=0,4 ekanligi ma'lum. 0,9 dan kam bo'lmagan ehtimollik bilan hech bo'lmaganda bir marta savatga tushirishi uchun basketbolchi koptokni necha marta tashlashi kerak?

Yechish: A — «basketbolchi koptokni p marta tashlaganda hech bo'lmaganda bir marta savatga tushirdi» hodisasini bildirsin. Savatga birinchi, ikkinchi, uchinchi va h.k. tashlashlarda tushirish hodisalari o'zaro bog'liq emas, shuning uchun

$$P(A) = 1 - q^n \cdot$$

Masalaning shartiga ko'ra: $P(A)$=0,9, p=0,4 (demak, $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$). $P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}6^n \geq 0{,}9$ yoki $0{,}6^n \leq 0{,}1$.

10 asosga ko'ra logarifmlasak, $n \cdot lg 0{,}6 \leq lg 0{,}1$. $lg 0{,}6 < 0$, shuning uchun $n \geq lg 0{,}1 / lg 0{,}6 = -1/(-0{,}2218) = 4{,}5$.

Shunday qilib, $n \geq 5$, ya'ni basketbolchi savatga koptokni kamida 5 marta tashlashi kerak ekan.

Javob: $n \geq 5$.

3-masala. Uchta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinov o'tkazilganda hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimoli 0,936. Agar har uch tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lsa, uning bitta tajribada ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish: Qaralayotgan hodisalar o'zaro bog'liq emas, shuning uchun $P(A) = 1 - q^n$.

Shartga ko‘ra $P(A) = 0,936$; $n=3$.

Demak, $0,936=1-q^3$ yoki $q^3=1-0,936=0,064$. Bundan $q=\sqrt[3]{0,064}=0,4$.

Izlanayotgan ehtimollik $p=1-q=0,6$.

Javob: 0,6.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Shahar avtotransporti muammolarini o‘rganish va tahlil qilish niyatida ishga jamoat transportida qatnaydiganlar orasida so‘rov o‘tkazilmoqchi. Tadqiqot olib borilayotgan joyda 75% aholi ishga jamoat transportida qatnaydi. Agar uch kishi so‘rovga rozi bo‘lgan bo‘lsa, ulardan hech bo‘lmaganda bittasining ishga jamoat transportida qatnash ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,9844.

2. Firmaning marketing bo‘limi ma’lum turdagi mahsulotlar to‘g‘risida iste’molchilarning fikrini bilish maqsadida so‘rov o‘tkazmoqda. Tadqiqot olib borilayotgan joyda 1% aholi firmani qiziqtirgan mahsulotlarni iste’mol qiladi va ularga asoslangan baho bera oladi. Firma tadqiqot hududidagi aholi orasidan tasodifiy ravishda 10 nafarini tanlab oladi. Ular ichida hech bo‘lmaganda bittasi mahsulotni asosli baholay olish ehtimoli qancha?

Javob: 0,6513.

3. Bahorgi mavsumga kiyimlarning yangi kolleksiyasini tayyorlayotgan modeler yashil, qora va qizil ranglar jilosini tanlagan. Uning fikricha, bahorda yashil ranglarning modada bo‘lish ehtimoli 0,3 ga, qora ranglarniki 0,2 ga va qizil ranglarniki 0,15 ga teng. Ranglar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda tanlanadi, deb faraz qilgan holda kolleksiyadagi ranglarning hech bo‘lmaganda bittasi to‘g‘ri tanlanganligining ehtimolini toping.

Javob: 0,524

4. Shakar zavodidagi sexlardan biri qand ishlab chiqaradi. Sifat nazorati har 100 qanddan biri singanini ta’kidladi. Agar siz tasodifiy ravishda 2 ta qandni olsangiz, ularning hech bo‘lmaganda bittasi siniq bo‘lishi ehtimoli qancha?

Javob: 0,0199.

5. Ko‘chadagi sotuvchi yo‘lovchilarga rasmli kitoblarni taklif qilmoqda. O‘z tajribasidan kelib chiqqan holda, u o‘rtacha 65 xaridordan bittasi kitob sotib olishini biladi. Ma’lum vaqt oralig‘ida u 20 ta yo‘lovchiga kitob taklif qildi. Sotuvchining ularga hech bo‘lmaganda bitta kitob sotish ehtimolini toping.

Javob: 0,267.

6. Uyali telefonlar orqali qo‘ng‘iroq qilinganda har ikki yuzdan bitta qo‘ng‘iroq noto‘g‘ri ulanar ekan. Uyali telefonlar orqali 5 marotaba qo‘ng‘iroq qilinganda hech bo‘lmaganda bir marotaba noto‘g‘ri ulanish ehtimolini toping.

Javob: 0,0248.

7. Ikkita ovchi bo‘riga qarab bir martadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchi uchun tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisi uchun 0,8 ga teng. Bo‘riga o‘q tegkanlik ehtimoli qancha? (Hech bo‘lmaganda bir marotaba) Agar ovchilar ikki martadan o‘q uzsalar natija qanday o‘zgaradi?

Javob: 0,94; 0,9964.

8. Strategik ahamiyatga ega qo‘prikning buzilishi uchun unga bitta bomba tushishi kifoya. Agar ko‘prikka unga tegish ehtimoli mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo‘lgan to‘rtta bomba tashlangan bo‘lsa, ko‘prikning buzilish ehtimolini toping.

Javob: $p \approx 0,95$.

9. Uch olim bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda ma’lum bir fizik kattalikni tekshirib, o‘lchov natijalarini yozib bormoqdalar. Birinchi olimning o‘lchov natijasini yozib olishda xatoga yo‘l qo‘yish ehtimoli 0,1 ga, ikkinchisi uchun 0,15 ga, uchinchisi uchun esa 0,2 ga teng. Bir martadan o‘lchanganda hech bo‘lmaganda bitta olimning xatoga yo‘l qo‘yish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,388$.

10. Shoshqol toshi (o‘yin kubigi) tashlanganda hech bo‘lmaganda bir marta 6 ochko tushish ehtimoli 0,9 dan kichik bo‘lmasligi uchun shoshqol tosh necha marta tashlanishi kerak?

Javob: $n > 13$.

11. Bir marta o‘q uzishda merganning nishon markaziga tekkizish ehtimoli 0,6 ga teng. Kamida 0,8 ehtimollik bilan hech bo‘lmaganda bir marta nishon markaziga tekkizish uchun necha marta o‘q uzish kerak?

Javob: $n \geq 2$

12. To‘rt marta o‘q uzishda hech bo‘lmaganda bir marta nishonga tekkizish ehtimoli 0,9984 ga teng. Bir marta o‘q uzganda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,8$.

1.8. TO‘LA EHTIMOLLIK FORMULASI

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ hodisalar to‘la guruhni tashkil etsin, ya’ni sinov natijasida ularning faqat bittasi ro‘y berishi mumkin va ular birgalikda emas: $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$ va $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, n$.

A hodisa ana shu hodisalardan bittasi ro'y bergandagina ro'y berishi mumkin bo'lsin. H_1, H_2, ..., H_n hodisalarning qaysi biri ro'y berishi oldindan ma'lum bo'lmagani uchun ular **gipotezalar** deb ataladi. A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagi **to'la ehtimollik** deb nomlanuvchi **formuladan** topiladi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i) .$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Iqtisodchi kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lsa, ma'lum bir kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimoli 0,75 ga, iqtisodiyot ko'rsatkichlari past bo'lsa, aksiyalar narxining oshish ehtimoli 0,30 ga teng ekan. Shu bilan birga, uning fikricha, kelasi yil mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'lish ehtimoli 0,80 ga teng ekan. Iqtisodchining tahlili to'g'ri bo'lsa, kelasi yilda kompaniya aksiyalari narxining oshish ehtimolini toping?

Yechish: A hodisa — «kelasi yilda kompaniya aksiyalarining narxi oshadi». Gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz:

H_1 — «kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari yuqori bo'ladi»; H_2 — «kelasi yilda mamlakat iqtisodiyoti ko'rsatkichlari past bo'ladi». Masalaning shartiga ko'ra $P(H_1)$ va $P(H_2)$ ehtimolliklar $P(H_1)=0{,}80$ va $P(H_2)=1-P(H_1)=1-0{,}80=0{,}20$ ga teng. Iqtisodchining tahliliga ko'ra $P(A/H_1)=0{,}75$ va $P(A/H_2)=0{,}30$. To'la ehtimollik formulasidan

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}80 \cdot 0{,}75 + 0{,}20 \cdot 0{,}30 = 0{,}66$$

ekanligi kelib chiqadi.

Javob: 0,66.

2-masala: Domla imtihonga 50 ta masala tuzib kelgan bo'lib, ularning 30 tasi ehtimollar nazariyasi, 20 tasi matematik statistika kursidandir. Imtihonni topshirish uchun talaba tasodifiy ravishda birinchi tushgan masalani yechishi kerak. Agar talaba ehtimollar nazariyasi kursidan 15 ta, matematik statistika kursidan 18 ta masala yechishni bilsa, uning imtihon topshirish ehtimoli qanchaligini aniqlang.

Yechish: Tasodifan tanlangan masalaning ehtimollar nazariyasi kursidan bo'lishi (H_1 hodisa) ehtimoli $P(H_1)=30/50=0,6$ ga, matematik statistika kursidan bo'lishi (H_2 hodisa) ehtimoli esa $P(H_2)=20/50=0,4$ ga teng. Agar A «masala talaba tomonidan yechildi» hodisasi bo'lsa, u holda

$$P(A/H_1)=15/30=0,5 \quad va \quad P(A/H_2)=18/20=0,9.$$

To'la ehtimollik formulasiga asosan

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0,6\cdot 0,5+0,4\cdot 0,9=0,3+0,36=0,66.$$

Javob: 0,66.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Iqtisodiy o'sish davrida mijozning bankdan olgan zayomini qaytarmaslik ehtimoli 0,04 ga, iqtisodiy tanglik davrida esa 0,13 ga teng. Faraz qilaylik, iqtisodiy o'sish davri boshlanish ehtimoli 0,65 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan mijozning qarzini qaytarmaslik ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,0715.

2. Ikkita firma aksionerlik kapitallarining birlashtirish jarayonida aksiyalarning kontrol paketini olayotgan firma analitiklarining fikricha, qo'shib olinayotgan firma direktorlar kengashining raisi iste'foga chiqsa, bu birlashtirishning foyda keltirish ehtimoli 0,65 ga teng. Aks holda bu ehtimol 0,3 ga teng ekan. Raisning iste'foga chiqish ehtimoli 0,7 ga teng bo'lsa, birlashtirishning foyda keltirish ehtimolini toping.

Javob: 0,545.

3. Ko'chmas mulk agenti qurilishga mo'ljallangan yer maydonini sotmoqchi. Uning fikricha, agar regionda iqtisodiy vaziyat yomonlashmasa, bu yerning yaqin 6 oy ichida sotilish ehtimoli 0,99 ga teng. Agar iqtisodiy vaziyat yomonlashsa, bu ehtimollik 0,5 gacha kamayadi. Iqtisodchining fikricha keyingi 6 oy ichida iqtisodiy vaziyatning yomonlashish ehtimoli 0,7 ga teng. Yer maydonining yaqin 6 oy ichida sotilish ehtimolini toping.

Javob: 0,62.

4. Eksport-import firmasi ma'lum bir rivojlanayotgan davlat bilan qishloq xo'jalik uskunalarini yetkazib berish to'g'risida shartnoma tuzmoqchi. Agar raqobatchi firma ham ana shunday shartnoma tuzishga harakat qilmasa, birinchi firmaning shartnomaga erishish ehtimoli 0,4 ga, aks holda 0,25 ga teng. Ekspertlarning fikricha, raqobatchi firmaning shartnoma tuzishga harakat qilish ehtimoli 0,4 ga teng. Birinchi firmaning shartnomaga erishish ehtimolini toping.

Javob: 0,37.

5. Turizm agentligi yoz mavsumida O'rta yer dengizi bo'ylab sayohatlar uyushtiradi va mavsum davomida bir nechta sayohat tashkil etadi. Biznesning bu turida raqobat juda kuchli, shu sababli kompaniya foyda olishi uchun sayohatga ajratilgan kemaning hamma kayutalari turistlar bilan band bo'lishi kerak. Kompaniya yollagan turizm bo'yicha ekspertning bashorat qilishicha, agar dollar so'mga nisbatan oshmasa, hamma kayutalarning band bo'lish ehtimoli 0,92 ga, aks holda esa 0,75 ga teng. Agar dollarning so'mga nisbatan oshish ehtimoli 0,23 bo'lsa, barcha sayohat chiptalarning sotilish ehtimolini toping.

Javob: 0,8809.

6. Kompaniya siyosiy vaziyat beqaror bo'lgan davlatga investitsiya kiritish masalasini ko'rib chiqmoqda. Kompaniya menejerlarining fikricha, bo'lajak investitsiyaning muvaffaqiyati (subsidiyadan birinchi yili olingan yillik daromad hisobida) ko'p jihatdan ana shu davlatdagi siyosiy vaziyatga bog'liq. Xususan, agar siyosiy vaziyat yaxshi bo'lsa, investitsiyaning muvaffaqiyatli bo'lish ehtimoli 0,55 ga; neytral bo'lsa, 0,30 ga va yomon bo'lsa, 0,10 ga teng. Bu siyosiy vaziyatlarning ehtimolliklari esa mos ravishda 0,6, 0,2 va 0,2 ga teng. Investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lish ehtimoli qancha?

Javob: 0,41.

7. Korporatsiya bozorga chiqarilayotgan yangi mahsulotni muhokama qilmoqda. Korporatsiyaning ish yurituvchi direktori yangi tovar boshqa firmalarning shu kabi tovarlaridan o'zining barcha ko'rsatkichlari bo'yicha ustun bo'lishini istaydi. Direktor ekspertlarning xulosalariga tayangan holda o'z tovarining unga o'xshash tovarlar bilan raqobatbardoshligi ehtimolini 0,5, bir xillari bilan 0,3 va boshqalardan yomon bo'lish ehtimolini esa 0,2 deb hisoblaydi. Bozorni o'rganish uchun so'rov natijalari shuni ko'rsatdiki, agar tovar haqiqatan raqobatbardosh bo'lsa, xuddi shu natijani bashorat qilish ehtimoli 0,7 ga teng. Agar tovar boshqa shunga o'xshash tovarlar kabi bo'lsa, so'rov uni yaxshiroq degan natija berish ehtimoli 0,4 ga teng. Agar tovarning sifati pastroq bo'lib, so'rov uning sifatini yuqoriroq qilib ko'rsatish ehtimoli esa 0,2 ga teng. So'rov natijalarini hisobga olgan holda tovarning haqiqatan ham raqobatbardoshligi ehtimolini toping.

Javob: 0,6863.

8. Agar raqobatchi firma xuddi shunday tovar ishlab chiqarmasa, bozorda yangi tovarga talab yuqori bo'lish ehtimoli 0,67 ga teng. Agar bozorda raqobatdosh tovar bo'lsa, bu ehtimollik 0,42 ga teng. Kuzatilayotgan vaqt davomida raqobatchi firmaning raqobatdosh tovar ishlab chiqarish ehtimoli 0,35 ga teng bo'lsa, tovarning haridorgir bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,5825.

9. Ikkita bir xil quti bo‘lib, ularning birinchisida 2 ta oq va 1 ta qora shar bor, ikkinchisida esa 1 ta oq va 4 ta qora shar bor. Tasodifiy ravishda bitta quti tanlanadi va undan shar olinadi. Olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 13/30.

10. Ikki xil detallar to‘plami bor. Birinchi to‘plamdagi detallarning standart bo‘lish ehtimoli 0,8, ikkinchisiniki esa 0,9 ga teng. Tasodifiy tanlangan to‘plamdan tasodifiy ravishda olingan detalning standart bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 0,85.

11. Qutida 1-zavodda ishlab chiqarilgan 12 ta, 2-zavodda ishlab chiqarilgan 20 ta, 3-zavodda ishlab chiqarilgan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning sifatli bo‘lish ehtimoli 0,9 ga, 2- va 3-zavodlar uchun bu ehtimollik esa mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tasodifiy ravishda olingan detalning sifatli bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 0,78.

12. Dominoning to‘la to‘plamidan ikkitasi tanlab olindi. Ularning ikkinchisini birinchisining yoniga qo‘yish mumkin bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{18}$.

13. Imtihonga tayyorlangan 15 ta biletda ikkitadan savol bor. Savollar takrorlanmaydi. Talaba faqat 25 ta savolga tayyorlangan. Agar imtihondan o‘tish uchun o‘zining biletidagi ikkita savolga yoki bo‘lmasa o‘z biletining bitta savoliga va bitta qo‘shimcha savolga javob berish yetarli. Talabaning imtihon topshirish ehtimolini toping.

Javob: $\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\left(\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\right)\cdot\frac{24}{28}=\frac{190}{203}$.

14. Uchta idishning har birida 6 ta qora va 4 ta oq shar bor. Birinchi idishdan tasodifiy ravishda bitta shar olinib, ikkinchisiga solingan, so‘ngra ikkinchisidan tasodifiy ravishda bitta shar olinib, uchinchisiga solingan. Uchinchi idishdan tasodifiy ravishda olingan sharning oq bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: 0,4.

15. Yashikda 15 ta tennis koptogi bo‘lib, ularning 9 tasi yangi. Birinchi o‘yin uchun uchta tennis koptogi tasodifiy ravishda olinadi va o‘yindan so‘ng yana yashikka qaytarib solinadi. Xuddi shunday ikkinchi o‘yin uchun ham uchta koptok olinadi. Ikkinchi o‘yin uchun olingan hamma koptoklarning yangi bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: N_k={1-o'yin uchun k ta yangi koptok olingan k=0,1,2,3}, p=0,089.

16. Yo'qolgan samolyotni qidirish uchun 10 ta vertolyot ajratilgan. Ularning har biri samolyot 0,8 va 0,2 ehtimollik bilan bo'lishi mumkin bo'lgan ikki hududning birida qidirishi mumkin. Agar har bir vertolyot uchun samolyot yo'qolgan rayon samolyotni topish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lib, ular bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda qidiradilar. Samolyotni topish ehtimoli eng katta bo'lishi uchun vertolyotlarni qidiruv olib borilayotgan hududlar bo'yicha qanday taqsimlash kerak bo'ladi? Qidiruv optimal tashkil etilganida samolyotni topish ehtimoli nimaga teng?

Javob: 1-rayonga 8 vertolyot. $P \approx 0,74$

1.9. TAJRIBADAN SO'NG GIPOTEZA EHTIMOLINI HISOBLASH. BAYES FORMULASI

Ba'zan A hodisa ro'y bergani ma'lum bo'lganidan so'ng H_k $(k=1,2,...,n)$ gipoteza (taxmin)larning $P(H_k/A)$ shartli ehtimolligini hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bu ehtimolliklar quyidagi **Bayes formulasidan** aniqlanadi:

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)},\quad k=1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Bu yerda

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

bo'lib, H_k $(k=1,2,...,n)$ gipotezalar to'la guruhni tashkil etadi.

$P(H_k)$ $(k=1,2,...,n)$ – ehtimolliklar **aprior (sinovdan oldingi)**, $P(H_k/A)$ $(k=1,2,\ ...,\ n)$ – **aposterior (sinovdan keyingi)** ehtimolliklar deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Iqtisodchining fikriga qaraganda, yuqori iqtisodiy o'sish davrida Amerika dollari kursining o'sish ehtimoli 0,7, o'rtacha o'sish davrida 0,4, past ko'rsatkichli o'sish davrida esa 0,2 ga teng ekan. Iqtisodiy o'sish davri ko'rsatkichlari yuqori, o'rtacha va past bo'lishi ehtimolliklari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,2 ga teng. Aytaylik, hozir dollarning narxi o'smoqda. U holda hozirgi davr yuqori ko'rsatkichli iqtisodiy o'sish davri bo'lishi ehtimoli qancha?

Yechish: A-«dollarning narxi oshmoqda» hodisasi bo'lsin. Gipoteza (taxmin)larni esa quyidagicha aniqlaymiz:

H_1 –«yuqori ko'rsatkichli iqtisodiy o'sish»;

H_2–«o'rtacha ko'rsatkichli iqtisodiy o'sish»;

H_3–«past ko'rsatkichli iqtisodiy o'sish».

Masala shartiga ko'ra: $P(H_1)=0,3$, $P(H_2)=0,5$, $P(H_3)=0,2$.

Shuningdek, ma'lumki, $P(A/H_1)=0,7$, $P(A/H_2)=0,5$, $P(A/H_3)=0,2$.

Demak, Bayes formulasiga asosan

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{0,3\cdot 0,7}{0,3\cdot 0,7+0,5\cdot 0,4+0,2\cdot 0,2}=0,467.$$

Javob: 0,467.

2-masala. Telegraf xabari «nuqta» va «chiziq» signallaridan tashkil topgan. Signallarning statistik xossalari shundayki, «nuqta» signallarining o'rtacha 2/5 qismi, «chiziq» signallarining o'rtacha 1/3 qismi buzilgan holda qabul qilinar ekan. Jo'natilayotgan signallar ichida «nuqta» va «chiziq» signallari 5:3 nisbatda uchraydi. Agar

a) «nuqta» signali; b) «chiziq» signali qabul qilingan bo'lsa, aynan jo'natilgan signal qabul qilinganligi ehtimoli toping.

Yechish: Aytaylik, A – «nuqta» signali qabul qilindi, B – ««chiziq» signali qabul qilindi» hodisalari bo'lsin. Ikki xil taxmin qilish mumkin:

N_1 – «nuqta» signali yuborilgan; N_2 – «chiziq» signali yuborilgan.

Shartga ko'ra, $P(H_1):P(H_2)=5:3$.

Undan tashqari $P(H_1)+P(H_2)=1$.

Shuning uchun $P(H_1)=5/8$, $P(H_2)=3/8$. Ma'lumki,

$$P(A/H_1)=3/5,\quad P(A/H_2)=1/3,$$

$$P(B/H_1)=2/5,\quad P(B/H_2)=2/3.$$

A va B hodisalarning ehtimolliklarini to'la ehtimollik formulasidan topamiz:

$$P(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}, \qquad P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

U holda izlanayotgan ehtimolliklar Bayes formulasiga asosan

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{1/2}=\frac{3}{4},$$

$$P(H_2/B)=\frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

ga teng bo'ladi.

Javob: $P(H_1/A)=\frac{3}{4}, \quad P(H_2/e)=\frac{1}{2}.$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Iqtisodchi-analitik mamlakatdagi iqtisodiy ahvolni shartli ravishda «yaxshi», «o'rtacha», «yomon» hollarga bo'ladi va ayni paytda ularning ehtimolliklarini mos ravishda 0,15, 0,70, 0,15 deb baholaydi. Ma'lum bir iqtisodiy indeks mamlakatdagi iqtisodiy ahvol «yaxshi» bo'lganida 0,6 ehtimollik bilan, «o'rtacha» bo'lganida 0,3 ehtimollik bilan va «yomon» bo'lganida 0,1 ehtimollik bilan o'sadi. Aytaylik, ayni paytda ana shu indeks o'zgardi. Mamlakat iqtisodiyoti yaxshi ahvolda, ya'ni ko'tarilishda ekanligining ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,2857.

2. Virusli kasallikni aniqlashda maxsus meditsina testi quyidagi natijalarni beradi: 1) agar tekshiriluvchi kasal bo'lsa, test 0,92 ehtimollik bilan ijobiy natija beradi; 2) agar tekshiriluvchi kasal bo'lmasa, test 0,04 ehtimollik bilan ijobiy natija berishi mumkin.

Bu kasallik kam uchraydigan bo'lib, unga aholining 0,1%i chalingan. Aytaylik, tasodifan tanlab olingan odam testdan o'tkazilganida ijobiy natija olindi, ya'ni u kasallangan bo'lib chiqdi. Bu odamning haqiqatan ham kasal bo'lish ehtimoli qanchaga teng?

Javob: 0,0225.

3. Neft quviri qurish mo'ljallangan joyda neft bor bo'lishi ehtimolini aniqlash maqsadida qidiruv ekspeditsiyasi tadqiqot olib bormoqda. Avvalgi tajribalarga asoslanib, ular tekshirilayotgan hududda neft bo'lish ehtimolligini 0,4 bilan baholamoqdalar. Qidiruvning so'nggi bosqichida seysmik test o'tkaziladi. Agar neft haqiqatan mavjud bo'lsa, test 0,85 ehtimollik bilan uni bor deb, agar neft yo'q bo'lsa, 0,1 ehtimollik bilan uni bor deb ko'rsatishi mumkin. Seysmik test neft borligini ko'rsatdi. Ana shu hududda haqiqatan ham neft bor bo'lish ehtimoli qancha?

Javob: 0,85.

4. Kimyo zavodida avariyalarning oldini olish maqsadida maxsus ogohlantiruv («signalizatsiya») sistemasi o'rnatilgan. Avariya holati yuzaga kelganida u 0,95 ehtimollik bilan ogohlantiruvchi signal yuboradi. 0,02 ehtimollik bilan esa avariya holati bo'lmaganida ham ogohlantiruv sistemasi ishlab ketishi mumkin. Avariya holati ehtimoli 0,004 ga teng. Aytaylik, ogohlantiruv sistemasi ishlab ketdi. Haqiqatan ham avariya holati yuzaga kelgani ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,1602.

5. Bozorni o'rganish uchun o'tkaziladigan tanlanma test ma'lum ishonchlilik darajasiga ega. Biror bir tovar uchun, agar u haqiqatan ham xaridorgir bo'lsa, testdan o'tish ehtimoli 0,75, xaridorgir bo'lmasa ham testdan o'tish ehtimoli 0,15. Tajribadan yangi tovarning bozorda muvaffaqiyatga erishishi 0,6 ga teng. Agar yangi tovar tanlanma testdan o'tgan va uning natijalari tovarning xaridorgir bo'lishini ko'rsatgan bo'lsa, bu qanchalik haqiqatga yaqin?

Javob: 0,88.

6. Firma direktorida ishga qabul qilinishga da'vogarlarning ikkita ro'yxati bor. Birinchi ro'yxatda 5 ayol va 2 erkak, ikkinchisida esa 2 ayol va 6 erkak ko'rsatilgan. Da'vogarlardan birining familiyasi tasodifiy ravishda birinchi ro'yxatdan ikkinchisiga ko'chirib yoziladi va ikkinchi ro'yxatdan bir kishining familiyasi tasodifan tan-

lab olinadi. Agar bu erkak kishining familiyasi deb faraz qilinsa, birinchi ro'yxatdan ayol kishining familiyasi tanlangani ehtimolini toping.

Javob: 0,6818.

7. Ruhshunoslarning tadqiqotiga qaraganda hayotda uchraydigan ba'zi vaziyatlar erkaklar va ayollarga turlicha ta'sir qilar ekan. Bunday vaziyatlarga 70% ayollar ijobiy munosabatda bo'lsalar, 40% erkaklar salbiy munosabatda bo'lar ekanlar. 15 ta ayol va 5 ta erkak ana shu vaziyatga munosabatlarini bildirib so'rovnoma to'ldirdilar. Tasodifan olingan so'rovnomada salbiy munosabat bildirilgan. Uni erkak kishi to'ldirganligi ehtimolini toping.

Javob: 0,3076.

8. Aeroport yo'nalishlarining 60%i mahalliy, 30%i MDH davlatlari va 10%i chet el yo'nalishlarida. Mahalliy yo'nalishdagi yo'lovchilarning 50%i, MDH yo'nalishidagilarning 60% va xalqaro yo'nalishdagilarning 90%i tadbirkorlik ishlari bilan sayohat qiladi. Aeroportga kelgan yo'lovchilardan bittasi tasodifiy ravishda tanlab olinadi. Quyidagi ehtimolliklarni hisoblang. U yo'lovchi

a) tadbirkor;
b) MDH dan tadbirkorlik ishlari bilan kelgan;
d) mahalliy yo'nalishda tadbirkorlik ishlari bilan kelgan;
e) xalqaro yo'nalishda kelgan tadbirkor.

Javob: a) 0,57; *b)* 0,5263; *d)* 0,3158; *e)* 0,1578.

9. Barcha erkaklarning 25%i va barcha ayollarning 5%i daltonizm (ba'zi bir ranglarni ajrata olmaslik) kasalligiga chalingan ekan. Tasodifiy ravishda tanlangan odam daltonik bo'lsa, uning ayol ekanligining ehtimolini toping. (Erkaklar va ayollar soni teng deb hisoblansin.)

Javob: 20/21 $\approx$ 0,9524

10. Ikki mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda bitta nishonga qarab bir martadan o'q otishdi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchisi uchun 0,8, ikkinchisi uchun esa 0,4 ga teng. O'q uzishlardan so'ng nishonga bitta o'q tekkani aniqlangan bo'lsa, uni birinchi mergan tekkizganligining ehtimolligini toping.

Javob: 6/7.

11. Boltlar ishlab chiqaradigan zavodda birinchi uskuna 25%, ikkinchisi 35%, uchinchisi esa 40% mahsulotni ishlab chiqaradi. Bu uskunalarda ishlab chiqarilgan boltlarning sifatsiz ekanligining ehtimollari mos ravishda 5%, 4% va 2% ni tashkil etadi. a) Tasodifiy ravishda tanlangan boltning sifatsiz bo'lish ehtimoli qancha? b) Agar tasodifan tanlangan bolt sifatsiz bo'lsa, uning 1-, 2- va 3-uskunada ishlab chiqarilganligi ehtimollarini toping.

Javob: a) 0,0345; *b)* 125/345, 140/345, 80/345.

12. 18 ta mergandan 5 tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga, 7 tasiniki 0,7 ga, 4 tasiniki 0,6 ga va 2 tasiniki 0,5 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlangan mergan nishonga tekkiza olmadi. Uning qaysi guruhga tegishli bo'lish ehtimoli kattaroq?

Javob: 2-*guruhga.*

13. Maxsus kasalxonaga o'rta hisobda 50% bemorlar K kasallik bilan, 30% bemorlar L kasallik bilan va 20% bemorlar M kasallik bilan murojaat qiladi. K kasallikdan tamomila tuzalish ehtimoli 0.7, L kasallik uchun bu ehtimollik 0.8 va M uchun 0.9 ga teng. Kasalxonaga tushgan bemor tamomila tuzalib chiqib ketdi. Uning K kasallik bilan kasallanganlik ehtimolini toping.

Javob: 5/11.

14. Ishlab chiqarilgan mahsulotning 96%i standart talablariga javob beradi. Soddalashtirilgan sifat nazorati standart mahsulotni 0,98 ehtimollik bilan va nostandartini 0,05 ehtimollik bilan sifatli deb qabul qiladi. Soddalashtirilgan sifat nazoratidan sifatli deb qabul qilingan mahsulotning standart talablariga javob berish ehtimolini toping.

Javob: 0,998.

15. Egizaklarning birinchisi o'g'il tug'ildi. Agar egizaklar orasila ikkita o'g'il va ikkita qiz tug'ilish ehtimolligi mos ravishda a va b bo'lib, turli jinsli egizaklar uchun birinchi bo'lib tug'ilish ehtimoli har ikkalasi uchun bir xil bo'lsa, ikkinchi egizakning ham o'g'il bo'lish ehtimolini toping.

Javob: A_i —«i-egizak o'g'il» hodisalari.
Taxminlar: $N1$ — «ikkalasi o'g'il», $N2$ — *«o'g'il va qiz».*
$P(A_1)= a+o'1-(a+b)g'/2$; $P(A_2/A_1)=2a/(1+a-b)$.

16. Idishda n ta shar bo'lib, ularning har biri bir xil ehtimollik bilan oq yoki qora bo'lishi mumkin. Ketma-ket k ta shar olindi, rangi eslab qolindi va joyiga qaytarildi. Agar qora sharlar olinmagan bo'lsa, idishdagi sharlarning faqat oq rangli bo'lish ehtimolligi qancha?

Javob: $p = n^k /(1 + 2^k + \cdots + n^k)$

1.10. O'ZARO BOG'LIQ BO'LMAGAN TAKRORIY TAJRIBALAR. BERNULLI SXEMASI. BERNULLI, PUASSON FORMULALARI

Aytaylik, biror A hodisaning ketma-ket o'tkazilayotgan bog'liqsiz tajribalar (sinovlar) ning har birida ro'y berishi ham bermasligi ham mumkin bo'lsin. Har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng va bu ehtimollik tajriba nomeriga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas soni. Tabiiyki, har bir tajriba uchun A hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ ga teng bo'ladi. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi tajribalar ketma-ketligiga ***Bernulli sxemasi*** deyiladi. Bernulli sxemasi ikkita parametr: n tajribalar soni va p — har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli bilan aniqlanadi. Bernulli sxemasida, ya'ni n ta o'zaro bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligida A hodisaning m $(m \leq n)$ marta ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$ quyidagi **Bernulli formulasi** orqali ifodalanadi:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

bunda $p=1-q$.

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning ro'y berishlar soni m_1 va $m_2 (m_1 < m_2)$ sonlari orasida bo'lish ehtimoli quyidagi formulalardan topiladi:

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1 \leq k \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$$

n ta tajriba o'kazilganida hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimoli quyidagicha:

$$P_n(0; m) = \sum_{k=0}^{m} P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(0; m) = 1 - \sum_{k=m+1}^{n} P_n(k).$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning kamida m marta ro'y berish ehtimoli quyidagicha:

$$P_n(m; n) = \sum_{k=m}^{n} P_n(k) \quad \text{yoki} \quad P_n(m; n) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k).$$

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimoli quyidagi formuladan topiladi:

$$P_n(1;n) = 1 - q^n.$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Bernulli sxemasida A hodisaning n tajribaning m tasida ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$ va hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimoli $P_n(0;m)$larni maxsus **BINOMRASP(SON_S;TAJRIBALAR; S_EHTIMOLLIK; INTEGRAL)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda SON_S ro'y berishlar soni (ya'ni m); TAJRIBALAR– barcha tajribalar soni (ya'ni n); S_EHTIMOLLIK – har bir tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimoli (ya'ni p); INTEGRAL – ushbu parametrga ROST (ISTINA-TRUE) qiymat berilsa $P_n(m)$ ehtimollik hisoblanadi; parametrga YOLG'ON (LOJ-FALSE) qiymat berilsa $P_n(0;m)$ ehtimollik hisoblanadi;

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning hech bo'lmaganda bir marta ro'y berish ehtimolini hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat quyidagicha:

1 – **BINOMRASP(*n*;0;*p*;ROST)**

n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning ro'y berishlar soni m_1 va m_2 orasida bo'lish ehtimoli $P_n(m_1;m_2)$ni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat quyidagicha:

BINOMRASP(n;m_2;p;ROST)-BINOMRASP(n;m_1;p;ROST)

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar SON_S;TAJRIBALAR; S_EHTIMOLLIK – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

P dan kichik bo'lmagan ehtimollik bilan hodisa hech bo'lmaganda bir marta ro'y berishi uchun o'tkazish kerak bo'lgan tajribalar soni n:

$$n \geq \frac{ln(1-P)}{ln(1-p)}$$

tengsizlikdan aniqlanadi (ya'ni $P_n(1;n) = 1 - q^n \geq P$ yoki $(1-p)^n \leq 1-P$, tengsizlikni logarifmlasak: $nln(1-p) \leq ln(1-P)$ bo'ladi). Ilovaning №10 jadvalida $y = ln(x)$ funksiyaning qiymatlari keltirilgan.

Bernulli sxemasida hodisaning ro'y berishlar soni m **ning eng ehtimolliroq qiymati** μ quyidagicha hisoblanadi:

1. Agar $(n+1)p$ ko'paytmaning qiymati kasr bo'lsa, m kasrning butun qismiga teng: $\mu = [(n+1)p]$.

2. Agar $(n+1)p$ ko'paytmaning qiymati butun bo'lsa, ro'y berishlar soni m ning eng ehtimolliroq qiymati ikkita bo'ladi:

$$\mu_1 = (n+1)p - 1 \quad \text{ва} \quad \mu_2 = (n+1)p\cdot$$

Puasson formulasi

Bernulli sxemasida n ning qiymati yetarlicha katta, r ning qiymati esa kichkina bo'lgan hollarda (odatda r<0,1; $npq \leq 9$) hodisaning t marta ro'y berish ehtimoli R_n(m)ni hisoblashda Bernulli formulasi o'rniga **Puasson formulasi**dan foydalaniladi:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np\cdot$$

Puasson formulasiga asosan n ta tajriba o'tkazilganida hodisaning ro'y berishlar soni m_1 va $m_2\,(m_1 < m_2)$ orasida bo'lish ehtimoli quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(m_1; m_2) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$P(m,\lambda) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ funksiyasining qiymatlari jadvallashtirilgan va Ilovadagi 2-jadvalda keltirilgan.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Bernulli sxemasida A hodisaning n tajribaning m tasida ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$ va hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimoli $P_n(0;m)$ larni Puasson formulasi bo'yicha maxsus

PUASSON(X;O'RTACHASI;INTEGRAL)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X – ro'y berishlar soni (ya'ni m); O'RTACHASI – har bir tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimoli p va umumiy tajribalar soni n ning ko'paytmasi (ya'ni $\lambda = n\cdot p$); INTEGRAL – parametr ROST (ISTINA-TRUE) qiymat qabul qilsa $P_n(m)$ ehtimollik hisoblanadi; parametr YOLG'ON (LOJ-FALSE) qiymat qabul qilsa $P_n(0;\, m)$ ehtimollik hisoblanadi;

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar X;O'RTACHASI – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Ma'lum bir korxona mahsulotlarining 5%i sifatsiz. Tasodifan olingan 5 ta mahsulot ichida ikkitasining sifatsiz bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Tasodifan olingan mahsulotning sifatsiz bo'lish ehtimolligi $p = 0{,}05$. U holda Bernulli formulasiga asosan

$$P_5(2) = C_5^2(0.05)^2(0,95)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!}(0.05)^2(0.95)^3 = 0.02.$$

Javob: 0,02.

Maxsus funksiyaga murojat:
BINOMRASP(2; 5; 0.05; YOLG'ON).

2-masala. Ikkita teng kuchli raqib shaxmat o'ynamoqda. To'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimoli kattami yoki besh partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimolimi?

Yechish: Raqiblar teng kuchli bo'lgani uchun yutish ehtimoli $p=0{,}5$. To'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimolligi quyidagicha topiladi:

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) - P_4(1) = 1 - C_4^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 - C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}.$$

Maxsus funksiyaga murojaat:
1-BINOMRASP(1;4;0.5;ROST)
Besh partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimoli

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{8}{16}.$$

Maxsus funksiyaga murojaat:
1-BINOMRASP(2;5;0.5;ROST)

11/16>8/16, ya'ni to'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimoli kattaroq ekan.

3-masala. Mahsulot katta partiyasining 1%i sifatsiz. Hech bo'lmaganda bitta sifatsiz mahsulot uchratish ehtimoli 0,95 dan kichik bo'lmasligi uchun tasodifiy tanlanma hajmi qancha bo'lishi kerak?

Yechish: Ma'lumki, $n \geq \frac{ln(1-P)}{ln(1-p)}$. Shartga ko'ra $P=0{,}95$, $p=0{,}01$.

Demak, $n \geq \frac{ln0.05}{ln0.99} \approx 296$. Ya'ni, tanlanma hajmi kamida 296 bo'lgan taqdirda tekshiruv davomida kamida bitta sifatsiz mahsulot uchrashi ehtimoli 0,95dan kam bo'lmaydi.

Javob: $n=296$.

4-masala. Ulgurji omibor (baza) 10 ta do'konni ta'minlaydi. do'konlarning har biridan kelgusi kunga (qolganlariga bog'liq bo'lmagan holda) buyurtma tushish ehtimoli 0,4 ga teng. Ehtimoli eng katta bo'lgan bir kunlik buyurtmalar sonini va shu sondagi buyurtmalarni olish ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra $n=10$, $p=0,4$. $(n+1)p=4,4$. Ehtimoli eng katta bo'lgan buyurtmalar soni 4,4 ning butun qismiga teng:

$$\mu=[(n+1)p]=4.$$

U holda Bernulli formulasiga asosan to'rtta buyurtma olish ehtimoli $P_{10}(4) = C_{10}^{4} \cdot 0,4^{4} \cdot 0.6^{6} = 0,251$ bo'ladi.

Maxsus funksiyaga murojaat:
BINOMRASP(4;10;0.0,4;YOLG'ON).

Javob: $\mu=4$, $P_{10}(4) = 0,251$.

5-masala. Darslik 100 000 nusxada chop etilgan. Chop etilgan darslikning sifatsiz tikilgan ekanligining ehtimoli 0,0001 ga teng. Tirajning ichida sifatsiz tikilgan kitoblar soni roppa-rosa 5 ta bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: Bu holda $n=100\ 000$, $p=0,0001$, $m=5$. n katta, p ehtimollik esa kichkina bo'lgani uchun Puasson formulasidan foydalanamiz:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

λ ni hisoblaymiz: $\lambda = n \cdot p = 100000 \cdot 0,0001 = 10$. U holda

$$P_{100000}(5) \approx \frac{10^5 e^{-10}}{5!} = \frac{10^5 \cdot 0,000045}{120} = 0.03575.$$

Maxs funksiyaga murojaat:
PUASSON(5;10;YOLG'ON).

Javob: $P_{100000}(5) \approx 0,0375$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Qurilish kompaniyasida o'tkazilgan auditorlik tekshiruvi paytida auditor tasodifiy ravishda 5 ta hisob varaqasini tanlaydi. Agar hisob varaqalarining 3%i da xatolarga yo'l qo'yilgan bo'lsa, auditorning

a) faqat bitta hisob varaqasida xato topishi;

b) hech bo'lmaganda bitta hisob varaqasida xato topishi ehtimolini toping.

Javob: a) 0,1328; *b)* 0,1413.

2. Fakultetdagi talabalarning o'rtacha 10%i «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha imtihonda qoniqarsiz baho olar ekan. Aytaylik, guruhda 20 ta talaba bor.

a) ikkita talabaning imtihon topshira olmaslik ehtimoli qancha?

b) to'rtta talabaning imtizhon topshira olmaslik ehtimoli qancha?

d) kamida uchta talabaning imtihon topshira olmaslik ehtimolligi qancha?

e) imtihon topshira olmaydigan talabalarning kutilayotgan o'rtacha soni qancha?

Javob: a) 0,270; *b)* 0,0898; *d)* 0,3231; *e)*2.

3. Avtomat dastgoh to'g'ri sozlangan bo'lsa, ishlab chiqarilayotgan detallarning faqat 1%i nosoz bo'ladi. Avtomat to'g'ri sozlangan bo'lsin.

a) ishlab chiqarilgan mahsulotning katta partiyasidan tasodifiy ravishda ikkitasi tanlab olindi. Ulardan bittasining nosoz bo'lish ehtimoli qancha?

b) ishlab chiqarilgan mahsulotning katta partiyasidan tasodifiy ravishda beshtasi tanlab olindi. Ularning hammasi sifatli bo'lish ehtimoli qancha?

d) bir kunlik ishlab chiqarilgan detallar soni 200 ta bo'ldi. Nosoz detallarning kutilayotgan o'rtacha soni qancha?

Javob: a) 0,0198; *b)* 0,9510; *d)* 2.

4. Savdo agenti bir kunda o'rta hisobda 8 ta doimiy xaridorlar bilan muloqotda bo'ladi. U tajribasidan doimiy xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,1 ga teng ekanini biladi.

a) bir kun davomida 2 kishining xarid qilish ehtimoli nechaga teng?

b) bir kun davomida hech bo'lmaganda 2 kishining xarid qilish ehtimoli nechaga teng?

d) kun davomida hech kimning xarid qilmaslik ehtimoli nechaga teng?

e) bir kun davomida kutiladigan xaridlarning o'rtacha soni nechaga teng?

Javob: a) 0,1488; *b)* 0,1869; *d)* 0,43; *e)*4.

5. Firmada 500 kishi ishlaydi. 1-yanvarning bir vaqtda k ta xizmatchining tug'ilgan kuni bo'lish ehtimoli nechaga teng? Bu ehtimollikni $k=0$, 1, 2, 3 qiymatlarda hisoblang.

Javob: 0,2541; 0,3481; 0,2385; 0,108.

6. Tanga 6 marta tashlanadi.

a) Tanga «gerb» tomoni bilan ikki martadan kam tushishi;

b) «gerb» tomoni kamida ikki marta tushishi ehtimolini toping.

Javob: a) 7/64; *b)* 57/64.

7. Ko'chada birinchi duch kelgan avtomashinaning nomerida

a) 5 raqami uchramaslik ehtimolini;

b) ikkita va undan ortiq 5 raqami uchramaslik ehtimolini;

d) aynan ikkita 5 raqami uchramaslik ehtimolini toping.

Javob: a) 0,656; *b)* 0,948; *d)* 0,951;

8. Sexda 6 ta motor ishlaydi. Ularning har biri uchun ayni paytda ishlayotganligi ehtimoli 0,8 ga tengbo'lsa, ayni paytda

a) 4 ta motor ishlayotganligi;

b) hamma motor o'chirilganligi;

d) hamma motor ishlayotganligi ehtimollarini toping.

Javob: a) $P(6;4)=0,246$; *b)* $P(6;0)=0,000064$; *d)* $P(6;6)=0.26$;

9. Agar har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,3 ga teng bo'lsa, uning 5 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovning kamida 2 tasida ro'y berish ehtimolini toping.

Javob: $p = 0,472$

10. Teng kuchli raqibdan to'rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli kattami yoki sakkiztadan beshtasinimi? Durang natija hisobga olinmaydi.

Javob: $P(4;3)=1/4$; $P(8;5)=7/32$.

11. Teng kuchli raqibdan to'rt partiyadan kamida uchtasini yutish ehtimoli kattami yoki sakkiztadan kamida beshtasinimi? Durang natija hisobga olinmaydi.

Javob: $P1(4;3)=5/16$; $P1(8;5)= 93/256$.

12. Tasodifiy sonlar jadvalidan nechta son olinganida ularning orasida 7 bilan tugaydigan uchta son uchrashi ehtimoli eng katta bo'ladi?

Javob: $n=29$.

13. Bir otishda nishon markaziga tekkizish ehtimoli $p=0,2$. Nishon markaziga 0,9 dan kichik bo'lmagan ehtimollik bilan hech bo'lmaganda bir marta tekkizish uchun necha marta o'zaro bog'liq bo'lmagan holda nishonga qarata o'q otish kerak?

Javob: $n \geq 10$.

14. Avtomat bir siklda 10 detal tayyorlaydi. Bu detallar har birining sifatsiz bo'lish ehtimoli 0,01 ga teng. Nechta sikldan so'ng hech bo'lmaganda bitta sifatsiz detal chiqarish ehtimoli 0,8 dan kichik bo'lmaydi?

Javob: $n \geq 16$.

15. Basketbolchi uchun to'pni savatga tushirish ehtimoli 0,4 ga teng. To'p savat tomon 10 marta tashlandi. Savatga tushirishlarning eng ehtimolliroq sonini va unga mos ehtimollikni toping.

Javob: $\mu=4$, $P_{10}(4)=0{,}251$.

16. Agar har bir o'lchashda musbat xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli 2/3, manfiy xatolikka yo'l qo'yish ehtimoli esa 1/3 bo'lsa, to'rt o'lchashda musbat va manfiy xatoliklar uchun ehtimoli eng katta sonlarni va ularga mos ehtimolliklarni toping.

Javob: $\mu_+=3$, $\mu_-=1$, $p=32/81$.

17. Agar har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, hodisa ro'y berishlar sonining ehtimoli eng kattasi 20 ga teng bo'lishi uchun nechta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinov o'tkazish ko'rak bo'ladi?

Javob: 24 yoki 25 ta.

18. Suv osti kemasi t ta bo'limli kreyserga qarab ketma-ket p ta torpeda otib hujum qildi. Har bir torpeda uchun uning kemaga tegish ehtimoli r ga teng. Torpeda kemaga tekkanida $1/m$ ehtimollik bilan uning t ta bo'limlaridan biri shikastlanadi. Agar kemani cho'ktirish uchun uning kamida ikkita bo'limiga shikast keltirish zarur bo'lsa, kemaning cho'kish ehtimolini toping.

·*Javob:* A ={kema cho'kdi};

gipoteza H_k = {kemaga k ta torpeda tegdi}; $k = 0,1,\ldots,n$.

$$P(H_k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$P(A/H_0) = P(A/H_1) = 0; \qquad P(A/H_k) = 1 - m\cdot(1/m)^k$$

$$k \geq 2 \quad \partial a \quad P(A) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\left(1 - \frac{1}{m^{k-1}}\right).$$

19. Fabrikada to'quvchi 1000 ta ip to'pini nazorat qiladi. Bir daqiqa davomida 1 ta to'pda ipning uzilish ehtimoli 0,004. Bir daqiqa davomida 5 ta to'pda ipning uzilish ehtimolini toping.

Javob: 0,1563.

20. Har bir o'q otishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,001 ga teng. Agar 5000 marta o'q otilgan bo'lsa kamida ikkita o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Javob: $1-6e^{-5} \approx 0,9596$.

21. Bir soat davomida ixtiyoriy abonentning kommutatorga qo'ng'iroq qilish ehtimoli 0,01 ga teng. Telefon stansiyasining 800 ta abonenti bor. Bir soat davomida 5 ta abonentning kommutatorga qo'ng'irog' qilish ehtimolini toping.

Javob: $8^5 e^{-8}/5 \approx 0,0916$.

22. Bir jamoaning 500 a'zosi bor. Ulardan aynan ikkitasining tug'ilgan kuni yangi yil bayramiga to'g'ri kelish ehtimolini toping. Yilning ixtiyoriy bir kunida tug'ilish ehtimoli 1/365 ga teng hisoblansin.

Javob: $\approx 0,2385$.

1.11. MUAVR-LAPLAS TEOREMALARI. O'ZARO BOG'LIQ BO'LMAGAN TAJRIBALAR KETMA-KETLIGIDA NISBIY CHASTOTANING O'ZGARMAS EHTIMOLLIKDAN CHETLASHISHI EHTIMOLI

n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi ko'rilayotgan bo'lib, biror A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, har bir tajriba uchun p soniga teng bo'lsin (ya'ni Bernulli sxemasi shartlari bajarilsin). Muavr-Laplas teoremalari Bernulli sxemasida n, m, m_1, m_2 lar katta qiymatlarni qabul qilganida quyidagi ehtimolliklarni taqribiy hisoblash uchun qo'llaniladi:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{va} \quad P(m_1 \le k \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k).$$

Muavr-Laplasning lokal teoremasi.

Agar n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p $(0<p<1)$ soniga teng bo'lsa, bu tajribalarda hodisaning aynan m marta sodir bo'lish ehtimoli $P_n(m)$ uchun quyidagi formula o'rinli

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

bu yerda $q = 1-p$, $\varphi(x)$ – funksiya Laplas funksiyasi deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Bu funksiyaning qiymatlari jadvallashtirilgan va Ilovaning 3-jad-valida ketirilgan.

$\varphi(x)$ juft funksiya, ya'ni $\varphi(-x)=\varphi(x)$ bo'lgani uchun x ning manfiy qiymatlari uchun ham ana shu jadvaldan foydalaniladi; $x\geq 4$ qiymatlarida $\varphi(x)=0$ deb hisoblash mumkın.

Muavr-Laplasning integral teoremasi

Agar n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p(0<p<1) soniga teng bo'lsa, bu tajribalarda hodisaning ro'y berishlar soni m ning m1 va m2 qiymatlarning orasida bo'lish ehtimoli quyidagicha topiladi:

$$P_n(m_1;m_2)=P\{m_1\leq m\leq m_2\}\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

Bunda $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ – **Laplasning integral funksiyasi** deb ataladi. $\Phi(x)$ funksiya qiymatlari jadvallashtirilgan va Ilovaning 4-jadvali keltirilgan.

$\Phi(x)$ toq funksiya, ya'ni $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ bo'lgani uchun x ning manfiy qiymatlari uchun ham ana shu jadvaldan foydalaniladi; $x>5$ qiymatlarida $\Phi(x)=1/2$ deb hisoblash mumkin.

E c *l a t m* a: Ayrim darsliklarda $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ funksiya o'rniga $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$ funksiya ishlatiladi. Bu ikki funksiya o'zaro $\Phi_0(x)=0{,}5+\Phi(x)$ munosabat bilan bog'langan. Muavr Laplasning integral teoremasini $\Phi_0(x)$ funksiya orqali ham ifodalash mumkin:

$$P_n(m_1;m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)=\Phi_0\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$x>5$ qiymatlarida $\Phi_0(x)=1$ deb hisoblash mumkin.

Jadvallardan foydalanganda diqqat qiling!

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar.

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ ko'rinishdagi Laplasning integral funksiyasining qiymatlarini maxsus **NORMSTRASP(Z)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda Z – funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni x). Agar $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt$ funksiyaning qiymatini hisoblashga ehtiyoj tug'ilganida, $\Phi(x)=\Phi_0(x)-0{,}5$ ekanligini hisobga olinsa, maxsus funksiyaga murojaat **NORMSTRASP(Z)-0,5 ko'rinishda bo'ladi.**

$\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning qiymatlarini maxsus **NORMSTOBR(EHTIMOLLIK)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **EHTIMOLLIK – (0;1)** oraliqdagi r son bo'lib, u $p=\Phi_0(x)$ tenglikni qanoatlantiradi, ya'ni bu funksiya x argumentning qiymatini aniqlaydi.

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning qiymatini hisoblashga ehtiyoj tug'ilganida (ya'ni $\Phi(x)=p_1$ tenglikdan x ni topish uchun), $\Phi_0(x)=\Phi(x)+0.5=p_1+0.$ ekanligini hisobga olinsa maxsus funksiyaga murojaat **NORMSTRASP(R+0,5)** ko'rinishda bo'ladi.

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar Z; **EHTIMOLLIK**– miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Ikki $(a;\sigma^2)$ parametrga bog'liq

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt \quad \text{va} \quad f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

umumiyroq ko'rinishdagi Laplasning oddiy va integral funksiyasining qiymatlarini maxsus: **NORMRASP(X;O'RTACHASI;STANDART_CHETL;INTEGRAL)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X- funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni x); **O'RTACHASI** – funksiya ko'rinishidagi a parametr; **STANDART_CHETL** – funksiya ko'rinishidagi σ^2 parametr; **INTEGRAL** – **ROST(ISTINA-TRUE)** va **YOLG'ON(LOJ-FALSE)** qiymatlarini qabul qiladi.

Agar qiymati **ROST** bo'lsa $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$ funksiya qiymati; **YOLG'ON** bo'lsa, $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiya qiymati hisoblanadi.

$F_0(x)$, $F(x)$ va $j(x)$ funksiyalarning qiymatini **NORMRASP** maxsus funksiyaci yordamida hisoblash:

$F_0(x)$: murojaat **NORMRASP(X;0;1;ISTINA)** ;

$F(x)$: murojaat **NORMRASP(X;0;1;ISTINA)**-0.5 ;

$j(x)$: murojaat **NORMRASP(X;0;1;LOJ)** ;

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X;O'RTACHASI;STANDART_CHETL** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Agar A hodisaning bitta tajribada ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, tajriba 400 marta o'tkazilganida uning aynan 80 marotaba ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish: Shartga ko'ra n=400; m=80; p=0,2; q=0,8. Muavr-Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}\varphi\left(\frac{80-400\cdot0{,}2}{\sqrt{400\cdot0{,}2\cdot0{,}8}}\right)=\frac{1}{8}\varphi(0).$$

Ilovadagi Laplas funksiyasining qiymatlari keltirilgan 3-jadvaldan $j(x)$ ning 0 ga mos qiymatini topamiz: $j(x)$=0,3989. U holda $P_{400}(80)\approx\frac{1}{8}\cdot0{,}3989=0{,}4986$ bo'ladi.

Maxsus funksiyaga murojaat:

$\frac{1}{8}\varphi(0)$ qiymati: **NORMRASP(0;0;1;YOLG'ON);**

yoki $\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)$ qiymati:

NORMRASP(80;400*0.2;**SQR(**400*0.2*0.8);**YOLG'ON)**

Agar erinmasdan katta hajmdagi hisoblashlarni bajarsak, Bernulli formulasidan ham quyidagi natijani olamiz:

$$P_{400}(80)=0{,}498.$$

Maxsus funksiyaga murojaat:

BINOMRASP(80;400;0.2;**YOLG'ON)**

Javob: $P_{400}(80)\approx 0.4986.$

2-masala. Tajriba vaqtida uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda

a) kamida 75 ta uskunaning; b) ko'pi bilan 74 ta uskunaning; d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishdan chiqish ehtimollarini toping?

Yechish: Shartga ko'ra n=100; p=0,8; q=0,2;

a) kamida 75 ta uskunaning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P\{75\le m\}=P\{75\le m\le 100\}\approx$$

$$\approx\Phi\left(\frac{100-0.8\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right)-\Phi\left(\frac{75-0.05\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right)=\Phi(5)-\Phi(-1{,}25);$$

Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-*jadvaldan* $\Phi(x)$ *funksiyaning* x=1,25 *va* x=5 *ga mos qiymatlarini topamiz:* $\Phi(1{,}25)=0{,}3944$; $\Phi(5)=0{,}5$. *U holda*

$P\{75\le m\}\approx\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=0.5+0{,}3944=0{,}8944$ bo'ladi.

Maxsus funksiyaga murojaat:

$P\{75\le m\}\approx\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)$ qiymati:

NORMSTRASP(5)-**NORMSTRASP(**-1,25)

b) Ko'pi bilan 74 ta uskunaning ishdan chiqish ehtimoli:

«Kamida 75 ta uskunaning ishdan chiqishi» va «ko‘pi bilan 74 ta uskunaning ishdan chiqishi» hodisalari o‘zaro teskari hodisalardir, shuning uchun ular ehtimolliklarining yig‘indisi 1 ga teng. U holda

$$P\{m \le 74\} = 1 - P\{75 \le m\} = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$$

d) 75 tadan 90 tagacha uskunaning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P\{75 \le m \le 90\} \approx \Phi\left(\frac{90 - 0{,}8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0{,}05 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$ ning x=1,25 va x=2,5 ga mos qiymatlarini topamiz:

$\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\quad \Phi(2{,}5) = 0{,}4938$.

Demak, $P\{75 \le \mu \le 90\} \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$ ekan.

Maxsus funksiyaga murojaat:

$P\{75 \le m \le 90\} \approx \Phi(2.5) - \Phi(-1{,}25)$ qiymati:

NORMSTRASP(2.5)-NORMSTRASP(-1,25).

Javob: $P\{75 \le m\} \approx 0{,}8944;$

$P\{m \le 74\} \approx 0{,}1056\,;\quad P\{75 \le \mu \le 90\} \approx 0{,}8882\,.$

3-masala. Hodisaning o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning kamida 75 marta ro‘y berishini 0,9 ehtimollik bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak bo‘ladi?

Yechish: *Masala shartiga ko‘ra p*=0,8; *q*=0,2; $P_n(75;n) = 0{,}9$.

Muavr- Laplasning integral teoremasidan foydalanamiz.

$$P_n(75;n) = P\{75 \le \mu \le n\} \approx \Phi\left(\frac{n - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0{,}9.$$

$$0{,}9 = \Phi\left(\frac{n - 0{,}8n}{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot n}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0{,}8n}{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot n}}\right)$$

yoki

$$0{,}9 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(\frac{75 - 0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right).$$

Albatta tajribalar soni n>75, shuning uchun $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \approx 4{,}33$.
Laplas integral funksiyasi uchun $\Phi(4) \approx 0{,}5$ bo'lgani sababli $\Phi(\sqrt{n}/2) \approx 0{,}5$ deb hisoblash mumkin. Demak,

$0{,}9 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)$. Bundan $\Phi\left(\frac{75-0.8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) = -0{,}4$. $\Phi(x)$– toq funksiya

bo'lgani uchun $\Phi\left(-\frac{75-0.8n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) = 0{,}4$. Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$=0.4 tenglikni qanoatlantiruvchi argumentning qiymatini topamiz: $\Phi(1{,}28)=0{,}4$.

Maxsus funksiyaga murojaat:
$\Phi(x)$=0.4 qiymati: **NORMSTOBR(**0.4+0,5)

Natijada $-\frac{75-0{,}8n}{0{,}4\sqrt{n}} = 1{,}28$ hosil qilamiz. Bu tenglikdan n ni topsak ($\sqrt{n}$ ga nisbatan kvadrat tenglama yechsak) $\sqrt{n}=10$ yoki tajribalar soni n=100 ekani kelib chiqadi.

Javob: n=100.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Birinchi sinfga 200 ta o'quvchi qabul qilinishi kerak. Agar o'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,515 bo'lsa, birinchi sinfga qabul qilinganlarning roppa-rosa 100 tasi qiz bola bo'lishining ehtimolini toping.

Javob: ≈ 0,051

2. Agar hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta tajriba o'tkazilganda uning aynan 104 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Javob: 0,0006

3. Tanga $2N$ marta (N yetarlicha katta!) tashlandi. Uning «gerb» tomoni bilan aynan N marta tushish ehtimolini toping.

Javob: $P_{2N}(N) = \frac{0.5642}{\sqrt{N}}$

4. Tanga $2N$ marta (N yetarlicha katta!) tashlandi. Uning «gerb» tomoni bilan tushishlar soni «raqam» tomoni bilan tushishlar sonidan $2t$ taga ko‘p ekanligining ehtimolini toping.

$$Javob:\ P_{2N}(N+m)=\sqrt{\frac{2}{N}}\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{N}}\cdot m\right).$$

5. Tasodifiy ravishda 100 ta tanga ustma-ust qilib taxlangan. Ularning ichida «gerb» tomoni tepaga qilib taxlanganlari 45 dan 55 tagacha bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

Javob: $\Phi(1)-\Phi(-1)\approx 0{,}6826$.

6. Ishlab chiqarishdagi 1% mahsulot sifatsiz chiqadi. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda olingan 1100 ta mahsulotdan 17 tasining sifatsiz chiqish ehtimoli qancha?

Javob: $\Phi(20/11)-\Phi(-10/3)\approx 0{,}965$.

7. Merganning bitta otishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,75. Agar 100 marta nishonga qarata o‘q uzilgan bo‘lsa, merganning nishonga

a) kamida 70 va ko‘pi bilan 80 marta;

b) ko‘pi bilan 70 marta tekkizish ehtimolini toping.

Javob: $p\approx 2\Phi(1{,}15)=0{,}7498$; $p\approx -\Phi(1{,}15)+0{,}5=0{,}1251$.

8. 2100 ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,7ga teng. Quyidagi xodisalar ehtimolliklarni toping:

a) kamida 1470 marta va ko‘pi bilan 1500 marta;

b) kamida 1470 marta;

d) ko‘pi bilan 1469 marta ro‘y beradi.

Javob: a) 0,4236; *b)* 0,5; *d)* 0,5.

9. Tanga $2N$ marta (N yetarlicha katta!) tashlandi. Tanganing «gerb» tomoni bilan tushishlar soni $N-\frac{\sqrt{2N}}{2}$ va $N+\frac{\sqrt{2N}}{2}$ oralig‘ida bo‘lish ehtimolini toping.

Javob: $P\approx\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=0{,}6826.$

10. n ta tajribaning har birida ijobiy natija olish ehtimoli 0,9 ga teng. 0,98 ga teng ehtimollik bilan kamida 150 ta tajribaning ijobiy natija berishi uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak?

Javob: $n=177$.

O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarda nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimollikdan chetlashishi

O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarda nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimollikdan chetlashishini baholashda Muavr-Laplasning integral teoremasining natijasidan foydalanamiz.

Natija. *n* ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli *p* (0<p<1) bo‘lsa (ya’ni Bernulli sxemasi ko‘rilmoqda), hodisaning ro‘y berishlar soni *m* ning nisbiy chastotasi m/n ning o‘zgarmas ehtimollik *p* dan chetlashishining biror musbat ε dan katta bo‘lmaslik ehtimoli quyidagiga teng:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Bu formulani hosil qilish uchun $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon$ modulni ochib yozamiz: $(p-\varepsilon)n\le m\le(p+\varepsilon)n$. Muavr-Laplas teoremasini $m_1=(p-\varepsilon)n$ va $m_2=(p+\varepsilon)n$ chegaralar uchun qo‘llasak, natija isbot bo‘ladi.

Agar $\Phi(x)=\Phi_0(x)-0{,}5$ ekanligini hisobga olsak,

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\cdot\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-1$$

formulani hosil qilamiz.

Namunaviy masalalar yechish

4-masala. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan 625 tajribaning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolut qiymati bo‘yicha 0,04 dan katta bo‘lmasligi ehtimolini toping.

Yechish: Masalaning shartiga asosan n=625; p=0,8; q=0,2; ε=0,04.

$P=P\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}$ ehtimollikni topish kerak.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$ formulaga asosan

$$P\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}=2\cdot\Phi\left(0{,}04\sqrt{\frac{625}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=2\Phi(2{,}5).$$

Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(2{,}5)$=0,4938 ekanligini topamiz.

Maxsus funksiyaga murojaat:
$\Phi(2{,}5)$ qiymati: **NORMSTRASP(2.5)-0,5;**

Va nihoyat, $P\left\{\left|\frac{m}{625}-0{,}8\right|\le 0{,}04\right\}\approx 2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$

Javob: 0,9876.

5-masala. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolut qiymati bo‘yicha 0,02 dan katta bo‘lmaslik ehtimoli 0,7698 ga teng bo‘lishi uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak?

Yechish: Shartga ko‘ra p=0,5; q=0,5; e=0,02;

$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le 0{,}02\right\}=0{,}7698$. Masalani yechish uchun

$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ formuladan foydalanamiz:

$2\cdot\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{n}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=0{,}7698$ yoki $\Phi\left(0{,}04\sqrt{n}\right)=0{,}3849.$

Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$ funksiyaning 0,3948 qiymatiga mos kelgan argumentini aniqlaymiz: $\Phi(1{,}2)$=0,3849.

Maxsus funksiyaga murojaat:
NORMSTOBR(0,3849+0,5**);**

Demak, $0{,}04\sqrt{n}=1{,}2$ yoki $\sqrt{n}=30$. Bundan n=900.

Javob: 900.

6-masala. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan 400 tajribaning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining hodisa ehtimolidan chetlashishi absolut qiymati bo‘yicha ε dan katta bo‘lmasligining ehtimoli 0,9876 ga teng bo‘ladigan ε sonni toping.

Yechish: Shartga ko‘ra n=400; p=0,8; q=0,2,

$$P\left\{\left|\frac{m}{400}-0{,}8\right|\le\varepsilon\right\}=0{,}9876.$$

Teorema natijasidan foydalansak, $2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=0{,}9876$ yoki $\Phi(50\varepsilon)=0{,}4938$ ekanligi kelib chiqadi. Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$ funksiyaning 0,4938 qiymatiga mos kelgan argumentini aniqlaymiz: $\Phi(2{,}5)$=0,4938.

Maxsus funksiyaga murojaat:
NORMSTOBR(0,4938+0,5);
Demak, $50\varepsilon=2{,}5$ yoki $\varepsilon=0{,}05$.

Javob: $\varepsilon=0{,}05$.

7-masala. Texnika nazorati bo‘limi 900 ta mahsulot sifatini tekshirmoqda. Mahsulotning standart bo‘lish ehtimoli 0,9 ga teng. 0,9544 ehtimollik bilan standart mahsulotlar soni yotadigan chegaralarni toping.

Yechish: Shartga ko‘ra n=900; p=0,9; q=0,1.

$$P\left\{\left|\frac{m}{900}-0{,}9\right|\le\varepsilon\right\}=0{,}9544.$$

Teorema natijasiga asosan $P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$,

bundan $2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right)=0{,}9544$ yoki $\Phi(100\varepsilon)=0{,}4772.$ Ilovadagi Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan $\Phi(x)$ funksiyaning 0,4772 qiymatiga mos kelgan argumentini aniqlaymiz: $\Phi(2)$=0,4938.

Maxsus funksiyaga murojaat:
NORMSTOBR(0,4772+0,5);
Ilovadagi 4-jadvaldan $\Phi(2)$=0,4772 ekanini topamiz. Bundan

$100\varepsilon = 2$ yoki $\varepsilon = 0,02$. Shunday qilib, tekshirilgan mahsulotlar orasidagi nostandartlarining nisbiy chastotasi uchun 0,9544 ehtimollik bilan quyidagi tengsizlik o'rinli ekan:

$$\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \le 0,02 \text{ yoki } 0,88 \le \frac{m}{900} \le 0,92, \text{ bundan } 792 \le m \le 828.$$

Va nihoyat, 900 ta tekshirilganlar orasida standart mahsulotlar nisbiy chastotasi 0,9544 ehtimollik bilan $792 \le m \le 828$ oraliqda yotar ekan.

Javob: $792 \le m \le 828$

Mustahkamlash uchun masalalar

11. 10000 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli p=0,75. Uning ro'y berishlari nisbiy chastotasining ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha ko'pi bilan 0,001 ga teng bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: p=0,182.

12. 900 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli p=0,5. Uning ro'y berishlari nisbiy chastotasining ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha 0,02 dan oshmasligi ehtimolini toping.

Javob: $p=2\Phi(1,2)=0,769$.

13. Tanga tashlaganda 0,6 ehtimollik bilan «gerb» tomoni bilan tushishining nisbiy chastotasi uning ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo'yicha ko'pi bilan 0,01 ga teng bo'lishi uchun tangani necha marta tashlash kerak bo'ladi?

Javob: n=1764.

14. Idishdagi oq va qora sharlar nisbati 4:1 kabi ekan. Tajriba shundan iboratki, idishdan bitta shar olinadi, uning rangi qayd qilinadi va yana idishga qaytib solinadi. Oq shar chiqishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlashishi absolut qiymati bo'yicha 0,01 dan oshmasligi uchun nechta tajriba o'tkazish kerak?

Javob: n=378.

15. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng. 0,9128 ehtimollik bilan 5000 ta

tajriba o‘tkazilganida hodisaning ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan qanday chetlashishini kutish mumkin?

Javob: $\varepsilon=0,00967$.

16. 400 ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli $p=0,8$. Shunday musbat ε sonini topingki, uning ro‘y berishlari nisbiy chastotasining ehtimolidan chetlashishi absolyut qiymati bo‘yicha ε dan oshmasligi ehtimoli 0,9876 ga teng bo‘lsin.

Javob: $\varepsilon \approx 0,05$.

17. Shoshqol toshi 80 marta tashlandi. 0,9973 ehtimollik bilan 6 ochko tushishlar soni yotadigan chegaralarni taqribiy hisoblang.

Javob: $\{4 \le m \le 23\}$.

18. Texnik nazorat bo‘limi 475 mahsulotni sifat ko‘rigidan o‘tkazmoqda. Mahsulotning sifatsiz bo‘lish ehtimoli 0,05 ga teng. 0,9426 ehtimollik bilan sifatsiz mahsulotlar soni yotadigan chegaralarni toping.

Javob: $\{14 \le m \le 32\}$.

2-qism
TASODIFIY MIQDORLAR

Tajriba natijasi biror qiymatlar to'plamidan tasodifiy ravishda bitta qiymat qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorga **tasodifiy miqdor** deb ataladi.

Misollar:

1. O'yin soqqasi bir marta tashlaganda tushadigan ochkolar soni tasodifiy miqdor bo'lib, uning qiymatlar to'plami {1,2,3,4,5,6} dan iborat.
2. Bir sutka davomida Toshkent shahrida tug'ilgan chaqaloqlar soni (60, 75, 58, ...) ma'lum bir sonlar oralig'ida musbat butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
3. Berilgan partiyadagi yaroqsiz mahsulotlar soni (4, 5, 2, 3, ...) noldan to partiyadagi mahsulotlarning umumiy soniga teng bo'lganga qadar butun qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
4. Nishonga birinchi marta tekkizguncha o'q otishlar soni (1,5,3...) barcha natural sonlar to'plamidan qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
5. Artilleriya snaryadining uchish masofasi (2,5—3 km.) ma'lum bir musbat sonlar oralig'ida qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.
6. Bir oy davomida qoramol massasining ko'payishi (-0,5kg, ...5,2 kg) — ma'lum bir sonlar oralig'ida qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor.

Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarni chekli yoki (sanoqli) cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga **diskret tasodifiy miqdor** deyiladi (1—3 misollar).

Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor **uzluksiz tasodifiy miqdor** deyiladi (4—5 misollar).

Tasodifiy miqdorlar X, Y, Z ... kabi bosh harflar bilan, ularning qabul qilgan qiymatlari esa mos kichkina $x, y, z, \ldots$ harflar bilan belgilanadi.

2.1. DISKRET TASODIFIY MIQDORLAR

Tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni (taqsimot qatori)** deb uning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari x_i va mos $p_i = P(X = x_i)$ $(\sum_i p_i = 1)$ ehtimolliklari majmuyiga aytiladi. Har qanday tasodifiy miqdor o'zining taqsimot qonuni bilan bir qiymatli aniqlanadi.

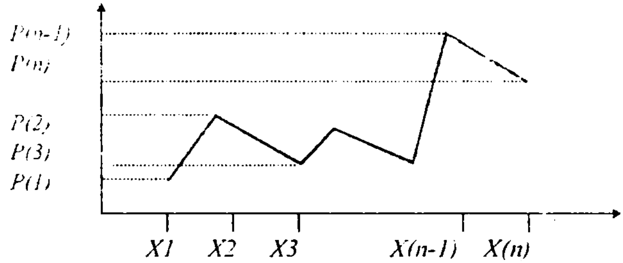
Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni jadval, formula yoki grafik ko'rinishida berilishi mumkin.

1) jadval ko'rinishi:

x_i	x_1	x_2		x_n	
p_i	p_1	p_2	...	p_n	

2) formula ko'rinishi: $p_i=(X=X_i)$;

3) grafik ko'rinishi: **taqsimot ko'pburchagi (poligon)**.



Taqsimot qatorining $M_i(x_i, p_i)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqdan iborat grafigi **taqsimot poligoni (taqsimot ko'pburchagi)** deyiladi..

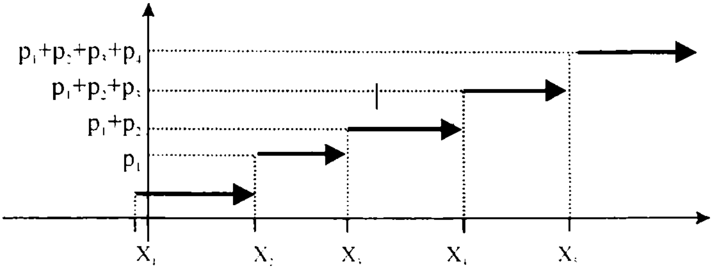
Agar X tasodifiy miqdor o'zining x_1, x_2, ... qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, ...$ ehtimollik bilan qabul qiladigan diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda uning **taqsimot funksiyasi** quyidagicha aniqlanadi

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i .$$

Bu yerda x_i ning x dan kichik bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari yig'indisi olinadi.

Quyida $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ko'rinishi va grafigi keltirilgan:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le x_1,\\ p_1, & x_1 < x \le x_2,\\ p_1+p_2, & x_2 < x \le x_3,\\ p_1+p_2+p_3, & x_3 < x \le x_4,\\ p_1+p_2+p_3+p_4, & x_4 < x \le x_5,\\ 1, & x > x_5.\end{cases}$$



X diskret tasodifiy miqdorning [a;b] oraliqda qiymat qabul qilish ehtimoli $P(a \le X \le b)$ quyidagicha hisoblanadi:

$$P(a \le X \le b)=\sum_{a \le x_i \le b} p_i \, .$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. $P(a \le X \le b)$ ehtimollikni maxsus **VEROYATNOST (X_DIAPAZONI;EHTIM_DIAPAZONI; QUYI_CHEGARA;YUQORI_CHEGARA)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **X_DIAPAZONI** – X tasodifiy miqdorning qiymatlari massivi (ya'ni $x_1,\ldots,x_n$); **EXTIM_DIAPAZONI** X tasodifiy miqdorning ehtimollari massivi (ya'ni $p_1,\ldots,p_n$); **QUYI_CHEGARA** – ko'rilayotgan oraliqning quyi chegarasi (ya'ni a); **YUQORI_CHEGARA** – majburiy bo'lmagan parametr bo'lib, ko'rilayotgan oraliqning yuqori chegarasi (ya'ni b). Agar bu parametr qiymati kiritilmasa $P(a \le X \le a)=P(X=a)$ ehtimollik hisoblanadi;

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X_DIAPAZONI; EHTIM_DIAPAZONI; QUYI_CHEGARA; YUQORI_CHEGARA** – miqdoriy qiymatlar (massivlar) yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. 10 ta detal ichida 8 ta nostandarti bor. Tasodifiy ravishda 2 ta detal tanlab olindi. Tanlab olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot poligonini yasang.

Yechish: X tasodifiy miqdor — tanlangan 2 ta detal orasidagi standartlari soni. U quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin: $x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 2$. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz. Bunda

$$P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_n^m},$$

formuladan foydalanamiz. Bu yerda N=10 — detallarning umumiy soni, n=8 — standart detallar soni, m=2 — tanlangan detallar soni, k=0,1,2— tanlangan detallar ichidagi bo'lishi mumkin bo'lgan standartlari soni.

$$\{X = 0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};\ P\{X = 1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};\ P\{X = 2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

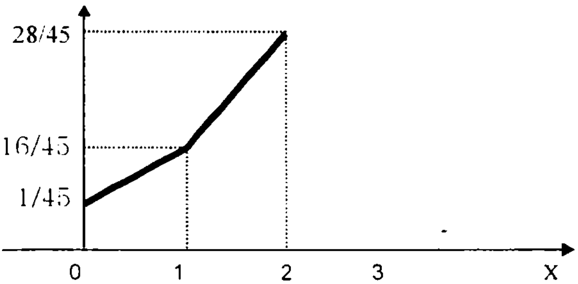
Izlanayotgan taqsimot qonunini topamiz:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Hisoblarimizni tekshirib ko'ramiz:

$$\sum_{k=1}^{3} P\{X = k\} = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$$

Taqsimot ko'pburchagini (poligon) yasaymiz. Buning uchun abssissa o'qiga x_i, yani X tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini va ordinatalar o'qiga esa ularga mos ehtimolliklar p_i larni joylashtiramiz hamda mos ravishda $M_1(0;1/45)$, $M_2(1;16/45)$, $M_3(2;28/45)$ nuqtalarni topamiz. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirsak, taqsimot ko'pburchagi hosil bo'ladi:



Javob:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Mustaskamlash uchun masalalar

1. Kompaniya o'zining moliyaviy hisoblarini tekshirib boradi va buxgalteriya hisoblarini tekshirish uchun muntazam ravishda auditorlar xizmatidan foydalanadi. Faraz qilaylik, kompaniya xizmatchiqari hisoblarni tekshirishda 5% xatoga yo'l qo'yadilar. Auditor tasodifiy ravishda 3 ta hujjatni tanlab oladi.

a) X tasodifiy miqdor, ya'ni auditor topgan xatolar sonining taqsimot qonunini toping.

b) Taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini yasang.

d) Auditor bittadan ziyod xato topishi ehtimolini toping.

Javob: a) $P(0)=0,857375$; $P(1)=0,135375$; $P(2)=0,007125$; $P(3)=0,000125$; *d)* 0,00725.

2. Soliq nazoratiga «A» firma ro'yxatdagi tarkibining 20% i «mavhum jonlar» ekanligi haqida ma'lumot tushdi. Tekshiruvchi nazoratchi tasodifiy ravishda bajarilgan ishlar to'g'risidagi hujjatning 4 tasini tanlab oladi va unda ko'rsatilgan ishchilarni qidira boshlaydi. Tasodifan olingan hujjatlar orasida birorta ham qalbakisi bo'lmasligi ehtimoli qanday? Hech bo'lmaganda bitta qalbakisi bo'lishi-chi?

Javob: 0,4096; 0,5904.

3. «Dengi» jurnali 1990 yilda Rossiya bozorida investitsiyalardan qaytish Amerika bozoridagi xuddi shunday investitsiyalardagidan ancha yuqori bo'lishi kutilganini e'lon qildi. Rossiya bozoriga investitsiyalar qilish bo'yicha maslahatchi ana shunday loyihalardan biriga investitsiyadan qaytishning taqsimoti (yiliga % hisobida) quyidagicha ko'rinishga ega:

x_i	9	10	11	12	13	14	15
$P(X=x_i)=p_i$	0,05	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10	0,05

a) Haqiqatan ham taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) Investitsiyalarning qaytishi hech bo'lmaganda 12% ni tashkil etish ehtimolini toping.

Javob: d) 0,5.

4. Ma'lum bir portga kuniga boshqa shaharlardan yuk ortiq uchun keladigan kemalar soni quyidagi jadval bilan berilgan X tasodifiy miqdordan iborat:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Haqiqatan ham taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) Taqsimot funksiyasi $\Phi(x)$ dan foydalanib, ma'lum kunda 1 tadan 4 tagacha (1 va 4 ham kiradi) yuk kemalari kelish ehtimolini toping.

e) Agar ma'lum kunlari 3 tadan ortiq kema kelsa, qo'shimcha ishchi kuchi yollash uchun zarur bo'ladigan harajatlarni port o'z zimmasiga oladi. Biror belgilangan kunda port qo'shimcha harajatlar qilishiga to'g'ri kelishi ehtimolini toping.

f) Faraz qilaylik, turli kunlarda keladigan kemalar soni o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Bu kemalarning hech biri xaftaning 5 ishchi kuni davomida portga kirmasligi ehtimolini toping.

g) Har xil kunlarda yuk ortiqga keluvchi kemalar soni o'zaro bog'liq emas deb faraz qilib, port ketma-ket ikki kun davomida qo'shimcha harajat qilishi ehtimolini toping.

Javob: d) 0,8; *e)* 0,2; *f)* 0,00001; *g)* 0,04.

5. Kotibaning bir betlik matnda yo'l qo'yadigan xatolari soni quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdordan iborat bo'lsin:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)=p_i$	0.01	0,09	0,3	0,2	0,2	0,10	0,10

a) taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) taqsimot funksiyasi $\Phi(x)$ dan foydalanib, kotiba bir betlik matnda ikkitadan ziyod xatoga yo'l qo'yishi ehtimolini toping;

e) kotiba bir betda ko'pi bilan 4 ta xatoga yo'l qo'yishi ehtimolini toping.

Javob: d) 0,6; *e)* 0,8.

6. Televizion ko'rsatuvda bosh og'rishiga qarshi yangi davo vositaning reklamasini ko'rgandan so'ng uni sotib olganlar foizi quyidagicha aniqlangan tasodifiy miqdordan iborat:

x_i	0	10	20	30	40	50
$P(X=x_i)=p_i$	0.10	0,20	0,35	0.20	0.10	0.05

a) taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) $\Phi(x)$ dan foydalanib, reklamani ko'rgan 20% dan ortiq kishi bosh og'rishiga qarshi yangi vositani sotib olishi ehtimolini toping.

Javob: d) $P(X>20)=0,35$.

7. Har kuni soat 12 va 13 orasida ma'lumotlar bo'limiga tushadigan qo'ng'iroqlar soni quyidagicha taqsimlangan tasodifiy miqdordan iborat:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)=p_i$	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0 1

a) taqsimot qonuni berilganiga ishonch hosil qiling;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) $\Phi(x)$ dan foydalanib, 12.34 va 12.35 orasida ma'lumotlar bo'limiga 2 tadan ortiq qo'ng'iroq bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: d) $P(X>2)=0.3$.

8. Avtodo'konda kundalik sotilgan mashinalar ro'yxati olib boriladi. Ana shu yozuvlar asosida kundalik sotilgan mashinalar sonining taqsimoti tuzilgan:

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

a) ertaga sotilgan avtomobillar soni 2 va 4 (2 va 4 ham kiradi) orasida bo'lishi ehtimolini toping;

b) kundalik sotilayotgan avtomobillar sonining taqsimot funksiyasini toping.

Javob: a) 0,7.

9. 100ta lotereya bileti chiqarilgan. O'yinga 1 ta 5000 so'mlik, 10 ta 1000 so'mlik yutuq qo'yilgan. Bitta lotereya bileti egasi uchun X tasodifiy yutuq qiymatining taqsimot qonunini toping.

Javob: X: 0 1000 5000

p: 0,89 0,1 0,01.

10. Uchta tanga tashlanmoqda. «Gerb» tomoni bilan tushgan tangalar sonini bildiruvchi X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini

tuzing. Uning taqsimot ko‘pburchagini yasang va taqsimot funksiyasini tuzing.

Javob: X: 0 1 2 3

p: 1/8 3/8 3/8 1/8.

11. Ishlab chiqarilgan 25 ta mahsulotning 6tasi sifatsizligi ma’lum bo‘lsa, tasodifan tanlab olingan 3ta mahsulot orasidagi X sifatsizlari sonining taqsimot qonunini toping.

Javob: X: 0 1 2 3

p: 0,42 0,458 0,12 0,01.

12. Ikkita shoshqol (o‘yin kubigi) ikki marta tashlanmoqda. Ularning ikkalasida ham juft ochkolar tushishlar sonidan iborat bo‘lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob: X: 0 1 2

p: 9/16 6/16 1/16.

13. Bitta otishda merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Mergan nishonga tekkizsa, unga yana o‘q beriladi. Agar u nishonga tekkiza olmasa, boshqa o‘q berilmaydi. Merganga berilgan o‘qlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Unga berilgan o‘qlar sonining ehtimoli eng kattasini toping.

Javob: X: 1 2 3 ... k ...

p: 0,2 0,16 0,128 ... $0{,}20{,}8^{k-1}$ ...

14. Ikki quroldan ulardan biri nishonga tekkizgunga qadar navbat bilan o‘q uzilmoqda. Birinchi qurol uchun nishonga tekkizish ehtimoli 0,3 ga ikkinchisiniki esa 0,7 ga teng. O‘q uzishni birinchi quroldan boshlashdi. Agar X, Y mos ravishda birinchi va ikkinchi qurollar sarf qilgan o‘qlar sonini bildirgan tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, ularning taqsimot qonunini toping.

Javob: X: 1 2 3 ... k ...

p: 0,3 $0{,}7 \cdot 0{,}3^2$ $0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3$ ... $0{,}7^{k-} \cdot 10{,}3^k$ ...;

Y: 1 2 3 k ...

p: $0{,}7^2$ $0{,}3 \cdot 0{,}7^3$ $0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4$ ... $0{,}3^{k-} \cdot 10{,}7^{k+1}$ ... .

15. Nishon doira (№1) va ikkita ichma-ich joylashgan halqadan (№2 va №3) iborat. Merganga doiraga tekkizish 10 ochko, №2 halqaga tekkizish 5 ochko va №3 halqaga tekkizish 1 ochko keltiradi. Doira va halqalarga tekkizish ehtimolliklari mos ravishda 0,5; 0,3; 0,2 ga teng. Nishonga uch marta uzilgandan so‘ng to‘plangan ochkolar yig‘indisining taqsimot qonunini toping.

Javob:

x_i	- 3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p_i	0,008	0,036	0,060	0,054	0,180	0,027	0,150	0,135	0,225	0,125

16. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

X:	1	3	5
p:	0,4	0,1	0,5

$Y=3X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

17. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

X:	p/4	p/2	3p/4
p:	0,2	0,7	0,1

$Y=\sin X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

18. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

X:	-2	-1	0	1	2
p:	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$Y=X^2+1$ va $Z=|X|$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini toping.

19. X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni berilgan:

X:	-1	0	2
p:	0,2	0,3	0,5

Y:	3	4
r:	0,4	0,6

$Z=X+Y$ va $S=X-Y$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini toping.

20. X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlariga ega:

X:	1	2
p:	0,3	0,7

Y:	-2	0	2
p:	0,2	0,5	0,3

$Z=XY$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

2.2. DISKRET TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

Matematik kutilma tasodifiy miqdor o‘rtacha qiymatining sonli xarakteristikasi sifatida xizmat qiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** deb uning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarining mos ehtimolliklariga ko‘paytmasining yig‘indisiga ayqiladi:

$$MX=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n.$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plami sanoqli bo‘lsa, u holda

$$MX=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

Matematik kutilmaning xossalari

1.O‘zgarmasning matematik kutilmasi uning o‘ziga teng:

$$MC=C.$$

2. Biror o'zgarmasga ko'paytirilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ana shu tasodifiy miqdor matematik kutilmasining o'zgarmasga ko'paytmasiga teng:

$$M(SX)=S\ MX.$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining yig'indisiga teng:

$$M(X+Y)=MX+MY\ .$$

4. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng:

$$M(XY)=MX\ MY.$$

Shuni aytish joizki, 3- va 4- xossalar ixtiyoriy sondagi tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli.

Ikki tasodifiy miqdor **bog'liqsiz** deb ataladi, agar ulardan birining taqsimot qonuni ikkinchisining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'lmasa va aksincha.

Tasodifiy miqdor qabul qila oladigan qiymatlarining o'zining matematik kutilmasi atrofida qanchalik sochilganini baholash uchun uning **dispersiyasi** va **o'rtacha kvadratik chetlanishi** xizmat qiladi.

X tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$DX=M[X-MX]^2=MX^2-(MX)^2.$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun:

$$DX=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-MX)^2\cdot p_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{\ 2}\cdot p_k-(MX)^2.$$

Dispersiyaning xossalari

1) O'zgarmasning dispersiyasi nolga teng:

$$DC=0.$$

2) Biror o'zgarmasga ko'paytirilgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi ana shu tasodifiy miqdor dispersiyasining kvadratga oshirilgan o'zgarmasga ko'paytmasiga teng:

$$D(SX)=S^2\ DX.$$

3) O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayirmasi)ning dispersiyasi bu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X\pm Y)=DX+DY.$$

X tasodifiy miqdorning **o'rtacha kvadratik chetlashishi (og'ishi)** deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}\cdot$$

X diskret tasodifiy miqdorning **modasi** deb, tasodifiy miqdorning eng ehtimolliroq qiymatiga aytiladi, ya'ni eng katta ehtimollikka $p^* = \max_i(p_i)$ mos kelgan x^* qiymat bu moda.

NAMUNAVIY MASALALAR YECHISH

1-masala. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o'rtacha kvadratik chetlanishini toping:

X	1	2	3	4	5
R	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Yechish: X va X^2 tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasini topamiz:

$$MX = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}1 = 3{,}1;$$

$$MX^2 = 1^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}3 + 5^2\cdot 0{,}1 = 10{,}9\cdot$$

Bundan dispersiya formulasiga asosan topamiz:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29.$$

X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlashishi:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{1{,}29} = 1{,}1357\cdot$$

Javob: $MX = 3{,}1;\quad DX = 1{,}29;\quad \sigma(X) = 1{,}1357.$

2-masala. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi berilgan: $MX = 5;\quad DX = 7.$ U holda Z=4X+3 tasodifiy miqdorning matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Yechish: Matematik kutilmaning 1—3-xossalariga asosan:

$$M(4X+3) = M(4X) + M(3) = 4\cdot MX + 3 = 4\cdot 5 + 3 = 23.$$

Dispersiyaning 1-3 xossalariga asosan esa:

$$D(4X+3) = D(4X) + D(3) = 4^2\cdot DX + 0 = 16\cdot 7 = 112.$$

Javob: $MX = 23;\quad DX = 112.$

MUSTAHKAMLASH UCHUN MASALALAR

1. Qurilish investitsiya kompaniyasi bitta aksiyasini 16 shartli pul birligi narxida sotmoqda. Investor aksiyalar paketini sotib olib, ularni bir yil davomida saqlamoqchi. X bitta aksiyaning bir yildan keyingi narxini bildiruvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. X ning taqsimot qonuni quyidagi jadval ko'rinishida berilgan:

X - aksiya narxi	*P(X)* - ehtimoli
16	0,35
17	0,25
18	0,25
19	0,10
20	0,05

a) Berilgan qatorning taqsimot qonuni barcha xossalariga ega ekanini ko'rsating.

b) Bir yildan so'ng aksiyaning kutilayotgan o'rtacha qiymati nimaga teng?

d) Bir yildan so'ng aksiyadan kutilayotgan o'rtacha yutuq qanchaga teng? Bu kutilayotgan qiymatda aks etgan investitsiyalardan qaytish foizi qancha?

e) Bir yildan keyingi aksiya narxining dispersiyasini aniqlang.

Javob: b) 17,25; d) 1,25; e) 1,3875.

2. Ikkita qurilish shartnomasi uch firma o'rtasida tasodifiy ravishda taqsimlanadi. Har bir firma yoki bitta yoki ikkala shartnomani ham olishi mumkin. Har bir olingan shartnomadan firmaning oladigan daromadi 90000 shartli pul birligidan iborat.

a) 1-firmaning kutilayotgan foydasini hisoblang.

b) Agar 1- va 2- firmalar bir shaxsga tegishli bo'lsa, u holda uning kutilayotgan umumiy foydasi qancha?

Javob: M(o'rtacha foyda)=60000; *M(umumiy foyda)*=120000.

3. Bir korxona yangi mahsulot ishlab chiqarish maqsadida korxonani ta'mirlash va kengaytirishni rejalashtirgan. Rahbariyat kelajak ahvolni tahlil qilgan holda katta va o'rtacha xarajatlarni ko'zda tutuvchi ikki loyihadan birini tanlashi zarur. Muammo shundan iboratki, korxona ishlab chiqarmoqchi bo'lgan yangi mahsulotga talab yaxshi o'rganilmagan. Talab past, o'rtacha va yuqori bo'lishii mumkin. Ehtimolliklar mos ravishda 0,2, 0,5 va 0,3 ga teng. X shartli ming pul birligidan daromadni bildirsin. Korxona katta va o'rtacha xarajatli loyihalar uchun quyidagi daromadlarni rejalashtirgan:

	Katta harajatlardagi daromad		O'rtacha harajatlardagi daromad	
Talab	*X*	*P(X)*	*X*	*P(X)*
Past	0	0,20	50	0,20
O'rtacha	100	0,50	150	0,50
Yuqori	300	0,30	200	0,30

a) Ikki turdagi loyiha uchun kutilayotgan o'rtacha daromadni hisoblang. Bo'lajak daromadni maksimallashtirish uchun korxona qanday yechimni tanlashi kerak?

b) Ikki turdagi loyiha uchun daromad dispersiyasini hisoblang. Noaniqlikni minimallashtirish uchun korxona qanday yechimni tanlashi kerak?

Javob: a) $M(X) = 145;\ 140;$ *b)* $D(X) = 2725;\ 12400.$

4. Tavakkalga asoslangan qandaydir biznes uchun daromad taxminan ming shartli pul birligiga teng va quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

x_i	- 2000	- 1000	0	1000	2000	3000
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Izoh: -2000, -1000 kamomadni bildiradi.

a) Bu biznesdan ehtimoli eng katta bo'lgan pul daromadi nimaga teng?

b) Ehtimollik nuqtaiy nazaridan bu tavakkalchilik o'zini oqlaydimi? Tushuntirib bering.

d) Biznesdan uzoq muddatga mo'ljallangan o'rtacha daromad nimaga teng?

Javob: d) 800.

5. Avvalgi paragrafning 7-masalasi uchun matematik kutilma, dispersiya va o'rtacha kvadratik og'ishni hisoblang.

Javob: $MX = 1,8;\quad DX = 2,76;\quad \sigma = 1,66.$

6. Agar kotibaga xatolari uchun jarima bir betda yo'l qo'ygan xatolari sonidan kvadrat ildiz kabi hisoblansa va har bir birlik shartli pul birligiga tenglashtirilsa, oldingi paragrafning 5- masalasi uchun jarimaning kutilayotgan o'rtacha hajmini hisoblang.

Javob: 1,73 sh. pul b.

7. Avvalgi paragrafning 8- masalasi shartidagi kundalik sotilgan avtomobillir sonining taqsimot qonunidan kelib chiqqan holda sotuvchining kutilayotgan o'rtacha ish haqini aniqlang. Ish haqi sotilgan avtomobillar sonidan kvadrat ildiz olib, uni 300 shartli pul birligiga ko'paytirilgani miqdoriga teng.

Javob: 465,85797 sh. pul b.

8. Oldingi paragrafning 6-masalasidagi taqsimot qatori uchun reklamaning ta'sirida bosh og'rig'iga qarshi yangi vosita sotib olgan odamlarning kutilayotgan foizi qancha bo'ladi? Dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlashish qanchaga teng?

Javob: 21,5%; $DX = 162,75;\quad \sigma = 12,7574.$

9. Oldingi paragrafning 4-masalasidagi berilganlar asosida ma'lum bir kunda portga kelayotgan kemalar soni kutilayotgan o'rta qiymatdan oshib ketish ehtimolini toping.

Javob: 0,3.

10. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X — tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping:

X	0,21	0,54	0,61
P	0,1	0,5	0,4

Javob: MX=0,535.

11. Agar MX=2 va MY=6 bo'lsa, $Z=3X+4Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Javob: MZ=30.

12. X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas. Agar DX=4 va DY=5 bo'lsa, $Z=2X+3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: DZ=61.

13. Agar X-diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ va MX=2,3; MX^2=5,9 ekanligi ma'lum bo'lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini aniqlang.

Javob: $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}5$.

14. X-diskret tasodifiy miqdor faqat uch qiymat qabul qila oladi: $x_1 = 1$, x_2, x_3 va $x_1 < x_2 < x_3$. Agar $P(X=x_1)=0{,}3$; $P(X=x_2)=0{,}2$; $MX=2{,}2$ hamda $DX=0{,}76$ ekanligi ma'lum bo'lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javob:

X:	1	2	3
P:	0,3	0,2	0,5.

2.3. BA'ZI DISKRET TAQSIMOT QONUNLARI

Tekis taqsimlangan diskret tasodifiy miqdorlar

Tekis taqsimlangan diskret tasodifiy miqdor deb chekli sondagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlarni teng ehtimolliklar $p_n = 1/n$ bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga aytiladi. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutulishi qabul qiladigan qiymatlarining o'rtacha arifmetigiga teng.

1-masala. X tasodifiy miqdor o'yin soqqasi tashlanganda ustki yog'ida tushgan ochkolar soni va Y tasodifiy miqdor tanga tashlaganda gerb tomoni bilan tushsa 1, raqam tomoni bilan tushsa 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} Y & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Binomial taqsimot

Aytaylik, n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi o'tkazilganida biror A hodisa ro'y berishi yoki bermasligi mumkin. A ning ro'y berish ehtimoli p tajribadan tajribaga o'zgarmas bo'lib qoladi. Teskari hodisaning ehtimoli esa $q=1-p$ ga teng. Tajribalarning o'zaro bog'liq emasligi har bir tajribada A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi qolgan tajribalar natijalariga bog'liq emasligini bildiradi.

X diskret tasodifiy miqdor n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro'y berishlari soni, p esa A hodisaning ehtimoli bo'lsin, ya'ni avval ko'rib o'tilgan Bernulli sxemasi o'rinli bo'lsin. Ana shu tasodifiy miqdor n va p parametrli **binomial taqsimot qonuniga** bo'ysunadi:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad k=0,1,2,\dots,n.$$

Binomial taqsimotning matematik kutilma va dispersiyasi:

$$MX=np; \quad DX=npq.$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. $B(n;p)$ parametrli binomial taqsimlangan X tasodifiy miqdorning m qiymat qabul qilish ehtimoli $P(X=m)$ (ya'ni: Bernulli sxemasida A hodisaning n tajribaning m tasida ro'y berish ehtimoli $P_n(m)$) va bu tasodifiy miqdorning m dan katta bo'lmagan qiymatlar qabul qilish ehtimoli $P(X\le m)$ (ya'ni, hodisaning ko'pi bilan m marta ro'y berish ehtimoli $P_n(0;m)$) larni maxsus
BINOMRASP(SON_S;SINOVLAR;S_EHTIMOLLIK; INTEGRAL)
nomli funksiya hisoblaydi. Bunda SON_S ro'y berishlar soni (ya'ni m); SINOVLAR – barcha tajribalar soni (ya'ni n); S_EHTIMOLLIK – har bir tajriba uchun hodisaning ro'y berish ehtimoli (ya'ni p); INTEGRAL – parametr ROST (ISTINA) qiymat qabul qilsa $\boldsymbol{P(X=m)}$ ehtimollik hisoblanadi; parametr YOLG'ON (LOJ) qiymat qabul qilsa $\boldsymbol{P(X\le m)}$ ehtimollik hisoblanadi;

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar SON_S; SINOVLAR; S_EHTIMOLLIK — miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishii kerak.

2-masala. Bir shaharda 30% aholi ish joyiga shaxsiy avtotransportida borishni afzal ko'radi. Tasodifiy ravishda 8 ta odam tanlab olindi. X — shaxsiy avtomobilni afzal ko'radiganlar soni. Uning taqsimot qonunini toping.

Yechish: X ning mumkin bo'lgan qiymatlari 0,1,2, ...8; ularga mos kelgan ehtimolliklar $P(X=k)$ quyidagi Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi:

$$P(X=k)=P_8(k)=C_8^k\cdot(0{,}3)^k\cdot(0{,}7)^{8-k}; \qquad k=0,1,2,\dots,8$$

P(X = k) ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **BINOMRASP(k;8;0.3;YOLG'ON).**

3-masala. n dona o'yin soqqasi bir vaqtda tashlandi. X tasodifiy miqdor soqqalarning ustiki tomonida tushgan ochkolar yig'indisining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish: X_k k-chi soqqaning ustki tomonida tushgan ochkolar soni bo'lsin. U holda X_k o'zaro bog'liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar:

$$X \doteq X_1+X_2+\cdots+X_n. \qquad \begin{pmatrix} X_k & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad k=1,n.$$

$MX_k=21/6=3{,}5$ va $DX_k=MX_k^2-(MX_k)^2=91/6-(21/6)^2=35/12$

Matematik kutilma va dispersiya xossalariga asosan:

$$MX=M(X_1+\dots+X_n)=MX_1+\dots+MX_n=n\cdot MX_k=3{,}5n;$$

$$DX=D(X_1+\dots+X_n)=DX_1+\dots+DX_n=n\cdot DX_k=35n/12.$$

Javob: $MX=3.5n$; $DX=35n/12$.

4-masala. Sifat tekshirish bo'limi mahsulotlarning sifatini tekshirmoqda. Mahsulotning sifatli bo'lishi ehtimoli 0,9 ga teng. Har bir partiyada 5 tadan mahsulot bor, partiyalar soni 50 ta. X tasodifiy miqdor aynan 4 dona sifatli mahsulotlar bor partiyalar soni. X tasodifiy miqdorning matematik kutulishini toping.

Yechish: A hodisa 5 ta mahsulotdan iborat partiyada aynan 4 dona sifatli mahsulotlar bor ekanligi bo'lsin. Bu hodisa ehtimolini Bernulli formulasidan n=5 va p=0,9 qiymatlarda hisoblaymiz:

$$P = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1 = 0{,}32805.$$

$P_5(4)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **BINOMRASP(4;5;0.9;YOLG'ON).**

X tasodifiy miqdor N=50 va $P = C_5^4 \cdot 0.9^4 \cdot 0.1$ parametrli binomial taqsimotga ega bo'lgani uchun uning taqsimot qonuni quyidagicha:

$$P(X = k) = P_N(k) = C_N^k \cdot P^k \cdot (1-P)^{N-k} = C_{50}^k P^k (1-P)^{50-k};$$
$$k = 0,1,2,\ldots,50.$$

$P(X = k)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **BINOMRASP(k;50;R;YOLG'ON).**

Binomial taqsimotning matematik kutulishi nimaga tengligini esga olsak:

$$MX = N \cdot P = 50 \cdot C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 16{,}4025 \approx 16.$$

Javob: $MX \approx 16$.

Puasson taqsimot qonuni

Puasson taqsimoti ko'pincha ma'lum vaqt oralig'ida yoki uzunlik (yuza, hajm) oralig'ida hodisaning ro'y berishlar soni ustida gap borganda va ehtimollik juda kichik bo'lganda ishlatiladi. Masalan: 10 daqiqa davomida telefon stansiyasiga qilingan qo'ng'iroqlar soni; bir soat davomida yoqilg'i quyish stansiyasiga kelgan mashinalar soni; 100 km uzunlikka ega bo'lgan suv quvuridagi nosozliklar soni; ma'lum hududdagi bir hafta davomida ro'y bergan yo'l transport hodisalari soni va h.k;

Puasson taqsimoti bilan taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., k, ... qiymatlarni

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu yerda $\lambda = np$, n-tajribalar soni, p hodisani ehtimoli.

Puasson taqsimotining matematik kutilma va dispersiyasi quyidagicha:

$$MX = \lambda; \quad DX = \lambda.$$

⊞ **EXCEL** dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. *l* parametrli Puasson taqsimoti bo‘yicha taqsimlangan *X* tasodifiy miqdorning *m* qiymat qabul qilish ehtimoli **R(X=m)** ni maxsus

PUASSON(X;O‘RTACHASI;INTEGRAL)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda *X* — ro‘y berishlar soni (ya’ni m); O‘RTACHASI — taqsimotning matematik kutulishi (ya’ni *l* parametr); INTEGRAL — parametr ROST (ISTINA) qiymat qabul qilsa ***P(X=m)*** ehtimollik hisoblanadi; parametr YOLG‘ON (LOJ) qiymat qabul qilsa P(X≤m) ehtimollik hisoblanadi;

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar X; O‘RTACHASI — miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo‘lishi kerak.

5-masala. Bankka tashrif qiluvchi shaxslar soni Puassona taqsimotiga bo‘ysunadi. O‘rta hisobda bankka har 3 daqiqada bir mijoz kirar ekan.

a) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka bir mijoz kirishi ehtimolini toping.

b) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka kamida uch kishi kirish ehtimolini toping.

Yechish: Masalanining shartiga kura o‘rta hisobda bankka xar 3 daqiqada bir mijoz kirar ekan. Puasson taqsimoti uchun matematik kutulish λ parametrga teng ekanligini hisobga olsak, l=1/3 ekanligini hosil qilamiz.

a) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka bir mijoz kirishi ehtimolini topamiz:

$$P(X=1) = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1/3}}{3} = 0.2388;$$

⊞ **P(X = 1)** ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **PUASSON(1;1/3;YOLG‘ON)**

b) Navbatdagi bir daqiqa davomida bankka kamida uch kishi kirish ehtimolini topish uchun teskari hodisa, ya’ni ko‘pi bilan ikki kishi kirish ehtimolini topamiz:

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}\right) = e^{-1/3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) = 0,9951;$$

Izlanayotgan ehtimollik:

$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0,9951 = 0,0048;$$

P(X ≥ 3) ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **1-PUASSON(2;1/3;ROST)**

Javob: a) 0,2388; *b)* 0,0048.

n — cinovlar soni katta, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli esa yetarlicha kichkina bo'lganida Puasson taqsimoti yordamida binomial taqsimotni taqribiy hisoblash mumkin:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad \lambda = np.$$

6-masala. Radioapparat 1000 ta elementdan tashkil topgan. Bir yil davomida bitta elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng va qolgan elementlarning holatiga bog'liq emas. Ikkita hamda kamida ikkita elementning ishdan chiqish ehtimollarini toping.

Yechish: X — ishdan chiqqan elementlar sonini bildiruvchi tasodifiy miqdor bo'lsin. Bu tasodifiy miqdor binomial taqsimotga ega. n=1000 — sinovlar soni katta, bitta elementning ishdan chiqish hodisaning ro'y berish ehtimoli esa yetarlicha kichkina p=0,001 bo'lgani uchun binomial taqsimotni Puasson taqsimoti yordamida taqribiy hisoblash mumkin. U holda Puasson taqsimotga ko'ra:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \lambda = 1000 \cdot 0,001 = 1$$

va

1) roppa-rosa ikkita elementning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P(X=2) \approx \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{1}{2e} = 0,184\,.$$

$P(X=k)$ ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyalarga murojaat: **BINOMRASP(2;1000;0.001;YOLG‘ON)** yoki PUASSON(2;1;YOLG‘ON)

2) kamida ikkita elementning ishdan chiqish ehtimoli:

$$P(X \geq 2) = \sum_{k=2} P_{1000}(k) = 1 - p_0 - p_1 \approx 1 - e^{-2}(1+\lambda) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264.$$

P(X $\geq$ 2) ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **1-BINOMRASP(1;1000;0.001;ROST)** yoki PUASSON(1;1;ROST)

Javob: $P(X=2) \approx 0.184$. $P(X \geq 2) \approx 0.264$.

Geometrik taqsimot

X diskret tasodifiy miqdor 0, 1, 2, ..., k, ... qiymatlarni

$$P(X=k) = p \cdot (1-p)^k, \quad (0 < p < 1)$$

ehtimollik bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga p parametrli **geometrik taqsimot**ga ega bo‘lgan tasodifiy miqdor deyiladi.

$P(X=k)$ – Bernulli sxemasida hodisaning aynan k ta sinovdan so‘ng birinchi marta (hodisaning birinchi bor k+1 chi tajribada) ro‘y berish ehtimoliga teng.

Geometrik taqsimot uchun matematik kutilma va dispersiya quyidagicha:

$$MX = \frac{1-p}{p}; \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

7-masala. Uskuna mustahkamligi sinovlardan o‘tkazilmoqda. Sinovlar uskunaning ishdan chiqishiga qadar o‘tkaziladi. Har bir sinovda uskunaning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. Muvaffaqiyatli o‘tgan tajribalar sonining matematik kutulishi va dispersiyasini toping.

Yechish: Masalaning shartiga ko‘ra muvaffaqiyatli o‘tgan tajribalar soni p=0,1 geometrik taqsimotga ega. Geometrik taqsimotning matematik kutulishi va dispersiyasi formulalariga asosan:

$$MX = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0{,}1}{0{,}1} = 9; \quad DX = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0{,}1}{0{,}1^2} = 90.$$

Javob: $MX = 9$, $DX = 90$.

Gipergeometrik taqsimot

Gipergeometrik taqsimot uchta parametr *N, M, n* lar yordamida aniqlanadi.

Quyidagi masalani ko'raylik. *N* ta mahsulot partiyasida *M* dona sifatsizi bor *(M<N)*. Tekshirish uchun partiyadan tasodifan *n* ta mahsulot olindi. *X* tasodifiy miqdor tanlanmadagi sifatli mahsulotlar soni. *X* tasodifiy miqdor *m*=0, 1, 2, ..., *min(M,n)* qiymatlarni quyidagi ehtimolliklar bilan qabul qiladi:

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1 \div n$$

Gipergeometrik taqsimot uchun matematik kutilma va dispersiya quyidagicha bo'ladi:

$$MX=\frac{nM}{N};\quad DX=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. (N,M,n) parametrli gipergeometrik taqsimlangan *X* tasodifiy miqdorning *m* qiymat qabul qilish ehtimoli ***P(X=m)*** ni maxsus

GIPERGEOMET(S;TANLANMA_HAJMI;BOSH_TO'PLAM_S; BOSH_TO'PLAM_HAJMI)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda S ro'y berishlar soni (ya'ni m); **TANLANMA_HAJMI** – tanlanma hajmi (ya'ni n); **BOSH_TO'PLAM_*S*** – tanlanma olinayetgan to'plamdagi sifatli elementlar soni (ya'ni *M*); **BOSh_TO'PLAM_ HAJMI** – tanlanma olinayotgan to'plam hajmi (ya'ni *N*);

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **S;TANLANMA_HAJMI; BOSH_ TO'PLAM_S; BOSH_TO'PLAM_HAJMI** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishii kerak.

n va *M* parametrlar o'zgarmay qolganda $N \to \infty$ gipergeometrik taqsimot binomial taqsimotga yaqinlashar ekan. (*n/N* kattalik yetarlicha kichik bo'lsa qaytarilmaydigan tanlanma·qaytariladigan tanlanmadan deyarli farq qilmaydi). *p=M/N* sifatli mahsulotlar chastotasi bo'lsin. Agar *n/N*<0,1 tengsizlik o'rinli bo'lsa, gipergeometrik taqsimotni binomial taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin, ya'ni

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_N^n p^k (1-p)^{n-k}$$

8-masala. 25 ta mahsulotdan iborat partiyada 6tasi sifatsiz. Tekshirish uchun partiyadan tasodifan 3 ta mahsulot olindi. X tasodifiy miqdor tanlanmadagi sifatli mahsulotlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Matematik kutilma va dispersiyani hisoblang.

Yechish: Masalaning shartiga ko'ra: N=25, M=6, n=3. X tasodifiy miqdor 0,1,2,3 qiymatlarni qabul qila oladi. Bu qiymatlarga mos ehtimolliklarni hisoblash uchun

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=\frac{C_6^m C_{19}^{3-m}}{C_{25}^3},\quad m=0,1,2,3.$$

formuladan foydalanamiz va taqsimot qonunini yozamiz:

X:	0	1	2	3
p:	0,421	0,446	0,124	0,008

P(X = k) ehtimollikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat: **GIPERGEOMET(k;3;6;25).**

X tasodifiy miqdorning matematik kutulishi va dispersiyasini topamiz.

$$MX=\frac{nM}{N}=\frac{18}{25};\quad DX=n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)=\frac{3762}{7500}=0{,}5016.$$

Javob: $MX=18/25,\quad DX=0{,}5016.$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. $B(n,p)$ binomial taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=np;\quad DX=npq.$

2. Partiyadagi 100 ta mahsulotning 10 tasi nosoz. Tekshirish uchun partiyadan 5 ta mahsulot tasodifiy ravishda tanlab olinadi. Tanlanmadagi defekt mahsulotlarning matematik kutilmasini toping.

Javob: MX=0,5.

3. 10 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovda biror qurilmaning ishdan chiqishlari sonini bildiruvchi X — diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping. Har bir sinovda qurilmaning ishdan chiqish ehtimoli 0,9 ga teng.

Javob: DX=0,9.

4. 2 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinovlarda A hodisaning ro'y berishlar sonini bildiruvchi X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping. MX=0,9 ekanligi ma'lum.

Javob: DX=0,495.

5. O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $0 < p < 1$. Sinov hodisa ro'y bergunigacha o'tkaziladi. X hodisa ro'y bergunicha o'tkazish lozim bo'lgan sinovlar sonini bildirgan tasodifiy miqdor bo'lsa, uning matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Javob: $MX = (1-p)/p, \quad DX = (1-p)/p^2$.

6. Bankka kelayotgan mijozlar oqimi (soni) Puasson qonuniga bo'ysunadi. Agar bankka o'rtacha har 3 minutda bitta mijoz kirsa, quyidagi savollarga javob bering:

a) 1 minut davomida bankka bitta mijoz kirish ehtimoli nimaga teng?

b) 1 minut davomida bankka hech bo'lmaganda uchta mijoz kirish ehtimoli nimaga teng?

Javob: a) 0,2222; *b)* 0,5768.

7. O'z taomlari bilan dong'i ketgan restoranning ish boshqaruvchisi shanba oqshomida yarim soat davomida restoranga 15 tagacha mijozlar guruhi kelishini aytib maqtandi. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping.

a) 5 minut davomida birorta ham mijoz kelmasligi ehtimoli qancha?

b) 10 minut davomida 8ta mijoz kelishining ehtimoli qancha?

d) 10 minut davomida kamida 3 ta mijoz kelishining ehtimoli qancha?

8. λ parametrli Puasson taqsimotiga ega bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilma va dispersiyasini toping:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Javob: $MX = \lambda, \quad DX = \lambda$.

9. Bir element ishonchliligini tekshirish maqsadida u birinchi marta ishdan chiqqunga qadar ketma-ket sinovlar o'tkazilmoqda. Har bir sinovda elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. X o'tkazilishi lozim bo'lgan sinovlar sonining matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Javob: $MX = 10; \quad DX = 90$.

10. n ta o'yin soqqasi tashlangan. Yuqoriga qarab tushgan barcha yoqlaridagi ochkolar yig'indisining dispersiyasini toping.

Javob: DX=35n/12.

11. Texnik nazorat bo'limi mahsulotlarni standartlikka tekshirmoqda. Mahsulotning standart bo'lishi ehtimoli 0,9 ga teng. Har bir partiyada 5 ta mahsulot bor. X har birida roppa-rosa 4 ta standart mahsulot bo'lgan partiyalar sonini bildirgan tasodifiy miqdor bo'lsin. Agar tekshirilayotgan partiyalar soni 50 ta bo'lsa, X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Javob: $MX = 50 \cdot C_5^4 \cdot 0{,}9^4 0{,}1 \approx 16$.

12. Bir varakayiga n ta o'yin soqqasi tashlanmoqda. Agar tashlashlarning umumiy soni N ta bo'lsa, Har birida aynan m ta oltitalik tushgan tashlashlar sonining matematik kutilmasini toping.

Javob: $MX = N \cdot C_n^m \cdot (1/6)^m (5/6)^{n-m}$.

2.4. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR. TAQSIMOT VA ZICHLIK FUNKSIYALARI

Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun diskret tasodifiy miqdor kabi taqsimot qatorini aniqlab bo'lmaydi, chunki uzluksiz tasodifiy miqdor chekli yoki cheksiz oraliqning har bir qiymatini qabul qilishi mumkin va bunday qiymatlar soni sanoqsiz. Shu sabab uzluksiz tasodifiy miqdorlarni tasvirlashda va o'rganishda taqsimot va zichlik funksiyalaridan foydalaniladi.

Barcha $-\infty < x < \infty$ lar uchun X tasodifiy (diskret yoki uzluksiz) miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli kabi aniqlanadigan $\Phi(x)$ funksiyaga X tasodifiy miqdorning **taqsimot funksiyasi** deyiladi.

$$P\{X < x\} = F(x).$$

Taqsimot funksiyasisining xossalari

1. Taqsimot funksiyasining o'zgarish sohasi: $0 \le F(x) \le 1$;

2. X tasodifiy miqdorning $(a;b)$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimoli: $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$;

3. F(x) – kamaymaydigan funksiya, ya'ni agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1) \le F(x_2)$.

4. Quyidagi tengliklar o'rinli:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

5. Uzluksiz tasodifiy miqdor uchun: ixtiyoriy a da $P(X=a)=0$ bo'ladi va quyidagi tengliklar o'rinli :

$$P\{a\le X\le b\}=P\{a\le X<b\}=P\{a<X\le b\}=P\{a<X<b\}=F(b)-F(a);$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidan olingan hosila tasodifiy miqdorning **zichlik funksiyasi** f(x) deyiladi;

$$f(x)=F'(x).$$

Zichlik funksiyasining xossalari

1. F(x) – kamaymaydigan funksiya bo'lgani uchun $f(x)\ge 0$.

2. Zichlik funksiyasi berilgan bo'lsa, taqsimot funksiyasi quyidagi tenglik orqali aniqlanadi: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

3. X tasodifiy miqdorning (a;b) oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimoli: $P\{a<X<b\}=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

4. Zichlik funksiyasidan (-∞;+∞) oraliq bo'yicha zichlik funksiyadan olingan integral birga teng: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$;

Shunday qilib, tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi F(x) yoki zichlik funksiyasi f(x) bilan bir qiymatli aniqlanadi.

$F(x_p)=p$ tenglik bilan aniqlanadigan x_p kattalik taqsimotning ***p*–tartibli kvantili** deyiladi. 0,5 – tartibli kvantil **taqsimot medianasi** deyiladi: med $X = x_{0.5}$.

Agar zichlik funksiyasi maksimum nuqtaga ega bo'lsa, f(x) funksiya maksimumga erishadigan x argumentning qiymati **taqsimot modasi** deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha berilgan:

$$f(x)=cx^2e^{-kx}, \quad (k>0;\quad 0\le x<+\infty).$$

a) c koeffitsientni aniqlang;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

d) X tasodifiy miqdorning $\left(0;\frac{1}{k}\right)$ oraliqqa tushish ehtimolini topitng.

Yechish:

a) c koeffitsientni quyidagi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ tenglikdan aniqlaymiz:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} cx^2e^{-kx}dx = 1.$$

Bundan $c = \left(\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-kx}dx\right)^{-1}$. Ikki marta bo'laklab integrallasak $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-kx}dx = \frac{2}{k^3}$. Demak, $c = \frac{k^3}{2}$ va zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega $f(x) = \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}$.

b) X ning taqsimot funksiyasini quyidagi formuladan topamiz:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \frac{k^3}{2}t^2e^{-kt}dt = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2}e^{-kx}. \quad (0 \le x < +\infty)$$

d) $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right)$ ehtimollik esa quyidagicha aniqlanadi:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0.086.$$

Javob: $f(x) = \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}$;

$$F(x) = 1 - \frac{k^2x^2 + 2kx + 2}{2}e^{-kx}; \quad P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}.$$

2-masala. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega (arksinus qonuni):

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x \geq a; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arcsin\dfrac{x}{a}, & -a < x < a; \\ 0, & x \leq -a. \end{cases}$$

Quyidagilarni aniqlang:

a) X tasodifiy miqdorning $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli;

b) $x_{0,75}$ kvantili;

d) X tasodifiy miqdorning f(x) zichlik funksiyasi;

e) taqsimotning moda va medianasini toping.

Yechish:

a) X tasodifiy miqdorning $\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P\left(-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right)=F\left(\frac{a}{2}\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{\pi}arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

b) shartga ko‘ra p=0,75; $F(x_{0,75})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_{0,75}}{a}=0{,}75$. tenglamadan $x_{0,75}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

d) X tasodifiy miqdorning f(x) zichlik funksiyasi quyidagicha:

1) (- a;a) oraliqqa tegishli barcha x lar uchun

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}};$$

2) qolgan x lar uchun nolga teng.

e) $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$ funksiya maksimumga erishmaydi, shuning uchun arksinus taqsimot qonuni modaga ega emas.

Medianani topish uchun $F(x_{0,5})=0.5$ tenglamani yechamiz, ya’ni

$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_{0,5}}{a}=0{,}5$ va $x_{0,5}=0$. Demak, med X=0.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<2;\\ (x-2)^2, & \text{agar } 2\le x\le 3;\\ 1, & \text{agar } x>3.\end{cases}$$

a) *f(x)* zichlik funksiyasini;
b) X ning (1; 2,5) oraliqqa tushish ehtimolini toping.

Javob: a) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } \quad x<2 \text{ yoki } x>3,\\ 2(x-2), & \text{agar } \quad 2\le x\le 3;\end{cases}$ *b)* $p=0,25$.

2. [0;1]da tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funksiyasiga ega bo‘lsa, *f(x)* zichlik funksiyasini toping:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Javob: $(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } \quad x<0 \text{ yoki } x>1,\\ 1, & \text{agar } \quad 0\le x\le 1.\end{cases}$

3. Soliq to‘lovchilarning yillik daromadi taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & x\ge x_0,\\ 0, & x<x_0.\end{cases}\qquad (\alpha>0)$$

Tasodifiy ravishda tanlab olingan soliq to‘lovchi uchun 0,5 ehtimollik bilan oshiq bo‘lishi mumkin bo‘lgan yillik daromad hajmini aniqlang.

Javob: $2^{1/\alpha}\cdot x_0$.

4. Kompyuter qurilmasining buzilmasdan ishlash vaqtining taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega (eksponentsial taqsimot):

$$F(t)=1-\exp\left(-\frac{t}{T}\right),\qquad (t\ge 0).$$

a) T vaqt davomida buzilmasdan ishlash ehtimolini;
b) *f(t)* zichlik funksiyasini toping.

Javob: a) $p=1/e$; *b)* $f(t)=\dfrac{1}{T}\exp\left(-\dfrac{t}{T}\right),\qquad (t\ge 0).$

5. Veybul taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x^m}{x_0}\right). \qquad (x\geq 0).$$

Ko'p hollarda bu taqsimot elektron apparatning ishlash muddatini xarakterlaydi.

a) *f(x)* zichlik funksiyasini;

b) *p* — tartibli taqsimot kvantilini ;

d) taqsimot modasini toping.

Javob: a) $f(x)=\frac{m}{x_0}\cdot x^{m-1}\exp\left(-\frac{x^m}{x_0}\right), (x\geq 0;$

b) $x_p=\left(-x_0\cdot\ln(1-p)\right)^{1/m}$; d) $\left(\frac{m-1}{m}x_0\right)^{\frac{1}{m}}$.

6. *X* tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi (Koshi qonuni) berilgan:

$$F(x)=c+b\cdot arctg\frac{x}{a}(-\infty<x<\infty).$$

a) *s* va *b* o'zgarmaslarni;

b) zichlik funksiyasini;

d) $P(\alpha<X<\beta)$ ehtimollikni toping.

Javob: $c=1/2$; $b=1/p$;

b) $f(x)=\frac{a}{\pi\cdot\left(a^2+x^2\right)}$; d) $P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\pi}\cdot arctg\frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+\alpha\cdot\beta}$.

7. $f(x)=a\cdot exp\left(-x^2\right)$ funksiya barcha haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan *X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi bo'lishi uchun *a* parametr nechaga teng bo'lishi kerak?

Javob: $a=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

8. *X* tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

a) *A* koeffitsientni;

b) *F(x)* taqsimot funksiyasini;

d) $P(0<X<1)$ ehtimollikni toping.

Javob: a) $A=1/p$; *b)* $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsin\,x$; *d)* $P(0<X<1)=1/4$.

9. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan

$$f(x)=\frac{2A}{e^{x}+e^{-x}} \quad (-\infty<x<\infty) \text{ (giperbolik sekans qonuni).}$$

a) Noma'lum A koeffitsientni;
b) $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping;

Javob: a) $A=1/\text{p}$; *b)* $F(x)=\frac{2}{\pi}arctg\left(e^{x}\right)$.

10. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{2}\cdot\sin x, & \text{agar} \quad 0<x\le\pi, \\ 0, & \text{agar} \quad x>\pi. \end{cases}$$

a) $F(x)$ taqsimot funksiyasini;
b) X ning $(0;\ \pi/4)$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

Javob: a) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x\le 0, \\ \frac{1}{2}\cdot(1-\cos x), & \text{agar} \quad 0<x\le\pi, \\ 1, & \text{agar} \quad x>\pi. \end{cases}$$

b) $(2-\sqrt{2})/4\approx 0{,}5858$.

2.5. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx.$$

Avval diskret tasodifiy miqdorlar uchun keltirilgan matematik kutilmaning barcha xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlanadi.

Matematik kutilmaning xossalari

1. *O'*zgarmasning matematik kutilmasi uning o'ziga teng:

$$MC=C.$$

2. Biror o'zgarmasga ko'paytirilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ana shu tasodifiy miqdor matematik kutilmasining o'zgarmasga ko'paytmasiga teng:

$$M(SX)=S\cdot MX.$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining yig'indisiga teng:

$$M(X+Y)=MX+MY.$$

4. **O'zaro bog'liq bo'lmagan** tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi ular matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng:

$$M(XY)=MX\cdot MY.$$

Agar $Y=\varphi(X)$ barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx.$$

Butun OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)dx;$$

yoki unga teng kuchli tenglik:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2 f(x)dx.$$

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun avval keltirilgan dispersiyaning barcha xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham saqlanadi.

Dispersiyaning xossalari

1. O'zgarmasning dispersiyasi nolga teng:

$$DC=0.$$

2. Biror o'zgarmasga ko'paytirilgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi ana shu tasodifiy miqdor dispersiyasining kvadratga oshirilgan o'zgarmasga ko'paytmasiga teng:

$$D(SX)=S^2 DX.$$

3. **O'zaro bog'liq bo'lmagan** tasodifiy miqdorlar yig'indisi (ayirmasi)ning dispersiyasi ular dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X\pm Y)=DX+DY.$$

Agar $Y=\varphi(X)$ butun OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-M[\varphi(X)])^2 f(x)dx$$

yoki unga teng kuchli tenglik:

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x)\cdot f(x)dx-[M[\varphi(X)]]^2.$$

X (ham diskret ham uzluksiz) tasodifiy miqdorning **o'rtacha kvadratik chetlanishi** uning dispersiyasidan olingan kvadrat ildiz kabi aniqlanadi:

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}\,.$$

X uzluksiz tasodifiy miqdorning **modasi** M0X deb zichlik funksiyasining maksimum qiymatiga erishadigan argumentning qiymatiga aytiladi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning **medianasi** M_eX quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$P(X<M_eX)=P(X>M_eX)=0.5\,.$$

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli boshlang'ich momenti** quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx\,.$$

Barcha OX sonlar o'qida qiymatlar qabul qiluvchi X uzluksiz tasodifiy miqdorning ***k*-tartibli markaziy momenti** quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^k f(x)dx\,.$$

Ta'rifga ko'ra $k=1$ *da* $\nu_1=MX$, $\mu_1=0$; *va* $k=2$ *da* $\mu_2=DX=\nu_2-\nu_1^2$

Markaziy momentlar boshlang'ich momentlar orqali quyidagi formulalar yordamida ifodalanadi:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2;$$

$$\mu_3=\nu_3-3\nu_1\cdot\nu_2+2\nu_1^3;$$

$$\mu_4=\nu_4-4\nu_1\cdot\nu_3+6\nu_1^2\cdot\nu_2-3\nu_1^4$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x<0;\\ x/2, & \text{agar } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{agar } x>2.\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini hisoblang.

Yechish: Matematik kutulish ta'rifga asosan:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Dispersiya hisoblash formulasidan:

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{16}{9}x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{8}{9}x^3+\frac{8}{9}x^2\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(4-\frac{64}{9}+\frac{32}{9}\right)=\frac{2}{9}.$$

O'rtacha kvadratik chetlashishni hisoblaymiz:

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}=\frac{\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}47.$$

Javob: $MX=\frac{4}{3};\quad DX=\frac{2}{9};\quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}.$

2-masala. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x/2. & 0\le x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning 3-tartibli boshlang'ich va markaziy momentlarini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1/4, & 0\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Matematik kutilmaning ta'rifidan:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{4}xdx=\left.\frac{x^2}{8}\right|_0^4=\frac{16}{8}=2.$$

3-tartibli boshlang'ich momentni quyidagi formuladan topamiz:

$$\nu_3=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{4}x^3dx=\left.\frac{x^4}{16}\right|_0^4=16.$$

va nihoyat, 3-tartibli markaziy moment quyidagiga teng:

$$\mu_3=\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^3f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{4}(x-2)^3dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{4}\left(x^3-2x^2+4x-8\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+2x^2-8x\right)\right|_0^4=\frac{1}{4}\left(64-\frac{128}{3}+32-32\right)=\frac{16}{3}.$$

Javob: $\nu_3=16$, $\mu_3=\dfrac{16}{3}$.

3-masala. X tasodifiy miqdor $(0;\pi)$ oraliqda $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ ga va undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng zichlik funksiyasi bilan aniqlangan. $Y=\varphi(X)=X^2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping .

Yechish: $\varphi(X)$ tasodifiy argument funksiyasining matematik kutilmasini hisoblash formulasidan foydalanamiz:

$$M[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x^2\sin xdx$$

Ikki marta bo'laklab integrallagandan so'ng quyidagi natijaga kelamiz:

$$M\left[X^2\right]=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}x^2\sin xdx=\frac{\pi^2-4}{2}.$$

Javob: $M\left[X^2\right]=\dfrac{\pi^2-4}{2}$.

4-masala. X tasodifiy miqdor $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ oraliqda $f(x)=2\cos 2x$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. X tasodifiy miqdorning modasi va medianasini toping.

Yechish: $f(x)=2\cos 2x$ funksiya $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ oraliqda maksimumga ega emas, shuning uchun X tasodifiy miqdor modaga ega emas.

X tasodifiy miqdor medianasi M_e ni topamiz. Ta'rifga ko'ra

$$P(X<M_eX)=P(X>M_eX)=0.5.$$

X ning qabul qiladigan qiymatlari musbat bo'lgani uchun bu tenglikni

$$P(0<X<M_eX)=0.5 \text{ yoki } 2\int_0^{M_eX}\cos 2x dx=\sin 2M_eX=1/2$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $2M_eX=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Demak, $M_eX=\frac{\pi}{12}$.

Javob: a) modasi yo'q; b) X t. m. ning medianasi $M_eX=\frac{\pi}{12}$.

MUSTAHKAMLASH UCHUN MASALALAR

1. Savdo bazasida har birining narxi 100 shartli pul birligidan (sh. p. b) 10 ta motor sotishga tayyorlab qo'yilgan. Agar ularning orasidan hech bo'lmasa bitta nosoz motor chiqsa, xaridorga partiyaning ikki barobar miqdoridagi narxi qaytariladi. Har bir motorning nosoz bo'lish ehtimoli 0,08 ga teng bo'lsa, sotuvchining kutilayotgan daromadini toping.

Javob: 840 sh. p. b.

2. Neft qidirish kompaniyasi 10 ta buyurtma oldi. Qidiruvning muvaffaqyatli chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. Aytaylik, har bir qidiruvni bir-biriga bog'liq bo'lmagan guruhlar olib boradi. Muvaffaqiyatli qidiruvlarning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=1$; $DX=0{,}9$.

3. Semestr davomida o'qituvchilar talabalar tushunmagan mavzular bo'yicha qo'shimcha darslar olib boradilar. Statistika fani

o'qituvchisi belgilangan vaqtda keladigan talabalar soni tasodifiy miqdor ekanini bilgan holda bu darslarning bir soatiga o'rtacha 8 ta talaba kelayotganiga e'tibor berdi. Puasson taqsimotidan foydalangan holda quyidagi savollarga javob bering:

a) Ma'lum soatda statistikadan mashg'ulotga roppa-rosa 8 ta talaba kelishi ehtimoli qancha?

b) Ma'lum yarim soatda statistikadan mashg'ulotga roppa-rosa 3 ta talaba kelishi ehtimoli qancha?

Javob: a) 0,1396; *b)* 0,1954.

4. Tig'iz vaqt davomida shahar jamoat transportida o'rtacha soatiga ikkita yo'l hodisasi ro'y beradi. Ertalabki tig'iz vaqt 1,5 soat, kechkisi esa 2 soat davom etadi.

a) Ma'lum bir kunda ertalabki tig'iz vaqtda 3 ta yo'l hodisasi ro'y berish ehtimolini toping.

b) Kechki tig'iz vaqt davomida 2 ta yo'l hodisasi ro'y berish ehtimoli qancha?

d) Ma'lum bir kunda ertalabki va kechki tig'iz vaqt davomida birorta ham yo'l hodisasi ro'y bermasligi ehtimoli qancha?

Javob: a) 0,2240; *b)* 0,14656; *d)* 0,000912.

5. Xalqaro aeroportda turli reyslarning kelish vaqti elektron tabloda yoritilib turiladi. Bu ma'lumotlar ekranda tasodifiy ravishda va o'zaro bog'liq bo'lmagan holda paydo bo'ladi. O'rtacha aeroportga soatiga 10 ta reys keladi.

a) Bir soat davomida tabloda samolyotlarning kelgani haqida ma'lumot bo'lmasligi ehtimoli qancha?

b) Bir soat davomida kamida 3 ta samolyot kelishi ehtimoli qancha?

d) 15 daqiqa davomida birorta ham samolyot kelmasligi ehtimoli qancha?.

e) 15 daqiqa davomida hech bo'lmaganda 1 ta samolyot kelishi ehtimoli qancha?.

Javob: a) 0,000045; *b)* 0,010245; *d)* 0,0521; *e)* 0,9179.

6. Ishlab chiqarilayotgan shisha idishlarning taxminan 10%i biror yeri yorilgani sababli sifatsiz sanalib, olib tashlanadi. Agar tasodifiy ravishda 2 ta idish tanlab olingan bo'lsa, ularning ichidagi sifatsizlarining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=0,2$; $DX=0,18$.

7. Balandlikka sakrash bilan shug'ullanuvchi sportchining sport ustasi sakraydigan balandlikni ishg'ol qilish ehtimoli $0<p<1$ ga teng. Sportchi ana shu balandlikni ishg'ol qilguni qadar sakramoqchi. Agar o'rtacha urinishlar soni 5 ga teng bo'lsa, sportchining kamida

3-urinishda muvaffaqiyatga erishishi ehtimoli qancha?

Javob: 0,64.

8. Bir univermagda cheklar tekshirilmoqda. Xaridorlar kassa yoniga taxminan Puasson taqsimoti bo'yicha soatiga o'rtacha 7 tadan keladilar ekan. Tekshiruv paytida univermagga

a) ko'pi bilan 3 ta xaridor;

b) hech bo'lmaganda 2 ta xaridor;

d) 5 ta xaridor kirish ehtimolini toping.

Javob: a) 0,0817; *b)* 0,863; *d)* 0,1277.

9. Sug'urta kompaniyasining ma'lumotlariga ko'ra yoshi 50 dan oshgan sug'urta polisi egalarining 30%i sug'urta olishga jazm qiladilar. Tekshirish uchun sug'urta polisiga ega bo'lgan 15 kishi tanlab olindi. Kelgusi yili kamida 10 kishining sug'urta olishi ehtimoli qancha?

Javob: 0,0037.

10. Bir viloyat aholisining har bir fuqarosi rangli reklamani ko'rish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifiy ravishda 10 kishi tanlab olindi. Ulardan

a) 5 tasining reklamani ko'rgan bo'lishi ehtimoli;

*b) h*ech bo'lmaganda 2 kishining reklamani ko'rgan bo'lishi ehtimoli qancha?

Javob: a) 0,026; *b)* 0,6242.

11. Kotibaning bir betlik matnda yo'l qo'yadigan xatolari soni o'rtacha 4 ta bo'lib bu son Puasson qonuniga bo'ysunar ekan. Agar kotiba 4 tadan ko'p xatoga yo'l qo'ysa, butun betni qayta yozib chiqishi kerak bo'ladi. Ma'lum bir betni qayta yozishga to'g'ri kelishi ehtimoli nechaga teng?

Javob: 0,629.

12. Imtihon testlarida 15 ta savol bo'lib, ularning har birida 5 tadan javob variantlari bor. Javoblarning faqat bittasi to'g'ri. Aytaylik, talaba birorta ham savolga to'g'ri javobni bo'lmaydi. Uning hech bo'lmaganda 10 ta savolga to'g'ri javob berish ehtimoli qancha?

Javob: 0,0001.

13. Firma sotuvga 10 ta kompyuter taklif qilmoqda. Ulardan 4 tasining nosozligi bor. Xaridor mavjud nosozlikdan bexabar holda 5 ta kompyuter sotib oladi. Sotib olingan kompyuterlar ichida nosozi bo'lmaslik ehtimoli qancha? Bitta nosoz kompyuterni ta'mirlash $50 ga tushadi. Ta'mirlashga ketadigan umumiy xarajat o'rtachasining matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: 0,0238095; $M(X)=100$, $D(X)=16{,}667$

14. Zargarlik bo'limi sotuvchining kuzatishicha har bir xaridorning biror taqinchoq sotib olish ehtimoli 0,03 ga teng. Agar kun davomida magazinning shu bo'limiga 100 ta xaridor murojaat qilgan bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta taqinchoq sotilganligi ehtimoli nechaga teng?

Javob: $1 - 0{,}97^{100}$.

15. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlangan:

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Uning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=0;\quad DX=4\ \ 3$.

16. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha aniqlangan:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & 0\le t;\quad (\lambda>0).\end{cases}$$

Uning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=1\ \ \lambda;\quad DX=1\ \ \lambda^2$.

17. Maksvell qonuniga bo'ysunuvchi molekulalar harakatining zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(v)=\begin{cases}0, & v<0;\\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2\exp(-h^2v^2), & v\ge 0.\end{cases}$$

X tasoddifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi, moda va medianasini toping.

Javob: MX va DX mavjud emas, $M_eX=M_0X=0$.

18. Detal ekstsentrisitetini bildiruvchi X tasodifiy miqdor Reley taqsimotiga ega:

$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\quad (x\ge 0).$$

X tasodifiy miqdorning moda va medianasini toping.

Javob: $M_eX=\sigma\sqrt{2\ln 2};\quad M_0X=\sigma$.

19. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan (arksinus qonuni):

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ a+b\arcsin x, & -1<x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

a va b o'zgarmaslarni aniqlang. X tasodifiy miqdorning matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=0$; $DX=1/2$.

20. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishda:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning matematik kutilma va dispersiyasini toping.

Javob: $MX=DX=m+1$.

21. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<x_0; \\ 1-\dfrac{x_0^{\;3}}{x^3}, x\ge x_0. \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning matematik kutilma, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javob: $MX=\dfrac{3}{2}x_0; DX=\dfrac{3}{4}x_0^{\;2}; \sigma(X)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0$.

22. X tasodifiy miqdor $(0;\frac{\pi}{2})$ oraliqda $f(x)=\cos x$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. $Y=\varphi(X)=X^2$ tasodifiy miqdorning (Y ning zichlik funksiyasini topmay turib) matematik kutilmasini toping.

Javob: $MX=\dfrac{\pi^2-8}{4}$.

23. X tasodifiy miqdor $(0;1)$ oraliqda $f(x)=x+0{,}5$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. $Y=\varphi(X)=X^3$ tasodifiy miqdorning (Y zichlik funksiyasini topmay turib) matematik kutilmasini toping.

Javob: $MX=\dfrac{13}{40}$

24. X tasodifiy miqdor $(2;4)$ oraliqda $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. X ning moda va medianasini toping.

Javob: $M_eX=M_oX=3$.

25. X tasodifiy miqdor $(3;5)$ oraliqda $f(x)=\frac{3}{4}x^2+6x-\frac{45}{4}$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$. X ning moda va medianasini toping.

Javob: $M_eX=M_oX=4$.

26. X tasodifiy miqdor $(-1;1)$ oraliqda $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. X ning moda va medianasini toping.

Javob: X ning modasi yo'q; $M_eX=0$.

27. X tasodifiy miqdor $(0;2)$ oraliqda $f(x)=0.5x$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng. X tasodifiy miqdorning 1, 2, 3 va 4- tartibli boshlang'ich va markaziy momentlarini toping.

Javob: $\nu_1=4/3;\nu_2=2;\nu_3=3.2;\nu_4=16/3;$

$$\mu_1=0;\mu_2=2/9;\mu_3=-\frac{8}{135};\mu_4=\frac{16}{135}.$$

28. X tasodifiy miqdor $(0;1)$ oraliqda $f(x)=2x$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Undan tashqarida $f(x)=0$. X tasodifiy miqdorning 1, 2, 3 va 4-tartibli boshlang'ich va markaziy momentlarini toping.

Javob: $\nu_1=2/3;\nu_2=1/2;\nu_3=2/5;\nu_4=1/3;$

$$\mu_1=0;\mu_2=1/18;\mu_3=-\frac{1}{135};\mu_4=\frac{1}{135}.$$

2.6. BA'ZI UZLUKSIZ TAQSIMOT QONUNLARI

Tekis taqsimot qonuni – R(a;b).

(a;b) chekli oraliqdan qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi shu oraliqda o'zgarmas songa teng bo'lib, oraliq tashqarisida nolga teng bo'lsa, bunday tasodifiy miqdorga tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor yoki **tekis taqsimot qonuni**ga ega tasodifiy miqdor deyiladi.

Zichlik funksiyasi: $f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin(a;b); \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b). \end{cases}$

Taqsimot funksiyasi: $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x<a\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases}$

Matematik kutilmasi: $MX=\dfrac{b+a}{2}$.

Dispersiyasi: $DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

O'rtacha kvadratik chetlashishi: $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Matematik funksiyalar. (0;1) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning bitta qiymatini hisoblovchi maxsus

SLCHIS()

nomli funksiya hisoblaydi.

(a;b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning bitta qiymatini hisoblovchi maxsus

SLUCHMEJDU(QUYI_CHEGARA;YUQORI_CHEGARA)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **QUYI_CHEGARA** – oraliqning quyi chegarasi (ya'ni a); **YUQORI_CHEGARA** – oraliqning yuqori chegarasi (ya'ni b).

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **QUYI_CHEGARA;YUQORI_CHEGARA** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Ko'rsatkichli taqsimot qonuni – P(l) $(\lambda > 0)$.

Musbat qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, uning

Zichlik funksiyasi: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$

Taqsimot funksiyasi: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$

Matematik kutilmasi: $MX = \dfrac{1}{\lambda}$.

Dispersiyasi: $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

O'rtacha kvadratik chetlashishi: $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Ko'rsatkichli taqsimot uchun taqsimot $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$ yoki zichlik $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$ funksiyalarining qiymatlarini maxsus:

EKSPRASP(X;LYAMBDA;INTEGRAL)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X – funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni x); **LYAMBDA** – taqsimotning l parametri; **INTEGRAL – ROST (TRUE ISTINA)** va **YOLG'ON (FALSHE LOJ)** qiymatlarini qabul qiladi. Agar qiymati **ROST** bo'lsa, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$ taqsimot funksiyasi qiymati; **YOLG'ON** bo'lsa, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$ zichlik funksiyasi qiymati hisoblanadi.

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X;LYAMBDA** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Standart normal taqsimot qonuni – N(0;1) ga bo'ysungan tasodifiy miqdor $(-\infty;+\infty)$ oraliqda qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, uning:

zichlik funksiyasi: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$;

тaqsimot funksiyasi: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$;

matematik kutilmasi: $MX=0$;

dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlashishi: $DX=\sigma(X)=1$.

$\varphi(x)$ (Laplas funksiyasi) va $\Phi(x)$ (Laplas integral funksiyasi) funksiyalarning qiymatlari jadvallashtirilgan bo'lib, ilovaning uchinchi va to'rtinchi jadvallarida keltirilgan.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Standart normal taqsimot funksiyasi $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ ning qiymatlarini maxsus **NORMSTRASP(Z)** nomli funksiya hisoblaydi.

Bunda Z – funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni *x*).

E s *l a t m a* : maxsus funksiyaga murojaat qilganda Z parametr – miqdoriy qiymatlar yoki u joylashgan yacheykaning adresi bo'lishi kerak.

Normal taqsimot qonuni – N(a;s2) ga bo'ysungan tasodifiy miqdor $(-\infty;+\infty)$ oraliqda qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, uning:

zichlik funksiyasi: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$;

taqsimot funksiyasi: $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt$;

matematik kutilmasi: $MX=a$;

dispersiyasi: $DX=\sigma^2$;

o'rtacha kvadratik chetlashishi: $\sigma(X)=\sigma$;

Tasodifiy miqdorning $(\alpha;\beta)$ oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Xususan, $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar. Normal taqsimot

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \text{ yoki zichlik } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

funksiyalarining qiymatlarini maxsus:
NORMRASP(X;O'RTACHASI;STANDART_CHETL;INTEGRAL) nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X- funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni x); **O'RTACHASI** – taqsimotning a parametri; **STANDART_CHETL** – taqsimotning σ^2 parametri; **INTEGRAL** – **ROST(ISTINA)** va **YOLG'ON(LOJ)** qiymatlarini qabul qiladi. Agar qiymati ROST bo'lsa,

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$ taqsimot funksiyasi qiymati;

YOLG'ON bo'lsa, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ zichlik funksiyasi qiymati hisoblanadi.

Standart normal taqsimot uchun taqsimot funksiyasi F(x) **va zichlik funksiyasi** j(x) larning qiymatini **NORMRASP maxsus funksiyasi yordamida hisoblash:**
F(x): murojat **NORMRASP(X;0;1;ISTINA);**
j(x): murojat **NORMRASP(X;0;1;LOJ);**
E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X;O'RTACHASI;STANDART_CHETL** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Pyer Parijdagi Orli aeroportining valyuta almashtirish bo'limida ishlaydi. Uning bo'limi kechasi aeroportning banki yopiq bo'lgan paytda ishlaydi va Pyer asosan Amerikaga qaytayotib, o'z franklarini

dollarga almashtiradigan amerikalik turistlarga xizmat qiladi. Pyer o'z tajribasidan biladiki, mavsum davomida ixtiyoriy tundagi dollarga bo'lgan talab taxminan o'rtachasi \$25 000 va o'rtacha kvadratik og'ishi \$5000 ga teng bo'lgan normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Agar Pyer ko'p naqd pul saqlasa, u holda shtraf to'lashi kerak (naqd pul foizi). Agar pul yetmasa, bankning tunda ishlaydigan bo'limiga naqd pul uchun odam yuborishi kerak. Bu esa yana oshiqcha harajat keltirib chiqaradi. Pyer 85% ishonch bilan tunda kerak bo'ladigan valuta miqdorini qoplaydigan naqd pulga ega bo'lishni xohlaydi. Pyerga kerak bo'ladigan dollar miqdorini aniqlashga yordam bering.

Javob: 30 185 *doll.*

2. $a=-44$, $\sigma=16$ parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning musbat bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,003.

3. Zavoddagi bir haftalik mahsulot ishlab chiqarish miqdori $a=134786$ birlik, $\sigma=13000$ birlik parametrlar bilan taxminan normal taqsimlangan. Haftalik mahsulot ishlab chiqarish miqdori

a) 150 000 birlikdan oshishi;

b) shu haftada 100 000 birlikdan kam bo'lishi;

d) aytaylik, mehnat mojorasi tufayli bir haftalik mahsulot ishlab chiqarish miqdori 80 000 birlikka kamaydi.

Menedjerlar kasaba uyushmalarini ishlab chiqarish haddan ziyod tushib ketganligida ayblamoqdalar. Kasaba uyushmalari esa ishlab chiqarish miqdori mumkin bo'lgan ($\pm 3\sigma$) chegarasidan kamaymaganligini ta'kidlamoqdalar. Siz kasaba uyushmalariga ishonasizmi?

Javob: a) 0,121; *b)* 0,0037.

4. Binodagi liftni kutish tasodifiy vaqti 0 dan 5 gacha oraliqda tekis taqsimlangan.

1). Bu tekis taqsimot uchun $F(x)$ taqsimot funksiyasini toping.

2). Liftni 3,5 minutdan ortiq kutish ehtimoli qancha?

3). Liftning dastlabki 45 sekund davomida kelish ehtimolini toping.

4). Liftni kutish vaqti 1 va 3 minut oralig'ida bo'lish ehtimoli qancha?

*Javob:2)*0,3; *3)*0,15; *4)*0,4.

5. Uyni ta'mirlayotgan usta soat 10 dan 18 gacha ixtiyoriy vaqtda kelishi mumkin. Uyning egasi uni soat 14 gacha kutdi va 1 soatga ish bilan chiqib ketdi. Ustaning ana shu vaqtda kelish ehtimoli qancha?

Javob: 0,25.

6. Katalog bo'yicha tovarlar sotadigan firma har oyda pochta orqali buyurtmalar qabul qiladi. Buyurtmalar soni noma'lum matematik kutilmasi a va o'rtacha kvadratik og'ishi s=560 bo'lgan normal taqsimot qonuniga ega. 90% holda bir oylik buyurtmalar soni 12439 dan oshadi. Firma tomonidan bir oyda olinadigan buyurtmalarning o'rtacha sonini toping.

Javob: 13158,6

7. Konteynerga joylashtirilayotgan tovarlarning massasi normal taqsimlangan tasodifiy miqdor. Konteynerlarning 65% i 4,9 tonna sof og'irlikka ega va 25%i 4,2 tonnadan kam og'irlikka ega ekanligi ma'lum. Konteyner sof og'irligining o'rtachasi va o'rtacha kvadratik og'ishni toping.

Javob: 5,83 *va* 2,41.

8. Antikvar auktsion egasi ma'lum san'at asarining narxi 500000 dan 2 000 000 so'mgacha bo'lgan oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblaydi. U holda

a) uning zichlik funksiyasini;

b) san'at asarining 675 000 so'mdan arzon narxga sotilish ehtimolini;

d) san'at asarining 1 000 000 so'mdan qimmat narxga sotilish ehtimolini toping.

Javob: b) 0,1167; *d)* 0.

9. Chorrahadagi harakat yashil rang har 2 daqiqada yonadigan avtomatik svetofor yordamida boshqariladi. Qizil rangga yurib ketgan avtomobilning bu svetofor oldida turib qolish vaqti (0;2) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor. O'rtacha kutish vaqti va o'rtacha kvadratik og'ishini toping.

*Javob:*1; 0,5773.

10. Aytaylik, kompaniya aksiyalarining narxi yil davomida matematik kutilmasi 48 shartli pul birligi (sh.p.b.) ga va o'rtacha kvadratik og'ishi 6 ga teng bo'lgan normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Qaralayotgan yilning ixtiyoriy tanlab olingan kunida aktsiyaning narxi

a) 60 sh.p.b. ortiq bo'lishi;

b) 60 sh.p.b. kam bo'lishi;

d) 40 sh.p.b. ortiq bo'lishi;

e) 40 va 50 sh.p.b. oralig'ida bo'lishi ehtimolini toping.

Javob: 0,02275; 0,9772; 0,90824; 0,5375.

11. Shaxtadagi kundalik qazib olingan ko'mir miqdori matematik kutilmasi 785 tonnaga va o'rtacha kvadratik og'ishi 60 ga teng bo'lgan normal taqsimot qonuniga bo'ysunadigan tasodifiy miqdordan iborat bo'lsa,

a) ko'mirning 800 tonnasi ma'lum bir kunda qazib olinishi ehtimolini;

b) 750 dan 800 tonnagacha ko‘mir qazib olinadigan ish kunlari ulushini;

d) ma’lum bir kunda ko‘mir qazib olish 665 tonnadan pasayib ketishi ehtimolini toping.

Javob: a) 0,4013; *b)* 0,58; *d)* 0,023.

12. Kompyuter qattiq diskining xizmat muddati o‘rtachasi 12000 soatga teng bo‘lgan ko‘rsatkichli taqsimot qonuniga bo‘ysunadigan tasodifiy miqdordan iborat. Xizmat muddati 20 000 soatdan oshadigan qattiq disklarning ulushini toping.

Javob: 0,1882.

13. Eshitish apparati batareyasining xizmat muddati taxminan $\lambda=1/12$ parametrli ko‘rsatkichli qonunga bo‘ysunadi. Xizmat muddati 9 kundan oshadigan batareyalarning ulushi qancha?

Javob: 0,4727.

14. Reklama agentligi xizmatchisining ta’kidlashicha tomoshabinlarning reklama roligining mazmunini eslab turish muddati $\lambda=0{,}25$ parametrli eksponensial qonunga bo‘ysunadi. 7 kundan so‘ng reklamani eslay oladigan tomoshabinlar ulushini toping.

Javob: 0,1739.

15. Kompyuter dasturlari tuzuvchisi o‘z dasturlarining ishonchliligini baholash uchun eksponensial taqsimotdan foydalanadi. 10 ta xato topganidan so‘ng u keyingi xatoni topgunicha ketadigan vaqt (kunlarda) $\lambda=0{,}25$ parametrli eksponensial qonunga bo‘ysunishiga amin bo‘ldi.

1. Birinchi xatoni aniqlashga ketgan o‘rtacha vaqtni;
2. Birinchi xatoni aniqlashga 5 kundan ortiq vaqt ketishi ehtimolini;
3. 11-xatoni topishga 3 kundan 10 kungacha vaqt ketishi ehtimolini toping.

Javob: $P(X>5)=0{,}8825$; $P(3<X<10)=0{,}1489$.

16. X tasodifiy miqdor (a, b) oraliqda tekis taqsimlangan. $MX=4$, $DX=4/3$ bo‘lsin. a va b parametrlarni aniqlang.

Javob: $a=2$; $b=6$.

17. X tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan. $MX=1$, $DX=1/12$ bo‘lsin. a va b parametrlarni aniqlang.

Javob: $a=0{,}5$; $b=1{,}5$.

18. X tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lib, zichlik funksiyasi quyidagicha aniqlangan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin (a,b); \\ 1, & x \in (a,b). \end{cases}$$

Agar MX=8,5 bo'lsa, a va b parametrlarni aniqlang.

Javob: a=8; b=9.

19. X tasodifiy miqdor (a,b) oraliqda tekis taqsimlangan bo'lib, zichlik funksiyasi $f(x)$ berilgan. Agar D=1/3 bo'lsa, a va b parametrlarni aniqlang.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(a,b);\\ 1/2, & x\in(a,b).\end{cases}$$

Javob: a=5; b=7.

20. (1;3) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Javob: MX=2; DX=1/3.

21. O'rta yoshdagi ayol kishining bo'yi a=164 sm; $s^2=(5{,}5\ sm)^2$ parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdordan iborat. Uning zichlik funksiyasini toping.

$$Javob:\ f(x)=\frac{1}{5.5\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{(x-164)^2}{60.5}\right)$$

22. X 0 va 4 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsin. Xning (-2; 3) oraliqdagi qiymatni qabul qilish ehtimolini toping.

Javob: p = 0,77453.

23. Sexda tayyorlangan detalning diametri 2,5 va 0,0001 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdordan iborat. Tasodifiy ravishda tanlab olingan detalning diametri 0,9973 ehtimollik bilan joylashadigan chegaralarni aniqlang.

Javob: o'2,47;2,53g'.

24. Shokoladli qutilar avtomatik ravishda qadoqlanadi. Ularning o'rtacha massasi 1,06 kg. Agar 5% quti 1 kg dan kam massaga ega bo'lsa, standart og'ishni toping. Qutilarning massasi normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

Javob: $\sigma\approx 0{,}0365\,kg$.

25. Ma'lum bir modda sistematik xatolarsiz tortiladi. Tortishdagi tasodifiy xatolik X o'rtacha kvadratik og'ishi 20 grammga teng bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi. Tortish xatoligi absolut qiymati bo'yicha 10 grammdan oshmasligi ehtimolini toping.

Javob: $P(|X|<10)=1-2\Phi(-0.5)\approx 0{,}383$.

26. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x(=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

a) taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini yasang;

b) MX va DX ni toping;

d) tasodifiy miqdorning matematik kutilmasidan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini toping;

e) $P\left(|X - MX| < 3 \cdot \sqrt{DX}\right)$ ehtimollikni toping.

Javob: a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$; *b)* $MX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$;

d) $P\left(X < \frac{1}{\lambda}\right) = F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$; e) $P\left(|X - MX| < 3 \cdot \sqrt{DX}\right) \approx 0{,}9817$.

27. Radioapparaturaning buzilmasdan ishlash vaqti quyidagi taqsimot funksiyasiga ega bo'lgan tasodifiy miqdordan iborat:

$$F(t) = 1 - \exp(-t/T) \qquad (t \ge 0)$$

a) radioapparaturaning T vaqt davomida buzilmasdan ishlash ehtimolini; b) $f(t)$ zichlik funksiyasini toping.

Javob: a) $p = 1/e$; *b)* $f(t) = \frac{1}{T}\exp(-t/T) \qquad (t \ge 0)$.

ECXEL dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlili. Tasodifiy miqdorlar modellashtirish. (Turli diskret va uzluksiz taqsimot qonunlariga ega tasodifiy miqdorlarni modellashtirish uchun mo'ljallangan.)

«Tasodifiy miqdorlarni modellashtirish» («генерация случайных чисел») dialog oynasining parametrlari

· ***O'zgaruvchilar soni*** — natijalar diapazonida to'ldirilishi kerak bo'lgan ustunlar soni;

· ***Tasodifiy miqdor realizatsiyalar soni*** — har bir ustunda tasodifiy miqdorning realizatsiyalari soni.

· ***Taqsimot qonuni*** — modellashtirilayotgan tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni bo'lib, u qo'yida keltirilgan taqsimot qonunlaridan biri bo'lishi kerak:

· ***Tekis taqsimot*** — (a; b) oraliqda aniqlangan tekis taqsimot R(a;b) bo'lib, ikkita a va b parametrlar bilan aniqlanadi; Taqsimot funksiyasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \frac{x - a}{b - a}, & x < a \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

· ***Normal taqsimot*** — matematik kutilishi *a* va o'rtacha kvadratik chetlashishi s bilan aniqlanadigan uzluksiz taqsimot — N(*a;s*); Taqsimot funksiyasi:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

· ***Bernulli taqsimoti*** — hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* bilan aniqlanadigan taqsimot bo'lib, ikkita qiymat qabul qiladi: hodisa ro'y bersa — 1 ga va ro'y bermasa 0 ga teng; Taqsimot qonuni:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

· ***Binomial taqsimoti*** — Har bir tajribada hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* va tajribalar soni *n* bilan aniqlanadigan Binomial taqsimot; Taqsimot qonuni:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k};\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

· ***Puasson taqsimoti*** — lyambda=1/o'rtachasi parametr bilan aniqlanadigan diskret taqsimot. Taqsimot qonuni:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

· ***Diskret taqsimoti*** — chekli sondagi qiymatlar va ularga mos kelgan ehtimolliklar bilan aniqlanadigan taqsimot. Kirish diapazoni ikkita ustun qiymatlar va ehtimollardan iborat va barcha ehtimollar yig'indisi birga teng bo'lishi kerak. Taqsimot qonuni:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

Tasodifiy sochilish — ixtiyoriy qiymat bo'lib, ikkinchi bor shu oynaga murojaat qilganda yana o'sha qiymat kiritilsa, birinchi bor hisoblangan tasodifiy miqdorlarning realizatsiyasi takrorlanadi.

Chiqish diapazoni — natijalar chiqarilishga mo'ljallangan joyning chapdan birinchi yacheykasining adresi.

Yangi sahifa — maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi ochilgan sahifaning A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

Yangi kitob — maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi tashkil etilgan kitobning birinchi sahifasining A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

2.7. TASODIFIY MIQDOR FUNKSIYASINING TAQSIMOT QONUNI

Diskret hol. Diskret *x* tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
R	p_1	p_2	...	p_n	...

$y = g(x)$ – haqiqiy argumentning monoton funksiyasi bo‘lsin. U holda *x* tasodifiy miqdorning funksiyasi bo‘lgan *h=g(x)* diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

η	$g(x_1)$	$g(x_2)$	...	$g(x_n)$	...
R	p_1	p_2	...	p_n	...

Agar $y= g(x)$ – monoton funksiya bo‘lmasa, u holda

$$g(x_1),\ g(x_2),\ \dots\ ,\ g(x_n)$$

qiymatlarning orasida o‘zaro tenglari ham uchrashi mumkin. Bu holda $g(x_i)$ ning bir xil qiymatlari бир ustunga yozilib, mos ehtimolliklar qo‘shiladi.

Uzluksiz hol. *x* – $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi va $f_\xi(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsin. *y=g(x)* monoton o‘suvchi funksiya, $x = g^{-1}(y)$ – unga teskari funksiya bo‘lsin. U holda *h=g(x)* uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha topiladi:

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(g(\xi) < y) = P(\xi < g^{-1}(y)) = F_\xi(g^{-1}(y)).$$

Oxirgi tenglikni *Y* bo‘yicha differentsiallab (agar g(x) differentsiallanuvchi bo‘lsa), quyidagini hosil qilamiz:

$$F_\eta'(y) = F_\xi'(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}g^{-1}(y),$$

Bu tenglikdan h=g(x) uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi uchun formula kelib chiqadi:

$$f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'.$$

Agar *y=g(x)* monoton kamayuvchi funksiya bo‘lib, $x = g^{-1}(y)$ teskari funksiya bo‘lsin. U holda yuqoridagi mulohazalardan so‘ng

$$F_\eta(y) = 1 - F_\xi(g^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = -f_\xi(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'.$$

Formulalarni hosil qilamiz.

Shunday qilib, agar ξ uzluksiz tasodifiy miqdor $f_\xi(x)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan bo‘lib, *y=g(x)* differentsiallanuvchi, monoton o‘suvchi yoki monoton kamayuvchi funksiya va $g^{-1}(y)=\phi(y)$ unga teskari funksiya bo‘lsa, u holda $\eta=g(\xi)$ tasodifiy miqdorning $f_\eta(x)$ zichlik funksiyasi quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$f_\eta(y)=f_\xi(\phi(y))\cdot|\phi'(y)|$$

Amaliyotda asosan yqg(x) funksiya monoton bo‘lgan hol qo‘llaniladi.

Agar *y=g(x)* funksiya aniqlanish sohasida monoton bo‘lmasa, u holda bu sohani funksiya monotonik oraliqlariga bo‘linib, har bir monotonlik oralig‘i uchun $f_i(y)$ zichlik funksiyasini aniqlash va

$$f(y)=\sum_i f_i(y)$$

yig‘indi shaklida tasvirlash kerak bo‘ladi. Masalan, funksiya ikkita intervalda monoton bo‘lsin va $\phi_1(y)$ va $\phi_2(y)$ mos teskari funksiyalar bo‘lsin. U holda

$$f_\eta(y)=f_\xi(\phi_1(y))\cdot|\phi_1'(y)|+f_\xi(\phi_2(y))\cdot|\phi_2'(y)|.$$

bo‘ladi.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. *x diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:*

ξ_i	π /4	π /2	3π /4	π
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$\eta=\sin\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. η tasodifiy miqdor $\eta_i=\sin\xi_i$ ($\xi_i=\pi\cdot i/4$, $i=\overline{1,4}$) qiymatlarni p_i ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Demak, uning taqsimot qonuni

η_i	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

$y=\sin x$ funksiya $[-\pi/4;\pi]$ kesmada monoton emas va uning $\pi/4$ ва $3\pi/4$ nuqtalardagi qiymatlari o‘zaro teng. Yuqorida aytib o'tilganiday, bu holda bir xil qiymatlarni bitta ustunga yozamiz va mos ehtimolliklarni qo'shamiz. Shunday qilib, η ning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

η_i	0	1	$\sqrt{2}/2$
p_i	0,1	0,4	0,5

2-masala. $f_\xi(x)$ – $(a;\ b)$ oraliqda o'zgaruvchi x tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi. $\eta = 5\xi + 2$ tasodifiy miqdorning $f_\eta(y)$ zichlik funksiyasini toping.

Yechish: $y = 5x + 2$ funksiya differentsiallanuvchi va o'suvchi bo'lgani uchun $f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$ formula o'rinli. $g(x) = 5x + 2$ funksiyaga teskari funksiya $g^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{5}$. Endi $f_\xi\left(g^{-1}(y)\right)$ funksiyani topamiz: $f_\xi\left(g^{-1}(y)\right) = f_\xi\left(\frac{y-2}{5}\right)$. So'ngra $g^{-1}(y)$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz: $(g^{-1}(y))' = \frac{1}{5}$. Olingan natijalarni $f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$ formulaga qo'yamiz va η ning zichlik funksiyasini topamiz: $f_\eta(y) = \frac{1}{5} f_\xi\left(\frac{y-2}{5}\right)$. Va nihoyat, a<x<b va $y = 5x + 2$ ekanligidan $3a < y < 3b$.

3-masala. X tasodifiy miqdor $(0;2\pi)$ intervalda tekis taqsimlangan. $Y = \cos X$ tasodifiy miqdorning $f_Y(y)$ zichlik funksiyasini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdorning $f_X(x)$ differentsial funksiyasini topamiz. $(0;2\pi)$ oraliqda $f(x) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}$, undan tashqarida $f(x)=0$ ga teng.

Masala shartiga ko'ra: $g(x) = \cos x$. $y = \cos x$ tenglamadan $x = g^{-1}(y)$ teskari funksiyani topamiz. $(0;2\pi)$ oraliqda $y = \cos x$ funksiya monoton emas, shuning uchun uni $(0;\pi)$ va $(\pi;2\pi)$ oraliqlarga bo'lib olamiz. Bu oraliqlarda esa funksiya monoton. $(0;\pi)$ oraliqda teskari funksiya $\varphi_1(y) = \arccos y$; $(\pi;2\pi)$ oraliqda teskari funksiya

$\phi(y) = -\arccos y$. Qidirilayotgan zichlik funksiyasi quyidagi tenglikdan aniqlanishi mumkin:

$$f_Y(y) = f_X(\phi_1(y))\left|\phi_1'(y)\right| + f_X(\phi_2(y))\left|\phi_2'(y)\right|.$$

Teskari funksiyalarning hosilalarini topamiz:

$$\phi_1'(y) = (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \phi_2'(y) = (-\arccos y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Hosilalarning modulini olamiz:

$$\left|\phi_1'(y)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}; \quad \left|\phi_2'(y)\right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

So'ngra $f(x) = \frac{1}{2\pi}$ ekanligini hisobga olsak, $f(\phi_1(y)) = \frac{1}{2\pi}$, $f(\phi_2(y)) = \frac{1}{2\pi}$ va Y ning zichlik funksiyasi

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

ga teng bo'ladi. $y = \cos x$ va $0 < x < 2\pi$, shuning uchun $-1 < y < 1$.

Shunday qilib, zichlik funksiyasi $(-1;1)$ oraliqda $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, undan tashqarida $f_Y(y) = 0$ ga teng.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. ξ diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan.

ξ	1	3	5
p	0,4	0,1	0,5

$\eta = 3\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob:

η	3	9	15
p	0.4	0.1	0.5

2. ξ diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan:

ξ	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
p	0,2	0,7	0,1

$\eta = \sin\xi$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob:

η	$\sqrt{2}/2$	1
p	0,3	0,7

3. ξ diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan.

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$\eta = \xi^2 + 1$ va $\mu = |\xi|$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozing.

Javob:

η	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

μ	0	1	2
r	0,3	0,5	0,2

4. ξ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_\xi(x)$ bo‘lsa, $\eta = 3\xi$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f_\mu(y) = \frac{1}{3} f_\xi\left(\frac{y}{3}\right)$.

5. ξ tasodifiy miqdor $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ zichlik funksiyali normal taqsimotga ega. Unga teskari bo‘lgan $\eta = 1/\xi$ miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f_\eta(y) = \frac{1}{\sigma y^2\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2y^2\sigma^2}\right)$.

$y=0$ da $f_\eta(y)$ zichlik 2 -turdagi uzilishga ega.

6. ξ tasodifiy miqdor $f_\xi(x) = exp(-x)$, $x \geq 0$ zichlik funksiyasi bilan aniqlangan ko'rsatkichli taqsimotga ega. $\eta = exp(-\xi)$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi va taqsimot funksiyasini toping.

$$\text{Javob: } f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 1, & 0 < y \leq 1; \\ 0, & y > 1. \end{cases} \qquad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ y, & 0 < y \leq 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

7. ξ tasodifiy miqdor $(-\pi\ 2; \pi\ 2)$ oraliqda tekis taqsimlangan. $\eta = sin\,\xi$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

$$\text{Javob: } -1 < y < 1 \text{ da } f_\eta(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}}$$

va undan tashqarida nolga teng.

8. ξ tasodifiy miqdor $[-1;2]$ kesmada tekis taqsimlangan. $\eta = \xi^2$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

$$\text{Javob: } f_\eta(y) = \begin{cases} 1/(3\ y), & 0 < y \leq 1; \\ 1/(6\ y), & 1 < y \leq 4; \\ 0, \quad y \leq 0 & \text{yoki } \quad y > 4. \end{cases}$$

9. Qiymatlar to'plami $(0; +\infty)$ dan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasi berilgan. Y tasodifiy miqdorning $g(y)$ zichlik funksiyasini toping:

$a)Y = \exp(-X)$; $b)Y = \ln X$; $d)Y = X^3$; $e)Y = 1/X^2$; $f)Y = \sqrt{X}$.

Javob:

$$a)g(y) = \frac{1}{y}f\left(\ln\frac{1}{y}\right), \quad (0 < y < 1); \qquad b)g(y) = \exp(y)f(\exp(y)), \quad (-\infty < y < \infty);$$

$$d)g(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f\left(\sqrt[3]{y}\right), \quad (0 < y < \infty); \qquad e)g(y) = \frac{1}{2y\sqrt{y}}f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right), \quad (0 < y < \infty);$$

$$f)g(y) = 2y \cdot f(y^2), \quad (0 < y < \infty).$$

2.8. IKKI TASODIFIY ARGUMENT FUNKSIYASI. KOMPOZITSIYA FORMULASI

Agar tasodifiy miqdorlarning har bir (X, Y) juftligiga biron Z tasodifiy miqdorning bitta qiymati mos kelsa, u holda Z **ikki tasodifiy argument funksiyasi** deyiladi va $Z = \varphi(X, Y)$ ko'rinishida yoziladi.

Ikkita bog'liqsiz X va Y tasodifiy miqdorlar yig'indisining $f_{X+Y}(z)$ **zichlik funksiyasi** qo'shiluvchilarning zichlik funksiyalari $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ yordamida **kompozitsiyasi formula**sidan aniqlanadi:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \quad yoki \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

Agar X va Y argumentlarning qiymatlar to'plami manfiy bo'lmasa, u holda $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning $f_{X+Y}(z)$ zichlik funksiyasi quyidagi formuladan topiladi:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{0}^{z} f_X(x) f_Y(z-x)dx \quad yoki \quad f_{X+Y}(z) = \int_{0}^{z} f_X(z-y) f_Y(y)dy$$

Ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi Z=X+Y ning $f_{X+Y}(z)$ ***taqsimot funksiyasi*** quyidagi formuladan topiladi:

$$F_{X+Y}(z) = \iint_{x+y<z} f_X(x) \cdot f_Y(y)dxdy$$

O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar uchun ham kompozitsiya formulasi mavjud:

$$P\{X+Y=z\} = \sum_i P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=z-x_i\},$$

bunda x_i nuqtalar $P\{X=x_i\} > 0$ bo'lgan nuqtalardir.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y diskret tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	1	3
p	0,3	0,7

Y	2	4
p	0,6	0,4

$Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

Yechish: $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini qurish uchun avvalo Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini va ularning ehtimolliklarini topish kerak. Z ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari topish uchun X va Y tasodifiy miqdorlarning barcha qiymatlari turli xil kombinatsiyalaridan iborat juftliklar yig'indisini hisoblaymiz:

$$z_1 = 1+2 = 3; \quad z_2 = 1+4 = 5; \quad z_3 = 3+2 = 5; \quad z_4 = 3+4 = 7.$$

Bu qiymatlarning ehtimolliklarini topamiz. $Z=3$ bo'lishi uchun $x_1=1$ va $y_1=2$ bo'lishi yetarli. Tasodifiy miqdorlarning bu qiymatlarni qabul qilish ehtimolliklari taqsimot qonuniga asosan mos ravishda 0,3 va 0,6 ga teng. X va Y o'zaro bog'liq bo'lmagani uchun $X=1$ va $Y=2$ hodisalar ham o'zaro bog'liq emas. Demak, bu hodisalarning bir paytda ro'y berish ehtimolliklari (ya'ni, $Z=3$ hodisaning ehtimolligi) ko'paytirish qoidasiga asosan $0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$ ga teng. Xuddi shuningdek:

$$P\{Z = 1+4 = 5\} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$
$$P\{Z = 3+2 = 5\} = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42;$$
$$P\{Z = 3+4 = 7\} = 0{,}7 \cdot 0{,}4.$$

Birgalikda bo'lmagan $Z=z_2=5$, $Z=z_3=5$ hodisalarning ehtimolliklarini qo'shib (0,12+0,42 =0,54), izlangan taqsimot qonunini topamiz:

Z	3	5	7
p	0,18	0,54	0,28

2-masala. O'zaro bog'liq bo'lmagan X va Y uzluksiz tasodifiy miqdorlar quyidagi zichlik funksiyalari bilan berilgan:

$$f_X(x) = exp(-x), \quad (0 \le x < \infty)$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{2} exp\left(-\frac{y}{2}\right), \quad (0 \le y < \infty)$$

$Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Yechish: Argumentlar manfiy qiymatlar qabul qilmagani uchun

$f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_X(x) f_Y(z-x)dx$ formuladan foydalish mumkin:

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z exp(-x)\left[\frac{1}{2} \cdot exp\left(-\frac{z-x}{2}\right)\right]dx$$

Elementar shakl almashtirishlardan so'ng quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$f_{X+Y}(z) = exp\left(-\frac{z}{2}\right)\cdot\left[1 - exp\left(-\frac{z}{2}\right)\right].$$

X va *Y* ning mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmagani va Z=X+Y bo'lgani sababli bunda $z \geq 0$.

Javob: $f_{X+Y}(z) = exp\left(-\frac{z}{2}\right)\cdot\left[1 - exp\left(-\frac{z}{2}\right)\right]$ $(0;\infty)$ oraliqda,

$f_{X+Y}(z) = 0$ $(0;\infty)$ dan tashqarida.

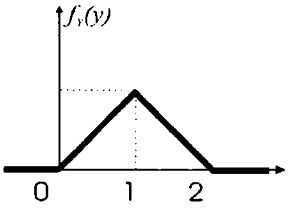
3-masala. O'zaro bog'liq bo'lmagan ikki *X, Y* tasodifiy miqdor yig'indisi *Z=X+Y* ning taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyasini toping. *X* tasodifiy miqdor [0;1] da tekis taqsimlangan, *Y* – Simpson taqsimotiga ega (1-chizma):

$$f_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y < 1, \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2, \\ 0, & y < 0 \text{ yoki } y > 2. \end{cases}$$

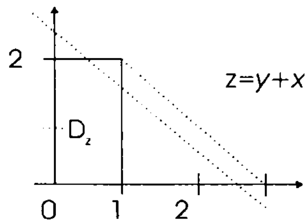
Yechish: *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar faqat chekli oraliqlarda qiymatlar qabul qiladi va ularning zichlik funksiyalari $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ faqat chekli oraliqlarda noldan farqli. Shuning uchun

$$F_{X+Y}(z) = \iint\limits_{x+y<z} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy = \iint\limits_{D_Z} f_X(x)\cdot f_Y(y)dxdy,$$

bunda D_Z soha *x+y<z* tengsizlik bilan aniqlanadi va unda $f_X(x)$ va $f_Y(y)$ funksiyalarning hech biri nolga teng bo'lmaydi. (2-chizma).



1-*chizma.*



2-*chizma.*

z ning qiymati (0; 1), (1; 2) yoki (2; 3) oraliqlarning qaysi biriga tegishli bo'lishiga qarab, integrallash sohasining ko'rinishi ham har xil bo'ladi. Ana shu turli holatlarda integralni hisoblab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$z<0$ da: $F_{X+Y}(z)=0$;

$0 \le z < 1$ da: $F_{X+Y}(z)=\int_0^z f_Y(y)dy\int_0^{z-y} f_X(x)dx=\frac{z^3}{6}$;

$1 \le z < 2$ da:

$$F_{X+Y}(z)=\int_0^{z-1} dx\int_0^1 ydy+\int_0^{z-1} dx\int_1^{z-x}(2-y)dy+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x} ydy=$$

$$=z-1+\frac{(2-z)^3}{6}-\frac{(z-1)^3}{6};$$

$2 \le z \le 3$ da: $F_{X+Y}(z)=1-\int_{z-1}^2(2-y)dy\int_{z-y}^1 dx=1-\frac{1}{6}(3-z)^3$;

$z>3$ da: $F_{X+Y}(z)=1$.

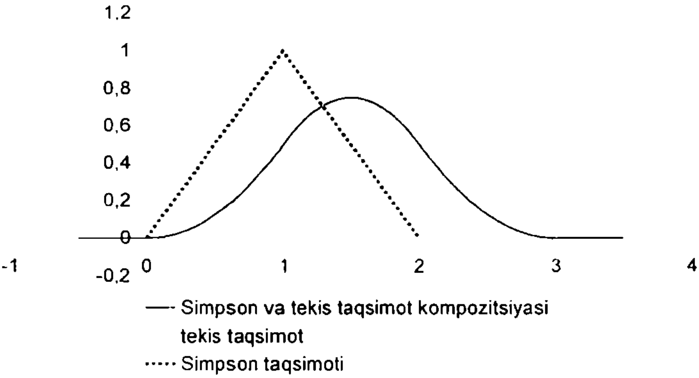
Shunday qilib, izlangan taqsimot funksiyasi quyidagicha:

$$F_{X+Y}(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{z^3}{6}, & 0\le z<1;\\ z-1+\frac{(2-z)^3}{6}-\frac{(z-1)^3}{6}, & 1\le z<2;\\ \frac{1}{6}(3-z)^3, & 2\le z\le 3;\\ 1, & z>3.\end{cases}$$

Taqsimot funksiyasini z bo'yicha differensiallab, zichlik funksiyasini aniqlaymiz:

$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{2}, & 0\le z<1;\\ 3z-z^2-\frac{3}{2}, & 1\le z<2;\\ \frac{1}{2}(z^2-6z+9), & 2\le z\le 3;\\ 0, & z<0 \quad \text{yoki} \quad z>3.\end{cases}$$

$f_X(x)$, $f_Y(y)$ va $f_{X+Y}(z)$ funksiyalarning grafiklari 3-chizmada keltirilgan.



3-chizma. Simpson va tekis taqsimot kompozitsiyasi

Mustahkamlash uchun masalalar

1. X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan bo'lsa, $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

X	10	12	16
R	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
R	0,2	0,8

Javob:

Z	*1*	*12*	*13*	*14*	*17*	*18*
R	*0,008*	*0,32*	*0,02*	*0,08*	*0,10*	*0,40*

2. X va Y diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan bo'lsa, Z=X+Y tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

X	4	10
R	0,7	0,3

Y	1	7
R	0,8	0,2

Javob:

Z	*5*	*11*	*17*
R	*0,56*	*0,38*	*0,06*

3. O'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda_i^k}{k!} exp(-\lambda_1), \quad P\{\eta = l\} = \frac{\lambda_2^l}{l!} exp(-\lambda_2).$$

Ularning yig'indisi $\xi + \eta$ ning taqsimot funksiyasini toping.

Javob: $P\{\xi + \eta = m\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!} exp(-\lambda_1 + \lambda_2).$

Puasson qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning yig'indisi ham Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'ladi.

4. O'zaro bog'liq bo'lmagan X, Y tasodifiy miqdorlar quyidagi zichlik funksiyalari bilan berilgan:

$$f_X(x) = \frac{1}{3}exp(-\frac{x}{3}) \quad (0 \le x < \infty); \qquad f_Y(y) = \frac{1}{5}exp\left(-\frac{y}{5}\right)(0 \le y < \infty)$$

$X+Z$ yig'indining $f_{X+Y}(z)$ zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f_{X+Y}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot exp\left(-\frac{z}{5}\right) \cdot \left[1 - exp\left(-\frac{2z}{15}\right)\right], & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

5. Mos ravishda $(a_1;\sigma_1)$ va $(a_2;\sigma_2)$ parametrli normal taqsimlangan ξ va η tasodifiy miqdorlar $\xi+\eta$ yig'indisi $a = a_1 + a_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ parametrli bilan normal taqsimlangan ekanini isbotlang.

Javob: $f_{\xi+\eta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2\right)}} \cdot exp\left\{-\frac{z - a_1 - a_2}{2\left(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2\right)}\right\}$.

6. O'zaro bog'liq bo'lmagan ξ va η tasodifiy miqdorlar normal taqsimlangan bo'lib, $M\xi = 2$, $M\eta = -3$, $D\xi = 4$, $D\eta = 9$. Bu tasodifiy miqdorlar yig'indisining zichlik funksiyasi va taqsimot funksiyasini yozing.

Javob:

$$f_{\xi+\eta}(z) = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} \cdot exp\left\{ \frac{z+1}{26}\right\}; \quad F_{\xi+\eta}(z) = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} exp\left\{-\frac{t+1}{26}\right\} = \Phi\left(\frac{z+1}{\sqrt{13}}\right)$$

7. ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas va bir xil ko'rsatkichli taqsimotga ega: $f_\xi(x) = f_\eta(x) = \lambda \cdot exp(-\lambda x)$, $x \ge 0$. Ular yig'indisining zichlik funksiyasi $f_{\xi+\eta}(z)$ ni toping.

Javob: $f_{\xi+\eta}(z) = \lambda^2 \cdot z\, exp(-\lambda z)$, $z \ge 0$.

8. ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emas va [0;1] da tekis taqsimlangan: $0 \le x \le 1$ da $f_\xi(x) = 1$ va $0 \le y \le 1$ da $f_\eta(y) = 1$. Ular yig'indisining taqsimot va zichlik funksiyasini toping. $f_{\xi+\eta}(z)$ funksiyaning grafigini yasang.

Javob:

$$F_{X+Y}(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\le z<1;\\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{2}, & 1\le z<2;\\ 1, & z>2.\end{cases}$$

$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1;\\ 2-z, & 1\le z<2;\\ 0, & z<0 \text{ yoki } z>2.\end{cases}$$

2.9. IKKI TASODIFIY MIQDOR SISTEMASI

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor *(X;Y)* orqali belgilanadi. Bunda *X* va *Y* tasodifiy miqdorlarning har biri «tashkil etuvchilar» yoki «komponentalar» deb, ular birgalikda qaralayotganda esa «ikki tasodifiy miqdor sitemasi» deb ataladi.

(X;Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x,y)=P\{X<x, Y<y\}$$

va geometrik nuqtai nazardan *(X;Y)* nuqtaning uchi *(x;y)* da bo'lib, undan chapda va pastda joylashgan cheksiz kvadrantga tushish ehtimolini bildiradi.

Taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $0\le F(x,y)\le 1$.
2. $F(x,y)$ ikkala argumenti bo'yicha kamaymaydigan funksiya:

$$F(x_2,y)\ge F(x_1,y), \quad \text{agar } x_2>x_1 \text{ bo'lsa;}$$
$$F(x,y_2)\ge F(x,y_1), \quad \text{agar } y_2>y_1 \text{ bo'lsa.}$$

3. $F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(\infty,\infty)=1.$
4. $F(x,\infty)=F_X(x),\quad F(\infty,y)=F_Y(y).$

$F_X(x),\ F_Y(y)$ -mos ravishda *X* va *Y* tashkil etuvchilarning taqsimot funksiyalari.

5. (X,Y) tasodifiy nuqtaning uchlari (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_1), (x_2,y_2) da bo‘lgan D to‘rtburchakka tushish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi:

$$P\{(X,Y)\in D\} = P\{x_1 \le X < x_2; y_1 \le Y < y_2\} =$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1)$$

Bu yerda, tabiiyki, $(x_1 < x_2,\ y_1 < y_2)$.

Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari diskret bo‘lgan $(X;Y)$ tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor deb tashkil etuvchilari uzluksiz bo‘lgan $(X;Y)$ tasodifiy miqdorlar sistemasiga aytiladi.

Ikki o‘lchovli diskret **tasodifiy miqdor taqsimot qonuni** deb ularning qabul qiluvchi qiymatlarining barcha juftliklari $(x_i;y_j)$ va bu juftliklarning ehtimolliklari $p_{ij} = p(x_i;y_j)$ (i=1,2,...n; j=1,2,...,m) ko‘rsatilgan quyidagicha jadvalga aytiladi:

Y \ X	x_1	...	x_i	...	x_n
y_1	$p(x_1;y_1)$	...	$p(x_i;y_1)$	...	$p(x_n;y_1)$
...	...	...	...	...	...
y_j	$p(x_1;y_j)$	...	$p(x_i;y_j)$	...	$p(x_n;y_j)$
...	...	...	...	...	...
y_m	$p(x_1;y_m)$	...	$p(x_i;y_m)$	...	$p(x_m;y_n)$

Bu yerda $p_{ij} = p(x_i;y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $(i = 1,\ 2,\ ...n;$ $j = 1,\ 2,\ ...,\ m)$.

Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilgan holda har bir tashkil etuvchisining taqsimot qonunini topish mumkin:

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p(x_i;y_j)\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i;y_j)\ (j=1,2,\ldots,m)$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarni $F(x,y)$ taqsimot funksiyasi yoki $f(x,y)$ zichlik funksiyasi orqali aniqlash mumkin.

***(X, Y)* ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasining $f(x,y)$ zichlik funksiyasi** deb sistemaning taqsimot funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli aralash hosilaga aytiladi:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y).$$

Zichlik funksiyasining xossalari:

1. $f(x,y)>0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$

3. $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$; bu yerda $F(x,y)$ $(X;Y)$ tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot funksiyasi.

4. (X,Y) tasodifiy nuqtaning uchlari (x_1,y_1), (x_1,y_2), (x_2,y_1), (x_2,y_2) $(x_1<x_2,\ y_1<y_2)$ nuqtalarda bo'lgan D to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi:

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

X va *Y* tasodifiy miqdorlar **bog'liqsiz** deyiladi, agar ulardan ixtiyoriy birining taqsimot qonuni ikkinchi tasodifiy miqdorning qanday qiymat qabul qilganiga bog'liq bo'lmasa.

Ikki tasodifiy miqdor bog'liqsiz bo'lishining zarur va yetarli sharti quyidagicha:

Teorema: Ikki X va Y tasodifiy miqdor bog'liqsiz bo'lishi uchun (X,Y) – ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $F(X,Y)$ taqsimot funksiyasi tashkil etuvchilari taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

Bu teoremadan ushbu natijani olish mumkin:

Natija: Ikki X va Y tasodifiy miqdor bog'liqsiz bo'lishi uchun (X,Y) – ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning $f(X,Y)$ birgalikdagi zichlik funksiyasi tashkil etuvchilari zichlik funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

X va Y tashkil etuvchilarning matematik kutilma va dispersiyalari hamda (X,Y) tasodifiy nuqtaning ixtiyoriy D sohaga tushish ehtimolini topish formulalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

X va Y diskret tasodifiy miqdorlar	*X va Y- uzluksiz tasodifiy miqdorlar*
$F(x,y)=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}p_{ij}$	$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$
$MX=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}x_i\cdot p_{ij}$ $MY=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}y_j\cdot p_{ij}$	$MX=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)\,dx\,dy$ $MY=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)\,dx\,dy$
$DX=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(x_i-MX)^2\cdot p_{ij}$ $DY=\sum\limits_{i}\sum\limits_{j}(y_j-MY)^2\cdot p_{ij}$	$DX=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-MX)^2\cdot f(x,y)\,dx\,dy$ $DY=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-MY)^2\cdot f(x,y)\,dx\,dy$
$P\{(X,Y)\in D\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in D}p_{ij}$	$P\{(X,Y)\in D\}=\int\limits_{D}f(x,y)\,dx\,dy$

Tashkil etuvchilarning dispersiyalarini hisoblash uchun dispersiyaning $DX=MX^2-(MX)^2$ xossasini e'tiborga olgan holda quyidagi formuladan foydalanish ham mumkin:

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy-(MX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)dx-(MX)^2.$$

Quyidagi kattaliklarga $\sigma(X)=\sqrt{DX}$, $\sigma(Y)=\sqrt{DY}$ – X, *Y* tasodifiy miqdorlarning **o'rtacha kvadratik chetlashishi (og'ishi)** deyiladi.

(MX,MY) nuqta *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning **sochilish markazi** deyiladi.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. (Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarining taqsimot qonunini topish). Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
$y_1=1$	0,30	0,10	0,10
$y_2=4$	0,15	0,25	0,10

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini yozing. Ularning miqdoriy xarakteristikalarini va sochilish markazini toping.

Yechish: Ustunlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib chiqib, *X* ning qabul qiladigan qiymatlarining ehtimolliklarini topamiz:

$$P(x_1)=0,30+0,15=0,45;$$

$$P(x_2)=0,10+0,25=0,35;$$

$$P(x_3)=0,10+0,10=0,20.$$

X tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozamiz:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
P	0,45	0,35	0,20

X tashkil etuvchisining matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlashishini topamiz:

$$MX=\sum_i\sum_j x_i\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot P\{X=x_i\}=2\cdot 0,45+5\cdot 0.35+10\cdot 0,20=4,65.$$

$$DX = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot P\{X = x_i\} - (MX)^2 = 2^2 \cdot 0.45 + 5^2 \cdot 0.35 + 10^2 \cdot 0.20 - 4.65^2 = 8.9275.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{8.9275} = 2.988$$

Satrlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib chiqib, Y ning qabul qiladigan qiymatlarining ehtimolliklarini topamiz:

$$P(y_1) = 0,30 + 0,10 + 0,10 = 0,50;$$
$$P(y_2) = 0,15 + 0,25 + 0,10 = 0,50.$$

Y tashkil etuvchining taqsimot qonuni quyidagicha:

Y	$y_1=1$	$y_2=4$
P	0,50	0,50

Y tashkil etuvchining miqdoriy xarakteristikalari ham X ning xarakteristikalari kabi hisoblanadi:

$$MY = 2{,}5;\quad DY = 2{,}25;\quad \sigma(Y) = 1.5\,.$$

Ikki o'lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning sochilish markazi qo'yidagi koordinatali nuqtada yotadi: $(MX; MY) = (4{,}65;\ 2{,}5)$.

Javob:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
P	0,45	0,35	0,20

Y	$y_1=1$	$y_2=4$
P	0,50	0,50

$MX = 4{,}65;\quad DX = 8{,}93;\quad \sigma(X) = 2{,}988;$

$MY = 2{,}5,\quad DY = 2{,}25;\quad \sigma(Y) = 1{,}5;\quad (MX; MY) = (4{,}65;\ 2{,}5)$

2-masala. (To'rtburchak ichiga tushish ehtimoli). Agar ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi F(x,y)

$$F(x,y) = \sin x \cdot \sin y \quad (0 \le x \le \pi/2,\quad 0 \le y \le \pi/2).$$

berilgan bo'lsa, (X,Y) tasodifiy nuqtaning $x = \pi/6$, $x = \pi/2$, $y = \pi/4$, $y = \pi/3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak ichiga tushish ehtimoli toping.

Yechish: $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/2$, $y_1 = \pi/4$, $y_2 = \pi/3$ deb olib, taqsimot funksiyasining 5-xossasidan foydalanib, izlanayotgan ehtimollikni hisoblaymiz.

$$P\{\pi/6 \le X < \pi/2;\ \pi/4 \le Y < \pi/3\} = F(\pi/2,\ \pi/3) - F(\pi/2,\ \pi/4) -$$
$$- F(\pi/6,\ \pi/3) + F(\pi/6,\ \pi/4) = \sin(\pi/2)\sin(\pi/3) - \sin(\pi/2)\sin(\pi/4) -$$
$$- \sin(\pi/6)\sin(\pi/3) + \sin(\pi/6)\sin(\pi/4) = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)/4 = 0{,}08.$$

Javob: $P\{\pi/6 \le X < \pi/2; \pi/4 \le Y < \pi/3\} = 0{,}08.$

3-masala. (Taqsimot funksiyasi ma'lum bo'lsa, zichlik funksiyasini topish).

Ikki o'lchovli (X,Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ $(0 \le x \le \pi/2,\ \ 0 \le y \le \pi/2)$ *va boshqa hollarda nolga teng bo'lsa, uning f(x,y) zichlik funksiyasini toping.*

Yechish: Zichlik funksiyasining ta'rifiga asosan,

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x,y).$$

Demak, taqsimot funksiyasidan x bo'yicha xususiy hosila olsak,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y \cdot$$

Olingan natijadan y bo'yicha xususiy hosila olamiz va izlangan zichlik funksiyasini hosil qilamiz:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y.$$

Javob: $(0 \le x \le \pi/2,\ \ 0 \le y \le \pi/2)$ da $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y.$

4-masala. (Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ma'lum bo'lsa, uning taqsimot funksiyasini topish). Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right)}.$$

Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Taqsimot funksiyasini hisoblash uchun quyidagi

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$$

formuladan foydalanamiz. Zichlik funksiya

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$$ ga teng ekanligidan:

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}\frac{du\,dv}{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+v^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+v^2}\left(arctg\,x+\frac{\pi}{2}\right)dv=\left(\frac{1}{\pi}arctg\,x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+v^2}dv=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctg\,x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg\,y+\frac{1}{2}\right)$$

Javob: $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg y+\frac{1}{2}\right).$

5-masala. (*(X, Y)* tasodifiy nuqtaning ixtiyoriy D sohaga tushish ehtimoli). *(X, Y)* tasodifiy miqdorlar sistemasining f(x,y) zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{8\pi}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right), & (x,\ y)\in D=\left\{(x,\ y):x^2+y^2\le 4\right\}\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

(X, Y) tasodifiy nuqtaning markazi koordinatalar boshida bo'lgan D1 birlik aylanaga tushish ehtimolini toping.

Yechish: Bu ehtimollikni topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz: $P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy$, bunda D_1 – $x^2+y^2\le 1$ - birlik doira.

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy=\frac{3}{8\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Agar $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ qutb koordinatalarga o'tsak,

$$P\{(X.Y)\in D_1\}=\frac{3}{8\pi}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2-r)\cdot r\cdot dr=\frac{1}{2}.$$

$$Javob:\ P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{1}{2}.$$

6-masala. (Tashkil etuvchilarning taqsimot funksiyasini sistemaning taqsimot funksiyasi orqali topish). *(X, Y)* – ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasining *F(x,y)* taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0,\ y\geq 0;\\ 0, & x<0\ ,\ y<0.\end{cases}$$

X va *Y* tashkil etuvchilarning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish: Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining 4-xossasiga asosan $F(x,\infty)=F_X(x)$, $F(\infty,y)=F_Y(y)$. Demak,

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=\lim_{y\to\infty}\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0,\ y\geq 0;\\ 0, & x<0\ ,\ y<0.\end{cases}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(-2^{-y}+2^{-x-y}\right)=0,$$ shuning uchun

$$F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Xuddi shu usul bilan *Y* tashkil etuvchisining taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\geq 0;\\ 0. & y<0\end{cases}$$

Javob: $F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ $\quad F_Y(y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\geq 0;\\ 0, & y<0\end{cases}$

7-masala. (Sistemaning zichlik funksiyasi berilgan bo'lsa, tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini topish). *(X, Y)*- ikki o'lchovli tasodifiy miqdor birgalikdagi f(x,y) zichlik funksiyasi yordamida berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1;\\[2ex] 0 & ,\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\geq 1.\end{cases}$$

X va *Y* tashkil etuvchilarning zichlik funksiyasini toping

Yechish: X va Y tashkil etuvchilarning zichlik funksiyasini quyidagi formula yordamida topamiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

X tashkil etuvchining zichlik funksiyasi:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{6\pi}\int_{-2\sqrt{1-x^2/9}}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy=\frac{2}{6\pi}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2/9}} dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Demak,

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x|<3;\\ 0, & |x|\ge 3.\end{cases}$$

Y tashkil etuvchining zichlik funksiyasini ham xuddi shu kabı topamiz:

Javob:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x|<3;\\ 0, & |x|\ge 3.\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}, & |y|<2;\\ 0, & |y|\ge 2.\end{cases}$$

8-masala. (Ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari). *(X,Y)* ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor birgalikdagi zichlik funksiyasi *f(x,y)* orqali aniqlangan:

$$f(x,y)=\begin{cases}4\cdot x\cdot y\cdot exp(-x^2-y^2), & x>0,\ \ y>0;\\ 0, & x<0 \ \ yoki\ \ y<0.\end{cases}$$

Tashkil etuvchilarning matematik kutilmasi, dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik og‘ishi va *(X,Y)* sistemaning sochilish markazini toping.

Yechish: Dastlab tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini topib olamiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=4\cdot x\cdot exp(-x^2)\int_0^{\infty} y\cdot exp(-y^2)dy=2x\cdot exp(-x^2),\ (x>0).$$

Xuddi shuningdek: $f_Y(y)=2y\cdot exp(-y^2), \quad (y>0)$.

X tashkil etuvchining matematik kutilmasini topamiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx=\int_0^{\infty} x\cdot\left(2x\cdot exp\left(-x^2\right)\right)dx.$$

Ikki marta bo‘laklab integrallab va Puasson integrali

$$\int_0^{\infty} exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ekanini hisobga olsak, u holda $MX = \sqrt{\pi}/2$ ga teng bo'ladi.

X tashkil etuvchining dispersiyasini topamiz:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - (MX)^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \left(2x \cdot exp\left(-x^2\right)\right)dx - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

U holda o'rtacha kvadratik og'ish $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{1 - \pi/4}$.

Tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari ko'rinishi bir xil bo'lgani uchun; $MY = \sqrt{\pi}/2$; $DY = 1 - \pi/4$; $\sigma(Y) = \sqrt{1 - \pi/4}$.

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning sochilish markazi

$$(MX, MY) = (\sqrt{\pi}/2; \sqrt{\pi}/2).$$

Javob:

$MX = MY = \sqrt{\pi}/2$; $DX = DY = 1 - \pi/4$; $\sigma(X) = \sigma(Y) = \sqrt{1 - \pi/4}$.

Sochilish markazi $(MX, MY) = (\sqrt{\pi}/2; \sqrt{\pi}/2)$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunini toping.

Javob:

X	3	10	12	Y	4	5
P	0,27	0,43	0,30	P	0,55	0,45

2. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

Y \ X	26	30	41	50
1,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunini toping.

Javob:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	1,3	2,7
P	0,29	0,71

3. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning X tashkil etuvchisi $X<1/2$, Y tashkil etuvchi esa $Y<1/3$ qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlangan:

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg2x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}arctg3y+\frac{1}{2}\right).$$

Javob: $P\{X<1/2;Y<1/3\}=9/16.$

4. Agar *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ma'lum bo'lsa, *(X,Y)* tasodifiy nuqtaning $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0;\\ 0, & x<0 \ yoki \ y<0.\end{cases}$$

Javob: $P=3/128$.

5. Agar *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0;\\ 0, & x<0 \ yoki \ y<0.\end{cases}$$

bo'lsa, *(X,Y)* tasodifiy nuqtaning uchlari A(1;3), V(3;3) va S(2;8) nuqtalarda joylashgan uchburchakka tushish ehtimolini toping.

Javob: $f(x,y)=\begin{cases}ln^2 2\cdot 2^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0;\\ 0, & boshqa \ hollarda\end{cases}$; $P=5\cdot 2^{12}/3$.

6. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *F(x,y)* taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0;\\ 0, & x<0 \ yoki \ y<0.\end{cases}$$

(X,Y) tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f(x,y)=\begin{cases}ln^2 3\cdot 3^{-x-y}, & x\geq 0, \quad y\geq 0;\\ 0 & x<0 \ yoki \ y<0.\end{cases}$

7. *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *F(x,y)* taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0, & x<0\ ,\ y<0.\end{cases}$$

(X, Y) tasodifiy miqdorning birgalikdagi zichlik funksiyasini toping.

$$Javob:\ f(x,y)=\begin{cases}8\cdot e^{-4x-2y}, & x\ge 0, \quad y\ge 0;\\ 0, & x<0 \text{ yoki } y<0.\end{cases}$$

8. *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *f(x,y)* zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\frac{1}{\left(16+x^2\right)\cdot\left(25+y^2\right)}$$

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *F(x,y)* taqsimot funksiyasini toping.

$$Javob:\ F(x,y)=\left(\frac{1}{4\pi}arctg\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{5\pi}arctg\frac{y}{5}+\frac{1}{10}\right)$$

9. *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *f(x,y)* zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot sin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le\frac{\pi}{2};\\ 0. & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \quad y\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

(X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *F(x,y)* taqsimot funksiyasini toping.

$$Javob:\ F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\left[sin\,x+sin\,y-sin(x+y)\right], & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, \quad 0\le y\le\frac{\pi}{2};\\ 0. & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \quad y\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

10. *(X, Y)* — ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagicha:

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2\left(3+x^2\right)\cdot\left(1+y^2\right)}$$

a) *A* parametrni;

b) *F(x,y)* taqsimot funksiyasini;

d) *(X, Y)* — tasodifiy nuqtaning x=0, y=0, x=1, y=1 chiziqlar bilan chegaralangan kvadratga tushish ehtimolini toping:

Javob: a) $A=\sqrt{3}$;

b) $F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\,y+\frac{1}{2}\right)$; d) $P=\frac{1}{24}\approx 0{,}0417$.

11. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan X va Y tasodifiy miqdorlar $MX=MY=0$ va $DX=DY=1$ parametrlar bilan normal taqsimlangan. (X,Y) tasodifiy nuqtaning $\left\{(x,y):\ 2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3\right\}$ halqaga tushish ehtimolini toping.

Javob: $p=e^{-2}-e^{-4,5}\approx 0{,}1242$.

12. Ikki musbat qiymatlar qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot funksiyasi $F(x,y)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})$ berilgan bo‘lsa, bu sistemaning zichlik funksiyasini toping.

Javob: $f(x,y)=a\cdot b\cdot e^{-(ax+by)}$.

13. (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning $f(x,y)$ zichlik funksiyasi $0\le x\le\pi/2;\ 0\le y\le\pi/2$ kvadrat ichida quyidagicha aniqlanadi: $f(x,y)=\cos x\cdot\cos y$. Kvadratdan tashqarisida $f(x,y)=0$. X va Y tasodifiy miqdorlarning o‘zaro bog‘liq emasligini isbotlang.

14. (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning tashkil etuvchilari o‘zaro bog‘liq emas va ularning zichlik funksiyalari quyidagicha:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 5\cdot e^{-5x}, & x>0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ 2\cdot e^{-2y}, & y>0.\end{cases}$$

Sistemaning taqsimot funksiyasi $F(x,y)$ ni va zichlik funksiyasi $f(x,y)$ ni toping.

Javob: $$f(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\ \ yoki\ \ y<0;\\ 10\cdot e^{-5x-2y}, & x>0,\ y>0.\end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\ \ y<0;\\ (1-e^{-5x})\cdot(1-e^{-2y}), & x>0\ yoki\ y>0.\end{cases}$$

15. (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning $f(x,y)$ zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(x,y)=\begin{cases}36\cdot x\cdot y\cdot exp(-x^2-y^2), & x>0,\quad y>0;\\ 0\,. & x<0\ \ yoki\ \ y<0.\end{cases}$$

Tashkil etuvchilarning matematik kutilmalari, dispersiyalari va o'rtacha kvadratik og'ishlarini hamda sistemaning sochilish markazini toping.

Javob: $MX = MY = \sqrt{3\pi}/6$; $DX = DY = (4-\pi)/12$;

$$\sigma(X) = \sigma(Y) = \frac{\sqrt{(4-\pi)/3}}{2}.$$

Sochilish markazi: $(MX, MY) = (\sqrt{3\pi}/6; \sqrt{3\pi}/6)$

16. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *f(x,y)* zichlik funksiyasi $0 \le x \le \pi/4;\ 0 \le y \le \pi/4$ kvadrat ichida $f(x,y) = 2\cdot\cos x\cdot\cos y$ va kvadratdan tashqarida *f(x,y)*=0 ga teng. Tashkil etuvchilarning matematik kutilmalarini toping.

Javob: $MX = MY = \left(\pi + 4 - 4\sqrt{2}\right)/4$.

17. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *f(x,y)* zichlik funksiyasi $0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le \pi/2$ kvadrat ichida $f(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\sin(x+y)$ va kvadratdan tashqarida *f(x,y)*=0 ga teng. Tashkil etuvchilarning matematik kutilmalari va dispersiyalarini toping.

Javob: $MX = MY = \pi/4$; $DX = DY = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$.

18. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning *f(x,y)* zichlik funksiyasi $0 \le x \le \pi;\ 0 \le y \le \pi$ kvadrat ichida $f(x,y) = \frac{1}{4}\cdot\sin x\cdot\sin y$ va kvadratdan tashqarida *f(x,y)*=0. Tashkil etuvchilarning matematik kutilmalari va dispersiyalarini toping.

Javob: $MX = MY = \pi/2$; $DX = DY = \pi^2 - 4$.

2.10. TASODIFIY MIQDORLAR SISTEMASI. TASHKIL ETUVCHILARNING SHARTLI TAQSIMOT QONUNLARI

Diskret tasodifiy miqdorlar sitemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonunlarlari

(X,Y) ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorni ko'rib chiqamiz. Tashkil etuvchilarning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha bo'lsin:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;\quad y_1, y_2, \ldots, y_m \quad (n \ge 2,\ m \ge 2).$$

U holda, *X* tashkil etuvchining *Y* = y_i sharti ostidagi **shartli taqsimoti** quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{matrix} X \\ P(X/Y=y_j) \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1/y_j) & p(x_2/y_j) & \dots & p(x_n/y_j) \end{pmatrix}.$$

Bunda $p(x_i / y_j)$ ehtimolliklar (ya'ni, agar Y tasodifiy miqdor y_i qiymatni qabul qilganligi ma'lum bo'lsa, X tasodifiy miqdor x_i qiymatni qabul qilish ehtimoli) shartli ehtimollik formulasiga asosan hisoblanadi:

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Y tashkil etuvchining shartli taqsimoti ham xuddi shu kabi ta'riflanadi va $p(y_j / x_i)$ shartli ehtimolliklar quyidagi tenglikdan topiladi:

$$p(y_j / x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad (j = 1,2,\dots,m).$$

Shartli taqsimot uchun ham ehtimolliklarning yig'indisi birga teng:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) = 1, \ (j = 1,2,\dots,m); \qquad \sum_{j=1}^{m} p(y_j / x_i) = 1, \ (i = 1,2,\dots,n).$$

Bu xossadan hisoblash natijalarini nazorat qilish uchun foydalaniladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar sistemasi tashkil etuvchilarining shartli taqsimot qonunlari

(X,Y) ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi f(x,y) bo'lsin. Ma'lumki, X va Y tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

X tashkil etuvchining berilgan $Y=y$ qiymatdagi $\varphi(x/y)$ **shartli zichligi** deb *(X,Y)* sistemaning f(x,y) birgalikdagi zichlik funksiyasining Y tashkil etuvchining $f_Y(y)$ zichlik funksiyasiga nisbatiga aytiladi:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$$

Y tashkil etuvchining berilgan $X = x$ qiymatdagi $\psi(y / x)$ **shartli zichligi** ham shu kabi ta'riflanadi:

$$\psi(y / x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}.$$

Oddiy zichlik funksiyalari kabi shartli zichlik funksiyalari ham quyidagi xossalarga ega:

$$\varphi(x / y) \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x / y)dx = 1; \quad \psi(y / x) \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(y / x)dy = 1;$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
$y_1=0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2=0,8$	0,05	0,12	0,03

Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping. X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi y_1=0,4 qiymat qabul qildi degan shart ostidagi shartli taqsimot qonunini toping. Y tashkil etuvchining X tashkil etuvchi x_1=5 qiymat qabul qildi degan shart ostidagi shartli taqsimot qonunini toping.

Yechish: Ustunlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib chiqib, X tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
P	0,20	0,42	0,38

Satrlar bo'yicha ehtimolliklarni qo'shib chiqib, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

Y	$y_1=0,4$	$y_2=0,8$
P	0,80	0,20

$p(y_1) = 0{,}8$ ekanini e'tiborga olib, $p(x_i / y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$, $(i = 1,2,...,n)$ formuladan j=1 qiymatida quyidagi shartli ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p(x_1/y_1)=p(x_1,y_1)/p(y_1)=0{,}15/0{,}80=3/16;$$

$$p(x_2/y_1)=p(x_2,y_1)/p(y_1)=0{,}30/0{,}80=3/8;$$

$$p(x_3/y_1)=p(x_3,y_1)/p(y_1)=0{,}35/0{,}80=7/16;$$

Va nihoyat, izlanayotgan shartli taqsimot qonuni quyidagicha:

X	2	5	8
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16.

Hisob natijalarini tekshirish maqsadida topilgan ehtimolliklarni qo'shib chiqsak, ularning yig'indisi 1 ga teng ekaniga ishonch hosil qilamiz.

$p(x_2)=0{,}42$ ekanini e'tiborga olib, $p(y_j/x_i)=\dfrac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)}$, $(j=1,2,...,m)$ formuladan i=2 qiymatida shartli ehtimolliklarni hisoblab, Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

Y	0,4	0,8
$P(Y/x_2)$	5/7	2/7.

Javob: Tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlari:

X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=8$
P	0,20	0,42	0,38

Y	$y_1=0{,}4$	$y_2=0{,}8$
P	0,80	0,20

Tashkil etuvchilarning shartli taqsimot qonunlari:

X	2	5	8
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Y	0.4	0.8
$P(Y/x_2)$	5/7	2/7.

2-masala. *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdor quyidagi zichlik funksiyasi bilan aniqlangan:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\pi r^2)}, & x^2+y^2\le r^2;\\ 0, & x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

Tashkil etuvchilarning shartli taqsimotlarini toping.

Yechish: X tashkil etuvchining shartli zichlik funksiyasini topamiz (bunda $|x|\le\sqrt{r^2-y^2}$):

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1/\left(\pi r^2\right)}{\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}dx}=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}.$$

$x^2+y^2>r^2$ da f(x,y)=0 bo‘lgani uchun $|x|>\sqrt{r^2-y^2}$ da $\varphi(x/y)=0$

Y tashkil etuvchining shartli zichlik funksiyasi ham shu kabi topiladi:

$$\psi(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & |y|\le\sqrt{r^2-x^2},\\ 0, & |y|>\sqrt{r^2-x^2}.\end{cases}$$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	0,10	0,20	0,20
y_2	0,15	0,25	0,10

X tashkil etuvchining *Y*=*y*1 qiymatni qabul qilgani sharti ostidagi shartli taqsimot qonunini va *Y* tashkil etuvchining *X*=*x*3 qiymatni qabul qilgani sharti ostidagi shartli taqsimot qonunini toping.

Javob:

X	x_1	x_2	x_3		*Y*	y_1	y_2
$P(X/y_1)$	1/5	2/5	2/5.		$P(Y/x_3)$	2/3	1/3.

1. Ikki o‘lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

Y \ X	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

X tashkil etuvchining *Y*=10 qiymatni qabul qilgani sharti ostidagi shartli taqsimot qonunini va *Y* tashkil etuvchining *X*=6 qiymatni qabul qilgani sharti ostidagi shartli taqsimot qonunini toping.

Javob:	X	3	6	Y	10	14	18
	$P(X/10)$	5/7	2/7.	$P(Y/6)$	5/14	5/28	13/28.

1. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}exp\left\{-\left(x^2+2xy+5y^2\right)/2\right\}$$

Tashkil etuvchilarning shartsiz va shartli zichlik funksiyalarini toping.

$$Javob:\ _X(x)=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\cdot exp\left(-0{,}4x^2\right)\quad f_Y(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot exp\left(-2y^2\right)$$

$$\varphi(x/y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-0.5(x+y)^2\right)\quad \psi(y/x)=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}exp\left(-0.1(x+5y)^2\right)$$

4. Ikki o'lchovli (X,Y) uzluksiz tasodifiy miqdor birgalikda zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x,y)=C\cdot exp\left\{-x^2-2xy-4y^2\right\}$$

a) S o'zgarmasni;
b) tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalarini;
d) tashkil etuvchilarning shartli zichlik funksiyalarini toping.

Javob:

$$a)C=\frac{\sqrt{3}}{\pi};\quad b)f_X(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot exp\left(-0.75x^2\right)\quad f_Y(y)=\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot exp\left(-3y^2\right);$$

$$d)\varphi(x/y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}exp\left(-(x+y)^2\right)\quad \psi(y/x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-0.25(x+4y)^2\right)$$

2.11. KOVARIATSIYA VA KORRELYATSIYA KOEFFITSIENTLARI. CHIZIQLI REGRESSIYA TENGLAMASI

(X,Y) – ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning **kovariatsiya koeffitsienti** deb quyidagi matematik kutilishga aytiladi:

$$cov(X,Y)=M\left[(X-MX)\cdot(Y-MY)\right]$$

$$\text{yoki}\quad cov(X,Y)=M(X\cdot Y)-MX\cdot MY.$$

Agar (X,Y) – ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor bo'lsa, kovariatsiya koeffitsient quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$cov(X,Y)=\sum_i\sum_j p_{ij}(x_i-MX)\cdot(y_j-MY)=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot x_i\cdot y_j-MX\cdot MY.$$

Agar (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa, kovariatsiya koeffitsient quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)(y-MY)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-MX\cdot MY.$$

Bu yerda $f(x,y)$ — (X,Y) ikki o‘lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi chiziqli bog‘lanish darajasini **korrelyatsiya koeffitsienti** ko‘rsatib beradi:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}.$$

Har qanday ikkita tasodifiy miqdor uchun $-1\le\rho(X,Y)\le 1$. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa korrelyatsiya koeffitsienti $\rho(X,Y)=0$ va bu holda tasodifiy miqdorlar **korrelyatsiyalanmagan** deyiladi. Ikkita o‘zaro korrelyatsiyalangan tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘ladi, biroq aksinchasi o‘rinli bo‘lmasligi mumkin (ya’ni tasodifiy miqdorlarning o‘zaro bog‘liqmasligidan korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligi kelib chiqadi; korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligidan ularning bog‘liq emasligi kelib chiqmaydi; korrelyatsiya koeffitsienti noldan farqliligidan ularning bog‘liq ekanligi kelib chiqadi).

(X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor bo‘lib, uning tashkil etuvchilari X va Y o‘zaro bog‘liq bo‘lgan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Ulardan bittasini ikkinchisining chiziqli funksiyasi sifatida tasvirlaymiz: $Y\cong g(X)=aX+b$.

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga **chiziqli o‘rtacha kvadratik regressiyasi** (yoki oddiy chiziqli regressiyasi) quyidagi ko‘rinishga ega:

$$g(x)=MY+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-MX),$$

bu yerda MX, MY — matematik kutilmalar, $\sigma_X=\sqrt{DX}$, $\sigma_Y=\sqrt{DY}$ — o‘rtacha kvadratik chetlashishlar va $\rho=\rho(X,Y)$ — X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya koeffitsienti. Quyidagi

$$b=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=cov(X,Y)/DX$$

koeffitsientga Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga bo‘lgan **regressiyasining koeffitsienti** deyiladi.

$$y - MY = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - MX)$$

to‘g‘ri chiziqqa **regressiya to‘g‘ri chizig‘i** deyiladi.

$$\sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

kattalik Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga nisbatan **qoldiq dispersiyasi** deyiladi. Bu kattalik Y ni $g(x) = aX + b$ chiziqli funksiya bilan almashtirilganda yo‘l qo‘yilgan xatolikning miqdorini bildiradi. Korrelyatsiya koeffitsienti $\rho = \pm 1$ bo‘lganida qoldiq dispersiya nolga teng va Y, X tasodifiy miqdorlar orasida esa o‘zaro chiziqli funktsional bog‘liqlik bor bo‘ladi.

X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga bo‘lgan regressiyasi tenglamasini berish mumkin:

$$x - MX = \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - MY),$$

bu yerda $\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ — X miqdorning Y miqdorga bo‘lgan regressiya koeffitsienti va mos ravishda $\sigma_X^2(1-\rho^2)$ kattalik X miqdorning Y miqdorga nisbatan qoldiq dispersiyasi.

Agar $\rho = \pm 1$ bo‘lsa, u holda ikkala

$$y - MY = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - MX) \text{ va } x - MX = \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - MY)$$

regressiya chiziqlari ustma-ust tushadi. Tenglamalardan ko‘rinib turibdiki, ikkala regressiya chizig‘i ham (MX, MY) nuqta, ya’ni (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorning cochilish markazidan o‘tadi.

Namunaviy masalalar yechish.

1-masala. (X,Y) ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor quyidagi

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ ellips ichida} \\ 0, & \text{ellipsdan tashqarida} \end{cases}$$

zichlik funksiyasi bilan berilgan. X, Y — o‘zaro bog‘liq bo‘lgan va korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlang.

Yechish: X, Y tashkil etuvchilarning ilgari topilgan zichlik funksiyalaridan foydalanamiz (7- masala, 2.7-§):

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & |x|<3;\\ 0 & |x|\ge 3.\end{cases} \quad \text{va} \quad f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, & |x|<2;\\ 0, & |x|\ge 2.\end{cases}$$

Quyidagi $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun uchun X va Y o'zaro bog'liq bo'lgan tasodifiy miqdorlar. X bilan Y korrelyatsiyalanmagan tasodifiy miqdorlar ekanini isbotlash uchun $cov(X,Y)=0$ ekanini ko'rsatish kifoya.

$$cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-MX)(y-MY)f(x,y)dxdy$$

$f_X(x)$ zichlik funksiyasi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun MX=0. Xuddi shuningdek MY= 0. Demak,

$$cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy.$$

f(x,y) funksiya o'zgarmasga teng bo'lgani uchun uni integral belgisining tashqarisiga chiqarib yozish mumkin:

$$cov(X,Y)=f(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\int_{-\infty}^{\infty}xdx\right)dy.$$

Ichki integral nolga teng, chunki integral ostidagi funksiya toq, integrallash chegarasi koordinatlar boshiga nisbatan simmetrik. Demak, $\mathrm{cov}\,(X,Y)=0$, ya'ni X, Y tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyalanmagan.

2-masala. 2.7-§ ning 8-masalasidagi (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini toping.

(X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi oraqali berilgan:

$$f(x,y)=\begin{cases}4\cdot x\cdot y\cdot exp(-x^2-y^2), & x>0,\quad y>0;\\ 0, & x<0\ \ yoki\quad y<0.\end{cases}$$

Yechish: Avvalroq tashkil etuvchilarning zichlik funksiyalari

$$f_X(x)=2x\cdot exp(-x^2)\quad (x>0),\qquad f_Y(y)=2y\cdot exp(-y^2)\quad (y>0)$$

va miqdoriy xarakteristikalari topilgan edi:

$$MX=MY=\sqrt{\pi}/2;\quad DX=DY=1-\pi/4;\quad \sigma(X)=\sigma(Y)=\sqrt{1-\pi/4}.$$

Bularni bilgan holda kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini topamiz:

$$cov(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-MX\cdot MY=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}x^2y^2exp(-x^2-y^2)dxdy-\frac{\pi}{4}=$$

$$=4\left(\int\limits_{0}^{\infty}x^2exp(-x^2)dx\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{\infty}y^2exp(-y^2)dy\right)-\frac{\pi}{4}$$

Bo'laklab integrallab, hamda $\int\limits_{0}^{\infty}exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Puasson integrali) ekanligidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$cov(X,Y)=4\left(\int\limits_{0}^{\infty}x^2exp(-x^2)dx\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{\infty}y^2exp(-y^2)dy\right)-\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}-\frac{\pi}{4}=0.$$

Demak, $\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=0$.

Javob: $cov(X,Y)=0$, $\rho(X,Y)=0$.

3-masala. 2.7-§ ning 1-masaladagi *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdor uchun *Y* ning *X* ga bo'lgan regressiya chizig'ini toping. *(X, Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha:

Y \ X	$x_1=2$	$x_2=5$	$x_3=10$
$y_1=1$	0,30	0,10	0,10
$y_2=4$	0,15	0,25	0,10

Yechish. *X* va *Y* tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlari avvalroq topilgan edi:

$$\begin{array}{llll} X: & x_1=2 & x_2=5 & x_3=10 \\ P: & 0{,}45 & 0{,}35 & 0{,}20 \end{array}\qquad \begin{array}{lll} Y: & y_1=1 & y_2=4 \\ P: & 0{,}50 & 0{,}50 \end{array}$$

X va *Y* tashkil etuvchilarning sonli xarakteristikalari, ya'ni matematik kutilma, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlashishlari quyidagicha edi:

$$MX=4{,}65,\quad DX=8{,}9275,\quad \sigma(X)=2{,}988$$

$$MY=2{,}5;\quad DY=2{,}25;\quad \sigma(Y)=1{,}5$$

Kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini topamiz:

$$cov(X,Y)=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot x_i\cdot y_j-MX\cdot MY=12.3-4.65\cdot 2.5=0,675.$$

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{0,675}{\sqrt{8,927\cdot 2,25}}=0,1506.$$

Y ning X ga regressiya koeffitsienti quyidagiga teng:

$$b=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=cov(X,Y)/DX=0,675/8,9275=0,0756.$$

Demak, $y-MY=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-MX)$ regressiya chizig'i quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$y-2,5=0,0756\cdot(x-4,65)$ yoki $y=0,0756\cdot x+2,148$.

Y tasodifiy miqdorning X ga nisbatan qoldiq dispersiyasi quyidagiga teng: $\sigma_Y^2(1-\rho^2)=2,25\cdot(1-0,1506^2)=2,199$.

Javob: $y=0,0756\cdot x+2,148$; $\sigma_Y^2(1-\rho^2)=2,199$.

4-masala. (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor $0\le x\le\pi/2;\ \ 0\le y\le\pi/2$ kvadrat ichida $f(x,y)=\frac{1}{2}\cdot sin(x+y)$ zichlik funksiyasi bilan berilgan. Kvadratdan tashqarida $f(x,y)=0$ ga teng. To'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping.

Yechish: X tashkil etuvchining matematik kutilma va dispersiyasini topamiz:

$$MX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x\cdot sin(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}.$$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy-(MX)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\,sin(x+y)dxdy-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Ikki marotaba bo'laklab integrallasak, $DX=(\pi^2+8\pi-32)/16.$

Xuddi shuningdek, Y uchun: $MY=\pi/4$;

$$DY=(\pi^2+8\pi-32)/16.$$

Kovariatsiya koeffitsientini topamiz:

$$cov(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - MX\cdot MY =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cdot y\cdot sin(x+y)dxdy-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi}{2}-1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\approx -0{,}04605.$$

Demak, korrelyatsiya koeffitsienti quyidagiga teng:

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{\frac{\pi}{2}-1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}}=-\frac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}=-0{,}245.$$

Y ning X ga to‘g‘ri regressiya chizig‘ining koeffitsientini topamiz:

$b=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=cov(X,Y)/DX=-0{,}2454$.

U holda $y-MY=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-MX)$ regressiya chizig‘i quyidagiga teng bo‘ladi: $y-\frac{\pi}{4}=-0.2454\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ yoki $y=-0.2454\cdot x+0{,}9781$.

Y tasodifiy miqdorning X tasodifiy miqdorga nisbatan qoldiq dispersiyasi $\sigma_Y^2(1-\rho^2)=0{,}17635$.

X ning Y ka teskari regressiya tenglamasini ham xuddi shu kabi topamiz. X ning Y ga regressiya koeffitsientini topamiz:

$b_1=\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}=cov(X,Y)/DY=-0{,}2454$. Teskari regressiya tenglamasi $x-MX=\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-MY)$ formulasidan $x=-0{,}2454\cdot y+0{,}9781$. X tasodifiy miqdorning Y tasodifiy miqdorga nisbatan qoldiq dispersiyasi $\sigma_X^2(1-\rho^2)=0{,}17635$.

Javob: To‘g‘ri regressiya tenglamasi: $y=-0{,}2454\cdot x+0{,}9781$

Teskari regressiya tenglamasi: $x=-0.2454\cdot y+0{,}9781$.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Quyida berilgan taqsimot qonuni bilan aniqlangan *(X,Y)* ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor tashkil etuvchilarining sonli xarakteristikalari, kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini toping.

Y \ X	- 1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Javob: MX=0,55, MY=0,10, DX=0,2475, DY=0,59,

$cov(X,Y) = -0{,}055,\quad \rho(X,Y) \approx -0{,}144.$

2. *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi D sohada $f(x,y) = A \cdot x \cdot y$ ga va bu sohadan tashqarida nolga teng. D soha $x + y - 1 = 0,\quad x = 0,\quad y = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat. A koeffitsientning qiymatini, MX, MY, DX, DY hamda kovariatsiya va korrelyatsiya koeffitsientlarini toping.

Javob: $A = 24,\quad MX = MY = 2/5,\quad DX = DY = 1/25,$

$cov(X,Y) = -2/75,\quad \rho(X,Y) = -2/3.$

3. Agar *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'lsa, to'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping:

Y \ X	- 1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Javob: to'g'ri regressiya tenglamasi: $y = -0{,}222x + 0{,}222$;

teskari regressiya tenglamasi: $x = -0{,}09322y + 0{,}5593$;

qoldiq dispersiyalar: $\sigma_Y^2(1 - \rho^2) = 0{,}577$; $\sigma_X^2(1 - \rho^2) = 0{,}2424$.

4. Agar D soha $x + y - 1 = 0,\quad x = 0,\quad y = 0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdan iborat bo'lib, *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi shu soha ichida $f(x,y) = 24 \cdot x \cdot y$ ga va undan tashqarida nolga teng bo'lsa, *(X,Y)* ikki o'lchovli tasodifiy miqdor uchun to'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping.

Javob:

regressiya tenglamalari: $y = -0{,}6667x + 0{,}6667$

$x = -0{,}6667y + 0{,}6667$;

qoldiq dispersiyalar: $\sigma_Y^2(1 - \rho^2) = \sigma_X^2(1 - \rho^2) = 0{,}0222$.

5. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi shu soha ichida $f(x,y)=24\cdot x\cdot y$ ga va undan tashqarida nolga teng bo'lsa, (X,Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdor uchun to'g'ri va teskari regressiya tenglamasini toping.

Javob:

regressiya tenglamalari: $y=-0.6667x+0.6667$;

$x=-0.6667y+0.6667$;

qoldiq dispersiyalar: $\sigma_Y^2(1-\rho^2)=\sigma_X^2(1-\rho^2)=0{,}0222$.

2.11. CHEBISHEV TENGSIZLIGI VA KATTA SONLAR QONUNI

Biz bilamizki, tajriba natijasida tasodifiy miqdor qanday qiymat qabul qilishini oldindan aytib bo'lmaydi. Lekin azaldan ma'lumki, ayrim keng ma'nodagi shartlar bajarilganda, yetarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning yig'indisi tasodifiylikdan holi bo'lib, ma'lum bir qonuniyatlarga bo'ysunar ekan. «Katta sonlar qonuni» nomi bilan katta sondagi tasodifiy miqdorlarning yig'indisining ana shunday xossalarini aks ettiruvchi bir qator teoremalar umumlashtirilgan. Chebishev va Bernulli teoremalari nomi taniqli «Katta sonlar qonuni»ning ko'rinishlarini keltirishdan avval Markov va Chebishev tengsizliklari hususida to'xtalib o'tamiz.

Markov tengsizligi. Manfiy qiymatlar qabul qilmaydigan X tasodifiy miqdor va ixtiyoriy a musbat son uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{X\geq\alpha\}\leq\frac{MX}{\alpha}\quad \text{yoki}\quad P\{X<\alpha\}\geq 1-\frac{MX}{\alpha}$$

Chebishev tengsizligi. Chekli dispersiyaga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor va ixtiyoriy ε soni uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{|X-MX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2},$$

ya'ni X tasodifiy miqdorning uning MX matematik kutilmasidan chetlashishining absolyut qiymati bo'yicha musbat ε dan kichik bo'lish ehtimoli $1-DX/\varepsilon^2$ dan kichik emas.

Bu tengsizlikni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Chebishev teoremasi (Katta sonlar qonuni).

Teorema: Agar $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi:

1) juft-jufti bilan bog'liq bo'lmagan;

2) dispersiyalari tekis chegaralangan, ya'ni har biri bir xil o'zgarmas son C>0 bilan chegaralangan ($DX_1 < C,\ \ DX_2 < C,\ \dots,\ DX_n < C, \dots$) bo'lsa, u holda har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Xususan, agar $MX_1 = MX_2 = \dots = MX_n = \dots = a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Teoremaning isboti $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tasodifiy miqdorga Chebishev tengsizligini g'o'llashdan kelib chiqqan quyidagi tengsizlikka asoslangan:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

Bu muhim teoremaning ma'nosi shundan iboratki, $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlarning o'rta arifmetigi yetarlicha katta *n* larda ularning matematik kutilmalarining o'rta arifmetigi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i$ dan yoki, xususiy holda, *a* sonidan juda kam farq qilish ehtimoli juda katta.

Keyingi teorema hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi va uning ehtimoli orasidagi bog'lanish haqidadir. *n* ta bog'liqsiz tajribalar ketma-ketligi o'tkazilgan bo'lib, ularning xar birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas *p* soniga teng bo'lsin.

Bernulli teoremasi (Katta sonlar qonuni).

Teorema: Tajribalar ketma-ketligining soni oshishi bilan *A* xodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi m/n hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* ga ehtimollik bo'yicha yaqinlashar ekan, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Ma'lum bir omonat kassasiga qo'yilgan jamg'armalar miqdori 20000000 so'mga teng ekan. Tasodifiy tanlangan jamg'armaning miqdori 100000 so'mdan kichik bo'lish ehtimoli 0,8 teng bo'lsa, shu omonat kassasiga pul qo'ygan mijozlarning soni haqida nima deyish mumkin?

Yechish: X tasodifiy miqdor tasodifiy ravishda tanlangan jamg'armaning miqdori va n esa omonat kassasiga pul qo'ygan barcha mijozlarning soni bo'lsin. Masalaning shartiga ko'ra:

$$MX=\frac{20000000}{n}; \quad P(X<100000)=0{,}8,$$

Markov tengsizligi $P(X<100000)\geq 1-\frac{MX}{100000}$ dan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$0{,}8\geq 1-\frac{20000000}{n\cdot 100000}; \qquad 200\geq n\cdot 0{,}2; \qquad n\leq 1000,$$

Javob: $n\leq 1000$.

2-masala. («Uch sigma» qoidasi). Chebishev tengsizligidan foydalanib, tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan uch karra o'rtacha kvadratik chetlashishdan kamroq miqdorga farq qilish ehtimolini baholang.

Yechish: Masalaning shartiga asosan $\varepsilon=3\cdot\sigma(X)$. Bu qiymatni Chebishev tengsizligiga qo'ysak,

$$P\{|X-MX|<3\cdot\sigma(X)\}\geq 1-\frac{DX}{9\cdot(\sigma(X))^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

Javob: $P\{|X-MX|<3\cdot\sigma(X)\}\geq\frac{8}{9}$.

3-masala. Har birining dispersiyasi 3 dan katta bo'lmagan 1500 ta bog'liqsiz tasodifiy miqdorlarning o'rtacha arifmetik qiymati ularning matematik kutilishlarining o'rtacha arifmetigidan chetlashishi 0,6 dan katta bo'lmaslik ehtimolini baholang.

Yechish. N ta tasodifiy miqdorning o'rtacha arifmetik qiymati

$\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)$ ham tasodifiy miqdor bo'ladi. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $\frac{1}{n}\left(MX_1 + MX_2 + \cdots + MX_n\right)$ga teng.

Chebishev tengsizligi $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$ ga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left\{\left|\frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500} X_i - \frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500} MX_i\right| < 0{,}6\right\} \geq 1 - \frac{3}{1500 \cdot 0{,}6^2} = 0{,}998.$$

Javob: $P\left\{\left|\frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500} X_i - \frac{1}{1500}\sum_{i=1}^{1500} MX_i\right| < 0{,}6\right\} \geq 0{,}998.$

4-masala. Qurilma 10 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan elementdan tashkil topgan. Har bir elementning T vaqtda ishdan chiqish ehtimoli 0,05 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, ishdan chiqqan elementlar soni va ularning T vaqt ichidagi o'rtacha soni (matematik kutilmasi) orasidagi farq absolyut qiymati bo'yicha a) 2 dan kichik; b) 2 dan kichik emas bo'lish ehtimolini toping.

Yechish: a) X — T vaqt ichida ishdan chiqqan elementlar soni n=10 va p=0,05 parametrli binomial taqsimotga ega bo'lgan diskret tasodifiy miqdor. Shuning uchun $MX = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$; $DX = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$. Chebishev tengsizligi

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

dan foydalanib MX=0,5; DX=0,475 va $\varepsilon = 2$ qiymatlarni o'rniga qo'ysak,

$$P\{|X - 0{,}5| < 2\} \geq 1 - \frac{0{,}475}{2^2} = 0{,}12.$$

b) $|X - 0{,}5| < 2$ va $|X - 0{,}5| \geq 2$ hodisalar o'zaro qarama-qarshi bo'lgani uchun ularning ehtimollari yig'indisi 1 ga teng. Demak, $P\{|X - 0{,}5| > 2\} \leq 1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

Javob: a) $P\{|X - 0{,}5| < 2\} \geq 0{,}12$; *b)* $P\{|X - 0{,}5| > 2\} \leq 0{,}88$.

5-masala. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_n	$-na$	0	na
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkinmi?

Yechish: Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligiga Chebishev teoremasini qo'llash uchun ularning juft-jufti bilan o'zaro bog'liq bo'lmasligi va tekis chegaralangan dispersiyalarga ega bo'lishi yetarlidir. Berilgan tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmaganligi uchun ular albatta juft-jufti bilan o'zaro bog'liq bo'lmaydi, ya'ni Chebishev teoremasining 1-sharti o'rinli bo'ladi.

Dispersiyalarning tekis chegaralanganlik shartining bajarilishini tekshiramiz. Avval X_n larning matematik kutilmasini topamiz:

$$MX_n = (-na)\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + (na)\cdot\frac{1}{2n^2} = 0.$$

Demak, X_n tasodiiy miqdorlarning dispersiyalari quyidagiga teng:

$$DX_n = MX_n{}^2 - (MX)^2 = (-na)^2\cdot\frac{1}{2n^2} + 0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + (na)^2\cdot\frac{1}{2n^2} - 0^2 = a^2.$$

Shunday qilib, berilgan tasodifiy miqdorlar har birining dispersiyasi a^2 soni bilan tekis chegaralangan va Chebishev teoremasining 2-sharti ham o'rinli. Demak, barcha shartlar bajarilayotgani sababli, berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkin ekan.

Javob: Qo'llash mumkin.

6-masala. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X_n	$-na$	0	na
p,	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkinmi?

Yechish: Berilgan tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmaganligi uchun ular albatta juft-jufti bilan ham o'zaro bog'liq bo'lmaydi, ya'ni Chebishev teoremasining 1-sharti o'rinli. X_n tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlarini hisoblaymiz. Taqsimot simmetrik bo'lgani uchun $MX_n=0$:

$$MX_n = (-na)\cdot\frac{1}{2^n} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + (na)\cdot\frac{1}{2^n} = 0.$$

Endi dispersiyalarning tekis chegaralanganlik shartining bajarilishini tekshiramiz.

$$DX_n = MX_n^2 - (MX)^2 = (-na)^2\cdot\frac{1}{2^n} + 0^2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + (na)^2\cdot\frac{1}{2^n} - 0^2 = \frac{n^2\cdot a^2}{2^{n-1}}.$$

n ni vaqtincha uzluksiz o'zgaradi deb faraz qilib, $\varphi(x)=\frac{x^2}{2^{x-1}}$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu funksiyaning birinchi tartibli hosilasini nolga tenglashtirib, $x_1=0$ *va* $x_2=\frac{2}{\ln 2}$ kritik nuqtalarni topamiz. $n=0$ qiymat qabul qila olmaydi, shuning uchun 1-nuqtani qaramaymiz. $x_2=\frac{2}{\ln 2}$ nuqtada $\varphi(x)=\frac{x^2}{2^{x-1}}$ funksiya maksimumga erishadi. $\frac{2}{\ln 2}\approx 2{,}9$ va *n* – butun musbat son. Demak, 2,9 ga (chapdan $n=2$ va o'ngdan $n=3$) eng yaqin turgan butun sonlarni $DX_n=\frac{n^2\cdot a^2}{2^{n-1}}$ ifodaga qo'yib ko'ramiz. $DX_2=2\cdot a^2$ va $DX_3=9\cdot a^2/4$.

Shubhasiz $(9a^2/4)>2a^2$. Demak, X_n tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari $9\cdot a^2/4$ son bilan tekis chegaralangan.

Shunday qilib, Chebishev teoremasining barcha shartlari o'rinli va berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkin.

Javob: Qo'llash mumkin.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Chebishev tengsizligidan foydalanib, tasodifiy miqdor o'zining matematik kutilmasidan kamida ikki karra o'rtacha kvadratik chetlashishga farq qilish ehtimolini baholang.

Javob: $P\{|X - MX| \geq 2 \cdot \sigma\} \leq 1/4.$

2. Agar DX=0,004 bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < 0.2$ bo'lish ehtimolini baholang.

Javob: $P\{|X - MX| < 0.2\} \geq 0.9.$

3. Agar $P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 0.9$ va DX=0,009 bo'lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib ε qiymatini toping.

Javob: $\varepsilon = 0.3.$

4. A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 100 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajriba o'tkazilganda, A hodisaning ro'y berishlari soni X 40 dan 60 gacha bo'lgan oraliqqa tushish ehtimolini baholang.

Javob: $P\{40 < X < 60\} \geq 0.75.$

5. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < \sqrt{0.4}$ bo'lish ehtimolini baholang.

Javob: $P\{|X - 0.44| < \sqrt{0.4}\} \geq 0.909.$

6. Diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Chebishev tengsizligidan foydalanib, $|X - MX| < 0.2$ bo'lish ehtimolini baholang .

Javob: $P\{|X - 0.54| < 0.2\} \geq 0.64.$

7. A hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 800 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar o'tkazilganda, A hodisaning ro'y berishlari soni X 150 dan 250 gacha bo'lgan oraliqqa tushish ehtimolini toping.

Javob: $P\{150 < X < 250\} \geq 0.94.$

8. Tayyorlanayotgan mahsulotlarning o'rtacha uzunligi (matematik kutilmasi) 90 sm ga teng bo'lgan tasodifiy miqdordan iborat. Uning dispersiyasi 0,0225 ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, a) $|X - MX| < 0,4$ bo'lish ehtimolini; b) mahsulotning uzunligi 89,7 dan 90,3 gacha bo'lgan oraliqda bo'lish ehtimolini baholang.

Javob: a) $P \geq 0.86$, b) $P \geq 0.75$.

9. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan :

Xn	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
p	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Bu kema-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkinmi?

Javob: Qo'llash mumkin. $MX_n = 0$ *va* $DX_n = 1$.

10. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

Xn	$-a$	a
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Bu ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkinmi?

Javob: Qo'llash mumkin. $MX_n = -a/(2n+1)$ va $DX_n < a^2$

11. $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan :

Xn	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo'llash mumkinmi?

Javob: Qo'llash mumkin: $MX_n = 0$ va $DX_n = 2$.

12. $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan:

Xn	-2^n	2^n
p	$1/2$	$1/2$

Berilgan ketma-ketlikka Chebishev teoremasini qo‘llash mumkinmi?

Javob: Qo‘llash mumkin emas: $MX_n = 0$ va $DX_n = 2^{2n}$.

13. Aholi istiqomat qiladigan hududda kundalik o‘rtacha suv sarfi 50000 litrni tashkil etadi. Shu joyda bir kunlik suv sarfi 120 000 litrdan oshmaslik ehtimolini baholang.

Javob: $P \geq 0{,}583$.

14. Kartoshkaning o‘rtacha og‘irligi 100 gr. Markov tengsizligidan foydalanib, tasodifiy ravishda olingan kartoshkaning og‘irligi 300 gr. dan oshmaslik ehtimolini baholang.

Javob: $P \geq 0{,}66$.

15. Bir do‘kon savdo faoliyatining tahlili natijalariga ko‘ra bir oylik o‘rtacha muomala xarajatlari 300 shartli pul birligi (sh.p.b.)ni tashkil etishi aniqlandi. Keyingi oyda bu harajatlar 280—320 pul birligi chegarasidan chiqmaslik ehtimolini toping. Xarajatlar dispersiyasi 16 sh.p.b. ga teng.

Javob: R > 0,96.

16. Stanokda ma’lum bir detal tayyorlanadi. Detal uzunligi tasodifiy miqdor bo‘lib, o‘lchanganda uning uzunligi 3 holda 20,1 sm, 2 holda 19,8 sm, 1 marta 20,5 sm va 4 holda 19,9 smga teng bo‘lib chiqdi. Detalning uzunligi 19,7 va 20,3 sm oralig‘iga tushish ehtimolining quyi chegarasini toping.

Javob: $R \geq 0{,}555$.

17. 10 000 gektar (ga) yerdagi o‘rtacha hosildorlikni aniqlash maqsadida 100 ga lik maydonning har biridan tanlanma uchun 1 ga dan olingan. Agar 100 ga lik har bir maydondagi dispersiya 2 sr dan oshmasa, o‘rtacha tanlanma hosildorlik butun maydondagi haqiqiy o‘rtachasidan ko‘pi bilan 0,5 sr ga farq qilishi ehtimolini baholang.

Javob: $P \geq 0{,}92$.

18. 10 000 ga yerdagi o‘rtacha hosildorlikni aniqlash maqsadida 200 ga lik maydonning har biridan tanlanma uchun 1 ga dan olingan. Agar 200 ga lik har bir tanlanma maydondagi dispersiya 2,5 sr dan oshmasa, 0,8 dan kam bo‘lmagan ishonchlilik bilan o‘rtacha tanlanma hosildorlik butun maydondagi haqiqiy o‘rtachasidan ko‘pi bilan qanchaga farq qilishi mumkin?

Javob: $\varepsilon=0{,}5$.

19. Detallar 250 ta qutiga joylashtirilgan. Detalning o‘rtacha massasini aniqlash uchun har bir qutidan bittadan detal olingan. Agar bir quti bo‘yicha hisoblangan dispersiya 4 dan oshmasa, tanlanmadagi detal o‘rtacha massasining haqiqiy o‘rtacha massadan ko‘pi bilan qanchaga farq qilishini aniqlang. Ishonchlilik 0,9 dan kam bo‘lmasin.

Javob: $\varepsilon=0{,}4$.

20. Bir zavod mahsulotining o‘rtacha 70%i 1-navli ekani ma’lum. 10 000 ta mahsulot ichida birinchi navlilarining nisbiy chastotasi joylashadigan chegarani 0,9 dan kam bo‘lmagan ehtimollik bilan aniqlang.

Javob: $P(0,686 < m/n < 0,714) \geq 0,9$.

21. 900 ta sinovning har birida ma’lum bir hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Bernulli teoremasidan foydalanib, hodisaning ro‘y berishlar soni 600 va 660 oraliqqa tushish ehtimolini baholang.

Javob: $R > 0,79$.

22. Har bir tajribada ma’lum bir hodisaning ro‘y berish ehtimoli o‘zgarmas. 10000ta tajriba o‘tkazish rejalashtirilgan. Bernulli teoremasidan foydalanib, hodisaning ro‘y berishlar soni eng ehtimolliroq ro‘y berishlar sonidan ko‘pi bilan 100 taga farqlanish ehtimolini baholang.

Javob: $R > 0,8125$.

23. Qiz va o‘g‘il bola tug‘ilish ehtimolliklarini bir xil deb olgan holda Bernulli teoremasi yordamida 1000ta tug‘ilgan bola orasida o‘g‘il bolalar soni 465 va 535 orasida bo‘lishi ehtimolini baholang.

Javob: $R > 0,796$.

24. 400 ta rudadan sinov uchun olingan moddalar tekshirilishi kerak. Rudalarning har birida qazib olishni yo‘lga qo‘yish uchun rudada yetarli metal ulushi bor bo‘lishi ehtimoli bir xil va 0,8 ga teng. Bernulli teoremasi yordamida qazib olishni yo‘lga qo‘yish uchun yetarli metal ulushi bor rudalar soni 290 va 350 orasida bo‘lishi ehtimolini baholang.

Javob: $R > 0,928$.

2.13. MATEMATIK STATISTIKADA KENG QO‘LLANADIGAN TASODIFIY MIQDORLARNING ASOSIY TAQSIMOTLARI

Bu paragrafda normal taqsimot bilan bog‘liq hamda matematik statistikada ko‘p qo‘llanadigan taqsimot qonunlari haqida gap boradi.

χ^2 — taqsimot

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ - o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin. Ular har birining matematik kutilmasi nolga va dispersiyasi birga teng, ya’ni standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lsin: $MX_i = 0,\ \ DX_i = 1,\ \ (i = \overline{1,n})$. U holda ular kvadratlarining yig‘indisi

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan χ^2 («xi- kvadrat») taqsimotga ega bo'ladi. Agar berilgan tasodifiy miqdorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda erkinlik darajasi $k = n - 1$ bo'ladi. Misol uchun, agar $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$ bo'lsa, bu tasodifiy miqdorning erkinlik darajasi $k = n - 1$ bo'ladi.

Erkinlik darajasining ma'nosini quyidagi masalada tushuntirish mumkin.

1-masala. Kompaniya menejeri to'rtta turli loyiha uchun $150000 byudjetga ega. Menejer nechta erkinlik darajasiga ega?

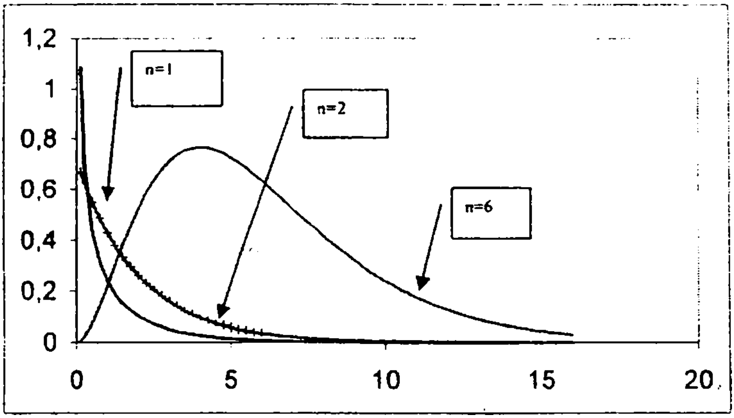
Yechish. Aytaylik, X_i (i=1, 2, 3, 4) i- loyihaga ajratilgan mablag'ni bildirsin. To'rtta turli loyihaning umumiy byudjetini uning o'rta arifmetigini loyihalar soniga ko'paytirilganiga teng deb qarash mumkin ($X_1+X_2+X_3+X_4=4\overline{X}$). U holda bitta loyihaga taxminan $150000/4 = $37 500 mablag' ajratilgan. Uchta loyihaga mablag' ajratilgandan so'ng menejerning to'rtinchi loyihaga qolgan mablag'ni ajratishdan boshqa iloji qolmaydi, ya'ni

$$X_4=4\overline{X}-(X_1+X_2+X_3) = \$150000-(X_1+X_2+X_3).$$

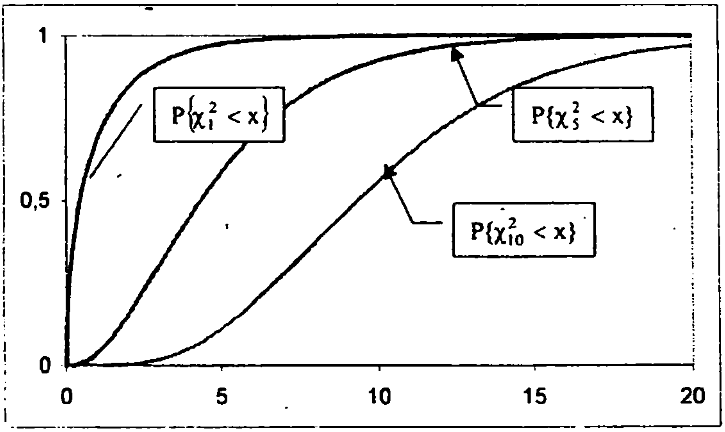
Demak, menejerning erkinlik darajasi 3 ga teng.

Umumiy hol. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ – normal taqsimlangan o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Zi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a_i ga va dispersiyasi σ_i^2 ga teng. U holda $X_i = \frac{Z_i - a_i}{\sigma_i}$ tenglik orqali aniqlangan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar standart normal taqsimotga ega. Ular kvadratlarining yig'indisi erkinlik darajasi $k = n$ ga teng bo'lgan χ^2 («xi- kvadrat») taqsimotga ega bo'ladi:

$$\chi^2 = \chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$



4-rasm. n ning qiymatlari uchun χ^2 -taqsimot zichlik funksiyasi grafiklari.



*5-**rasm**. n* ning turli qiymatlari uchun χ^2 – taqsimot grafigi.

Erkinlik darajasi p ga teng bo‘lgan c² taqsimotning zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \exp(-x/2) \cdot x^{(n/2)-1}, & x > 0, \end{cases}$$

bu yerda $\partial(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ — gamma funksiya; xususan, $\partial(n+1) = n!$

Matematik kutilma va dispersiyasi: $M\chi^2 = n;\quad D\chi^2 = 2n.$

Modasi: $mod\,\chi^2 = n-2 \quad (n \geq 2)$

Ko'rinib turibdiki, «xi — kvadrat» taqsimot bitta parametr — erkinlik darajasi p bilan aniqlanar ekan. Erkinlik darajasi ortishi bilan «xi — kvadrat» normal taqsimotga yaqinlashib boradi.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar.
Erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan χ^2 — taqsimot funksiyasining qiymatini maxsus **XI2TRASP(X;ERKINLIK_DAR)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X — funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati, ERKINLIK_DAR — taqsimotning erkinlik darajasi (ya'ni n). Erkinlik darajasi n ga teng bo'lgan χ^2 — taqsimot funksiyasiga teskari funksiyaning qiymatini maxsus **XI2TOBR(EHTIMOLLIK; ERKINLIK_DAR)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda EXTIMOLLIK — teskari funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni taqsimot funksiyasining qiymati EXTIMOLLIK ka teng bo'lgan argumentning qiymati X: XI2RASP(X;N)=EHTIMOLLIK), ERKINLIK_DAR — taqsimotning erkinlik darajasi (ya'ni n).
E s l a t m a : maxsus funksiyalarga murojaat qilganda quyidagi parametrlar X; EHTIMOLLIK; ERKINLIK_DAR — miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Styudent taqsimoti

$X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ — o'zaro bog'liq bo'lmagan standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Ularning har birining matematik kutilmasi nolga va dispersiyasi σ^2 ga teng. U holda quyidagi tasodifiy miqdor:

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2\right)}} = \frac{X_0}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$$

erkinlik darajasi p ga teng bo‘lgan t – taqsimot yoki Styudent taqsimotiga ega bo‘ladi. T miqdor σ^2 ga bog‘liq emasligini ta’kidlab o‘tamiz.

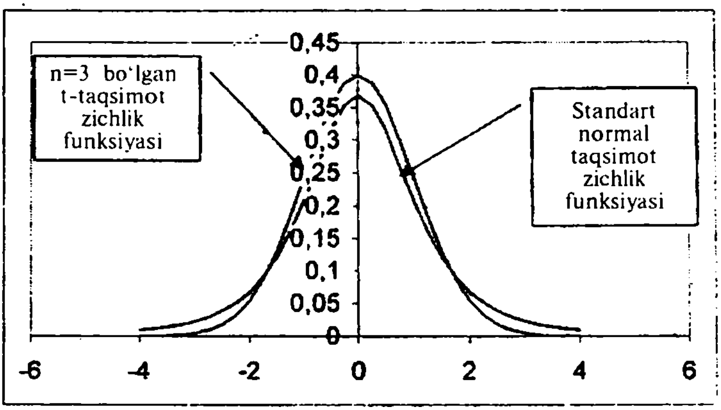
Erkinlik darajasi p ga teng bo‘lgan t – taqsimot yoki Styudent taqsimotining zichlik funksiyasi:

$$f(x) = \frac{\partial\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\partial\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n\pi}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

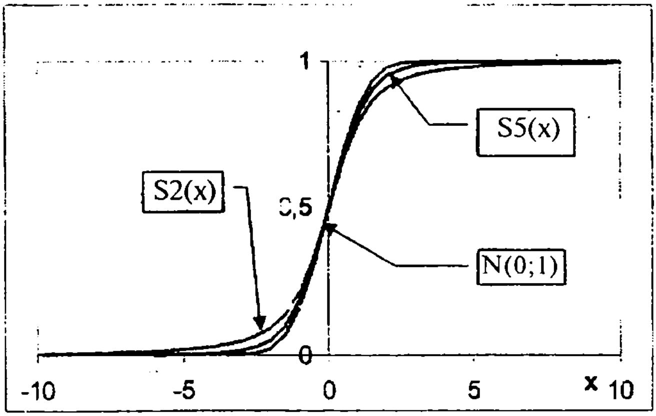
bu yerda $\partial(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ – gamma funksiya.

Matematik kutilma, dispersiya va modasi:

$$MT = 0(n > 1); \quad DT = \frac{n}{n-2}(n > 2); \quad mod\,T = 0.$$



6-rasm. t- yoki Styudent taqsimoti.



7-rasm. Turli erkinlik darajalari uchun (n=2; 5) Styudent taqsimoti funksiyasi va standart normal taqsimot funksiyasi.

Standart normal taqsimot bilan solishtirish

T ning asimptotik taqsimoti standart normal taqsimotga teng, ya'ni $n \to \infty$ da t-taqsimot matematik kutilmasi nolga, dispersiyasi birga teng normal taqsimotga yaqinlashadi.

Shunday qilib, standart normal tasodifiy miqdorning erkinlik darajasi *p* ga teng bo'lgan χ^2 — tasodifiy miqdordan kvadrat ildizga nisbati erkinlik darajasi *p* ga teng bo'lgan Styudent taqsimotiga bo'ysunadi.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar.
Erkinlik darajasi *n* ga teng bo'lgan Styudent taqsimot funksiyasining qiymatini maxsus **STYUDTRASP(X;ERKINLIK_DAR)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X- funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati, **ERKINLIK_DAR** — taqsimotning erkinlik darajasi (ya'ni n). Erkinlik darajasi *n* ga teng bo'lgan Styudent taqsimot funksiyasiga teskari funksiyaning qiymatini maxsus **STYUDRASPTOBR(EHTIMOLLIK; ERKINLIK_DAR)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda EHTIMOLLIK — teskari funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni taqsimot funksiyasining qiymati EHTIMOLLIK ka teng bo'lgan argumentning qiymati **X: STYUDRASP(X;n)=EHTIMOLLIK), ERKINLIK_DAR** — taqsimotning erkinlik darajasi (ya'ni n).

E s l a t m a : maxsus funksiyalarga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X; EHTIMOLLIK; ERKINLIK_DAR** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

F-taqsimot yoki Fisher-Snedekor taqsimoti

$X_1, X_2, \dots, X_{k_1}, X_{k_1+1}, \dots, X_{k_1+k_2}$ - matematik kutilmasi $a=0$ va dispersiyasi $\sigma^2 < \infty$ bo'lgan o'zaro bog'liq bo'lmagan normal tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. U holda

$$F = F(k_1; k_2) = \frac{\frac{1}{k_1}\left(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{k_1}^2\right)}{\frac{1}{k_2}\left(X_{k_1+1}^2 + X_{k_1+2}^2 + \dots + X_{k_1+k_2}^2\right)} = \frac{\chi_{k_1}^2 / k_1}{\chi_{k_2}^2 / k_2}$$

tasodifiy miqdor erkinlik darajalari k_1 va k_2 bo'lgan F – yoki Fisher-Snedekor taqsimotiga ega.

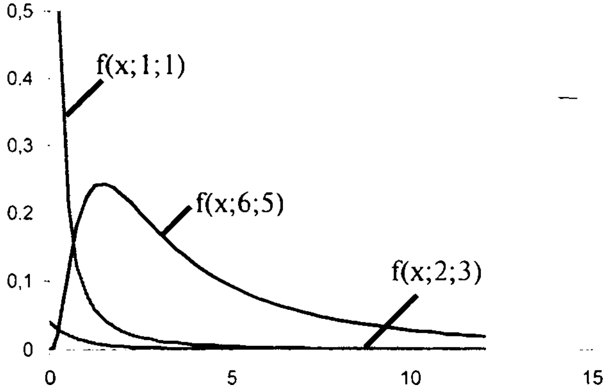
Erkinlik darajalari k_1 va k_2 bo'lgan Fisher-Snedekor taqsimotining zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot (k_1)^{k_1/2} \cdot (k_2)^{k_2/2}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1+k_2)/2}} & x > 0 \end{cases}$$

Fisher-Snedekor taqsimotining matematik kutilmasi, dispersiyasi va modasi

$$MF = \frac{k_2}{k_2 - 2}, (k_2 > 2); \quad DF = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}, (k_2 > 4);$$

$$mod\, F = \frac{k_2(k_1 - 2)}{k_1(k_2 + 2)}.$$



8-rasm. Erkinlik darajalari turlicha bo'lgan Fisher-Snedekor taqsimotining zichlik funksiyalari grafiklari.

Shunday qilib, erkinlik darajalari k_1 va k_2 bo'lgan ikkita χ^2-tasodifiy miqdorning nisbati F-taqsimotga ega.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar. Erkinlik darajalari k_1 va k_2 ga teng bo'lgan Fisher-Snedekor taqsimot funksiyasining qiymatini maxsus **FRASP(X;ERKINLIK_DAR1; ERKINLIK_DAR2)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda X- funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati, **ERKINLIK_DAR1** va **ERKINLIK_DAR2** – taqsimotning erkinlik darajalari (ya'ni mos ravishda k_1 va k_2).
Erkinlik darajalari k_1 va k_2 ga teng bo'lgan Fisher-Snedekor taqsimot funksiyasiga teskari funksiyaning qiymatini maxsus **FRASPOBR(EHTIMOLLIK;ERKIN_DAR1; ERKIN_DAR2)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **EHTIMOLLIK** – teskari funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni taqsimot funksiyasining qiymati **EHTIMOLLIK** ka teng bo'lgan argumentning qiymati **X: XI2RASP(X;k1;k2)=EHTIMOLLIK), ERKIN_DAR1** va **ERKIN_DAR2** – taqsimotning erkinlik darajalari (ya'ni mos ravishda k_1 va k_2).
E s l a t m a : maxsus funksiyalarga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X; EHTIMOLLIK; ERKIN_DAR1; ERKIN_ DAR2** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a;\sigma^2) = N(1;1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 4 ga teng bo'lgan χ^2-tasodifiy miqdorni ifodalang.

2. $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ — o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a;\sigma^2) = N(5;7)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar bo'lsin. Erkinlik darajasi 10 ga teng bo'lgan t-tasodifiy miqdorni ifodalang.

3. $X_1, X_2, \ldots, X_{k_1}, X_{k_1+1}, \ldots, X_{k_1+k_2}$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(2;1)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar berilgan. Erkinlik darajalari $k_1 = 2$ va $k_2 = 3$ bo'lgan Fisher taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni ifodalang.

4. X — erkinlik darajasi 1ga teng bo'lgan χ^2 («xi- kvadrat») taqsimotga ega. Uning zichlik funksiyasini yozing.

5. X — erkinlik darajasi 2 ga teng bo'lgan χ^2 («xi- kvadrat») taqsimotga ega. Uning zichlik funksiyasini yozing.

6. X — erkinlik darajasi 2 ga teng Styudent taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdor. Uning zichlik funksiyasini yozing.

7. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — o'zaro bog'liq bo'lmagan $N(a;\sigma^2) = N(2;3)$ parametrli normal tasodifiy miqdorlar berilgan. Erkinlik darajasi p ga teng χ^2 («xi- kvadrat») taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni ifodalang.

8. X — erkinlik darajalari $k_1 = 2$ va $k_2 = 3$ ga bo'lgan Fisher taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlang.

3-qism
MATEMATIK STATISTIKA

Statistika fani qonuniyatlar aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarini tasvirlash, to'plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o'rganadi. **Matematik statistika** esa ommaviy iqtisodiy va ijtimoiy hodisalarni tahlil etish uchun matematik apparat quradi.

3.1. TANLANMA. EMPIRIK TAQSIMOT FUNKSIYASI. POLIGON. GISTOGRAMMA

Biror sifat yoki miqdoriy alomatga ko'ra obyektlar to'plami tahlil qilinayetgan bo'lsin.

Tanlanma (tanlanma to'plam) deb tahlil uchun tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to'plamiga aytiladi. Tanlanma olingan umumiy to'plamga **bosh to'plam** deb ataladi. **Tanlanma hajmi yo**ki **bosh to'plam hajmi** deb to'lamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, agar 1000 ta detaldan sifatini tekshirish uchun 100 detal tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi $N=1000$ va tanlanmaning hajmi $n=100$ ga teng bo'ladi.

Tanlanmaning har bir elementi **varianta** deb ataladi. Tartiblangan tanlanma **variatsion qator** deb ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan va unda x_1 qiymat n_1 marta, $x_2 - n_2$ marta, $x_k - n_k$ marta kuzatilgan bo'lsin. U holda tanlanmaning hajmi $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ ga teng. n_i kattalik $-$ x_i variantaning **chastotasi**, $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ kattalik esa **nisbiy chastotasi** deb ataladi. Nisbiy chastotalar uchun quyidagi tenglik o'rinli: $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$.

Tanlanmaning **statistik taqsimoti** yoki **statistik qatori** deb variantalar va ularga mos kelgan chastotolar (nisbiy chastotalar)dan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_k \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & & \omega_k \end{pmatrix}.$$

Tanlanmaning **empirik taqsimot funksiyasi** deb x ning har bir qiymati uchun quyidagicha aniqlangan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bunda n_x – x qiymatdan kichik bo‘lgan variantalar soni; n – tanlanma hajmi. Tanlanmaning empirik funksiyasidan farqli bosh to‘plam uchun aniqlangan ushbu funksiya nazariy taqsimot funksiyasi $F(x)$ deb ataladi. Empirik taqsimot funksiyasi nazariy taqsimot funksiyani baholash uchun ishlatiladi.

Empirik taqsimot funksiyasining xossalari:

1. Empirik taqsimot funksiyasining qiymatlari $[0;1]$ kesmada yotadi.

2. $F^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya.

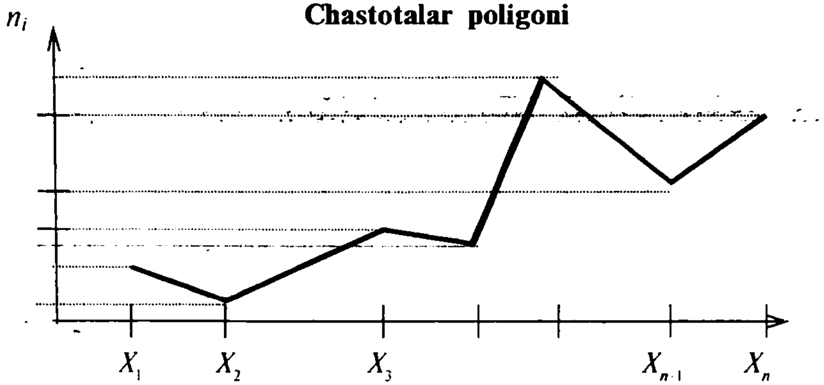
3. Agar x_1 – eng kichik varianta bo‘lsa, u holda $x \le x_1$ lar uchun $F^*(x) = 0$; va x_k – eng katta varianta bo‘lsa, $x > x_k$ lar uchun $F^*(x) = 1$.

Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun poligon va gistogrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb $(x_1;n_1),(x_2;n_2),\ldots,(x_k;n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Chastotalar poligonini qurish uchun absissalar o‘qida x_i variantalar qiymatlari va ordinatalar o‘qida ularga mos kelgan chastotalar n_i qiymatlari belgilanadi. Koordinatalari $(x_i;n_i)$ juftliklardan iborat nuqtalar kesmalar bilan tutashtiriladi.

Nisbiy chastotalar poligoni koordinatalari $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$, ..., $(x_k;w_k)$ bo‘lgan nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi

Chastotalar poligoni



Tanlanmani grafik usulda tasvirlashda tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajmi katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzluksiz xarakterga ega bo'lsa gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar gistogrammasi (yoki **nisbiy chastotalar gistogrammasi)** deb to'g'ri to'rtburchaklardan iborat shunday zinapoyasimon figuraga aytiladiki, i-to'g'ri to'rtburchak asosi h uzunlikdagi $[x_{i-1};x_i]$ qism intervaldan iborat bo'lib, balandligi esa n_i/h nisbatga (yoki ω_i/h nisbatga) teng. Gistogramma qurish uchun tanlanmaning barcha variantalari yotgan interval h qadam bilan $[x_{i-1};x_i]$ (ya'ni $x_i=x_{i-1}+h$) qism intervallarga bo'linadi va har bir interval uchun unga tushgan variantalar chastotalarining yig'indisi n_i topiladi. So'ng qism intervallarni asos qilib $\frac{n_i}{h}$ (nisbiy chastotalar gistogrammasi uchun $\frac{n_i}{n\cdot h}=\frac{\omega_i}{h}$) balandlikdagi to'g'ri to'rtburchaklar quriladi.

i to'g'ri to'rtburchak yuzasi $\frac{n_i}{h}\cdot h=n_i$ ga, ya'ni i-qism intervalga tushgan variantalar chastotasiga teng (nisbiy chastotalar uchun esa $\frac{\omega_i}{h}\cdot h=\omega_i=\frac{n_i}{n}$ ga, ya'ni i-qism intervalga tushgan variantalar nisbiy chastotasiga teng). Demak, chastotalar gistogrammasining yuzasi barcha chastotalar yig'indisi, ya'ni tanlanmaning hajmiga teng. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzasi esa barcha nisbiy chastotalar yig'indisi, ya'ni birga teng.

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Hajmi n=20 ga teng bo'lgan tanlanma chastotalar taqsimoti quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 & 5 & 7 & 8 \\ n_i & 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topish uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz:

$$\omega_1=\frac{n_1}{n}=\frac{4}{20}=0{,}2;\ \omega_2=\frac{n_2}{n}=\frac{7}{20}=0{,}35;\ \omega_3=\frac{n_3}{n}=\frac{6}{20}=0{,}3;\ \omega_4=\frac{n_4}{n}=\frac{3}{20}=0{,}15.$$

Tanlanmaning nisbiy chastotalar taqsimoti quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 & 5 & 7 & 8 \\ \omega_i & 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}3 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

Hisoblashlarni tekshiramiz: $\sum_{i=1}^{4} {}_i = 0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1.$

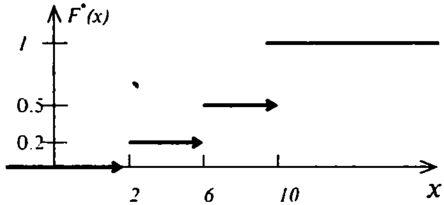
2-masala. Quyidagi statistik qator orqali berilgan tanlanma uchun empirik taqsimot funksiyasini quring:

$$\begin{pmatrix} x_i & 2 & 6 & 10 \\ n_i & 12 & 18 & 30 \end{pmatrix}$$

Yechish: Tanlanmaning hajmi n ni topamiz: n-12+18+30-60. Eng kichik varianta x_1=2, demak, $x \le 2$ lar uchun $F^*(x) = 0$. x<6 tengsizlikni qanoatlantiruvchi variantalar birgina x_1=2 va u varianta 12 marta kuzatilgan, demak $2 < x \le 6$lar uchun $F^*(x) = 12/60 = 0{,}2$. x<10 tengsizlikni qanoatlantiruvchi variantalar ikkita $x_1 = 2$ va $x_2 = 6$; ular 12+18 marta kuzatilgan, demak, $6 < x \le 10$lar uchun $F^*(x) = 30/60 = 0{,}5$. x_3 =10 eng katta varianta bo‘lgani uchun $x \le 2$ larda $F^*(x) = 0$.

Demak, izlanayotgan empirik taqsimot funksiyasi va uning grafigi quyidagi ko‘rinishga ega:

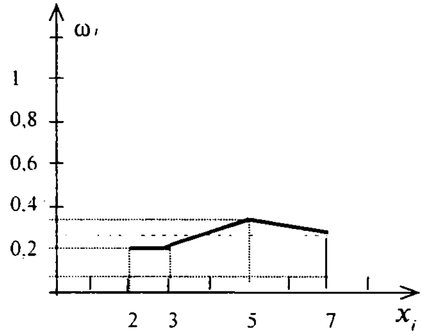
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0.2, & 2 < x \le 6; \\ 0.5, & 6 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$



3-masala. Quyidagi statistik taqsimot uchun nisbiy chastotalar poligonini quring:

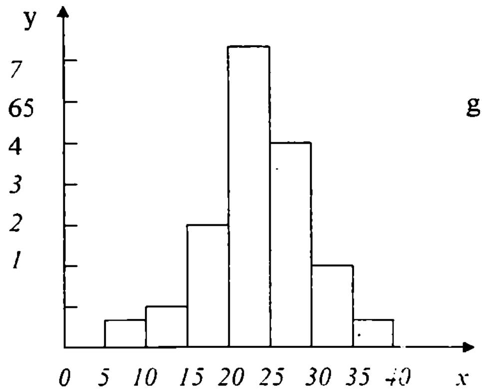
$$\begin{pmatrix} x_i & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \omega_i & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Yechish: XOY koordinatalar tekisligida koordinatalari $(x_i;\ \omega_i)$ bo'lgan M_i nuqtalarni belgilaymiz va ularni kesmalar bilar tutashtiramiz. Nisbiy chastotalar poligoni ushbu yo'l bilan hosil bo'lgan siniq chiziqdan iborat.



4-masala. Quyidagi jadvalda keltirilgan tanlanma uchun chastotalar gistogrammasini quring (tanlanma hajmi n=100).

i-qism interval	i-qism intervalga tushgan variantalar chastotasi n_i	i-to'grito'rtburchak balandligi $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8



Chastotalar gistogrammasi

Chastotalar yoki nisbiy chastotalar poligonlari grafiklarini chizish uchun **EXCEL** dasturining diagrammalar chizish ustasidan foydalanish mumkin: Asboblar paneli. Diagrammalar ustasi. Nuqtaviy diagrammalar.

Quyidagi X tanlanma chastotalarning statistik taqsimoti orqali berilgan: $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

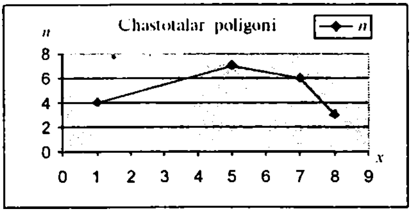
Bu tanlanma nisbiy chastotalarining statistik taqsimoti quyidagicha bo'ladi:

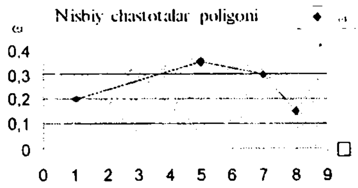
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}3 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

EXCEL dasturi yordamida chizilgan chastotalar poligoni grafigi quyidagicha:

x	n
1	4
5	7
7	6
8	3

x	ω
1	0,2
5	0,35
7	0,3
8	0,15





Tanlanmaning gistogrammasini chizish uchun: **EXCEL** dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlili. Gistogramma.

«Gistogramma» dialog oynasining parametrlari

Kiritish diapazoni – tahlil qilinishi kerak bo'lgan ma'lumotlar joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat satr yoki ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat.

Xususiy intervallar (majrubiy emas) o'sish tartibida keltirilgan xususiy intervallarning chegaralari yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak. Xususiy intervallarga tushgan variantalar soni hisoblanganda quyi chegaraviy qiymatga teng variantalar intervalga kiritiladi va yuqori chegaraviy qiymatga teng variantalar intervalga kiritilmaydi. Agar ***Xususiy intervallar*** qiymatlari kiritilmasa, maksimal va minimal variantalar orasi teng uzunlikdagi xususiy intervallarga bo'linadi.

Belgi – Agar kiritish diapazonida ma'lumotlarning birinchi ustun yoki satrida ma'lumotlarning nomi ko'rsatilgan bo'lsa, maxsus 4 belgi qo'yilishi kerak.

Chiqarish diapazoni – natijalar chiqarilishga mo'ljallangan joyning chapdan birinchi yacheykasining adresi;

Yangi sahifa – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi ochilgan sahifaning A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi;

Yangi kitob – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi tashkil etilgan kitobning birinchi sahifasining A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

Pareto (tartiblangan diagramma) – maxsus 4 belgi qo'yilsa, diagrammada ma'lumotlar chastotalarning kamayish tartibida; agar maxsus belgi qo'yilmasa, xususiy intervallarning o'sish tartibida keltiriladi.

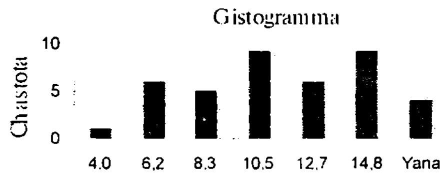
Grafik – maxsus 4 belgi qo'yilsa, gistogrammaning miqdoriy ko'rsatkichlaridan tashqari grafigi ham keltiriladi.

Quyidagi X tanlanma uchun har xil parametrlarda chizilgan gistogramma natijalari:

8	14	13	16	14	16	11	12	6	9	6	6	13	6	11	13	10	13	12	9
4	13	8	13	9	8	9	11	9	14	6	10	15	9	12	6	17	7	8	10

A) Xususiy intervallar aniqlanmagan:

Karman	Chastota
4,0	1
6,2	6
8,3	5
10,5	9
12,7	6
14,8	9
Yana	4

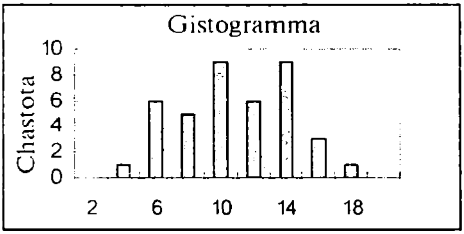


B) Xususiy intervallar chegaralari quyidagicha aniqlangan bo'lsa:

2	4	6	8	10	12	14	16	18

Natijalar taqdimi quyidagicha bo'ladi:

h	Chastota
2	0
4	1
6	6
8	5
10	9
12	6
14	9
16	3
18	1
$\sum$	0



Mustahkamlash uchun masalalar

1. Quyidagi tanlanma berilgan: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Tanlanmani *a*) variatsion qator; *b*) chastotalar statistik taqsimoti; *d*) nisbiy chastotalar statistik taqsimoti ko'rinishida tasvirlang.

Javob: a) 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10;

b) x_i 2 3 4 5 7 10 d) x_i 2 3 4 5 7 10;

n_i 3 1 2 3 4 2 ω_i 1/5 1/15 2/15 1/5 4/15 2/15.

2. Quyidagi statistik qator ko'rinishida berilgan tanlanma uchun chastotalar poligonini quring:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

3. Quyidagi statistik qator ko'rinishida berilgan tanlanma uchun chastotalar poligonini quring:

x_i	1	3	6	8	9
n_i	10	15	30	33	12

4. Jadvalda bir oy davomida xususiy shaxslarning bankka qo'ygan omonat hajmi taqsimoti berilgan. Taqsimot poligonini quring.

Omonat hajmi (ming so'm)	100	250	500	600	750	800	900	1000
Omonatchilar soni	1	2	5	8	17	21	18	8

5. Quyidagi statistik taqsimoti orqali berilgan tanlanmalar uchun empirik taqsimot funksiyalarni toping:

a) $\begin{matrix} x_i & 1 & 4 & 6 \\ n_i & 10 & 15 & 25 \end{matrix}$ *b)* $\begin{matrix} x_i & 2 & 5 & 7 & 8 \\ n_i & 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}$ *d)* $\begin{matrix} x_i & 4 & 7 & 8 \\ n_i & 5 & 2 & 3 \end{matrix}$

$$Javob:\ a)\ F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0.2, & 1 < x \le 4; \\ 0.5, & 4 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

$$b)\quad F^*(x)=\begin{cases} 0. & x \le 2; \\ 0.1, & 2 < x \le 5; \\ 0.4, & 5 < x \le 7; \\ 0,6, & 7 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases} \qquad d)\quad F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le 4; \\ 0.5, & 4 < x \le 7; \\ 0.7, & 7 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

6. Quyidagi jadvalda berilgan tanlanma uchun chastotalar gistogrammasini quring. Tanlanma hajmi n=55.

qism interval nomeri	i qism interval chegarasi	i qism intervalga tushgan variantalar soni
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10- 12	2
2	12- 14	4
3	14- 16	8
4	16- 18	12
5	18- 20	16
6	20- 22	10
7	22- 24	3

7. Jadvalda chorvachilik bilan shug'ullanadigan fermer xo'jaligidagi sigirlar sutining yog'lilik darajasi bo'yicha taqsimoti berilgan. Chastotalar gistogrammasini quring.

Sut yog'liligi, %	Sigirlar soni
3,45 - 3,55	1
3,55 - 3,65	1
3,65 - 3,75	3
3.75 - 3,85	4
3,85 - 3,95	7
3,95 - 4,05	5
4,05 - 4,15	2
4,15 - 4,25	1
4,25 - 4,35	1

8. Quyidagi jadvalda berilgan tanlanma uchun chastotalar gistogrammasini quring. Tanlanma hajmi $n=100$.

i qism interval nomeri	i qism interval chegarasi	i qism intervalga tushgan variantalar soni
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0- 2	20
2	2- 4	30
3	4- 6	50

9. Quyidagi jadvalda sement sanoatining 1996-yil uchun ko'rsatkichlari keltirilgan:

Yillik ishlab chiqarish hajmi, (ming tonna)	Korxonalar soni
500 gacha	27
500- 1000	.11
1000- 2000	8
2000- 3000	8
3000 dan ziyod	2

Chastotalar gistogrammasini quring.

10. Keltirilgan jadvalga asosan quyidagilar uchun chastotalar poligonini quring:

- mehnat ish haqi;
- ijtimoiy transfertlar;
- xususiy tadbirkorlik faoliyati daromadi;
- tovar sotib olish va xizmat sohasiga ketgan harajatlar;
- majburiy to'lovlar uchun ketgan harajatlar;
- qimmatbaho qog'ozlar va omonatlarda saqlanayotgan jamg'armalar.

Yillar bo'yicha aholining pul daromadlari strukturasi va daromadlarga nisbatan harajatlarning foizi

Pul daromadlari	1980	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Jami	100	100	100	100	100	100	100
Shu jumladan:							
• ish haqi	77,4	74,1	59,7	69,9	58,0	46,4	39,3
• ijtimoiy transfertlar	15,7	13,0	15,5	14,0	17,2	17,4	16,7
• xususiy tadbirkorlik faoliyati daromadi va bosh.	6,9	12,9	24,8	16,1	24,8	36,2	44,0

Pul harajatlari	1980	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Jami	99,1	95,0	90,2	86,4	90,7	95,5	96,5
Shu jumladan:							
• Tovar sotib olish va xizmatlar	84,3	75,3	62,3	72,9	68,9	64,5	70,5
• Majburiy to'lovlar	12,1	12,2	8,3	8,2	7,6	6,8	6,7
• qimmatbaho qog'ozlar va omonatlarda saqlanayotgan jamg'armalar	2,7	7,5	19,6	4,8	6,2	6,5	5,0
• valuta sotib olish	-	-	-	0,5	8,0	17,7	14,3

11. Quyidagi jadval asosida chastotalar gistogrammasini quring:

Aholining 1995 yil jon boshiga to'g'ri kelgan o'rtacha pul daromadiga ko'ra taqsimoti (Rossiya)

Daromad	mln. odam	%
Barcha aholi shu jumladan jon boshiga o'rta hisobda bir oyda to'g'ri keladigan daromad, (ming rubl.):	148,2	100
20,0 gacha	-	-
20,1- 40,0	0,1	0,0
40,1- 100,0	2,9	2,0
100,1- 150,0	7,5	5,0
150,1- 200,0	11,0	7,5
200,1- 250,0	12,6	8,5
250,1- 300,0	12,8	8,7
300,1- 350,0	12,2	8,2
350,1- 400,0	11,2	7,5
400,1- 450,0	10,0	6,8
450,1- 500,0	8,8	5,9
500,1- 600,0	14,3	9,7
600,1- 700,0	10,7	7,2
700,1- 800,0	8,0	5,5
800,1- 900,0	6,0	4,0
900,1- 1000,	4,5	3,0
1000,0 dan ziyod	15,6	10,5

12. Jadval asosida chastotalar gistogrammasini quring:

Aholining jon boshiga to'g'ri kelgan o'rtacha pul daromadiga ko'ra taqsimoti (1996 yil yanvar-sntyabr, Rossiya)

Daromad	mln. odam	%
Barcha aholi shu jumladan jon boshiga o'rta hisobda bir oyda to'g'ri keladigan daromad, (ming rubl.):	148	100
400,0 gacha	38,8	26,2
400,1- 600,0	34,5	23,3
600,1- 800,0	25,4	17,2
800,1- 1000,0	16,9	11,4
1000,1- 1200,0	10,9	7,4
1200,1- 1600,0	11,6	7,8
1600,1- 2000,0	5,1	3,4
2000,0 dan ziyod	4,8	3,3

3.2. TAQSIMOT NOMA'LUM PARAMETRLARINING STATISTIK BAHOLARI

Aytaylik bosh to'plamning biror miqdoriy ko'rsatkichini baholash talab qilinsin. Nazariy mulohazalardan ana shu ko'rsatkichning qanday taqsimotga ega ekanligi ma'lum bo'lsin. Tabiiy ravishda bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Odatda kuzatish natijalari, ya'ni tanlanma qiymatlaridan boshqa ma'lumot bo'lmaydi.

Noma'lum parametrning **statistik yoki empirik bahosi** deb tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari (tanlanma)ning funksiyasiga aytiladi.

Ixtiyoriy hajmdagi tanlanma uchun matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistik baho **siljimagan baho** deyiladi.

Matematik kutilmasi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan baho **siljigan baho** deyiladi.

Eng kichik dispersiyaga (berilgan hajmdagi tanlanma uchun) ega bo'lgan statistik baho **effektiv baho** deyiladi.

Katta hajmdagi tanlanmalar bilan ish ko'rilganda bahoga asoslilik talabi qo'yiladi. $n \to \infty$ da baholanayotgan parametrga ehtimollik bo'yicha yaqinlashuvchi statistik bahoga **asosli baho** deyiladi.

Bitta miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho **nuqtaviy baho** deyiladi.

Baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning chegaralarini bildiruvchi ikki miqdoriy kattalik bilan aniqlanadigan statistik baho **interval baho** deyiladi.

Nuqtaviy baholar

X: X_1, X_2, ... , X_n tasodifiy miqdorning kuzatilgan qiymatlari, ya'ni tanlanma quyidagi statistik taqsimotga ega:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 & & n_k \end{pmatrix}.$$

Bu yerda n_i — x_i $(i = \overline{1,k})$ — variantaning chastotasi va $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ — tanlanma hajmi.

Tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{i}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$ bosh to'plamning siljimagan bahosi bo'lib xizmat qiladi.

Tanlanmaning dispersiyasi $D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{i}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 \cdot n_i$ bosh to'plam dispersiyasining siljigan bahosi bo'lib xizmat qiladi.

$M(D_T) = \frac{n-1}{n} D_{BT}$ bo‘lgani uchun bu baho siljigandir. Bunda D_{BT} — bosh to‘plam dispersiyasi.

«Tuzatilangan» dispersiya

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{X})^2 \cdot n_i$$

bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosi sifatida xizmat qiladi. $M(S^2) = D_{BT}$ bo‘lgani uchun bu baho siljimagandir.

Tanlanma dispersiyani hisoblaganda quyidagi formuladan foydalanish qulay:

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \overline{X}^2.$$

Tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildiz $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ **tanlanmaning o‘rtacha kvadratik chetlashishi** deb ataladi.

«Tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlashish tanlanma «tuzatilgan» dispersiyadan olingan kvadrat ildiz bilan aniqlanadi:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T}.$$

Bosh to‘plam modasining bahosi sifatida tanlanmada eng ko‘p uchraydigan varianta bilan aniqlanuvchi **tanlanmaviy moda** ishlatiladi, ya’ni: $mod_T = \left\{ x_{i_0} : n_{i_0} = \max_i (n_i) \right\}$.

Bosh to‘plam medianasining bahosi sifatida $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ variatsion qatorning o‘rtasiga to‘g‘ri keladigan varianta yoki variantalar bilan aniqlanuvchi **tanlanmaviy mediana** ishlatiladi:

$$med_T = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}), & agar\ n\ juft\ bo‘lsa; \\ x_{[n/2]+1}, & agar\ n\ toq\ bo‘lsa. \end{cases}$$

Eng katta va eng kichik variantalar orasidagi farq R — **tanlanmaning kengligi (yoki variatsion qator kengligi)** deyiladi: $R = x_{max} - x_{min}$.

M — bosh to‘plamning bizni qiziqtirgan xossaga ega bo‘lgan elementlari sonining N — bosh to‘plam elementlarining umumiy soniga nisbati **bosh ulush** (yoki bosh to‘plamdagi shu xossa ega bo‘lgan elementlar chastotasi) deyiladi: $p = \frac{M}{N}$.

Bosh ulushning nuqtaviy bahosi sifatida **tanlanmaviy ulush**, ya'ni tanlanmadagi bizni qiziqtirgan xossaga ega bo'lgan elementlar soni m ning tanlanma elementlarining umumiy soni n, ya'ni tanlanma hajmiga nisbati (ya'ni tanlanmadagi shu xossa ega bo'lgan elementlar chastotasi) $\omega=\frac{m}{n}$ xizmat qiladi.

Tanlanma o'rta qiymatining tanlanmaviy taqsimoti. Katta sonlar qonuni va markaziy limit teoremasidan agar bosh to'plam normal taqsimot qonuniga bo'ysunsa, u holda tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ ham normal taqsimot qonuniga bo'ysunishi kelib chiqadi. Tanlanma hajmi yetarlicha katta bo'lganida bosh to'plam qanday taqsimot qonuniga ega bo'lishidan qat'iy nazar tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ baribir normal taqsimot qonuniga bo'ysinar ekan. Shunday qilib, agar bosh to'plam a matematik kutilma va σ^2 dispersiyaga ega bo'lsa, u holda tanlanmaning o'rta qiymati $\overline{X}\sim N\left(a;\frac{\sigma^2}{n}\right)$ bo'lar ekan. Demak,

$$P\{\alpha<\overline{X}<\beta\}=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma/\sqrt{n}}\right);\quad P\{|\overline{X}-a|<\varepsilon\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Namunaviy masalalar yechish

1-masala. Tanlanma 5,4,4,2,5,5,4,2,4,6,5,2,4,2,6,5,2,4,5,5, 4,4,5,2,2,5,5,4,2,6 elementlardan tashkil topgan. Tanlanmaning statistik taqsimoti, o'rta qiymati, tanlanmaviy va «tuzatilgan» dispersiyalarini, tanlanmaviy va «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlashishlarini, tanlanmaning modasi, medianasi hamda kengligini toping.

Yechish: Tanlanmaning statistik taqsimotini topamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_k \\ n_1 & n_2 & n_3 \ldots & n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & 2 & 4 & 5 & 6 \\ n_i & 8 & 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tanlanma hajmi: $n=\sum_{i=1}^{4} n_i=8+9+10+3=30$.

Tanlanma o'rta qiymati:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot n_i=\frac{1}{30}(2\cdot 8+4\cdot 9+5\cdot 10+6\cdot 3)=\frac{120}{30}=4.$$

Tanlanma dispersiya:

$$D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{X})^2\cdot n_i=\frac{1}{30}\left((2-4)^2\cdot 8+(4-4)^2\cdot 9+(5-4)^2\cdot 10+(6-4)^2\cdot 3\right)=\frac{54}{30}=1{,}8$$

U holda «tuzatilgan» dispersiya:

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_T=\frac{30}{29}\cdot\frac{54}{30}=\frac{54}{29}=1{,}862.$$

Tanlanmaviy va «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlashishlarni topamiz:

$$\sigma_T=\sqrt{D_T}=\sqrt{1{,}8}=1{,}341 \quad \text{va} \quad S=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}=\sqrt{1{,}862}=1{,}364.$$

Tanlanmada $x_3=5$ varianta eng ko'p uchraydi ($n_3=10$), shuning uchun tanlanmaning modasi $\mathrm{mod}_T=5$. Tanlanma hajmi n=30 — juft son, shuning uchun tanlanmaning o'rta elementlari ikkita: $X_{15}=X_{16}=4$. Demak, tanlanmaning medianasi quyidagiga teng

$$\mathrm{med}_T=\frac{X_{15}+X_{16}}{2}=4.$$

Variatsion qator kengligi eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga teng, ya'ni $R=x_{max}-x_{min}=6-2=4$.

Javob: $\overline{X}=4$; $D_e=1{,}8$; $S^2=1{,}862$; $\sigma_T=1{,}341$; $S=1{,}364$;

$\mathrm{mod}_T=5$; $\mathrm{med}_T=4$; $R=4$.

2-masala. Olma sharbati 200 ml. hajmli idishlarga quyiladi. Quyuvchi avtomat shunday sozlanganki, uning to'ldirish xatoligi $\sigma \pm 10$ ml ga teng. Idishlar karton qutilarga 25 donadan qadoqlanadi. Xaridor qadoqlangan qutining o'rtacha og'irligi ko'rsatilgandan kam bo'lmasligini talab qiladi. Xaridor ishlab chiqarilgan mahsulotni qabul qilishi uchun ishlab chiqaruvchi avtomatni 205 ml. quyadigan qilib sozlab qo'ydi. Tasodifan tanlangan qadoqlangan qutining og'irlik tekshiruvidan o'tmaslik ehtimolini toping.

Yechish: Idishning o'rtacha to'ldirilishi 205 ml., o'rtacha kvadratik og'ishi 10 ml. Tasodifiy tanlanma sharbat bilan to'ldirilgan 25 ta idishlardan iborat. p=25 hajmli mumkin bo'lgan barcha tanlanmalar uchun o'rtacha og'irlikning taqsimoti

- normal qonunga bo'ysunadi;
- o'rtacha to'ldirilishi 205 ml. ga teng;
- o'rtacha kvadratik og'ishi $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$ ml.

Agar qadoqlangan qutidagi idishlarning o'rtacha to'ldirilganligi 200 ml dan kam bo'lsa, quti sifat nazoratidan o'tmaydi. Demak, qidirilayotgan ehtimollik

$$P\{\bar{X} < 200\} = P\{0 < \bar{X} < 200\} = \Phi\left(\frac{200-205}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-205}{2}\right) =$$

$$= \Phi(-2{,}5) - \Phi(-102{,}5) = -0{,}4938 - (-0{,}5) = 0{,}0062.$$

Javob: 0,0062.

ECXEL dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlili. Statistik baholar.

(tanlanma asosida bosh to'plamning turli statistik (nuqtaviy) baholarini hisoblash uchun mo'ljallangan)

«Statistik baholar» dialog oynasining parametrlari

Kiritish diapazoni – tahlil qilinishi kerak bo'lgan ma'lumotlar joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat satr yoki ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat, kamida ikkita yonma-yon yacheykadan tashkil topgan bo'lishi kerak.

Guruhlashtirish – *kiritish diapazonida ma'lumotlarning satr yoki ustun ko'rinishida keltirilganligiga qarab* ustun bo'yicha *yoki* satr bo'yicha *oynalariga maxsus* 4 *belgi qo'yilishi kerak.*

Belgi birinchi satrda / Belgi birinchi ustunda – Agar kiritish diapazonida ma'lumotlar ustun ko'rinishida berilgan bo'lib, birinchi satrda ustun nomi ko'rsatilgan bo'lsa, *belgi birinchi satrda* oynasiga maxsus 4 belgi qo'yilishi kerak. Agar kiritish diapazonida ma'lumotlar satr ko'rinishida berilgan bo'lib, birinchi ustunda satr nomi ko'rsatilgan bo'lsa, *belgi birinchi ustunda* oynasiga maxsus 4 belgi qo'yilishi kerak.

Ishonchlilik – agar ma'lumotlarning o'rtachasi uchun aniqlik qiymatini ham hisoblash kerak bo'lsa, bu oynaga maxsus 4 belgi qo'yiladi va ishonchlilik qiymati kiritiladi. Masalan, oynaga 95% kiritilsa, o'rtachaning aniqlik qiymati 0,05 ishonchlilik darajasi bilan hisoblanadi.

K – eng katta ma'lumotlar uchun *k* – eng katta qiymati hisoblanishi zarur bo'lsa, bu oynaga maxsus 4 belgi qo'yiladi va *k* ning qiymati kiritiladi. Agar *k* birga teng bo'lsa, mos satrda ma'lumotlarning maksimali ko'rsatiladi.

K – eng kichik – ma'lumotlar uchun *k* – eng kichik qiymati hisoblanishi zarur bo'lsa, bu oynaga maxsus 4 belgi qo'yiladi va *k* ning qiymati kiritiladi. Agar *k* birga teng bo'lsa, mos satrda ma'lumotlarning minimali ko'rsatiladi.

Chiqarish diapazoni – natijalar chiqarilishga mo'ljallangan joyning chapdan birinchi yacheykasining adresi;

Yangi sahifa– maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi ochilgan sahifaning A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi;

Yangi kitob – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi tashkil etilgan kitobning birinchi sahifasining A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

Yakuniy statistika – Agar maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar diapazonida quyidagi baholar hisoblanadi:

O'rtachasi, o'rtachaning standart xatoligi, mediana, moda, standart chetlashish, tanlanmaning siljigan dispersiyasi, ekssess, asimmetriya, tanlanmaning rangi, minimal qiymati, maksimal qiymati), yig'indisi, hajmi, *k*-maksimali, *k*-minimali, o'rtachasining aniq darajasi.

X va *U* ikki tanlanma uchun hisoblangan natijalar qo'yidagi ko'rinishda taqdim etiladi (bunda ishonchlilik darajasi 0,95% va *k*=1 deb olingan)

x	5	4	4	2	5	5	4	2	4	6	5	2	4	2	6	5	·2	4	5	5	4	4	5	2	2	5	5	4	2	6
y	1	1	1	2	2	2	2	5	5	5	5	5	5	8	8	8	8	9	9	9										

Natijalar:

x		*y*	
Srednee	4	Srednee	5
Standartnaya oshibka	0,24913644	Standartnaya oshibka	0,66491
Mediana	4	Mediana	5
Moda	5	Moda	5
Standartnoe otklonenie	1,364576478	Standartnoe otklonenie	2,973568
Dispersiya viborki	1,862068966	Dispersiya viborki	8,842105
Ekstsess	-1,061761056	Ekstsess	-1,52124
Asimmetrichnost	-0,436207208	Asimmetrichnost	-5,2E-17
Interval	4	Interval	8
Minimum	2	Minimum	1
Maksimum	6	Maksimum	9
Summa	120	Summa	100
Schet	30	Schet	20
Naibolshiy(1)	6	Naibolshiy(1)	9
Naimenshiy(1)	2	Naimenshiy(1)	1
Urovenь nadejnosti (95,0%)	0,509541509	Uroven nadejnosti (95,0%)	1,391673

Yuqorida keltirilgan statistik baholarning har birini alohida hisoblaydigan maxsus funksiyalar **EXCEL** dasturining standart funksiyalarining statistik funksiyalar qismida ham bor bo‘lib, ular quyidagicha:
tanlanmaning o‘rtachasini hisoblash: **CREDZNACH** funksiyasi;
tanlanmaning medianasini hisoblash: **MEDIANA** funksiyasi;
tanlanmaning modasini hisoblash: **MODA** funksiyasi;
tanlanmaning siljigan dispersiyasini hisoblash: **DISP** funksiyasi;
tanlanmaning siljimagan dispersiyasini hisoblash: **DISPA** funksiyasi;
tanlanmaning standart chetlashishini hisoblash: **STANDARTOTK-LON** funksiyasi;
tanlanmaning hajmini hisoblash: **SCHET** funksiyasi;
tanlanmaning minimal qiymatiii hisoblash: **MIN** funksiyasi;
tanlanmaning maksimal qiymatiii hisoblash: **MAKC** funksiyasi;
tanlanmaning k-minimal qiymatiii hisoblash: **NAIMENSHIY** funksiyasi;
tanlanmaning k-maksimal qiymatiii hisoblash: NAIBOLSHIY funksiyasi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Fermerlik xo‘jaligida kartoshka hosildorligi tahlili asosida quyidagi ma’lumotlar olindi:

Hosildorlik, sr/ga	Maydon, ga
18	10
20	20
21	30

Tanlanmaning o‘rtachasi, «tuzatilgan» o‘rtacha kvadratik chetlashishi, modasi, medianasi va kengligini toping.

Javob: $\overline{X}=20\,sr.$; $S\approx 1{,}1\,sr.$; $mod_T=21$; $med_T=20{,}5$; $R=20$.

2. Bir asbob yordamida sistematik xatolarsiz (ya’ni d_i o‘lchashlarning matematik xatosi uzunlikning asl qiymatiga teng deb olinadi) sterjenning uzunligi besh marta o‘lchandi. Natijalar quyidagicha (mm larda):

$$d_1=92;\quad d_2=94;\quad d_3=103;\quad d_5=105;\quad d_5=106.$$

Sterjen uzunligining o'rtachasi, dispersiyasi va «tuzatilgan» dispersiyasini toping.

Javob: $\overline{X}=100;\quad D_T=34;\quad S^2=42{,}5$.

3. Quyidagi tanlanmaning dispersiyasi va «tuzatilgan» dispersiyasini toping.

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 & 2 & 5 & 8 & 9 \\ n_i & 3 & 4 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Javob: $D_T=8{,}4;\quad S^2=8{,}84$.

4. Jadvalda tasodifan tanlab olingan 100 ta talabaning bo'yi uzunligi (sm.larda) berilgan. Tanlanma asosida talabalar bo'yining o'rtachasi va dispersiyasini toping.

(K o' r s a t m a: X_i sifatida intervallarning o'rta qiymatlari olinsin)

Bo'yi	154 - 158	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178	178 - 182
Talabalar soni	10	14	26	28	12	8	2

Javob: $\overline{X}=166;\quad D_T=33{,}44$.

5. Bir soat davomida telefon stantsiyasida bir daqiqada noto'g'ri ulanishlar soni qayd qilindi va quyidagi natijalar olindi. Bir minut davomida noto'g'ri ulanishlar sonining o'rtachasi va matematik kutilishini toping.

3; 1; 3; 4; 2; 1; 2; 4; 0; 3; 0; 2; 2; 0; 2; 1; 4; 3; 3; 1;
4; 2; 2; 1; 1; 2; 1; 0; 3; 4; 1; 3; 2; 7; 2; 0; 0; 1; 3; 3;
1; 2; 4; 2; 0; 2; 3; 1; 2; 5; 1; 1; 0; 1; 1; 2; 2; 1; 1; 5.

Javob: $\overline{X}=2$; $D_T\approx 2{,}1$..

6. Sistematik xatolari bo'lmagan o'lchash asbobi yordamida besh marta bir kattalik o'lchandi. O'lchash natijalari jadvalda keltirilgan:

O'lchash nomeri	1	2	3	4	5
O'lchash natijasi	2781	2836	2807	2763	2858

a) o'lchanayotgan kattalikning aniq qiymati 2800 ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, o'lchash xatoligi dispersiyasini toping;

b) o'lchanayotgan kattalikning aniq qiymati noma'lum bo'lsa, tanlanmaning o'rtachasi, dispersiyasi va «tuzatilgan» dispersiyasini toping.

Javob: a) $D_T=1287{,}8$; b) $\overline{X}=2809;\quad D_T=1206{,}8;\quad S^2=1508{,}5$.

7. Bosh to'plamdan hajmi $n=10$ ga teng tanlanma olingan. Uning o'rtachasi, dispersiyasi, modasi i medianasini toping.

x_i	0,1	0,4	0,6
n_i	3	2	5

Javob: $\overline{X}=0{,}41$; $D_T=0{,}01469$; $mod_T=0{,}6$; $med_T=0{,}5$.

8. Bosh to'plamdan hajmi $n=50$ ga teng tanlanma olingan. Uning o'rtachasi, dispersiyasi, «tuzatilgan» dispersiyasi, o'rtacha kvadratik chetlashishi va «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlashishini toping.

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Javob: $\overline{X}=2$; $D_T=1$; $S^2=1{,}111$; $\sigma_T=1$; $S=1.054$.

9. Quyida 15 ta turli aktsiya narxlarning yillik o'sish ko'rsatkichlari berilgan: 12,2, 13, 14,8, 11, 16,7, 9, 8,3, – 1,2, 3,9, 15,5, 16,2, 18, 11,6, 10, 9,5. Bu ma'lumotlar asosida mediana va o'rtacha qiymatni toping.

10. 3.1 paragrafda berilgan 11 chi va 12 chi masalalar uchun o'rtacha daromad, modaga mos kelgan va medianaga mos kelgan daromadlarni toping.

11. Rivojlanayotgan mamlakat hukumati yangi dengiz porti qurish shartnomasini berish uchun chet ellik investorlar orasida tanlov e'lon qildi. Tanlovga javoban investorlar quyidagi narxlardagi loyihalar taklif etishdi (mlrd. doll.): 2, 3, 2,4, 3, 5,1, 1, 6, 4,7, 2,5, 1,6.

Tanlanmaning o'rtachasi, medianasi va kengligini toping.

12. Quyida berilgan ma'lumotlar 1990-yildan to 2002-yilga qadar mamlakatimizdagi chet el avtomobillari foizi bo'lsin (sharli ravishda): 9,5; 9,3; 12,3; 12,0; 16,6; 21,3; 21,8; 22,6; 20,9; 18,3; 20,1; 22,8.

Bu ma'lumotlar uchun o'rtacha, mediana va o'rtacha kvadratik chetlashish qiymatlarini toping.

13. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 20 ta o'spiringa sport anjomlarining reklamasi tasvirlangan telerolik ko'rsatildi va ulardan bu reklamani 0 dan 100 ballgacha baholab berish so'raldi. Natijada quyidagi ballar olindi: 89, 75, 59, 96, 88, 71, 43, 62, 80, 92, 76, 72, 67, 60, 79, 85, 77, 83, 87. 53. Bu reyting natijalarining o'rtachasi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlashish qiymatlarini toping.

14. Yuk tashish bilan shug'ullanadigan korxonaning haftalik tashilgan yuklar hajmi (tonnada) quyidagicha: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499, 580, 606, 344, 455, 505, 396, 347, 441,

390, 632, 400, 582. Haftalik tashilgan yukning o'rtachasi, o'rtacha kvadratik chetlashishi va kengligini toping.

15. ToshEnergo nazorat xizmati davriy ravishda oylik to'lov hisobi varaqalarini tekshirib turadi. Tasodifiy ravishda 30 ta manzil tanlanib bu manzil egalari elektroenergiyadan foydalanganlari uchun quyidagi miqdorda (ming so'mda) to'lovlar bajarishi kerak ekanligi ma'lum bo'ldi: 12, 2, 3, 5, 17, 4, 9, 21, 18, 6, 8, 19, 9, 25, 2, 10, 16, 18, 24, 1, 11, 6, 19, 23, 14, 7, 10, 26. 30, 7. Tanlanma uchun chastotalar gistogrammasini quring. Tanlanmaning o'rtachasi, o'rtacha kvadratik chetlashishi va kengligini toping.

16. Har yili Amerikaning «Fortune» jurnali jahondagi eng boy odamlar ro'yxatini va ular boyligining AQSH dollaridagi qiymatini e'lon qiladi. Quyida 1989 yil natijalari keltirilgan (mlrd. dollar): 25,0, 20,9, 8,7, 7,5, 7,4, 6,0, 5,7, 5,5, 5,0, 5,0, 4,4, 4,0, 3,6, 3,4, 3,1, 3,0, 3,0, 2,9, 2,8, 2,8, 2,5, 2,5, 2,5, 2,4, 2,4, 2,4, 2,2, 2,0, 2,0, 2,0, 1,9, 1,8, 1,7, 1,6, 1,5, 1,5, 1,5, 1,5, 1,4, 1,3, 1,3, 1,3, 1,2, 1,2, 1,2, 1,2, 1,1, 1,1, 1,1, 1,0, 1,0, 1,0, 1,0, 1,0, 1,0, 1,0, 1,0. Chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini quring. Ma'lumotlar uchun o'rtacha va o'rtacha kvadratik chetlashishni hisoblang.

17. Ijtimoiy bo'lim tahliliga ko'ra korxonaning 50 ta ishchi-xizmatchisining oila a'zolari soni quyidagicha:

3, 2, 1, 4, 6, 3, 7, 9, 1, 3, 2, 5, 6, 8, 2, 5, 2,
3, 6, 8, 3, 4, 4, 5, 5, 4, 7, 5, 6, 4, 8, 7, 4, 5,
7, 8, 6, 5, 7, 5, 6, 6, 7, 3, 4, 6, 5, 4.

Ma'lumotlar uchun statistik qator tuzing. Korxona ishchi-xizmatchilari oila a'zolari sonining modasi va medianasini toping.

18. Ma'lum hududda joylashgan korxonalarning mahsulotlariga bo'lgan talab tahlil qilinib, natijalar quyidagi jadvalda jamlandi:

Mahsulotga bo'lgan talab, %	Korxonalar soni
50,0 gacha	4
50,1- 60,0	8
61,1- 70,0	9
70,1- 80,0	11
80,1- 90,0	28
91,1- 100,0	32
100,1- 110,0	25
110,1- 120,0	21
120,1- 130,0	10
130,1- 140,0	9
140,1 dan ziyod	3

Tanlanma uchun o'rtacha, o'rtacha kvadratik chetlashish, mediana va modani toping. Gistogramma quring.

(*Ko'rsatma:* Variantalar sifatida intervallarning o'rta qiymatini oling.)

19. Bosh to'plamning o'rtachasi X=1,065 ga va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ=500 ga teng. Bosh to'plamdan hajmi 100 ga teng bo'lgan tanlanma olingan bo'lsa, bu tanlanmaning o'rtachasi $\bar{X}$ uchun kutilayotgan qiymati va uning o'rtacha kvadratik chetlashishi nimaga teng?

Javob: 1,065; 2,500.

20. Bosh to'plamning o'rtachasi X = 53 ga va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ=10 ga teng. Bosh to'plamdan hajmi 400 teng bo'lgan tanlanma olingan bo'lsa, bu tanlanmaning o'rtachasi $\bar{X}$ uchun kutilayotgan qiymati va uning o'rtacha kvadratik chetlashishi nimaga teng?

Javob: 53; 0,5.

21. Statistik ma'lumotlarga ko'ra, o'rtahol oila bir hafta davomida maishiy-madaniy dam olish uchun 19,50 shartli pul birligi ishlatar ekan. Bu kattalikning o'rtacha kvadratik chetlashishi 5,53 ga teng ekan. Tasodifiy olingan 100 ta oila uchun bir hafta davomida maishiy-madaniy dam olish ishlatilgan pul miqdori o'rtachasi 20,00 shartli pul birligidan ko'p bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,1727.

22. Mamlakatning jon boshiga to'g'ri keladigan o'rtacha daromadi 3324 shartli pul birligiga teng ekan. Tasodifan tanlab olingan 1000 odam uchun hisoblangan jon boshiga to'g'ri keladigan o'rtacha daromadi bosh to'plam o'rtachasidan farqi 0,062 karra o'rtacha kvadratik chetlashishidan katta bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,0499.

23. Akademiyaning o'ttiz sakkiz foiz talabasi statistika fanidan imtihonlarini yaxshi va a'lo baholarga topshirishdi. Tasodifiy tanlab olingan 100 ta talabadan kamida 30 tasi fandan yaxshi va a'lo baho olganligi ehtimolini toping.

Javob: 0,9503.

24. Ulgurji savdo bilan shug'ullanadigan kitob sotuvchisi bir kunda o'rta hisobda 1000 dona kitob sotar ekan. Bir kunlik o'rtacha savdo hajmi o'rtacha kvadratik chetlashishi s=100 ga teng bo'lgan normal taqsimotga ko'ra taqsimlangan bo'lsa, besh kunlik savdoning o'rtachasi 900 va 1100 dona kitob orasida bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,975.

25. Non bilan savdo qiladigan do'kon o'rta hisobda bir kunda 478 dona non sotar ekan. Agar sotilgan nonlar soni X o'rtacha kvadratik

chetlashishi $s=17$ teng bo'lgan normal taqsimotga bo'ysunganligi ma'lum bo'lsa:

- bir hafta davomida sotilgan non hajmiga asosan hisoblangan $\bar{X}$ o'rtacha qiymat 495 dan katta bo'lish ehtimolini toping.
- to'rt hafta davomida sotilgan non hajmiga asosan hisoblangan $\bar{X}$ o'rtacha qiymat 4 95dan katta bo'lish ehtimolini toping.
- Nima uchun turli natija olganingizni izohlang.

Javob: 0,1587; 0,0228.

Ikkinchi holda o'rtacha kvadratik chetlashish kamroq. Demak, o'rtacha qiymatning 495 dan katta bo'lish ehtimoli ham kamayadi.

26. Mavsum davomida baliq ovlash xo'jaligi bir kunda o'rta hisobda 130 tonna seld balig'i ovlar ekan. Hisobotlarda qayd qilinishicha ovlangan baliq o'rtacha hajmi kundan kunga farqlanib borayotgan ekan. Bu farqlanishning o'rtacha kvadratik chetlanishi bir kunda 42 tonnani tashkil etar ekan. Baliq ovlash mavsumining 36 kuni davomida ovlangan seld balig'ining massasi 4300 tonna va undan ziyod bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,9236.

27. Do'konga kirgan xaridorning do'konda bo'lish vaqti o'rta hisobda 12 daqiqaga, uning o'rtacha kvadratik chetlashishi esa 3 daqiqaga teng ekan. Tasodifiy tanlab olingan beshta xaridor uchun do'konda bo'lishning o'rtacha vaqti kamida 10 daqiqa bo'lish ehtimolini toping. Ushbu 5 ta xaridor uchun do'konda bo'lishning o'rtacha vaqti va uning o'rtacha kvadratik chetlashishi nimaga teng?

Javob: 0,9319

28. 500 ta shahar o'rta maktab bitiruvchilaridan 72%i oliy o'quv yurtlariga kirmoqchi. Tasodifiy ravishda tanlab olingan 300 ta bitiruvchi orasida oliy o'quv yurtlariga kirmoqchi bo'lganlar ulushi 80%dan ziyod bo'lishi ehtimolini toping.

29. Ma'lum bir hududga mahaliy saylovlarga qatnashadigan aholi o'rta hisobda 40% tashkil etar ekan. Aholi orasidan tanlab olingan 400 kishidan mahaliy saylovlarga qatnashish xohishini bildirganlar 35% ni tashkil etish ehtimoli nimaga teng?

Javob: 0,9793.

30. Do'kon menejeri o'z tajribasidan biladiki, do'konga kirganlarning 25% xarid qiladi. Agar do'konga 200 ta odam kirgan bo'lsa, u holda.

- Xarid qilganlar ulushi qancha?
- Tanlanma ulushining dispersiyasi nimaga teng?

- Tanlanma ulushining o'rtacha kvadratik chetlashishi nimaga teng?
- Tanlanma ulushi 0,25 va 0,30 orasida bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Javob: 25%; 0,0009375; 0,031; 0,4463.

31. Ma'lum bo'limda xizmat qilayotlar yoshi qo'yidagicha 23, 19, 25, 32 va 27. Tasodifan qaytarmasdan 2 ta odam tanlab olsak, ularning o'rtacha yoshining taqsimoti qanday bo'ladi? Bu taqsimotning o'rtachasi va dispersiyasi nimaga teng?

Javob: o'rtachasi 25,2; dispersiyasi 6,96.

32. Agar bosh to'plam normal taqsimlangan bo'lsa, tanlanmaning o'rtachasi bosh to'plamning o'rtachasidan kichik bo'lish ehtimolini toping.

Javob: 0,5.

3.3. TAQSIMOT NOMA'LUM PARAMETRLARINING INTERVAL BAHOLARI

Yuqorida ko'rib chiqilgan baholarning hammasi nuqtaviy baholar edi. Kichik hajmdagi tanlanmalarda nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan sezilarli farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi kichik bo'lganida bahoning aniqligi va ishonchliligini yaxshiroq ta'minlaydigan interval baholardan foydalanish o'rinlidir.

Interval baholar intervalning chegaralarini bildiruvchi ikkita miqdor bilan aniqlanadi.

Tanlanma bo'yicha topilgan θ^* statistik kattalik θ noma'lum parametrning bahosi bo'lsin. Albatta, $|\theta-\theta^*|$ ayirma qanchalik kichkina bo'lsa, θ^* statistik baho θ parametrni shuncha aniq baholaydi. Shunday qilib,

$$|\theta-\theta^*|<\delta$$

shartni qanoatlantiruvchi δ musbat son bahoning **aniqligining** ko'rsatkichidir.

θ^* bahoning **ishonchliligi** deb $|\theta-\theta^*|<\delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi, ya'ni

$$P\{|\theta-\theta^*|<\delta\}=P\{\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\}=\gamma .$$

Odatda bahoning ishonchliligi oldindan beriladi va γ sifatida birga yaqin qiymatlar olinadi, masalan, 0,95, 0,99, 0,999.

Noma'lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\theta^*-\delta;\theta^*+\delta)$ interval **ishonch intervali (oralig'i)** deyiladi.

Normal taqsimotning dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilishi uchun interval baho

X — a va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni $N(a, \sigma^2)$ bo'lib, a noma'lum va σ ma'lum bo'lsin. Noma'lum a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topamiz.

Tanlanmaning qiymatlari (variantalari) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — $N(a, \sigma^2)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning kuzatish natijalaridan iborat. Ma'lumki, $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots X_n)$ tanlanmaning o'rta qiymati $M(\overline{X}) = a$; $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega.

$$P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = \gamma$$

munosabat o'rinli bo'lishini talab qilamiz.

$$P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \text{ yoki } P\{|\overline{X} - a| < \delta\} = 2\Phi(t), \quad t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

formuladan foydalanamiz. Oxirgi tenglikdan: $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Demak, $P\left\{|\overline{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t)$. Tenglikning chap tomoni berilgan va u γ ga teng. U holda

$$P\left\{\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t) = \gamma,$$

ya'ni γ ishonchlilik bilan $\left(\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni qoplaydi, deb ta'kidlash mumkin.

Izoh: Yuqoridagi munosabatdagi t kattalikni $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ tenglikdan ilovadagi Laplas integral funksiyasi qiymatlari keltirilgan 4-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ ga teng bo'ladi.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Normal taqsimotning dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilishi uchun interval bahoning aniqligi $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ ni maxsus

DOVERIT(ALFA;STAND_CHETLASHISH;RAZMER) nomli funksiya hisoblaydi. Bunda ALFA – ishonchlilik darajasi (0,25; 0,05; 0,5; 0,1 ...kabi); **STAND_CHETLASHISHI** – bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chetlashishi (ya'ni s parametr); **RAZMER** – tanlanmaning hajmi (ya'ni n). Izlanayotgan ishonch oralig'i $\left(\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ bo'ladi.

E s l a t m a : maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **ALFA; STAND_CHETLASHISH; RAZMER** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Normal taqsimotning dispersiyasi noma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilishi uchun interval baho

X – a va σ^2 parametrlar bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor, ya'ni N(a, σ^2) bo'lib, parametrlar a va σ larning qiymati noma'lum bo'lsin. Noma'lum a parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topamiz. Tanlanmaning qiymatlari (variantalari) bo'yicha erkinlik darajasi $k = n - 1$ bo'lgan Styudent taqsimotli T tasodifiy miqdorni aniqlaymiz:

$$T = \frac{\overline{X} - a}{s / \sqrt{n}}.$$

Bu yerda $\overline{X}$ – tanlanma o'rta qiymat, s – «tuzatilgan» o'rtacha kvadratik chetlashish, n-tanlanmaning hajmi. Ma'lumki, Styudent taqsimoti n-tanlanma hajmi bilan aniqlanadi va a, σ noma'lum parametrlarga bog'liq emas. $S(n,t)$ zichlik funksiyasi – t bo'yicha juft funksiya bo'lgani uchun

$$P(|T| < t_\gamma) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - a}{s / \sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(n,t)dt = \gamma .$$

$$\text{yoki } P\left(\overline{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Shunday qilib, $\left(\overline{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'i a noma'lum parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydi.

Izoh: Yuqoridagi munosabatdagi t_γ kattalik berilgan n bo'yicha ilovadagi Styudentning t kriteriysining qiymatlari keltirilgan 5-jadvaldan topiladi. Bahoning aniqligi $\delta = t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$ ga teng.

EXCEL dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlil). Statistik baholar. Shu bobning § 3.2 da ushbu oynaning parametrlari keltirilgan edi.
Normal taqsimotning dispersiyasi ma'lum bo'lgan holda uning matematik kutilishi uchun interval bahonining aniqligi $\delta = t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$ ning qiymatini STATISTIK BAHOLAR natijalari **Yakuniy statistika** qismi **o'rtachasining ishonchliligi** satridan olinadi. Bunda **Ishonchlilik** oynasida ishonchlilikning kerakli qiymati ko'rsatiladi.

Normal taqsimotning σ o'rtacha kvadratik chetlashishi uchun ishonch oralig'i

Normal taqsimotning a va σ parametrlari noma'lum bo'lsin. Tanlanma bo'yicha ularning nuqtaviy baholari

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{va} \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

topilgan bo'lib, bizga σ parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonch oralig'ini topish vazifasi qo'yilgan bo'lsin.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$$

yordamchi tasodifiy miqdorni tuzamiz. Bu tasodifiy miqdor erkinlik darajasi $n-1$ bo'lgan χ^2 taqsimot qonuniga ega. χ^2 tasodifiy miqdorning $(a_1;a_2)$ oraliqqa tushish ehtimoli:

$$P\left(a_1 < \chi^2 < a_2\right) = \int_{a_1}^{a_2} f_{\chi^2}(x)dx.$$

Bu yerda $f_{\chi^2}(x)$ erkinlik darajasi $n-1$ ga teng bo'lgan χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi. Yuqoridagi ehtimollikni γ ga tenglashtiramiz va a_1, a_2 larni topamiz.

$$P\left(\chi^2 \geq a_2\right) = \int_{a_2}^{\infty} f_{\chi^2}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2} \quad \text{va} \quad P\left(\chi^2 \leq a_1\right) = \int_{0}^{a_1} f_{\chi^2}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}.$$

U holda

$$P\left(a_1<\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}<a_2\right)=P\left(\sqrt{a_1}<\frac{\sqrt{n-1}\cdot s}{\sigma}<\sqrt{a_2}\right)=P\left(s\cdot\sqrt{\frac{n-1}{a_2}}<\sigma<s\cdot\sqrt{\frac{n-1}{a_1}}\right)=\gamma$$

$\sqrt{\frac{n-1}{a_1}}$, $\sqrt{\frac{n-1}{a_2}}$ qiymatlar jadvallashtirilgan. Ilovadagi 6-jadvalda berilgan (γ; n) lar uchun q ni aniqlaymiz va quyidagi formula bo'yicha ishonch oralig'ini topamiz:

$$s\cdot(1-q)<\sigma<s(1+q), \qquad q<1;$$

$$0<\sigma<s\cdot(1+q), \qquad q\geq 1$$

Binomial taqsimot uchun ehtimollikni nisbiy chastota bo'yicha baholash

Tasodifiy hodisaning p ehtimoli (bosh to'plam ulushi) uchun ishonch oralig'ini topamiz. Biz bilamizki, ω nisbiy chastota p uchun nuqtaviy baho bo'lib xizmat qiladi. ω siljimagan baho, ya'ni $M\omega = p$ va undan tashqari $D\omega = p\cdot q = p\cdot(1-p)$. Agar $n\to\infty$ sa, u holda ω tasodifiy miqdor $N\left(p;\frac{pq}{n}\right)$ parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi.

Berilgan γ ishonchlilik uchun shunday t_γ ni topish kerakki, quyidagi munosabat o'rinli bo'lsin:

$$P\left(|\omega-p|<t_\gamma\cdot\sigma\right)=\gamma$$

yoki γ ishonchlilik bilan

$$|\omega-p|<t_\gamma\cdot\sigma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\cdot t_\gamma.$$

Bu ifodadan p ga nisbatan kvadratik tengsizlikka kelamiz:

$$\left(\frac{t_\gamma^2}{n}+1\right)\cdot p^2-\left(2\omega+\frac{t_\gamma^2}{n}\right)\cdot p+\omega^2<0.$$

Tengsizlikning yechimi $(p_1;p_2)$ intervaldan iborat bo'lib,

$$p_1 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} - t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}; \quad p_2 = \frac{\omega + \frac{t_\gamma^2}{2n} + t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \frac{t_\gamma^2}{4n^2}}}{1 + \frac{t_\gamma^2}{n}}.$$

Demak, $(p_1; p_2)$ interval p ehtimollik uchun γ ishonchlilik bilan qurilgan intervaldir.

n ning katta qiymatlarida (≈ 100) $\frac{t_\gamma^2}{2n}$ va $\frac{t_\gamma^2}{4n^2}$ qo'shiluvchilar qiymatlari juda kichik va $1+\frac{t_\gamma^2}{n}\approx 1$. Shuning uchun $p_1 = \omega - t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$; $p_2 = \omega + t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$. Eslatib o'tamiz: t_γ qiymati $2\Phi\left(t_\gamma\right) = \gamma$ tenglamaning yechimi sifatida Laplasning integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan aniqlanar edi. Bahoning aniqligi $\delta = t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$ ga teng.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar. (1-bobning §1.11 ga qarang.)

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ ko'rinishdagi Laplasning integral funksiyasining qiymatlarini maxsus **NORMSTRASP(Z)** nomli funksiya hisoblaydi. Bunda Z — funksiyaning hisoblanish kerak bo'lgan qiymati (ya'ni x). Agar $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2/2}dt$ funksiyaning qiymatini hisoblashga ehtiyoj tug'ilsa, $\Phi(x) = \Phi_0(x) - 0{,}5$ ekanligini hisobga olinib maxsus funksiyaga murojaat

NORMSTRASP(Z)-0,5 ko'rinishda bo'ladi.

Namunuviy masalalar yechish

1-masala. X bosh to'plamda ma'lum $\sigma = 0{,}40$ parametr bilan normal taqsimlangan. Agar $n = 20, \overline{X} = 6{,}34$ bo'lsa, tanlanma ma'lumotlari bo'yicha $\gamma = 0{,}99$ ishonchlilik bilan a parametr uchun ishonch oralig'ini toping.

Yechish:

$$\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

ishonch oralig'ini topish talab qilinmoqda. Bu formulada t dan boshqa hamma kattaliklar ma'lum. t ni aniqlaymiz.

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}99}{2} = 0{,}495$$

bo'lgani uchun Laplasning integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan Ilovaning 4- jadvalidan $t = 2{,}58$ ni topamiz. Demak,

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}58 \cdot 0{,}40}{\sqrt{20}} \approx 0{,}23 .$$

$\left(\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'ining chegaralarini aniqlaymiz:

$$6{,}34-0{,}23=6{,}11 \quad va \quad 6{,}34+0{,}23=6{,}57.$$

Shunday qilib, (6,11; 6,57) ishonch oralig'i a parametrni 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydi va bahoning aniqligi 0,23 ga teng bo'ladi..

$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikni hisoblash uchun maxsus funksiyaga murojaat:

DOVERIT(0,01; 0,4; 20)

Javob: (6,11; 6,57) .

2-masala. Agar normal taqsimlangan bosh to'plamning o'rtacha kvadratik og'ishi $\sigma = 1{,}2$ ma'lum bo'lsa, 0,975 ishonchlilik bilan bosh to'plam matematik kutilmasi a ning tanlanma o'rta qiymat bo'yicha bahosining aniqligi $\delta = 0{,}3$ ga teng bo'ladigan minimal tanlanma hajmini toping.

Yechish: Bosh to'plam matematik kutilmasining o'rta qiymat orqali bahosining aniqligini bildiruvchi ifodadan foydalanamiz:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Bu tenglikdan *n* ning qiymatini aniqlaymiz: $n = \left(\frac{t \cdot \sigma}{\delta}\right)^2$. Shartga ko'ra $\gamma = 0{,}975$ yoki $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}975}{2} = 0{,}4875$. Laplasning integral funksiyasi qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan t=2,24 ekanini topamiz. Topilgan qiymatni hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$n = \left(\frac{t \cdot \sigma}{\delta}\right)^2 = \left(\frac{2{,}24 \cdot 1{,}2}{0{,}3}\right)^2 = (8{,}96)^2 = 80{,}2816 \approx 81.$$

Javob: $n = 81$.

3-masala. Jamg'arma bozorining analitigi ma'lum bir aksiyalarning o'rtacha daromadliligini o'rganmoqda. 15 kunlik tasodifiy tanlanma o'rtacha kvadratik og'ishi $S = 3{,}5\%$ o'rtacha (yillik) daromadlilik $\bar{x} = 10{,}37\%$ ga teng ekanini ko'rsatdi. Aksiyalarning daromadliligi normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi deb faraz qilaylik. Analitik qiziqayotgan aksiyalar turi uchun 95% li ishonch oralig'ini toping.

Yechish: Bosh to'plam o'rtacha kvadratik og'ishi σ noma'lum bo'lgani uchun

$$P\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

formuladan foydalanamiz.

Ilovadagi 5-jadvaldan $t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95; 15) = 2{,}15$ ni topamiz.

Undan foydalanib, $\left(\bar{X} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ ishonch oralig'ini yasaymiz.

$$\bar{X} \pm t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 10{,}37 \pm 2{,}15 \frac{3{,}5}{\sqrt{15}} = 10{,}37 \pm 1{,}94 \Rightarrow (8{,}43;\ 12{,}31).$$

Demak, analitik 95% ishonch bilan uni qiziqtirgan aksiyalarning o'rtacha yillik daromadliligi (8,43%; 12,31%) oralig'ida yotar ekan.

Javob: $(8{,}43; 12{,}31)$.

4-masala. Korxonada kofeni 100 grammlik bankalarga qadoqlaydigan avtomat qurilma ishlab turibdi. Agar to'ldirilayotgan bankaning o'rtacha og'irligi 100 grammdan farq qilsa, qurilma o'rtacha og'irlikni o'zgartirish uchun ishlab turgan holatida qayta sozlanadi. Agar og'irlik dispersiyasi berilgan qiymatdan oshib ketsa, qurilma qayta sozlash uchun to'xtatiladi. Vaqti-vaqti bilan kofeli bankalar o'rtacha og'irligi va undan og'ishlarni tekshirish uchun tasodifiy ravishda tekshirib turiladi. Aytaylik, konveyerdan tasodifiy ravishda 30 ta kofeli banka tanlab olindi va siljimagan dispersiyaning bahosi s = 18,540 bo'lsin. Bosh to'plam dispersiyasi uchun 95%li ishonch oralig'ini yasang. (Bosh to'plam normal taqsimlangan deb faraz qilinadi).

Yechish: 6-jadvaldan p=30 tanlanma hajmi va $\gamma = 0{,}95$ ishonchlilikka mos q ning qiymatini topamiz: $q = q(30;0{,}95) = 0{,}28$. q<1 bo'lgani uchun bosh to'plam dispersiyasi uchun ishonch oralig'ini

$$s \cdot (1-q) < \sigma < s(1+q)$$

$$18{,}54 \cdot (1-0{,}28) < \sigma < 18{,}54 \cdot (1+0{,}28)$$

$$13{,}348 < \sigma < 23{,}731$$

Javob: $(13{,}348;23{,}731)$.

5-masala. Ma'lum bir mahsulotni xush ko'radigan iste'molchilar ulushini baholash kerak bo'lsin. Tasodifiy 500ta iste'molchidan 370tasi bizni qiziqtirayotgan mahsulotni xarid qilgan bo'lsin.

a) Ushbu mahsulotni xarid qilgan iste'molchilar ulushi uchun 99% lik ishonch intervalini quring. b) Bosh to'plam ulushining tanlanma ulushidan farqi 4%dan oshmaslik ehtimolini toping.

Yechish: a) Iste'molchilar ulushining nuqtaviy bahosi bo'lib ularning nisbiy chastotasi xizmat qiladi: ω=370/555=0.74. Iste'molchilar ulushi uchun ishonchlilik darajasi γ =0,99 bo'lgan $(p_1;p_2)$ ishonch intervalini aniqlaymiz. *n* yetarlicha (n>100) katta bo'lgani uchun

$$p_1 = \omega - t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}; \quad p_2 = \omega + t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

$\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}495$ tenglamadan va Laplasning integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan foydalanib t_γ qiymatini topamiz: $t_\gamma = 2{,}58$. Baholash aniqligini topimiz:

$$\delta = t_\gamma\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} = 0{,}495\sqrt{\frac{0{,}74 \cdot 0{,}26}{500}} = 0{,}495 \cdot 0{,}0196 = 0{,}0097.$$

Nihoyat, izlanayotgan ishonch intervalini yozamiz:

$$0,74-0,0097 < p < 0,74+0,0097$$

$$0,7303<p<0,7497$$

b) Masalaning shartidan kelib chiqqan holda, quyidagicha yozib olamiz.

$$|\omega - p| < \delta = t_\gamma \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} = 0,04.$$

Bundan $t_\gamma = \dfrac{0,04}{\sqrt{\dfrac{\omega(1-\omega)}{n}}} = \dfrac{0,04}{0,0196} = 2,0408$. So'ralgan ehtimolik esa:

$$P(|\omega - p| < \delta) = 2\Phi\left(\delta / \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}\right) = 2\Phi(t_\gamma) = 2\cdot 0,4793 = 0,9586 \text{ ga teng.}$$

Javob: a) (0,7303; 0,7497); *b)* 0,9586.

6-masala. Shaharning yangi tumanida firma zargarlik mahsulotlari bilan savdo qiluvchi do'kon ochish niyatida o'z mahsulotga qiziqqan aholisining ulushini tahlil qilmoqchi. Kompaniya bosh to'plam ulushining bahosini $\delta = 0,10$ aniqlikda va 0,99 ishonchlilik ehtimoli bilan baholamoqchi. Shu maqsadda kompaniya shahar aholisi orasida so'rov o'tkazmoqchi. Avvalgi so'rovlar tajribasidan shu ma'lumki, bosh to'plam ulushi 0,25 atrofida tebranar ekan. Bosh to'plam ulushini baholash uchun so'rovda nechta odam ishtirok etishi kerak?

Yechish: Bahoning aniqligi ta'rifidan $|\omega - p| < \delta = t_\gamma \sqrt{\dfrac{\omega(1-\omega)}{n}} = 0,1$.

Bu ifodadan *n* ning qiymatini topib olamiz: $n = \dfrac{t_\gamma^2 \omega(1-\omega)}{\delta^2}$. So'ng

$\Phi(t_\gamma) = \dfrac{\gamma}{2} = 0,495$ tenglamadan va Laplas integral funksiyasining qiymatlari keltirilgan ilovaning 4-jadvalidan foydalanib t_γ ning qiymatini topamiz: $t_\gamma = 2,58$. Tanlanmaning hajmi *n* uchun topilgan

formuladan $n = \dfrac{t_\gamma^2 \omega(1-\omega)}{\delta^2} = \dfrac{2,576\cdot 0,25\cdot 0,75}{0,1^2} = 124,42.$

Demak, kompaniya bosh to'plam ulushini baholash uchun tasodifiy tanlangan 125 ta odam orasida so'rov o'tkazishi kerak ekan.

Javob: 125 *ta odam.*

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Aloqa kompaniyasi shaharlararo so'zlashuvlar uchun yakshanba kunlari imtiyozli to'lovlar belgilagan. Bu kompaniya imtiyozli so'zlashuvlarning o'rtacha vaqtini baholamoqchi. 50 ta tasodifiy qo'ng'iroqdan iborat tanlanma shuni ko'rsatdiki, so'zlashuvlarning o'rtacha vaqti $\bar{x}=14{,}5$ minut va ularning o'rtacha kvadratik chetlashishi s=5,6 minutga teng. Yakshanba kunidagi imtiyozli so'zlashuvlarning o'rtacha vaqti uchun 95% ishonch intervalini quring.

2. Sug'urta kompaniyasi bemorlarning shifokorlik xatosi tufayli uzatgan davolarining o'rtacha pul miqdorini baholamoqchi. Kompaniya tasodifiy ravishda tanlab olingan 165 davolar bo'yicha o'tkazgan tahlili natijasida davolarning o'rtacha pul miqdori $\bar{x}=16{,}530$ va o'rtacha kvadratik chetlashishi s = 5,542 ga teng ekanligini aniqladi. Davolarning o'rtacha pul miqdori uchun 95% va 99%li ishonch intervallarini quring.

Javob: (15,68437; 17,37563), (15,4186;17,6414).

3. Batareykalar ishlab chiqaruvchi korxona batareykalarning o'rtacha ishlash vaqtini baholamoqchi. Tasodifan tanlangan 12 batareyka uchun o'rtacha xizmat vaqti $\bar{x}=34{,}2$ soat va o'rtacha kvadratik chetlashishi $s=5{,}9$ soatga tengligi ma'lum bo'ldi. Batareykalarning o'rtacha xizmat vaqti uchun 95% lik ishonch intervalini quring.

4. Ishga joylashtirish byurosi ma'lum bir sanoat tarmog'idagi ishchi vakansiyalarining o'rtacha stavkalarini baholamoqchi. Tasodifan tanlangan 60 ta vakansiya uchun o'rtacha stavka $\bar{x}=2{,}539$ pul birligi va o'rtacha kvadratik chetlashishi $s=11{,}690$ pul birligiga tengligi ma'lum bo'ldi. Sanoat tarmog'idagi ishchi vakansiyalarining o'rtacha stavkalari uchun 95% lik ishonch intervalini quring.

5. Bank yangi regionda ochilayotgan filiali uchun kassa operatsiyalarining avtomatlashtirish zaruriyatini o'rganmoqda. Shu niyatda kishi boshiga bir kunda o'tkaziladigan transaksiyalarning o'rtacha pul miqdorini baholamoqchi. Yangi kassa avtomatlaridan o'tkazilgan va tasodifan tanlangan 10 ta transaksiyalarning pul miqdori 53, 40, 39, 10, 12, 60, 72, 65, 50, 45 shartli pul birligiga teng ekan. Transaksiyalarning o'rtacha pul miqdori uchun 95% lik ishonch intervalini quring.

Javob: (29,87; 59,33).

6. Avtotransport kompaniyasi poytaxtdan shimoliy regionlarga bo'lgan yuk tranzitining o'rtacha vaqtini baholamoqchi. Tasodifiy

tanlangan 20 ta tovar partiyasining tahlilidan ma'lum bo'ldiki, yukning o'rtacha tranzit vaqti $\bar{x}$ =2,6 kun va o'rtacha kvadratik chetlashishi s = 0,4 kunni tashkil etar ekan. Yukning o'rtacha tranzit vaqti uchun 99%li ishonch intervalini quring.

Javob: (2,34; 2,86).

7. Kir yuvish mahsulotlari bilan ulgurji savdo qiluvchi firma ma'lum bir sovun navining kundalik sotilish o'rtacha hajmini baholamoqchi. Tasodifiy kuzatilgan 13 kun natijalari quyidagicha: 123, 110, 95, 120, 87, 89, 100, 105, 98, 88, 75, 125, 101 quti sovun. Kundalik sotilish o'rtacha hajmi uchun 90%li ishonch intervalini quring.

Javob: (93,75; 108,71).

8. Hisobchi maishiy xizmat ko'rsatadigan kompaniya to'lov qog'ozlarining o'rtacha pul miqdorini baholamoqchi. Tasodifiy tanlangan 46 to'lov qog'ozlari tahlilining natijalari quyidagicha: $\bar{X}$ =16,50 shartli pul birligi, s=2,00. To'lov qog'ozlarining o'rtacha pul miqdori uchun 90% lik ishonch intervalini quring.

Javob: (15,86; 17,14).

9. San'at asarlari auktsionida ishtirok etuvchi xususiy galereya ma'lum bir davrga va uslubga tegishli san'at asarlarining o'rtacha narxini baholamoqchi. Galereya ekspertlari tomonidan tasodifiy tanlangan 20 ta asar o'rganilib, narxlari baholandi. Natijalar quyidagicha bo'ldi: bitta asarining o'rtacha baholanish narxi $\bar{X}$ =5139 va o'rtacha kvadratik chetlashishi s q 640 shartli pul birligi. Bitta san'at asarning o'rtacha baholanish narxi uchun 95%li ishonch intervali quring.

10. Ish bilan ta'minlash firmasi ma'lum bir sanoat tarmog'i uchun menejerlarning o'rtacha ish stajini baholamoqchi. Shu maqsadda tasodifiy ravishda tanlab olingan 28 ta menejerdan iborat tanlanmaning tahlili shuni ko'rsatdi: $\bar{X}$ =6,7 yil, s =2,4 yil. O'rtacha ish staji uchun 99%li ishonch intervalini quring.

Javob: (5,44; 7,96).

11. Katta do'kon menejeri uchun sut mahsulotlari bo'limida sotilayotgan bir kunlik sut hajmi haqida ma'lumot kerak bo'lib qoldi. Tasodifiy tanlangan kunlar tahlilidan ushbu ma'lum bo'ldi: kundalik sotilgan bir litrlik tetrapaklar soni — 48, 59, 45, 62, 50, 68, 57, 80, 65, 58, 79, 69. Olingan natijalar asosida har kuni do'konga keltirilishi kerak bo'lgan sut hajmi uchun 95%li ishonch intervalini quring.

12. Kam ta'minlangan oilalarda oziq-ovqat mahsulotlari uchun ketadigan harajatlarning narxini aniqlash niyatida tahlil o'tkazilmoqda. Oziq-ovqat mahsulotlari harajatlarining o'rtacha kvadratik chetla-

shishi 25,75 pul birligiga teng ekanligi ma'lum. Tahlil o'tkazayotgan iqtisodchi oziq-ovqat mahsulotlari harajatlari uchun 95% ishonch bilan interval baho qurganda bahoning aniqligi 3,95 pul birligidan oshmasligi uchun tanlanmaning hajmini qanday olishi kerak.

Javob: $N=164$.

13. Audit tekshiruvchi tasodifiy ravishda 50 dona to'lov hisoblarini tahlil qilib, ularning o'rtacha miqdori 100 va o'rtacha kvadratik chetlashishi 287 pul birligiga tengligini aniqladi. O'rtacha to'lov hisoblari uchun 90%li ishonch intervali quring.

Javob: (1033,4; 1166,6).

14. Non mahsulotlari bilan savdo qiluvchi do'kon egasi har kuni sotilmasdan qolayotgan batonlarni ko'rib, shu mahsulotga bo'lgan haqiqiy kundalik ehtiyojni baholamoqchi. Bir oy davomida do'kon egasi kundalik sotilgan baton nonlar sonini qayd qildi va 30 kundan so'ng bir kunda o'rta hisobda 120 dona baton 10 dona o'rtacha kvadratik chetlashishi bilan sotilishini aniqladi. Agar egasi kundalik sotilgan baton nonlar soni normal taqsimotga bo'ysungan bo'lsa, zarur bo'lgan batonlar soni uchun 90%li ishonch intervalini quring.

Javob: (117; 123).

15. Yangi turdagi ekskursiya xizmatini tashkil qilayotgan turistik firma bu xizmat haqida odamlarning fikrini bilish maqsadida tasodifan tanlangan 120ta odamni so'rov qildi. Natija so'rov o'tkazilganlarning 28%i uchun yangi turdagi ekskursiya xizmati ma'qul kelganligini ko'rsatdi. Turistik firma mijozlari orasida yangi xizmat turidan foydalanadiganlar ulushi uchun 95%li ishonch intervalini quring.

Javob: (0,158; 0,309).

16. Ajinlarga qarshi yangi kosmetik krem yaratgan mutaxassislar ma'lum bir yoshdagi aholining necha foiziga ular yaratgan krem yordam berishini o'rganishmoqchi. Bu maqsadda ular shu yoshdagi 68 nafar kishiga o'z mahsulotini tarqatishdi. Tadqiqotlar tanlangan odamlardan 42 tasida yaxshi natijalar kuzatilganini ko'rsatdi. Yangi krem qoniqarli ta'sir qiluvchi aholi foizi uchun 99%li ishonch intervalini quring.

17. Yangi havo yo'nalishini ochgan aviakompaniya shu yo'nalishdan xizmat yuzasidan foydalanadigan passajirlarning ulushini baholamoqchi. Shu yo'nalishda tasodifiy tanlangan 347 passajirdan 121 tasi tadbirkor ekanligi aniqlandi. Yo'nalishdan xizmat ishlari uchun foydalanadigan odamlarning ulushi uchun 99%li ishonch intervalini quring.

Javob: (0,536; 0,623).

18. Jamg'arma bankining filialida 1253 ta hisob ochilgan ekan. Ular orasidan tasodifiy tanlangan 200 tasining tahlili shuni ko'rsatdiki, hisoblarning o'rtacha qiymati 648,32 pul birligiga va o'rtacha kvadratik chetlashishi 210,00 pul birligiga teng ekan. Jamg'arma banki filialidagi hisoblarning o'rtacha qiymati uchun 99%li ishonch intervalini quring.

19. Ma'muriyat tomonidan korxonada o'tkazilgan tashkiliy qayta qurishga korxona ishchi xizmatchilarining munosabatlarini aniqlash maqsadida tashkilot sotsiologik so'rov o'tkazdi. Korxonada 1242 ishchi-xizmatchi faoliyat ko'rsatar ekan. So'rov uchun tasodifiy tanlangan 160 ta odamdan 85 tasi o'tkazilgan tashkiliy qayta qurishdan mamnun ekanligini bildirishdi. O'tkazilgan tadbirlardan qanoatlangan ishchi-xizmatchilarning ulushi uchun 95%li ishonch intervalini quring.

Javob: (0,459; 0,603).

20. Qandolatchilik korxonasining realizatsiya bo'limi shahar oziq-ovqat do'konlarida sotiladigan ma'lum bir turdagi konfet qutilarining ulushini aniqlamoqchi. Shaharda 538 ta oziq-ovqat do'koni bor ekan. Tasodifiy tanlangan 100 ta do'kon tekshiruvi natijalari shuni ko'rsatdiki bir oyda o'rta hisobda shu xildagi 1220 ta konfet qutisi sotilar ekan va bunda o'rtacha kvadratik chetlashishi 550 qutini tashkil etar ekan. Oylik sotiladigan konfet qutilari uchun 90%li ishonch intervalini quring.

21. Katta oziq-ovqat do'konida bir haftada o'rta hisobda 1520 ta karton qutida tuxum sotilar ekan. Do'konga sotish uchun keltirilgan partiyalardagi singan tuxumlar uchun kompensatsiya olish maqsadida har hafta tasodifan 100 ta karton quti tekshirilar ekan. Agar sotish uchun qabul qilingan partiyada 12 ta karton qutida singan tuxumlar borligi aniqlangan bo'lsa, 0,95 ehtimollik bilan 1520 ta qutidan iborat partiyadagi singan tuxumlari bor qutilar ulushini aniqlang.

Javob: (0,058:0,182).

22. Regionning mahalliy boshqaruv organlariga saylovlarda qatnashadigan aholining o'rtacha soni 40% ni tashkil etar ekan. 400 ta mahalliy aholidan iborat tanlanmada saylovda qatnashmoqchi bo'lganlar 35%ni tashkil etishi ehtimolini baholang.

Javob: 0,9793.

23. Do'kon menejeri o'z tajribasidan do'konga kirganlarning 25% xarid qilishini bilar ekan. Do'konga 200 ta xaridor kirdi.

- Ularning orasida xarid qilganlar ulushi qancha?
- Tanlanma ulushining dispersiyasi nimaga teng?

• Tanlanma ulushining o'rtacha kvadratik chetlashishi nimaga teng?

• Tanlanma ulushining 0,25 va 0,30 oraliqda qiymat qabul qilish ehtimoli qancha?

Javob: 25%; 0,0009375; 0,031; 0,4463.

24. Bo'lim xodimlarining yoshi 23, 19, 25, 32 va 27ga teng. Agar ikki xodimdan iborat takrorlanmaydigan tanlanma olingan bo'lsa, tanlanmaning o'rtacha yoshi taqsimoti qanday? Bu taqsimotning o'rtachasi va dispersiyasi nimaga teng?

Javob: o'rtachasi 25,2; dispersiyasi 6,96.

25. Past nominalga ega bo'lgan aksiyalarning katta hajmdagi bosh to'plamidan broker to'rt dona aksiya tanlab oldi. Bosh to'plamdagi aksiyalar narxi normal taqsimotga ega. Tanlanmadagi aksiyalar narxi: 5, 12, 17 va 10 pul birligini tashkil etdi.

• Bosh to'plam o'rtachasining nuqtaviy bahosini toping.

• Bosh to'plam dispersiyasining nuqtaviy bahosini toping. Bosh to'plam o'rtacha kvadratik chetlashishi bahosi qanday?

• Bosh to'plamdagi aksiyalar orasida narxi 10 pul birligi va undan ziyod bo'lgan aksiyalar ulushining nuqtaviy bahosini toping.

26. Shahar sotsiologik tadqiqodlar markazi saylov ro'yxatlarining tanlanma tahliliga ko'ra 48% saylovchilar hozirda faoliyat ko'rsatayotgan shahar hokimiga qarshi ovoz berishmoqchi ekan. Agar tanlanmaning hajmi 789 saylovchidan iborat bo'lsa, qarshi ovoz bermoqchi bo'lgan saylovchilar soni uchun 99%li ishonch intervalini quring.

27. Tasodifan tanlangan 300 nafar shaharlik so'rovi natijasidan ma'lum bo'ldiki, ulardan 55%i yangi saylangan shahar hokimining ish faoliyatidan mamnun ekan. Shaharliklar orasida hokimga xayrixohlik bildiruvchilar ulushi uchun 95%li ishonch intervalini quring.

Javob: (0,494; 0,606).

28. Tahlil shuni ko'rsatdiki, shahar bandlik xizmatiga murojaat qilganlar orasidan tasodifiy tanlangan 225 nafar odamdan 100 nafari bandlik xizmati yordamida o'zlariga ma'qul bo'lgan ish topibdilar. Shahar bandlik xizmatiga murojaat qilganlar orasida mamnun qolganlar ulushi uchun 95%li ishonch intervalini quring.

Javob: (0,38; 0,50).

29. Siesiy tahlilchi bo'lajak prezident saylovlarida oppozitsion so'l qanot uchun ovoz bermoqchi bo'lgan saylovchilarning ulushini baholamoqchi. Bu ulushning 90% ishonchlik bilan bosh to'plam ulushining $\pm 0{,}04$ aniqligida hisoblash uchun so'rov uchun tanlangan saylovchilar soni qancha bo'lishi kerak?

Javob: (0,2284;0,3716); n=214.

3.4. TANLANMANING KORRELYATSIYA KOEFFITSIENTI. CHIZIQLI REGRESSIYA

Regressiyada ishtirok etayotgan faktorlar soniga qarab oddiy yoki ko'p o'lchovli regressiyalar farqlanadi.

Oddiy regressiya ikki o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bog'liqlik, ya'ni $y=f(x)$ ko'rinishidagi munosabatdan iborat. Bunda y — bog'liq (natijaviy yoki tushuntiriladigan) o'zgaruvchi va x — bog'liqsiz (tushuntiradigan) o'zgaruvchi.

Ko'p ulchovli regressiya deganda tushuntiriladigan o'zgaruvchi u va ikki yoki undan ortiq tushuntiradigan o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik tushuniladi, ya'ni $y=f(x_1,x_2,...,x_k)$ ko'rinishidagi munosaban o'rganiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning ko'rinishiga qarab oddiy **regressiya chiziqli** va **egri chiziqli regressiyaga** farqlanadi. Oddiy regressiya tenglamasi ikki o'zgaruvchi(o'zgaruvchi) orasidagi qonuniyatni xarakterlab, bu qonuniyat faqat o'zgaruvchilar ustidagi kuzatishlar asosida aniqlanib har bir kuzativ natijasini emas, balki kuzatuvlar uchun umumiylikni aks ettiradi. Misol uchun, biror mahsulotga talab y ning shu mahsulot narxi x ga bog'liqligi $y=5000-2x$ tenglama bilan berilsa, bu deganiki, mahsulot narxi bir birlikka oshsa, o'rta hisobda talab 2 birlikka kamayar ekan.

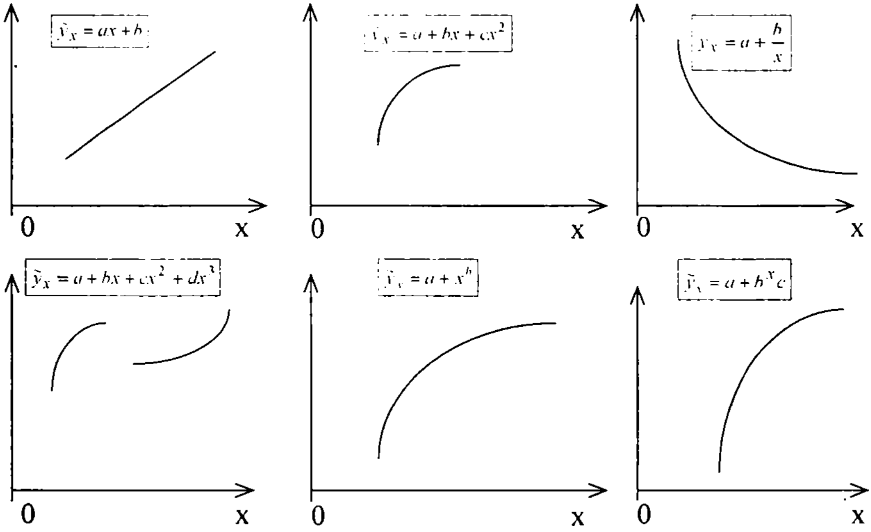
Amalda y kattalik ikki qo'shiluvchidan iborat:

$$y=\widetilde{y}_x+\varepsilon ,$$

bunda y — natijaviy o'zgaruvchining asl qiymati; $\widetilde{y}_x$ — regressiya tenglamasidan aniqlangan natijaviy o'zgaruvchining nazariy qiymati; ε — xatolik (shovqin) deb ataluvchi tasodifiy miqdor bo'lib, y natijaviy o'zgaruvchi asl qiymatining nazariy qiymatidan chetlashishiga teng.

Biror miqdorlar sistemasi (X,Y) o'rganilayotgan va n ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1;y_1),\ (x_2;y_2),\ ...,\ (x_n;y_n)$ olingan bo'lsin. Bu juftliklarning to'g'ri chiziqli XOY koordinatalar sistemasidagi grafik tasviriga **korrellogramma (korrelyatsiya maydoni)** deyiladi. Korrellogrammadan bu ikki o'zgaruvchi orasidagi bog'liqlikni o'rganish va regressiya tenglamasi ko'rinishini tanlashda foydalanish juda qulay.

Bir o‘lchovli regressiya tenglamasini tuzishda ishlatiladigan egri chiziqlarning asosiy turlari



EXCEL dasturi. Asboblar paneli. Diagrammalar ustasi. Nuqtaviy diagrammalar.
Korellogramma grafigini chizish uchun nuqtali diagrammalardan foydalaniladi.
Korellogramma grafigi hosil qilingandan so‘ng grafikning biror nuqtasiga kompyuter kursorini olib kelib, sichqonchaning o‘ng tugmasi bosilganda chiqadigan menyuning **TREND CHIZI/INI QO‘SHISH** satri tanlanganda har xil ko‘rinishdagi (chiziqli, parabolik, darajali va hokazo) regressiya chizig‘ini qurish imkoniga ega bo‘linadi. Natijada ekranda regressiya chizig‘ining grafigi va tenglamasi keltiriladi.

Chiziqli regressiya tenglamasi.

Miqdorlar sistemasi (X,Y) o‘rganilayotgan va n ta bog‘liqsiz kuzatishlar asosida n juft natijalar $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$ olingan bo‘lsin.

(X,Y) o‘zgaruvchilarning **tanlanmaviy kovariatsiya koeffitsientisi** $\mathbf{cov_T}(X,Y)$ quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$cov_T(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\bar{x}\cdot\bar{y},$$

bunda $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ va $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ – X va Y o'zgaruvchilarning tanlanmaviy o'rtachalari.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar. *(X,Y)* o'zgaruvchilarning tanlanmaviy kovariatsiya koeffitsienti ***cov**$_T$(X,Y)*ning qiymatini maxsus:
KOVAR(X_MASSIV;U_MASSID)
nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **X_MASSIV** – birinchi o'zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari; **U_MASSIV** – ikkinchi o'zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari.
E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X_MASSIV;U_MASSIV** – miqdoriy qiymatlar massivi yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Tanlanmaviy dispersiyalar esa quyidagicha hisoblanar edi:

$$D_X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\bar{x})^2;$$

$$D_Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-(\bar{y})^2.$$

Demak, nazariy korrelyatsiya koeffitsienti ta'rifini esga olib, tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsienti uchun

$$\rho_T=cor_T(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}_T(X,Y)}{\sqrt{D_X}\cdot\sqrt{D_Y}}$$

formulani hosil qilamiz.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.
Statistik funksiyalar. *(X,Y)* o'zgaruvchilarning tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsienti ***cor**$_T$(X,Y)*ning qiymatini maxsus:
KORREL(X_MASSIV;U_MASSID)
nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **X_MASSIV** – birinchi miqdoriy o'zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari; **U_MASSIV** – ikkinchi miqdoriy o'zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari;
E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X_MASSIV;U_MASSIV** – miqdoriy qiymatlar massivi yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

Bizga ma'lum ediki, **nazariy korrelyatsiya koeffitsienti** – bu -1 va $+1$ oraliqdagi qiymatlar qabul qiluvchi kattalik bo'lib, u ikki miqdoriy kattalik orasidagi chiziqli bog'liqlik darajasini ko'rsatadi: korrelyatsiya koeffitsienti $+1$ ga teng bo'lsa, kattaliklar orasida aniq musbat chiziqli bog'liqlik borligini; 0 ga teng bo'lsa, bu kattaliklar chiziqli bog'liq emasligini va korrelyatsiya koeffitsienti -1 ga teng bo'lsa, kattaliklar orasida aniq teskari (manfiy) chiziqli bog'liqlik borligini bildirar edi. Korrelyatsiya koeffitsientining bu qiymatlari kundalik hayotda kam uchraydi, lekin ulardan foydalanib, amaldagi ma'lumotlar haqida tegishli xulosalar chiqarish mumkin. Shuni esda tutish kerakki, korrelyatsiya koeffitsienti o'zgaruvchilar orasidagi umuman bog'liqlikni emas, balki faqat chiziqli bog'liqlik darajasini ko'rsatadi. Shu sabab, korrelyatsiya koeffitsientining nolga tengligi o'zgaruvchilar orasida umuman bog'liqlik yo'q degani emas va ba'zan bunday hollarda yaxshi egri chiziqli regressiya tenglamasini qurish mumkin bo'ladi.

Y natijaviy va X tushuntiruvchi o'zgaruvchi bo'lgan holda:

l_0-tanlanmaviy regressiya koeffitsienti va chiziqli regressiya tenglamasi

$$l_0 = \rho_T \frac{\sqrt{D_Y}}{\sqrt{D_X}} = \frac{\mathrm{cov}_T(X,Y)}{D_X} \quad \text{va} \quad \tilde{y}_x - \bar{y} = l_0(x - \bar{x})\,;$$

X natijaviy va Y tushuntiruvchi o'zgaruvchi bo'lgan holda l_1-tanlanmaviy regressiya koeffitsienti va chiziqli regressiya tenglamasi

$$l_1 = \rho_T \frac{\sqrt{D_X}}{\sqrt{D_Y}} = \frac{\mathrm{cov}_T(X,Y)}{D_Y} \quad \text{va} \quad \tilde{x}_y - \bar{x} = l_1(y - \bar{y})$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunday qilib, chiziqli regressiya tenglamasi $\tilde{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x$ X o'zgaruvchining berilgan qiymatlarida natijaviy o'zgaruvchi Yning nazariy qiymatini hisoblash imkoniyatini beradi. Olingan nazariy qiymatlarning grafik tasviriga regressiya chizig'i deb ataladi. Amalda chiziqli regressiya tenglamasini qurish uchun regression tenglama parametrlari b_0 va b_1 ni baholash kerak. Birinchi parametr b_0 – Y-kesishma, ya'ni regressiya chizig'ining OY o'qini kesib o'tish nuqtasi bo'lib, qiymati X=0 dagi Y o'zgaruvchining qiymatiga teng. Ikkinchi parametr b_1 regressiya chizig'ining burchak koeffitsientiga teng bo'lib, X o'zgaruvchi bir birlikka o'zgarganda Y o'zgaruvchi necha birlikka o'zgarishini ko'rsatadi.

Demak, **tanlanmaning chiziqli regressiyasi** – tanlanma *(X, Y)* qiymatlarini yeng yaxshi tushuntiruvchi to‘g‘ri chiziqdir.

Kuzatilgan qiymatlar asosida tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlari quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\rho_T = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}},$$

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad va \quad \beta_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

bunda n – *(X, Y)* o‘zgaruvchilarining kuzatishlar soni.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. $\tilde{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x$ chiziqli regressiya tenglamasining β_1 koeffitsientining qiymatini maxsus:

NAKLON(X_MASSIV;U_MASSID);

β_0 koeffitsientining qiymatini maxsus

OTREZOK(X_MASSIV;U_MASSID);

nomli funksiyalar hisoblaydi. $\tilde{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x$ chiziqli regressiya tenglamasi bo‘yicha x ning ma’lum bir qiymati uchun qilingan bashoratni maxsus:

PREDSKAZ(X_QIYMAT;X_MASSIV;U_MASSID)

nomli funksiya hisoblaydi. Bunda **X_MASSIV** – birinchi miqdoriy o‘zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari; **U_MASSIV** – ikkinchi miqdoriy o‘zgaruvchining kuzatilgan qiymatlari; **X_QIYMAT** – *X* ning bashorat qilinishi kerak bo‘lgan qiymati.

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi parametrlar **X_MASSIV; U_MASSIV; X_QIYMAT** – miqdoriy qiymatlar yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo‘lishi kerak.

Guruhlangan ma'lumotlar uchun chiziqli regressiya tenglama parametrlarini aniqlash

Kuzatishlar soni katta bo'lsin va ma'lum bir x qiymat n_x marotaba va y qiymat n_y marotaba, (x, y) juftlik n_{xy} marotaba kuzatilgan bo'lishi mumkin. Bunday hollarda kuzatish natijalari umumlashtirib guruhlarga ajratiladi, ya'ni n_x, n_y, n_{xy} chastotalar hisoblanib jadval ko'rinishida jamlanadi. Bu jadvalga **korrelyatsion jadval** deyiladi. Jadval ko'rinishida berilgan kuzatish natijalari uchun regressiya tenglamasi quyidagicha aniqlanadi.

Miqdoriy o'zgaruvchilar sistemasi (X,Y) o'rganilayotgan va N ta bog'liqsiz kuzatishlar asosida $(x_i;y_j)$, $i=\overline{1,k}$; $j=\overline{1,m}$; juftlik natijalar olingan bo'lsin. Bunda (x_i,y_j) juftlik $n_{i,j}$ marotaba kuzatilgan. $N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}$. Natijalar quyidagicha korrelyatsion jadvalga jamlanadi:

Y \ X	x_1	x_2	...	x_k	n_y
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{k1}	$n_{\circ 1}$
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{k2}	$n_{\circ 2}$
...	...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{km}	$n_{\circ m}$
n_x	$n_{1\circ}$	$n_{2\circ}$	...	$n_{k\circ}$	

Bunda $n_{\circ j}=\sum_{i=1}^{k}n_{ij}$ va $n_{i\circ}=\sum_{j=1}^{m}n_{ij}$.

(X,Y) miqdorlarning **tanlanmaviy kovariatsiyasi** $\mathbf{cov}(X,Y)$ quyidagi formulaga asosan hisoblanadi:

$$\mathrm{cov}_T(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}\cdot(x_i-\bar{x})\cdot(y_j-\bar{y})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}\cdot x_i\cdot y_j-\bar{x}\cdot\bar{y},$$

bunda $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i$ va $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_j$ – X va Y o'zgaruvchilarning tanlanmaviy o'rtachalari

Tanlanma dispersiyalar esa quyidagicha:

$$D_X=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i^{\,2}-(\bar{x})^2;$$

$$D_Y=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot(y_j-\bar{y})^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_j^{\,2}-(\bar{y})^2.$$

Va nihoyat, tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti

$$\rho_T=cor_T(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}_T(X,Y)}{\sqrt{D_X}\cdot\sqrt{D_Y}}$$

formula orqali hisoblanadi.

Guruhlangan ma'lumotlar asosida chiziqli regressiya tenglamasini qurish uchun tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsienti va chiziqli regressiya tenglamasi koeffitsientlarini quyidagi formulalar yordamida hisoblash mumkin:

$$\rho_T=\frac{N\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}\cdot x_i\cdot y_i-\left(\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_j\right)}{\sqrt{N\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i^{\,2}-\left(\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i\right)^2}\sqrt{N\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_i^{\,2}-\left(\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_i\right)^2}},$$

$$\beta_1=\frac{N\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}\cdot x_i\cdot y_i-\left(\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_j\right)}{N\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i^{\,2}-\left(\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i\right)^2},$$

$$\beta_0=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}n_{\circ j}\cdot y_j-\beta_1\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_{i\circ}\cdot x_i.$$

Chiziqli regressiya tenglamasining sifatini baholash uchun maxsus **determinatsiya koeffitsienti** deb ataladigan va qiymati tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsientining kvadrati $(\rho_T)^2$ ga teng kattalik hisoblanadi. Bu kattalik natijaviy o'zgaruvchi y dispersiyasining regressiya tenglamasi yordamida tushuntiriladigan ulushini aniqlaydi. Mos ravishda $1-(\rho_T)^2$ kattalik natijaviy o'zgaruvchi y dispersiyasining regressiya tenglamasida hisobga olinmagan boshqa omillar orqali tushuntiriladigan ulushini aniqlaydi.

Namunaviy masalalar yechish.

1-masala. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida chiziqli regressiya tenglamasi $\tilde{y}_x = \beta_0 + \beta_1 x$ ni tuzing.

Korxona nomeri	Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, x, ming birlik	Ishlab chiqarish harajatlari y, mln. so'm
1	1	30
2	2	70
3	4	150
4	3	100
5	5	170
6	3	100
7	4	150

Yechish: Regressiya chizig'ini tuzish uchun quyidagi jadvalni to'ldiramiz:

	x	y	xy	x^2	y^2	y_x
1	1	30	30	1	900	31.1
2	2	70	140	4	4900	67.9
3	4	150	600	16	22500	141.6
4	3	100	300	9	10000	104.7
5	5	170	850	25	28900	178.4
6	3	100	300	9	10000	104.7
7	4	150	600	16	22500	141.6
	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i \cdot y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$	$\sum \tilde{y}_i^2$
jami	22	770	2820	80	99700	770.0

Tanlanmaviy korrelyatsiya koeffitsieni qiymatini hisoblaymiz:

$$\rho_T = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2820 - 22 \cdot 770}{\sqrt{7 \cdot 80 - 22^2}\sqrt{7 \cdot 99700 - 770^2}} = 0{,}991$$

Bu kattalik bir soniga ancha yaqin bo'lib, ishlab chiqarish harajatlari va ishlab chiqarish hajmi orasida kuchli chiziqli bog'lanish borligidan dalolat beradi.

Regressiya tenglamasining koeffitsientlarini hisoblash formulalariga asosan:

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{7\cdot 2820 - 22\cdot 770}{7\cdot 80 - 22^2} = \frac{2800}{76} = 36{,}84$$

$$\beta_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{7}\cdot 770 - 36.84\cdot\frac{1}{7}\cdot 22 = -5.79.$$

Chiziqli regressiya tenglamasi quyidagicha $\tilde{y}_x = -5{,}79 + 36{,}84x$ bo'lar ekan. Tenglamaga x qiymatlarni qo'yib u ning nazariy qiymatlari $\tilde{y}_x$ hisoblaymiz va jadvalning ohirgi ustunini to'ldiramiz.

Ko'rilayotgan misolda $(\rho_T)^2$=0,982, demak, regressiya tenglamasi orqali natijaviy o'zgaruvchi u ning 98,2%i tushuntirilar ekan. Qolgan, ya'ni regressiya tenglamasida hisobga olinmagan omillar ulushi esa 1,8%ginani tashkil etar ekan.

Javob: $\tilde{y}_x = -5{,}79 + 36{,}84x$.

2-masala. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *Y* ning *X* ga bog'liq chiziqli regressiya tenglamasini tuzing.

Y \ X	5	15	25	35	45	55	65	n_y
4	2	-	2	-	-	-	-	4
8	-	1	4	-	-	-	-	5
12	-	4	3	10	-	-	-	17
16	-	2	-	2	3	6	-	13
20	-	-	-	-	5	4	-	9
24	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	2	7	9	12	8	11	1	N=50

Yechish: Quyidagi yig'indilarni hisoblaymiz:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\cdot x_i\cdot y_i,\quad \sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i,\quad \sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j,\quad \sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i^2,\quad \sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_i^2:$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\cdot x_i\cdot y_j = 2\cdot 4\cdot 5+1\cdot 8\cdot 15+4\cdot 8\cdot 25+4\cdot 12\cdot 15+3\cdot 12\cdot 25+10\cdot 12\cdot 35+$$

$$+2\cdot 16\cdot 15+2\cdot 16\cdot 35+3\cdot 16\cdot 45+6\cdot 16\cdot 55+5\cdot 20\cdot 45+4\cdot 20\cdot 55+1\cdot 24\cdot 5$$

$$+1\cdot 24\cdot 65 = 27800$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i = 2\cdot 5+7\cdot 15+9\cdot 25+12\cdot 35+8\cdot 45+11\cdot 55+1\cdot 65 = 1790$$

$$\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j = 4\cdot 4+5\cdot 8+17\cdot 12+13\cdot 16+9\cdot 20+2\cdot 24 = 696$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i^2 = 2\cdot 5^2+7\cdot 15^2+9\cdot 25^2+12\cdot 35^2+8\cdot 45^2+11\cdot 55^2+1\cdot 65^2 = 75650$$

$$\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j^2 = 4\cdot 4^2+5\cdot 8^2+17\cdot 12^2+13\cdot 16^2+9\cdot 20^2+2\cdot 24^2 = 10912$$

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$\rho_T = \frac{N\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\cdot x_i\cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j\right)}{\sqrt{N\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i\right)^2}\sqrt{N\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j\right)^2}} =$$

$$= \frac{50\cdot 27800 - 1790\cdot 696}{\sqrt{50\cdot 75650 - 1790^2}\sqrt{50\cdot 10912 - 696^2}} = \frac{144160}{\sqrt{578401}\sqrt{61184}} = 0{,}766323$$

So‘ngra regressiya tenglamasining koeffitsientlarini hisoblaymiz:

$$\beta_1 = \frac{N\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}\cdot x_i\cdot y_j - \left(\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} n_{\circ j}\cdot y_j\right)}{N\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} n_{i\circ}\cdot x_i\right)^2} =$$

$$= \frac{50\cdot 27800 - 1790\cdot 696}{50\cdot 75650 - 1790^2} = 0{,}249,$$

$$\beta_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_{\circ i}\cdot y_i - \beta_1 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_{ic}\cdot x_i = \frac{1}{50}\cdot 696 - 0.249\cdot\frac{1}{50}\cdot 1790 = 4.98.$$

Va nihoyat, regressiya tenglamasini yozamiz: $\tilde{y}_x = 0{,}249x + 4{,}98$.

Bu misol uchun determinatsiya koeffitsienti $(\rho_l)^2$=0,5867 ga teng, demak, regressiya tenglamasi orqali natijaviy o‘zgaruvchi u dispersiyasining 58,67%i tushuntirilar ekan, boshqa omillarning u dispersiyasidagi ulushi 41,33%ni tashkil etar ekan.

Javob: $\tilde{y}_x = 0{,}249x + 4{,}98$

Mustahkamlash uchun masalalar

1. Turistik firma dengizbo‘yi kurorti hududidagi mehmonxonalardan o‘rinlar taklif etmoqda. Firma menejerini mehmonxona ommabopligining mehmonxona binosining dengiz sohilidan uzoq-yaqinligiga qanday bog‘liqligi qiziqtirar ekan. Shu maqsadda shaharning 14 ta mehmonxonasi tahlil qilinib quyidagilar aniqlandi. Yil davomida mehmonxona o‘rinlarining bandligi va mehmonxona binosidan dengiz sohiligacha bo‘lgan masofalar ushbu jadvalda keltirilgan:

masofa, km	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9
Bandligi, %	92	95	96	90	89	86	90	83	85	80	78	76	72	75

Berilgan ma’lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo‘lgan grafik yordamida bog‘lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

2. Avtomashinalar prokati bilan shug‘ullanadigan kompaniyani avtomashina bosib o‘tgan yo‘l (пробег) X va unga xizmat ko‘rsatishning oylik harajatlari Y orasidagi bog‘liqlik qiziqtiradi. Shu maqsadda 15 dona avtomashina tanlab olindi va natijalar ushbu jadvalda keltirildi.

X	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y	13	16	15	20	19	21	26	24	30	32	30	35	34	40	39

Berilgan ma’lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo‘lgan grafik yordamida bog‘lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

3. Radioapparatura savdosi bilan shug‘ullanadigan kompaniya ma’lum bir rusumdagi videomagnitofon uchun turli hududlarda turli narx

belgiladi. Quyida keltirilgan ma'lumotlar 8 ta hudud bo'yicha shu rusumdagi video-magnitofonlarning sotilish hajmi va narxlari berilgan.

Sotuv hajmi (dona)	420	380	350	400	440	380	450	420
Narxi (ming so'm)	5.5	6	6.5	6	5	5.6	4.5	5

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

4. Universitet yotoqxonasida yashovchi 10 talaba tasodifan tanlab olindi va so'rov o'tkazildi. Maqsad talabalarning oxirgi sessiya natijalari bo'yicha o'rtacha balining hafta davomida mustaqil o'qish uchun sarflangan vaqtiga bog'liqligi tahlil qilish edi:

O'rtacha ball	4,6	4,3	3,8	4,2	4,3	3,8	4	3,1	3,9
Vaqt (soat)	25	22	9	15	15	30	20	30	10

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

5. Firma o'zining yangi yuvish vositasining reklama kompaniyasini o'tkazdi: do'konlarda xaridorlarga yuvish vositasining effektivligi namoyish etildi. 10 haftadan so'ng firma bunday reklamaning maqsadga muvofiqligini aniqlash maqsadida haftalik sotuv hajmi va reklama xarajatlarini tahlil qildi:

Sotuv hajmi, (ming so'm)	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90
Reklama harajatlari (ming so'm)	5	8	6	5	3	9	12	4	3	10

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

6. Faraz qilaylik, bizda 10 ta uy xo'jaliklaridan iborat tanlanma bor va biz uy xo'jaliklari a'zolari soni X va undagi sovutish uskunalari soni Y orasidagi bog'lanishni o'rganmoqchimiz.

X	6	2	4	3	4	4	6	3	2	2
Y	4	1	3	2	2	3	4	1	2	2

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

7. Quyidagi jadvalda ish staji (X, yil) va ishchining kundalik ishlab chiqargan mahsulotlar soni (Y, dona) keltirilgan:

X	1	3	4	5	6	7
Y	14	15	18	20	22	25

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

8. Brokerlik kompaniyasiga ishga qabul qilingan yetti xodim sinov muddati yakunida attestatsiyadan o'tkazildi. Ularning ish faoliyati maxsus malakaviy mutanosiblik testlari yordamida va har bir investitsiyalangan so'mdan olingan daromat miqdoriga asosan baholandi. Yosh xodimlarning ish faoliyati ko'rsatgichlari quyidagicha:

Test natijasi	3	2	6	4	1	7	5
Daromad	1	3	5	2	4	6	7

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

9. Quyida keltirilgan jadvalda yillik sotuv hajmi va birlik mahsulot narxi ko'rsatilgan:

Sotuv hajmi (ming dona)	12,20	18,60	29,20	15,70	25,40	35,20	14,70	11,14
Narxi (so'm)	29,20	30,50	29,70	31,30	30,80	29,90	27,80	27,00

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

10. Semestr yakunida imtihonlar boshlanishidan avval universitet guruhining 20 ta talabasi orasida so'rov o'tkazildi. So'rovdan ko'zlangan maqsad talabalar sessiya davomida fandan topshiriladigan imtihonlarda qanday ballar olishni mo'ljallaganliklarini aniqlash. Sessiyadan so'ng olingan ballarning o'rtachasi va mo'ljallangan ballarning o'rtachasi solishtirildi va natijalar quyidagi jadvalda keltirildi:

Kutilgan ballar o'rtachasi	3,40	3,10	3,00	2,80	3,70	3,50	2,90	3,70	3,50	3,20
Olingan ballar o'rtachasi	4,10	3,40	3,30	3,00	4,70	4,60	3,00	4,60	4,60	3,60

Kutilgan ballar o'rtachasi	3,00	3,50	3,30	3,10	3,30	3,90	2,90	3,20	3,40	3,40
Olingan ballar o'rtachasi	3,50	4,00	3,60	3,10	3,30	4,50	2,80	3,70	3,80	3,90

Berilgan ma'lumotlar asosida korrellogramma chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

11. Quyida keltirilgan ma'lumotlar bir xil turdagi 14 ta korxona uchun ishlab chiqarishning mexanizatsiyalanganlik darajasi X(%) va ishlab chiqarish unumdorligi Y(tonna/soat) tahlili asosida olingan:

X	32	30	36	40	41	47	56	54	60	55	61	67	69	76
Y	20	24	28	30	31	33	34	37	38	40	41	43	45	48

• Korrelyatsiya koeffitsienti yordamida mexanizatsiyalanganlik darajasi va unumdorlik orasidagi bog'liqlik haqida xulosalar chiqaring;

• Regressiya tenglamasini tuzing.

12. 20 ta korxona ish faoliyati o'rganilib, bu korxonalarga qilingan investitsiya miqdori X (mln. so'm) va ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi Y (mln. so'm) uchun quyidagi regressiya tenglamalari topilgan: $Y=1,2X+2$ va $X=0,7Y+2$.

• X va Y miqdorlari uchun korrelyatsiya koeffitsientini hisoblang;

• Investitsiyalar miqdorining o'rtachasi va ishlab chiqarilgan mahsulot hajmining o'rtachasini aniqlang.

13. Neft narxi X va neft kompaniyalari indeksi Y orasidagi bog'liqlik tahlili natijasida quyidagi kattaliklar topildi: $\bar{x}=16{,}2$ (pul birligi), $\bar{y}=400$ (shartli birlik), $\sigma_x^2=4$, $\sigma_y^2=500$, $cov(X,Y)=40$.

• $Y=Y(X)$ va $X=X(Y)$ regressiya tenglamalarini tuzing;

• Regressiya tenglamasidan foydalanib, neft narxi 16,5 pul birligiga teng bo'lganidagi o'rtacha indeks qiymatini baholang.

14. 10 ta shaxtada bir smena davomida ko'mir qazib olish ko'rsatkichlari tahlili natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan. Bir ishchi tomonidan qazib olingan ko'mir o'rtacha hajmi *Y(t)* va plast qalinligi *X(m)*.

Shaxta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	8	11	12	9	8	8	9	9	8	12
Y	5	10	10	7	5	6	6	5	6	8

Berilgan ma'lumotlar asosida (korrellogramma) chizing va hosil bo'lgan grafik yordamida bog'lanish xarakterini aniqlang. Chiziqli regressiya tenglamasini tuzing va tenglama koeffitsientlariga izoh bering.

15. Quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *Y=Y(X)* va *X=X(Y)* regressiya tenglamalarini tuzing.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	8
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	N=50

Javob: $\tilde{y}_x = 1,92x + 101,6$; $\tilde{x}_y = 0,12y + 3,7$.

16. Quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *Y=Y(X)* va *X=X(Y)* regressiya tenglamalarini tuzing.

Y \ X	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	-	1	1	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	N=50

Javob: $\tilde{y}_x = 4x + 57,8$; $\tilde{x}_y = 0,19y - 3,1$.

17. Quyidagi korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar asosida *Y=Y(X)* va *X=X(Y)* regressiya tenglamalarini tuzing.

Y \ X	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	N=50

Javob: $\tilde{y}_x = -2,15x + 181,8$; $\tilde{x}_y = -0,33y + 65,7$.

3.5. GIPOTEZALARNI TEKSHIRISH

Tanlanma asosida olingan ma'lumotlar bosh to'plam haqidagi (ya'ni uning parametrlari yoki taqsimoti haqidagi) ayrim faraz (gipoteza)larning haqqoniyligi borasida xulosa chiqarish imkoniyatini beradi.

Gipoteza shunday qo'yilgan bo'lishi kerakki, uning o'rinli ekanligini tekshirish jarayonida ma'lum taqsimot qonunlari (aksar hollarda normal taqsimot, Styudent va Fisher taqsimotlari yoki «xi – kvadrat» taqsimoti)dan foydalanish mumkin bo'lsin. Bunday boshlang'ich gipotezaga nolinchi gipoteza deyiladi va N_0 deb belgilanadi. Nolinchi gipotezadan tashqari qarama-qarshi (alternatid) gipoteza aniqlanadi va N1 deb belgilanadi.

• **Normal taqsimot asosida** gipotezalarni tekshirish bosh to'plam dispersiyasi σ^2 aniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi a sifatida tanlanmaviy o'rtacha $\bar{x}$ qiymatini olish haqqoniy ekanligini tekshirishda ishlatiladi. Tanlanma ulushi uchun qo'yilgan gipotezalarni tekshirishda ham normal taqsimot qo'llash mumkin, chunki biz bilamizki, tanlanma hajmi katta bo'lsa: np>5 va $|p - \rho| \cdot n > 5$, binomial taqsimotni normal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin bo'ladi

• **Styudent taqsimoti (t-kriteriy)** ixtiyoriy hajmdagi tanlanma asosida bosh to'plam dispersiyasi σ^2 noaniq bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish jarayonida ishlatiladi.

• **Fisher taqsimoti (F-kriteriy)** bosh to'plam dispersiyalarini solishtirish gipotezalarida qo'llaniladi.

• **χ^2taqsimoti (χ^2-kriteriy)** o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlikni tekshirishda yoki kuzatilayotgan taqsimotning biror standart taqsimotga mosligini tekshirishda qo'llaniladi.

Barcha xulosalar tekshirilayotgan nolinchi N_0 gipotezaga nisbatan qabul qilinadi. Aslida N_0 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirish natijasida uni inkor etsak, biz **birinchi turdagi xatolikka** yo'l qo'ygan bo'lamiz. Aslida N_1 gipoteza o'rinli bo'lib, tekshirish natijasida N_0 gipotezani qabul etsak, biz **ikkinchi turdagi xatolikka** yo'l qo'ygan bo'lamiz.

α ishonchlilik darajasi (aksar hollarda α=0,01; 0,05; 0,1) bilan gipotezalarni tekshirganimizda ularning sifat ko'rsatkichi sifatida N1 gipoteza o'rinli bo'lganda N_0 gipotezani inkor qilish ehtimoli ishlatiladi. Bu ehtimollik **kriteriy quvvati** deb ataladi.

1. Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan katta (yoki kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a = a_0;$$
$$H_1: \quad a > a_0 \ (\text{ёки} \quad a < a_0).$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $Z = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{x}$ — tanlanmaning o'rtachasi; σ^2- bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi F(x) qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ (yoki Z>-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ (yoki Z<-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a = a_0;$$
$$H_1: \quad a \neq a_0.$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $Z = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{x}$ — tanlanmaning o'rtachasi; σ^2- bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi *F(x)* qiymatlari berilgan jadval №4 dan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$, yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

2. Bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan katta (yoki kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0 \quad a = a_0;$$

$$H_1: \quad a > a_0 \ (yoki \quad a < a_0).$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $T = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\bar{\sigma} / \sqrt{n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{x}$ — tanlanmaning o'rtachasi; $\bar{\sigma}$ — bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 7-jadvaldan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha; n - 1)$ aniqlanadi.

4. Agar $T_k > T$ (yoki $T > -T_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $T_k < T$ (yoki $T < -T_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatga teng va alternativ gipoteza: bosh to'plam o'rtachasi berilgan a_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a = a_0;$$

$$H_1: \quad a \neq a_0.$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $T = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\bar{\sigma} / \sqrt{n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{x}$ — tanlanmaning o'rtachasi; $\bar{\sigma}$ — bosh to'plam dispersiyasi.

3. Ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan jadval №7 dan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha / 2; n-1)$ aniqlanadi.

4. Agar $-T_k < T < T_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $T_k < T$ yoki T<–T_k bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

3. Bosh to'plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish

Ulush binomial taqsimotga ega, lekin tanlanmaning hajmi katta bo'lganda binomial taqsimotni normal taqsimot bilan yaqinlashtirish mumkin.

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam ulushi berilgan p_0 qiymatga teng vaalternativ gipoteza: bosh to'plam ulushi berilgan p_0 qiymatdan katta (yoki kichik) degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad p = p_0;$$

$$H_1: \quad p > p_0 \ (yoki \quad p < p_0).$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $Z = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{p}$ — tanlanmaviy ulush.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi F(x) qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ (yoki Z>-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ (yoki Z<-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: bosh to'plam ulushi beringan p_0 qiymatga teng vaalternativ gipoteza: bosh to'plam ulushi berilgan p_0 qiymatdan farqli degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad p = p_0;$$

$$H_1: \quad p \neq p_0.$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi $Z = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$, bunda n — tanlanma hajmi; $\bar{p}$ — tanlanmaviy ulush.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k)=1-\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

4. Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish

Ikki dispersiya nisbati Fisherning F taqsimotiga bo'ysunishini eslatib o'tamiz.

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas va bir xil dispersiyaga ega bo'lgan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ normal bosh to'plamlardan olingan va alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to'plam dispersiyasi ikkinchi tanlanmaning bosh to'plam dispersiyasidan katta $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2;$$

$$H_1: \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

2. F ifodaning qiymati hisoblanadi:

$$F = \frac{\overline{\sigma}_1^2 \text{ (tanlanma dispersiyalarning kattasi)}}{\overline{\sigma}_2^2 \text{(tanlanma dispersiyalarning kichigi)}},$$

bunda $\overline{\sigma}_1^2$ *ва* $\overline{\sigma}_2^2$ – tanlanmalar asosida hisoblangan siljigan dispersiyalar.

3. Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadvaldan F uchun kritik qiymat $F_k = F(\alpha; n_1 - 1; n_2 - 1)$ aniqlanadi, bunda n_1 – katta tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi va n_2 – kichik tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi.

4. Agar $F_k > F$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $F_k < F$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas va bir xil dispersiyaga ega bo'lgan $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ normal bosh to'plamlardan olingan va alternativ gipoteza: bu tanlanmalar bir xil dispersiyaga ega bo'lgan normal bosh to'plamlardan olinmagan: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad \sigma_1^2=\sigma_2^2;$$

$$H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

2. F ifodaning qiymati hisoblanadi:

$$F=\frac{\bar{\sigma}_1^2(\text{tanlanma dipersiyasining kattasi})}{\bar{\sigma}_2^2(\text{tanlanma dipersiyasining kichigi})},$$

bunda $\bar{\sigma}_1^2$ *ва* $\bar{\sigma}_2^2$ – tanlanmalar asosida hisoblangan siljigan dispersiyalar.

3. Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadvaldan F uchun kritik qiymat $F_k=F(\alpha/2;n_1-1;n_2-1)$ aniqlanadi, bunda n_1 — katta tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi va n_2 — kichik tanlanmaviy dispersiyaga ega bo'lgan tanlanma hajmi.

4. Agar $F_k>F$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $F_k<F$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

EXCEL dasturining standart funksiyalari $\boxed{f_x}$.

Statistik funksiyalar. Fisher taqsimotining kritik qiymati $F_k=F(\alpha;n_1-1;n_2-1)$ ni hisoblay digan maxsus funksiya nomi:

FRASPOBR(EHTIMOLLIK;ERK_DAR1;ERK_DAR2)

Bunda **EHTIMOLLIK** – ishonchlilik darajasi (ya'ni a); ERK_DAR1 – birinchi erkinlik darajasi (ya'ni n_1-1); **ERK_DAR2** – ikkinchi erkinlik darajasi (ya'ni n_2-1);

E s l a t m a: maxsus funksiyaga murojaat qilganda quyidagi perpmetrlar **EHTIMOLLIK; ERK_DAR1; ERK_DAR2** – miqdoriy qiymatlar massivi yoki ular joylashgan yacheykalarning adresi bo'lishi kerak.

EXCEL dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlili. Ikki tanlanma dispersiyalari uchun *F* test (Dvuxviborochniy *F* test dlya dispersiy).

(Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi biryoqlama gipotezani tekshirish uchun mo'ljallangan)

«Ikki tanlanma dispersiyalar uchun *F* test» dialog oynasining parametrlari

1-o'zgaruvchi intervali – birinchi tanlanma joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat bitta satr yoki bitta ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat.

2-o'zgaruvchi intervali – ikkinchi tanlanma joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat bitta satr yoki bitta ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat.

Belgi – Agar kiritish diapazonida ma'lumotlarning birinchi ustun yoki satrida ularning nomi ko'rsatilgan bo'lsa, maxsus 4 belgi qo'yilishi kerak.

Alfa – Test tekshirilishi kerak bo'lgan ishonchlilik darajasini kiritish kerak. Ishonchlilik darajasining qiymati 0 va 1 oralig'ida bo'lishi zarur.

Chiqarish diapazoni – natijalar chiqarilishga mo'ljallangan joyning chapdan birinchi yacheykasining adresi;

Yangi sahifa – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi ochilgan sahifaning A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi;

Yangi kitob – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi tashkil etilgan kitobning birinchi sahifasining A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

X va *Y* ikki tanlanma uchun hisoblangan natijalar quyidagi ko'rinishda taqdim etiladi (bunda ishonchlilik darajasi 0,05 deb olingan)

x	*y*
1	3
2	2
3	1
2	5
1	3
4	2
5	1
5	2
5	
3	

Dvuxviborochniy F-test dlya dispersii

	x	*y*
Srednee	3,1	2,375
Dispersiya	2,544444444	1,696428571
Nablyudeniya	10	8
df	9	7
F	1,499883041	
P(F<qf) odnostoronnee	0,303342827	
F kriticheskoe odnostoronnee	3,676674964	

Jadvalga izoh: SREDNEE satrida tanlanmalarning o'rtachalarining qiymatlari, DISPERSIYA satrida tanlanmalarning dispersiyalarining qiymatlari, NABLYUDENIYA – satrida tanlanmalarning hajmlari, df satrida erkinlik darajalari n_1-1 va n_2-1 qiymatlari, F satrida

$$F=\frac{\bar{\sigma}_1^2(\text{tanlanma dipersiyasining kattasi})}{\bar{\sigma}_2^2(\text{tanlanma dipersiyasining kichigi})}$$

statistikasining qiymati, *P(F<qf)* odnostoronnee *satrida* F uchun kritik qiymat, F kriticheskoe odnostoronnee satrida $F_k=F(\alpha;n_1-1;n_2-1)$ Fisher taqsimotining kritik qiymati keltiriladi.

5. Bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan holda bosh to'plamlar o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanmabir-birigabog'liq emas, bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan va bir xil o'rtachaga ega bo'lgan $a_1=a_2$ normal bosh to'plamlardan olingan va alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to'plam o'rtachasi ikkinchi tanlanmaning bosh to'plam o'rtachasidan katta $a_1>a_2$ degan taxminlardan iborat:

$$H_0:\ a_1=a_2;$$

$$H_1:\ a_1>a_2\ \ (yoki\ \ a_1<a_2).$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi:

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1}+\frac{\sigma_2}{n_2}}},$$

bunda n_1 va n_2 – tanlanmalar hajmi; $\bar{x}_1$ va $\bar{x}_2$ – tanlanmalarning o'rtachalari; σ_1^2 va σ_2^2 – bosh to'plamlarning siljigan dispersiyalari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi *F(x)* qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k)=1-2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ (yoki $Z > -Z_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_o qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_l inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ (yoki $Z < -Z_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_o inkor etiladi, alternativ gipoteza N_l qabul qilinadi.

B) Ikkiyoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq emas, bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan va bir xil o'rtachaga ega bo'lgan $a_1 = a_2$ normal bosh to'plamlardan olingan va alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to'plam o'rtachasi ikkinchi tanlanmaning bosh to'plam o'rtachasidan farqli $a_1 \neq a_2$ degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a_1 = a_2;$$
$$H_1: \quad a_1 \neq a_2.$$

2. Quyidagi ifodaning qiymati hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}},$$

unda n_1 va n_2 — tanlanmalar hajmi; $\bar{x}_1$ va $\bar{x}_2$ — tanlanmalarning o'rtachalari; σ_1^2 va σ_2^2 — bosh to'plamlarning siljigan dispersiyalari.

1. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi *F(x)* qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

2. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_o qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_l inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ yoki $Z < -Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_o inkor etiladi, alternativ gipoteza N_l qabul qilinadi.

EXCEL dasturi. Asboblar paneli. Servis. Ma'lumotlar tahlili. Ikki tanlanma dispersiyalari ma'lum bo'lganda o'rtachalari uchun *Z* test.

(Bosh to'plamlar dispersiyalari ma'lum bo'lgan holda bosh to'plamlar o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish)

«Ikki tanlanma dispersiyalari ma'lum bo'lganda o'rtachalari uchun Z test» dialog oynasining parametrlari

1- o'zgaruvchi intervali – birinchi tanlanma joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat bitta satr yoki bitta ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat.

2-o'zgaruvchi intervali – ikkinchi tanlanma joylashgan yacheykalarning adresiga murojaat. Murojaat bitta satr yoki bitta ustun ko'rinishida keltirilgan ma'lumotlardan iborat.

O'rtachalar farqi – $a_1 - a_2$ miqdor kattaligi;

1-o'zgaruvchi dispersiyasi – birinchi tanlanma uchun bosh to'plam dispersiyasi;

2-o'zgaruvchi dispersiyasi – ikkinchi tanlanma uchun bosh to'plam dispersiyasi;

Belgi – Agar kiritish diapazonida ma'lumotlarning birinchi ustun "ki satrida nomi ko'rsatilgan bo'lsa, maxsus 4 belgi qo'yilishi kerak.

Alfa – Test tekshirilishi kerak bo'lgan ishonchlilik darajasini kiritiladi. Ishonchlilik darajasining qiymati 0 va 1 oralig'ida bo'lishi zarur.

Chiqarish diapazoni – natijalar chiqarilishga mo'ljallangan joyning chapdan birinchi yacheykasining adresi;

Yangi sahifa – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi ochilgan sahifaning A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi;

Yangi kitob – maxsus 4 belgi qo'yilsa, natijalar yangi tashkil etilgan kitobning birinchi sahifasining A_1 yacheykasidan boshlab keltiriladi.

X va *Y* ikki tanlanma uchun hisoblangan natijalar quyidagi ko'rinishda taqdim etiladi (bunda ishonchlilik darajasi 0,05 deb olingan)

x	*y*
1	3
2	2
3	1
2	5
1	3
4	2
5	1
5	2
5	
3	

Dvuxviborochniy z-test dlya srednix

	x	*y*
Srednee	3,1	2,375
Izvestnaya dispersiya	3	2
Nablyudeniya	10	8
Gipoteticheskaya raznost srednix	0	
z	0,97759	
P(Z<qz) odnostoronnee	0.164139	
z kriticheskoe odnostoronnee	1,644853	
P(Z<qz) dvuxstoronnee	0.328277	
z kriticheskoe dvuxstoronnee	1,959961	

Jadvalga izoh: **SREDNEE** satrida tanlanmalarning o‘rtachalarining qiymatlari, **DISPERSIYA** satrida tanlanmalarning dispersiyalarining qiymatlari, **NABLYUDENIYA**- satrida tanlanmalarning hajmlari, **GIPOTETICHESKAYA RAZNOST SREDNIX** – satrida o‘rtachalarning nazariy farqi – $a_1 - a_2$ miqdor kattaligi; Z satrida

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}}$$

statistika qiymati, *P(Z<QZ)* **ODNOSTORONNEE** va *P(Z<Qz)* DVUXSTORONNEE satrlarida mos ravishda biryoqlama va ikkiyoqlama *P(Z<Qz)* ehtimolliklar, *z* **KRITICHESKOE ODNOSTORONNEE** va *z* **KRITICHESKOE DVUXSTORONNEE** satrlarida mos ravishda $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ va $2\Phi(Z_k) = 1 - \alpha$ shartlaridan aniqlanuvchi Z statistika uchun biryoqlama va ikkiyoqlama Z_k kritik qiymatlar keltiriladi.

6. Bosh to‘plamlar dispersiyasilari noma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish

Ikki (bir) yoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog‘liq emas, bosh to‘plamlar dispersiyalari noma’lum bo‘lgan va bir xil o‘rtachaga ega bo‘lgan $a_1 = a_2$ normal bosh to‘plamlardan olingan va alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to‘plam o‘rtachasi ikkinchi tanlanmaning bosh to‘plam o‘rtachasidan farqli $a_1 \neq a_2$ (katta $a_1 > a_2$ yoki kichik $a_1 < a_2$) degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \quad a_1 = a_2;$$
$$H_1: \quad a_1 \neq a_2 \quad (a_1 > a_2 \quad \text{ёки} \quad a_1 < a_2).$$

2. Ikki hol bo‘lishi mumkin: bosh to‘plamlar dispersiyalari teng va teng emas. Bu ikki holni farqlab olish uchun avval bosh to‘plamlar dispersiyalari tengligi haqidagi gipotezani tekshirish kerak (ushbu paragrafning 4 punktiga qarane). Tekshirish natijasiga qarab qaror qabul qilinadi: bosh to‘plamlar dispersiyalari o‘zaro teng (A hol) yoki bosh to‘plamlar dispersiyalari teng emas (B hol).

3. Quyidagi ifoda qiymati hisoblanadi:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{(A hol)}$$

yoki

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}} \quad \text{(B hol),}$$

bunda n_1 va n_2 — talanmalar hajmlari; $\bar{x}_1$ va $\bar{x}_2$ — tanlanmalarning o'rtachalari; s_1^2 va s_2^2 — tanlanmalarning siljimagan dispersiyalari.

4. So'ngra:

(A hol): Ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 7-jadvaldan T uchun kritik qiymat $T_k = t(\alpha/2; n_1 + n_2 - 2)$ (biryoqlama test uchun: $T_k = t(\alpha; n_1 + n_2 - 2)$) aniqlanadi.

Agar $-T_k < T < T_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $T_k < T$ yoki $T < -T_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etilib, alternativ gipoteza N1 qabul qilinadi (biryoqlama test uchun: agar $T_k > T$ (yoki $T > -T_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N1 inkor etiladi; agar $T_k < T$ (yoki $T < -T_k$) bo'lsa, u holda nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.)

(B hol) Quyidagi statistika

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

normal taqsimotga ham Styudent taqsimotiga ham bo'ysunmaydi. Agar tanlanmalar hajmlari katta bo'lsa (> 30), bu statistika taqsimoti normal taqsimotga yaqinlashadi. Bu holda ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi $F(x)$ qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k)=1-2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi (biryoqlama test uchun: $2\Phi(Z_k)=1-2\alpha$). Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ yoki $Z<-Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi va alternativ gipoteza N1 qabul qilinadi (biryoqlama test uchun: Agar $Z_k > Z$ (yoki $Z>-Z_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi va alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ (yoki $Z<-Z_k$) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi va alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.)

7. Bosh to'plamlar ulushlari haqidagi gipotezani tekshirish

Agar ikkita katta hajmdagi tanlanmalar bog'liqsiz binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan bo'lsa, tanlanmalar ulushlarining ayirmasi normal taqsimlangan bo'ladi.

A) Biryoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil ulushga ega bo'lgan $p_1 = p_2$ binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan va alternativ gipoteza: birinchi tanlanmaning bosh to'plam ulushi ikkinchi tanlanmaning bosh to'plam ulushidan katta $p_1 > p_2$ (yoki kichik $p_1 < p_2$) degan taxminlardan iborat:

$$H_0: \ \mathrm{p} = \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2;$$

$$H_1: \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2 \quad (yoki \quad \mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2).$$

2. Quyidagi ifoda qiymati hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\overline{\mathrm{p}}_1 - \overline{\mathrm{p}}_2) - (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}},$$

bunda n_1 va n_2 — tanlanmalar hajmi; p_1 va p_2 — tanlanmalarning ulushlari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi F(x) qiymat-

lari berilgan 4-jadval dan $2\Phi(Z_k)=1-2\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $Z_k > Z$ (yoki Z>-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ (yoki Z<-Z_k) bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

B) Ikki yoqlama test (α ishonchlilik darajasiga asosan).

1. Nolinchi gipoteza: ikki tanlanma bir-biriga bog'liq bo'lmagan, bir xil ulushga ega bo'lgan $p_1 = p_2$ binomial taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan vaalternativ gipoteza: bosh to'plamlar ulushlari teng emas $p_1 \neq p_2$ degan taxminlardan iborat:

$$H_0 : \mathrm{p} = \mathrm{p}_0;$$

$$H_1 : \mathrm{p} \neq \mathrm{p}_0.$$

2. Quyidagi ifoda qiymati hisoblanadi:

$$Z = \frac{(\bar{\mathrm{p}}_1 - \bar{\mathrm{p}}_2) - (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}},$$

bunda n_1 va n_2 – tanlanmalar hajmi; p_1 va p_2 – tanlanmalarning ulushlari.

3. Ilovada keltirilgan Laplasning integral funksiyasi *F(x)* qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k)=1-\alpha$ tenglikni qanoatlantiruvchi *Z* uchun kritik qiymat Z_k aniqlanadi.

4. Agar $-Z_k < Z < Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi, alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi; agar $Z_k < Z$ yoki $Z<-Z_k$ bo'lsa, nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

8. Taqsimot qonuni haqidagi gipotezani tekshirish.

Nolinchi gipoteza N_0 *n* hajmdagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma $F_0(x)$. taqsimot funksiyasiga bo'ysungan *X* tasodifiy miqdorga mos keladi degan taxmindan iborat bo'lsin. Bu gipotezani statistik tekshirish uchun χ^2-kriteriysi ishlatiladi. Sonlar o'qini *m* ta kesishmaydigan

$h_1, h_2, \ldots, h_m$ intervallarga bo'lamiz, $\bigcup_{i=1}^{m} h_i = (-\infty; \infty)$. Quyidagi $p_i = P\{X \in h_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ehtimolliklarni ma'lum bo'lgan $F_0(x)$ funksiya orqali hisoblaymiz. ν_i orqali tanlanmaning h_i intervalga tushgan x_i elementlar sonini aniqlaymiz $i = 1, 2, \ldots, m$. Gipotezani tekshirish uchun quyidagi statistikani hisoblaymiz:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\nu_i^2}{np_i} \right) - n .$$

Agar N_0 gipoteza o'rinli bo'lsa, $n \to \infty$ da χ^2 statistikaning taqsimot qonuni erkinlik darajasi $k = m - 1$ ga teng bo'lgan χ^2 – taqsimotga intilishini K.Pirson isbotlab bergan.

Ishonchlilik darajasi α bo'lsin. Ilovada keltirilgan χ^2-taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 9-jadvaldan $P\{\chi_k^2 > \chi_{\alpha.k}^2\} = \alpha$ shartni qanoatlantiruvchi $\chi_{\alpha.k}^2$ qiymatni aniqlaymiz, bunda χ_k^2 erkinlik darajasi k ga teng bo'lgan «xi-kvadrat» taqsimlangan.

Tanlanma asosida quyidagi statistikani hisoblaymiz:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\nu_i^2}{np_i} \right) - n .$$

Agar $\chi^2 > \chi_{\alpha.k}^2$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda biz ishonchlilik darajasi α bilan nolinchi gipoteza N_0 ni inkor etamiz. Amaliyotda h_i $i = 1, 2, \ldots, m$ intervallarni shunday tanlashadiki, ularga tushgan tanlanma elementlari soni kam bo'lmasin, masalan, $np_i \geq 7$.

Agar $F_0(x)$ taqsimot funksiyasi noma'lum parametrlarga bog'liq bo'lsa, $p_i = P\{X \in h_i\}$ ehtimolliklarni hisoblashda bu parametrlarni tanlanma asosida hisoblangan baholari bilan almashtiriladi. Bu holda $k = m - 1$ kattalik d – noma'lum parametrlar soniga kamaytirilishi kerak, ya'ni: $k = m - 1 - d$.

Quyida xususiy holga maxsus to'xtalib o'tiladi.

Bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish

1. X ning kuzatilayotgan barcha qiymatlar (ya'ni n hajmdagi tanlanma) oralig'ini m dona bir xil uzunlikdagi intervallarga bo'lamiz. Intervallar o'rtalarini topamiz: $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$; so'ng x_i^* variantaning chastotasi sifatida i-intervalga tushgan tanlanma elementlari soni olinadi. Natijada teng masofada joylashgan variantalar va ularga mos kelgan chastotalarni yozib olish mumkin:

$$\begin{matrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_m^* \\ n_1 & n_2 & & n_m \end{matrix}$$

Bunda $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

2. Bu statistik taqsimotga mos kelgan o'rtacha qiymat hisoblanadi: $\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^* \cdot n_i$ va o'rtacha kvadratik chetlashishi hisoblanadi: $\bar{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \cdot n_i \cdot \left(x_i^* - \bar{x}^*\right)^2}$.

3. X tasodifiy miqdorni standartlashtiriladi, ya'ni yangi Z tasodifiy miqdorga o'tiladi: $Z = \frac{X - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}$ va intervallarning yangi chegaralari hisoblanadi: $z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}$ va $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}$. Z ning eng kichik qiymati (quyi chegara) z_1 ni $-\infty$ ga teng va Z ning eng katta qiymati (yuqori chegara) z_m ni ∞ ga teng deb olinadi.

4. X tasodifiy miqdorning $(x_i; x_{i+1})$ intervalga tushishini ifodalovchi nazariy p_i ehtimolliklar $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ tengliklar yordamida hisoblanadi. Bunda F(z) – Laplasning integral funksiyasi bo'lib uning qiymatlari ilovaning 4-jadvalida keltirilgan.

5. Va nihoyat, χ^2 statistikaning qiymati hisoblanadi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i^2}{np_i}\right) - n.$$

6. Normal taqsimot $(a;\sigma^2)$ parametrlarga ega,ya'ni $d = 2$. Shu sabab erkinlik darajasi $k = m - 1 - d = m - 3$.

7. Ilovaning χ^2 taqsimotning kritik qiymatlari $\chi^2_{\alpha,k}$ ilovada berilgan 9-jadvaldan aniqlanadi.

8. Agar $\chi^2 < \chi^2_{\alpha k}$ bo'lsa, u holda α ishonchlilik bilan nolinchi gipotezani inkor etishga asos yo'q bo'ladi.

9. Agar $\chi^2 > \chi^2_{\alpha k}$ bo'lsa, u holda α ishonchlilik bilan nolinchi gipoteza inkor etiladi.

Namunaviy masalalar yechish

***1-masala.* (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Pomidor ko'chatlarining bo'yi o'rtachasi $a = 43$ sm va dispersiyasi $\sigma^2 = 9$ ga teng bo'lgan normal taqsimotga ega. 15 dona ko'chatlar o'tkazilishi kerak bo'lgan tuproqqa o'g'itlar normadan ikki barobar ko'proq solindi. Bu ko'chatlarning o'rtacha bo'yi 46 smga yetdi. Normadan ziyod solingan o'g'itlar foyda bermadi degan xulosa chiqarishimizga asos bormi?

Yechish: Masalani yechishda bir yoqlama testdan foydalanamiz:

$H_0: \quad a = 43 см;$

$H_1: \quad a > 43 см.$ (ya'ni tanlanma o'rtachasi 43 smdan ortiq bo'lgan bosh to'plamdan olingan.)

Ishonchlilik darajasini α =0,01 ga teng deb olamiz. Qo'yidagi ifodaning qiymatini hisoblaymiz:

$$Z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{46 - 43}{3/\sqrt{15}} = \sqrt{15} = 3{,}87\ .$$

Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi *F(x)* qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni, ya'ni $\Phi(Z_k) = 0{,}49$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlaymiz: Z_k =2,33.

$Z_k < Z$ tengsizlik o'rinli bo'lgani tufayli nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi va alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi. Xulosa qilib aytganda, 99% ishonch bilan tanlanma o'rtachasi 43 smdan ziyod bo'lgan bosh to'plamdan olingan deb ta'kidlashimiz mumkin, ya'ni o'g'itlarning ikki barobar ko'p solinganligi yaxshi natija bergan.

2-masala. **(Bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish.)**

"NUR" firmasi elektr chiroqlari ishlab chiqarar ekan. Ma'lum bir turdagi chiroqlar uchun o'zining normativ xizmat muddati (resursi) belgilangan ekan. Bu resurs 1500 soatga teng ekan. Yangi ishlab chiqarilgan chiroqlar partiyasini tekshiruvdan o'tkazish uchun $n=10$ dona chiroq tanlanibdi. Bu tanlanma uchun o'rtacha xizmat muddati $\bar{x}=1410$ soatni va o'rtacha kvadratik ("tuzatilgan") chetlashishi esa s=90 soatni tashkil etibdi. Olingan ma'lumotlar ishlab chiqarilayotgan chiroqlarning xizmat muddati normativ xizmat muddatidan farqlanadi degan xulosa chiqarishimizga asos bo'la oladimi?

Yechish: Nolinchi gipotezasifatidatanlanmao'rtachasi 1500 soatga teng bo'lgan bosh to'plamdan olingan degan taxmin olamiz. Alternativ gipoteza— tanlanmao'rtachasi 1500 soatgateng bo'lgan bosh to'plamdan olinmagan degan taxmin, ya'ni

$$H_0: \quad a=1500;$$

$$H_1: \quad a\neq 1500.$$

Gipotezalarning aniqlanishigako'raikki yoqlamatest tekshiriladi.

$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot S$ ekanligini hisobga olib, T statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$T=\frac{\bar{x}-a_0}{\bar{\sigma}/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}-a_0}{S/\sqrt{n-1}}=\frac{1410-1500}{90/\sqrt{10-1}}=\frac{-90}{90}\sqrt{9}=-3.$$

Ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 5-jadvaldan $T_k=t(\alpha;n-1)=t(0.1;9)=1.83$ ekanligini aniqladik.

$T=-3<-T_k=-1.87$ tengsizlikbajarilgani uchun nolinchi gipoteza inkor etilib alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

Xulosa: Chiroqlarning o'rtacha resursi o'zgargan va normativ xizmat muddatini qanoatlantirmaydi.

3-masala. **(Bosh to'plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish)**

Elektron qismlar ishlab chiqaruvchi korxona rahbariyati ishlab chiqarish jarayonida nosoz elektron qismlar ulushi 4%dan oshmasligini talab qiladi. Navbatdagi ishlab chiqarilgan 500ta qismdan iborat partiyada 28ta nosoz qism bor ekan. Ishlab chiqarish jarayoni rahbariyat talabiga javob bermay qoldi va nosoz elektron qismlar ko'p ishlab chiqarilmoqda deyishimizga asos bormi?

Yechish: Nolinchi gipoteza: ishlab chiqarilayotgan elektron qismlar orasida nosozlari ulushi 4%ga teng, ya'ni p=0,04. Alternativ gipoteza: ishlab chiqarish jarayonida nosoz qismlar ulushi ortdi, ya'ni r>0,04. Alternativ gipotezaning tanlanishiga ko'ra bir yoqlama test tekshiriladi:

$$H_0: \quad p = 0{,}04;$$

$$H_1: \quad p > 0{,}04.$$

Ishonchlilik darajasini 1% deb olamiz, ya'ni $\alpha = 0{,}01$.

Navbatdagi partiyadagi (tanlanmadagi) nosoz qismlar ulushi $\bar{p} = 28/500 = 0{,}056$ ga teng. Z statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$Z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0{,}056 - 0{,}04}{\sqrt{0{,}04 \cdot 0{,}96/500}} = 1{,}83.$$

Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi F(x) qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni, ya'ni $\Phi(Z_k) = 0{,}49$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlaymiz: $Z_k = 2{,}33$.

$Z_k > Z$ tengsizlik o'rinli bo'lgani tufayli nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi va alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi. Xulosa qilib aytganda, 99% ishonch bilan ta'kidlashimiz mumkinki: ishlab chiqarish jarayoni rahbariyat talabiga javob bermay qoldi va nosoz elektron qismlar ko'p ishlab chiqarilmoqda deyishimizga asos yo'q.

***4-masala.* (Ikki bosh to'plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Investitsion kompaniya xizmatchisi ikkita A va B investitsiya loyihalarini tahlil qilmoqda. A investitsiya 10 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan bu vaqt davomida yiliga 17,8% foyda kutilmoqda. B investitsiya 8 yil muddatga mo'ljallangan bo'lib, undan yiliga 17,8% foyda kutilmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydaning ("tuzatilgan") dispersiyalari 3,21 va 7,14 ga teng. A va B investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo'lmaslik xavfi barobar emas degan xulosaga asos bormi? Investitsiyalardan tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

Yechish: Biz bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydalardan iborat ikki tanlanmaning bir xil dispersiyaga ega ikki normal bosh to'plamdan olinganligini tekshirmoqchimiz, shuning uchun:

$$H_0: \quad \sigma_A^2 = \sigma_B^2;$$

$$H_1: \quad \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2.$$

10% ishonch bilan ikki yoqlama F test tekshiramiz. Tanlanmalarning dispersiyalari qiymatini aniqlaymiz:

$$\overline{\sigma}_A^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \cdot S_A^2 = \frac{10}{9} \cdot 3{,}21^2 = 11{,}449;$$

$$\overline{\sigma}_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \cdot S_B^2 = \frac{8}{7} \cdot 7{,}14^2 = 58{,}2624.$$

F statistikaning qiymatini hisoblaymiz. $\overline{\sigma}_B^2 > \overline{\sigma}_A^2$ bo‘lgani uchun:

$$F = \frac{(katta\ \ tanlanma\ \ dispersiya)}{(kichik\ \ tanlanma\ \ dispersiya)} = \frac{\overline{\sigma}_B^2}{\overline{\sigma}_A^2} = \frac{58{,}2624}{11{,}449} = 5{,}09.$$

Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadval dan F uchun kritik qiymat $F_k = F(\alpha; n_1 - 1; n_2 - 1)$ aniqlanadi:

$$F_k = F(\alpha/2; n_B - 1; n_A - 1) = F(0{,}05;7;9) = 3{,}29.$$

$F_k < F$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi uchun nolinchi gipoteza N_0 inkor etiladi, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

Xulosa: *A* va *B* investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo‘lmaslik xavfi barobar emas degan taxminga asos bor.

5-masala. **(Bosh to‘plamlar dispersiyalari ma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Shakar ishlab chiqaruvchi korxona shakarni 1 kgdan qadoqlovchi ikki ta uskunaga ega $(a_1 = a_2)$. Ko‘p yillik kuzatishlar natijasida boshqaruvchi bu ikki uskuna uchun standart chetlashishi (bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlashishi) ni baholagan: 1 uskuna uchun 0,02kg(σ_1) va 2 uskuna uchun 0,04 kg(σ_2). Birinchi uskunada qadoqlangan $n_1=10$ qopcha tanlanib ulardagi shakarning o‘rtacha massasi $\bar{x}_1 = 1{,}018$ kg ga tengligi topildi. Ikkinchi uskuna uchun xuddi shunday hajmi $n_2=12$ teng tanlanma olinib, o‘rtacha massa $\bar{x}_2 = 0{,}989$kg ekanligi aniqlandi. Bu ikki uskunada qadoqlanayotgan shakarning o‘rtacha massalari xar xil deyishimizga asos bormi?

Yechish: Nolinchi gipoteza ikkala tanlanma bir xil o‘rtachaga ega bo‘lgan bosh to‘plamlardan olingan degan taxmindan iborat

$$H_0: a_1 = a_2;$$

$$H_1: a_1 \neq a_2$$

N_1 alternativ gipotezaning tanlab olinishiga ko‘ra ikki yoqlama test tekshirishimiz kerak. Ishonchlilik darajasi 1%ga teng bo‘lsin. *Z* statistikani hisoblaymiz:

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1}+\frac{\sigma_2}{n_2}}}=\frac{(1{,}018-0{,}989)-0}{\sqrt{\frac{0{,}02^2}{10}+\frac{0{,}04^2}{12}}}=2{,}197$$

Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi F(x) qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k)=1-\alpha$ tenglikni, ya'ni $\Phi(Z_k)=0{,}495$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlaymiz: $Z_k=2{,}58$.

$-Z_k<Z<Z_k$ tengsizlik o'rinli bo'lgani tufayli nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi vaalternativ gipoteza N_1 inkor etiladi.Xulosaqilib aytganda, 99% ishonch bilan ta'kidlashimiz mumkinki:ikki uskunada qadoqlanayotgan shakarning o'rtacha massalari bir xil.

6-masala. **(Bosh to'plamlar dispersiyalari noma'lum bo'lgan holda bosh to'plamlar o'rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Ishlab chiqarilayotgan sariyog'ning sifatini tekshirish maqsadida ishlab chiqarilgan ikki partiyaning har biridan 10 donadan olinib, har bir tanlanma uchun undagi suvning ulushi (%da) hisoblandi. Birinchi partiya uchun o'rtacha foiz $\bar{x}_1=68{,}2\%$ va standart chetlashish $s_2=0{,}70\%$, ikkinchi partiya uchun esa $\bar{x}_1=67{,}0\%$ va $s_2=0{,}74\%$ ga teng ekan. Bu ikki partiyadagi sariyog' xar xil suv ulushiga ega degan taxminga asos bormi

Yechish: Nolinchi gipoteza: bu ikki tanlanmao'rtachalari o'zaro teng bo'lgan ikki normal bosh to'plamdan olingan:

$$H_0:\ a_1=a_2;$$
$$H_1:\ a_1\neq a_2$$

N_1 alternativ gipotezaning tanlab olinishigako'raikkiyoqlamatest tekshirishimiz kerak.

Bosh to'plamlar dispersiyalari no'malum bo'lgani uchun, bosh to'plamlar dispersiyalari tengligi haqidagi F testni tekshirishimiz kerak. Ya'ni gipotezalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;$$
$$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$$

5% ishonchlilik darajasi bilan ikkiyoqlama test tekshiramiz. Tanlanmalar dispersiyalarini hisoblaymiz:

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \cdot s_1^2 = \frac{10}{9} \cdot 0,70^2 = 0,544;$$

$$\bar{\sigma}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \cdot s_2^2 = \frac{10}{9} \cdot 0,74^2 = 0,608.$$

F statistikani aniqlaymiz. $\bar{\sigma}_2^2 > \bar{\sigma}_1^2$ bo‘lgani uchun :

$$F = \frac{(\,katta \;\; tanlanma \;\; dispersiya\,)}{(kichik \;\; tanlanma \;\; dispersiya)} = \frac{\bar{\sigma}_2^2}{\bar{\sigma}_1^2} = \frac{0,544}{0,608} = 1,12.$$

Ilovada keltirilgan Fisher taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 8-jadvaldan F uchun kritik qiymat aniqlanadi:

$$F_k = F(\alpha/2; n_1 - 1; n_2 - 1) = F(0.05;9;9) = 4,026.$$

$F_k > F$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi uchun nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi va alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi..

5% ishonch bilan xulosa qilish mumkinki: dispersiyalar orasidagi farq ahamiyatga loyiq emas va bosh to‘plamlar dispersiyalari o‘zaro teng deb olish mumkin.

T statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(68,2 - 67,0) - 0}{\sqrt{\frac{(10 \cdot 0,70^2 + 10 \cdot 0,74^2)}{10 + 10 - 2} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}} = 3,53.$$

Ilovada keltirilgan Styudent taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 7-jadvaldan T uchun kritik qiymat aniqlanadi:

$$T_k = t(\alpha/2; n_1 + n_2 - 2) = t(0,025;18) = 2,10.$$

$T_k < T$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi uchun nolinchi gipoteza N_0 inkor etilib, alternativ gipoteza N_1 qabul qilinadi.

Xulosa: Bu ikki partiyadagi sariyog‘ tarkibidagi suv ulushi har xil.

***7-masala.* (Bosh to‘plamlar ulushlari haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Katta kompaniyaning ichki auditorlari daromad hisoblarining qayd qilish sistemasini tahlil qilishmoqda. Ular tasodifiy ravishda $n_1 = 50$ ta qayd qilingan hisoblarni tanlab olib ularni o‘rganib chiqishdi. Ulardan to'rttasi noto'g'ri to'ldirilgan ekan. So'ng auditorlar ikkinchi hajmi $n_2 = 60$ teng tanlanma olib, unda uchta noto'g'ri to'ldirilgan hisob aniqlashibdi. Xizmatchilar xatolarga kamroq yo'l qo'ya boshlashdi degan xulosaga asos bormi?

Yechish: Nolinchi gipoteza: bu ikki tanlanma bir xil xatolar ulushilariga ega bo'lgan bosh binomial to'plamlardan olingan:

$$H_0: \quad p = p_1 = p_2;$$

$$H_1: \quad p_1 > p_2,$$

Masala shartiga ko'ra xatolar ulushi kamaygan degan taxmin tekshirilmoqda, shuning uchun bir yoqlama test tekshiriladi. Ishonchlilik darajasi 5% bo'lsin. Tanlanmalar ulushlarini hisoblaymiz:

$$\bar{p}_1 = \frac{4}{50} = 0{,}08 \quad va \quad \bar{p}_2 = \frac{3}{60} = 0{,}05.$$

Z statistika qiymatini hisoblaymiz:

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} = \frac{(0.08 - 0.05) - 0}{\sqrt{\frac{0.08\cdot(1-0.08)}{50} + \frac{0.05\cdot(1-0.05)}{60}}} = \frac{0.03}{0.0476} = 0.6302$$

Ilovada keltirilgan Laplasning integral funktsiyasi F(x) qiymatlari berilgan 4-jadvaldan $2\Phi(Z_k) = 1 - 2\alpha$ tenglikni, ya'ni $\Phi(Z_k) = 0.45$ tenglikni qanoatlantiruvchi Z uchun kritik qiymat Z_k aniqlaymiz: $Z_k = 1{,}645$.

$Z_k > Z$ tengsizlik o'rinli bo'lgani tufayli nolinchi gipoteza N_0 qabul qilinadi va alternativ gipoteza N_1 inkor etiladi. Xulosa qilib aytganda, 95% ishonch bilan ta'kidlashimiz mumkinki: hisoblarni qayd qilishda yo'l qo'yiladigan xatolar soni kamaymagan.

***8-masala.* (Taqsimot qonuni haqidagi gipotezani tekshirish.)** Mikroskop ostida yupqa oltin eritmasi qoplami kuzatilmoqda. Bir xil vaqt oraliqlarida mikroskop oynasi ostiga kuzatilgan oltin zarralari qayd qilindi. Kuzatishlar natijasida quyidagi empirik taqsimot hosil qilindi:

X_i	0	1	2	3	4	5	6	7
ν_i	112	168	130	68	32	5	1	1

Birinchi satrda lotin zarrachalari soni X_i, ikkinchi satrda esa n_i chastota, ya'ni X_i ta oltin zarrachasi kuzatilgan vaqt intervallari soni; $n = \sum \nu_i = 517$ -tanlanma hajmi. χ^2-kriteriysidan foydalanib, $\alpha = 0.05$ ishonchlilik darajasi bilan oltin zarrachalari soni Puasson taqsimotiga ega ekanligini tekshiring.

Yechish: Nolinchi gipoteza N_0: ctatistik taqsimoti orqali berilgan tanlanma Puasson taqsimotiga ega bo'lgan tasodifiy miqdorga mos keladi. Tanlanmaning o'rtachasini topamiz:

$$\overline{X}=\frac{1}{157}(112\cdot 0+168\cdot 1+130\cdot 2+68\cdot 3+32\cdot 4+5\cdot 5+1\cdot 6+1\cdot 7)\approx 1{,}54.$$

Puasson taqsimoti λ parametrining bahosi $\overline{\lambda}$ sifatida tanlanmaning o'rtachasini olamiz: $\overline{\lambda}=1{,}54$. Demak, Puasson taqsimoti quyidagi ko'rinishga ega:

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}=\frac{1{,}54^k\cdot e^{-1{,}54}}{k!}.$$

$\lambda=\overline{\lambda}=1{,}54$ parametrli Puasson taqsimoti o'rinli deb, mikroskop ostida kuzatiladigan zarrachalar soni uchun nazariy ehtimolliklarni hisoblaymiz:

$$p_0=P\{X=0\}=0{,}2144;\quad p_4=P\{X=4\}=0{,}0502;$$
$$p_1=P\{X=1\}=0{,}3301;\quad p_5=P\{X=5\}=0{,}0155;$$
$$p_2=P\{X=2\}=0{,}2542;\quad p_6=P\{X=6\}=0{,}0040;$$
$$p_3=P\{X=3\}=0{,}1305;\quad p_7=P\{X=7\}=0{,}0009.$$

Kichik qiymatli chastotalarni (5+1+1=7) va ularga mos kelgan nazariy ehtimollarni birlashtiramiz:

(0,0155+0,0040+0,0009=0,0204).

Birlashtirish natijasida quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

X_i	0	1	2	3	4	5
ν_i	112	168	130	68	32	7
p_i	0,2144	0,3301	0,2542	0,1305	0,0502	0,0204

"xi-kvadrat" statistikaning qiymatini hisoblaymiz:

$$\chi^2=\sum_{i=0}^{5}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i}=\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{\nu_i^2}{np_i}\right)-n=2{,}8.$$

Ilovada keltirilgan χ^2-taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 9-jadvaldan $\alpha=0{,}05$ va erkinlik darajasi $k=m-1-d=8-1-1=6$ ga mos kelgan kritik qiymatni aniqlaymiz: $\chi^2_{\alpha,k}=12{,}6$. Co'ngra $2{,}8=\chi^2<\chi^2_{\alpha,k}=12{,}6$ tengsizlik bajarilgani uchun nolinchi gipotezani inkor etishimizga asos yo'q degan xulosaga kelamiz

Xulosa: Mikroskop ostida kuzatiladigan zarrachalar soni Puasson taqsimotiga ega degan taxminni inkor etishga asosimiz yo'q.

9-masala. **(Bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani tekshirish.)**

Interval nomeri	Interval chegaralari		Chastota
i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	3	8	6
2	8	13	8
3	13	18	15
4	18	23	40
5	23	28	16
6	28	33	8
7	33	38	7
			$\sum n_i = 100$

χ^2-kriteriysidan foydalanib, $\alpha = 0{,}05$ ishonchlilik darajasi bilan hajmi $n=100$ ga teng bo'lgan tanlanma normal taqsimlangan bosh to'plamdan olinganligini tekshiring.

Yechish: Xususiy intervallarning o'rtalarini topamiz: $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$;

x_i^* variantaning chastotasi sifatida i – xususiy intervalga tushgan variantalar sonini olamiz va natijada quyidagi statistik taqsimot hosil qilamiz:

x_i^*	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Bu statistik taqsimot uchun o'rtacha va o'rtacha kvadratik chetlashish qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\bar{x}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^* \cdot n_i = 20{,}7; \qquad \bar{\sigma}^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \left(x_i^* - \bar{x}^*\right)^2} = 7{,}28.$$

X miqdorni standartlashtiramiz, ya'ni yangi Z o'zgaruvchiga o'tamiz $Z = \dfrac{X - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}$ va interval chegaralarini aniqlaymiz:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*} \quad \text{va} \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}.$$

$z_1 = -\infty$ va $z_m = \infty$ deb qabul qilamiz.

So‘ngra $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ tenglikdan foydalanib, X miqdor uchun $(x_i; x_{i+1})$ intervalga tushishining nazariy ehtimollarini xisooblaymiz. Eslatib o‘tamiz, bunda F(z) Laplasning integral funktsiyasi bo‘lib, uning qiymatlari Ilovaning 4-jadvalida keltirilgan. Misol uchun:

$$p_1 = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{z_1 < Z < z_2\} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}^*}{\sigma^*}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi(\infty) + \Phi\left(\frac{8 - 20,7}{7,28}\right) = 0,5 + \Phi(-1,74) = 0,5 - \Phi(1,74) = 0,5 - 0,4591 = 0,0409.$$

Xuddi shunday usulda qolgan nazariy ehtimolliklar hisoblanadi. Hisob natijalar yordamida quyidagi jadvalni to‘ldiramiz:

i	Interval chegaralari		F (z i)	F (z i+1)	pi = F (z i) - F (z i+1)
	z_i	z_{iQ1}			
1	-∞	-1,74	-0,5	-0,4591	0,0409
2	-1,74	-1,06	-0,4591	-0,3554	0,1037
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132
7	1,69	∞	0,4545	0,5	0,0455
					$\sum p_i = 1$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n_i^2}{np_i}\right) - n$$ statistikaning qiymatini hisoblash uchun quyidagi jadvalni to‘ldiramiz:

i	p_i	$np_i=100p_i$	n_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0,0409	4,09	6	1,91	3,648	0,89
2	0,1037	10,37	8	-2,37	5,617	0,54
3	0,2111	21,11	15	-6,11	37,332	1,77
4	0,2698	26,98	40	13,02	169,52	6,28
5	0,2158	21,58	16	-5,58	31,136	1,44
6	0,1132	11,32	8	-3,32	11,02	0,97
7	0,0455	4,55	7	2,45	6,002	1,32
	$\sum p_i = 1$	$\sum np_i = 100$				$\chi^2 = 13$

Normal taqsimot ikkita (a;σ2) parametrga ega bo'lganligi uchun $d=2$ va erkinlik darajasi $k=m-1-d=7-1-2=4$. Ilovada keltirilgan χ^2-taqsimotining kritik qiymatlari berilgan 9-jadvaldan $\alpha=0,05$ va erkinlik darajasi $k=4$ ga mos kelgan kritik qiymatni aniqlaymiz $\chi^2_{\alpha,k}=\chi^2_{0,05,4}=7,8.$

$\chi^2>\chi^2_{\alpha,k}$ tengsizlik o'rinli bo'lgani uchun 95% ishonch bilan nolinchi gipoteza N_0 ni inkor etamiz.

Xulosa: Tanlanma bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani qanoatlantirmaydi.

Mustahkamlash uchun masalalar

1. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). Ipni g'altakka q'rab beruvchi uskuna tekshirilmoqda. O'ramlarning o'rtacha soni 500 teng bo'lishi kerak. G'altaklar partiyasidan olingan tanlanma o'ramlarning o'rtacha soni 502,5 ga teng ekanligini ko'rsatdi. Uskuna to'g'ri sozlanganmi, degan savolga javob bering. (Ishonchlilik darajasi $\alpha=0,05$).

2. (Bosh to'plam dispersiyasi ma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). O'rtacha kvadratik chetlashishi $\sigma=2,1$ ga teng bo'lgan normal bosh to'plamdan hajmi n=49 ga teng tanlanma olindi. Tanlanmaning o'rtachasi $\bar{x}=4,5$ ga teng ekan. Ishonchlilik darajasi 0,05 teng bo'lsa, quyidagi nolinchi gipotezani tekshiring:

N_0: a=3 va alternativ gipoteza $H_1:a\neq3$.

Javob: Nolinchi gipoteza rad etiladi.

3. (Bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). Fabrikada kofeni 100 gr, idishlarga qadoqlash uchun avtomat uskunadan foydalanilar ekan. Agar qadoqlanayotgan idishlarning o'rtacha og'irligi aniq og'irlikdan farq qilsa, uskuna sozlanar ekan. Vaqti-vaqti bilan qadoqlangan kofe idishlari ajratib olinadi va ularning o'rtacha og'irligi va og'irlik chetlashishi hisoblanadi. 30 dona qadoqlangan kofe idishlari og'irligini tahlil qilish natijasida ularning o'rtacha og'irligi $\bar{x}=102,4$ va "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlashishi s=18,540 ekanligi aniqlandi. Avtomat uskunani sozlash zaruriyati bormi? (Ishonchlilik darajasi $\alpha=0,05$).

4 (Bosh to'plam dispersiyasi noma'lum bo'lganda bosh to'plam o'rtachasi haqidagi gipotezani tekshirish). Bosh normal to'plamdan olingan hajmi n=16 ga teng bo'lgan tanlanma uchun uning o'rtachasi

$\bar{x}=12{,}4$ va “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlashishi $s=1{,}2$ topildi. Ishonchlilik darajasi 0,05 bo‘lganda N_0: $a=11{,}8$ nolinchi gipotezani $H_1: a \neq 11{,}8$ alternativ gipoteza bo‘lganda tekshiring.

Javob: Nolinchi gipotezani inkor etishga asos yo‘q.

5. (Bosh to‘plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish) Turistik firma yangi turdagi ekskursiya xizmati kiritishdan oldin potentsial mijozlar orasida so‘rov o‘tkazmoqchi. Agar potentsial mijozlarning 35%i bu fikrni qo‘llasa, firma yangi turdagi ekskursiya xizmati kiritar ekan. So‘rovda 120 ta kishi qatnashdi. Ulardan 28%i yangi turdagi ekskursiya xizmati kiritilishini ma’qulladi. Firma so‘rov asosida yangi turdagi ekskursiya xizmati kiritishi mumkinmi? (Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0.05$)

6. (Bosh to‘plam ulushi haqidagi gipotezani tekshirish) n=1000ta tajribaning 548tasida xodisa ro‘y berdi. Ishonchlilik darajasi 0,05 bo‘lganda N_0: p=0,5 nolinchi gipotezani alternativ gipoteza $H_1: p \neq 0{,}5$ bo‘lganda tekshiring.

7. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish) Investitsion kompaniya xizmatchisi ikkita *A* va *B* investitsiya loyihalarini tahlil qilmoqda. *A* investitsiya 15 yil muddatga mo‘ljallangan bo‘lib, undan bu vaqt davomida yiliga 15,6% foyda kutilmoqda. *B* investitsiya 12 yil muddatga mo‘ljallangan bo‘lib, undan yiliga 15,6% foyda kutilmoqda. Bu ikki investitsiyalardan tushadigan yillik foydaning (“tuzatilgan”) dispersiyalari 4,6 va 3,42 ga teng. *A* va *B* investitsiyalarning muvaffaqiyatli bo‘lmaslik xavfi (risk) barobar emas degan xulosaga asos bormi? Investitsiyalardan tushadigan yillik foyda normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

8. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi haqidagi gipotezani tekshirish) *X* va *Y* ikki bosh to‘plamdan 10 va 16 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning “tuzatilgan” dispersiyalari hisoblandi: $S_X^2 = 3.6$ va $S_Y^2 = 2.4$. Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0{,}05$ bo‘lganda bosh to‘plamlar dispersiyasi tengligi haqidagi nolinchi $H_0: D_X = D_Y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagichaaniqlang. $H_1: D_X > D_Y$.

Javob: Nolinchi gipotezani rad etishga asos yo‘q.

9. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi ma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish). Fabrikada kofeni 100 gr, idishlarga qadoqlash uchun ikki avtomat uskunadan foydalanilar ekan. Ko‘p yillik kuzatishlar natijasida boshqaruvçhi bu ikki uskuna uċhun standart chetlashish (bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlashishi)ni baholagan: 1-uskuna uchun 0,02gr. (σ_1) va 2-uskuna uchun 0,04gr. (σ_2). Birinchi uskunada qadoqlangan n_1=30

dona kofe idishi tanlanib ulardagi kofening o‘rtacha massasi $\bar{x}_1 = 101$ gr. ga tengligi aniqlandi. Ikkinchi uskuna uchun xuddi shunday hajmi n_2=25 teng tanlanma olinib, o‘rtacha massa $\bar{x}_2 = 98$ gr. ekanligi aniqlandi. Bu ikki uskunada qadoqlanayotgan kofening o‘rtacha massalari har xil deyishimizga asos bormi?

10. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi ma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish). *X* va *Y* ikki bosh to‘plamdan 20 va 30 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning o‘rtachalari hisoblandi: $\bar{x} = 154$ va $\bar{y} = 149$. Agar bosh to‘plamlar dispersiyalari $D_X = 120$ va $D_Y = 100$ ma’lum bo‘lsa. Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0{,}05$ bo‘lganda bosh to‘plamlar o‘rtachalari tengligi haqidagi nolinchi $H_0 : M_X = M_Y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang. $H_1 : M_X \neq M_Y$.

11. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi noma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish) Batareykalar ishlab chiqarish fabrikasida ikkita ishlab chiqarish konveyeri o‘rnatilgan ekan. Batareykalarning o‘rtacha xizmat vaqtini aniqlash uchun har bir konveyerdan tanlanma olinibdi. Birinchi konveyerdan olingan 12 ta batareyka uchun o‘rtacha xizmat vaqti $\bar{x} = 34{,}2$ soat va $s = 5{,}9$ soat (“tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlashish) ekan. Ikkinchi konveyerdan olingan 10ta batareyka uchun o‘rtacha xizmat vaqti $\bar{x} = 28{,}7$ soat va $s = 6{,}1$ soat ekan. Har xil konveyerda ishlab chiqarilgan batareykalarning o‘rtacha xizmat vaqti har xil deyishimizga asos bormi?

12. (Ikki bosh to‘plam dispersiyasi noma’lum bo‘lgan holda bosh to‘plamlar o‘rtachalari haqidagi gipotezani tekshirish). *X* va *Y* ikki bosh to‘plamdan 5 va 6 hajmdagi ikkita tanlanma olindi va ularning o‘rtachalari: $\bar{x} = 15.9$, $\bar{y} = 14{,}1$ va “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlashishlari $S_X^2 = 14.76$, $S_Y^2 = 4.92$ hisoblandi. Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0{,}05$ bo‘lganda bosh to‘plamlar o‘rtachalari tengligi haqidagi nolinchi $H_0 : M_X = M_Y$ gipotezani tekshiring. Alternativ gipotezani quyidagicha aniqlang. $H_1 : M_X \neq M_Y$.

Javob: Nolinchi gipotezani rad etishga asos yo‘q.

13. (Taqsimot konuni haqidagi gipotezani tekshirish) Byuffon tangani $n = 4040$ marotaba tashlaganda tanga $k_1 = 2048$ marotaba “gerb” va $k_2 = 1992$ marotaba “raqam” tomoni bilan tushgan. Bu ma’lumotlar tanga “to‘g‘ri” (ya’ni tanga bir jinsli, simmetrik va uni tashlaganda “gerb” tomoni bilan tushish ehtimoli *p* =1/2 ga tene) degan N_0 gipotezaga zid bo‘ladimi? $\alpha = 0{,}05$ deb qabul qiling.

Javob: Zid kelmaydi.

$$n = 4040; p = q = 1/2; \nu_1 = 2048; \nu_2 = 1992; \chi^2 = 0.776; \chi^2_{0.05,1} = 3.8$$

14. (Taqsimot konuni haqidagi gipotezani tekshirish). Soat tuzatish ustaxonalarining peshtaxtalarida qo'yilgan soatlar tasodifiy vaqtlarni ko'rsatadi. Bir kimsa 500 ta soat ko'rsatayotgan vaqtlarni kuzatib qo'yida keltirilgan natijalar olibdi:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
v_i	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Bunda i-vaqt oralig'i nomeri (soat i dan to (i+1) ga qadar), i=0,1,...,11; v_i – bo'lsa i oraliqqa tegishli vaqtni ko'rsatayotgan soatlar soni. Bu ma'lumotlar soatlar ko'rsatayotgan vaqt (0;12) intervalda tekis taqsimlangan degan N_0 gipotezaga zid bo'ladimi? $\alpha = 0{,}05$ deb qabul qiling.

Javob: Zid bo'lmaydi. $(n = 500; m = 12; p_i = 1/12; i = 1,2,...,12)$

15. (Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirish) X miqdoriy alomatning statistik taqsimoti quyidagi jadvalda keltirilgan:

3.0-3.6	3.6-4.2	4.2-4.8	1.8-5.2	5.4-6.0	6.0-6.6	6.6-7.2
2	8	35	43	22	15	5

Ma'lumotlar X bosh to'plam taqsimotining normalligi haqidagi gipotezani qanoatlantiradimi? (Ishonchlilik darajasi $\alpha = 0{,}01$)

Javob: Qanoatlantiradi.

16. (Normal taqsimot haqidagi gipotezani tekshirish) χ^2 kriteriysidan foydalanib ($\alpha = 0{,}05$) hajmi 100 ga teng quyida keltirilgan tanlanmabosh to'plamning normalligi haqidagi gipotezaga muvofiqmi?

interval nomeri	Interval chegaralari		chastota
i	x_i	x_{iOl}	n_i
1	-20	.-10	20
2	-10	0	47
3	0	10	80
4	10	20	89
5	20	30	40
6	30	40	16
7	40	50	8
			$\sum n_i = 100$

Javob: Muvofiq.

ILOVALAR

1-jadval

e^{-x} funksiyasining qiymatlari

x	*exp(-x)*	*x*	*exp(-x)*	*x*	*exp(-x)*	*x*	*exp(-x)*
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,0	0,0498
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,2	0,0408
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,4	0,0334
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,423	3,6	0,0273
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,8	0,0224
0,10	0,905	0,50	0,607	0,90	0,407	4,0	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,2	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,4	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,6	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,8	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,0	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,301	5,2	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,4	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,6	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,8	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,0	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,2	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,4	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,6	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,8	0,0011
0,40	0,670	0.80	0,449	3,00	0,050	7,0	0,0009

$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ **funksiya qiymatlari**

m	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.6$
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1638	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198
4		0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030
5				0.0001	0.0002	0.0004
m	$\lambda=0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1.0$	$\lambda=2.0$	$\lambda=3.0$
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1879	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1680
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7				0.0001	0.0034	0.0216
8					0.0009	0.0081
9					0.0002	0.0027
10						0.0008
11						0.0002
12						0.0001
m	$\lambda=4.0$	$\lambda=5.0$	$\lambda=6.0$	$\lambda=7.0$	$\lambda=8.0$	$\lambda=9.0$
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572	0.0337
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.13.96	0.1318
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324
15		0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194
16		0.0001	0.0003	0.0015	0.0045	0.0109
17			0.0001	0.0006	0.0021	0.0058

Laplas funksiyasining qiymatlari $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ *3-jadval*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0395	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

$\varphi(x)=\varphi(-x)$; $x \geq 4$ lar uchun: $\varphi(x)=0$

Laplas integral funksiyasining qiymatlari

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0,96	0.3315
0,01	0.0040	0.33	0,1293	0,65	0,2422	0.97	0,3340
0,02	0.0080	0,34	0.1331	0.66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0.0120	0,35	0,1368	0,67	0.2486	0.99	0,3389
0.04	0,0160	0,36	0,1406	0.68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0.37	0,1443	0,69	0,2549	1.01	0,3438
0,06	0.0239	0,38	0,1480	0.70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0.0279	0.39	0,1517	0,71	0,2611	1.03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0.41	0,1591	0,73	0,2673	1.05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2704	1,06	0,3554
0.11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1.07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0.3621
0,14	0.0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0.0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0.58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3888
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0.60	0,2257	0,92	0,3212	1.24	0,3925
0,29	0.1141	0,61	0,2291	0.93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0.62	0,2324	0,94	0,3264	1.26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0,5$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0,4738	2.54	0.4945
1.29	0.4015	1.62	0,4474	1,95	0,4744	2.56	0,4948
1.30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2.58	0,4951
1,31	0.4049	1,64	0,4495	1.97	0,4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0.4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0.4959
1.34	0,4099	1.67	0,4525	2,00	0.4772	2.66	0,4961
1.35	0,4115	1,68	0.4535	2,02	0,4783	2.68	0,4963
1,36	0,4131	1.69	0,4545	2,04	0,4793	2.70	0,4965
1.37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0.4803	2,72	0,4967
1,38	0.4162	1.71	0,4564	2.08	0,4812	2.74	0.4969
1.39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0.4192	1,73	0.4582	2.12	0,4830	2.78	0,4973
1.41	0,4207	1.74	0,4591	2,14	0,4838	2.80	0,4974
1.42	0,4222	1.75	0.4599	2.16	0,4846	2.82	0,4976
1,43	0.4236	1,76	0,4608	2.18	0,4854	2,84	0,4977
1.44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2.86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2.22	0,4868	2.88	0,4980
1.46	0,4279	1.79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2.92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2.94	0,4984
1.49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2.96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0.4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3.20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0.49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1.56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4.25	0,499989
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	4,50	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938	4.75	0,499999
1,60	0,4452	1.93	0,4732	2,52	0,4941	5,00	0,500000

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $x > 5$ lar uchun: $\Phi(x) = 0{,}5$.

5-jadval

Styudent kriteriysining *t* qiymatlari $t_{\gamma} = t_{\gamma} = (\gamma, n)$

γ / n	0,90	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,90	0,95	0,99	0,999
5	2,131	2,776	4,604	8,61	20	1,729	2,093	2,861	3,883
6	2,015	2,570	4,032	6,86	25	1,711	2,064	2,797	3,745
7	1,943	2,446	3,707	5,96	30	1,699	0,045	2,756	3,659
8	1,894	2,364	3,499	5,41	35	1,688	2,032	2,729	3,600
9	1,859	2,306	3,355	5,04	40	1,683	2,023	2,708	4,558
10	1,833	2,262	3,249	4,78	45	1,679	2,016	2,692	3,527
11	1,812	2,228	3,169	4,59	50	1,675	2,009	2,679	3,502
12	1,795	2,201	3,106	4,44	60	1,671	2,001	2,662	3,464
13	1,782	2,178	3,054	4,32	70	1,666	1,996	2,649	3,439
14	1,770	2,160	3,012	4,22	80	1,664	1,991	2,640	3,418
15	1,761	2,144	2,976	4,14	90	1,662	1,987	2,633	3,403
16	1,753	2,131	2,946	4,07	100	1,660	1,984	2,627	3,392
17	1,745	2,119	2,921	4,02	120	1,657	1,980	2,617	3,374
17	1,739	2,109	2,898	3,97	∞	1,645	1,960	2,576	3,291
19	1,734	2,101	2,878	3,92					

6-jadval

$q = q\ (\gamma, n)$ qiymatlari

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
17	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Styudent taqsimotining kritik qiymatlari

Erkinlik darajasi k	Ishonchlik darajasi α (ikkiyoqlama test)					
	0,1	0.05	0.02	0.01	0.002	0,001
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.29	636.58
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31,60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6,87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1,89	2.36	3.00	3,50	4.79	5,41
8	1.86	2.31	2,90	3,36	4.50	5,04
9	1,83	2.26	2.82	3.25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2.76	3,17	4.14	4,59
11	1.80	2.20	2.72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2,98	3,79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.71	2,06	2,49	2.79	3.45	3,73
26	1,71	2.06	2.48	2.78	3.43	3,71
27	1.70	2.05	2.47	2,77	3,42	3,69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3,41	3.67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3.40	3,66
30	1,70	2.04	2.46	2,75	3.39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3.31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3.16	3,37
∞	1,64	1.96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Ishonchlilik darajasi α (biryoqlama test)					

8-jadval

Fisher taqsimotining kritik qiymatlari

(k_1 – katta dispersiyaning erkinlik darajasi)
(k_2 – kichik dispersiyaning erkinlik darajasi)

Ishonchlilik darajasi α=0.01												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42
3	34.12	30.82	29,46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27,34	27.23	27,13	27.05
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4,85	4.77	4.71
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4,74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4,50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	9.07	6.70	5.74	5,21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3,73	3.67
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3,68	3.59	3.52	3,46

Ishonchlilik darajasi α=0.05												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19,38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9,55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8,79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6,39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4,88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4,10	4.06	4.03	4.00
7	5,59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4,07	3.84	3.69	3.58	3,50	3.44	3.39	3.35	3,31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3,63	3.48	3.37	3.29	3,23	3,18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2,98	2,94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3,36	3.20	3.09	3.01	2.95	2,90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2,71	2.67	2.63	2,60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2,65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4,49	3.63	3.24	3.01	2,85	2.74	2.66	2.59	2,54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3,20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38

χ^2 taqsimotning kritik qiymatlari

$\chi^2_{\alpha,k}$ qiymati $P\left\{\chi^2_k > \chi^2_{\alpha,k}\right\} = \alpha$ shartdan topiladi

χ^2_k erkinlik darajasi — k ga teng «xi-kvadrat» taqsimot

Erkinlik darajasi k	Ishonchlilik darajasi α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6,635	5.024	3.841	0.00393	0.00098	0.00016
2	9.210	7.378	5.991	0.10259	0.05064	0.02010
3	11.345	9.348	7.815	0.35185	0.21579	0.11483
4	13,277	11.143	9.488	0.71072	0.48442	0.29711
5	15.086	12.832	11.070	1.145	0.831	0.554
6	16.812	14.449	12.592	1.635	1,237	0.872
7	18,475	16,013	14.067	2,167	1.690	1,239
8	20.090	17.535	15.507	2.733	2.180	1.647
9	21.666	19.023	16.919	3.325	2.700	2.088
10	23.209	20,483	18,307	3.940	3,247	2.558
11	24,725	21,920	19.675	4.575	3.816	3,053
12	26,217	23.337	21.026	5.226	4.404	3,571
13	27,688	24.736	22.362	5.892	5.009	4.107
14	29.141	26.119	23,685	6.571	5.629	4.660
15	30.578	27,488	24,996	7,261	6.262	5.229
16	32,000	28.845	26.296	7.962	6.908	5,812
17	33,409	30.191	27.587	8.672	7.564	6.408
18	34.805	31.526	28.869	9.390	8,231	7.015
19	36.191	32,852	30,144	10.117	8,907	7.633
20	37.566	34,170	31.410	10.851	9.591	8,260
21	38,932	35.479	32.671	11,591	10,283	8,897
22	40.289	36.781	33.924	12.338	10.982	9.542
23	41.638	38,076	35.172	13.091	11.689	10.196
24	42,980	39.364	36.415	13.848	12,401	10.856
25	44,314	40.646	37.652	14.611	13.120	11.524
26	45,642	41.923	38.885	15.379	13.844	12.198
27	46,963	43.195	40.113	16.151	14.573	12,878
28	48.278	44,461	41,337	16.928	15.308	13.565
29	49.588	45.722	42.557	17.708	16.047	14.256
30	50,892	46.979	43.773	18,493	16,791	14.953

10-*jadval*

$y = ln(x)$ funksiyasining qiymatlari

x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)
0,001	-6,908	0,200	-1,609	0,400	-0,916	0,600	-0,511	0,800	-0,223
0,005	-5,298	0,205	-1,585	0,405	-0,904	0,605	-0,503	0,805	-0,217
0,010	-4,605	0,210	-1,561	0,410	-0,892	0,610	-0,494	0,810	-0,211
0,015	-4,200	0,215	-1,537	0,415	-0,879	0,615	-0,486	0,815	-0,205
0,020	-3,912	0,220	-1,514	0,420	-0,868	0,620	-0,478	0,820	-0,198
0,025	-3,689	0,225	-1,492	0,425	-0,856	0,625	-0,470	0,825	-0,192
0,030	-3,507	0,230	-1,470	0,430	-0,844	0,630	-0,462	0,830	-0,186
0,035	-3,352	0,235	-1,448	0,435	-0,832	0,635	-0,454	0,835	-0,180
0,040	-3,219	0,240	-1,427	0,440	-0,821	0,640	-0,446	0,840	-0,174
0,045	-3,101	0,245	-1,406	0,445	-0,810	0,645	-0,439	0,845	-0,168
0,050	-2,996	0,250	-1,386	0,450	-0,799	0,650	-0,431	0,850	-0,163
0,055	-2,900	0,255	-1,366	0,455	-0,787	0,655	-0,423	0,855	-0,157
0,060	-2,813	0,260	-1,347	0,460	-0,777	0,660	-0,416	0,860	-0,151
0,065	-2,733	0,265	-1,328	0,465	-0,766	0,665	-0,408	0,865	-0,145
0,070	-2,659	0,270	-1,309	0,470	-0,755	0,670	-0,400	0,870	-0,139
0,075	-2,590	0,275	-1,291	0,475	-0,744	0,675	-0,393	0,875	-0,134
0,080	-2,526	0,280	-1,273	0,480	-0,734	0,680	-0,386	0,880	-0,128
0,085	-2,465	0,285	-1,255	0,485	-0,724	0,685	-0,378	0,885	-0,122
0,090	-2,408	0,290	-1,238	0,490	-0,713	0,690	-0,371	0,890	-0,117
0,095	-2,354	0,295	-1,221	0,495	-0,703	0,695	-0,364	0,895	-0,111
0,100	-2,303	0,300	-1,204	0,500	-0,693	0,700	-0,357	0,900	-0,105
0,105	-2,254	0,305	-1,187	0,505	-0,683	0,705	-0,350	0,905	-0,100
0,110	-2,207	0,310	-1,171	0,510	-0,673	0,710	-0,342	0,910	-0,094
0,115	-2,163	0,315	-1,155	0,515	-0,664	0,715	-0,335	0,915	-0,089
0,120	-2,120	0,320	-1,139	0,520	-0,654	0,720	-0,329	0,920	-0,083
0,125	-2,079	0,325	-1,124	0,525	-0,644	0,725	-0,322	0,925	-0,078
0,130	-2,040	0,330	-1,109	0,530	-0,635	0,730	-0,315	0,930	-0,073
0,135	-2,002	0,335	-1,094	0,535	-0,625	0,735	-0,308	0,935	-0,067
0,140	-1,966	0,340	-1,079	0,540	-0,616	0,740	-0,301	0,940	-0,062
0,145	-1,931	0,345	-1,064	0,545	-0,607	0,745	-0,294	0,945	-0,057
0,150	-1,897	0,350	-1,050	0,550	-0,598	0,750	-0,288	0,950	-0,051
0,155	-1,864	0,355	-1,036	0,555	-0,589	0,755	-0,281	0,955	-0,046
0,160	-1,833	0,360	-1,022	0,560	-0,580	0,760	-0,274	0,960	-0,041
0,165	-1,802	0,365	-1,008	0,565	-0,571	0,765	-0,268	0,965	-0,036
0,170	-1,772	0,370	-0,994	0,570	-0,562	0,770	-0,261	0,970	-0,030
0,175	-1,743	0,375	-0,981	0,575	-0,553	0,775	-0,255	0,975	-0,025
0,180	-1,715	0,380	-0,968	0,580	-0,545	0,780	-0,248	0,980	-0,020
0,185	-1,687	0,385	-0,955	0,585	-0,536	0,785	-0,242	0,985	-0,015
0,190	-1,661	0,390	-0,942	0,590	-0,528	0,790	-0,236	0,990	-0,010
0,195	-1,635	0,395	-0,929	0,595	-0,519	0,795	-0,229	0,995	-0,005
0,200	-1,609	0,400	-0,916	0,300	-1,204	0,800	-0,223	1,000	0,000

Foydalanilgan adabiyotlar

1. А.С.Расулов, Г.Раимова «Теория вероятностей и математическая статистика", Учебное пособие, Ташкент, Издательство УМЭД, 2002 г.

2. В.Е.Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика», Москва, «Высшая школа», 1977 г.

3. В.Е.Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике», Москва, «Высшая школа», 1970 г.

4. Г.И.Агапов «Задачник по теории вероятностей», Москва, «Высшая школа», 1986 г.

5. «Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике» под редакцией А.А.Свешникова, Москва, «Наука», 1977 г.

6. «Теория статистики с основами теории вероятностей» под редакцией члена корр. РАН И.И.Елисеевой, Москва, «ЮНИТИ», 2001 г.

7. Н.Ш.Кремер. «Теория вероятностей и математическая статистика» Учебник для ВУЗов, Москва, «ЮНИТИ», 2001 г.

MUNDARIJA

A.S.RASULOV, G.M.RAIMOVA, X.K.SARIMSAKOVA

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

O'quv qo'llanma

Nashr uchun mas'ul *M.Tursunova*
Muharrir *A.Bahramov*
Musahhih *H. Zokirova*
Sahifalovchi *Z.Boltayev*

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.
700029, Toshkent shahri, Buyuk Turon ko'chasi, 41-uy.

Terishga berildi 4.10.2006. Bosishga ruxsat etildi. 6.11.2006. Ofset usulida chop etildi. Qog'oz bichimi 60x84 1/16. Shartli bosma tabog'i 17,0. Nashr bosma tabog'i 17.0. Adadi 2000 nusxa.
Buyurtma №72 . Bahosi shartnoma asosida.

MCHJ «Ma'rifat Print» bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent sh., Chilonzor tumani,
So'galli Ota ko'chasi, 7ª-uy.