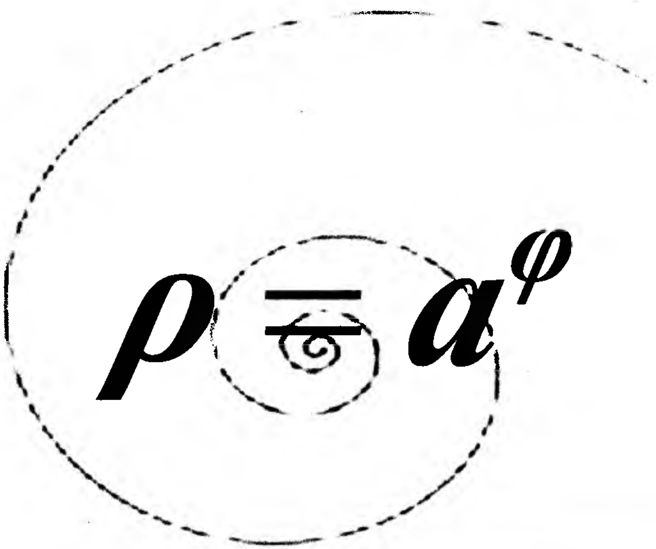
N. M. JABBOROV, E. O. ALIQULOV, Q. S. AXMEDOVA

OLIY MATEMATIKA



$$\rho = a^{\varphi}$$

Тлеймуратов С

N.M.Jabborov, E.O.Aliqulov, Q.S.Axmedova

OLIY MATEMATIKA

(bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari
uchun o'quv qo'llanma)

Qarshi
"Qarshi davlat universiteti" nashriyoti
2010

Mazkur o'quv qo'llanma bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda oliy algebra elementlari, analitik geometriya, ketma-ketliklar nazariyasi, bir o'zgaruvchili funksiyalar differensial va integral hisobining asoslari hamda qatorlar nazariyasi bayon qilingan.

Taqrizchilar:

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti Matematik analiz kafedrasi professori
X.T. Mansurov

Toshkent To'qimachilik va Yengil Sanoat instituti Oliy matematika kafedrasi mudiri, professor
A. Z. Mamatov

SO‘Z BOSHI

Oliy o‘quv yurtlarida oliy matematika, yo‘nalishlarga qarab u yoki bu hajmda o‘qitiladi. Oliy matematikani o‘qitishdan ko‘zlangan asosiy maqsad: bir tomondan shu fanning asosiy tushunchalari, tasdiqlari, turli usullari hamda, boshqa matematik ma’lumotlar bilan tanishtirish bo‘lsa, ikkinchi tomondan amaliy masalalarni matematik usullar yordamida yechishga o‘rgatishdan iborat. Ayni paytda talabalarni mantiqiy fikrlashga o‘rgatish ham oliy matematikaning vazifalaridan biri hisoblanadi.

O‘zbekistonda kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish jarayonida talabalarni o‘quv materiallari bilan, ayniqsa darslik va o‘quv qo‘llanmalari bilan ta’minlash muhim ahamiyatga ega.

Oliy matematika kursi bo‘yicha turli darajada yozilgan va maqsad hamda yo‘nalishlari xilma-xil bo‘lgan qator darslik va o‘quv qo‘llanmalari mavjud. Ammo davlat ta’lim standartlari o‘quv dasturlarini zamon talablariga moslashtirishni va qayta ko‘rib chiqishni taqozo etadi.

Mazkur qo‘llanma davlat ta’lim standartlari asosida yozilgan bo‘lib, u ma’lum tartibda ma’ruza va paragraflarga ajratilib bayon etilgan.

Oliy matematikada o‘rganiladigan mavzularni hajmi katta bo‘lmagan ma’ruza va paragraflar bo‘yicha yozilishi talabalarga mavzu mazmuni va mohiyatini chuqurroq anglashga yordam beradi deb o‘ylaymiz.

Ushbu qo‘llanma 53 ta ma’ruzadan iborat bo‘lib, ularda sonlar o‘qi, Dekart va qutb koordinatalari sistemasi, determinantlar va matritsalar, ular yordamida tenglamalar sistemasini yechish, vektorlar va kompleks sonlar, tekislikda to‘g‘ri chiziq va uning turli ko‘rinishdagi tenglamalari, ikkinchi tartibli egri chiziqlar, bir o‘zgaruvchili funksiya, uning hosila va differensiallari, Teylor formulasi, differensial hisobning tatbiqlari, funksiyaning aniqmas va aniq integrallari, aniq integralning tatbiqlari, qatorlar, fazoda koordinatalar sistemasi, fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq, ikkinchi tartibli sirtlar, fazoda vektorlar va ularning ba’zi tatbiqlari, vektorlar analizining elementlari, ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti, uzluksizligi, hosila va differensiallari, karrali integrallar, birinchi tartibli va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, egri chiziqli integrallar, sirt integrallari, maydonlar nazariyasining elementlari, matematik fizikaning ba'zi bir tenglamalari, ehtimollar nazariyasining asoslari mavzulari bayon etilgan.

Dastlabki ma'ruzalarda haqiqiy sonlar, tenglamalar va tengsizliklar haqida qisqacha ma'lumotlar keltirildi. Ular, fikrimizcha "elementar matematika"dan oliy matematikaga o'tishda "ko'prik" vazifasini bajaradi.

Qo'llanmani yozishda biz quyidagilarga:

1) har bir mavzuning ravon, ixcham, matematik qat'iylik bilan bayon etilishiga;
2) mavzularning bir-biriga uzviy bog'liklikda, ma'lum ketma-ketlikda, kerakli isbotlar bilan yoritilishiga;
3) turli amaliy masalalarni yechishda matematik usullarning tatbiqlariga e'tiborni qaratdik.

Ma'lumki, oliy matematikaning turli sohalarga tatbiq doirasi nihoyatda keng. Ayniqsa, fizika, mexanika masalalarini, shuningdek texnik hamda iqtisod masalalarini yechishda matematik usullardan har doim foydalaniladi.

Kitobda oliy matematikaning tatbiqlariga misol va masalalar qisman keltirilgan bo'lib, mualliflarning rejalariga ko'ra yoziladigan «Oliy matematikadan masalalar to'plami» da kengroq va batafsil to'xtab o'tilish ko'zda tutilgan. Shuni ham aytish kerakki, ko'p yillar davomida mualliflarning mazkur kurs bo'yicha o'qigan ma'ruzalari kitobni yozish jarayonida katta yordam berdi.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib, uni ilmiy va uslubiy jihatdan yaxshilanishiga o'z hissasini qo'shgan O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti "Matematik analiz" kafedrasi professori X.T.Mansurovga mualliflar tashakkur izhor etadilar.

Mualliflar

1-MA'RUZA

Haqiqiy sonlar
Haqiqiy sonlar to'plami.
Haqiqiy sonning absolyut qiymati

Son tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular

1) natural sonlar (1,2,3,...),
2) butun sonlar (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) ratsional sonlar (oddiy va o'nli kasrlar),
4) irratsional sonlar

bo'lishi mumkin. Bunday sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o'quvchiga maktab, kollej va litseylarda o'qitiladigan matematika fanidan ma'lum.

Oliy matematika kursi davomida ko'p hollarda haqiqiy sonlarga duch kelamiz. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

1.1. Ratsional va irratsional sonlar

Ma'lumki, $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p - butun son, q-esa natural son bo'lib, ular o'zaro tub, ya'ni $(p,q)=1$. Ravshanki, oddiy kasrlar ratsional son bo'ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman 10 ning natural darajalari (10^n) bo'lsa, bunday oddiy kasr o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$$\frac{3}{2},\ \frac{1}{17},\ \frac{23}{11},\ -\frac{8}{9}$$ - oddiy kasrlar,

$$\frac{7}{10}=0,7,\ \frac{112}{10}=11,2,\ \frac{23}{100}=0,23$$ - o'nli kasrlar bo'ladi.

tartibli va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, egri chiziqli integrallar, sirt integrallari, maydonlar nazariyasining elementlari, matematik fizikaning ba'zi bir tenglamalari, ehtimollar nazariyasining asoslari mavzulari bayon etilgan.

Dastlabki ma'ruzalarda haqiqiy sonlar, tenglamalar va tengsizliklar haqida qisqacha ma'lumotlar keltirildi. Ular, fikrimizcha "elementar matematika"dan oliy matematikaga o'tishda "ko'prik" vazifasini bajaradi.

Qo'llanmani yozishda biz quyidagilarga:

1) har bir mavzuning ravon, ixcham, matematik qat'iylik bilan bayon etilishiga;
2) mavzularning bir-biriga uzviy bog'liklikda, ma'lum ketma-ketlikda, kerakli isbotlar bilan yoritilishiga;
3) turli amaliy masalalarni yechishda matematik usullarning tatbiqlariga e'tiborni qaratdik.

Ma'lumki, oliy matematikaning turli sohalarga tatbiq doirasi nihoyatda keng. Ayniqsa, fizika, mexanika masalalarini, shuningdek texnik hamda iqtisod masalalarini yechishda matematik usullardan har doim foydalaniladi.

Kitobda oliy matematikaning tatbiqlariga misol va masalalar qisman keltirilgan bo'lib, mualliflarning rejalariga ko'ra yoziladigan «Oliy matematikadan masalalar to'plami» da kengroq va batafsil to'xtab o'tilish ko'zda tutilgan. Shuni ham aytish kerakki, ko'p yillar davomida mualliflarning mazkur kurs bo'yicha o'qigan ma'ruzalari kitobni yozish jarayonida katta yordam berdi.

Kitob qo'lyozmasini sinchiklab o'qib, uni ilmiy va uslubiy jihatdan yaxshilanishiga o'z hissasini qo'shgan O'zbekiston Milliy universiteti Mexanika-matematika fakulteti "Matematik analiz" kafedrasi professori X.T.Mansurovga mualliflar tashakkur izhor etadilar.

Mualliflar

1-MA'RUZA

Haqiqiy sonlar
Haqiqiy sonlar to'plami.
Haqiqiy sonning absolyut qiymati

Son tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular

1) natural sonlar (1,2,3,...),
2) butun sonlar (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) ratsional sonlar (oddiy va o'nli kasrlar),
4) irratsional sonlar

bo'lishi mumkin. Bunday sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o'quvchiga maktab, kollej va litseylarda o'qitiladigan matematika fanidan ma'lum.

Oliy matematika kursi davomida ko'p hollarda haqiqiy sonlarga duch kelamiz. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

1.1. Ratsional va irratsional sonlar

Ma'lumki, $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p - butun son, q-esa natural son bo'lib, ular o'zaro tub, ya'ni $(p,q)=1$. Ravshanki, oddiy kasrlar ratsional son bo'ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman 10 ning natural darajalari (10^n) bo'lsa, bunday oddiy kasr o'nli kasr deyiladi. Masalan,

$$\frac{3}{2},\ \frac{1}{17},\ \frac{23}{11},\ -\frac{8}{9}$$ - oddiy kasrlar,

$$\frac{7}{10}=0,7,\ \frac{112}{10}=11,2,\ \frac{23}{100}=0,23$$ - o'nli kasrlar bo'ladi.

$\frac{p}{q}$ ratsional son – oddiy kasr berilgan bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q natural songa bo'lamiz. Agar bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayoni to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi.

p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etib, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrashi, so'ng undan oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Odatda, bunday o'nli kasr cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri deyiladi.

Masalan, $\frac{53}{36}$ ratsional son $1,4722... = 1,47(2)$ o'nli kasrga keladi. Bu cheksiz davriy o'nli kasr bo'lib, uning davri 2 ga teng: $\frac{53}{36} = 1,47(2)$.

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son chekli o'nli kasr yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali ifodalanadi.

Aksincha, har qanday chekli o'nli kasrni yoki cheksiz davriy o'nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishida ifodalash mumkin.

Masalan,

$$1,03 = 1\frac{3}{100} = \frac{103}{100},$$

$$0,(3) = 0,3333... = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

(bunda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisini topish formulasidan foydalanildi) bo'ladi.

Demak, har qanday chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalaniladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Ammo cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ham mavjud. Masalan,

$$1{,}1010010001..., \qquad 1{,}4142135..., \qquad 2{,}7182818...$$

sonlar cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlar bo'ladi (bu sonlardan ikkinchisi $\sqrt{2}$ ni, uchinchisi esa e sonini ifodalaydi). Ravshanki, bu sonlar ratsional sonlar bo'lmaydi.

Ta'rif. *Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr irratsional son deyiladi.* Masalan,

$$1{,}4142135... = \sqrt{2}, \qquad 3{,}141583... = \pi, \qquad 2{,}718281... = e$$

sonlar irratsional sonlardir.

1.2. Haqiqiy son. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

Ta'rif. *Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.*

Masalan,

$$2, \ 7\frac{1}{2}, \ -3, \ \sqrt{2}, \ \pi,$$

sonlar haqiqiy sonlardir.

Odatda, matematikada turli matematik obyektlarni, jumladan haqiqiy sonlarni, alohida-alohida o'rganilmasdan, ularning bir nechtasini birgalikda o'rganiladi. Bu to'plam tushunchasiga olib keladi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, uni narsalarning ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, 2, 4, 6 sonlardan tashkil topgan to'plam, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan to'plam deyilishi mumkin. To'plamni tashkil etgan narsalarni uning elementlari deyiladi.

Biz haqiqiy sonlardan tashkil topgan to‘plamlarni qaraymiz. Ular sonli to‘plamlar deyiladi. Bundan keyin sonli to‘plam deyish o‘rniga qisqacha to‘plam deb atayveramiz.

Matematikada to‘plamlar bosh harflar bilan uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, \ldots$ to‘plamlar, $a, b, \ldots$ to‘plam elementlari.

Agar a biror A to‘plamning elementi bo‘lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to‘plamga tegishli» deb o‘qiladi. Agar a shu A to‘plamga tegishli bo‘lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to‘plamga tegishli emas» deb o‘qiladi.

Odatda, barcha natural sonlardan iborat to‘plamni N harfi:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

barcha butun sonlardan iborat to‘plamni Z harfi:

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

barcha ratsional sonlardan iborat to‘plamni Q harfi:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z,\ q \in N,\ (p, q) = 1 \right\},$$

barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plamni R harfi bilan belgilanadi.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u chekli to‘plam, aks holda cheksiz to‘plam deyiladi.

Masalan,

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

chekli to‘plam,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

cheksiz to‘plam bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, to‘plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir-biriga teng bo‘lgan elementlar to‘plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi.

Aytaylik, ikki E va F to‘plamlari berilgan bo‘lsin. Agar E to‘plamning barcha elementlari F to‘plamga tegishli bo‘lsa, E

to'plam F to'plamning qismi deyiladi va $E \subset F$ kabi yoziladi. Masalan,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

bo'ladi.

Agar $E \subset F$ va $F \subset E$ bo'lsa, E va F bir-biriga teng to'plamlar deyiladi va $E = F$ kabi yoziladi.

E va F to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlar yig'indisi (birlashmasi) deyiladi va $E \cup F$ kabi belgilanadi. E va F to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam, bu to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $E \cap F$ kabi yoziladi. E to'plamning F to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam E to'plamdan F to'plamning ayirmasi deyiladi va $E \setminus F$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 5, 8, 11, 13\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

to'plamlar uchun

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\},$$

$$A \cap B = \{2, 8\},$$

$$A \setminus B = \{1, 5, 11, 13\},$$

$$B \setminus A = \{4, 6, 10, 12\},$$

shuningdek,

$$N \cup Z = Z, \quad N \cap Z = N, \quad Z \setminus N = \{\ldots -3, -2, -1, 0\}$$

bo'ladi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Odatda, chekli A to'plam elementlari soni $m(A)$ orqali belgilanadi.

1-misol. *Dunyo okeanida 19 ta suvosti chuqurliklari ma'lum, ularning chuqurligi 7 km. dan oshadi. Ulardan 16 tasi*

Tinch va Hind okeanlarida, 4 tasi Hind va Atlantika okeanlarida. Har bir okeanda nechtadan suvosti chuqurliklari bor?

Yechilishi. A to'plam bilan Tinch va Hind okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini, B to'plam bilan Hind va Atlantika okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra $m(A)=16$, $m(B)=4$ bo'ladi. Ayni paytda $m(A\cup B)=19$ ekanligi ma'lum. Ravshanki Hind okeanidagi suvosti chuqurligi $A\cap B$ to'plamni tashkil etadi. Bu to'plamning elementlari quyidagicha topiladi:

$$m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)=16+4-19=1.$$

Shunday qilib, Hind okeanida 1 ta, Tinch okeanida 15 ta, Atlantika okeanida 3 ta suvosti chuqurliklari bor ekan.

Endi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan R to'plamning xossalarini keltiramiz:

1) R *to'plamda (to'plam elementlari orasida) qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari kiritilgan bo'lib, bu amallarning bajarilish qoidalari ham o'rinli bo'ladi*;

2) R *to'plamda (to'plam elementlari orasida) teng, katta, kichik tushunchalari kiritilgan. Ixtiyoriy* $a\in R$, $b\in R$, $c\in R$ *haqiqiy sonlar uchun*

$$a=b,\ yoki\ a>b,\ yoki\ a<b$$

bo'lib, $a<b$, $b<c$ *bo'lishidan* $a<c$ *bo'lishi kelib chiqadi*;

3) R *zich to'plam bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy* $a\in R$, $b\in R$ *haqiqiy sonlar uchun* $a\neq b$ *bo'lsa, u holda* a *va* b *sonlar orasida istalgancha haqiqiy son bo'ladi.*

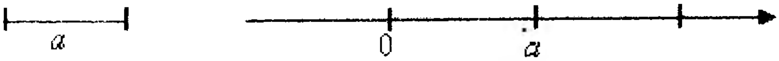
2 – misol. *Agar* r *- ratsional,* α *- irratsional son bo'lsa,* $r+\alpha$ *sonning irratsional son bo'lishi isbotlansin.*

Yechilishi. Berilgan r va α sonlarning yig'indisini β deylik: $\beta=r+\alpha$. Ravshanki, bu tenglikdan $\alpha=\beta-r$ bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, β ratsional son bo'lsin. Unda $\beta-r$ soni, ikki ratsional son ayirmasi yana ratsional son bo'lganligi uchun ratsional son bo‘ladi: $\beta - r = \alpha$ ratsional son. Bu esa berilishiga ko‘ra α ning irratsional son bo‘lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga β ning ratsional son bo‘lsin deyilishi sabab bo‘ldi. Demak, β irratsional son.

1.3. Sonlar o‘qi. Sonlarni geometrik tasvirlash

To‘g‘ri chiziq va bu to‘g‘ri chiziqda biror nuqta olib, uni O harfi bilan belgilaymiz (1-chizma).



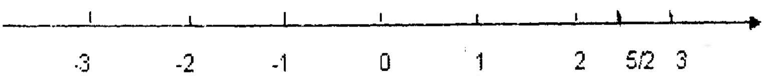
1-chizma

Bu O nuqta nol sonining geometrik tasviri deyiladi. O nuqta to‘g‘ri chiziqni ikki nurga ajratadi. O nuqtadan o‘ng tomondagi nurning yo‘nalishini musbat, chap tomondagi nurning yo‘nalishini manfiy deb qaraymiz. So‘ng o‘lchov birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni olamiz.

Natijada yo‘nalishga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq, O nuqta va o‘lchov birliklaridan iborat sistema hosil bo‘ladi. Uni sonlar o‘qi deyiladi.

O‘lchov birligi deb qabul qilingan a kesmani O nuqtadan boshlab, sonlar o‘qining o‘ng tomoniga joylashtira boramiz. Uni bir marta joylashtirganda bir uchi O nuqtada bo‘lib, ikkinchi uchi aniqlagan nuqta 1 sonining geometrik tasviri bo‘ladi. Shu tarzda birlik kesmani ikki marta, uch marta va h.k. marta joylashtirib sonlar o‘qida 2, 3 va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari topiladi.

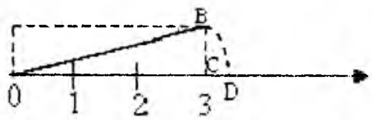
Xuddi shunday usul bilan birlik kesmani O nuqtadan chap tomondagi nurga joylashtira borib -1, -2, -3, va h.k. sonlarning geometrik tasvirlari aniqlanadi (2-chizma).



2-chizma

Aytaylik, qaralayotgan son ratsional son bo'lsin: masalan, $\frac{5}{2}$. Bu sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avval o'lchov birligini O nuqtadan o'ng tomonga ikki marta joylashtirib, ikki sonni tasvirlovchi nuqta topiladi, so'ngra bu nuqtadan boshlab o'lchov birligining $\frac{1}{2}$ qismini qo'yib, $\frac{5}{2}$ sonni geometrik ifodalovchi nuqta topiladi (2-chizma).

Umuman ratsional sonlar to'plami Q dan olingan har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta mos keladi. Biroq, sonlar o'qida shunday nuqtalar borki, ular birorta ham ratsional sonning tasviri bo'lmaydi. Masalan, $\sqrt{10}$ sonini olaylik (bu son irratsional son bo'ladi). Tomonlari 3 va 1 ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni qaraymiz (3-chizma).



3-chizma

Bu to'g'ri to'rtburchakning OB diagonali, Pifagor teoremasiga ko'ra $OB^2 = OC^2 + BC^2$ bo'lib, $OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ bo'ladi. Sirkulning uchini O nuqtaga qo'yib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizilsa, bu aylana sonlar o'qini D nuqtada kesadi. Ravshanki, $OB = OD$.

Demak, $\sqrt{10}$ soni geometrik tasvirlovchi nuqta D nuqta bo'ladi.

Sonlar o'qida shu kabi nuqtalar cheksiz ko'p bo'lib, ular irratsional sonlarning geometrik tasvirlari bo'ladi. Ma'lumki, barcha ratsional hamda barcha irratsional sonlardan tashkil topgan to'plam haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, u R harfi bilan belgilangan edi.

Ko'rsatish mumkinki, (u maxsus adabiyotlarda, masalan [2] da isbotlangan) har bir haqiqiy songa sonlar o'qida bitta nuqta va aksincha, sonlar o'qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi. Bu haqiqiy sonlar to'plami R bilan sonlar o'qining nuqtalari to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Kelgusida to'g'ri chiziqning nuqtasi deganda haqiqiy sonni, haqiqiy son deganda to'g'ri chiziqning nuqtasini tushunamiz.

Endi ba'zi-bir sonlar to'plamlarini keltiramiz, ulardan, kelgusida ko'p foydalaniladi.

Aytaylik, $a \in R$, $b \in R$ sonlar berilgan bo'lib, $a < b$ bo'lsin.

a, b va ular orasidagi barcha haqiqiy sonlardan tashkil topgan to'plam segment deyiladi va $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, to'plamlar quyidagicha ta'riflanadi:

$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\} \text{ - interval,}$$

$$[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\} \text{ - yarim interval,}$$

$$(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\} \text{ - yarim interval.}$$

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ va $(a,b]$ to'plamlarning chegaralari deyiladi. Shuningdek

$$[a,+\infty) = \{x \in R : x \ge a\},$$

$$(-\infty,a) = \{x \in R : x < a\},$$

$$(-\infty,+\infty) = R$$

deb qaraymiz.

1.4. Sonning absolyut qiymati va uning xossalari

Biror x haqiqiy sonni $(x \in R)$ qaraylik. Bu son musbat $(x > 0)$, manfiy $(x < 0)$ yoki $x = 0$ bo'lishi mumkin.

Agar $x>0$ bo'lganda shu x ga teng, $x<0$ bo'lganda shu songa qarama-qarshi $-x$ ga, $x=0$ bo'lganda 0 ga teng bo'ladigan son x ning absolyut qiymati deyiladi va $|x|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & agar \quad x \geq 0, \\ -x, & agar \quad x < 0. \end{cases}$$

Masalan, $|7|=7$, $|-2|=-(-2)=2$, $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$.

Sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$|x| \geq 0, \ |x|=|-x|, \ x \leq |x|, \ -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli,

2) Agar x haqiqiy son

$$|x| \leq a \quad (a>0)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u

$$-a \leq x \leq a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

3) Agar x haqiqiy son

$$|x| > a$$

tengsizlik qanoatlantirsa, u

$$x>a, \ x<-a$$

tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha.

4) Ikki x va y haqiqiy sonlar uchun

a) $|x+y| \leq |x|+|y|$,

b) $|x-y| \geq |x|-|y|$,

d) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

e) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

bo'ladi.

5) Ushbu

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

munosabat o‘rinli.

3-Misol *Agar* a,b,c *haqiqiy sonlar uchun* $a>b>c$ *bo‘lsa,*

$$|a-b|+|c-a|-|b-c|$$

topilsin.

Yechilishi. Ravshanki, $a>b$ bo‘lgani uchun $a-b>0$ bo‘lib,

$$|a-b|=a-b$$

bo‘ladi, $a>c$ bo‘lgani uchun $c-a<0$ bo‘lib,

$$|c-a|=-(c-a)=a-c$$

bo‘ladi, $b>c$ bo‘lgani uchun $b-c>0$ bo‘lib

$$|b-c|=b-c$$

bo‘ladi. Demak,

$$|a-b|+|c-a|-|b-c|=a-b+a-c-(b-c)=2(a-b).$$

1.5. Matematik belgilar

Matematikada tez-tez uchraydigan so‘z va so‘z birikmalari o‘rnida maxsus belgilar ishlatiladi:

1) «agar ... bo‘lsa, u holda ... bo‘ladi iborasi «$\Rightarrow$» belgi orqali yoziladi;

2) ikki fikrning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgi orqali yoziladi;

3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so‘zlari o‘rniga «$\forall$» belgi ishlatiladi;

4) «mavjudki», «topiladiki» so‘zlari o‘rniga «$\exists$» belgi ishlatiladi.

Shuningdek, tasdiqlarning isboti boshlanganligi «◀» belgi, tugaganligi esa «▶» belgi orqali ifodalanadi.

Mashqlar

1. 80 ta matematika olimpiada qatnashchilardan 60 tasi shaxmat ishqibozi, 50 tasi shashka ishqibozi va 40 tasi shashka va shaxmat ishqibozlari. Olimpiada qatnashchilarning qanchasi bu o‘yinlarga befarq emas.

2. Ma’lumki, ikki radiusdan tashkil topgan α markaziy burchak tortib turgan yoyning uzunligi $l = R\alpha$ (α radian o‘lchovda) bo‘ladi. Yer sharining ekvatorida 1^0 burchak tortib turgan yoy uzunligi topilsin (yer sharining ekvator radiusi $R = 6300$ km deb olinadi).

3. Biologiyada o‘rganiladigan bir hujayrali hayvonlar har minutda har biri ikkiga bo‘linib ko‘payadi. Agar bitta olingan bunday hayvon 100 minutda ko‘payib, ularning soni n taga yetsa, dastlab olingan ikkita hayvonning ko‘payib, ularning soni ham n taga yetishi uchun qancha vaqt kerak bo‘ladi?

4. A to‘plam 3 ga bo‘linuvchi barcha natural sonlar to‘plami, B esa 5 ga bo‘linuvchi barcha natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $A \cap B$ to‘plam qanday bo‘ladi?

5. $A = \{x \in N | 2 < x \leq 6|\}$, $B = \{x \in N | 1 < x < 4|\}$ va $C = \{x \in N | x^2 - 4 = 0|\}$ bo‘lsa,

1) $B \cup C$ 2) $A \cap B \cap C$ 3) $A \cup B \cup C$ 4) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$ to‘plamlar topilsin.

2-MA'RUZA

Tenglamalar va tengsizliklar

Oliy matematikaning turli sohalaridagi masalalari, ko'p hollarda tenglama va tengsizliklarni yechish bilan hal qilinadi.

Odatda, berilgan tenglama va tengsizliklar, ularga teng kuchli, ayni paytda soddaroq bo'lgan tenglama va tengsizliklar bilan almashtiriladi. Ularni yechib, berilgan tenglama va tengsizliklarning yechimlari topiladi.

2.1. Chiziqli va kvadrat tenglamalar

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan birinchi darajada bo'lgan tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax+b=0 \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda a va b berilgan sonlar.

(1) tenglama:

1) $a \neq 0$ bo'lganda yagona $x=-\dfrac{b}{a}$ yechimga ega bo'ladi,

2) $a=0, \quad b=0$ bo'lganda yechimlari cheksiz ko'p (ixtiyoriy son tenglamaning yechimi) bo'ladi.

3) $a=0, \quad b \neq 0$ bo'lganda yechimga ega bo'lmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$\frac{2x-5}{4}+\frac{2x+1}{3}+x=\frac{x}{4}+2$$

tenglama yechilsin.

◀Bu tenglamaning har ikki tomonini 4 va 3 sonlarining eng kichik umumiy karralisi 12 ga ko'paytirib

$$12\cdot\frac{2x-5}{4}+12\cdot\frac{2x+1}{3}+12x=12\cdot\frac{x}{4}+24,$$

ya'ni

$$3(2x-5)+4(2x+1)+12x=3x+24$$

bo'lishini topamiz.

Soddalashtirish natijasida keyingi tenglik quyidagi

$$6x-15+8x+4+12x=3x+24,$$

ya'ni

$$23x=35$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki, bu tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lib, uning yechimi $x=\frac{35}{23}$ bo'ladi.▶

Ma'lumki, noma'lumga nisbatan ikkinchi darajada bo'lgan tenglama kvadrat tenglama deyiladi. Bu tenglama sodda holda ushbu

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunda a,b,c berilgan sonlar bo'lib, kvadrat tenglamaning koeffitsiyentlari deyiladi.(2) tenglamaning yechimi, uning diskriminanti

$$D=b^2-4ac$$

ga bog'liq:

1) agar $D>0$ bo'lsa, (2) tenglama ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

bo'ladi;

2) agar $D=0$ bo'lsa, (2) tenglama bitta haqiqiy yechimga ega bo'lib,

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

bo'ladi;

3) agar $D<0$ bo'lsa, (2) tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. *Ushbu*

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

tenglama yechilsin.

◀Ravshanki, $2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)$. Berilgan tenglamaning har ikki tomonini ($x\neq -4$, $x\neq \frac{1}{2}$) $(x+4)(2x-1)$ ga ko'paytirib topamiz:

$$2x^2+7x-4+\frac{2x}{x+4}\cdot(x+4)(2x-1)+$$

$$+\frac{27(2x^2+7x-4)}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}(x+4)(2x-1).$$

Natijada

$$2x^2+7x-4+4x^2-2x+27=6x+24$$

bo'lib,

$$6x^2-x-1=0$$

bo'ladi. Bu tenglamani yechib

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12},$$

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{3}$ bo'lishini topamiz. Biroq, $x=\frac{1}{2}$ da qaralayotgan tenglama ma'noga ega emas. Demak, berilgan tenglamaning yechimi $x=-\frac{1}{3}$ bo'ladi.▶

2.2. Determinantlar va ularning xossalari

Matematikaning qator masalalarini yechishda ma'lum xossalarga ega bo'lgan ifodalardan foydalaniladi. Bunday maxsus ifodalardan biri determinantlardir.

Aytaylik, 4 ta a,b,c,d haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu $ad-bc$ ayirma (son)ni berilgan sonlarni yo'l va ustun ko'rinishida joylashtirib, quyidagicha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ifodalaymiz. Demak,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad (3)$$

(3) ifoda 2-tartibli determinant deyiladi. Bunda a,b,c,d - determinantning elementlari, a,b va c,d sonlar mos ravishda determinantning birinchi va ikkinchi yo'llari, a,c va b,d sonlar determinantining mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlari, a,d sonlar determinantning bosh diagonali, b,c sonlar determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Odatda determinantning elementlarini ikkita indeks qo'yilgan harflar bilan belgilanadi. Bunda birinchi indeks yo'lni, ikkinchisi esa ustunni bildiradi. Masalan, a_{21} son determinantning ikkinchi yo'l birinchi ustunida turgan element bo'ladi.

Ikkinchi tartibli determinant ta'rifiga ko'ra

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 - 5 \cdot 7 = -6 - 35 = -41,$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ning asosiy xossalarini keltiramiz:

1) *Determinant yo'li ustuni bilan almashtirilsa, shuningdek ustunini yo'li bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.*

   Bu xossaning isboti determinant ta'rifidan kelib chiqadi.

2) *Determinantning yo'lini o'zaro almashtirilsa, uning ishorasi o'zgaradi:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

◀Ravshanki,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\left(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}\right) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. ▶$$

3) Determinantning biror yo'lida turgan barcha elementlarni biror o'zgarmas k songa ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko'payadi:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

◀Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bo'ladi. ▶

4) Determinantning bir yo'lidagi elementlari ikkinchi yo'lidagi elementlariga proporsional bo'lsa, determinant 0 ga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

◀Bu tenglik determinant ta'rifidan kelib chiqadi. ▶

5) Determinantning bir yo'lidagi elementlarni biror songa ko'paytirib, ikkinchi yo'lidagi mos elementlarga qo'shilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

◀Determinant ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}\left(a_{11} + ka_{21}\right) - a_{21}\left(a_{12} + ka_{22}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} + ka_{22}\cdot a_{21} - a_{21}a_{12} - ka_{21}a_{22} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. ▶$$

Endi uchinchi tartibli determinant tushunchasini keltiramiz.

Aytaylik, 9 ta $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar berilgan bo‘lsin. Bu sonlarni uchta yo‘l, uchta ustun tarzida joylashtirib yozilishidan hosil bo‘lgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ifoda uchinchi tartibli determinant deyiladi. Uchinchi tartibli determinant son bo‘lib, uning qiymati

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ga teng bo‘ladi. Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Masalan, ushbu

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinant ta’rifiga binoan

$$d = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 2(-2) + 3\cdot(-1) = 0$$

ga teng bo‘ladi.

Uchinchi tartibli determinantlarda ham determinant elementlari, yo‘llari, ustunlari, bosh va yordamchi diagonallari tushunchalari xuddi ikkinchi tartibli determinantlardagi kabi kiritiladi. Shuningdek, uchinchi tartibli determinant ham, ikkinchi tartibli determinant singari xossalarga ega bo‘ladi.

Faraz qilaylik, biror

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

uchinchi tartibli determinant berilgan bo‘lsin. Bu determinantning biror a_{ik} $(i=1,2,3;\quad k=1,2,3)$ elementini olib, shu element joylashgan yo‘lni hamda ustunni o‘chiramiz. Ravshanki, qolgan elementlari ikkinchi tartibli determinantni hosil qiladi. Bu determinantga a_{ik} elementning minori deyiladi va u M_{ik} kabi belgilanadi.

Masalan, (4) determinantning a_{31} element turgan yo‘lni hamda ustunni o‘chirish

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

natijasida ikkinchi tartibli ushbu

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo‘ladi. Bu (4) determinantning a_{31} elementi minori bo‘ladi. Ravshanki, (4) determinant 9 ta minorga ega.

Ushbu

$$(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}$$

miqdor (4) determinant a_{ik} elementining algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi. U A_{ik} orqali belgilanadi. Demak,

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}\cdot M_{ik}.$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantning $a_{13}=3$ elementining algebraik to‘ldiruvchisi

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot 0-2\cdot 3)=-6$$

bo'ladi.

1-Teorema. *Determinantning biror yo'lida joylashgan barcha elementlarning ularga mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yig'indi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.*

◀Bu teoremani

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

determinantning birinchi yo'lida joylashgan a_{11}, a_{12}, a_{13} elementlaridan foydalanib isbotlaymiz.

Ravshanki, bu a_{11}, a_{12}, a_{13} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

bo'ladi. Unda

$$a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

bo'lib, bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda (3) ga ko'ra uchinchi tartibli determinant teng ekanini topamiz. Demak,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.\blacktriangleright$$

Eslatma. *Biz yuqorida ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar bilan tanishdik va ularning xossalarini bayon etdik*

Xuddi shunga o'xshash $n-$ tartibli $(n>3)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant tushunchasi kiritiladi va ularning xossalari o'rganiladi.

2.3. Determinantlarni hisoblash

Ma'lumki, ikkinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinant, ta'rifga ko'ra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Bu tenglikda qatnashgan ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblab topamiz:

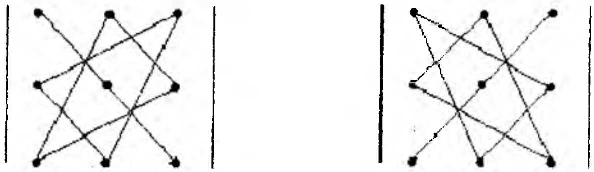
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \quad (5)$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Demak, uchinchi tartibli determinant 6 ta had yig'indisidan iborat bo'lib, ularning uchtasi musbat ishorali, uchtasi manfiy ishorali bo'ladi.

Musbat va manfiy ishorali hadlarni yozishda quyidagi tasvirlangan sxemalardan foydalanish qulay bo'ladi:

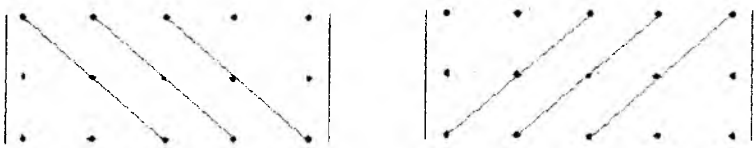


\+ −

Agar uchinchi tartibli determinantni quyidagi ko'rimshda yozib olsak

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

determinantning qiymatini Sarryus usuli deb ataluvchi usul bilan ham hisoblash mumkin:



\+ —

3-Misol. *Ushbu*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

◀Bu determinantni hisoblashda (5) formula va keltirilgan sxemadan foydalanamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot9+3\cdot1\cdot6+7\cdot5\cdot8-7\cdot4\cdot6-3\cdot5\cdot9-2\cdot1\cdot8=$$

$$=72+18+280-168-135-16=51.$$ ▶

Determinantni (ayniqsa, yuqori tartibli determinantlarni) hisoblashda determinantning xossalari va yuqorida keltirilgan teoremadan foydalaniladi. Misol tariqasida bitta 4-tartibli determinantning hisoblanishini ko'rsatamiz. Aytaylik, ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblash lozim bo'lsin. Avvalo determinantning birinchi yo'lini 2 ga ko'paytirib 4-yo'liga qo'shamiz. Natijada 5-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Keyingi determinantning birinchi yo'lini birinchi ustun bilan almashtiramiz. Unda 1-xossaga ko'ra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Endi keltirilgan teoremadan foydalanib (determinantning birinchi yo'lda joylashgan elementlari bo'yicha) topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} =$$

$$1 \cdot A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 54.$$

2.4. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer usuli

Ikkita chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (6)$$

sistema ikki x va y noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1 va b_2 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(6) sistemaning koeffitsiyentlaridan ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, so'ngra Δ determinantning birinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinantni, ikkinchi ustunidagi elementlarni ozod hadlar bilan almashtirib

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantlar hosil qilamiz.

Demak, (6) sistema berilgan holda har doim Δ, Δ_x, Δ_y determinantlarga ega bo'lamiz.

2-Teorema. *Aytaylik, ushbu*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (7)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar

1) $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (7) sistema yagona* (x, y) *yechimga ega bo'lib,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi;

2) $\Delta = 0$ bo'lib, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ bo'lsa, u holda (7) sistema yechimga ega bo'lmaydi;

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lsa, u holda (7) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

◀ (7) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1, \\ &-a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \\ &\text{-----------------------------} \\ &(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{aligned}$$

Keyingi tenglikdan

$$\Delta \cdot x = \Delta_x,$$

yoki

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shuningdek, (7) sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib, so'ng ularni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned} &-a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -b_1a_{21}, \\ &a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = b_2a_{11} \\ &\text{-----------------------------} \\ &(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{aligned}$$

Bu tenglikdan

$$\Delta \cdot y = \Delta_y,$$

ya'ni

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi quyidagi

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$$

ko'rinishga kelib, sistema $\Delta \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

bo'ladi.

Shunga o'xshash $\Delta = 0$ bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmasligi, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ bo'lganda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi ko'rsatiladi. ▶

4-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

◀Bu sistema uchun $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ larni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5.$$

Demak,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{1} = -7, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{1} = 5$$

bo'ladi. ▶

5-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} 5x-2y=4, \\ 0,35x-0,14y=2 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

◀Bu sistema uchun $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ larni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0,35 & -0,14 \end{vmatrix} = 5\cdot(-0,14)-0,35\cdot(-2) = -0,7+0,7=0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -0,14 \end{vmatrix} = 4\cdot(-0,14)-2\cdot(-2) = -0,56+4=3,44\neq 0$$

Demak, berilgan sistema yechimga ega emas. ▶

Uchta chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3, \end{cases} \quad (8)$$

sistema uchta x, y va z noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar tenglamalar sistemasining koeffitsiyentlari, b_1, b_2 va b_3 sonlar ozod hadlar deyiladi.

(8) sistemaning koeffitsiyentlaridan quyidagi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantni hosil qilamiz. So'ng bu determinantning birinchi, ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirib quyidagi determinantlarni tuzamiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Demak, (8) sistema berilgan holda har doim $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

determinantlarga ega bo‘lamiz.

3-Teorema. *Faraz qilaylik,*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar

1) $\Delta \neq 0$ *bo‘lsa, u holda (8) sistema yagona* (x, y, z) *yechimga ega bo‘lib,*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

bo‘ladi;

2) $\Delta = 0$ *bo‘lib,* $\Delta_x \neq 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z \neq 0$ *bo‘lsa, u holda (8) sistema yechimga ega bo‘lmaydi;*

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ *bo‘lsa, u holda (8) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.*

◀ Bu teoremaning isboti 2–teoremaning isboti kabidir. ▶

6-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5, \\ x + y + 2z = 7, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi yechilsin.

◀ Avvalo sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan Δ determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 1 - (-2) - (-4) - 3 = 18.$$

Demak, berilgan sistema yagona yechimga ega. Endi $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5+6+7-(-1)-(-10)-21=8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14+20-1-(-14)-4-5=38,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+42-5-10-(-14)-3=40.$$

Unda

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{18} = \frac{19}{9}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$$

bo'ladi. ▶

Yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasining yechimini topish usuli Kramer usuli deyiladi.

Shu usul bilan n ta chiziqli tenglamalardan tuzilgan n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ noma'lumli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

ni ham yechish mumkin.

2.5. Chiziqli va kvadrat tengsizliklar

Ma'lumki, ushbu $ax+b>0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b<0$ $ax+b\le 0$ ko'rinishdagi tengsizliklar sodda chiziqli tengsizlikla deyiladi, bunda a,b berilgan sonlar, x esa no'malum.

Chiziqli tengsizlik

$$ax+b\ge 0 \qquad (9)$$

ni yechish usuli:

$$ax+b\ge 0,$$

$$ax\ge -b.$$

Keyingi tengsizlikning yechimi a ning ishorasiga bog'liq bo'ladi:

a) Aytaylik, $a>0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi va

$$x\ge -\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left[-\frac{b}{a},+\infty\right)$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi.

b) Aytaylik, $a<0$ bo'lsin. Bu holda tengsizlikning har ikki tomonini a ga bo'lsak, tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi va

$$x\le -\frac{b}{a}$$

bo'ladi. Demak, bu holda ham tengsizlik yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ular $\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right]$ to'plamni (yechimlar to'plamini) hosil qiladi.

d) Aytaylik, $a=0$ bo'lsin. U holda $b\ge 0$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlik bajarilgan, yoki bajarilmagan bo'lishi mumkin. Birinchi holda ixtiyoriy son berilgan tengsizlikni yechimi bo'ladi. Ikkinchi holda esa hech qanday son yechim bo'la olmaydi.

7-misol. *Ushbu*

$$x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$$

tengsizlik yechilsin.

◀Berilgan tengsizlikning ikki tomonini 12 ga ko'paytirib topamiz:

$$12x-6(x-1)>3(x-3)-4(x-2)$$

$$12x-6x+6>3x-9-4x+8.$$

Natijada $7x>-7$ bo'lib, undan $x>-1$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $(-1;+\infty)$ bo'ladi. ▶

Ma'lumki, ushbu

$$ax^2+bx+c>0, \qquad ax^2+bx+c\geq 0,$$

$$ax^2+bx+c<0, \qquad ax^2+bx+c\leq 0.$$

tengsizliklar kvadrat tengsizliklar deyiladi, bunda a,b,c berilgan sonlar, x noma'lum.

Kvadrat tengsizliklarni yechishda

$$a \text{ hamda } D=b^2-4ac$$

miqdorlarning ishoralari muhim.

Masalan,

$$ax^2+bx+c>0$$

tengsizlikda $a>0, D>0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglama ikkita x_1 va x_2 ildizlarga ega bo'lib,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

bo'ladi. Qaralayotgan tengsizlik ushbu

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0$$

va uning ikki tomonini a ga bo'lish natijasida

$$(x-x_1)(x-x_2)>0$$

ko'rinishga keladi. Bu tengsizlik intervallar usuli yordamida yechiladi.

Aytaylik, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Unda, berilgan tengsizlikning yechimi $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ bo'lib, yechimlar to'plami $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ bo'ladi.

Endi kvadrat tengsizliklar va ularning yechimini ko'rsatuvchi jadvalni keltiramiz:

	Tengsizliklar	a	D	**Yechimlari**
1	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
2	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D>0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
3	$ax^2+bx+c>0$	$a>0$	$D=0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
4	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D=0$	$(-\infty, +\infty)$
5	$ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c\geq 0$	$a>0$	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
6	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D>0$	(x_1, x_2)
7	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D>0$	$[x_1, x_2]$
8	$ax^2+bx+c>0$	$a<0$	$D=0$	$\varnothing$
9	$ax^2+bx+c\geq 0$	$a<0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$
10	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$
11	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a<0$	$D>0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
12	$ax^2+bx+c<0$	$a<0$	$D=0$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
13	$ax^2+bx+c\leq 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\frac{b}{2a}$

14	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\le 0$	$a<0$	$D<0$	$(-\infty,+\infty)$
15	$ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\le 0$	$a>0$	$D<0$	$\varnothing$
16	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D=0$	$\varnothing$
17	$ax^2+bx+c\le 0$	$a>0$	$D=0$	$x=-\dfrac{b}{2a}$
18	$ax^2+bx+c<0$	$a>0$	$D>0$	(x_1,x_2)
19	$ax^2+bx+c\le 0$	$a>0$	$D>0$	$[x_1,x_2]$
20	$ax^2+bx+c\ge 0$	$a<0$	$D<0$	$\varnothing$

8-misol: *Ushbu*

$$2x(x+2)\ge x(7x+10)+1$$

tengsizlik yechilsin.

◀Soddalashtirish natijasida

$$2x^2+4x\ge 7x^2+10x+1,$$

$$5x^2+6x+1\le 0$$

bo'ladi. Keyingi kvadrat tengsizlik uchun

$$a=5>0,\qquad D=36-4\cdot 5\cdot 1=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-6\pm 4}{10};\qquad x_1=-1,\qquad x_2=-\frac{1}{5}$$

bo'ladi. Unda jadvalning 19 dagi formulasiga ko'ra berilgan tengsizlikning yechimi (yechimlar to'plami) $\left[-1,-\frac{1}{5}\right]$ bo'ladi. ▶

Mashqlar

Ushbu tenglamalar yechilsin:

1. $(p-1)x+2=p+1$ 2. $mx^2-(m+n)x+n=0$

Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi yechilsin:

3. $\begin{cases} 3x+y+z=5, \\ x-4y-2z=-3, \\ -3x+5y+6z=7. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x+8y-z=7, \\ 2x-3y+2z=9, \\ x+2y+3z=1. \end{cases}$

Ushbu tengsizliklar yechilsin:

5. $x(2x-1)>(x-2)^2$. 6. $(x^2-2x)<\frac{3}{4}$.

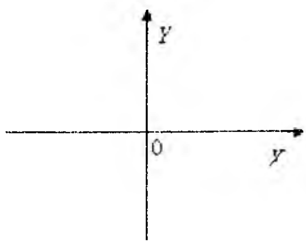
3-MA'RUZA

Tekislikda Dekart va qutb koordinatalari sistemasi

3.1. Dekart koordinatalari sistemasi

Tekislikda ikkita o'zaro perpendikulyar OX va OY to'g'ri chiziqlarni (o'qlarni, ularning musbat yo'nalishlari 1-chizmada ko'rsatilgan) olaylik.

Aytaylik, OX o'qi gorizontal, OY o'qi vertikal joylashsin (1-chizma).

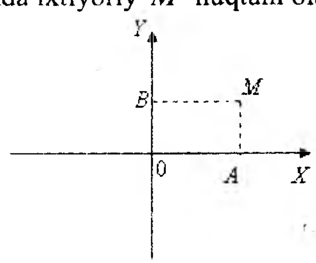


1-chizma

OX va OY to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari (OX - absissalar o'qi, OY - ordinatalar o'qi), ular kesishgan O nuqta koordinata boshi deyiladi.

Bu ikkala o'q uchun bir xil bo'lgan o'lchov birligi-masshtab birligi (uzunligi 1 ga teng kesma) ni olamiz. Natijada, OX, OY koordinata o'qlari va ularda tayinlagan masshtab birligidan iborat sistema hosil bo'ladi. Bu sistema tekislikda Dekart koordinatalari sistemasi deyiladi.

Endi tekislikda ixtiyoriy M nuqtani olaylik (2-chizma).



2-chizma

M nuqtadan abssissa o'qi OX ga MA, ordinata o'qi OY ga MB perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyar OX o'qidan OA, OY o'qidan OB kesmalarni ajratadi. Hosil bo'lgan OA va OB kesmalarning uzunliklarini qanday ishora bilan olinishini quyidagi qoida aniqlab beradi:

1) agar A nuqta OX o'qida O nuqtadan o'ng tomonda joylashsa, unda OA kesmaning uzunligi "+" ishora bilan, O nuqtadan chapda joylashsa, unda OA kesmaning uzunligi "-" ishora bilan olinadi.

2) agar B nuqta OY o'qida O nuqtadan yuqorida joylashsa, unda OB kesmaning uzunligi "+" ishora bilan, O nuqtadan pastda joylashsa, unda OB kesmaning uzunligi "-" ishora bilan olinadi.

Ishoralari keltirilgan qoidaga ko'ra olingan OA va OB kesmalarning uzunliklarini mos ravishda x va y orqali belgilaymiz:

$$x = OA, \qquad y = OB..$$

Odatda, x ga M nuqtaning abssissasi, y ga esa M nuqtaning ordinatasi, umuman x va y ga M nuqtaning koordinatalari deyiladi. M nuqta koordinatalar orqali $M(x, y)$ kabi yoziladi.

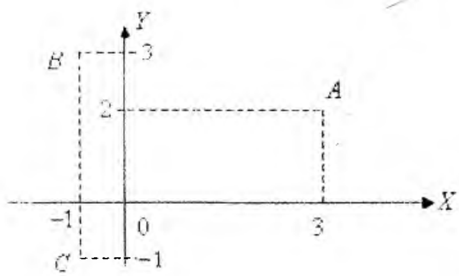
Demak, tekislikdagi ixtiyoriy nuqta o'zining koordinatalari x va y lardan tuzilgan (x, y) juftlik bilan to'la aniqlanadi.

Aytaylik, x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Tekislikda koordinatalari shu x va y bo'lgan nuqta quyidagicha topiladi: OX o'qida x haqiqiy son, OY o'qida y haqiqiy son joylashtirilib, shu nuqtalardan mos ravishda OX va OY o'qlariga perpendikulyar o'tkaziladi. Bu perpendikulyarning kesishish nuqtasi izlanayotgan nuqtani aniqlaydi.

Masalan,

$$A(3,2), \qquad B(-1,3), \qquad C(-1,-1)$$

nuqtalarning tekislikdagi tasvirlari 3-chizmada ko'rsatilgan.



3-chizma

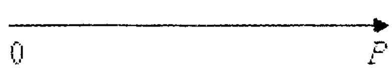
Eslatma. *Abssissa o'qida joylashgan barcha nuqtalarning ordinatalari, ordinata o'qida joylashgan barcha nuqtalarning abssissalari nol bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari* $(0,0)$ *bo'ladi:* $O(0,0)$.

Yuqorida aytilganlardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: tekislikdagi ixtiyoriy nuqtaga x va y haqiqiy sonlardan tuzilgan bitta (x,y) juftlik mos keladi. Aksincha, ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlardan tuzilgan (x,y) juftlik tekislikda bitta nuqtani ifodalaydi.

3.2. Qutb koordinatalari sistemasi

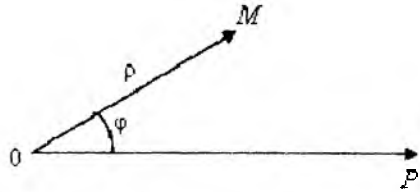
Tekislikda tayin O nuqta va bu nuqtadan chiqqan tayin OP nurni (sonlar o'qini) olamiz. So'ng masshtab birligini tanlaymiz.

Odatda, O nuqta qutb, OP nur esa qutb o'qi deyiladi (4-chizma).



4-chizma

Tekislikda ixtiyoriy M nuqtani (O nuqtadan farqli) olaylik. O nuqta bilan M nuqtani tutashtirib, OM kesmani hosil qilamiz. OM ning uzunligini ρ, qutb o'qi OP bilan OM nurning tashkil etgan burchakni φ deymiz (5-chizma).



5-chizma

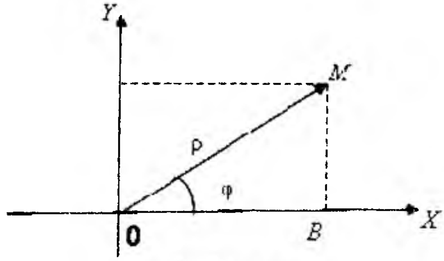
Bunda ρ qutb radiusi, φ esa qutb burchagi deyiladi. Bu ρ va φ, lar tekislikdagi nuqtaning holatini aniqlaydi. Ular M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi. M nuqta qutb koordinatalari orqali quyidagicha yoziladi:

$M(\rho,\varphi)$. Odatda, $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ deb olinadi.

Bu holda tekislik nuqtalari bilan, uning qutb koordinatalari orasida (O nuqtadan tashqari, O nuqta uchun $\rho = 0$ bo'lib, φ - aniq emas) o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Bunday sistema qutb koordinatalar sistemasi deyiladi. Tekislikdagi har bir nuqta (nuqtaning holati O nuqtadan tashqari) bu sistema yordamida to'liq aniqlanadi.

Shunday qilib, tekislikda nuqtaning holati Dekart koordinatalar sistemasida (x, y) bilan, qutb koordinatalari sistemasida esa (ρ,φ) bilan aniqlanadi. Nuqtaning Dekart va qutb koordinatalari orasida bog'lanish mavjud.

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olib, qutbni O nuqtaga, OP qutb o'qini esa OX o'qiga joylashtiramiz (6-chizma):



6-chizma

Tekislikda biror M nuqtani olaylik. Uning Dekart koordinatalari (x, y) $(M(x,y))$, qutb koordinatalari (ρ,φ) $(M(\rho,\varphi))$ bo'l-sin. Chizmadan ko'rinadiki ΔOBM to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib $OB=x$, $MB=y$, $OM=\rho$, $<BOM=\varphi$ bo'ladi.

ΔOBM dan topamiz:

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi \qquad (1)$$

Bu formulalar M nuqtaning Dekart koordinatalarini uning qutb koordinatalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

Shuningdek ΔOBM dan topamiz:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad tg\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Bu formulalar M nuqtaning qutb koordinatalarini uning Dekart koordinitalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

Masalan, C nuqtaning Dekart koordinatalari $x=1$, $y=\sqrt{3}$ bo'lsa, $\left(C\left(1,\sqrt{3}\right)\right)$, uning qutb koordinatalari (2) formulaga ko'ra

$$\rho=\sqrt{1+3}=2, \qquad tg\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}, \qquad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

bo'ladi. Agar D nuqtaning qutb koordinatalari $\rho=3$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\left(D\left(3,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, uning Dekart koordinatalari (1) formulaga ko'ra

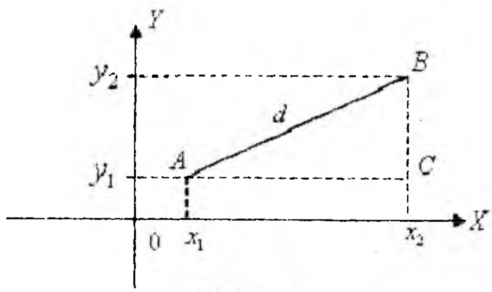
$$x=3\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0, \qquad y=3\cdot\sin\frac{\pi}{2}=3$$

bo'ladi.

3.3. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

1°. Ikki nuqta orasidagi masofa. Tekislikda ikki A va B nuqtalar berilgan bo'lib, uning koordinatalari mos ravishda (x_1, y_1)

va (x_2, y_2) bo'lsin: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan birlashtirish natijasida AB kesma hosil bo'ladi. Bu kesmaning uzunligi A va B nuqtalar orasidagi masofani ifodalaydi. Masofani d bilan belgilaylik (7-chizma).



7-chizma

Berilgan nuqtalarning koordinatalariga ko'ra d ni topamiz. Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki, ΔABC-to'g'ri burchakli uchburchak bo'lib, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$, $AB = d$ bo'ladi. Pifagor teoremasiga ko'ra

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ya'ni

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3)$$

bo'ladi. Bu ikki nuqta orasidagi masofani ifodalovchi formuladir.

Xususan, koordinatalar boshi $O(0,0)$ bilan $A(x, y)$ nuqta orasidagi masofa

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

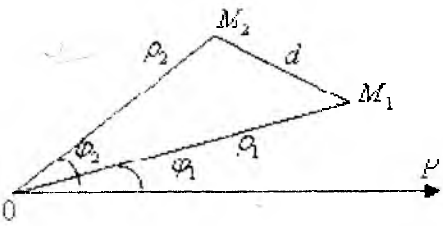
bo'ladi.

Masalan, tekislikda $A(1,2)$ va $B(4,6)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar uchun $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 6$ bo'lishini e'tiborga olib, A va B nuqtalar orasidagi masofani (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

Misol. *Qutb koordinatalarida berilgan* $M_1(\rho_1,\varphi_1)$ *va* $M_2(\rho_2,\varphi_2)$ *nuqtalar orasidagi masofa topilsin.*

◀ Aytaylik, bu nuqtalar tekislikda 8-chizmada ko'rsatilgandek tasvirlansin:



8-chizma

Keltirilgan chizmadan

$$M_1M_2=d,\qquad OM_1=\rho_1,\qquad <POM_1=\varphi_1$$

$$OM_2=\rho_2,\qquad <POM_2=\varphi_2$$

$$<M_1OM_2=\varphi_2-\varphi_1$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Endi M_1OM_2 uchburchakni qaraylik. Kosinuslar teoremasiga ko'ra

$$d^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

va ni

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

bo'ladi. ▶

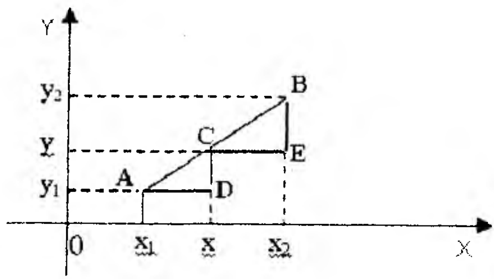
2⁰. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Tekislikda ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ularni to'g'ri chiziq bilan birlashtirish natijasida AB kesma hosil qilingan. Shuningdek, biror musbat λ son ham berilgan $(\lambda>0)$.

AB kesmada shunday C nuqtani (nuqtani koordinatalarini) topish kerakki,

$$\frac{AC}{BC} = \lambda \qquad (4)$$

bo'lsin. Bu jarayon AB kesmani berilgan nisbatda bo'lish deyiladi.

Izlanayotgan C nuqtaning koordinatalarini x va y deyli (9-chizma):



9-chizma

Ravshanki,

$$AD = x - x_1, \qquad CE = x_2 - x$$

hamda, ΔACD va ΔCBE lar o'xshash. Binobarin

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda .$$

Keyingi tenglikda

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$$

bo'lib, undan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

kelib topiladi.

Shunday qilib, berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo'lgan kesmani berilgan λ son $(\lambda > 0)$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

bo'ladi.

Xususan, $C(x, y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqta bo'lsa, (ya'ni $AC = CB$) y holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

bo'lib, $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

bo'ladi.

Masalan, $A(2,9)$ va $B(-4,3)$ nuqtalarni birlashtiruvchi AB kesmani $\lambda = \frac{7}{5}$ nisbatda $\left(\frac{AC}{CB} = \lambda = \frac{7}{5}\right)$ bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{2 + \frac{7}{5} \cdot (-4)}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{2 \cdot 5 + 7 \cdot (-4)}{12} = -\frac{3}{2},$$

$$y = \frac{9 + \frac{7}{5} \cdot 3}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{9 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{12} = \frac{11}{2}$$

bo'ladi.

Mashqlar

1. Uchlari $A(-5;\ 3)$, $B(2;\ -4)$ nuqtalarda bo'lgan kesma berilgan. $C(x;\ y)$ nuqta kesmani $\frac{1}{4}$ nisbatda bo $C(x;\ y)$ nuqta koordinatalari bilan AB kesma uzunligi topils

2. Bir uchi $(8;2)$ nuqtada, o'rtasi $(4,-12)$ nu bo'lgan kesmaning ikkinchi uchi koordinatalari topilsin.

3. Tekislikda diagonallari koordinata o'qlari bo'y joylashgan, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar bos bo'lgan kvadrat berilgan bo'lsin. Agar kvadratning diagonali teng bo'lsa, uning uchlarining koordinatalari topilsin.

4. Tekislikda M(2;6) nuqta berilgan. Abssissa o'qid nuqtadan d =10 ga teng masofada joylashgan nuqta topilsin.

5. Agar A nuqtaning Dekart koordinatalari x=1, y=1 bo uning qutb koordinatalari - ρ, φ lar topilsin.

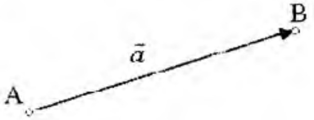
4-MA'RUZA

Vektorlar

4.1. Vektor tushunchasi va vektorlar ustida amallar

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan miqdorlar turlicha bo'ladi. Ulardan biri faqat son qiymati bilan aniqlanadi (masalan, uzunlik, og'irlik, hajm va h.k) ikkinchisi esa son qiymati bilan birga yo'nalishi ma'lum bo'lgandagina aniqlangan (masalan, tezlik, kuch va h.k) hisoblanadi. Odatda, birinchi holdagi miqdorlar skalyar miqdorlar, ikkinchi holdagi miqdorlar esa vektor miqdorlar deyiladi.

Yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi vektor deyiladi. U 1 chizmada ko'rsatilgandek tasvirlanadi:



1-chizma

A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi, vektorning o'zi esa $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Vektorlarni bitta harf bilan ham belgilanadi, bunda harf ustiga strelka qo'yiladi, masalan, $\vec{a}$.

AB kesmaning uzunligi vektorning uzunligi deyilib, uni $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ (yoki $|AB|$) kabi belgilanadi. Agar $\vec{a}$ vektorning uzunligi 1 ga teng, $|\vec{a}|=1$ bo'lsa, u birlik vektor deyiladi.

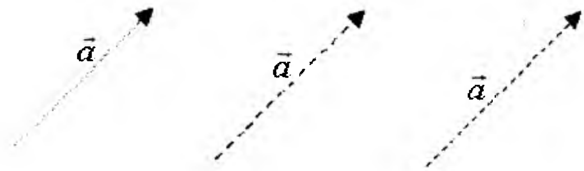
Agar vektorning boshi va oxiri ustma-ust tushsa, u nol vektor deyiladi: $\vec{0}$. Bu vektorning uzunligi 0 ga teng $|\vec{0}|=0$ bo'lib, uning yo'nalishi aniq emas.

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Agar:

1) bu vektorlarning uzunliklari bir-biriga teng: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,

2) ular bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan,

3) yo'nalishi bir tomonga qaragan bo'lsa, bu vektorlar biriga teng deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi.



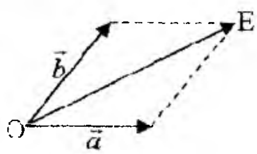
2-chizma

Keltirilgan ta'rifdan, har qanday $\vec{a}$ vektorni parallel ravish vektor boshini tekislikning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chiri mumkinligi kelib chiqadi (2-chizma).

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan bo'lsin (3-chizma):

3-chizma

Bu vektorlarning boshlari A va C larni bir nuqta O g keltirib, tomonlari $|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ va $|\vec{b}| = |\overline{CD}|$ bo'lgan parallelogramm yasaymiz (4-chizma).



4-chizma

O nuqtadan E nuqtaga qarab yo'nalgan, uzunligi OE - diagonalning uzunligiga teng bo'lgan $\overrightarrow{OE}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisi deyiladi va $\vec{a} + \vec{b}$ kabi yoziladi.

Keltirilgan ta'rifdan

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

...ligi kelib chiqadi.

Har qanday $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor uchun unga qarama-qarshi $-\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ vektor mavjud bo‘lib, ular bir xil uzunlikka ega, ...lekin qarama-qarshi tomonga yo‘nalgan bo‘ladi (5-chizma).

5-chizma

Ravshanki,

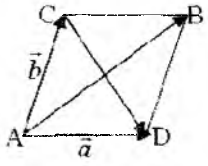
$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$$

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan bo‘lsin. $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorni ayirmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytamizki,

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$$

bo‘ladi. Vektorlar ayirmasi $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ kabi yoziladi.

Yuqoridagidek, tomonlari $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$ bo‘lgan parallelogramm quramiz (6-chizma):



6-chizma

Ma’lumki, $\overrightarrow{AB}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig‘indisi bo‘lar edi. Bu parallelogrammning ikkinchi diagonali $\overrightarrow{CD}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ayirmasi bo‘ladi: $\overrightarrow{CD}=\vec{a}-\vec{b}$.

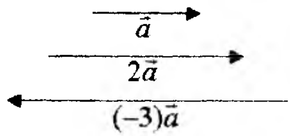
Ravshanki,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Biror $\vec{a}$ vektor va k son berilgan bo'lsin.

Uzunligi $|k|\cdot|\vec{a}|$ ga teng, yo'nalishi esa $k>0$ bo'lganda vektorning yo'nalishi bilan bir xil, $k<0$ bo'lganda $\vec{a}$ ni yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan vektor k son bilan vektorning ko'paytmasi deyiladi va $k\cdot\vec{a}$ kabi yoziladi.

Masalan, $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $(-3)\vec{a}$ vektorlar 7-chizma tasvirlangan:



7-chizma

Odatda $(-1)\vec{a}$ vektor $-\vec{a}$ kabi yoziladi. Ravshanki,

$$-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $\vec{a}$ nol vektor bo'lmasin.

Bu vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ ga bo'lib, (ya'ni vektorn $\frac{1}{|\vec{a}|}$ ga ko'paytirib) ushbu

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e} \qquad \left(|\vec{e}|=1\right)$$

birlik vektorga kelamiz. Keyingi tenglikdan

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e} \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu hol har qanday vektor uning uzunligi bilan birlik vektor ko'paytmasi sifatida ifodalanishini ko'rsatadi.

4.2. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi va vektorlarning koordinatalari

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlarning boshlarini bir nuqtaga keltirib ular orasidagi burchakni φ deylik. (8-chizma)

8-chizma

Ushbu

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

miqdor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deyiladi va $(\vec{a},\vec{b})$ kabi belgilanadi:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (2)$$

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$ bo‘ladi.

3) $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$ bo‘lib, $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ bo‘ladi.

4) λ son uchun $(\lambda\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$ bo‘ladi.

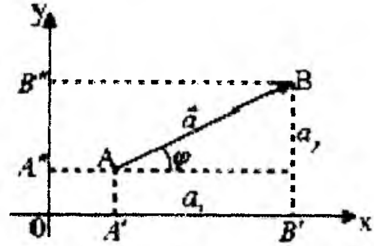
5) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ bo‘ladi.

Ravshanki, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$$

bo'lib, bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorni olamiz (9-chizma).



9-chizma

A va B nuqtalardan OX o'qiga perpendikulyarla tushiramiz. Ularning OX o'qidagi asoslari A', B' bo'lsin.

Shuningdek A va B nuqtalardan OY o'qiga perpendikulyarlar tushiramiz. Ularning OY o'qidagi asoslari A'', B'' bo'lsin. $A'B'$ kesma $\vec{a}$ vektorning OX o'qidagi proyeksiyasi, $A''B''$ kesma esa $\vec{a}$ vektorning OY o'qidagi proyeksiyasi deyiladi.
Ular

$$a_x = A'B', \qquad a_y = A''B''$$

kabi belgilanadi.

Agar φ-o'tkir burchak (9-chizma) bo'lsa, proyeksiya musbat ishora bilan, φ-o'tmas burchak bo'lsa, proyeksiya manfiy ishora bilan olinadi.

Odatda a_x va a_y lar $\vec{a}$ vektorning koordinatalari deyiladi. $\vec{a}$ vektor koordinatalari orqali quyidagicha

$$\vec{a}(a_x, a_y) \text{ yoki } \vec{a} = \{a_x, a_y\}$$

yoziladi.

Agar OX o'qdagi birlik vektor $\vec{i}$, OY o'qidagi birlik vektor $\vec{j}$ deyilsa, u holda

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \qquad (3)$$

bo'ladi. Demak, har qanday vektor birlik vektorlar $\vec{i}$ va $\vec{j}$ orqali (3) formula bo'yicha ifodalanadi.

Yuqorida keltirilgan chizmadan ko'rinadiki, $\vec{a}$ vektorning uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

bo'ladi.

Endi koordinatalari orqali berilgan vektorlarning yig'indisi, ayirmasi, songa ko'paytirish va skalyar ko'paytmalarining ifodalarini keltiramiz:

Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsin.

$$\vec{a} = \{a_x, a_y\}, \ \vec{b} = \{b_x, b_y\}.$$

U holda

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x, \ a_y + b_y\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x, \ a_y - b_y\}$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y\}$$

bo'ladi.

Shuningdek,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y$$

бўлиб,

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \qquad (4)$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikdan $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y\}$ vektorlarning perpendikulyar bo'lishi uchun

$$a_x b_x + a_y b_y = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli ekanini topamiz.

Aytaylik, $\vec{a}=\{a_x,a_y\}$ vektorning OX va OY koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklar mos ravishda α va β bo'lsin. $\vec{b}$ vektorni $\vec{b}=\{1,0\}$ deb olib, (4) formuladan foydalanib

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} \qquad (5)$$

bo'lishini topamiz.

Shuningdek, $\vec{b}$ vektorni $\vec{b}=\{0,\ 1\}$ deb olib, yana (4) formuladan foydalanib

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} \qquad (6)$$

bo'lishini topamiz.

Odatda, $\cos\alpha$ va $\cos\beta$ sonlar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

(5) va (6) tengliklardan

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\frac{a_x^2}{a_x^2+a_y^2}+\frac{a_y^2}{a_x^2+a_y^2}=1$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Mashqlar

1. $\vec{b}(0;-2)$ va $\vec{c}(-3;4)$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}$ vektorning koordinatalari topilsin.

2. $\vec{a}(7;3)$ va $\vec{b}(5;2)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}+\vec{b}|$ hisoblansin.

3. $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4,\quad \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=30^0$ bo'lsa, $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ vektorning uzunligi topilsin.

5-MA'RUZA

Kompleks sonlar
Kompleks son tushunchasi

Aytaylik, a va b haqiqiy sonlar bo'lsin. Ushbu

$$a+bi$$

ifoda kompleks son deyiladi. Bunda $i=\sqrt{-1}$ bo'lib, u mavhum birlik deyiladi.

Kompleks sonlar bitta harf, ko'pincha z harfi bilan belgilanadi:

$$z=a+bi.$$

Demak, kompleks son ikki a va bi qismlardan iborat bo'ladi. Odatda, a son z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va Re kabi belgilanadi:

$$a=\operatorname{Re} z.$$

b son esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va Imz kabi belgilanadi:

$$b=Imz.$$

Masalan, $z=2+3i$ kompleks son uchun $\operatorname{Re} z=2$, Im 3 bo'ladi.

$a+bi$ kompleks sonning mavhum qismining ishorasi bilan farq qiluvchi $a-bi$ kompleks son z ning qo'shmasi deyiladi va $\bar{z}$ kabi belgilanadi:

$$\bar{z}=a-bi.$$

Ikki $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Agar

$$a_1=a_2,\qquad b_1=b_2$$

bo'lsa, z_1 va z_2 kompleks sonlar teng deyiladi va $z_1=z_2$ kabi yoziladi.

5.1. Kompleks sonlar ustida amallar

Ikkita

$$z_1=a_1+b_1\cdot i,\qquad z_2=a_2+b_2\cdot i$$

kompleks sonlar berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig'indisi deyiladi va z_1+z_2 kabi belgilanadi:

$$z_1+z_2=\left(a_1+a_2\right)+\left(b_1+b_2\right)\cdot i\,.$$

Ma'lumki,

$$z=\operatorname{Re} z+Imz\cdot i$$

Demak,

$$\operatorname{Re}\left(z_1+z_2\right)=\operatorname{Re} z_1+\operatorname{Re} z_2,$$

$$Im\left(z_1+z_2\right)=Imz_1+Imz_2.$$

Yuqorida keltirilgan qoidadan foydalanib topamiz:

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b+(-b))i=2a\,.$$

Ushbu

$$\left(a_1-a_2\right)+\left(b_1-b_2\right)\cdot i$$

kompleks son z_1 kompleks sondan z_2 kompleks sonning ayirmasi deyiladi va z_1-z_2 kabi belgilanadi:

$$z_1-z_2=\left(a_1-a_2\right)+\left(b_1-b_2\right)\cdot i\,.$$

Demak,

$$\operatorname{Re}\left(z_1-z_2\right)=\operatorname{Re} z_1-\operatorname{Re} z_2,$$

$$Im\left(z_1-z_2\right)=Imz_1-Imz_2.$$

Ravshanki,

$$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=(a-a)+(b-(-b))i=2bi$$

bo'ladi.

Ushbu

$$\left(a_1a_2-b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+a_2b_1\right)\cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 kompleks sonlarning ko'paytmasi deyiladi va $z_1\cdot z_2$ kabi belgilanadi.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1) \cdot i .$$

Eslatma. *Ushbu*

$a + 0 \cdot i = a$ *- haqiqiy son*

$0 + b \cdot i = bi$ *- sof mavhum son*

$0 + i = i, \qquad 0 - i = -i$

munosabatlarni kelishuv sifatida qaraymiz.

Unda

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = -1 + 0 \cdot i = -1$$

$$b \cdot i = (b + 0 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = 0 + bi = bi$$

bo'ladi. Umuman,

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i,$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

....

$$i^{4n} = 1, \qquad i^{4n+1} = i, \qquad i^{4n+2} = -1, \qquad i^{4n+3} = -i,$$

(n natural son) bo'ladi.

Ravshanki,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a \cdot a - b \cdot (-b)) +$$

$$+ (a(-b) + a \cdot b) i = (a^2 + b^2) + 0 \cdot i = a^2 + b^2$$

Demak, kompleks son o'zining qo'shmasiga ko'payganda ko'paytma haqiqiy son bo'lar ekan.

Ushbu

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i$$

kompleks son z_1 va z_2 $(z_2 \neq 0)$ kompleks sonlarning nisbati yoki bo'linmasi deyiladi va $\frac{z_1}{z_2}$ kabi belgilanadi:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i \quad (z_2 \neq 0) \qquad (1)$$

Amaliyotda z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbati $\frac{z_1}{z_2}$

kasrning surat va maxrajini maxrajda turgan kompleks sonni qo'shmasiga ko'paytirish bilan topiladi:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Masalan,

$$\frac{3+2i}{4+5i}=\frac{(3+2i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{22-7i}{41}=\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i.$$

Yuqorida kiritilgan qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'li amallari uchun amallarning bajarilish qoidalari o'rinli bo'ladi:

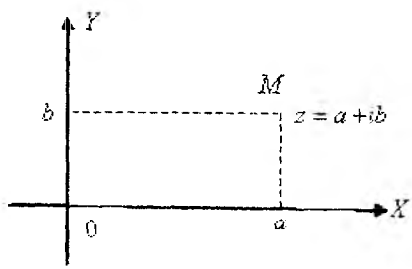
$$z+0=z,\quad z_1+z_2=z_2+z_1,\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),$$

$$0\cdot z=0,\quad 1\cdot z=z,\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3),\quad (z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$$

5.2. Kompleks sonni geometrik tasvirlash

Aytaylik, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi v $z=a+bi$ kompleks son berilgan bo'lsin (1-chizma).

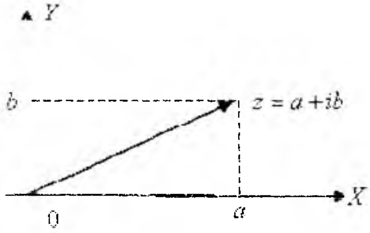


1-chizma

Ravshanki, koordinatalari a va b bo'lgan (a,b) juftli tekislikda bitta nuqtani ifodalaydi. Uni M deylik: $M(a,b)$. Bu nuqta $z=a+bi$ kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi.

Demak, har bir kompleks songa tekislikda bitta nuqta va aksincha, tekislikdagi har bir nuqtaga bitta komplleks son mos qo'yiladi. Bu kompleks sonlar to'plami bilan tekislik nuqtalari [illegible] orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjudligini bildiradi. [illegible] nazarda tutib XOY tekislikni kompleks tekislik deb ham [illegible].

OX o‘qida haqiqiy sonlar joylashadi: $z=a+0i=a$. Shuning uchun OX o‘qni haqiqiy o‘q deyiladi. OY o‘qida sof mavhum sonlar joylashadi: $z=0+bi=bi$. Shuning uchun OY o‘qni mavhum o‘q deyiladi.



2-chizma

Kompleks sonlarning yig‘indisi va ayirmasini sodda geometrik talqin etish mumkin.

Ravshanki, har qanday $z=a+bi$ kompleks son uchun

$\vec{OZ}$ vektorning OX va OY o‘qlardagi proyeksiyalari mos ravishda a va b bo‘ladi (2-chizma)

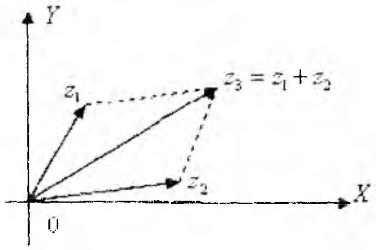
Aytaylik,

$$z_1=a_1+b_1i, \qquad z_2=a_2+b_2i$$

bo‘lsin. Ma’lumki, $z_3=z_1+z_2$ uchun

$$z_3=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\cdot i$$

bo‘ladi (3-chizma).



3-chizma

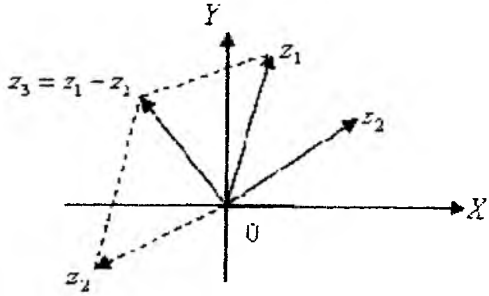
Bundan ko'rinadiki, $\overrightarrow{oz_3}$ vektorning koordinata o'qlarida

proyeksiyalari $\overrightarrow{oz_1}$ va $\overrightarrow{oz_2}$ vektorlarning shu o'qlardagi mo

proyeksiyalari yig'indisidan iborat bo'ladi. Demak,

$$\overrightarrow{oz_3} = \overrightarrow{oz_1} + \overrightarrow{oz_2}$$

z_1 va z_2 vektorlar ayirmasi $z_3 = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ 4-chizmad geometrik talqin etilgan.



4-chizma

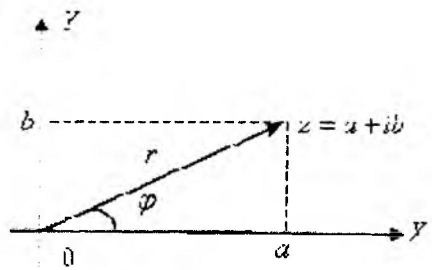
5.3. Kompleks sonning trigonometrik shakli (ko'rinishi). Kompleks sonning moduli va argumenti

Tekislikda Dekart koordinatalari sistemasini olamiz.

Biror

$$z = a + bi$$

kompleks sonni qaraymiz. Ravshanki, bu son tekislikda nuqtani tasvirlaydi (5-chizma):



5-chizma

$\overrightarrow{Oz}$ vektorning uzunligi, ya'ni 0 nuqtadan z nuqtagacha bo'lgan masofa z kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ kabi belgilanadi.

Ravshanki, $z = a + bi$ kompleks sonning moduli

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

bo'ladi (Pifagor teoremasidan foydalanildi). $\overrightarrow{oz}$ vektor bilan OX o'qi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\arg z$ kabi yoziladi:

$$\varphi = \arg z$$

Kompleks sonning argumenti $2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ aniqlikda ($z = 0$ dan tashqari) bo'lib, uni ushbu

$$0 \le \arg z < 2\pi$$

munosabatda qaraymiz.

Yuqorida keltirilgan 5-chizmadan ko'rinadiki,

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \qquad tg\varphi = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

bo'lib, bu formulalar yordamida kompleks sonning argumenti topiladi.

Masalan, $z = 1 + i$ kompleks sonning moduli

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

argumenti esa

$$tg\varphi = 1, \qquad \varphi = 45^\circ, \qquad \arg z = 45^\circ$$

bo'ladi.

(2) tengliklardan topamiz:

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

Demak,

$$z = a + bi$$

kompleks sonni ushbu

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Kompleks sonning bu ko'rinishi uning trigonometrik ko'rinishi (shakli) deyiladi. Kompleks sonning bu ko‘rinishi ko‘p masalalarni hal etishda qulaylik tug‘diradi.

Ikki

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

kompleks sonlarni qaraymiz. Ularning ko‘paytmasi

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) +$$

$$+i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\big] =$$

$$= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikkita kompleks sonlar ko‘paytirilganda ko‘paytmaning moduli modullar ko‘paytmasiga argumenti esa argumentlar yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Endi z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbatini qaraymiz.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1\big[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\big]}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Bu tenglikdan

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib ikki kompleks sonning nisbati olinganda nisbatning moduli surat moduli bo'lingan mahraj moduliga teng, nisbatning argumenti surat argumentidan mahraj argumentini ayirganiga teng bo'ladi.

Endi $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sonning darajasini qaraymiz.

Bu sonning n-darajasi (n-natural son) yuqorida aytilganiga ko'ra

$$\underbrace{z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ ta} = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\ ta}\left[\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\cdots+\varphi}_{n\ ta}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\cdots+\varphi}_{n\ ta})\right]$$

yoki

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (3)$$

bo'ladi. Bu tenglik Muavr formulasi deyiladi.

Masalan,

$$z = 1+i \qquad \left(r=\sqrt{2}, \quad \varphi=\frac{\pi}{4}\right)$$

kompleks sonning 10-darajasi

$$(1+i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32(0+i) = 32i$$

bo'ladi.

Aytaylik, z kompleks son va n-natural son berilgan bo'lsin. n-darajasi shu z songa teng bo'lgan w kompleks son,

$$w^n = z, \qquad (4)$$

z kompleks sondan olingan n-darajali ildiz deyiladi va $\sqrt[n]{z}$ kabi belgilanadi:

$$w = \sqrt[n]{z}\,.$$

Faraz qilaylik,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad w = \rho(\cos\Psi + i\sin\Psi)$$

bo'lsin. U holda Muavr formulasidan foydalanib, (4) tenglikni quyidagicha

$$\rho^n(\cos n\Psi + i\sin n\Psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

yozamiz. Keyingi tenglikdan

$$\rho^n = r,$$
$$n\Psi = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ya'ni

$$\rho = \sqrt[n]{r},$$
$$\Psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (5)$$

(5) ko'rinishdagi sonlar orasida faqat n tasigina turlicha bo'lishini ko'rsatish mumkin. Ular k ning

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

qiymatlarida hosil bo'ladi.

Shunday qilib, z kompleks sondan olingan n-darajali ildizning n ta qiymati bo'lib, ular

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \dots n-1) \qquad (6)$$

formuladan topiladi.

Misol. *Ushbu*

$$w = \sqrt[3]{-1 + i}$$

ildizning qiymatlari topilsin.

◀Ravshanki,

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

bo'ladi. (5) formuladan foydalanib topamiz:

$$w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]. \quad (k = 0, 1, 2)$$

Demak,

$$w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right),$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$$ ▶

Mashqlar

1.Quyidagi kompleks sonlarning moduli va argumenti topilsin.

a) $z = -7 - i$;

b) $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$;

2.Ushbu kompleks sonlar trigonometrik ko‘rinishda yozilsin.

a) -2;

b) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

6-MA'RUZA

Yuqori darajali tenglamalar

Chiziqli va kvadrat tenglamalar birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar bo'lib, ularni yechish o'quvchiga ma'lum. Endi yuqori darajali tenglamalarni qaraymiz.

Quyidagi

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

tenglama n-darajali tenglama deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ berilgan sonlar (haqiqiy yoki kompleks), x noma'lum son, n-natural son, $a_n \neq 0$.

Aytaylik, x_0 haqiqiy yoki kompleks son bo'lsin. Agar

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 \equiv 0$$

bo'lsa, x_0 son (1) tenglamaning yechimi deyiladi. (1) tenglamaning barcha yechimlarini topish bilan u yechiladi.

6.1. Ko'phadlar va algebraning asosiy teoremasi

Ushbu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ifoda ko'phad deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ sonlar ko'phadning koeffitsiyentlari, n esa ko'phadning darajasi. Ravshanki, qaralayotgan ko'phad x ga (x o'zgaruvchiga) bog'liq. Uni $f(x)$ kabi belgilash mumkin:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Agar x^* son uchun

$$f(x^*) = 0$$

bo'lsa, x^* son $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Faraz qilaylik,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ko'phadlar berilgan bo'lsin. Agar

$$a_k = b_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

bo'lsa, bu ko'phadlar teng deyiladi va $f(x) = \varphi(x)$ kabi yoziladi.

Ravshanki, $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlarning yig'indisi $f(x) + \varphi(x)$, ayirmasi $f(x) - \varphi(x)$, ko'paytmasi $f(x) \cdot \varphi(x)$ yana ko'phadlar bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ hamda $g(x)$ ko'phadlar berilgan bo'lsin. $f(x)$ ko'phadni $g(x)$ ko'phadga bo'lamiz:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x). \qquad (2)$$

Odatda, $q(x)$ bo'linma, $r(x)$ esa qoldiq deyiladi. Bunda $r(x)$ ko'phadning darajasi $g(x)$ ko'phadning darajasidan kichik bo'ladi.

Agar (2) tenglikda $r(x) \equiv 0$ bo'lsa, $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linadi deyiladi. ($g(x)$ ni $f(x)$ ning bo'luvchisi ham deb yuritiladi).

Aytaylik, $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lib, uni $x - a$ ga bo'lganda bo'linma $q(x)$, qoldiq esa $r(x)$ bo'lsin:

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x).$$

Ravshanki, bu holda qoldiq $r(x)$ o'zgarmas songa teng bo'ladi: $r(x) = c$. Demak,

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + c.$$

Keyingi tenglikda $x = a$ deyilsa,

$$f(a) = c$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ ko'phadni $x - a$ ga bo'lishdan hosil bo'lgan qoldiq, $f(x)$ ko'phadning $x = a$ dagi qiymatiga teng bo'lishini bildiradi.

Demak, $x=a$ son $f(x)$ ko'phad ildizi bo'lishi uchun $f(x)$ ning $x-a$ ga qoldiqsiz bo'linishi zarur va yetarli bo'ladi.

Odatda, bu tasdiq Bezu teoremasi deyiladi.

Agar $f(x)$ ko'phad $(x-a)^k$ ga bo'linsa $(k \geq 1)$, a son $f(x)$ ning karrali ildizi deyiladi. Ayni paytda, $f(x)$ ko'phad $(x-a)^{k+1}$ ga bo'linmasa, a son $f(x)$ ko'phadning k karrali ildizi deyiladi. Bu holda

$$f(x)=(x-a)^k \cdot \varphi(x)$$

bo'lib, $\varphi(x)$ ko'phad $x-a$ ga bo'linmaydi.

Quyidagi tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

Tasdiq. *Darajasi birdan kichik bo'lmagan har qanday ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'ladi (bu ildiz kompleks son bo'lishi ham mumkin).*

Aytaylik, n-darajali

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ko'phad berilgan bo'lsin. Bu ko'phad yuqorida keltirilgan tasdiqqa ko'ra kamida bitta α_1 ildizga ega: $f(\alpha_1) \equiv 0$.

Shuning uchun

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdot \varphi_1(x)$$

bo'ladi, bunda $\varphi_1(x)$ ko'phad bo'lib, uning darajasi $n-1$ ga teng.

Agar $n>1$ bo'lsa, unda $\varphi_1(x)$ ko'phad ham tasdiqqa ko'ra kamida bitta α_2 ildizga ega. Demak,

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_2)\cdot \varphi_2(x), \quad \varphi_2(x) \text{ - ko'phad.}$$

Natijada $f(x)$ ko'phad ushbu

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot \varphi_2(x)$$

ko'rinishni oladi. Bu jarayonni davom ettirish bilan

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

tenglikka kelamiz. Keyingi tenglikda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sonlar orasida o'zaro bir-biriga tenglari bo'lishi mumkin. Demak,

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_s)^{k_s}$$

bo'lib,

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n, \qquad i \neq j \text{ da}$$

$$\alpha_i \neq \alpha_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots s).$$

Natijada quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema *(algebraning asosiy teoremasi). Har qanday n-darajali $(n \geq 1)$ ko'phad n ta ildizga ega (har bir ildiz necha karrali bo'lsa, shuncha marta hisoblanadi).*

6.2. Yuqori darajali tenglamalarni yechish

Algebraning asosiy teoremasi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (3)$$

tenglamaning n ta yechimi mavjudligini ifodalasa ham, umumiy holda bu yechimlarni topish algoritmlarini aniqlab bermaydi. (3) tenglamani yechish masalasi hozirga qadar katta muammo bo'lib, u ayrim xususiy hollardagina hal etilgan.

(3) tenglamaning yechimi tenglama koeffitsiyentlari ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va ildiz chiqarish amallarini bajarishdan hosil bo'lgan ifoda bilan aniqlansa, (3) tenglama radikallarda yechiladi deyiladi.

Eslatma. *Agar $\alpha = a + bi$ kompleks son (3) tenglamaning yechimi bo'lsa, α sonning qo'shmasi $\overline{\alpha} = a - bi$ kompleks son ham (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.*

Endi (3) tenglama radikallarda yechiladigan ba'zi hollarini qaraymiz.

Ravshanki, $n = 2$ bo'lganda (3) tenglama avval o'rganilgan kvadrat tenglamaga keladi:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Bu tenglama har doim ikkita ildizga ega:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

(diskriminant $b^2-4ac>0$ bo'lganda, x_1 va x_2 lar haqiqiy va turli sonlar; $b^2-4ac=0$ bo'lganda $x_1=x_2$ bo'lib, ildiz karrali; $b^2-4ac<0$ bo'lganda x_1 va x_2 lar bir-biriga qo'shma kompleks sonlar bo'ladi).

Endi (3) tenglamaning keyingi xususiy hollarini qaraymiz.

a) $n=3$ bo'lsin. Bu holda (3) tenglama

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

ko'rinishga keladi. Qulaylik maqsadida keyingi tenglamani quyidagicha

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \quad (a_0\neq 0) \qquad (4)$$

yozib olamiz. (4) tenglama quyidagicha yechiladi:

1) (4) tenglamaning ikki tomonini a_0 ga bo'lib, topamiz:

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0,, \qquad (5)$$

bunda $b_k=\dfrac{a_k}{a_0}$ $\quad (k=1,2,3)$.

2) (5) tenglamada $x=y-\dfrac{b_1}{3}$

almashtirish bajaramiz. Unda (5) tenglamaning chap tomoni ushbu

$$\left(y-\frac{b_1}{3}\right)^3+b_1\left(y-\frac{b_1}{3}\right)^2+b_2\left(y-\frac{b_1}{3}\right)+b_3=$$

$$=y^3+\left(b_2-\frac{b_1^2}{3}\right)y+\left(b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3\right)$$

ko'rinishga kelib, quyidagi

$$b_2-\frac{b_1^2}{3}=p, \qquad b_3-\frac{b_1b_2}{3}+\frac{2}{27}b_1^3=q$$

almashtirishdan so'ng (5) tenglama

$$y^3+py+q=0 \qquad (6)$$

ko'rinishni oladi.

3) (6) tenglamaning yechimini

$$y=u+v \qquad (7)$$

ko'rinishda izlaymiz, bunda u va v lar ushbu

$$u \cdot v = -\frac{p}{3} \qquad (8)$$

shartni qanoatlantirishi talab etiladi.

Ravshanki, (7) va (8) munosabatlardan qaralayotgan u va v lar quyidagi

$$t^2 - yt - \frac{p}{3} = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlari ekanligi kelib chiqadi (Viyet teoremasi).

4) $y = u + v$ ni (6) tenglamadagi y ning o'rniga qo'yamiz:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0.$$

Natijada

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0,$$

ya'ni

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0 \qquad (9)$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $u \cdot v = -\frac{p}{3}$. Unda $3uv + p = 0$ bo'lib, (9) tenglama

$$u^3 + v^3 + q = 0, \text{ ya'ni } u^3 + v^3 = -q$$

ko'rinishga keladi. Demak,

$$y^3 + py + q = 0$$

tenglamani yechish ushbu

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \qquad (10)$$

sistemani yechishga keladi.

5) (10) tengliklardan ko'rinadiki, u^3 va v^3 lar ushbu

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

kvadrat tenglamaning yechimlari bo'ladi. Bu kvadrat tenglamani yechib topamiz:

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Demak,

$$u^3 = t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{11}$$

$$v^3 = t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{12}$$

6) (11) va (12) tengliklardan

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned} \tag{13}$$

bo'lishini topamiz. Demak, (6) tenglamaning yechimi

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{14}$$

bo'ladi.

(14) tenglik Kardano formulasi deyiladi. Bu formula

$$u + v$$

yig'indidan iborat bo'lib, har bir u va v lar uchtadan qiymatga ega. Unda $u+v$ yig'indining qiymatlari 9 ta bo'ladi. Bu qiymatlar ichida uchtasigina (6) tenglamaning yechimi bo'lib, bunday u va v ning qiymatlari ushbu

$$uv = -\frac{p}{3}$$

munosabatda bo'ladi.

7) Aytaylik, u va v ning (13) tengliklarning qiymatlaridan biri u_1 va v_1 bo'lsin. Unda

$$u_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}u_1, \qquad u_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}u_1,$$

$$v_2 = \frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}v_1, \qquad v_3 = \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}v_1,$$

bo'ladi

8) (6) tenglamaning yechimlari

$$y_1 = u_1 + v_1,$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}(u_1 - v_1), \tag{15}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1+v_1) - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}(u_1 - v_1)$$

bo'lib, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1 = y_1 - \frac{b_1}{3}, \qquad x_2 = y_2 - \frac{b_1}{3}, \qquad x_3 = y_3 - \frac{b_1}{3}$$

bo'ladi

1-misol. *Ushbu*

$$x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$$

tenglama yechilsin.

◀Berilgan tenglamada

$$x = y + 3$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$(y+3)^3 - 9(y+3)^2 + 21(y+3) - 5 = 0$$

ya'ni

$$y^3 - 6y + 4 = 0$$

bo'ladi (14) formuladan foydalanib topamiz.

$$u = \sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2+2i}$$

Ravshanki, bu kub ildizning qiymatlaridan biri

$$u_1 = 1 + i$$

bo'ladi. Unda

$$v_1 = \frac{6}{3(1+i)} = 1 - i$$

bo‘lib, (15) formulaga ko‘ra

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = -1-\sqrt{3}, \qquad y_3 = -1+\sqrt{3}$$

bo‘ladi. Demak, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 2-\sqrt{3}, \qquad x_3 = 2+\sqrt{3}$$

bo‘ladi. ▶

b) $n = 4$ bo‘lsin. Bu holda (1) tenglama

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (16)$$

ko‘rinishga keladi.

(16) tenglama radikallarda yechiladi. Uning yechi algoritmi mavjud (qaralsin, [1]).

Eslatma. *$n \geq 5$ bo‘lgan holda (3) tenglamanin radikallarda yechilishi masalasi haqida ko‘p izlanishlar ol borilgan. Natijada quyidagi xulosaga kelingan.*

Agar (3) tenglamaning darajasi besh va undan katta bo‘ls (3) tenglama umumiy holda radikallarda yechilmaydi.

Endi yuqori darajali tenglamalarning radikallar yechiladigan yana ayrim xususiy hollarini keltiramiz.

d) Ikki hadli tenglamalar.

Ushbu

$$ax^n + b = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (17)$$

ko‘rinishdagi tenglama ikki hadli tenglama deyiladi. B tenglamaning yechimi

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

bo‘ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$x^5 + 32 = 0$$

tenglama yechilsin.

◀Ravshanki,

$$x = \sqrt[5]{-32}\,.$$

Endi - 32 sonni kompleks son sifatida qarab 5-ma’ruzada keltirilgan formuladan foydalanib topamiz:

$$-32 = 32(\cos\pi + i\sin\pi)\,.$$

Kompleks sondan ildiz chiqarish qoidasiga ko‘ra

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32(\cos\pi + i\sin\pi)} =$$

$$2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) \quad (k = 0,1,2,3,4)$$

bo‘ladi. Demak,

$$x_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right), \quad x_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right),$$

$$x_2 = -2, \quad x_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right), \quad x_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right). \blacktriangleright$$

e) Uch hadli tenglamalar.

Ushbu

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

ko‘rinishdagi tenglama uch hadli tenglama deyiladi.

Berilgan tenglamada

$$x^n = t$$

almashtirish bajaramiz. Natijada berilgan tenglama

$$at^2 + bt + c = 0$$

kvadrat tenglamaga keladi va uning yechimlari

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bo‘ladi. Demak,

$$x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Keyingi tenglikdan

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (18)$$

bo‘lishini topamiz.

3-misol. *Ushbu*

$$x^6 - 3x^3 - 2 = 0$$

tenglama yechilsin.

◀ (18) formuladan foydalanib topamiz:

$$x=\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{3\pm1}{2}}.$$

Demak,

$$x^{(1)}=\sqrt[3]{1},\qquad x^{(2)}=\sqrt[3]{2}.$$

Ravshanki,

$$x^{(1)}=\sqrt[3]{1}=1\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2).$$

Bundan,

$$x_0^{(1)}=1,\ x_1^{(1)}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad x_2^{(1)}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shuningdek,

$$x^{(2)}=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2)$$

bo‘lib, undan

$$x_0^{(2)}=\sqrt[3]{2},\qquad x_1^{(2)}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$x_2^{(2)}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning yechimlari

$$x_1=1,\ x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\ x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3},\ x_4=\sqrt[3]{2},$$

$$x_5=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad x_6=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

bo‘ladi. ▶

Mashqlar

Quyidagi tenglamalar yechilsin:

1. $2x^3-5x^2+8x-3=0$
2. $x^4+1=0$
3. $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12=0$
4. $x^3-5x^2+28=0$

7-MA'RUZA

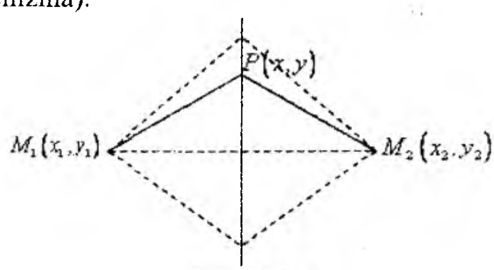
Tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari

Tekislikda to'g'ri chiziq sodda, ayni paytda muhim geometrik tushunchalardan biri. Uni tekislikdagi nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) sifatida tushuniladi.

Ma'lumki, tekislikdagi nuqta o'zining x va y koordinatalari bilan to'liq aniqlanadi. Bu x va y sonlar turli qiymatlarni qabul qilganda (x, y) juftliklar turlicha bo'lib, ular turli nuqtalarni tasvirlaydi. Odatda, bunday nuqtalar o'zgaruvchi nuqta deyiladi. Agar o'zgaruvchi nuqtaning koordinatalari x va y lar biror bog'lanishda bo'lsa, u holda bunday nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) biror geometrik shaklni ifodalashi mumkin. Bog'lanish esa geometrik shaklning tenglamasi deyiladi.

7.1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Faraz qilaylik, tekislikda ikkita tayin $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan baravar uzoqlikda turgan nuqtalar biror to'g'ri chiziqda bo'lishini, bunday nuqtalar to'plami (geometrik o'rni) to'g'ri chiziqni ifodalashini tasavvur qilish mumkin. Shu xususiyatdan foydalanib undagi o'zgaruvchi $P(x, y)$ nuqta koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz (1-chizma).



1 – chizma

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra

$$M_1P=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

$$M_2P=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo‘lib,

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

bo‘ladi. Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ng qisqa ko‘paytirish formulasidan foydalanib topamiz:

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2=x^2-2x_2x+x_2^2+y^2-2y_2y+y_2^2$$

Keyingi tenglikdan

$$2(x_2-x_1)\cdot x+2(y_2-y_1)\cdot y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Agar

$$A=2(x_2-x_1),$$

$$B=2(y_2-y_1),$$

$$C=x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$$

deyilsa, unda

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Demak, to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $P(x, y)$ nuqtaning x va y koordinatalari (1) tenglama bilan bog‘langan. Binobarin, bu tenglamani to‘g‘ri chiziqning tenglamasi bo‘ladi.

Odatda (1) tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Eslatma. *Agar tekislikdagi* $A(x_0, y_0)$ *nuqtaning* x_0, y_0 *koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, ya'ni*

$$Ax_0+By_0+C\equiv 0$$

bo‘lsa, A nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi, tenglamani qanoatlantirmasa, ya'ni

$$Ax_0+By_0+C\neq 0$$

bo‘lsa, A nuqta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi.

1-misol. *Ushbu*

$$3x-2y-8=0 \qquad (2)$$

bilan berilgan to'g'ri chiziq tekislikda yasalsin.

◄Ma'lumki, ikki nuqta to'g'ri chiziqning tekislikdagi holatini to'liq aniqlaydi.

Aytaylik, $x=0$ bo'lsin. Unda (2) tenglikka ko'ra

$$3\cdot 0-2y-8=0, \qquad 2y=-8, \qquad y=-4$$

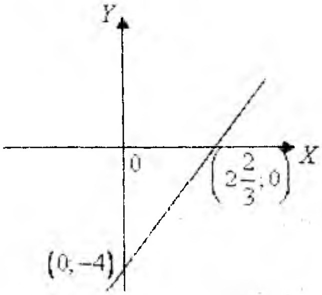
Demak, *(0, -4)* nuqta to'g'ri chiziqda yotadi.

Aytaylik, $y=0$ bo'lsin. Unda (2) tenglikka ko'ra

$$3x-2\cdot 0-8=0, \qquad 3x=8, \qquad x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Demak, $\left(2\frac{2}{3},0\right)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotadi. Bu

$(0, -4)$, $\left(2\frac{2}{3},0\right)$ nuqtalarni tekislikda yasab, ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz (2-chizma).



2-chizma

Tenglamasi $3x-2y-8=0$ bo'lgan to'g'ri chiziqning tekislikda joylashishi 2-chizmada tasvirlangan. ►

Ravshanki, (1) tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati (vaziyati) tenglamadagi A, B, C sonlarga bog'liq bo'ladi.

1) (1) tenglamada $C=0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax+By=0$$

ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi.

2) (1) tenglamada $A=0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$By + C = 0, \text{ ya'ni } y = -\frac{C}{B} \quad (B \neq 0)$$

ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel bo'ladi.

3) (1) tenglamada $B = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax + C = 0, \text{ ya'ni } x = -\frac{C}{A}$$

ko'rinishiga kelib, bu to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'ladi.

4) (1) tenglamada $A = C = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$By = 0, \text{ ya'ni } y = 0$$

ko'rinishiga kelib, bu to'g'ri chiziq OX o'qini ifodalaydi.

5) (1) tenglamada $B = C = 0$ bo'lsin. Bu holda (1) tenglama

$$Ax = 0, \text{ ya'ni } x = 0$$

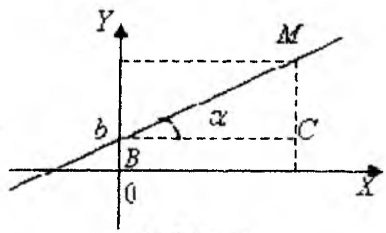
ko'rinishga kelib, bu to'g'ri chiziq OY o'qini ifodalaydi.

Demak, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax + By + C = 0$$

da $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan ham o'tmaydi, koordinata o'qlariga parallel ham bo'lmaydi.

1^0. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror ℓ to'g'ri chiziqni olaylik. Bu to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel bo'lmasin. Binobarin, ℓ to'g'ri chiziq OX o'qini kesib o'tadi. To'g'ri chiziqning OY o'qi bilan kesishgan nuqtani B, OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik (3-chizma).



3-chizma

Ravshanki, $B = B(0;b)$ bo‘lib, b esa OB kesmaning uzunligi.

To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x, y)$ nuqtani olamiz. Keltirilgan chizmadan ko‘rinadiki, BMC – to‘g‘ri burchakli uchburchak, $\angle CBM = \alpha$, $BC = x$, $MC = y - b$.

BMC uchburchakdan

$$tg\alpha = \frac{y-b}{x}$$

bo‘lishini topamiz. Bu miqdor to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deyiladi va k bilan belgilanadi:

$$k = tg\alpha.$$

Natijada

$$k = \frac{y-b}{x} \text{ bo‘lib, undan}$$

$$y = kx + b \qquad (3)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Demak, to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtaning x va y koordinatalari (3) tenglama bilan bog‘langan.

Ushbu

$$y = kx + b$$

tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi.

(3) tenglama k va b larga bog‘liq bo‘lib, to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi vaziyati shu k va b lar bilan to‘liq aniqlanadi.

Masalan, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $b = 2$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y = x + 2$$

bo‘ladi, chunki $k = tg\frac{\pi}{4} = 1$.

Eslatma. *Agar to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi*

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

da $B \neq 0$ *bo'lsa, uni to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyent tenglamasiga keltirish mumkin.*

Haqiqatdan ham, (4) tenglamani y ga nisbatan yechib,

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

so'ng

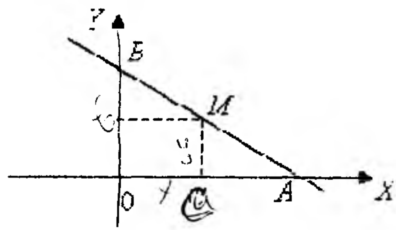
$$k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$$

deyilsa, unda (4) tenglama ushbu

$$y = kx + b$$

ko'rinishga keladi. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyent tenglamasidir.

2^0. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi. Aytaylik, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi va biror ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Bu ℓ to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tmasin va u OX o'qidan $a = OA$ kesmani, OY o'qidan esa $b = OB$ kesmani ajratsin (4-chizma).



4-chizma

Qaralayotgan to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M = M(x, y)$ nuqtani olamiz. Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki:
OAB, CAM uchburchaklar to'g'ri burchakli uchburchaklar, $OC = x$, $MC = y$, $CA = a - x$, $OB = b$, $OA = a$

Endi ΔOAB va ΔCAM uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib topamiz:

$$\frac{MC}{OB} = \frac{CA}{OA}, \text{ ya'ni } \frac{y}{b} = \frac{a - x}{a}.$$

Keyingi tenglikdan

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}$$

bo'lib undan

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning x va y koordinatalari (5) tenglama bilan bog'langan.

Ushbu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

tenglama to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi.

(5) tenglama a va b larga bog'liq bo'lib, to'g'ri chiziqning tekislikdagi holati shu a va b lar bilan to'liq aniqlanadi.

Masalan, OX o'qidan 2 birlik $(a=2)$, OY o'qidan 3 birlik $(b=3)$ kesma ajratadigan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$

bo'ladi.

Eslatma. *Agar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi*

$$Ax+By+C=0$$

da $C\neq 0,\quad A\neq 0,\quad B\neq 0$ *bo'lsa, uni to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasiga keltirish mumkin.*

Haqiqatan ham, (4) tenglamaning ikki tomonini $-C$ ga bo'lib,

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1,$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$$

[illegible]

$$a=-\frac{C}{A}, \qquad b=-\frac{C}{B}$$

deyilsa, unda (4) tenglama ushbu

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ko'rinishga keladi. Bu to'g'ri chiziqning kesmalar bo'yi tenglamasidir.

7.2. To'g'ri chiziqqa oid masalalar

1^0. Ikki to'g'ri chiziq orasida burchak. Ikki to' chiziqning parallellik hamda perpendikulyarlik shartl Tekislikda ikkita ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlarni qaraylik, ℓ_1 to' chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y=k_1x+b_1\ ,$$

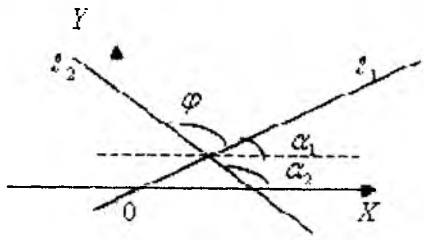
ℓ_2 to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi esa

$$y=k_2x+b_2$$

bo'lsin. Bunda

$$k_1=tg\alpha_1, \quad k_2=tg\alpha_2$$

(5-chizma).



5-chizma

ℓ_1 to'g'ri chiziqni M nuqta atrofida soat strelkasiga teska tomonga uni ℓ_2 to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha buri natijasida hosil bo'lgan φ burchak $(0\le\varphi<\pi)$, ikki ℓ_1 va ℓ

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi.

Yuqorida keltirilgan 5-chizmadan ko'rinadiki, φ burchak

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1}.$$

Demak,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (6)$$

bo'lib, u ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini aniqlab beradi.

Masalan, ushbu

$$y = -\frac{1}{7}x + 2, \qquad y = \frac{3}{4}x + 3$$

to'g'ri chiziqlar uchun

$$k_1 = -\frac{1}{7}, \qquad k_2 = \frac{3}{4}$$

bo'lib, ular orasidagi α burchakning tangensi (6) formulaga ko'ra

$$tg\alpha = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21 + 4}{28 - 3} = 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\alpha = 45^\circ$$

bo'ladi.

Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\alpha = 0$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi. Ayni paytda

$$tg0 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$$

bo'lib,

$$k_1 = k_2 \qquad (7)$$

bo'ladi. (7) munosabat ikki to'g'ri chiziqning parallellik shar ifodalaydi.

Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak $\alpha =$

bo'lsin. Ravshanki, bu holda to'g'ri chiziqlar perpendikul bo'ladi. Ayni paytda

$$tg\frac{\pi}{2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty$$

bo'lib,

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0, \text{ ya'ni}$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad \left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right) \qquad (8)$$

bo'ladi. (8) munosabat ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyar shartini ifodalaydi.

Eslatma. *Aytaylik, ikki to'g'ri chiziq umumiy ko'rinishda tenglamalari*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2},$$

perpendikulyarlik sharti esa

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

bo'ladi.

2^0. Bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chizi tenglamalari. Tekislikda tayin $M_1 = M_1(x_1, y_1)$ nuqta berilga bo'lsin. Shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni (to'g'ri chizi tenglamasini) topamiz. To'g'ri chiziqni, uning burcha koeffitsiyentli tenglamasi

$$y = kx + b \qquad (9)$$

ko'rinishida izlaymiz. Bu to'g'ri chiziq berilgan M_1 nuqta orqal o'tishi lozim. Binobarin, M_1 nuqtaning koordinatalari x_1 va y_1 la tenglamani qanoatlantiradi.

$$y_1 = kx_1 + b \qquad (10)$$

(9) va (10) tengliklarni hadlab ayirib

$$y - y_1 = kx + b - (kx_1 + b),$$

yoki

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (11)$$

tenglamani topamiz.

Bu (11) tenglama berilgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Agar (11) tenglamadagi k tayin son bo'lsa, u holda (11) tenglama (x_1, y_1) nuqtadan o'tuvchi tayin bitta to'g'ri chiziq bo'ladi.

Agar (11) tenglamadagi k turli qiymatlarni qabul qiluvchi parametr bo'lsa, u holda (11) tenglama (x_1, y_1) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi bo'ladi.

Misol. *$P(3,2)$ nuqtadan o'tuvchi, ushbu*

$$y = \frac{4}{3}x - 7 \qquad (12)$$

to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

◄Izlanayotgan to'g'ri chiziq (12) to'g'ri chiziqqa parallel bo'lishi kerakligidan, ularning burchak koeffitsiyentlari bir xil bo'ladi.

$$y - y_1 = \frac{4}{3}(x - x_1)$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq $P(3,2)$ nuqtadan o'tadi. Demak,

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$$

yoki

$$y = \frac{4}{3}x - 2$$

bo'ladi. Bu izlanayotgan to'g'ri chiziqdir. ►

Aytaylik, tekislikda ikkita $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2,$
nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri ch
tenglamasini topish uchun, avvalo $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuv
to'g'ri chiziq tenglamasini (11) formulaga ko'ra yozib olamiz:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Bu to'g'ri chiziq $M_2(x_2, y_2)$ nuqtadan o'tishi ke
Demak,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k ning bu qiymatini (11) tenglamadagi k ning o'rniga qo'ys
unda

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (13)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu berilgan $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2$
nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Masalan, $M_1(2,3)$, $M_2(4,5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g
chiziq tenglamasi

$$\frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{x - 2}{4 - 2},$$

ya'ni

$$y = x + 1$$

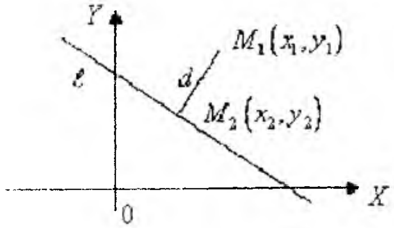
bo'ladi.

3^0. **Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqach bo'lgan masofa.** Tekislikda ushbu

$$Ax + By + C = 0$$

... bilan berilgan ℓ to‘g‘ri chiziq va $M_1(x_1, y_1)$ nuqtani ...

M_1 nuqtadan ℓ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi M_1 nuqtadan ℓ to‘g‘ri chiziqqacha ... deyiladi (6-chizma).



6-chizma

Perpendikulyarning ℓ chiziq bilan kesishish nuqtasi $M_2(x_2, y_2)$ bo‘lsin. Demak, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa M_1M_2 kesmaning uzunligi bo‘ladi. Uni d bilan belgilaymiz.

Ushbu

$$Ax + By + C = 0,$$

$$Bx - Ay + C_1 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi, chunki bu to‘g‘ri chiziqlar uchun perpendikulyarlik sharti bajariladi:

$$A \cdot B + B \cdot (-A) = AB - AB = 0.$$

Unda perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan o‘tganligini e’tiborga olib, uning tenglamasi

$$B \cdot (x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

bo‘lishini topamiz. Ayni paytda, bu to‘g‘ri chiziq $M_2(x_2, y_2)$ nuqtadan ham o‘tadi. Demak,

$$B \cdot (x_2 - x_1) - A(y_2 - y_1) = 0$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan

$$B\cdot(x_2-x_1)=A(y_2-y_1)$$

ya'ni

$$\frac{x_2-x_1}{A}=\frac{y_2-y_1}{B}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar bu nisbatlarni t bilan belgilasak,

$$\frac{x_2-x_1}{A}=\frac{y_2-y_1}{B}=t$$

unda

$$x_2-x_1=At, \qquad x_2=x_1+At,$$

$$y_2-y_1=Bt, \qquad y_2=y_1+Bt$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{A^2+B^2}\cdot|t| \qquad (14)$$

Endi $M_2(x_2,y_2)$ nuqta qaralayotgan $Ax+By+C$ to'g'ri chiziqda yotishini e'tiborga olib topamiz:

$$Ax_2+By_2+C=A(x_1+At)+B(y_1+Bt)+C=$$

$$=(Ax_1+By_1+C)+t(A^2+B^2)=0$$

Keyingi tenglikdan

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2} \qquad (15)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, (14) va (15) tengliklardan

$$d=\sqrt{A^2+B^2}\cdot|t|=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (16)$$

bo'ladi. Bu berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo' masofani topib beradigan formuladir.

Masalan, $M_1(3,-4)$ nuqtadan

$$6x-8y+31=0$$

to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa (16) formulaga ko'ra

$$d=\frac{|6\cdot 3-8\cdot(-4)+31|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{18+32+31}{10}=8{,}1$$

Mashqlar

1. Ushbu

a) [illegible] 0, b) $y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}$, d) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$

tenglamalar tekislikda tasvirlansin.

2. Ushbu $10x+5y+12=0$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti topilsin.

3. $2x+5y-15=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab yorug'lik nuri [illegible]lab, u abssissalar o'qigacha borib, undan qaytadi. Qaytgan nurning tenglamasi yozilsin.

4. Rombning diagonallari 8 va 3 birlikka teng. Agar katta diagonalini OX o'q uchun, kichgina diagonalini OY o'qi qabul qilsak, romb tomonlarining tenglamasi yozilsin.

5. Ushbu $3x+y-2=0$, $x-3y+1=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

6. Ushbu $2x-y-3=0$, $x-3y-4=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi hamda $x+y=1$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

7. Uchlari $A(12;0)$, $B(1;8)$, $C(0;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning B nuqtasidan AC tomongacha bo'lgan masofa [illegible]

8. Yorug'lik nuri OX o'qiga qanday burchak ostida yo'nalganda qaytgan nur $A(-2;\sqrt{3})$ ва $B(-3;2\sqrt{3})$ nuqtalardan

8-MA'RUZA

Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Biz sodda ikkinchi tartibli egri chiziqlar- aylana, el giperbola, parabola va ularning xossalarini keltiramiz.

8.1. Aylana

Ma'lumki, tekislikda berilgan (tayin) nuqtadan bar uzoqlikda joylashgan nuqtalar (tekislik nuqtalari) to'plami ayl berilgan nuqta esa aylana markazi deyiladi.

Endi aylananing tenglamasini keltirib chiqarish maqsa tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini va $M_0 = M_0(x_0,$ nuqtani olamiz. Ravshanki, bu nuqtadan r masofada $(r > 0)$ j lashgan nuqtalar (bunday nuqtalar to'plami aylana bo'ladi) o' ruvchi nuqtalar bo'ladi. Bunday nuqtalardan birini $M = M(x,$ deylik. $M_0(x_0, y_0)$ va $M(x, y)$ nuqtalar orasidagi masofa

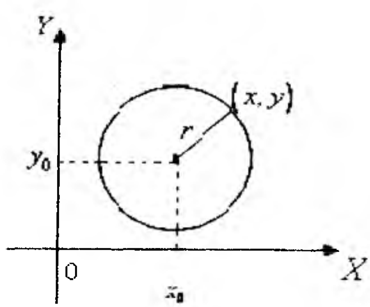
$$M_0M = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikdan

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \qquad (1)$$

bo'lishi kelib chiqadi.



1-chizma

Shunday qilib, aylanada joylashgan o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog'lovchi tenglamaga ega bo'ldik. Bu (1) tenglama aylananing sodda tenglamasi deyiladi, r aylana radiusi deyiladi.

Demak, aylananing tenglamasi markaz deb atalgan (x_0, y_0) nuqtaga hamda r radiusga bog'liq bo'lib, ular bilan aylananing tekislikdagi holati to'liq aniqlanadi.

Xususan, markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasi quyidagicha

$$x^2+y^2=r^2$$

bo'ladi.

Masalan, markazi (-1,2), radiusi 5 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25$$

bo'ladi.

Aylana bilan umumiy bitta $M(x_1,y_1)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan urinma deyiladi.

Ushbu

$$x^2+y^2=r^2$$

aylananing (x_1,y_1) nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi quyidagi

$$x_1x+y_1y-r^2=0 \qquad (2)$$

ko'rinishga ega.

Masalan, ushbu $x^2+y^2=8$ aylananing (2,-2) nuqtasidan o'tuvchi urinmaning tenglamasi

$$2x+(-2)y-8=0, \text{ ya'ni } x-y-4=0$$

bo'ladi.

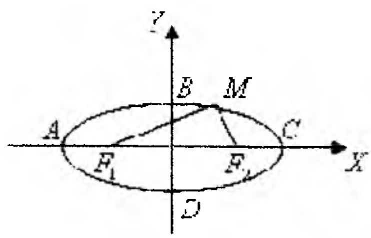
8.2. Ellips

Tekislikda ikkita tayin nuqtalarni olaylik. Tekislikning bu nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalari to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) elli deyiladi.

Endi ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Ta'rif keltirilgan tayin nuqtalardan birini F_1, ikkinchisini F_2 orq belgilaymiz.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini quyidagic quramiz:

F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi (O o'qi), F_1 F_2 kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o'qi perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi (OY o'qi) d olamiz (2-chizma).



2-chizma

Aytaylik, F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofa $2c$ g $(c>0)$ teng bo'lsin. U holda bu nuqtalarning koordinatalari mo ravishda $(-c,0)$ va $(c,0)$ bo'ladi:

$$F_1(-c,0), \quad F_2(c,0).$$

Odatda, F_1 va F_2 nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi.

Ellipsda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Unda ellip ta'rifiga binoan F_1M va F_2M masofalar yig'indisi o'zgarma songa teng bo'ladi. Bu o'zgarmas sonni $2a$ deylik $(a>0)$.

Demak,

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (3)$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$F_1M = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Unda (3) ga ko'ra

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

bo'ladi.

Bu tenglikni quyidagicha

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

yozib, uning ikki tomonini kvadratga ko'tarsak, unda

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

bo'ladi. Bunda esa

$$x^2+2cx+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$$

yoki

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglik kelib chiqadi. Keyingi tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarish natijasida

$$\left(a^2-cx\right)^2=a^2\left((x-c)^2+y^2\right),$$

yoki

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

hosil bo'ladi.

Ravshanki, $2a>2c$ ya'ni $a>c$ bo'lganligi uchun $a^2-c^2>0$ bo'ladi. Uni b^2 bilan belgilaymiz:

$$b^2=a^2-c^2.$$

Natijada

$$x^2 \cdot b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

bo‘lib, undan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib ellipsdagi o‘zgaruvchi $M(x, y)$ nuqta[n] koordinatalari x va y larni bog‘lovchi tenglama hosil bo‘ldi. (4) tenglama ellipsning sodda tenglamasi deyiladi.

Ellips tenglamasi (4) da x ni $-x$ ga, y ni $-y$ almashtirilganda (4) tenglama o‘zgarmaydi. Demak, ellips (yo egri chiziq) koordinata o‘qlariga nisbat simmetrik joylashgan.

Agar (4) tenglamada $y = 0$ deyilsa, unda

$$x^2 = a^2, \qquad x = \pm a$$

bo‘ladi. Demak, ellips OX o‘qini ikki $A(-a, 0)$, $C(a,$ nuqtalarda kesadi.

Agar (4) tenglamada $x = 0$ deyilsa, unda

$$y^2 = b^2, \qquad y = \pm b$$

bo‘ladi. Demak, ellips OY o‘qini ikki $B(0, b)$, $D(0,-$ nuqtalarda kesadi.

Odatda, $A(-a, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(0, -b)$ nuqta[l] ellipsning uchlari deyiladi. AC кесма ellipsning katta o‘qi, B[D] kesma ellipsning kichik o‘qi deyiladi.

Ravshanki, AC kesmaning uzunligi $2a$, BD kesmani[ng] uzunligi esa $2b$ ga teng. Demak, (4) tenglamada a ellips kat[ta] yarim o‘qi, b esa kichik yarim o‘qi bo‘ladi.

Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan berilgan ellipsni qaraylik. Bu ellipsning fokusla[r] orasidagi masofa $2c$ ga teng.

Ushbu

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

[illegible] ellipsning ekssentrisiteti deyiladi. Ma'lumki, $a>c$. [illegible], ellipsning ekssentrisiteti uchun

$$0<\varepsilon<1$$

[illegible] Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, $c=0$ bo'lib, ellips aylana bo'lib [illegible]

Ellipsning ekssentrisiteti ellipsning siqilish darajasini [illegible] Haqiqatdan ham, (4) munosabatdan, $b^2=a^2-c^2$ [illegible] e'tiborga olib topamiz:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, ε ning ortib borishi bilan $\frac{b}{a}$ [illegible] kamaya boradi, binobarin, ellips tortila boradi.

1-Misol. *Katta o'qi 10 ga, ekssentrisiteti 0,8 ga teng [illegible] ellipsning tenglamasi topilsin.*

◀Shartga ko'ra $2a=10$. Demak, $a=5$. Ma'lumki [illegible] ekssentrisitet

$$\varepsilon=\frac{c}{a}, \qquad c=a\cdot\varepsilon$$

[illegible] $5\cdot 0,8=4$ bo'ladi. $b^2=a^2-c^2$ bo'lishidan

$$b^2=25-16=9, \qquad b=3$$

[illegible] kelib chiqadi. Izlanayotgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

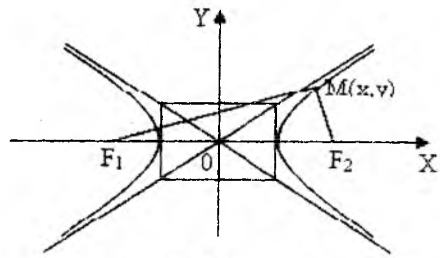
[illegible] ▶

8.3. Giperbola

Tekislikda ikkita tayin nuqtalarni olaylik. Tekislikning nuqtalargacha bo'lgan masofalari ayirmasi o'zgarmas songa bo'ladigan nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o giperbola deyiladi.

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqara Ta'rifda keltirilgan nuqtalarni F_1 va F_2 orqali belgilaymiz.

F_1 va F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abss o'qi, F_1F_2 kesmaning o'rtasidan o'tuvchi hamda abssissa o' perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni ordinata o'qi koordinatalar sistemasini quramiz (3-chizma).



3-chizma

Agar F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofani $2c$ ($c >$ deyilsa, unda bu nuqtalarning koordinatalari mos ravishda $(-c,$ va $(c,0)$ bo'ladi:

$$F_1(-c,0), \quad F_2(c,0).$$

Bu F_1 va F_2 nuqtalar giperbolaning fokuslari deyiladi.

Giperbolada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Un giperbola ta'rifiga binoan F_1M va F_2M masofalar ayirm o'zgarmas songa (uni $2a$ deyilsa) teng bo'lib, $F_1M - F_2M = 2a$ $F_2M - F_1M = -2a$, umuman

$$F_1M - F_2M = \pm 2a$$

[illegible]

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Demak,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

[illegible]

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

[illegible] lipsning tenglamasini keltirib chiqarishdagi [illegible] ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, so‘ng lozim [illegible] shlarni bajarib, natijada

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

[illegible] bunda $b^2 = c^2 - a^2$, $(a < c)$.

Shunday [illegible] ilib, giperboladagi o‘zgaruvchi $M(x,y)$ [illegible] alari x va y larni bog‘lovchi tenglama hosil [illegible] na giperbolaning sodda tenglamasi deyiladi.

[illegible] am koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik [illegible] zmada tasvirlangan. Giperbola ikki qismdan [illegible] lar uning shoxchalari deyiladi.

Agar (6) te[illegible]glamada $y = 0$ deyilsa, unda

$$x^2 = a^2, \qquad x = \pm a$$

[illegible] Demak, gi[illegible]perbola OX o‘qini $A(-a,0)$ va $B(a,0)$ [illegible] Bu nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. [illegible] ilan kesishmaydi.

[illegible]

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

[illegible] ekssentrisiteti deyiladi.

Agar $b^2 = c^2 - a^2$ bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

bo‘lib,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

bo‘ladi.

Giperbolaning ekssentrisiteti ham uning shakl xarakterlaydigan miqdordir.

Giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ni y ga nisbatan yechib

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \ ,$$

uni quyidagicha yozamiz:

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \ .$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, x yetarlicha katta bo‘lganda, $\frac{a^2}{x^2}$ nisb 0 ga yaqin bo‘lib,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

miqdor 1 ga yaqin bo‘ladi.

Natijada ushbu

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \approx \pm\frac{b}{a}x$$

munosabat hosil bo‘ladi.

Demak, x yetarlicha katta bo‘lganda giperbol nuqtalarining ordinatalari ushbu

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

to‘g‘ri chiziqlar nuqtalarining ordinatalariga yetarlicha yaqin bo‘ladi. Bu

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi (3-chizma).

2-Misol. *Ushbu*

$$16x^2-25y^2=400$$

giperbolaning fokuslari, ekssentrisiteti va asimptotalari topilsin.

◄ Agar tenglamaning ikki tomonini 400 ga bo‘lsak, unda giperbolaning tenglamasi quyidagi

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

ko‘rinishga keladi.

Demak,

$$a^2=25,\quad b^2=16,\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41},$$

$$F_1=F_1\left(-\sqrt{41},0\right),\quad F_2=F_2\left(\sqrt{41},0\right),$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}$$

Asimptotalari esa

$$y=\frac{4}{5}x,\quad y=-\frac{4}{5}x$$

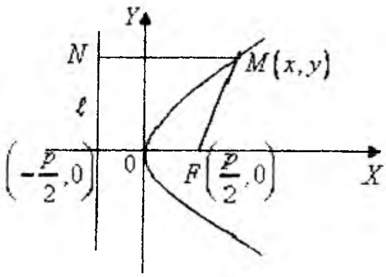
bo‘ladi ►

8.4. Parabola

Tekislikda tayin ℓ to‘g‘ri chiziq va bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan tayin F nuqtani olaylik. Tekislikning ℓ to‘g‘ri chiziq hamda F nuqtadan baravar uzoqlikda bo‘lgan nuqtalari to‘plami (nuqtalarning geometrik o‘rni) parabola deyiladi.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz.

F nuqtadan o‘tuvchi va ℓ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni abssissa o‘qi (OX o‘qi), F nuqta va ℓ to‘g‘ri chiziq orasidagi kesmaning o‘rtasidan o‘tuvchi va abssissa o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ordinata o‘q (OY o‘qi) deb, koordinatalar sistemasini quramiz (4-chizma).



4-chizma

F nuqta bilan ℓ to‘g‘ri chiziq orasidagi masofani p deylik. Unda F nuqtaning koordinatasi $\left(\frac{p}{2},0\right)$

$$F=F\left(\frac{p}{2},0\right)$$

bo‘lib, ℓ to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$x=-\frac{p}{2}$$

bo‘ladi.

Bu $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta parabolaning fokusi, ℓ to‘g‘ri chiziq esa parabolaning direktrisasi deyiladi.

Parabolada ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Unda parabola ta’rifiga binoan

$$NM=FM$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$NM=x+\frac{p}{2}, \qquad FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Demak,

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Bu tenglikning ikki tomonini kvadratga ko'tarib, so'ng ma'lum bo'lgan soddalashtirishlarni bajarib

$$y^2=2px \qquad (7)$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib, paraboladagi o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtaning koordinatalari x va y larni bog'lovchi tenglama hosil bo'ladi. Bu (7) tenglama parabolaning sodda tenglamasi deyiladi.

Ravshanki, $x=0$ da $y=0$ bo'ladi. Demak, parabola koordinata boshidan o'tadi. Ayni paytda, uning tenglamasida y kvadratda qatnashgani uchun parabola OX o'qiga nisbatan simmetrik, x esa har doim musbat bo'lgani uchun parabola OY o'qining o'ng tomonida joylashgan bo'ladi (4-chizma).

3-Misol. *Ushbu $A(1,2)$ nuqtadan o'tuvchi parabola tenglamasi topilsin.*

◄Modomiki, izlanayotgan parabola $y^2=2px$ $A(1,2)$ nuqtadan o'tishi lozim ekan, unda bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi:

$$2^2=2p\cdot 1$$

Bu tenglamadan $p=2$ ekani kelib chiqadi. Demak,

$$y^2=4x.$$ ►

8.5. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi

Aytaylik, ushbu

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (8)$$

tenglik tekislikdagi o'zgaruvchi $N(x,y)$ nuqtaning x va y koordinatalari orasidagi bog'lanishni ifodalasin. Bunday nuqtalar to'plami (nuqtalarning geometrik o'rni) umuman aytganda egri chiziq bo'ladi. U ikkinchi tartibli egri chiziq, (8) tenglama esa ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'rifda "umuman aytganda" deg[an] ibora ishlatildi. Bunday deyilishining boisi, (8) tenglamaga h[ar] doim ham tekislikda geometrik shakl mos kelavermasligida.

Masalan,

$$2x^2+9y^2+10=0,$$

ya'ni

$$2x^2+9y^2=-10$$

tenglama tekislikda hech qanday shaklni ifodalamaydi.

Shunga o'xshash

$$2x^2+9y^2=0$$

tenglama tekislikda egri chiziqni emas, balki nuqtani ifodalaydi.

Endi (8) tenglama ba'zi ko'rinishlarida egri chiziqni ifodalashiga misollar keltiramiz.

4-misol. *Ushbu*

$$5x^2+7x-11y+6=0$$

tenglamani qaraylik.

◀Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$$A=5,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=7,\quad E=-11,\quad F=6$$

bo'lgan xususiy holi. Uni quyidagicha

$$11y=5x^2+7x+6,$$

ya'ni

$$y=\frac{5}{11}x^2+\frac{7}{11}x+\frac{6}{11}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Ravshanki,

$$y=\frac{5}{11}\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{6}{5}\right)=\frac{5}{11}\left(x+\frac{7}{5}\right)^2-\frac{5}{11}\cdot\frac{19}{25}=\frac{5}{11}\left(x+\frac{7}{5}\right)^2-\frac{19}{55}$$

koordinatalar sistemasidagi koordinatalar boshini ko'chirish natijasidan keyingi tenglama quyidagi

$$y_1=px_1^2$$

ko'rinishga keladi. Bu paraboladir.▶

5-misol. *Ushbu*

$$4x^2+5y^2+20x-30y+8=0$$

tenglamani qaraylik.

◄Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$A=4,\quad B=0,\quad C=5,\quad D=20,\quad E=-30,\quad F=8$

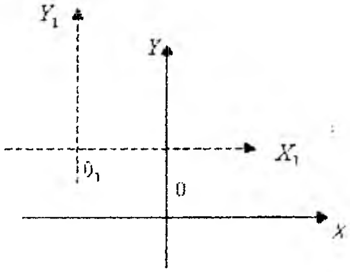
bo'lgan xususiy holi. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$4\left(x^2+5x+\frac{25}{4}\right)+5\left(y^2-6y+9\right)=25+45-8,$$

ya'ni

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+5\left(y-3\right)^2=62.$$

Agar koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish bilan uning koordinatalar boshini $\left(-\frac{5}{2};\,3\right)$ nuqtaga ko'chirilsa (5-chizma),



5-chizma

unda yangi $X_1 0_1 Y_1$ sistemada qaralayotgan tenglama ushbu

$$4x_1^2+5y_1^2=62$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikni ikki tomonini 62 ga bo'lib topamiz:

$$\frac{4x_1^2}{62}+\frac{5y_1^2}{62}=1.$$

Demak,

$$\frac{x_1^2}{\frac{31}{2}} + \frac{y_1^2}{\frac{62}{5}} = 1.$$

Bu ellipisdir.▶

6-misol. *Ushbu*

$$2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y - 16 = 0$$

tenglamani qaraylik.

◀Ravshanki, bu tenglama (8) tenglamaning

$A = 2, \quad B = 0, \quad C = -3, \quad D = 4, \quad E = 12, \quad F = -$

bo'lgan xususiy holi. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3\left(y^2 - 4y + 4\right) - 6 = 0,$$

$$2(x+1)^2 - 3(y-2)^2 = 6. \qquad (9)$$

Yuqoridagidek, koordinatalar boshini $(-1,2)$ nuqt koordinatalar o'qlarini esa parallel ko'chirish natijasida h bo'lgan yangi $X_1 0_1 Y_1$ koordinatalar sistemasida (9) tenglama ush

$$2x_1^2 - 3y_1^2 = 6$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tenglikning ikki tomonini 6 ga bo' topamiz:

$$\frac{x_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{2} = 1.$$

Bu tenglama giperbolani ifodalaydi.▶

Yuqorida keltirilgan ma'lumot va misollardan ko'rinadi ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

qanday egri chiziqni ifodalashi (8) tenglamaning koeffitsiyentlari bog'liq bo'ladi.

(8) tenglamadan bir muncha soddaroq bo'lgan

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (10)$$

tenglamani qaraylik.

Quyidagi tasdiq o‘rinli bo‘ladi:
agar (10) tenglamada

$$AC = 0$$

bo‘lsa, (10) tenglama parabolani ifodalaydi;
agar (10) tenglamada

$$AC > 0$$

bo‘lsa, (10) tenglama ellipsni ifodalaydi;
agar (10) tenglamada

$$AC < 0$$

bo‘lsa, (10) tenglama giperbolani ifodalaydi.

Bu tasdiq yuqoridagi misollarda qo‘llanilgan usul bilan isbotlanadi.

(8) tenglama koordinatalar sistemasini tanlash yo‘li bilan, sistemada qaralayotgan quyidagi kanonik ko‘rinishlardan biriga keltiriladi.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellips)

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (mavhum ellips)

3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ (ikki mavhum kesishuvchi chiziqlar)

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (giperbola)

5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ (ikki kesishuvchi chiziqlar)

6) $y^2 = 2px$ (parabola)

7) $y^2 - a^2 = 0$ (ikki parallel chiziqlar)

8) $y^2 + a^2 = 0$ (ikki parallel mavhum chiziqlar)

9) $y^2 = 0$ (ikki o‘zaro ustma-ust tushuvchi chiziqlar)

Mashqlar

1.Ellipsning ekssentrisiteti 0,8 ga, uning nuqtalar birining fokal radiuslari 2 va 3 ga teng, ellipsning katta absissalar o'qi bilan, uning markazi esa koordinatalar boshi b mos keladi deb olib, shu ellipsning tenglamasi tuzilsin.

2. $9x^2-16y^2=144$ giperbolada shunday nuq topilsinki, bu nuqtalar bilan giperbolaning chap fokusi orasi masofa ularning o'ng fokusigacha bo'lgan masofasidan ikki m kichik bo'lsin.

3.Giperbolaning fokuslari $F_1\left(\sqrt{7},0\right)$ ва $F_2\left(-\sqrt{7},\right.$ nuqtalarda joylashgan. Giperbola $A(2;0)$ nuqtadan o'tadi. Un asimptotalarining tenglamasi va ular orasidagi burchak topilsin.

4.Fokus $4x-3y-4=0$ to'g'ri chiziq va OX o'qi b kesishish nuqtasida yotgan parabola tenglamasi tuzilsin.

5. $4x+3y+10=0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik uzoqli yotgan $y^2=32x$ parabolaga tegishli nuqta topilsin.

9-MA'RUZA

Funksiya tushunchasi

Tabiat va texnik jarayonlarda, shuningdek fanning barcha sohalarida har hil miqdorlar qatnashadi. Bunda ayrim miqdorlar turli qiymatlarni qabul qilsa, ayrimlari esa faqat bitta son qiymatga ega bo'lib qolaveradi. Birinchi holdagi miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar, ikkinchi holdagi miqdorlar esa o'zgarmas miqdorlar deyiladi.

Masalan, yuqoriga otilgan jismning tezligi o'zgaruvchi miqdor bo'ladi, chunki uning tezligi avval kamaya boradi, so'ng nolga aylanadi va yerning tortish qonuniga ko'ra tezlik orta boradi. Uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'ladi, chunki har qanday uchburchakda ichki burchaklar yig'indisi 180° ga teng.

O'zgaruvchi miqdorlar x, y, z va h.k. harflar bilan belgilanadi va ularning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi.

Odatda, o'zgaruvchi miqdorning qabul qiladigan qiymatlari to'plami (haqiqiy sonlardan iborat to'plam) ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan hisoblanadi.

Masalan, o'zgaruvchi sifatida aylana radiusi olinadigan bo'lsa, bu o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami barcha musbat sonlardan iborat to'plam bo'ladi.

Ba'zan, x o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami $E(E \subset R)$ bo'lsin deyish o'rniga x o'zgaruvchi $E \subset R$ to'plamda o'zgaradi deymiz.

Matematikada bir qancha o'zgaruvchilar va ular orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi.

9.1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari)

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda $E(E \subset R)$ hamda $F(F \subset R)$ haqiqiy sonlar to'plamlarida o'zgarsin: $x \in E$, $y \in F$.

1-Ta'rif. *Agar E to'plamdan olingan har bir x son biror f qoidaga (yoki qonunga) ko'ra F to'plamning bitta ta y soni mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya aniqlan deyiladi.*

Bunda:

E to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi,

$\{y = f(x) : x \in E\} = F$ to'plam funksiyaning o'zgar sohasi,

x - erkli o'zgaruvchi, funksiya argumenti,

y - erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi deyiladi.

Ta'rifdagi x, y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi ning funksiyasi deyilishini

$$y = f(x) \qquad (1)$$

kabi yoziladi va "igrek teng ef iks" deb o'qiladi.

Ravshanki, har bir x ga boshqa qoidaga ko'ra bitta tayin mos qo'yiladigan bo'lsa, unda boshqa funksiya hosil bo'ladi. masalan, $y = \varphi(x)$ kabi yozilishi mumkin.

Eslatma. *Funksiya ta'rifida E va F to'plamlarni berilishi aytilgan bo'lsada, amaliyotda bu to'plamlar munosabatdan foydalanib topiladi. Jumladan,*

$$y = f(x)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) argument x ni shunday qiymatlaridan iborat to'plam bo'lishi kerakki, to'plamdan olingan har bir x ning qiymatida $y = f(x$ munosabat ma'noga ega bo'lsin. Masalan,

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

da, uning ma'noga ega bo'lishi uchun $4 - x^2 \geq 0$ bo'lishi kera Keyingi tengsizlikni yechamiz:

$$4 - x^2 \geq 0,\ x^2 - 4 \leq 0,\ (x-2)(x+2) \leq 0, -2 \leq x \leq 2.$$

Demak, qaralayotgan funksiyaning aniqlanish soha

...'plami) $E=[-2,2]$ bo'ladi. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi $E=[0,2]$ bo'ladi.

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha usullik, jadval, grafik va boshqa usullarda bo'lishi mumkin.

a) Analitik usul. Bu usulda x o'zgaruvchining har bir ...ymatiga ko'ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida ...lik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va boshqa ...llar) bajarilishi natijasida topiladi, ya'ni x va y o'zgaruvchilar ...sidagi bog'lanish formulalar bilan ifodalanadi.

Masalan,

$$y=x^2+x+1, \qquad y=\frac{1}{x^2-1}, \qquad y=\lg x.$$

Funksiyaning analitik usulda berilishida funksiya bir nechta ...mulalar yordamida ham aniqlanishi mumkin. Masalan,

$$y=\begin{cases} x+1, & agar \quad x\geq 0 \\ x^2+1, & agar \quad x<0. \end{cases}$$

b) Jadval usul. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi ...g'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi. Bu holda funksiya argumenti ...ning bir nechta tayin

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

...ymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

...dval tarzida ifodalanadi.

Funksiyaning jadval usulida berilishidan turli kuzatishlar va ...tiborlarda keng foydalaniladi.

d) Grafik usul. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi ...g'lanishni egri chiziq (grafik) amalga oshiradi. Funksiyaning ...fik usulidan ko'pincha tajriba bilan bog'liq ishlarda, ayniqsa, ...zi yozar apparatlardan foydalanishda qo'llaniladi. Bunda, ...g'lanishni ifodalovchi egri chiziqdan x ning kerakli qiymatidagi ...nksiya qiymati ko'chirib olinadi.

9.2. Funksiya grafigi

Faraz qilaylik,

$$y = f(x)$$

funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsin. E to'plamga tegi bo'lgan biror x_0 nuqtani olaylik. Ravshanki bu nuqtaga o'zgaruvchining biror qiymati mos keladi. Uni y_0 deylik. Bu son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi xususiy qiymati deyilad uni $f(x_0) = y_0$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$f(x) = y = 5x^2 - 3$$

funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(1) = 5 \cdot 1 - 3$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, $x = x_0$ va $y = f(x)$ funksiyan shu nuqtadagi qiymati $(y_0 = f(x_0))$ sonlar birgalikda $(x_0,$ juftlikni tashkil etib, u tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo' argument x ning E to'plamdan olingan har bir qiymat funksiyaning mos qiymati y $(f(x) = y)$ bo'lsin. Natijada, $(x,$ juftliklardan tuzilgan ushbu

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\} \qquad (2)$$

to'plam hosil bo'ladi.

Odatda, (2) to'plam (tekislik nuqtalarining geometrik o'r $y = f(x)$ funksiya grafigi deyiladi.

Funksiya grafigining tasviri uning xususiyatlarini chuqur tasavvur etishga yordam beradi.

Dastavval berilgan funksiya grafigini "nuqtalar" bo'yic tasvirlashni keltiramiz. Keyinchalik funksiya grafigini bataf o'rganamiz.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E to‘plamdan argumentning bir nechta bir-biriga yaqinroq bo‘lgan

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlarini olib, bu nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topamiz.

Aytaylik, ular

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

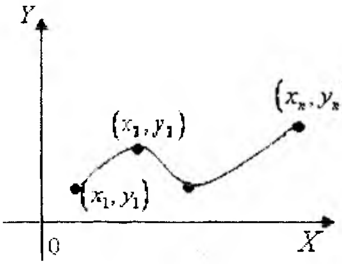
bo‘lsin $\left(y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)\right)$. Natijada

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

jadval hosil bo‘ladi. Bu jadvaldan foydalanib

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots (x_n, y_n)$$

juftliklarni tuzamiz. So‘ng, bu juftliklarni tekislikda tasvirlaymiz (1-chizma).



1-chizma

Bu nuqtalarni o‘zaro tutashtirishda hosil bo‘lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo‘ladi (taxminiy grafigi bo‘ladi).

9.3. Chegaralangan va monoton funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to‘plamda $(E \subset R)$ aniqlangan bo‘lsin.

2-ta’rif. *Agar shunday o‘zgarmas* M *son (m son) topilsaki,*

$\forall x \in E$ uchun

$$f(x) \le M \qquad (f(x) \ge m)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda yuqorida (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u E to'plamda chegaralangan deyiladi.

Ravshanki, agar $\forall x \in E$ uchun

$$|f(x)| \le p \ (p\text{-musbat son})$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda chegaralangan bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

funksiyaning $E = [0, +\infty)$ to'plamda chegaralangan bo'lishi isbotlansin.

◄Ravshanki, $\forall x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \ge 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya E da quyidan chegaralangan.

Ma'lumki, ixtiyoriy x uchun

$$0 \le (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$2x \le 1 + x^2,$$

$$\frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, $\forall x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Bu esa berilgan funksiyaning E da yuqorida chegaralanganligini bildiradi.

Shunday qilib berilgan funksiya $E=[0,+\infty)$ da ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan, binobarin funksiya E da chegaralangan bo'ladi.▶

Eslatma. *Chegaralangan funksiyaning grafigi OX o'qiga parallel bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasida joylashgan bo'ladi.*

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. *Agar funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lganda*

$$f(x_1)\le f(x_2) \qquad \left(f(x_1)<f(x_2)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

4-ta'rif. *Agar funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lganda*

$$f(x_1)\ge f(x_2) \qquad \left(f(x_1)>f(x_2)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=x^3$$

funksiya monotonlikka tekshirilsin.

◀Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,+\infty)$ bo'ladi. E to'plamdan ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib,

$$x_1<x_2$$

bo'lsin deylik. So'ng ushbu

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3$$

ayirmani qaraymiz. Uni quyidagicha yozamiz:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=$$

$$=\left(x_2^2+2\cdot\frac{1}{2}x_2x_1+x_1^2+\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)\cdot$$

$$(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right].$$

Ravshanki,

$$x_2-x_1>0, \qquad \left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0$$

Demak,

$$f(x_2)-f(x_1)>0, \text{ ya'ni } f(x_2)>f(x_1)$$

bo'ladi. Shunday qilib, berilgan funksiya uchun ixti $x_1\in E$, $x_2\in E$ va $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)<f(x_2)$ bo'lar Bu esa $f(x)=x^3$ funksiyaning $E=(-\infty,+\infty)$ da qat'iy o'su ekanini bildiradi. ►

Sodda tasdiqlarni keltiramiz:

a) *Agar* $f(x)$ *funksiya* E to'plamda o'su (kamayuvchi) bo'lib, C *o'zgarmas son bo'lsa, u holda* $f(x)$ *funksiya ham* E *to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

b) *Agar* $f(x)$ *funksiya* E *to'plamda o'suvchi bo* $c>0$ *bo'lsa, u holda* $c\cdot f(x)$ *funksiya* E *da o'suvchi,* c *bo'lsa,* $c\cdot f(x)$ *funksiya* E *to'plamda kamayuvchi bo'ladi.*

d) *Agar* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* E *to'pla o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda* $f(x)+g(x)$ *funksiya da o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

Masalan, biz yuqorida $f(x)=x^3$ funksiyan $E=(-\infty,+\infty)$ da o'suvchi ekanini isbotlagan edik. Keltiril ko'ra $\varphi(x)=-x^3$ funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ da ...yli bo'ladi.

9.4 Juft, toq va davriy funksiyalar

1°. Juft va toq funksiyalar

Aytaylik, E koordinata boshi O nuqtaga nisbatan ...ik to'plam, ya'ni $\forall x\in E$ uchun, $-x\in E$ bo'lsin. ...n, $[-2,2]$, $(-4,4)$ - simmetrik to'plamlar bo'ladi).

Bu E to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

...ta'rif. *Agar ixtiyoriy $x\in E$ uchun*

$$f(-x)=f(x)$$

bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya,

$$f(-x)=-f(x)$$

bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=x^2,\qquad g(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

...lar juft funksiyalar bo'ladi, chunki

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x),\quad g(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

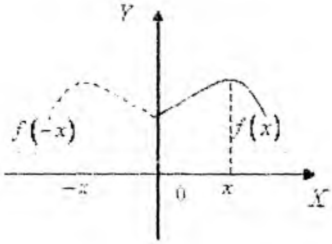
Ushbu

$$\varphi(x)=x^3+x$$

...esa toq funksiya bo'ladi, chunki

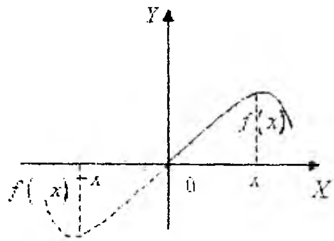
$$\varphi(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=-(x^3+x)=-\varphi(x).$$

Juft funksiyaning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik ...ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x\geq 0$ bo'lgan hol uchun ...ish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qiga nisbatan simmetrik ...ilish bilan berilgan funksiyaning grafigi topiladi (2-chizma).



2-chizma

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga ni
simmetrik bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x \geq 0$ b
hol uchun chizish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qi atrofida
tomonga 180° ga burish bilan funksiya grafigi topiladi (3-chiz



3-chizma

2^0. Davriy funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda be
bo'lsin.

6-ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas T son* $(T$
topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$1)\ x-T \in E, \qquad x+T \in E,$$

$$2)\ f(x)=f(x+T)=f(x-T)$$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, T son esa uning
deyiladi.

Agar T son $(T \neq 0)$ $f(x)$ funksiyaning davri bo'l
holda

$$n \cdot T \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ham funksiyaning davri bo'ladi.

Demak, davriy funksiyaning davrlari ko'p bo'ladi. Ular ichida eng kichik musbat bo'lgani (agar u mavjud bo'lsa) funksiyaning asosiy davri deyiladi.

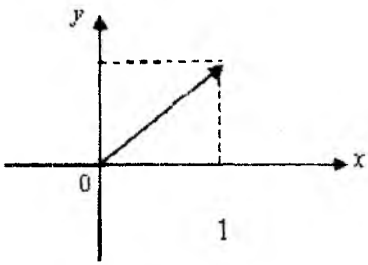
Aytaylik, $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T $(T>0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi, uzunligi T ga teng oraliqdagi (masalan, $[a, a+T]$) grafigini davriy davom ettirish bilan topiladi.

Ma'lumki, x haqiqiy sonning butun qismi (x dan katta bo'lmagan eng katta butun son) x ning funksiyasi bo'lib, uni $[x]$ kabi belgilanadi.

Endi

$$f(x) = x - [x]$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya x ning kasr qismini ifodalaydi va $[0,1]$ dagi grafigi quyidagicha bo'ladi (4-chizma):



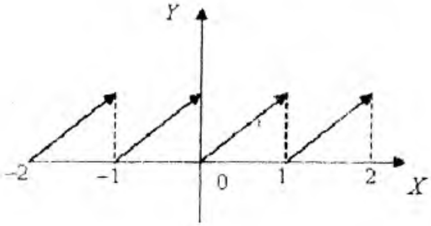
4-chizma

Qaralayotgan funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri $T = 1$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham,

$f(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x]$.

Bu davriy funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan:



5-chizma

9.5. Murakkab va teskari funksiyalar

1^0. Murakkab funksiya

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda be bo'lsin. Har bir $x \in E$ uchun berilgan funksiyaning qiymati topib, bunday qiymatlardan

$$F(f) = \{y = f(x) : x \in E\}$$

to'plamni hosil qilamiz. Ravshanki, bu funksiya qiymatlari to' bo'ladi.

Shu $f(x)$ to'plamda o'z navbatida $U = \varphi(y)$ fun berilgan deylik. Natijada E to'plamdan olingan har bir x ga y son (f – qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunda songa bitta U son (φ – qoidaga ko'ra) mos qo'yilib, E to'pl funksiya aniqlanadi. Uni murakkab funksiya deyilib

$$U = \varphi(f(x)) \qquad (3)$$

kabi belgilanadi.

(3) murakkab funksiya $y = f(x)$ hamda $U = \varphi(y)$ funksi yordamida hosil qilinadi.

Masalan,

$$U = \sqrt{x^2 + 1}$$

murakkab funksiya bo'lib, bu funksiya

$$U = \sqrt{y}, \qquad y = x^2 + 1$$

funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.

2^0. Teskari funksiya

$y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, ixti

$x_1, x_2 \in E$ va $x_1 \neq x_2$ uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsin. U berilgan funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)$ dan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x \in E$ nuqta topiladiki, $f(x) = y$ bo'ladi.

$F(f)$ to'plamdan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x \in E$ mos qo'yilsaki, $f(x) = y$ bo'lsa, unda $F(f)$ to'plamda aniqlangan funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya berilgan $f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyilib, uni $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Demak, $x = f^{-1}(y)$ shunday funksiyaki,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$y = f(x) = 2x + 1$$

funksiyani $E = [0,1]$ da qaraylik. Bu funksiyaga teskari funksiya topilsin.

◄Bu funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f) = [1,3]$ bo'ladi. $[1,3]$ da aniqlangan

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

funksiya berilgan $y = f(x) = 2x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi, chunki

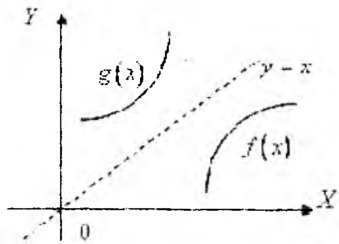
$$f^{-1}(y) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x\,.►$$

Eslatma. *Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyada x-argument, y esa uning funksiyasi. Bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x = f^{-1}(y)$ da y-argument, x esa uning funksiyasi. Demak, teskari funksiya grafigini yasashda abssissa o'qi sifatida OY o'qni,* *ordinata o'qi sifatida OX o'qni olish kerak bo'ladi. Bu hol noqulayliklar tug'diradi. Qulaylik maqsadida teskari funks argumentini ham x, uning funksiyasini y kabi bel quyidagicha*

$$y = g(x)$$

kabi yoziladi.

$y = f(x)$ ga nisbatan teskari bo'lgan $y = g(x)$ fu grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa n simmetrik ko'chirishdan hosil bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Mashqlar

1. Ushbu $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ funksiyaning $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ nuqtalardagi qiymatlari topilsin.

2. Ushbu

a) $y = \dfrac{3x-1}{x^2-3x+2}$, b) $y = \dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

3. Quyidagi funksiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

a) $f(x) = x^2 - \cos x$, b) $f(x) = \lg\left(x + \sqrt{1+\right.$

4. Quyidagi funksiyalar davriylikka tekshirilsin, bo'lsa, eng kichik musbat davri topilsin.

a) $f(x) = \sin^2 x$, b) $f(x) = \cos 4x$.

10-MA'RUZA

Sodda funksiyalar va ularning grafiklari

Sodda funksiyalar va ularning grafiklari o'quvchiga umu-[illegible] ma'lum bo'lsada, bu funksiyalarning oliy matematikada [illegible] e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni qisqacha [illegible]

10.1. Butun ratsional funksiya

Ushbu

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

[illegible] funksiya butun ratsional funksiya deyiladi, bunda [illegible] a_n o'zgarmas haqiqiy sonlar, n esa natural son. Bu funk-[illegible] aniqlanish to'plami (sohasi) $E = R = (-\infty, +\infty)$ bo'ladi.

Butun ratsional funksiyaning ba'zi muhim xususiy hollarini [illegible]

1°. **Chiziqli funksiya**. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega

$$y = ax + b, \qquad (2)$$

a va b o'zgarmas sonlar. Chiziqli funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ [illegible] bo'lib: $a > o$ bo'lganda o'suvchi, $a < o$ bo'lganda [illegible] funksiya bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $a > o$ bo'lib, ixtiyoriy [illegible] $x_1 < x_2$ uchun

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2) < 0$$

Bundan $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi [illegible] o'xshash $a < o$ bo'lganda chiziqli funksiyaning [illegible] bo'lishi ko'rsatiladi.

Biz 7 ma'ruzada to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli [illegible] bayon etgan edik. Demak, chiziqli funksiyaning [illegible] burchak koeffitsiyenti a ga ($a = tg\alpha$) va OY o'qidan b [illegible] ajratuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

2°. **Kvadrat funksiya.** Bu funksiya quyidagi ko'rinishga [illegible] bo'ladi

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (3)$$

bunda a, b, c o‘zgarmas sonlar. Kvadrat funksiya $E = (-\infty,$ to‘plamda aniqlangan.

Xususan, $a = 1$, $b = c = 0$ bo‘lganda

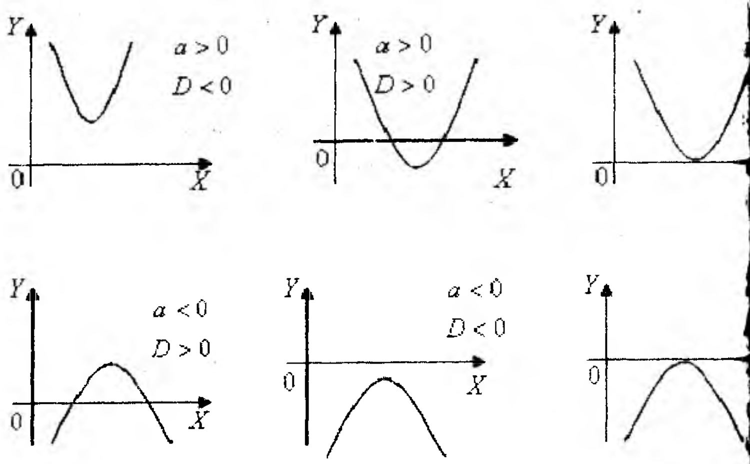
$$y = x^2$$

funksiyaga ega bo‘lamiz. Biz 8-ma’ruzada

$$y^2 = 2px$$

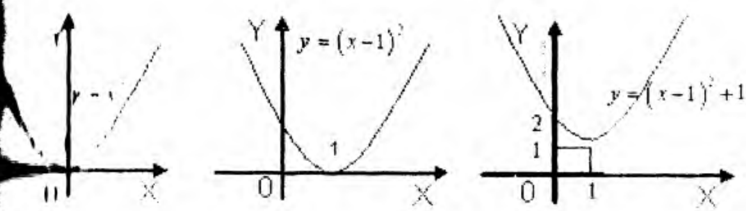
parabola va uning tekislikdagi tasvirini ko‘rgan edik. Xuddi sh o‘xshash $y = x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo‘li aniqlash qiyin emas.

Umuman, $y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigi par bo‘lib, uning tekislikdagi tasviri a hamda $D = b^2 - 4ac$ (kv uchhadning diskriminanti) larning ishoralariga bog‘liq bo‘la chizma):



1-chizma

Quyida ushbu $y = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)$ funksiya grafigini chizish jarayoni ko‘rsatilgan:



2-chizma

10.2. Kasr ratsional funksiya

Ushbu

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

ko'rinishdagi funksiya kasr ratsional funksiya deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hamda $b_0,b_1,\ldots,b_m$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, n va m natural sonlar. Bu funksiya x o'zgaruvchini kasr maxrajini nolga aylantiradigan qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan, ya'ni ushbu

$$E=(-\infty,+\infty)\setminus\left\{x: b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m=0\right\}$$

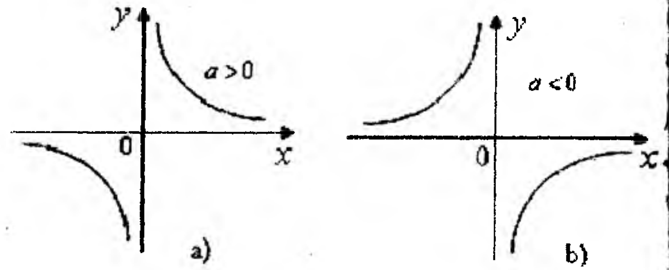
to'plamda aniqlangan.

Kasr ratsional funksiyaning ba'zi muhim xususiy hollarini ko'ramiz.

1^0. Teskari proporsional bog'lanish. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y=\frac{a}{x},$$

bunda a o'zgarmas son ($a\neq 0$). Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ bo'ladi. Qaralayotgan funksiyaning grafigi ikki bog'liq bo'lib, $a>o$ bo'lganda 3_a-chizmada tasvirlangan egri chiziq (teng yonli giperbola), $a<o$ bo'lganda esa 3_b-chizmada tasvirlangan egri chiziq bo'ladi:



3-chizma

Eslatma. *Yuqoridagi* $y=\frac{a}{x}$ *funksiyaning grafigiga k*

$$y=\frac{a}{x+b}$$

funksiyaning grafigini chizish mumkin.

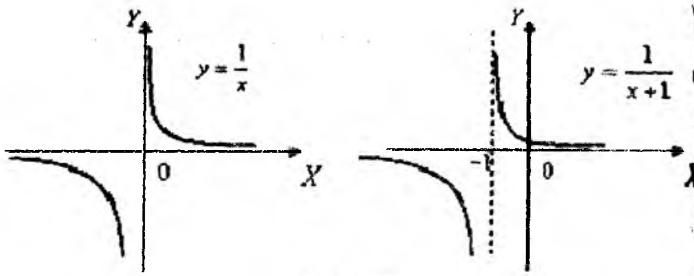
Masalan,

$$y=\frac{1}{x}$$

funksiyaning grafigiga ko‘ra

$$y=\frac{1}{x+1}$$

funksiyaning grafigini chizish jarayoni 4-chizmada ko‘rsatilga



4-chizma

2^0. **Kasr chiziqli funksiya.** Bu funksiya qu
ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

a,b,c,d - o'zgarmas haqiqiy sonlar, ($c\neq 0$). Kasr chiziqli funksiya $(-\infty,-\frac{d}{c})U(-\frac{d}{c},+\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Bu funksiyaning grafigi $y=\frac{a}{x}$ funksiya grafigi OX va OY o'qlari bo'yicha parallel ko'chirish bilan yasaladi.

Aytaylik, $a\neq 0$ bo'lsin. Bu holda

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})}=\frac{a}{c}\cdot\frac{(x+\frac{d}{c})+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

$\frac{d}{c}=\alpha,\quad \frac{a}{c}=\beta,\quad \frac{bc-ad}{c^2}=k$ deyilsa, unda

$$y=\frac{k}{x+\alpha}+\beta$$

Agar $a=0$ bo'lsa, u holda

$$y=\frac{k}{x+\alpha}$$

Misol *Ushbu*

$$y=\frac{3x+4}{x-1}$$

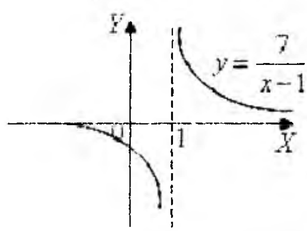
funksiya grafigi chizilsin.

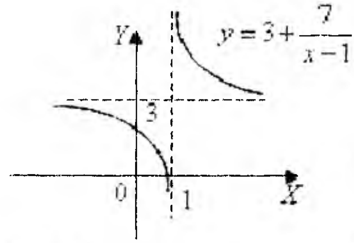
◄Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,1)\ U(1,+\infty)$ bo'ladi. Berilgan funksiyani quyidagicha yozamiz:

$$y=\frac{3x+4}{x-1}=\frac{x+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)}=\frac{x-1+\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)}=3+\frac{7}{x-1}.$$

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigi $\frac{7}{x-1}$ funk

grafigini ordinata o'qi bo'yicha yuqoriga 3 birlikka ko'tarish b topiladi (5-chizma). ▶





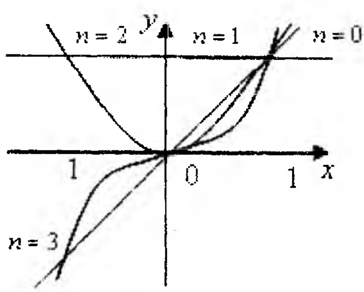
5-chizma

3^0. Darajali funksiya. Ushbu

$$y = x^n$$

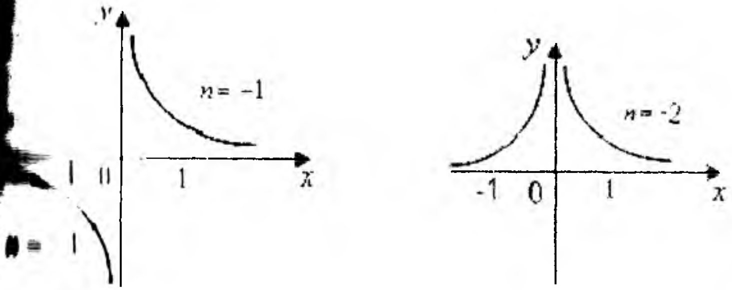
ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bunda n - bu son. Bu funksiya $n \geq 0$ bo'lganda $E = (-\infty, +\infty)$ to'plam $n < 0$ bo'lganda $E = (-\infty, 0)\ U(0, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Agar $n \geq 0$ bo'lsa, masalan, $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ bo' darajali funksiya grafigi $y=1$, $y=x$ to'g'ri chiziqlar, $y=x^2$ parab hamda $y=x^3$ egri chiziq (kubik parabola) lardan iborat bo'ladi chizma).



6-chizma

Agar $n < 0$ bo'lsa, masalan, $n=-1$, $n=-2$ bo'lsa, daraj funksiya grafigi $y = \frac{1}{x}$ giperbola, $y = \frac{1}{x^2}$ egri chiziq (ikkin giperbola) lardan iborat bo‘ladi (7-chizma).



7-chizma

Eslatma. *Agar darajali funksiyada daraja ko‘rsatkich* $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$ *teng bo‘lsa, bu holda funksiya ushbu* $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ *ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi* n *- juft bo‘lganda* $E = [0, +\infty)$ *to‘plam,* n *- toq son bo‘lganda* $E = (-\infty, +\infty)$ *to‘plam bo‘ladi. Ravshanki,*

$$x = y^n.$$

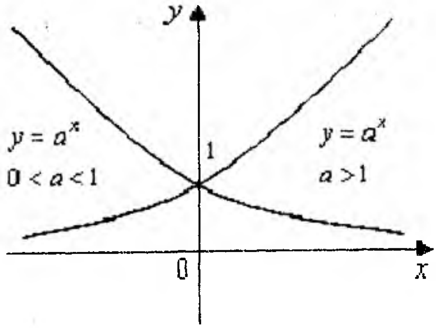
Demak, $y = \sqrt[n]{x}$ funksiya darajali funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo‘ladi. Binobarin, qaralayotgan funksiyaning grafigini darajali funksiya grafigiga ko‘ra topish mumkin.

4°. **Ko‘rsatkichli funksiya**. Ushbu

$$y = a^x$$

ko‘rinishdagi funksiya ko‘rsatkichli funksiya deyiladi, bunda $a > o$, $a \neq 1$.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E = (-\infty, +\infty)$ bo‘lib, $a > 1$ bo‘lganda funksiya o‘suvchi, $0 < a < 1$ bo‘lganda esa kamayuvchi bo‘ladi. Ko‘rsatkichli funksiyaning qiymati har doim musbat, grafigi OX o‘qidan yuqorida joylashgan (8-chizma).



8-chizma

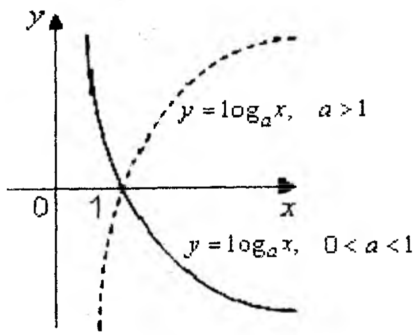
5°. Logarifmik funksiya. Ushbu

$$y = \log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi, bunda $a >$
$a \neq 1$.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E = (0, +\infty)$ to'pl
bo'ladi. Ravshanki $x = a^y$.

Demak, logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiy
nisbatan teskari funksiya bo'ladi. Binobarin, logarif
funksiyaning grafigini ko'rsatkichli funksiya grafigiga ko'ra top
mumkin (9-chizma).



9-chizma

10.3. Trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik funksiya

$$\sin\alpha, \qquad \cos\alpha, \qquad tg\alpha, \qquad ctg\alpha$$

haqidagi dastlabki ma'lumotlar o'quvchiga ma'lum. Unda [illegible] α graduslarda yoki radianlarda hisoblangan burchak [illegible]. Oliy matematikada bu funksiyalarning argumenti x ni [illegible], y x radianga teng deb qaraladi:

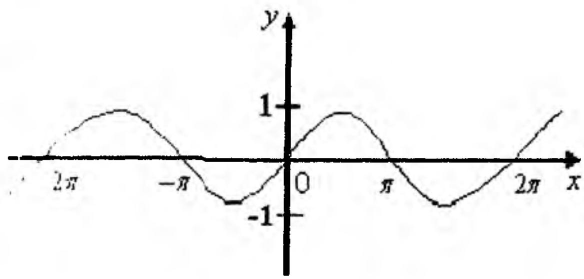
$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = tgx, \qquad y = ctgx.$$

1) $y = \sin x$ funksiyasi.

Bu funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y) = [-1, 1]$ bo'ladi:

$$-1 \le \sin x \le 1, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Bu toq, $T = 2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 10-chizmada tasvirlangan.



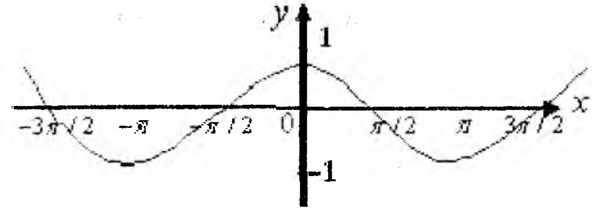
10-chizma

2) $y = \cos x$ funksiyasi.

Bu funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y) = [-1, 1]$ bo'ladi:

$$-1 \le \cos x \le 1, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Bu juft, $T = 2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 11-chizmada tasvirlangan.



11-chizma

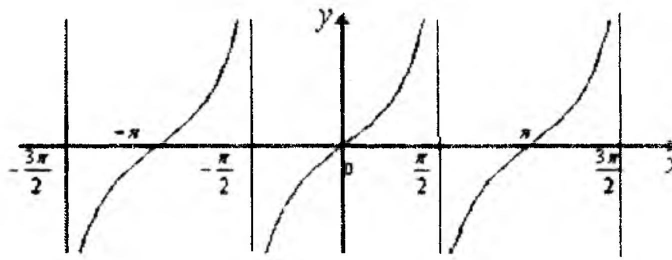
3) $y = tgx$ funksiyasi.

Bu funksiya x ning ushbu $x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2,.$

qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida, ya'ni

$$E = (-\infty, +\infty) \setminus \left\{ x : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

to'plamda aniqlangan. $y = tgx$ toq, $T = \pi$ davrli funksiya bo'
grafigi 12–chizmada tasvirlangan.



12-chizma

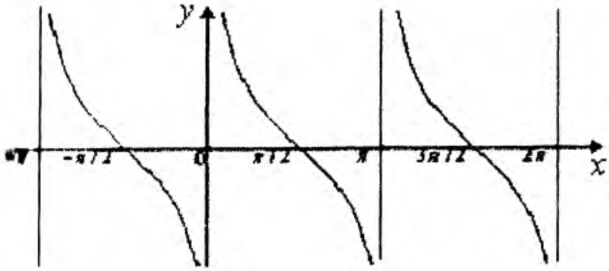
4) $y = ctgx$ funksiyasi.

Bu funksiya x ning ushbu $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2,.$
qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida, ya'ni

$E = (-\infty, +\infty) \setminus \{x : x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ to'plam

aniqlangan.

$y = ctgx$ toq, $T = \pi$ davrli funksiya bo'lib, graf
13-chizmada tasvirlangan.



13-chizma

10.4. Teskari trigonometrik funksiyalar

Ma'lumki, $y = \sin x$ funksiya uchun $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = X$ va $y \in [-1,1] = F$ bo'lib, X va F to'plamlar o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. $y = \sin x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $y = \arcsin x$ kabi yoziladi. Bu funksiya $[-1,1]$ da aniqlangan bo'lib, o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi.

Shunga o'xshash $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar mos ravishda $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ kabi belgilanadi.

Bu funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Endi teskari trigonometrik funksiyalarning xossalarini ko'ramiz.

1. $y = \arcsin x$ funksiyaning xossalari:

1) aniqlanish sohasi $[-1,1]$,

2) o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

3) toq funksiya $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

4) monoton o'suvchi.

$y = \arccos x$ funksiyaning xossalari:

1) aniqlanish sohasi $[-1,1]$,

2) o'zgarish sohasi $[0,\pi]$,

3) quyidagi munosabat o'rinli $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) monoton kamayuvchi.

$y = \operatorname{arc}tgx$ funksiyaning xossalari:

1) aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$,

2) o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

3) toq funksiya $\operatorname{arc}tg(-x) = -\operatorname{arc}tgx$,

4) monoton o'suvchi.

$y = \operatorname{arc}ctgx$ funksiyaning xossalari:

1) aniqlanish sohasi $(-\infty,+\infty)$,

2) o'zgarish sohasi $[0,\pi]$,

3) quyidagi munosabat o'rinli $\operatorname{arcc}tg(-x) = \pi - \operatorname{arcc}tgx$,

4) monoton kamayuvchi

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

1. $y = 3x^2 - 6x - 17$
2. $y = -2x^2 - 4x + 4$
3. $y = \dfrac{2x+5}{x-2}$
4. $y = 2^{1-x^2}$
5. $y = \arcsin(3x-1)$

11-MA'RUZA

Natural argumentli funksiya (sonlar ketma-ketligi) va uning limiti

11.1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi

Aytaylik, biror qoidaga ko'ra har bir natural n songa ($n \in N$) bitta x_n haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsin ($f : n \to x_n$). Unda, bu holda argumenti n bo'lgan funksiyaga ega bo'lamiz. Bunday funksiya natural argumentli funksiya deyiladi:

$$x_n = f(n).$$

Bu funksiya qiymatlaridan iborat ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots \qquad (1)$$

to'plam sonlar ketma-ketligi deyiladi va $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

$x_1, x_2, \ldots$ sonlar (1) ketma-ketlikning hadlari, x_n esa (1) ketma-ketlikning umumiy yoki n-hadi deyiladi.

Masalan, har bir natural n songa $\frac{1}{n}$ sonni mos qo'yish bilan ($n \to \frac{1}{n}$) ushbu

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n}$ bo'ladi.

Odatda, ketma-ketlik, uning umumiy hadi orqali belgilanadi.

Masalan,

1) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; $\quad \dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \ldots, \dfrac{n+1}{n}, \ldots,$

2) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; $\quad 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots,$

3) $x_n = aq^{n-1}; \quad a, aq, aq^2, \dots aq^{n-1}, \dots,$

4) $x_n = 5; \quad 5, 5, 5, \dots 5, \dots,$

5) $x_n = (-1)^{n+1}; \quad 1, -1, 1, -1, \dots (-1)^{n+1}, \dots$ - ketliklar bo'ladi.

Ketma-ketlikning har bir x_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ hadi o'qida bitta nuqtani tasvirlaydi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$$

ya'ni

$$\forall n \in N \ \ uchun \ \ x_n \le x_{n+1} \quad (\forall n \in N \ \ uchun \ \ x_n < x_{n+1}$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning hadlari uchun

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \dots \ge x_n \ge \dots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$$

ya'ni

$$\forall n \in N \ \ uchun \ \ x_n \ge x_{n+1} \quad (\forall n \in N \ \ uchun \ \ x_n > x_{n+1}$$

bo'lsa, (1) ketma-ketlik kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyi

O'suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

1-misol. *Ushbu*

$$x_n = \frac{n}{n+1} : \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

ketma-ketlik monotonlikka tekshirilsin.

◄Berilgan ketma-ketlikning

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \qquad x_{n+1} = \frac{n+1}{n+1+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

hadlarini olamiz. Bu hadlar uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+}$$

Ma'lumki, $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Demak,

$$x_{n+1} - x_n > 0$$

bundan $\forall n \in N$ uchun

$$x_n < x_{n+1}$$

kelib chiqadi. Berilgan ketma-ketlik qat'iy o'suvchi. ▶

Agar (1) ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta ... M sonidan kichik yoki teng, ya'ni

$$\forall n \in N \text{ uchun } x_n \le M$$

(1) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlikning har bir hadi har doim bitta ... m sonidan katta yoki teng, ya'ni

$$\forall n \in N \text{ uchun } x_n \ge m$$

(1) ketma-ketlik quyidan chegaralangan deyiladi.

Agar (1) ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan ...ralangan bo'lsa, (1) ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

Masalan,

1) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$: $2, \dfrac{5}{4}, \dfrac{10}{9}, \ldots, \dfrac{n^2+1}{n^2}, \ldots$

...ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi, chunki

$$\forall n \in N \text{ uchun } \quad x_n = \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \le 2$$

2) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$: $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{16}, \ldots, \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \ldots$

...ketlik quyidan chegaralangan bo'ladi, chunki

$\forall n \in N$ uchun $x_n \ge -\dfrac{1}{4}$,

3) $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$: $0, \dfrac{3}{4}, \dfrac{8}{9}, \ldots, \dfrac{n^2-1}{n^2}, \ldots$

...ketlik chegaralangan bo'ladi, chunki

$$\forall n \in N \text{ uchun } 0 \le x_n < 1,$$

bo'ladi.

11.2. Sonlar ketma-ketligining limiti

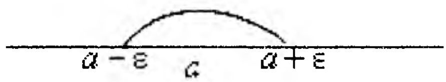
Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots \qquad (1)$$

ketma-ketlik va a soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a)$$

interval (sonlar to'plami) a nuqtaning atrofi (ε-atrofi) deyila bunda ε-ixtiyoriy musbat son (1-chizma).



1-chizma

1-Ta'rif. *Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atr olinganda ham (1) ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyin barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son x_n ketm ketlikning limiti deyiladi va*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \textit{yoki} \quad n \to \infty \quad \textit{da} \quad x_n \to a$$

kabi yoziladi.

Ta'rifdagi "biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadida iborasi "shunday natural n_0 topilib, $\forall n > n_0$ uchun" deb aytilishi bildiradi.

Demak, $\forall n > n_0$ uchun $x_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, \quad a+\varepsilon$ bo'lishi bunday hadlarning ushbu

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \qquad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

ya'ni

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

...zlikning bajarilishini keltirib chiqaradi.

Unda yuqorida keltirilgan ta'rifni quyidagicha ham aytsa ...ladi: agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 topilib, barcha $n > n_0$ uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, ... x_n ketma-ketlikning limiti deyiladi.

2-misol: *Ushbu*

$$x_n = \frac{1}{n}:$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

...ketlikning limiti 0 bo'lishi isbotlansin.

◀Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. Ravshanki berilgan ketma-...ketlikning limiti 0 bo'lishi uchun

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

...zlikning n ning biror qiymatidan boshlab o'rinli bo'lishini ...atish yetarli. Keyingi tengsizlik

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (3)$$

...yechib,

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

...lishini topamiz. Agar n_0 sifatida $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($[a] - a$ soninig a dan ...ta bo'lmagan butun qismi) olinsa, $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ unda barcha $n > n_0$ ... (3) demak, (2) tengsizlik bajariladi. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

...ladi. ▶

3-misol. *Ushbu* $x_n = (-1)^n$:

$$-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

ketma-ketlikning limitga ega emasligi ko'rsatilsin.

◀Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ketma-ketlik limitga bo'lib, u a ga teng bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ uch xususan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ son uchun shunday natural n_0 son topilad $\forall n > n_0$ da

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}$$

ya'ni

$$\left|(-1)^n - a\right| < \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Ravshanki, $n > n_0$ va $n = 2k$ $(k \in N)$ bo'lganda x_n $n > n_0$ va $n = 2k - 1$ $(k \in N)$ bo'lganda esa $x_n = -1$ bo'l Unda bir vaqtda

$$|a - (-1)| < \frac{1}{2}, \ |1 - a| < \frac{1}{2}$$

tengsizliklar bajariladi.

Ayni paytda

$$2 = \left|(1 - a) + (a + 1)\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

bo'lishidan, ma'noga ega bo'lmagan $2 < 1$ tengsizlik kelib chiqa Bu qilingan farazni, ya'ni $x_n = (-1)^n$ ketma-ketlikning limitiga bo'lsin deyilishi natijasida sodir bo'ladi. Demak, qaralayotg ketma-ketlik limitga ega emas. ▶

Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo'lsa, ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqd bo'ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

U holda $\alpha_n = x_n - a$ dan $|\alpha_n| < \varepsilon$ bo'lib, u cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Natijada

$$x_n = a + \alpha_n$$

bo'ladi. Masalan, $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ ketma-ketlik uchun $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ bo'lib, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo'lganligidan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari uchun $|x_n| > M$ bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va $\lim x_n = \infty$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n:$$

$$-1, 2, -3, 4\ldots$$

ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi, chunki

$$|x_n| = |(-1)^n n| = n$$

bo'lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n > M$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = n$:

$$1,2,3,4,\ldots$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

11.3. Ketma-ketliklar ustida amallar. Cheksiz kichik miqdorlar haqida lemmalar

Ikkita $\{x_n\}$:

$$x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

va $\{y_n\}$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots y_n, \ldots$$

ketma-ketliklar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots,$$

$$x_1 - y_1, \quad x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots,$$

$$x_1 \cdot y_1, \quad x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots \quad (y_k \neq 0, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\}, \quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

Endi cheksiz kichik miqdorlar haqidagi lemmalarni keltiramiz.

1-lemma. *Ikki cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◄Aytaylik, α_n va β_n - cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin. Unda ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon > 0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Demak, n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n + \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\alpha_n + \beta_n$ ning cheksiz kichik miqdor ekanini bildiradi. ►

2-lemma. *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.*

◄Aytaylik, x_n -chegaralangan ketma-ketlik α_n esa cheksiz kichik miqdor bo'lsin. Unda $\forall n \in N$ uchun $|x_n| \leq M$ bo'ladi, bunda M tayin o'zgarmas son.

Ma'lumki, α_n cheksiz miqdor ekan, n ning biror qiymatidan boshlab,

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

bo'ladi. Natijada

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \alpha_n = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x_n \cdot \alpha_n$ -cheksiz kichik miqdor. ►

11.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik:

1) chekli limitga ega bo'lishi mumkin,
2) limiti cheksiz bo'lishi mumkin,
3) limitga ega bo'lmasligi mumkin.

Birinchi holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ikkinchi va uchinchi hollarda $\{x_n\}$ uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, $x_n = \frac{n+1}{n}$ yaqinlashuvchi ketma-ket $x_n = (-1)^{n+1}$ hamda $x_n = n$ ketma-ketliklar esa uzoqlashuv ketma-ketliklar bo'ladı.

Endi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossala keltiramiz.

1-xossa. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa chegaralangan bo'ladi.*

2-xossa. *Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

bo'lsa, u holda

a) $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\cdot a,$ *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(c = const),$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b,$ *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = ab,$ *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n,$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0),$ *ya'ni* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ *bo'ladi.*

Bu xossalardan b) holining isbotini keltiramiz. Modomiki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

ekan, unda

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad y_n = b + \beta_n$$

bo'ladi, bunda α_n va β_n - cheksiz kichik miqdorlar. Shularni hamda 1-lemmani e'tiborga olib topamiz:

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n) = (a+b) + \gamma_n,$$

bunda γ_n - cheksiz kichik miqdor. Keyingi tenglikdan

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

3-xossa. *Agar* $\{x_n\}$ *va* $\{y_n\}$ *ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,*

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$

2) $x_n \le y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$

bo'lsa, u holda $a \le b$, *ya'ni* $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n$ *bo'ladi.*

11.5. Ketma-ketlik limitining mavjudligi

Ketma-ketlik limitining mavjudligini ifodalaydigan teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *Agar* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *va* $\{z_n\}$ *ketma-ketliklar berilgan bo'lib,*

1) $x_n \le y_n \le z_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a$

bo'lsa, u holda $\{y_n\}$ *ketma-ketlik limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo'ladi.

◄Shartga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

Unda ta'rifga binoan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ ya'ni } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \qquad (4)$$

bo'ladi.

Shuningdek

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

dan

$$|z_n - a| < \varepsilon, \text{ ya'ni } a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \qquad (5)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teoremaning 1-sharti va (4), (5) munosabatlardan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun, n ning biror qiymatlaridan boshlab

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \text{ ya'ni } |y_n - a| < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak $\{y_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud va

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo'ladi. ►

Izoh. *1-teorema "ikki mirshab haqidagi teorema" deb ham ataladi.*

2-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik:*

1) o'suvchi,

2) yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

3-teorema. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik:*

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan

bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

Eslatma. *Ketma-ketlikning chekli limitga ega bo'lishi haqida umumiyroq teorema mavjud. Bu va yuqoridagi 2-va 3-teoremalarning isboti maxsus adabiyotlarda keltirilgan ([2]).*

4-misol. *Ushbu $y_n = \dfrac{\cos n}{n}$ ketma-ketlikning limiti topilsin.*

◄Ma'lumki,

$$-1 \leq \cos n \leq 1.$$

Bu tengsizliklarning barcha tomonlarini $\frac{1}{n}$ ga ko‘paytirib topamiz:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Endi $x_n = -\frac{1}{n}$, $z_n = \frac{1}{n}$ deyilsa, unda bir tomondan

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

va ikkinchi tomondan esa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

bo‘lgani uchun 1-teoremaga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$$

bo‘ladi. ►

11.6. Muhim limit (e - soni) va ketma-ketlik limitini hisoblash

Oliy matematikada e deb ataluvchi son muhim rol o‘ynaydi. U maxsus ketma-ketlikning limiti orqali ta’riflanadi. Bunday ketma-ketlik va uning limitining mavjudligini ko‘rsatishdan avval bitta tengsizlikni keltiramiz.

Bernulli tengsizligi. *Ixtiyoriy* $\alpha > -1$ *va ixtiyoriy natural* $n \geq 2$ *uchun ushbu*

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \tag{6}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

◄(6) tengsizlikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz. (6) tengsizlik $n = 2$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi:

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha.$$

Aytaylik, (6) tengsizlik $n = k$ bo‘lganda o‘rinli bo‘lsin:

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha.$$

(6) tengsizlikni $n = k+1$ uchun o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Keyingi tengsizlikni ikki tomonini $1+\alpha$ ga ko'paytirib $(1+\alpha>0)$ topamiz:

$$(1+\alpha)^k\cdot(1+\alpha)>(1+\alpha)\cdot(1+k\alpha),$$

$$(1+\alpha)^{k+1}>1+k\alpha+\alpha+k\alpha^2>1+(k+1)\alpha$$

Unda matematik induksiya usuliga binoan (6) tengsizlik barcha $n\geq 2$ uchun o'rinli bo'ladi. ▶

(6) tengsizlik Bernulli tengsizligi deyiladi.

Quyidagi

$$x^n=(1+\frac{1}{n})^n\ :\ 2,\frac{9}{4},\frac{64}{27},\ldots,(1+\frac{1}{n})^n,\ldots$$

ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlikning

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=(\frac{n+1}{n})^n,\quad x_{n-1}=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}=(\frac{n}{n-1})^{n-1}$$

hadlarining nisbati

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}$$

dagi

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1}$$

ga Bernulli tengsizligini qo'llaymiz

$$\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n-1}>1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Natijada

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}>\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{n^3}>1$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikda $x_{n-1}<x_n$ bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik o'suvchi.

Endi $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ni baholaymiz:

$$x_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\frac{2n+2}{2n}\right)^n\left(\frac{2n+1}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n}=$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^n}<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n}$$

Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^n>1+n\cdot\left(\frac{-1}{2n}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Natijada

$$x_n<\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=4$$

bo'lib, undan x_n ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi.

Shunday qilib $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligi isbotlandi. Unda 2-teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

2-Ta'rif. *Ushbu*

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,3,\dots,)$$

ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

e irratsional son bo'lib, uning qiymati e =2,718281...ga teng bo'ladi. Odatda asosi e bo'lgan logarifm natural logarifm deyilib, ln x kabi belgilanadi.

Endi ketma-ketliklarning limitini hisoblashga misollar keltiramiz.

5-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)}=1.$$

6-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

7-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

8-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

Mashqlar

Quyidagi ketma-ketliklar limiti hisoblansin.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^2-20n}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{\sqrt{n^2-20n}}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^3-8}$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+5}}{\sqrt{4n^2-20n}}$,
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

12-MA'RUZA

Funksiya limiti.

12.1. Funksiya limiti ta'rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $E(E \subset R)$ to'plamda berilgan bo'lib, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsin. Ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsin:

1) (1) ketma-ketlikning barcha hadlari $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E ga tegishli va $\forall n \in N$ uchun $x_n \neq a$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ mavjud.

Bu ikki shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar cheksiz ko'p bo'ladi.

Modomiki, $x_n \in E \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ekan, bu nuqtalarda $f(x)$ funksiya tayin $f(x_n)$ qiymatlarga ega bo'lib, ular

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots f(x_n), \ldots \qquad (2)$$

ketma-ketlikni (sonlar ketma-ketligini) hosil qiladi. Ravshanki, bunday ketma-ketliklar ham cheksiz ko'p bo'ladi.

Ta'rif: *Agar ikkala shartni qanoatlantiruvchi har qanday (1) ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan iborat (2) ketma-ketlik har doim bitta A limitga ega bo'lsa, A $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi limiti deyiladi va*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rifdagi a va A lar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Agar A chekli son bo'lsa, funksiya limiti chekli deyiladi.

Demak,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

bo'lishidan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

bo'lishi kelib chiqsa, unda A $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi limiti bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}$$

limit topilsin.

◀Ravshanki,

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

funksiya $E=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ to'plamda aniqlangan. Har hadi shu to'plamga tegishli bo'lgan va 2 ga intiluvchi (limi bo'lgan) ixtiyoriy x_n:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots, \ \lim_{n\to\infty} x_n = 2, \ x_n \neq 2$$

ketma ketlikni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan ib ketma-ketlik

$$\frac{1}{x_1+1}, \frac{1}{x_2+1}, \frac{1}{x_3+1}, \dots, \frac{1}{x_n+1}, \dots$$

bo'ladi. Ketma ketlik limitini hisoblash qoidalaridan foydal topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3}. ▶$$

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\sin x$$

funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti mavjud emasligi ko'rsatilsin.

◀Ravshanki, bu funksiya $E=(-\infty,+\infty)$ da aniqlan Har bir had shu E to'plamga tegishli bo'lgan va ∞ ga intiluv 2 ta turli:

$x_n = n\pi: \pi, 2\pi, 3\pi, ... n\pi, ...,\quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n\pi = \infty,$

$y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}: 2\pi + \frac{\pi}{2},\ 4\pi + \frac{\pi}{2},\ 6\pi + \frac{\pi}{2}, ...,\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}, ...$

$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \infty$

ketliklarni olamiz. Unda mos funksiya qiymatlaridan iborat ketliklar

$f(x_n) = \sin x_n = \sin n\pi = 0: 0, 0, 0, ..., 0, ...\quad \lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0,$

$f(y_n) = \sin y_n = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1: 1, 1, 1, ..., 1, ...\quad \lim_{n\to\infty} \sin y_n = 1,$

Demak, ∞ ga intiluvchi turli x_n va y_n ketma-ketliklar

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = 1$$

Bu limitlar bir xil bo‘lmagani uchun berilgan funksiya ega bo‘lmaydi. ▶

Funksiya limiti ta’rifidan quyidagilar kelib chiqadi:

1) Ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun $\lim_{x\to a} x = a$ bo‘ladi,

2) Agar barcha x larda $f(x) = c = const$ bo‘lsa, ixtiyoriy a (chekli yoki cheksiz) uchun

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Aytaylik, a va A lar chekli bo‘lsin. Unda $x \to a$ da $f(x) \to A$

limitini quyidagicha ham ta’riflasa bo‘ladi:

ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$0 < |x - a| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in E$ uchun

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A son $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi li
deyiladi.

Ravshanki, $|x-a|<\delta$ tengsizlik $a-\delta<x<a+\delta$
ekvivalent, ya'ni bir yo'la $a-\delta<x<a$ va $a<x<a$
bajariladi.

Agar $a-\delta<x<a$ bo'lganda $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa,
son $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi chap limiti deyiladi va

$$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Agar $a<x<a+\delta$ bo'lganda $|f(x)-A|<\varepsilon$ bo'lsa,
son $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ dagi o'ng limiti deyiladi va

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. *Funksiyaning o'ng* $f(a+0)$, *chap* $f(a$
limitlari bir-biriga teng bo'lishi ham mumkin, teng bo'lmasligi
mumkin. $f(a+0)=f(a-0)$ *bo'lgan holda* $f(x)$ *fun*
$x \to a$ *da limitga ega bo'ladi.*

12.2. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

Agar

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)=0$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya deyil

Masalan, $\alpha(x)=x$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz kichik
funksiya bo'ladi.

Aytaylik,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

bo'lsin. U holda

$$f(x) - A = \alpha(x)$$

funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi va aksincha.

Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Demak, $x \to a$ da $f(x)$ funksiya A limitga ega bo'lishi uchun

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalanishi zarur va yetarli, bunda $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya.

Cheksiz kichik funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar singari kabi xossalarga ega (qaralsin, 11-ma'ruza).

Agar

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Masalan, $\beta(x) = tgx$ funksiya $x \to \dfrac{\pi}{2}$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty.$$

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar orasida bog'lanish mavjud:

1) agar $\alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya $(\alpha(x) \neq 0)$ bo'lsa,

u holda

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

funksiya $x \to a$ da cheksiz katta funksiya bo'ladi;

2) agar $\beta(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz katta funksiya

bo'lsa,
u holda

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

12.3. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossala

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlash ketma-ketliklar, ya'ni chekli limitga ega bo'lgan k ketliklarning xossalari singari xossalarga ega bo'ladi. Quyid xossalarni bayon etamiz va ulardan birining isbotini keltiramiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'pl berilgan bo'lib, a nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin

1-xossa. *Agar*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

bo'lsa, u holda $x \to a$ da $f(x) \pm g(x)$ funksiya ham limitga bo'lib,

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

ya'ni

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

bo'ladi.

◀Shartga ko'ra $x \to a$ da $f(x) \to A$, $g(x) \to B$. U

$$f(x) = A + \alpha(x), \qquad g(x) = B + \beta(x)$$

bo'lib, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x \to a$ da cheksiz kichik funksiyal bo'ladi. Keyingi tengliklardan topamiz:

$$f(x) + g(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x)) = (A + B) + \gamma(x)$$

bunda $\gamma(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya.

Demak,

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B. \blacktriangleright$$

Natija. *Agar $x\to a$ da $f(x)\to A$ bo'lsa, A yagona* [illegible]

◀Teskarisini faraz qilaylik

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} f(x)=A^*$$

[illegible] U holda bir tomondan

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(x)\right)=A-A^*$$

[illegible] tomondan esa,

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(x)\right)=0$$

[illegible] Keyingi tengliklardan $A=A^*$ bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2-xossa. *Agar*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=B$$

[illegible] *u holda $x\to a$ $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham limitga ega* [illegible]

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B, \quad \textit{ya'ni}$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

[illegible]

Natija. *O'zgarmas sonni limit belgisi tashqarisiga* [illegible] *mumkin.*

◀Ravshanki, ixtiyoriy $c=const$ uchun

$$\lim_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to a} c\cdot\lim_{x\to a} f(x)=c\cdot\lim f(x)$$

[illegible] ▶

3-xossa. *Agar*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=B$$

[illegible] *$B\neq 0$ bo'lsa, u holda*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}, \quad \textit{ya'ni} \quad \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

[illegible]

4-xossa. *Agar*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ *uchun*

$$f(x) \le g(x)$$

bo'lsa, u holda

$$A \le B, \quad ya'ni \quad \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

bo'ladi.

12.4. Funksiya limitining mavjudligi

Funksiya limitga ega bo'lishi haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(x)$, $g(x)$ *va* φ *funksiyalar* $E \subset R$ *to'plamda berilgan bo'lib,* a *nuqta to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Agar bu funksiyalar uchun:*

$$1)\ f(x) \le g(x) \le \varphi(x), \quad x \in (a-\delta, a+\delta)$$

$$2)\ \lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = A$$

bo'lsa, u holda $g(x)$ *funksiya* $x \to a$ *da limitga ega bo'lib,*

$$\lim_{x\to a} g(x) = A$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \qquad \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$

Unda ta'rifga binoan har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda shunday $\delta > 0$ topiladiki, $|x-a| < \delta$ tengsizl qanoatlantiruvchi barcha $x \in E$ uchun

$$A - \varepsilon < f(x), \qquad \varphi(x) < A + \varepsilon$$

bo'ladi. Teoremaning birinchi shartidan foydalanib topamiz:

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon .$$

Demak,

$$\lim_{x\to a} g(x) = A. \blacktriangleright$$

2 teorema. *Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda* … *bo'lib, $(a-\alpha,a)\subset E$ $\quad(\alpha>0)$ bo'lsin. Agar*

1) $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi,

2) $f(x)$ funksiya E to'plamda yuqoridan chegaralangan … *u holda $x\to a-0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud* …

3 teorema. *Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda* … *bo'lib, $(a,a+\alpha)\subset E$ $\quad(\alpha>0)$ bo'lsin. Agar*

1) $f(x)$ funksiya E da kamayuvchi,

2) $f(x)$ funksiya E to'plamda quyidan chegaralangan … *u holda $x\to a+0$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud* …

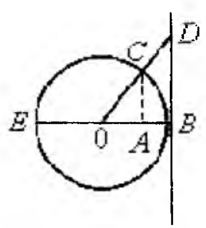
12.5. Muhim limitlar va funksiya limitini hisoblash

1) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

…lar …isbotlansin.

◄Radiusi $OB=1$ bo'lgan aylana chizamiz:



1-chizma

Trigonometrik funksiyalar: $\sin x, \cos x, tgx$ larning … binoan

$$AC = |\sin x|,$$
$$OA = |\cos x|,$$
$$BD = |tgx|.$$

bo'ladi. Aytaylik, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ bo'lsin, unda BC yoyi vatardan kichik bo'lmaganligi va o'z navbatida vatar AC kichik bo'lmaganligi uchun

$$|\sin x| \le |x| \qquad (3)$$

bo'ladi. Shuningdek, OCA uchburchakda uning bir tomoni q ikki tomonlari ayirmasidan kichik emasligi haqidagi tasdiqqa k

$$\cos x \ge 1 - |\sin x| \qquad (4)$$

bo'ladi.

Ravshanki, (3) tengsizlikdan

$$-|x| \le \sin x \le |x|$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda, $x \to 0$ da

$$-|x| \to 0, \qquad |x| \to 0$$

bo'lganligi uchun 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\cos x \le 1$. Unda (4) munosabatga muvofiq

$$1 - |\sin x| \le \cos x \le 1$$

bo'lib, 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

bo'ladi.

Ma'lumki, ΔOAC ning yuzi $\dfrac{1}{2}\cos x \cdot |\sin x|$

OBC sektorning yuzi $\dfrac{1}{2}|x|$,

ΔOBD ning yuzi $\frac{1}{2}|tgx|$

...lib, ular uchun

$$\frac{1}{2}\cos x\cdot|\sin x|\le\frac{1}{2}|x|\le\frac{1}{2}|tgx|$$

...sizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan,

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{|\sin x|}{|x|},\qquad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

...nosabatlarni e'tiborga olgan holda

$$\cos x\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x},$$

...ni topamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

...ladi.

2) Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

...ni isbotlansin.

Ma'lumki,

$$\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Aytaylik, $x>1$ bo'lsin. Agar x ning butun qismini n ...lik, unda $n\le x<n+1$ bo'lib,

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

...ladi. Bu munosabatlardan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1} = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot(1+\frac{1}{n}) = e\cdot 1 = e.$$

Unda 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x < -1$ bo'lsin. Agar $x = -t$ deyilsa, u holda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Keyingi muhim limitlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

3)Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \qquad (a>0, a\neq 1)$$

xususan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

munosabat o‘rinli.

4) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$$

tenglik o‘rinli.

5) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

tenglik o‘rinli.

6) Ushbu

$$\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$$

bunda:

a) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=B \qquad bo'lsa,$$

$$C=A^{B} \qquad bo'ladi$$

b) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A\neq 1, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=\pm\infty$$

bo‘lsa, qaralayotgan limit bevosita hisoblanadi.

d) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=1, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=\infty$$

bo‘lsa, u holda

$$C=e^{\lim_{x\to a}\left[U(x)-1\right]V(x)}$$

bo‘ladi. ►

Funksiya limiti haqidagi ma’lumotlardan, shuningdek muhim limitlardan foydalanib funksiyalarning limitini hisoblaymiz.

1-Misol *Ushbu*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$$

limit hisoblansin.

◄Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1+x^2-1+x^3-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1+(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(1+x+1+x^2+x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}3+2\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}x^2=3+2+1=6.\ ▶$$

2-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

dan foydalanamiz.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 10x}{10x}\cdot 10x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 10x}{10x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.$$

3-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

lardan foydalanamiz.

Avvalo berilgan limit ostidagi kasrning surat va maxrajini x ga bo'lamiz, so'ng limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2. \blacktriangleright$$

4-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

hisoblansin.

◀Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\cdot e=e^2. \blacktriangleright$$

5-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

ni hisoblansin.

◀Avvalo quyidagi $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Bunda $x\to 1$ da $t\to 1$. Natijada

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}$$

bo'ladi. Keyingi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t+t^2)}{(1-t)(1+t)}=\lim_{t\to 1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

6-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblash uchun $1-x=t$ almashtiri bajaramiz.

Unda $x\to 1$ *da* $t\to 0$ bo'lib,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}$$

bo'ladi. ▶

7-Misol. *Ushbu*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$$

dagi d) holidan foydalanamiz. Ravshanki,

$$U(x)=\frac{x-1}{x+1},\qquad V(x)=x$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}x=\infty$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}-1\right]\cdot x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\cdot x = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1-x-1}{x+1}x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-2)\frac{x}{x+1} = -2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -2.$$

Shunday qilib

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = e^{-2}$$

Mashqlar

Funksiyalarning limiti hisoblansin.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$

13-MA'RUZA

Funksiyaning uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalarning xossala

Funksiya limiti tushunchasi bilan bog'liq ayni paytda matematikada muhim bo'lgan funksiyaning uzluksizligi tushunc sini, uzluksiz funksiyalarning xossalarini keltiramiz.

13.1. Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda $(E \subset$ berilgan bo'lib, $x_0 \in E$ bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Masalan

$$y = f(x) = x^2$$

funksiya ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) = x_0 \cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0).$$

Agar

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan,

agar

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

Masalan

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & agar \quad x \le 2 \\ x, & agar \quad x > 2 \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-2=f(2),$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0} x=2\neq f(2)$$

Demak berilgan funksiya $x_0=2$ nuqtada chapdan

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi sharti

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

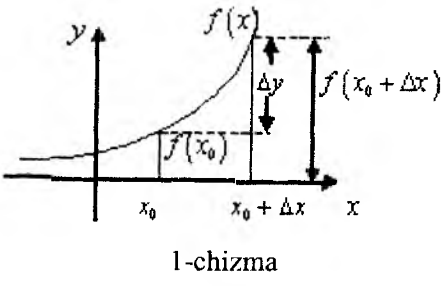
$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)\qquad (2)$$

Odatda, Δx argument orttirmasi, Δy esa funksiya orttirmasi deyiladi.

(2) munosabatlardan topamiz:

$$x=x_0+\Delta x,\qquad \Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Δx va Δy larning geometrik ma'nolari 1- chizmada keltirilgan.



1-chizma

(1) va (2) munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0\qquad (3)$$

kelib chiqadi.

Demak, (3) munosabat $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qaralishi mumkin.

Masalan, $f(x)=c=const$ funksiya ixtiyor

$x_0\in(-\infty,+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}(c-c)=0.$$

2-ta'rif. *Agar $f(x)$ funksiya E to'plamning har b nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.*

13.2. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plam berilgan bo'lsin.

1-teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0\in$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$c\cdot f(x)\quad (c=const),\quad f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\quad \left(g(x_0)\neq 0\right)$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◄Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqta uzluksiz. Unda

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$$

bo'ladi. Funksiya limiti xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=c\cdot f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Keyingi munosabatlardan

$$c\cdot f(x),\qquad f(x)\pm g(x),\qquad f(x)\cdot g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

funksiyalarning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi kelib chiqadi. ▶

2-teorema. *Agar* $y=f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo‘lib,* $u=\varphi(y)$ *funksiya* y_0 *nuqtada* ($y_0=f(x_0)$) *uzluksiz bo‘lsa, u holda* $u=\varphi(f(x))$ *murakkab funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

◀ Shartga ko‘ra $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$$

bo‘ladi. Shuningdek, $u=\varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x))=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=\varphi(f(x_0)).$$

Bu esa $\varphi(f(x))$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishini bildiradi. ▶

Uzluksiz sodda funksiyalarni keltiramiz.

1) $f(x)=c=const,\quad f(x)=x$ funksiyalarning ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘lishi равшан.

2) $f(x)=x^m$ (m - natural son) bo‘lsin. Bu funksiya m ta uzluksiz funksiyalarning ko‘paytmasi sifatida ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘ladi.

3) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ bo‘lsin, bunda $a_0,a_1,\ldots,a_n$ o‘zgarmas sonlar. Bu funksiya ham 1-teoremaga ko‘ra

ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'ladi.

4) Aytaylik,

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

bo'lsin, bunda $a_0, a_1, \ldots a_n$ va $b_0, b_1, \ldots b_m$ o'zgarmas sonlar.

Bu funksiyaning ixtiyoriy

$$x \in E = (-\infty, +\infty) \setminus \{x : b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = 0\}$$

da uzluksiz bo'lishi 1-teoremadan kelib chiqadi.

5) $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

bo'ladi. Trigonometriyadan ma'lum bo'lgan ushbu

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(x) = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Ravshanki,

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$$

va $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0.$$

Bu esa $f(x) = \sin x$ funksiyaning ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz ekanini bildiradi.

6) $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun

$$\Delta f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

bo'ladi. Ma'lum

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Bu formuladan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(x) = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Ravshanki,

$$\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$$

va $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) = 0$$

bo'lib, $f(x)=\cos x$ funksiya ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'ladi.

7) Ushbu $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ funksiyalarning uzluksizligi $\sin x, \cos x$ funksiyalarning uzluksizligi hamda 1-teoremadan kelib chiqadi.

$f(x)=tgx$ funksiya ixtiyoriy

$x\in(-\infty,+\infty)\setminus\left\{x : x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}$ da uzluksiz bo'ladi.

8) $f(x)=a^x$, $f(x)=\log_a x$, $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=arctgx$, $f(x)=arcctgx$ funksiyalarning o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'lishi yuqoridagidek ko'rsatiladi.

Demak, barcha sodda funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'ladi.

13.3. Funksiyaning uzilishi va uzilishning turlari

Ma'lumki,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi ushbu

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ ning mavjudligi ,

2) $A = f(x_0)$ bo‘lishi

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabat bajarilmasa, $f(x)$ funksiya uzilishga ega, x_0 nuqta e[illegible] uzilish nuqtasi deyiladi.

Ma’lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0+0)$ o‘ng limiti, $f(x_0-0)$ chap limiti mavjud bo‘lib,

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

bo‘lsa, yoki bu limitlardan hech bo‘lmaganda biri mavjud bo‘lma[illegible] $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo‘lmaydi. Binobarin, bu hol[illegible] $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi.

Масалан,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x < 0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x = 0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x > 0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya uchun

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} 1 = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1$$

bo‘lib, $x = 0$ nuqtada funksiyaning o‘ng va chap limitlari bir-biri[illegible] teng bo‘lmaydi. Demak, berilgan funksiya uzilishga ega va $x =$[illegible] nuqtada uning uzilish nuqtasi bo‘ladi.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & agar \quad x > 0 \quad bo'lsa, \\ -x, & agar \quad x \le 0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

funksiya uchun

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\sin\frac{1}{x} \text{ - mavjud emas,}$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0$$

bo'ladi. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & agar \quad x\neq 0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

uchun

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

bo'lib, u berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatiga teng emas $f(0)\neq 0$. Demak, funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Funksiyaning uzilish nuqtalari qatoriga uning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmagan, sohaning chegaraviy nuqtalari ham kiritiladi.

Xususan, funksiyaning aniqlanish sohasi intervaldan iborat bo'lsa, intervalning chegaraviy nuqtalari uzilish nuqtalari bo'lishi mumkin.

Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $x=0$ nuqta (ravshanki, bu nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas va u oraliqning chegarasi) uzilish nuqta bo'ladi.

Shunday qilib,

1) x_0 nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli va

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

shart bajarilmaganda,

2) x_0 nuqta aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmasdan, uning chegaraviy nuqtasi bo'lsa, u holda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitl
mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

bo'lganda, uning x_0 nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilish deyila
Ushbu

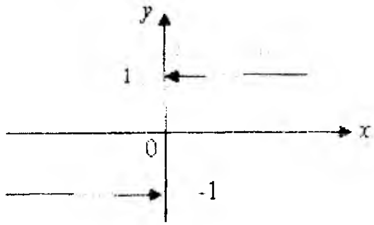
$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

miqdor funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x)=\begin{cases} -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'ls\,a, \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi bo'l
uning $x=0$ nuqtadagi sakrashi 2 ga teng bo'ladi (2-chizma):



2-chizma

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi boshqa uzilishl
($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \ \ A\neq f(x_0)$ holdan tashqari) ikkinchi tur uzili
deyiladi.

Masalan,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa, \\ x^2, & agar \quad x\leq 0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

...ya uchun

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} x^2=0$$

...lib, bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi ikkinchi tur uzilish ...ladi

13.4. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar haqida teoremalar

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, (a,b) intervalda uzluksiz hamda a nuqtada o'ngdan, b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ ...mada uzluksiz deb ataladi.

Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar haqida bir nechta ...iy teoremalarni (isbotsiz) keltiramiz.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz ...'lsa, u shu segmentda chegaralangan bo'ladi.*

Bu holda shunday ikkita m va M sonlari $(m\le M)$ ...ladiki, funksiya grafigi $y=m$ va $y=M$ parallel to'g'ri ...ziqlar orasida joylashadi.

2-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz ...lib, segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga ... bo'lsa,*

$(f(a)>0,\quad f(b)<0$ yoki $f(a)<0,\quad f(b)>0)$ u ...da a bilan b orasida hech bo'lmaganda bitta shunday c nuqta $(c\in(a,b))$ topiladiki, $f(c)=0$ bo'ladi.

Bu holda $f(x)$ funksiyaning grafigi OX o'qini hech ...maganda bitta nuqtada kesadi .

Bu teorema

$$f(x)=0$$

tenglamaning yechimi mavjudligini ko'rsatish bilan birga taqribiy hisoblash imkonini ham beradi.

3-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzlu*

bo'lsa, u holda funksiya $[a,b]$ segmentda o'zining eng katta va

kichik qiymatiga erishadi, ya'ni shunday $x_* \in [a,b]$ n

topiladiki, ixtiyoriy $x \in [a,b]$ uchun

$$f(x) \leq f(x_*),$$

shunday $x^* \in [a,b]$ nuqta topiladiki, ixtiyoriy $x \in [a,b]$ uchun

$$f(x) \geq f(x^*),$$

bo'ladi.

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarni uzluksiz ekani ko'rsatilsin.

1. $y = x^2 - 2x$. 2. $y = \cos 3x$. 3. $y = e^x$

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari topilsin.

4. $y = \dfrac{1}{2-x}$. 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

14-MA'RUZA

Funksiyaning hosilasi. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

14.1. Funksiya hosilasi tushunchasi

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan ...lib, $x_0\in(a,b)$ bo'lsin. x_0 nuqta билан birga shu (a,b) ga ... bo'lgan $x_0+\Delta x$ ni $(\Delta x\neq 0)$ qaraymiz. Natijada funksiya ...

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

...ga ega bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

... muayyan $f(x)$ va tayin x_0 da Δx ning funksiyasiga ... $\Delta x\to 0$ da bu nisbat limiti funksiya hosilasi ...hasiga olib keladi.

Ta'rif. *Agar*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

... mavjud bo'lsa, bu limit $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ... deyiladi va $f'(x_0)$ yoki $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ yoki $y'_{x=x_0}$ ... belgilanadi.

Agar (1) limit chekli bo'lsa, hosila chekli deyiladi, (1) limit ... bo'lsa, hosila cheksiz deyiladi.

Eslatma. *Funksiyaning tayin nuqtadagi chekli hosilasi ...dalaydi.*

Agar (a,b) oraliqning har bir x nuqtasida funksiyaning ... hosilasi mavjud bo'lsa, unda hosila x ning funksiyasiga aylanadi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari singari funksiya o'ng va chap hosilalari ta'riflanadi. Ushbu

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\qquad \lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limitlar mavjud bo'lsa, ular mos ravishda funksiyaning nuqtadagi o'ng va chap hosilalari deyiladi $f'(x_0+0)$, $f'(x_0-0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Xususan, $[a,b]$ segmentda berilgan $f(x)$ funksiyani nuqtadagi hosilasi deganda uning shu nuqtadan o'ng hosila nuqtadagi hosilasi deganda uning shu nuqtadagi chap ho tushiniladi.

1-misol. *Ushbu*

$$f(x)=x^2$$

funksiyaning $x_0=2$ *nuqtadagi hosilasi topilsin.*

◀Ta'rifdan foydalanib topamiz. Ravshanki, ber funksiyaning $x_0=2$ nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4+4\Delta x+\Delta x^2-4=4\Delta x$$

bo'ladi. Unda

$$\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\frac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=4+\Delta x$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

bo'ladi. Demak,

$$f'(2)=4\ \blacktriangleright$$

2-misol. $y = c \quad (c = const)$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy x uchun

$$\Delta y = c - c = 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy x da $y' = 0$.

3-misol. $y = x$. Ixtiyoriy x da $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$y' = 1.$$

4-misol. $y = \frac{1}{x}$. Ixtiyoriy $x \neq 0$ uchun

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

bo'ladi. Demak,

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

5-misol. $y = \frac{2x + 1}{3x + 1}$. Bu funksiyaning hosilasini ta'rifga ko'ra hisoblaymiz:

$$\Delta y = \frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x+1}{3x+1} = -\frac{\Delta x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)},$$

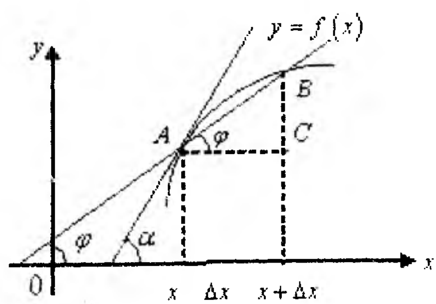
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)} \right] = -\frac{1}{(3x+1)^2}.$$

Demak,

$$y' = -\frac{1}{(3x+1)^2}.$$

14.2. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da ber bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. funksiyaning grafigini 1– chizmada keltirilgan egri c tasvirlasin.



1-chizma

AB kesuvchining OX o'qining musbat yo'nalishi bilan qilgan burchakni φ, egri chiziqqa A nuqtada o'tkaz urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil q burchakni α deylik.

$\triangle ABC$ dan topamiz: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$

Agar $\Delta x\to 0$ sa, ya'ni B nuqta egri chiziq bo'ylab A nuqtaga intilsa, u holda φ burchak α burchakka intilib

$$tg\varphi \to tg\alpha$$

bo'ladi. Keyingi munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$$

tenglik kelib chiqadi. Demak,

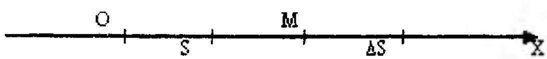
$$f'(x)=tg\alpha$$

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $A(x,y)$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud. Funksiyaning x nuqtadagi hosilasi $f'(x)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi esa ushbu

$$Y=f(x)+f'(x)(X-x)=y+f'(x)(X-x)$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda (X,Y) urinmadagi o'zgaruvchi nuqtaning koordinatasi.

Endi hosilaning mexanik ma'nosini keltiramiz. Faraz qilaylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab (bu to'g'ri chiziqni Ox o'qi deylik) harakat qilib, M nuqtaga kelganda bosib o'tilgan yo'l S bo'lsin: $OM=S$ (2-chizma).



2-chizma

Ravshanki, bu yo'l vaqtga bog'liq bo'lib, uning funksiyasi bo'ladi

$$S=S(t) \qquad (2)$$

Odatda, (2) tenglama moddiy nuqta harakat qonuni deyiladi.

Agar nuqta t vaqt oralig'ida $S(t)$ masofani, $t+\Delta t$ oralig'ida esa $S(t+\Delta t)$ masofani bosib o'tgan bo'lsa, un vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l

$$\Delta S(t) = S(t+\Delta t) - S(t)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

nisbat esa moddiy nuqtaning t dan $t+\Delta t$ gacha vaqt oralig o'rtacha tezligini ifodalaydi.

Agar Δt nolga intila borsa o'rtacha tezlik m nuqtaning t paytdagi oniy tezligini aniqroq ifodalay boradi. D t paytdagi tezlik

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan

$$V = S'(t)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, moddiy nuqtaning harakat qonuni $S =$ bo'lganda funksiyaning t nuqtadagi hosilasi $S'(t)$ harakat te ifodalaydi.

14.3. Hosila hisoblash qoidalari

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da bo bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo U holda:

1) ixtiyoriy o'zgarmas c *da* $y = c \cdot f(x)$ *funksiya ho ega bo'lib,*

$$y' = (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

bo'ladi;

2) *funksiyalar yig'indisi* $y=f(x)+g(x)$ *funksiya hosilaga ega bo'lib,*

$$y'=\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

bo'ladi.

3) *funksiyalar ko'paytmasi* $y=f(x)\cdot g(x)$ *funksiya hosilaga ega bo'lib,*

$$y'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

bo'ladi.

4) *funksiyalar nisbati* $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *funksiya* $\left(g(x)\neq 0\right)$ *hosilaga ega bo'lib,*

$$y'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

bo'ladi.

Bu tasdiqlarning birini, masalan 2)-sining isbotini keltiramiz.

◀Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega. Unda ta'rifga binoan

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\qquad g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Ravshanki, $y=f(x)+g(x)$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=\left[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]=$$
$$=\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]+\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(x)+g'$$

Demak,

$$y'=\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x).\blacktriangleright$$

6-misol. $y=\frac{3}{2}x$ bo'lsa, $y'=\left(\frac{3}{2}x\right)'=\frac{3}{2}(x)'=\frac{3}{2}\cdot 1$

bo'ladi

7-misol. $y=x+\frac{1}{x}$ bo'lsa,

$$y'=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2} \text{ bo'ladi.}$$

8-misol. $y=\frac{2x+1}{3x+1}$ bo'lsa,

$$y'=\left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)'=\frac{(2x+1)'\cdot(3x+1)-(2x+1)\cdot(3x+1)'}{(3x+1)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot(3x+1)-3(2x+1)}{(3x+1)^2}=-\frac{1}{(3x+1)^2}$$

bo'ladi.

5) *Murakkab funksiyaning hosilasi. Ayta* $u=\varphi(x)$ *va* $y=f(u)$ *bo'lib, ular yorda* $y=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.*

Agar $u=\varphi(x)$ *funksiya* x *nuqtada* $u'=\varphi'(x)$ *hos ega bo'lib,* $y=f(u)$ *funksiya* u *nuqtada* $(u=\varphi(x))$ f'

... *ega bo'lsa, u holda* $y = f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya* x
... *hosilaga ega va*

$$y'_x = f'(u)\cdot u'_x, \; ya'ni \; y'_x = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

...

◀Ravshanki, $\Delta x \neq 0$ bo'lganda

$$\Delta u = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) \neq 0$$

... Ayni paytda

$$\Delta y = \Delta f(u) = f(u+\Delta u) - f(u)$$

...

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

... Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u\cdot u'_x = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

...chunki, $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$). Demak,

$$y'_x = \left[f(\varphi(x))\right]' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$ ▶

14.4. Teskari funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ *funksiya* (a,b) *da berilgan bo'lib, u*
... $\varphi(y)$ *funksiyaga ega bo'lsin. Agar* $y = f(x)$ *funksiya*
(a,b) *nuqtada* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,* $f'(x) \neq 0$ *bo'lsa,*
... *funksiya* $\varphi(y)$ *ham* y *nuqtada* $(y = f(x))$ *hosilaga ega*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

...

◀ x va y o'zgaruvchilarning orttirmalari Δx va Δy uchun

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \qquad (\Delta y\neq 0)$$

bo'ladi. Ayni paytda $\Delta y\neq 0$ da $\Delta x\neq 0$ bo
$\Delta y\to 0$ *da* $\Delta x\to 0$. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

Demak,

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}. \blacktriangleright$$

14.5. Funksiya hosilalarini hisoblash

Funksiya hosilasi hosila ta'rifi hamda hosila hiso qoidalaridan foydalanib hisoblanadi.

1) $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirm

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ru keltirilgan (5) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Demak,

$$y'=\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Agar $y=u^{\alpha}$, $u=u(x)$ bo'lsa, $y'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ bo'ladi.

2) $y=a^{x}$ $(a>0, a\neq 1)$ bo'lsin. Bu funksiyaning ...ttirmasi

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}=a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)$$

...'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}$$

...ndi Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada ...ngan (4) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x}\cdot\ln a.$$

Demak,

$$y'=\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a.$$

Xususan, $y=e^{x}$ bo'lsa, $y'=\left(e^{x}\right)'=e^{x}$ bo'ladi.

Agar $y=a^{u}$, $u=u(x)$ bo'lsa,

$y'=\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$ bo'ladi.

3) $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ bo'lsin. ...funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

...'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan (3) muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Demak,

$$y'=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

Xususan, $y=\ln x$ bo'lsa,

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Agar $y=\log_a u,\quad u=u(x)$ bo'lsa,

$$y'=\left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$$

bo'ladi.

4) $y=\sin x$ bo'lsin. Bu funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y=\sin\left(x+\Delta x\right)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'ladi. Bu tenglikda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tib, 12-ma'ruzada keltirilgan muhim limitdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Demak,

$$y'=(\sin x)'=\cos x\,.$$

Agar $y=\sin u,\quad u=u(x)$ bo'lsa,

$$y'=(\sin u)'=\cos u\cdot u'$$

bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkinki, $y=\cos x$ bo'lsa,

$$y'=(\cos x)'=-\sin x$$

bo'ladi.

Agar $y=\cos u,\quad u=u(x)$ bo'lsa,

$$y'=(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$$

bo'ladi.

5) $y=tgx$ bo'lsin. Ma'lumki,

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kasrning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$y'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Agar $y = tgu, \quad u = u(x)$ bo'lsa,

$$y' = (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y = ctgx$ bo'lsa,

$$y' = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

bo'ladi.

Agar $y = ctgu, \quad u = u(x)$ bo'lsa,

$$y' = (ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

bo'ladi.

6)

$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \mathrm{arc}\,tgx, \quad y = \mathrm{arc}\,ctgx$ berilgan bo'lsin. Ravshanki bu funksiyalar mos ravishda

$$x = \sin y, \quad x = \cos y, \quad x = tgy, \quad x = ctgy$$

funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalardir.

Teskari funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasi foydalanib topamiz:

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y' = (arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Agar

$y = \arcsin u, \quad y = \arccos u, \quad y = \mathrm{arc}\,tgu, \quad y = \mathrm{arc}\,ctgu$

bo'lib, $u=u(x)$ bo'lsa, u holda

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',\qquad (\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u',$$

$$(\operatorname{arc}tgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u',\qquad (\operatorname{arc}ctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$$

bo'ladi.

7) $y=[u(x)]^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ bo'lib, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Avvalo logarifm ta'rifidan foydalanib, berilgan funksiyani quyidagicha

$$y=[u(x)]^{v(x)}=e^{\ln[u(x)]^{v(x)}}=e^{v(x)\ln u(x)}$$

hosil qilamiz. So'ng hosila hisoblash va murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidalaridan foydalanib topamiz:

$$y'=\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot[v(x)\cdot\ln u(x)]'=$$

$$=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)\right)=$$

$$=[u(x)]^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right).$$

Hosilalar jadvali. Yuqorida funksiya hosilalari uchun olingan formulalarni jamlab, ularni jadval ko'rinishida yozamiz:

1) $(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $\qquad(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$

2) $(a^{x})'=a^{x}\cdot\ln a$, $\qquad(a^{u})'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$

3) $(e^{x})'=e^{x}$, $\qquad(e^{u})'=e^{u}\cdot u'$

4) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, $\qquad(\log_a u)'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$

5) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\quad (\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$

6) $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$

7) $(\cos x)' = -\sin x$, $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

8) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

9) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad (ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

12) $(\mathrm{arc}\,tgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad (\mathrm{arc}\,tgu)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,

13) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad (arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Endi hosilalar jadvali hamda hosila hisoblash qoidalari[dan] foydalanib funksiyalarning hosilalarini topamiz:

9-misol. $y = 2^{tgx}$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasi

$$y' = \left(2^{tgx}\right)' = 2^{tgx}\cdot\ln 2\cdot(tgx)' = 2^{tgx}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2^{tgx}\ln 2}{\cos^2 x}$$

bo'ladi.

10-misol. $y = x^2 + \sin e^x$ bo'lsin.

$$y' = \left(x^2 + \sin e^x\right)' = 2x + \cos e^x \cdot e^x .$$

11-misol. $y = \ln tgx$ bo'lsin.

$$y' = (\ln tgx)' = \frac{1}{tgx}\cdot(tgx)' = \frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

12-misol. $y=\ln^6 \sin x$ bo'lsin.

$$y'=6\ln^5 \sin x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x.$$

13-misol. $y=\dfrac{\ln^2 x}{\arcsin x}$ bo'lsin.

$$y'=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\arcsin x-\ln^2 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

14-misol. $y=\sqrt{\sin(\ln x)}$ bo'lsin.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}}\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

Mashqlar

Berilgan funksiyaning hosilasi topilsin.

1. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$

2. $y=\dfrac{(2x^2-x-1)}{3\sqrt{2+4x}}$

3. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$

4. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1+3x^4}}$

5. $y=(\sin x)^{5e^x}$

6. $y=(\cos 5x)^{e^x}$

15-MA'RUZA

Funksiyaning differensiali. Taqribiy formulalar

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Agar funksi[ya] $x\in(a,b)$ nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, uni shu nuqta[da] differensiallanuvchi deyiladi. Funksiya (a,b) ning har [b]... nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u (a,b) da differensi[al]lanuvchi deyiladi.

Odatda funksiyaning hosilasini topish uni differensiall[ash] deyiladi.

15.1. Funksiya differensiali tushunchasi

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da beril[gan] bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'ri[fga] binoan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$$

bo'ladi, bunda α -cheksiz kichik funk[siya] ($\Delta x\to 0da$ $\alpha=\alpha(\Delta x)\to 0$). Keyingi tenglikning [i]... tomonini Δx ga ko'paytirib topamiz:

$$\Delta y=y'\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \qquad (1)$$

Yuqoridagi (1) tenglikdan, y' hosila chekli bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y=f(x)$ funksiya x nuq[tada] chekli hosilaga ega bo‘lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Biroq, funksiya biror nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo‘lmasligi mumkin.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud emas.

Funksiya orttirmasi $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ ni ifodalovchi (1) tenglikning o‘ng tomoni ikki qo‘shiluvchi $y'\cdot\Delta x$ hamda $\alpha\cdot\Delta x$ lardan iborat. Birinchi qo‘shiluvchi uchun $y'\neq 0$ bo‘lganda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$$

bo‘lib, undan Δx va $y'\cdot\Delta x$ larning nolga intilish tartiblari bir xil ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi qo‘shiluvchi uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

bo‘lib, undan $\alpha\cdot\Delta x\to 0$ ni $\Delta x\to 0$ ga qaraganda tezroq ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\Delta x\to 0$ da $\Delta x\to 0$ ni $y'\cdot\Delta x$ qo‘shiluvchi aniqlaydi. Shuning uchun $y'\cdot\Delta x$ qo‘shiluvchi funksiya orttirmasi Δy ning bosh qismi deyiladi.

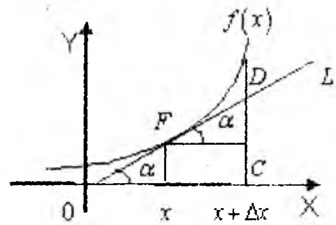
Ta’rif. *Funksiya orttirmasining (1) ifodasidagi $y'\cdot\Delta x$ qo‘shiluvchi $y=f(x)$ funksiyaning differensiali deyiladi va dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi.*

Demak,

$$dy=y'\cdot\Delta x \qquad \left(df(x)=f'(x)\cdot\Delta x\right).$$

15.2. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'l $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyani grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan egri chiziqni tasvirlasin.



1-chizma

Bu egri chiziqqa, uning $F = F(x, y)$ nuqtasida urinma o'tkazib, uning OX o'qining musbat yo'nalishi b tashkil etgan burchakni α дейлик. Unda, ma'lumki,

$$tg\alpha = f'(x)$$

bo'ladi.

Ravshanki, ΔFDC dan

$$\frac{DC}{FC} = tg\alpha$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tenglikdan

$$DC = tg\alpha \cdot FC$$

ya'ni

$$DC = f'(x) \cdot \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ayni paytda $f'(x) \cdot \Delta x = df(x)$

Demak,

$$DC = df(x),$$

ya'ni $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali funksiya g $F(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC

foydalaydi.

Xususan, $y = x$ bo‘lganda $dy = y'\,\Delta x = \Delta x$, ya’ni $\Delta x = dx$ bo‘lib, funksiya differensiali uchun quyidagi

$$dy = y'dx = f'(x)dx \qquad (2)$$

formulaga kelamiz.

Shunday qilib, funksiyaning differensiali funksiya hosilasi bilan argument differensiali ko‘paytmasiga teng.

Endi funksiya hosilalari jadvalidan foydalanib, ularning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1) $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$,

2) $d(a^x) = a^x \cdot \ln a\, dx$,

3) $d(e^x) = e^x dx$,

4) $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x}\log_a e dx$,

5) $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$,

6) $d(\sin x) = \cos x\, dx$,

7) $d(\cos x) = -\sin x\, dx$,

8) $d(tgx) = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$,

9) $d(ctgx) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$,

10) $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

11) $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

12) $d(\mathrm{arc}\,tgx) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$,

13) $d\left(\operatorname{arc} ctgx\right) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

Masalan, $y = e^{\sqrt{arctgx}}$ funksiyaning differensiali

$$dy = d\left(e^{\sqrt{arctgx}}\right) = \left(e^{\sqrt{arctgx}}\right)' \cdot dx = e^{\sqrt{arctgx}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{arctgx}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

bo'ladi.

15.3. Yig'indi, ko'paytma va nisbatning differensiali. Murakkab funksiyaning differensiali

Ikki funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatining hosilalari haqidagi ma'lumotlardan foydalanib, ularning differensiallarini topamiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo'lib, $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Unda bu nuqtada $y = f(x) + g(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lib,

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

bo'ladi. Bu tenglikning ikki tomonini dx ga ko'paytirib

$$y' \cdot dx = f'(x)dx + g'(x)dx$$

ya'ni

$$dy = df(x) + dg(x)$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$d\left(f(x) + g(x)\right) = df(x) + dg(x).$$

Xuddi yuqoridagidek

$$d(c \cdot f(x)) = c \cdot df(x), \qquad (c = const)$$

$$d(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot df(x) + f(x) \cdot dg(x),$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

bo'lishi isbotlanadi.

Biz yuqorida $y = f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada ...ferensiallanuvchi bo‘lsa, uning differensiali

$$dy = f'(x)dx$$

...lishini, ya’ni funksiya differensiali funksiya hosilasi bilan ...ument differensiali ko‘paytmasiga teng bo‘lishini ko‘rdik.

Endi $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ bo‘lib, ular $y = f(\varphi(x))$ ...rakkab funksiyani hosil qilsin, bunda $f(u)$ funksiya ...$'(u)$, $\varphi(x)$ funksiya $\varphi'(x)$ hosilalarga ega.

Ravshanki, murakkab funksiyaning hosilasi

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

...ladi. Keyingi tenglikdan

$$y' \cdot dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx \qquad (3)$$

...lishi kelib chiqadi. Agar

$$y'dx = dy, \qquad \varphi'(x)dx = d\varphi(x) = du$$

...lishini e’tiborga olsak, unda (3) tenglik ushbu

$$dy = f'(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x)$$

...ni

$$dy = f'(u)du \qquad (4)$$

...rinishga keladi.

Demak, funksiya murakkab bo‘lgan holda ham funksiya ...ferensiali funksiya hosilasi $f'(u)$ bilan argument differensiali ko‘paytmasidan iborat.

Ikkala holda ham

... $f(x))$; $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ *hollarda*) funksiya ...ferensiali bir xil ko‘rinishga ega bo‘ladi. (Qaralsin (2) va (4)). ...da bu xossa differensial ko‘rinishining invariantligi deyiladi.

15.4. Taqribiy formulalar

O'rganiladigan ko'p jarayonlar funksiyalar bilan, aniq funksiyalarning nuqtadagi qiymatini hisoblash bilan bog Funksiyalarning murakkab bo'lishi, ularning nuqtadagi qiym topishni ancha qiyinlashtiradi. Natijada funksiyalarning nuqt qiymatini taqribiy hisoblash zaruriyati yuzaga keladi.

Funksiyaning differensiali esa taqribiy formulalarni t imkonini beradi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan b $x \in (a,b)$ nuqtada $f'(x) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \qquad (f'(x)\cdot\Delta x = dy)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{dy} = \frac{f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x}{f'(x)\cdot\Delta x} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)}$$

bo'ladi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Keyingi tenglikdan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy} = 1$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bu hol ushbu

$$\Delta y \approx dy \qquad (5)$$

munosabatga (taqribiy tenglikga) olib keladi.

Ravshanki, Δx ning har qancha kichik bo'lishi bu ta tenglikning aniqligini shuncha oshiradi.

Funksiya differensialining tuzilishi funksiya orttir nisbatan ancha sodda bo'lishi (5) taqribiy formuladan ta hisoblashlarda keng foydalanishga olib keladi.

(5) formulani quyidagicha

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$$

...yozsa bo'ladi.

Misol. *Ushbu*

$$\sqrt[4]{17}$$

...taqribiy hisoblansin.

◄Quyidagi

$$f(x)=\sqrt[4]{x}$$

...yani olamiz. Unda

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

...ladi.

Endi $x=16,\qquad \Delta x=1$ deb topamiz:

$$\sqrt[4]{17}\approx\sqrt[4]{16}+\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\sqrt[4]{2^4}+\frac{1}{4\sqrt[4]{2^{12}}}=$$

$$=2+\frac{1}{4\cdot 8}=2+\frac{1}{32}=2\frac{1}{32}=2,03125$$ ►

Mashqlar

Differensial yordamida taqribiy hisoblansin.

1. $y=\sqrt[3]{x},\quad x=7,76$
2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x},\quad x=1,012$
3. $y=\arcsin x,\quad x=0,08$
4. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\quad x=0,01$

16-MA'RUZA

Yuqori tartibli hosila va differensiallar

16.1. Yuqori tartibli hosilalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'[...] uning ixtiyoriy $x \in (a,b)$ nuqtasida $y' = f'(x)$ hosilaga [...] bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ ham x ning funksiyasi bo'lib, u h[...] hosilaga ega bo'lishi mumkin.

$f'(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning ikki[...] tartibli hosilasi deyiladi va

$$y'', \quad yoki \quad f''(x) \quad yoki \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = (f'(x))'.$$

$f''(x)$ ning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaning uchinchi tar[...] hosilasi deyiladi va

$$y''', \quad yoki \quad f'''(x) \quad yoki \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning to'rtinch[...] h.k., n-tartibli hosilalari ta'riflanadi va bu yuqori tartibli hosi[...] quyidagicha

$$f^{IV}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

belgilanadi.

Masalan, $y = 2x^3 - 5x^2 + 1$ funksiyaning yuqori tar[...] hosilalari

$$y' = 6x^2 - 10x, \quad y'' = 12x - 10, \quad y''' = 12,$$

$$y^{(IV)} = y^{(V)} = \ldots = 0$$

bo‘ladi.

Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topish uchun, umuman aytganda, uning hamma avvalgi tartibli hosilalarini hisoblash kerak bo‘ladi. Ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini bir yo‘la hisoblash mumkin.

1-misol. $y = a^x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y' = a^x \ln a,$$

$$y'' = \left(a^x \ln a\right)' = a^x \cdot (\ln a)^2,$$

$$y''' = \left(a^x (\ln a)^2\right)' = a^x \cdot (\ln a)^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \left(a^x (\ln a)^{n-1}\right)' = a^x (\ln a)^n.$$

Xususan, $y = e^x$ bo‘lsa, $y^{(n)} = e^x$ bo‘ladi.

2-misol. $y = \ln x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:*

$$y' = \frac{1}{x},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1)\cdot\frac{1}{x^2},$$

$$y''' = \left[(-1)\cdot\frac{1}{x^2}\right]' = (-1)\cdot\frac{2}{x^3} = (-1)^2\frac{1\cdot 2}{x^3},$$

$$y^{(IV)} = \left[(-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2}{x^3}\right]' = (-1)^2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}\cdot(-1) = (-1)^3\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\dots n)$$

3-misol. $y=\sin x$ *funksiyaning yuqori tartibli hosilala[…] topamiz*:

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y''=(y')'=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=[-\sin x]'=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

....

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Xuddi shunga o‘xshash, agar $y=\cos x$ bo‘lsa, u holda

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

bo‘ladi.

Eslatma. *Yuqorida keltirilgan funksiyalarning n-ta[…] hosilalarini ifodalovchi formulalar induksiya usuli yorda[…] isbotlanadi.*

Masalan, $y=e^{3+4x}$ funksiyaning yuqori tartibli hosil[…] quyidagicha bo‘ladi:

$$y'=e^{3+4x}\cdot 4,$$

$$y''=e^{3+4x}\cdot 4^2,$$

$$y'''=e^{3+4x}\cdot 4^3,$$

....

$$y^{(n)}=e^{3+4x}\cdot 4^n.$$

16.2. Sodda qoidalar. Leybnits formulasi

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da ber[…] bo‘lib, $x\in(a,b)$ nuqtada $f^n(x)$ va $g^n(x)$ hosilalarga

...lsin:

$$1)\ \left(c\cdot f(x)\right)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\qquad c=const,$$

$$2)\ \left(f(x)+g(x)\right)^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$$

...ladi Bu tengliklarning o'rinli bo'lishi hosila hisoblash ...idalardan kelib chiqadi.

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko'paytmasi

$y=f(x)\cdot g(x)$ ning yuqori tartibli hosilalarini topamiz:

$y'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x),$

$y''=f''(x)\cdot g(x)+f'(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g'(x)+g'(x)\cdot f''(x)=$

$=f''\cdot g+2f'\cdot g'+f\cdot g'',$

$y'''=f'''\cdot g+f''\cdot g'+2f''\cdot g'+2f'\cdot g''+f'\cdot g''+f\cdot g'''=$

$=f'''\cdot g'+3f''\cdot g'+3f'\cdot g''+f\cdot g''',$

$y^{(IV)}=f^{(IV)}\cdot g+4f'''\cdot g'+6f''\cdot g''+4f'\cdot g'''+f\cdot g^{(IV)}$

...muman,

$$y^{(n)}=f^{(n)}\cdot g+C_n^1 f^{(n-1)}g'+C_n^2 f^{(n-2)}\cdot g''+\dots+f\cdot g^{(n)}\qquad (1)$$

...ladi, bunda

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\qquad (k!=1\cdot 2\dots k)$$

Keyingi tenglikning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatiladi.

(1) formula Leybnits formulasi deyilad.

4-Misol. *Ushbu $y=x\cdot e^x$ funksiyaning n-tartibli hosilasi* ...*lsin.*

◀Bu tenglikda

$$e^x=f(x),\qquad x=g(x)$$

...lik. Ravshanki,

$$f^{(n)}(x)=\left(e^x\right)^{(n)}=e^x \qquad (n=1,2,3,...)$$

$$g'(x)=1, \qquad g''(x)=g'''(x)=\cdots=g^{(n)}(x)=0$$

Unda Leybnits formulasiga ko'ra

$$y^{(n)}=\left(e^x\cdot x\right)^{(n)}=e^x\cdot x+n\cdot e^x$$

bo'ladi. ▶

16.3. Yuqori tartibli differensiallar

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyaning differensiali

$$dy=f'(x)dx$$

da $f'(x)$ ko'payuvchi x ning funksiyasi, dx esa x n
orttirmasi Δx bo'lib, x ga bog'liq bo'lmaydi. Demak, dy x n
funksiyasi bo'ladi.

Ta'rif. $y=f(x)$ *funksiya differensialining differens*
berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali deyiladi va d
yoki $d^2f(x)$ *kabi belgilanadi.*

Demak,

$$d^2f(x)=d\left(df(x)\right) \qquad \left(d^2y=d(dy)\right).$$

Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali d^2y
navbatida x ning funksiyasi bo'lishi mumkin. Bu differensial
differensiali $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli differen
deyiladi va d^3y yoki $d^3f(x)$ kabi belgilanadi. Demak,

$$d^3f(x)=d\left(d^2f(x)\right) \qquad \left(d^3y=d\left(d^2y\right)\right)$$

Umuman $y=f(x)$ funksiyaning n-tartibli differen
d^ny quyidagicha

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right) \qquad \left(d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)\right)$$

...llanadi.

Shuni yana bir bor ta'kidlaymizki, yuqoridagi funksiya ...rensiallarida argument x ning differensiali dx $(dx=\Delta x)$ ...mas sifatida qaraladi. Shu holatdan foydalanib yuqori tartibli ...rensiallarning yuqori tartibli hosilalar orqali ifodalarini ...miz:

$$d(dy)=d(y'\cdot dx)=dx\cdot dy'=dx\cdot y''\cdot dx=y''dx^2,$$

$$d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dx^2\cdot dy''=dx^2\cdot y'''\cdot dx=y'''\cdot dx^3$$

...mon,

$$d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n.$$

Keyingi tenglik matematik induksiya usuli yordamida ...lanadi.

Masalan, $y=\sin x$ funksiyaning 8-tartibli differensiali

$$d^8y=y^{(8)}\cdot dx^8=\sin\left(x+8\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx^8=\sin x dx^8$$

...adi

Mashqlar

Berilgan funksiyalarning n – tartibli hosilasi hisoblansin.

1. $y=\sqrt{x}$
2. $y=\sin 2x+\cos(x+1)$
3. $y=\sqrt[5]{e^{7x-1}}$
4. $y=\lg(5x+2)$

17-MA'RUZA

Differensiallanuvchi funksiyalarning xossalari. Teylor formulasi

Biror oraliqda differensiallanuvchi bo'lgan funk ma'lum xossalarga ega bo'ladi. Odatda, ular teoremalar ifodalanadi. Xossalardan ba'zilarini keltiramiz.

17.1. Differensiallanuvchi funksiyalarning xossalari

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'li $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x_0)$ miqdor $f(x)$ funksiyaning (a,b) dagi en qiymati (eng kichik qiymati) deyiladi.

1-Teorema (Ferma). *Agar $y = f(x)$ funksiya c n $(c \in (a,b))$ o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga funksiya c nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda*

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

◄Aytaylik, $f(x)$ funksiya c nuqtada $(c \in ($ o'zining eng katta qiymatiga erishsin:

$$f(x) \le f(c) \qquad (x \in (a,b)) \qquad (1)$$

c nuqtaga Δx orttirma beramizki $c + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin.

Unda (1) ko'ra $f(c + \Delta x) \le f(c)$ bo'ladi. K tengsizlikdan

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c)$ hosilaga

Ta'rifga binoan

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Agar $\Delta x>0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$$

'lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0 \qquad (2)$$

'ladi

Agar $\Delta x<0$ bo'lsa, unda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$$

'lib,

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0 \qquad (3)$$

'ladi (2) va (3) munosabatlardan

$$f'(c)=0$$

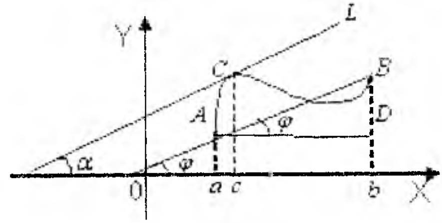
'lishi kelib chiqadi. ►

2-Teorema. (Lagranj). *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ ...ntda uzluksiz bo'lib, (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lsa, u ...da a bilan b orasida shunday c nuqta $(a<c<b)$ topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

...ladi

◄ Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz ...'lib, uning grafigi 1-chizmada tasvirlangan AB egri chiziqni ...ladi.



1-chizma

AB vatarning OX o'qining musbat yo'nalishi b
tashkil etgan burchakni φ deylik. Unda bu vatar (to'
chiziq)ning burchak koeffitsiyenti $tg\varphi$ bo'ladi.

AB egri chiziqda shunday C nuqta bo'lishini tasav
etish mumkinki, egri chiziqqa shu nuqtada o'tkazilgan urinma
vatarga parallel bo'ladi. Bu L urinmaning OX o'qining mu
yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni α deylik. Ravshanki, u
ma to'g'ri chiziq bo'lib, uning burchak koeffitsiyenti $tg\alpha$ bo'la

Ayni paytda $y=f(x)$ funksiya hosilasining geom
ma'nosiga ko'ra

$$tg\alpha = f'(c) \qquad (4)$$

bo'ladi, bunda c nuqta AB egri chiziqdagi C ning absissasi.

Modomiki, vatar bilan urinma parallel ekan, unda

$$tg\varphi = tg\alpha \qquad (5)$$

bo'ladi.

1-chizma keltirilgan ADB to'g'ri burchakli uchburcha

$$AD = b-a, \qquad BD = f(b)-f(a), \qquad \angle A = \varphi.$$

Unda shu uchburchakdan

$$tg\varphi = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (6)$$

bo'lishini topamiz.

(4), (5), va (6) munosabatlardan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (7)$$

...'lishi kelib chiqadi. ►

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. *Agar* (a,b) *intervalda* $f'(x)=0$ *bo'lsa, u holda* ...*ksiya* (a,b) *da o'zgarmas bo'ladi.*

◄ (a,b) intervalda tayin x_0 va ixtiyoriy x nuqtalarni olamiz. ...'ng $[x_0,x]$ *kesma*$($*yoki*$[x,x_0])$ ga Lagranj teoremasini ...'llaymiz:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)=0.$$

Bundan

$$f(x)=f(x_0)=const$$

...'lishi kelib chiqadi. ►

2-natija. $y=f(x)$ *funksiya uchun Lagranj teoremasining* ...*tlari bajarilib,*

$$f(a)=f(b)$$

...*lsin. U holda* a *va* b *orasida shunday* c *nuqta* $(a<c<b)$ ...*iladiki,*

$$f'(c)=0$$

...*ladi.*

◄Bu natijaning isboti $f(a)=f(b)$ shartda (7) tenglikdan ...lib chiqadi. ►

Endi Lagranj teoremasidan umumiyroq bo'lgan teoremani ...miz keltiramiz.

3-teorema. (Koshi). *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar*

1) $[a,b]$ *segmentda uzluksiz,*

2) (a,b) *intervalda* $f'(x),g'(x)$ *hosilalarga ega,*

3) (a,b) *da* $g'(x)\neq 0$ *bo'lsin. U holda a bilan b orasida shunday* c $(a<c<b)$ *topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Xususan, $g(x)=x$ bo'lganda Koshi teoremasidan Lag

teoremasi kelib chiqadi.

17.2. Teylor formulasi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $(\delta>0)$

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$$

hosilalarga ega bo'lsin. Berilgan funksiya va uning hosilalari x_0 nuqtadagi qiymatlaridan foydalanib ushbu

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) ni hosil qilamiz.

Bu ko'phadni $f(x)$ funksiyaga qanchalik yaqinli

aniqlash maqsadida

$$R_n(x)=f(x)-\Big[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+ \\ +\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big] \tag{9}$$

ayirmani qaraymiz. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+ \\ +\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{10}$$

(10) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi deyiladi, R_n

ga esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

Qoldiq had $R_n(x)$ning (9) formula bilan ifodalanishi (8) ko'phadning $f(x)$ ga yaqin bo'lishi haqida xulosa chiqarishga imkon bermaydi. Agar $R_n(x)$ni n va x larning qiymatlari bo'yicha baholay olsak va uning nolga intilishini ko'rsata olsak, u holda $f(x)$ funksiya (8) ko'phadga yaqin deya olamiz.

x o'zgaruvchini tayinlab, t ni o'zgaruvchi sifatida qarab quyidagi

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad (11)$$

yordamchi funksiyani

$[x_0, x] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $\quad (yoki\,[x, x_0] \subset (x_0-\delta, x_0+\delta))$

da qaraymiz. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]-\dots-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \qquad (12)$$

Endi ushbu

$$\phi(t)=(x-t)^{n+1} \qquad (13)$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya ham $[x_0, x]$ da uzluksiz va

$$\phi'(t) = -(n+1)(x-t)^n \tag{14}$$

hosilaga ega.

Shunday qilib $F(t)$ *va* $\phi(t)$ funksiyalar uchun $[x_0, x]$ da Koshi teoremasining shartlari bajariladi. Unda Koshi teoremasiga ko'ra

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\phi'(c)} \tag{15}$$

bo'ladi, bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida joylashgan.

(11), (12), (13) va (14) munosabatlardan foydalani topamiz:

$$F(x)=0, \quad F(x_0)=R_n(x), \quad F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$\phi(x)=0, \quad \phi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}, \quad \phi'(c) = -(n+1)(x-c)^n$$

Natijada (15) tenglik ushbu

$$\frac{-R_n(x)}{-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\dfrac{-f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikdan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(10) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + $$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{16}$$

(16) formula Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formu deyiladi.

Xususiy holda, $x_0 = 0$ bo‘lganda

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (16')$$

bo‘lib, uni Makloren formulasi deb yuritiladi.

Agar (16) va (16′) formulalarda qoldiq had yetarlicha kichik bo‘lsa, u holda

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formulalar hosil bo‘lib, ulardan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi. Agar Teylor formulasida $x_0 = 0$ bo‘lsa, unda hosil bo‘lgan formulani Makloren formulasi deyiladi.

17.3. Ba’zi funksiyalar uchun Teylor (Makloren) formulalari. Taqribiy formulalar

1) Aytaylik, $y = e^x$ bo‘lsin. Ma’lumki, $y^{(n)} = e^x$. Unda $y(0) = 1$, $y^{(k)}(0) = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ bo‘lib, bu funksiyaning Makloren formulasi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

bo‘ladi. $n \to \infty$ da qoldiq had nolga intiladi. Natijada

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz.

2) Aytaylik, $y=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki,

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Ravshanki, $y(0)=0$ va

$$y^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & agar\ \ n\ \ juft\ \ bo'lsa,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & agar\ \ n\ \ toq\ \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

3) Aytaylik, $y=\cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning $n-$ tartibli hosilasi $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

bo'ladi. Ravshanki, $y(0)=1$

$$y^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}o, & agar\ \ n\ \ toq\ \ bo'lsa,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & agar\ \ n\ \ juft\ \ bo'lsa\end{cases}$$

bo'ladi. Bu funksiyaning Makloren formulasi $(n=2m)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots +$$

$$+(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos c$$

bo'lib, undan ushbu

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

4) Aytaylik, $y=(1+x)^n$ bo'lsin. Bunda n – natural son. Bu funksiyaning hosilalari

$$y' = n(1+x)^{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)(1+x)^{n-2},$$

....

$$y^{(k)} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(1+x)^{n-k},$$

....

$$y^{(n)} = n!$$

(n dan yuqori bo'lgan barcha tartibdagi hosilalar 0 ga teng bo'ladi: $y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \ldots = 0$), bo'lib

$$y(0)=1, \quad y'(0)=n, \quad y''(0)=n(n-1), \ldots,$$

$$y^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n+k+1)$$

$$y^{(n)} = n!$$

bo'ladi. Unda $y=(1+x)^n$ funksiya uchun $(16')$ formula quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k + ... + x^n$$

Bu Nyuton binomi formulasidir.

Mashqlar

1. $y = x^3$ egri chizig'ida shunday nuqtani topingki, nuqtada unga o'tkazilgan urinma $A(-1;-1)$ va $B(2;8)$ nuqtalar tutashtiruvchi vatarga parallel bo'lsin.

2. Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklarni isbotlang:

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$;

b) $|arctga - arctgb| \le |a - b|$;

d) $e^x > 1 + x, \quad x \in R$.

3. Quyidagi funksiyalar uchun Makloren formulasi yozilsin:

a) $f(x) = \ln(1-2x)$; b) $f(x) = e^{2x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

18-MA'RUZA

Hosilalar yordamida funksiyalarning o'suvchiligi, kamayuvchiligi hamda ekstremumlarini aniqlash

18.1. Funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchiligi

$y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ixtiyoriy $x_1 \in (a,b)$, ixtiyoriy $x_2 \in (a,b)$ lar uchun

$x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi,

$x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \ge f(x_2)$ bo'lsa,

$f(x)$ funksiya (a,b) da kamayuvchi deyiladi.

Funksiyaning hosilalari yordamida uning o'suvchiligini hamda kamayuvchiligini aniqlash (o'suvchi hamda kamayuvchi bo'ladigan oraliqlarni aniqlash) mumkin.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib,*

$$f'(x) \ge 0 \qquad (x \in (a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) da o'suvchi bo'ladi.

◄Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x) \ge 0$ bo'lsin. (a,b) intervalda ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni (ular uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin) olib, $[x_1, x_2]$ segmentni qaraymiz. Ravshanki, $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Bu segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday c nuqta, $x_1 < c < x_2$ topiladiki,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

ya'ni

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda

$$f'(c)\ge 0, \qquad x_2-x_1>0$$

bo'lgani uchun $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$ bo'lib, undan $f(x_1)\le f(x$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$x_1<x_2 \text{ bo'lganda } f(x_1)\le f(x_2) \text{ bo'ladi.}$$

$f(x)$ funksiya (a,b) da o'suvchi.►

2-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da* $f'($ *hosilaga ega bo'lib, funksiya* (a,b) *da o'suvchi bo'lsa, u holda*

$$f'(x)\ge 0 \quad (x\in(a,b))$$

bo'ladi.

◄(a,b) intervalda ixtiyoriy x nuqta hamda $x+$ nuqtalarni olaylik $(x\in(a,b), x+\Delta x\in(a,b))$. $f(x)$ funks (a,b) da o'suvchi bo'lgani uchun

$\Delta x>0$ bo'lganda $f(x)\le f(x+\Delta x)$, ya'ni

$$f(x+\Delta x)-f(x)\ge 0$$

$\Delta x<0$ bo'lganda $f(x)\ge f(x+\Delta x)$, ya'ni

$$f(x+\Delta x)-f(x)\le 0$$

bo'lib, ikkala holda ham

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0 \quad (1)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosil ega. Unda

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

'lib, (1) munosabatga binoan $f'(x) \geq 0$ bo'ladi. ►

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teoremalar isbotlanadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib,*

$$f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a,b))$$

bo'lsa, u holda funksiya (a,b) *da kamayuvchi bo'ladi.*

4-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da* $f'(x)$ *hosilaga ega bo'lib, funksiya* (a,b) *da kamayuvchi bo'lsa, u holda*

$$f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a,b))$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu

$$y = f(x) = \ln(1 - x^2)$$

funksiyaning o'sish hamda kamayish oraliqlari topilsin.

◄Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi,

$$1 - x^2 > 0, \qquad (x-1)(x+1) < 0, \quad -1 < x < 1$$

$E = (-1,1)$ bo'ladi. Endi funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

So'ng $y' \geq 0$, ya'ni $\frac{2x}{x^2-1} \geq 0$ tengsizlikni yechamiz: Ravshanki,

$$\frac{2x}{x^2-1} \geq 0, \; x(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Demak, $-1 < x < 0$ bo'lib, bu $(-1,0)$ oraliqda berilgan funksiya o'suvchi bo'ladi.

Yuqoridagidek ko'rsatiladiki, berilgan funksiya $(0,1)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi.►

18.2. Funksiya ekstremumi. Funksiyaning ekstremum[...] erishishining zaruriy va yetarli shartlari

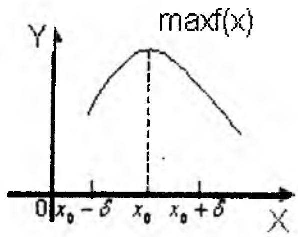
$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, x_0 n[...] o'zining atrofi $U_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ bilan $(\delta>0)$ ([...] intervalga tegishli bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *uchun*

$$f(x) \le f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada maksimumga erishadi deyi[...]* x_0 *funksiyaning maksimum nuqtasi,* $f(x_0)$ *ga funksiya[...] maksimum qiymati deyiladi va* $\max f(x)$ *kabi belgilanadi (1-chizma):*

$$f(x_0)=\max f(x)$$

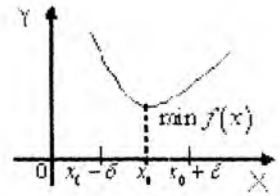


1-chizma

2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *uchun*

$$f(x) \ge f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada minimumga erishadi deyilad[...]* x_0 *funksiyaning minimum nuqtasi,* $f(x_0)$ *ga funksiyani[...] minimum qiymati deyiladi va* $\min f(x)$ *kabi belgilana[...] (2-chizma):* $f(x_0)=\min f(x)$



2-chizma

Funksiyaning maksimum va minimumlari uning ekstremumlari deyiladi.

Masala- funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalarni hamda funksiyaning ekstremum qiymatlarini topishdan iborat. Bu masala funksiyaning hosilalaridan foydalanib hal etilishi mumkin.

5-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* $x_0 \in (a,b)$ *nuqtada ekstremumga erishsa va bu nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, u holda*

$$f'(x_0)=0$$

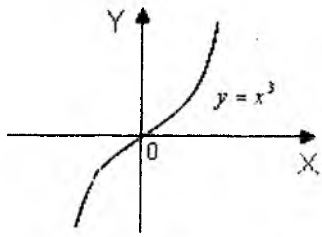
bo'ladi.

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x) \le f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Ayni paytda, $f(x_0)$ qaralayotgan funksiyaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ dagi eng katta qiymati bo'ladi. Ferma teoremasidan foydalanib $f'(x_0)=0$ bo'lishini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'lib, $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lganda ham teorema isbotlanadi.▶

Eslatma. $f(x)$ *funksiyaning biror* $x' \in (a,b)$ *nuqtada* $f'(x')$ *hosilaga ega va* $f'(x')=0$ *bo'lishidan uning* x' *nuqtada ekstremumga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.*

Masalan, $y = x^3$ *funksiyaning hosilasi* $y' = 3x^2$ $x = 0$ *da* y' ...
bo'ladi, biroq bu funksiya $x = 0$ *nuqtada ekstremumga ega e*...
(3-chizma).



3-chizma

Demak, 5-teorema funksiya ekstremumga erishishni... zaruriy shartini ifodalaydi.

Endi funksiya ekstremumga erishishining yetarli shartlar... keltiramiz:

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da hosilaga ega bo'li... $x_0 \in (a,b)$ nuqtada u nolga aylansin.

$$f'(x_0) = 0,$$

(demak, funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sha... bajarildi). Quyidagi savol tug'iladi: x_0 nuqtada funksi... ekstremumga erishadimi? Erishsa, qaysi biriga- maksimumgam... minimumgami? $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada minimum... erishadi, lekin $y'(0)$ mavjud emas.

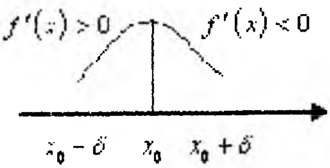
Bu savollarning javobi funksiya ekstremumga erishishinin... yetarli shartlarini ifodalaydi.

x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ atrofini olamiz.

a) Agar

ixtiyoriy $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f'(x) > 0$,

ixtiyoriy $x \in (x_0, x + \delta)$ da $f'(x) < 0$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi (4-chizma).



4-chizma

Haqiqatdan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0]$ da o'suvchi bo'lib, $f(x)<f(x_0)$, $[x_0, x+\delta)$ da kamayuvchi bo'lib, $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi.

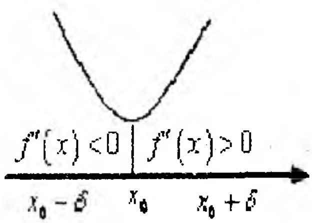
Demak, ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

b) Agar

ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)<0$

ixtiyoriy $x\in(x_0, x+\delta)$ da $f'(x)>0$

ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini "-" dan "+" ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi (5-chizma).



5-chizma

Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,x_0)$

kamayuvchi bo'lib, $f(x)>f(x_0)$, $[x_0,x+\delta)$ da o'suvchi bo

$f(x)>f(x_0)$ bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$f(x)>f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishi bildiradi.

d) Agar

ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)>0$,

ixtiyoriy $x\in(x_0,x+\delta)$ da $f'(x)>0$

yoki

ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)<0$,

ixtiyoriy $x\in(x_0,x+\delta)$ da $f'(x)<0$

ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirm u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. holda $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ da o'suvchi y kamayuvchi bo'ladi.

Natijada $f(x)$ funksiya ekstremumini topishning quyid qoidasiga kelamiz:

1) funksiya hosilasi $f'(x)$ topiladi;

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tengla yechimlaridan biri x_0 bo'lsin: $f'(x_0)=0$;

3) x_0 nuqtaning chap atrofi $(x_0-\delta,x_0)$ va o'ng atro $(x_0,x+\delta)$ da $f'(x)$

hosilaning ishorasi aniqlanadi va yuqorida keltirilgan a), b) qoidal tatbiq etilib, ekstremum qiymati topiladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

So'ng uni nolga tenglab, $f'(x) = 0$ tenglamani yechamiz:

$$3x^2 - 3 = 0, \quad 3(x-1)(x+1) = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +1.$$

Funksiya hosilasi

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

ning $x_1 = -1$ va $x_2 = 1$ nuqtalar atrofida ishorasini aniqlaymiz.

$x_1 = -1$ nuqtaning $(-1-\delta, -1+\delta)$ atrofini $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ olamiz.

Ixtiyoriy $x \in (-1-\delta, -1)$ da $f'(x) = 3(x-1)(x+1) > 0$ bo'ladi, chunki bunday nuqtalarda $x - 1 < 0$, $\quad x + 1 < 0$.

Ixtiyoriy $x \in (-1, -1+\delta)$ da $f'(x) = 3(x-1)(x+1) < 0$ bo'ladi., chunki bunday nuqtalarda $x - 1 < 0$, $\quad x + 1 > 0$.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_1 = -1$ nuqtadan o'tishda ishorasini "+" dan "-" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya $x_1 = -1$ nuqtada maksimumga erishadi va uning maksimum qiymati

$$\max f(x) = f(-1) = 4$$

bo'ladi.

$x_2 = 1$ nuqtaning $(1-\delta, 1+\delta)$ atrofini $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$ olamiz

Ixtiyoriy $x \in (1-\delta, 1)$ da $f'(x) = 3(x-1)(x+1) < 0$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x - 1 < 0$, $\quad x + 1 > 0$.

Ixtiyoriy $x \in (1, 1+\delta)$ da $f'(x) = 3(x-1)(x+1) >$ bo'ladi, chunki, bunday nuqtalarda $x - 1 > 0, \quad x + 1 > 0$.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosila $x_2 = 1$ nuqtadan o'ti... ishorasini "-" dan "+" ga o'zgartiradi. Demak, berilgan funk... $x_2 = 1$ nuqtada minimumga erishadi va uning minimum qiymati

$$\min f(x) = f(1) = 0$$

bo'ladi. ►

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'l... $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta... $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ atrofida birinchi va ikkinchi tarti... $f'(x), f''(x)$ hosilalarga ega bo'lib,

1) $f'(x_0) = 0$,

2) x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ uzluksiz va $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$f''(x_0) > 0$$

bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi;

$$f''(x_0) < 0$$

bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

◄ Teylor formulasidan foydalanib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0) = 0$. Unda

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Unda ikkinchi tartibli hosilaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishidan, x_0 nuqtaning biror atrofi topiladiki, bu atrofdagi nuqtalarda $f''(x)<0$, binobarin $f''(c)<0$ bo'ladi. Ravshanki, $(x-x_0)^2>0$. Demak,

$$\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2<0$$

bo'lib,

$$f(x)-f(x_0)<0$$

ya'ni,

$$f(x)<f(x_0)$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada maksimumga erishishini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash, $f''(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada minimumga erishishi ko'rsatiladi. ►

3-misol. Ushbu

$$f(x)=x^3-12x$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◄Ravshanki, $f'(x)=3x^2-12$ bo'ladi. $3x^2-12=0$ tenglamaning yechimlari $x_1=-2$, $x_2=2$ bo'ladi. Demak, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$.

Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)=6x$ bo'lib,

$$f''(-2)=6(-2)=-12<0, \qquad f''(2)=6\cdot 2=12>0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x=-2$ da maksimumga, $x=2$ da minimumga ega bo'lib,

$$\max f(x)=f(-2)=16, \qquad \min f(x)=f(2)=-16$$

bo‘ladi.▶

Eslatma. *Agar* $f'(x_0)=0$ *bo‘lsa, u holda* $f($

funksiyaning x_0 *nuqtada ekstremumga erishishi ham mum*

erishmasligii ham mumkin. Bu holda qo‘shimcha tekshirish bi
aniqlanadi.

18.3. Funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari

Ma’lumki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluk bo‘lsa, unda uzluksiz funksiyalarning xossasiga ko‘ra bu funks $[a,b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi. qiymatlar quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ topilib, u nol tenglanadi: $f'(x)=0$.

2) $f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamani yechimlari x_1, x_2, x_3 bo‘lsin.

3) $f(x)$ funksiyaning x_1, x_2, x_3 nuqtalardagi qiymatla topiladi.

Aytaylik, ular

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3)$$

bo‘lsin.

4) $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentning chekkalari a v b nuqtalardagi qiymatlari topiladi:

$$f(a), f(b).$$

Natijada,

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3),\ f(a), f(b)$$

qiymatlar hosil bo‘ladi. Bu qiymatlar orasidagi kattasi $f(x)$

funksiyaning $[a,b]$ dagi eng katta qiymati, kichigi esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi eng kichik qiymati bo'ladi.

4-misol. Ushbu

$$f(x)=x^2e^{-x}$$

funksiyaning $[-1,3]$ segmentdagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

◀Bu funksiyaning hosilasi

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$$

bo'lib, $f'(x)=0$ ya'ni

$$\left(2x-x^2\right)e^{-x}=0$$

tenglamaning yechimlari $x_1=0$, $x_2=2$ bo'ladi.

Endi berilgan funksiyaning bu $x_1=0$, $x_2=2$ nuqtalardagi hamda $[-1,3]$ segmentning chetki nuqtalari $x_3=-1$, $x_4=3$ dagi qiymatlarini topamiz:

$$f(x_1)=f(0)=0, \qquad f(x_3)=f(-1)=e$$

$$f(x_2)=f(2)=4e^{-2} \qquad f(x_4)=f(3)=9e^{-3}$$

Demak, berilgan funksiyaning $[-1,3]$ segmentdagi katta qiymati e, eng kichik qiymati 0 bo'ladi. ▶

Mashqlar

Hosilalar yordamida quyidagi funksiyalarning o'sishini, kamayishini va ekstremum nuqtalarini aniqlang.

1. $y=2x^3-9x^2+12x-9$ 2. $y=3x-x^2$

3. $y=x^2(x-2)^2$ 4. $y=\dfrac{x^3-9x^2}{4}+6x-9$

19-MA'RUZA

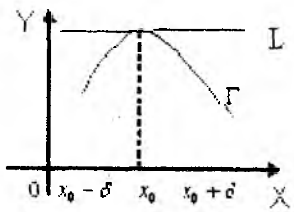
Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi, egilish nuqtasi va asimptotasi

19.1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

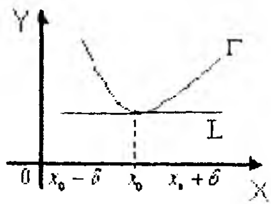
Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da beril $x_0 \in (a,b)$ va bu nuqtaning $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ atrofi $(\delta>0)$ (a,b) intervalga tegishli bo'lsin.

Berilgan $f(x)$ funksiya grafigi – egri chiziqni Γ, u $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmani L deylik.

Agar $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da Γ egri chiziq L urinm pastda joylashgan bo'lsa, $f(x)$ funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+$ da qavariq deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

Agar $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da Γ egri chiziq L urinmad yuqorida joylashgan bo'lsa, $f(x)$ funksiya graf $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da botiq deyiladi (2-chizma).

Funksiya hosilalari yordamida uning grafigini qavariqligi botiqligini aniqlash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da ikkin

...uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

1-teorema. *Agar* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da*

$$f''(x)<0$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ *funksiya grafigi* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da qavariq bo'ladi, agar*

$$f''(x)>0$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ *funksiya grafigi* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *da botiq bo'ladi.*

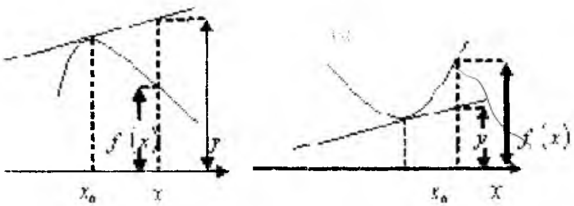
◄Aytaylik, abssissasi x bo'lgan urinma nuqtasining ordinatasi y bo'lsin. Unda

$$f(x)-y \le 0 \ \left(x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\right)$$

bo'lganda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

$$f(x)-y \ge 0$$

bo'lganda esa funksiya grafigi botiq bo'ladi (3-chizma).



3-chizma

Teylor formulasidan foydalanib ($n=2$ bo'lgan hol uchun) topamiz:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+f''(c)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!}, \qquad (1)$$

bunda c nuqta x_0 va x nuqtalar orasida.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma (yuqorida aytilgan urinma) tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (2)$$

bo'ladi. (1) tenglikdan (2) tenglikni hadlab ayirib topamiz:

$$f(x)-y=f''(c)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} \qquad (3)$$

Ravshanki, $x \to x_0$ da $c \to x_0$ bo'ladi. Ikkinchi ta
hosila x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$f''(c) \to f''(x_0)$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x)<0$ bo'lsin. Bu holda $(x_0-\delta, x_0$ +
da $f''(c)\le 0$ bo'lib, (3) tenglikka ko'ra

$$f(x)-y\le 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
qavariq bo'ladi.

Aytaylik, $f''(x)>0$ bo'lsin. Bu holda $(x_0-\delta, x_0$ +
da $f''(c)\ge 0$ bo'lib, (3) tenglikka ko'ra

$$f(x)-y\ge 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigi $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da b
bo'ladi.▶

19.2. Funksiya grafigining egilish nuqtasi

Agar ixtiyoriy $x\in(x_0-\delta, x_0)$ da funksiya grafigi
urinma L dan yuqorida (pastda) joylashgan bo'lib, ixtiyo
$x\in(x_0, x_0+\delta)$ da funksiya grafigi Γ urinma L dan pas
(yuqorida) joylashgan bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigin
egilish nuqtasi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ funksiya gra

$(x_0 - \delta, x_0)$ da botiq (qavariq) bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya hosilalari yordamida uning grafigining egilish nuqtasini topish mumkin.

Yuqorida keltirilgan 1-teorema va funksiya grafigining egilish nuqtasi ta'rifidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *$f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtalarini ikkinchi tartibli $f''(x)$ ni nolga aylantiradigan nuqtalar orasidan ($f''(x) = 0$ tenglamaning yechimlari orasidan) qidirish kerak.*

2-teorema. *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.*

Agar $f''(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

funksiyaning qavariq va botiqlikka tekshirilsin, egilish nuqtasi topilsin.

◄Berilgan funksiya uchun

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \qquad f''(x) = 6x - 6$$

bo'ladi.

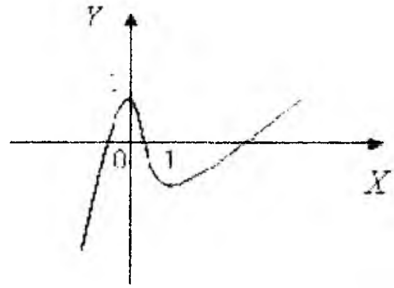
Ravshanki, $\qquad f''(x) = 6x - 6 < 0, \quad x - 1 < 0, \quad x < 1$.

Demak, berilgan funksiya grafigi $(-\infty, 1)$ da qavariq bo'ladi.

Shuningdek,

$$f''(x) = 6x - 6 > 0, \quad x - 1 > 0, \quad x > 1.$$

Demak, berilgan funksiya grafigi $(1, +\infty)$ da botiq bo'ladi. $x = 1$ nuqta $f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi (4-chizma).►



4-chizma

19.3. Funksiya grafigining asimptotalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $a \in R$ nuqtaning $(a-\delta,\ a+\delta)$ atrofida $(\delta > 0)$ berilgan bo'lsin.

Agar ushbu

$$\lim_{x \to a+0} f(x),\ \lim_{x \to a-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa,

$$x = a$$

to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya vertikal asimptotasi deyiladi.

Masalan, $x = 0$ to'g'ri chiziq (ordinatalar o'qi)

$$y = \frac{1}{x}$$

funksiyaning vertikal asimptotasi bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty,\ \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, +\infty)$, $(-\infty,$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Agar $x \to +\infty$ da ($x \to -\infty$ da) $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x) = kx + в + \alpha(x)$$

...lda ifodalansa, bunda k va $в$ lar o'zgarmas sonlar va

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0\quad\left(\lim_{x\to-\infty}\alpha(x)=0\right)$$

...

$$y=kx+в \qquad (1)$$

... chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi ...adi.

Xususan, (1) da $k=0$ bo'lsa,

$$y=в$$

... chiziq $f(x)$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasi ...adi.

Masalan,

$$y=x-4$$

... chiziq

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$$

...siyaning og'ma asimptotasi bo'ladi, chunki

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}=x-4+\frac{2}{x+1}=x-4+\alpha(x)$$

...lib,

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$$

...ladi (bunda $k=1$, $в=-4$).

2-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}$$

...ksiya grafigining asimptotalari topilsin.

◄Bu funksiya $x=1$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda ...nlangan va uzluksiz.

Ravshanki,

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-2x}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2-2x}{x-1}=-\infty$$

bo'ladi. Demak, $x=1$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya gra
vertikal asimptotasi bo'ladi.

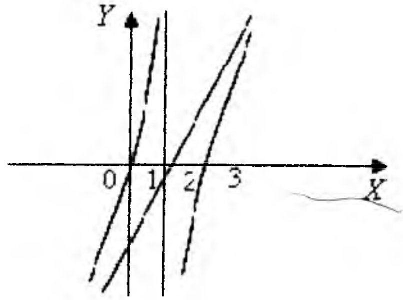
Berilgan funksiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{(x-1)^2-1}{x+1}=x-1-\frac{1}{x-1}.$$

Agar $\alpha(x)=\dfrac{1}{1-x}$ deyilsa, unda

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x}=0$$

bo'lib, $y=x-1$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiyaning og'ma asimptotasi ekanini topamiz (5-chizma).



5-chizma

Shuni aytish kerakki, $y=kx+в$ to'g'ri chiziq funksiyaning og'ma asimptotasi bo'lishi uchun

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right] \qquad (2)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Bundan $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptot
topish uchun (2) limitlarni hisoblash yetarli bo'ladi.▶

19.4. Funksiya grafigini yasash

Endi funksiya grafigini yasashga o'tish mumkin.U quyidagi sxema asosida bajariladi:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2) Funksiyani juft-toqlikka tekshirish;
3) Funksiyani davriylikka tekshirish;
4) Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
5) Funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish;
6) Monotonlik oraliqlarini aniqlash;
7) Ekstremumga tekshirish;
8) Botiq va qavariqlikka tekshirish;
9) Funksiyaning asimptotalarini topish;
10) Funksiya grafigini chizish.

3-misol. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ *funksiyani to'liq tekshiring va grafigini chizing.*

1. Funksiya $x=1$ nuqtadan tashqari sonlar o'qining barcha nuqtalarida aniqlangan.

2. $f(-x)=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}\neq f(x)$ ва $f(-x)\neq -f(x)$,

demak, funksiya toq ham emas, juft ham emas.

3. Funksiya davriy emas.

4. $x=1$ nuqtada II-tur uzilishga ega:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty,$$

qolgan nuqtalarda funksiya uzluksiz.

5. Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $y=-1$ va $y=0$ da $x=\dfrac{1}{2}$.

Bundan kelib chiqadiki, $(0;-1)$ va $\left(\dfrac{1}{2};\,0\right)$ nuqtalar funksiya grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari.

6. $y' = -\dfrac{2x}{(x-1)^3}$ funksiya aniqlanish sohasini quy

oraliqlarga bo'lamiz: $(-\infty;\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1;\ +\infty)$

$(-\infty;\ 0)$ oraliqlarda funksiya kamayadi. $(0,\ 1)$ oral

esa funksiya o'sadi. $(1;\ +\infty)$ oraliqda funksiya kamayadi.

7. $y'(x)$ hosila ishorasini $x=0$ nuqtani o'ti manfiydan musbatga o'zgartiradi. Demak, berilgan funksiya x nuqtada minimumga erishadi va $y_{min} = y(0) = -1$ bo'ladi.

8. Funksiya botiq va qavariqligini tekshirish uchun ikki tartibli hosilani olamiz. $y'' = 2\cdot\dfrac{2x+1}{(x-1)^4}$ funksiyaning aniqla sohasini quyidagi oraliqlarga ajratamiz.

$$\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2};\ 1\right)\ (1;\ +\infty).$$

$\left(-\infty;\ \dfrac{-1}{2}\right)$ da $f''(-1) = -\dfrac{1}{8} < 0$ funksiya qavariq,

$\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$ da $f''(0) = 2 > 0$ funksiya botiq, $(1;\ +\infty$

oraliqda $f''(0) = 10 > 0$ funksiya botiq. Funksiyaning ikkinc tartibli hosilasi $x = -\dfrac{1}{2}$ dan o'tishda o'z ishorasini o'zgartira bundan kelib chiqadiki, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{8}{9}$ nuqta egilish nuqta bo'ladi.

9. $x=1$ funksiyaning vertikal asimptotasi, $y=0$ gorizontal asimptotasi, ya'ni

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 0$$

Og‘ma asimptotasini topamiz:

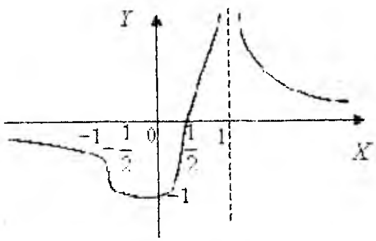
$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

holda $k = 0$

$$b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0,$$

u holda $b = 0$. Bundan kelib chiqadiki $y = kx + b$ og‘ma asimptota yo‘q.

10. Funksiya grafigi:



6-chizma

Mashqlar

Quyidagi funksiyalarni to‘liq tekshiring va grafigini yasang.

1. $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$ 2. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

3. $y = \dfrac{2}{x^2+2x}$ 4. $y = \dfrac{4x^2}{3+x^2}$

20-MA'RUZA

Parametrik usulda berilgan funksiyalar

20.1. Parametrik usulda berilgan funksiya tushunch…

Ma'lumki, $X \subset R$ to'plamdan olingan har bir x … biror f qoidaga ko'ra $Y \subset R$ to'plamdagi bitta y son … qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan deyilib,

$$y = f(x)$$

kabi belgilanar edi. Bunda x ga y ni mos qo'yadigan … turlicha, jumladan analitik, jadval hamda grafik usullarida bo'l… ko'rdik.

x va y o'zgaruvchilarning orasidagi bog'lanish yord… o'zgaruvchi (vositachi), masalan t o'zgaruvchi orqali … o'rnatilishi mumkin.

Aytaylik, x ham, y ham biror t o'zgaruvchiga bo… bo'lsin:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (1)$$

Bu (1) munosabatdagi

$$x = \varphi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (2)$$

funksiyaning qiymatlar to'plamini X deylik. X to'plamga teg… bo'lgan ixtiyoriy x_0 sonni olib, uni (2) munosabatdagi x … o'rniga qo'yamiz:

$$x_0 = \varphi(t).$$

Natijada t ga nisbatan tenglama hosil bo'ladi. F… qilaylik, bu tenglama yagona $t = t_0$ yechimga $\left(t_0 = \varphi^{-1}(x_0)\right)$ … bo'lsin. Uni (1) munosabat

$$y = \psi(t)$$

dagi t ning o'rniga qo'ysak, unda y_0 $\left(y_0 = \psi(t_0)\right)$ son ho…

X to'plamdan olingan x_0 songa shu y_0 sonni mos qo'yish

x_0 va y_0 lar orasida bog'lanish yuzaga keladi.

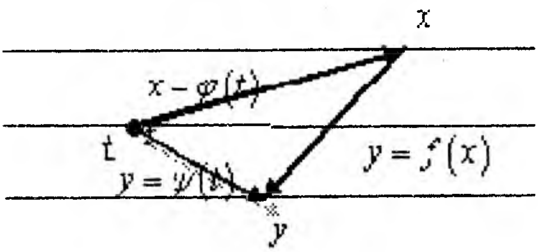
Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga yuqorida ...ilgan qoidaga ko'ra bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil ...adi

$$y = f(x).$$

Bunda x va y orasidagi bog'lanishni

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \ (\alpha \le t \le \beta) \end{cases} \qquad (3)$$

...ma bajaradi (1-chizma).



1-chizma

Bu yerda t o'zgaruvchi parametr deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyani (1) sistema yordamida aniqlanishi ...nksiyani parametrik usulda berilishi deyiladi. Masalan, ushbu

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$$

...istema

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

funksiyani aniqlaydi.

20.2. Parametrik usulda berilgan funksiyalarning hosil

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda u

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \ (\alpha \le t \le \beta) \end{cases} \tag{3}$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lib, $\varphi(t)$,
funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz va $\varphi(t)$ funksiya shu or
qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsin.

Teorema. *Agar* $\varphi(t)$ *va* $\psi(t)$ *funksiyalar* $t_0 \in [$
nuqtada $\varphi'(t_0)$ *ва* $\psi'(t_0)$ *hosilalarga ega bo'lib,* $\varphi'(t_0$
bo'lsa, u holda $y = f(x)$ *funksiya* $x_0 \in [a,b]$ *nu*
$(x_0 = \varphi(t_0))$ $f'(x_0)$ *hosilaga ega va*

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

bo'ladi.

◄ Ushbu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nisbatni qaraylik, bunda $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$. (3) sistem
foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}.$$

Ravshanki,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\dfrac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}}.$$

Keyingi tenglikda limitga o'tsak $(t \to t_0 \ da \ x \to x_0)$ unda

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \qquad (4)$$

lishi kelib chiqadi. ▶

Eslatma. *(3) munosabat quyidagicha*

$$y'_x(x_0) = f'_x(x_0) = \frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)$$

yozilishi mumkin.

1-misol. *Aytaylik,* $y = f(x)$ *funksiya parametrik usulda ushbu*

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

sistema yordamida berilgan bo'lsin. $y = f(x)$ *funksiyaning hosilasi topilsin.*

◀ Bu $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini (4) formuladan foydalanib topamiz:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(b\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3b\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a}tgt \ ▶$$

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \ (\alpha \le t \le \beta) \end{cases} \qquad (3)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lsin.

Tegishli shartlar bajarilganda bu funksiya ikkinchi, uchinchi va h.k. tartibli hosilalarga ega bo'ladi.

Biz $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalari qanday hisoblanishini ko'rsatamiz.

20.2. Parametrik usulda berilgan funksiyalarning hosil

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda u

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \ (\alpha \le t \le \beta) \end{cases} \tag{3}$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo‘lib, $\varphi(t)$,
funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz va $\varphi(t)$ funksiya shu o
qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lsin.

Teorema. *Agar* $\varphi(t)$ *va* $\psi(t)$ *funksiyalar* $t_0 \in$
nuqtada $\varphi'(t_0)$ *va* $\psi'(t_0)$ *hosilalarga ega bo‘lib,* $\varphi'(t$
bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ *funksiya* $x_0 \in [a,b]$ *n*
$(x_0 = \varphi(t_0))$ $f'(x_0)$ *hosilaga ega va*

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

bo‘ladi.

◀ Ushbu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nisbatni qaraylik, bunda $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$. (3) sistem
foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)}.$$

Ravshanki,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\dfrac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}}.$$

Keyingi tenglikda limitga o'tsak $(t \to t_0 \; da \; x \to x_0)$ unda

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \qquad (4)$$

...'lishi kelib chiqadi. ▶

Eslatma. *(3) munosabat quyidagicha*

$$y'_x(x_0) = f'_x(x_0) = \frac{\psi'_t(t_0)}{\varphi'_t(t_0)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right)$$

...yozilishi mumkin.

1-misol. *Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya parametrik usulda*

...

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases} \qquad \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

...tema yordamida berilgan bo'lsin. $y = f(x)$ funksiyaning ...silasi topilsin.

◀ Bu $y = f(x)$ funksiyaning hosilasini (4) formuladan ...ydalanib topamiz:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(b\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3b\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a}tgt \;\; ▶$$

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \end{cases} \qquad (3)$$

...tema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lsin.

Tegishli shartlar bajarilganda bu funksiya ikkinchi, uchinchi va h.k. tartibli hosilalarga ega bo'ladi.

Biz $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalari qanday hisoblanishini ko'rsatamiz.

Ma'lumki,

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{4}$$

(4) munosabatdagi $f'(x)$ hosilani x ning murakkab funk
sifatida

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad t=\varphi^{-1}(x)$$

(bunda $t=\varphi^{-1}(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ funksiyaga nisbatan te
funksiya bo'lib, uning hosilasi

$$\left[\varphi^{-1}(x)\right]'_t=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

bo'ladi) qarab topamiz:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}= \tag{5}$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

Xuddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiyaning uchinchi tart
hosilasi hisoblanadi. Bu hosila uchun

$$f'''(x)=\frac{\varphi'^2(t)\cdot\psi'''(t)-\varphi'(t)\cdot\psi'(t)\cdot\varphi'''(t)-3\varphi'(t)\cdot\varphi''(t)\cdot\psi''(t)+3\varphi''^2(t)\cdot\psi'(}{\left[\varphi'(t)\right]^5}$$

bo'ladi.

2-misol. *Aytaylik,* $y=f(x)$ *funksiya parametrik usul*
ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t-2\sqrt{t}, \\ y=\psi(t)=t+2\sqrt{t} \end{cases} \quad (1<t<+\infty)$$

... yordamida berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning aniqlanish ... hamda $f'(x)$, $f''(x)$ hosilalari topilsin.

◀ Avvalo berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini ...

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $\varphi(t) = t - 2\sqrt{t}$ $(1 < t < +\infty)$ funksiyaning qiymatlari ... bo'ladi. $\sqrt{t} = u$ deb topamiz:

$$u^2 - 2u - x = 0.$$

Ravshanki,

$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+x}.$$

Demak, $1 + x > 0$, ya'ni $x > -1$ bo'lib, undan $y = f(x)$ ...iyaning aniqlanish sohasi $(-1, +\infty)$ bo'lishi kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini ...blaymiz:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{t}}}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{t}-1},$$

$$f''(x) = \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}-1}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{t}-1}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{1}{\left(\sqrt{t}-1\right)^3}. \ ▶$$

20.3. Parametrik usulda berilgan funksiyalarning ekstremumlari

Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, u $x_0 \in X$ nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsa, funksiya ekstremumi quyidagicha topilar edi:

1) $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ hiso

$f'(x)=0$ tenglama yechiladi. Aytaylik, bu tenglamaning ye

x_0 bo'lsin: $f'(x_0)=0$,

2) $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi f

hosilasi hisoblanadi.

Agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 n

minimumga, $f''(x_0)<0$ bo'lsa, maksimumga erishadi.

Xuddi shu yo'l bilan parametrik usulda be funksiyaning ekstremumi topiladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (3)$$

sistema yordamida parametrik usulda berilgan bo'lsin. Bunda

va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ da birinchi va ikkinchi t

hosilalarga ega bo'lib, $\varphi'(t)\neq 0$.

Ma'lumki,

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad f''(x)=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}. \quad ($$

Funksiyaga ekstremum qiymat beradigan nuqtalarni

$$\psi'(t)=0$$

tenglama ildizlari orasidan izlanishi kerak.

Faraz qilaylik, $t=t_0$ bu tenglamaning yechimi bo'

$\psi'(t_0)\equiv 0$. Unda (6) ga ko'ra

$$f''(x_0)=\frac{\psi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^2}$$

bo'ladi.

Agar $\psi''(t) < 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_0 = \varphi(t_0)$ nuqtada maksimumga, agar $\psi''(t) > 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_0 = \varphi(t_0)$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

3-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = t^5 - 5t^3 - 20t + 7, \\ y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3 \end{cases} \quad (-2 < t < 2)$$

Parametrik usulda berilgan funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀Berilgan $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz:

$$\varphi'(t) = 5t^4 - 15t^2 - 20,$$

$$\psi'(t) = 12t^2 - 6t - 18,$$

$$\psi''(t) = 24t - 6.$$

Endi

$$\psi'(t) = 0, \text{ ya'ni } 12t^2 - 6t - 18 = 0$$

tenglamani yechib, topamiz:

$$t_1 = -1, \qquad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Agar

$$\psi''(-1) < 0, \qquad \psi''\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, $y = f(x)$ funksiya

$t_1 = -1$ (ya’ni $x = 31$) da maksimumga,

$t_2 = \frac{3}{2}$. (ya’ni $x = -\frac{1031}{32}$) da minimumga

erishishini topamiz.▶

Mashqlar

1.Ushbu chiziqning

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan t parametr yo'qotilib, uning De koordinatalar sistemasidagi tenglamasi topilsin va grafigi chizil

Ko'rsatma: Avval birinchi tenglamani 3 ga, ikki tenglamani 2 ga bo'lib, so'ngra t parametrni yo'qoting.

2. Quyidagi chiziqlarning parametrik tenglamasidan parametr yo'qotilib, uning Dekart koordinatalar sistemasi tenglamasi topilsin va grafigi chizilsin.

a) $x = t - 1, \quad y = t^2 - 2t + 2$.

b) $x = (t+1)^2, \quad y = (t-1)^2$.

3. Parametrik ko'rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiya uc

y'_x topilsin.

a) $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

b) $x = e^{-t}, \quad y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty$.

21-MA'RUZA

Aniqmas integral. Integralning sodda xossalari va integrallash usullari

14-ma'ruzada matematikada muhim bo'lgan differensiallash amali, berilgan funksiyaga ko'ra uning hosilasini topish bayon etildi. Bu amal orqali ko'pgina masalalar, jumladan moddiy nuqta harakat qonuniga ko'ra uning tezligini topish, egri chiziqqa urinma o'tkazish kabi masalalar hal etildi.

Aksincha, funksiyaning hosilasi ma'lum bo'lganda funksiyaning o'zini topish (tezlikka ko'ra harakat qonunini topish, urinmaga ko'ra egri chiziqni topish va h.k) masalalari ko'p uchraydi. Bunday masalalar yuqorida keltirilgan masalalarga teskari bo'lib, ular funksiyaning integrali tushunchasiga olib keladi. (Bayon etiladigan integrallash amali differensiallashga teskari bo'lgan amal bo'ladi).

21.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lsin. Agar shu intervalda aniqlangan $F(x)$ funksiya uchun

$$F'(x)=f(x) \tag{1}$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) da $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ bo'ladi, chunki $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x)$,

shuningdek, $f(x)=\cos x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi

$F(x)=\sin x$ bo'ladi, chunki $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$.

(1) munosabatga ko'ra

$$\left(F(x)+c\right)' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x) \qquad \mathbf{(2)}$$

bo‘ladi, bunda c -ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Shunday qilib,

$$F(x)+c$$

funksiyalar ham $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalari bo‘ladi

Demak, $f(x)$ boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘

cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalarga ega bo‘lar ekan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya ixtiyoriy ikkita $F($

$\phi(x)$ boshlang‘ich funksiyalarga ega, ya’ni

$$F'(x) = f(x), \qquad \phi'(x) = f(x)$$

bo‘lsa,

$$\phi(x) = F(x) + c \; (c = const)$$

bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\left[\phi(x) - F(x)\right]' = \phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

bo‘lib, Lagranj teoremasining natijasiga ko‘ra (qaralsin,
ma’ruza)

$$\phi(x) - F(x) = c \;\; (c = const)$$

bo‘ladi va undan

$$\phi(x) = F(x) + c$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Natijada quyidagi xulosaga kelamiz:

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da boshlang‘ich funk

$F(x)$ ga ega bo‘lsa, u holda

1) $f(x)$ funksiya cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyal
ega,

2) barcha boshlang‘ich funksiyalarning umumiy ifodasi

$$F(x) + c \qquad (c = const) \qquad (3)$$

bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy boshlang‘ich funksiya shu ifoda
(o‘zgarmas c ga qiymat berish natijasida) kelib chiqadi.

Ta'rif. *(3) ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va*

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi, bunda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $\int$ – integral belgisi.

Demak,

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (c = const) \qquad (4)$$

1-misol. *Ushbu*

$$\int 5x^5 dx$$

integral topilsin.

◄Ta'rifga ko'ra, bu integral shunday funksiyaki, uning hosilasi $5x^5$ ga teng. Ravshanki,

$$F(x) = \frac{5}{6}x^6 + c \quad (c = const)$$

funksiya uchun

$$F'(x) = (\frac{5}{6}x^6 + c)' = \frac{5}{6} \cdot 6x^5 + 0 = 5x^5$$

bo'ladi. Demak,

$$\int 5x^5 dx = \frac{5}{6}x^6 + c\,.►$$

Eslatma. *Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, uning aniqmas integrali mavjud bo'ladi.* (Bu tasdiq keyinroq isbotlanadi).

Ko'pincha funksiyaning aniqmas integrali qaralganda uni qanday oraliqda bo'lishi ko'rsatilmaydi. Bunda funksiyaning aniqlanish sohasida qaralayapti, deb hisoblanadi.

21.2. Aniqmas integralning sodda xossalari

Aniqmas integral ta'rifidan uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi:

1) Ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralning hosilasi $f($
teng bo'ladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) Funksiya differensialining aniqmas integrali funksiyaga teng bo'ladi (o'zgarmas son aniqligida)

$$\int dF(x) = F(x) + c \quad (c = const)$$

Xususan,

$$\int dx = x + c \quad (c = const)$$

bo'ladi.

3) O'zgarmas sonni integral belgisi tashqarisiga chiq mumkin.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k = const,\ k \neq 0) \qquad (5)$$

4) Ikki funksiya yig'indisining integrali bu funksi integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (6)$$

Eslatma. *Yuqoridagi (5), (6) tengliklarni o'ng va c tomonidagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa baroba ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligida) tengliklar deb qaraladi.*

Ma'lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish differensiallash deyiladi. Berilgan funksiyaning aniqmas integral topish esa uni integrallash deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan funksiyani diffe siallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekan payqash qiyin emas.

Ma'lumki,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad \text{ya'ni} \quad F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, unda

$$\left(F(x) + c\right)' = F'(x) = f(x)$$

bo'ladi va aksincha bo'ladi.

Funksiya hosilalari jadvali hamda aniqmas integr ta'rifidan foydalanib, ba'zi funksiyalar aniqmas integrallarinin jadvalini keltiramiz.

$\int 1\cdot dx = \int dx = x + c$, chunki $(x+c)' = 1$.

$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$, chunki $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = x^n$.

$\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$, chunki

$x>0$ da $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + c$ va $(\ln x + c)' = x^{-1}$.

$x<0$ da $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + c$ va $\left(\ln(-x) + c\right)' = x^{-1}$.

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, chunki $\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + c\right)' = a^x$.

$\int e^x dx = e^x + c$, chunki $\left(e^x + c\right)' = e^x$.

$\int \sin x dx = -\cos x + c$, chunki $(-\cos x + c)' = \sin x$.

$\int \cos x dx = \sin x + c$, chunki $(\sin x + c)' = \cos x$.

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$, chunki $(-ctgx + c)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$, chunki $(tgx + c)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$, chunki $(\arcsin x + c)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c$, chunki $(-\arccos x + c)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$, chunki $(arctgx + c)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

13) $\int\frac{dx}{1+x^2}=-arcctgx+c$, chunki $\left(-arcctgx+c\right)'=\frac{1}{1+x^2}$.

14) $\int shxdx=chx+c$, chunki $\left(chx+c\right)'=shx$.

15) $\int chxdx=shx+c$, chunki $\left(shx+c\right)'=chx$.

Yuqorida keltirilgan integrallar jadvali hamda integralni sodda xossalaridan foydalanib, aniqmas integrallarni hisoblash doir misollar qaraymiz.

2-misol. $\int(3x^2-2x+7)dx=\int3x^2dx-\int2xdx+\int7dx=$

$$=3\int x^2dx-2\int xdx+7\int dx=3\cdot\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+7x+c=x^3-x^2+7x$$

3-misol.

$$\int\frac{x^2-x^3+1}{x^5}dx=\int(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5})dx=\int x^{-3}dx-\int x^{-2}dx+$$

$$\int x^{-5}dx=\frac{1}{-2}x^{-2}-\frac{1}{-1}x^{-1}+\frac{1}{-4}x^{-4}+c=\frac{-2x^2+4x^3-1}{4x^4}+c$$

4-misol.

$$\int(5\sqrt{x}-3\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}})dx=5\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{5}}dx-2\int x^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=5\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-3\frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1}-2\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=\frac{10}{3}\sqrt{x^3}-\frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8}-4\sqrt{x}+c$$

5-misol.

$$\int tg^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2x}-1)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int dx=tgx-x+c.$$

21.3. Integrallash usullari

1⁰.O'zgaruvchini almashtirib integrallash usuli

Aytaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$

Ravshanki,

$$\int f(x)dx=F(x)+c \qquad (7)$$

bo'ladi. Keyingi integralda

$$x=\varphi(t)$$

deylik, bunda $\varphi(t)$ uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lgan funksiya.

Ma'lumki, $F(\varphi(t))$ murakkab funksiya hosilaga ega bo'lib,

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

bo'ladi. Modomiki, $F'(x)=f(x)$ ekan, unda

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

bo'lib, keyingi tenglikdan

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+c \qquad (8)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(7) va (8) munosabatlardan topamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Bu formula integrallarda o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

6-misol. *Ushbu*

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. Unda $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin t}{t}\cdot 2tdt =$$

$$= -2\int \sin tdt = -2\cos t + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

bo'ladi. ▶

Ba'zi hollarda $x = \varphi(t)$ almashtirish o'rniga $t = \psi($ almashtirish qulay bo'ladi.

7-misol. *Ushbu*

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $t = x^2 + x + 1$ deymiz. Unda

$$dt = d\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)' dx = (2x+1)dx$$

bo'lib,

$$\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|x^2 + x + 1\right| + c$$

bo'ladi. ▶

Ko'p hollarda o'zgaruvchi almashtirish ifodasini yozi zaruriyati bo'lmaydi. Ushbu

1) $d(x+a) = dx, \quad (a = const)$

2) $d(ax) = adx$, ya'ni $dx = \frac{1}{a}d(ax) \quad (a = const, a \neq 0)$

tengliklarni e'tiborga olish va uni tatbiq etish yetarli bo'ladi.

8-misol. *Ushbu*

$$\int \sqrt{x+1}dx$$

integral hisoblansin.

◀Ravshanki, $d(x+1) = dx$. Unda

$$\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + c$$

bo‘ladi. ▶

9-misol. *Ushbu*

$$\int e^{2x}dx$$

integral hisoblansin.

◀Ravshanki, $dx=\frac{1}{2}d(2x)$. Unda

$$\int e^{2x}dx=\int e^{2x}\cdot\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

bo‘ladi. ▶

10-misol. *Ushbu*

$$\int\frac{dx}{4x+7}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{4x+7}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x+7)}{4x+7}=\frac{1}{4}\ln|4x+7|+c.$$ ▶

2^0. Bo‘laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin.

Ma’lumki,

$$d(u\cdot v)=vdu+udv$$

bo‘ladi.

Keyingi tenglikni integrallab

$$\int d(uv)=\int vdu+\int udv$$

so‘ng

$$\int d(u\cdot v)=u\cdot v$$

bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

$$uv=\int vdu+\int udv.$$

Natijada

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (9)$$

formulaga kelamiz. (9) formula bo'laklab integrallash fo
deyiladi. U $\int u dv$ integralni hisoblashni $\int v du$ in
hisoblashga olib keladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish
berilgan integral ostidagi ifodani $u(x)$ va dv lar ko'p
ko'rinishida shunday yozib olinishi lozimki, bunda dv
$v(x)du$ lar oson hisoblanadigan bo'lsin.

11-misol. *Ushbu*

$$\int xe^x dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$x = u,$$

$$e^x dx = dv$$

deymiz. U holda

$$du = dx,$$

$$v = \int e^x dx = e^x$$

bo'lib, (9) formulaga ko'ra

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

bo'ladi. (bu holda $\int xe^x dx$ integralni hisoblash jadvalda kelti
$\int e^x dx$ integralga keldi). Ravshanki, $\int e^x dx = e^x + c$. Demak,

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c\ .▶$$

12-misol. *Ushbu*

$$\int x \cos x dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$x = u,$$

$$\cos x dx = dv$$

deymiz. U holda

$$du = dx,$$

$$v = \int \cos x dx = \sin x$$

bo'lib, (9) formulaga ko'ra

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

bo'ladi. ►

13-misol. *Ushbu*

$$J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

integral hisoblansin.

◄Avvalo $n = 1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a} dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$$

bo'ladi.

Endi $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$ da

$$u = \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n},$$

$$dv = dx$$

deylik. U holda

$$du = \left(\frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}\right)' dx = -\frac{2nx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} dx,$$

$$v = x$$

bo‘lib, (9) formulaga ko‘ra

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

bo‘ladi. Bu tenglikning o‘ng tomonidagi integralni quyi
yozib olamiz:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = \int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx =$$

$$\int \frac{x^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx - \int \frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n}}dx - a^2\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx = J_n - a^2\cdot J_{n+1}$$

Natijada

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\cdot J_n - 2na^2\cdot J_{n+1}$$

bo‘lib, undan

$$J_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot J_n \qquad (10)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yuqorida ko‘rdikki,

$$J_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$$

(10) formulada $n=1$ deb

$$J_2 = \int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{x}{2a^2\cdot\left(x^2+a^2\right)} =$$

$$= + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + c$$

bo‘lishini topamiz.

Shu tariqa (10) formula yordamida $n = 2, 3, 4, \ldots$ bo'lgan hollarda mos integrallar hisoblanadi. ►

Odatda, (10) formula rekurent formula deyiladi.

Ba'zi hollarda, u va dv lar uchun ularning ifodalarini alohida yozib o'tirmasdan (9) fomuladan foydalanib integrallarni hisoblash mumkin.

14-misol. *Ushbu*

$$\int x \; arctgx \cdot dx$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int x \; arctgx \cdot dx = \frac{1}{2} \int arctgx \cdot d\left(x^2+1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right) \cdot arctgx - \int \left(x^2+1\right) d\left(arctgx\right)\right] =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{1}{2} \int \left(x^2+1\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{1}{2} x + c. \quad ►$$

Mashqlar

Quyidagi aniqmas integrallar hisoblansin.

1. $\int (4-3x) e^{-3x} dx$
2. $\int \operatorname{ar} ctg \sqrt{4x-1} dx$
3. $\int (4-16x) \sin 4x dx$
4. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

22-MA'RUZA

Ratsional funksiyalarni integrallash

Biz 10-ma'ruzada butun va kasr ratsional funksiy ma'ruzada yuqori darajali ratsional tenglamalar va ularning haqida ma'lumotlar keltirgan edik. Endi ulardan foy ratsional funksiyalarni integrallashni qaraymiz.

22.1. Ko'phad va uning ildizlari

Biror

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (1)$$

ko'phad (butun ratsional funksiya) berilgan bo'lsin, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ -o'zgarmas sonlar, $a_n \neq 0$, $n \in \mathrm{N}$ esa ko'ph darajasi.

Ma'lumki, α son uchun

$$P(\alpha)=0$$

bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi. Agar ko'phad $(x-\alpha)^k$ ga $(k \in \mathrm{N})$ qoldiqsiz bo'linsa, α son ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Agar $h=\alpha+i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning bo'lsa, u holda $\overline{h}=\alpha-i\beta$ kompleks son ham bu ko'ph ildizi bo'ladi. Demak, $P(x)$ ko'phadning ifodasida quyidagi

$$(x-h)(x-\overline{h})=[x-(\alpha+i\beta)]\cdot[x-(\alpha-i\beta)]=$$

$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$$

$$(p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi sifatida qatnashadi.

Faraz qilaylik,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

ko'phad uchun

α_1 son m_1 karrali,

α_2 son m_2 karrali,

....

α_k son m_k karrali,

...qiy ildizlari bo'lib,

h_1 kompleks son t_1 karrali,

h_2 kompleks son t_2 karrali,

....

h_s kompleks son t_s karrali,

...li bo'lsin. U holda $P(x)$ ko'phad quyidagi

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot \\
&(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

...rinishda ifodalanadi, bunda

$$m_1+m_2+\dots+m_k+2(t_1+t_2+\dots t_s)=n,$$

$$x^2+p_i\cdot x+q_i=0 \quad (i=1,2,\dots,s)$$

...lamalar haqiqiy ildizga ega emas.

$P(x)$ ko'phadni (2) ko'rinishda ifodalash uni ...paytuvchilarga ajratish ham deyiladi.

Endi ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratishga misollar ...tiramiz:

1) $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$,

2) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$,

3) $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$
$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2x}+1)$,

4) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

Ushbu

1) $\dfrac{A}{x-a}$, A va a o'zgarmas sonlar,

2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n = 2,3,4,...$

3) $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$, B, C-hamda p va q o'zg

sonlar, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas.

4) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2,3,4,...$ $\left(\dfrac{p^2}{4} - q < 0\right)$

ko'rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deyiladi.

Masalan, quyidagi funksiyalar

$$\frac{2}{x+1},\quad \frac{6}{(x-2)^4},\quad \frac{2x+1}{x^2+x+1},\quad \frac{4}{x^2+1},\quad \frac{3x+2}{(x^2+4x+4)^3}$$

sodda kasrlar bo'ladi.

22.2. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodal (to'g'ri kasrlarni sodda kasrlarga yoyish)

Ma'lumki, ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

kasr ratsional funksiya $n < m$ bo'lganda (suratidagi ko'phadn darajasi maxrajdagi ko'phadning darajasidan kichik bo'lgan to'g'ri kasr deyiladi.

Aytaylik, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrning maxraji $Q(x)$ ko'ph

quyidagicha

$$Q(x) = (x-a)^k \left(x^2+px+q\right)^s \qquad (3)$$

ko'paytuvchilarga ajralgan bo'lsin, bunda $k \in N$, $s \in N$

x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas. Bund

...r kasr $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ni sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalanishi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *To'g'ri kasr* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *uchun*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{(x-a)^k\left(x^2+px+q\right)^s} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+ \tag{4}$$
$$+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\dots+\frac{B_sx+C_s}{\left(x^2+px+q\right)^s}$$

bo'ladi, bunda $A_1, A_2, \dots, A_k$, $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_s, C_s$ *- o'zgarmas haqiqiy sonlar. (4) yoyilmadagi o'zgarmas sonlar quyidagicha topiladi.*

(4) tenglikning o'ng tomonidagi sodda kasrlar yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijada

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

tenglik hosil bo'lib, undan barcha x lar uchun o'rinli bo'lgan

$$P(x) = R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, noma'lum sonlarni topish uchun tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Sistemani yechib noma'lum sonlar topiladi.

Eslatma. *Yuqorida*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

to'g'ri kasrda maxraj (4) ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralgan hol uchun to'g'ri kasrni sodda kasrlarga ajralishini ko'rdik.

To'g'ri kasr maxraji $Q(x)$ ko'phad boshqa ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralganda ham kasr sodda kasrlar yig'indisi shaklida ifodalanadi.

Masalan,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

to‘g‘ri kasr maxraji

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_k)$$

bo‘lsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_k}{x-a_k}$$

bo‘ladi;

$$Q(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_kx+\right.$$

bo‘lsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+p_2x+q_2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{x^2+p_kx+q_k}$$

bo‘ladi.

To‘g‘ri kasrlarning sodda kasrlar yig‘indisi orqali ifoda jarayonini misollarda ko‘rsatamiz.

1-misol. *Ushbu*

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$

to‘g‘ri kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◀1) kasrning maxrajida turgan x^3+4x^2+4x ko‘ph ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3+4x^2+4x=x\left(x^2+4x+4\right)=x(x+2)^2$$

2) berilgan to‘g‘ri kasrni noma’lum koeffitsiyentlar or yuqorida ko‘rsatilgandek sodda kasrlar yig‘indisi orqali yozamiz:

$$\frac{3x^2+8}{x\cdot(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \qquad (5)$$

3) bu tenglikning ikki tomonini $x(x+2)^2$ ga ko‘paytir uni maxrajdan qutqartiramiz:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx.$$

Keyingi tenglikdan

$$3x^2+8=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A$$

kelib chiqadi.

4) bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil oldida turgan koeffitsiyentlarni tenglashtirib, ushbu

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=8 \end{cases}$$

hosil qilamiz.

5) tenglamalar sistemasini yechib,

$$A=2,\ \ B=1,\ C=-10$$

topamiz va ularni (5) tenglikdagi A,B,C larning o'rniga natijasida berilgan to'g'ri kasrni sodda kasrlar yig'indisi quyidagicha

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}$$

ishini topamiz. ►

2-misol. *Ushbu*

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$$

kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◄ 1) $x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+2x+1=$
$=x^2(x+1)+(x+1)^2=(x+1)(x^2+x+1)$.

2) $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

3) $2x+3=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$, ya'ni

$$2x+3=(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C$$

4) $\begin{cases} A+B=0, \\ A+B+C=2, \\ A+C=3. \end{cases}$

$A=1, \quad B=-1, \quad C=2$

5) $$\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=$$ ►

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}$$

3-misol. *Ushbu*

$$\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}$$

to'g'ri kasr sodda kasrlarga yoyilsin.

◄1) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

2) $$\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+5}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+5)^2},$$

3) $x^3-3=(B_1x+C_1)\cdot(x^2+5)+B_2x+C_2$,

4) $\begin{cases} B_1=1, \\ C_1=0, \\ 5B_1+B_2=0, \\ 5C_1+C_2=-3 \end{cases}$

5) $B_1=1, \quad C_1=0, \quad B_2=-5, \quad C_2=-3$

$$\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}=\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$ ►

22.3. Sodda kasrlarni integrallash

Sodda kasrlarning integrallari quyidagicha hisoblanadi:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$

$$= A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = A\frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

3) $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning integrali

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

ni hisoblash uchun kasr maxrajidagi kvadrat uchhadni quyidagicha yozib olamiz:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2$$

bunda

$$a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Natijada

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}dx$$

bo'ladi. Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}dx = \left[x+\frac{p}{2} = t, \quad x = t-\frac{p}{2}, \quad dx = dt\right] =$$

$$\int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt = B\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{t}{a} + C^* =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C^*$$

Demak,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C^* \qquad (6)$$

bunda C^* - ixtiyoriy o‘zgarmas son.

Masalan, ushbu

$$\int \frac{xdx}{x^2-x+1}$$

integral (6) formulaga ko‘ra (bu holda $B=1$, $C=0$, $p=$ $q=1$) quyidagicha bo‘ladi:

$$\int \frac{xdx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^*.$$

4) Ushbu

$$\int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx \quad (m=2,3,4,\ldots)$$

to‘g‘ri kasrning integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$J_m = \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \left[\begin{array}{l} x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}, \\ x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi integral avvalgi paragrafda keltirilgan rekurent formula yordamida hisoblanadi.

22.4. Ratsional funksiyalarni integrallash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya ratsional funksiya bo‘lsin.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto‘g‘ri kasr (suratidagi ko‘phadning darajasi maxrajidagi ko‘phadning darajasidan katta bo‘lsa, unda suratini maxrajiga bo‘lib, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya (ko‘phad) ham to‘g‘ri kasr yig‘indisi ko‘rinishida quyidagicha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

ifodalab olinadi. Integrallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi $\int R(x)dx$ integral butun

ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u o
hisoblanadi.

Tenglikdagi $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ integral esa to'g'ri kasr

integrali. Uni hisoblash uchun avvalo $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ kasrni yuqo

ko'rsatilgan usul bilan sodda kasrlar yig'indisi orqali ifod olinadi. So'ng integrallash qoidalari va sodda kasrlar integrallaridan foydalanib to'g'ri kasrning integrali topiladi.

4-misol. *Ushbu*

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx$$

integral hisoblansin.

◀Ravshanki, integral ostidagi funksiya ratsional funk bo'lib, u noto'g'ri kasrdir. Bu kasrning suratini maxrajiga bo' uning butun qismini ajratamiz:

Demak,

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}$$

bo'lib,

$$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx=$$

$$\int 2xdx+\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx=2\cdot\frac{x^2}{2}+\int\frac{1}{x^4+3x^2}dx.$$

bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral to'g'ri kasrn integrali. Uni hisoblash uchun integral ostidagi to'g'ri kasr

$$\frac{1}{x^4+3x^2}$$

ni sodda kasrlarga yoyamiz:

1) $x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right)$,

2) $\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$,

3) $1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + x^2(Cx+D)$,

$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$;

4) $A + C = 0$,

$B + D = 0$,

$3A = 0$,

$3B = 1$.

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{3},$$

5)
$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Endi keyingi tenglikdan foydalanib to'g'ri kasrning integralini topamiz:

$$\int \frac{1}{x^4+3x^2}dx = \int\left(\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx = \frac{1}{3}\int x^{-2}dx - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3} =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + c = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

Shunday qilib berilgan integral uchun

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx = x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

bo'ladi. ▶

Mashqlar

Aniqmas integrallar hisoblansin.

1. $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$
2. $\int\frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$
3. $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$
4. $\int\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$
5. $\int\frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

23-MA'RUZA

Ba'zi irratsional funksiyalarni hamda trigonometrik funksiyalarni integrallash

23.1. Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Biz 22-ma'ruzada ratsional funksiyalarning integralli doim hisoblash mumkinligini ko'rdik. Irratsional funksiyal integrallarini hisoblashda vaziyat boshqacha, ya'ni irrat funksiyalarning integrallari har doim ham hisoblanavermaydi.

Integral ostidagi funksiyada o'zgaruvchi x, ax ax^2+bx+c lar turli kasr darajalarda qatnashgan ayrim hol integrallarning hisoblanishini misollarda bayon etamiz. Shuni a kerakki, bunday hollarda integrallar o'zgaruvchilarini almash yordamida ratsional funksiyalarga keltirilib, hisoblanadi.

1-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $x=t^2$ almashtirish bajaramiz. U $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot 2tdt=2\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

bo'ladi. Natijada irratsional funksiyani integrallash ratsio funksiyani integrallashga keldi.

Ravshanki,

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

bo'ladi. Unda

$$\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dx=\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)+c$$

bo'lib,

$$J=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)+c=t^2-2t+2\ln(t+1)+c=$$

$$=x-2\sqrt{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+c$$

bo'ladi. ▶

2-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Unda $dx=6t^5dt$ bo'lib,

$$J=\int\frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\left[\int 1\cdot dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=6t-6arctgt+c$$

bo'ladi. Demak,

$$J=6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+c\,. ▶$$

3-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $\frac{1+x}{x}=t^2$ deb

$$x=\frac{1}{t^2-1},\qquad dx=-\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$J=\int\left(t^2-1\right)\cdot t\frac{-2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=$$

$$-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2t-2\int\frac{dt}{t^2-1}=-2t-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(t+1)-(t-1)}{(t+1)(t-1)}dt$$

$$=-2t-\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}=-2t-\ln|t-1|+\ln|t+1|+c=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

bo'ladi. Demak,

$$J=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+c. ▶$$

4-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\quad(a\neq 0)$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$t=x+\sqrt{x^2+a}$$

deymiz. Unda

$$dt=\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'dx=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

bo'lib,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

bo'ladi. Natijada

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c$$

bo'ladi. ▶

5-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$$

integral hisoblansin.

◀Ravshanki,

$x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(x-3)^2+4$. Unda

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

bo'ladi. Bu integralda $x-3=t$ deymiz. Natijada

$$J=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+c,$$

ya'ni

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=\ln\left|x-3+\sqrt{(x-3)^2+4}\right|+c$$

bo'ladi.▶

6-misol. *Ushbu*

$$J=\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $x^2=y$ deymiz. Unda $2xdx=dy$ bo'lib,

$$J=\frac{1}{2}\int y(1-y)^{-\frac{3}{2}}dy$$

bo'ladi. Keyingi integralda

$$1-y=t^2$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada $dy=-2tdt$ bo'lib,

$$J=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=\frac{1}{t}+t+c=\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\sqrt{1-y}+c$$

va nihoyat

$$J=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+c$$

bo'ladi. ▶

23.2. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$ funksiyalarni integrallari ma'lum. Jumladan,

$$\int ctgxdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+c$$

bo'ladi.

Shuningdek $y=\sin ax,$ $y=\cos ax,$ $y=tgax$ $y=ctgax$ hamda $y=\sin(x+a),$ $y=\cos(x+a)$ $y=tg(x+a),$ $y=ctg(x+a)$ funksiyalarning integrallarini oso hisoblanishini ham bilamiz. Masalan,

$$\int\sin(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin(2x+1)\,d(2x+1)=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c$$

$\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar ustida ratsional amallar (qo'shish ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilishidan hos bo'lgan ifodani $f(x)$ bilan belgilaylik. Odatda, bunday $f(x)$ funksiya $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasi deyiladi. Ularga quyidagilar

$$f(x)=\frac{1}{\sin x},\ f(x)=\frac{1}{3\sin x-4\cos x},$$

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x\cdot\sin 2x},\ f(x)=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}$$

misol bo'ladilar.

Bunday trigonometrik funksiyalarning integrallari har doim ushbu

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish natijasida ratsional funksiyalarning integrallariga keladi. Bunda

$$x=2arctgt,\qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'ladi.

7-misol. *Ushbu*

$$J = \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $tg\frac{x}{2} = t$ deymiz. Unda yuqorida aytilganlarga ko'ra

$$J = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}dt$$

bo'ladi. Natijada berilgan trigonometrik funksiyaning integrali ratsional funksiyaning integraliga keldi.

Ravshanki,

$$t^2+\frac{3}{2}t-1 = t^2+2t-\frac{1}{2}t-1 = t\left(t-\frac{1}{2}\right)+2\left(t-\frac{1}{2}\right) = \left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2).$$

Unda

$$\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1} = \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+2)} = \frac{A}{t-\frac{1}{2}} + \frac{B}{t+2},$$

$$1 = A(t+2) + B\left(t-\frac{1}{2}\right),$$

$$1=(A+B)t+2A-\frac{1}{2}B,$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A-\frac{1}{2}B=1, \end{cases}$$

$$A=\frac{2}{5}, \qquad B=-\frac{2}{5}$$

bo'lib,

$$\frac{1}{t^2+\frac{3}{2}t-1}=\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{2}{5}}{t+2}$$

bo'ladi. Integralni hisoblab topamiz:

$$J=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\frac{2}{5}}{t-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{5}}{t+2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(\int\frac{dt}{t-\frac{1}{2}}-\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-\ln|t+2|\right)+c=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+2}\right|+c$$

Shunday qilib,

$$J=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{tg\frac{x}{2}+2}\right|+c$$

bo'ladi. ►

8-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

hisoblansin.

◀Bu integralda

$$tg\frac{x}{2}=t$$

almashtirish bajarib, bunda

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+c$$ ▶

Eslatma. *Ba'zi hollarda*

$$\sin x=t,\qquad \cos x=t,\qquad tgx=t$$

almashtirishlar integrallarni hisoblashni yengillashtiradi.

9-misol. *Ushbu*

$$J=\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda $tgx=t$ deymiz. Unda

$$x=arctgt,\qquad dx=(arctgt)'\cdot dt=\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{tg^2x}{tg^2x+1}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

bo'lib,

$$J=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\sqrt{2}\cdot t\right)}{1+\left(\sqrt{2}\cdot t\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\cdot t\right)+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\cdot tgx\right)+c$$

bo'ladi.►

Eslatma. *Ayrim trigonometrik funksiyalarni integrallash trigonometriyada ma'lum bo'lgan ushbu*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

formulalardan foydalanilsa, integrallar oson hisoblanadi.

10-misol. *Ushbu*

$$\int\sin 3x\cdot\cos 5x dx$$

integral hisoblansin.

◄Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\sin 3x\cdot\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin 8x+\sin(-2x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 8x dx-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\int \sin 8x d(8x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)=\frac{-1}{16}\cos 8x+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x+c=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+c. \blacktriangleright$$

11-misol. *Ushbu*

$$J=\int \sin^2 x\cos^4 xdx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralni hisoblashda yuqorida keltirilgan formulalardan foydalanamiz:

$$J=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 xdx=\int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c. \blacktriangleright$$

Mashqlar

Ushbu aniqmas integrallar hisoblansin:

1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ 2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$

3. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$ 4. $\int\cos^3 x\cdot\cos 2x\,dx$

5. $\int\cos^5 2x\cdot\sin^7 2x\,dx$

24-MA'RUZA

Aniq integral tushunchasi. Aniq integralning xossalari

24.1. Masala

Faraz qilaylik, moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha $[t_0, T$
vaqt oralig'ida $V = V(t)$ tezlik bilan harakat qilsin. Uning shu va
oralig'ida bosib o'tgan yo'li S topilsin.

Ma'lumki, tezlik o'zgarmas, ya'ni $V(t) = V_0 = cons$
bo'lsa, u holda o'tilgan yo'l

$$S = V_0(T - t_0)$$

bo'ladi.

Agar tezlik t o'zgaruvchining $(t \in [t_0, T])$ ixtiyori
funksiyasi bo'lsa, unda masalani yechishga quyidagicha kirishiladi:

1) vaqt oralig'i $[t_0, T]$ ni $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(t_n = T)$ nuqtala yordamida n ta qismga ajratiladi, bunda

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots t_{n-1} < t_n = T;$$

2) har bir $[t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ oraliqda ixtiyoriy ξ_k nuqtani olib, tezlikning shu nuqtadagi qiymati $V(\xi_k)$ topiladi:

3) $V(\xi_k)$ ni $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqning uzunligi $(t_{k+1} - t_k)$ ga ko'paytiriladi.

$$V(\xi_k)\cdot(t_{k+1} - t_k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (1)$$

Bu miqdor, tezlik $V(t)$ ni $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqda o'zgarmas va u $V(\xi_k)$ ga teng deb olinganda, nuqtaning $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqda bosib o'tgan yo'lini (taqriban) ifodalaydi.

4) (1) ko'paytmani k ning $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ qiymatlari uchun yozib, so'ng ularni yig'ib ushbu

$$V(\xi_0)\cdot(t_1-t_0)+V(\xi_1)(t_2-t_1)+\cdots+$$
$$+V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k)+V(\xi_{n-1})(t_n-t_{n-1})$$

yig'indini hosil qilinadi. Bu yig'indi ushbu Σ orqali quyidagicha yoziladi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k). \qquad (2)$$

Ravshanki, (2) yig'indi nuqtaning $[t_0,T]$ oraliqda bosib o'tgan yo'lini taqribiy ifodalaydi, chunki tezlik $V(t)$ vaqtning ixtiyoriy funksiyasi bo'lgan holda uni har bir $[t_k,t_{k+1}]$ da o'zgarmas $V(\xi_k)$ deb olindi. Demak,

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k)\cdot(t_{k+1}-t_k).$$

$t_{k+1}-t_k=\Delta t_k$ deb, bu Δt_k $(k=0,1,2,...,n-1)$ larning eng kattasini λ deylik.

Endi $[t_0,T]$ oraliqning bo'laklash sonini orttira borilsa (bunda har bir Δt_k nolga, ya'ni $\lambda\to 0$ intilsin), u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

miqdor izlanayotgan yo'lni tobora aniqroq ifodalay boradi. Binobarin,

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k)\cdot\Delta t_k$$

bo'ladi.

Shunday qilib nuqtaning tezligiga ko'ra o'tilgan yo'lni topish masalasi maxsus tuzilgan yig'indining limitini topishga kelar ekan.

Shunga o'xshash ko'pgina masalalar, jumladan sterjenning zichligiga ko'ra uning massasini topish, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish, o'zgaruvchi kuchning bajargan ishini topish masalalari ham yuqoridagiga o‘xshash yig‘indining limiti topishga keladi. Bunday yig‘indining limiti oliy matematika muhim bo‘lgan aniq integral tushunchasiga olib keladi.

24.2. Aniq integral tushunchasi. Integralning mavjudligi

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo‘lsin. Bu segmentni

$x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ $\left(x_0 = a,\ x_n = b,\ x_0 < x_1 < ... < x_n\right)$ nuqtalar yordamida n ta

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_k, x_{k+1}], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

bo‘lakka ajratamiz. Bu bo‘lakchalarning uzunliklarini mos ravishda quyidagicha belgilaymiz:

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0 \qquad (x_0 = a),$$

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,$$

$$.......................$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$.......................$$

$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1} \qquad (x_n = b)$$

Odatda $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ kesmalar sistemasi (to‘plami) $[a,b]$ segmentni bo‘laklash deyiladi va uni λ bilan belgilanadi:

$$\lambda = \{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Bu $\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}$ larning eng kattasini $|\lambda|$ deylik:

$$|\lambda| = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, ..., \Delta x_{n-1}\}.$$

Har bir tayin λ bo‘laklash $[a,b]$ segmentining bitta bo‘linishini aniqlaydi.

Har bir bo‘lakchada ixtiyoriy ravishda bittadan

$$\xi_0, \xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_{n-1}$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari

$$f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots, f(\xi_k), \ldots, f(\xi_{n-1})$$

ni mos ravishda bo'lakchalarning uzunliklariga ko'paytirib

$$f(\xi_0)\cdot\Delta x_0, f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, \ldots, f(\xi_k)\cdot\Delta x_k, \ldots, f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

quyidagi

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k +$$

$$+\ldots + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

yig'indini hosil qilamiz.

Odatda,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (3)$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deyiladi. Bu yig'indi $[a,b]$ segmentning bo'laklanishiga, hamda har bir bo'lakchada olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentining shunday bo'laklashlar ketma-ketligi

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \qquad (4)$$

ni olaylik, ular uchun

$$\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = 0$$

bo'lsin.

Ixtiyoriy (4) ketma-ketlikni olib, bu ketma-ketlikning har bir hadiga mos integral yig'indilarni tuzamiz. Ular

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n, \ldots \qquad (5)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi, bunda

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

Ta'rif. *Agar har bir bo'lakchada olingan ixtiyoriy* ξ_k *nuqtalarda* $\{\sigma_n\}$ *ketma-ketlik har doim bitta* I *songa intilsa, (uni*

$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$ *ning limiti deyiladi). $f(x)$ funksiya* [a

segmentda integrallanuvchi, I son esa $f(x)$ funksiyaning [a

segment bo'yicha aniq integrali deyiladi va u

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = I = \int_a^b f(x)dx .$$

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son integralning yuqori chegarasi, $[a,b]$ segment integrallash **ora** deyiladi.

24.1 da keltirilgan masalaning yechimi, o'tilgan S y tezlik $V(t)$ ning $[t_0,T]$ oraliq bo'yicha aniq integraldan i ekanligini bildiradi:

$$S = \int_{t_0}^{T} V(t)dt$$

Misol: *Agar* $[a,b]$ da $f(x) = c - const$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b c\cdot dx = c\cdot(b-a)$$

bo'lishi isbotlansin.

◄ $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy bo'laklashi

$$[a,x_1],\quad [x_1,x_2],\quad [x_2,x_3],\ldots,\quad [x_k,x_{k+1}],\ldots\quad [x_{n-1},b]$$

ni olib, har bir bo'lakchada bittadan ixtiyoriy

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_{n-1}$$

nuqtalarni tanlaymiz. Ravshanki,

$$f(\xi_0) = c, f(\xi_1) = c, f(\xi_2) = c, \ldots, f(\xi_k) = c, \ldots, f(\xi_{n-1}) = c$$

bo'lib,

$$\sigma = c\cdot\Delta x_0 + c\cdot\Delta x_1 + c\cdot\Delta x_2 + \ldots + c\cdot\Delta x_k + \ldots + c\cdot\Delta x_{n-1} =$$
$$c\left(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_k + \ldots + \Delta x_{n-1}\right) =$$
$$c\cdot\left(x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{k+1} - x_k + \ldots + b - x_{n-1}\right) =$$
$$c\cdot\left(b-a\right)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^b c\cdot dx = \lim_{n\to\infty}\sigma = \lim_{n\to\infty} c\cdot(b-a) = c\cdot(b-a).\blacktriangleright$$

Xususan, $f(x)\equiv 1$ bo'lsa,

$$\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b-a$$

bo'ladi..

Yuqorida funksiyaning aniq integrali integral yig'indining limiti sifatida ta'riflandi. Albatta, yig'indining limiti integrallanadigan funksiyaga bog'liq bo'ladi.

Integral yig'indi limitining mavjudligini ko'rsatish (ya'ni funksiyaning integrallanuvchi bo'lishini isbotlash) ancha murakkab bo'lib, ular maxsus adabiyotlarda ma'lum sinf funksiyalari uchun isbotlanadi. Biz quyida bunday teoremalardan birini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

Eslatma.

1) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u $[a,b]$ da chegaralangan bo'ladi.

2) *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lib, u $[a,b]$ ning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega va qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.*

24.3. Aniq integralning xossalari

Funksiyaning aniq integrali qator xossalarga ega. xossalardan aniq integralni hisoblashda va uning turli sohal tatbiqlarida foydalaniladi. Ko'p hollarda xossalarning isboti integral ta'rifi va funksiya limiti xossalaridan kelib chiqadi. xossalarni keltirish bilan kifoyalanamiz:

1) Aniq integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

da x ning o'rniga ixtiyoriy harf ishlatilishi mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ va h.k.}$$

2)Ushbu

$$\int_a^a f(x) = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

tengliklar o'rinli.

3) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ls holda $c \cdot f(x)$ funksiya $(c = const)$ ham $[a,b]$ integrallanuvchi va

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

4) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrall nuvchi bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya ham $[a,b]$ integrallanuvchi va

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

5) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi.

6) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x \in [a,b]$ da $f(x) \leq g(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

7) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a,b]$ ning istalgan $[\alpha,\beta]$ qismida $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ integrallanuvchi bo'ladi.

8) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, $a < c < b$ bo'lsa, u holda funksiya $[a,c]$ va $[c,b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib, u shu segmentda integrallanuvchi bo'lsin.

Ushbu

$$\mathrm{M}[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

miqdor $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi o'rta qiymati deyiladi.

9) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'l[illegible] holda shunday c nuqta ($a < c < b$) topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

bo'ladi. Bu xossa o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham yuritil[illegible]

Mashqlar

Berilgan funksiyalarning ko'rsatilgan oraliqlardagi o'[illegible] qiymatlarini aniqlang:

1. $f(x) = x^2, \quad [0,1]$.

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0,100]$.

3. Agar

$$f(x) = e^{2x}, a = 0, b = 1$$

bo'lsa, u holda c ning qanday qiymatida ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi?

4. 9-xossadan foydalanib, quyidagi integrallar baholansin:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}; \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx; \qquad \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx.$$

25-MA'RUZA

Aniq integralni hisoblash. Aniq integralni taqriribiy hisoblash.

25.1. Aniq integralni hisoblash usullari

1^0. Aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblash. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ funksiya esa uning $[a,b]$ segmentdagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x)=f(x).$$

Ravshanki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx$$

mavjud. Bu integral uchun

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (1)$$

bo'lishini isbotlaymiz.

$[a,b]$ segmentni

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n \qquad (a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$$

nuqtalar yordamida n ta

$$[a,x_1], \quad [x_1,x_2],\ldots, \quad [x_k,x_{k+1}],\ldots, \quad [x_{n-1},b]$$

bo'lakchalarga ajratamiz. Har bir bo'lakchada $F(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$F(x_1)-F(a)=F'(\xi_0)\cdot(x_1-a)=f(\xi_0)\cdot\Delta x_0, \quad a<\xi_0<x_1$$

$$F(x_2)-F(x_1)=F'(\xi_1)\cdot(x_2-x_1)=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1, \quad x_1<\xi_1<x_2$$

....

$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(\xi_{n-1})\cdot(b-x_{n-1})=f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}, \quad x_{n-1}<\xi_{n-1}<b$$

Bu tengliklarni hadlab qo'shish natijasida

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (2)$$

hosil bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'l[gani]
uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi. (2) tenglikda limitga o'tsak, unda

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=F(b)-F(a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shuni isbotlash kerak edi.

Odatda (1) formula Nyuton-Leybnits formulasi d[eb]
yuritiladi. Bu formula yordamida aniq integrallar hisoblanadi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi $F(b)-F(a)$ (yozuv[ni]
qisqa qilish maqsadida) $F(x)\big|_a^b$ kabi yoziladi:

$$F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b,$$

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$$

Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralni Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib hisobla[sh]
uchun avvalo $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali hisoblanadi:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

So'ng

$$\left(F(x)+C\right)\big|_a^b=F(b)+C-\left(F(a)+C\right)=F(b)-F(a)$$

topiladi.

***1-Misol**. Ushbu*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

integral hisoblansin.

◀Ma'lumki,

$$\int \sin x dx = -\cos x + c .$$

Unda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x + c)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$$

bo'ladi. ▶

***2-Misol**. Ushbu*

$$\int_0^1 x^n dx \qquad (n \neq -1)$$

integral hisoblansin.

◀ $f(x) = x^n$ funksiyaning aniqmas integrali

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

bo'lgani uchun

$$\int_0^1 x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi. ▶

***3-Misol**. Ushbu*

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3 + x^3} dx \qquad (a > 0)$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralni Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}dx = \int_0^a \frac{\frac{1}{3}dx^3}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\int_0^a \frac{d(a^3+x^3)}{a^3+x^3} =$$

$$= \int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}dx = \left(\frac{1}{3}\ln\left(a^3+x^3\right)\right)\Big|_0^a =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2a^3 - \frac{1}{3}\ln a^3 = \frac{1}{3}\ln\frac{2a^3}{a^3} = \frac{1}{3}\ln 2. \blacktriangleright$$

Eslatma. *Aytaylik,* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segme*[nt] *uzluksiz bo'lsin. U* $[a,b]$ *da integrallanuvchi bo'lib, integral*[...] *xossasiga ko'ra* $[a,x]$ *da* $(a \le x \le b)$ *da ham integrallanuv*[...] *bo'ladi:*

$$\int_a^x f(t)dt.$$

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksi[ya] bo'lsa, ya'ni

$$F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^x f(t)\cdot dt = F(x) - F(a)$$

bo'lib, undan

$$\left(\int_a^x f(t)\cdot dt\right)' = \left(F(x)-F(a)\right)' = F'(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,

$$\int_a^x f(t)dt$$

funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi. Bu uzluksiz funksi[...]

ni doim boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishini bildiradi.

2^0. Aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblash. $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

ni hisoblash kerak bo'lsin. Ko'p hollarda bu integralda o'zgaruvchini almashtirish natijasida u soddaroq, hisoblash uchun qulayroq integralga keladi.

(3) integralda

$$x=\varphi(t)$$

deylik, bunda $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega,

2) ixtiyoriy $t\in[\alpha,\beta]$ da $a\le\varphi(t)\le b$ ва $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

U holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

bo'ladi.

◀Faraz qilaylik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin:

$$F'(x)=f(x).$$

Ravshanki,

$$\left[F(\varphi(t))\right]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Demak, $F(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Unda Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

bo'lishi ma'lum. Keyin ikki tenglikdan

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

4-Misol. *Ushbu*

$$\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$x = 2t - 1$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x = 1 \text{ da } 1 = 2t - 1, \text{ ya'ni } t = 1,$$
$$x = 3 \text{ da } 3 = 2t - 1, \text{ ya'ni } t = 2$$

bo'lib,

$$dx = 2dt$$

bo'ladi. Natijada

$$\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx = \int_{1}^{2}\sqrt{2t}\cdot 2dt = 2\sqrt{2}\int_{1}^{2} t^{\frac{1}{2}}dt$$

bo'lib,

$$\int_{1}^{2} t^{\frac{1}{2}}dt = \left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{1}^{2} = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

bo'lganligidan

$$\int_{1}^{3}\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) = \frac{4\sqrt{2}}{3}(\sqrt{8} - 1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

5-Misol*. Ushbu*

$$J = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$\sqrt{1+x^2} = t \text{, ya'ni } x = \sqrt{t^2-1}$$

almashtirish bajaramiz.

Unda

$$x = 0 \text{ da } t = 1,$$

$$x = 1 \text{ da } t = \sqrt{2}$$

$$dx = \left(\sqrt{t^2-1}\right)' \cdot dt = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

bo'lib,

$$J = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. ▶$$

6-Misol*. Ushbu*

$$J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$e^x = t \text{ ya'ni } x = \ln t$$

almashtirish bajaramiz. Unda

$$x = \ln 2 \text{ da } t = 2,$$

$$x = \ln 3 \text{ da } t = 3,$$

$$dx = \frac{1}{t}dt$$

bo‘lib,

$$J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{t\left(t-t^{-1}\right)}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\ln(t-1)-\ln(t+1)\right]\Big|_2^3=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.►$$

3^0. Aniq integrallarni bo‘laklab integrallash usuli yordamida hisoblash.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz, uzluksiz $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Ravshanki,

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Ayni paytda

$$\int_a^b\left(f(x)\cdot g(x)\right)'dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^b\left[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\right]dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$$

bo‘lib, undan

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx \qquad (5)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu formula yordamida aniq integrall hisoblanadi.

Yuqoridagi (5) formula aniq integrallarda bo'laklab integrallash formulasi deyilib, uni

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x)$$

kabi ham yozish mumkin.

***7-Misol**. Ushbu*

$$\int_0^1 xe^x dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$f(x) = x, \qquad dg(x) = e^x dx$$

deymiz. U holda

$$df(x) = f'(x)dx = (x)' dx = dx,$$

$$g(x) = \int e^x dx = e^x$$

bo'lib, (5) formulaga ko'ra

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$xe^x\Big|_0^1 = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 = e, \qquad \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Demak,

$$\int_0^1 xe^x dx = e - (e-1) = 1. \blacktriangleright$$

***8-Misol**. Ushbu*

$$\int_1^2 \ln x dx$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralda

$$f(x)=\ln x, \qquad dg(x)=dx$$

deymiz. U holda

$$df(x)=f'(x)dx=(\ln x)'\,dx=\frac{1}{x}dx, \qquad g(x)=x$$

bo'lib, (5) formulaga ko'ra

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-1\cdot\ln 1-$$

$$-\int_1^2 dx=2\ln 2-(x)\Big|_1^2=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$$

bo'ladi.►

9-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx$$

integral hisoblansin.

◄Bu integralda

$$f(x)=arctgx, \qquad dg(x)=x^3dx$$

deymiz. U holda

$$df(x)=f'(x)dx=(arctgx)'\,dx=\frac{1}{1+x^2}dx,$$

$$g(x)=\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4$$

bo'lib, (5) formulaga ko'ra

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx=\frac{1}{4}x^4\cdot arctgx\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}dx$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{4}x^4 arctgx\Big|_0^1=\frac{1}{4}arctg1-\frac{1}{4}\cdot 0\cdot arctg0=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{16}.$$

Keyingi integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left[\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2-1)dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1 + arctgx\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + arctg1 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Demak,

$$\int_0^1 x^3 arctgx dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

25.2. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, bu funksiyaning aniq integrali Nyuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblanishini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funksiyani topish har doim oson bo'lavermaydi. Agar integrallanadigan funksiya murakkab bo'lsa, ko'p hollarda uning aniq integralini taqribiy hisoblashga to'g'ri keladi.

Ma'lumki, aniq integral integral yig'indining limiti sifatida ta'riflanadi. Demak, integral yig'indi aniq integralni taqribiy ifodalaydi deb qarash mumkin.

Biz quyida aniq integralni taqribiy hisoblaydigan formulalarni keltiramiz.

1^0. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Ravshanki, bu funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

mavjud bo'ladi. Bu integralni taqribiy hisoblash uchun $[a,b]$

segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakchalarga ajratamiz. Ravsh
bu holda

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

bo'ladi. So'ng $f(x)$ funksiyaning x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n$
nuqtalardagi qiymatlari

$$f(x_k) \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ni hisoblaymiz.

Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx \tag{6}$$

Agar

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

integralda integral ostidagi $f(x)$ ni $f(x_k)$ bilan almashtir
unda ushbu

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = f(x_k) \cdot \Delta x_k$$

taqribiy formula hosil bo'ladi. Bu taqribiy formulani (6) tenglikn
o'ng tomonidagi har bir integralga qo'llab topamiz:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \cdots + f(x_k) \cdot \Delta x_k + \cdots +$$

$$+ f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} = f(x_0) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \frac{b-}{n}$$

Natijada

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_k)+\cdots+f(x_{n-1})\right)$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad (7)$$

taqribiy formulaga kelamiz. Bu (7) formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

2^0. Trapetsiyalar formulasi. Bu holda aniq integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

ni taqribiy hisoblaydigan formulani keltirib chiqarish uchun 1^0 da keltirilgan dastlabki ma'lumotlar va belgilashlardan foydalanamiz.

Avvalgidek, $[a,b]$ segmentni n ta teng bo'lakchalarga ajratib, har bir $[x_k, x_{k+1}]$ bo'yicha olingan integralni quyidagicha

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k$$

taqribiy ifodalaymiz. Bu taqribiy formulani (6) tenglikning o'ng tomonidagi har bir integralga qo'llab topamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}\cdot\Delta x_0 + \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x_1 +$$

$$+\ldots+\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k+\ldots+\frac{f(x_n)+f(x_{n-1})}{2}\cdot\Delta x_{n-1} =$$

$$=\frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)).$$

Natijada

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \qquad (8)$$

taqribiy formulaga kelamiz. Bu (8) formula trapetsiyalar formulasi deyiladi.

3^0. Parabolalar (Simpson) formulasi

Bu holda $[a,b]$ segmentni $2n$ ta teng bo‘lakka bo‘lib h

$$[x_{2n}, x_{2n+2}] \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

bo‘lakcha bo‘yicha $f(x)$ funksiyaning integralini quyidagich

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right]$$

$(k = 0,1,2,...,n-1)$ taqribiy ifodalaymiz.

Keyingi taqribiy formulani k ning $0,1,2,...,$ qiymatlari uchun yozib, so‘ng ularni hadlab qo‘shib, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] = \frac{b-a}{6n}$$

$$=\left[\left(f(x_0) + f(x_{2n})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\right) + \right.$$

$$\left. +2\left(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\right)\right]$$

)

taqribiy formulaga kelamiz. Bu (9) formula parabolalar (Sim formulasi deyiladi.

Eslatma. *Odatda, taqribiy formula chiqarilganda, al uni qo‘llanilganda yo‘l qo‘yiladigan xatolikni aniqlash baholash lozim bo‘ladi. Buning natijasida taqribiy formu o‘zaro taqqoslanadi.*

Integrallanadigan $f(x)$ funksiya tegishli tarti uzluksiz hosilalarga ega bo‘lganda:

1) To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi (7) ning xatoligi

$$R_1 = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

uchun

$$R_1 = \frac{(b-a)^3}{24n} f''(c) \qquad (c \in (a,b))$$

bo'ladi,

2) Trapetsiyalar formulasi (8) ning xatoligi

$$R_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$

uchun

$$R_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \; (c \in (a,b))$$

bo'ladi:

3) Parabolalar (Simpson) formulasi (9) ning xatoligi

$$R_3 = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right]$$

uchun

$$R_3 = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(IV)}(c) \; (c \in (a,b))$$

bo'ladi. (Qaralsin, [2])

1-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

integral taqribiy hisoblansin.

◀ $[0,1]$ segmentni 10 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari

$x_0 = 0,\quad x_1 = 0,1;\quad x_2 = 0,2;\quad x_3 = 0,3;$

$x_4 = 0,4;\quad x_5 = 0,5;\quad x_6 = 0,6;\quad x_7 = 0,7;$

$x_8 = 0,8;\quad x_9 = 0,9;\quad x_{10} = 1,0;$

bo'lib, bu nuqtalarda

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

Mashqlar

Ushbu integrallar o'zgaruvchilarni almashtirish bo'laklab integrallash usullari yordamida hisoblansin:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx$. 2. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x} \sin x\,dx$.

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^2 x + x \sin x\right) dx$ 4. $\int_{-1}^{1} \left(e^{x} + e^{-x}\right) tg x dx$

To'g'ri to'rtburchaklar hamda trapetsiyalar formula yordamida xatoligi 10^{-2} dan ko'p bo'lmagan taqribiy qiym hisoblansin:

1. $\int_{1}^{2} x^3 dx$. 2. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$.

26-MA'RUZA

Aniq integralning ba'zi-bir tatbiqlari

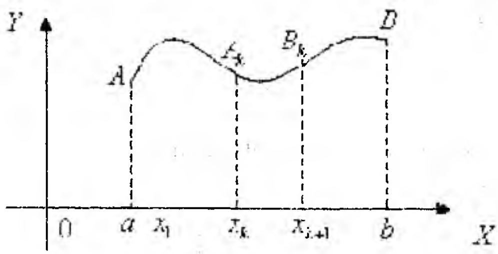
Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalar ma'lum funksiyaning aniq integralini hisoblash bilan hal etiladi.

Biz quyida geometrik hamda fizik masalalarni aniq integral yordamida yechilishini bayon qilamiz.

26.1. Tekis shaklning yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan abssissa o'qi bilan chegaralangan $aABb$ tekis shaklni qaraylik (1-chizma).



1-chizma

Odatda, bunday shakl egri chiziqli trapetsiya deyiladi. $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuzaga ega bo'ladi (qaralsin [2]). Uning yuzini topish masalasini qaraymiz.

$[a,b]$ segmentni

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz, bunda

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

deymiz. Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da ixtiyoriy ξ_k nuqtani funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini Δx_k ga ko'paytiramiz:

$$f(\xi_k)\cdot \Delta x_k .$$

Bu miqdor asosi Δx_k va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'rtburchakning yuzini ifodalaydi (1-chizma). U $x_k A_k B_k x_{k+1}$ chiziqli trapetsiyaning yuziga taqriban teng bo'ladi.

Ushbu

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$$

yig'indi esa $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi S ga taqriban teng bo'ladi:

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k .$$

Endi $[a,b]$ ning bo'laklash sonini orttirib borilsa, ya'ni cheksizga intila borsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$$

miqdor izlanayotgan S yuzani tobora aniqroq ifodalay boradi.

Binobarin,

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k .$$

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Demak,

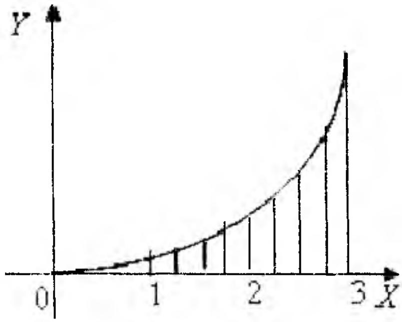
$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (1)$$

1-Misol. *Quyidagi*

$$y=0, \qquad y=\frac{1}{2}x^2, \qquad x=1, \qquad x=3$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

◄Bu shakl 2-chizmada tasvirlangan:



2-chizma

(1) formuladan foydalanib topamiz:

$$S=\int_1^3 \frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}. \blacktriangleright$$

Aytaylik, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ da

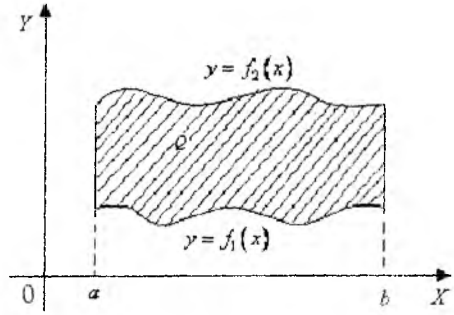
$$0\le f_1(x)\le f_2(x)$$

bo'lsin.

Yuqoridan $f_2(x)$ funksiya grafigi, pastdan $f_1(x)$ funksiya grafigi, tomonlardan $x=a$, $x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx \qquad (2)$$

bo'ladi (3-chizma).



3-chizma

2-misol. *Ushbu*

$$y = x, \quad y = 2 - x^2$$

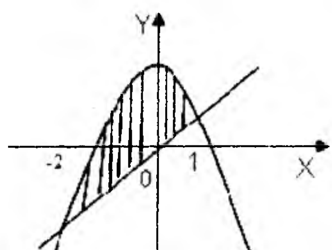
chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

◀ Avvalo

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarining abssissalarini topamiz (4-chizma):

$$x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$



4-chizma

Bu shaklning yuzini (2) formuladan foydalan hisoblaymiz:

$$S = \int_{-2}^{1}\left[(2 - x^2) - x\right]dx = \int_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx =$$

$$= (2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}. ►$$

Eslatma. *Biz $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda $f(x) \ge 0$ deb qaradik. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da ishora saqlamasa, (1) integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarining yig'indisidan iborat bo'ladi. Bunda OX o'qining yuqorisidagi yuza musbat ishora bilan, OX o'qining pastdagi yuza manfiy ishora bilan olinadi.*

Masalan, OX o'qi va $f(x) = \sin x$ ning $0 \le x \le 2\pi$ oraliqdagi qismi bilan chegaralangan shaklning yuzi

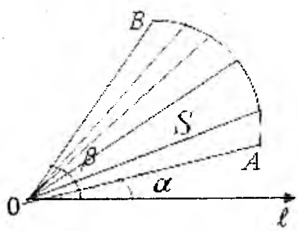
$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + (-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx) = (-\cos x) = \Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

bo'ladi.

Qutb koordinatalar sistemasida ushbu

$$r = f(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

funksiya bilan aniqlangan $\breve{AB}$ yoyi hamda OA va OB radius vektorlar bilan chegaralangan (S) shaklni qaraylik (5-chizma).



5-chizma

Agar $r = f(\varphi)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz bo'lsa, (S) shaklning yuzi

$$S = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} [f(\varphi)]^2 d\varphi \qquad (3)$$

bo'ladi.

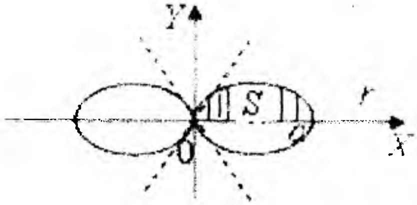
3-misol. *Qutb koordinatalar sistemasida ushbu*

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

funksiya bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

◀ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ tenglama bilan berilgan egri ch
yopiq chiziq bo'lib, u lemniskata deyiladi.

Lemmskata Dekart koordinatalar o'qlariga nisb
simmetrik joylashgan (6-chizma).



6-chizma

Izlanayotgan shaklning yuzini topish uchun u
I-chorakdagi qismi (S) ning yuzini topish yetarli bo'ladi.

(S) shaklning yuzi (3) formulaga ko'ra

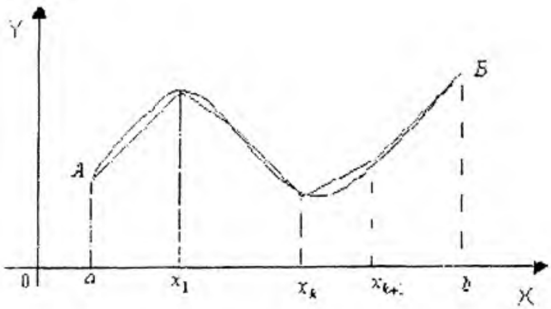
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d(2\varphi) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4}$$

bo'ladi. Demak, izlanayotgan shaklning yuzi $4 \cdot \frac{a^2}{4} = a^2$ ga teng.

26.2. Yoy uzunligini hisoblash

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz va uzluk
$f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ dagi graf
$\breve{AB}$ yoyni (egri chiziqni) tasvirlasin (5-chizma).



5-chizma

$[a,b]$ segmentda

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

$$(a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b)$$

nuqtalarni olib, bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ularning $\breve{AB}$ yoyi bilan kesishgan nuqtalarini

$$A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0,1,2,...,n; \; A_0 = A, \; A_n = B)$$

deymiz. So'ng bu nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birin-ketin birlashtiramiz. Natijada $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. Bu siniq chiziq perimetrini L_n deylik.

Ravshanki siniq chiziqni $A_k(x_k, f(x_k))$, $A_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi bo'lagining uzunligi (ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra)

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'lib, siniq chiziq perimetri

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo'laklash sonini orttira borilsa, ya'ni n cheksizga intila borsa, unda siniq chiziq $\breve{AB}$ yoyiga yaqinlasha boradi, uning perimetri esa $\breve{AB}$ yoyining uzunligi l ni borgan sari aniqroq ifodalay boradi.

Bundan, tabiiy ravishda $\breve{AB}$ yoyining uzunligi deb

$$l = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Yuqorida aytilishiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmen uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Binobarin, u har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da h shu xususiyatga ega bo‘ladi. Har bir $[x_k, x_{k+1}]$ da $f(x)$ ga Lagr teoremasini qo‘llab topamiz:

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\cdot\Delta x_k,\quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

bunda $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ va $\tau_k\in[x_k, x_{k+1}]$.

Natijada

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)]^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

bo‘ladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lgani uch u shu oraliqda integrallanuvchi bo‘ladi. Unda integral yig‘i ixtiyoriy $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$ da, jumladan τ_k da ham chekli limit ya’ni aniq integralga intiladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Shunday qilib, $\breve{AB}$ yoyining (egri chiziqning) uzunli

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (4)$$

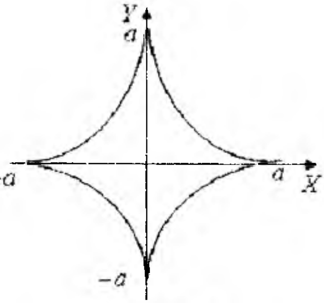
bo‘ladi.

1-misol. *Ushbu*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

tenglama bilan berilgan egri chiziqning uzunligi topilsin.

◄Bu yopiq egri chiziq bo‘lib, u astroida deyil (6-chizma).



6-chizma

Astroida koordinatalar o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lib, uning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topish yetarli bo‘ladi (topilgan qiymatni 4 ga ko‘paytirish bilan butun astroidaning uzunligi topiladi).

Astroida tenglamasidan topamiz:

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}, \text{ ya'ni } y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ravshanki,

$$y' = \left(\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1} \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}\right) = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

bo‘lib, birinchi chorakda $0 \le x \le a$ bo‘ladi.

(4) formuladan foydalanib, astroidaning birinchi chorakdagi qismining uzunligini topamiz:

$$\frac{l}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}}}\,dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{1 + a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}} - 1}\,dx = \int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}a.$$

Demak, astroidaning uzunligi

$$l = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a$$

bo‘ladi.►

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq ushbu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

tenglamalar sistemasi bilan (parametrik ko‘rinishda) berilg bo‘lsin, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ da uzluk $\varphi'(t)$ hamda $\psi'(t)$ hosilalarga ega. Bu egri chiziqning uzunligi

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

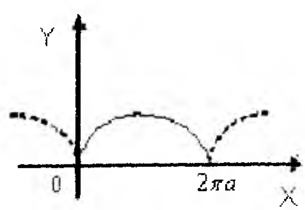
bo‘ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

parametrik ko‘rinishda berilgan $\breve{AB}$ *egri chiziqning* $[0, 2\pi]$ *d* *(sikloidaning) uzunligi topilsin.*

◄ Bu egri chiziq 7-chizmada tasvirlangan.



7-chizma

Bu holda

$$\varphi(t) = a(t - \sin t), \quad \psi(t) = a(1 - \cos t)$$

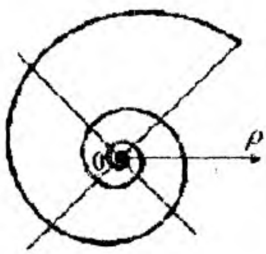
bo‘lib,

$$\varphi'(t) = a(1 - \cos t), \quad \psi'(t) = a \sin t,$$

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=$$
$$=a^2 2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$
bo'ladi. (5) formuladan foydalanib topamiz:
$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\cdot\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=$$
$$\left[t=2u,\ dt=2du\ \ va\ \ t=0\ da\ \ u=0,\ t=2\pi da\ \ u=\pi\right]=$$
$$=4a\int_0^{\pi}\sin u du=4a(-\cos u)\Big|_0^{\pi}=8a. \blacktriangleright$$

Aytaylik, $\breve{AB}$ egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida quyidagi
$$r=\rho(\theta),\quad (\alpha\le\theta\le\beta)$$
tenglama bilan berilgan bo'lsin, bunda $\rho(\theta)$ uzluksiz $\rho'(\theta)$ hosilaga ega. Bu egri chiziqning uzunligi
$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}d\theta \qquad (6)$$
bo'ladi.

3-misol. *Qutb koordinatalar sistemasida berilgan ushbu $\rho(\theta)=e^\theta$ egri chiziqning (logarifmik spiral- 8-chizma) $0\le\theta\le\pi$ dagi uzunligi topilsin.*



8-chizma

◀Ravshanki,
$$\rho(\theta)=e^\theta$$

bo'lib,

$$\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)=2e^{2\theta}$$

bo'ladi. (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{2e^{2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left(e^{\theta}\right)\Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right).$$ ►

26.3. Aylanma sirtning yuzini hisoblash

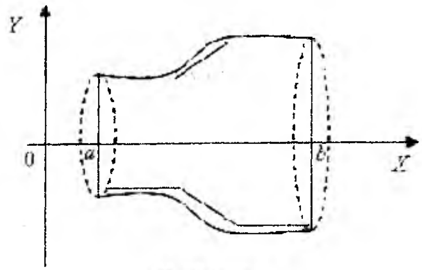
Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'l… $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsin. Bu funksiya grafigining

$$\left(a,f(a)\right),\quad \left(b,f(b)\right)$$

nuqtalari orasidagi bo'lagini $\breve{AB}$ yoy deylik.

$\breve{AB}$ yoyni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'l… sirt aylanma sirt deyiladi (9-chizma).

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz, u (a,b) orali… uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, aylanma sirtning yuzi



9-chizma

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{7}$$

bo'ladi.

4-misol. *Ushbu*

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\quad a>0,\ 0\leq x\leq a$$

zanjir chizig'ini OX o'qining $[0,a]$ *qismi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzi topilsin.*

◀ Ravshanki,

$$f'(x)=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}-e^{-\frac{x}{a}}\cdot\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}).$$

(7) formuladan foydalanib, izlanayotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$S=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4).$$ ▶

26.4. Statik momentlar va og'irlik markazlarini hisoblash

Tekislikda m massaga ega bo'lgan A nuqtani qaraylik. Bu nuqtaning koordinatalari x va y bo'lsin: $A(x,y)=A$.

Ushbu

$$M_x=m\cdot y,\quad M_y=m\cdot x$$

miqdorlar mos ravishda OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Aytaylik, tekislikda har biri mos ravishda

$$m_0,m_1,m_2,\ldots,m_{n-1}$$

massaga ega bo'lgan

$$A_0(x_0,y_0),\ A_1(x_1,y_1),\ldots,A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$$

nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$M_x=\sum_{k=0}^{n-1}m_ky_k,\quad M_y=\sum_{k=0}^{n-1}m_kx_k$$

miqdorlar $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ nuqtalar sistemasining mos ravis
OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Agar nuqtalar sistemasining barcha massa
$(m = m_0 + m_1 + ... + m_{n-1})$ $C = C(x*, y*)$ nuqtada bo'lib,
nuqtaning OX va OY o'qlariga nisbatan statik moment
sistemaning shu o'qlarga nisbatan statik momentlariga teng, ya'ni

$$M_x = \sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k = my^*,$$

$$M_y = \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k = mx^*,$$

bo'lsa, $C = C(x*, y*)$ nuqta sistemaning og'irlik mark
deyiladi.

Keyingi tengliklardan sistema og'irlik markazin
koordinatalari uchun

$$y^* = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k}{\sum_{k=0}^{n-1} m_k}, \qquad x^* = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k}{\sum_{k=0}^{n-1} m_k}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, AB egri chiziq (AB yoyi)

$$y = f(x), \quad a \le x \le b,$$

tenglama bilan aniqlangan bo'lsin, bunda $f(x)$ funksiya $[a,b]$
uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Bu egri chiziq bo'yicha zichl
o'zgarmas va u 1 ga teng bo'lgan massa tarqatilgan. Ravshanki,
holda massa (u yoy uzunligi bilan zichlik ko'paytmasiga t
bo'lganligi sababli) yoy uzunligiga teng bo'ladi.

(4) formuladan foydalanib topamiz:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (8)$$

Massali AB egri chiziqning OX va OY koordin o‘qlariga nisbatan statik momentlarini hamda uning og‘irlik markazining koordinatalarini topish uchun $[a,b]$ segmentini

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n bo‘lakka bo‘lamiz. Unda $\breve{AB}$ yoyidagi

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

nuqtalar $\breve{AB}$ yoyini n ta $\breve{A_k A}_{k+1}$ bo‘lakka ajratadi. Bunda $\breve{A_k A}_{k+1}$ yoy bo‘lagining massasi (8) formulaga ko‘ra

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

bo‘ladi.

Aniq integralning xossasi (o‘rta qiymat haqidagi teorema)dan foydalanib topamiz:

$$m_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

bunda $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Yuqorida aytilganlarga ko‘ra $(\xi_k, f(\xi_k))$ nuqtaning OX va OY o‘qlarga nisbatan statik momentlari

$$M_{\xi_k} = m_k f(\xi_k) = f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$M_{f(\xi_k)} = m_k \cdot \xi_k = \xi_k \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$(k = 0,1,2,...,n-1)$ bo‘lib, $(\xi_0, f(\xi_0))$, $(\xi_1, f(\xi_1)),...,(\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))$ nuqtalar sistemasining OX va OY o‘qlariga nisbatan statik momentlari

$$M_x = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$M_y = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

bo‘ladi.

Endi $[a,b]$ segmentning bo‘laklash sonini orttira boril ya’ni n cheksizga intila borsa, unda $A_k A_{k+1}$ yoyi nuqtaga ayla boradi, yuqoridagi yig‘indilar esa massaga ega bo‘lgan e chiziqning OX ва OY o‘qlarga nisbatan statik momentini ifodal boradi. Binobarin, (8) massali egri chiziqning OX va OY o‘qlar nisbatan statik momentlari

$$I_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$I_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

bo‘ladi.

Ayni paytda

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

bo‘lganligidan

$$I_x = \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \quad I_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

bo‘lishini topamiz.

Shuningdek, (8) massali egri chiziq og‘irlik marka $C = C(x^*, y^*)$ nuqta koordinatalari uchun

$$x^* = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx}, \quad y^* = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx}$$

bo‘ladi.

Mashqlar

1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan quyidagi egri chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzasi topilsin.

a) $y = x^2 + 1, \quad x + y = 3$.

b) $y = \sin 2x, \quad y = \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \pi$.

2. Egri chiziq yoyining uzunligi topilsin.

a) $y = \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{5}{4}}, \quad 0 \le x \le 9$.

b) $y = \ln x, \quad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$.

3. Quyidagi egri chiziqlarni aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtlarning yuzlari topilsin.

a) $y = x^3; \quad x = -\frac{2}{3}, \quad x = \frac{2}{3};$ OX o'qi atrofida.

b) $y = \mathrm{tg}x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4};$ OX o'qi atrofida.

4. Tenglamasi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ bo'lgan to'g'ri chiziqni koordinatalar o'qlari orasidagi qismining OX va OY o'qlariga nisbatan statik momentlari topilsin.

5. $y = \cos x$ egri chiziq yoyining $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtalar orasidagi qismining OX o'qiga nisbatan statik momenti topilsin.

6. Ushbu

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0, \quad y = 0$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazi topilsin.

27-MA'RUZA

Xosmas integrallar

Avvalgi, 24-ma'ruzada $[a,b]$ segmentda berilgan $f($

funksiyaning aniq integrali o'rganildi. Bunda:

1) $[a,b]$ ning chekli oraliq,

2) shu oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan deb qarald

Matematika va uning tatbiqlarida integrallash oralig'in cheksiz, funksiyaning chegaralanmagan hollarda uning integr bilan bog'liq masalalarga duch kelinadi.

Ushbu ma'ruzada cheksiz oraliq bo'yicha ham chegaralanmagan funksiyaning integrali tushunchasi keltirilib, u o'rganiladi.

27.1. Chegaralari cheksiz (cheksiz oraliq bo'yicha) integrall

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda (chek oraliqda) uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oral (chekli oraliq) bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx \quad (a<t<+\infty)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. *Agar*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning chegarasi chek xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

Agar (1) limit chekli bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (1) limit cheksiz bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Eslatma: *Agar (1) limit mavjud bo'lmasa,* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *xosmas integral uzoqlashuvchi deb qaraladi.*

1-Misol Ushbu

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

xosmas integralni qaraylik. Bu integral ta'rifga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^2}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\int_1^t\frac{dx}{x^2} = \int_1^t x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_1^t = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^t = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = -\frac{1}{t}-\left(-\frac{1}{1}\right) = 1-\frac{1}{t},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1.$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, uning qiymati 1 ga teng.

2-Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

xosmas integralni qaraylik. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}$$

bo'ladı. Ravshanki,

$$\int_0^t\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^t=arctgt-arctg0=arctgt,$$

$$\lim_{t\to+\infty}arctgt=\frac{\pi}{2}.$$

Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

3-Misol. *Ushbu*

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\qquad(a>0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◄Aytaylik, $\alpha\neq1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t x^{-\alpha}dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^t=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

bo'ladi, $\alpha>1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}}$$

bo'ladi, $\alpha<1$ bo'lganda

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$$

bo'ladi. Demak, berilgan integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi, $\alpha<1$ bo'lganda uzoqlashuvchi.

Aytaylik, $\alpha=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty$$

bo'lib, berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-Misol. Ushbu

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx$$

xosmas integralni qaraylik. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \cos x dx = \lim_{t\to+\infty} (-\sin x)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty} \sin t$$

bo'ladi. Biroq keyingi limit mavjud emas. Yuqorida keltirilgan eslatmaga ko'ra berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *$f(x)$ funksiya $(-\infty, a)$ oraliqda uzluksiz bo'lganda*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x) dx$$

xosmas integral, $f(x)$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'lganda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

xosmas integrallar yuqoridagidek ta'riflanadi:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx + =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Xosmas integrallar haqidagi keyingi ma'lumotlarni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integralga nisbatan keltiramiz.

27.2. Yaqinlashuvchi xosmas integrallarning xossalari

Yaqinlashuvchi xosmas integrallar 23-ma'ruzada o'rgan gan aniq integrallarning xossalari kabi xossalarga ega bo'l... Jumladan,

1) *Agar*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)\,dx \quad (k=const)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

bo'ladi;

2) *Agar*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^{+\infty} [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

bo'ladi.

3) *Agar*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x\in[a,+\infty)$ *d...*

$$f(x) \le g(x)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

bo'ladi.

27.3. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi. Yaqinlashish alomati

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$da uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x \in [a,+\infty)$ da

$$f(x) \ge 0$$

bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^{t} f(x)dx$$

bo'ladi.

Ayni paytda $f(x) \ge 0$ bo'lganda $t' > t$ uchun

$$\int_a^{t'} f(x)\,dx = \int_a^{t} f(x)dx + \int_t^{t'} f(x)dx \ge \int_a^{t} f(x)dx$$

bo'ladi (chunki, $\int_t^{t'} f(x)dx \ge 0$). Bunda esa

$$\varphi(t) = \int_a^{t} f(x)dx$$

funksiyaning o'suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, o'suvchi funksiya har doim chekli yoki cheksiz limitga ega:

agar ixtiyoriy $t \in (a,+\infty)$ da

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx\leq M \quad (M=const)$$

ya'ni $\varphi(t)$ funksiya yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u ho[lda] $t\to+\infty$ da $\varphi(t)$ funksiya chekli limitga ega, aks holda esa un[ing] limiti $+\infty$ bo'ladi. Natijada,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (f(x)\geq 0,\ x\in[a,+\infty))$$

xosmas integralning yaqinlashishini ta'minlaydigan quyid[agi] teoremaga kelamiz.

1-Teorema. *Agar*

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx\leq M \quad (t\in(a,+\infty))$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (f(x)\geq 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *Agar*

$$\varphi(t)=\int_a^t f(x)dx \quad (f(x)\geq 0)$$

funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Endi amaliyotda ko'p foydalaniladigan xosmas integraln[ing] yaqinlashishini ta'minlaydigan yaqinlashish alomatini keltiram[iz]. Odatda, bu alomat solishtirish teoremasi deyiladi.

2-Teorema. *Aytaylik,* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* $[a,+\infty)$ *oraliqda uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy* $x\in[a,+\infty)$ *da*

$$0\leq g(x)\leq f(x)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsin. Agar

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Eslatma: *Keltirilgan teoremaning sharti bajarilganda,*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad (f(x) \geq 0)$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilishi kerak bo'lsin. Bunda integral ostidagi funksiya bilan ushbu

$$f(x) \leq \varphi(x) \quad \left(x \in [a, +\infty)\right)$$

munosabatda bo'lgan va ayni paytda $\varphi(x)$ ning xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lgan $\varphi(x)$ funksiyani topish bilan

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

integralning yaqinlashuvchi bo'lishi aniqlanadi.

5-Misol. *Ushbu*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 + x}}$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Integral ostidagi

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}$$

uchun

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{x\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}\le\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\qquad(x>1)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

funksiyaning xosmas integrali

$$\int_1^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}dx$$

yaqinlashuvchi (qaralsin, 3-misol, bunda $\alpha=\frac{5}{3}>1$).

Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+x}}$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ►

6-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◄ Ravshanki,

$$\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}$$

bo'lib,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

integral yaqinlashuvchi.

Demak,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi. ▶

27.4. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lsin. Bu funksiya ixtiyoriy $x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \geq 0$ bo‘lgan holda uning xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

ning mavjudligi hamda solishtirish alomati 27.3 da bayon etildi.

Endi $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lgan ixtiyoriy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya yordamida tuzilgan

$$|f(x)|$$

funksiya $[a,+\infty)$ da manfiy bo‘lmaydi: $|f(x)| \geq 0$.

3-teorema. *Agar*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

◀ $f(x)$ ва $|f(x)|$ funksiyalar yordamida ushbu

$$\varphi(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad \psi(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

funksiyalarni tuzamiz. Ravshanki,

1) $\varphi(x)\geq 0,\quad \psi(x)\geq 0,$

2) $\varphi(x)\leq |f(x)|,\quad \psi(x)\leq |f(x)|,$

3) $\varphi(x)-\psi(x)=f(x)$

bo‘ladi.

Shartga ko‘ra

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi. Unda solishtirish teoremasiga ko

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx,\quad \int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

xosmas integrallar ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

integral yaqinlashuvchi. ▶

3-ta’rif. *Agar*

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *xosmas inte*

absolyut yaqinlashuvchi integral deyiladi.

Masalan, $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ xosmas integral absol

yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$$

va

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchiligidan

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$$

integralning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

27.5. Xosmas integrallarni hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lib, uning xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ma'lumki, bu holda $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi. Uni $F(x)$ bilan belgilaylik, $(F'(x)=f(x))$.

Ta'rifga binoan

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Ayni paytda, Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

bo'ladi. Agar

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = F(+\infty)$$

deyilsa, unda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\left(F(t)-F(a)\right) = F(+\infty)-F(a)$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}. \qquad (2)$$

Ko'pincha xosmas integrallar shu formula yordam hisoblanadi.

7-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

integral hisoblansin.

◀Bu integralning yaqinlashuvchi bo'lishi ravshan. Endi

$$f(x) = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topamiz:

$$\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + C$$

Unda (2) formulaga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left[-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + C\right]\Bigg|_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(-(1+0)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0+1 = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1. ▶$$

8-Misol. *Ushbu*

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx \qquad (a = const)$$

Integralning ixtiyoriy o'zgarmas $p > 0$ *da qiymati topilsin.*

◀ (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right) - $$

$$-\left(-\frac{1}{p}e^{-pa}\right) = 0 + \frac{1}{p}e^{-pa} = \frac{1}{p}e^{-pa}$$.▶

9-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Ravshanki,

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

$$-2x + 1 \geq -x^2.$$

Unda

$$e^{-x^2} \leq e^{-2x+1} = e \cdot e^{-2x} \qquad (3)$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$$

integral yaqinlashuvchi. (3) munosabat hamda solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

27.6. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya $x \to b-0$ da cheksizga intilsin: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Demak, $f(x)$ funksiya $[a, b)$ da chegaralanmagan (aniqroq, $f(x)$ funksiya b nuqta atrofida chegaralanmagan).

$f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy $[a,t]$ oraliq $(a < t <$ b) bo'yicha integrali

$$\int_a^t f(x)dx \quad (a < t < b)$$

ni qaraylik. Ravshanki, integral t ga bog'liq bo'ladi.

4-ta'rif. *Agar ushbu*

$$\lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ bo'yicha xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx. \qquad (4)$$

Agar (4) limit mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (4) limit cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $x \to a+0$ da cheksizga intilsin. Ravshanki, bu funksiyaning $[t,b]$ oraliq $(a<t<b)$ bo'yicha integrali

$$\int_t^b f(x)dx \quad (a<t<b)$$

t o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Agar ushbu

$$\lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)dx$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Agar (5) limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

10-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

integral hisoblansin.

◄ Ravshanki, integral ostidagi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiya $x \to 1-0$ da cheksizga intiladi. Demak berilgan integral chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali.

Ta'rifga binoan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1-0} \left(\arcsin x\right)\Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to 1-0} \left(\arcsin t - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}. ►$$

11-Misol. *Ushbu*

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

xosmas integralning qiymati topilsin.

◄ Bu chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali bo'ladi, chunki

$$x \to 1+0 \text{ da } \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \to +\infty .$$

Ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to 1+0} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to 1+0} \int_t^2 (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) =$$

$$= \lim_{t\to 1+0} \frac{(\ln x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_t^2 = \lim_{t\to 1+0} \left(2\sqrt{\ln 2} - 2\sqrt{\ln t}\right) = 2\sqrt{\ln 2} .$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln 2} . ►$$

12-Misol. *Ushbu*

$$J_1=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p},\quad J_2=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}\quad (a<b,\quad p=const>0)$$

integrallar yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Aytaylik, $p\neq 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b(x-a)^{-p}d(x-a)=\lim_{t\to a+0}\frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_t^b=$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{t\to a+0}[(b-a)^{1-p}-(t-a)^{1-p}],$$

bo'lib, $p<1$ bo'lganda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\frac{1}{(1-p\cdot)(b-a)^{p-1}},$$

berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi, $p>1$ bo'lganda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{(x-a)^p}=+\infty,$$

berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $p=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b\frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}(\ln(x-a))\Bigg|_t^b=\lim_{t\to a+0}\left[\ln(b-a)-\ln(t-a)\right]=+\infty$$

bo'ladi. Demak, berilgan xosmas integral uzoqlashuvchi.

Shunday qilib,

$$J_1=\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$$

xosmas integral $0<p<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.▶

Xuddi yuqoridagidek ko'rsatish mumkin,

$$J_2=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$$

xosmas integral $0 < p < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $p \geq$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Biz mazkur ma'ruzaning 1^0 - 5^0 paragraflarida chegaral cheksiz xosmas integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

ni o'rgandik. Bu integralga nisbatan keltirilgan tushuncha tasdiqlarga o'xshash ma'lumotlar chegaralanmagan funksiyanl xosmas integrali ($t \to a+0$ da $f(x) \to \infty$ yoki $t \to b-0$ $f(x) \to \infty$)

$$\int_a^b f(x)dx$$

uchun ham keltirilishi mumkin. Jumladan, agar $f(x)$ va $g($ funksiyalar:

1) $(a,b]$ da uzluksiz va ixtiyoriy $x \in (a,b]$ da

$$0 \leq g(x) \leq f(x);$$

2) xosmas integral $\int_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b g(x)dx$$

xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

13-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◄ Ravshanki, $0 < x < 1$ bo'lganda

$$\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

yaqinlashuvchi. Demak. berilgan integral $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$

yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Mashqlar

1.Ushbu

$$\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

integral hisoblansin.

2.Ushbu

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshiriisin va integral hisoblansin.

3.Ushbu

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$$

integral yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

28-MA'RUZA

Sonli qatorlar

28.1. Qator tushunchasi. Qatorning yaqinlashuvchiligi va uzoqlashuvchiligi

Aytaylik, biror $\{a_n\}$:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikni hadlari yordamida tuzilgan ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ifoda sonli qator (qisqacha qator) deyiladi. Bunda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ sonlar qatorning hadlari, a_n ga esa qatorning umumiy yoki n — hadi deyiladi.

(1) qator hadlaridan quyidagi

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yig'indilarni hosil qilamiz. Ular (1) qatorning qismiy yig'indilari deyiladi. Natijada (1) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

(1) qator yaqinlashuvchi deyiladi. S son esa (1) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ limit cheksiz yoki u mavjud bo'lmasa, (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

1-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

◀Qatorning qismiy yig'indilari ta'rifga ko'ra

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, \qquad (1)$$

....

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

bo'ladi.

Endi S_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Keyingi tenglikda $n \to \infty$ da limitga o'tib

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi 1 ga teng.▶

2-misol. *Ushbu*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

◀Bu qatorning hadlari arifmetik progressiyani tashkil et... Arifmetik progressiya dastlabki n ta hadining yig'indisini hisoblash formulasidan foydalanib, topamiz:

$$S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Keyingi tenglikda $n \to +\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = +\infty$$

Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.▶

3-misol. *Ushbu*

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \qquad (2)$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

Bu qatorning hadlari geometrik progressiyani tashkil et... Shuning uchun uni geometrik qator deyiladi.

Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indi... formulasidan foydalanib topamiz:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

Aytaylik, $|q| < 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-aq^n}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

bo'lib, (2) geometrik qator yaqinlashuvchi, yig'indisi

$$S = \frac{a}{1-q}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $q > 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-aq^n}{1-q}\right) = \infty$$

bo'lib, (2) geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $q = 1$ bo'lsin. Bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

bo'lib, (2) geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, $q \le -1$ bo'lsin. Bu holda $n \to +\infty$ da

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lmaydi. Demak, (2) qator uzoqlashuvchi.

Shunday qilib (2) geometrik qator $|q| < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q| > 1$ va $q = \pm 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

4-misol. *Ushbu*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin..

◀Bu qator garmonik qator deyiladi va u uzoqlashuvchi bo'ladi. Shuni isbotlaylik. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni garmonik qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi S bo'lsin. Ravshanki, bu holda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = S,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = S$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots +$$

$$+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Bu esa $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ bo'lishiga zid. Ziddiyat kelib chiqishiga sabab, garmonik qatorning yaqinlashuchi bo'lsin deyilishidir. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi. ▶

28.2. Yaqinlashuvchi qatorlarning sodda xossalari

Yaqinlashuvchi qatorlarlar ma'lum xossalarga ega. Ularni keltiramiz.

1-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi S *bo'lsa, u holda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + \ldots \tag{4}$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $c \cdot S$ *bo'ladi, bunda* $c = const$.

◀Aytaylik,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n$$

bo'lsin. Ravshanki,

$$\sigma_n = c \cdot S_n$$

bo'ladi.

(3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

bo'ladi. Unda

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

bo'lib, bu tenglikdan (4) qatorning yaqinlashuvchiligi, uning yig'indisi cS ga teng bo'lishi kelib chiqadi. ▶

2-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (6)$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda S *va* σ *ga teng bo'lsa, u holda*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S + \sigma$ *ga teng bo'ladi.*

◀Aytaylik,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

bo'lsin. Ravshanki,

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n) = S_n + \sigma_n.$$

Shartga ko'ra (5) va (6) qatorlar yaqinlashuvchi va ularning yig'indisi mos ravishda S va σ. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma.$$

Unda

$$\lim_{n\to\infty} (S_n + \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma$$

bo'lib, bu tenglikdan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

qatorning yaqinlashuvchiligi va uning yig'indisi $S + \sigma$ ga teng bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-xossa. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $n \to \infty$ *da qatorning umumiy hadi* a_n *nolga intiladi:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

◀ Aytaylik, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uni yig'indisi S ga teng bo'lsin: Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = S,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = S.$$

Ayni paytda,

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

bo'ladi. ▶

Eslatma. *Qatorning umumiy hadi $n \to \infty$ da nolga intilishidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

garmonik qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lib, u $n \to \infty$ da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Demak, yuqorida keltirilgan 3-xossa qator yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy shartini ifodalaydi.

28.3. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashuvchiligi. Solishtirish teoremalari

Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qatorning har bir hadi uchun

$$a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bo'lsa, qator musbat hadli (qisqacha musbat) qator deyiladi.

Aytaylik,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (7)$$

musbat qator bo'lib,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin. Ravshanki,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

bo'lib, $a_n \geq 0$ bo'lgani uchun

$$S_n \leq S_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bo'ladi. Demak, musbat qatorlarda uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

1-teorema. *Musbat hadli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (8)$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n\}$ *ning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

◀**Zarurligi.** Aytaylik, (8) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Unda ta'rifga binoan

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \ (S - \text{chekli son, } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \ ).$$

Ma'lumki, yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan, jumladan yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsin. Ayni paytda bu ketma-ketlik o'suvchi. Unda monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra $\{S_n\}$ ketma-ketlik $n \to \infty$ da chekli limitga ega bo'ladi. Demak, (8) qator yaqinlashuvchi.▶

Eslatma. *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

musbat hadli qatorda, uning qismiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda (9) uzoqlashuvchi bo'ladi.

Biror musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan ma'lum munosabatda bo'lgan ikkinchi musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin. Bu quyidagi teoremalar (solishtrish teoremalari) orqali ifodalanadi.

2-teorema. *Ikkita musbat hadli qatorlar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (10)$$

uchun

$$a_n \le b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (11)$$

bo'lsa, u holda (10) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (9) qator yaqinlashuvchi bo'ladi, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (10) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

◄ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlarning qismiy yig'indilari

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

bo'lsin.

(10) qator yaqinlashuvchi bo'lsin deylik. Unda 1-teoremaga ko'ra $\{\sigma_n\}$ yuqoridan chegaralangan, ya'ni

$$\sigma_n \le M \quad (M = const)$$

bo'ladi. (11) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \sigma_n .$$

Demak, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan:

$$S_n \le M .$$

Unda 1-teoremaga ko'ra (9) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Aytaylik, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Unda $\{S_n\}$

ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, (11) tengsizlikka asosan $\{\sigma_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Bundan (10) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.▶

3-teorema. *Agar (9) va (10) qatorlar uchun*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (a_n > 0, b_n > 0, \quad n = 1, 2, ...)$$

bo'lsa, u holda (10) qator yaqinlashuvchi bo'lganda (9) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi, (9) qator uzoqlashuvchi bo'lganda (10) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema 2-teoremadan foydalanib isbotlanadi.

5-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Ravshanki, berilgan qator musbat hadli qator. Qatorning umumiy hadi

$$a_n = \frac{1}{2^n + n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

bo'lib, uning uchun

$$a_n = \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

bo'ladi. Ma'lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

geometrik qator bo'lib, mahraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo'lganligi uchun, qator yaqinlashuvchi. Unda 2-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

28.4. Musbat hadli qatorlarda yaqinlashish alomatlari

Ushbu bandda musbat qatorlarning yaqinlashuvchi yo uzoqlashuvchi bo'lishini aniqlab beradigan alomatlarni keltiramiz. Ulardan amaliy masalalarni yechishda ko'p foydalaniladi.

Faraz qilaylik, musbat hadli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (12)$$

qator berilgan bo'lsin.

1) Koshi alomati.

Agar (12) qatorning umumiy hadi a_n *uchun biror nomerdan boshlab*

$$\sqrt[n]{a_n} < 1$$

bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

bo'lsa, u holda (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Koshi alomati quyidagicha limit ko'rinishida aytilishi ham mumkin.

Agar (12) qatorning umumiy hadi a_n uchun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

bo'lib, $k < 1$ bo'lsa (12) qator yaqinlashuvchi, $k > 1$ bo'lsa (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

6-misol. *Ushbu*

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n + \ldots$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qatorning umumiy hadi

$$a_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

bo'lib, u 1 dan kichik. Demak, Koshi alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi. ▶

Eslatma. *Koshi alomatining limit ko'rinishidagi ifodasida* $k=1$ *bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin.*

2) Dalamber alomati.

Agar (12) qator hadlari uchun biror nomerdan boshlab

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \qquad (a_n>0\ ,\ n=1,2...)$$

bo'lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \qquad (a_n>0\ ,\ n=1,2...)$$

bo'lsa, u holda (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Dalamber alomatini quyidagicha limit ko'rinishida aytish ham mumkin.

Agar (12) qatorning hadlari uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d \quad (a_n>0\ ,\ n=1,2...)$$

bo'lib, $d<1$ bo'lsa (12) qator yaqinlashuvchi, $d>1$ bo'lsa, (12) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

7-misol. *Ushbu*

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}+...$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qatorning a_n va a_{n+1} hadlari

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n}, \qquad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}=\frac{1}{2}$$

bo‘lib, u 1 dan kichik. Demak, Dalamber alomatiga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.▶

Eslatma. *Dalamber alomatining limit ko‘rinishidagi ifodasida $d=1$ bo‘lsa, u holda (12) qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.*

3) Koshining integral alomati.

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (13)$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo‘lib,

1) $\forall x\in[1,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$,

2) $f(x)$ funksiya $[1,+\infty)$ da kamayuvchi,

3) $f(n)=a_n \quad (n=1,2,3,...)$, ya'ni

$$a_1=f(1),a_2=f(2),...,a_n=f(n),...$$

bo‘lsin. U holda

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, (13) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi;

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, (13) qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

8-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+... \qquad (\alpha>0)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu misol uchun alomatda keltirilgan $f(x)$ funksiya sifatida $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ olinsa, bu funksiya, ravshanki $[1,+\infty)$ da uzluksiz, ixtiyoriy $x\in[1,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$, $[1,+\infty)$ da kamayuvchi va

$$1=f(1),\frac{1}{2^{\alpha}}=f(2),\frac{1}{3^{\alpha}}=f(3),\ldots,\frac{1}{n^{\alpha}}=f(n),\ldots$$

bo'ladi.

Ma'lumki,

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$

xosmas integral $0<\alpha\leq 1$ da uzoqlashuvchi, $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi. Haqiqatan ham

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{dt}{t^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & agar\ \ \alpha>1\ \ bo\text{‘}lsa,\\ \infty, & agar\ \ \alpha<1\ \ bo\text{‘}lsa,\end{cases}$$

va $\alpha=1$ bo'lganda

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{x}\frac{dt}{t^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x}\frac{dt}{t}=\infty$$

bo'ladi.

Demak, Koshining integral alomatiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

qator $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha\leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ▶

Odatda, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ qator umumlashgan garmonik qator deyiladi.

28.5. Ixtiyoriy hadli qatorlar. Qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi, Leybnits teoremasi

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (14)$$

qator berilgan bo'lib, uning har bir hadi ixtiyoriy ishorali haqiqiy sonlardan iborat bo'lsin. (Odatda, bunday qator ixtiyoriy hadli qator deyiladi.) Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (15)$$

qatorni tuzamiz.

4-Teorema. Agar *(15) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, holda (14) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

◄Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsin.

Ravshanki,

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (16)$$

Solishtirish teoremasiga ko'ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

qatorning ikki yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \text{ va } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

qatorlar ayirmasi sifatida ifodalanishini topamiz.

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi.

9-Misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} + \ldots \quad (\alpha > 1)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator quyidagicha

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$$

bo‘lib, u yaqinlashuvchi bo‘ladi. Unda yuqoridagi teoremaga ko‘ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.▶

1-Ta’rif. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator yaqinlashuvchi bo‘lsa,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

Eslatma. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator uzoqlashuvchi bo‘lsa,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator yaqinlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.*

2-ta’rif. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator yaqinlashuvchi bo‘lib,* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator uzoqlashuvchi bo‘lsa,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.*

10-Misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

qator shartli yaqinlashuvchi qator bo‘lishi isbotlansin.

◀ Ravshanki, berilgan qatorning qismiy yig‘indisi

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (17)$$

bo'ladi.

Ma'lumki, $\ln(1+x)$ funksiyaning Makloren formulasiga ko'ra yoyilmasi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

bo'lib, $0 \le x \le 1$ bo'lganda

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lar edi.

Xususan, $x = 1$ bo'lganda

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1) \qquad (18)$$

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

bo'ladi.

(17) va (18) munosabatlardan

$$\ln 2 = S_n + R_{n+1}(1)$$

va undan

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $n \to \infty$ da $S_n \to \ln 2$. Bu esa qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. Ayni paytda, berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchiligi ma'lum. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi qator. ▶

Aytaylik, biror ixtiyoriy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator berilgan bo'lib, u yaqinlashuvchilikka tekshirilishi kerak bo'lsin. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

qator tuziladi. Ravshanki, keyingi qator musbat qator bo'ladi. Binobarin, uni yaqinlashuvchilikka tekshirishda yaqinlashish alomatlaridan foydalanish mumkin. Agar biror alomatga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning yaqinlashuvchiligi aniqlansa, unda qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchi ekanligi topiladi.

Endi ixtiyoriy hadli qatorning bitta muhim hususiy holini qaraymiz.

Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \qquad (19)$$

qatorni qaraymiz, bunda $c_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Odatda, bunday qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator deyiladi.

Masalan, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator bo'ladi.

5-teorema (Leybnits alomati). *Agar (19) qatorda:*

1) $c_{n+1} < c_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$

bo'lsa, u holda (19) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀ Berilgan (19) qatorning dastlabki $2m$ ta hamda $2(m+1)$ ta $(m \in N)$ hadlaridan iborat qismiy yig'indilarni olib, ularni quyidagicha

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1} - c_{2m} =$$
$$= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}),$$
$$S_{2(m+1)} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1} - c_{2m} + c_{2m+1} - c_{2m+2} =$$
$$= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}) + (c_{2m+1} - c_{2m+2})$$
yozamiz. Ravshanki,
$$S_{2(m+1)} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}).$$
Teoremaning 2)- shartiga ko'ra $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ bo'lib,
$$S_{2(m+1)} > S_{2m} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$
bo'ladi. Demak, $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik o'suvchi.

Endi S_{2m} yig'indini quyidagicha yozamiz:
$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$
Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifodada qatnashgan qavs ichidagi ayirmalarning, shuningdek c_{2m} ning musbat bo'lishini e'tiborga olib,
$$S_{2m} < c_1$$
bo'lishini topamiz. Demak, $\{S_{2m}\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko'ra
$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S \quad (S - \text{chekli son}) \qquad (20)$$
mavjud.

Endi (19) qatorning dastlabki $2m-1$ ta $(m \in N)$ sondan hadidan iborat ushbu
$$S_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m-1}$$
qismiy yig'indisini olaylik. Ravshanki,
$$S_{2m-1} = S_{2m} + c_{2m}.$$
Teoremaning $n \to \infty$ да $c_n \to 0$ bo'lishi sharti hamda (20) munosabatdan foydalanib topamiz:
$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty}(S_{2m} + c_{2m}) = S.$$

Shunday qilib, berilgan (19) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik chekli limitga ega ekani ko'rsatildi. Demak, (19) qator yaqinlashuvchi.▶

Yuqorida yaqinlashuvchiligi ko'rsatilgan

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots \qquad (21)$$

qator yaqinlashishi Leybnits teoremasi yordamida oson isbotlanadi.

Bu qatorda

$$c_n=\frac{1}{n}\ \left(n=1,2,3,\ldots\right)$$

bo'lib, uning uchun

1) $c_{n+1}<c_n\ ,\quad (n=1,2,3,\ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$

bo'ladi. Leybnits teoremasiga ko'ra

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi absolyut yaqinlashuvchi qatorning bitta xossasini keltiramiz.

Aytaylik, biror ixtiyoriy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (22)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirib

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'=a_1'+a_2'+\ldots+a_n'+\ldots \qquad (23)$$

qator hosil qilamiz. Ravshanki, keyingi qatorning har bir hadi berilgan qatorning tayin bir hadining aynan o'zi.

6-Teorema. *Agar (22) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi* S *bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan (23) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi ham* S *bo'ladi.*

Mashqlar

1. Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligi aniqlansin, yig'indisi topilsin.

a) $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\ldots+\frac{2}{5^n}+\ldots$

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\ldots$

2. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorlarni yaqinlashish alomatlaridan foydalanib yaqinlashishga tekshirilsin.

a) $a_n=\frac{3^n}{n^n}$. b) $a_n=(\frac{2n-1}{2n+1})^{n(n-1)}$.

3. Quyidagi qatorlarning absolyut yaqinlashuvchiligi isbotlansin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\pi}{4n}$.

4. Quyidagi qatorlar yaqinlashishga tekshirilsin.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$.

29-MA'RUZA

Funksional qatorlar va ularning tekis yaqinlashuvchanligi

29.1. Funksional qator tushunchasi

Yuqoridagi 28-ma'ruzada har bir hadi haqiqiy son bo'lgan qatorlar o'rganiladi.

Endi har bir hadi x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lgan

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+,\ldots \qquad (1)$$

qatorni qaraymiz, bunda har bir $u_n(x)$ funksiya $(n=1,2,3,\ldots)$ biror $X(X\subset R)$ to'plamda aniqlangan. Odatda bunday qator funksional qator deyiladi. Masalan, ushbu

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots,$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2(x+2)^2}+\ldots+\frac{1}{n(x+2)^n}+\ldots$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}=\frac{\ln x}{1}+\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{\ln^3 x}{3}+\ldots+\frac{\ln^n x}{n}+\ldots$

qatorlar funksional qatorlar bo'ladi.

X to'plamdan olingan tayin x_0 nuqtani (1) dagi x ning o'rniga qo'yish bilan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ \ldots\ +u_n(x_0)+\ldots \qquad (2)$$

sonli qator hosil bo'ladi. Ravshanki, x ning turli qiymatlarida, turli sonli qatorlar hosil bo'ladi. Bunda x ning ba'zi qiymatlaridagi sonli qatorlar yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlaridagi esa uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Agar (2) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) funksional qator x_0 nuqtada yaqinlashuvchi, x_0 nuqta esa (1) funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deyiladi.

1-ta'rif. *(1) funksional qatorning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to'plam, funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.*

28-ma'ruzada keltirilgan yaqinlashish alomatlaridan foydalanib, funksional qatorlarning yaqinlashish sohalarini topish mumkin.

Masalan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

funksional qatorni qaraylik. Bu maxraji x ra teng bo'lgan geometrik qatordir. Demak, bu qator x ning $|x| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Bundan esa qaralayotgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi $(-1,1)$ intervaldan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Shuningdek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots \quad (x \geq 0)$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi $(1, +\infty)$ bo'ladi.

Endi (1) funksional qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi

$$u_1(x) + u_2(x) + \ \ldots \ + u_n(x)$$

ni olaylik. Uni (1) funksional qatorning qismiy yig'indisi deyiladi. Bu yig'indi x ga bog'liq bo'ladi:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

Ravshanki, (1) funksional qatorning yaqinlashish sohasidan olingan har bir x da $n \to \infty$ da $S_n(x)$ limitga ega bo'lib, bu limit olingan x ga bog'liq, ya'ni x ning funksiyasi bo'ladi. Uni $S(x)$ deylik. Demak,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x).$$

Bu $S(x)$ funksiya (1) funksional qatorning yig'indisi deyiladi va

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

kabi yoziladi.

Masalan, ushbu

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

funksional qator (maxraji x bo'lgan geometrik qator) $(-1,1)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \ldots\ +u_n(x)+u_{n+1}(x)+\ldots \qquad (1)$$

funksional qator M to'plamda $(M\subset R)$ yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \ldots\ +u_n(x)+u_{n+1}(x)+\ldots$$

Odatda ushbu

$$S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ \ldots$$

ayirma (1) qatorning n- qoldig'i deyiladi va $r_n(x)$ kabi belgilanadi:

$$r_n=S(x)-S_n(x).$$

Ma'lumki,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

bo'ladi.

29.2. Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchiligi

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

funksional qator M to'plamda $(M \subset R)$ yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x)$ bo'lsin.

2-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda shunday x ga bog'liq bo'lmagan $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ va ixtiyoriy $x \in M$ uchun*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

ya'ni

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Endi funksional qatorning tekis yaqinlashishini ta'minlaydigan, ayni paytda amaliyotda ko'p foydalaniladigan teoremani keltiramiz.

Teorema (Veyershtrass alomati). *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

funksional qatorning har bir hadi M to'plamda quyidagi

$$|u_n(x)| \le c_n \,, \ (\forall n \in N \,,\ \forall x \in M \text{ da}) \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa va

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \qquad (3)$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (1) funksional qator M to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Aytaylik, (3) sonli qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi C ga teng bo'lsin:

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n\right)=\lim_{n\to\infty}c_n.$$

Ravshanki,

$$r_n=C-c_n=c_{n+1}+c_{n+2}+\ldots$$

bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty}r_n=0$$

ya’ni $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$ topiladiki, $\forall n>n_0$ lar uchun

$$r_n<\varepsilon \quad (n>n_0) \tag{4}$$

bo‘ladi.

(2) tengsizlikka asosan

$$\forall n>n_0,\ \text{va}\ \forall x\in M\ \text{uchun}$$

$$|u_{n+1}(x)|+|u_{n+2}(x)|+\cdots\le c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots$$

bo‘lib,,

$$|r_n(x)|\le r_n \tag{5}$$

bo‘ladii. (4) va (5) munosabatlardan $\forall\varepsilon>0$, $\forall n>n_0$ va barcha $x\in M'$ uchun

$$|r_n(x)|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, funksional qator M da tekis yaqinlaashuvchi.►

1-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}=1+\frac{x^2}{2\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x^n}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

funksional qator tekis yaqinlashishga tekshirilsin.

◄ Berilgan qatorning umumiy hadi

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$$

bo‘lib, ; ixtiyoriy $x\in[-1,1]$ da

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{|x^n|}{n\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

sonli qator yaqinlashuvchi (qaralsin, 28-ma'ruza). Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan funksional qator $[-1,1]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

29.3. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

Ushbu paragrafda tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalarini isbotsiz keltiramiz.

Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsin.

1) *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *hadi* M *da uzluksiz bo'lib, qator* M *to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda funksional qatorning yig'indisi* $S(x)$ *funksiya* M *to'plamda uzluksiz bo'ladi.*

2) *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *hadi* $[a, b]$

segmentda uzluksiz bo'lib, qator shu segmentda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator hadlarining integrallaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{x}u_n(t)\,dt=\int_{a}^{x}u_1(t)\,dt+\int_{a}^{x}u_2(t)\,dt+\cdots$$

qator $[a,b]$ *da yaqinlashuvchi, uning yig'indisi* $\int_{a}^{b}S(x)\,dx$ *ga teng bo'ladi.*

3) *Agar*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

funksional qatorning har bir $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ *hadi* $[a,b]$ *segmentda uzluksiz* $u_n'(x)$ *hosilaga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

funksional qator $[a,b]$ *da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qator yig'indisi*

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

funksiya $[a,b]$ *da uzluksiz* $S'(x)$ *hosilaga ega va*

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

bo'ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}\quad(0\le x\le+\infty)$$

funksional qatorning yig'indisi topilsin.

◀ Ma'lumki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}$$

funksional qator $[0,+\infty)$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$S(x) = \frac{1}{1+x}$$

ga teng:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+1+x)}.$$

Ravshanki, bu qatorning har bir hadi $[0,+\infty)$ da uzluksiz. Demak, uni 2-xossaga ko'ra hadlab integrallash mumkin:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dt}{(n+t)(n+1+t)}.$$

Aniq integrallarni hisoblaymiz:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x),$$

$$\int_0^x \frac{1}{(n+t)(n+1+t)} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{n+t} - \frac{1}{n+1+t} \right) dt =$$

$$= \ln(n+t)\Big|_0^x - \ln(n+1+t)\Big|_0^x = \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)}.$$

Demak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(n+x)}{n(n+1+x)} = \ln(1+x). \blacktriangleright$$

Mashqlar

1. Ushbu

$$\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n+\ldots$$

funksional qator $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashishga tekshirilsin.

2. Ushbu

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\ldots+\frac{1}{1+x^{2n}}+\ldots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

3. Ushbu

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\cdot\sin^2 2x+\frac{1}{3^2}\cdot\sin^3 3x+\ldots+\frac{1}{n^2}\cdot\sin^n nx+\ldots$$

funksional qatorni $(-\infty,+\infty)$ oraliqda Veyershtrass alomatidan foydalanib tekis yaqinlashishi ko‘rsatilsin.

4. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (-1<x<1)$$

funksional qatorning yig‘indisi topilsin.

30-MA'RUZA

Darajali qatorlar

30.1. Darajali qatorlar, ularning yaqinlashish radiusi va yaqinlashish intervali

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (x \in R) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi funksional qator darajali qator deyiladi, bunda

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

haqiqiy sonlar darajali qatorning koeffitsiyentlari deyiladi.

(1) qator hadlari

$$u_n(x) = a_n x^n$$

bo'lgan funksional qatordir.

Masalan,

$$1)\ 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (x \in R),$$

$$2)\ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (x \in R),$$

$$3)\ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (x \in R),$$

qatorlar darajali qatorlar bo'ladi.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasini aniqlashda quyida keltiriladigan teorema muhim rol o'ynaydi.

Shuni aytish kerakki, har qanday darajali qator $x = 0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi.

1-teorema (Abel). *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator $x = x_0 \neq 0$ *nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa,* x *ning*

$$|x| < |x_0| \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni

$$\left(-|x_0|;|x_0|\right)$$

intervalda qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

◀Shartga ko'ra (1) qator $x = x_0 \neq 0$ da yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi. Unda sonli qatorning yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

bo'lib,

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M \quad (M = const)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \qquad (3)$$

Endi

$$|x| < |x_0|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x nuqtani olib,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \qquad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (5)$$

qatorlarni qaraymiz.

(5) qator geometrik qator sifatida (maxraji $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$) yaqinlashuvchi. (3) tengsizlikni e'tiborga olib, solishtirish teoremasidan foydalanib (4) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini topamiz. Demak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator $|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlarida, ya'ni $(-|x_0|;|x_0|)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. ▶

Natija. *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

darajali qator $x = x_1$ *nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsa, ya'ni*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots$$

sonli qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda x *ning*

$$|x| > |x_1|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarda, ya'ni ushbu to'plamda

$$(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *qator uzoqlashuvchi bo'ladi.*

Isbotlash mumkinki, ixtiyoriy (1) darajali qator uchun shunday chekli yoki cheksiz musbat r son mavjud bo'ladiki, x ning:

1) $|x| < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) darajali qator yaqinlashuvchi (absolyut yaqinlashuvchi),

2) $|x| > r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida (1) darajali qator uzoqlashuvchi,

3) $|x| = r$, ya'ni $x = -r$, $x = r$ da (1) darajali qator yoki yaqinlashuvchi, yoki uzoqlashvchi bo'ladi.

Odatda r son (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-r, r)$ interval esa darajali qatorning yaqinlashish intervali deyiladi.

(1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi ushbu

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (a_n \neq 0,\ n = 1,2,3...) \qquad (6)$$

formula yordamida topiladi.

Eslatma. *Agar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

darajali qator faqat bitta nuqtada yaqinlashuvchi (bu $x = 0$ *nuqta) bo'lsa, u holda* $r = 0$ *deb olinadi.*

Masalan.

$$1 + x + 2!x^2 + ... + n!x^n + ... \quad (x \in R),$$

darajali qator faqat $x = 0$ da yaqinlashuvchi. Bu qator uchun $r = 0$.

Agar darajali qator x ning ixtiyoriy qiymatlarida $(x \in (-\infty, \infty))$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$r = +\infty$$

deb olinadi.

Masalan,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (x \in R),$$

darajali qator x ning ixtiyoriy qiymatlarida $(x \in (-\infty, \infty))$ yaqinlashuvchi. Bu qator uchun $r = +\infty$.

1-Misol. *Ushbu*

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... \quad (x \in R),$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi hamda yaqinlashish intervali topilsin.

◀Bu darajali qator uchun

$$a_n = \frac{1}{n},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

bo‘lib, (6) formulaga ko‘ra

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

bo‘ladi. Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1$ bo‘lib, yaqinlashish intervali $(-1,1)$ bo‘ladi.

Ravshanki, $x=1$ da darajali qator

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik qator bo‘lib, u uzoqlashuvchi.

$x=-1$ da

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

bo‘lib, Leybnits teoremasiga ko‘ra bu qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $[-1,1)$ yarim intervaldan iborat.►

2-misol. *Ushbu*

$$\frac{x^0}{1\cdot 5^0}+\frac{x^1}{2\cdot 5^1}+\frac{x^2}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)5^n}+\ldots$$

darajali qatorning yaqinlashish sohasi topilsin.

◄Avval bu qatorning yaqinlashish radiusi hamda yaqinlashish intervalini topamiz.

Berilgan qator uchun

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)\cdot 5^{n+1}}$$

bo‘lib,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}:\frac{1}{(n+2)\cdot 5^{n+1}}=\frac{(n+2)5^{n+1}}{(n+1)5^n}=5\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right),$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}5\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=5$$

bo'ladi. Demak, qaralyotgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=5$, yaqinlashish intervali $(-5,5)$ bo'ladi.

$x=5$ da darajali qator

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik qator bo'lib, u uzoqlashuvchi,
$x=-5$ da esa darajali qator

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots$$

bo'lib, Leybnits teoremasiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi.

Shunday qilib, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi $[-5,5)$ bo'ladi.▶

30.2. Darajali qatorning xossalari

Aytaylik, ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsin.

3-teorema. *Agar (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali* $(-r,r)$ *bo'lsa,* $(r>0)$, *u holda* $(-r,r)$ *intervalga tegishli bo'lgan har qanday* $[-c,c]$ *segmentda* $(0<c<r)$ *(1) qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi* $([-c,c]\subset(-r,r))$.

◀Ravshanki, $c\in(-r,r)$. Binobarin, bu nuqtada ushbu qator

$$|a_0|+|a_1|\cdot c+|a_2|\cdot c^2+\ldots+|a_n|\cdot c^n+\ldots$$

yaqinlashuvchi bo'lib, $[-c,c]$ da

$$|a_n x^n|\le|a_n|\cdot c^n \qquad (n=0,1,2,3,..)$$

bo'ladi. Veyershtrass alomatiga ko'ra (1) qator $[-c,c]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.▶

Tekis yaqinlashuvchi darajali qatorlar tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi. Jumladan, (1) darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-r,r)$ bo'lib, uning yig'indisi $S(x)$ bo'lsa, u holda $[-c,c]$ segmentda $(0<c<r)$

1) $S(x)$ funksiya uzluksiz bo'ladi;

2) (1) darajali qatorni hadlab differensiallashdan hosil bo'lgan

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}=0+a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

darajali qator ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

bo'ladi;

3) (1) darajali qatorni hadlab integrallashdan hosil bo'lgan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_nx^n dx\right)=\int_a^b a_0dx+\int_a^b a_1xdx+\int_a^b a_2x^2dx+\ldots\int_a^b a_nx^ndx+\ldots$$

qator ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^ndx$$

bo'ladi $([a,b]\subset(-r,r))$.

3-misol. *Ushbu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots, \quad |x| < 1$$

darajali qator yig'indisi topilsin.

◀Quyidagi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

darajali qatorni qaraymiz. Bu qator $(-1,1)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$ ekanligi ma'lum (maxraji x bo'lgan geometrik qator):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Bu darajali qatorni hadlab differensiallab topamiz:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Keyingi tengliklardan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonini x ga ko'paytiramiz. Natijada

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

bo'ladi.▶

30.3. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Teylor qatori.

Yuqorida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

ko'rinishdagi darajali qatorlar o'rganildi. Ushbu

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

ko'rinishdagi qator ham darajali qator deyiladi, bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ hamda x_0 o'zgarmas sonlar.

Ravshanki, (2) umumiyroq darajali qator bo'lib, u $x - x_0 = t$ almashtirish yordamida (1) ko'rinishidagi qatorga keladi.

Agar r son $(r > 0)$ (2) darajali qatorning yaqinlashish radiusi bo'lsa, uning yaqinlashish intervali $(x_0 - r, x_0 + r)$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0 \in R$ nuqtaning $(x_0 - r, x_0 + r)$ atrofida istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Bu hol $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasini yozish imkonini beradi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$
$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x)$$

bunda $r_n(x)$-qoldiq had.

Modomiki, $f(x)$ funksiya $(x_0 - r, x_0 + r)$ da istalgan tartibdagi hosilaga ega ekan, unda quyidagi

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \ldots \qquad (3)$$

darajali qatorni qarash mumkin.

Bu darajali qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi, lekin x_0 nuqtadan farqli nuqtalarda qachon yaqinlashuvchi bo'ladi va yaqinlashuvchi bo'lganda uning yig'indisi qachon $f(x)$ funksiyaga teng bo'ladi degan savol paydo bo'ladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

4-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervalda istalgan tartibdagi hosilalarga ega bo'lib, barcha $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ va barcha $n = 0,1,2,\ldots$ lar uchun shunday o'zgarmas $M > 0$ topilsaki,*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya uchun $(-r, r)$ da $\left(f^{(0)}(x) = f(x)\right)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (3^*)$$

bo'ladi.

◄Modomiki, $(x_0 - r, x_0 + r)$ da $f(x)$ funksiya istalgan tartibli hosilalarga ega ekan, unda bu funksiya uchun Teylor formulasi o'rinli bo'ladi. Uning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini olamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \qquad (4)$$

bunda

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

Endi teoremaning shartidan foydalanib qoldiq hadni baholaymiz:

$$|r_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\le M\cdot\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (5)$$

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

musbat qatorni qaraymiz. Bu qator uchun

$$a_n=\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},\quad a_{n+1}=\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!}$$

bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot|x-x_0|^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|}{n+2}=0<1$$

bo'ladi. Dalamber alomatiga ko'ra qator yaqinlashuvchi. Unda qator yaqinlashishining zaruriy shartiga binoan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0 \qquad (6)$$

bo'ladi (5) va (6) munosabatlardan

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

(4) tenglikda, $n\to\infty$ da limitga o'tib topamiz:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]+\lim_{n\to\infty}r_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots .\ \blacktriangleright$$

(3) qator $f(x)$ funksiyaning Teylor qatori deyiladi.

(3^*) munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi deyiladi.

Agar (3^*) da $x_0=0$ bo'lsa, u

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (7)$$

bo'ladi va bu qator $f(x)$ funksiyaning Makloren qatori deyiladi.

30.4. Ba'zi sodda funksiyalarning Makloren qatori

1) Aytaylik, $f(x)=e^x$ bo'lsa, $\forall x\in[-p,p](p>0)$ iar uchun

$$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=e^0=1,$$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^p\quad n=0,1,2,\ldots$$

bo'lib, 4-teoremaga ko'ra

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad(0!=1).$$

bo'ladi. Agar bu munosabatda x ni $-x$ ga almashtirsak:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

bo'ladi.

Ma'lumki, giperbolik sinus hamda giperbolik kosinus funksiyalari quyidagicha

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ta'riflanar edi.

Yuqoridagi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

formulalardan foydalanib topamiz:

$$shx = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

2) Aytaylik, $f(x) = \sin x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

bo'lib,

$$k = 2n \text{ bo'lganda } f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = 0,$$

$$k = 2n+1 \text{ bo'lganda } f^{(k)}(0) = (-1)^n$$

bo'ladi. Ayni paytda barcha $x \in (-\infty, \infty)$ da

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

tengsizliklar bajariladi. 4-teoremadan foydalanib topamiz:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

3) Aytaylik, $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Bu holda yuqoridagiga

o‘xshash

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots \qquad x\in(-\infty,\infty)$$

bo‘ladi.

4) Endi $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$ va $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyalarning Makloren qatorlarini keltiramiz.

$x\in(-1,1)$ uchun

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (8)$$

$x\in(-1,1]$ uchun

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

bo‘ladi.

Natija. *Yuqoridagi (8) munosabatdan foydalanib, α ning ba'zi xususiy qiymatlaridagi funksiyalarning yoyilmalarini keltiramiz:*

1)

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

2) $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

3) $$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1\cdot3\cdot x^3}{2\cdot4\cdot6}-\ldots$$

4) $$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{1\cdot3\cdot x^3}{2\cdot4\cdot6}-\ldots$$

30.5. Darajali qatorlarning taqribiy hisoblashlarga tatbiqlari

Ma'lumki, funksiya oliy matematikada o'rganiladigan asosiy tushuncha. Ko'pgina masalalar funksiyani hisoblash (berilgan nuqtadagi qiymatini topish) bilan bog'liq. Funksiyaning murakkab bo'lishi bunday hisoblashlarda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Natijada funksiyani sodda va hisoblashga qulay bo'lgan funksiya bilan taqribiy ifodalash zaruriyati paydo bo'ladi.

Odatda taqribiy ifodalovchi funksiya sifatida butun ratsional funksiya-ko'phad olinadi.

Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib, ularning qiymatlarini taqribiy ifodalovchi formulalarni hosil qilish mumkin.

Biz yuqorida $f(x)$ funksiya ma'lum shartlarni qanoatlantirganda uni darajali qatorga yoyilishini ko'rdik.

Jumladan,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

(Makloren qatori). Modomiki, $n\to\infty$ da

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)$$

da $r_n(x)\to 0$ bo'lar ekan, unda $x=0$ nuqtaning atrofida

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{9}$$

deyish mumkin. Bu taqribiy formuladan funksiyalarning qiymatlarini taqribiy hisoblashda foydalaniladi.

(9) formulani

$$f(x)=e^x;\ f(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x,$$

$$f(x)=\ln(1+x),\ f(x)=(1+x)^\alpha\quad(\alpha\in R)$$

funksiyalarga tatbiq etib topamiz:

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x \approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$\ln(1+x) \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

4-Misol. *Ushbu*

$$\alpha=\sin 1$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

◀ Agar

$$\sin x \approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

da $x=1$ deyilsa, unda

$$\sin 1 \approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

bo'ladi. Ma'lumki, 1 radian $\approx 57^0 18'$. Keyingi munosabatda ikkita had olinadigan bo'lsa, unda

$$\sin 1 \approx \sin 57^0 18' \approx 1-\frac{1}{3!}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

bo'ladi.▶

5-Misol. *Ushbu*

$$\alpha=\ln 1{,}1$$

miqdor hisoblansin.

◀ Ma'lumki,

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1).$$

Bu yerda $x = 0,1$ deyilsa,

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(0,1)^n}{n}$$

bo'ladi. Agar keyingi taqribiy tenglikning dastlabki uchta hadi olinsa, unda

$$\ln 1,1 \approx 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} \approx 0,0953$$

bo'lishini topamiz. ►

6-Misol. *Ushbu*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integral taqribiy hisoblansin.

◄ Ma'lumki,

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Bu munosabatda x ni $-x^2$ ga almashtirib topamiz:

$$e^{-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Keyingi munosabatning dastlabki to'rtta hadi olinib, so'ng $[0,1]$ bo'yicha integrallansa, natijada

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \approx 0,7428$$

bo'ladi. ►

Mashqlar

1. Ushbu

$$2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+\ldots+\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}+\ldots$$

qator yaqinlashishga tekshirilsin.

2. Ushbu

a) $f(x)=\sin^3 x$, b) $f(x)=\ln(1-x^2)$, d) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

funksiyalar Teylor qatoriga yoyilsin.

3. Ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} \qquad (x\in R)$$

qatorning yig‘indisi topilsin.

4. Ushbu

$$\sqrt[3]{130}$$

miqdor 0,001 aniqlikda hisoblansin.

5. Ushbu

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

integral 0,001 aniqlikda hisoblansin.

31-MA'RUZA

Furye qatorlari haqida dastlabki ma'lumotlar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da berilgan bo'lsin. Ma'lumki, shunday $T\in R\setminus\{0\}$ son topilsaki, $\forall x\in R$ da

$$f(x+T)=f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, $T\neq 0$ son esa uning davri deyiladi.

Agar $T\neq 0$ son $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda

$$kT\quad (k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ davriy funksiyalar bo'lib, $T\neq 0$ ularning davri bo'lsa,

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy bo'lib, ularning davri T ga teng bo'ladi.

$y=\sin x,\ y=\cos x$ funksiyalar $T=2\pi$ davrli funksiya bo'lgan holda ushbu

$$\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x\quad (a,b,\alpha-\text{ o'zgarmas, } \alpha\neq 0)$$

funksiya ham davriy funksiya bo'lib, uning davri $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)=a\cos\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]+b\sin\left[\alpha\left(x+\frac{2\pi}{\alpha}\right)\right]=$$

$$=a\cos(\alpha x+2\pi)+b\sin(\alpha x+2\pi)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x=\varphi(x)$$

bo'ladi.

Bu $\varphi(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x$ sodda davriy funksiya bo'lib, u garmonika deb ataladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lsin. Unda

$$f(x)\cos nx,\ f(x)\sin nx \quad (n=1,2,3,\dots)$$

funksiyalar ham $[-\pi,\pi]$ da uzluksiz bo'lib, ular $[-\pi,\pi]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Bu integrallarni quyidagicha belgilaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n=1,2,\dots) \qquad (1)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \quad (n=1,2,\dots)$$

Bu sonlardan foydalanib, ushbu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (2)$$

qatorni (uni trigonometrik qator deyiladi) hosil qilamiz.

(2) qator funksional qator bo'lib, uning har bir hadi garmonikadan iborat.

Ta'rif. *(2) funksional qator $f(x)$ funksiyaning Furye qatori deyiladi. (1) munosabatlar bilan aniqlangan*

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

sonlar Furye koeffitsiyentlari deyiladi.

Demak, berilgan $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari shu funksiyaga bog'liq bo'lib, (2) formulalar yordamida aniqlanadi, qator esa quyidagicha:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

belgilanadi.

1-misol. *Ushbu* $f(x)=e^{\alpha x}\ (-\pi\le x\le\pi,\ \alpha\ne 0)$ *funksiyaning Furye qatori topilsin.*

◀ (1) formulalardan foydalanib, berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha\pi}\left(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}\right)=\frac{2}{\alpha\pi}sh\alpha\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\cos nx+n\sin nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi\qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha\sin nx-n\cos nx}{\alpha^2+n^2}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{\alpha^2+n^2}sh\alpha\pi\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Demak,

$$f(x)=e^{\alpha x}$$

funksiyaning Furye qatori

$$f(x)=e^{\alpha x}\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{2sh\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}(\alpha\cos nx-n\sin nx)\right]$$

bo‘ladi.▶

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan juft funksiya bo‘lsin: $f(-x)=f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ juft, $f(x)\cdot\sin nx$ toq $(n=1,2,3,\ldots)$

funksiya bo‘ladi.

(1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] = 0 \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Demak, juft $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,\ldots)$$

bo'lib, Furye qatori

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ da berilgan toq funksiya bo'lsin:
$f(-x) = -f(x)$. U holda

$f(x)\cdot\cos nx$ toq, $f(x)\cdot\sin nx$ juft $(n = 1,2,3,\ldots)$ funksiya bo'ladi.

(1) formulalardan foydalanib, $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx + f(x)\cos nxdx\right] = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Demak, toq $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

bo‘lib, Furye qatori

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

bo‘ladi.

2-misol. *Ushbu*

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

juft funksiyaning Furye qatori topilsin.

◄ Avvalo berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nxdx = \frac{2}{\pi}x^2 \frac{\sin nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right) = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}. \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Demak, $f(x)=x^2$ funksiyaning Furye qatori

$$f(x)=x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

bo'ladi. ►

3-misol. *Ushbu*

$$f(x)=x\quad(-\pi\le x\le\pi)$$

toq funksiyaning Furye qatori topilsin.

◄Berilgan funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Demak, $f(x)=x$ funksiyaning Furye qatori

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

bo'ladi.►

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[-p,p]$ $(p>0)$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Ma'lumki, ushbu

$$t=\frac{\pi}{p}x$$

almashtirish $[-p,p]$ oraliqni $[-\pi,\pi]$ ga o'tkazadi, ya'ni x o'zgaruvchi $[-p,p]$ da o'zgarganda t o'zgaruvchi $[-\pi,\pi]$ da o'zgaradi. Endi

$$f(x)=f\left(\frac{p}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

deymiz. Unda $\varphi(t)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt, \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt \quad (n=1,2,\ldots)$$

ni topib, Furye qatorini yozamiz:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Modomiki,

$$t = \frac{\pi}{p}x$$

ekan, unda

$$\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{p}x + b_n \sin n\frac{\pi}{p}x\right),$$

bo'lib, uning koeffitsiyentlari

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right)\cos n\frac{\pi}{p}xdx, \quad (n=0,1,2\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\varphi\left(\frac{\pi}{p}x\right)\sin n\frac{\pi}{p}xdx. \quad (n=1,2\ldots)$$

bo'ladi. Natijada $[-p,p]$ da berilgan $f(x)$ funksiyaning Furye qatorini quyidagicha

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx \quad (n=0,1,2\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx \quad (n=1,2\ldots)$$

4-misol. *Ushbu*

$$f(x)=e^x \qquad (-1\le x\le 1)$$

funksiyaning Furye qatori topilsin.

◀ Yuqoridagi formulalardan foydalanib, $f(x)=e^x$ funksiyaning Furye koeffitsiyentilarini topamiz:

$$a_0=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1},\quad a_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi x dx=\frac{n\pi\sin n\pi x-\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(e\cos n\pi-e^{-1}\cos n\pi\right)=(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\quad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos n\pi x dx=\frac{\sin n\pi x-n\pi\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}e^x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{1+n^2\pi^2}\left(en\pi\cos n\pi+n\pi e^{-1}\cos n\pi\right)=$$

$$=\frac{n\pi(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e^{-1}-e\right)=(-1)^{n+1}\frac{e-e^{-1}}{1+n^2\pi^2}\quad (n=1,2,\ldots)$$

Demak,

$$f(x)=e^x\quad (-1\le x\le 1)$$

funksiyaning Furye qatori

$$e^x\sim\frac{e-e^{-1}}{2}+\left(e-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}n\pi\sin n\pi x\right]$$

bo'ladi.▶

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan bo'lsin. $[a,b]$ segment a_k nuqtalar yordamida bo'laklarga ajratilgan. $(a_0=a,\ a_n=b)$.

Agar har bir (a_k, a_{k+1}) $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ da $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, $x=a_k$ nuqtalarda chekli o'ng

$$f'(a_k+0)\quad (k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

va chap

$$f'(a_k - 0) \quad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

hosilalarga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da bo'lakli-differensiallanuvchi deyiladi.

Endi Furye qatorining yaqinlashuvchi bo'lishi haqida teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. *2π davrli $f(x)$ funksiya $[-\pi,\pi]$ oraliqda bo'lakli-differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning Furye qatori*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$[-\pi,\pi]$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

ga teng bo'ladi.

5-misol. *Ushbu*

$$f(x) = \cos ax \quad (-\pi \le x \le \pi,\ a \ne n \in Z)$$

funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.

◀ Bu funksiyaning Furye koeffitsiyentlarini topamiz. Qaralayotgan funksiya juft bo'lgani uchun

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\dots)$$

bo'lib,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \int_0^{\pi} [\cos(a-n)x + \cos(a+n)x] dx =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi} (-1)^n \left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right]$$

bo'ladi. Demak,

$$f(x) \sim \frac{\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \cos nx \right].$$

Agar $f(x) = \cos ax$ funksiya teoremaning shartlarini bajarishini e'tiborga olsak, unda

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right)\cos nx\right]$$

bo'lishini topamiz. ▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = 2\sin(2x+2)$$

garmonikaning grafigi topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

funksiyaning Furye qatori topilsin.

3. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & \text{agar } -\pi \le x \le 0 \text{ bo‘lsa,} \\ 0\,, & \text{agar } 0 < x < \pi \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.

4. Ushbu

$$f(x) = -\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| \quad (x \ne 2k\pi\,,\ k \in Z)$$

funksiyaning Furye qatori topilsin va u yaqinlashishga tekshirilsin.

MUNDARIJA

Nasriddin Jabborov,
Eshpo'lat Aliqulov,
Qunduz Axmedova

OLIY MATEMATIKA

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Ilmiy Kengashining 2008 yil 29 dekabrdagi 5-sonli yig'ilishi qaroriga ko'ra nashrga tavsiya etilgan.

Texnik muharrir: **M. Rahmatov**
Musahhih: **Sh. Do'stova**

Terishga 14.02.2010 yilda berildi. Bosishga 15.05.2010 ruxsat etildi.
Bichimi 84x108/16 Shartli bosma tabog'i 26.2.
Nashr bosma tabog'i 25.6. №33-buyurtma.
Adadi 300. Erkin narxda.

Qarshi davlat universiteti
kichik bosmaxonasida bosildi.

Qarshi shahri, Ko'chabog' ko'chasi, 17-uy